УДК 519.21; 368.212.2(076)
ББК 22.171я73+65.271я73
Б 81

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. В. М. Трактинська
канд. фіз.-мат. наук, доц. Н. І. Послайко

Б81 Бондаренко, Я.С. Посібник до вивчення курсу "Теорія ризику в страхуванні" [Текст] / Я.С. Бондаренко, Є.В. Турчин. — Д.: РВВ ДНУ, 2009. — 24 с.

Викладені основні поняття і факти теорії ризику в страхуванні. Наведена добірка задач для самостійної роботи.

Для студентів ДНУ спеціальностей "Статистика", "Математика", "Фінансова та актуарна математика".

1. Математична модель індивідуального ризику

Модель індивідуального ризику — найпростіша з моделей функціонування страхової компанії, за допомогою якої можна обчислити ймовірність банкрутства компанії. Вона базується на таких припущеннях:

1. Аналізується короткий проміжок часу (отже, можна знехтувати інфляцією та не враховувати прибуток від інвестування).

2. Число договорів страхування N фіксоване.

3. Плата за страховку вноситься на початку періоду страхування (ніяких надходжень протягом цього періоду немає), розрахунок проводиться в кінці.

4. Кожен договір страхування розглядається незалежно від інших, розподіл індивідуального позову X_i за i-м договором $(i = 1, 2, \ldots, N)$ відомий.

За наявності цих припущень імовірність банкрутства визначається сумарним позовом $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ до страхової компанії та величиною резервного капіталу компанії u.

Якщо сумарний позов S більший, ніж капітал компанії u, то компанія не зможе виконати свої зобов'язання і збанкрутує. Тому ймовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = P\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\right\}.$$

Розрахунок імовірності банкрутства.

У припущенні, що розподіли величин позовів $X_1, X_2, \ldots, X_N$ відомі й випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_N$ незалежні, розподіл суми $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ можна обчислити як згортку розподілів цих випадкових величин.

За відомим розподілом суми $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ ймовірність банкрутства компанії обчислюється так:

$$R = P\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\right\},$$

де u — капітал компанії.

Зазначимо, що в моделі індивідуального ризику величини позовів X_i, $i = 1, \ldots, N$ не можуть бути абсолютно неперервними, оскільки їх розподіли мають атоми в нулі.

Наближений метод розрахунку ймовірності банкрутства. Число договорів (застрахованих осіб) N, як правило, велике. Тому розподіл суми $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ як згортку розподілів випадкових величин зазвичай не обчислюють, а знаходять, застосовуючи центральну граничну теорему.

Згідно з центральною граничною теоремою для великих N як розподіл нормованої суми

$$\frac{S_N - MS_N}{\sqrt{DS_N}}$$

можна розглядати нормальний розподіл із параметрами (0;1). Тоді ймовірність банкрутства можна обчислити так:

$$R = P\left\{S_N > u\right\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS_N}{\sqrt{DS_N}}\right),$$

де $N_{0;1}(s)$ — значення функції нормального розподілу з параметрами (0;1) у точці s.

Задачі до теми

1.1. Портфель компанії складається з чотирьох однакових договорів страхування життя. Якщо смерть застрахованого настала внаслідок нещасного випадку, то нащадкам (наслідникам) виплачують 500 000 грн. Якщо смерть застрахованого настала в результаті природних причин, то страхова виплата дорівнює 250 000 грн у певній віковій категорії. Для кожного із застрахованих імовірність смерті через нещасний випадок дорівнює 0,1, ймовірність смерті у зв'язку з природними причинами дорівнює 0,1 і, отже, ймовірність дожиття дорівнює 0,8. Знайти залежність ймовірності банкрутства R від величини капіталу компанії u а) за методом згорток; б) методом генератрис.

1.2. Портфель компанії складається з двох договорів страхування будівель від пожежі. Вартість першої будівлі $c_1 = 1$ млн грн, а другої — $c_2 = 2$ млн грн. Імовірність пожежі на першому (другому) об'єкті протягом проміжку часу, який розглядається, є $q_1 = 0,2$ ($q_2 = 0,1$), а збитки від пожежі Y_1 (Y_2), якщо вона має місце, рівномірно розподілені від 0 до повної вартості об'єкта.

Знайти залежність імовірності банкрутства R від капіталу компанії u.

1.3. Страхова компанія уклала $N = 10\,000$ договорів страхування життя строком на один рік на таких умовах. У разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплачує спадкоємцям 1 млн грн, а в разі смерті протягом року внаслідок природних причин — 250 000 грн. Компанія не платить нічого, якщо застрахований не помре протягом року. Імовірність смерті через нещасний випадок одна й та ж для всіх застрахованих і дорівнює 0,0005. Імовірність смерті внаслідок природних причин залежить від віку. N застрахованих були розбиті на дві вікові групи, які містять $N_1 = 4\,000$ і $N_2 = 6\,000$ чоловік із імовірністю смерті протягом року $q_1 = 0,004$ і $q_2 = 0,002$ відповідно.

Підрахувати величину премії, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань із імовірністю 0,95.

Р о з в' я з а н н я. Для розрахунків зручно взяти 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум. Тоді розподіл індивідуального позову X_i за i-м договором ($i = 1, 2, \ldots, 4\,000$) першої групи договорів відомий і дорівнює $P\{X_i = 0\} = 0,9955$, $P\{X_i = 1\} = 0,004$, $P\{X_i = 4\} = 0,0005$. При цьому $X_1, X_2, \ldots, X_{4000}$ — незалежні випадкові величини, $m_1 = MX_i = 0,006$; $\sigma_1^2 = DX_i = 0,012$; $i = 1, 2, \ldots, 4\,000$.

Розподіл індивідуального позову X_j за j-м договором ($j = 1, 2, \ldots, 6\,000$) другої групи договорів відомий і дорівнює $P\{X_j = 0\} = 0,9975$, $P\{X_j = 1\} = 0,002$, $P\{X_j = 4\} = 0,0005$, при цьому $X_1, X_2, \ldots, X_{6000}$ — незалежні випадкові величини, $m_2 = MX_j = 0,004$; $\sigma_2^2 = DX_j = 0,01$; $j = 1, 2, \ldots, 6\,000$.

Математичне сподівання MS та дисперсія DS сумарного позову до компанії дорівнюють $MS = 4\,000 \cdot m_1 + 6\,000 \cdot m_2 = 48$, $DS = 4\,000 \cdot \sigma_1^2 + 6\,000 \cdot \sigma_2^2 = 107,76$.

Якими б не були принципи призначення страхових премій, страхова компанія в будь-якому випадку одержить одну й ту саму необхідну суму

$$l = x_{0,95}\sqrt{DS} = 1,645\sqrt{107,76} = 17,076,$$

де x_α — α-квантиль нормального розподілу.

Якщо суму l розподіляють пропорційно MX_i, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = kMX_i = x_{0,95}\frac{\sqrt{DS}}{MS}MX_i,$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,002135$, $p_1 = 0,008135$ або 2034 грн. Для другої групи договорів — $l_2 = 0,001423$, $p_2 = 0,005423$ або 1356 грн.

Якщо суму l розподіляють пропорційно DX_i, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = kDX_i = \frac{x_{0,95}}{\sqrt{DS}} DX_i,$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,001896$, $p_1 = 0,007896$ або 1974 грн. Для другої групи договорів $l_2 = 0,00158$, $p_2 = 0,00558$ або 1396 грн.

Якщо суму l розподіляють пропорційно $\sqrt{DX_i}$, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = k\sqrt{DX_i} = x_{0,95} \frac{\sqrt{DS}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{DX_i}} \sqrt{DX_i},$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,001801$, $p_1 = 0,007801$ або 1950 грн. Для другої групи договорів $l_2 = 0,001645$, $p_2 = 0,005645$ або 1411 грн.

1.4. Портфель страхової компанії складається з 1 800 договорів страхування життя строком на один рік. Страхові виплати поділяються на 2 групи розміром 100\$ і 200\$ для застрахованих з імовірностями настання страхового випадку 0,02 або 0,10 відповідно. У таблиці наведено кількість застрахованих n_k у кожній із чотирьох груп, що відповідає різним значенням страхової виплати b_k і ймовірності позову q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0,02	100\$	500
2	0,02	200\$	500
3	0,10	100\$	300
4	0,10	200\$	500

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

1.5. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

1.6. Клієнти компанії, що займається страхуванням автомобілів, поділяються на 2 групи.

Група	Кількість у групі	Імовірність позову	Параметри зрізаного експоненціального розподілу	
k	n_k	q_k	λ	L
1	500	0,10	1	2,5
2	2000	0,05	2	5,0

Величина дійсно висунутого позову має зрізаний експоненціальний розподіл, який задається функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } 0 \le x < L; \\ 1, & \text{якщо } x \ge L. \end{cases}$$

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

1.7. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

1.8. Портфель страхової компанії складається з 16 000 договорів страхування життя строком на один рік. Далі наведено кількість застрахованих n_k у кожній з п'яти груп з різними значеннями страхової виплати b_k і ймовірності позову q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0,01	10 000 грн	8000
2	0,02	20 000 грн	3500
3	0,03	30 000 грн	2500
4	0,05	50 000 грн	1500
5	0,1	100 000 грн	500

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

1.9. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

1.10. Компанія, що займається страхуванням від пожеж, застрахувала 160 будинків, які можна розділити на 5 груп згідно з вартістю будинку.

Група	Кількість договорів	Вартість будинку
1	80	10 000$
2	35	20 000$
3	25	30 000$
4	15	50 000$
5	5	100 000$

Імовірність пожежі для кожного будинку одна й та ж і дорівнює 0,04. Збитки від пожежі Y, якщо вона має місце, рівномірно розподілені від 0 до повної вартості будинку. Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

1.11. Портфель компанії складається з 32 договорів страхування життя на один рік. Імовірність позову за кожним договором дорівнює 1/6, а величина дійсно висунутого позову Y має щільність

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{якщо } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{якщо } y \notin (0; 1). \end{cases}$$

Позначимо через S величину сумарного позову до компанії. Оцінити $P\{S > 4\}$, застосовуючи гауссівське наближення.

2. Математична модель колективного ризику

Модель колективного ризику застосовується для обчислення ймовірності банкрутства страхової компанії. Вона будується за таких припущень:

1. Аналізується фіксований короткий інтервал часу (так що можна знехтувати інфляцією і не враховувати прибуток від інвестування).

2. Плата за страховку вноситься на початку періоду страхування, розрахунок проводиться в кінці, надходження протягом цього періоду відсутні.

3. Позови $Y_1, Y_2, \ldots$, що надходять до компанії, не пов'язані з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Інакше кажучи, Y_i — i-й реально пред'явлений позов, а не позов за i-м договором. Випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні, однаково розподілені й не мають атома в нулі.

4. Випадкова величина ν — загальне число позовів за період страхування та випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні.

У моделі колективного ризику, як і в моделі індивідуального, ймовірність банкрутства R на даному інтервалі часу визначається сумарним позовом $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до страхової компанії та її капіталом u:

$$R = P\{S_\nu > u\}.$$

Розрахунок імовірності банкрутства.

Якщо випадкові величини Y_i дискретні, то ймовірність банкрутства

$$R = \sum_{k=u+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n. \tag{2.1}$$

Якщо випадкові величини Y_i абсолютно неперервні ($f_{S_n}(t)$ — щільність розподілу S_n), то ймовірність банкрутства

$$R = \int_u^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n f_{S_n}(x) \right) dx. \tag{2.2}$$

Числові характеристики сумарного позову.

Нехай $\pi(z)$ — генератриса числа позовів ν, а $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа величини Y_i пред'явленого позову. Перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν

$$\Phi(s) = Me^{-sS_\nu} = \pi(\varphi(s)). \tag{2.3}$$

Якщо пред'явлені позови Y_i мають дискретний розподіл, то сумарний позов S_ν також дискретний. Нехай генератриса випадкової величини Y_i дорівнює $g(z)$. Генератриса сумарного позову S_ν

$$G(z) = \pi(g(z)). \tag{2.4}$$

Математичне сподівання сумарного позову S_ν

$$MS_\nu = M\nu MY_i. \tag{2.5}$$

Дисперсія сумарного позову S_ν:

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_i M\nu. \tag{2.6}$$

Складений пуассонів розподіл.

Означення. Нехай $Y_i, i = 1, 2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з розподілом F (функцією розподілу $F(x)$), ν — пуассонова випадкова величина з параметром λ, яка не залежить від Y_i. Розподіл випадкової величини

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$$

називатимемо *складеним пуассоновим розподілом* із параметрами $(\lambda, F(x))$.

Іншими словами, невід'ємна випадкова величина S_ν має *складений пуассонів розподіл*, якщо її перетворення Лапласа $\Phi(s)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(s) = e^{\lambda(\varphi(s)-1)}, \tag{2.7}$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа деякого ймовірнісного розподілу F, зосередженого на $[0, +\infty)$.

Математичне сподівання MS_ν та дисперсія DS_ν сумарного позову для складеного пуассонового розподілу дорівнюють [див. (2.5), (2.6)]

$$MS_\nu = M\nu MY_i = \lambda MY_i,$$

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_i M\nu = \lambda(DY_i + (MY_i)^2) = \lambda MY_i^2.$$

Складений від'ємний біномний розподіл.

Означення. Нехай Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$, випадкова величина ν має від'ємний біномний розподіл з параметрами (p, α). Розподіл випадкової величини

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$$

називається *складеним від'ємним біномним розподілом* із параметрами $(p; \alpha; F(x))$.

Іншими словами, невід'ємна випадкова величина S_ν має *складений від'ємний біномний розподіл із параметрами* $(p; \alpha; F(x))$, якщо її перетворення Лапласа $\Phi(s)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(s) = \left(\frac{p}{1 - \varphi(s)q}\right)^{\alpha}, \tag{2.8}$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа деякого ймовірнісного розподілу F, зосередженого на $[0, +\infty), p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1$.

Математичне сподівання MS_ν та дисперсія DS_ν сумарного позову S_ν для складеного від'ємного біномного розподілу дорівнюють

$$MS_\nu = M\nu MY_i = \frac{\alpha q}{p} MY_i,$$

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_i M\nu = \frac{\alpha q}{p^2}(MY_i)^2 + DY_i \frac{\alpha q}{p}.$$

Як і для моделі індивідуального ризику, у моделі колективного ризику основним є гауссівське наближення.

Приклад 2.1. *За фіксований короткий проміжок часу число позовів ν до страхової компанії має пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 0,8$. У випадку, якщо позов пред'явлений, його величина дорівнює 1 або 2 або 3 з імовірностями 0,25; 0,375 та 0,375 відповідно. Обчислити розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до компанії.*

Р о з в' я з а н н я. Спочатку знайдемо розподіл кожної з випадкових величин Y_1,$Y_1 + Y_2$, $Y_1 + Y_2 + Y_3$ і т.д.

Випадкові величини $Y_i, i = 1, 2, \ldots$ мають розподіл

1	2	3
0,25	0,375	0,375

Тоді розподіл суми $Y_1 + Y_2$ знаходимо як згортку розподілів Y_1 та Y_2:

2	3	4	5	6
0,0625	0,1875	0,3281	0,2813	0,1406

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3$:

3	4	5	6	7	8	9
0,0156	0,0703	0,1758	0,2637	0,2637	0,1582	0,0527

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ має вигляд

4	0,0039	9	0,2373
5	0,0234	10	0,1714
6	0,0762	11	0,0791
7	0,1582	12	0,0198
8	0,2307		

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$:

5	0,001	11	0,2184
6	0,0073	12	0,1730
7	0,0293	13	0,0989
8	0,0769	14	0,0371
9	0,1456	15	0,0074
10	0,2052		

і т.д.

Розподілом числа позовів ν до страхової компанії є пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 0,8$:

$$\pi_i = P\{\nu = i\} = \frac{(0,8)^i}{i!} e^{-0,8}, \;\; i = 0, 1, \ldots \text{ або}$$

0	1	2	3	4	5	...
0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	...

Тоді розподілом сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ є складений пуассонів розподіл. Знайдемо його. Маємо

$$P\{S_\nu = k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = k\} P\{\nu = n\}, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Звідси одержимо

$$P\{S_\nu = 0\} = 0,4493; \quad P\{S_\nu = 1\} = 0,08987;$$

$$P\{S_\nu = 2\} = 0,14379; \quad P\{S_\nu = 3\} = 0,16236;$$

$$P\{S_\nu = 4\} = 0,04991; \quad P\{S_\nu = 5\} = 0,04736;$$

і т.д.

Отже, розподіл S_ν дорівнює

0	1	2	3	4	5	...
0,4493	0,08987	0,14379	0,16236	0,04991	0,04736	...

Задачі до теми

2.1. За фіксований короткий проміжок часу портфель договорів страхової компанії може породити 0, 1, 2 або 3 позови з імовірностями 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 відповідно. У випадку, якщо позов пред'явлений, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з ймовірностями 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Визначити залежність імовірності банкрутства R від капіталу компанії u. Розв'язати задачу двома способами: а) за методом генератрис; б) методом згорток.

2.2. Нехай число позовів ν за фіксований проміжок часу має геометричний розподіл з параметром p :

$$\pi_n = P\{\nu = n\} = p(1-p)^{n-1}, \ \ n = 1, 2, \ldots ,$$

а величини позовів розподілені показниково з параметром λ :

$$F_{Y_i}(x) = P\{Y_i < x\} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \ \ (\lambda > 0). \end{cases}$$

Знайти залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії. Задачу розв'язати двома способами: а) за допомогою перетворення Лапласа; б) за методом згорток.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу за допомогою перетворення Лапласа.

Генератриса числа позовів ν дорівнює

$$\pi(z) = Mz^{\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p z^n = \frac{zp}{1 - z(1-p)}.$$

Перетворення Лапласа величини позову має вигляд

$$\varphi(s) = Me^{-sY_i} = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{s + \lambda}.$$

Згідно з (2.3) перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν дорівнює

$$\Phi(s) = \pi(\varphi(s)) = \frac{\varphi(s)p}{1 - \varphi(s)(1-p)} = \frac{\lambda p}{s + \lambda p}.$$

Останнє є перетворенням Лапласа експоненціального розподілу з параметром λp:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda p e^{-\lambda p x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R(u) = \int\limits_u^{+\infty} f(x) dx = e^{-\lambda p u}.$$

2.3. За фіксований короткий проміжок часу портфель договорів страхової компанії може породити 0, 1, 2 або 3 позови з імовірностями 0,1; 0,3; 0,4; 0,2 відповідно. У випадку, якщо позов пред'явлений, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з ймовірностями 0,5; 0,4 та 0,1 відповідно. Визначити залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії. Розв'язати задачу двома способами: а) за методом згорток; б) методом генератрис.

2.4. Величина позову у випадку його пред'явлення до страхової компанії дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 0,5; 0,4 та 0,1 відповідно. Число позовів ν до страхової компанії має пуассонів розподіл з середнім 1,7. Знайти розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до компанії. Обчислити MS_ν, DS_ν.

2.5. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметрами $(\lambda, F(x))$, де $\lambda = 2$, а

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,1, & 1 < x \le 2, \\ 0,3, & 2 < x \le 3, \\ 0,6, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти розподіл сумарного позову S_ν. Обчислити MS_ν, DS_ν.

2.6. Число позовів ν до страхової компанії має від'ємний біномний розподіл з параметрами $\alpha = 3$, $p = 1/2$. Якщо позов пред'явлений, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Обчислити розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + \ldots + Y_\nu$ до компанії. Знайти MS_ν, DS_ν.

3. Динамічна модель банкрутства

Означення. *Характеристичним коефіцієнтом (коефіцієнтом Лундберга, або коефіцієнтом Крамера)* називають додатній розв'язок характеристичного рівняння

$$Me^{zY_i} = 1 + (1+\theta)mz, \tag{3.1}$$

де $m = MY_i$ — середня величина поданого позову, θ — відносна страхова надбавка, яка визначається згідно з формулою

$$c = (1+\theta)\lambda m, \tag{3.2}$$

де c — швидкість надходження премій (сума грошей за одиницю часу), λ — інтенсивність процесу позовів (за одиницю часу висувається в середньому λ позовів).

Нерівність Лундберга для визначення ймовірності банкрутства.

$$R(u) \leq e^{-ru}, \tag{3.3}$$

де r — характеристичний коефіцієнт.

Теорема 3.1. *(теорема Крамера–Лундберга). При* $u \to \infty$

$$R(u) \sim \frac{\theta m}{\psi'(r) - (1+\theta)m} e^{-ru}, \tag{3.4}$$

де $\psi(z) = Me^{zY_i} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{MY_i^k}{k!}$ *— генератриса нормованих моментів.*

Нерівність Лундберга (3.3) та асимптотика Крамера–Лундберга (3.4) свідчать про те, що ймовірність банкрутства мала, якщо значення характеристичного коефіцієнта велике.

Характеристичний коефіцієнт r, який включає основні параметри моделі (λ — інтенсивність надходження позовів, $F(x)$ — розподіл величин позовів, c — швидкість надходження премій), є інтегральною характеристикою фінансової безпеки компанії.

Точний розрахунок імовірності банкрутства. Перетворення Лапласа ймовірності банкрутства має вигляд

$$\rho(s) = \frac{1 - \varphi(s) - ms}{s(1 - \varphi(s) - (1+\theta)ms)}, \tag{3.5}$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа величини позову Y_i.

Для величини позову з даним розподілом можна в явному вигляді знайти функцію $\varphi(s)$, а також і функцію $\rho(s)$.

За виразом для $\rho(s)$ можна знайти (аналітично або чисельно) обернене перетворення Лапласа, а також у явному вигляді залежність ймовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкового резерву u.

Задачі до теми

3.1. Знайти характеристичний коефіцієнт, якщо розподіл величин позовів є експоненціальним з параметром $\beta = 1/m$. Відносна страхова надбавка θ вважається відомою.

3.2. Знайти ймовірність банкрутства $R(u)$, якщо величина позову має експоненціальний розподіл з параметром $\beta = 1/m$. Відносна страхова надбавка θ вважається відомою.

3.3. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 2$, швидкість надходження премій $c = 1$. Величина позову, що надходить, з імовірністю $1/4$ має експоненціальний розподіл із середнім $1/2$, а з імовірністю $3/4$ — експоненціальний розподіл із середнім $1/4$. Знайти характеристичний коефіцієнт r.

3.4. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 3$, швидкість надходження премій $c = 1$, а позов, який надходить, з імовірністю $1/9$ має експоненціальний розподіл із середнім $1/3$, а з імовірністю $8/9$ — експоненціальний розподіл із середнім $1/6$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u.

3.5. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 3$, швидкість надходження премій $c = 1$. Величина позову, що надходить до страхової компанії, з імовірністю $1/2$ має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda_1 = 3$ і з імовірністю $1/2$ — експоненціальний розподіл з параметром $\lambda_2 = 7$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u. Обчислити відносну похибку від заміни $R(u)$ оцінкою Лундберга, асимптотикою Крамера–Лундберга.

3.6. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 5$, швидкість надходження премій $c = 1$, а величина позову, що надходить, з імовірністю $1/10$ має експоненціальний розподіл із середнім $m_1 = 1/2$ і з імовірністю $9/10$ — експоненціальний розподіл із середнім $m_2 = 1/10$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u. Обчислити відносну похибку в результаті заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга, асимптотикою Крамера–Лундберга.

3.7. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 1$, швидкість надходження премій $c = 5$. Величина позову, що надходить, має гамма-розподіл з параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 3/4$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u.

3.8. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 2$, швидкість надходження премій $c = 9$. Величина позову, що надходить, має гамма-розподіл з параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 5/6$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u.

3.9. Залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u визначається рівністю

$$R(u) = 0,3e^{-2u} + 0,2e^{-4u} + 0,1e^{-7u}, \quad u \geq 0.$$

Обчислити відносну страхову надбавку θ.

3.10. Величина позову, що надходить до страхової компанії, має розподіл $P\{X = 1\} = 1/4$, $P\{X = 2\} = 3/4$. Обчислити відносну страхову надбавку θ, якщо характеристичний коефіцієнт $r = \ln 2$.

3.11. Величина позову, що надходить до страхової компанії, має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 3$. Обчислити відносну страхову надбавку θ, якщо характеристичний коефіцієнт $r = 1$.

4. Вказівки до розв'язування задач

1.1. Для розрахунків зручно взяти 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум. Розподіл суми $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ дорівнює

u	$P\{S = u\}$	u	$P\{S = u\}$
0	0,4096	5	0,0100
1	0,2048	6	0,0038
2	0,2432	7	0,0004
3	0,0800	8	0,0001
4	0,0481		

Залежність ймовірності банкрутства R від капіталу компанії u дається формулою $R(u) = P\{S > u\}$ (див. також таблицю нижче).

u	R	u	R
0	0,5904	5	0,0043
1	0,3856	6	0,0005
2	0,1424	7	0,0001
3	0,0624	8	0
4	0,0143		

1.2. Візьмемо 1 млн грн за одиницю виміру грошових сум. Позначимо через I_1, I_2 індикатори подій "пожежа відбулася на i-му об'єкті", $i = 1, 2$.

Тоді $P\{I_1 = 1\} = q_1 = 0,2$, $P\{I_1 = 0\} = 1 - q_1 = 0,8$, $P\{I_2 = 1\} = q_2 = 0,1$, $P\{I_2 = 0\} = 1 - q_2 = 0,9$. Індивідуальні позови за договорами дорівнюють $X_1 = I_1 Y_1$, $X_2 = I_2 Y_2$ відповідно, при цьому події I_1, I_2 незалежні.

Обчислимо ймовірність банкрутства $R = P\{X_1 + X_2 > u\}$, застосовуючи формулу повної ймовірності. За повну групу подій розглянемо $H_1 = \{I_1 = 0, I_2 = 0\}$, $H_2 = \{I_1 = 1, I_2 = 0\}$, $H_3 = \{I_1 = 0, I_2 = 1\}$, $H_4 = \{I_1 = 1, I_2 = 1\}$.

Тоді

$$R = P\{X_1 + X_2 > u\} = P\{X_1 + X_2 > u \,|H_1\}P\{H_1\}+$$

$$+P\{X_1 + X_2 > u \,|H_2\}P\{H_2\} + P\{X_1 + X_2 > u \,|H_3\}P\{H_3\}+$$

$$+P\{X_1 + X_2 > u \,|H_4\}P\{H_4\} =$$

$$= P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 0,\, I_2 = 0\}(1 - q_1)(1 - q_2)+$$

$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 1,\, I_2 = 0\}q_1(1 - q_2)+$$

$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 0,\, I_2 = 1\}(1 - q_1)q_2+$$

$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 1,\, I_2 = 1\}q_1q_2 =$$

$$= P\{Y_1 > u\}q_1(1-q_2)+P\{Y_2 > u\}(1-q_1)q_2+P\{Y_1+Y_2 > u\}q_1q_2. \tag{4.1}$$

Зазначимо, що

$$P\{Y_1 > u\} = 1 - P\{Y_1 < u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1 - u, & \text{якщо } 0 < u \le 1, \\ 0, & \text{якщо } u > 1, \end{cases}$$

$$P\{Y_2 > u\} = 1 - P\{Y_2 < u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1 - u/2, & \text{якщо } 0 < u \le 2, \\ 0, & \text{якщо } u > 2, \end{cases}$$

$$P\{Y_1 + Y_2 > u\} = \int\limits_u^{+\infty} f_{Y_1+Y_2}(x)dx,$$

де щільність суми $Y_1 + Y_2$ знаходиться як згортка щільностей:

$$f_{Y_1+Y_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(x - y)f_{Y_2}(y)dy =$$

$$= \int_{x-2}^{x} f_{Y_1}(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x/2, & \text{якщо } 0 \le x < 1, \\ 1/2, & \text{якщо } 1 \le x < 2, \\ (3-x)/2, & \text{якщо } 2 \le x < 3, \\ 0, & \text{якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

Тоді

$$P\{Y_1 + Y_2 > u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1 - u^2/4, & \text{якщо } 0 \le u < 1, \\ 5/4 - u/2, & \text{якщо } 1 \le u < 2, \\ (3-u)^2/4, & \text{якщо } 2 \le u < 3, \\ 0, & \text{якщо } u \ge 3. \end{cases}$$

Згідно з (4.1) імовірність банкрутства дорівнює

$$R(u) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u < 0, \\ 0,28 - 0,22u - 0,005u^2, & \text{якщо } 0 \le u \le 10^6, \\ 0,105 - 0,05u, & \text{якщо } 10^6 \le u \le 2 \cdot 10^6, \\ 0,045 - 0,03u + 0,005u^2, & \text{якщо } 2 \cdot 10^6 \le u \le 3 \cdot 10^6, \\ 0, & \text{якщо } u \ge 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

1.4. Мінімальний капітал компанії має бути не менший 18632\$.

1.5. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 2,33\$$, $p_2 = 4,66\$$, $p_3 = 11,65\$$, $p_4 = 23,29\$$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні дисперсіям DX_i, то $p_1 = 2,20\$$, $p_2 = 4,81\$$, $p_3 = 10,93\$$, $p_4 = 23,70\$$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні середньоквадратичним відхиленням $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 2,61\$$, $p_2 = 5,23\$$, $p_3 = 11,32\$$, $p_4 = 22,63\$$.

1.6. Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж $u = 113,59$.

1.7. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 0,109$ од., $p_2 = 0,03$ од.; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні дисперсіям DX_i, то $p_1 = 0,112$ од., $p_2 = 0,029$ од.; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 0,105$ од., $p_2 = 0,031$ од.

1.8. Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж 1460,4487 або 14 604 487 грн.

1.9. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 110,64$ грн, $p_2 = 442,56$ грн, $p_3 = 995,76$ грн,

$p_4 = 2766$ грн, $p_5 = 11064$ грн; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні DX_i, то $p_1 = 101,91$ грн, $p_2 = 415,11$ грн, $p_3 = 950,46$ грн, $p_4 = 2728,8$ грн, $p_5 = 11\,734,03$ грн; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 122,58$ грн, $p_2 = 463,53$ грн, $p_3 = 1016,12$ грн, $p_4 = 2747,26$ грн, $p_5 = 10680,69$ грн.

1.10. Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж $u = 137\,968,6$ \$.

1.11.

$$P\{S > 4\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{4 - MS}{\sqrt{DS}}\right) = 0,0062.$$

2.1.

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,8	5	0,0230
1	0,62	6	0,0055
2	0,386	7	0,0010
3	0,1904	8	0,0001
4	0,074	9	0,0000

2.3. Розподіл сумарного позову S_ν дорівнює

k	$P\{S_\nu = k\}$	k	$P\{S_\nu = k\}$
0	0,1	5	0,0950
1	0,15	6	0,0408
2	0,22	7	0,0126
3	0,215	8	0,0024
4	0,164	9	0,0002

Імовірність банкрутства

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,9	5	0,0560
1	0,75	6	0,0152
2	0,53	7	0,0026
3	0,315	8	0,0002
4	0,151	9	0,0000

2.4. Розподіл сумарного позову S_ν дорівнює

0	1	2	3	4	5	...
0,1827	0,1553	0,1902	0,1553	0,1175	0,0816	...

$MS_\nu = \lambda MY_i = 2,72;\;\; DS_\nu = \lambda MY_i^2 = 5,1.$

2.6. Застосуємо рекурентні формули для розрахунку складеного від'ємного біномного розподілу:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \left(q + \frac{(\alpha-1)q}{n}\, i \right) p_i P_{n-i}, \;\; n = 1, 2, \ldots; \quad P_0 = p^\alpha,$$

де $P\{Y_i = k\} = p_k, \; k = 0, 1, \ldots$

Маємо

$$P_0 = p^3 = 0,125;$$

$$P_1 = 3qp_1P_0 = 0,1125;$$

$$P_2 = 2qp_1P_1 + 3qp_2P_0 = 0,1237;$$

$$P_3 = 0,12; \quad P_4 = 0,1052; \quad P_5 = 0,0902 \quad \text{і т. д.}$$

$MS_\nu = 4,5;\;\; DS_\nu = 14,85.$

3.1. $r = \dfrac{\theta}{(1+\theta)m}.$

3.2. $R(u) = e^{-ru}/(1+\theta)$, де $r = \dfrac{\theta}{(1+\theta)m}.$

3.3. $r = 1.$

3.4. Перетворенням Лапласа $\varphi(s)$ величини позову є

$$\varphi(s) = \frac{3}{9(s+3)} + \frac{48}{9(s+6)} = \frac{17s+54}{3(s+3)(s+6)},$$

середнє значення величини позову дорівнює $m = 5/27$, відносна страхова надбавка $\theta = 4/5$.

Залежність ймовірності банкрутства $R(u)$ від величини капіталу u знаходиться оберненням перетворення Лапласа ймовірності банкрутства $\rho(s) = \dfrac{1}{9(s+4)} + \dfrac{4}{9(s+2)}$ і дорівнює $R(u) = e^{-4u}/9 + 4e^{-2u}/9$. Відносна похибка в результаті заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга дорівнює $\dfrac{5}{9} - \dfrac{e^{-2u}}{9}$, для асимптотики Крамера–Лундберга — $e^{-2u}/4$.

3.5. $R(u) = 24e^{-u}/35 + e^{-6u}/35; r = 1.$

3.6. $R(u) = \dfrac{4}{25}e^{-6u} + \dfrac{27}{50}e^{-u}$. Відносна похибка внаслідок заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга дорівнює $\dfrac{23}{50} - \dfrac{4e^{-5u}}{25}$, для асимптотики Крамера–Лундберга — $\dfrac{8}{27}e^{-5u}$.

3.7. Перетворення Лапласа $\varphi(s)$ величини позову дорівнює $\varphi(s) = 9/(4s+3)^2$, середнє значення величини позову

$m = \alpha/\beta = 8/3$, відносна страхова надбавка $\theta = \dfrac{c}{\lambda m} - 1 = 7/8$. Оберненням перетворення Лапласа ймовірності банкрутства

$$\rho(s) = \frac{16}{3} \cdot \frac{9+8s}{104s+21+80s^2} = -\frac{1}{20s+21} + \frac{7}{3(4s+1)}$$

знаходимо залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини капіталу u:

$$R(u) = -\frac{1}{20}e^{-21u/20} + \frac{7}{12}e^{-u/4}.$$

3.8. $m = 12/5$; $\theta = 7/8$.

3.9. Застосуємо те, що $R(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$. Звідси $\theta = 2/3$.

3.10. Відносну страхову надбавку θ знайдемо з характеристичного рівняння $Me^{zX} = 1 + (1+\theta)mz$, де $m = MX = 1,75$, $Me^{zX} = \frac{1}{4}e^z + \frac{3}{4}e^{2z}$. Маємо

$$\frac{1}{4}e^z + \frac{3}{4}e^{2z} = 1 + (1+\theta)\frac{7}{4}z.$$

Характеристичний коефіцієнт $r = \ln 2$ є розв'язком характеристичного рівняння, тому

$$\frac{1}{4}e^r + \frac{3}{4}e^{2r} = 1 + (1+\theta)\frac{7}{4}r.$$

Звідси $\theta \approx 1,061$.

3.11. Відносна страхова надбавка θ є розв'язком характеристичного рівняння:

$$Me^{rY} = 1 + (1+\theta)MY \cdot r,$$

де $MY = 1/\lambda = 1/3$, $Me^{zY} = \psi(z) = \varphi(-z) = \frac{3}{-z+3}$. Маємо

$$\frac{3}{-r+3} = 1 + (1+\theta)\frac{r}{3},$$

де $r = 1$ за умовою. Звідси $\theta = 1/2$.

Список рекомендованої літератури

Бондаренко, Я. С. Теорія ризику в страхуванні [Текст] / Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин. — Д.: РВВ ДНУ, 2008. — 112 с.

Гихман, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К.: Вища шк., 1988. — 440 с.

Фалин, Г. И. Математический анализ рисков в страховании [Текст] / Г. И. Фалин. — М.: Рос. юрид. издат. дом, 1994. — 130 с.

Фалин, Г. И. Актуарная математика в задачах [Текст] / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с.

Фалин, Г. И. Введение в актуарную математику (математические модели в страховании) [Текст]: учеб. пособие / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — 110 с.

Actuarial Mathematics [Text] / N. L. Bowers [et al.]. — Itasca, 1986. — 624 p.

Currie, I. D. Loss Distributions [Text] / I. D. Currie. — Edinburgh: Heriot-Watt University, 1992. — 82 p.

Dickson, D. Insurance Risk and Ruin [Text] / D. Dickson. — Cambridge University Press, 2005. — 242 p.

Gerber, H. U. An Introduction to Mathematical Risk Theory [Text] / H. U. Gerber. — Philadelphia: S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, 1979. — 164 p.

Темплан 2009, поз. 20

Навчальне видання

Яна Сергіївна Бондаренко
Євген Валерійович Турчин

Посібник до вивчення курсу
“Теорія ризику в страхуванні”

Редактор А.Я. Пащенко
Техредактор Л.П. Замятіна
Коректор А.А. Гриженко

Підписано до друку 27.05.09. Формат $60 \times 84/16$. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 1,3. Обл.-вид. арк. 1,2. Ум. фарбовідб. 1,3. Тираж 100 пр. Зам. №

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050