Вказівки для виконання другої частини індивідуальної роботи та підготовки до другого модуля з дисципліни „Математика для економістів" для студентів групи ЕМ-09-1.

Спочатку треба вивчити вказані параграфи навчального посібника: С.О. Смирнов, О.Г. Яковенко, С.С. Криська „Математика для економістів", частина друга.

Тема 1 Границя функції та послідовності.

Розділ I, §1.16 (стор. 38–67), §1.22 (стор 98-100) приклади 17, 23, 24, 26, 28, 54, 60, 61, 66, 68, 81, 84, 92, 93, 95.

Тема 2. Похідні та диференціали першого та вищих порядків. Економічний зміст похідної. Еластичність функції:

Розділ I. §§1.7 (стор. 23-35), 1.9 (стор. 36-38), 1.11 (стор 41-42), 1.12, 1.13. (стор 47-52) §1.22 (стор. 103-105 NN 185, 186, 191, 195, 197, 198, 201, 215, 218, 221, 227, 233, 235, 238-240, 250, 254, 282, 284, 241-247, 345-350

Тема 3. Оптимізація в економіці.

Розділ I, §1.21 (стор. 88-96), §1.22 (стор 108-110) NN 372-379.

Тема Правило Лопіталя.

Розділ I. §1.15 (стор 54-58) §1.22 (стор 106), NN 300-302, 306-308, 310, 319, 321, 322, 324, 325.

Тема 4. Дослідження функції та побудова графіків.

Розділ I §1.20 (стор 79-88), §1.22 (стор 108), NN 362, 2), 363, 2), 364, 2) 367, 2).

Тема 5. Невизначений інтеграл.

Розділ II, §§ 2.1-2.6 (стор 120-158).

§ 2.13 (стор. 184-190) NN 25, 27, 28, 29, 36, 46, 48, 50, 55, 64, 71, 82, 84, 85, 87, 93, 102, 107, 139, 146, 147, 150, 184, 186, 192, 201, 216, 222, 235.

Приклади. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$. 2. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\, x^4\,dx$. 3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. 4. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+4}$.
5. $\int x\ln(x-1)\,dx$. 6. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. 7. $\int x^2\cos x\,dx$. 8. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$.
9. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$. 10. $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$. 11. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$. 12. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}+1}\,dx$.
13. $\int\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$. 14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$. 15. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$. 16. $\int\frac{dx}{2\sin^2x+\sin 2x}$. 17. $\int\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x}\,dx$.
18. $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$. 19. $\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}$. 20. $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$. 21. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. 22. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$
23. $\int\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$. 24. $\int \mathrm{ctg}^4 x\,dx$. 25. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$. 26. $\int\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.
27. $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 28. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$. 29. $\int\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt x}\,dx$. 30. $\int\frac{\ln x+1}{\ln x+2}\cdot\frac{dx}{x}$
31. $\int\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\,dx$. 32. $\int\frac{1-\sin\sqrt x}{\sqrt x}\,dx$. 33. $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ $\left(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3}{4}\pi\right)$.

Тема 6 Визначений інтеграл.

Розділ II. §2.7 (стор. 158-160); §2.9 (стор 161-164). §2.13 (стор. 188, 189), №№ 275, №№ 276, 289, 290, 293, 296, 299, 305, 307, 310, 312, 315, 322.

Приклади. Знайти визначені інтеграли.

1. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,dx$. 2. $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt x-1}$. 3. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}$. 4. $\int_0^1\ln(x+1)\,dx$. 5. $\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
6. $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. 7. $\int_1^4\frac{dx}{(1+\sqrt x)^3}$. 8. $\int_1^5\frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. 9. $\int_0^1\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. 10. $\int_{3/\sqrt2}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Тема 7 Невласні інтеграли

Розділ 2. §2.12 (стор. 177-183). §2.13 (стор. 192, 193), №№ 461, 463, 466, 478, 480, 481, 487, 496.

Тема 8 Геометричні застосування визначеного інтеграла.

Розділ 2. § 2.10 (стор. 164-166). приклад 1, А, Б; стор 169-170 приклад 2, А; стор. 170, 171, приклад 4, 5; §2.13 стор 189, приклади 326, 327, 330, 331, 333. стор. 190, приклади 364, 365, 367, 368, 372, 377; стор 191, приклади 401-406, 412, 413.

Тема 9. Застосування визначеного інтеграла в економіці.

Розділ II. §2.8 (стор. 161). §2.13 (стор 194, 195) №№ 526–534, 537, 538

Економічний зміст визначеного інтеграла: об'єм продукції, виробленої за проміжок часу $[0,T]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності праці в момент t на проміжку $[0,T]$

$$v=\int_0^T f(t)dt.$$

Якщо в функції Кобба–Дугласа вважати, що витрати праці є лінійна функція від t — $at+b$, а витрати капітала незмінні, то функція Кобба–Дугласа буде мати вид

$$g(t)=(at+b)e^{\gamma t}.$$

Тоді об'єм виготовленої продукції за T років дорівнює

$$Q=\int_0^T (at+b)e^{\gamma t}dt$$

Приклад. Знайти об'єм продукції виробленої за 5 років, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд

$$g(t)=(2t+1)e^{2t}.$$

Розв'язок. Об'єм продукції виробленої за 5 років дорівнює

$$Q=\int_0^5 (2t+1)e^{2t}dt.$$

Застосуємо метод інтегрування частинами

$$Q=\int_0^5 (2t+1)e^{2t}dt=\left\{\begin{array}{l}2t+1=u,\ du=2dt\\ e^{2t}dt=dv,\ v=\frac{1}{2}e^{2t}\end{array}\right\}=$$

$$=(2t+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^5-2\cdot\frac{1}{2}\int_0^5 e^{2t}dt=5{,}5e^{10}-5{,}5-\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^5=5{,}5e^{10}-$$

$$-5{,}5-0{,}5e^{10}+0{,}5=5(e^{10}-1)\approx 11\cdot 10^4 \text{ (ум. од.)}$$

Якщо первісне капіталовкладення складає P ум. од, а відсоткова ставка r% і щорічне капіталовкладення збільшується на b ум. од, то функція капіталовкладень дорівнює

$$f(t)=P+bt.$$

Тоді дисконтний прибуток за T років дорівнює

$$\mathcal{K} = \int_0^T f(t)e^{-it}dt,$$

де i — питома відсоткова ставка (норма відсотка); $i = \frac{r}{100}$.

Дисконтний прибуток за T років дорівнює

$$\mathcal{K} = \int_0^T (P+bt)\, e^{-\frac{r}{100}t}dt.$$

Приклад: Знайти дисконтний прибуток за 8 років при відсотковій ставці 5%, якщо первісне капіталовкладення складає 50 млн. гр. од і щорічне капіталовкладення збільшується на 2 млн. гр. од.

Розв'язок. Функція капіталовкладень $f(t) = 50 + 2t$; $r = 5\%$. Дисконтний прибуток за 8 років дорівнює

$$\mathcal{K} = \int_0^8 (50+2t)e^{-0{,}05t}dt.$$

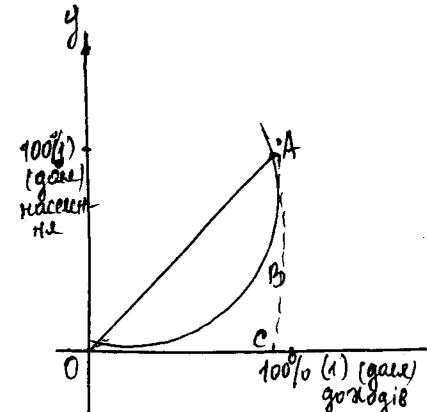
Застосуємо формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\mathcal{K} = \int_0^8 (50+2t)e^{-0{,}05t}dt = \left\{ \begin{array}{l} 50+2t = u,\ du = 2dt \\ e^{-0{,}05t}dt = dv,\ v = -\frac{1}{0{,}05}e^{-0{,}05t} = \\ = -20e^{-0{,}05t} \end{array} \right. =$$

$$= (50+2t)(-20e^{-0{,}05t})\Big|_0^8 + 40\int_0^8 e^{-0{,}05t}dt = 1360(1-e^{-0{,}4}) - 800e^{-0{,}05t}\Big|_0^8 =$$

$$= 1360(1-e^{-0{,}4}) + 800(1-e^{-0{,}4}) = 2160(1-e^{-0{,}4}) \approx 712{,}8 \text{ млн. гр. од.}$$

Нехай залежність відсотків доходів від відсотків населення в одній із країн задається рівнянням $y = b - \sqrt{r^2-(x-a)^2}$, x — частка населення, y — частка доходів населення.



OA — бісектриса; OBA — дуга кола. Коефіцієнт Джині

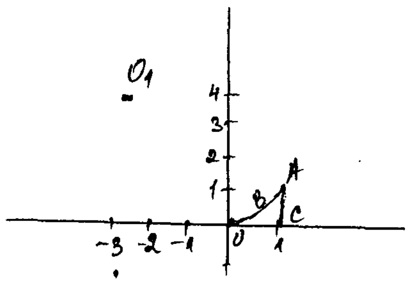
$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}, \quad (0 < k < 1)$$

Якщо $k \geq 0{,}5$, то нерівномірний розподіл доходів серед населення.

Приклад. За даними дослідження у розподілу доходів у одній з країн крива OBA описана рівнянням $(x+3)^2+(y-4)^2 = 25$ де x — доля населення, y — доля доходів населення. Знайти коефіцієнт

Джіні.

Розв'язок. O_1 – центр кола $(x+3)^2+(y-4)^2=25$; OAB – дуга нижнього напівкола. Отже рівняння цієї дуги



$$y=4-\sqrt{25-(x+3)^2}, \quad 0\le x\le 1.$$

$$S_{OAB}=\int_0^1\left(4-\sqrt{25-(x+3)^2}\right)dx = 4-\int_0^1\sqrt{25-(x+3)^2}\,dx =$$

$$=4-\frac12\left((x+3)\sqrt{25-(x+3)^2}\Big|_0^1+25\arcsin\frac{x+3}{5}\Big|_0^1\right)=$$

$$=4-\frac12\left(4\cdot3-3\cdot4+25\left(\arcsin\frac45-\arcsin\frac35\right)\right)=4-12{,}5\left(\arcsin\frac45-\arcsin\frac35\right)=4-12{,}5\arcsin\left(\frac45\sqrt{1-\left(\frac35\right)^2}-\frac35\sqrt{1-\left(\frac45\right)^2}\right)=4-12{,}5\arcsin\frac{7}{25}\approx$$

$$\approx 4-3{,}5\approx 0{,}5.$$

Нерівномірний розподіл доходів серед населення даної країни. ▶

Нехай крива попиту $P=f(Q)$ – функція спадаюча та неперервна; Q – обсяг товару, який підприємство реалізує на ринку за ціною P. Крива пропозиції $P=\varphi(Q_s)$, де Q_s – обсяг продукції, яку виробник пропонує для продажу за ціною P. Функція $P=\varphi(Q_s)$ зростаюча та неперервна. Точка рівноваги (P_0, Q_0), (P_0 – рівноважна ціна. Додатковий прибуток споживача CS знаходиться за формулою

$$CS=\int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ-P_0Q_0.$$

Додаткова вартість виробника PS дорівнює

$$PS=P_0Q_0-\int_0^{Q_0}\varphi(Q_s)\,dQ_s.$$

Приклад 1. Крива попиту задана рівнянням $P=29-3Q^2$ (тис. ум. од.) Рівноважна ціна $P_0=17$ (тис. ум. од.). Знайти додатковий прибуток споживача.

Розв'язок. Знайдемо обсяг продукції, який відповідає рівноважній ціні

$$P_0=17.$$
$$17=29-3Q^2.$$

Звідси $3Q^2=12$; $Q_0=2$ (тис. ум. од.)

Додатковий прибуток споживача дорівнює

$$CS=\int_0^2\left(29-3Q^2\right)dQ-17\cdot2=\left(29Q-Q^3\right)\Big|_0^2-34=58-8-34=16 \text{ (тис. ум. од.)}$$

Додатковий прибуток споживача 16 (тис) ум. од.

⑥

Приклад 2. Функція пропозиції $Q_s = P^2 - 20P + 100$, функція попиту $Q = -10P + 300$. Знайти додатковий прибуток споживача і додатковий прибуток виробника

Розв'язок. Знайдемо точку рівноваги із системи рівнянь

$$\begin{cases} Q_s = Q, \\ Q_s = P^2 - 20P + 100, \\ Q = -10P + 300 \end{cases}$$ звідси $P^2 - 20P + 100 = -10P + 300$; $P^2 - 10P - 200 = 0$.

$P_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+200} = 5 \pm 15$; $P_1 = 20$; $P_2 = -10$ – неможливо, так як ціна додатна величина.

Рівноважна ціна $P_0 = 20$ (ум.од.)

$Q_0 = 300 - 10 \cdot 20 = 100$, $Q_0 = 100$ (ум.од.). Точка рівноваги (20; 100).

Розв'яжемо рівняння пропозиції і рівняння попиту відносно P

$Q_s = (P-10)^2 \Rightarrow P - 10 = \sqrt{Q_s} \Rightarrow P = 10 + \sqrt{Q_s}$;

$10P = 300 - Q \Rightarrow P = 30 - 0{,}1Q$.

Додатковий прибуток виробника

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} \varphi(Q_s)\,dQ_s \Rightarrow$$

$$PS = 20 \cdot 100 - \int_0^{100} (10 + \sqrt{Q_s})\,dQ_s = 2000 - \left(10Q_s + \frac{2}{3}\sqrt{Q_s^3}\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= 2000 - 1000 - \frac{2}{3} 1000 = 1666\frac{2}{3} \approx 1666{,}67 \text{ (ум.од.)}$$

Додатковий прибуток споживача

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - P_0Q_0 \Rightarrow$$

$$CS = \int_0^{100} (30 - 0{,}1Q)\,dQ - 20 \cdot 100 = \left(30Q - 0{,}1\frac{Q^2}{2}\right)\Big|_0^{100} - 2000 =$$

$$= 3000 - 500 - 2000 = 500 \text{ (ум.од.)}$$

Приклад 3. Крива попиту $P = 120 - Q^2$, крива пропозиції $P = 3 + 4Q_s^2$. Знайти додатковий прибуток споживача і додатковий прибуток виробника.

Розв'язок. Знайдемо точку рівноваги з системи рівнянь

$$\begin{cases} Q_s = Q, \\ P = 120 - Q^2; \\ P = 3 + 4Q_s^3 \end{cases}$$ звідси $3 + 4Q^3 = 120 - Q^2 \Rightarrow 4Q^3 + Q^2 - 117 = 0 \Rightarrow$

$4Q^3 - 12Q^2 + 13Q^2 - 39Q + 39Q - 117 = 0 \Rightarrow 4Q^2(Q-3) + 13(Q-3)Q +$

$+ 39(Q-3) = 0 \Rightarrow (Q-3)(4Q^2 + 13Q + 39) = 0 \Rightarrow$

7

$$\left[\begin{array}{l} Q-3=0, \\ 4Q^2+13Q+39=0. \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} Q_1=3; \\ Q_{2,3}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot4\cdot39}}{4}=\frac{-13\pm i\sqrt{455}}{4} \end{array}$$

Так як обсяг продукції не може бути комплексним, то

$Q_0=3$; $P_0=3+4\cdot3^3=111$.

Точка рівноваги $(111;3)$.

Надлишок споживача (додатковий прибуток споживача)

$$CS=\int_0^{Q_0} f(Q)dQ-P_0Q_0=\int_0^3(120-Q^2)dQ-111\cdot3=(120Q-\frac{1}{3}Q^3)\Big|_0^3-$$

$$-333=360-9-333=18 \text{ (ум.од.)}$$

Додатковий прибуток виробника

$$PS=P_0Q_0-\int_0^{Q_0}\varphi(Q_s)dQ_s=3\cdot111-\int_0^3(3+4Q_s^3)dQ_s=333-(3Q_s+Q_s^4)\Big|_0^3=$$

$$=333-9-81=243 \text{ (ум.од.)}$$

Розглянемо задачу знаходження капітала (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Чисті інвестиції – це загальні інвестиції, які виробляють в економіці з бігом часу за відраховуванням інвестицій на відшкодування, які виходять із ряду основних фондів (капітала). Отже, за одиницю часу капітал збільшується на величину чистих інвестицій.

Якщо капітал є функція часу t, тобто $K=K(t)$, а чисті інвестиції – $I(t)$, то

$$I(t)=\frac{dK}{dt}.$$

звідси приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2 дорівнює

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1)=\int_{t_2}^{t_1} I(t)dt.$$

Приклад. Знайти приріст капіталу за 4 роки за даними чистими інвестиціями

$$I=90000\sqrt{t} \text{ (ум.гр.од.)}$$

через кілька років приріст капіталу становитиме 1620000 (ум.гр.од)

Розв'язок. Приріст капіталу за 4 роки дорівнює

$$\Delta K=K(4)-K(0)=\int_0^4 90000\sqrt{t}\,dt=90000\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^4=$$

$$=90000\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4^3}=480000 \text{ (ум.гр.од.)}$$

Нехай T – проміжок часу, через який приріст капіталу становитиме

$$\Delta K=1620000.$$

Застосуємо формулу для приросту капіталу, одержимо

$$\Delta K = K(T) - K(0) = \int_0^T I(t)\,dt.$$

Звідси

$$1620000 = \int_0^T 90000\sqrt{t}\,dt \Rightarrow 90000 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^T = 1620000$$

$$60000\sqrt{T^3} = 1620000; \quad \sqrt{T^3} = 1620000 : 60000 = 27.$$

$$\sqrt{T^3} = 27. \quad T^3 = 27^2 \Rightarrow T = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9 \text{ (років)}$$

Через 9 років приріст капіталу становитиме 1620000 (гр. од).