УДК 532.684

Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, А.В. Давыдова, Д.В. Евдокимов,
М.А. Стояновский, Р.А. Шульга

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ СТЕНКУ. ЧАСТЬ 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ, ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Для математического и численного моделирования процессов фильтрации газа через тонкие пористые тела предложено использовать три физические и, соответственно, математические модели: модель изотермической фильтрации, модель неизотермической однотемпературной фильтрации и модель неизотермической двухтемпературной фильтрации. Стандартными методами асимптотического анализа, используя в качестве малого параметра отношение характерной толщины тонкого пористого тела к его характерному размеру в касательном направлении, указанные математические модели могут быть сведены к асимптотическим математическим моделям, представляющим собой последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, записанных по координате, нормальной к тонкому телу. Полученные уравнения всегда могут быть проинтегрированы аналитически в квадратурах или численно при помощи стандартных процедур. Для изотермической фильтрации в нулевом приближении удалось получить достаточно простое аналитическое решение, а также удалось оценить погрешность полученного результата. Предложенные математические модели и методики расчета могут быть рекомендованы для использования в ракетно-космической технике, химической и медико-биологической промышленности.

Ключевые слова: фильтрация, газ, температура, изотермическая модель, однотемпературная модель, двухтемпературная модель, асимптотические методы.

Для математичного та чисельного моделювання фільтрації газу крізь тонкі пористі тіла запропоновано використовувати три фізичні та, відповідно, математичні моделі: модель ізотермічної фільтрації, модель неізотермічної однотемпературної фільтрації та модель неізотермічної двохтемпературної фільтрації. Стандартними методами асимптотичного аналізу, використовуючі в якості малого параметру відношення характерної товщини тонкого пористого тіла до його характерного розміру у дотичному напрямку, зазначені математичні моделі може бути зведено до асимптотичних математичних моделей, які представляють собою послідовності крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються, записаних по координаті, нормальній до тонкого тіла. Отримані рівняння завжди можуть бути проінтегровані аналітично у квадратурах чи чисельно за допомогою стандартних процедур. Для ізотермічної фільтрації у нульовому наближенні вдалося отримати достатньо простий аналітичний розв‘язок, а також вдалося оцінити похибку отриманого результату. Запропоновані математичні моделі та методики розрахунку

можуть бути рекомендовані для застосування у ракетно-космічній техніці, хімічній та медіко-біологічній промисловості.

Ключові слова: фільтрація, газ, температура, ізотермічна модель, однотемпературна модель, двохтемпературна модель, асимптотичні методи.

Three physical and correspondingly mathematical models are proposed to use for mathematical and numerical modeling of gas filtration through thin porous bodies, in particular: isothermal model, non-isothermal one-temperature model and non-isothermal two-temperature model. The mentioned mathematical models can be reduced by standard methods of asymptotic analysis, using a relation of reference thickness of the thin body to its reference size in tangential direction as a small parameter, to asymptotic mathematical models, which are sequences of boundary-value problems for ordinary differential equations with separable variables, formulated with respect to normal coordinate to the thin body. The obtained equations always can be integrated analytically in quadratures or numerically by standard procedures. It was managed to obtain an enough simple analytical solution for isothermal filtration in zero approximation, beside of that it was managed to estimate an error of the obtained results. The proposed mathematical models can be recommended for application in development of launcher-missile and space equipment, in chemical and medical-biological industries.

Key words: filtration, gas, temperature, isothermal model, one-temperature model, two-temperature model, asymptotic methods.

Актуальность проблемы. В настоящее время во многих технологических процессах используются газы, находящиеся под различными (как повышенными, так и пониженными) давлениями и содержащиеся в замкнутых емкостях. В силу различных причин, в том числе и в силу условий технологического процесса, стенки этих емкостей полностью или частично могут состоять из пористого материала, допускающего фильтрацию газа. Следует отметить, что фильтрация газа представляется куда как более сложным физическим процессом, нежели аналогичная фильтрация несжимаемой жидкости, и, в отличие от последней, как правило, описываются нелинейными математическими моделями. Понятно, что в полной постановке задача фильтрации газа через тонкую пористую стенку может вызвать заметные вычислительные трудности даже на современном уровне вычислительной техники. С другой стороны, в прикладных работах, выполненных на уровне инженерного анализа, встречается значительное количество упрощенных расчетных схем, к сожалению, не всегда надлежащим образом обоснованных, но, по мнению авторов, обеспечивающих точность, достаточную для технических приложений. Предоставляется целесообразным провести асимптотическое исследование полной математической модели рассматриваемого процесса с целью, как упрощения соответствующих прикладных расчетов, так и оценки эффективности и точности распространенных инженерных подходов. Полученные в результате данного исследования расчетные схемы могут предоставлять практический интерес в энергетике, ракетостроении, авиации, экологии, химической и медико-биологической промышленности и многих других отраслях современных техники и технологий.

Поскольку практически любая технология работы с веществами в газообразном состоянии предполагает их содержание в изолированных емкостях при повышенном давлении, вопрос об экономическом, и, возможно, экологическом ущербе от утечек газа предоставляется весьма актуальным для большинства направлений современной промышленности, энергетики, сельского хозяйства, транспорта. Кроме того, ряд технологических процессов в химической, медико-биологической промышленности и коммунальной сфере предполагают фильтрацию газа через пористую среду с целью его очистки. Очевидно, что совершенствование как технологий хранения газов, так и методов их очистки требует разработки адекватных и высокоэффективных методов расчета, что, по мнению авторов настоящей работы, может быть достигнуто только на основе разработки специальных, удобных для расчета математических моделей. Учитывая исключительно широкий спектр областей применения рассматриваемых технологий, очевидным требованием, предъявляемым к разрабатываемым математическим моделям, должна быть их универсальность, что может быть достигнуто только путем вывода таковых математических моделей из самых общих исходных положений, что отнюдь не всегда делалось ранее. Указанные достоинства предлагаемых в настоящей работе математических моделей внести с исключительной важностью сфер их применения определяют актуальность данного исследования, как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. Отдельно следует отметить, что благодаря важной роли, которую технологии хранения и переработки газов играют в различных отраслях современной индустрии, тематика настоящей работы оказывается неразрывно связанной с программами развития соответствующих отраслей, принятых как в Украине, так и на уровне международного сотрудничества нашего государства. В первую очередь, это относится к энергетике, ракетно-космической технике, авиации, химической и медико-биологической промышленности.

Как отмечалось выше, в современной практике инженерного расчета рассматриваемого класса явлений зачастую используются недостаточно обоснованные подходы, которые не могут обеспечить требуемую точность расчетов. Обзор таких работ с анализом сделанных в них ошибок никак не входит в цели настоящей работы, поэтому ограничимся здесь лишь анализом наиболее распространенных недостатков инженерных подходов:

а) использование необоснованных линеаризаций, которые могут привести к возникновению неконтролируемых ошибок;

б) ненадлежащий учет геометрической формы емкостей для хранения газов;

в) проведение расчетов фильтрации газа и изменения массы газа в емкости в одном масштабе времени, что неизбежно влечет накопление вычислительной погрешности.

Поясним названные ошибки подробнее. Уравнение изотермической фильтрации газа, записанное в переменных давления, является нелинейным поскольку коэффициент фильтрации зависит от давления. В более сложных математических моделях, обобщающих модель изотермической фильтрации, это обстоятельство, безусловно, также имеет место. В инженерных расчетных схемах распространенны приемы, заменяющие зависящий от давления коэффициент фильтрации некоторым постоянным осредненным значением. Учитывая большой перепад давления поперек пористой стенки и существенное изменение давления по времени, подобная практика предоставляется недостаточно корректной, поскольку ведет к появлению и накоплению систематической ошибки. Стенки емкостей для хранения газов в подавляющем большинстве случаев плоскими не являются (как правило, они сферические или цилиндрические), замена с целью упрощения в расчете истинной формы стенки плоской формой также ведет к определенным погрешностям, которые, по меньшей мере, следует оценить. Третья проблема связана с тем, что коэффициент фильтрации, вообще говоря, величина достаточно малая, вследствие чего давление внутри емкости в результате утечки изменяется весьма медленно, а фильтрационное поле течения в тонкой стенке устанавливается достаточно быстро. То есть, в задаче есть два масштаба времени. При численной реализации традиционных алгоритмов указанное обстоятельство вынуждает моделировать «медленный» процесс при помощи расчетов в «быстром времени», что неизбежно потребует больших затрат машинного времени и приведет к накоплению погрешности.

В основу разработанной в настоящей работе альтернативной математической модели положена общеизвестная математическая модель изотермической фильтрации газа в газонасыщенной пористой среде [1, 2], а также полученные ниже некоторые обобщения этой модели, учитывающие тепловые эффекты в процессе фильтрации. Основной и достаточно очевидной идеей, используемой далее для построения требуемой альтернативной математической модели, был применение к исходным общим моделям асимптотических методов [3 - 5]. В качестве малого параметра, используемого для построения асимптотических разложений, следуя работам [6, 7], предлагается использовать отношение минимальной толщины стенки к характерному размеру емкости, содержащей газ.

Целью настоящего исследования является разработка альтернативных асимптотических математических моделей, которые позволили бы развитие на их основе высокоэффективных расчетных схем, обеспечивающих корректный анализ нелинейностей, правильно отображающих геометрическую форму емкости и приспособленных к расчету разномасштабных по времени процессов.

Понятно, что указанными математическими моделями описание рассматриваемых процессов отнюдь не исчерпывается. Анализ других эффектов, связанных с фильтрацией газа, в том числе в тонких телах, можно найти в монографии [8].

Математическая постановка задачи. Вывод математической модели рассматриваемого процесса проведем, следуя в общих чертах монографии [1], но поскольку объект исследования в настоящей работе несколько отличается от объекта, изученного в работе [1], приходится здесь полностью воспроизводить вывод разрешающих уравнений, лишь относительно граничных условий довольствуясь обсуждением отличий от вышеупомянутой монографии. При этом нельзя сказать, что далее будет рассмотрен частный случай задачи, поставленной в монографии [1], поскольку в ней рассмотрение ограниченно случаем изотермической фильтрации газа, а в настоящей работе спектр температурных режимов значительно шире. В то же время, если в системе в целом имеют место умеренные перепады температур, то естественно ожидать, что аналогичный перепад температуры поперек тонкого пористого тела также будет невелик, что вполне оправдывает предположение об изотермической фильтрации газа. Правда, предположение об изотермической фильтрации относится, как частный случай, только к однотемпературной модели, которую надо применять с известной осторожностью, поскольку при значительных перепадах давления на тонком пористом теле газ при фильтрации расширяется и неизбежно охлаждается, тогда для выполнения условия изотермичности фильтрации следует потребовать, чтобы масса тонкого пористого тела была много больше массы газа, а скорость фильтрации была настолько мала, что газ успевал бы нагреться за счет теплообмена с тонким пористым телом. Даже эти краткие предварительные замечания показывают необходимость более подробного анализа, нежели приведенный в монографии [1].

Рассмотрим произвольный объем (элемент) пористой среды D, ограниченного поверхностью S. Отметим, что объем D, вообще говоря, не может быть бесконечно малым, поскольку поры в пористой среде имеют малые, но конечные размеры, а геометрические масштабы области D должны быть много больше размеров пор, чтобы в дальнейшем рассматривать пористую среду как два независимых континуума [1, 2, 9, 10]. Указанное обстоятельство особенно важно для настоящей работы, поскольку предметом таковой является фильтрация через тонкую стенку, а приведенное выше ограничение ведет к тому, что рассматриваемая тонкая пористая стенка имеет не только верхнее, но и нижнее ограничение по толщине. За бесконечно малое время $d\tau$ приток жидкости (газа) внутрь элемента составит

$$-d\tau\int_S \rho u_n dS = -d\tau\int_S \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS, \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости (газа), $\vec{u}$ – ее скорость. Тогда приращение массы в объеме D

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_D \sigma\rho d\nu)\right)d\tau = \left(\int_D \frac{\partial\sigma\rho}{\partial\tau}d\nu)\right)d\tau, \tag{2}$$

где σ – пористость среды, полагаемая здесь и далее постоянной. Поскольку в силу теоремы Гаусса-Остроградского [11]

$$\int\limits_S \rho u_n dS = \int\limits_D \operatorname{div}(\rho \vec{u}) d\nu, \tag{3}$$

получим

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial \sigma\rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) dv = 0. \tag{4}$$

В силу произвольности объема D получим основные уравнения фильтрации жидкости переменной плотности (газа)

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) было получено в монографиях [1, 2, 9] и должно быть дополнено уравнением, выражающим закон Дарси

$$\vec{u} = -k \operatorname{grad} p, \tag{6}$$

где k – коэффициент фильтрации, p – давление. Откуда очевидно следует

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial \tau} - \operatorname{div}(k \rho \operatorname{grad} p) = 0. \tag{7}$$

Отметим, что, пожалуй, более естественным было бы вводить закон Дарси в виде

$$\rho \vec{u} = -k^* \operatorname{grad} p, \tag{8}$$

что позволило бы линеаризовать второй член в уравнении (7), однако для сжимаемой жидкости в таком случае возникли бы существенные трудности с определением модифицированного коэффициента фильтрации k^*, поэтому дальнейшее рассмотрение проблемы будем основывать на представлении закона Дарси (6) и уравнении фильтрации (7). Тем не менее, следует отметить, что традиционный коэффициент фильтрации k также может зависеть от давления и температуры.

Обратимся теперь к уравнению состояния идеального газа, которое запишем в виде [12]

$$\frac{p}{\rho} = RT_g, \tag{9}$$

где R – газовая постоянная данного газа, T_g – температура газа. Общая модель процессов тепломассообмена при фильтрации газа достаточно сложна, поэтому ограничимся здесь рассмотрением наиболее простых частных случаев:

1. Изотермическая фильтрация. Простейший случай, рассмотренный в монографиях [1, 2, 9], с физической точки зрения соответствует условиям

$$T_{in} = T_{out}, \tag{10}$$

где T_{in} – температура газа внутри емкости, ограниченной пористой стенкой, а T_{out} – вне ее. Кроме того, в данном случае предполагается, что масса твердого каркаса пористой среды значительно превосходит массу фильтрующегося газа, до такой степени, что теплообмен с газом не может сколько-нибудь заметно изменить температуру твердого каркаса, а, напротив, в результате теплообмена между каркасом и газом температура газа выравнивается с температурой каркаса. Применение подобной модели в монографиях [1, 2, 9], ориентированных, в первую очередь, на геологические процессы, то есть, фильтрация газа в гигантских по массе массивах пористой среды, вполне естественно и очевидным образом обоснованно, однако для фильтрации газа через тонкие пористые тела, не обладающие столь большой массой, приведенные выше предположения должны применяться с известной осторожностью. При условии

$$T_g = T_f = \text{const}, \tag{11}$$

где T_f – температура твердого каркаса, получим

$$\rho = \frac{p}{RT_g}. \tag{12}$$

Подставив полученное соотношение (12) в уравнение (7) и полагая пористость σ и коэффициент фильтрации k постоянными, получим следующее уравнение

$$\frac{\sigma}{RT_g}\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{k}{RT_g}\operatorname{div}(p\,\mathrm{grad}p), \tag{13}$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{k}{2\sigma}\Delta(p^2), \tag{14}$$

далее будем обозначать $\chi=\dfrac{k}{2\sigma}$.

Уравнение (14) – уравнение изотермической фильтрации газа – широко известно в современной теории фильтрации [1, 2, 9]. Содержащаяся в правой части уравнения (14) квадратичная нелинейность представляет известные трудности при решении и чаще всего учитываются на уровне разного рода локальных или глобальных линеаризаций, что, увы, не всегда обосновано.

Замечание. Понятно, что при фильтрации газа невозможны ни изохорный, ни изобарный процессы, что совершенно очевидно из физических соображений. Однако, адиабатная фильтрация газа, в принципе, возможна и относится к случаю, когда масса пористого тела много меньше массы фильтрующегося газа, то есть, пористое тело является асимптотически тонким. Подобная ситуация может возникнуть при фильтрации через пористые мембраны в мембранных фильтрах или при фильтрации через тонкие тканные материалы. Оба указанных случая весьма далеки от предмета рассмотрения настоящей работы и не представляют интереса для ее авторов, однако, могут быть рекомендованы для отдельного самостоятельного исследования.

2. Неизотермическая фильтрация, однотемпературная модель. В рассматриваемом случае, по-прежнему, предполагается, что масса пористого каркаса, через который происходит фильтрация газа, значительно превосходит массу фильтрующегося газа, и при движении газа успевает установиться тепловое равновесие между газом и каркасом при температуре, практически совпадающей с температурой каркаса. Однако в данном случае на тонком пористом теле имеет место перепад температур, который вызывает тепловой поток через пористую поверхность. По соображениям, аналогичным заключениям, положенным в основу вывода уравнения (5) получим

$$c_g\rho_a\frac{\partial T_f}{\partial \tau}=\operatorname{div}\left(\lambda_f\,\mathrm{grad}T_f\right), \tag{15}$$

где c_g – осредненная общая теплоемкость пористой среды; ρ_a – осредненная плотность пористой среды; λ_f – эффективная теплопроводность пористой среды, в силу сделанных выше предположений совпадающая с теплопроводностью каркаса; T_f – температура каркаса, в силу тех же предположений равная температуре газа

$$T_f = T_g. \tag{16}$$

Очевидным условием корректности такой постановки задачи является невыполнение равенства (10)

$$T_{in} \neq T_{out}. \tag{17}$$

Отметим, что входящие в уравнение (15) теплофизические параметры пористой среды c_g, ρ_a, λ_f весьма затруднительно определяются экспериментально и, в принципе, могут зависеть от температуры T_f, представляя соответствующую нелинейность.

В данном случае $\dfrac{\partial \rho}{\partial \tau} \neq 0;\ \dfrac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0,$ тогда в уравнении (7), полагая, как и раньше, $\sigma = \text{const}$ и $k = \text{const}$

$$\sigma\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial T_f}{\partial \tau}\frac{\partial \rho}{\partial T_f}\right) = k\,\mathrm{div}\left(\frac{p}{RT_f}\,\mathrm{grad}\,p\right), \tag{18}$$

и учитывая уравнение состояния (9), то есть

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{RT_f};\ \frac{\partial \rho}{\partial T_f} = -\frac{p}{RT_f^2}, \tag{19}$$

и следовательно

$$\sigma\left(\frac{1}{RT_f}\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{p}{RT_f^2}\frac{\partial T_f}{\partial \tau}\right) = k\,\mathrm{div}\left(\frac{1}{2RT_f}\,\mathrm{grad}\,p^2\right), \tag{20}$$

где значение производной $\dfrac{\partial T_f}{\partial \tau}$ может быть определено из уравнения (15)

3. Неизотермическая фильтрация, двухтемпературная модель. Отличием рассматриваемой модели является разнящаяся температура фильтрующегося газа и твердого каркаса, несмотря на интенсивный теплообмен между ними, как и ранее, исходя из соображений, использованных при выводе уравнения (15), но для двух различных полей температур T_f (температуры каркаса) и T_g

(температуры газа). Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем конечное уравнение, описывающее процесс теплообмена

$$c_f \rho_f \frac{\partial T_f}{\partial \tau} = \operatorname{div}\left(\lambda_f \operatorname{grad} T_f\right) + \beta\left(T_g - T_f\right), \tag{21}$$

где β – некоторый коэффициент теплообмена между газом и каркасом; все остальные теплофизические параметры снабжены индексом «f», указывающим, что они относятся к твердому каркасу

$$c_g \rho_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial \tau} + \left(\vec{u} \nabla \right) T_g \right) = \operatorname{div}\left(\lambda_g \operatorname{grad} T_g\right) + \beta\left(T_f - T_g\right) + q, \tag{22}$$

где $\vec{u}$ – скорость фильтрационного течения газа, определенная законом Дарси (6); c_g, ρ_g, λ_g – теплоемкость газа при постоянном объеме [13], плотность газа, теплопроводность газа, соответственно; коэффициент β имеет то же значение и смысл, что и в уравнении (21); q – источниковый член, учитывающий нагрев (охлаждение) газа вследствие совершенной над ним работы, следуя монографии [13] данный член можно определить как

$$q = \rho \vec{F} \vec{u} - \operatorname{div}\left(p \vec{u} \right), \tag{23}$$

где $\vec{F}$ – вектор массовых сил, действующих на газ. Как правило, собственно массовыми силами можно пренебречь, однако на газ в пористой среде действует еще и сила трения, которой в пористой среде пренебречь не удастся. Определим силу трения как

$$\vec{F}_{тр} = -f \operatorname{grad} p, \tag{24}$$

где f – коэффициент трения, или, что то же самое, в силу (6)

$$\vec{F}_{тр} = f^* \vec{u}. \tag{25}$$

Экспериментальное определение коэффициента трения f представляет собой весьма нетривиальную проблему, которая вместе с так же нетривиальной проблемой экспериментального определения коэффициента теплообмена между газом и каркасом составляют наиболее существенный недостаток третьей из предложенных моделей.

Понятно, что для полноты постановки краевой задачи полученные дифференциальные уравнения в частных производных должны быть снабжены граничными и начальными условиями. Простоты ради, для всех математических моделей будем полагать известными давления на внутренней и внешней поверхности тонкого пористого тела

$$p\big|_{\Gamma_{in}} = p_{in}, \tag{26}$$

$$p\big|_{\Gamma_{out}} = p_{out}, \tag{27}$$

и температуру аналогично (для второй и третьей моделей)

$$T\big|_{\Gamma_{in}} = T_{in}, \tag{28}$$

$$T\big|_{\Gamma_{out}} = T_{out}. \tag{29}$$

Начальные условия запишем как

$$p(\tau = 0) = p_{\tau_0}, \tag{30}$$

$$T(\tau = 0) = T_{\tau_0}. \tag{31}$$

Разумеется, приведенными выше вариантами граничных условий (26) - (29) весь возможный спектр таковых условий однозначности отнюдь не исчерпывается, но, по мнению авторов настоящей работы, их вполне достаточно для демонстрации предложенного подхода.

По тем же соображениям простоты и ясности изложения дальнейший анализ будет преимущественно посвящен первой и второй из сформулированных выше математических моделей, а относительно третьей из них будут сделаны лишь отдельные замечания, поскольку ее прикладное значение существенно ограниченно.

Обратимся к первой из выше сформулированных математических моделей. Введем в тонком пористом теле, через которое происходит фильтрация газа, связанную систему координат таким образом, чтобы одна из координатных поверхностей совпадала со срединной, внутренней или внешней поверхностью рассматриваемого тонкого тела, при этом полагая такую поверхность, как минимум, кусочно-гладкой. Не уменьшая общности, все дальнейшие рассуждения будем относить к некоторой гладкой, то есть, имеющей единственную нормаль, части границы. Такое предположение легко обосновывается физическими соображениями о том, что, даже если граница имеет конечное число, вообще говоря, криволинейных разрывов гладкости, то на общий процесс фильтрации или теплопроводности через всю границу эти разрывы влияния оказать никак не могут, поскольку имеют меньшую размерность. Если пористое тело, через которое происходит фильтрация, тонкое и имеет гладкие границы, то естественно предположить, что нормали ко внутренней и внешней его границам достаточно близки друг к другу и к нормали к срединной поверхности. Локальную систему координат в тонком пористом теле будем вводить таким образом, чтобы первая из осей была направлена по данной нормали, а ортогональные ей и между собой орты двух других осей были касательными к вышеупомянутой координатной плоскости, совпадающей с одной из характерных поверхностей тонкого тела.

При таком предположении основное уравнение первой изотермической модели фильтрации (14) примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{k}{2\sigma}\,\frac{1}{H_1H_2H_3}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial p^2}{\partial \xi_1}\right)+\\&+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial p^2}{\partial \xi_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial p^2}{\partial \xi_3}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{32}$$

где H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ляме системы координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) [14], введенной выше как локальная система координат, связанная с поверхностью тонкого пористого тела. Граничные и начальные условия для уравнения (32) не меняются, а лишь конкретизируются.

Пусть тонкое пористое тело имеет характерный размер по толщине (в направлении оси ξ_1) L_1, а в продольном направлении (вдоль поверхности в которой лежат оси ξ_2 и ξ_3) – L_2. Очевидно, что $L_2 >> L_1$. Дальнейшие рассуждения проведем по аналогии с работами [6, 7], учитывая геометрическую и физическую специфику рассматриваемой задачи. Проведем обезразмеривание координат локальной системы следующим образом

$$\overline{\xi_1}=\frac{\xi_1}{L_1};\quad \overline{\xi_2}=\frac{\xi_2}{L_2};\quad \overline{\xi_3}=\frac{\xi_3}{L_3}, \tag{33}$$

где черта над символом указывает на обезразмеривание. при этом вопрос об обезразмеривании давления p и коэффициентов Ляме H_i, входящих в уравнение (32), представляется непринципиальным. Тем не менее, давление можно обезразмерить при помощи разности $p_{in} - p_{out}$ (26), (27), а вопрос об обезразмеривании коэффициентов Ляме рассматривать отдельно в каждом конкретном случае. Тогда уравнение (32) можно переписать (дабы избежать трудночитаемости полученных уравнений здесь и далее черту над обезразмеренными переменными будем опускать, по умолчанию понимая, что все переменные уже обезразмерены):

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{k(p_{in}-p_{out})}{2\sigma}\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{1}{L_1^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{L_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_2}\right)+\frac{1}{L_3^2}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_3}\right)\right], \tag{34}$$

обозначим

$$K=\frac{k(p_{in}-p_{out})}{2\sigma},\ \ t=\frac{\tau K}{L_2^2}, \tag{35}$$

где переменная t соответствует безразмерному времени,

$$\varepsilon=\frac{L_1^2}{L_2^2}. \tag{36}$$

Умножив обе части уравнения (34) на L_2^2, получим

$$\frac{\partial p}{\partial t}\varepsilon=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_1}\right)+$$
$$\frac{\varepsilon}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial p^2}{\partial\xi_3}\right)\right], \tag{37}$$

однако, в силу того, что $L_2 >> L_1$, (что отмечалось ранее при введении этих параметров), имеем

$$\varepsilon << 1, \tag{38}$$

а из условия (38) очевидно следует, что для решения рассматриваемой задачи может быть применен метод малого параметра, в качестве которого вполне естественно использовать ε, поскольку этот параметр не надо даже вводить искусственно, так как он уже входит в рассматриваемое уравнение (37). Общие вопросы асимптотических методов, к которым относится метод малого параметра, в настоящее время достаточно широко и полно разработаны [3, 5]. Частные вопросы применения подобных подходов в теории тепломассообмена также интенсивно изучались и хорошо освещены в специальной литературе [15, 16]. Потому не будем останавливаться на методологических вопросах применения асимптотических методов, а отметим, что решение будем отыскивать в виде

$$p = p_0 + p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{39}$$

Подставив разложение (39) в уравнение (37), в силу, вообще говоря, произвольности параметра ε, получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial p_0^2}{\partial\xi_1}\right) = 0, \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial(2p_0p_1)}{\partial\xi_1}\right) = \frac{\partial p_0}{\partial t} - \\ - \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial p_0^2}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial p_0^2}{\partial\xi_3}\right)\right],\end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial(2p_0p_2)}{\partial\xi_1}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial t} - \\ - \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial p_1^2}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial p_1^2}{\partial\xi_3}\right)\right],\end{gathered} \tag{42}$$

………………………………………………………

Очевидно, что несмотря на сложную форму записи уравнения (40) - (42), … являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной ξ_1, а правые части уравнений (41), (42), … содержат только производные от функций, определенных в предыдущих уравнениях. Подстановка разложения по малому параметру (39) в граничные условия (26), (27) дает

$$p_0\big|_{\Gamma_{in}} = p_{in}, \tag{43}$$

$$p_0\big|_{\Gamma_{out}} = p_{out}, \tag{44}$$

$$p_i\big|_{\Gamma_{in}} = 0, \qquad (45)$$

$$p_i\big|_{\Gamma_{out}} = 0, \qquad (46)$$

$$p_n\big|_{\Gamma_{in}} = 0, \qquad (47)$$

$$p_n\big|_{\Gamma_{out}} = 0, \qquad (48)$$

………..………..………..………..………..………

В правые части уравнений (41), (42) и последующих за ними входят производные от искомых функций по независимым переменным, но, например, если p_{in} и p_{out}, а также H_1, H_2, H_3 не зависят от ξ_1 и ξ_3, то и p_0 не будет зависеть от ξ_3, ξ_3, что существенно упростит последующую задачу (41), (44), (46), а также обеспечит независимость функции p_1 от тех же координат, и так далее. Независимость p_{in} и p_{out} от положения точки на поверхности (координаты ξ_2, ξ_3) с физической точки зрения является весьма распространенным случаем, а независимость от тех же координат коэффициентов Ляме H_1, H_2, H_3 имеет место, например, для сферических, цилиндрических и плоских стенок, которые очень часто встречаются в приложениях.

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (40) с граничным условием (43), (44) всегда может быть проинтегрирована аналитически в квадратурах

$$p_0^2 = a_0 \int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi_1 + b_0, \qquad (49)$$

где a_0, b_0 – константы интегрирования, подлежащие определению из граничных условий. Обозначив для простоты

$$\int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi_1 = A_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad (50)$$

и поставив в соответствие границам Γ_{in} и Γ_{out} значение $\xi_1 = 0$ и $\xi_1 = \delta$, получим

$$\begin{cases} a_0 A_0(0,\xi_2,\xi_3) + b_0 = p_{in}^2, \\ a_0 A_0(\delta,\xi_1,\xi_2) + b_0 = p_{out}^2. \end{cases} \tag{51}$$

Очевидно, что (51) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, легко разрешимую аналитически. Действительно

$$a_0 = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{A_0(\delta,\xi_1,\xi_2) - A_0(0,\xi_2,\xi_3)},$$
$$b_0 = p_{in}^2 - a_0 A_0(0,\xi_2,\xi_3) \tag{52}$$

откуда

$$p_0^2 = p_{in}^2 + \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{A_0(\delta,\xi_1,\xi_2) - A_0(0,\xi_2,\xi_3)}\left(A_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - A_0(0,\xi_2,\xi_3)\right), \tag{53}$$

Вообще говоря, при определении p_0 из решения (53) следует брать квадратный корень из правой части полученного соотношения со знаком плюс и минус, но в силу исходных граничных условий (26), (27) и, соответственно, (43), (44) отрицательная ветвь решения будет физически некорректна.

Получив функцию p_0 из решения (53), подставим ее в правую часть соотношения (41), которую для краткости обозначим f, тогда решение уравнения (41) имеет вид

$$2p_0p_1 = \int \frac{H_1}{H_2H_3}\int H_1H_2H_3 f d\xi_1 d\xi_1 + a_1\int \frac{H_1}{H_2H_3} d\xi_1 + b_1. \tag{54}$$

Получение конкретной функциональной формы решения p_1 из (54) полностью аналогично получению функции p_0 из решения (49), при помощи рассуждений и вычислений (50) - (53) с единственной разницей, что постоянные интегрирования a_1, b_1 теперь должны быть найдены из граничных условий (45), (46). Значение функции p_1 может быть определено всегда, поскольку по физическому смыслу $p_0 \neq 0$.

Получив функции p_1 при помощи описанного выше алгоритма, подставим ее в правую часть уравнения (42), которую также обозначим через f. Тогда

$$2p_0p_2 = \int \frac{H_1}{H_2H_3}\int H_1H_2H_3 f d\xi_1 d\xi_1 + a_1\int \frac{H_1}{H_2H_3} d\xi + b_2. \tag{55}$$

с последующим совершенно аналогичным определением функции p_2 и так далее.

Как отмечалось выше, p_{in} и p_{out} редко зависят от ξ_2 и ξ_3, если от тех же переменных не зависят и коэффициенты Ляме, то полученное решение относится ко всей поверхности, через которую происходит фильтрация. В противном случае данная поверхность должна быть разбита на части и на каждой из этих достаточно малых частей должны решаться рассмотренные выше краевые задачи для собственных дифференциальных уравнений (40) - (42).

Обратимся теперь к зависимости величины p_{in} и p_{out} от времени, определяющей первые слагаемые в правых частях уравнений (41) и (42). Такая зависимость может быть задана изначально, предполагая, что существует некоторое управление процессами фильтрации. Однако куда как более распространенным случаем является определение зависимостей $p_{in}(\tau)$ и $p_{out}(\tau)$ в результате протекания некоторых физических процессов, например, той же фильтрации. Рассмотрим простейший пример такого процесса. Пусть в объеме газа D_{in}, ограниченного хотя бы частично границей Γ_{in}, изначально содержалась масса m_0 газа, тогда масса газа m будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{d\tau} = Q - \int_{\Gamma_{in}} q\, dS, \tag{56}$$

с начальным условием

$$m(\tau = 0) = m_0, \tag{57}$$

где Q – суммарная мощность источников и стоков газа в замкнутом объеме D_{in}, не связанных с процессом фильтрации; $q = \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}$ – локальный фильтрационный поток газа. Что касается источникового члена Q, то дать какие-либо оценки для него затруднительно, и его влияние нуждается в отдельном исследовании в каждой конкретной задаче. Для случая же $Q = 0$ могут быть приведены следующие соображения. Применим уравнение состояния (9) в более традиционной форме

$$p\Omega = \frac{m}{\mu} R_0 T_g, \tag{58}$$

где p – давление, Ω – объем области, заполненной газом, m – масса газа, соответствующая массе, входящей в уравнение (56), μ – молярная масса газа, R_0 – универсальная газовая постоянная, T_g – как и ранее, температура газа. Применим уравнение состояния (58) к объему D_{in}, тогда

$$\frac{p_{in}\Omega_{in}}{RT_g} = m, \tag{59}$$

но по принятым предположениям объем Ω_{in}, температура T_g и, тем более, газовая постоянная являются постоянными, и это означает, что масса газа в области D_{in} пропорциональна его давлению. С другой стороны, плотность газа может быть получена из уравнения (9)

$$\rho = \frac{p_{in}}{RT_g}, \tag{60}$$

и скорость газа (ограничимся пока нулевым приближением)

$$\left|\vec{u}\right| = k \cdot \operatorname{grad} p_0 = k \cdot \left|\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}\right|, \tag{61}$$

чтобы определить $\partial p_0 / \partial \xi_1$, продифференцируем по ξ_1 решение (53), откуда получим

$$2p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{{p_{out}}^2 - {p_{in}}^2}{A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3)} \cdot \frac{\partial A_0(\xi_1, \xi_2, \xi_n)}{\partial \xi_1}. \tag{62}$$

С учетом определения (50)

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{{p_{out}}^2 - {p_{in}}^2}{2p_0(A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))} \cdot \frac{H_1}{H_2 H_3}, \tag{63}$$

относя выражение (63) к границе Γ_{in}, где в силу граничного условия (43) $p_0 = p_{in}$, аналогично получим

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{{p_{out}}^2 - {p_{in}}^2}{2p_{in}} \frac{H_1}{H_2 H_3(A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))}. \tag{64}$$

Умножив (64) на k и ρ, получим выражение для q

$$q = k\rho \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = k \frac{p_{in}}{RT_g} \frac{p_{out}{}^2 - p_{in}{}^2}{2p_{in}} \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{1}{(A_0(\delta,\xi_2,\xi_3) - A_0(0,\xi_2,\xi_3))}, \quad (65)$$

Произведя в (65) необходимые сокращения, далее получим

$$\int\limits_{\Gamma_{in}} q dS = \frac{k(p_{out}{}^2 - p_{in}{}^2)}{2RT_g} \int\limits_{\Gamma_{in}} \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{1}{(A_0(\delta,\xi_2,\xi_3) - A_0(0,\xi_2,\xi_3))} dS. \quad (66)$$

Отметим, что последний интеграл в правой части (66) определяется исключительно геометрией границы области Γ_{in}. Подставив выражение (66) в уравнение (56) и обозначив интеграл в (66) через E, с учетом (59)

$$\frac{\Omega_{in}}{RT_g} \cdot \frac{dp_{in}}{d\tau} = \frac{kE(p_{out}{}^2 - p_{in}{}^2)}{RT_g}, \quad (67)$$

или

$$\frac{dp_{in}}{d\tau} = \frac{kE}{\Omega_{in}} (p_{out}{}^2 - p_{in}{}^2). \quad (68)$$

Полученное соотношение (68) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, которое, будучи дополнено очевидными начальными условиями

$$p_{in}(\tau = 0) = p_{in\,0}, \quad (69)$$

образует задачу Коши, подлежащую аналитическому или численному решению. Что касается численного решения задачи Коши (68), (69), то оно может быть осуществлено стандартными методами решения таких задач [17], что не вызывает сколько-нибудь заметных трудностей. Аналитическое решение данной задачи существенно зависит от характера граничных условий $p_{out}(\tau)$. Если имеют место утверждение

$$p_{out} = \text{const}, \quad (70)$$

то есть, p_{out} не зависит от времени и не изменяется вдоль поверхности стенки, то решение очевидно

$$\frac{2\Omega_{in}}{kE} \cdot \frac{1}{2p_{out}} \ln\left|\frac{p_{out} + p_{in}}{p_{out} - p_{in}}\right| = \tau + c, \tag{71}$$

где постоянная интегрирования c легко находится из начального условия (69). Но даже для случая

$$p_{out} \approx \text{const}, \tag{72}$$

решение рассматриваемой задачи Коши может существенно усложнится. Для общего случая уравнения (68) сделаем следующие замечания качественного характера. При введении определения (59) уже неявно предполагалось, что давление p_{in} не меняется по всей области D_{in}, что вполне очевидно с физической точки зрения и отмечалось в предшествующих этому определению рассуждениях. Вводя предположение (70), мы, в том числе, фактически предположили, что граничные условия рассматриваемой задачи не приводят к изменению фильтрационного потока вдоль стенки, а таковое изменение может быть только следствием изменения геометрических параметров (прежде всего, толщины) стенки вдоль ее поверхности, выражаемым параметром E. Если

$$E = \text{const}, \tag{73}$$

то задача Коши (68), (69) относится ко всем точкам стенки, а для получения глобального фильтрационного потока величину q, определенную соотношением (65) с учетом решения задачи (68), (69), достаточно умножить на площадь внутренней поверхности стенки. В противном случае, когда

$$\frac{\partial E(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2} \neq 0, \quad \frac{\partial E(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_3} \neq 0, \tag{74}$$

представляется необходимым достаточно громоздкое численное интегрирование по внутренней поверхности.

С практической точки зрения, наиболее распространенным и интересным является случай, когда предположения (74) не имеют места. Тогда последний член в уравнении (41) равняется нулю, а, следовательно, последующие приближения из представления (39) будут зависеть только от характера величины $\partial p_0 / \partial \tau$, или переходя к терминологии задачи (68), (69), от $\partial p_{in} / \partial \tau$. Не вдаваясь в подробности обезразмеривания задачи (68), (69), необходимого для строгого исследования рассматриваемой зависимости $p_{in}(\tau)$, отметим на качественном уровне, что скорость изменения величины p_{in} в рассматриваемом случае определяется отношением массы профильтровавшегося газа к общей массе газа в области D_{in}, то есть, в подавляющем большинстве случаев скорость изменения P_{in} весьма мала, что совместно со сделанным выше предположением о малости последних членов в правой части уравнения (41) делает совершенно излишним расчет первого приближения (решение уравнения (41)). Предоставляется, что последний вывод даже несколько шире, чем заданные при его получении рамки предположений, например, строго говоря, при выполнении условия (74) величина p_{in} на внутренней поверхности стенки не может не зависеть от ξ_2, ξ_3, но изменение p_{in} вдоль стенки имеет порядок отношения скорости фильтрации к скорости звука в газе, то есть, является пренебрежимо малой величиной.

В редких случаях, когда первое приближение (краевые задачи для уравнения (41)) все-таки надо рассчитывать, такая процедура может быть проведена либо аналитически, что, в принципе, возможно всегда для каждого локального положения, но представляет собой исключительно сложную и громоздкую процедуру, либо численными методами решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [22]. Независимо от того, необходим расчет первого приближения или нет, погрешность полученных решений будет иметь порядок ε^2, где ε определено формулой (36), то есть, окажется приемлемой в подавляющем большинстве случаев.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим два простейших случая цилиндрической и сферической пористых стенок постоянной толщины. Для цилиндрической стенки внутренним радиусом R^0 и внешним радиусом $R^0 + \delta$, где $\delta << R^0$ уравнение (40) имеет вид

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dp_0^2}{dr}\right)\right) = 0, \tag{75}$$

и его общее решение

$$p_0^2 = c_1 \ln r + c_2, \tag{76}$$

в котором неизвестные константы c_1, c_2 определяются из граничных условий (предполагаем, что фильтрация происходит только через боковую стенку цилиндра)

$$p_0^2(r = R^0) = p_{in}^2, \tag{77}$$

$$p_0^2(r = R^0 + \delta) = p_{out}^2, \tag{78}$$

откуда

$$p_0^2 = p_{out}^2 + \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \ln\left(\frac{r}{R^0 + \delta}\right). \tag{79}$$

Продифференцировав соотношение (79) по r получим

$$2p_0 \frac{dp_0}{dr} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \frac{1}{r}, \tag{80}$$

и относя соотношение (80) ко внутренней поверхности твердой стенки

$$\left.\frac{dp_0}{dr}\right|_{r=R^0} = \frac{1}{2p_{in}} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \frac{1}{R^0}. \tag{81}$$

Умножив соотношение (81) на коэффициент фильтрации k, получим согласно закону Дарси локальный фильтрационный поток, а затем, умножив величину локального потока на площадь поверхности стенки $S = 2\pi R^0 H$, где величину H можно выбрать равной 1, получим общий поток

$$q_{sum} = \frac{\pi k}{p_{in}} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}, \tag{82}$$

но, поскольку основной интерес в дальнейшем будет представлять массовый расход, то следует умножить равенство (82) на плотность газа (59), тогда

$$q_{sum}\rho = \frac{\pi k}{RT_g} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}. \tag{83}$$

Запишем теперь уравнение (56) для изменения массы газа в цилиндрическом объеме $\Omega_{in} = \pi R^{0^2} H = \pi R^{0^2}$

$$\frac{dm}{d\tau} = -q_{sum}\rho, \tag{84}$$

откуда

$$\frac{\pi R^{0^2}}{RT_g}\frac{dp_{in}}{d\tau} = -\frac{\pi k}{RT_g}\frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0+\delta}{R^0}\right)}, \tag{85}$$

или с учетом очевидных сокращений

$$\frac{dp_{in}}{dt} = -\frac{k}{R^{0^2}}\frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0+\delta}{R^0}\right)}. \tag{86}$$

Дополнив обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными начальными условиями (69), и полагая справедливым предположение о постоянстве давления P_{out} (70), получим решение вида (71)

$$\frac{R^{0^2}\ln\left(\frac{R^0+\delta}{R^0}\right)}{2p_{out}\cdot k}\ln\left|\frac{p_{out}+p_{in}}{p_{out}-p_{in}}\right| = -\tau + c, \tag{87}$$

А постоянную c определим из условия (69)

$$c = \frac{R^{0^2}\ln\left(\frac{R^0+\delta}{R^0}\right)}{2p_{out}\cdot k}\ln\left|\frac{p_{out}+p_{in\,0}}{p_{out}-p_{in\,0}}\right|. \tag{88}$$

Таким образом, удалось построить аналитическое решение задачи об изотермической фильтрации газа через тонкую цилиндрическую пористую стенку.

По аналогии с приведенным выше решением построим решение задачи об изотермической фильтрации газа через тонкую пористую сферическую стенку. Аналог уравнения (75) имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dp_0^2}{dr}\right)\right)=0, \tag{89}$$

а решения (76):

$$p_0^2=\frac{c_1}{r}+c_2. \tag{90}$$

Откуда с учетом (77), (78)

$$p_0^2=p_{out}^2+\frac{p_{out}^2-p_{in}^2}{\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R^0+\delta}\right). \tag{91}$$

Далее

$$\left.\frac{dp_0}{dr}\right|_{r=R^0}=\frac{1}{2p_{in}}=\frac{p_{out}^2-p_{in}^2}{\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}}\frac{1}{r^2}, \tag{92}$$

аналогично формуле (83) суммарный фильтрационный поток имеет вид

$$q_{sum}\rho=\frac{2\pi k}{RT_g}=\frac{p_{out}^2-p_{in}^2}{\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}}. \tag{93}$$

Изменение массы газа в сферическом объеме по аналогии с (85)

$$\frac{4/3\,\pi {R^0}^3}{RT_g}\frac{dp_{in}}{d\tau}=-\frac{2\pi k}{RT_g}\frac{p_{out}^2-p_{in}^2}{\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}}, \tag{94}$$

что приводит к решению

$$\frac{R^{0^3}\left(\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}\right)}{p_{out}\cdot k}\ln\left|\frac{p_{out}+p_{in}}{p_{out}-p_{in}}\right|=-\tau+c, \tag{95}$$

Откуда с учетом условия (69) получим

$$c=\frac{R^{0^3}\left(\frac{1}{R^0+\delta}-\frac{1}{R^0}\right)}{p_{out}\cdot k}\ln\left|\frac{p_{out}+p_{in\,0}}{p_{out}-p_{in\,0}}\right|. \tag{96}$$

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований. Основным результатом приведенной выше части исследования являются упрощенные математические модели процессов фильтрации газа в тонких пористых стенках. Ценность этих моделей подчеркивается возможностью получения достаточно простых аналитических решений данной задачи, построенных в квадратурах.

Ближайшие перспективы дальнейших исследований совершенно очевидны и заключаются в учете тепловых эффектов в рамках однотемпературной и двухтемпературной моделей. Кроме того, представляется, что полученные результаты будут иметь практическое применение в областях науки и техники, связанных с хранением и использованием сжатых или разреженных газов.

Следует отметить также, что предложенный асимптотический подход обеспечивает точность, вполне достаточную для подавляющего большинства практических расчетов. Это позволяет надеяться, что в отдаленной перспективе предложенные здесь упрощенные математические модели будут составной частью в более сложных математических моделей [19], обеспечив необходимое упрощение последних.

Библиографические ссылки

1. Баренблатт Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // – М.: Недра, 1972. – 288 с.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы / Коллинз Р. – М.: Мир, 1964. – 386 с.
3. Найфе А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфе. – М., 1976. – 446 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М: Мир, 1967. – 296 с.

5. Коул Д.Д. Методы возмущений в прикладной математике / Д.Д. Коул. – М.: Мир. 1972. – 276 с.

6. Евдокимов Д.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Н. Ивасишина, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 141-156.

7. Бразалук Ю.В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, Д.В. Евдокимов, О.А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.

8. Беляев Н.М. Сушка металлических изделий перед испытаниями на герметичность / Н.М. Беляев, А.А. Долинский, Л.Д. Кучма // Днепропетровск: Дизайн Принт, 1993. – 196 с.

9. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

10. Лыков А.В. Теория сушки / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.

11. Фихтенгольц Г.М. Курс интегрального и дифференциального исчисления. тт. 1-3 / Г.М. Фихтенгольц . – М.: Наука, 1964. – т. 1. – 539 с., т. 2. – 560 с, т. 3. – 546 с.

12. Беляев Н.М. Термодинамика / Н.М. Беляев. – Киев: Вища школа, 1987. – 344 с.

13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

14. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов // – Х.: Вища школа, 1986. – 216с.

15. Зино И.Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И.Е. Зино, Э.А. Тропп // – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.

16. Федоткин И.М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса / И.М. Федоткин, А.М. Айзен // – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.

17. Демидович Б.П. Численные методы анализа: монография / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова // – М.: Наука, 1967. – 368 с.

18. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. – М.: Мир, 1982. – 296 с.

19. Евдокимов Д.В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, № 8, серія «Моделювання», Випуск 1, 2009. – с. 5 – 17.

Надійшла до редакції 13.07.2018