

УДК 629.7.023.001.2(082)

Anatoly P. Lukisha

Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine

RECALCULATING TECHNIQUE OF THE THERMO-HYDRAULIC PARAMETERS OF STRAIGHT-FLOW SMOOTH-WALLED STEAM GENERATORS FROM BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND KIND FOR BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

The article is devoted to the development of a method for recalculating the thermo-hydraulic characteristics of straight-through cylindrical steam-generating channels with boundary conditions of the second kind for boundary conditions of the third kind. The need for the development of this technique is due to the presence in the literature of a large number of calculated dependences describing the heat transfer during boiling and evaporation of the coolant in smooth-walled tubes for boundary conditions of the second kind, while the practical plan problems are often conditioned by other boundary conditions, in particular boundary conditions of the third kind. The ultimate goal of the recalculation method was to create a program for calculating the thermo-hydraulic efficiency of straight-through steam generators. The proposed recalculation technique makes it possible to calculate, in the straight-through tubular steam generators, for boundary conditions of the third kind, such thermo-hydraulic characteristics as the length of the channel required for complete evaporation of the heat carrier, the power required to pump the coolant in this case, and the total amount of heat transferred to the heat carrier during evaporation.

Keywords: *straight-through tubular steam generators, evaporation zone, recalculation of thermo-hydraulic characteristics from boundary conditions of the second kind for boundary conditions of the third kind.*

Стаття присвячена розробці методу перерахунку теплогідравлічних характеристик прямооточних циліндричних парогенеруючих каналів з граничних умов другого роду для граничних умов третього роду. Необхідність розробки даної методики обумовлена наявністю в літературі великої кількості розрахункових залежностей, що описують теплообмін при кипінні і випаровуванні теплоносія в гладкостінних трубах для граничних умов другого роду, в той час, як задачі практичного плану часто обумовлені іншими граничними умовами, зокрема третього роду. Кінцевою метою методики перерахунку було створення програми для розрахунку теплогідравлічної ефективності прямооточних парогенераторів. Пропонована методика перерахунку дозволяє обчислювати в прямооточних трубчастих парогенераторах для граничних умов третього роду такі теплогідравлічні характеристики, як довжина, каналу, необхідна для повного випаровування теплоносія, потужність, необхідна для прокачування теплоносія в цьому випадку і загальна кількість тепла, яке передається теплоносію в процесі випаровування.

Ключові слова: *прямоточні трубчасті парогенератори, зона випаровування, перерахунок теплогідравлічних характеристик з граничних умов другого роду для граничних умов третього роду.*

Статья посвящена разработке метода пересчёта теплогидравлических характеристик прямооточных цилиндрических парогенерирующих каналов с граничных условий второго рода для граничных условий третьего рода. Необходимость разработки данной методики обусловлена наличием в литературе большого количества расчётных зависимостей, описывающих теплообмен при кипении и испарении теплоносителя в гладкостенных трубах для граничных условий второго рода, в то время, как задачи практического плана часто обусловлены другими граничными условиями, в частности граничными условиями третьего рода. Конечной целью методики пересчёта являлось создание программы по расчёту теплогидравлической эффективности прямооточных парогенераторов. Предлагаемая методика пересчёта позволяет вычислять в прямооточных трубчатых парогенераторах для граничных условий третьего рода такие теплогидравлические характеристики, как длина, канала, необходимая для полного испарения теплоносителя, мощность, необходимая для прокачки теплоносителя в этом случае и полное количество тепла, передаваемое теплоносителю в процессе испарения.

Ключевые слова: *прямоточные трубчатые парогенераторы, зона испарения, пересчёт теплогидравлических характеристик с граничных условий второго рода для граничных условий третьего рода.*

Introduction. In the process of creating of devices that simulate in the terrestrial conditions various heat exchange processes on-board of spacecraft and that use phase transition of the evaporation-condensation in their thermodynamic cycle, quite important is the heat-hydraulic calculation of the evaporation section. The analytical dependencies available in the literature for the thermal calculation of straight-through tube steam generators were mainly obtained for boundary conditions of the second kind. However, in the process of creating various engineering structures, problems arise for solving similar problems for other boundary conditions. Let's consider a method of recalculating the characteristics of straight-flow smooth-walled steam generators from boundary conditions of the second kind for boundary conditions of the third kind. The purpose of this calculation is to determination the length of the channel necessary for complete evaporation of the coolant, the power expended for pumping of the evaporating heat carrier and the amount of heat necessary for evaporation of the coolant. Let's cause a brief list of calculation formulas describing heat exchange and hydrodynamics in a zone of vaporization of cylindrical smooth-walled straight-flow steam generators.

Boiling into smooth-walled cylindrical channels (pipes).

Zone of nucleate boiling. At creation of methodology for calculating thermal characteristics of smooth and porous channels, we assume that the liquid at the inlet to the channel is on the saturation line. According to [1], in the zone of the nucleate boiling heat transfer coefficient is defined by the formula

$$\alpha = \alpha_1 \sqrt{1 + 7 \cdot 10^{-9} (\rho_{w_{mix}} r/q)^{3/2} (0,7\alpha_o/\alpha_1)^2}, \quad (1)$$

where

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_k^2 + (0,7\alpha_o)^2}, \quad (2)$$

here α_k – heat transfer coefficient in the water flow phase within a pipe or channel, which is calculated by the formula

$$Nu_d = \frac{\alpha_k d}{\lambda} = \frac{(\xi \xi_8) Re \cdot Pr \cdot C_t}{k + 4,5 \sqrt{\xi} (Pr^{2/3} - 1)}, \quad (3)$$

where $k = 1 + 900/Re;$ (4)

$$\xi = (1,82 \lg Re - 1,64) \quad (5)$$

C_t – amendment on flow flow nonisothermality.

For drop liquids at $\mu_w/\mu_t = 0,08 \div 40$

$$C_t = (\mu_f/\mu_w)^n, \quad (6)$$

where $n = 0,11$ – while heating the liquid;

$n = 0,25$ – while cooling the liquid.

In formula (6) μ is coefficient of dynamic viscosity, indices f and w means relating to the mean temperature and the wall temperature, respectively. Value α_o in formula (1) is boiling heat transfer coefficient in a large volume. Calculating value α_o using formula

$$\alpha_o = 4,34 q^{0,7} (p^{0,14} + 1,35 \cdot 10^{-2} p^2), \quad (7)$$

where q is value of the specific heat flux in W/m^2 ; p is pressure in MPa; α_o is heat transfer coefficient in $W/(m^2K)$. Value w_{mix} in formula (1) - the average speed of the water-steam mixture, m/s. Calculated by formula

$$w_{mix} = w_o [1 + x(\rho'/\rho'' - 1)], \quad (8)$$

where w_o - flow speed, m/s; ρ' и ρ'' - respectively, the density of the liquid and vapor on the saturation line; x - expendable mass vapour content.

As it is seen, the formula (1), that used for determine heat transfer coefficient α , contains the heat flux q . Let's substitute in equation (1) the value of the heat flux q , written for the boundary conditions of third kind. According to [2], for boundary conditions of the third kind can be written the following relationship:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\kappa'} \quad (9)$$

or

$$\kappa = \frac{\alpha \kappa'}{\kappa' + \alpha}, \text{ where } \kappa' = \frac{Bi \lambda}{d}; \quad (10)$$

so we can write

$$q = \kappa(T_{1\infty} - \bar{T}_s) = \left(\frac{\frac{\alpha \cdot Bi \cdot \lambda}{d}}{\frac{Bi \cdot \lambda}{d} + \alpha} \right) (T_{1\infty} - \bar{T}_s) \quad (11)$$

In the relations (9) - (11) are used the following notations:

α – local heat transfer coefficient from the fluid flowing in the pipe to an inner wall surface; κ' – local heat transfer coefficient from the inner wall to the environment; κ – local heat transfer coefficient from the fluid flowing in the pipe to the environment; $t_{1\infty}$ – ambient temperature; $\bar{t}_{(s)}$ – (mass-average) temperature of the liquid at the saturation line in this cross section.

For a round pipe, for the parameter κ' , according to [2], we can write the next relationship:

$$\frac{1}{\kappa'} = \frac{d}{2\lambda_c} \ln \frac{d_1}{d} + \frac{d}{\alpha_1 d_1} \quad (12)$$

where d and d_1 - inner and outer diameters of the tube; δ – wall thickness; λ_c – thermal conductivity of the wall material.

At substituting in equation (1) value of $q = \kappa(t_{1\infty} - \bar{t}_{(s)}) = f(\alpha)$ from equation (11), we can notice that in this case the value α is contained as in the left so in right side of the equation. Therefore, the equation (1) is non-linear algebraic equation regarding to the value the heat-transfer coefficient α , that can't be resolved analytically in explicit view. When calculating the value α according equation (1) should use the method of successive approximations. The value of the specific heat flux recorded by the formula (11) for the boundary conditions of the 3rd kind should be also inserted in the formula (7) for heat transfer coefficient α_0 (at the boil in a large volume).

Calculation of boiling heat transfer in cylindrical smooth wall channels at dryout zone. As it is known [1], [3], [4], at boiling liquid in the smooth-walled pipe, with an increase in the value of mass consumable steam content, starting with a certain value, called the boundary vapor content, dispersed flow regime occurs, when starting the drying of the liquid film on the wall. Vapor-liquid stream begins to move in a vaporized mixture of steam and liquid droplets. Thus there is a significant deterioration in the heat exchange channel. According to [5] the relation for the calculation of the boundary vapour content between pre-crisis zone and supercritical zone can be represented as follows.

$$x_{\text{bond.}} = 0,3 + 0,7 \exp(-45 \tilde{w}) \quad (13)$$

where $\tilde{w} = [\rho w \mu' / (\sigma \rho'')] (\rho / \rho'')$; $\rho w = w_g$ – mass velocity.

The heat transfer coefficient in the dryout zone was calculated from the equation proposed by [6]:

$$Nu'' = 0,028 Re''^{0,8} Pr''^{0,4} (\rho' / \rho'')^{1,15}, \quad (14)$$

where $Nu'' = \alpha d / \lambda''$; $Re'' = w'' d / \nu''$ – the Reynolds number is calculated using the reduced speed of steam $w_r = (\bar{\rho} w) x / \rho''$. Here d – diameter of the channel; λ'' – thermal conductivity of a vapour.

In this case, for calculating of the specific heat flow transferred into the evaporation zone in the supercritical part of the channel (zone of dryout), as well, as for the zone of advanced nucleate boiling, it is necessary to use a formula similar to the expression (11), in which, however, instead of the heat transfer coefficient for the pre-crisis areas should be used the heat transfer coefficient for the supercritical zone (dryout zone).

$$q = \kappa (T_{1\infty} - \bar{T}_s) = \left(\frac{\alpha_{sc,z} \cdot Bi \cdot \lambda}{\frac{\alpha}{Bi \cdot \lambda} + \alpha_{sc,z}} \right) (T_{1\infty} - \bar{T}_s), \quad (15)$$

where $\alpha_{sc,z}$ – the heat transfer coefficient in the supercritical zone (dryout zone)

Calculation of hydraulic resistance at the motion of two-phase vapour-liquid flow in smooth-wall channels. When calculating the hydraulic resistance at the motion of two-phase vapour-liquid flow in the pipes and channels, the method developed by Lockhart, R. W. and Martinelli R.C. [7] was used. The essence of it is that the pressure gradient due to friction in the two-phase flow is usually expressed in terms of coefficients, which are multiplied by the respective gradients in the single-phase flows, i.e

$$(dp/dz)_{TP} = \Phi_L^2 (dp/dz)_L \quad \text{or} \quad (dp/dz)_{TP} = \Phi_G^2 (dp/dz)_G \quad (16)$$

where $(dp/dz)_{TP}$ – is pressure drop due to friction in the two-phase flow; $(dp/dz)_L$ and $(dp/dz)_G$ – are respectively, the pressure drop for a liquid or gas, if a liquid or gas occupied the entire cross section of the pipe; Φ_L^2 и Φ_G^2 – empirically determined coefficients; z is a coordinate.

Lockhart and Martinelli [6] found that the coefficients Φ_L^2 and Φ_G^2 are the function of the parameter X^2 , which is determined as follows

$$X^2 = (dp/dz)_L / (dp/dz)_G \quad (17)$$

According Chisholm, D., Sutherland L. [8]:

$$\Phi_L^2 = 1 + C/X + 1/X^2, \quad (18)$$

$$\Phi_G^2 = 1 + CX + X^2 \quad (19)$$

where
$$C = (1/K)(\sqrt{\rho_L/\rho_G}) + (K)(\sqrt{\rho_G/\rho_L}) \quad (20)$$

Herein K is the slide factor, that according Zivi, S. M. [9] for vapour-water flow is determined as:

$$K = (\rho_L/\rho_G)^{1/3} \quad (21)$$

When calculating values $(dp/dz)_L$ and $(dp/dz)_G$ in formula (6), the following values of Reynolds numbers have to be used:

$$Re_L = Re_o (1 - x); \quad (22)$$

$$Re_G = Re_o x (\mu'/\mu'') \quad (23)$$

where Re_o is Reynolds number at the channel inlet; x is the mass expendable vapour content of the flow; μ' and μ'' are, correspondingly, coefficients of dynamic viscosity of liquid and vapour at saturation line.

The scheme for calculating the thermo-physical parameters of a cylindrical channel when two-phase vapour-liquid flow passes through it and under boundary conditions of the third kind. Let's depict schematically the order of calculations.

At the inlet to the channel of diameter d , the flow parameters on the saturation line are set - temperature T_{so} and pressure P_{so} . Also, the Reynolds number Re_o at the entrance of the channel is set (mass flow rate $\dot{m}$, kg / c). On the channel surface, the ambient temperature $T_{1\infty}$ and the law of heat exchange between the channel wall and the environment (criterion Bi) are set. In this case, the temperature drop along channel wall thickness is not taken into account, since it is assumed that the wall thickness of the channel is rather small.

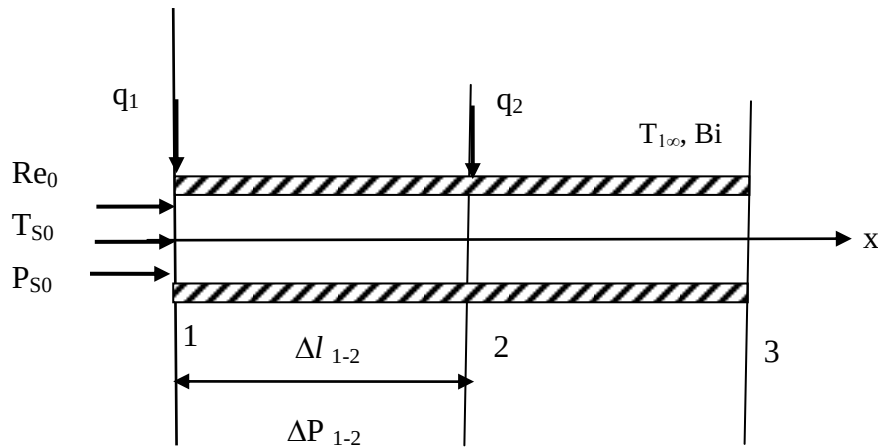


Fig. 1. Calculation scheme

Due to the fact that for beginning of calculations of thermal characteristics in a smooth-wall steam-generating channel (formulas (1) - (12)), it is necessary to know the value of the vapour content, then we assume that at the channel entrance this value is equal to 0.001 ($x_0 = 0.001$). As is known [1], the zone of heat exchange in cylindrical channels in general is characterized by two sections - zone of nucleate boiling and dryout zone (respectively pre-crisis zone and supercritical zone). The boundary between these zones is determined by the crisis of heat exchange of the second kind. The parameter that characterizes the end of one section and the beginning of the second section is the boundary vapour content. Let's describe firstly the calculation procedure for the zone of nucleate boiling.

Since the calculated values of the heat flux and the heat transfer coefficient in formula (1) are written for boundary conditions of the second kind, we stake out the channel into small sections Δl , within which we will assume that the value of the heat flux is constant. The parameter characterizing the end of one section and the beginning of the second section is the boundary vapour content. Within these sections, the calculation of the thermo-physical characteristics of the channel was carried out by the method of successive approximations.

In the first step of the calculations in section 1 (input section) (Fig. 1), calculate the specific heat flux

$$q_1^{(1)} = f(T_{1\infty}, Bi, T_{s0}, P_{s0}, x_0, Re_0, d), \quad (24)$$

from equation (1) and equation (11) by the half-dividing method in the region $0 \leq \alpha \leq 10^7$, since according to [4] the heat transfer coefficient at boiling of the moving fluid in the pipes varies within the limits of $\alpha \approx 10^3 - 10^5 \text{ W / m}^2 \text{ K}$.

Next, we calculate the total amount of heat, which is transferred to the evaporating heat carrier between sections 1 and 2 by formula

$$Q_{1-2}^{(1)} = q_1 \cdot F_{lat.surf.1-2} , \quad (25)$$

where $F_{lat.surf.1-2} = \pi d \Delta \ell_{1-2} . \quad (26)$

After that, we find the increment of the vapour content in the section 1-2:

$$\Delta x_{1-2}^{(1)} = \frac{Q_{1-2}}{\dot{m} \cdot r(1 - x_0)} , \quad (27)$$

and the value of the vapor content in section 2 in the first step of the iteration:

$$x_2^{(1)} = x_0 + \Delta x_{1-2} . \quad (28)$$

where $\dot{m}$ – the total mass flow rate of the heat carrier through the pipe (channel), kg / s; r – is the heat of vaporization, J / kg; x – is the mass steam content of flow.

Note, that the lower indices in the above expressions refer to the cross section number of channel, and the upper indices refer to the sequence number of the iteration.

Knowing the values of x_0 and $x_2^{(1)}$, we find the average value of the vapour content between cross sections 1 and 2 in the first step of the iteration

$$x_{1-2.av.}^{(1)} = (x_0 + x_2^{(1)}) / 2 \quad (29)$$

Based on the thermo-physical properties of the liquid in the inlet cross section of the pipe, the calculated vapor content, the relative length of the section $x_{1-2.av.}^{(1)}$, the relative length of the section $\Delta \xi = \Delta \ell / d$, the Reynolds number at the entrance of the channel Re_0 and the diameter of the channel d , we calculate the pressure drop in section 1-2 (formulas (16) - (23))

$$\Delta P_{1-2}^{(1)} = f(\Delta \xi, x_{1-2.av.}^{(1)}, Re_0, d) \quad (30)$$

and the value of saturation pressure in the cross section 2:

$$P_{s2}^{(1)} = P_{so} - \Delta P_{1-2}^{(1)} . \quad (31)$$

Using the pressure value $P_{s2}^{(1)}$, we find the temperature value on the saturation line in cross section 2 in the first step of the iteration

$$T_{s2}^{(1)} = f(P_{s2}^{(1)}) . \quad (32)$$

Values of thermo-physical properties of liquid and vapour on the saturation line are usually found using reference data by interpolation between discrete points in steps of 10 °C. In the course of numerical realization of this calculation procedure, interpolation was carried out using the Lagrange interpolation formula. The discrete values of the thermo-physical properties of liquid and vapour were taken from [10].

The average temperature of the liquid in the section 1-2 is calculated from the temperature values T_{so} and $T_{s2}^{(1)}$

$$T_{s1-2\text{ av}}^{(1)} = \frac{T_{so} + T_{s2}^{(1)}}{2} . \quad (33)$$

By the value of this temperature, using the Lagrange interpolation formula, the average value of the saturation pressure in the 1-2 section is calculated.

$$P_{s1-2\text{ av}}^{(1)} = f(T_{s1-2\text{ av}}^{(1)}) \quad (34)$$

Further, proceeding from the previously calculated values $x_2^{(1)}$, $T_{s2}^{(1)}$, $P_{s2}^{(1)}$ (formulas (28), (31), (32)), we calculate the value of the specific heat flux in cross section 2 in the first step of the iteration.

$$q_1^{(1)} = f(T_{so}, Bi, T_{s2}^{(1)}, P_{s2}^{(1)}, x_2^{(1)}, Re_o, d) \quad (35)$$

Then we calculate the value of the average specific heat flux in the section 1-2 in the first step of the iteration, assuming this value is constant within the section 1-2

$$q_{1-2\text{ av}}^{(1)} = \frac{q_1^{(1)} + q_2^{(1)}}{2} . \quad (36)$$

After this, we go to the second step of the iteration and again calculate the value of the total amount of heat which is transferred to the evaporating heat carrier between sections 1 and 2

$$Q_{1-2}^{(1)} = q_{1-2\text{ av}}^{(1)} \pi d \Delta \ell_{1-2} \quad (37)$$

Further, according to the above scheme, we calculate the next set of thermo-hydraulic characteristics of the evaporating flow in section 1-2 in the second step of the iteration.

$$\Delta x_{1-2\text{ av}}^{(1)} = \frac{Q_{1-2}^{(2)}}{\dot{m} \cdot r(1-x)} \quad (38)$$

We note that at this step of the iteration the value of the heat of evaporation r in formula (38) is calculated from the mean values of the saturation temperature $T_{s1-2\text{ av}}^{(1)}$ and the saturation pressure $P_{s1-2\text{ av}}^{(1)}$ obtained in the previous iteration step (formulas (33) and (34), respectively).

$$x_2^{(2)} = x_o + \Delta x_{1-2\text{ av}}^{(2)}, \quad (39)$$

$$x_{1-2\text{ av}}^{(2)} = \frac{x_o + x_2^{(2)}}{2}, \quad (40)$$

$$\Delta P_{1-2}^{(2)} = f(\Delta \xi, x_{1-2\text{ av}}^{(2)}, \text{Re}_o, d), \quad (41)$$

$$P_{s2}^{(2)} = P_{so} - \Delta P_{1-2}^{(2)}, \quad (42)$$

$$T_{s2}^{(2)} = f(P_{s2}^{(2)}), \quad (43)$$

$$T_{s1-2\text{ av}}^{(2)} = \frac{T_{so} + T_{s2}^{(2)}}{2}, \quad (44)$$

$$P_{s1-2\text{ av}}^{(2)} = f(T_{s1-2\text{ av}}^{(2)}), \quad (45)$$

$$q_2^{(2)} = f(T_{1\infty}, Bi, T_{s2}^{(2)}, P_{s2}^{(2)}, x_2^{(2)}, \text{Re}_o, d), \quad (46)$$

$$q_{1-2\text{ av}}^{(2)} = \frac{q_1 + q_2^{(2)}}{2} \quad (47)$$

Having the values of $q_{1-2\text{ av}}^{(1)}$ and $q_{1-2\text{ av}}^{(2)}$, calculated at the first and second step of the iteration, we compare them with each other and calculate the relative magnitude of the discrepancy between these quantities.

$$\Delta C = \frac{q_{1-2\text{ av}}^{(2)} - q_{1-2\text{ av}}^{(1)}}{q_{1-2\text{ av}}^{(2)}} \cdot 100\% \quad (48)$$

If the value of ΔC is greater than 1%, then the average value of the specific heat flux in the distance between the cross sections 1-2 obtained in the second iteration step ($q_{1-2\text{ av}}^{(2)}$) is substituted into the formula (37) instead of the same value that was obtained in the first step of the iteration ($q_{1-2\text{ av}}^{(1)}$) and calculations of the thermo-hydraulic values, starting with formula (37) to formula (48) are carried out again. In such way is organized the third step of the iteration (the third successive approximation). The calculation of thermal-hydraulic characteristics by the method of

the successive approximations in the initial section 1-2 continues until the condition $\Delta C \leq 1\%$ is satisfied. After this condition is fulfilled, the final value of the total amount of heat is calculated on the interval between cross sections 1 and 2

$$Q_{1-2 \text{ оконч.}}^{(I)} = q_{1-2 \text{ оконч.}}^{(i)} \pi d \Delta \ell . \quad (49)$$

After the condition $\Delta C \leq 1\%$ has been fulfilled, the hydraulic power required to pump the coolant in the 1-2 section is calculated too.

$$N_{1-2 \text{ оконч.}}^{(I)} = \Delta P_{1-2 \text{ оконч.}}^{(i)} \cdot \frac{\dot{m}}{\rho_{1-2}^{(i)}} , \quad (50)$$

where $\dot{m} = \frac{\text{Re}_0 \mu_0 \pi d}{4}$ - is the total mass flow rate of the heat carrier through the pipe (channel), kg / s; Re_0 and μ_0 are the Reynolds number and the dynamic viscosity of the fluid in the inlet cross section of the channel; $\rho_{1-2}^{(i)}$ - the density of the liquid, calculated from the value of temperature $T_{s1-2}^{(i)}$.

After calculating of the values $Q_{1-2 \text{ fin.}}^{(I)}$ and $N_{1-2 \text{ fin.}}^{(I)}$, these values as well as the value $\Delta \ell_{1-2} = \text{const}$ are entered in the database for their subsequent use when finding the total amount of heat which is transferred to the evaporating heat carrier, the total power expended for pumping the cooler and the total length of the channel at which the evaporation of the coolant is complete.

After the calculation of the thermo-hydraulic parameters of the evaporating flow in the section 1-2 was completed, the calculated values in cross section 2 were taken as the initial values for the next interval 2-3 (Fig. 1) and the calculations in this section were carried out according to the calculation scheme in the interval 1-2. After the completion of calculations in section 2-3, the summation of the values $Q_{1-2 \text{ fin.}}^{(I)} + Q_{2-3 \text{ fin.}}^{(II)}$; $N_{1-2 \text{ fin.}}^{(I)} + N_{2-3 \text{ fin.}}^{(II)}$; $\Delta \ell_{1-2} + \Delta \ell_{2-3}$, the calculations were transferred to the interval 3-4, etc.

The calculation was carried out until the vapor content with an accuracy of 1% became equal to the boundary vapour content x_{bond} (formula (5)).

Next, we briefly describe the order of calculations in the dryout zone ($x_{\text{bond}} \leq x \leq 1$). When performing calculations in this zone, the computation of the heat flux and the heat transfer coefficient should be performed using the dependence (15), (14), (12) that are typical for the dryout zone. In the rest, the calculation procedure coincides with the order of calculation for the pre-critical zone. Calculation in the dryout (supercritical) zone should be carried out until, with an accuracy of 1%, the vapour content will not differ from 1.

Conclusion. The above procedure allows to do the recalculation of the thermo-hydraulic characteristics of straight-flow smooth-walled steam generators from boundary conditions of the second kind for boundary conditions of the first kind. This

calculation method was created with the purpose of subsequent calculation of the thermo-hydraulic efficiency of straight-through cylindrical steam generators and was implemented in the form of a computational program.

References

1. Handbook of thermal-hydraulic calculation (nuclear reactors, heat exchangers, steam generators). Edited by. P. L. Kirilov. – M.: Energoatomizdat, 1990. – 360 pp. (rus.)
2. Petuhov B. S. Heat transfer and resistance at laminar flow of a liquid in pipes [Текст] / B. S. Petuhov. – Moscow: Energija Press, 1967. – 411 pp.(rus.).
3. Heat transfer in nuclear power plants. Edited by B. S. Petuhov. – M.: Energoatomizdat, 1986. – 472 pp. (rus.)
4. Kutepov A.M. Hydrodynamics and heat transfer in steam generation / A. M. Kutepov, L. S. Serman,, N. G. Stjushin. – M.: Vysshaja skola, 1986. – 448 pp.(rus.)
5. Kutateladze S. S. About boundary vapor content at the boil in a circular pipe / S. S. Kutateladze // Teploenergetika. – 1979. – № 6. – Pp. 54–55.(rus.).
6. Miropolsky Z. L. Heat transfer to the superheated steam with the input and output of heat / Z. L. Miropolsky // Teploenergetika. – 1975. – № 3. – P. 75. (rus.)
7. Lockart R. W. Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes / R. W. Lockart and R. C. Martinelli // Chemical Engineering Progress. – 1949. – Vol. 45(1). – Pp. 39–48.
8. Chisholm D., L. A. Sutherland L. A. Prediction of pressure gradient in pipeline system during two-phase flow / D. Chisholm, L. A. Sutherland // Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers. – 1969. – Vol. 184. – Pt. 3c. – Pp. 24–32.
9. Zivi S. M. Estimation of steady state steam void fraction by means of the principle of minimum entropy production / S. M. Zivi // Yournal Heat Transfer. – 1964. – 86. – Pp. 247–252.
10. Vargaftik N. B. Handbook on thermophysical properties of gases and liquids / N. B. Vargaftik. – M.: Nauka, 1972. – 720 pp.(rus.)

УДК 532.684

Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, А.В. Давыдова, Д.В. Евдокимов,
М.А. Стояновский, Р.А. Шульга

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ СТЕНКУ. ЧАСТЬ 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ, ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Для математического и численного моделирования процессов фильтрации газа через тонкие пористые тела предложено использовать три физические и, соответственно, математические модели: модель изотермической фильтрации, модель неізотермической однотемпературной фильтрации и модель неізотермической двухтемпературной фильтрации. Стандартными методами асимптотического анализа, используя в качестве малого параметра отношение характерной толщины тонкого пористого тела к его характерному размеру в касательном направлении, указанные математические модели могут быть сведены к асимптотическим математическим моделям, представляющим собой последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, записанных по координате, нормальной к тонкому телу. Полученные уравнения всегда могут быть проинтегрированы аналитически в квадратурах или численно при помощи стандартных процедур. Для изотермической фильтрации в нулевом приближении удалось получить достаточно простое аналитическое решение, а также удалось оценить погрешность полученного результата. Предложенные математические модели и методики расчета могут быть рекомендованы для использования в ракетно-космической технике, химической и медико-биологической промышленности.

Ключевые слова: фильтрация, газ, температура, изотермическая модель, однотемпературная модель, двухтемпературная модель, асимптотические методы.

Для математичного та чисельного моделювання фільтрації газу крізь тонкі пористі тіла запропоновано використовувати три фізичні та, відповідно, математичні моделі: модель ізотермічної фільтрації, модель неізотермічної однотемпературної фільтрації та модель неізотермічної двохтемпературної фільтрації. Стандартними методами асимптотичного аналізу, використовуючі в якості малого параметру відношення характерної товщини тонкого пористого тіла до його характерного розміру у дотичному напрямку, зазначені математичні моделі може бути зведено до асимптотичних математичних моделей, які представляють собою послідовності крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються, записаних по координаті, нормальній до тонкого тіла. Отримані рівняння завжди можуть бути проінтегровані аналітично у квадратурах чи чисельно за допомогою стандартних процедур. Для ізотермічної фільтрації у нульовому наближенні вдалося отримати достатньо простий аналітичний розв'язок, а також вдалося оцінити похибку отриманого результату. Запропоновані математичні моделі та методики розрахунку

можуть бути рекомендовані для застосування у ракетно-космічній техніці, хімічній та медіко-біологічній промисловості.

Ключові слова: фільтрація, газ, температура, ізотермічна модель, однотемпературна модель, двохтемпературна модель, асимптотичні методи.

Three physical and correspondingly mathematical models are proposed to use for mathematical and numerical modeling of gas filtration through thin porous bodies, in particular: isothermal model, non-isothermal one-temperature model and non-isothermal two-temperature model. The mentioned mathematical models can be reduced by standard methods of asymptotic analysis, using a relation of reference thickness of the thin body to its reference size in tangential direction as a small parameter, to asymptotic mathematical models, which are sequences of boundary-value problems for ordinary differential equations with separable variables, formulated with respect to normal coordinate to the thin body. The obtained equations always can be integrated analytically in quadratures or numerically by standard procedures. It was managed to obtain an enough simple analytical solution for isothermal filtration in zero approximation, beside of that it was managed to estimate an error of the obtained results. The proposed mathematical models can be recommended for application in development of launcher-missile and space equipment, in chemical and medical-biological industries.

Key words: filtration, gas, temperature, isothermal model, one-temperature model, two-temperature model, asymptotic methods.

Актуальность проблемы. В настоящее время во многих технологических процессах используются газы, находящиеся под различными (как повышенными, так и пониженными) давлениями и содержащиеся в замкнутых емкостях. В силу различных причин, в том числе и в силу условий технологического процесса, стенки этих емкостей полностью или частично могут состоять из пористого материала, допускающего фильтрацию газа. Следует отметить, что фильтрация газа представляется куда как более сложным физическим процессом, нежели аналогичная фильтрация несжимаемой жидкости, и, в отличие от последней, как правило, описываются нелинейными математическими моделями. Понятно, что в полной постановке задача фильтрации газа через тонкую пористую стенку может вызвать заметные вычислительные трудности даже на современном уровне вычислительной техники. С другой стороны, в прикладных работах, выполненных на уровне инженерного анализа, встречается значительное количество упрощенных расчетных схем, к сожалению, не всегда надлежащим образом обоснованных, но, по мнению авторов, обеспечивающих точность, достаточную для технических приложений. Предоставляется целесообразным провести асимптотическое исследование полной математической модели рассматриваемого процесса с целью, как упрощения соответствующих прикладных расчетов, так и оценки эффективности и точности распространенных инженерных подходов. Полученные в результате данного исследования расчетные схемы могут предоставлять практический интерес в энергетике, ракетостроении, авиации, экологии, химической и медико-биологической промышленности и многих других отраслях современных техники и технологий.

Поскольку практически любая технология работы с веществами в газообразном состоянии предполагает их содержание в изолированных емкостях при повышенном давлении, вопрос об экономическом, и, возможно, экологическом ущербе от утечек газа предоставляется весьма актуальным для большинства направлений современной промышленности, энергетики, сельского хозяйства, транспорта. Кроме того, ряд технологических процессов в химической, медико-биологической промышленности и коммунальной сфере предполагают фильтрацию газа через пористую среду с целью его очистки. Очевидно, что совершенствование как технологий хранения газов, так и методов их очистки требует разработки адекватных и высокоэффективных методов расчета, что, по мнению авторов настоящей работы, может быть достигнуто только на основе разработки специальных, удобных для расчета математических моделей. Учитывая исключительно широкий спектр областей применения рассматриваемых технологий, очевидным требованием, предъявляемым к разрабатываемым математическим моделям, должна быть их универсальность, что может быть достигнуто только путем вывода таковых математических моделей из самых общих исходных положений, что отнюдь не всегда делалось ранее. Указанные достоинства предлагаемых в настоящей работе математических моделей внести с исключительной важностью сфер их применения определяют актуальность данного исследования, как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. Отдельно следует отметить, что благодаря важной роли, которую технологии хранения и переработки газов играют в различных отраслях современной индустрии, тематика настоящей работы оказывается неразрывно связанной с программами развития соответствующих отраслей, принятых как в Украине, так и на уровне международного сотрудничества нашего государства. В первую очередь, это относится к энергетике, ракетно-космической технике, авиации, химической и медико-биологической промышленности.

Как отмечалось выше, в современной практике инженерного расчета рассматриваемого класса явлений зачастую используются недостаточно обоснованные подходы, которые не могут обеспечить требуемую точность расчетов. Обзор таких работ с анализом сделанных в них ошибок никак не входит в цели настоящей работы, поэтому ограничимся здесь лишь анализом наиболее распространенных недостатков инженерных подходов:

а) использование необоснованных линеаризаций, которые могут привести к возникновению неконтролируемых ошибок;

б) ненадлежащий учет геометрической формы емкостей для хранения газов;

в) проведение расчетов фильтрации газа и изменения массы газа в емкости в одном масштабе времени, что неизбежно влечет накопление вычислительной погрешности.

Поясним названные ошибки подробнее. Уравнение изотермической фильтрации газа, записанное в переменных давления, является нелинейным поскольку коэффициент фильтрации зависит от давления. В более сложных

математических моделях, обобщающих модель изотермической фильтрации, это обстоятельство, безусловно, также имеет место. В инженерных расчетных схемах распространены приемы, заменяющие зависящий от давления коэффициент фильтрации некоторым постоянным осредненным значением. Учитывая большой перепад давления поперек пористой стенки и существенное изменение давления по времени, подобная практика предоставляется недостаточно корректной, поскольку ведет к появлению и накоплению систематической ошибки. Стенки емкостей для хранения газов в подавляющем большинстве случаев плоскими не являются (как правило, они сферические или цилиндрические), замена с целью упрощения в расчете истинной формы стенки плоской формой также ведет к определенным погрешностям, которые, по меньшей мере, следует оценить. Третья проблема связана с тем, что коэффициент фильтрации, вообще говоря, величина достаточно малая, вследствие чего давление внутри емкости в результате утечки изменяется весьма медленно, а фильтрационное поле течения в тонкой стенке устанавливается достаточно быстро. То есть, в задаче есть два масштаба времени. При численной реализации традиционных алгоритмов указанное обстоятельство вынуждает моделировать «медленный» процесс при помощи расчетов в «быстром времени», что неизбежно потребует больших затрат машинного времени и приведет к накоплению погрешности.

В основу разработанной в настоящей работе альтернативной математической модели положена общеизвестная математическая модель изотермической фильтрации газа в газонасыщенной пористой среде [1, 2], а также полученные ниже некоторые обобщения этой модели, учитывающие тепловые эффекты в процессе фильтрации. Основной и достаточно очевидной идеей, используемой далее для построения требуемой альтернативной математической модели, был применение к исходным общим моделям асимптотических методов [3 - 5]. В качестве малого параметра, используемого для построения асимптотических разложений, следуя работам [6, 7], предлагается использовать отношение минимальной толщины стенки к характерному размеру емкости, содержащей газ.

Целью настоящего исследования является разработка альтернативных асимптотических математических моделей, которые позволили бы развитие на их основе высокоэффективных расчетных схем, обеспечивающих корректный анализ нелинейностей, правильно отображающих геометрическую форму емкости и приспособленных к расчету разномасштабных по времени процессов.

Понятно, что указанными математическими моделями описание рассматриваемых процессов отнюдь не исчерпывается. Анализ других эффектов, связанных с фильтрацией газа, в том числе в тонких телах, можно найти в монографии [8].

Математическая постановка задачи. Вывод математической модели рассматриваемого процесса проведем, следуя в общих чертах монографии [1], но поскольку объект исследования в настоящей работе несколько отличается от

объекта, изученного в работе [1], приходится здесь полностью воспроизводить вывод разрешающих уравнений, лишь относительно граничных условий довольствуясь обсуждением отличий от вышеупомянутой монографии. При этом нельзя сказать, что далее будет рассмотрен частный случай задачи, поставленной в монографии [1], поскольку в ней рассмотрение ограничено случаем изотермической фильтрации газа, а в настоящей работе спектр температурных режимов значительно шире. В то же время, если в системе в целом имеют место умеренные перепады температур, то естественно ожидать, что аналогичный перепад температуры поперек тонкого пористого тела также будет невелик, что вполне оправдывает предположение об изотермической фильтрации газа. Правда, предположение об изотермической фильтрации относится, как частный случай, только к однотемпературной модели, которую надо применять с известной осторожностью, поскольку при значительных перепадах давления на тонком пористом теле газ при фильтрации расширяется и неизбежно охлаждается, тогда для выполнения условия изотермичности фильтрации следует потребовать, чтобы масса тонкого пористого тела была много больше массы газа, а скорость фильтрации была настолько мала, что газ успевал бы нагреться за счет теплообмена с тонким пористым телом. Даже эти краткие предварительные замечания показывают необходимость более подробного анализа, нежели приведенный в монографии [1].

Рассмотрим произвольный объем (элемент) пористой среды D , ограниченного поверхностью S . Отметим, что объем D , вообще говоря, не может быть бесконечно малым, поскольку поры в пористой среде имеют малые, но конечные размеры, а геометрические масштабы области D должны быть много больше размеров пор, чтобы в дальнейшем рассматривать пористую среду как два независимых континуума [1, 2, 9, 10]. Указанное обстоятельство особенно важно для настоящей работы, поскольку предмет таковой является фильтрация через тонкую стенку, а приведенное выше ограничение ведет к тому, что рассматриваемая тонкая пористая стенка имеет не только верхнее, но и нижнее ограничение по толщине. За бесконечно малое время dt приток жидкости (газа) внутрь элемента составит

$$-d\tau \int_S \rho u_n dS = -d\tau \int_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости (газа), $\vec{u}$ – ее скорость. Тогда приращение массы в объеме D

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_D \sigma \rho dv \right) d\tau = \left(\int_D \frac{\partial \sigma \rho}{\partial \tau} dv \right) d\tau, \quad (2)$$

где σ – пористость среды, полагаемая здесь и далее постоянной. Поскольку в силу теоремы Гаусса-Остроградского [11]

$$\int_S \rho u_n dS = \int_D \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dv, \quad (3)$$

получим

$$\int_D \left(\frac{\partial \sigma \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) dv = 0. \quad (4)$$

В силу произвольности объема D получим основные уравнения фильтрации жидкости переменной плотности (газа)

$$\frac{\partial(\sigma \rho)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) было получено в монографиях [1, 2, 9] и должно быть дополнено уравнением, выражающим закон Дарси

$$\vec{u} = -k \operatorname{grad} p, \quad (6)$$

где k – коэффициент фильтрации, p – давление. Откуда очевидно следует

$$\frac{\partial(\sigma \rho)}{\partial \tau} - \operatorname{div}(k \rho \operatorname{grad} p) = 0. \quad (7)$$

Отметим, что, пожалуй, более естественным было бы вводить закон Дарси в виде

$$\rho \vec{u} = -k^* \operatorname{grad} p, \quad (8)$$

что позволило бы линеаризовать второй член в уравнении (7), однако для сжимаемой жидкости в таком случае возникли бы существенные трудности с определением модифицированного коэффициента фильтрации k^* , поэтому дальнейшее рассмотрение проблемы будем основывать на представлении закона Дарси (6) и уравнении фильтрации (7). Тем не менее, следует отметить,

что традиционный коэффициент фильтрации k также может зависеть от давления и температуры.

Обратимся теперь к уравнению состояния идеального газа, которое запишем в виде [12]

$$\frac{p}{\rho} = RT_g, \quad (9)$$

где R – газовая постоянная данного газа, T_g – температура газа. Общая модель процессов тепломассообмена при фильтрации газа достаточно сложна, поэтому ограничимся здесь рассмотрением наиболее простых частных случаев:

1. Изотермическая фильтрация. Простейший случай, рассмотренный в монографиях [1, 2, 9], с физической точки зрения соответствует условиям

$$T_{in} = T_{out}, \quad (10)$$

где T_{in} – температура газа внутри емкости, ограниченной пористой стенкой, а T_{out} – вне ее. Кроме того, в данном случае предполагается, что масса твердого каркаса пористой среды значительно превосходит массу фильтрующегося газа, до такой степени, что теплообмен с газом не может сколько-нибудь заметно изменить температуру твердого каркаса, а, напротив, в результате теплообмена между каркасом и газом температура газа выравнивается с температурой каркаса. Применение подобной модели в монографиях [1, 2, 9], ориентированных, в первую очередь, на геологические процессы, то есть, фильтрация газа в гигантских по массе массивах пористой среды, вполне естественно и очевидным образом обоснованно, однако для фильтрации газа через тонкие пористые тела, не обладающие столь большой массой, приведенные выше предположения должны применяться с известной осторожностью. При условии

$$T_g = T_f = \text{const}, \quad (11)$$

где T_f – температура твердого каркаса, получим

$$\rho = \frac{p}{RT_g}. \quad (12)$$

Подставив полученное соотношение (12) в уравнение (7) и полагая пористость σ и коэффициент фильтрации k постоянными, получим следующее уравнение

$$\frac{\sigma}{RT_g} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{k}{RT_g} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} p), \quad (13)$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{k}{2\sigma} \Delta(p^2), \quad (14)$$

далее будем обозначать $\chi = \frac{k}{2\sigma}$.

Уравнение (14) – уравнение изотермической фильтрации газа – широко известно в современной теории фильтрации [1, 2, 9]. Содержащаяся в правой части уравнения (14) квадратичная нелинейность представляет известные трудности при решении и чаще всего учитываются на уровне разного рода локальных или глобальных линеаризаций, что, увы, не всегда обосновано.

Замечание. Понятно, что при фильтрации газа невозможны ни изохорный, ни изобарный процессы, что совершенно очевидно из физических соображений. Однако, адиабатная фильтрация газа, в принципе, возможна и относится к случаю, когда масса пористого тела много меньше массы фильтрующегося газа, то есть, пористое тело является асимптотически тонким. Подобная ситуация может возникнуть при фильтрации через пористые мембраны в мембранных фильтрах или при фильтрации через тонкие тканые материалы. Оба указанных случая весьма далеки от предмета рассмотрения настоящей работы и не представляют интереса для ее авторов, однако, могут быть рекомендованы для отдельного самостоятельного исследования.

2. Неизотермическая фильтрация, однотемпературная модель. В рассматриваемом случае, по-прежнему, предполагается, что масса пористого каркаса, через который происходит фильтрация газа, значительно превосходит массу фильтрующегося газа, и при движении газа успевает установиться тепловое равновесие между газом и каркасом при температуре, практически совпадающей с температурой каркаса. Однако в данном случае на тонком пористом теле имеет место перепад температур, который вызывает тепловой поток через пористую поверхность. По соображениям, аналогичным заключениям, положенным в основу вывода уравнения (5) получим

$$c_g \rho_a \frac{\partial T_f}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_f \operatorname{grad} T_f), \quad (15)$$

где c_g – осредненная общая теплоемкость пористой среды; ρ_a – осредненная плотность пористой среды; λ_f – эффективная теплопроводность пористой среды, в силу сделанных выше предположений совпадающая с

теплопроводностью каркаса; T_f – температура каркаса, в силу тех же предположений равная температуре газа

$$T_f = T_g. \quad (16)$$

Очевидным условием корректности такой постановки задачи является невыполнение равенства (10)

$$T_{in} \neq T_{out}. \quad (17)$$

Отметим, что входящие в уравнение (15) теплофизические параметры пористой среды c_g , ρ_a , λ_f весьма затруднительно определяются экспериментально и, в принципе, могут зависеть от температуры T_f , представляя соответствующую нелинейность.

В данном случае $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \neq 0$; $\frac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0$, тогда в уравнении (7), полагая, как и раньше, $\sigma = \text{const}$ и $k = \text{const}$

$$\sigma \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial T_f}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial T_f} \right) = k \operatorname{div} \left(\frac{p}{RT_f} \operatorname{grad} p \right), \quad (18)$$

и учитывая уравнение состояния (9), то есть

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{RT_f}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial T_f} = -\frac{p}{RT_f^2}, \quad (19)$$

и следовательно

$$\sigma \left(\frac{1}{RT_f} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{p}{RT_f^2} \frac{\partial T_f}{\partial \tau} \right) = k \operatorname{div} \left(\frac{1}{2RT_f} \operatorname{grad} p^2 \right), \quad (20)$$

где значение производной $\frac{\partial T_f}{\partial \tau}$ может быть определено из уравнения (15)

3. Неизотермическая фильтрация, двухтемпературная модель. Отличием рассматриваемой модели является разнящаяся температура фильтрующегося газа и твердого каркаса, несмотря на интенсивный теплообмен между ними, как и ранее, исходя из соображений, использованных при выводе уравнения (15), но для двух различных полей температур T_f (температуры каркаса) и T_g

(температуры газа). Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем конечное уравнение, описывающее процесс теплообмена

$$c_f \rho_f \frac{\partial T_f}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_f \operatorname{grad} T_f) + \beta(T_g - T_f), \quad (21)$$

где β – некоторый коэффициент теплообмена между газом и каркасом; все остальные теплофизические параметры снабжены индексом «f», указывающим, что они относятся к твердому каркасу

$$c_g \rho_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial \tau} + \left(\vec{u} \nabla \right) T_g \right) = \operatorname{div}(\lambda_g \operatorname{grad} T_g) + \beta(T_f - T_g) + q, \quad (22)$$

где $\vec{u}$ – скорость фильтрационного течения газа, определенная законом Дарси (6); c_g, ρ_g, λ_g – теплоемкость газа при постоянном объеме [13], плотность газа, теплопроводность газа, соответственно; коэффициент β имеет то же значение и смысл, что и в уравнении (21); q – источниковый член, учитывающий нагрев (охлаждение) газа вследствие совершенной над ним работы, следуя монографии [13] данный член можно определить как

$$q = \rho \vec{F} \vec{u} - \operatorname{div} \left(\vec{p} \vec{u} \right), \quad (23)$$

где $\vec{F}$ – вектор массовых сил, действующих на газ. Как правило, собственно массовыми силами можно пренебречь, однако на газ в пористой среде действует еще и сила трения, которой в пористой среде пренебречь не удастся. Определим силу трения как

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -f \operatorname{grad} p, \quad (24)$$

где f – коэффициент трения, или, что то же самое, в силу (6)

$$\vec{F}_{\text{тр}} = f^* \vec{u}. \quad (25)$$

Экспериментальное определение коэффициента трения f представляет собой весьма нетривиальную проблему, которая вместе с так же нетривиальной проблемой экспериментального определения коэффициента теплообмена

между газом и каркасом составляют наиболее существенный недостаток третьей из предложенных моделей.

Понятно, что для полноты постановки краевой задачи полученные дифференциальные уравнения в частных производных должны быть снабжены граничными и начальными условиями. Простоты ради, для всех математических моделей будем полагать известными давления на внутренней и внешней поверхности тонкого пористого тела

$$p|_{\Gamma_{in}} = p_{in}, \quad (26)$$

$$p|_{\Gamma_{out}} = p_{out}, \quad (27)$$

и температуру аналогично (для второй и третьей моделей)

$$T|_{\Gamma_{in}} = T_{in}, \quad (28)$$

$$T|_{\Gamma_{out}} = T_{out}. \quad (29)$$

Начальные условия запишем как

$$p(\tau = 0) = p_{\tau_0}, \quad (30)$$

$$T(\tau = 0) = T_{\tau_0}. \quad (31)$$

Разумеется, приведенными выше вариантами граничных условий (26) - (29) весь возможный спектр таковых условий однозначности отнюдь не исчерпывается, но, по мнению авторов настоящей работы, их вполне достаточно для демонстрации предложенного подхода.

По тем же соображениям простоты и ясности изложения дальнейший анализ будет преимущественно посвящен первой и второй из сформулированных выше математических моделей, а относительно третьей из них будут сделаны лишь отдельные замечания, поскольку ее прикладное значение существенно ограничено.

Обратимся к первой из выше сформулированных математических моделей. Введем в тонком пористом теле, через которое происходит фильтрация газа, связанную систему координат таким образом, чтобы одна из координатных поверхностей совпадала со срединной, внутренней или внешней поверхностью рассматриваемого тонкого тела, при этом полагая такую поверхность, как минимум, кусочно-гладкой. Не уменьшая общности, все дальнейшие рассуждения будем относить к некоторой гладкой, то есть, имеющей

единственную нормаль, части границы. Такое предположение легко обосновывается физическими соображениями о том, что, даже если граница имеет конечное число, вообще говоря, криволинейных разрывов гладкости, то на общий процесс фильтрации или теплопроводности через всю границу эти разрывы влияния оказать никак не могут, поскольку имеют меньшую размерность. Если пористое тело, через которое происходит фильтрация, тонкое и имеет гладкие границы, то естественно предположить, что нормали ко внутренней и внешней его границам достаточно близки друг к другу и к нормали к срединной поверхности. Локальную систему координат в тонком пористом теле будем вводить таким образом, чтобы первая из осей была направлена по данной нормали, а ортогональные ей и между собой орты двух других осей были касательными к вышеупомянутой координатной плоскости, совпадающей с одной из характерных поверхностей тонкого тела.

При таком предположении основное уравнение первой изотермической модели фильтрации (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{k}{2\sigma} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} & \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ляме системы координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) [14], введенной выше как локальная система координат, связанная с поверхностью тонкого пористого тела. Граничные и начальные условия для уравнения (32) не меняются, а лишь конкретизируются.

Пусть тонкое пористое тело имеет характерный размер по толщине (в направлении оси ξ_1) L_1 , а в продольном направлении (вдоль поверхности в которой лежат оси ξ_2 и ξ_3) – L_2 . Очевидно, что $L_2 \gg L_1$. Дальнейшие рассуждения проведем по аналогии с работами [6, 7], учитывая геометрическую и физическую специфику рассматриваемой задачи. Проведем обезразмеривание координат локальной системы следующим образом

$$\overline{\xi_1} = \frac{\xi_1}{L_1}; \quad \overline{\xi_2} = \frac{\xi_2}{L_2}; \quad \overline{\xi_3} = \frac{\xi_3}{L_3}, \quad (33)$$

где черта над символом указывает на обезразмеривание. при этом вопрос об обезразмеривании давления p и коэффициентов Ляме H_i , входящих в уравнение (32), представляется непринципиальным. Тем не менее, давление можно обезразмерить при помощи разности $p_{in} - p_{out}$ (26), (27), а вопрос об обезразмеривании коэффициентов Ляме рассматривать отдельно в каждом

конкретном случае. Тогда уравнение (32) можно переписать (дабы избежать трудночитаемости полученных уравнений здесь и далее черту над обезразмеренными переменными будем опускать, по умолчанию понимая, что все переменные уже обезразмерены):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} = & \frac{k(p_{in} - p_{out})}{2\sigma} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{1}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{L_3^2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

обозначим

$$K = \frac{k(p_{in} - p_{out})}{2\sigma}, \quad t = \frac{\tau K}{L_2^2}, \quad (35)$$

где переменная t соответствует безразмерному времени,

$$\varepsilon = \frac{L_1^2}{L_2^2}. \quad (36)$$

Умножив обе части уравнения (34) на L_2^2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \varepsilon = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_1} \right) + \\ & \frac{\varepsilon}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial p^2}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

однако, в силу того, что $L_2 \gg L_1$, (что отмечалось ранее при введении этих параметров), имеем

$$\varepsilon \ll 1, \quad (38)$$

а из условия (38) очевидно следует, что для решения рассматриваемой задачи может быть применен метод малого параметра, в качестве которого вполне естественно использовать ε , поскольку этот параметр не надо даже вводить искусственно, так как он уже входит в рассматриваемое уравнение (37). Общие вопросы асимптотических методов, к которым относится метод малого

параметра, в настоящее время достаточно широко и полно разработаны [3, 5]. Частные вопросы применения подобных подходов в теории тепломассообмена также интенсивно изучались и хорошо освещены в специальной литературе [15, 16]. Потому не будем останавливаться на методологических вопросах применения асимптотических методов, а отметим, что решение будем отыскивать в виде

$$p = p_0 + p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^2 + \dots \quad (39)$$

Подставив разложение (39) в уравнение (37), в силу, вообще говоря, произвольности параметра ε , получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial p_0^2}{\partial \xi_1} \right) = 0, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial (2p_0 p_1)}{\partial \xi_1} \right) &= \frac{\partial p_0}{\partial t} - \\ - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial p_0^2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial p_0^2}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial (2p_0 p_2)}{\partial \xi_1} \right) &= \frac{\partial p_1}{\partial t} - \\ - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial p_1^2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial p_1^2}{\partial \xi_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

.....

Очевидно, что несмотря на сложную форму записи уравнения (40) - (42), ... являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной ξ_1 , а правые части уравнений (41), (42), ... содержат только производные от функций, определенных в предыдущих уравнениях. Подстановка разложения по малому параметру (39) в граничные условия (26), (27) дает

$$p_0|_{\Gamma_{in}} = p_{in}, \quad (43)$$

$$p_0|_{\Gamma_{out}} = p_{out}, \quad (44)$$

$$p_i|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad (45)$$

$$p_i|_{\Gamma_{out}} = 0, \quad (46)$$

$$p_n|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad (47)$$

$$p_n|_{\Gamma_{out}} = 0, \quad (48)$$

.....

В правые части уравнений (41), (42) и последующих за ними входят производные от искомым функций по независимым переменным, но, например, если p_{in} и p_{out} , а также H_1, H_2, H_3 не зависят от ξ_1 и ξ_3 , то и p_0 не будет зависеть от ξ_3, ξ_3 , что существенно упростит последующую задачу (41), (44), (46), а также обеспечит независимость функции p_1 от тех же координат, и так далее. Независимость p_{in} и p_{out} от положения точки на поверхности (координаты ξ_2, ξ_3) с физической точки зрения является весьма распространенным случаем, а независимость от тех же координат коэффициентов Ляме H_1, H_2, H_3 имеет место, например, для сферических, цилиндрических и плоских стенок, которые очень часто встречаются в приложениях.

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (40) с граничным условием (43), (44) всегда может быть проинтегрирована аналитически в квадратурах

$$p_0^2 = a_0 \int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi_1 + b_0, \quad (49)$$

где a_0, b_0 – константы интегрирования, подлежащие определению из граничных условий. Обозначив для простоты

$$\int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi_1 = A_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (50)$$

и поставив в соответствие границам Γ_{in} и Γ_{out} значение $\xi_1 = 0$ и $\xi_1 = \delta$, получим

$$\begin{cases} a_0 A_0(0, \xi_2, \xi_3) + b_0 = p_{in}^2, \\ a_0 A_0(\delta, \xi_1, \xi_2) + b_0 = p_{out}^2. \end{cases} \quad (51)$$

Очевидно, что (51) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, легко разрешимую аналитически. Действительно

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{A_0(\delta, \xi_1, \xi_2) - A_0(0, \xi_2, \xi_3)}, \\ b_0 &= p_{in}^2 - a_0 A_0(0, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (52)$$

откуда

$$p_0^2 = p_{in}^2 + \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{A_0(\delta, \xi_1, \xi_2) - A_0(0, \xi_2, \xi_3)} (A_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3)), \quad (53)$$

Вообще говоря, при определении p_0 из решения (53) следует брать квадратный корень из правой части полученного соотношения со знаком плюс и минус, но в силу исходных граничных условий (26), (27) и, соответственно, (43), (44) отрицательная ветвь решения будет физически некорректна.

Получив функцию p_0 из решения (53), подставим ее в правую часть соотношения (41), которую для краткости обозначим f , тогда решение уравнения (41) имеет вид

$$2p_0 p_1 = \int \frac{H_1}{H_2 H_3} \int H_1 H_2 H_3 f d\xi_1 d\xi_1 + a_1 \int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi_1 + b_1. \quad (54)$$

Получение конкретной функциональной формы решения p_1 из (54) полностью аналогично получению функции p_0 из решения (49), при помощи рассуждений и вычислений (50) - (53) с единственной разницей, что постоянные интегрирования a_1, b_1 теперь должны быть найдены из граничных условий (45), (46). Значение функции p_1 может быть определено всегда, поскольку по физическому смыслу $p_0 \neq 0$.

Получив функции p_1 при помощи описанного выше алгоритма, подставим ее в правую часть уравнения (42), которую также обозначим через f . Тогда

$$2p_0 p_2 = \int \frac{H_1}{H_2 H_3} \int H_1 H_2 H_3 f d\xi_1 d\xi_1 + a_1 \int \frac{H_1}{H_2 H_3} d\xi + b_2. \quad (55)$$

с последующим совершенно аналогичным определением функции p_2 и так далее.

Как отмечалось выше, p_{in} и p_{out} редко зависят от ξ_2 и ξ_3 , если от тех же переменных не зависят и коэффициенты Ляме, то полученное решение относится ко всей поверхности, через которую происходит фильтрация. В противном случае данная поверхность должна быть разбита на части и на каждой из этих достаточно малых частей должны решаться рассмотренные выше краевые задачи для собственных дифференциальных уравнений (40) - (42).

Обратимся теперь к зависимости величины p_{in} и p_{out} от времени, определяющей первые слагаемые в правых частях уравнений (41) и (42). Такая зависимость может быть задана изначально, предполагая, что существует некоторое управление процессами фильтрации. Однако куда как более распространенным случаем является определение зависимостей $p_{in}(\tau)$ и $p_{out}(\tau)$ в результате протекания некоторых физических процессов, например, той же фильтрации. Рассмотрим простейший пример такого процесса. Пусть в объеме газа D_{in} , ограниченного хотя бы частично границей Γ_{in} , изначально содержалась масса m_0 газа, тогда масса газа m будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{d\tau} = Q - \int_{\Gamma_{in}} q dS, \quad (56)$$

с начальным условием

$$m(\tau = 0) = m_0, \quad (57)$$

где Q – суммарная мощность источников и стоков газа в замкнутом объеме D_{in} , не связанных с процессом фильтрации; $q = \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}$ – локальный фильтрационный поток газа. Что касается источникового члена Q , то дать какие-либо оценки для него затруднительно, и его влияние нуждается в отдельном исследовании в каждой конкретной задаче. Для случая же $Q = 0$ могут быть приведены следующие соображения. Применим уравнение состояния (9) в более традиционной форме

$$p\Omega = \frac{m}{\mu} R_0 T_g, \quad (58)$$

где p – давление, Ω – объем области, заполненной газом, m – масса газа, соответствующая массе, входящей в уравнение (56), μ – молярная масса газа, R_0 – универсальная газовая постоянная, T_g – как и ранее, температура газа. Применим уравнение состояния (58) к объему D_{in} , тогда

$$\frac{p_{in}\Omega_{in}}{RT_g} = m, \quad (59)$$

но по принятым предположениям объем Ω_{in} , температура T_g и, тем более, газовая постоянная являются постоянными, и это означает, что масса газа в области D_{in} пропорциональна его давлению. С другой стороны, плотность газа может быть получена из уравнения (9)

$$\rho = \frac{p_{in}}{RT_g}, \quad (60)$$

и скорость газа (ограничимся пока нулевым приближением)

$$\left| \vec{u} \right| = k \cdot \text{grad } p_0 = k \cdot \left| \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \right|, \quad (61)$$

чтобы определить $\partial p_0 / \partial \xi_1$, продифференцируем по ξ_1 решение (53), откуда получим

$$2p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3)} \cdot \frac{\partial A_0(\xi_1, \xi_2, \xi_n)}{\partial \xi_1}. \quad (62)$$

С учетом определения (50)

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{2p_0(A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))} \cdot \frac{H_1}{H_2 H_3}, \quad (63)$$

относя выражение (63) к границе Γ_{in} , где в силу граничного условия (43) $p_0 = p_{in}$, аналогично получим

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{2p_{in}} \cdot \frac{H_1}{H_2 H_3 (A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))}. \quad (64)$$

Умножив (64) на k и ρ , получим выражение для q

$$q = k\rho \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} = k \frac{p_{in}}{RT_g} \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{2p_{in}} \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{1}{(A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))}, \quad (65)$$

Произведя в (65) необходимые сокращения, далее получим

$$\int_{\Gamma_{in}} q dS = \frac{k(p_{out}^2 - p_{in}^2)}{2RT_g} \int_{\Gamma_{in}} \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{1}{(A_0(\delta, \xi_2, \xi_3) - A_0(0, \xi_2, \xi_3))} dS. \quad (66)$$

Отметим, что последний интеграл в правой части (66) определяется исключительно геометрией границы области Γ_{in} . Подставив выражение (66) в уравнение (56) и обозначив интеграл в (66) через E , с учетом (59)

$$\frac{\Omega_{in}}{RT_g} \cdot \frac{dp_{in}}{d\tau} = \frac{kE(p_{out}^2 - p_{in}^2)}{RT_g}, \quad (67)$$

или

$$\frac{dp_{in}}{d\tau} = \frac{kE}{\Omega_{in}} (p_{out}^2 - p_{in}^2). \quad (68)$$

Полученное соотношение (68) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, которое, будучи дополнено очевидными начальными условиями

$$p_{in}(\tau = 0) = p_{in0}, \quad (69)$$

образует задачу Коши, подлежащую аналитическому или численному решению. Что касается численного решения задачи Коши (68), (69), то оно может быть осуществлено стандартными методами решения таких задач [17], что не вызывает сколько-нибудь заметных трудностей. Аналитическое решение данной задачи существенно зависит от характера граничных условий $p_{out}(\tau)$. Если имеют место утверждение

$$p_{out} = \text{const}, \quad (70)$$

то есть, p_{out} не зависит от времени и не изменяется вдоль поверхности стенки, то решение очевидно

$$\frac{2\Omega_{in}}{kE} \cdot \frac{1}{2p_{out}} \ln \left| \frac{p_{out} + p_{in}}{p_{out} - p_{in}} \right| = \tau + c, \quad (71)$$

где постоянная интегрирования c легко находится из начального условия (69). Но даже для случая

$$p_{out} \approx \text{const}, \quad (72)$$

решение рассматриваемой задачи Коши может существенно усложниться. Для общего случая уравнения (68) сделаем следующие замечания качественного характера. При введении определения (59) уже неявно предполагалось, что давление p_{in} не меняется по всей области D_{in} , что вполне очевидно с физической точки зрения и отмечалось в предшествующих этому определению рассуждениях. Вводя предположение (70), мы, в том числе, фактически предположили, что граничные условия рассматриваемой задачи не приводят к изменению фильтрационного потока вдоль стенки, а таковое изменение может быть только следствием изменения геометрических параметров (прежде всего, толщины) стенки вдоль ее поверхности, выражаемым параметром E . Если

$$E = \text{const}, \quad (73)$$

то задача Коши (68), (69) относится ко всем точкам стенки, а для получения глобального фильтрационного потока величину q , определенную соотношением (65) с учетом решения задачи (68), (69), достаточно умножить на площадь внутренней поверхности стенки. В противном случае, когда

$$\frac{\partial E(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2} \neq 0, \quad \frac{\partial E(\xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_3} \neq 0, \quad (74)$$

представляется необходимым достаточно громоздкое численное интегрирование по внутренней поверхности.

С практической точки зрения, наиболее распространенным и интересным является случай, когда предположения (74) не имеют места. Тогда последний член в уравнении (41) равняется нулю, а, следовательно, последующие приближения из представления (39) будут зависеть только от характера величины $\partial p_0 / \partial \tau$, или переходя к терминологии задачи (68), (69), от $\partial p_{in} / \partial \tau$. Не вдаваясь в подробности обезразмеривания задачи (68), (69), необходимого для строгого исследования рассматриваемой зависимости $p_{in}(\tau)$, отметим на качественном уровне, что скорость изменения величины p_{in} в рассматриваемом случае определяется отношением массы

профильтованного газа к общей массе газа в области D_{in} , то есть, в подавляющем большинстве случаев скорость изменения P_{in} весьма мала, что совместно со сделанным выше предположением о малости последних членов в правой части уравнения (41) делает совершенно излишним расчет первого приближения (решение уравнения (41)). Предоставляется, что последний вывод даже несколько шире, чем заданные при его получении рамки предположений, например, строго говоря, при выполнении условия (74) величина p_{in} на внутренней поверхности стенки не может не зависеть от ξ_2, ξ_3 , но изменение p_{in} вдоль стенки имеет порядок отношения скорости фильтрации к скорости звука в газе, то есть, является пренебрежимо малой величиной.

В редких случаях, когда первое приближение (краевые задачи для уравнения (41)) все-таки надо рассчитывать, такая процедура может быть проведена либо аналитически, что, в принципе, возможно всегда для каждого локального положения, но представляет собой исключительно сложную и громоздкую процедуру, либо численными методами решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [22]. Независимо от того, необходим расчет первого приближения или нет, погрешность полученных решений будет иметь порядок ε^2 , где ε определено формулой (36), то есть, окажется приемлемой в подавляющем большинстве случаев.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим два простейших случая цилиндрической и сферической пористых стенок постоянной толщины. Для цилиндрической стенки внутренним радиусом R^0 и внешним радиусом $R^0 + \delta$, где $\delta \ll R^0$ уравнение (40) имеет вид

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_0^2}{dr} \right) \right) = 0, \quad (75)$$

и его общее решение

$$p_0^2 = c_1 \ln r + c_2, \quad (76)$$

в котором неизвестные константы c_1, c_2 определяются из граничных условий (предполагаем, что фильтрация происходит только через боковую стенку цилиндра)

$$p_0^2(r = R^0) = p_{in}^2, \quad (77)$$

$$p_0^2(r = R^0 + \delta) = p_{out}^2, \quad (78)$$

откуда

$$p_0^2 = p_{out}^2 + \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \ln\left(\frac{r}{R^0 + \delta}\right). \quad (79)$$

Продифференцировав соотношение (79) по r получим

$$2p_0 \frac{dp_0}{dr} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \frac{1}{r}, \quad (80)$$

и относя соотношение (80) ко внутренней поверхности твердой стенки

$$\left. \frac{dp_0}{dr} \right|_{r=R^0} = \frac{1}{2p_{in}} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)} \frac{1}{R^0}. \quad (81)$$

Умножив соотношение (81) на коэффициент фильтрации k , получим согласно закону Дарси локальный фильтрационный поток, а затем, умножив величину локального потока на площадь поверхности стенки $S = 2\pi R^0 H$, где величину H можно выбрать равной 1, получим общий поток

$$q_{sum} = \frac{\pi k}{p_{in}} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}, \quad (82)$$

но, поскольку основной интерес в дальнейшем будет представлять массовый расход, то следует умножить равенство (82) на плотность газа (59), тогда

$$q_{sum} \rho = \frac{\pi k}{RT_g} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}. \quad (83)$$

Запишем теперь уравнение (56) для изменения массы газа в цилиндрическом объеме $\Omega_{in} = \pi R^0{}^2 H = \pi R^0{}^2$

$$\frac{dm}{d\tau} = -q_{sum}\rho, \quad (84)$$

откуда

$$\frac{\pi R^0{}^2}{RT_g} \frac{dp_{in}}{d\tau} = -\frac{\pi k}{RT_g} \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}, \quad (85)$$

или с учетом очевидных сокращений

$$\frac{dp_{in}}{dt} = -\frac{k}{R^0{}^2} \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}. \quad (86)$$

Дополнив обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными начальными условиями (69), и полагая справедливым предположение о постоянстве давления p_{out} (70), получим решение вида (71)

$$\frac{R^0{}^2 \ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}{2p_{out} \cdot k} \ln\left|\frac{p_{out} + p_{in}}{p_{out} - p_{in}}\right| = -\tau + c, \quad (87)$$

А постоянную c определим из условия (69)

$$c = \frac{R^0{}^2 \ln\left(\frac{R^0 + \delta}{R^0}\right)}{2p_{out} \cdot k} \ln\left|\frac{p_{out} + p_{in0}}{p_{out} - p_{in0}}\right|. \quad (88)$$

Таким образом, удалось построить аналитическое решение задачи об изотермической фильтрации газа через тонкую цилиндрическую пористую стенку.

По аналогии с приведенным выше решением построим решение задачи об изотермической фильтрации газа через тонкую пористую сферическую стенку. Аналог уравнения (75) имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp_0^2}{dr} \right) \right) = 0, \quad (89)$$

а решения (76):

$$p_0^2 = \frac{c_1}{r} + c_2. \quad (90)$$

Откуда с учетом (77), (78)

$$p_0^2 = p_{out}^2 + \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R^0 + \delta} \right). \quad (91)$$

Далее

$$\left. \frac{dp_0}{dr} \right|_{r=R^0} = \frac{1}{2p_{in}} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0}} \frac{1}{r^2}, \quad (92)$$

аналогично формуле (83) суммарный фильтрационный поток имеет вид

$$q_{sum} \rho = \frac{2\pi k}{RT_g} = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0}}. \quad (93)$$

Изменение массы газа в сферическом объеме по аналогии с (85)

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^{0^3}}{RT_g} \frac{dp_{in}}{d\tau} = - \frac{2\pi k}{RT_g} \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0}}, \quad (94)$$

что приводит к решению

$$\frac{R^0{}^3 \left(\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0} \right)}{P_{out} \cdot k} \ln \left| \frac{P_{out} + P_{in}}{P_{out} - P_{in}} \right| = -\tau + c, \quad (95)$$

Откуда с учетом условия (69) получим

$$c = \frac{R^0{}^3 \left(\frac{1}{R^0 + \delta} - \frac{1}{R^0} \right)}{P_{out} \cdot k} \ln \left| \frac{P_{out} + P_{in 0}}{P_{out} - P_{in 0}} \right|. \quad (96)$$

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований. Основным результатом приведенной выше части исследования являются упрощенные математические модели процессов фильтрации газа в тонких пористых стенках. Ценность этих моделей подчеркивается возможностью получения достаточно простых аналитических решений данной задачи, построенных в квадратурах.

Ближайшие перспективы дальнейших исследований совершенно очевидны и заключаются в учете тепловых эффектов в рамках однотемпературной и двухтемпературной моделей. Кроме того, представляется, что полученные результаты будут иметь практическое применение в областях науки и техники, связанных с хранением и использованием сжатых или разреженных газов.

Следует отметить также, что предложенный асимптотический подход обеспечивает точность, вполне достаточную для подавляющего большинства практических расчетов. Это позволяет надеяться, что в отдаленной перспективе предложенные здесь упрощенные математические модели будут составной частью в более сложных математических моделях [19], обеспечив необходимое упрощение последних.

Библиографические ссылки

1. Баренблатт Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // – М.: Недра, 1972. – 288 с.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы / Коллинз Р. – М.: Мир, 1964. – 386 с.
3. Найфе А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфе. – М., 1976. – 446 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 296 с.
5. Коул Д.Д. Методы возмущений в прикладной математике / Д.Д. Коул. – М.: Мир. 1972. – 276 с.

6. Евдокимов Д.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Н. Ивасишина, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 141-156.
7. Бразалук Ю.В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, Д.В. Евдокимов, О.А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.
8. Беляев Н.М. Сушка металлических изделий перед испытаниями на герметичность / Н.М. Беляев, А.А. Долинский, Л.Д. Кучма // Днепропетровск: Дизайн Принт, 1993. – 196 с.
9. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
10. Лыков А.В. Теория сушки / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс интегрального и дифференциального исчисления. тт. 1-3 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1964. – т. 1. – 539 с., т. 2. – 560 с, т. 3. – 546 с.
12. Беляев Н.М. Термодинамика / Н.М. Беляев. – Киев: Вища школа, 1987. – 344 с.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
14. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов // – Х.: Вища школа, 1986. – 216с.
15. Зино И.Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И.Е. Зино, Э.А. Тропп // – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
16. Федоткин И.М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса / И.М. Федоткин, А.М. Айзен // – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.
17. Демидович Б.П. Численные методы анализа: монография / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова // – М.: Наука, 1967. – 368 с.
18. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
19. Евдокимов Д.В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, № 8, серія «Моделювання», Випуск 1, 2009. – с. 5 – 17.

Надійшла до редакції 13.07.2018

УДК 336.767.2(100)

Д.э.н. Джусов А.А., Притыкин А.А., Джусов П.А.

Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ АКЦИЙ КОМПАНИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО И ОБОРОННОГО СЕКТОРА

У статті досліджуються інвестиційні інструменти, що дозволяють досягти приріст інвестиційного капіталу. Проаналізовано динаміку акцій компаній аерокосмічного та оборонного сектору у в період інтенсивного зростання фондового ринку США з лютого 2016 по серпень 2018 рр.

Ключові слова: *інвестиційні інструменти, фондова біржа, інвестиційний портфель, індекси фондового ринку, акції компаній аерокосмічної та оборонної промисловості.*

В статье исследуются инвестиционные инструменты, позволяющие достичь прирост инвестиционного капитала. Проанализирована динамика акций компаний аэрокосмического и оборонного сектора в период интенсивного роста фондового рынка США, с февраля 2016 по август 2018 гг.

Ключевые слова: *инвестиционные инструменты, фондовая биржа, инвестиционный портфель, индексы фондового рынка, акции компаний аэрокосмической и оборонной промышленности.*

The article investigates the investment tools that should help to achieve the growth of investment capital. The dynamics of shares of aerospace and defense sector's companies during the period of intensive growth of USA stock market from February 2016 to August 2018 have been analyzed.

Keywords: *investment instruments, stock market, investment portfolio, stock market indexes, stocks of aerospace and defense industry's companies.*

Актуальность проблемы. Изучение особенностей динамики акций компаний, работающих в различных секторах экономики, представляет значительный интерес, поскольку правильность выбора инвестиционного инструмента и своевременность момента открытия-закрытия сделки являются залогом успеха работы любой структуры, связанной с инвестиционной деятельностью. Акции компаний, работающих в сфере аэрокосмического и оборонного сектора, представляют особый интерес для инвестора, поскольку в течение последних двух десятилетий темпы роста их курсовой стоимости показывают высокие результаты.

Проблемой выбора инвестиционных инструментов для формирования инвестиционного портфеля, обладающих значительным потенциалом роста занимались многие ученые и практики, в частности, этому вопросу посвящены исследования Дж. Тьюлза [1], В.В. Булатова [2], Мартина Д. Вайса [3], Роджера

Гибсона [4], А. Абрамова [5], Дж. Гитмана [6] и др. Вместе с тем следует отметить, что в перечисленных исследованиях уделено недостаточно внимания изучению динамики акций в отдельности для каждого сектора экономики и, в частности, изучению динамики акций компаний аэрокосмического и оборонного сектора.

Целью настоящей работы является продолжение исследований инвестиционных инструментов, позволяющих достичь прироста капитала инвестиционного портфеля и, в частности, изучение инвестиционного потенциала акций компаний, работающих в сфере аэрокосмического и оборонного секторов.

Во всех высокоразвитых странах Аэрокосмический и оборонный секторы экономики находятся под особым вниманием и контролем государства и достаточно щедро им финансируется. В продукции компаний Аэрокосмической и оборонной промышленности материализуются все новейшие достижения науки и техники, и, таким образом, по состоянию этого сектора в стране можно судить о состоянии экономики в этой стране в целом, о ее научно-техническом потенциале.

В США, Японии, Франции, Англии и других высокоразвитых странах наиболее крупные компании, работающие в этом секторе, зарегистрированы в форме акционерных обществ и их акции обращаются на крупнейших мировых биржах. Так, по состоянию на настоящий момент (31.08.2018 г.), на Нью-Йоркской фондовой бирже (NYSE) и в системе NASDAQ обращаются акции 52-х компаний, работающих в сфере Аэрокосмической и оборонной индустрии. Капитализация этих компаний колеблется от \$ 165 млн US (Suspect Detection Systems Inc.) до \$ 201,7 млрд US (The Boeing Company).

С 14.02.2000 в США рассчитывается индекс, отражающий общую динамику акций 26 ведущих компаний, работающих в сфере Аэрокосмической и оборонной промышленности. Это т.н. ***Dow Jones U.S. Aerospace & Defense Index*** (биржевой символ - **DJUSAE**) [7]. В таблице 1 приведены первые 10 наиболее крупных компаний (расположены в порядке уменьшения капитализации), входящих в расчетную базу этого индекса и некоторые параметры этих компаний.

Порядок проведения исследований был следующим: вначале производилась визуальная оценка динамики следующих индексов:

- Standard & Poor's – 500 (биржевой символ - **SPX**);
- промышленного индекса Доу-Джонса (**DJIA**);
- индекс аэрокосмической и оборонной индустрии *Dow Jones U.S. Aerospace & Defense Index* (**DJUSAE**).

Таблиця 1
10 крупнейших компаний, входящих в расчетную базу индекса
«Dow Jones U.S. Aerospace & Defense Index»

№	Бирже- вой символ	Название компании	Рыночная цена акции, \$ US	Капитали- зация млрд. \$ US	Кол-во персонала, чел.
1	BA	Boeing Company	351.14	201.7	140800
2	UTX	United Technologies Corp.	134.65	107.7	204700
3	LMT	Lockheed Martin Corp.	323.83	91.7	100000
4	GD	General Dynamics Corp.	195.24	57.9	98600
5	RTN	Raytheon Company	199.77	57.0	64000
6	NOC	Northrop Grumman Corp.	299.62	52.2	70000
7	COL	Rockwell Collins, Inc.	136.71	22.5	29000
8	TDG	TransDigm Group Inc.	356.65	18.8	9200
9	TXT	Textron Inc.	69.26	17.2	37000
10	LLL	L-3 Communication	212.65	16.7	31000

Источник – составлено автором с использованием статистических данных [8]

Для этой цели, с использованием статистических данных и технических возможностей интернет-сайта www.bigcharts.marketwatch.com [9] был построен ряд графиков; некоторые из них представлены ниже в настоящей работе.

На рисунке 1 представлена динамика индекса **DJUSAE** за весь период его существования, т.е., с 14.02.2000 по настоящее время (31.08.2018). На рисунке хорошо просматриваются период интенсивного роста индекса с марта 2003 по ноябрь 2007, затем глубокая коррекция во времена мирового финансового кризиса 2008-2009 гг., посткризисное восстановление с марта 2009 по конец 2013 гг., небольшой участок горизонтальной тенденции 2014-2015 гг., и дальнейший рост вплоть до настоящего времени. В целом, несмотря на имевшие место коррекции, можно отметить, что за все время существования *Dow Jones U.S. Aerospace & Defense Index* находится в состоянии ярко выраженной восходящей тенденции.

Исследования динамики индекса в период с 2003 по 2013 гг. проводились ранее и уже были опубликованы в литературе [10, 11]. В настоящей работе мы приводим результаты исследований в период с февраля 2016 г. по настоящее время, т.е. за период, когда фондовый рынок США находился в состоянии интенсивного роста.

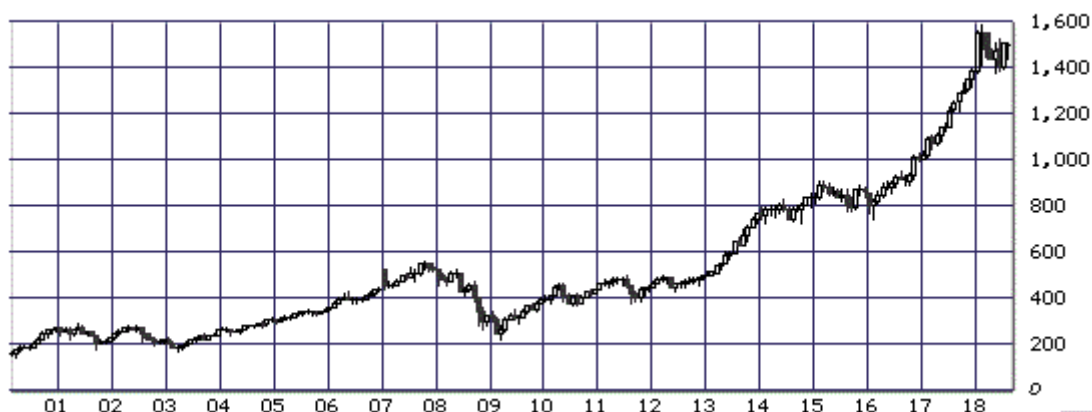


Рис. 1. Динамика индекса *Dow Jones U.S. Aerospace & Defense* за период с 14.02.2000 по 31.08.2018 гг.

На рис. 2 представлена сравнительная динамика всех трех индексов за период с февраля 2016 г. по конец августа 2018 г.

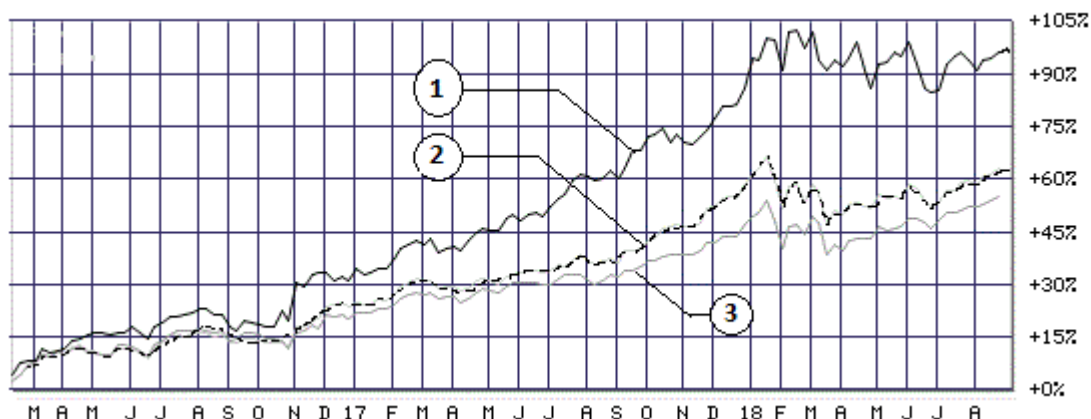


Рис. 2. Сравнительная динамика индексов Standard & Poor's – 500 (кривая-2), Доу-Джонса (кривая-3) и индекса *Dow Jones U.S. Aerospace & Defense* (кривая-1) в период с февраля 2016 по 21.08.2018 гг.

Хорошо видно, что оба общерыночных индекса, Доу-Джонса и Standard & Poor's – 500, показывают очень сходную динамику – за рассмотренный период времени они оба выросли примерно на 60%. Индекс же *Dow Jones U.S. Aerospace & Defense* за тот же период времени показал прирост почти на 100%. Эти наблюдения вполне согласуются и подтверждают тезис о том, что акции компаний, работающих в области высоких технологий, обычно являются лидерами роста в благоприятные экономические периоды и показывают результаты роста, превышающие средние по рынку.

Для подтверждения визуальных наблюдений, были проведены дополнительные, численные исследования, результаты которых приведены в таблице 2.

Таблица 2

*Основные показатели динамики индексов
фондового рынка США в период с 01.02.2016 по 31.08.2018*

	<i>Промышленный индекс Доу- Джонса</i>	<i>Standard & Poor's – 500</i>	<i>Индекс Dow Jones U.S. Aerospace & Defense</i>
1	2	3	4
Минимальное значение индекса в начале фазы устойчивого роста (февраль 2016 г.)	15550	1840	750
Максимальное значение индекса, которое было зафиксировано индексом в рассматриваемый период	26520	2900	1580
% роста индекса от начала рассматриваемого периода (февраль 2016 г.) до его максимального значения.	70,5 %	57,6 %	110,7 %
Текущее значение, на 31.08.2018	26070	2900	1501
% роста индекса от начала рассматриваемого периода (февраль 2016 г.) до его текущего значения (31.08.2018).	67,7 %	57,6 %	100,1 %

Источник – составлено автором с использованием статистических данных [9]

Как следует из таблицы, акции компаний аэрокосмического и оборонного сектора показывают высокие темпы роста в благоприятные периоды в экономике и превосходят среднерыночные темпы роста в 1,7-1,9 раз. Полученный результат хорошо согласуется с ранними исследованиями по индексу ***Dow Jones U.S. Aerospace & Defense***, проводимыми в период с 2003 по 2013 гг., в которых было зафиксировано превышение скорости его роста в благоприятные периоды в экономике относительно индексов Доу-Джонса и Standard & Poor's – 500 в 2,3 – 2,5 раз [10, 11]. В этих же исследованиях анализировалась динамика индекса ***DJUSAE*** в кризисные периоды и отмечалась относительная устойчивость акций аэрокосмического и оборонного сектора к падению в неблагоприятные периоды в экономике, по сравнению с акциями ряда других секторов. Таким образом, можно отметить, что акции компаний аэрокосмического и оборонного секторов имеют значительный

инвестиционный потенциал и, следовательно, должны представлять высокий интерес для любых структур, занимающихся инвестиционной деятельностью

Вывод. Акции компаний аэрокосмического и оборонного секторов характеризуются стабильным и динамичным ростом в благоприятные периоды в экономике. При этом скорость роста акций компаний этой группы значительно превосходит среднюю скорость роста фондового рынка. В связи с этим, как индивидуальным, так и институциональным инвесторам следует уделять повышенное внимание акциям компаний аэрокосмического и оборонного сектора и отводить им соответствующее место в своих инвестиционных портфелях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тьюлз Р. Фондовый рынок / Ричард Дж. Тьюлз, Эдвард С. Брэдли, Тэд М. Тьюлз – 6-е изд.: пер с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 648 с.
2. Булатов В.В. Экономический рост и фондовый рынок: В 2 т. / В.В. Булатов. – М.: Наука, 2004. – 353 с.
3. M.D. Weiss. Crash Profits: Make Money when Stocks Sink and Soar. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc. 2009. – 384 p.
4. Гибсон Р. Формирование инвестиционного портфеля: управление финансовыми рисками / Роджер Гибсон; Пер. с англ. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2005. – 276 с.
5. Абрамов А.Е. Инвестиционные фонды: Доходность и риски, стратегии управления портфелем, объекты инвестирования в России / А.Е. Абрамов. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2005. – 416 с.
6. Гитман Л. Дж. Основы инвестирования / Лоренс Дж. Гитман, Майкл Д. Джонк; пер. с англ. – М.: Дело, 1999. – 1008 с.
7. [Электронный ресурс]. Режим доступа :
<http://www.wikinvest.com/index/Dow Jones U.S. Aerospace %26 Defense Index %28DJUSAE%29>
8. [Электронный ресурс]. Режим доступа:
<http://screener.finance.yahoo.com/newscreener.html>
9. [Электронный ресурс]. Режим доступа:
<http://www.bigcharts.marketwatch.com>
10. Dzhusov O. A. Research on the Investment Potential of Utilities and Aerospace & Defence companies' Stocks and Gold / O. A. Dzhusov, Dr. Tolkmitt V. // Hochschule Mittweida – University of Applied Sciences. Fachbereich Wirtschaftswissenschaften. Heft 2013/04. – 43 p.
11. Джусов О. А. Інвестування на міжнародному ринку акцій: аспект управління: монографія / О. А. Джусов. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 324 с.

УДК 669.14

Желябов П. А., Кулабухов А. М.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ТОКОВОЙ КАТУШКОЙ В СИСТЕМАХ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Пропонується алгоритм управління кутовим положенням космічного апарату, що дозволяє змінювати кутову орієнтацію по одній координаті з використанням однієї електромагнітної котушки.

Ключові слова: *космічний апарат, електромагнітна система управління орієнтацією і стабілізацією, алгоритм управління.*

Предлагается алгоритм управления угловым положением космического аппарата, позволяющий изменять угловое положение по одной координате с использованием одной электромагнитной катушки.

Ключевые слова: *космический аппарат, электромагнитная система управления ориентацией и стабилизацией, алгоритм управления.*

An algorithm for controlling the angular position of a spacecraft is proposed, which allows to change the angular position along one axis using a single electromagnetic coil.

Key words: *spacecraft, altitude determination and control system, electromagnetic control algorithm, magnetic torque*

Введение

Набор исполнительных приборов современных малых космических аппаратов (КА) обычно включает электромагнитную систему угловой ориентации и стабилизации (СУОС) [1,2]. Основными проблемами электромагнитной СУОС являются малый момент управления и наличие магнитных возмущающих моментов во время измерений параметров магнитного поля Земли, что приводит к относительно невысокой точности стабилизации углового положения КА. Чаще всего она используется для гашения начальных угловых скоростей (ГУС), которые были получены после отделения КА от ракета-носителя (РН) и разгрузки двигателей маховиков (ДМ), после их выхода на гранично-допустимые значения кинетического момента.

Для некоторых сверхмалых КА электромагнитная СУОС является единственной с учетом ее стоимости, простоты и возобновляемой электрической энергии КА.

Управляющий момент определяется как векторное произведение магнитного момента катушки и магнитного поля Земли

$$\vec{M}_{упр} = \vec{B}\vec{H}; \quad (1)$$

где $\vec{M}_{упр}$ – вектор управляющего момента (Нм);

$\vec{B}$ – вектор магнитного момента, создаваемый ЭМ (Ам² или Дж/Тл в системе СИ);

$\vec{H}$ – вектор магнитного поля Земли в заданной точке (Тл).

Проекции магнитного поля Земли на оси КА измеряются магнитометром. Соответственно управляющих момент для углового поворота КА создается магнитным моментом катушек. В большинстве случаев для разворота КА и погашения угловых скоростей используются разные алгоритмы, а для случая плоскостного разворота КА используются 2 катушки [1].

Алгоритмы управления различными объектами делят на:

- пропорциональные (П регуляторы);
- пропорционально дифференциальные (ПД регуляторы) [3];
- пропорционально интегрально дифференциальные (ПИД регуляторы).

В пропорциональных регуляторах управляющее воздействие формируется пропорционально отклонению регулируемой величины. Они достаточно просты (требуют только измерения регулируемой величины), но характеризуются значительной ошибкой регулирования и большого времени переходного процесса (слабое затухание переходного процесса).

ПД регуляторы требуют использования двух типов датчиков регулируемой величины и ее производной (например, угла и угловой скорости). Они отличаются от П регуляторов лучшим качеством переходного процесса (меньшей ошибкой в установившемся режиме и меньшем времени переходного процесса).

ПИД регуляторы требуют использования трех типов датчиков регулируемой величины, ее производной и интеграла. Отличаются хорошим качеством регулирования. Однако при регулировании возникает сложность использования датчика, который по отношению к регулируемой величине измеряет ее интеграл. Использование таких регуляторов как правило ограничивается регулированием скоростей.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу использования для плоскостного разворота одной катушки с релейным законом управления, позволяющим, как производить плоскостной разворот КА, так и гасить начальную угловую скорость.

Основными задачами исследования являются:

- получение переходного процесса изменения угла, угловой скорости, магнитного момента и управляющего момента во времени при заданных характеристиках: объекта управления, законов управления, начального отклонения по углу, конечного значения угла в установившемся режиме и нулевой начальной и конечной скорости для различных значений коэффициентов закона управления (задача угловых поворотов КА);

- получение переходного процесса изменения угловой скорости, угла, магнитного момента и управляющего момента по времени при заданных характеристиках: объекта управления, законов управления, нулевого начального и конечного отклонений по углу, ненулевой начальной и нулевой конечной скорости для различных значений коэффициентов закона управления (задача погашения начальных угловых скоростей КА);

- оценка влияние коэффициентов закона управления на энергопотребление, качество и время переходного процесса;

- экспериментальная проверка полученных результатов на стенде.

В связи с тем, что экспериментальная установка [6] позволяет осуществлять движение только в одной плоскости (горизонтальной) с малым трения, будем рассматривать плоскостное движение КА без возмущающих воздействий под действием электромагнитов (ЭМ) в инерциальной системе координат с учетом неподвижности установки в магнитной поле Земли.

Угловое движение в инерциальной системе координат описывается выражением

$$J_z \dot{\omega}_z = M_{упр} + \sum_{i=0}^n M_{\text{в}i}; \quad (2)$$

где J_z – момент инерции подвижной части установки относительно вертикальной оси (ось z) при исследовании на экспериментальной установке или момент инерции КА при моделировании движения КА;

$\dot{\omega}_z$ – угловое ускорение установки (или КА) относительно вертикальной оси;

$M_{упр}$ – управляющий момент, создаваемый ЭМ относительно вертикальной оси;

$M_{\text{в}i}$ – возмущающие моменты относительно вертикальной оси;

n – количество возмущающих моментов.

Предположим, что возмущающие моменты (моменты трения, моменты от дисбаланса подвижной части, моменты намагничивания металлических материалов) на порядок меньше управляющих моментов. В этом случае

$$J_z \dot{\omega}_z = M_{упр} \quad (3)$$

Решение. Управляющий момент будем формировать за счет изменения магнитного момента ЭМ путем включения его по закону (рис 1)

$$B = \begin{cases} 0 & \text{если } |k_1 \Delta\alpha + k_2 \Delta\dot{\alpha}| \leq \delta \\ B_{\text{max}} & \text{если } (k_1 \Delta\alpha + k_2 \Delta\dot{\alpha}) < \delta ; \\ -B_{\text{max}} & \text{если } (k_1 \Delta\alpha + k_2 \Delta\dot{\alpha}) > \delta \end{cases} \quad (4)$$

$$\delta = k_1 \Delta\alpha + k_2 \Delta\dot{\alpha} \quad (5)$$

где $\Delta\alpha = \alpha_{\text{ф}} - \alpha_{\text{пр}}$ – рассогласование по углу;

$\alpha_{\text{пр}}$ – программное (конечное) значение угла;

$\alpha_{\text{ф}}$ – фактическое (измеренное значение угла датчиком);

$\Delta\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_{\text{пр}} - \dot{\alpha}_{\text{ф}}$ – рассогласование по скорости;

$\dot{\alpha}_{\text{пр}}$ – значение угловой скорости на конечном участке (нулевое значение);

$\dot{\alpha}_{\text{ф}}$ – фактическое значение угловой скорости (измеренное ДУС)

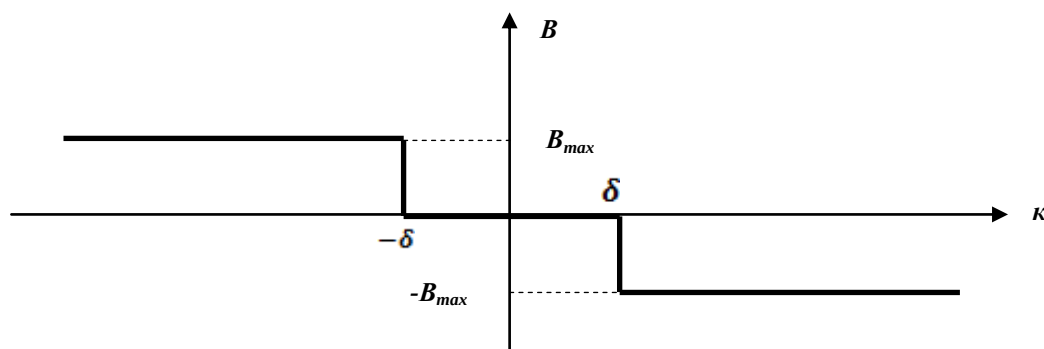


Рис. 1. Характер формирования магнитного момента ЭМ

От выбора коэффициентов k_1 и k_2 зависит качество регулирования. При этом следует учитывать, что ЭМ не может обеспечивать магнитный момент больше заданного при максимальном токе (напряжении) на катушке, т.е. величины B_{max} .

Для программных разворотов в соответствии с выражением (4) регулятор представляет собой ПД регулятор.

Математическая модель углового положения разрабатывалась в предположении, что измерительные датчики (магнитометр и датчик угловых скоростей) позволяют определить значение угла и угловой скорости в текущий момент времени [4], а возмущающие моменты отсутствуют.

Математическая модель углового движения представлена в виде

$$\ddot{\alpha} = \frac{M_{\text{упр}}}{J} \quad (6)$$

Алгоритм управления

$$M_{\text{упр}} = BH \sin \alpha \quad (7)$$

Выбор коэффициентов алгоритма управления с учетом возможностей ЭМ осуществлялся по выражениям

$$k_1 = a * B_{\text{max}} / \left(\frac{\pi}{2}\right) [\text{Ам}^2\text{с/рад}], \quad (8)$$

$$k_2 = b * B_{\text{max}} \sqrt{\frac{2J}{\pi BH}} [\text{Ам}^2\text{с/рад}]; \quad (9)$$

где a и b коэффициенты, распределяющие ресурсы между управлениями по углу и угловой скорости (их сумма равна 1).

Различные варианты величин a и b , использовании при моделировании, приведены в табл. 1

Таблиця 1.
Значення коефіцієнтів ПД регулятора

№	a	b
1	0,7	0,3
2	0,5	0,5
3	0,3	0,7

Исходными данными для моделирования являлись характеристики объекта управления и закона управления, а именно:

- J – момент инерции объекта управления (КА или стенда);
- a, b – коэффициенты, учитывающие распределение ресурсов регулятора;
- δ – параметр чувствительности привода (рис. 2).
- $B_{\max}$ – максимальный магнитный момент ЭМ.

Моделирование углового движения производилось для КА имеющего $J=5,2$ кгм², с установленными на нем ЭМ с магнитным моментом $B_{\max}=5$ Ам² [5].

Параметр δ варьировался со значениями от 0,1 до 0,5 с шагом 0,1 и от 0,01 до 0,1 с шагом 0,01.

Задание этих условий предполагает изменять чувствительность провода к управлению и влиять на точность стабилизации, время переходного процесса и потребление энергии ЭМ.

В модели предусмотрено как задание начальных, так и конечных условий углового движения, которые должны установиться в процессе стабилизации.

В качестве начальных и конечных условий для осуществления программного разворота задавались условия:

- $\alpha_0 = 90^\circ$;
- $\alpha_k = 0^\circ; 45^\circ$ (повороты на 90 и 45°);
- $\dot{\alpha}_0 = 0$;
- $\dot{\alpha}_k = 0$.

В качестве начальных и конечных условий для моделирования процесса гашения начальной угловой скорости задавались условия:

- $\alpha_0 = 0^\circ$;
- $\alpha_k = 0^\circ$;
- $\dot{\alpha}_0 = \alpha_{\text{зад}}$;
- $\dot{\alpha}_k = 0$,

где значение $\alpha_{\text{зад}}$ варьировалось со значениями, приведенными в табл. 2.

Таблиця 2.
Начальные угловые скорости движения КА

№	$\alpha_{\text{зад}}$, град/с
1	5
2	10
3	15
4	20

Моделирование производилось для программного разворота на 90° и с 90° до 45° . Результаты моделирования приведены на рис. 2.

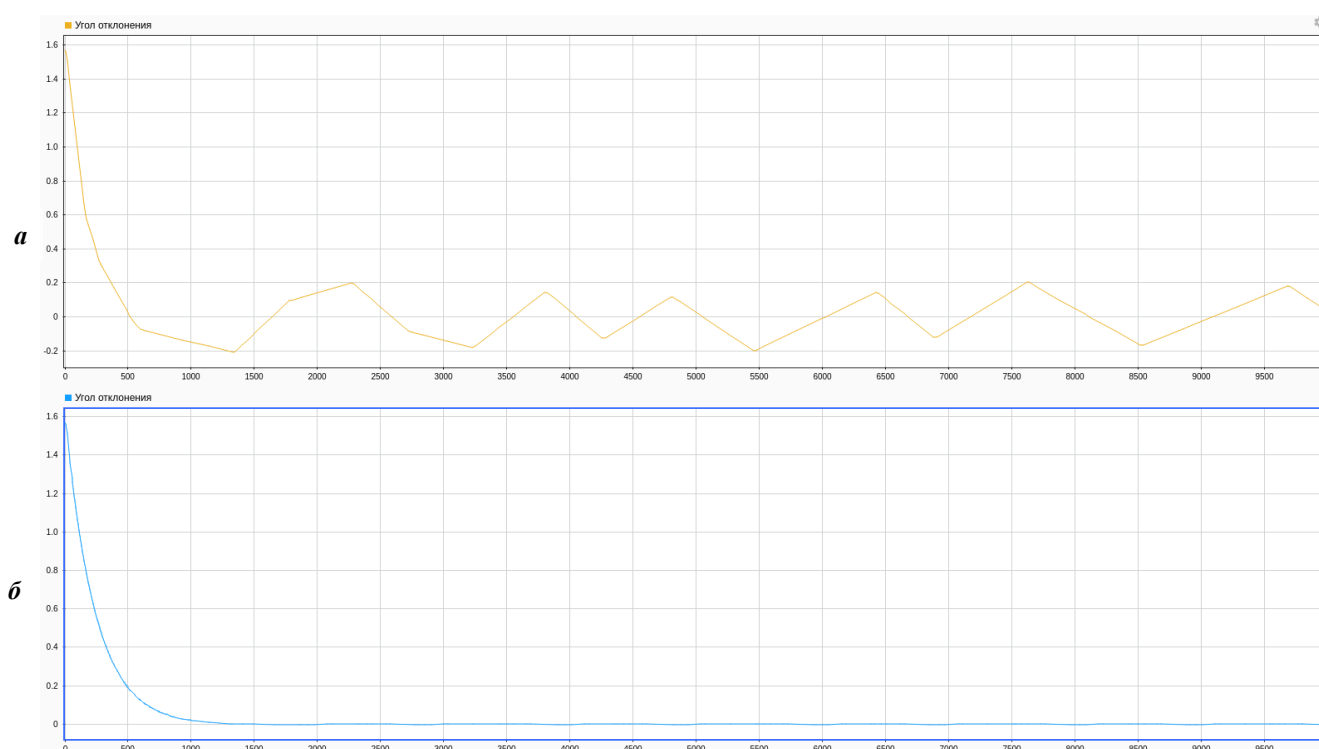


Рис. 2. Переходной процесс изменения угла на 90° при коэффициентах $a = 0.7$, $b = 0.3$: а) $\delta = 0.5$, б) $\delta = 0.01$

Как видно из графика предложенный алгоритм позволяет осуществлять программный разворот по координате. Качество переходного процесса существенно зависит от параметра δ . При этом время переходного процесса остается практически постоянным.

На рис. 3, 4 приведены результаты моделирования при программном развороте с 90° до 45° .

Как видно из приведенных графиков предлагаемый алгоритм управления одним ЭМ позволяет обеспечивать возможность программного разворота на любой угол при достаточно простом управлении ЭМ в дискретном режиме. Качество управления существенно зависит от δ .

Проводилось исследование возможности использования предлагаемого алгоритма для погашения угловых скоростей. Результаты моделирования приведены на рис. 4.

Графики показывают, что осуществляется стабилизация не только по скорости, но и по углу. При этом КА до погашения скорости производит 3 полных оборота. Из рис. 4 видно, что при уменьшении δ ошибка стабилизации уменьшается. При этом на время переходного процесса изменение δ практически не влияет.

Графики включения во времени ЭМ, определяющих энергетические затраты на управление, приведены на рис. 6, 7.

Как видно из результатов моделирования при меньшем значении δ ошибка стабилизации уменьшается за счет более частого включения ЭМ. Время включенного состояния ЭМ при больших и малых значениях δ практически одинаковое.

Выбор одной из двух катушек для плоскостного разворота осуществляется той катушкой, вектор магнитного момента которой имеет больший угол по отношению к вектору магнитного поля Земли.

Для оценки адекватности процессов моделирования реальному процессу планируется провести экспериментальное исследование на стенде ориентации и стабилизации [6].

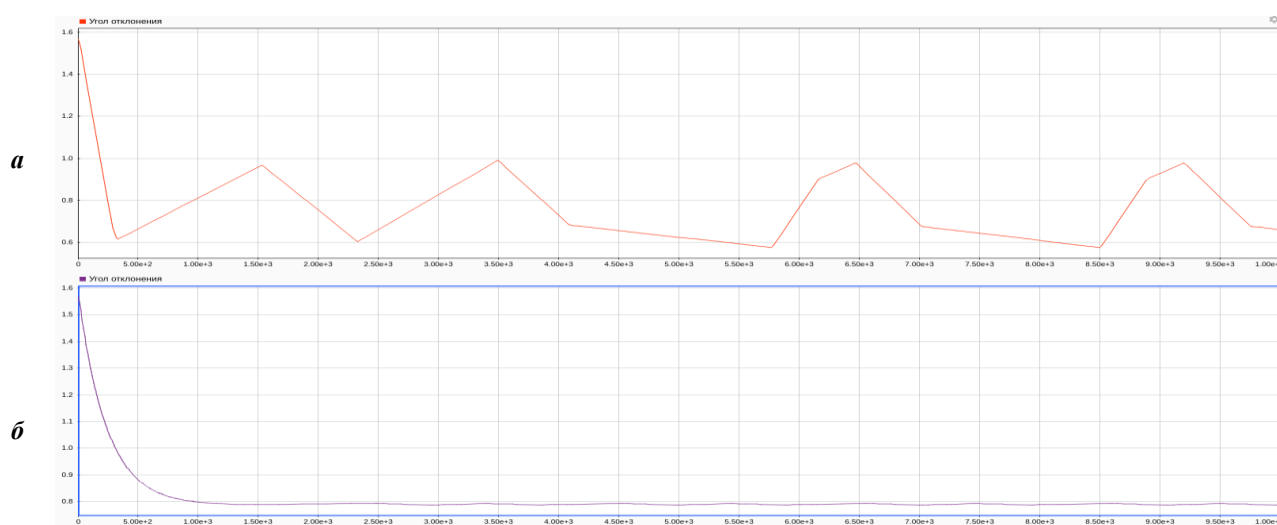


Рис.3. Переходной процесс изменения угла с 90° до 45° при коэффициентах $a = 0.7$, $b = 0.3$: а) $\delta = 0.5$, б) $\delta = 0.01$



Рис. 4. Переходной процесс изменения скорости при коэффициентах $a = 0.7, b = 0.3$: а) $\delta = 0.5$, б) $\delta = 0.01$



Рис. 5. Переходной процесс изменения угла при начальной угловой скорости 5 град/с с коэффициентами $a=0.7, b=0.3$: а) $\delta = 0.5$, б) $\delta = 0.01$

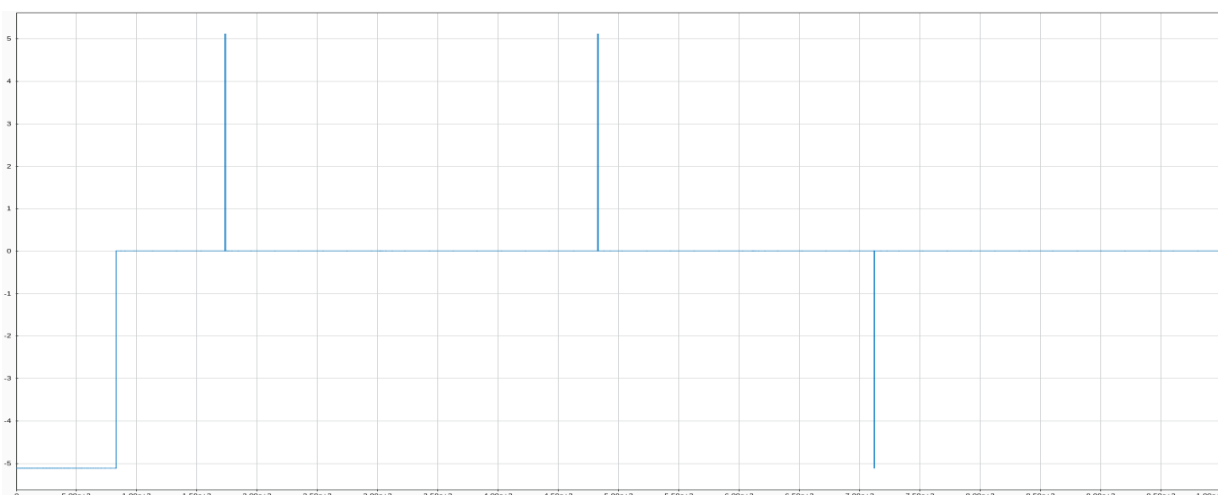


Рис. 6. График включения ЭМ при $\delta = 0.5$.

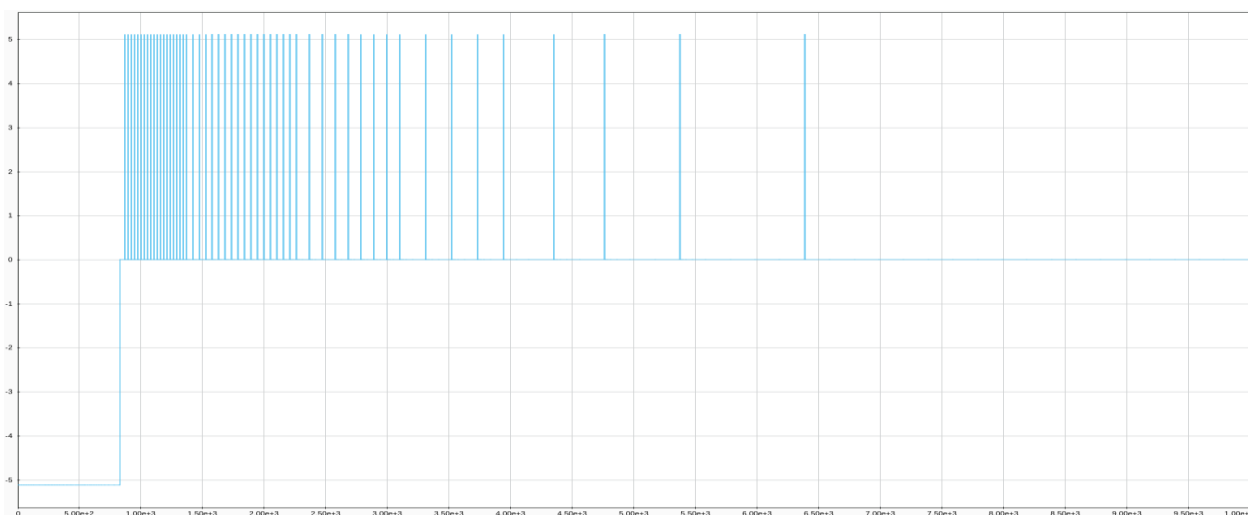


Рис. 7. График включения ЭМ при $\delta = 0.01$

Выводы. Предложен единый алгоритм управления с помощью одной катушки как для плоскостного разворота, так и для погашения угловых скоростей с достаточно простой реализацией, обеспечивающий приемлемое качество переходных процессов.

При реализации алгоритма для углового поворота и погашения начальных угловых скоростей целесообразно перераспределять ресурсы между управления угловым поворотом и угловой скоростью за счет изменения коэффициентов a и b .

Результаты моделирования показали, что от параметра δ закона управления существенно зависит качество переходного процесса, в то время как на время переходного процесса величина δ не влияет, однако при ее уменьшении существенно увеличивается количество переключений ЭМ.

Адекватность процессов моделирования реальному процессу планується здійснити шляхом проведення експерименту на розробаному стенді орієнтації та стабілізації.

Библиографические ссылки

1. Проектирование систем управления объектов ракетно-космической техники. Т. 2. Проектирование систем управления космических аппаратов и модулей орбитальных станций [Текст]: учебник / Ю.С. Алексеев, Е.В. Белоус, Г.В. Беляев и др./ под общ. ред. Ю.С. Алексеева, Ю.М. Златкина, В.С. Кривцова, А.С. Кулика, В.И. Чумаченко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», НПП Хартрон-Аркос, 2012. – 680 с.
2. Eickhoff, J. The FLP Microsatellite Platform // Flight Operations Manual // Jens Eickhoff. — Springer International Publishing. — Switzerland. — 2016. — Paragraph 7.8. — p. 204.
3. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Влияние возмущений на точность стабилизации спутника ДЗЗ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. No 18. 31 с. doi:10.20948/prepr-2016-18 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-18>
4. Лабораторные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника 'Чибис-М' / Д.С.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. No 40. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-40>
5. Иванов Д.С., Карпенко С.О. Овчинников М.Ю. Лабораторные испытания токовых катушек с сердечником // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. No 29. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-29>
6. Тищенко А. В. Испытательный стенд системы угловой ориентации и стабилизации космического аппарата / А. В. Тищенко, О. Г. Клочков, А. М. Кулабухов, В. А. Масальский // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Ракетно-космічна техніка. - 2016. - Т. 24, вип. 19. - С. 140-145. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vdurkt_2016_24_19_21.

УДК 669.14.44

Nosova T.V., Kalinina N.E., Kalinin V.T., Davidyuk A.V., Vovk A.M.

Oles Honchar Dnipro National University

Aerospace College

PROCESSING ALUMINUM ALLOYS BY DISPERSION MODIFIERS

Вивчення особливостей структури та властивостей алюмінієвих сплавів, оброблених дисперсними та нанодисперсними модифікаторами є актуальною проблемою матеріалознавства. В роботі проведено аналіз існуючих модифікаторів алюмінієвих сплавів системи Al-Si, Al-Mg. На основі класичної теорії модифікування обрано тип тугоплавкого модифікатора - порошок карбіду кремнію SiC розміром частинок до 100 нм. Розроблено технологію введення модифікатора в розплав. Проведено дослідні плавки алюмінієвих сплавів АЛ4, 1570, 2219.

Встановлено критерії вибору нанодисперсного модифікатора β SiC. Наведено термічні параметри модифікування. Отримано ефект подрібнення дендритних структури модифікованих сплавів. Досягнуто дрібнозернисту структуру виливків та деформованих модифікованих сплавів АЛ4, 2219. Підвищено технологічні і механічні властивості промислових алюмінієвих сплавів, знижена газонасиченість.

Ключові слова: алюмінієві сплави, нанодисперсний модифікатор, деформовані сплави, механічні властивості, структура.

The purpose of this work is studying of features of structure and properties of the foundry aluminum alloys processed by nanodisperse modifiers. The analysis of the existing modifiers of aluminum alloys of Al-Si system is carried out. On the basis of the classical theory of modifying the type of the refractory modifier – carbide silicon as SiC of particles in size 50...100 nanometers it was offered. The technology of input of the modifier in fusion is developed. It is carried out industrial experiences of melting of an aluminum alloy AL4, AL4S.

Criteria of a choice of the nanodispersive SiC modifier are established. Thermotemporary parameters of modifying are laid. The effect of crushing of dendrit's structure of the modified alloys is received. The uniform fine-grained structure of

of castings from the modified AL4 alloy is reached. Technological properties the industrial aluminum alloys are increased, mechanical properties is reduced.

Keywords: aluminum alloys, nanodispersion modifier, casting, properties, structure.

Formulation of the problem. Improving the quality and properties of products of responsible designation can not be solved without the development of new and improved existing processes for the production of alloys based on aluminum. For castings made of aluminum alloys that are part of turbopump units, fuel pumps make demands that combine tightness, low porosity, high complex of mechanical properties [1-3].

When obtaining cast aluminum alloys an important step is the process of melting and processing of melts. It is at these stages that the melting and refining operations are effectively used [2, 5, 6].

However, the lack of adaptation of castings to mechanical processing is hampered by the widespread use of aluminum alloys as structural materials. Low productivity is explained by the presence of fragile and difficult-soluble phases in alloys: FeAl_3 , Mg_2Si , MgZn_2 , occurring in the form of large clusters and forming a continuous grid [1]. These fragile phases cause cracks in the casting of ingots and shaped castings. In addition, they contribute to the deceleration of the diffusion processes of dissolution of intermetallics in the homogenization of castings [3]. The big disadvantage is the high gas saturation of foundry alloys.

The development of modern technologies requires the creation of new materials and the improvement of existing alloys. One of the effective ways to improve the quality of casting, grinding grain and obtaining a homogeneous structure is modification [5].

Industrial enterprises apply the modification of foundry aluminum alloys with sodium salts, which contributes to the differentiation of the eutectic Al-Si. However, low-melting sodium salts are not environmentally friendly and are not applicable to the processing of large masses of melts.

A promising direction for modification is the use of disperse refractory modifiers: carbides, nitrides, borides, pure metals with a particle size of $0.1 \dots 1 \mu\text{m}$ [9-11]. When modifying cast aluminum alloys with dispersed particles of silicon carbide up to $1 \mu\text{m}$, an increase in technological and mechanical properties of alloys and corrosion resistance was noted [3, 7].

Theoretical foundations of modification are set forth in the fundamental works of MV Maltseva [2]. Currently, there are several theories of modification, they explain certain aspects of the process of modification of aluminum alloys, but do not characterize it completely. This is due to the complexity of the process and its dependence on the conditions of melting and casting, as well as the influence of uncontrolled impurities and the interaction of components that are introduced and which can both amplify and weaken the effect of modifiers.

All substances with less electronegativity and less effective ionization potential (U_{me}) than the metal base of the alloy will have a modifying effect on the crystallization process [7, 9, 11].

Materials that have a higher value U_{me} - the metal alloy base will have a negative impact. This is because the lower the value of the ionization potential, the easier the element gives its valence electrons to the matrix and vice versa. A factor characterizing the ability of a substance to influence the crystallization process should be considered as a solubility factor of impurities in the matrix. The modifier should be located on the edge of crystals and clusters, but not part of the matrix alloy.

The modifier should not create its own clusters. The element having the properties of the modifier must have low solubility in solid state and limited in liquid. On the basis of the coefficients of activity change of various elements, the most powerful modifiers of aluminum and its alloys are: Ge, La, Sr, Ti, Sc and their

compounds. The influence of transition metals: Hf, Ta, Ti, V, Nb, Zr on the properties of aluminum alloys [4] was studied. Installed that an element is an effective modifier if it has the greatest value in the state diagram of the crystallization interval.

At present, a sufficient number of qualitative works devoted to the modification of refractory particles of refractory compounds have been published. In disperse systems, the features of the surface state are shown, since the particle of surface atoms in dispersed particles is predominant. In connection with the above, the subject of the submitted work is relevant for obtaining high-quality castings in mechanical engineering.

Results of the research and their discussion. In order to improve the quality of Al-Si aluminum alloy castings, experimental-industrial melting of alloys AL4 (AK9ch), AL4C, AL4D was conducted in this work. The chemical composition of the investigated aluminum alloys is shown in Table 1.

As shown in works [10-11, 13], the most effective modifier of aluminum alloys are powder refractory compositions based on SiC carbide size smaller than 1 μm .

Table 1
The chemical composition of foundry aluminum alloys

Alloys	Element content, % wt							
	Al	Si	Zn	Mg	Sb	Mn	Cu	Fe
АЛ4	basis	10,5	0,3	0,35	-	0,50	0,3	0,4
2219	basis				-			
AMr6	basis				-			

In industrial conditions pits of titanium, nitride, titanium, silicon carbide were tested for the modification of alloys AL4 (AK9ch), 2219, AMg6. In order to improve the quality and manufacturability of multicomponent alloys of the Al-Si, Al-Mg system, the mechanical properties improved, the modification of melts by finely dispersed powders of silicon carbide of β -SiC modification up to 100 nm was performed.

The investigated alloys are multicomponent, which leads to the possibility of strengthening the solid solution of aluminum dissolved alloying elements, as well as the separation from the supersaturated solid intermetallic phase solution, which creates a strengthening effect with subsequent aging. The resulting modifier is a refractory silicon carbide that is not soluble in the melt, but serves as an additional crystallization center. The optimal amount of the introduced modifier is determined experimentally on laboratory smelter and varies from 0.07 to 0.1% of the mass of the melt.

Table 2 shows the effects of modifier quality on the grain size and porosity of the castings.

Table 2
Influence of disperse additives of β SiC modifier on grain structure of AL4 alloy

Number of additives in% of the mass of the melt	The grain size of the alloy, μm	
	Before modification	After modification
0,03	160	95
0,07	130	72
0,10	150	90

The alloy microstructure in the cast state is an α -solid solution, a small amount of eutectics, and different intermetallic phases: AlSb, MgZn₂, AlFeSi, CuAl₂, which are isolated from the supersaturated solid solution with subsequent aging.

Since the solubility of hydrogen in the liquid melt of aluminum is higher than in solid state. This is the main reason for gas porosity when hardening castings. To reduce porosity, the refining of the melt with hexachloroethane was carried out. To eliminate the secondary porosity during thermal treatment, casting was protected by titanium chips.

In work the technological process of modification of aluminum alloys AL4, 2219 by nanodispersed silicon carbide powder is proposed. The β -SiC disperse powder was selected based on the correspondence between Al and SiC crystal lattices and a small difference between the atomic radii Al and SiC. Powder of β -SiC modification was obtained by the method of plasma-chemical synthesis. The average granulometric composition of the modifier was 100 nm. For the convenience of feeding into the melt used pill modifier.

The technological properties of the casting before and after the modification were determined. Liquidity was determined by the method of rod test. As a result of modification, the fluidity of alloys is increased by 5 ... 10%. The content of gases in alloys was determined by technological sampling. When the temperature of the liquid metal decreases, the solubility of the gas decreases in form, and thus the number of gas bubbles increases. Alloys AL4, 2219 доэвтектического and eutectic composition have a good fluid flow, which reduces the likelihood of formation in the casting of gas shells.

The alloys were smelted in an electric stove, the resistance of the SAT - 0,15 capacity of 100 kg. After melting of the Al-Mg, Al-Mn alloys, the alloys were overheated to a temperature of 720 ... 760 ° C and subjected to modifications. The modifier was injected into the bottom of the crucible and mechanically stirred.

The results of the estimation of the gas content of the samples (Table 3) showed that the modification of the alloys provides a low gas content corresponding to 1 ball of porosity of castings of aluminum alloys according to DSTU 2839-94.

The works carried out in industrial conditions showed an increase in the mechanical properties of modified cast aluminum alloys AL4-M and AL4S to 270 MPa, which is 25% higher than the strength of the properties of unmodified alloys.

Table 3
Results of determination of gas content and fluid flow of alloys

Alloys are investigated	Porosity, ball	Liquid flow, mm
АЛ4	3	385
АЛ4-М	1	377
2219	1	225
АМг6	1	250

Conclusions

1. The choice of the type of the modifier of foundry aluminum alloys - powder composition of silicon carbide of modification β -SiC with average particle size up to 100 nm is substantiated. The industrial melting of alloys AL4, 2219, AMg6 with the use of a tableted modifier was carried out.

2. Technological properties of alloys are studied. In modified alloys, the porosity from the 3rd to the 1st ball and the increased liquid flow rate is reduced by 5 ... 10%.

3. As a result of modification, a uniform disperse structure of alloys was obtained and an increase in the strength of the properties was achieved by 20% compared to the unmodified state.

Bibliographic references

1. Fridlander I.N. Aluminum deformable structural alloys. - Moscow: Metallurgy, 1979. - 365s.
2. Maltsev MV Modification of the structure of metals and alloys / MV Maltsev. - Moscow: Metallurgy, 1964. - 214 p.
3. Elagin V.I. Doping of deformable aluminum alloys with transition metals. - Moscow: Metallurgy, 1975. -125s.

4. Kutsova V.Z. Effect of GeP Doping on the Structure and Properties of Alloys of the Si-Ge System / V.Z. Kutsova, O.A. Nosko, O. V. Oliynyk // Bulletin of the DNU. - 2010 - Voip. 74. - P. 120-126.
5. Ishchenko A.Ya. Welding of modern designs from aluminum alloys / A.Ya. Ishchenko, T.M. Labour - Kyiv: Scientific Opinion, 2013. - 405s.
6. Kalinina N.E. Features of the Al-Mg / HE Aluminum Alloys Modification. Kalinina, Z.V. Vilschuk // Aviation-space materials and technologies. - 2011. - No. 7 (84). - P. 80-84.
7. Nemenenko B. M. Theory and practice of complex modification of siluminov / B.M. Nemeniuk - Leningrad: Technoprint, 1999. - 272 p.
8. Boguslaev V. A., Kachan O. Ya., Kalinina N. E. Nanomaterials and nanotechnology: a textbook for high schools. - Zaporozhye: Motor Sich, 2016. - 286s.
9. Andriyevsky R. A. Nanomaterials: Concept and Modern Problems / R. A. Andriyevsky // Russian. chem magazine. - 2002. - №5. - P. 50-56.
10. Kalinina N. E. Disperse modification of foundry aluminum alloys / N. E. Kalinina, O. A. Kovats // Bulletin of the DNU. -2007 - No. 9/2. - P.27-31
11. Patent 28570 of Ukraine, IPC S22C // 00. Warehouse for the modification of aluminum alloys / Kavats O. A., Kalinina N. E., Kavats D. A., Fedyuchuk O. K.: Application of the DPAV Southern Machine-Building Plant named after I.A. O. M. Makarov. No. 200709846; stated. 03.09.07; has published 10.12.07; Bull №20, 8s.
12. Gusev AI Nanomaterials, Nanostructures, Nanotechnologies / AI Gusev. - Moscow: Fizmatlit, 2005. - 426 pp.

УДК 629.783

Т. В. Лабуткина, А. А. Котюк

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***МЕТОД «ОБЪЕМНОГО ПЛЕТЕНИЯ» ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ
ГИПОТЕТИЧЕСКИХ ЗОН МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛИКОНФЛИКТОВ,
РАССМАТРИВАЕМЫХ В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧАХ**

Представлено аналіз підходів до моделювання гіпотетичних даних для дослідницьких задач, які потребують розгляду ситуацій механічних поліконфліктів орбітальних об'єктів. Ситуацією механічного поліконфлікту вважається одночасне зближення орбітального об'єкту більш ніж з одним орбітальними об'єктами на відстань, небезпечну з точки зору можливості зіткнень (при цьому орбітальні об'єкти, з якими відбувається його зближення, також можуть знаходитися на небезпечній відстані один від одного). Розроблений метод швидкої генерації гіпотетичних зон поліконфліктів, оснований на заповненні її для заданого моменту часу небезпечними ділянками траєкторій (ділянками, які знаходяться на небезпечній відстані відносно декількох інших ділянок, що входять до зони). Конфігурацією ділянок обирає дослідник. Запропоновано методику аналізу генерованої зони поліконфлікту.

Ключові слова: механічний конфлікт орбітальних об'єктів, небезпечне зближення орбітальних об'єктів, механічний поліконфлікт орбітальних об'єктів, поліконфліктна зона в навіколоземному просторі, метод генерації гіпотетичних даних для аналізу поліконфліктів.

Представлен анализ подходов к моделированию гипотетических данных для исследовательских задач, требующих рассмотрения ситуаций механических поликонфликтов орбитальных объектов. Под ситуацией механического поликонфликта понимается одновременное сближение орбитального объекта более чем с одним орбитальными объектами на расстояние, опасное с точки зрения возможности столкновений (при этом орбитальные объекты, с которыми происходит его сближение, также могут находиться на опасном расстоянии друг относительно друга). Разработан метод быстрой генерации гипотетической зоны поликонфликтов, основанный на заполнении ее для заданного момента времени опасными участками траекторий (участками, находящимися на опасном расстоянии относительно нескольких других участков, входящих в зону). Конфигурацию участков в зоне выбирает исследователь. Предложена методика анализа сгенерированной зоны поликонфликтов.

Ключевые слова: механический конфликт орбитальных объектов, опасное сближение орбитальных объектов, механический поликонфликт орбитальных объектов, поликонфликтная зона в околоземном космосе, метод генерации гипотетических данных для анализа поликонфликтов.

Efficacy of various algorithms for calculation of Legendre polynomials of high orders is investigated. Convenience of their programming is estimated. An analysis of approaches to the modeling of hypothetical data for research problems that require the consideration of situations of mechanical poly-conflicts of orbital objects is presented. A mechanical conflict is a close simultaneous approach of an orbital object with more than one orbital objects to a distance that is dangerous from the point of view of the possibility of collisions (in this case the orbital objects with which it comes closer may also be at a dangerous distance from each

other). A method for rapid generation of a hypothetical zone of poly-conflicts, based on filling it with dangerous sections of trajectories for a given point in time (sections that are at a dangerous distance with a number of other sections of the zone) is developed. The configuration of the sections in the zone is selected by the researcher. The methodology for analyzing of generated polyconflicts zone is proposed.

Keywords: *mechanical conflict of orbital objects, dangerous approach of orbital objects, mechanical poly-conflict of orbital objects, poly-conflict zone in near-Earth space, method of generating hypothetical data for analysis of poly-conflicts.*

Введение и обзор литературы. Одна из острых проблем использования человечеством космического пространства – многочисленность множества орбитальных объектов в околоземном космосе и высокие темпы его роста [1]. Достаточно быстро увеличивается и число объектов космического мусора, и число космических аппаратов, которое пока составляет невысокий процент от всего орбитального множества, но с началом ввода в эксплуатацию многотысячных спутниковых систем (и при условии активизирующейся борьбе с космическим мусором) будет становиться все более значительной.

Многочисленность множества орбитальных объектов приводит к увеличению вероятности механических конфликтов (столкновений между ними). Расширим понятие ситуации механического конфликта, включив в него не только орбитальные столкновения, но и случаи опасных сближения орбитальных объектов (сближений на расчетных орбитах на опасные расстояния, при которых возможны их столкновения вследствие вероятных отклонений от расчетных положений). Увеличение множества объектов на орбитах Земли ведет к тому, что становятся возможными не только конфликтные, но и поликонфликтные ситуации, – одновременное сближение объекта на опасное расстояние с несколькими орбитальными объектами. В частном случае все или некоторое множество объектов такой группы объектов сближения (поликонфликтной группы объектов) могут находиться на опасном расстоянии друг относительно друга.

Исследование поликонфликтных ситуаций требует развития двух направлений. Первое направление предполагает моделирование и анализ множеств орбитальных объектов различного состава с целью исследования закономерностей появления и развития поликонфликтных ситуаций в зависимости от числа орбитальных объектов рассматриваемого множества и их орбитальных параметров. Второе направление связано с анализом различных вариантов поликонфликтных групп объектов (в частности – с исследованием зависимости характеристик протекания поликонфликта от числа объектов группы и значений их орбитальных параметров). В данной работе представлены исследования в рамках второго направления.

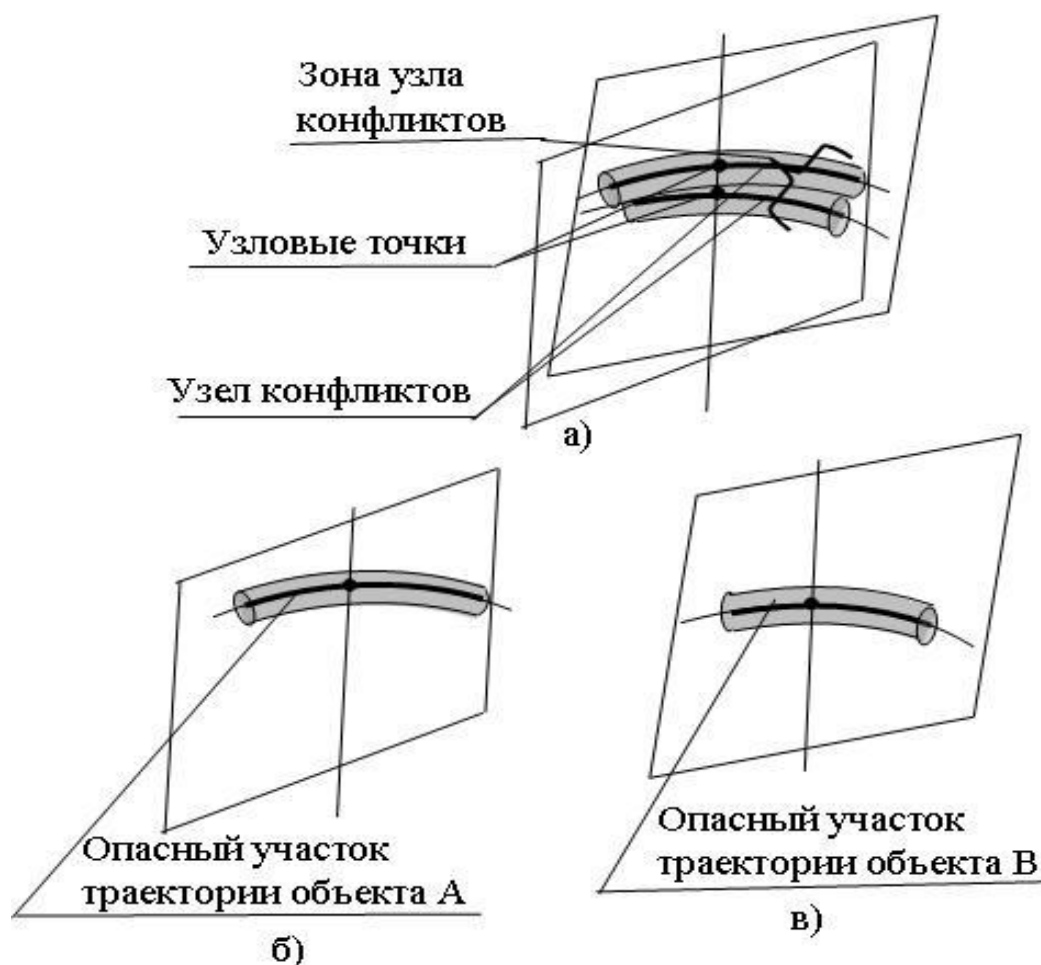


Рис. 1. К определению узла конфликтов и зоны конфликтов в его окрестности: в) узел конфликтов, образованный траекториями объектов А и В и окружающая его зона конфликтов; б) участок траектории объекта А и окружающая его опасная зона; в) участок траектории объекта В и окружающая его опасная зона.

Следует отметить, что анализ поликонфликтных ситуаций предполагает также рассмотрение областей пространства, в которых существует потенциальная возможность их возникновения (зон механических поликонфликтов). Для определения зоны поликонфликтов вначале остановимся на определении зоны конфликтов. Под зоной механического конфликта будем понимать область пространства, охватывающую участки траекторий пары орбитальных объектов, расположенные друг относительно друга на расстоянии опасного сближения (опасные участки), в частности, на расстоянии, меньшем некоторого граничного значения L_{mg} , определенного из соображений безопасности. Пару таких участков траекторий назовем узлом механических конфликтов, а наиболее близкие точки этих участков – узловыми точками [2,3]. На рис. 1а показан узел конфликтов, образованный опасными участками траекторий объекта А (рис. 1б) и объекта В (рис. 1в). Возможны различные подходы к описанию формы зоны конфликтов. Наиболее строгий подход предполагает рассмотрение этой зоны как объединения двух трубок,

охватывающих опасные участки траекторий (рис. 1а). В качестве средней линии каждой трубки можно, например, рассматривать орбиту объекта, определяемую только с учетом вековых значений орбитальных параметров. Радиус сечения трубки может быть принят постоянным. При описанном подходе к определению средней линии значение радиуса сечения определяется

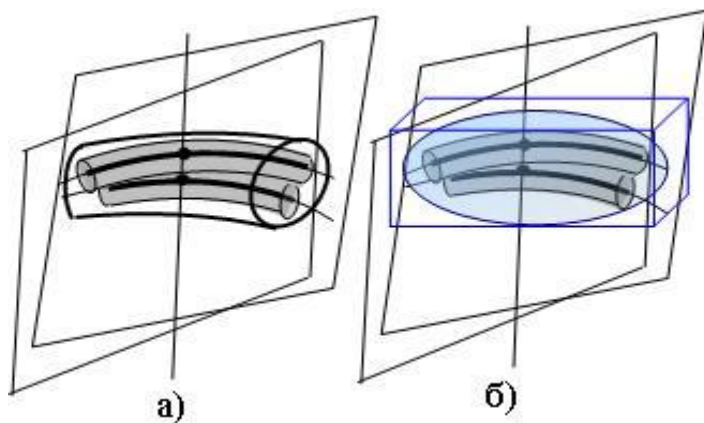


Рис. 2. Варианты упрощенного описания зоны конфликтов в окрестности узла конфликтов: а) трубчатая зона; б) зона в виде эллипса или параллелепипеда.

с учетом максимальных отклонений движения орбитального объекта от выбранной средней линии вследствие периодических изменений значений орбитальных параметров, а также с учетом возможных максимальных отклонений, обусловленных погрешностями расчетного определения текущих положений.

Более общий подход к определению зоны конфликтов предполагает рассмотрение некоторого объема, полностью

охватывающего опасные участки траекторий с окружающими их трубками. Этот объем может рассматриваться в виде трубчатой зоны постоянного диаметра (рис. 2а), а также в виде эллипсоида или параллелепипеда (рис. 2б). В данной работе не будем останавливаться на расчете параметров этих объемов.

Определим элементарный узел поликонфликтов. На рисунке 3а представлен узел конфликтов U_X , образованный участками траекторий объектов А и В, а на рис. 3б, – узел U_Y , образованный участками траекторий объектов А и С. На рис. 4 показано расположение обоих названных узлов. Опасные участки траекторий объекта А, входящие в узлы U_X и U_Y , перекрываются (имеет место пересечение множеств точек этих участков). На участке траекторий, который входит и в узел конфликтов, создаваемый объектами А и В, и в узел конфликтов, образуемый объектами В и С, для орбитального объекта А возможно одновременное сближение и с объектом В, и с объектом С, то есть поликонфликт. Будем говорить, что два рассматриваемых узла «сцеплены» между собой (через участок траектории объекта А, который назовем «сцепляющим»), и рассматривать совокупность этих двух узлов как элементарный узел поликонфликтов.

Если два узла конфликтов сцеплены между собой только через участок траектории одного объекта, то будем говорить, что это «узел слабой сцепленности». Пример узла слабой сцепленности показан на рис. 5 на примере сцепления узлов U_X и U_Y , образованных объектами А, В и А,С соответственно (на рис. 5а дано его пространственное представление, а на рис. 5б –

схематическое изображение). Для каждой точки сцепляющего участка объекта А есть точка на опасном участке объекта В, находящаяся от него на некотором расстоянии L_{AB} , не превышающем граничное значение L_{mg} . Аналогично, для каждой точки сцепляющего участка объекта А есть точка на опасном участке объекта С, находящаяся от него на некотором расстоянии L_{AC} , не превышающем граничное значение L_{mg} .

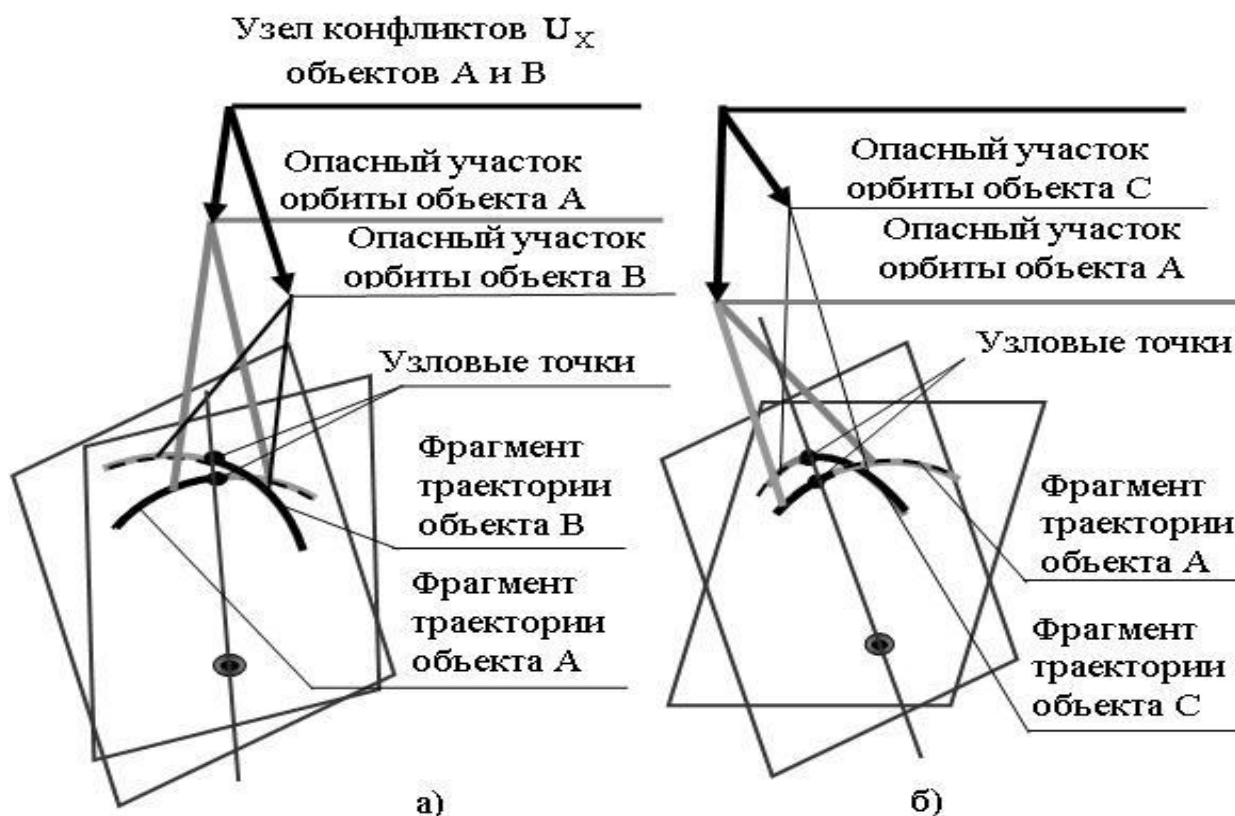


Рис. 3. Два узла конфликтов: а) узел U_X (образованный участками траекторий объектов А и В). б) узел U_Y (образованный участками траекторий объектов А и С.

Если не только участок объекта А входит одновременно в узлы конфликтов с объектами В и С, но объекты В и С также имеют участки, расположенные на опасном расстоянии друг от друга и входящие в узел конфликтов с объектом А, то объекты А, В и С образуют узел полной сцепленности. Такой узел показан на рис. 6 (на рис. 6а – его пространственное изображение, на рис. 6б – схематическое). В данном случае на опасных участках объектов В и С, входящих в узлы U_X и U_Y соответственно, есть участки, которые образуют узел конфликтов U_Z (для каждой точки участка объекта В есть точка на опасном участке объекта С, находящаяся от него на некотором расстоянии L_{BC} , не превышающем граничное значение L_{mg}).

Если один и тот же участок траектории объекта А входит не в один, а в большее число узлов конфликтов, например, в q узлов, то будем говорить о его

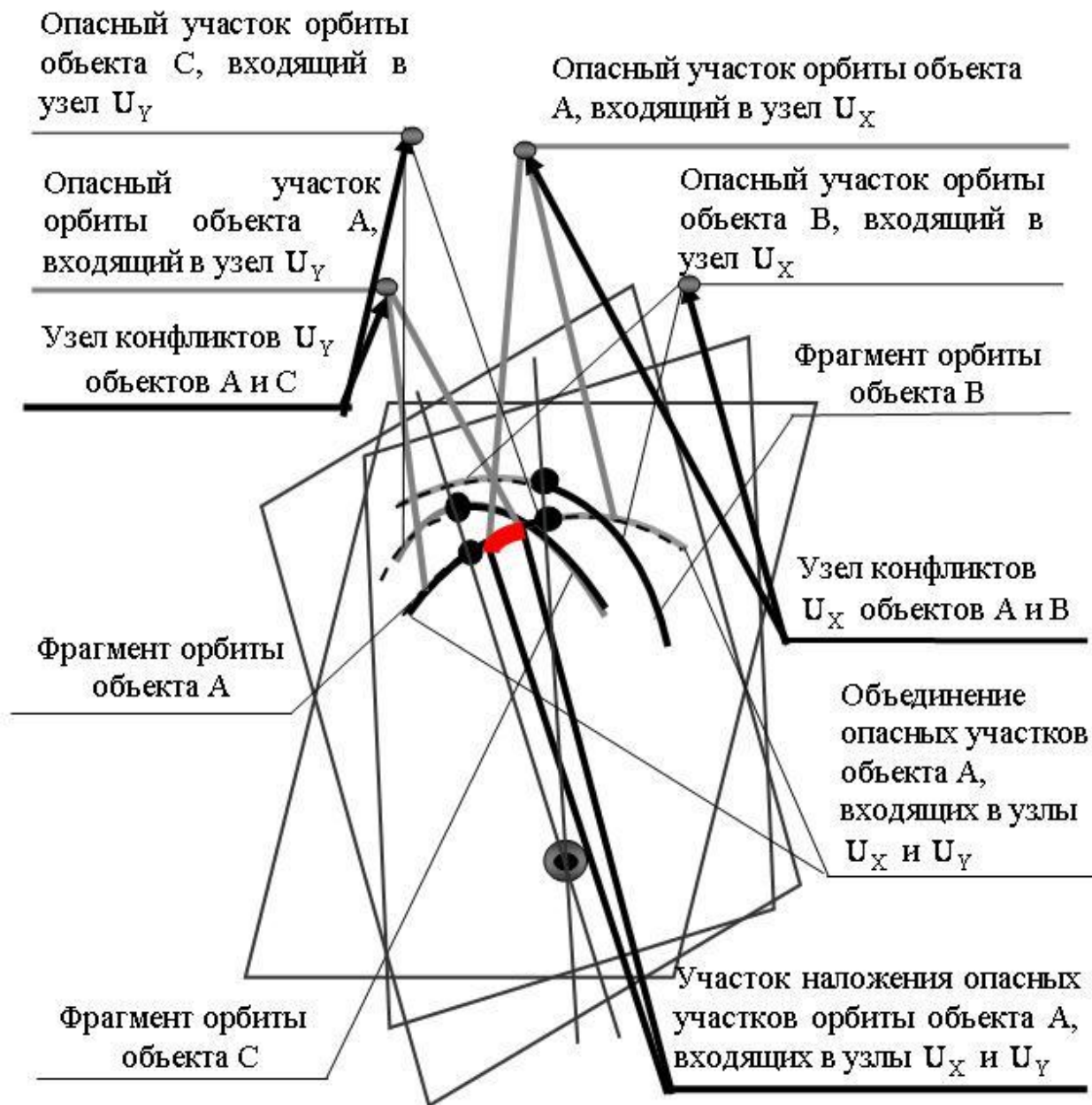


Рис. 4. Узел поликонфликтов, образованный сцеплением узла U_X (образованного участками траекторий объектов А и В) и узла U_Y (образованного участками траекторий объектов А и С)

вхождении в узел поликонфликтов со сцепленностью кратности q (или что он образует узел поликонфликтов кратности q). Узел со сцепленностью кратности q , сцепленный через участок траектории какого-либо объекта (например, объекта А), может быть полностью слабой сцепленности (все q узлов конфликтов сцеплены только через участок траектории объекта А). Возможно также, что некоторые из участков траекторий других объектов, которые входят

в образованный узел со сцепленностью кратности q , могут быть связаны между собой отношением опасной близости, то есть образовывать узлы полной

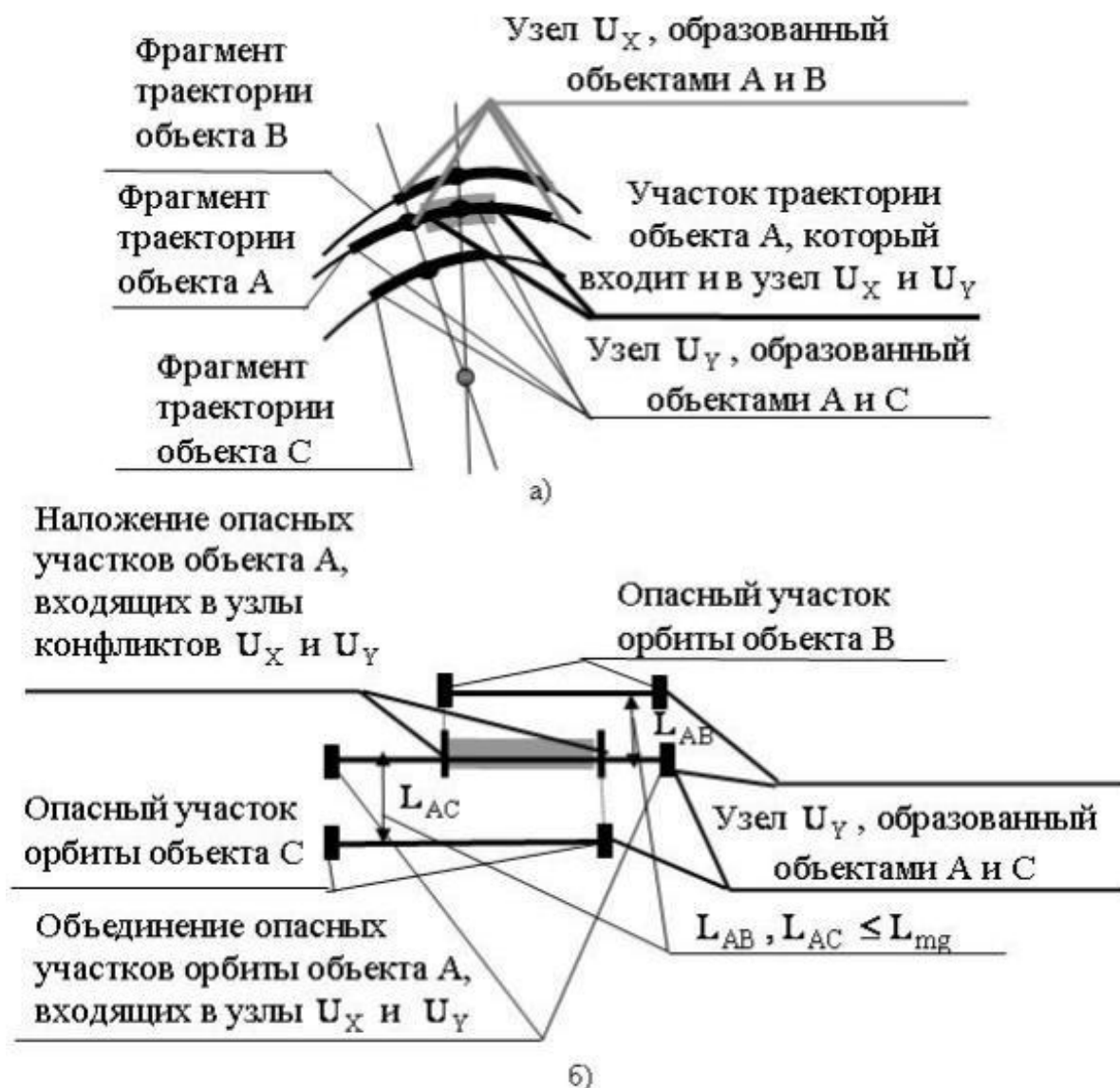


Рис. 5. Узел поликонфликтов неполной сцепленности, образованный сцеплением узлов конфликтов U_X и U_Y : а) изображение узла поликонфликтов; б) схематичное изображение узла поликонфликтов

сцепленности. В этом случае в узле с кратностью сцепленности q , для которого выполняется условие частичной сцепленности, можно выявить узлы с кратностью сцепленности $q_c \leq q$, для которых выполнятся условие полной сцепленности. На рис. 4,5,6 показаны узлы (частичной или полной сцепленности) кратности 2. На рис. 7 приведен пример узла поликонфликтов с 4-х кратной сцепленностью (участок траектории объекта А входит в узлы конфликтов, образованные с объектами В, С, D, E).

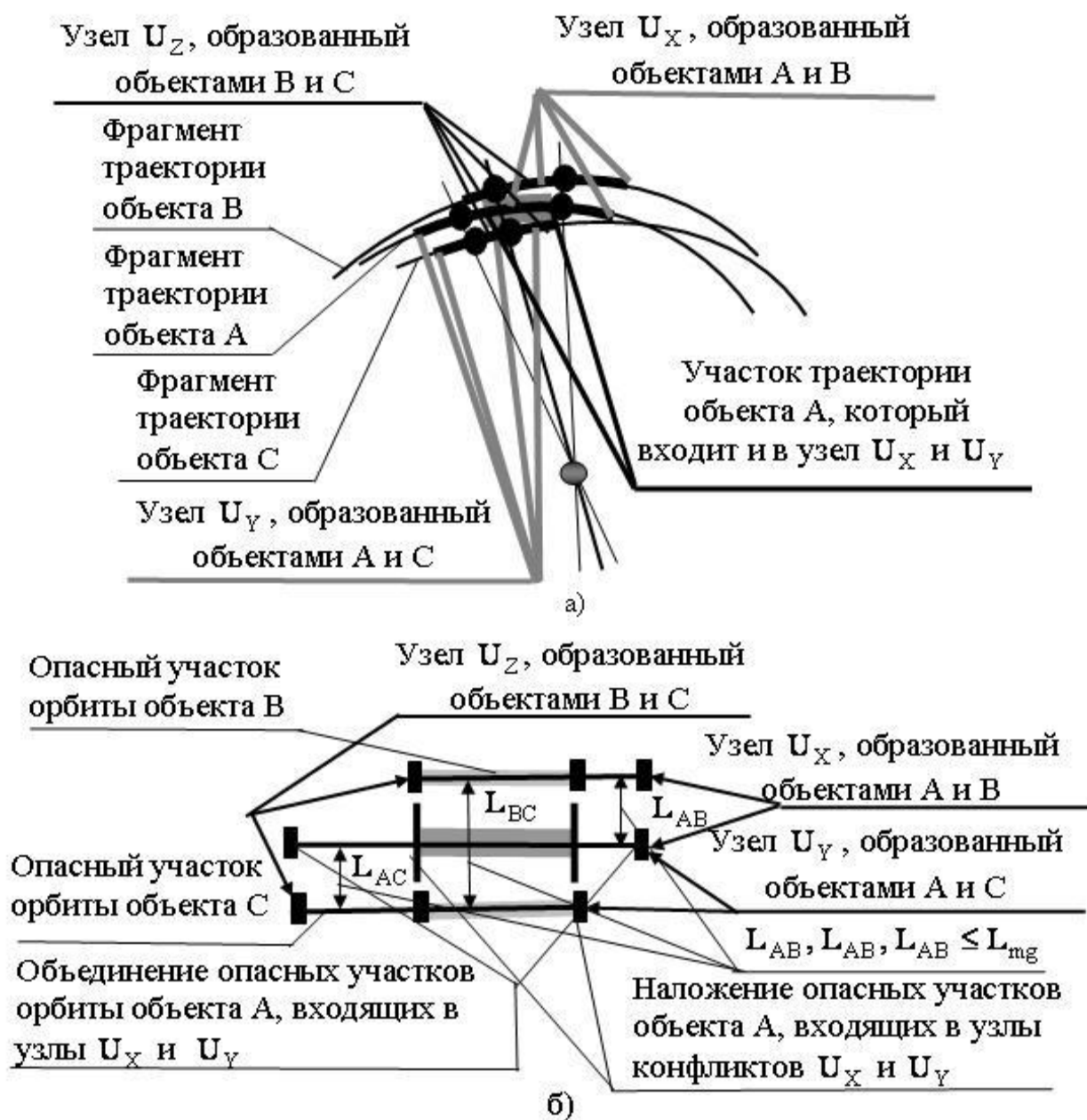


Рис. 6. Узел поликонфликтов полной сцепленности, образованный двумя сцепленными узлами конфликтов U_X и U_Y , которые также сцеплены через узел U_Z : а) изображение узла поликонфликтов; б) схематичное изображение узла поликонфликтов

Далее введем понятие поликонфликтной группы узлов (или группы связанных узлов поликонфликтов). Для этого рассмотрим три узла конфликтов (рис. 8): 1) узел U_X , образованный траекториями объектов А и В; 2) узел U_Y , образованный траекториями объектов А и С, сцепленный с узлом U_X через участок траектории объекта А; 3) узел U_Z , образованный траекториями объектов С и D, сцепленный с узлом U_Y через участок траектории объекта С.

Таким образом, между узлами U_X и U_Z существует опосредованная связь через узел U_Y . Будем говорить, что элементарные узлы поликонфликтов E_{XY}

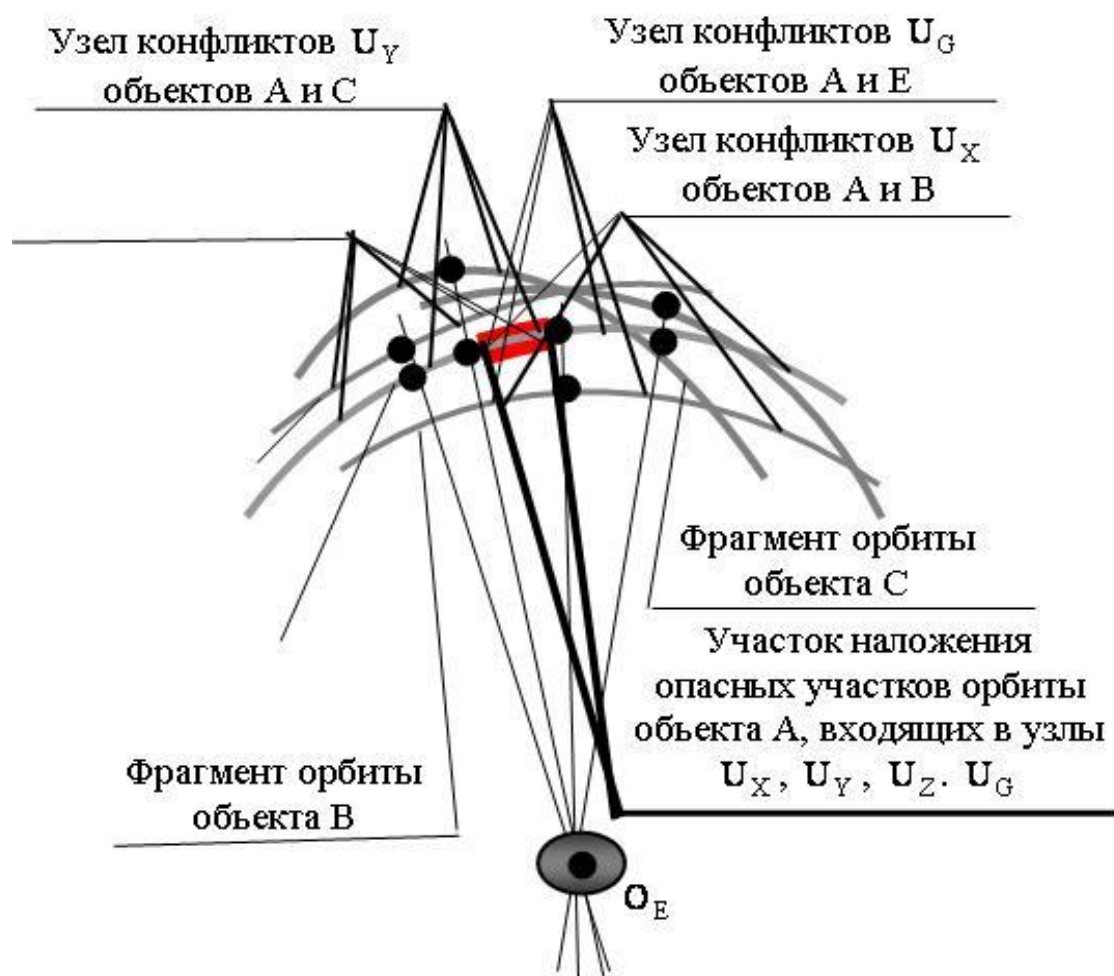


Рис. 7. Узел поликонфликтов со сцеплением кратности 4 через участок траектории объекта А

(образованный сцепленными узлами U_X, U_Y) и E_{YZ} (образованный сцепленными узлами U_Y, U_Z), связанные между собой через узел U_Y , «накладываются» друг на друга и образуют поликонфликтную группу связанных узлов (или узел множественных конфликтов).

В приведенном примере представлена группа узлов со слабой связностью (или слабо связанный узел множественных конфликтов). Признак включения узла в группу узлов слабой связности – наличие непосредственной связи (то есть сцепленности) хотя бы с одним узлом этой группы. В данном случае в составе группы слабой связности три узла (каждый имеет непосредственную связь хотя бы с одним узлом группы, а узел U_Y связан с двумя узлами). В общем случае можно говорить о группе узлов со связностью Q (о группе узлов связности Q , или иначе – о группе узлов Q кратной связности).

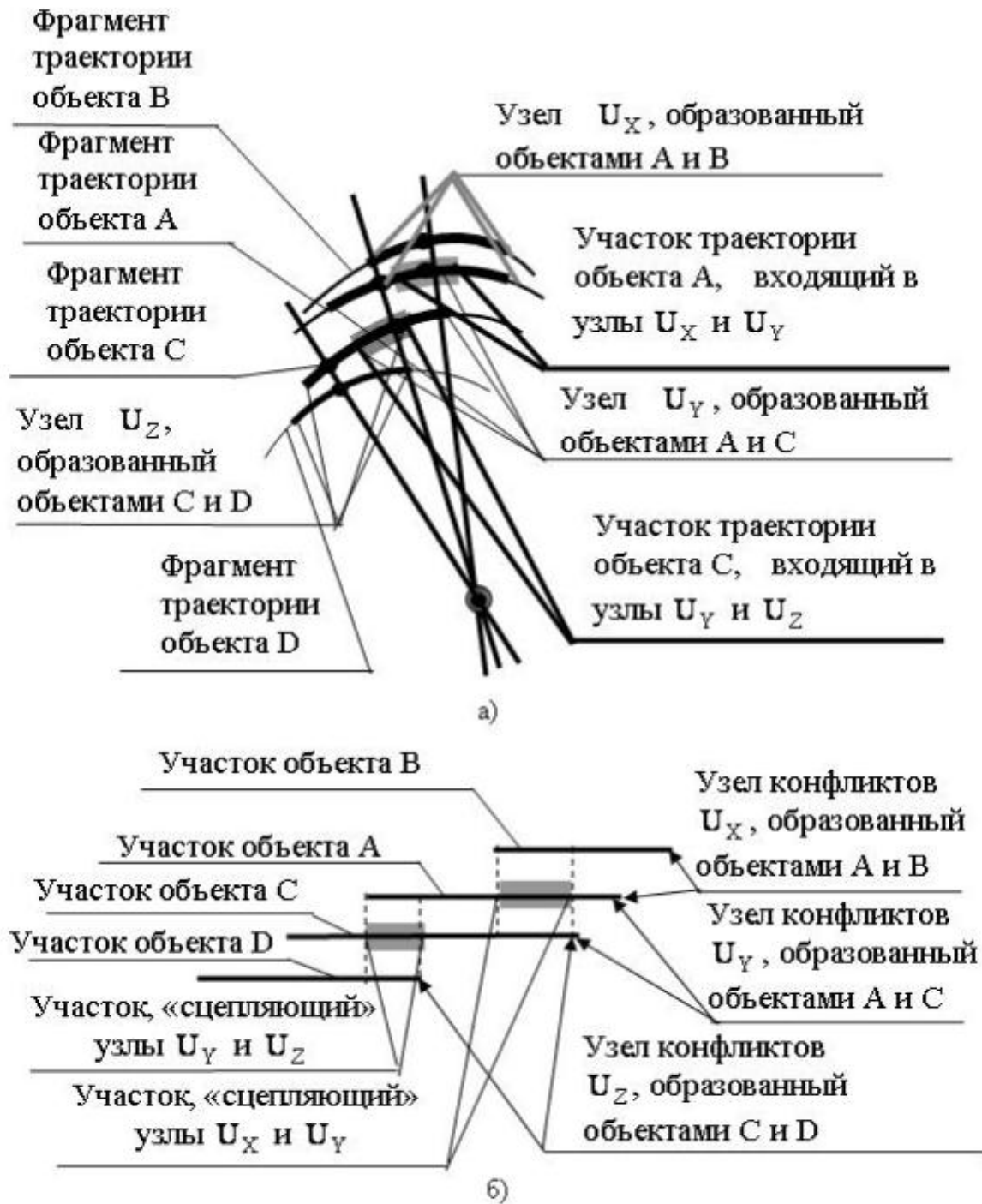


Рис. 8. Узел множественных поликонфликтов, включающий в себя узлы U_X , U_Y , U_Z , связанные через узел U_Y : а) изображение узла поликонфликтов; б) схематическое изображение узла поликонфликтов.

Признак вхождения в такую группу для каждого из узлов – наличие связей не менее чем с Q другими узлами группы. Внутри группы узлов меньшего значения связности Q можно выделить группы с большим значением

связности Q_C ($Q_C \geq Q$). Следует подчеркнуть, что под Q связями узла с другими узлами группы понимается его сцепленность с Q узлами этой группы, но не обязательно через один и тот же участок траектории.

Таким образом, узел множественного поликонфликта (группа связанных поликонфликтных узлов) может быть представлен как занимающая некоторую область пространства группа связанных между собой узлов конфликтов. Область пространства, определенную таким образом, чтобы она полностью охватывала группу связанных узлов поликонфликтов с учетом возможных отклонений объектов от расчетных траекторий, назовем зоной поликонфликтов. Упрощенный подход к описанию формы зоны поликонфликтов – представление ее в виде эллипса (в частном случае – в виде круга) или в виде параллелепипеда (в частном случае – в виде куба), рис. 9.

Эволюция орбит под действием возмущающих сил приводит к эволюции зоны поликонфликтов (изменяются ее размеры и расположение в пространстве, состав входящих в нее опасных участков траекторий). Исследование потенциальной возможности групповых сближений орбитальных объектов в зоне поликонфликтов – один из аспектов анализа в каждом из двух описанных выше исследовательских направлений.

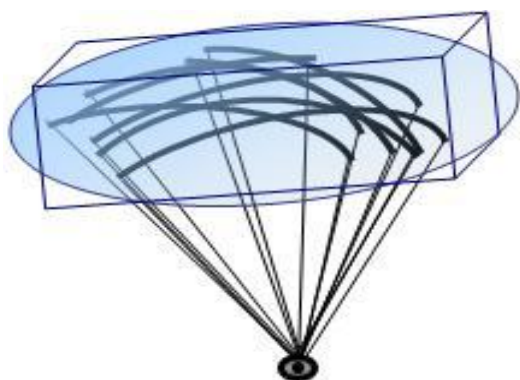


Рис. 9. Зона поликонфликтов, окружающая группу связанных узлов поликонфликтов

Математические модели и методы, которые могут быть использованы для анализа поликонфликтных ситуаций можно условно разделить на две группы (как и в случае исследования «моноконфликтов», образуемых парой орбитальных объектов, находящихся на опасном расстоянии друг от друга). К первой группе отнесем те, которые обеспечивают реализацию моделирования движения орбитальных объектов, контроль текущих расстояний между ними, фиксацию появления и протекания

поликонфликтов, а также обработку накапливающейся информации. Подобные исследования требуют численных методов моделирования, развитие которых представлено, например, в работе [4]. Основная проблема реализации этих методов, – существенные затраты времени на вычисления. Однако на основе этих методов можно получить результаты моделирования поликонфликтов с высокой степенью адекватности (используя математические модели, достаточно подробно учитывающие силы, воздействующие на орбитальные объекты). Ко второй группе моделей и методов, обеспечивающих анализ конфликтных сближений, относятся те, которые обеспечивают подход, основанный на моделировании изменения во времени параметров орбит объектов и анализе текущей геометрии траекторий (в частности, –

моделирование эволюции орбит вследствие вековых изменений значений параметров, которое можно реализовывать с достаточно крупным шагом по времени). При таком подходе анализ относительного расположения траекторий орбитальных объектов позволяет выделить участки траекторий, находящихся в опасной близости друг относительно друга. После определения опасных участков траекторий без непосредственного моделирования движения орбитальных объектов с учетом периодичности этого движения выявляются ситуации опасных сближений и оцениваются основные параметры, характеризующие сближения. Математические модели и методы этой группы (они представлены, например, в работах [2,3,5-9]) не дают высокой точности прогноза характеристик поликонфликтных ситуаций, но обеспечивают достаточно быстрое получение результатов (затраты времени на несколько порядков меньше, чем при использовании моделей и методов первой группы). Целесообразно использовать как методы первой, так и методы второй группы, отдавая предпочтение методам второй группы на начальных этапах анализа и добавляя методы второй группы на последующих этапах, когда с помощью методов первого направления во множестве орбитальных объектов выделены группы объектов, для которых высока вероятность возникновения конфликтных или поликонфликтных ситуаций. Кроме того, представляет интерес развитие методов анализа на основе комбинации методов первой и второй группы.

Проведение исследований механических поликонфликтов в околоземном космосе, как их потенциальной возможности, так и различных вариантов протекания, требуют исходных данных. Наряду с рассмотрением множеств орбитальных объектов с известными орбитальными параметрами представляет интерес проведение исследований на базе гипотетических («сгенерированных» исследователем) групп орбитальных объектов. «Генерация» множества орбитальных объектов позволяет исследователям варьировать «сложность» ситуации (прежде всего, изменяя численность объектов рассматриваемого множества), выбирать орбитальные параметры объектов таким образом, чтобы более явственно выделить определенные аспекты исследования, и прочее.

Генерация множеств орбитальных объектов целесообразна, во-первых, при проведении исследований первого из описанных выше направлений (в этом случае генерируются множества орбитальных объектов, в которых выявляют поликонфликтные группы, как потенциально опасные, так и входящие в поликонфликтные сближения). Во-вторых, при проведении исследований второго из описанных направлений (в этом случае генерируются собственно поликонфликтные группы объектов, либо потенциально опасные с точки зрения возникновения поликонфликтных ситуаций, либо непосредственно образующие такие ситуации на рассматриваемом отрезке времени). В данной работе рассматриваются вопросы формирования гипотетических поликонфликтных групп для проведения исследований второго направления.

Различные аспекты анализа опасных сближений на орбитах достаточно широко освещены в публикациях. Во многих работах представлены результаты

исследований, проведенные как на основе данных о множестве объектов в околоземном космосе, так и на основе гипотетических данных. Однако тема генерации гипотетических данных для задач исследования конфликтных и поликонфликтных ситуаций на орбитах подробно не освещался. Данная работа посвящена именно этому вопросу.

Один из признаков, на основе которого можно разделить методы генерации гипотетических данных для проведения эксперимента – это случайная или детерминированная генерация. Методы случайной генерации, реализуются на основе моделирования случайных величин с заданными законами распределения, обеспечивающих вариации значений рассматриваемых параметров исследуемой системы. В детерминистических методах генерации исходные данные либо непосредственно задаются исследователем, либо формируются программно на основе заданного им детерминистического алгоритма. Также возможны различные комбинации этих подходов. Методы случайной генерации требуют значительно больших временных затрат для выявления исследуемых закономерностей поведения объекта исследования, однако в некоторых случаях возможно применение только этих методов. Использование детерминистических методов часто позволяет сократить время на проведение исследований, если интересующие исследователя параметры варьируются в заданных пределах систематически с привлечением методов планирования экспериментов. В данной работе основное внимание уделяется детерминистическим методам генерации гипотетических поликонфликтных зон и поликонфликтных групп орбитальных объектов.

Цель и задачи данной работы. Цель работы – развитие методов исследования поликонфликтных сближений орбитальных объектов на основе сгенерированных групп орбитальных объектов. В работе предполагается решение следующих задач: 1) анализ походов к генерации гипотетических данных для проведения исследований поликонфликтных зон в околоземном космическом пространстве и ситуаций поликонфликтных сближений орбитальных объектов; 2) разработка метода генерации поликонфликтных групп орбитальных объектов на основе конфигурирования исследователем поликонфликтной зоны; 3) разработка концепции анализа потенциальной возможности возникновения поликонфликтных ситуаций и вариантов протекания поликонфликтов для сгенерированной поликонфликтной группы объектов на основе комбинирования математических моделей и методов первой и второй описанных выше групп.

1. Анализ подходов к генерации гипотетических поликонфликтных групп орбитальных объектов, обоснование предлагаемого выбора.

Рассмотрим несколько возможных подходов к генерированию поликонфликтной группы (которые, очевидно, в той или иной форме могли быть использованы другими авторами при формировании наборов гипотетических данных для исследований).

Первый подход базируется на задании разности значений орбитальных параметров объектов моделируемой поликонфликтной группы. При этом возможны вариации моделирования при неизменном базовом объекте, – на заданный момент времени (назовем его моментом времени генерации t_g) выбирается оскулирующая орбита базового объекта и заданы значения отличий одноименных орбитальных параметров каждого из объектов поликонфликтной группы от параметров базового. Также возможны вариации моделирования при «переходящем» базовом объекте, – каждый очередной орбитальный объект группы, для которого выбраны орбитальные параметры, рассматривается как базовый, и относительно него выбираются параметры следующего генерируемого объекта группы. Относительно текущего базового объекта может быть сгенерирован не один, а несколько объектов. Таким образом, генерация относительно неизменного базового объекта – частный случай.

Описанный подход может быть полезен при исследованиях влияния разности значений орбитальных параметров объектов группы на состав участков орбит, входящих в поликонфликтную зону, на их расположение в зоне, а также собственно на варианты протекания поликонфликтов. При таком подходе рассматриваются различные комбинации разности значений орбитальных параметров объектов группы (при этом стремление получить поликонфликтную группу приводит к необходимости выбора для нескольких из параметров малых значений отклонений, по крайней мере, для каждой пары «базовый и генерируемый объекты»). Выбирая значение параметров базового объекта и значения отличий от них для параметров генерируемого объекта можно в некоторой степени «управлять» формированием зоны полконфликта и расположением в ней опасных участков траекторий орбитальных объектов.

«Чувствительность» вероятности возникновения конфликтной ситуации и параметров опасных сближений к разности значений одного из параметров базового и генерируемого объекта зависит и от значений параметров базового объекта, и от разности значений других параметров. Поэтому при анализе различных вариаций значений орбитальных параметров не всегда будет обеспечена потенциальная возможность конфликтной ситуации (и тем более конфликтная ситуация) для пары базовый объект и генерируемый объект. Поэтому поликонфликтная зона, образованная участками «сгенерированной» описанным образом группы объектов, может включить в свой состав участки траектории не всех объектов (не все объекты будут потенциально опасными с точки зрения возникновения поликонфликта). Еще больше вероятность того,

что не все орбитальные объекты сгенерированной группы одновременно войдут в зону поликонфликта (не все объекты образуют поликонфликтную группу).

Таким образом, на основе данного подхода генерируются оскулирующие орбиты группы объектов в момент времени генерации t_g . Исследование этой группы предполагает моделирование и анализ ее «предистории» на некотором интервале времени, предшествующем моменту t_g , и «последующего развития» на интервале времени после момента t_g .

Проведение исследований сгенерированной групп объектов целесообразно с использованием моделей первой и второй описанных выше групп (то есть на основе моделирования движение объектов и анализа текущих расстояний между ними, а также на основе моделирования эволюции орбит и использования быстрых методов прогноза конфликтных ситуаций). Анализ поликонфликтов на основе описанного подхода предполагает рассмотрение значительного множества вариантов значений орбитальных параметров, которое существенно увеличивается с ростом числа рассматриваемой группы объектов.

Второй подход заключается в том, что для заданного момента времени t_g задаются точки местоположения орбитальных объектов группы (эти положения определяют координаты в абсолютной системе координат). Полагается, что композиция расположения точек соответствуют текущей поликонфликтной ситуации между этими объектами. А именно: каждая точка группы имеет хотя бы одну точку, находящуюся на опасном расстоянии от нее (образует «опасную пару» с другой точкой); а каждая опасная пара точек «связана» с другими опасными парами тем, что в паре есть хотя бы одна точка, входящая в две пары опасно близких точек. По аналогии с узлами конфликтов будем говорить, что описанная группа точек образует группу слабой связности. Эта группа может быть группой связности большей кратности или включать в себя подгруппы большей кратности. Параметры орбит объектов подбираются таким образом, чтобы траектории их движения соответствовали местоположению объектов в выбранных точках. В данном случае при выборе оскулирующей орбиты в момент t_g можно варьировать значения только трех орбитальных параметров каждого из объектов. Такой подход обеспечивает генерацию группы объектов, каждый из которых не только потенциально опасен с точки зрения возможности вхождения в поликонфликт, но гарантированно участвует в поликонфликтной ситуации в момент времени генерации t_g . Этот подход также позволяет в некоторой степени (при учете ограничений) определять расположение и конфигурацию зоны поликонфликтов. Однако он не подходит для того случая, когда необходимо сгенерировать группу объектов, образующих зону поликонфликтов, но не находящихся в ней а полном составе в момент времени t_g . Как и в первом подходе, исследование возможно на основе моделирования и анализа предыстории и последующего развития

смоделированной группы объектов с использованием моделей и методов первой и второй группы.

Третий подход основывается на генерации для заданного момента времени t_g группы близко расположенных траекторий, образующих узел поликонфликтов (определение которого дано во введении). При генерации выбирается базовая траектория (задаются орбитальные параметры, определяющие форму и расположение базовой орбиты). Далее относительно базовой траектории определяется генерируемая траектория. Форма и расположение генерируемой траектории должно обеспечить образование узла

конфликтов с базовой траекторией, некоторые характеристики которого заданы (например, расстояние между наиболее близкими точками опасных участков, входящих в узел конфликтов, и угол между орбитальными плоскостями, которым принадлежат базовая и генерируемая траектории). В общем случае базовая траектория – «переходящая» (сгенерированная траектория становится базовой на следующем шаге генерации). Если сравнивать этот подход с описанными выше подходами, то он позволяет исследователю в наибольшей степени влиять на формирование конфигурации узла поликонфликтов (то есть на формирование композиции расположения опасных участков траекторий в зоне поликонфликтов) и его расположение в пространстве. Сформировав поликонфликтную зону, можно варьировать варианты поликонфликтных ситуаций в этой зоне (на сгенерированном узле поликонфликтов), выбирая различные сочетания моментов времени входа орбитальных объектов в узел.

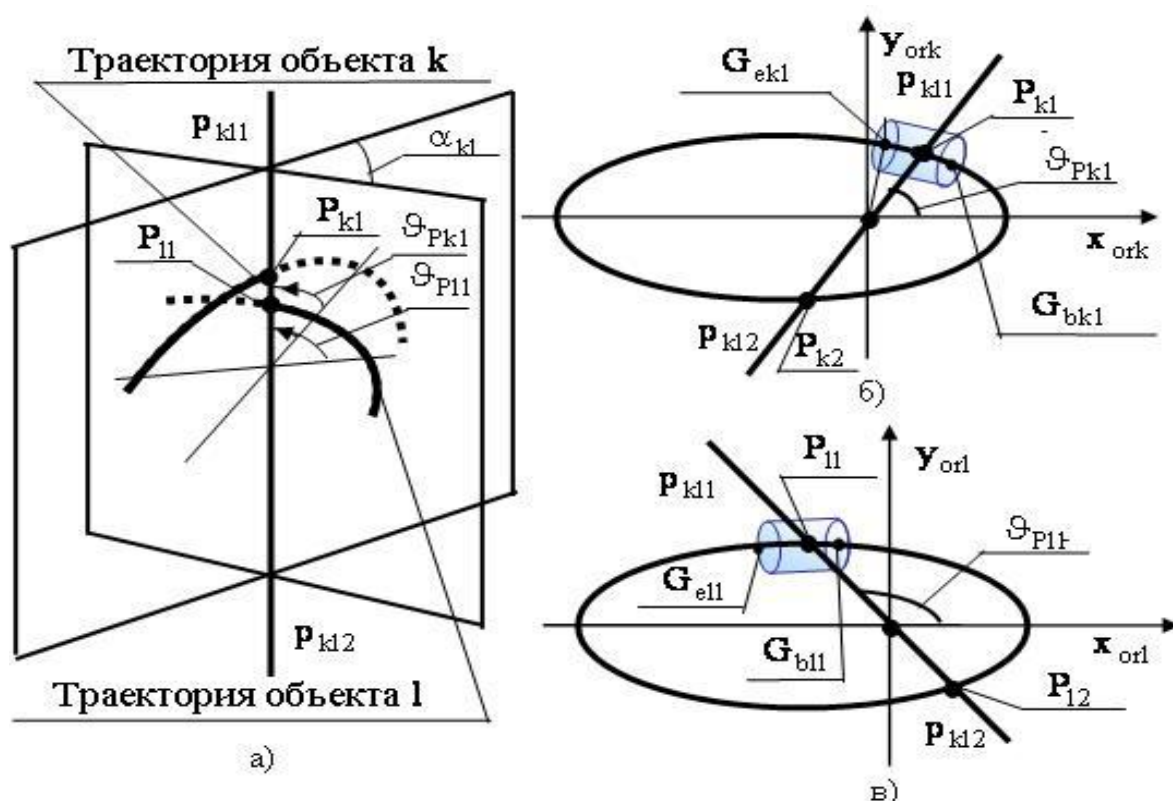


Рис. 10. К пояснению определения опасных участков траекторий, входящих в узел конфликтов: а) пространственное изображение узла конфликтов, образованного объектами k и l; картина в орбитальной плоскости объекта k; картина в орбитальной плоскости объекта l

Ниже представлен метод генерации гипотетической поликонфликтной зоны, позволяющий исследователю создавать ее без существенных затрат времени, формируя конфигурацию на каждом шаге генерации.

2. Общее описание метода «объемного плетения», предлагаемого для генерации узла поликонфликтов.

Перед началом общего описания предлагаемого метода генерации поликонфликтной зоны коротко напомним необходимые для этого основные положения подхода к определению узла конфликтов, представленные в ряде работ, например, в работах [2,3]. Пусть в некоторый момент времени t узел конфликтов образован траекториями орбитальных объектов k и l (рис. 10a). Орбитальные параметры этих объектов соответственно следующие: эксцентриситет – e_k и e_l ; большая полуось a_k и a_l (а фокальный параметр – p_k и p_l); наклонение орбиты i_k и i_l ; долота восходящего узла – Ω_k и Ω_l ; аргумент перигея ω_k и ω_l , момент времени прохождения перигея τ_k и τ_l .

Линию пересечения $P_{kl1}P_{kl2}$ между орбитальными плоскостями объектов k и l (рис. 10) задает система уравнений

$$\begin{cases} A_k x + B_k y + C_k z = 0 \\ A_l x + B_l y + C_l z = 0 \end{cases}$$

где

$$A_k = \sin(i_k) \sin(\Omega_k), \quad B_k = -\sin(i_k) \cos(\Omega_k), \quad C_k = \cos(i_k), \\ A_l = \sin(i_l) \sin(\Omega_l), \quad B_l = \sin(i_l) \cos(\Omega_l), \quad C_l = \cos(i_l).$$

Угол α_{kl} между их орбитальными плоскостями объектов k и l (рис. 10а) определяется выражением

$$\alpha_{kl} = \arccos(|A_k A_l + B_k B_l + C_k C_l|).$$

Принимается, что в качестве узловых точек опасных участков траекторий, входящих в узел конфликтов, будет рассматриваться пара точек пересечения этих участков с линией пересечения их орбитальных плоскостей. В частности, для объектов k и l узловые точки – P_{k1} для объекта k (рис. 10а,б) и P_{l1} для объекта l (рис. 10а,в). Положение узловой точки на траектории будем определять углом, который отсчитывается в плоскости движения орбитального объекта от направления на перигей до этой точки по ходу движения спутника. На рис. 10а,б положение узловой точки P_{k1} на опасном участке орбитального объекта k определяет угол ϑ_{pk1} , а на рис. 10а,в положение узловой точки P_{l1} на опасном участке орбитального объекта l определяет угол ϑ_{pl1} . Описанный угол можно рассматривать как значение истинной аномалии, которое было бы у орбитального объекта при его нахождении в этой точке, если истинную аномалию на текущем витке начинать отсчитывать от перигея. Поэтому этот угол можно назвать истинной аномалией узловой точки. Для расчета значения истинной аномалии, определяющей положение точки P_{k1} , предложено выражение

$$\theta_{p1k} = \arctg\left(-\frac{A_l m_{k1,1} + B_l m_{k2,1} + C_l m_{k3,1}}{A_l m_{k1,2} + B_l m_{k2,2} + C_l m_{k3,2}}\right),$$

где

$$m_{k11} = \cos(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{k12} = -\cos(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{k21} = \sin(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) + \cos(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{k22} = \cos(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) \cdot \cos(i_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k), \\ m_{k31} = \sin(\omega_k) \cdot \sin(i_k), \\ m_{k32} = \cos(\omega_k) \cdot \sin(i_k).$$

– элементы матрицы перехода из геоцентрической орбитальной системы орбитального объекта k в геоцентрическую экваториальную систему. Аналогичным образом рассчитывается значение угла ϑ_{pl1} , определяющего положение точки P_{l1} на траектории объекта l :

$$\theta_{p1l} = \arctg\left(-\frac{A_k m_{l1,1} + B_k m_{l2,1} + C_k m_{l3,1}}{A_l m_{k1,2} + B_l m_{k2,2} + C_l m_{k3,2}}\right),$$

где

$$\begin{aligned} m_{111} &= \cos(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{112} &= -\cos(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{121} &= \sin(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) + \cos(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k) \cdot \cos(i_k), \\ m_{122} &= \cos(\Omega_k) \cdot \cos(\omega_k) \cdot \cos(i_k) - \sin(\Omega_k) \cdot \sin(\omega_k), \\ m_{131} &= \sin(\omega_k) \cdot \sin(i_k), \\ m_{132} &= \cos(\omega_k) \cdot \sin(i_k). \end{aligned}$$

Линия пересечения орбитальных плоскостей $P_{kl1}P_{kl2}$ пересекает траекторию объекта в двух точках (P_{k1} и P_{k2} для объекта k на рис. 10а,б и P_{l1} и P_{l2} для объекта l на рис. 10а,в), каждая из которых может быть узловой и принадлежать участку, входящему в узел конфликтов. Если положение точки P_{k1} определяет угол ϑ_{pk1} , то положение точки P_{k2} определяет угол ϑ_{pk2} , значение которого отличается от значения ϑ_{pk1} на π :

$$\vartheta_{pk2} = \vartheta_{pk1} + \pi.$$

Аналогичное справедливо и для углов ϑ_{p1l} и ϑ_{p12} , определяющих положение точек P_{l1} и P_{l2} на траектории объекта l .

Далее опишем метод генерации зоны поликонфликтов для заданного момента времени t_g . В предлагаемом методе генерации зоны поликонфликтов можно выделить однотипные последовательные операции, которые назовем шагами (шагами «плетения» от названия метода). На каждом шаге рассматриваются траектории двух орбитальных объектов k и l . Орбита объекта k полностью определена (известны значения орбитальных параметров этого объекта на момент t_g) и называется базовой (или опорной). Параметры орбиты объекта l определяются таким образом, чтобы обеспечить заданные параметры расположения опасного участка траектории l , входящего узел конфликтов, относительно траектории объекта k , входящей в этот узел.

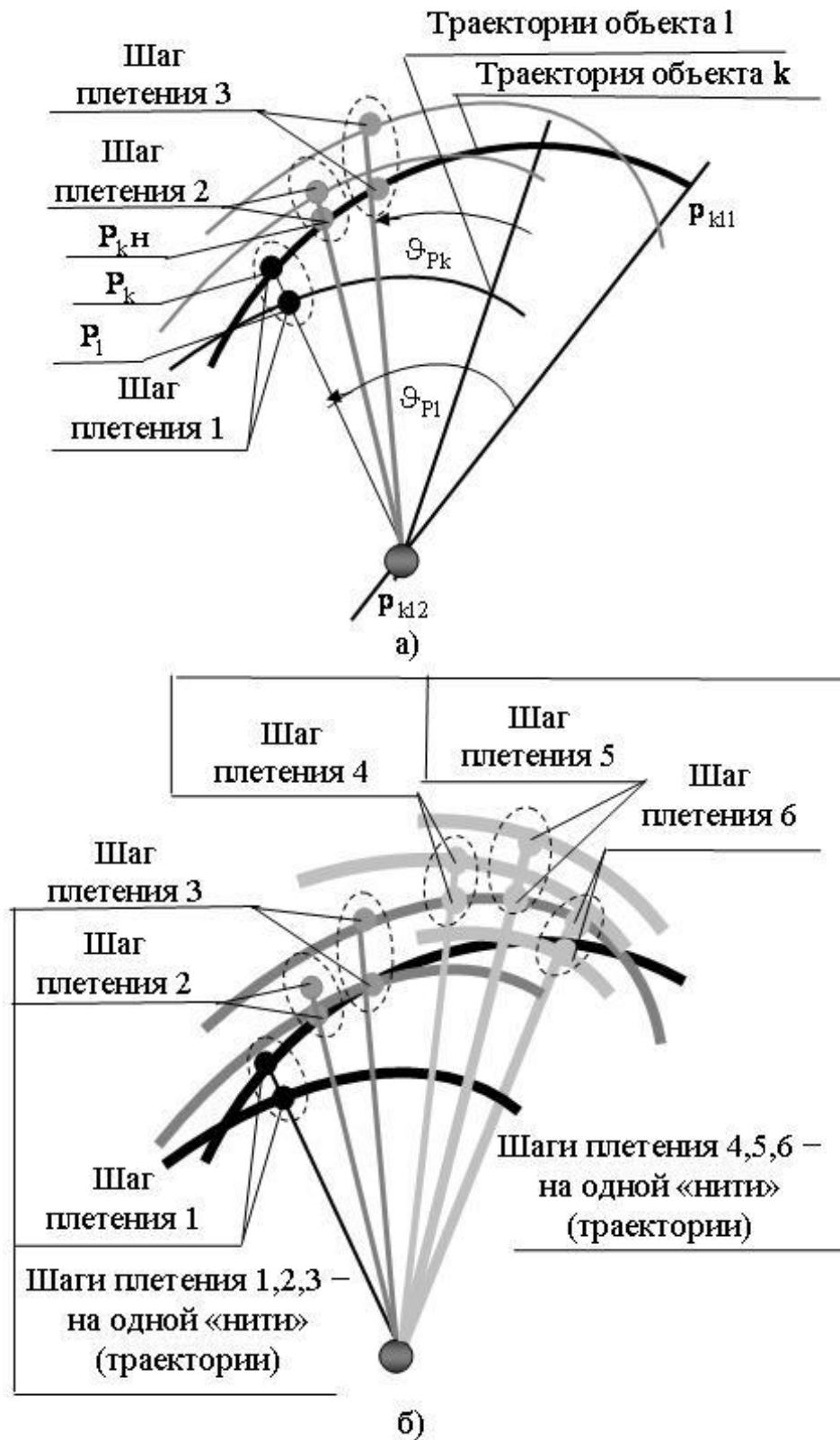


Рис. 11. К пояснению метода «объемного плетения»: а) шаги плетения на одной «нити» (траектории) с выделением одного шага плетения; б) шаги плетения на двух нитях (траекториях)

Начинается генерация с того, что задается первая базовая траектория, то есть задаются орбитальные параметры объекта k (рис. 11а,б). На орбите объекта k выбирается положение узловой точки, которая войдет в генерируемый узел конфликтов. Не будем выделять, является ли эта точка на траектории объекта k точкой P_{k1} или P_{k2} , и обозначим ее P_k (рис. 11а). Положение точки P_k на траектории определяет соответствующее ей значение истинной аномалии ϑ_{Pk} .

Так как принято, что узловые точки находятся на линии пересечения орбитальных плоскостей, то узловая точка генерируемой траектории объекта 1 (обозначим ее P_1) находится на одной прямой с точкой P_k , то есть радиус-векторы этих точек (r_{Pk} и r_{P1} на рис. 11а) совпадают. Задается значение разности длин этих радиус-векторов Δ_{rP} ($\Delta_{rP} = r_{P1} - r_{Pk}$), модуль которого не должен превышать значение граничного расстояния L_{mg} , определенного из соображений безопасности (то есть должно выполняться условие $|\Delta_{rP}| \leq L_{mg}$). Пару точек P_k и P_1 базовой и генерируемой траекторий будем называть не только узловой парой узла конфликтов, но и «узлом плетения». В частном случае точки P_k и P_1 совпадают ($\Delta_{rP} = 0$), то есть траектории в узле плетения не просто находятся на опасном расстоянии друг от друга, но и пересекаются. Также задается значение угла α_{kl} между орбитальными плоскостями базового объекта k и генерируемого объекта 1.

Перечисленные исходные данные позволяют найти значения пяти параметров генерируемой орбиты, определяющие ее форму и расположение в пространстве (кроме параметра, определяющего временную привязку объекта на орбите). Расчет параметров генерируемой траектории (ее еще можно назвать пересекающей траекторией) назовем шагом плетения. Траектория объекта k может рассматриваться базовая еще для нескольких шагов плетения (в частности, для шагов плетения 2 и 3 на рис. 11а,б). При этом каждая генерируемая траектория рассматривается по отношению к базовой как новая траектория 1 и «шаг плетения» («шаг генерации») реализуется на основе того же алгоритма, что и в предыдущем случае. Если на одной базовой траектории создается несколько узлов плетения (узлов конфликтов), то можно говорить, что эти узлы плетения на одной «нити плетения».

Далее каждая сгенерированная траектория 1 может рассматриваться как базовая траектория k , и уже для нее генерируется принятое число пересекающих траекторий 1 (реализуется принятое число шагов плетения). На рис. 11б показано, что в качестве новой базовой траектории выбрана пересекающая траектория, полученная на третьем шаге плетения. На это траектории, в свою очередь, реализовано еще три шага плетения. Для этого узловая точка P_k «переносится» вдоль траектории объекта k (точка P_{kn} на рис. 11а). При этом связанность узлов конфликтов нового шага плетения и предыдущего будет обеспечена, если положение точки P_{kn} выбрано таким, чтобы расстояние между точками P_k и P_{kn} не превышало граничное значение

L_{mg} . Таким образом, шаги плетения 1,2,3 выполнены на одной нити, а шаги плетения 4,5,6 – на другой, пересекающей ее. Аналогичные шаги плетения могут выполняться и на других траекториях.

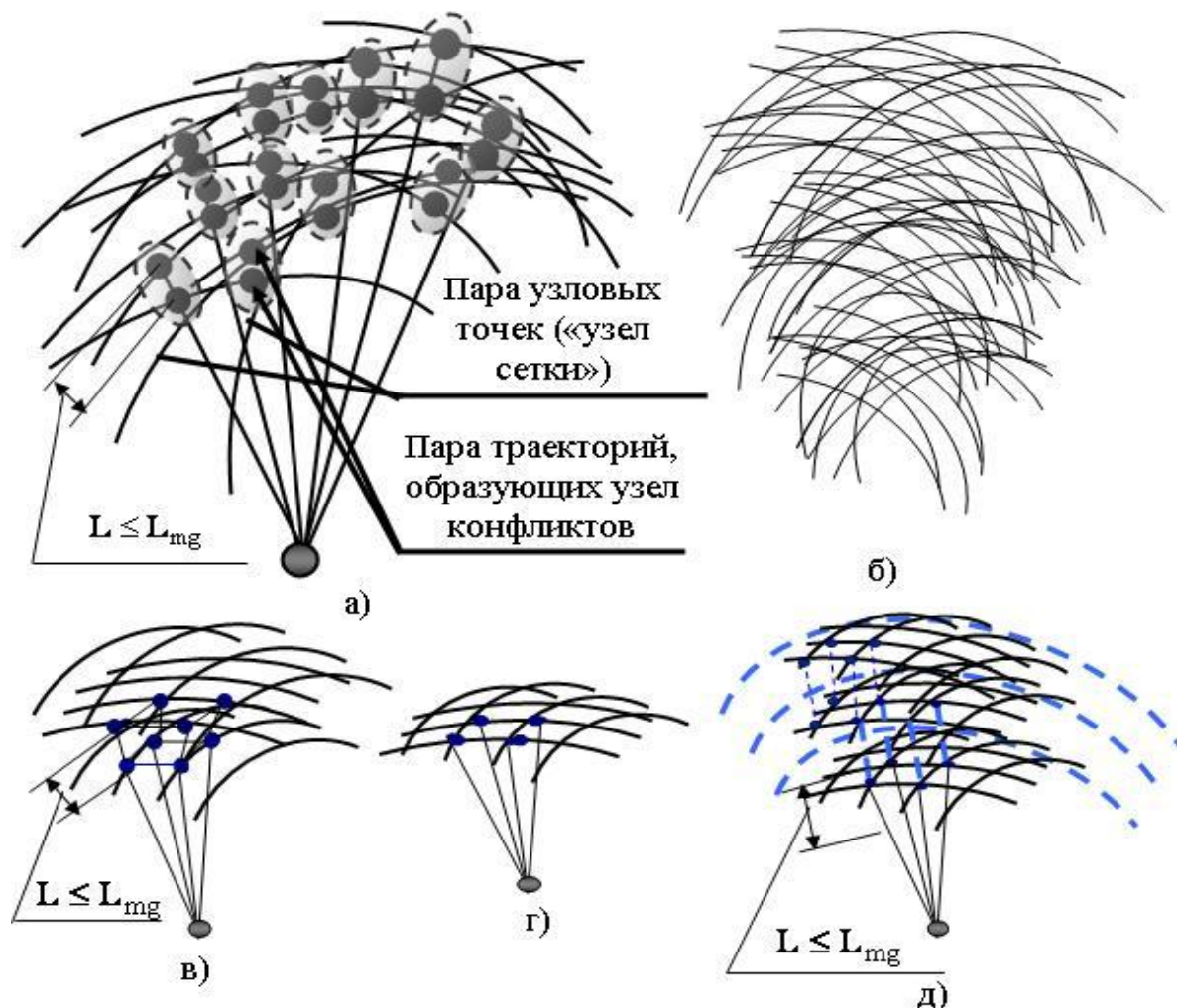


Рис. 12. К пояснению вариантов структур объемного плетения:

- а) произвольная структура объемного плетения (изображена с выделением пар узловых точек); б) произвольная структура объемного плетения с просматривающимися «квазислоями» узловых точек; в) ячеистая структура объемного плетения с квазирегулярной структурой; г) однослойная ячеистая квазирегулярная структура с совпадающими точками узлов плетения; д) несколько однослойных структур плетения, расположенных на опасно близком расстоянии друг от друга.

На рис. 12 показаны примеры различных структур плетения. На рис. 12а и 12б приведены произвольные структуры объемного плетения (значения расстояния между узловыми точками и углы между орбитальными плоскостями траекторий произвольно варьируются). На рис. 12б в такой структуре все же просматриваются «слои» в расположении узловых точек (узловые точки сгруппированы в окестностях фрагментов объемных поверхностей).

На рис. 12в показана ячеистая структура квазирегулярного характера, на которой выделена одна из «ячеек». В подобной структуре узлы плетения равномерно отстоят один от другого на базовой траектории (на нити плетения) и расстояния между парами узловых точек, образующих узел плетения одинаковы. Вследствие этого можно выделить следующие чередующиеся «слои» базовых и пресекающих траекторий (слои плетения), которые представляют собой симметрично разнесенные линии на поверхности эллипсоида или шара. На рис. 12г показана однослойная ячеистая квазирегулярная структура с совпадающими узловыми точками узлов плетения (эти точки расположены на фрагменте поверхности эллипсоида или шара). На рис. 12д изображен несколько однослойных квазирегулярных структур плетения, расположенных на опасно близком расстоянии друг от друга.

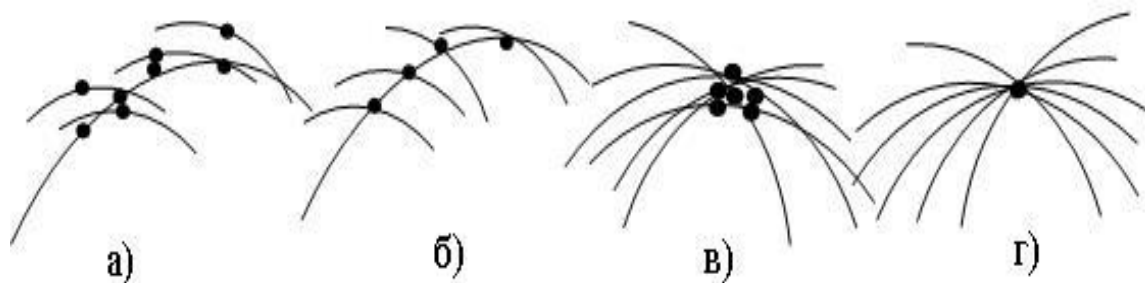


Рис. 13. К пояснению вариантов элементарных структур объемного плетения: а) структура плетения «на одной нити»; б) структура плетения «на одной нити» с совпадающими точками узлов плетения; в) структура близкая к звездообразной; г) звездообразная структура.

В структурах расположения опасных участков траекторий, входящих в зону поликонфликтов можно выделить несколько элементарных структур, которые представлены на рис. 13. В частности, на рис. 13а показана произвольная структура, образованная узлами конфликтов, создаваемыми на одной базовой траектории (структура «плетения на одной нити»). На рис. 13б изображена структура плетения на одной нити с совпадающими точками узлов плетения. На рис. 13в показана структура плетения близкая к звездообразной (каждая узловая точка одного узла конфликтов находится на опасном расстоянии от нескольких узловых точек других узлов конфликтов). На рис. 13г представлена звездообразная структура (все узловые точки совпадают).

Следует отметить, что предложенный метод генерации поликонфликтной зоны представляет собой последовательное заполнение ее связанными между собой узлами конфликтов. Каждый новый генерируемый узел связан, по меньшей мере, с одним другим узлом конфликтов зоны. При этом он может быть связан и с большим числом узлов этой поликонфликтной зоны.

3. Математическая модели и алгоритмы расчетов, обеспечивающие «шаг плетения». Ниже представлены два метода реализации шага плетения, которые могут быть положены в основу соответственно двух модификаций предлагаемого метода генерации поликонфликтной зоны.

3.1 Реализации шага плетения на основе модели, связывающей параметры генерируемой орбиты с параметрами базовой и характеристиками, определяющими расположение участка генерируемой орбиты относительно заданного («опорного») участка базовой орбиты. На примере этого метода реализации шага плетения выше было дано общее описание генерации предлагаемого метода объемного плетения для генерации поликонфликтной зоны. Как отмечалось, на каждом шаге исходными данными являются следующие: орбитальные параметры $e_k, p_k, i_k, \Omega_k, \omega_k$ базового орбитального объекта k ; значение угла ϑ_{pk} , определяющее положение узловой точки P_k объекта k относительно перигея; значение угла α_{kl} между орбитальными плоскостями объектов k и l ; разность значений Δ_{rp} длин радиус-векторов r_{pk} и r_{pl} узловых точек P_k и P_l на опасных участках орбиты базовой траектории объекта k и генерируемой траектории объекта l (рис.). Искомые значения – следующие параметры орбиты объекта l : $e_l, p_l, i_l, \Omega_l, \omega_l$, а также значение угла ϑ_{pl} (рис. 11а), задающее на орбите объекта l положение точки P_l (истинной аномалии узловой точки P_l). Для их нахождения решается система из шести уравнений, представленных ниже

$$\alpha_{kl} = \arccos(|A_k A_l + B_k B_l + C_k C_l|)$$

$$\theta_{pk} = \arctg\left(-\frac{A_l m_{k1,1} + B_l m_{k2,1} + C_l m_{k3,1}}{A_l m_{k1,2} + B_l m_{k2,2} + C_l m_{k3,2}}\right)$$

$$\theta_{pl} = \arctg\left(-\frac{A_k m_{l1,1} + B_k m_{l2,1} + C_k m_{l3,1}}{A_k m_{l1,2} + B_k m_{l2,2} + C_k m_{l3,2}}\right)$$

$$x_{pl} = \frac{p_l}{1 + e_l \cos \vartheta_{pl}} [\cos \Omega_l \cos(\vartheta_{pl} + \omega_l) - \sin \Omega_l \sin(\vartheta_{pl} + \omega_l) \cos i_l]$$

$$y_{pl} = \frac{p_l}{1 + e_l \cos \vartheta_{pl}} [\sin \Omega_l \cos(\vartheta_{pl} + \omega_l) - \cos \Omega_l \sin(\vartheta_{pl} + \omega_l) \cos i_l]$$

$$z_{pl} = \frac{p_l}{1 + e_l \cos \vartheta_{pl}} [\sin(\vartheta_{pl} + \omega_l) \sin i_l].$$

В это системе уравнений выражения, определяющие $A_k, B_k, C_k, m_{k1,1}, m_{k2,1}, m_{k3,1}, m_{k1,2}, m_{k2,2}, m_{k3,2}$, а также выражения определяющие $A_l(i_l, \Omega_l), B_l(i_l, \Omega_l), C_l(i_l, \Omega_l), m_{l1,1}(i_l, \Omega_l, \omega_l), m_{l2,1}(i_l, \Omega_l, \omega_l), m_{l3,1}(i_l, \Omega_l, \omega_l), m_{l1,2}(i_l, \Omega_l, \omega_l), m_{l2,2}(i_l, \Omega_l, \omega_l), m_{l3,2}(i_l, \Omega_l, \omega_l)$, которые зависят от искомых

значений, приведенные выше. В приведенной системе уравнений x_{Pl} , y_{Pl} , z_{Pl} – координаты точки P_l в геоцентрической экваториальной системе, определенные учетом того, что радиус-векторы r_{Pk} и r_{Pl} совпадают, на основе следующих выражений

$$\begin{aligned}x_{Pl} &= (r_{Pk} + \Delta_{rP}) [\cos \Omega_k \cos(\vartheta_{Pk} + \omega_k) - \sin \Omega_k \sin(\vartheta_{Pk} + \omega_k) \cos i_k] \\y_{Pl} &= (r_{Pk} + \Delta_{rP}) [\sin \Omega_k \cos(\vartheta_{Pk} + \omega_k) - \cos \Omega_k \sin(\vartheta_{Pk} + \omega_k) \cos i_k] \\z_{Pl} &= (r_{Pk} + \Delta_{rP}) [\sin(\vartheta_{Pk} + \omega_k) \sin i_k].\end{aligned}$$

После нахождения значений пяти перечисленных выше искоемых параметров для описания сгенерированного узла конфликтов, образуемого участками траекторий объектов k и l , рассчитывается ряд его характеристик. В том числе – значения истинных аномалий, определяющих начальные и конечные точки опасных участка объектов k и l (на рис. 10б это точки G_{bk} , G_{ek} для объекта k , а на рис. 10в – точки G_{bl} , G_{el} для объекта l). А также другие характеристики узла.

3.2 Метод реализации шага плетения на основе последовательности операций определения значений параметров генерируемой орбиты, обеспечивающих конфигурацию и расположение ее участка относительно базового (опорного) участка другой орбиты.

Описанный выше метод реализации шага генерации зоны поликонфликтов не дает возможности некоторой вариации орбитальных параметров генерируемой траектории. Такую возможность предоставляет метод, описанный в данном подразделе. Он предполагает алгоритм действий, перечисленных ниже.

1. Задаются (или определяются на предыдущем шаге планирования) значения пяти параметров базового орбитального объекта k : e_k , p_k , i_k , Ω_k , ω_k . Выбирается значение угла ϑ_{Pk} , определяющего положение узловой точки P_k на этой траектории.

2. Рассчитывается значение $r_{Pk} = \frac{p_k}{1 + e_k \cos \vartheta_{Pk}}$. Выбирается значение

разности Δ_{rP} длин радиус-векторов узловых точек P_k и P_l . Определяется длина радиус-вектора узловой точки P_l на генерируемой орбите:

$$r_{Pl} = r_{Pk} + \Delta_{rP}.$$

3. Из выражения $r_{Pl} = \frac{p_l}{1 + e_l \cos \vartheta_{Pl}}$ определяются значения p_l и e_l (при

этом одно из них выбирается в допустимом диапазоне, а другое – рассчитывается).

4. Задаються значення угла $\vartheta_{pk}(i_k, \Omega_k, \omega_k, i_l, \Omega_l, \omega_l)$, задающего положение узловой точки P_l на генерируемой орбите, и угла $\alpha_{kl}(i_k, \Omega_k, i_l, \Omega_l)$ между орбитальными плоскостями объектов k и l . С их использованием определяются значения параметров i_l, Ω_l, ω_l (при этом значение одного из них выбирается в диапазоне допустимых значений, а два других – рассчитываются).

5. Для сгенерированного узла рассчитываются его характеристики.

4. Концепции анализа поликонфликтной зоны и возникающих в ней поликонфликтных ситуаций. Как отмечалось выше, зона поликонфликтов охватывает все опасные участки группы связанных между собой узлов конфликтов (узел множественных поликонфликтов). Если представлять ее, например, в виде параллелепипеда (рис. 9), то его форма определяется с использованием минимальных $x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}$ и максимальных $x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}$ значений координат точек концов опасных участков траекторий, входящих в узлы конфликтов, создающих узел поликонфликтов. Размеры параллелепипеда несколько увеличивают за счет добавления к значениям $x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}, x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}$ поправок с соответствующим знаком, учитывающих возможные отклонений объектов от рассматриваемых траекторий.

Моделируя вековые изменения сгенерированных траекторий (например, с

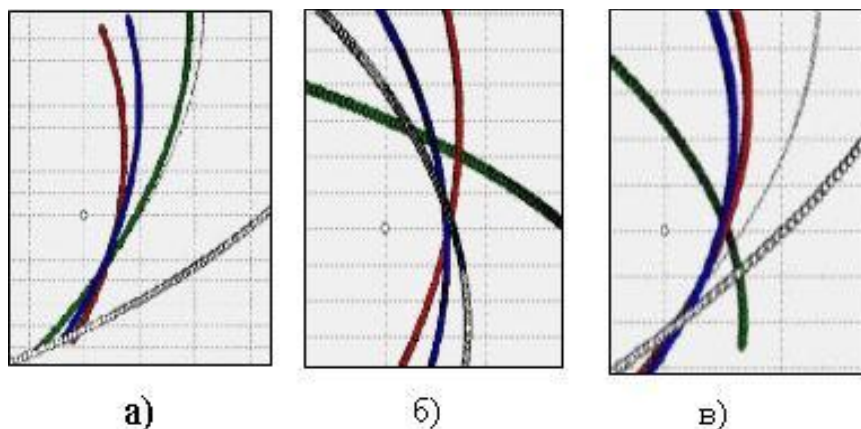


Рис. 14. Примеры сгенерированных узлов поликонфликтов: а) вариант 1; б) вариант 2; в) вариант 3

использованием относительно несложных моделей, представленных, в работе [10]), можно исследовать эволюцию зоны конфликтов. В том числе, рассчитывать ее текущие характеристики и оценивать потенциальный уровень конфликтности с использованием моделей и методов, предложенных в работах [2,3,7,9],

Исследование различных вариантов протекания ситуаций поликонфликтных сближений орбитальных объектов сгенерированной поликонфликтной группы реализуются следующим образом. На некоторый момент времени t , для которого определены опасные участки траекторий, входящие в зону поликонфликтов, выбираются местоположения орбитальных объектов на траекториях (внутри или вне зоны конфликтов). Это удобно сделать, зная значения истинных аномалий, соответствующие граничным точкам опасных участков узла конфликтов и истинной аномалии узловой точки (например, это углы ϑ_{bk} , ϑ_{ek} и ϑ_{pk} соответственно для объекта k). Ориентируясь на эти значения, можно задать значение истинной аномалии ϑ_{tk} , определяющие положение объекта k в заданный момент времени t . С использованием значения ϑ_{tk} для объекта k подбирается соответствующее значение момента времени прохождения перигея τ_k (в частности, на ближайшем периоде). Варьируя композиции начальных расположений орбитальных объектов, исследуется прохождение ими зоны поликонфликтов. Подчеркнем, что зона поликонфликтов генерировалась без учета периодических изменений параметров орбиты, а моделирование движения объектов через эту зону может быть с использованием достаточно точных моделей, которые учитывают эти изменения.

В данной работе не представлены результаты исследований различных поликонфликтных групп объектов. Только в качестве иллюстрации предложенного метода генерации поликонфликтной зоны на рис. 14 показаны варианты расположения опасных участков траекторий трех сгенерированных поликонфликтных групп. (рис. 14а, 14б, 14в соответственно).

Выводы. Предложенный подход к исследованию поликонфликтных сближений орбитальных объектов может стать полезным дополнением к уже используемым подходам и методам анализа поликонфликтов на орбитах. Генерация зоны поликонфликтов может быть использована для решения широко круга исследовательских и проектных задач, некоторые из которых перечислены далее. Во-первых, это развитие методов прогноза поликонфликтных сближений. Во-вторых, это задачи планирования маневрирования космических аппаратов с целью обхода поликонфликтной зоны или безопасного прохода через нее. В-третьих, это задачи планирования действий по быстрой очистке поликонфликтных зон от орбитальных объектов.

Библиографические ссылки

1. Space debris [электр. текст] Режим доступа: <http://en.wikipedia.org/wiki/Space-debris>.
2. Лабуткина Т.В. Информационная система для задач анализа конфликтности многоэлементного множества орбитальных объектов./ Т.В. Лабуткина, А.Н. Петренко // Научно-технический журнал «Радиоэлектронные и компьютерные системы». № 3 (62), 2013. С. 92-101.
3. Лабуткина Т.В. Быстрый метод прогноза опасных сближений орбитальных объектов и оценка расстояния сближения /Т. В Лабуткина, А. Н. Петренко // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – 2012. – Т. XIV. – С. 28-40.
4. Боровицина Т.В. Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений. / Т.В. Боровицына, А.Г. Александрова, И.Н. Чувашов // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2011, № 4 (19). С. – 34-48.
5. Назаренко А. И. Моделирование эволюции распределения техногенных частиц и объектов/ А. И. Назаренко // Проблема загрязнения космоса (космический мусор). – М.: Космическая информ., 1995. – С. 104-129.
6. Назаренко А.И. Моделирование техногенного загрязнения околоземного космического пространства. // Околоземная астрономия XXI века. – М: ГЕОС, 2001. – С.80-91.
7. Кондрашин М.А. Разработка алгоритма выявления объектов, потенциально опасных для управляемых космических аппаратов / М.А Кондрашин // Космонавтика и ракетостроение. – 2009. – № 1(58). – С. 153-157.
8. Баранов А.А. Методика выявления и оценки сближений космического аппарата с объектами космического мусора./ А.А. Баранов, М.А. Каратунов // Инженерный журнал: наука и инновации, 2016.– #4, С. 1-16.
9. Усиченко В.И. Прогнозирование столкновений космических объектов методом выделения эквидистантных точек на эллиптических орбитах. / В.И. Усиченко, А.В. Крюков, Д.Г. Грошелев // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Ракетно-космічна техніка». – 2015. – Випуск 18, том 1. – С. 156-161.
10. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М.К. Тихонравов, И.К. Бажанов, О.В. Гурко – М.: Машиностроение, 1974. – С. 332.

УДК 534.222; 534.231

Сокол Г. И.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА ИСТОЧНИКОВ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЕРВЫЕ СЕКУНДЫ СТАРТА РАКЕТ КОСМИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Разработан метод анализа акустических источников излучения при старте ракет космического назначения (РКН) и их акустических полей в первые секунды полета. Метод позволяет определить тип физических моделей акустических полей и применить к расчету их характеристик известные математические модели. Метод базируется на основе определения волнового параметра kR источника акустического излучения и позволяет привести обоснованные данные по уровням звуковых давлений и интенсивности в конкретных точках воздушного пространства.

Ключевые слова: разработка, метод, анализ, акустические излучения, источники.

Розроблений метод аналізу акустичних джерел випромінювання при старті ракет космічного призначення (РКП) та їх акустичних полів у перші секунди польоту. Метод дозволяє визначити тип фізичних моделей акустичних полів та залучити до розрахунків їх характеристик відомі математичні моделі. Метод базується на ґрунті визначення хвильового параметру kR джерела акустичного випромінювання і дозволяє привести обґрунтовані дані з рівнів звукових тисків та інтенсивності у конкретних точках повітряного середовища.

Ключові слова: розробка, метод, аналіз, акустичні випромінювання, джерела.

A method of analysis of the acoustic sources and of radiation during the launch of space rockets (SR) and their acoustic fields in the first seconds of flight was developed. The method makes it possible to determine the type of physical models of acoustic fields and to apply known mathematical models to the calculation of their characteristics. The method is based on the determination of the wave parameter kR of the source of acoustic radiation and allows us to provide valid data on the levels of sound pressure and intensity at specific points in air.

Keywords: development, method, analysis, acoustic radiation, sources.

Актуальность проблемы. После запуска двигателя при движении ракеты в атмосфере генерируются разнообразные акустические излучения, в атмосфере формируются акустические поля. Одной из актуальнейших проблем здесь является проведение анализа и оценки уровней интенсивности акустических излучений, особенно на инфразвуковых частотах. Кроме оценки воздействия акустического давления на оболочку корпуса, проникающего акустического излучения внутрь полостей отсеков и воздействия его на гибкие связи как внутри приборов, так и на их крепления, необходимо оценить влияние акустических излучений на здоровье населения расположенных на некоторых расстояниях населенных пунктов и обслуживающего персонала космодромов. Поэтому необходимо создать метод, который позволит выявить особенности и

определить направления исследований акустического излучения на основе существующих представлений о генерировании, распространении и направленности как звуковых волн, так и инфразвука. Этим определяется актуальность темы, выбранной для исследования.

Целью данной работы является разработка метода анализа акустических источников излучения при старте ракет космического назначения (РКН) и их акустических полей в первые секунды полета.

Известные методы анализа акустических излучений и их источников.

На основе известных методов анализа акустических излучений и существующих представлений о генерировании и распространении звуковых волн необходимо выявить особенности и определить направления исследований акустического излучения при старте РКН.

Известные работы [1-3] рассматривают отдельные аспекты и конкретные частные задачи максимальных акустических нагрузок на ракету при старте. Здесь не представлена общая методология определения типа самих акустических источников и их излучений.

Основополагающие монографии по акустике на основе *аналитических методов* позволяют провести расчеты, составить методики измерений и создать акустические приборы для регистрации линейных (смещения, звукового давления, колебательной скорости) и энергетических (интенсивности) характеристик акустических полей излучателей звука (С. Н. Ржевкин, М. А. Сапожков, В. Н. Тюлин, В. Т. Гринченко, В. В. Вовк, В. Т. Мацыпура) [4-7]. Однако практика требует решения отдельных научно-технических проблем по анализу акустических излучений от источников различной физической природы. Основополагающие теории, изложенные в [4-7], позволили Г. И. Сокол в [8] создать классификацию уже разработанных излучателей инфразвуковых волн.

В настоящий момент известные *методы, основанные на использовании информации, регистрируемой только приемниками давления*, достигли предельных возможностей [9]. В своей докторской диссертации (1905г.) Н.А. Умов указал [9] на важность характеристики акустического поля, полученной путем перемножения мгновенных значений давления в волне и колебательной скорости движения частиц среды, которая известна как вектор Умова.

Поэтому в [9, 10, 11] описаны *векторно-фазовые методы* в акустике. Этот метод применим для регистрации акустических полей в гидроакустике. Он используется при решении задач: обнаружение слабых источников сигнала на фоне шумов, биоакустики, экологии, в предсказании землетрясений. На основе векторно-фазовых методов ведется обнаружение и пеленгование объектов в гидроакустике, проводится выявление их классификационных признаков. Определяется характеристика направленности излучателей.

Векторно-фазовые структуры сигналов импульсного типа позволяют определить источники акустического излучения в атмосфере.

А. И. Иванников [11] разработал *векторно-фазовый метод* для анализа особенностей возбуждения шумовых инфразвуковых акустических полей в замкнутых объемах.

В. А. Гордиенко разработал *фазоамплитудный метод* для регистрации акустических полей от движущихся морских объектов [9].

Методы исследования явления взрыва в горных породах основаны на основных закономерностях формирования и распространения упругих колебаний и волн, возникающих в горной породе от взрыва [12].

С 30-х годов 20-ого века получили распространение акустические технические устройства, предназначенные для возбуждения звуковых волн в различных средах путем преобразования электрического сигнала в энергию звукового поля. На сегодняшний день создано много различных не похожих друг на друга излучателей звука, в виду чего, их принято делить на типы и виды. Разработан метод такого разделения.

На типы излучатели делятся в зависимости от принципа преобразования электрического сигнала в акустический.

На виды излучатели делятся в зависимости от конструктивных особенностей, наблюдающихся внутри типа.

Согласно разработанному методу наиболее распространены следующие типы и виды звукоизлучателей. Это: электромагнитные; электродинамические (катушечные, ленточные, изодинамические, ортодинамические); электростатические (конденсаторные, электретные); пьезоэлектрические (пьезокерамические, биморфные).

Кроме вышеназванных типов и видов излучателей существуют и другие, менее традиционные.

Внутри типа, в зависимости от конструктивных особенностей, электродинамические излучатели делятся на виды: катушечные (диффузорные); с уравновешенным якорем («арматурные»); ленточные; изодинамические; ортодинамические; излучатели Хейла [13]. То есть в [13] разделены на виды и типы уже широко известные на практике излучатели звука. Выбор акустических излучающих устройств для оснащения компьютеров вынесен сейчас в отдельный раздел, который получил название компьютерная акустика.

Методы вычислительной техники нашли широкое применение в современной акустике, например, они представлены в [14, 15]. Но их применяют для визуализации структур волновых полей, когда известна геометрия границ и физические свойства области, где волны распространяются. При использовании этих методов обычно местоположение излучателей и приемников контролируется.

Физические модели акустических полей.

Формирование акустического поля определяется на основе известных представлений, изложенных в основополагающих работах по акустике [4-7]. Характер поля зависит прежде всего от типа акустических источников.

Предположительно при движении ракеты в атмосфере возможно использовать следующие модели:

- точечного излучения (монополей);
- акустических полей, генерируемых в среде при силовом воздействии на жесткую поверхность, находящуюся в состоянии движения, или среду, и характеризующихся потенциалом Лэмба;
- акустического излучения и полей при колебаниях пластин и оболочек различной формы, протяженности и площади;
- излучений, возникающих при истечении струй из сопел;
- акустического излучения, генерируемого при взаимодействии подвижной обтекающей среды с поверхностями твердых тел различной формы;
- возбуждения и распространения акустических колебаний внутри газовых и жидкостных полостей с учетом особенностей конструктивных схем исполнения оболочек, выявление резонансов;
- монохроматического и импульсного излучения.

Знание частоты излучения акустических волн позволяет применить известные в классической акустике *модели длинноволновых и коротковолновых излучений* [4, 5]. Это существенный фактор, который дает представления о направленности акустического поля и позволяет упростить расчеты величины звукового давления в зависимости от изменения расстояний от источника колебаний до интересующей точки.

Применение моделей длинноволновых и коротковолновых излучений для оценки излучателей звука, появившихся в первые секунды старта РКН.

Звуковое давление в определенной точке акустического поля, окружающего ракету, может быть рассчитано на основе известных теоретических положений классической акустики, если расстояние r превышает длину волны λ излучаемых звуковых колебаний, то есть в зоне дальнего акустического поля.

Рассмотрим характеристики такой РКН, для которой известно, что частота колебаний, зарегистрированная вибродатчиками телеметрической аппаратуры на участке выведения, имеет диапазон $f = 0,3-3000$ Гц [16]. Так как длина волны λ излучаемых акустических волн равна $\lambda = c_0 / f$ (здесь c_0 – скорость звука в воздушной среде, окружающей РКН во время старта), то отсюда следует, что диапазон длин волн, излучаемых от летящей ракеты колебаний, лежит в пределах $1133\text{ м} - 0,11\text{ м}$ соответственно. Пространство, где располагается дальнее акустическое поле излучателей, характеризуется начальным значением границы $r = \lambda$ (r – расстояние от источника излучения до точки наблюдения). Значения r , равные $1133\text{ м} - 0,11\text{ м}$, определяют начальную границу дальнего акустического поля от среза сопла ракеты или от каких-либо ее выступающих

частей. Согласно [18] (см. стр. 116) трехступенчатая РКН поднимается на высоту 1124м за первые 20 с полета. В первые 4 и 8 с полета РКН поднимается на высоту 145м и 265м соответственно.

Основным источником шумов при взлете РКН является ее двигательная установка (ДУ). При включении двигателя на невозмущенную ранее атмосферу, окружающую ракету, начинают воздействовать возмущения колебательного характера, генерируемые в потоке продуктов сгорания, истекающего из сопла. В таком случае сечение среза сопла принимается за источник колебаний.

Принимаем диаметр среза сопла за характерный размер поверхности акустического излучателя. В зависимости от частоты излучения и радиуса среза сопла определяется волновой параметр kR (k .- волновое число, R – радиус излучателя) и тип излучателя, низкочастотный или высокочастотный. Это даст возможность руководствоваться критерием в определении типов акустических источников при старте РКН, которые принят в классической акустике.

Необходимо учесть, что старт РКН происходит в пределах зоны стартовых сооружений. Конструкция стартовых сооружений в данном случае вносит коррективы в физическую картину акустических излучений.

Влияние на процесс генерации акустического излучения схемы старта РКН

Схема стартового комплекса и сооружений для каждой ракеты должна быть рассмотрена отдельно. Схема дает возможность перейти к выявлению первичных и вторичных акустических источников акустического излучения. Например, в [16] представлено пусковое устройство (ПУ), с которого стартует ракета-носитель «Зенит» (11К77), общий вид пускового стола с установленной на нем ракетой. Отмечено, что до высоты подъема 4м хвостовой отсек ракеты находится в цилиндрическом заглублении. Величина зазора между движущейся ракетой и стартовым сооружением составляет ~ 1 м. Во время движения хвостового отсека ракеты происходит уменьшение зазора между корпусом ракеты и стаканом стартового сооружения.

В схеме стартового стола также заложен канал, по которому движутся газы, представляющие собой струю продуктов сгорания, что обеспечивает требование осуществления безударного старта.

При изучении акустического излучения можно заметить, что для такой схемы старта характерно отсутствие воздействия струи из продуктов сгорания на окружающую среду вокруг корпуса ракеты в первые $\sim 1,5$ с полета. На основании представленных данных можно считать незначительным воздействие шума на окружающую среду при полете РН до высоты 4м в первые 1,5 секунды полета.

Возникновение акустического поля от качания ракеты в целом можно также считать отсутствующим, так как согласно данным работы [16] конструкторам системы управления (СУ) обычно удается разработать алгоритм работы СУ на основе требования минимальности перемещения по рысканью хвостового отсека. Это дает возможность избежать существенных колебаний ракеты в целом.

В [17] представлены исследования стабилизации движения РКН «Зенит-3SL», запускаемой в рамках международной программы «Морской старт». При разработке СУ ракеты с целью стабилизации движения с плавучей платформы должны были учитываться дополнительные возмущающие воздействия, обусловленные качкой платформы. Кроме безударности старта здесь были наложены ограничения на положение следов струй двигательной установки на палубе платформы из условий обеспечения допустимых уровней акустического, газодинамического и теплового воздействия. Показано, что было осуществлено устойчивое движение РКН до высот полета 4м, 8м. В [17] отмечено, что была обеспечена техническая устойчивость ракеты в полете до высоты 200м.

Анализ акустического излучения в последующие секунды полета необходимо проводить, опираясь на данные характеристик ракет.

Волновой параметр излучателей акустических колебаний и влияние его величины на вид акустических излучений.

В аналитическое выражение волнового размера акустического источника kR входят k – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, $k = 2\pi f/c_0$, π – число "π", λ и f – длина волны и частота излучаемого звука соответственно). Фактор $kR < 1$ или $kR > 1$ определяет тип акустического излучения: низкочастотное или высокочастотное. Параметр $kR = 1$ разграничивает две модели излучения. В некотором приближении можно считать, что при $kR < 1$ фронт акустического излучения сферический, при $kR > 1$ фронт имеет форму плоской волны [5]. Волновой параметр определяет соотношение между радиусом излучателя R и длиной волны звука λ .

Волновой параметр как характеристика излучения акустических колебаний отверстием газохода

В первые доли секунд запуска ДУ истекающие газы струи полностью проходят через газоход. Источником акустического излучения следует считать отверстие выхода из газохода в окружающую среду. Известен частотный диапазон колебаний, на которых наблюдаются акустические излучения. Обычно в ракетной технике этот диапазон частот составляет 31,5 – 8000 Гц.

Определение волнового параметра kR по размерам выходного отверстия газохода дает возможность идентифицировать вид фронта акустического поля.

Рассчитать характеристику звукового давления на некоторых расстояниях от выходного отверстия газохода до стартующей ракеты.

Модель акустического излучения ДУ как объемного сферического излучателя или излучателя волны с плоским фронтом.

В данном разделе предложена методика расчета шума ДУ РКН в первые 1,5 - 4,1 секунды полета, позволяющие определить звуковое давление в окружающей среде.

В основе методики расчета лежит моделирование акустического поля от ДУ РКН возможных двух типов излучения. Первый тип – это сферическое излучение от объемного источника, второй тип – излучение акустической волны с плоским фронтом. Определим диапазон частот излучения колебаний, для которого применимо такое моделирование. Сделать это позволяет применение параметра kR как критерия типа акустического излучения. Значение параметра $kR = 1$ позволяет разграничить две модели излучения. Далее используем соотношения: при $kR < 1$ фронт акустического излучения сферический, при $kR > 1$ фронт имеет форму плоской волны.

В зависимости от диаметра среза сопла, характерного размера поверхности акустического излучателя, определялся тип излучателя. Для диаметра среза сопла и диапазона частот от 31 Гц до 8000 Гц определяем волновой размер акустического источника излучения kR .

Приняв вышесказанное за внимание, следует опираться на значение граничной частоты $f_{гр}$ [Гц], которая определяется для случая $kR = 1$ и разделяет два вида акустического поля: $f < f_{гр}$ Гц - фронт акустической волны сферического типа, то есть источник акустического излучения монополь. Для $f_{гр} > f_{гр}$ [Гц] - фронт акустической волны плоского типа.

В основу расчета акустической мощности струи как объемного излучателя звука или излучателя с объемной скоростью. Когда : $f < f_{гр}$ Гц, положена теория излучения звука сиреной.

В модели объемного сферического излучателя фронт сферической волны представляет собой сферическую поверхность, а звуковые лучи, согласно определению фронта волны, совпадают с радиусами сферы [4, 5]. В результате расхождения волн интенсивность звука убывает с удалением от источника.

Сферичность фронта низкочастотного акустического поля предполагает значительное уменьшение величины звукового давления с расстоянием по гиперболическому закону, что представляет собой значительную величину.

Волновое уравнение для этого случая [5]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{2\partial p}{r\partial r}, \quad (1)$$

где p – звуковое давление;

c_0 – скорость звука в среде;

t – время;

r – расстояние от центра сферической волны до точки наблюдения.

Частное решение уравнения (1) для расходящейся волны (распространяющейся в положительном направлении) имеет вид

$$p = \frac{p_i}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c_0})} = p_m e^{i\omega(t - \frac{r}{c_0})}, \quad (2)$$

где p_i – амплитуда звукового давления на расстоянии, единицы длины от центра сферы;

$p_i = p_m / r$. p_m – амплитуда звукового давления на расстоянии единицы длины волны от центра сфера.

Закон убывания интенсивности звука I в сферической волне квадратичный

$$I = p_m^2 / 2\rho c_0 = I_1 / r^2, \quad (3)$$

где $I_1 = p_i^2 / \rho c_0$, ρ – плотность.

При увеличении параметра kR излучателя сферическая волна приближается к плоской. Например, для частоты 100 Гц (длина волны $\lambda = c_0 / f = 340 / 100 = 3,4$ м) при расстоянии от центра источника звука 0,25 м сдвиг фаз получается равным 65° , а для частоты 5000 Гц ($\lambda = 6,8$ см) при расстоянии 1м сдвиг фаз между активной и реактивной составляющими излучения получается уже около $0,5^\circ$.

Так как на окружающую среду при работе ДУ РКН действуют вытекающие из сопла газы в виде продуктов сгорания, то можно применить модель акустического излучения от объемного источника в диапазоне частот $f < f_{gr}$ [Гц]. Тогда акустическое излучение от истекающей струи из ДУ РКН аппроксимируется сферическим излучателем с объемной скоростью.

В модели излучателя, у которого волновой параметр $kR > 1$ фронт имеет форму плоской волны [5, 6].

Волновое уравнение для этого случая

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right), \quad (4)$$

где p – звуковое давление;

r – расстояние от поверхности излучения до точки наблюдения.

Для частот излучения, когда $f > f_{gr}$ Гц выше до величины 3000Гц – 8000Гц, расчеты акустических характеристик в поле следует проводить, руководствуясь волновым уравнением плоской волны (5).

Такое акустическое излучение возможно на участке полета ракеты 1,5 – 20с.

Для расчета акустических характеристик разработаны алгоритм и программа на языке JAVA.

На основе расчета получены зависимости звукового давления от частоты при заданных температурных уровнях внешней среды (-320 С, 200 С и 420 С). Данные расчета показали, что значение уровня звукового давления на частоте ~125 Гц и выше составляет 150-155 дБ для Ду, срез сопла которой составляет 1,5 м.

Обсуждение результатов

Настоящая работа имеет перспективы при выяснении характера акустических полей, генерируемых при старте РКН. При строительстве космодромов и стартовых площадок ракет необходимо выполнить требования воздействия шумов на окружающую среду инфразвукового излучения ниже определенного уровня. *Разработанный метод* определения вида акустических источников при старте РКН дает возможность определить величины амплитуд акустического давления в среде, акустические воздействия на корпус ракеты и направленность акустических полей [17]. *Метод* исследований акустического излучения при старте ракет космического назначения разработан на основе определения волнового параметра kR .

Выводы

Разработан метод определения вида источников акустического излучения в первые секунды старта ракет космического назначения.

Метод применим для исследований акустических излучений в первые секунды старта РКН и позволяет привести обоснованные данные по уровням звуковых давлений и интенсивности в конкретных точках воздушного пространства вокруг РКН в первые секунды старта.

Библиографические ссылки

1. Дементьев, В.К., Думнов Г.Е., Комаров В.В., Мельников Д.А. О максимальных акустических нагрузках на ракету при старте. [Текст] // Космонавтика и ракетостроение. Научно-технический ж. – 2000. – Вып. 19. – С.44
2. Tsutsumi S., Ishii T., Ut K., Tokudone S., Chuuou-ku Y., Wado K. Acoustic Design of Launch Pad for Epsilon Launch Vehicle // Proceedings of AJCPP2014 . Asian Joint Conference on Propulsion and Power, March 5-8, 2014, Jeju Island, Korea. AJCPP2014-090.
3. Panda, J., Mosher R., Porter D.J. Identification of Noise Sources during Rocket Engine Test Firings and a Rocket Launch a Microphone Phased-Array // NASA / TM-2013-216625, December 2013. – P. 1-20.

4. Ржевкин, С.Н. Курс лекций по теории звука. [Текст] – М.: МГУ, 1960. – 261 с.
5. Сапожков, М.А. Электроакустика. [Текст] – М.: Связь, 1978. – 272 с.
6. Тюлин, В.Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука. [Текст] – М.: Наука, 1976. – 253 с.
7. Грінченко В. Т., Вовк В. В., Маципура В. Т. Основы акустики. [Текст] – Київ: Науково-виробниче підприємство «Видавництво «Наукова думка» НАН України, 2007. – 640 с.
8. Сокол, Г.И. Особенности инфразвуковых процессов в инфразвуковом диапазоне частот [Текст]: науч. монография. – Днепропетровск: Промінь, 2000. – 136 с.
9. Гордиенко В.А. [Текст] Векторно-фазовые методы в акустике. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
10. Гордиенко В.А. Векторно-фазовые методы в акустике. [Текст] / В. А. Гордиенко, Л. Н. Захаров. – М.: Наука, 1989. – 222 с.
11. Иванников А.И. Метод исследования структуры звукового поля в малых замкнутых объемах воздуха: Дис... канд. физ.-мат. наук – М.: МГУ, 1983. – 140 с.
12. Шкуратник В. Л. Методы и средства изучения быстропротекающих процессов. Учебник для вузов [Текст] / В. Л. Шкуратник, А. С. Вознесенский, И. В. Колодина – М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2003. – 309 с.
13. Излучатели звука, типы и виды. [Электронная версия] / [techadviser.ru/articles/izluchately-zvuka-tipy-i-vidy-izluchatelej/](http://techadviser.ru/articles/izluchатели-zvuka-tipy-i-vidy-izluchatelej/)
14. Завадский В. Ю. Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. [Текст] – М.: Наука, 1982. – 274 с.
15. Гринченко В. Т. Антисимметричные колебания полуслоя с заземленным торцом / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая, И. В. Старовойт // Акуст. вісник, 2009. – 12, № 1. – С. 32–42.
16. Игдалов, И. М., Шептун Л. Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления [Текст] / Под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544с.
17. Фролов, В. П. Акустические излучения при старте ракет космического назначения в первые секунды полета [Текст] / Г. И. Сокол, В. П. Фролов // 6-я международная конференция «Космические технологии: настоящее и будущее», 23-26 мая 2017г., Днепр, Украина: Тезисы докладов. - Днепр: ДП «КБ «Южное» им. акад. М.К. Янгеля», 2017. – С. 37.
18. Игдалов, И. Динамическое проектирование ракет. Монография. [Текст] / Под ред. акад. С.Н. Конюхова // И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун – Днепропетровск: Изд-во Днепрпетр. нац. ун-та, 2010. – 264с.

Надійшла до редакції 19.04.2018

УДК 536.24

A. Khaminich, K. Heti, O. Matyash

Oles Honchar Dnipro National University

CALCULATION OF TEMPERATURE MODES OF GRAIN FILTERS MANUFACTURED BY LOW TEMPERATURE TECHNOLOGY AFTER DEFROSTING

Розроблено методику моделювання теплофізичних процесів у гравійних фільтрах, виготовлених по низькотемпературній технології, та досліджено період початку фазового переходу на поверхні фільтру в залежності від експлуатаційних умов.

Ключові слова: гравійний фільтр, фазовий перехід, математична модель, дисперсне середовище, розморожування

Разработана методика моделирования теплофизических процессов в гравийных фильтрах, изготовленных по низкотемпературной технологии, и исследован период начала фазового перехода на поверхности фильтра в зависимости от эксплуатационных условий.

Ключевые слова: гравийный фильтр, фазовый переход, математическая модель, дисперсная среда, размораживание.

The method of thermophysical processes simulation in gravel filters made by low-temperature technology was developed, and the period of the beginning of phase transition on the filter surface depending on the operating conditions was investigated.

Keywords: gravel filter, phase transition, mathematical model, dispersion medium, defrosting.

A series of works is devoted to the mathematical modeling of heat transfer problems in dispersed media in the presence of phase transitions. The practical interest of such kind of problems has investigation of soil freezing, drying of capillary-porous materials, filtration tasks, and others. In particular, the actual task is to determine the parameters of manufacturing and operation of gravel filters made by low-temperature technology (or cryogenic-gravel filters).

According to this technology the required structural strength is achieved by the phase transformation of a binder fluid, which uses water or a solution thereof. Then when installing such a block of filter in the well a reverse phase transition of the binder fluid occurs. As a result we obtain a filter whose filtration characteristics meet the technological requirements.

Among the factors that affect the effectiveness of filters made by low-temperature technology, we distinguish the physical characteristics of the filter material and the adhesive fluid, external and operating conditions.

One of the important physical characteristics of the bulk material of the filter is its voidness, that is, the presence of cavities (voids) between the grains of the material. Obviously, in order to determine the influence of the physical characteristics of the environment on the technological parameters of the manufacture and operation of such filters, it is necessary to study the processes of heat transfer in the filter environment. The study of such processes can be accomplished using mathematical modeling methods, since the use of these methods is well understood today and is most appropriate for solving such a class of problems.

From a physical point of view, a gravel filter is a multiphase and multicomponent system, which consists of a mineral component - gravel and a dispersion medium - water. The dispersion environment, based on the technology of well equipment, is in the prepared period in a solid state, and with an increase in the temperature of the phase transition - in liquid.

To construct a mathematical model, imagine that a gravel filter (GF) is a limited, empty cylinder made of coarse porous material (sand). As a binder filler we will consider the water. Suppose that the heat exchange with the environment in the case of defrost meets the conditions of free convection. Then we will assume that the phase transition for this system of ice - water almost completely occurs at a temperature of 0 ° C, which is confirmed by experimental data. In general, this problem should be considered together with the moisture transfer, but for long processes under atmospheric pressure in the first approximation, the mutual influence of the thermal field and the field of moisture can be neglected.

To deliver the monolith of the gravel filter to the working position, it is necessary to perform operations for preparation and descaling, in which the defrosting of the filter takes place. To ensure a sufficient strength of the filter design and to prevent premature destruction, it is necessary to know the start time of the phase transition on the filter surface, depending on the operating conditions. To determine the time parameters of the destruction of the filter it is necessary to solve the problem of heat transfer in a porous water-saturated medium of a gravel filter in the presence of a phase transformation of the binder.

To solve the problem of defrosting the dispersed environment of a gravel filter, we use the mathematical model of heat transfer in a dispersed water-saturated medium in the presence of phase transformation.

The differential equation of heat transfer in the GF in the presence of a phase transition will be written using the effective heat capacity:

$$c_{ef}(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (1)$$

$$\tau > 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

where c_{ef} – effective heat capacity of the dispersed medium, $\rho(T)$ – the density of the dispersed medium, $\lambda(T)$ – the coefficient of thermal conductivity of the GF,

T – the temperature of the filter, τ – the time, R_1, R_2 – the internal and external radiuses of the filter (Fig.1).

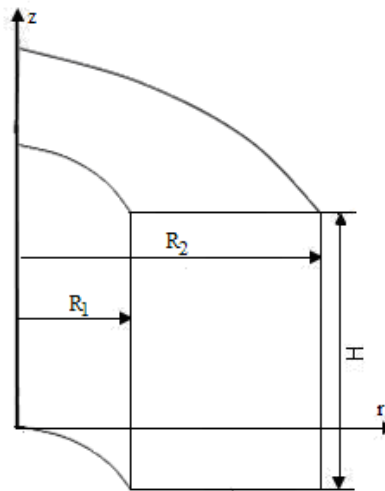


Fig. 1. Estimated area

With uniqueness conditions that match the defrost mode we obtain:

$$T|_{\tau=0} = T_0, \quad (2)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{n=s} = \alpha_s (T - T_\infty) \quad (3)$$

where n – external normal to the surface, α_s – coefficient of heat transfer with the environment s -th surface of the filter wall, T_∞ – air temperature on the surface of the well.

The average coefficient of heat transfer $\bar{\alpha}$ during the operation of the GF is changing, according to the technology of GF operation, where are three modes of defrosting the filter:

- preparatory work in the air, then the coefficient of heat transfer is determined according to the conditions of free convection in an unlimited space;
- when the drill string is raised, the filter is stationary in the well, the environment is water in a closed space;
- descent of the GF along the wellbore, the heat exchange with the environment meets the conditions of forced convection in a closed space.

The values of heat dissipation were taken from literature in an arbitrary order from 9 to 70 W / m²K.

To provide the required strength of a gravel filter design, the determining parameter is the start time of the phase transition of the reinforcing material to the surface of the filter wall. Then, to simplify the calculation model, the transfer of moisture in the frozen wall is neglected.

We write the effective heat capacity in (1) as follows

$$c_{ef}(T) = (1-m)c_{sk} + m \cdot (1-i(T)) \cdot c_w \cdot U + m \cdot i(T) \cdot c_l \cdot U + \frac{\rho_l}{\rho(T)} \cdot m \cdot l \cdot \frac{di}{dT} \quad (4)$$

where $i(T)$ – the function of ice, m – porosity, l – specific heat of the phase transition, c – heat capacity, ρ – density, indices sk, w, l refer to the skeleton, water, ice, respectively.

Nowadays there are various approximate analytical and numerical methods for solving heat transfer problems in dispersed media with phase transitions. To solve the mathematical model of GF we used a numerical method.

From a mathematical point of view our task of defrosting the GF was reduced to solving a one-dimensional problem, that leads to the solution of the nonstationary equation of heat conductivity:

$$c_{ef}(T) \rho(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5)$$

$$\tau \succ 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (6)$$

with initial temperature

$$T(x, z, 0) = T_0 = const \quad (7)$$

at the following boundary conditions:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R1} = \bar{\alpha} (T|_s - T_\infty), \quad (8)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R2} = -\bar{\alpha} (T|_s - T_\infty). \quad (9)$$

During the preparatory operation the blocks of gravel filter are located on the surface of the well at ambient temperature.

The results of numerical simulation of GF warming during defrosting of the air filter are shown in the drawings.

We construct graphs of temperature distribution along the radius of the filter, depending on the time from the beginning of defrost up to 2 hours (Fig.2).

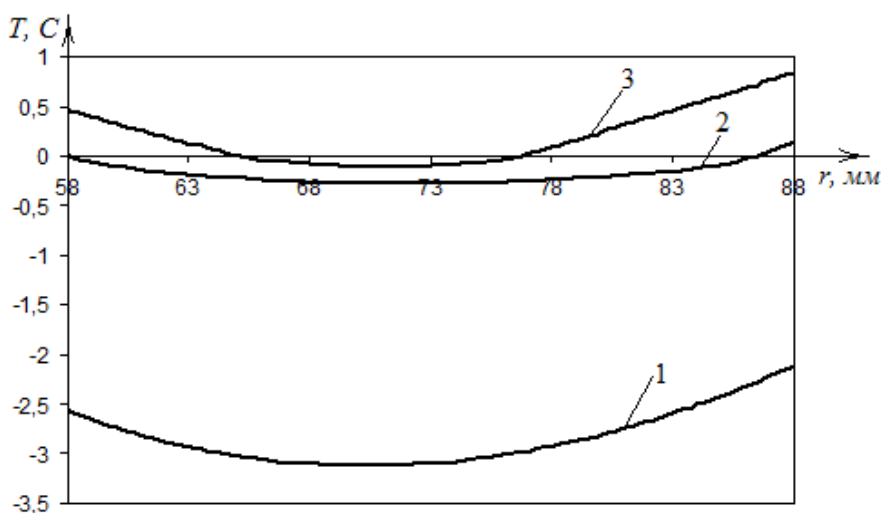


Fig. 2. Distribution of temperature in the radius:
1 - 1 hour, 2 - 1,5 hours, 3 - 2 hours.

The greatest temperature gradients arise at the initial stage of the defrost of the filter, that is, at the heating stage of the region. 50 minutes after the start of defrost, a phase transformation is observed on the surface of the filter wall, and after 2 hours, the phase transition phase is already in the middle of the filter wall.

The second step will be to investigate the influence of the initial and external conditions on the process of defrosting the block of gravel filter.

We construct a graph of the temperature field dynamics in the middle of the filter wall (Fig.3).

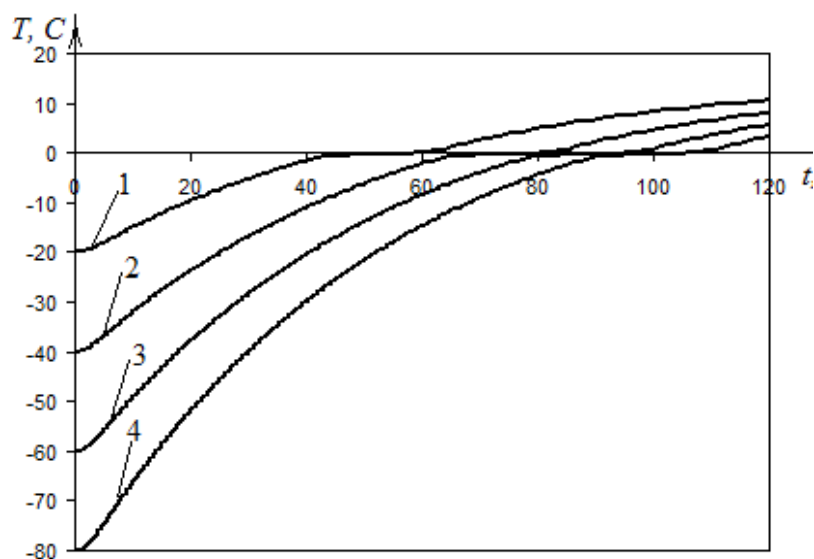


Fig.3. Dynamics of the temperature field in the middle of the filter wall:
 $T_{\infty} = 15^{\circ}\text{C}$, $U_0 = 10\%$, $T_0 = -20^{\circ}\text{C}$ (1), -40°C (2), -60°C (3), -80°C (4).

With the decrease of the initial temperature of the gravel filter, the temperature in the middle of the filter wall varies according to the graph (Fig. 4), the phase of the start of the phase transition increases, the phase transition period decreases.

Imagine the effect of ambient temperature on the dynamics of the defrosting process of the test element.

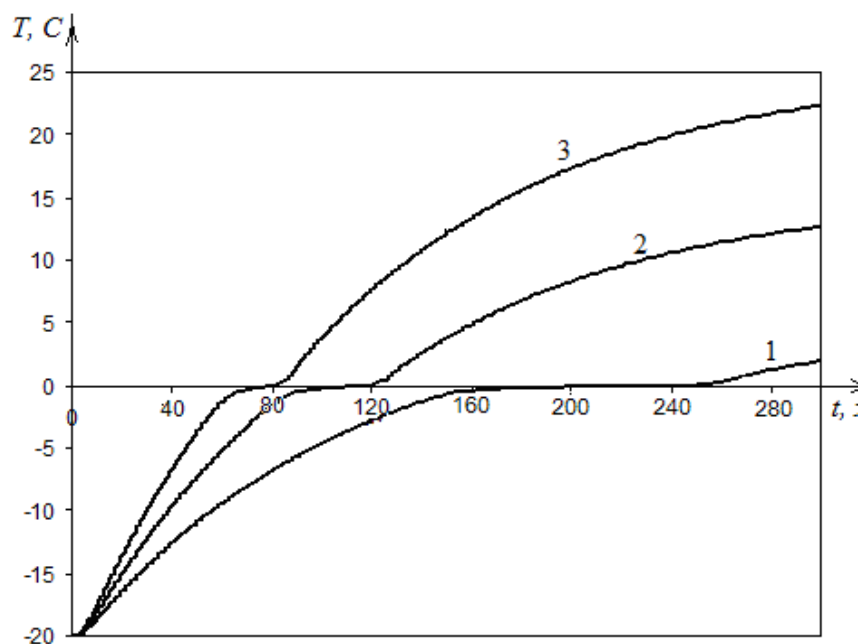


Fig. 4. - Dynamics of the temperature field in the middle of the filter wall, $T_0 = -20^\circ\text{C}$,

$U_0 = 10\%$, $T_\infty = 5^\circ\text{C}$ (1), 15°C (2), 25°C (3).

With the increase of the air temperature at a fixed initial temperature and humidity of the filter, the start time of the phase transformation is reduced.

In the following graph, the dependence of the beginning of defrosting on the outer surface of the gravel filter on the temperature of the air for the initial temperature of the filter -20°C , -40°C , -60°C , -80°C , -100°C and the initial humidity 5% has been constructed. For example, at the initial temperature -40°C of the fracture filter, it will start after 70 sec at air temperature 5°C and after 40 sec with air temperature 25°C (Fig. 5).

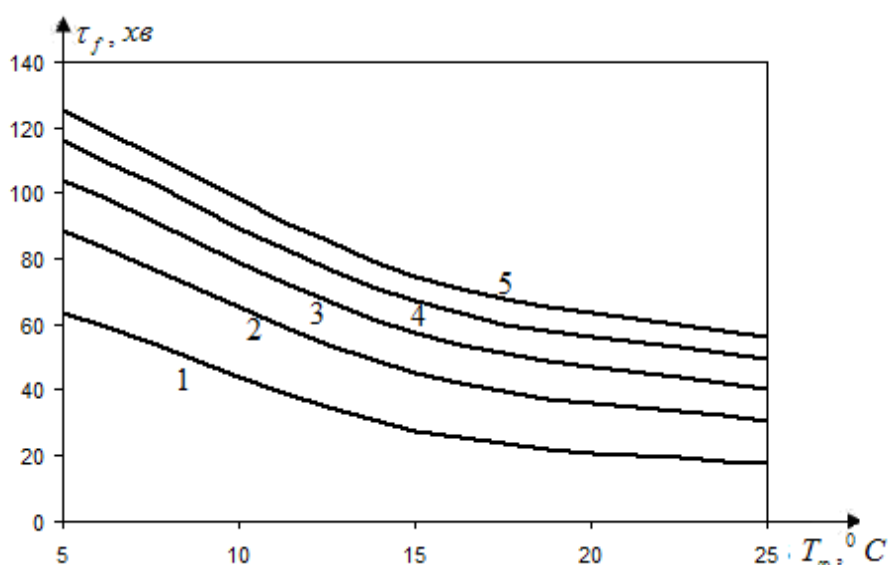


Fig. 5. The beginning of the destruction of the filter surface with the initial temperature of the gravel filter: -20°C (1), -40°C (2), -60°C (3), -80°C (4), -100°C (5).

During the preparatory work on mounting gravel filters made by low temperature technology, the time interval for which the surface of the filter will begin to decay is determined depending on the temperature regime of the environment on the surface of the well, the temperature and humidity of the frozen filter.

The calculation results allow to determine the required time depending on the defrost conditions. An overview of methods for solving heat transfer problems in dispersed media with phase transitions is performed. The calculations of a one-dimensional non-stationary problem in the presence of a phase transition of ice-water for a dispersed water-saturated medium have been carried out. The time of the beginning of the phase transition on the filter surface, depending on the operating conditions has been investigated.

References

1. Goshovsky SV Analysis of technologies of equipment of the water receiving part of hydrogeological wells by means of graduated gravel filters with removable protective casing / AA Kozhevnikov, AK Sudakov, OA Grinyak // Seminar №19. - 2008. - pp. 287-289.
2. Kozhevnikov AA The technology of equipment for cryogenic-gravel filters of a water receiving part of a borehole. / AA Kozhevnikov, SV Goshovsky, AK Sudakov // Breeding and metal working tools, 2009. - Ex. 12. - pp. 62 - 66.
3. Kozhevnikov AA Geological and technical conditions of equipment for hydrogeological wells with cryogenic-gravel filters. / Dychakovsky R.E., Sudakov A.K. // Scientific works of DonNTU. Series "Mining and Geological". No. 1 (20) '2014. - pp. 80-88. ISSN 2073 - 9575.
4. Kozhevnikov AA About the Choice of Equipment Technology for Productive Horizons of Drilling Wells by Gravel Filters / Sudakov AK // 2011.- S. 356 - 361.
5. Nersesova Z.A. Changes in the soil's ice content, depending on temperature // DAN USSR. - 1950. - Vol. 75. - No. 6. - pp.845 - 846.
6. Permyak P.P. Identification of parameters of the mathematical model of heat transfer in frozen soils. - Novosibirsk: Science, 1989. - 86 p.

ДО УВАГИ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Посилання на неопубліковані праці неприпустиме. Приймаються статті, запропоновані українською, російською та англійською мовами.

2. Рукопис статті повинен мати таку структуру (згідно з вимогами Постанови ВАК України № 7-05/1 від 15 січня 2003 року):

- постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями;
- аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття;
- формулювання цілей статті (постановка завдання);
- виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів;
- висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку.

3. Вимоги до набору.

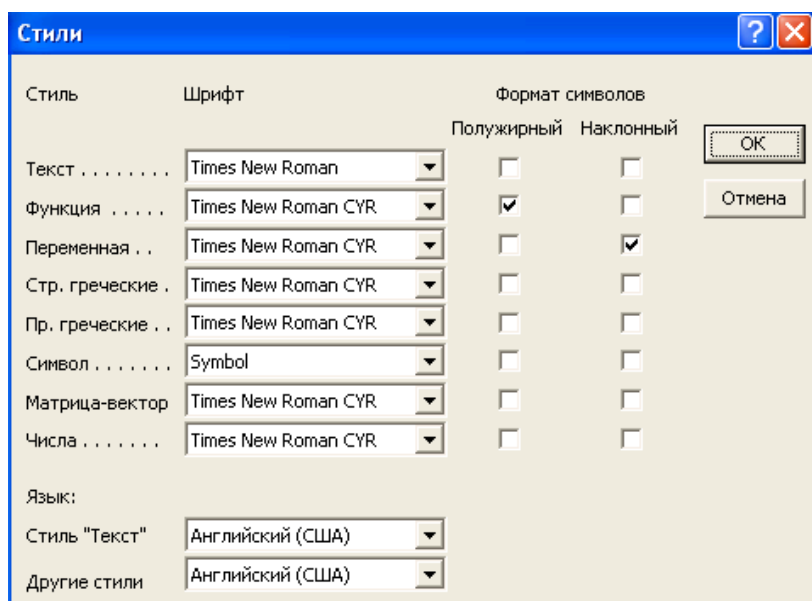
- Текст набирають у Microsoft Word.
- Формат паперу А4 (210×297).
- Параметри сторінки (поля): верхнє – 20 мм; нижнє – 20 мм; ліве – 20 мм; праве – 20 мм.
- Стил і форматування для елементів статті.

Міжрядковий інтервал для усіх елементів статті одинарний.

УДК	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>інтервал після:</i> один рядок
Ініціали і прізвища авторів	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>інтервал після:</i> один рядок. Спочатку набирають ініціали, потім – прізвище
Місце роботи	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>інтервал після:</i> один рядок
Назва статті	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, напівжирний, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>інтервал після:</i> один рядок
Анотації	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 12 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>абзац:</i> 1,25 см
«Ключові слова»	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 12 pt, напівжирний, курсив; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>абзац:</i> 1,25 см;

	<i>інтервал після:</i> один рядок
Основний текст статті	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>абзац:</i> 1,25 см; <i>інтервал після:</i> один рядок
Назва рисунка	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 12 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою, але не ширше за рисунок
Підрисункові підписи	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 12 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною, але не ширше за рисунок
«Таблиця»	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за правим краєм
Назва таблиці	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою
Заголовок «Бібліографічні посилання»	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 16 pt, напівжирний, прямий, <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>інтервал після:</i> один рядок
Бібліографічні посилання	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 14 pt, прямий; нумерований список; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>абзац:</i> 1,25 см; <i>інтервал після:</i> один рядок
Дата надходження до редколегії	<i>Шрифт:</i> Times New Roman, 12 pt, курсив; <i>абзац:</i> 1,25 см

- Анотацію до статті та ключові слова слід подавати українською, російською та англійською мовами.
- Під час набору статті обов'язково розрізняти «дефіс» і «тире».
- Формули слід набирати **тільки** в редакторі **Microsoft Equation 3.0** з такими установками: *інтервал до:* один рядок, *інтервал після:* один рядок; *табуляція:* 8,5 см – за серединою, 17 см – праворуч:



- Рисунки слід виконувати в будь-якому форматі, що імпортується графічними фільтрами Microsoft Word. Рисунки вставляють у

текст статті як окремий незалежний об'єкт (положення – у тексті), при цьому можливе пересування тексту відносно нього. Під рисунком обов'язковим є розміщення його назви із номером; якщо необхідно – пояснювальний підпис.

- Бібліографічні посилання оформлюють відповідно до ГОСТ 7.1:2006 і вони повинні бути розташовані у тому ж порядку, що і посилання на них у тексті.
- В кінці статті наводяться прізвища, ініціали авторів та назва статті англійською, українською та російською мовами.

4. До редакційної колегії потрібно подавати:

- один примірник статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
- експертний висновок про можливість публікації статті;
- рецензію провідного фахівця відносно наукового рівня статті;
- електронний варіант статті на CD або електронною поштою;
- в окремих файлах рисунки до статті;
- на окремому аркуші довідку про автора (співавторів), у якій слід зазначити: ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, наукові інтереси, телефон та електронну адресу.

5. Статті, виконані з порушенням правил, до збірника не будуть включені.

6. Адреса редколегії: Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, фізико-технічний факультет, кафедра проектування та конструкцій ЛА, вул. Наукова, 10, м. Дніпропетровськ, 49050, Україна (тел.: (056)375-05-29, 066-179-70-83, e-mail: hetikris@gmail.com).

ЗМІСТ

Lukisha A. P.

Recalculating technique of the thermo-hydraulic parameters of straight-flow smooth-walled steam generators from boundary conditions of the second kind for boundary conditions of the third kind.....3

Бразалук Ю.В., Губин А.И., Давыдова А.В., Евдокимов Д.В., Стояновский М.А., Шульга Р.А.

Асимптотические математические модели фильтрации газа через тонкую стенку. Часть 1. Постановка проблемы, изотермический случай.....15

Джусов А.А., Притыкин А.А., Джусов П.А.

Инвестиционный потенциал акций компаний аэрокосмического и оборонного сектора.....41

Желябов П. А., Кулабухов А. М.

Алгоритм управления токовой катушкой в системах угловой ориентации и стабилизации космических аппаратов.....47

Nosova T.V., Kalinina N.E., Kalinin V.T., Davidyuk A.V., Vovk A.M.

Processing aluminum alloys by dispersion modifiers57

Лабуткина Т. В., Котюк А. А.

Метод «объемного плетения» для генерации гипотетических зон механических поликонфликтов, рассматриваемых в исследовательских задачах.....63

Сокол Г. И.

Метод определения вида источников акустического излучения в первые секунды старта ракет космического назначения.....91

A. Khaminich, K. Heti, O. Matyash

Calculation of temperature modes of grain filters manufactured by low temperature technology after defrosting.....101