

ISSN 2074-4853



ПИТАННЯ

ПРИКЛАДНОЇ

МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧНОГО

МОДЕЛЮВАННЯ

2015

ISSN 2476-9804

Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара

## ВИГАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Збірник наукових праць

Випуск 15

Дніпропетровськ  
РВВ ДНУ  
2015

УДК 330, 512, 517, 519, 65, 618  
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431  
П 32

*Надруковано за рішенням вченої ради  
Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара*

**П 32 Питання прикладної математики і математичного моделювання**  
[Текст] зб. наук. пр. / редкол. : О. М. Кісельова (відп. ред.) [та ін.]. – Д.: РВВ ДНУ, 2015. – Вип. 15. – 232 с.

**Рецензенти:**

д.р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**  
д.р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

У збірнику вміщено результати фундаментальних досліджень та практичних розробок із проблем математичного і програмного забезпечення інтелектуальних систем. Статті присвячено питанням математичного моделювання складних прикладних систем і розробці ефективних обчислювальних методів та алгоритмів їх розв'язання, а також оптимізації, чисельних методів, функціонального аналізу, математичної фізики.

Призначений для науковців, викладачів ВНЗ, може бути корисним аспірантам і студентам.

Сборник содержит результаты фундаментальных исследований и практических разработок по проблемам математического и программного обеспечения интеллектуальных систем. Статьи посвящены вопросам математического моделирования сложных прикладных систем и разработке эффективных вычислительных методов и алгоритмов их решения, а также оптимизации, численных методов, функционального анализа, математической физики.

Предназначен для ученых, преподавателей вузов, может быть полезен аспирантам и студентам.

УДК 330, 512, 517, 519, 65, 618  
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

**Редакційна колегія:**

чл.кор. НАН України, д.р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Кісельова** (відп. ред.); д.р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д.р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д.р техн. наук, проф. **Н. І. Ободан**; д.р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян** (НТУУ «КПІ»); д.р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут**; д.р техн. наук, проф. **О. Г. Байбуз**; д.р фіз.-мат. наук, проф. **А. М. Пасічник** (Університет митної справи та фінансів, м. Дніпропетровськ); д.р техн. наук, проф. **О. І. Михальов** (НМетА, м. Дніпропетровськ); д.р техн. наук, проф. **В. М. Корчинський**; д.р техн. наук, проф. **В. В. Гнатушенко**; д.р фіз.-мат. наук, проф. **В. Дейнеко** (Велика Британія); д.р техн. наук, проф. **О. М. Карпов**; д.р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. Мельников** (США); канд. фіз.-мат. наук **Т. О. Шевченко** (відп. секр.).

**ISSN 2074-5893**

© Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара, 2015

УДК 519.61

**Ю. Н. <sup>1</sup>Базилевич**

*Придніпровська державна академія будівництва і архітектури,  
г. Дніпропетровськ*

## **НОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ ТОЧНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ**

Разработаны алгоритмы, позволяющие эффективно находить общее инвариантное подпространство нескольких матриц. Рассмотрено расширение области применения программы, предназначенной для нахождения общего решения большой разреженной системы линейных однородных алгебраических уравнений.

Розроблено алгоритми, що дозволяють ефективно знаходити спільний інваріантний підпростір декількох матриць. Розглянуто розширення сфери застосування програми, призначеної для знаходження спільного розв'язку великої розрідженої системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

The algorithms allowing finding effectively the common invariant subspace of several matrixes are developed. Increasing opportunities of the program designed for finding of the total decision of the big rarefied system of the linear uniform algebraic equations is considered.

**Ключевые слова:** алгоритм, декомпозиция, матрицы, общее решение, эффективность.

**Введение.** Точная декомпозиция [1 ; 2] — это методы, позволяющие либо привести данную систему уравнений к нескольким подсистемам, либо установить, что при выбранном классе преобразований такое приведение невозможно. Разделение на независимые подсистемы соответствует приведению нескольких матриц коэффициентов к блочно -диагональному виду одним преобразованием. Иерархическая декомпозиция (последовательная, вертикальная декомпозиция, приводимость или редукция) соответствует приведению матриц к блочно -треугольному виду. Подсистемы уравнений, соответствующие блокам матриц, стоящим на главной диагонали, позволяют исследовать устойчивость решений исходной системы уравнений как при разделении на независимые подсистемы, так и при иерархической декомпозиции.

### **Постановка задачі**

Для рішення задач декомпозиції необхідний алгоритм знаходження загального рішення великої розрешеної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Такі алгоритми порівняльно мало. В [3, с. 130] наведено універсальні алгоритми `svd` і `minfit` для знаходження загального рішення. Спеціальний алгоритм `SLAU5` для рішення такої задачі в разі великої сильно розрешеної матриці коефіцієнтів викладено в [1]. Для рішення задач ієрархічної декомпозиції необхідно ще алгоритм `ALG` знаходження загального інваріантного підпространства декількох матриць [4].

Алгоритм `SLAU5` (і відповідююча комп'ютерна програма) показав достатньо високу ефективність. Представляє інтерес розширення його області застосування.

Другий алгоритм недостатньо ефективний. Використовуючи його для рішення практичних задач, довелося використовувати подвійну точність. Виникли також проблеми при спробі виконати наближену декомпозицію, аналогічну виконаній в [1].

В даній роботі вирішуються наступні задачі.

- Підвищення точності і швидкодії існуючого алгоритму знаходження загального інваріантного підпространства декількох матриць.
- Розширення області застосування алгоритму `SLAU5` знаходження загального рішення великої сильно розрешеної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

### **Метод рішення і аналіз отриманих результатів**

1. В існуючому алгоритмі знаходження загального інваріантного підпространства декількох матриць при складанні алгебри, породженої даними матрицями, виконуються багаторазові перевірки лінійної залежності матриць. Перевіряється сукупність «передбачуваного базиса» і доповнююючої матриць.

Причина недостатньої ефективності алгоритму пов'язана з наступним: незважаючи на те, що поняття лінійної незалежності якісне (залежні або незалежні вектори), з обчислювального погляду ця незалежність може проявлятися більш або менш чітко. Наприклад, два вектори на площині, розташовані під гострим кутом один до одного, будуть лінійно незалежними, якщо цей кут не дорівнює нулю. Але коли кут порівняльно малий, комп'ютерна програма, що працює з обмеженою точністю, може вважати ці вектори лінійно залежними, тому відсутність ортогоналізації і нормування елементів «передпола-

гаемого базиса» приводит к накоплению погрешностей и возможным ошибкам. Здесь  $n \times n$ -матрица рассматривается как вектор длиной  $n^2$ . Сама проверка выполняется с помощью программы SLAU5, которая превращает первые части векторов «предполагаемого базиса» в единичные векторы длины  $m$ , где  $m$  — это количество векторов данного «базиса». Для этих векторов свойство линейной независимости будет проявляться более чётко. Далее такой базис будем называть улучшенным.

В алгоритм следует внести следующее изменение: после формирования очередного варианта «предполагаемого базиса» и установления его линейной независимости с помощью программы SLAU5 заменить эти векторы на «улучшенные», использованные программой как промежуточный результат. Такое изменение даст также некоторое увеличение быстродействия, поскольку операции с векторами, содержащими много нулей, будут выполняться быстрее.

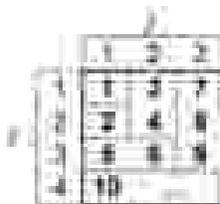
Заметно сократить время работы алгоритма можно, изменив порядок пересмотра всех возможных произведений матриц. Обычная организация циклов здесь не эффективна потому, что при добавлении нового элемента к базису процесс надо начинать заново с новой длиной цикла. Итак, нужно организовать перебор всех возможных сочетаний индексов  $i$  и  $j$  от 1 до некоторого значения  $r$ , величина которого заранее не известна.

Изменённый алгоритм составления алгебры матриц, порожденной исходными матрицами  $\{B_k\}$ , следующий:

- а) к матрицам системы  $\{B_k\}$  добавляем матрицу  $B_0 = E$ ;
- б) выбираем улучшенный базис во множестве матриц, новые матрицы базиса обозначим  $W_1, W_2, \dots, W_\mu$ ;
- в) вычисляем произведения матриц  $W_i W_j$ . Если какое-либо из них не является линейной комбинацией матриц  $\{W_k\}$ , то принимаем его новым элементом множества  $\{W_k\}$ . Подробнее:
  - (i) полагаем  $r := \mu$ ;  $m := 1$ ;
  - (ii) для значений  $i = 1, j = 1$  выполняем пункт (iv), после чего переходим к пункту (vi);
  - (iii) полагаем  $i := m$ ; затем для всех значений  $j$  от 1 до  $m - 1$  выполняем пункт (iv), после чего переходим к пункту (v);
  - (iv) вычисляем  $Z := W_i W_j$ , проверяем линейную зависимость матриц  $W_1, W_2, \dots, W_r, Z$ . Если они линейно независимы, полагаем  $r := r + 1$ ,  $W_r := Z$  и заменяем базис множества  $\{W_k\}$  на улучшенный;
  - (v)  $j := m$ ; затем для всех значений  $i$  от 1 до  $m$  повторяем выполнение пункта (iv);
  - (vi)  $m := m + 1$ , если  $m \leq n$ , возвращаемся к пункту (iii).

В результате получим базис  $W_1, W_2, \dots, W_r$  алгебры с единицей, порождённой исходными матрицами  $\{B_k\}$ .

Далее (рисунок) показаны номера вычисляемых в соответствии с вышеприведенным алгоритмом произведений матриц  $W_i W_j$  и соответствующие номера индексов  $i$  и  $j$ .



### Последовательность вычисления произведений

Если программу нахождения общего инвариантного подпространства нескольких матриц составить на языке алгебраического программного комплекса GAP [5], то основные задачи — составление алгебры, порождённой данными матрицами, и вычисление её радикала будут записаны всего в несколько строчек. Но при этом возникают другие проблемы: вычисления будут произведены в арифметике рациональных чисел (не вещественных). Это означает, что нельзя ввести насчитанные заранее матрицы. Нужно непосредственно в программе на языке GAP задать исходные данные с точностью до трёх (например) значащих цифр и трактовать их как дробные числа; затем в этой же программе выполнить формирование матриц, соответствующих исследуемой системе, т.е. избежать громоздких вычислений всё равно не удастся. Выявление систем, близких к приводимым, таким способом невозможно. Тем не менее такой принципиально новый подход представляет интерес.

2. Можно решить неоднородную систему уравнений с помощью программы нахождения общего решения однородной системы (SLAU5 или аналогичной). Для этого вместо системы уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  составляем систему уравнений

$$A_p \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $A_p$  — расширенная матрица коэффициентов, т. е. такая, что к матрице коэффициентов  $A$  справа присоединён вектор свободных членов  $\mathbf{b}$ ;  $\mathbf{y}$  — вектор, имеющий размерность на единицу большую, чем вектор  $\mathbf{x}$ . Новая система эквивалентна предыдущей в случае, когда последний элемент вектора  $\mathbf{y}$  равен минус единице:  $y_{m+1} = -1$ . Поэтому, получив базис во множестве решений системы (1), выбираем такой вектор базиса, у которо-

го  $y_{m+1} \neq 0$ , и умножаем этот вектор на такое число, при котором последний элемент станет равным минус единице. Предыдущие  $m$  элементов вектора  $\mathbf{y}$  превратятся в частное решение исходной системы уравнений, т. е. вектор  $\mathbf{x}$ . Если среди векторов базиса нет такого, что  $y_{m+1} \neq 0$ , то неоднородная система не имеет решения.

Общее решение неоднородной системы уравнений, как известно, равняется сумме частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений.

В традиционном случае, когда матрица  $A$  квадратная и невырожденная, при решении уравнений (1) будет получен один вектор базиса, и условие  $y_{m+1} \neq 0$  будет выполнено. Умножив вектор базиса на число  $-1/y_{m+1}$ , получим вектор с решением исходной системы уравнений. Таким образом, программа, предназначенная для работы с большой разреженной системой уравнений при решении задач декомпозиции, может использоваться и для других задач, например, для применения метода конечных элементов. Основные достоинства исходной программы сохраняются.

Для нахождения базиса подпространства, являющегося ортогональным дополнением к данному подпространству, нужно расположить в строках массива  $A$  векторы базиса исходного подпространства (либо такие векторы, что исходное подпространство является их линейной оболочкой). Затем — обратиться к программе нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Базисом искомого подпространства будет полученное общее решение системы уравнений. Действительно, запись  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  означает, что скалярное произведение любой строки на вектор  $\mathbf{x}$  равняется нулю, т.е. вектор — столбец, составленный из элементов строки матрицы, ортогонален вектору  $\mathbf{x}$ . Общее решение — это и есть все те векторы, которые ортогональны всем строкам матрицы одновременно.

## Выводы

Поставленные задачи решены.

Дальнейшее развитие работ по декомпозиции целесообразно вести по следующим направлениям:

- выявление систем, близких к таким, для которых иерархическая декомпозиция возможна;
- обобщение метода приведения матриц к блочно-треугольному виду на системы уравнений, содержащие прямоугольные матрицы;
- практическое применение методов декомпозиции для новых прикладных задач.

### **Библиографические ссылки**

1. **Базилевич, Ю. Н.** Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики [Текст] / Ю. Н. Базилевич. — К.: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. **Базилевич, Ю. Н.** Точная декомпозиция линейных систем [Электронный ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Исследовано в России. — Режим доступа: <http://www.sci-journal.ru/articles/2006/018.pdf>.
3. **Уилкинсон, Дж. Х.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра [Текст] / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.
4. **Базилевич, Ю. Н.** Решение задачи иерархической декомпозиции линейных математических моделей механических систем [Текст] / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Техн механика. — 2003. — №1. — С. 135 — 140.
5. Сайт Украинской группы пользователей GAP [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.gap-system.org/ukrgap/>

*Надійшла до редколегії 09.06.2015*

УДК 512

**В. Я. <sup>2</sup>Бурдюк**

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

### **РАЦИОНАЛЬНІ ГРУПИ ЯК ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ**

**Досліджено векторні простори, де раціональні числа є скалярами, а раціональні групи – основами простору.**

**Дано введение в теорию векторных пространств, где скалярами есть рациональные числа, а векторами – элементы рациональных групп.**

**This is an introduction to the theory of vector spaces with only rational numbers as scalars and only elements of rational groups as vectors.**

**Ключові слова: раціональна група, векторний простір, скаляри.**

**Вступ.** Теорія векторних (лінійних) просторів є досить розвинена і її вивчають студенти [1], [2]. Але існує багато версій цієї теорії [3]. За версією Г. Біркхофа [4], кожне поле  $G$ , яке є розширенням поля  $F$ , можна розглядати як векторний простір над полем  $F$ , тобто брати абелеву групу поля  $G$  і так визначати множення скалярів – елементів поля  $F$  на елементи цієї абелевої групи, щоб виконувались класичні аксіоми векторного

простору. У цій версії скаляри є одночасно елементами групи із поля  $G$ , адже  $F \subseteq G$ , а тому відмінність скалярів від елементів групи не є прозора. А чи можна скаляри і вектори суттєво розвести по різні боки абстрагування у разі означення векторного простору? Д. Райков [5] дає позитивну відповідь; ми ж обираємо скалярами лише раціональні числа, а векторами – елементи абстрактних раціональних груп.

**Постановка задачі.** *Абелева група*  $G$ , в якій визначено множення раціональних чисел на її елементи, але за законами чисел, є *раціональною групою*  $G_{rat}$ . Абелева група – це множина  $G$ , на елементах  $a, b, c, \dots$  якої визначені: бінарна дія додавання одинарна дія переорієнтації елементів  $a \in G$  на протилежні  $-a$ , нульарна дія фіксації *нуля*  $0. \in G$ , причому  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $a + b = b + a$ ,  $a + 0. = a$ ,  $a + (-a) = 0.$ . Говорять ще й про дію віднімання  $a - b = a + (-b)$ , за якою  $a - a = 0.$ . Визначаємо *раціональну групу*  $G_{rat}$ , визначивши в абелевій групі три дії:

1) *множення цілих* чисел на її елементи:  $0a = 0.$ ;  $\forall n \geq 0$   $(-n)a = n(-a) = -na$ ; тож  $1a = a$ ,  $(-1)a = -1a = -a$ ,  $2a = a + a$ ,  $3a = 2a + a, \dots$ ;

2) *ділення* її елементів на  $n \geq 2$  однакових частин:

$\forall a \forall n \geq 2 \exists b$  ( $a = nb$ ), тож говоримо про *поділ* елемента  $a$  на  $n \geq 2$  однакових частин  $b$ , тобто  $b = a/n = \frac{1}{n}a$ , а щоб уникнути можливість поділу нуля  $0. \in G$  на  $n \geq 2$  однакових ненульових частин  $b$ , визначаємо:  $n \geq 2 \wedge nb = 0. \Rightarrow b = 0.$ ;

3) *множення* раціональних чисел на її елементи:  $(\frac{m}{n}a = m(\frac{1}{n}a) \wedge (-\frac{m}{n})a = -m(\frac{1}{n}a))$ .

Між іншим, *групою без скруту* називають абелеву групу  $G$ , для якої виконується  $n \geq 0 \wedge nb = 0. \Rightarrow n = 0 \vee b = 0.$ , тож група  $G_{rat}$  є групою без скруту. Для груп без скруту виконується  $n > 0 \wedge b \neq 0. \Rightarrow nb \neq 0.$ , а тому додаванням  $b + \dots + b$  ненульовий елемент  $b$  не «скручується» в нуль групи, а багатоелементні групи без скруту є нескінченні.

**Задача.** Дослідити векторні простори, де раціональні числа є скалярами, а раціональні групи – остовами простору.

**Метод розв’язання**

**1. Деякі властивості раціональних груп.**

**Лема 1.** Для  $n, m \geq 0$  та  $a \in G_{rat}$  виконується: 1)  $(n+m)a = na + ma$ ;  
2)  $n(ma) = (nm)a$ .

**Доведення.** Проведемо індукцію по параметру  $n$ . Для  $n = 0$  лема очевидна. Нехай 1) та 2) виконуються.

Тоді:  $((n+1)+m)a = ((n+m)+1)a =$   
 $= (n+m)a + a = na + ma + a = (na + a) + ma = (n+1)a + ma$ , тож 1) виконується; аналогічно,  $(n+1)(ma) = n(ma) + ma = (nm)a + ma =$   
 $= (nm + m)a = ((n+1)m)a$ , тож 2) виконується. !!!

**Лема 2.** Якщо  $a, b, c, d \in G_{rat}$ , то: 1)  $n(a+b) = na + nb$  для  $n \geq 0$ ; 2)  $nc = nd \Rightarrow c = d$  для  $n \geq 2$ .

**Доведення.** Проведемо індукцію по параметру  $n$ . Для  $n = 0$  формула 1) є очевидна; припустивши, що вона взагалі виконується, отримаємо:

$(n+1)(a+b) = n(a+b) + (a+b) = na + nb + a + b =$   
 $= (na + a) + (nb + b) = (n+1)a + (n+1)b$ , тож формула 1) виконується.

Нехай тепер  $nc = nd$ , а отже,  $0 = nc - nd = nc + n(-d) =$   
 $= n(c + (-d)) = n(c - d)$ . Але ж  $n \geq 2$ , а тому  $c - d = 0$ , тож  $c = d$ . !!!

**Лема 3.** Якщо  $n, m \geq 2$  та  $a, b \in G_{rat}$ , то: 1)  $(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})a = \frac{1}{n}a + \frac{1}{m}a$ ;  
2)  $\frac{1}{n}(\frac{1}{m}a) = (\frac{1}{n} \frac{1}{m})a$ ; 3)  $\frac{1}{n}(a+b) = \frac{1}{n}a + \frac{1}{n}b$ .

**Доведення:** 1) Маємо  $(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})a = ((n+m)\frac{1}{nm})a = (n+m)(\frac{1}{nm}a) =$   
 $n(\frac{1}{nm}a) + m(\frac{1}{nm}a) = (n\frac{1}{nm})a + (m\frac{1}{nm})a = \frac{1}{m}a + \frac{1}{n}a = \frac{1}{n}a + \frac{1}{m}a$ .

2) Нехай  $\frac{1}{m}a = b$ ,  $\frac{1}{n}b = c$ , тож  $c = \frac{1}{n}(\frac{1}{m}a)$ . Тоді  $a = mb$ ,  $b = nc$  і тому  $a = m(nc) = (mn)c$ , а також  $c = \frac{1}{mn}a = (\frac{1}{n} \frac{1}{m})a$ . Отже, маємо формулу 2).

3) Нехай  $c = \frac{1}{n}(a+b)$ ,  $c_1 = \frac{1}{n}a$ ,  $c_2 = \frac{1}{n}b$ . Тоді  $a+b = nc$ ,  $a = nc_1$ ,  $b = nc_2$ , а тому  $nc = a+b = nc_1 + nc_2 = n(c_1 + c_2) = n(\frac{1}{n}a + \frac{1}{n}b)$ . Звідси, скориставшись формулою 2) із леми 2, отримуємо  $c = \frac{1}{n}a + \frac{1}{n}b$ . !!!

Із лем 1, 2 та 3 безпосередньо випливає, що множення раціональних чисел на елементи групи  $G_{rat}$  відбувається за законами чисел.

**Теорема 1.** Для раціональних  $p, q$  та  $a, b \in G_{rat}$  виконується:

1)  $(p+q)a = pa + qa$ ; 2)  $p(qa) = (pq)a$ ; 3)  $p(a+b) = pa + pb$ .

## 2. Означення простору $V_{rat}$ .

У векторних просторах  $V$  взагалі визначають асоціативне та комутативне додавання векторів (елементів простору), а також множення скалярів (чисел) на вектори для утворення векторів. *Раціональний векторний простір  $V_{rat}$*  – це група  $G_{rat}$ , тож кожен елемент групи є вектором простору, а інших векторів простір  $V_{rat}$  не має, так що нуль групи є *нуль-вектором* простору; скалярами у просторі  $V_{rat}$  можуть бути лише раціональні числа. Простір  $V_{rat}$ , що має лише нуль-вектор, називаємо 0-простором. Якщо векторами простору  $V_{rat}$  є лише  $qb$  для деякого ненульового елемента  $b \in G_{rat}$  та всіх раціональних  $q$ , то  $V_{rat}$  називаємо 1-простором. Якщо для векторів  $b, e_1, \dots, e_m$  простору  $V_{rat}$  виконується  $b = q_1e_1 + \dots + q_me_m$ , то говорять, що вектор  $b$  є *лінійно залежний* від векторів  $e_1, \dots, e_m$  і що вектор  $b$  є *лінійною комбінацією* векторів  $e_1, \dots, e_m$ . Багатовекторну підмножину  $A \subset V_{rat}$  таку, що для кожних двох або більше її векторів  $e_1, \dots, e_m$  виконується формула

$$q_1e_1 + \dots + q_me_m = 0 \Rightarrow q_1 = \dots = q_m = 0, \quad (1)$$

називаємо *незалежною системою векторів*. Зрозуміло, що: 1) у жодному 1-просторі не існує незалежних систем векторів; 2) кожна багатовекторна підсистема незалежної системи векторів є незалежною системою, а нуль-вектор не може входити до складу незалежної системи; 3) жоден вектор із незалежної системи не є лінійно залежний від решти її векторів.

**Теорема 2.** Для кожної існуючої у просторі  $V_{rat}$  незалежної системи  $A$  система  $qA = \{q_i e_i : e_i \in A \wedge q_i \neq 0\}$  існує та є незалежна.

**Доведення.** Якби вектор  $q_s e_s \in qA$  виявився лінійно залежним від деяких векторів із  $qA - \{q_s e_s\}$ , а саме  $q_s e_s = p_1 q_1 e_1 + \dots + p_m q_m e_m$ , де  $p_1 \neq 0, \dots, p_m \neq 0$ , то ми б мали  $p_1 q_1 e_1 + \dots + p_m q_m e_m - q_s e_s = 0$ . Звідси, за формулою (1), отримали б  $p_1 q_1 = \dots = p_m q_m = -q_s = 0$ , що не відповідає дійсності, адже  $q_s \neq 0$ . !!!

Множину всіх лінійних комбінацій векторів із множини  $D \subseteq V_{rat}$  позначимо  $[D]$  і отримаємо  $[D] = D$  у випадках  $D = \emptyset$ ,  $D = \{0\}$  та  $D = V_{rat}$ , а взагалі  $D \subseteq [D]$  та  $A \subseteq [D] \Rightarrow [A] \subseteq [D]$  (аксіоми с1 та с4 операції замикання [6]), тож у просторі  $V_{rat}$  маємо операцію замикання  $D \rightarrow [D]$ . Якщо  $D \neq \emptyset$ , то, за означенням,  $[D]$  є лінійна оболонка генома  $D$ ; мінімальний (за включенням) геном – це базис для  $[D]$ .

**3. Базис векторного простору  $V_{rat}$**  – це базис  $B$  для  $[V_{rat}]$ , тож для 0-простору базисом є  $\{0\}$ , для 1-простору базисом є кожна його одновекторна підмножина  $\{v\}$ , окрім  $\{0\}$ ; для всіх інших просторів  $V_{rat}$  їх базиси  $B$  є багатовекторні і жоден із векторів базису  $B$  не є лінійно залежний від решти векторів цього ж базису  $B$ .

**Теорема 3.** Такі два твердження щодо багатовекторної підмножини  $B$  простору  $V_{rat}$  є логічно еквівалентні:

- 1)  $B$  – це максимальна (за включенням) незалежна система векторів;
- 2)  $B$  – це базис простору  $V_{rat}$ .

**Доведення.** Нехай виконується 1), а отже, кожен вектор  $v \in V_{rat}$  або є вектором із системи  $B$ , або – ні, але тоді система  $B \cup \{v\}$  не є незалежна, а тому вектор  $v$  повинен бути лінійною комбінацією деяких векторів із системи  $B$ , тож маємо 2). Навпаки, нехай виконується 2), а отже,  $B$  – це така мінімальна за включенням система, що кожен вектор  $v \in V_{rat}$  є

лінійною комбінацією деяких векторів із цієї системи, але жоден вектор із цієї системи не є лінійною комбінацією інших векторів із цієї системи, тож  $B$  – незалежна система векторів, а її максимальність за включенням випливає з того, що кожен вектор із системи  $V_{rat} - B$  є лінійною комбінацією деяких векторів із цієї ж системи, а тому маємо 1). !!!

**Теорема 4.** Якщо один із базисів простору  $V_{rat}$  є скінченний, то всі базиси цього простору мають однакову кількість векторів.

**Доведення.** Теорема очевидна для 0\_простору та 1\_простору. Нехай  $B$  та  $C$  – базиси будь\_якого іншого простору  $V_{rat}$ , а  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  – найменший за кількістю  $m \geq 2$  векторів. Тоді існує вектор  $c_1 \in C$ , який не є вектором із  $B$ , але для якого виконується

$$c_1 = p_1 b_1 + \dots + p_m b_m, \quad (2)$$

де не всі числа  $p_i$  є нулі, адже  $c_1$  не є нуль\_вектор. Якби ще  $c_1 = q_1 b_1 + \dots + q_m b_m$ , то мали б  $0 = c_1 - c_1 = (q_1 - p_1) b_1 + \dots + (q_m - p_m) b_m$ . Звідси та з того, що, за теоремою 3, система  $B$  є незалежна, отримали б  $q_j - p_j = 0$  для всіх  $j$ , тож для вектора  $c_1$  існує лише одна лінійна комбінація (2). Як вже було сказано, у формулі (2) не всі числа  $p_i$  є нулі; скажімо,  $p_1 \neq 0$ , а тому із формули (2) отримуємо спочатку

$$p_1 b_1 = c_1 - p_2 b_2 - \dots - p_m b_m, \quad \text{потім}$$

$b_1 = (1/p_1) c_1 - (p_2/p_1) b_2 - \dots - (p_m/p_1) b_m$ , адже має місце теорема 1. Звідси та з теореми 1 випливає, що будь\_яка лінійна комбінація векторів із базису  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  стає лінійною комбінацією векторів із системи  $B_1 = \{c_1, b_2, \dots, b_m\}$ , яка складається із  $m \geq 2$  векторів, а тому  $B_1$  – базис простору  $V_{rat}$ . ВзЯвши вектор  $c_2 \in C - \{c_1\}$ , аналогічним чином побудуємо у просторі  $V_{rat}$  базис  $B_2 = \{c_1, c_2, b_3, \dots, b_m\}$ . Зупинимось на базисі  $B_m = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  Отже,  $B_m \subseteq C$ . Але ж строгого включення  $B_m \subset C$  не може бути за означенням, а тому  $B_m = C$ . Таким чином, якщо один із базисів простору  $V_{rat}$  є скінченний, то всі базиси цього простору є скінченні і мають однакову кількість векторів. !!!

Якщо у просторі  $V_{rat}$  існує максимальна за включенням незалежна система із  $m \geq 2$  векторів  $e_1, \dots, e_m$ , то  $V_{rat}$  називаємо  $m$ -простором, адже всі його базиси є, за теоремами 3 та 4,  $m$ -векторними. Якщо  $V_{rat}$  не є  $m$ -простором для жодного  $m \geq 0$ , то  $V_{rat}$  називаємо  $\infty$ -простором. Для довільного простору  $V_{rat}$  визначимо його розмір  $\dim V_{rat}$ , а саме  $\dim V_{rat} = m$  для  $m$ -простору у випадку  $m > 0$ ; але  $\dim V_{rat} = 0$  для 0-простору та  $\dim V_{rat} = \infty$  – для  $\infty$ -простору.

**Аналіз одержаних результатів.** Отже, маємо раціональний векторний простір  $V_{rat}$  як раціональну групу  $G_{rat}$ , в якій визначено множення раціональних чисел на її елементи – вектори простору  $V_{rat}$ . Теорема 1 – 4 демонструють продуктивність такого підходу, а теорема 1 ще й показує напрямок переходу до класичних результатів. Важливо, основну роль відіграє група  $G_{rat}$ , а поле раціональних чисел є допоміжний, але природний інструмент у просторі  $V_{rat}$ .

**Висновки.** Перехід від одержаних результатів до класичних полягає:

- а) у відмові від групи  $G_{rat}$  на користь довільної абелевої групи  $G$ ;
- б) заміні раціональних скалярів на елементи довільного поля;
- в) прийнятті тверджень 1) – 3) теореми 1 як аксіом;
- г) введенні аксіоми унітарності:  $\forall a \in G (1a = a)$ .

У разі такого переходу мають місце як переваги (більша загальність), так і недоліки (можливість поділу нуля – вектора на декілька однакових ненульових векторів).

#### Бібліографічні посилання

1. **Ильин, В. А.** Линейная алгебра [Текст] / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. **Кострикин, А. И.** Линейная алгебра и геометрия [Текст] / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
3. **Общая алгебра** [Текст]: в 2 т. / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – Т.1. – 592 с.
4. **Биркгоф, Г.** Современная прикладная алгебра [Текст] / Г. Биркгоф, Т. Барти. – М.: Мир, 1976. – 400 с.

5. Райков, Д. А. Векторные пространства [Текст] / Д. А. Райков. – М.: Физматгиз, 1962. – 212 с.

6. Бурдюк, В. Я. Абстрактні множини (системний аналіз): монографія [Текст] / В. Я. Бурдюк. – Д.: Ліра, 2012. – 160 с.

*Надійшла до редколегії 15.04.2015*

УДК 519.63: 519.71

**Л. В. Волошко, В. Л. Волошко**

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

## **ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ**

Розглянуто задачу знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Пряму задачу досліджено в просторі Соболева. Ефективність побудованого алгоритму підтверджено точністю отриманих чисельних результатів.

Рассмотрена задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения. Прямая задача была исследована в пространстве Соболева. Эффективность построенного алгоритма подтверждена точностью полученных численных результатов.

Problem of optimal right-hand side function finding for inhomogeneous biharmonic equation has been considered. Forward problem has been investigated in Sobolev spaces. The effectiveness of constructed algorithm was confirmed by accuracy of obtained calculations.

**Ключові слова:** бігармонічне рівняння, узагальнена функція, градієнтний метод, оптимальне керування

### **Вступ**

У процесі побудови математичних моделей технічного процесу є практична необхідність визначення базових параметрів, що характеризують цей процес, та подальшого знаходження їх оптимального значення. Такі задачі розглядають у галузі теорії керування та обернених задач. Бігармо-

нічне рівняння є одним з основних об'єктів математичної фізики, крайові задачі якої часто розглядаються як диференціальні зв'язки в задачах оптимального керування. Проведений аналіз літературних джерел [2; 5] показав, що задача оптимального керування параметрами крайової задачі бігармонічного рівняння з метою отримати заданий стан є достатньо актуальною. Її розв'язок може бути застосований до створення систем із заданою поведінкою або за їх ідентифікації.

### Постановка і розв'язання прямої задачі

Розглянемо таку задачу. Знайти таку функцію  $w(x, y)$ , яка б задовольняла неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

та крайові умови

$$w = \Phi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

в області  $\Omega \in R^2$ , оточеній ліпшицевим контуром  $\Gamma$ .

Така задача є добре досліджена для гладких функцій у відповідній області визначення [5]. Далі її досліджуємо у просторі Соболева  $W^{k,p}$ . Це означає, що функцію розв'язку  $w(x, y)$  і функцію правої частини  $f(x, y)$  розглядають як узагальнені, а функції крайових умов  $\Phi(x, y)$  і  $\Psi(x, y)$  – як сліди функції  $w(x, y)$  на межі  $\Gamma$ . Як відомо, для  $p = 2$ , простір Соболева  $W^{k,2}$  збігається з гільбертовим простором  $H^k$ . Поклавши функцію розв'язку  $w(x, y)$  з простору  $H^2(\Omega)$ , відповідно до теорем про вкладення просторів Соболева та теорем про сліди, отримаємо таку належність класам:

$$f(x, y) \in H^{-2}(\Omega), \quad \Phi(x, y) \in H^{3/2}(\Gamma), \quad \Psi(x, y) \in H^{1/2}(\Gamma),$$

де  $H^{-2}(\Omega)$  – простір, спряжений до простору  $H_0^2(\Omega)$ . Таку постановку задачі називають слабкою.

Покажемо існування і єдиність розв'язку цієї задачі [1]. Нехай функція  $Q(x, y) \in H^2(\Omega)$  така, що її сліди на межі збігаються з крайовими умовами, тобто  $T(Q(x, y)) = \Phi(x, y)$ ,  $T\left(\frac{Q(x, y)}{dn}\right) = \Psi(x, y)$ . Тоді, за лемою Лакса-Мільграма, існує єдина функція  $z(x, y) \in H_0^2(\Omega)$ , яка задовольняє відповідну задачу з однорідними крайовими умовами

$$\Delta z(x, y) = f(x, y) - Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$T(w) = 0, \quad T\left(\frac{dw}{dn}\right) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Таким чином, згідно з властивостями слідів

$$T(w) = T(z) + T(Q) = 0 + \Phi(x, y) = \Phi(x, y),$$

$$T\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) = T\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right) + T\left(\frac{\partial Q}{\partial n}\right) = 0 + \Psi(x, y) = \Psi(x, y)$$

та леми Лакса-Мільграма існує і єдиний слабкий розв'язок  $w(x, y) \in H^2(\Omega)$ , такий що  $w(x, y) = z(x, y) + Q(x, y)$ .

У результаті застосування методу потенціалу отримано розв'язок прямої задачі (1) – (2) в такому вигляді [4]:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^1(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta) \right) \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^1(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_{\Gamma} \left( K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta) \right) \times$$

$$\times \left( \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \\ \psi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) d\Gamma(\xi, \eta), \quad (x, y) \in \Omega,$$

де  $K^1(x, y; \xi, \eta) = r^2(x, y; \xi, \eta) \ln r(x, y; \xi, \eta)$ ;  $K^2(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial K^1}{\partial \nu}$  – ядра бігармонічних потенціалів;  $r(x, y; \xi, \eta) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ;  $\tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \xi, \eta)$  – обернений оператор системи інтегральних рівнянь, до якої зводиться задача (1) – (2);  $w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^1(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \times \times f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y})$  – частинний розв’язок рівняння (1).

### Постановка і розв’язання задачі керування

Очевидно, що розв’язок задачі (1) – (2) залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. У припущенні, що функції  $\Phi(x, y) \in H^{3/2}(\Omega)$  і  $\Psi(x, y) \in H^{1/2}(\Omega)$  задані, поставимо задачу знаходження таких функцій:  $w(x, y) \in H^2(\Omega)$  і  $f(x, y) \in H^{-2}(\Omega)$ , які доставляють мінімум функціоналу

$$I(w(\cdot; \cdot), f(\cdot; \cdot)) = \iint_{\Omega} (w(x, y) - w_{fixed}(x, y))^2 dx dy. \quad (3)$$

Його більш детально можна записати так:

$$I(w(\cdot; \cdot), f(\cdot; \cdot)) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^1(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \iint_{\Gamma} (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \xi, \eta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \begin{pmatrix} \Phi(\xi, \eta) - \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^1(\xi, \eta; \tilde{x}, \tilde{y}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \Psi(\xi, \eta) - \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} K^3(\xi, \eta; \tilde{x}, \tilde{y}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \right) \right. \\ \left. - w_{fixed}(x, y) \right] dx dy.$$

Множину допустимих розв’язків задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння було отримано таким чином:

$$B = \left\{ (w, f) \left| \begin{array}{l} w(x, y) \in H^2(\Omega), \Delta \Delta w(x, y) = f(x, y) \in H^{-2}(\Omega) \\ T(w(x, y)) = \Phi(x, y) \in H^{3/2}(\Gamma) \\ T\left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial n}\right) = \Psi(x, y) \in H^{1/2}(\Gamma) \\ I(w(\cdot;), f(\cdot;)) < +\infty \end{array} \right. \right\}.$$

Тобто множина  $B$  містить такі пари функцій  $w(x, y)$  і  $f(x, y)$ , які задовольняють слабку постановку задачі (1) – (2) і для яких функціонал (3) є обмежений. Тоді скорочено задачу запишемо у такий спосіб:

$$I(w(\cdot;), f(\cdot;)) \rightarrow \min_{(f, w) \in B}. \quad (4)$$

Якщо в функціоналі (3)  $w(x, y) \in H^2(\Omega)$ ,  $f(x, y) \in H^{-2}(\Omega)$ ,  $\Phi(x, y) \in H^{3/2}(\Gamma)$ ,  $\Psi(x, y) \in H^{1/2}(\Gamma)$ , то цей функціонал є опуклий і для нього існує похідна Фреше. На множині  $B$  його визначення існує єдиний мінімум, який досягається за  $(w^*(x, y), f^*(x, y)) \in P$ , тобто  $I(w^*, f^*) = \min_{(w, f) \in B} I(w, f)$ , де  $w^*(x, y)$  – розв’язок задачі (1) – (2) за  $f^*(x, y)$ . Похідна Фреше функціоналу якості (3) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(w, f)}{\partial f} = & \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left( w(x, y) - w_{fixed}(x, y) \right) \left( \iint_{\Omega} K^1(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) - \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \\ & \left. \times \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \xi, \eta) \cdot \left( \iint_{\Omega} K^1(\xi, \eta; \tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) \right. \\ & \left. \left. \iint_{\Omega} K^3(\xi, \eta; \tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) d\Gamma(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Алгоритм розв’язування задачі (1) – (2), (4) побудований на основі градієнтного методу з дробленням кроку [3, 4]. Цей метод передбачає визначення похідної Фреше в кожній точці  $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \in \Omega$ :

$$\frac{\partial I(w, f)}{\partial f} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[ (w(x, y) - w_{fixed}(x, y)) \cdot (K^1(x, y; \tilde{x}^*, \tilde{y}^*) - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \\ \left. \times \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \xi, \eta) \cdot \left( K^1(\xi, \eta; \tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \right) d\Gamma(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right] dx dy.$$

Таким чином, для розв'язування задачі (1) – (2), (4) побудовано ітераційний процес, на кожному кроці якого розв'язується пряма задача (1) – (2).

### Модельна задача

Для перевірки достовірності роботи описаного вище алгоритму складемо таку модельну задачу. Розглянемо множину функцій

$$w(x, y) = (\lambda^2 + 1) \cdot (1 - (x^2 + y^2))^2 + (1 - (x^2 + y^2)), \quad \lambda \in [0; 1] \quad (16)$$

в області  $\Omega$ , яка обмежена контуром  $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ . Тоді модельна задача матиме такий вигляд:

$$\Delta \Delta w = 64(\lambda^2 + 1) \equiv f(\lambda), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$w(x, y) = \Phi(x, y) \equiv 0,$$

$$\frac{dw(x, y)}{dn} = \Psi(x, y) = 2, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$I(w, f(\lambda)) \rightarrow \min_{\lambda \in [0; 1]},$$

де  $I(w, f(\lambda)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; \lambda) dx dy$ . Якщо покладемо  $w_{fixed}(x, y) \equiv 0$  і візьмемо за початкове наближення праву частину бігармонічного рівняння модельної задачі за  $\lambda^{(0)} \neq 0$ , то маємо отримати послідовності, які б збігалися до точного розв'язку, тобто  $\lambda^{(k)} \rightarrow 0$ ,  $f^{(k)}(\lambda) \rightarrow 64$ ,  $I(f^{(k)}) \rightarrow 0$ .

Отримано таблицю з результатами обчислювального експерименту за різних початкових наближень та точності  $\varepsilon = 0.00001$ .

**Результати обчислювального експерименту для визначення оптимальної правої частини рівняння**

$\lambda^0$	Кількість ітерацій	Початкове $f^0(x, y)$	Наближене $f(x, y)$	Точне $f(x, y)$	Похибка $f(x, y)$	Початкове $I(w^0, f^0)$	Наближене $I(w, f)$	Точне $I(w, f)$	Похибка $I(w, f)$
0.2	15	66.56	65.98	64	-1.98	3.35	3.33	3.24	-0.09
0.3	17	69.76	65.98	64	-1.98	3.50	3.33	3.24	-0.09
0.5	22	90.00	65.98	64	-1.98	3.98	3.33	3.24	-0.09

Як і очікувалось, порівняння даних таблиці свідчить про те, що шукана функція і відповідний функціонал прямують до розв'язку, що є підтвердженням достовірності. Ітераційний процес збігається швидко на перших кроках, а потім різко сповільнюється.

**Висновок**

Таким чином, у роботі викладено спосіб розв'язування задачі оптимального керування правою частиною рівняння та модельна задача для перевірки достовірності отриманих результатів. Для розв'язування прямої задачі було застосовано метод потенціалу. Для задачі оптимального керування – градієнтний метод, на кожній ітерації якого розв'язувалась пряма задача. Практична програмна реалізація та порівняння результатів модельної задачі свідчать про ефективність застосування цього підходу для розв'язування задач оптимального керування правою частиною рівнянь еліптичного типу.

**Бібліографічні посилання**

1. **Buttazzo, G.** Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems [Text] / G. Buttazzo, P. I. Kogut // Revista Matematica Complutense . — 2011. — Vol. 24. — P. 83–94.
2. **Tiba, D.** Optimal Control Methods and the Variational Approach to Differential Equations, [Text] / D. Tiba // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of IMECS 2013. — 2013. — P. 127–132.
3. **Волошко, Л.В.** Розв'язування задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння [Текст] / Л.В. Волошко // Вісник За-

порізького національного університету, серія «Фізико-математичні науки». — 2014. — № 1. — С. 4—14.

4. **Киселева, Е.М.** Решение задачи оптимального граничного управления для неоднородного бигармонического уравнения [Текст] / Е.М. Киселева, Л.В. Волошко // Проблемы управления и информатики. — 2014. — №4. — С. 58–68.

5. **Когут, О.П.** Оптимізація в еліптичних крайових задачах [Текст] / О.П. Когут, П.І. Когут, О.А. Рядно. — Дніпропетровськ : ДДФА, 2010. — 238с.

6. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 736с.

*Надійшла до редколегії 06.05.2015*

УДК 519.7

**О. А. 4Галкін**

*Київський національний університет ім. Тараса Шевченка*

## **ПРОЦЕС РОЗПІЗНАВАННЯ НА ОСНОВІ ЯДЕРНИХ ОЦІНОК ЩІЛЬНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОЖИНИ ОПТИМАЛЬНИХ МІР ЗГЛАДЖУВАННЯ**

Запропоновано комплексний метод для розв'язання задач розпізнавання образів, що ґрунтується на використанні множини оптимальних мір згладжування для кожної оцінки щільності класу. Для доведення ефективності використання різних конкуруючих доменів застосовано міру типу  $p$ -значення з апостеріорною ймовірністю. Для забезпечення гнучкості у проблемі залежності смуг пропускання від характерних спостережень вдавалися до залежних від даних скоригованих вагових функцій.

Предложен комплексный метод для решения задач распознавания образов, основанный на использовании множества оптимальных мер сглаживания для каждой оценки плотности класса. Для доказательства эффективности применения различных конкурирующих доменов использовали меру типа  $p$ -значения с апостериорной вероятностью. Для обеспечения гибкости в проблеме зависимости полос пропускания от характерных наблюдений использовали зависимые от данных скорректированные весовые функции.

In the article there have been proposed a complex method for solving problems of pattern recognition based on the use of multiple measures of optimal smoothing

for each class density estimation. Measure of p-values type is used with the posterior probability for proving the effectiveness of the use of various competing domains. Depending on the data corrected weighting functions are used for providing flexibility in the problem of dependence of bandwidths on specific observations.

**Ключові слова:** міра згладжування, ядерна оцінка щільності, смуга пропускання.

**Вступ.** Ефективність класифікатора на основі ядерних оцінок щільності вирішальною мірою залежить від значень параметрів смуги пропускання. Існуючі методи вибору смуги пропускання, метою яких є мінімізація середньоквадратичних інтегрованих помилок для оцінки щільності не є достатньо ефективні для задач розпізнавання образів, а отже, можуть призводити до низьких показників помилкової класифікації. З іншого боку, відомий метод  $\gamma$ -кратної перехресної перевірки та інші подібні методи вибору смуги пропускання в непараметричних задачах класифікації є не достатньо ефективні через кусково-постійну природу оцінених імовірнісних функцій помилкової класифікації з нескінченною множиною мінімумів.

Більшість таких методів на основі перехресної перевірки потребують значних обчислень, коли є декілька конкуруючих класів. Двома іншими важливими чинниками використання ядерних оцінок щільності є такі:

- вибір смуг пропускання повинен залежати від характерного спостереження, що необхідно класифікувати. Крім того, слід враховувати залежність від щільності доменів; у разі класифікації характерного спостереження треба оцінювати переваги того чи іншого домену для різних смуг пропускання в оцінках щільності відповідно до різних конкуруючих доменів;

- у багатокласовій задачі розпізнавання замість використання однієї смуги пропускання для кожної оцінки щільності домену більш ефективно є використання різних смуг пропускання для оцінки щільності класу у разі, коли її порівнювати з оцінками щільності для різних конкуруючих класів в класифікації характерного спостереження.

Замість вибору однієї оптимальної смуги пропускання для кожної оцінки щільності класу будемо розглядати сімейство оцінок щільності  $\{ \hat{f}_{H_l} : l \in H_l \}$  для кожного комплексу в широкому діапазоні смуг пропускання. Припускаємо, що за спільного розгляду різних рівнів згладжування можна отримати більше інформації, необхідної для класифікації, ніж отриманої за допомогою методів на основі однієї оптимальної смуги пропускання для кожної оцінки щільності класу.

**Постановка задачі.** В методах класифікації на основі ядерних оцінок щільності використовуватимемо ядерні оцінки невідомих щільностей популяцій  $f_{\mathcal{X}}(\cdot)$  ( $I \in \{1, 2, \dots, L\}$ ). Такі оцінки підключаються в байєсівське правило для побудови такого класифікатора:

$$d_{\mathcal{K}}(x) = \operatorname{argmax}_I pf_{I|S_I}^{\wedge}(x),$$

де  $p_I$  – апіорні ймовірності, а  $f_{\mathcal{X}_j}^{\wedge}(\cdot)$  – ядерні оцінки щільності відповідних класів. Якщо  $x_{112}, x_{11}, \dots, x_{ln_i}$  є  $d$ -вимірними спостереженнями в навчальній вибірці з  $I$ -го домену ( $I \in \{1, 2, \dots, L\}$ ), то ядерні оцінки щільності  $f_{\mathcal{X}_j}^{\wedge}(\cdot)$   $j$ -го домену будемо задавати як

$$f_{S_I}^{\wedge}(x) = n_I^{-1} S_I^{-d} \sum_{k=1}^{n_I} K_S \left\{ \frac{1}{S_I} (x_{ik} - x) \right\}$$

де  $K(\cdot)$  –  $d$ -вимірна функція щільності, а  $S_I > 0$  – параметр смуги пропускання [1].

Припустимо, що  $x_{112}, x_{11}, \dots, x_{ln_i}$  є навчальна вибірка спостережень  $I$ -го класу, де  $1 \leq I \leq L$ . Для класифікації спостереження  $x$  в один з  $L$  класів спочатку необхідно отримати оцінки щільності  $f_{\mathcal{X}_j}^{\wedge}(\cdot)$  в точці  $x$  для всіх  $1, 2, \dots, L$ . Перед обчисленням оцінки щільності класу необхідно нормалізувати дані в класі, застосовуючи оцінку дисперсійної матриці класу для того, щоб зробити дані більш сферичними за природою і тим самим зробити використання загальної смуги пропускання  $S_I$  для всіх координатних змінних більш виправданим. Оцінку щільності для вихідних векторів даних можна отримати з нормалізованих векторів даних, скориставшись простою формулою перетворення для ймовірнісної функції щільності, коли випадкові вектори проходять лінійне перетворення. Для даної пари конкуруючих класів, наприклад класу 1 та класу 2, та фіксованої пари смуг пропускання  $S_1$  та  $S_2$  для двох оцінок щільності класу існує порядок між функціями  $pf_{S_1}^{\wedge}(x)$  та  $pf_{S_2}^{\wedge}(x)$ , що визначає, який один з двох класів є більш ймовірний. Введемо тепер деякі міри для підтвердження доказів на користь одного чи іншого класу [2].

**Метод розв'язування.** У двокласовій задачі для заданого спостереження  $x$  та заданої пари смуг пропускання  $S_1$  та  $S_2$  апостеріорну ймовірність використання першого домену задамо як

$$P_{S_1|S_2} = P\left\{ \frac{pf_{1|S_1}(x)}{pf_{1|S_2}(x) + pf_{2|S_2}(x)} \right\}$$

Можна застосувати широкий спектр значень  $S_1$  та  $S_2$  для обчислення апостеріорних ймовірностей. У двокласовому ядерному дискримінантному аналізі спостереження  $x$  класифікується в домен 1, якщо  $pf_{1|S_2}(x) > pf_{2|S_2}(x)$ .

Для заданого спостереження  $x$  розглянемо таку ймовірність:

$$P_{S_1|S_2}(x) = P\left\{ \frac{pf_{1|S_1}(x)}{pf_{1|S_2}(x) + pf_{2|S_2}(x)} \right\}$$

Зрозуміло, що великі та малі значення цієї ймовірності дають розв'язки на користь першого та другого доменів відповідно. Для фіксованих  $S_1$  та  $S_2$ , оскільки оцінки щільності є середніми значеннями незалежних однаково розподілених випадкових величин, а оцінки щільності для різних популяцій ґрунтуються на незалежних множинах доменів, ми можемо використовувати нормальне наближення для оцінки вказаної ймовірності з великим ступенем точності навіть для дуже великих розмірів навчальної вибірки. Використовуючи таке нормальне наближення з оціненими середніми значеннями та дисперсіями, ми отримуємо таку ймовірність:

$$P_{S_1|S_2}(x) = \Phi \left( \frac{pE[f_{1|S_2}(x)|x] - pE[f_{2|S_2}(x)|x]}{\sqrt{p^2 Var[f_{1|S_2}(x)|x] + p^2 Var[f_{2|S_2}(x)|x]}} \right) = \Phi \left( \frac{pf_{1|S_1}(x) - pf_{2|S_2}(x)}{\sqrt{p^2_{S_1}(x) + p^2_{S_2}(x)}} \right)$$

де  $\Phi$  – стандартна функція нормального розподілу;  $n_1$  та  $n_2$  – розміри навчальної вибірки для двох класів, а  $\hat{s}_{S_i}^2(x)$  – оцінена дисперсія  $\hat{f}_{S_i}(x)$  ( $i = 1, 2$ ), отримана з навчальної вибірки з використанням вибіркової дисперсії від  $S_1^{-d} KS\{x_{i1} - x\}$ ,  $S_1^{-d} KS\{x_{i2} - x\}, \dots, S_1^{-d} KS\{x_{in_1} - x\}$ .

Альтернативну інтерпретацію нормального наближення  $P_{S_1|S_2}(x)$  можна задати наступним чином. Для заданого спостереження  $x$  та пари смуг пропускання  $S_1$  та  $S_2$  скористаємося парою гіпотез  $H_0 : pEf\{f_{1|S_2}(x)\} \geq pEf\{f_{2|S_2}(x)\}$  та  $H_A : pEf\{f_{1|S_2}(x)\} < pEf\{f_{2|S_2}(x)\}$ . Якщо взяти навчальну вибірку для тестування даних гіпотез з використанням

ядерних оцінок щільності і розглядати їх як статистики, тобто вибіркові середні значення використовувати в двовибіркових задачах, то нормальне наближення можна прийняти як одностороннє  $p$ -значення, пов'язане з задачею тестування. Це і є суттєвою підставою назвати його дискримінантною мірою типу  $p$ -значення [3].

**Теорема 1.** Припустимо, що  $E\left[ \int_{S_{ii}^-} (x - x_1) \right] x < \infty$  для  $i = 1, 2$  для заданого спостереження  $x$ . Далі визначимо  $\mu_{is_i}(x) = E\left[ \int_{is_i}^{\wedge} (x) \right]$  для  $i = 1, 2$ . Якщо  $n_i N \rightarrow \lambda \lambda_0 < < 1$  за  $N = n_1 + n_2 \rightarrow \infty$ , ми маємо:

а)  $\left| P_{S_{12}S} (1 | x) - \frac{p_1 \mu_{s_1}(x)}{p_1 \mu_{s_1}(x) + p_2 \mu_{s_2}(x)} \right| = O(N^{-1/2})$ ;

б)  $\left| P_{S_1, S_2}(x) - I \left\{ p_1 \mu_{s_1}(x) > p_2 \mu_{s_2}(x) \right\} \right| = O(N^{-1/2} e^{-CN})$  для деякого  $C > 0$ , де  $I \{ \cdot \}$  означає характеристичну функцію.

**Доведення.** (а) Для того щоб спростити вирази, визначимо  $T_i = p f_{is_i}(x)$  для  $i = 1, 2$ . Оскільки  $T_i$  є середнє значення незалежних та однаково розподілених випадкових величин, з центральної граничної теореми виходить, що за допустимої умови моменту для великих розмірів вибірки  $T_i$  прямує до нормального розподілу із середнім значенням  $\tau_i = p \mu_{is_i}(x)$  та дисперсією  $v_i = p^2 \sigma_{is_i}^2(x)$ , що має порядок  $O(N^{-1})$ .

Далі, визначимо  $\Psi(T_1, T_2) = T_1 / (T_1 + T_2)$ . У даному випадку  $T_1$  та  $T_2$  є додатньо визначені та незалежні випадкові величини. Крім того, функція  $\Psi$  є неперервно диференційовною в  $T_1$  та  $T_2$ . Асимптотичний розклад Тейлора приводить до того, що

$$\frac{\Psi(T_1, T_2) - \Psi(\tau_1, \tau_2)}{v} \xrightarrow{L} \text{Нормаль}(0, 1), \text{ де } v = \left\{ \sum_{i=1}^2 v_i (\partial \Psi / \partial T_i)_{T_1=\tau_1, T_2=\tau_2}^2 \right\}^{1/2}.$$

Оскільки  $n_i N \rightarrow \lambda$ , а  $n_i N \rightarrow 1$   $\lambda \lambda_0 < < 1$  за  $N \rightarrow \infty$ , ми маємо, що  $|\Psi(T_1, T_2) - \Psi(\tau_1, \tau_2)| = O(N^{-1/2})$ .

(б) Припустимо, що  $\tau_1 > \tau_2$ , тобто  $I \left\{ p_1 \mu_{s_1}(x) > p_2 \mu_{s_2}(x) \right\} = 1$ . Відтак для деяких фіксованих  $S_{12}$  та  $x$  з частини (а) даної теореми виходить, що

$$\frac{1}{\sqrt{v_{12}^+}} \left[ (T_1 - \tau_1) - (T_2 - \tau_2) \right] \xrightarrow{L} \text{Нормаль}(0, 1), \text{ за } N \rightarrow \infty.$$

Тепер визначимо  $Z_{S_{SS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{v_{12}^2 + \dots}}$ . З порядку  $v_1$  та  $v_2$  бачимо,

що  $Z_{S_{13}S}(x) = O(N^{-1/2})$ , а  $\frac{1}{\sqrt{N}} Z_{X_{SS}}(\cdot)$  – збіжний за ймовірністю до постійного значення  $C$ . Тому для  $x > 0$ , а також з урахуванням того, що

$$\frac{1}{xx} \Phi(\Phi(x)) < \Phi(x) < \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \Phi(x),$$

де  $\Phi(\cdot)$  та  $\Phi(\cdot)$  означають імовірнісну та кумулятивну функції щільності стандартного нормального розподілу

відповідно, ми отримуємо, що  $1 - P_{S_1, S_2}(x) = \Phi(Z_{S_1, S_2}(x)) = O(N^{-1/2} e^{-CN})$ .

Теорему доведено.

Дана теорема дає уявлення про асимптотичну поведінку дискримінантних мір. Для будь-якого заданого  $x$  та пари смуг пропускання  $(S_{SS})$  оцінена апостеріорна імовірність  $P_{S_{SS}}(\cdot)$  збігається до  $p_1 \mu_{1S_1}(x) / [p_1 \mu_{1S_1}(x) + p_2 \mu_{2S_2}(x)]$  зі швидкістю  $O(N^{-1/2})$ , однак залежно від  $\mu_{S_{SS}}(x)$ ,  $(\cdot)$  та апостеріорних імовірностей  $P_{S_{SS}}(1| \cdot)$  вона експоненціально збігається до 0 або 1. Наприклад, якщо  $p_1 \mu_{S_{SS}}(x) < p_2 \mu_{S_2}(x)$ ,

$P_{S_{SS}}(1| \cdot)$  матиме швидкість збіжності  $\sqrt{N}$  до значення, меншого 0,5, однак відповідні міри типу  $p$  значення експоненціально збігаються до нуля набагато швидше. Тому для заданих  $(S_{SS})$  за зростання об'єму навчальної вибірки  $P_{S_{SS}}(\cdot)$  завжди даватиме більш переконливі докази, ніж  $P_{S_{SS}}(1| \cdot)$ , за чи проти домену 1.

Для того щоб досягти рішення відносно класифікації спостереження  $x$ , важливо знати, які значення пари смуг пропускання  $(S_{SS})$  найшвидше приведуть до статистично більш достовірного результату класифікації. Для деякого фіксованого вибору  $(S_{SS})$  розглянемо середню ймовірність помилкової класифікації для двокласової задачі, заданої таким чином:

$$\Xi(S_1, S_2) = p_1 \iint_{x \in \mathfrak{X}_{S_2}^c} f_1(x) dx + p_2 \iint_{x \in \mathfrak{X}_{S_1}^c} f_2(x) dx,$$

де  $\mathfrak{X}_{SS}$  є множина всіх  $x$ , класифікованих до домену 1, а  $\mathfrak{X}_{SS}^c$  – множина доповнення. Існують декілька методів на основі перехресної перевірки для оцінки показника помилкової класифікації  $\Xi(S_{SS})$  для класифікатора з використанням навчальної вибірки. Дані підходи потребують свого

роду емпіричної пропорції помилково класифікованих спостережень, що призводить до оцінок, які є кусково-постійні в природі, у той час коли реальна функція може бути хорошою гладкою функцією. Для різних варіантів смуг пропускання було використано гладку та більш точну оцінку середньої ймовірності помилкової класифікації для класифікаторів на основі ядерних оцінок щільності [4; 5].

Природний спосіб об'єднання результатів, отриманих на різних рівнях згладжування для досягнення остаточного рішення, полягає у формуванні відповідних середньозважених апостеріорних ймовірностей, обчислених для різних варіантів вибору  $(S_{\mathbb{S}})$ . Для цього необхідно використовувати відповідну вагову функцію. Зрозуміло, що вагова функція має набувати більш великих значень для даної пари смуг пропускання, що приводить до менших показників помилкової класифікації. Існує багато відповідних вагових функцій, що задовольняють дану властивість. Беггінг, бустінг та дуговий класифікатор є досить відомі методи для об'єднання результатів різних класифікаторів для підвищення їх продуктивності. Дані методи також припускають різні ваги різним класифікаторам на основі їх ймовірностей помилкової класифікації та комбінують результати, використовуючи ці ваги [6–8].

Далі визначимо  $\Xi_0 = \min_{S_{\mathbb{S}}} \hat{\Xi}(S_{\mathbb{S}})$  та розглянемо вагові функції  $w_{\mathbb{S}}(S_1, S_2)$ , які є спадними функціями від  $\hat{\Xi}(S_{\mathbb{S}})$ , що еквівалентно  $\hat{\Xi}(S_{\mathbb{S}}) - \Xi_0$ . Крім того,  $w_{\mathbb{S}}(S_1, S_2)$  повинні зникати кожного разу, коли відповідне значення  $\hat{\Xi}(S_{\mathbb{S}})$  перевищує будь-яку з двох апіорних ймовірностей, оскільки продуктивність класифікатора буде більш низькою у порівнянні з тривіальним класифікатором, що класифікує всі спостереження до класу, що має найвищу апіорну ймовірність. Зауважимо, що для того щоб класифікувати спостереження  $x$ , варто включати у вагах відповідну міру  $P_{S_{\mathbb{S}}}(x)$  типу  $p$ -значення. Крім того, варто більше покладатися на ті пари смуг пропускання, що приводять до більш обґрунтованих доказів для одного або двох класів та відповідно налаштувати значення вагової функції. Дані налаштовані ваги будуть не лише залежати від загально оцінених ймовірностей помилкової класифікації, а й від класифікованого характерного спостереження. У всіх числових розрахунках використано таку налаштовану вагову функцію:

$$w_{\mathbb{S}}(S_1, S_2) = w_{\mathbb{S}}(S_1, S_2) | P_{S_1, S_2}(x) > 0.5 |$$

де

$$w(S_1, S_2) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\hat{\Xi}(S_1, S_2) - \Xi_0)^2}{\Xi_{00}(1-\Xi_0)/N} \right\}, & \text{якщо } \frac{\Xi(S_1, S_2) - \Xi_0}{[\Xi_{00}(1-\Xi_0)/N]^{1/2}} \geq \tau \\ \text{та } \hat{\Xi}(S_1, S_2) < \min\{p_1, p_2\} \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Для  $N = 4n_1 n_2$ ,  $\Xi_0$  та  $\Xi_{00}(1-\Xi_0)/N$  можна розглядати оцінки для середнього значення та дисперсії емпіричного показника помилкової класифікації найбільш продуктивного класифікатора на основі оцінок щільності ядра, коли такий класифікатор використовують для класифікації  $N$  незалежних спостережень. Постійна величина  $\tau$  визначає максимальне число відхилень від мінімального оціненого показника помилкової класифікації в стандартизованій шкалі, за якою вагова схема ігнорує пару смуги пропускання  $(S_{1j}, S_{2j})$ , поставивши на них нульову вагу. Зрозуміло, що  $\tau = 0$  відповідає ситуації прикріплення всіх ваг лише на пару смуги пропускання  $(S_{1j}, S_{2j})$ , для якої  $\hat{\Xi}(S_{1j}, S_{2j}) = \Xi_0$ . Зазначимо також, що вибір вагової функції гауссова типу визначає, що для практичних цілей немає потреби розглядати значення  $\tau$ , що є більше трьох. Даний вибір скоригованої вагової функції є дещо суб'єктивний, тому можна використовувати інші відповідні функції для тих же цілей. Однак нашим емпіричним досвідом є те, що кінцевий результат не є дуже чутливий до вагової процедури, якщо використовувати прийнятну вагову функцію [9–11].

Для деякого фіксованого  $S_i$   $\hat{f}_{K_i}(x)$  є середнє значення незалежних та однаково розподілених випадкових величин. Коли розмір вибірки  $n_i$  збільшується, її дисперсія прагне до нуля і збігається за імовірністю до  $\mu_{S_i}(x) = E\{\hat{f}_{K_i}(x)\} = K_{S_i} * f_i(x)$ , що є згорткою функції щільності  $f_i$  з ядром  $K$  та смугою пропускання  $S_i$ . У двокласовій задачі порядок  $p_{S_1}(x)$  та  $p_{S_2}(x)$  визначає асимптотичне правило рішення. Крім того, якщо розподіли комплексу задовольняють моделі зсуву локалізації (тобто  $f_{ii}(x) = g(x - \mu_i)$ ) для деякої загальної щільності  $g$  та параметрів локалізації  $\mu_i$ , а однаково смугу пропускання  $S$  використовують для обох комплексів,  $\mu_{S_i}(x)$  ( $i = 1, 2$ ) зберігає порядок фактичних щільностей для всіх значень  $S$ . Більше того, у випадку рівних апріорних ймовірностей для всіх позитивних значень  $S = S_{12}$   $S$  відповідна ймовірність помилко-

вої класифікації асимптотично стає оптимальним байєсовим ризиком. Для великих значень  $S$ , оскільки дисперсія прагне до нуля досить швидко, дана збіжність є значно швидша. Наступна теорема дає уявлення щодо поведінки класифікатора на основі ядерних оцінок щільності для великих розмірів вибірок та великих смуг пропускання, коли щільності комплексу не обов'язково мають задовольняти будь-яку умову симетрії.

**Теорема 2.** Припустимо, що  $f_1$  та  $f_2$  є такі, що  $\int \|x\|^6 f_i(x) dx < \infty$ , а ядро  $K \in d$ -вимірної функції щільності з модою в 0 та обмеженою третьою похідною. Визначимо постійну величину  $C_\pi = p_{21}/p$  та припустимо, що  $S_1, S_2$  варіюються таким чином, що  $S_{21}/S = C_S$  та є постійною. Оскільки  $S_1 \rightarrow \infty$ ,  $\Xi(S_{11}, S_{21})$  має таку асимптотичну поведінку.

(а) Коли  $C_C > \frac{d}{S}$ , за  $S \rightarrow \infty$ ,  $\Xi(S_1, S_2) \rightarrow p_1$ .

(б) Коли  $C_C < \frac{d}{S}$ , за  $S \rightarrow \infty$ ,  $\Xi(S_1, S_2) \rightarrow p_2$ .

(в) Коли  $C_C = \frac{d}{S}$ , за  $S \rightarrow \infty$ ,  $\Xi(S_{11}, S_{21})$  прямує до ймовірності помилкової класифікації квадратичного правила класифікації, що задається так:

$$d_0(x) = 1, \text{ якщо } C_S^2 E_{f_1} \left\{ (x - X)' \nabla K(0)(x - X) \right\} > E_{f_2} \left\{ (x - X)' \nabla^2 K(0)(x - X) \right\} \\ = 2, \text{ в іншому випадку.}$$

**Доведення.** Спочатку зауважимо, що

$$\Xi(S_1, S_2) = p E_{f_1} \{ \mathbf{1}_{\{ p \hat{f}_{1S_1} < p \hat{f}_{2S_2} \}} \} + p E_{f_2} \{ \mathbf{1}_{\{ p \hat{f}_{1S_1} > p \hat{f}_{2S_2} \}} \}. \text{ Із визначення } \hat{f}_{S_i}(x) \text{ (} i=1,2 \text{), можна побачити, що}$$

$$E_{f_i} \{ \hat{f}_{S_i}(x) \} = S_i^{-d} E_{f_i} [ K \left( \frac{x - X}{S_i} \right) ] \text{ та} \\ \text{Var}_{f_i} \{ \hat{f}_{S_i}(x) \} = n S_i^{2-d} \text{Var}_{f_i} [ K \left( \frac{x - X}{S_i} \right) ].$$

Використовуючи розклад Тейлора в 0,  $K \left( \frac{x - X}{S_i} \right)$  можна виразити як

$$K \left( \frac{x - X}{S_i} \right) = K(0) + (1/2) S_i^{2-d} \left\{ (x - X)' \nabla K(0)(x - X) \right\} + \\ + (1/6) S_i^{3-d} \sum_{i,k,m} Y_{i,km}, \text{ (оскільки } \nabla K(0) = 0 \text{),}$$

де  $Y_{i,km} = (x_i - X_i)(x_k - X_k)(x_m - X_m) \frac{\partial^3 K(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_k \partial \xi_m} \Big|_{\xi = \frac{x - X}{S_i}}$ , для деякого проміжного вектора  $\xi$  між 0 та  $(x - X)/S_i$ . Тому, використовуючи той факт, що функція  $K$  обмежена третіми похідними, а  $\int \|x\|^6 f(x) dx < \infty$ , ми отримуємо

$$E_{f_i} \{ \hat{f}_{1S_i}(x) \} = S_i^{-d} \left[ K(0) + (1/2 S_i^2) E_{f_i} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_i^{-3} \right] \text{ та}$$

$$Var_{f_i} \{ \hat{f}_{1S_i}(x) \} = (4n\mathfrak{S}_i^{2d+4})^{-1} \left[ Var_{f_i} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_i^{-3} \right].$$

Оскільки дисперсія ядерних оцінок щільності асимптотично прагне до нуля, для будь-якого спостереження  $x$  та будь-якої пари смуг пропускання  $\mathfrak{S}_i$  відповідний класифікатор класифікує спостереження  $x$  до домену 1 тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} pE_{f_1} \{ \hat{f}_{1S_1}(x) \} &> pE_{f_2} \{ \hat{f}_{2S_2}(x) \} \\ \Leftrightarrow p\mathfrak{S}_1^{-d} \left[ K(0) + (1/2 S_1^2) E_{f_1} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_1^{-3} \right] &> \\ > p\mathfrak{S}_2^{-d} \left[ K(0) + (1/2 S_2^2) E_{f_2} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_2^{-3} \right] & \\ \Leftrightarrow C\mathfrak{C}_s^{-d} \left[ K(0) + (1/2 S_1^2) E_{f_1} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_1^{-3} \right] &> \\ > \left[ K(0) + (1/2 S_2^2) E_{f_2} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} + O\mathfrak{S}_2^{-3} \right]. & \end{aligned}$$

(а) Коли  $C\mathfrak{C} < \frac{d}{s}$ , для великих значень  $S_1$  та  $S_{21} = C\mathfrak{S}$ , верхня нерівність є справедлива, яким б не було значення спостереження  $x$ .

(б) Таким же чином, коли  $C\mathfrak{C} > \frac{d}{s}$ , для кожного спостереження  $x$  результуючий класифікатор асимптотично завжди класифікує його до домену 2.

(в) Коли  $C\mathfrak{C} = \frac{d}{s}$ , для великих значень  $S_1$  та  $S_2$  легко перевірити, що вищенаведена нерівність є справедлива тоді і тільки тоді, коли  $C\mathfrak{C} E_{f_{12}} \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \} > E_f \{ (x-X)^{\nabla^2} K(0)(x-X) \}$ . Теорему доведено.

Зауважимо, що коли  $C\mathfrak{C} = \frac{d}{s} = 1$  (тобто  $p\mathfrak{P} = 1$ ), квадратичний класифікатор стає лінійним класифікатором, що задається таким чином:

$$d(x) = \operatorname{argmin}_i \left[ \int \nabla^2 K(0) E_{f_i}(X) - \frac{1}{2} E \{ X \nabla K(0) X \} \right].$$

Враховуючи припущення щодо локалізаційного зсуву та сферичної симетрії, а також що ядерна функція  $K$  є також сферична (відзначимо, що  $\nabla^2 K(0)$  є від'ємно визначена функція), даний лінійний класифікатор можна виразити у спрощеній формі, а саме

$$d(x) = \operatorname{argmax}_i \left\{ \mu_i - \frac{1}{2} \mu_{\mu_i} \right\},$$

де  $\mu_i$  – параметр локалізації для  $i$ -го комплексу ( $i = 1, 2$ ). Варто відзначити, що описаний лінійний класифікатор є оптимальний байесовий класифікатор. Тому у даному випадку ймовірність помилкової класифікації  $\Xi$  асимптотично збігається до оптимального байесового ризику.

**Висновки.** Запропонований комплексний метод для розв'язання задач розпізнавання образів, що ґрунтується на використанні множини оптимальних мір згладжування для кожної оцінки щільності класу є більш інформативним методом у порівнянні зі звичайним ядерним дискримінантним аналізом. Водночас з результатами класифікації було отримано змогу мати уявлення про ефективність дискримінантної міри та пов'язаних з нею статистичних невизначеностей. В методі на основі єдиної оптимальної смуги пропускання дана смуга пропускання не залежить від характерного спостереження, що підлягає класифікації. Використання залежної від даних скоригованої вагової функції в запропонованому методі забезпечує таку гнучкість.

У багатокласових задачах розпізнавання часто є обчислювально складно отримати оптимальні смуги пропускання у разі мінімізації оціненої ймовірності помилкової класифікації  $\hat{\Xi}(S_{12}, S_{13}, \dots, S_{L1})$ . Метод попарної класифікації, застосований у даному дослідженні, не лише значно знижує обчислювальне навантаження, але й забезпечує гнучкість у використанні різних смуг пропускання для класу, де один клас порівнюється з різними конкуруючими класами. Оскільки відповідний вибір смуги пропускання для оцінки щільності домену в задачі класифікації може залежати як від її конкуруючих оцінок щільності домену, так і від відповідних апріорних ймовірностей, даний метод попарного порівняння є досить ефективним.

#### Бібліографічні посилання

1. **Yang, C.** Improved fast gauss transform and efficient kernel density estimation [Text] / C. Yang, R. Duraiswami, N.A. Gumerov, L. Davis. – ICCV. – 2003.
2. **Shi, Q.** Hash kernels for structured data [Text] / Q. Shi, J. Petterson, G. Dror, J. Langford, A. Smola, S. Vishwanathan // Journal of Machine Learning Research. – 2009. – V.10. – P. 2615–2637.
3. **Shawe-Taylor, J.** Kernel Methods for Pattern Analysis [Text] / J. Shawe-Taylor, N. Cristianini. – Cambridge University Press, 2004.
4. **Scholkopf, B.** Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond [Text] / B. Scholkopf, A. J. Smola, MIT Press, 2002.
5. **Raykar, V.C.** Fast computation of kernel estimators [Text] / V. C. Raykar, R. Duraiswami, L. H. Zhao // J. of Computational and Graphical Statistics. – 2010. – 19(1). – P. 205–220.
6. **Raykar, V.C.** Fast optimal bandwidth selection for kernel density estimation [Text] / V. C. Raykar, R. Duraiswami. – In SDM, 2006.

7. **Chen, Y.** Super-samples from kernel hearing [Text] / Y. Chen, M. Welling, A. Smola // In Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. – 2010.
8. **Raykar, V.C.** Very fast optimal bandwidth selection for univariate kernel density estimation [Text] / V.C. Raykar, R. Duraiswami. Technical Report CS-TR-4774, University of Maryland, CollegePark, 2005.
9. **Girolami, M.** Probability density estimation from optimally condensed data samples [Text] / M. Girolami and C. He // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2003. – V.25, №10. – P. 1253–1264.
10. **Hall, P.** Cross-Validation and the Estimation of Conditional Probability Densities [Text] / P. Hall, J. Racine, Q. Li // Journal of the American Statistical Association. – 2004. – V. 99. – P. 1015–1026.
11. **Hansen, B.E.** Uniform Convergence Rates for Kernel Estimation with Dependent Data [Text] / B.E. Hansen, Econometrics Theory, 2008.

*Надійшла до редколегії 19.01.2015*

УДК 519.6

**Л.Л. Ґарт**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара*

## **ЯВНЫЙ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Исследован вопрос о сходимости общего проекционно-итерационного метода решения некорректных линейных операторных уравнений в нормированных пространствах, основанного на методе простой итерации. Доказана теорема о сходимости, получена оценка погрешности.**

**Досліджено питання про збіжність загального проєкційно-ітераційного методу розв'язання некоректних лінійних операторних рівнянь в нормованих просторах, заснованого на методі простої ітерації. Доведено теорему про збіжність, отримано оцінку похибки.**

**The problem of convergence of a general projection-iteration method based on the simple iteration method is investigated for solving ill-posed linear operator equations in normal spaces. The convergence theorem is proved, the error estimate is obtained.**

---

© Ґарт Л.Л., 2015

**Ключевые слова:** линейный оператор, уравнение, решение, пространство, аппроксимация, проекционный, проекционно-итерационный, метод, приближение, последовательность, устойчивость, сходимость, погрешность.

**Введение.** Теория некорректных задач и методов их приближенного решения – активно развивающееся направление математики, имеющее разнообразные приложения во многих областях естествознания, техники и управления. Некорректно поставленные задачи естественным образом возникают в процессе математического моделирования в геофизике, астрофизике, компьютерной томографии, при обработке и интерпретации данных физических экспериментов (см., например, [1–3]). Интенсивное развитие теории некорректных задач во многом обусловлено появлением в последние десятилетия высокопроизводительной вычислительной техники. Как правило, эти задачи формулируются в виде операторных уравнений, задач минимизации функционалов, а также задач вычисления значений неограниченных операторов. Поскольку источником исходных данных на практике нередко служат измерения и эксперименты, операторы получаемых уравнений обычно задаются с той или иной погрешностью.

Значительная часть некорректных задач может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f \tag{1}$$

с заданным оператором  $A$ , действующим из  $X$  в  $Y$  ( $X, Y$  – метрические пространства, в отдельных случаях банаховы или гильбертовы), и элементом  $f \in Y$ .

Основные результаты по некорректным задачам отражены в монографиях М.М. Лаврентьева [4], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [5], В.А. Морозова [6], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [7], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [8]. Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. В 30-е годы в работах Т. Карлемана (Т. Carleman), Г.М. Голузина и В.И. Крылова, И.Г. Малкина были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные (оператор  $A$  и правая часть  $f$ ) заданы точно. В работе [4] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и рас-

пространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. Изучению итерационных методов посвящены работы В.Н. Страхова [9], М.А. [Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [10]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, В. Липфертом (W. Lipfert), А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским, В.А. Морозовым, В.В. Васиним, С.Ф. Гильязовым и Н.Л. Гольдманом (S.F. Gilyazov and N.L. Gol'dman), применялись для решения многих некорректных задач в банаховых и гильбертовых пространствах. Метод простой итерации при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [1], О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [11].

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций. Это означает, что в предположении об истокорпредставимости  $u = A^s z$ ,  $s > 0$ ,  $z \in X$  точного решения уравнения (1) находится оценка погрешности метода, которая затем оптимизируется по  $n$ , т.е. определяется число итераций  $n_{opt}$ , при котором эта оценка является минимальной. В отсутствие же сведений об истокорпредставимости точного решения итерационные методы решения некорректных задач также можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке или по поправке. Апостериорный выбор числа итераций для метода простой итерации впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. [Красносельским [12] и в дальнейшем получил развитие в работах Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенникова, В.Ф. Савчука. Ими обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокорпредставимости точного решения, а в случае истокорпредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

Помимо итерационных методов для приближенного решения некорректных задач широко применяются проекционные методы, позволяющие (по Л.В. Канторовичу) уравнение (1), рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменить приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве, и принять точное решение приближенного уравнения в качестве приближения к решению исходного уравнения. Установлению критериев сходимости, исследованию быстроты сходимости, получению оценок погрешности, изучению устойчивости вычислительных схем и различным приложениям проекционных методов посвящены фундаментальные работы С.Г. Михлина, Л.В. [Канторовича, Н.И. Польского,

М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, В.В. Петришина, а также работы Ю.И. Грибанова, Б.Г. Габдулхаева, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашовой и других авторов. При этом привлечение идей функционального анализа дало возможность выработать единый подход к решению самых разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют свои недостатки. Хотя приближенные уравнения и проще исходного, тем не менее, получение их точных решений практически затруднительно, а иногда просто нецелесообразно (из-за погрешностей задания исходных данных). Сложным является также вопрос о выборе порядка приближенного уравнения, который обеспечил бы получение решения с заданной точностью. Если решение приближенного уравнения некоторого порядка  $n$  не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать уравнение более высокого порядка, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Попытки устранения перечисленных недостатков привели к возникновению группы методов под названием проекционно-итерационные, которые основаны на возможности применения итерационных методов для приближенного решения приближенных уравнений. Так, согласно идее С.Д. [Балашовой [13], реализованной для корректно поставленных задач, для каждого из приближенных уравнений ( $n$ -го уравнения) следует находить итерационным методом лишь несколько ( $k_n$ ) приближений, последнее из которых полагать равным начальному приближению к решению следующего ( $(n+1)$ -го) уравнения. Такой подход естественно устраняет трудности, возникающие при решении исходного уравнения обычным проекционным методом. Кроме того, применение итерационных методов не к исходному уравнению, а к более простым приближенным уравнениям позволяет наиболее просто строить последовательность приближений к решению, а также облегчает задачу о выборе начального приближения.

В данной работе в рамках общей методологии [13] впервые исследован проекционно-итерационный метод решения некорректного линейного операторного уравнения (1) в гильбертовом пространстве, основанный на методе простой итерации.

**Постановка задачи.** Пусть задано уравнение (1)

$$Au = f,$$

где  $A$  – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(u, v)$  произвольных элементов  $u, v \in H$  и порождаемой им нормой  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ ,  $u \in H$ . Предположим, что обратный оператор  $A^{-1}$  существует, но не является ограниченным в  $H$ , т.е. не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость) [5]. Будем обозначать через  $u^* \in H$  точное решение уравнения (1).

Целью данной работы является теоретическое обоснование проекционно-итерационного подхода к решению некорректных линейных операторных уравнений вида (1), а именно получение достаточных условий сходимости явного проекционно-итерационного метода в гильбертовом пространстве, оценок его погрешности и скорости сходимости.

**Проекционный метод.** Наряду с уравнением (1) рассмотрим последовательность приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $A_n$  – линейный ограниченный оператор в  $H_n$ ;  $\{H_n\}$  – возрастающая последовательность конечномерных подпространств исходного пространства  $H$  ( $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots \subset H$ ,  $H_1 \neq \emptyset$ ),  $f_n = P_n f$ ,  $P_n$  – оператор ортогонального проектирования  $H$  на  $H_n$  ( $P_n^2 = P_n$ ,  $P_n^* = P_n$ ,  $\|P_n\| = 1$ ).

Введенные пространства и операторы при каждом натуральном  $n \in N$  свяжем условиями близости:

– для любого  $u_n \in H_n$

$$\|A_n u_n - P_n A u_n\| \leq \alpha_n \|u_n\|; \quad (3)$$

– для любого  $u_n \in H_n$  существует элемент  $z_n \in H_n$  такой, что

$$\|A u_n - z_n\| \leq \beta_n \|u_n\|; \quad (4)$$

– для любого  $f \in H$

$$\|P_n f - f\| \leq \eta_n \|f\|, \quad (5)$$

где  $\alpha_n, \beta_n, \eta_n$  – положительные числа, не зависящие от  $u_n \in H_n$  и  $f \in H$  соответственно, причем  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $\beta_n \rightarrow 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $N(A)$  подпространство нулей оператора  $A$ , т.е.

$$N(A) = \{u \in H : Au = 0\},$$

через  $\bar{H} = H \setminus N(A)$  – фактор-пространство пространства  $H$  по подпространству нулей  $N(A)$  оператора  $A$ , а через  $\bar{A}$  – линейный оператор из  $\bar{H}$  в  $H$ , индуцированный оператором  $A$  в фактор-пространстве  $\bar{H}$  [14].

**Теорема 1** (о сходимости проекционного метода). Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части  $f \in H$  и выполнены условия близости (3)-(5). Тогда при всех  $n \geq N \geq 1$ , удовлетворяющих неравенству

$$\rho_n = \left\| \bar{A}^{-1} \left( \alpha_n + \beta_n \|E - P_n\| \right) \right\| < 1, \quad (6)$$

приближенное уравнение (2) также разрешимо при любой правой части  $f_n \in H_n$  и последовательность точных решений  $u_n^* \in H_n$  приближенных уравнений (2) сходится к точному решению  $u^* \in H$  уравнения (1) по норме пространства  $H$  с оценкой погрешности

$$\|u_n^* - u^*\| \leq \gamma_n, \quad n \geq N, \quad (7)$$

где  $\gamma_n = 2 \left\| \bar{A}^{-1} \right\| \|f - Au_n^*\| = O(\eta_n + \alpha_n + \beta_n \|E - P_n\|)$ ;  $E$  – единичный оператор в  $H$ ,  $E - P_n : Y \rightarrow H$ ,  $Y = \{y \in H : y = Au_n - f_n, u_n, f_n \in H_n\}$ .

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием следствия из теоремы 7.1 книги [15].

Во многих прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием исходных данных с погрешностью. Эту общую ситуацию моделируем предположением, что правая часть уравнения (1) задана с погрешностью  $\delta$ , т.е. вместо  $f \in H$  нам известно  $f_\delta \in H$  такое, что

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta. \quad (8)$$

(В более общем случае следует ориентироваться на задачи (1), в которых приближенно задана не только правая часть  $f$ , но и оператор задачи  $A$ .) Требуется по  $f_\delta \in H$  построить приближенное решение  $u_\delta \in H$  уравнения (1), удовлетворяющее условию  $u_\delta \rightarrow u^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Метод решения.** Для приближенного решения задачи (1) при условии (8) аппроксимируем уравнение

$$Au = f_\delta \quad (9)$$

так же, как и раньше, последовательностью приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n(\delta), \quad n \geq N, \quad (10)$$

где  $A_n$  – линейный ограниченный оператор в конечномерном подпространстве  $H_n \subset H$ ,  $f_n(\delta) = P_n f \delta$ . Так как  $P_n$  – оператор ортогонального проектирования  $H$  на  $H_n$ , то отклонение правых частей приближенных уравнений (2) и (10) по норме пространства  $H$  не превосходит погрешности  $\delta$  задания правой части уравнения (1):

$$\|f_n - f_n(\delta)\| = \|P_n f - P_n f \delta\| \leq \|P_n\| \|f - f \delta\| \leq \delta, \quad n \geq N. \quad (11)$$

Согласно теореме 1 из разрешимости уравнения (1) при любой правой части и выполнении условий (3)–(5) следует разрешимость каждого из приближенных уравнений (10), причем последовательность точных решений  $u_n^*(\delta) \in H_n$  приближенных уравнений (10) сходится к точному решению  $u_\delta^* \in H$  уравнения (9) с оценкой погрешности

$$\|u_n^*(\delta) - u_\delta^*\| \leq \gamma_n(\delta) = 2 \|A^{-1}\| \|f \delta - A u_n^*(\delta)\|, \quad n \geq N.$$

Предположим, что каждый из линейных операторов  $A_n$  положителен (а значит, самосопряжен) в  $H_n \subset H$  и область его определения  $D(A_n)$  плотна в  $H_n$ . Некорректность приближенных уравнений (10) связана с тем, что собственные значения оператора  $A_n$ , упорядоченные по убыванию ( $\lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n^{(2)} \geq \dots \geq \lambda_n^{(i_n)} > 0$ ,  $i_n = \dim H_n$ ), стремятся к нулю. Будем считать, что соответствующая система собственных функций  $\{\varphi_n^{(i)}\} \subset D(A_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_n$  оператора  $A_n$  ортонормирована и полна в  $H_n$ , так что для любого элемента  $v_n \in H_n$  справедливо разложение  $v_n = \sum_{i=1}^{i_n} C_n^{(i)} \varphi_n^{(i)}$ , где

$C_n^{(i)} = (v_n, \varphi_n^{(i)})$  – коэффициенты Фурье элемента  $v_n$ .

Для решения каждого из приближенных уравнений (10) будем применять явный двухслойный итерационный метод (метод простой итерации)

$$u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - \tau_n (A_n u_n^{(k)} - f_n(\delta)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad n \geq N, \quad (12)$$

где  $u_n^{(k)} \equiv u_n^{(k)}(\delta) \in H_n$  –  $k$ -е итерационное приближение к точному решению  $u_n^*(\delta) \in H_n$  уравнения (10);  $\tau_n > 0$  – итерационный параметр, постоянный при данном  $n$ .

Если в приближенном уравнении (10) оператор  $A_n$  не является самосопряженным и положительным, то можно провести предварительную симметризацию по Гауссу и применить итерационный метод (12) к сим-

метризованому уравнению  $A_n^* A_n u_n = A_n^* f_n(\delta)$  с положительным в  $H_n$  линейным оператором  $A_n^* A_n$ , где  $A_n^*$  – сопряженный оператор по отношению к  $A_n$ . Соответствующую итерационную формулу

$$u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - \tau_n (A_n^* A_n u_n^{(k)} - A_n^* f_n(\delta)), \quad k=0, 1, \dots, \quad n \geq N$$

в зависимости от контекста можно интерпретировать как итерационный метод решения вариационной задачи минимизации функционала невязки

$$J_n(u_n) = \|A_n u_n - f_n(\delta)\|^2.$$

Отметим также, что в случае положительности исходного оператора  $A$  в  $H$  свойство положительности каждого из операторов  $A_n$  в  $H_n$ , начиная с некоторого номера  $n \geq N_1 \geq 1$ , будет немедленно вытекать из выполнимости условия близости (3) и условия  $\|A_n u - P_n A u\| \leq \alpha'_n \|u\|$ ,  $\forall u \in H$ , где  $\alpha'_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  [13].

Как известно [1], итерационный метод (12) для уравнения (10) сходится в  $H_n$  при всех значениях

$$0 < \tau_n < \frac{2}{\lambda_n^{(1)}}, \quad (13)$$

где  $\lambda_n^{(1)} > 0$  – наибольшее собственное значение оператора  $A_n$ , однако из-за близости к нулю нижней границы спектра оператора  $A_n$  сложно конкретизировать скорость такой сходимости. Кроме того, при итерационном решении каждого из некорректных уравнений (10) с учетом неточного задания правой части (оценка (11)) следует выбирать условие окончания итераций, согласуясь с этим уровнем погрешности, т.е. продолжать итерации до некоторого номера  $k(\delta)$ .

Рассмотрим проекционно-итерационный принцип решения задачи (1) при условии (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера  $n \geq N$ , итерационного метода (12), (13). Построив с помощью этого метода для  $n$ -го приближенного уравнения несколько приближений  $u_n^{(k)} \in H_n$ ,  $k=1, 2, \dots, k_n$  ( $k_n \leq k(\delta)$ ) и положив последнее из них равным начальному приближению для следующего,  $(n+1)$ -го уравнения, получим последовательность  $\left\{ u_n^{(k_n)} \right\}_{n=N}^{\infty}$  приближений к решению  $u^* \in H$  уравнения (1):

$$u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - \tau_n (A_n u_n^{(k)} - f_n(\delta)), \quad k=0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (14)$$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(k_n)}, \quad n \geq N; \quad u_N^{(0)} \in H_N. \quad (15)$$

Здесь  $u_n^{(k)} \equiv u_n^{(k)}(\delta) \in H_n$  для всех  $k = 0, 1, \dots, k_n$ ,  $\tau_n \in (0, 2\lambda_n^{(1)})$ ,  $n \geq N$ .

Достаточные условия сходимости последовательности  $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$  к  $u^*$  в  $H$  устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2** (о сходимости проекционно-итерационного метода). Пусть выполнены условия теоремы 1 и в проекционно-итерационном методе (13)–(15) число итераций  $k_n \leq k(\delta)$  при каждом  $n \geq N$ , причем  $k(\delta)\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда последовательность  $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ , определяемая по формулам (13)–(15), сходится в  $H$  к решению  $u^*$  задачи (1) при условии (8), если  $\delta \rightarrow 0$ , и справедлива оценка погрешности

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u^*\| \leq \chi_n(\delta), \quad n \geq N, \quad (16)$$

где  $\chi_n(\delta) = \mu'_n \|z_N^{(0)}\| + \mu''_n + k_n \tau_n \delta + \gamma_n$ ;  $\gamma_n$  дается формулой (7),

$$\mu'_n = \prod_{j=N}^n q_j^{k_j}, \quad \mu''_n = \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^n q_j^{k_j}, \quad 0 < q_j < 1, \quad z_N^{(0)} = u_N^{(0)} - u^*.$$

**Доказательство.** Рассмотрим при  $n \geq N$  неравенство

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u^*\| \leq \|u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*\| + \|u_n^* - u^*\|, \quad (17)$$

где  $u_n^* \in H_n$  – точное решение приближенной задачи (2), (11). Для второго слагаемого в (17) имеем оценку (7). Оценим первое слагаемое.

Обозначим через  $z_n^{(k)} = u_n^{(k)} - u_n^*$ ,  $u_n^{(k)} \equiv u_n^{(k)}(\delta)$  ( $k = 0, 1, \dots, k_n$ ,  $n \geq N$ ) погрешность итерационного метода (12), (13) для задачи (2), (11) на  $k$ -й итерации.

Из (14) непосредственно получаем

$$u_n^{(k_n)} = (E - \tau_n A_n)^{k_n} u_n^{(0)} + \tau_n f_n(\delta) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k, \quad n \geq N, \quad (18)$$

где  $u_n^{(0)} \in H_n$  – заданное начальное приближение, определяемое формулами (15).

Для точного решения  $u_n^* \in H_n$  можно воспользоваться аналогичным представлением

$$u_n^* = (E - \tau_n A_n)^{k_n} u_n^* + \tau_n f_n(\delta) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k, \quad n \geq N,$$

которое соответствует итерационному решению уравнения (2), когда начальное приближение совпадает с его точным решением.

С учетом (18) для погрешности  $z_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)} - u_n^*$  получим выражение

$$z_n^{(k_n)} = r_n^{(k_n)} + w_n^{(k_n)}, \quad n \geq N, \quad (19)$$

где

$$r_n^{(k_n)} = (E - \tau_n A_n)^{k_n} z_n^{(0)}, \quad w_n^{(k_n)} = \tau_n (f_n(\delta) - f_n) \sum_{k=0}^{k_n-1} (E - \tau_n A_n)^k. \quad (20)$$

Первое слагаемое в (19) является стандартным для проекционно-итерационных методов, второе же слагаемое связано с учетом погрешности в задании правой части уравнения (2).

При сформулированных ограничениях (13) на итерационный параметр  $\tau_n$  для ограниченного и положительного оператора  $A_n$  в  $H_n$  имеем [1]

$$q_n = \|E - \tau_n A_n\| < 1, \quad n \geq N. \quad (21)$$

Принимая во внимание (11) и (21), получим оценку

$$\|w_n^{(k_n)}\| \leq \tau_n \|f_n(\delta) - f_n\| \sum_{k=0}^{k_n-1} \|E - \tau_n A_n\|^k \leq \tau_n k_n \delta, \quad n \geq N. \quad (22)$$

Далее, поскольку начальная погрешность метода для задачи (2) с учетом (15) представима в виде  $z_n^{(0)} = u_n^{(0)} - u_n^* = u_n^{(k_{n-1})} - u_n^*$ , то

$$\|z_n^{(0)}\| \leq \|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \|u_{n-1}^* - u^*\| + \|u^* - u_n^*\| \leq \|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n, \quad n > N,$$

и для  $r_n^{(k_n)}$  на основании (19)-(22) будем иметь рекурсивное неравенство

$$\begin{aligned} \|r_n^{(k_n)}\| &\leq \|E - \tau_n A_n\|^{k_n} \|z_n^{(0)}\| \leq q_n^{k_n} \left( \|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) \\ &\leq q_n^{k_n} \left( \|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \|w_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) \leq q_n^{k_n} \left( \|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \tau_{n-1} k_{n-1} \delta + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right). \end{aligned}$$

Пользуясь этим неравенством, получим

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq \|r_N^{(k_N)}\| \prod_{j=N+1}^n q_j^{k_j} + \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^n q_j^{k_j}, \quad n > N,$$

а поскольку

$$\|r_N^{(k_N)}\| \leq \|E - \tau_N A_N\|^{k_N} \|z_N^{(0)}\| \leq q_N^{k_N} \|z_N^{(0)}\|,$$

то окончательная оценка для  $r_n^{(k_n)}$  примет вид

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq \|z_N^{(0)}\| \prod_{j=N}^n q_j^{k_j} + \sum_{i=N}^{n-1} (k_i \tau_i \delta + \gamma_i + \gamma_{i+1}) \prod_{j=i+1}^n q_j^{k_j}, \quad n \geq N. \quad (23)$$

Возвращаясь к неравенству (17), можно воспользоваться для оценки первого слагаемого соотношением (19), так что

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*\| = \|z_n^{(k_n)}\| \leq \|r_n^{(k_n)}\| + \|w_n^{(k_n)}\|, \quad n \geq N, \quad (24)$$

и с учетом (22), (23) прийти к требуемой оценке погрешности (16).

Из оценки (16) видно, при  $n \rightarrow \infty$  и  $\delta \rightarrow 0$  проекционно-итерационная последовательность приближений  $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$  сходится к решению  $u^*$  задачи (1) при условии (8) по норме пространства  $H$ .

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы о сходимости проекционно-итерационного метода следует, что сходимость последовательности  $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$  к  $u^*$ , если  $\delta \rightarrow 0$ , имеет место при произвольном выборе чисел  $k_n$ , в частности, все числа  $k_n$  могут быть равными 1. Следует, однако, иметь в виду, что с возрастанием  $n$  увеличивается объем вычислительной работы, необходимой для нахождения очередного приближения. Поэтому нужно стремиться к тому, чтобы за счет подходящего выбора  $k_n$  по возможности максимально приблизиться к искомому решению при данном  $n$  и только после этого переходить к уравнению более высокой размерности. С другой стороны, не следует выбирать число  $k_n$  при данном  $n$  слишком большим, поскольку, начиная с некоторого момента, увеличение этого числа не приводит к существенному улучшению (по отношению к решению  $u^*$  исходного уравнения) очередных приближений. Таким образом, возникает вопрос о целесообразном выборе чисел  $k_n$  ( $n \geq N$ ), ответ на который в общем случае затруднителен, однако могут быть даны некоторые рекомендации.

Воспользуемся разложением элемента  $r_n^{(k_n)} \in H_n$ , определяемого формулой (20), по собственным функциям оператора  $A_n$ :

$$r_n^{(k_n)} = \sum_{i=1}^{i_n} C_n^{(i)} (E - \tau_n A_n)^{k_n} \Phi_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{i_n} C_n^{(i)} (1 - \tau_n \lambda_n^{(i)})^{k_n} \Phi_n^{(i)},$$

где  $C_n^{(i)} = (z_n^{(0)}, \Phi_n^{(i)})$  – коэффициенты Фурье элемента  $z_n^{(0)} \in H_n$ . При этом выполняется равенство Парсеваля [14]

$$\left\| r_n^{(k_n)} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{i_n} (C_n^{(i)})^2 (1 - \tau_n \lambda_n^{(i)})^{2k_n}, \quad n \geq N,$$

из которого с учетом  $\left| 1 - \tau_n \lambda_n^{(i)} \right| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, i_n$  (как впрочем, и из (23))

вытекает, что  $\left\| r_n^{(k_n)} \right\| \rightarrow 0$  при  $k_n \rightarrow \infty$ .

Подстановка формул (24), (22) и (7) в (17) приводит нас к оценке

$$\left\| u_n^{(k_n)}(\delta) - u^* \right\| \leq \left\| r_n^{(k_n)} \right\| + k_n \tau_n \delta + \gamma_n, \quad n \geq N. \quad (25)$$

Эта оценка показывает, что в случае применения проекционно-итерационного метода (13)-(15) к решению задачи (1), (8) в качестве параметра регуляризации выступает число итераций  $k_n$ , которое следует согласовывать как с погрешностью  $\delta$  в задании правой части, так и с погрешностью  $\gamma_n$  проекционного метода. Первое слагаемое в правой части неравенства (25) стремится к нулю при  $k_n \rightarrow \infty$ , второе – растет с числом итераций, третье же не зависит от  $k_n$ . Ясно, что число  $k_n$  достаточно выбрать таким, чтобы величины  $\left\| r_n^{(k_n)} \right\|, k_n \tau_n \delta$  и  $\gamma_n$  имели один и тот же порядок малости, в частности, роль  $k_n$  может играть наименьшее из чисел  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), удовлетворяющих неравенству

$$\left\| r_n^{(k)} \right\| \leq M (k \tau_n \delta + \gamma_n), \quad n \geq N, \quad (26)$$

где  $M > 0$  – некоторая константа.

Следует отметить, что способом (26) определения чисел  $k_n$  можно пользоваться лишь в тех случаях, когда используемые здесь величины, входящие в оценку погрешности (25), легко вычисляются, что не всегда имеет место при решении практических задач.

Другой способ выбора чисел  $k_n$  ( $n \geq N$ ) по аналогии с [13] заключается в выборе  $k_n$  таким образом, чтобы элемент  $u_n^{(k_n)} \in H_n$  был хорошим начальным приближением для  $(n+1)$ -го приближенного уравнения (10), иными словами, чтобы невязка  $\sigma_{n+1}^{(0)} = A_{n+1} u_{n+1}^{(0)} - f_{n+1}(\delta)$  принимала по возможности малое значение. Рассмотрим оценку

$$\left\| \sigma_{n+1}^{(0)} \right\| \leq \left\| \sigma_n^{(k_n)} \right\| + \left\| A_{n+1} u_{n+1}^{(0)} - A_n u_n^{(k_n)} \right\| + \left\| f_{n+1}(\delta) - f_n(\delta) \right\| = \left\| \sigma_n^{(k_n)} \right\| + \theta_n.$$

Поскольку  $\|\sigma_n^{(k_n)}\| \rightarrow 0$  при  $k_n \rightarrow \infty$ , то порядок  $\|\sigma_{n+1}^{(0)}\|$  при данном  $n$  определяется величиной  $\theta_n$ . Поэтому число  $k_n$  достаточно выбрать таким, чтобы  $\|\sigma_n^{(k_n)}\|$  и  $\theta_n$  имели один и тот же порядок малости, в частности, роль  $k_n$  может играть наименьшее из чисел  $k$ , удовлетворяющих неравенству

$$\|\sigma_n^{(k)}\| \leq M \theta_n, \quad n \geq N, \quad (27)$$

где  $M > 0$  – некоторая константа.

Отметим также, что при решении последовательности уравнений (10) вовсе не обязательно перебирать все номера  $n = N, N+1, \dots$  подряд, т.е. от  $n$ -го приближенного уравнения (10) можно переходить к уравнению с номером  $n+m$ , где  $m \geq 1$ . Для определения  $m$  поступаем следующим образом. Находим число  $k_n$  способом (27), из которого вытекает, что

$$\|\sigma_{n+1}^{(0)}\| \leq (M+1)\theta_n.$$

А поскольку среди величин  $\|\sigma_{n+j}^{(0)}\|$ ,  $\sigma_{n+j}^{(0)} = A_{n+j}u_{n+1}^{(0)} - f_{n+j}(\delta)$ ,  $j > 1$  могут оказаться величины, удовлетворяющие аналогичному условию

$$\|\sigma_{n+j}^{(0)}\| \leq (M+1)\theta_n, \quad (28)$$

то в качестве  $m$  можно выбрать максимальное из чисел  $j > 1$ , для которых выполнено (28).

В заключение отметим, что метод простой итерации (12), (13) для решения некорректных уравнений (10), когда отношение  $\lambda_n^{(1)} / \lambda_n^{(i_n)}$  наибольшего и наименьшего собственных значений оператора  $A_n$  велико, является медленно сходящимся методом. Проекционно-итерационный подход позволяет ускорить сходимость процесса итерационных приближений к решению исходной задачи (1), (8) и тем самым уменьшить количество вычислительных затрат, так как значительная часть этих приближений строится для приближенных уравнений (10) невысокой размерности при неизменной погрешности  $\delta$  их правых частей.

Кроме того, ускорить сходимость итерационных методов при решении приближенных уравнений (10) можно, во-первых, за счет применения неявных итерационных методов и, во-вторых, оставаясь в классе явных методов, за счет выбора итерационного параметра  $\tau_n$  зависящим от номера

итерации. Используются также неявные итерационные методы с переменными итерационными параметрами.

**Выводы.** В данной работе впервые рассмотрен вопрос теоретического обоснования явного проекционно-итерационного метода решения некорректного линейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве, основанного на методе простой итерации. Доказана теорема о сходимости, получена оценка погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций при решении каждого из приближенных уравнений, рассматриваемых в конечномерных подпространствах исходного пространства.

### **Библиографические ссылки**

1. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд.во ЛКИ, 2009. – 480 с.
2. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: [Текст] тез. докл. междунар. конф., посвящен. памяти В.К. Иванова. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. – 306 с.
3. Матысик, О.В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач [Текст] / О.В. Матысик. – Брест: Изд. во БрГУ, 2014. – 213 с.
4. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд.во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
5. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
6. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач [Текст] / В.А. Морозов. – М.: Изд.во МГУ, 1974. – 320 с.
7. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения [Текст] / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
8. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах [Текст] / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
9. Страхов, В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации [Текст] / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.
10. Приближённое решение операторных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
11. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1-го рода [Текст] / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
12. Емелин, И.В. К теории некорректных задач [Текст] / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
13. Балашова, С.Д. Приближенные методы решения операторных уравнений [Текст] / С.Д. Балашова. – Д.: ДГУ, 1980. – 112 с.

14. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
15. **Габдулхаев, Б.Г.** Теория приближенных методов решения операторных уравнений [Текст] / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2006. – 112 с.

*Надійшла до редколегії 01.04.2015*

УДК 519.8

**В.А. Громов, А.С. Конев**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

### **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОЛОГИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ РАННЕЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОПУЛЯРНЫХ ТЕМ В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ «TWITTER»**

Рассмотрен метод определения популярности темы в социальной сети «Twitter», нацеленный на раннюю идентификацию тем, которые с некоторого момента демонстрируют взрывной рост популярности; прогнозирование здесь осуществляется в рамках парадигмы прогнозирования на основе кластеризации; в качестве алгоритмов кластеризации применяются алгоритмы, основанные на теории моделирующего поля. Метод предполагает определение настоящей (а не указанной в заголовке) темы сообщения с последующим прогнозированием популярности той или иной темы. В ходе широкомасштабного вычислительного эксперимента были выявлены характерные варианты «предвзрывной» динамики популярности тем; некоторые из них оказались эквивалентными эмпирическим приемам предсказания роста популярности темы, они известны специалистам по размещению рекламы в указанной социальной сети («краб», «бабочка Песавенто» и др.).

Розглянуто метод визначення популярності теми в соціальній мережі «Twitter», націлений на ранню ідентифікацію тем, що з певного моменту демонструють вибухове зростання популярності; прогнозування тут здійснюють у межах парадигми прогнозування на основі кластеризації; як алгоритми кластеризації застосовують алгоритми теорії моделюючого поля. Метод передбачає визначення дійсної (а не зазначеної у заголовку) теми повідомлення із подальшим прогнозуванням популярності тієї чи іншої теми. У процесі ши-

рокомасштабного обчислювального експерименту виявлено характерні варіанти «передвибухової» динаміки зростання популярності теми; деякі з них еквівалентні емпіричним прийомам прогнозування зростання популярності теми, які відомі спеціалістам із розміщення реклами в зазначеній соціальній мережі («краб», «метелик Песавенто» та ін.).

The paper outlines a method to estimate possible popularity for a certain topic for social network «Twitter»: the method designed to precociously identify the topics able to demonstrate «explosive» growth in popularity rate; predictive clustering is employed to predict topics popularity; one makes use modeling field theory algorithms as clustering techniques. First of all, the method ascertains the real (not written in hash-tag) topics of twits, and then predict popularity rates for the topics. In the course of wide-ranging simulation, typical variants of «pre-explosive dynamics» were revealed; some of them were turned out to be equal to heuristic techniques to predict topics popularity well-known for PR community working in the network («crab», «Pesavento's butterfly» etc).

**Ключевые слова:** прогнозирование на основе кластеризации, теория моделирующего поля, «Twitter».

**Введение.** Всевозрастающая роль социальных сетей в формировании и анализе общественного мнения обуславливает пристальное внимание, которое уделяют политтехнологи и специалисты по проведению рекламных кампаний работ именно с этим сегментом медиа-пространства. Правильная оценка популярности темы на этапе её появления и начального развития делает возможным проведение эффективной рекламной кампании и оптимизацию расходов по соответствующей статье. Особый интерес представляет раннее выявление (идентификация) так называемых взрывных тем (всплесков), то есть тем, которые, будучи некоторое время сравнительно малопопулярными, внезапно приобретают значительную популярность.

Одной из наиболее популярных и динамично развивающихся социальных сетей является « Twitter». Здесь следует отметить, что постоянный интерес к идентификации взрывных тем на начальных стадиях существования темы со стороны специалистов по размещению рекламы в социальных медиа обусловил, с одной стороны, появление большого количества эмпирических приёмов предсказания роста популярности той или иной темы в указанной социальной сети, подобных фигурам технического анализа («краб», «бабочка Песавенто» и т.д.), а с другой – значительного числа работ, связанных с определением популярности темы с применением того или иного механизма извлечения знаний.

Так, в работе [14] представлена система  $PopTwitter$  предназначенная для выявления политических тем в «Twitter», популярность которых начинает расти;

авторы отмечают, что информация в «Twitter» распространяется быстрее, чем в других информационных средах. Рост популярности оценивается здесь с помощью отношения числа сообщений, связанных с определённой темой, в предыдущий период к числу сообщений в настоящий момент времени с учётом величины стандартного отклонения (распределение числа считается гауссовым). Работа [3] посвящена определению характеристик, описывающих эмоциональную окрашенность того или иного твита, а также сравнению методов оценки указанных характеристик.

В настоящем исследовании в качестве механизма извлечения знаний применяется метод прогнозирования, принадлежащий парадигме прогнозирования с помощью кластеризации (predictive clustering), причём в качестве элемента временного ряда выступает число ретвитов, которые получила та или иная тема в определённый промежуток времени.

Классическая постановка задачи прогнозирования предполагает анализ единственного временного ряда и построение на его основе прогнозной модели для получения оценок последующих наблюдений рассматриваемого ряда. Здесь возможно как построение одной модели для всех имеющихся в распоряжении исследователя наблюдений (как в случае применения классических методов прогнозирования – ARIMA, GARCH и др.), так и декомпозиция ряда на отдельные участки с помощью алгоритмов кластеризации с последующим построением значительного числа подмоделей, каждая из которых связана со своим кластером, как это предполагается в парадигме прогнозирования на основе кластеризации [2]; методы, построенные в рамках указанной парадигмы, позволяют эффективно прогнозировать хаотические временные ряды в силу того, что участки ряда, связанные с различными областями странного аттрактора, «оказываются» в различных кластерах с каждым из которых связана своя прогнозная модель [6].

В то же время задачи прогнозирования, характерные для медицинской статистики, при построении моделей потребления электроэнергии [9;11], динамики земной коры (предсказание землетрясений) и атмосферных фронтов (прогноз погоды) имеют значительное количество «родственных» временных рядов, которые допускают совместный анализ и построение единых прогнозных моделей.

Следует подчеркнуть, что кластеризация данных, осуществляемая в рамках прогнозирования на основе кластеризации, и построение тем или иным способом прогнозных моделей, отвечающих полученным кластерам, может рассматриваться как способ автоматической экстракции знаний, что является сильной стороной методов, принадлежащих указанной парадигме.

В работе [4] рассматривается возможность применения алгоритмов построения деревьев решений для построения алгоритмов прогнозирования

на основе кластеризации. В исследовании [11] предложен алгоритм прогнозирования на основе характерных последовательностей (*pattern sequence-based forecasting (PSF)*), основывающийся на методе  $k$ -средних; представлены результаты применения указанного алгоритма в прогнозировании суточных продаж на испанском рынке электроэнергии. Поскольку метод  $k$ -средних предполагает знание точного числа реально существующих кластеров, авторы провели широкомасштабный вычислительный эксперимент для определения оптимального числа кластеров, то есть числа кластеров, позволяющего построить наиболее эффективную прогнозную модель. Работа [6] посвящена применению метода «муравьиных колоний» для получения кластеров и построения прогноза для хаотических временных рядов; в публикации [5] с этой целью применялся алгоритм Уишарта – данный алгоритм кластеризации не требует предварительного знания числа кластеров, их оптимальное число определяется в процессе функционирования алгоритма.

В работе [15] кластеризируются не сами отрезки временных рядов, а коэффициенты регрессионных многочленов; алгоритм был применён для прогнозирования индонезийских биржевых индексов. В [16] аналогичный подход применялся для прогнозирования множественных («родственных») временных рядов. Концепция «лейтмотива» (*motif*) была введена в работе [13] как инструмент извлечения наиболее значимой информации с целью получения «хорошей» кластеризации. В исследовании [10] предлагается применять алгоритм нечётких  $c$ -средних для выделения из временного ряда нечётких информационных «гранул» с последующим построением прогноза с помощью нечёткой самоорганизующейся карты высокого порядка. Следует отметить также работу [8], в которой представлен обзор нейросетевых моделей, относящихся к парадигме эволюционирующих коннекционистских открытых систем (ECOS); парадигма предполагает выделение и обучение локальных моделей путём кластеризации с последующей их структуризацией для построения единой модели.

Важной особенностью парадигмы прогнозирования на основе кластеризации является наличие так называемых непрогнозируемых точек [5;6], то есть точек, для которых с помощью метода нельзя указать прогнозные значения – не существует кластера (определённого тем или иным способом, в зависимости от метода), центр которого был бы близок к участку ряда, по которому необходимо построить прогноз. Следует подчеркнуть, что наличие непрогнозируемых точек является существенным достоинством указанного класса методов: здесь есть возможность явно указать на невозможность прогноза в некоторой точке, в отличие от методов классической парадигмы, которые в любом случае будут давать прогноз,

даже если он заведомо ошибочный. В [ 5] указывается на эффективность применения «непоследовательных» наблюдений (наблюдений, номера которых соответствуют некоторому шаблону) в алгоритмах данного класса.

В настоящей статье предложен новый метод прогнозирования популярности тем социальной сети «Twitter», в том числе идентификации взрывных тем; метод основан на применении алгоритмов теории моделирующего поля [12] для кластеризации участков временных рядов.

Дальнейшее изложение структурировано следующим образом: во втором пункте настоящей работы представлены описания алгоритмов кластеризации, позволяющих выделить настоящую (а не формально указанную в заголовке) тему сообщения и осуществить прогнозирование популярности реальной темы. В третьем пункте работы представлены результаты применения указанного алгоритма в прогнозировании модельного временного ряда – ряда Лоренца (который имеет хаотический характер) – и для выявления взрывных тем в англоязычном « Twitter». Наконец, в заключительном, четвёртом, пункте сформулированы выводы.

Применение методов прогнозирования, построенных в рамках классической парадигмы, требует наличия отрезков ряда весьма значительной длины для получения адекватных оценок параметров модели, что явным образом вступает в противоречие с рассматриваемой задачей, где для отдельной темы число наблюдений измеряется сотнями, максимум тысячами, и тем более с задачей ранней идентификации взрывных тем, в рамках которой чем меньшее число наблюдений применяется при идентификации взрывной темы, тем лучше.

В классической прогнозной парадигме указанное противоречие, по видимому, неразрешимо, в то время как в рамках парадигмы прогнозирования на основе кластеризации можно предложить использование наблюдений не только рассматриваемого ряда, но и всей совокупности подобных («родственных») ему рядов. С этой целью в качестве исходных данных в настоящей работе рассматривалась вся совокупность временных рядов, порождённых направлением «финансы», в англоязычном сегменте «Twitter». Это позволило, с одной стороны, обеспечить весьма значительный объём данных (порядка 10000 точек), а с другой – гарантировать их известную однородность.

Другой существенно важной для построения эффективного прогноза особенностью рассматриваемой предметной области является отсутствие надёжных оснований для отнесения конкретного сообщения (твита) к той или иной теме: в некоторых сообщениях хеш\_теги вообще отсутствуют, в значительном числе других случаев проставленные авторами хеш\_теги не

позволяют однозначно определить, к какой именно теме относится сообщение; более того, в некоторых случаях авторские хеш-теги неадекватны реальной теме сообщения. Это обуславливает необходимость определения реальной темы сообщения путём анализа текста сообщения методами интеллектуального анализа текстов (text mining).

**Постановка задачи.** Рассматривается множество кратких текстовых сообщений (твитов социальной сети «Twitter»). Необходимо, во-первых, основываясь на текстах сообщений, отнести каждое сообщение к той или иной «настоящей» теме – темы выделяются в процессе классификации сообщений; во-вторых, выбрав в качестве меры популярности темы число ретвитов сообщений, относящихся к теме, построить прогноз роста популярности темы с течением времени. Наконец, выделить среди всех возможных характерных вариантов динамики роста/падения популярности тематике, которые позволяют с заданным ограничением на величину ошибки предсказать появление взрывной динамики по результатам наблюдения ряда до наступления динамики указанного типа или на ранних ее этапах

Математически первая задача формулируется как задача классической кластеризации, сформулированная для многомерных векторов, указывающих на принадлежность того или иного слова из стандартного словаря наиболее популярных слов («word bag»).

Вторая задача может быть сформулирована как задача прогнозирования на основе кластеризации. Здесь рассматриваются отрезки «родственных» временных рядов  $y_0, y_1, \dots, y_{t_s}$ ,  $s = \overline{1, S}$ , где  $S$  – общее число временных рядов;  $y_{t_s}$  – число наблюдений в  $s$ -м ряде. Необходимо построить прогнозные значения  $\tilde{y}_{t_s+1}, \dots, \tilde{y}_{t_s+K}$  для  $K$  следующих позиций во временном ряде с тем, чтобы ошибка прогнозирования не превышала заданной величины  $\varepsilon$ :  $|\tilde{y}_{t_s+i} - y_{t_s+i}| < \varepsilon$ ,  $i = \overline{1, K}$ ,  $s = \overline{1, S}$ , либо указать на невозможность прогноза для той или иной позиции  $t_s + i$ ,  $i = \overline{1, K}$ ,

$s = \overline{1, S}$ ; доля такого рода позиций от общего числа позиций, для которых необходимо построить прогноз ( $KS$ ), не должна превышать заданной величины  $\alpha$ .

Наконец, третья задача сводится к выявлению среди характерных вариантов динамики тех временных рядов (выявленных в процессе решения

второй задачи), которые позволяют осуществить раннюю идентификацию взрывных тем с заданными ограничениями на ошибки 1-го и 2-го рода.

**Алгоритм построения прогноза.** Для определения «настоящей» темы сообщения и для осуществления кластеризации, необходимой для построения прогноза, применялся один и тот же алгоритм кластеризации – адаптивная нейросетевая система, применяющая принцип максимального правдоподобия (*maximum likelihood adaptive neural system (MLANS)*); алгоритм основывается на принципах теории моделирующего поля (*modeling field theory (MFT)*), предложенной Л. И. Перловским [12].

Алгоритм обучения модели состоит из двух подсистем – моделирующей и ассоциативной:

1. Моделирующая подсистема производит оценку параметров распределений, составляющих гауссову смесь, а именно оцениваются компоненты векторов математических ожиданий многомерных гауссовых распределений, их дисперсионно-ковариационных матриц, а также математическое ожидание попадания вектора в тот или иной кластер.

2. Ассоциативная подсистема позволяет оценить для каждого вектора значения нечётких функций принадлежности кластерам.

Взаимная обусловленность параметров, оценка которых осуществляется в рамках ассоциативной и моделирующей подсистем, приводит к реализации алгоритма MLANS в виде итерационного процесса; критерием окончания данного итерационного процесса выступает малость изменения оценок параметров модели на двух соседних итерациях: в качестве метрики применяется расстояние Бхаттачарья (Bhattacharyya).

С применением обозначений  $x_n, n = \overline{1, N}$  для множества векторов, подлежащих кластеризации,  $N_k, M_k, C_k, k = \overline{1, K}$  для соответственно ожидаемого числа векторов, принадлежащих  $k$ -му кластеру, математического ожидания и дисперсионно-ковариационной матрицы многомерного нормального распределения  $pdf(x_n | k)$ , описывающего плотность вероятности принадлежности данному кластеру,  $f_{kn}$  для значения нечёткой функции принадлежности  $n$ -го вектора  $k$ -му кластеру соотношения моделирующей подсистемы могут быть записаны в следующем виде:

$$N_k = \sum_{n=1}^N f_{kn}, \quad M_k = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^N f_{kn} x_n, \\ C_k = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^N f_{kn} (x_n - M_k) \Upsilon (x_n - M_k);$$

а соотношения ассоциативной подсистемы –

$$f_{kn} = \frac{pdf(x_n | k)}{\sum_{i=1}^K pdf(x_n | i)}.$$

Расстояние Бхаттачария между плотностями двух нормальных распределений с математическими ожиданиями и дисперсионно-ковариационными матрицами  $M_1, M_2$  и  $C_1, C_2$  даётся выражением

$$\rho = \frac{1}{8} \Delta M \bar{C}^{-1} \Delta M + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\det \bar{C}}{\sqrt{\det(C_1 C_2)}} \right],$$

где  $\Delta M = M_1 - M_2$ ,  $\bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$ .

К недостаткам метода следует отнести необходимость априорного знания числа кластеров, что обуславливает необходимость проведения дополнительного исследования зависимости качества прогноза от числа кластеров.

Для формирования выборки для задачи выделения «настоящих» тем был сформирован стандартный словарь наиболее популярных слов (список тем), в который были включены имена существительные и глаголы, наиболее часто встречающиеся в используемом корпусе текстов. Бинарные вектора, образующие выборку, формировались по следующему правилу:  $i$ -й компонент вектора был равен 1, если в сообщении входило слово (или однокоренное ему), стоящее на  $i$ -й позиции в словаре, и 0 в противном случае.

Для данной задачи число кластеров равнялось числу тем в словаре (50). В качестве начальных условий для алгоритма выбирались «чёткие» значения

$$f_{kn} : f_{kn} \in \{0,1\}, \sum_{k=1}^K f_{kn} = 1.$$

После осуществления кластеризации сообщение считается отнесённым к той или иной «настоящей» теме, если оно принадлежит одному кластеру с бинарным вектором, точно соответствующим некоторой теме, то есть имеющим только одну ненулевую компоненту, а именно ту, номер которой совпадает с номером соответствующей темы в словаре.

Выделение «настоящих» тем позволило сформировать временные ряды, характеризующие изменение популярности темы (число ретвитов, относящихся к теме сообщений) с течением времени.

Для формирования выборки для задачи прогнозирования популярности темы из сформированных таким образом временных рядов конструирова-

лись вектора выборки из всевозможных наборов наблюдений временного ряда, номера которых удовлетворяют некоторому шаблону [ 5; 6 ]. Под шаблоном будем понимать фиксированную последовательность расстояний между номерами (в общем случае не следующих непосредственно друг за другом) наблюдений временного ряда. Тем самым обучающая выборка формировалась из непоследовательных ( non-successive) наблюдений, что лучше отвечает природе рассматриваемой задачи. Для получения эффективного прогноза здесь применялись все возможные шаблоны длины 4, в которых разность между соседними элементами не превышает 10; при этом описанный выше алгоритм кластеризации применялся отдельно к выборке, полученной для каждого из шаблонов.

При прогнозировании усечённые на один элемент центры всех кластеров, построенные по всем шаблонам, сравниваются с вектором, получаемым наложением соответствующего шаблона на прогнозируемый временной ряд таким образом, чтобы последний элемент шаблона совпадал с позицией прогнозируемого элемента. В качестве прогнозного значения принимается последний элемент того центра, усечённый вариант которого оказался ближайшим (в смысле евклидовой метрики) к построенному таким образом вектору.

Для улучшения качества прогноза здесь применялся приём отсечения кластеров с низкой прогнозной ценностью: для этого вводилась дополнительная (проверочная) выборка, и значение этой характеристики (при заданном максимальном допустимом значении погрешности  $\alpha$ ) для  $k$ -го

кластера вычислялось как 
$$I_k(\alpha) = \sum_{i \in S_k} \frac{\bar{\epsilon}_i}{\epsilon_{ki}} \frac{1}{|V_i| - 1}, \quad \bar{\epsilon}_i = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in V_k} \epsilon_{ji},$$
 где

$V_i$  – множество кластеров, которые могут быть применены для прогнозирования  $i$ -го наблюдения с ошибкой, меньшей заданного значения  $\alpha$ ;  $\epsilon_{ji}$  – ошибка, соответствующая прогнозу  $i$ -го наблюдения с применением

центра  $j$ -го кластера,  $j \in V_i$ ;  $\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in V_k} \epsilon_{ji}$  – средняя ошибка про-

гнозирования для  $i$ -го наблюдения по всем кластерам;  $S_k$  – множество таких наблюдений, что центр  $k$ -го кластера обеспечивает прогноз с ошибкой меньшей, чем заданное значение  $\alpha$ .

Следует отметить, что применение приведенного выше метода прогнозирования с помощью тем, определяемых самими пользователями в хеш-тегах, приводило к существенно худшим прогнозным результатам.

**Прогнозирование популярности тем социальной сети «Twitter».** Для проверки эффективности работы алгоритма была применена совокупность временных рядов, порождённых системой Лоренца [7]; в качестве базовых применялись стандартные «хаотические» значения параметров  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ ; далее значение параметра  $r$  «зашумлялось» белым шумом с дисперсией, равной 1.0, и модифицированная таким образом система применялась для генерации временных рядов.

Для получения временных рядов здесь применялся метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности: шаг интегрирования составлял 0.1, уровень шума соответственно может быть оценён как  $10^{-5}$ . Для обеспечения выполнимости условий теоремы Такенса (движение наблюдаемой траектории в окрестности странного аттрактора системы), а следовательно, применимости прогнозных алгоритмов указанного класса [5] отбрасывались первые 800 значений временного ряда, полученного интегрированием системы. Тестирующее множество здесь состояло из 3000 наблюдений, размер обучающего множества составлял 10000 наблюдений.

Для ряда Лоренца и для тех временных рядов, характеризующих популярность тем в «Twitter», размеры которых позволяют это сделать, были получены (с помощью метода аналога [1]) оценки значений старших показателей Ляпунова. Во всех случаях значения показателей Ляпунова строго положительны, что является признаком хаотичности рассматриваемых рядов; в частности, для ряда Лоренца значение старшего показателя Ляпунова составило 0.91, что хорошо согласуется с представленными в литературе результатами [Там же].

Среднеквадратичная ошибка (при прогнозировании на один шаг вперёд) для рядов, порождённых системой Лоренца, составила 2,2 %.

Для определения популярности той или иной тематики в социальной сети «Twitter» была сформирована обучающая выборка из 111000 сообщений, охватывающих период с 2006 по 2014 г.; выборка формировалась из сообщений англоязычных экономических и финансовых изданий, выкладываемых ими в «Twitter».

После необходимой предварительной обработки информации – очистки от ссылок, сокращений, хеш-тегов, имён пользователей, а также от вспомогательных частей речи – была проведена кластеризация с выделением сообщений, относящихся к той или иной «настоящей» теме; наиболее популярными оказались темы (в порядке убывания популярности): «нефть» («oil»), «биткойн» («bitcoin»), «инвестиции» («investments»), «кризис» («crisis»), «валюта» («currency»), «евро» («euro»), «долг» («debt»). 88 % тем в этом списке оказались именами существительными. В

значительном числе случаев было установлено расхождение между «настоящей» темой и темой, которую ставит автор сообщения (хеш\_тег).



*а*



*б*

**Рис. 1.** Твиты по «настоящим» темам «инвестиции» (а) и «биткойн» (б)  
*Примечание:* по оси ординат отложено число ретвитов для того или иного твита.

На рис. 1, *а* представленны твиты, соответствующие «настоящему» темам «инвестиции» и «биткойн» (рис. 1, *б*) за 70 суток с 22 октября 2013 по 1 января 2014 г.; по оси ординат отложено число ретвитов, соответствующих тому или иному твиту. Сходимость алгоритма достигалась в среднем за 1000 итераций (рис. 2). В первом случае (рис. 3) средняя ошибка при прогнозировании на 1 шаг вперёд составила 5,5%, во втором – 25,4%. Высокое значение ошибки прогноза во втором случае объясняется тем, что, несмотря на популярность темы «биткойн» (начиная с конца 2012 г.), алгоритм не смог отыскать достаточное число вариантов поведения, и тема «инвестиции» фигурирует в «Twitter» гораздо дольше и соответственно даёт лучшие результаты прогнозирования.

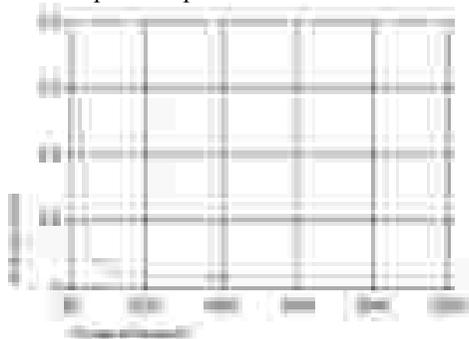


Рис. 2. Характер сходимости алгоритма: зависимость средней ошибки прогнозирования

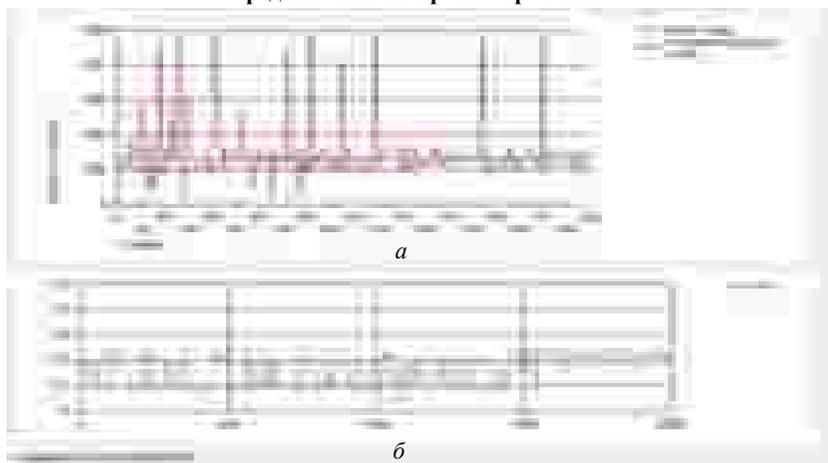


Рис. 3. Прогнозирование взрывных тем:

*а* – реальное (обозначено тонкой линией) и прогнозное (обозначено жирной линией) число ретвитов; *б* – значение относительной погрешности

В таблице представлены значения ошибок 1-го и 2-го рода для статистической гипотезы «наблюдается предвзрывное поведение» для семи наиболее популярных тем (здесь ошибка 1-го рода, когда «предвзрывное» поведение игнорируется и алгоритм не прогнозирует «взрыв» популярности темы, ошибка 2-го рода, когда «невзрывное» поведение, которое не разовьётся во взрывное, идентифицируется алгоритмом как «предвзрывное»).

**Ошибки прогнозирования взрывного роста популярности для наиболее популярных тем**

Популярность темы	Тема	Ошибка 1-го рода	Ошибка 2-го рода
1	Нефть	14.46	19.23
2	Биткойн	25.36	42.12
3	Инвестиции	18.41	20.07
4	Кризис	17.59	31.24
5	Валюта	26.87	40.56
6	Евро	21.84	37.73
7	Долг	19.63	39.65

**Выводы.** Вышеприведенный анализ позволил сформулировать следующие выводы.

Необходимым элементом прогноза динамики популярности той или иной темы является классификации всего массива сообщений социальной сети с выделением «настоящих» (а не указанных в хеш\_тегах) тем.

Применение методов парадигмы предсказания на основе кластеризации к совокупности временных рядов, дающих число ретвитов по той или иной теме, позволяет выявить характерные варианты динамики, предшествующие «взрыву» популярности темы.

В ходе широкомасштабного вычислительного эксперимента были выявлены характерные варианты «предвзрывной» динамики популярности тем; часть из них оказались эквивалентным эмпирическим приёмам предсказания роста популярности темы, известных специалистам по размещению рекламы в указанной социальной сети («краб», «бабочка Песавенто» др.).

#### **Библиографические ссылки**

1. **Малинецкий, Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики [Текст] / Г.Г. Малинецкий, А.П. Потапов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
2. **Blockeel, H.** Top-down induction of clustering trees [Text] H. Blockeel, L. De Raedt, J. Ramon // 15th International Conf. on Machine Learning: 1998. – P. 55 – 63.

3. **Bravo-Marquez, F.** Meta-level sentiment models for big social data analysis [Text] / F. Bravo-Marquez, M. Mendoza, B. Poblete // Knowledge-Based Systems. – 2014. – Vol. 69. – P. 86 – 99.
4. Analysis of Time Series Data with Predictive Clustering Trees [Text] / S. Dzeroski, V. Gjorgjioski, I. Slavkov, J. Struyf // Proceedings of the 5th international conference on Knowledge discovery in inductive databases. – 2006. – P. 63 – 80.
5. **Gromov, V.A.** Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction [Text] / V.A. Gromov, E.A. Borisenko // Neural Computing & Applications. – 2015. – Vol. 74. – P. 1214 – 1226.
6. **Gromov, V.A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization [Text] / V.A. Gromov, A.N. Shulga // Expert Systems with Applications. – 2012. – Vol. 39. – P. 8474 – 8478.
7. **Jackson, E.A.** The Lorenz System: I. The Global Structure of its Stable Manifolds [Text] / E.A. Jackson // Physica Scripta. – 1985. – Vol. 32, №5. – P. 469 – 475.
8. **Kasabov, N.K.** Evolving connectionist systems for adaptive learning and knowledge discovery: Trends and directions [Text] / N.K. Kasabov // Knowledge-Based Systems. – 2015. – Vol. 74. – P. 831 – 840.
9. **Koprinska, I.** Correlation and instance based feature selection for electricity load forecasting [Text] / I. Koprinska, M. Rana, V.G. Agelidis // Knowledge-Based Systems. – 2015. – Vol. 74. – P. 841 – 852.
10. The modeling and prediction of time series based on synergy of high-order fuzzy cognitive map and fuzzy c-means clustering [Text] / W. Lu, J. Yang, X. Liu, W. Pedrycz // Knowledge-Based Systems. – 2014. – Vol. 70. – P. 242 – 255.
11. Energy time series forecasting based on pattern sequence similarity [Text] / F. Martinez-Alvarez, A. Troncoso, J.C. Riquelme, J.M. Riquelme // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 2011. – Vol. 23, № 8. – P. 1230 – 1243.
12. **Perlovsky, L.** Neural networks and intellect: using model-based concepts [Text] / L. Perlovsky. – N.-Y.: Oxford University Press, 2001. – 496 p.
13. **Phu, L.** Motif-Based Method for Initialization the K-Means Clustering for Time Series Data [Text] / L. Phu, D.T. Anh // AI 2011: Advances in Artificial Intelligence. – 2011. – Vol. 7106. – P. 11 – 20
14. PoliTwo: Early detection of emerging political topics on twitter and the impact on concept-level sentiment analysis [Text] / S. Rill, D. Reinelt, J. Scheidt, R.V. Zicari // Knowledge-Based Systems. – 2014. – Vol. 69. – P. 24 – 33.

15. A Novel Evolving Clustering Algorithm with Polynomial Regression for Chaotic Time-Series Prediction [Text] / H. Widiputra, H. Kho, R. Pears, N. Kasabov // *Neural Information Processing*. – 2009. – Vol. 5864. – P. 114 – 121.
16. **Widiputra, H.** Multiple Time-Series Prediction through Multiple Time-Series Relationships Profiling and Clustered Recurring Trends [Text] / H. Widiputra, R. Pears, N. Kasabov // *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*. – 2011. – Vol. 6635. – P. 161 – 172.

*Надійшла до редколегії 01.05.2015*

УДК 519.8

**Е.М. <sup>7</sup>Киселева, Л. Л. Гарт, П.А. Довгай**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

### **О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА**

**Исследован на основе метода неопределенных коэффициентов вопрос о нахождении наименьшего допустимого количества элементов детерминированного дискретного временного ряда для получения значений его производной первого порядка с заданной точностью вычислений. Разработан программный продукт, позволяющий на классе гладких функций моделировать погрешность численного дифференцирования, проведен анализ вычислительных экспериментов.**

**Досліджено на основі методу невизначених коефіцієнтів питання про знаходження найменшої допустимої кількості елементів детермінованого дискретного часового ряду для отримання значень його похідної першого порядку із заданою точністю обчислень. Розроблено програмний продукт, що дозволяє на класі гладких функцій моделювати похибку чисельного диференціювання, проведено аналіз обчислювальних експериментів.**

**The problem of finding least admissible number of a determined discrete time series elements for obtaining its derivative of the first order values with a given precision is investigated on a base of the indeterminate coefficients method. The program of modeling numerical differentiation error for smooth functions class is worked out, the analysis of computing tests is carried out.**

**Ключевые слова:** временной ряд, производная первого порядка, аппроксимация, метод неопределенных коэффициентов, приближение, сходимость, погрешность.

**Введение.** Дифференцированием называется, как известно, процесс нахождения производной от заданной функции или же её численного значения в заданной точке. Необходимость выполнения дифференцирования возникает весьма часто и вызвана широким распространением этой операции в современной математике и её приложениях. Производная бывает нужна и сама по себе как мгновенная скорость тех или иных процессов и как вспомогательное средство для построения более сложных процедур, например, в методе Ньютона для численного решения уравнений и систем уравнений [1].

В настоящее время наиболее распространены три следующих способа вычисления производных:

- символьное (аналитическое) дифференцирование;
- численное дифференцирование;
- автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование.

Символьным (аналитическим) дифференцированием называют процесс построения производной по функции, заданной каким-то выражением, на основе известных из элементарного анализа правил дифференцирования простейших и составных функций (суммы, разности, произведения, частного, композиции, обратной функции и т. п.). На аналогичных принципах основывается автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование, но при этом оперируют не выражениями для производных, а их численными значениями при данных значениях аргументов функции. При этом символьное (аналитическое) дифференцирование и автоматическое (алгоритмическое) дифференцирование требуют знания выражения для функции или хотя бы компьютерной программы для её вычисления.

Численным дифференцированием называют процесс нахождения значения производной от функции, использующий значения этой функции в некотором наборе точек её области определения. Решение задачи численного дифференцирования имеет большое значение при обработке результатов измерений параметров движущихся объектов, в геологии при обработке измерений, получаемых в процессе бурения скважин, когда необходимо определить скорость и ускорение, с которыми бур проходит различные по плотности слои грунта; в экологии при решении обратных задач, в численных методах решения скалярных уравнений, когда функция, входящая в уравнение, задана таблично или является слишком сложной для аналитического дифференцирования и во многих других задачах.

В основе численного дифференцирования лежат различные идеи. Первая состоит в том, чтобы доопределить (восстановить) таблично заданную функцию до функции непрерывного аргумента, к которой уже применима обычная операция дифференцирования. При реализации такого подхода полезной оказывается теория интерполирования [2]. В частности, таблично заданную функцию можно заменить её интерполяционным полиномом и его производные считать производными рассматриваемой функции. Для этой процедуры подходит также интерполяция сплайнами или другими функциями. Другим подходом к получению формул численного дифференцирования является метод неопределенных коэффициентов [2], конструктивно более простой и технологичный в применении, особенно удобный в многомерном случае, когда построение интерполяционного полинома становится непростым.

Пусть задан набор узлов  $t_0, t_1, \dots, t_N$  на отрезке  $[a, b]$ , которые образуют сетку с шагом  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N > 0$  – заданное число. Пусть известны значения  $x_0, x_1, \dots, x_N$  функции  $x(t)$  такие, что  $x_i = x(t_i)$ ,  $i = 0, N$ , т.е. задан дискретный временной ряд. Напомним, что *временным рядом* называют последовательность значений функции  $x(t)$  в моменты времени  $t \in [a, b]$ , другими словами, множество наблюдений, генерируемых последовательно во времени. Если ошибки измерений и возмущения, действующие на систему, не учитываются, то говорят о задачах детерминированного наблюдения и анализа данных. В противном случае возникают различные задачи нахождения производных при наличии ошибок измерений или задачи анализа данных при неполной информации.

Задачу численного дифференцирования временных рядов, допускающих аппроксимацию полиномиальными многочленами, исследовали многие авторы, например [3; 4]. При этом предполагалось, что функция  $x(t)$  задана таблицей значений в равноотстоящих узлах  $t_0, t_1, \dots, t_N \in [a, b]$ . В работе [4], в частности, предлагается строить интерполяционный многочлен  $P_k(t)$  в  $(k+1)$  узлах ( $k < N$ ) таким образом, чтобы соблюдалось приближенное равенство

$$x(t) \approx P_k(t), \quad t \in [a, b],$$

и значение  $m$ -й производной интерполяционного многочлена  $P_k(t)$  принимается за приближенное значение  $m$ -й производной функции  $x(t)$ , т.е.

$$x^{(m)}(t) \approx P_k^{(m)}(t), \quad t \in [a, b], \quad m \leq k. \quad (1)$$

Для случая равноотстоящих узлов с шагом  $\tau = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , интерполяционный многочлен задают формулой Ньютона [4]:

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^k \frac{\Delta^i x(t_0)}{\tau^i i!} \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_j), \quad t \in [a, b], \quad (2)$$

где  $\Delta^i x(t_0)$  – конечная разность  $i$ -го порядка от функции  $x(t)$  в точке  $t = t_0$ . При этом показано, что  $m$ -я производная от интерполяционного многочлена (2) в точке  $t = t_0$  равна

$$P_k^{(m)}(t_0) = \frac{m!}{\tau^m} \sum_{i=m}^k \frac{S_i^{(m)}}{i!} \Delta^i x(t_0), \quad t \in [a, b], \quad m \leq k, \quad (3)$$

где  $S_i^{(m)}$ ,  $m \leq i \leq k$  – целые числа, называемые числами Стирлинга первого рода. Аналогичными выражениями записываются соответствующие производные от интерполяционного многочлена (2) для любого узла  $t_j$ ,

$j = \overline{0, N}$ . Недостатком такого подхода является необходимость вычисления конечных разностей от  $m$ -го до  $k$ -го порядков в формуле (3). Операция вычисления конечных разностей высокого порядка сопровождается значительными ошибками округления. Эти ошибки существенно возрастают, если временной ряд содержит случайные ошибки измерений.

Посредством дифференцирования интерполяционных формул выводятся формулы для приближенного вычисления производных различного порядка точности, наиболее распространенные из которых можно найти, например, в работах [2; 3].

В [5] поставлена задача отыскания устойчивых относительно ошибок округления формул численного дифференцирования вида

$$\dot{x}(t_n) = \sum_{i=1}^k \beta_{k-i} \dot{x}(t_{n-i}) + \tau^{-1} \sum_{i=1}^k \alpha_{k-i} x(t_{n-i}), \quad k \leq n \leq N, \quad k \in Z^+, \quad (4)$$

где  $\beta_{k-i}$ ,  $\alpha_{k-i}$  – некоторые числовые коэффициенты. Такая задача возникает, когда необходимо вычислять значения производной на основании дискретно поступающей информации о значениях функции. Показана устойчивость формул (4) при любом  $k \in Z^+$  и указан наиболее высокий порядок аппроксимации без учета случайных ошибок измерений.

В настоящее время методы численного дифференцирования детерминированных временных рядов исследованы достаточно хорошо. Известны способы повышения точности соответствующих приближенных формул, в том числе способы отыскания оптимального значения шага сетки  $\tau$ , осно-

ванные на методе Рунге-Ромберга-Ричардсона [6]. Тем не менее вопрос отыскания оптимального значения  $k \in \mathbb{Z}^+$  в формулах (1), (3), (4), обеспечивающего достижение заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычислений, на сегодня исследован недостаточно.

Кроме того, существенно меньше внимание по сравнению с детерминированным случаем уделяется решению задачи численного дифференцирования временных рядов, содержащих случайные ошибки измерений. Наиболее значимыми в этом направлении являются работы, позволяющие получить решение такой задачи с помощью аппроксимации экспериментальных данных кубическими сплайнами с последующим аналитическим дифференцированием соответствующей кривой, а также работы, посвященные дифференцированию случайных процессов. Следует особо отметить важность работ по развитию методов регуляризации для задачи дифференцирования, некорректность которой приводит к малой точности расчетных формул из-за погрешности исходных данных.

**Постановка задачи.** Пусть функция  $x(t)$  определена и дифференцируема на  $[a, b]$  и известны точные значения  $x_j = x(t_j)$ ,  $j = \overline{0, N}$  этой функции в узлах равномерной сетки

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_j \in [a, b] : t_j = a + j\tau, j = \overline{0, N} \right\} \quad \tau = \frac{b-a}{N}, \quad N > 0.$$

Требуется вычислить значение  $\dot{x}(t_n)$  производной первого порядка функции  $x(t)$  в точке  $t_n \in \overline{\omega}_\tau$ , используя значения этой функции в некотором наборе точек из  $\overline{\omega}_\tau$ , а именно требуется найти такую функцию  $\Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$  и такое наименьшее из чисел  $k \geq 1$ , для которых будет выполняться неравенство

$$\left| \dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \right| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где  $\varepsilon > 0$  – наперед заданное малое число,  $t_n \in \overline{\omega}_\tau$  ( $k \leq n \leq N$ ) [7].

Целью данной работы является исследование на основе метода неопределенных коэффициентов, дающего линейное представление для зависимости  $\Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$ , вопроса о нахождении наименьшего допустимого количества элементов временного ряда  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , обеспечивающего заданную точность вычислений значений его первой производной, а также разработка программного продукта, позволяющего на классе гладких функций моделировать соответствующую погрешность численного дифференцирования.

**Метод решения.** Рассмотрим общую схему метода неопределенных коэффициентов численного дифференцирования [2].

Зададим целое  $k \geq 1$  и будем искать приближенное выражение для  $\dot{x}(t)$  в виде

$$\dot{x}(t) \approx \sum_{i=0}^k C_i x(t_{n-i}), \quad t \in [a, b], \quad (6)$$

где  $C_i \equiv C_i(t)$ ,  $i = \overline{0, k}$  – пока неизвестные коэффициенты. Обозначим через

$$R_k(t) = \dot{x}(t) - \sum_{i=0}^k C_i x(t_{n-i}), \quad t \in [a, b] \quad (7)$$

остаточный член формулы (6) и подберем коэффициенты  $C_i$  ( $i = \overline{0, k}$ ) так, чтобы эта формула была точна ( $R_k(t) \equiv 0$ ) для всех алгебраических многочленов степени не выше  $k$ , в частности для элементарных алгебраических многочленов  $1, t, t^2, \dots, t^k$ . В результате получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомым коэффициентов:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + \dots + C_k = 0, \\ t_n C_0 + t_{n-1} C_1 + \dots + t_{n-k} C_k = 1, \\ t_n^2 C_0 + t_{n-1}^2 C_1 + \dots + t_{n-k}^2 C_k = 2t, \\ \dots \\ t_n^k C_0 + t_{n-1}^k C_1 + \dots + t_{n-k}^k C_k = k t^{k-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Матрица системы (8) есть матрица Вандермонда, которая неособенна для различных узлов  $t_{n-k}, \dots, t_{n-1}, t_n$ . При этом система (8) однозначно разрешима относительно  $C_0, C_1, \dots, C_k$  при любой правой части и  $k \geq 1$ .

СЛАУ (8) с матрицей Вандермонда в общем случае является плохо обусловленной, но на практике её решение обычно не приводит к большим ошибкам, так как порядок системы, равный  $(k + 1)$ , бывает, как правило, небольшим.

Рассмотрим формулу (6) при  $t = t_n$  ( $k \leq n \leq N$ ):

$$\dot{x}(t_n) \approx \sum_{i=0}^k C_i^{(n)} x(t_{n-i}) = \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad (9)$$

где  $\underline{C}_i^{(n)} = C_i(t_n)$ , и потребуем за счет выбора коэффициентов  $C_i^{(n)}$  ( $i = 0, k$ ), чтобы погрешность  $R_k(t_n)$  приближенного равенства (9) была величиной порядка  $O(\tau^{k+1})$ . Если функция  $x(t)$  достаточно гладкая на  $[a, b]$ , можно воспользоваться её разложением в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_n \in \bar{\omega}_\tau$ . При каждом  $t = t_{n-i}$  ( $0 \leq i \leq k$ ) будем иметь

$$x(t_{n-i}) = x(t_n - i\tau) = x(t_n) - \dot{x}(t_n) \cdot i\tau + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2!} (i\tau)^2 - \frac{\dddot{x}(t_n)}{3!} (i\tau)^3 + \dots + (-1)^k \frac{x^{(k)}(t_n)}{k!} (i\tau)^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{(k+1)}(t_n - \theta i\tau)}{(k+1)!} (i\tau)^{k+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) &= \sum_{i=0}^k C_i^{(n)} x(t_{n-i}) = x(t_n) \sum_{i=0}^k C_i^{(n)} - \tau \dot{x}(t_n) \sum_{i=0}^k i C_i^{(n)} + \\ &+ \frac{\tau^2}{2!} \ddot{x}(t_n) \sum_{i=0}^k i^2 C_i^{(n)} - \frac{\tau^3}{3!} \dddot{x}(t_n) \sum_{i=0}^k i^3 C_i^{(n)} + \dots + (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} x^{(k)}(t_n) \sum_{i=0}^k i^k C_i^{(n)} + \\ &+ (-1)^{k+1} \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=0}^k x^{(k+1)}(t_n - \theta i\tau) i^{k+1} C_i^{(n)}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения условий

$$\sum_{i=0}^k C_i^{(n)} = 0, \quad \sum_{i=0}^k i C_i^{(n)} = -\frac{1}{\tau}, \quad \sum_{i=0}^k i^2 C_i^{(n)} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^k i^k C_i^{(n)} = 0. \quad (10)$$

Эти условия образуют СЛАУ для неопределенных коэффициентов  $C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \dots, C_k^{(n)}$ . Матрица и вектор правых частей системы (10) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2^k & \dots & k^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы есть определитель Вандермонда, отличный от нуля. Следовательно, существует единственный набор коэффициентов  $C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \dots, C_k^{(n)}$ , а значит, единственная формула вида (9), которая по-

зволяет вычислить на шаблоне из  $(k+1)$  точек  $t_{n-k}, \dots, t_{n-1}, t_n$  значение  $\dot{x}(t_n)$  первой производной функции  $x(t)$  с точностью  $O(\tau^{k+1})$ .

При этом выражение для погрешности формулы (9) будет иметь вид

$$R_k(t_n) = \dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = \rho_k(t_n) \cdot \tau^{k+1}, \quad (11)$$

где

$$\rho_k(t_n) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \sum_{i=0}^k x^{(k+1)}(t_n - \theta_i \tau) i^{k+1} C_i^{(n)}, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau, \quad n = k, N. \quad (12)$$

Если известна величина  $M_{k+1} = \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k+1)}(t)|$ , то для указанных узлов

$$|\dot{x}(t_n) - \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=0}^k i^{k+1} |C_i^{(n)}| \cdot \tau^{k+1}. \quad (13)$$

При практическом использовании формул численного дифференцирования, особенно когда значения  $x_j$  получены из эксперимента, бывает

очень трудно оценить величину  $x^{(k+1)}(t)$ ,  $t \in [t_{n-k}, t_n]$  в формуле (12).

Рассмотрим простой, хотя и очень грубый, способ такой оценки. Предположим, что узлы  $t_j \in \overline{\omega}_\tau$  принадлежат малому отрезку и производная

$x^{(k+1)}(t)$  на этом отрезке изменяется незначительно. Тогда, привлекая

еще одно (дополнительное) табличное значение исходной функции, на-

пример  $x_{n-k-1} = x(t_{n-k-1})$ , мы можем заменить производную  $x^{(k+1)}(t)$

для любой точки  $t \in [t_{n-k}, t_n]$  конечной разностью  $\nabla^{k+1} x_n \approx \tau^{k+1} x^{(k+1)}(t)$

и получить на основании (11), (12) представление

$$R_k(t_n) \approx \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \nabla^{k+1} x_n \sum_{i=0}^k i^{k+1} C_i^{(n)}, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau, \quad n = k, N, \quad (14)$$

где  $\nabla^{k+1} x_n = \Delta^{k+1} x_{n-k-1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j x_{n-j}$ ,  $C_{k+1}^j = \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}$ .

Величина  $R_k(t_n)$ , как видно из (14), сложно зависит от  $k$ , и найти аналитическую зависимость между значением  $k$  и заданной точностью вычислений  $\varepsilon > 0$  так, чтобы выполнялось условие (5), которое с учетом (14) приобрело вид

$$\left| \frac{\nabla^{k+1} x_n}{(k+1)!} \sum_{i=0}^k i^{k+1} C_i^{(n)} \right| \leq \varepsilon, \quad t_n \in \overline{\omega}_\tau, \quad n = k, N, \quad (15)$$

в общем случае затруднительно. Тем не менее можно предложить некоторые алгоритмы численного анализа и минимизации по  $k$  правой части формулы (14) в целях достижения условия (15).

**Численный эксперимент и анализ результатов.** Для численного анализа погрешности (14) дифференцирования дискретного временного ряда функции  $x(t)$  в моменты времени  $t_k, t_{k+1}, \dots, t_N \in [a, b]$  был разработан программный продукт, отгестированный на классах гладких функций (полиномиальных, тригонометрических, экспоненциальных).

Программа позволяет на основании условия (15) определить в формулах численного дифференцирования (9), (10) наименьшее целое значение  $k \geq 1$ , гарантирующее достижение заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычисления значения  $\dot{x}(t_n)$  первой производной дискретного временного ряда  $x_0, x_1, \dots, x_N$  в точке  $t_n \in \overline{\omega}_\tau$  ( $k \leq n \leq N$ ), а также значение  $\dot{x}(t_n)$  в указанной точке.

Рассмотрим пример использования разработанного программного продукта для оценки скорости движения снаряда по результатам наблюдений.

Дальность полета снаряда в моменты времени  $t$  приведена в табл. 1 (три десятичных знака после запятой в исходных данных являются верными), где приняты следующие обозначения:  $t_i$  – время полета снаряда,  $D(t_i)$  – дальность полета снаряда, зависящая от времени [8].

Таблица 1

Дальность полета снаряда

$i$	$t_i$	$D(t_i)$
1	1.0	0.339
2	2.0	1.311
3	3.0	2.857
4	4.0	4.922
5	5.0	7.457
6	6.0	10.417
7	7.0	13.761
8	8.0	17.453
9	9.0	21.460
10	10.0	25.752
11	11.0	30.301
12	12.0	35.084

Пусть необходимо определить скорость  $v(t_n)$ ,  $n = 5, 6, \dots, 9$  движения снаряда в указанные моменты времени  $t_n$  посредством численного дифференцирования заданного временного ряда  $\{D(t_i), i = \overline{1, 12}\}$ . Решим задачу следующими способами:

1) аналитически, проводя дифференцирование по  $t$  известной из теории баллистики зависимости  $D(t) = -70 + 7t + 70 \cdot e^{-t/10}$  [8];

2) используя классические методы дифференцирования;

3) используя методику, положенную в основу разработанного программного продукта.

Итак, дифференцируя аналитическую зависимость для  $D(t)$ , будем иметь  $\dot{D}(t) = 7 - 7 \cdot e^{-t/10}$ . Значения скорости движения снаряда в указанные моменты времени найдем, подставляя соответствующие значения  $t_n$ .

Для реализации второго способа дифференцирования из [2] за необходимости оценивания значения производной в темпе с поступлением исходных данных воспользуемся классической формулой левой разностной производной, имеющей первый порядок точности по  $\tau$  [2]:

$$\dot{D}(t_n) \approx \frac{1}{\tau} (D(t_n) - D(t_{n-1})).$$

Результаты расчетов на основе упомянутых приемов дифференцирования приведены в табл.2. Приближенные значения производной  $\dot{D}(t_n)$ , полученные третьим способом (с использованием изложенной методики), найдены с точностью вычислений  $\varepsilon = 10^{-3}$ , при этом в последнем столбце таблицы приведено для каждого из указанных моментов времени  $t_n$  соответствующее количество  $k_n$  привлеченных членов временного ряда  $\{D(t_i), i = \overline{1, 12}\}$  достаточное для достижения точности  $\varepsilon$ .

Таблица 2

Результаты численных экспериментов

$t_n$	Аналитический метод	Разностный метод	Предложенная оценка	
			$\dot{D}(t_n)$	$k_n$
5.0	2.7543	2.535	2.7551	4
6.0	3.1583	2.960	3.1579	3
7.0	3.5239	3.344	3.5223	3
8.0	3.8547	3.692	3.8552	4
9.0	4.1540	4.007	4.1535	3
Среднее значение ошибки		0.1814	0.0008	

Анализ результатов показывает практическую сходимость метода (9), (10), программно реализованного для рассмотренной задачи, а также возможность численного моделирования производной временного ряда на основе метода неопределенных коэффициентов с любой наперед заданной точностью вычислений за счёт привлечения соответствующего количества членов временного ряда.

**Выводы.** В работе исследован вопрос о нахождении наименьшего допустимого количества элементов детерминированного временного ряда  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , обеспечивающего заданную точность вычислений значений его первой производной; разработан программный продукт, позволяющий на классе гладких функций моделировать соответствующую погрешность численного дифференцирования; проведен анализ предложенной методики на примере решения конкретной задачи.

Кроме того, рассматривался лишь один из источников погрешности численного дифференцирования – погрешность аппроксимации, которая определяется величиной остаточного члена. Как видно из (14), анализ остаточного члена нетривиален. Отметим лишь, что погрешность аппроксимации при уменьшении шага сетки  $\tau$ , как правило, уменьшается.

Другой источник погрешности численного дифференцирования связан с погрешностями исходных данных и погрешностями округлений при проведении расчетов на компьютере. Обусловленные этими причинами погрешности, в отличие от погрешности аппроксимации, возрастают с уменьшением шага  $\tau$ . Для авторов в дальнейшем представляет интерес исследование получившей распространение в последнее время группы методов численного дифференцирования, основанной на идеях регуляризации.

#### **Библиографические ссылки**

1. Шарый, С.П. Курс вычислительных методов [Текст] / С.П. Шарый. – Новосибирск: Ин-т выч. технологий СО РАН, 2012. – 315 с.
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Физматлит, 2001. – 630 с.
3. Вержбицкий, В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст] / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 266 с.
4. Мысовских, И.П. Лекции по методам вычислений [Текст] / И.П. Мысовских. – М.: Гос. изд. во физ.-мат. литературы, 1962. – 345 с.
5. Зальцер, Дж.М. Частотный анализ вычислительных машин в реальном времени [Текст] / Дж.М. Зальцер // Частотные методы в автоматике. – М.: Изд. во иностр. лит., 1957. – 396 с.

6. **Пирумов, У.Г.** Численные методы [Текст] / У.Г. Пирумов. – М.: Изд.во МАИ, 1998. – 188 с.
7. **Кунцевич, В.М.** О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений [Текст] / В.М. Кунцевич // Автомат. и телемех. – 2005. – № 5. – С. 125–133.
8. **Гончарова, Е.Н.** Численное дифференцирование временных рядов с использованием фильтра Калмана-Бьюси [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.Н. Гончарова. – Ставрополь, 2004. – 124 с.

*Надійшла до редколегії 01.06.2015*

УДК 519.8

**Е.М. <sup>8</sup>Киселева\*, Л.С. Коряшкина\*\*, А.А. Михалева\***  
*\*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*  
*\*\*ГВУЗ «Национальный горный университет», г. Днепропетровск*

## **ОПТИМАЛЬНОЕ МНОГОКРАТНОЕ ШАРОВОЕ ПОКРЫТИЕ НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ**

Рассмотрена непрерывная задача оптимального многократного шарового покрытия  $n$ -мерного ограниченного множества со сложной границей шаров минимального радиуса с дополнительными ограничениями на расположение центров шаров. Предложен подход к решению этой задачи, основанный на сочетании аппарата  $R$ -функций, штрафных функций и алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Приведенные результаты вычислительных экспериментов.

Розглянуто неперервну задачу оптимального багатократного кульового покриття  $n$ -вимірної обмеженої множини зі складною границею кулями мінімального радіуса з додатковими обмеженнями на розташування центрів куль. Запропоновано підхід щодо розв'язання цієї задачі, заснований на поєднанні апарату  $R$ -функцій, штрафних функцій та алгоритмів розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин. Наведено результати обчислювальних експериментів.

The continuous problem of multiple covering of  $n$ -dimensional bounded set with complex boundary by balls of the smallest radius under additional restrictions on the placing of balls' centers is considered. Presented approach to solving this

problem is based on a combination of apparatuses of R-functions and penalty functions and algorithms for solving of continuous problems of optimal sets partitioning. The results of computational experiments is given.

**Ключевые слова:** непрерывная задача многократного покрытия, оптимальное  $k$ -кратное шаровое покрытие, R-функции, диаграммы Вороного высших порядков, штрафная функция, недифференцируемая оптимизация.

**Введение.** Разработке и обоснованию методов решения задач многократного шарового покрытия ограниченных областей с применением теории оптимального разбиения множеств (ОРМ) [1] посвящены работы [2–6]. Интенсивное исследование задач многократного покрытия обусловлено широким спектром их практических приложений [2; 3]. В [2–5] представлены математические модели непрерывных задач многократного шарового покрытия с различными критериями качества покрытия и конструктивные методы их решения. Во избежание ситуаций, когда оптимальное размещение центров шаров, образующих покрытие заданной области, включает «почти слипшиеся» центры, что на практике не допустимо, в [6] сформулирована задача многократного покрытия ограниченной в  $E_n$  области кругами минимального радиуса с дополнительными условиями на расположение центров, а также представлен алгоритм приближенного решения таких задач.

В данной работе основной акцент сделан на алгоритмическое задание формы покрываемой области, учет ее границ при размещении центров шаров, образующих многократное покрытие области.

**Математическая модель задачи многократного оптимального шарового покрытия с ограничениями [6].** Пусть  $\Omega \subset E_n$  – ограниченное, замкнутое множество,  $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$  – с.шар радиуса  $R$  с центром в точке  $\tau_i$  из  $\Omega$ , где  $c(x, \tau_i)$  – некоторая метрика (евклидова, манхэттенская). Требуется определить величину радиуса оптимального покрытия

$$\hat{R}(\mathcal{T}_*^N) = \min_{(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i \in \{1, \dots, N\}} c(x, \tau_i), \quad (1)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , на котором достигается значение  $\hat{R}(\mathcal{T}_*^N)$ , при условиях:

$$\forall x \in \Omega : x \in \bigcup_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad k \leq l \leq N; \quad (2)$$

$$\min_{(i,j):i>j} c(\tau_i, \tau_j) \geq \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\sigma > 0$  – заданная величина.

$k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$ , задаваемое вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  и удовлетворяющее условиям (2), с радиусом  $\hat{R}(\tau^N)$ , определяемым формулой (1), является **минимальным  $k$ -кратным с-шаровым покрытием, генерируемым вектором  $\tau^N$** .

Ограничение (3) отвечает за такое размещение центров (сервисов), при котором каждые два из них находились бы на расстоянии, не меньшем  $\sigma$ .

Как указано в [2; 3], при разработке метода решения задачи о многократном шаровом покрытии более конструктивной оказывается следующая форма записи ее математической модели.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, замкнутое множество в пространстве  $E_n$ ,  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – некоторый заданный на множестве  $\Omega$  (или в пространстве  $E_n$ ) набор точек. Будем говорить, что точки  $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$  образуют набор  $k$ -ближайших соседей точки  $x \in \Omega$  из заданных  $N$  точек, если

$$\forall j \in \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_j), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \quad (4)$$

причем индексы  $i_1, i_2, \dots, i_k$  принимают наименьшие возможные значения.

Введем в рассмотрение множество  $\Lambda_N^k$ :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}.$$

Тогда для каждой точки  $x \in \Omega$  набор  $k$ -ближайших соседей из фиксированного набора точек  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$  находится, решая задачу поиска такого вектора  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Lambda$ , при котором достигается минимальное значение следующей величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \overline{1, k}} c(x, \tau_{i_j}).$$

Задача о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное с-шаровое покрытие множества состоит в отыскании величины

$$\hat{R} = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \overline{1, N}} c(x, \tau_i).$$

Задачу о минимальном  $k$ -кратном  $c$ -шаровом покрытии с размещением центров шаров с ограничениями математически сформулируем так: требуется найти величину

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot), \tau^*_N) = \inf_{(\tau^*_1, \dots, \tau^*_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k_N} \max_{i \in \overline{1, k}} (cx, \tau^*_i) (x), \quad (5)$$

а также вектор-функцию  $\lambda^*(x) \in \hat{\Lambda}$  и вектор  $\tau^*_N = (\tau^*_1, \dots, \tau^*_N) \in \Omega^N \subset E^N_N$ , при которых в (5) достигается нижняя грань и выполняются условия (3).

**Аналитическое описание формы покрываемой области**. Следует заметить, что при решении задачи покрытия ограниченных областей со сложными границами иногда достаточно простого кодирования элементов чертежей (изображений, рисунков) или поточечного их сканирования. Такой подход к описанию области возможен, если, например, не требовать размещения центров шаров, покрывающих область, в самой области. Алгоритм, описанный в [3], как раз и предполагает такой способ задания покрываемой области. Если же искать координаты центров внутри покрываемой области, а область имеет достаточно сложную границу, то необходимо задать эту границу в той форме, которая принята в аналитической геометрии – с помощью уравнений и неравенств. В дальнейшем, при разработке алгоритма оптимального многократного покрытия области, следует учитывать эти математические конструкции при отыскании координат размещаемых центров шаров.

Как известно, одним из методов, применяемых к решению обратной задачи геометрии – построение уравнений заданных геометрических объектов – является метод  $R$ -функций Р.Л. Рвачева [4]. С помощью  $R$ -функций возможно построение в неявной форме уравнений границ составных областей по известным уравнениям простых областей.

Для задания геометрии области воспользуемся аппаратом  $R$ -функций. Приведем некоторые понятия и теоремы из теории  $R$ -функций, следуя [7].

**Определение** Точку  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  пространства  $X \in E^n$  называют вырожденной, если хотя бы одна из ее координат равна нулю. В противном случае точку называют невырожденной.

Множество всех вырожденных точек пространства  $X$  представляет собой объединение  $n$  гиперплоскостей  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , которое можно рассматривать как единую гиперповерхность  $H$ . Гиперповерхность  $H$  разбивает  $n$ -мерное пространство на  $2^n$  областей  $H_j, j = 1, 2, \dots, 2^n$ .

**Определение** Функцию  $y = f(x_{12}x, \dots, x_n)$ , определенную всюду в пространстве  $X$ , называют **R-функцией**, если в каждой из областей  $H_j, j = 1, 2, \dots, 2^n$ , она сохраняет постоянный знак, т. е.

$$S[f(x_{12}x, \dots, x_{ni})] = F \text{ const},$$

где  $S(x)$  – двузначный предикат, с помощью которого определяется принадлежность величины  $z$  к одному из классов положительных или отрицательных чисел:

$$S(x) = \frac{1 + \text{sign}(z)}{2}, \quad z \neq 0;$$

$F_i$  – двоичная величина, одна и та же для всех точек области  $H_j, j = 1, 2, \dots, 2^n$ .

Для того чтобы функция  $f(x_{12}x, \dots, x_n)$  была R-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию:

$$S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F(x_1, S(x_2), \dots, S(x_n)),$$

где  $F(x_1, X_2, \dots, X_n)$  – некоторая булева функция.

Примерами R-функций в двумерном пространстве и соответствующих им булевых функций являются, например, следующие пары:

1)  $y = x_1 x_2, \quad F(x_1, X_2) = X_1 \cdot X_2;$

2)  $y = \bar{x}_1, \quad F(x_1) = \bar{x}_1;$

3)  $x_1 x_2 \wedge \bar{\alpha} = \frac{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha \cdot x_1 x_2})}{2}, \quad F(x_1, X_2) = X_1 \cdot X_2;$

4)  $x_1 x_2 \vee \bar{\alpha} = \frac{(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha \cdot x_1 x_2})}{2}, \quad F(x_1, X_2) = X_1 \cdot X_2; \quad -1 \leq \alpha \leq 1.$

Функцию  $x_1 x_2 \wedge \alpha$  называют **R-конъюнкцией**, функцию  $x_1 x_2 \vee \alpha$  – **R-дизъюнкцией**.

Метод описания геометрических двумерных областей сложной формы с помощью R-функций основывается на следующей теореме.

**Теорема.** Если области  $D_1, \dots, D_m$  определяются соответственно неравенствами

$$f_1(x_1, x_2) \geq 0; f_2(x_1, x_2) \geq 0; \dots; f_m(x_1, x_2) \geq 0,$$

а логика построения области  $D$  задана булевой функцией  $D = F[D_1, \dots, D_m]$ , то неравенство

$$\Psi(x_1, x_2) \equiv \Phi[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)] \geq 0,$$

где  $\Phi[z_1, z_2, \dots, z_m]$  –  $\mathbf{R}$ -функция, соответствующая булевой функции  $D = F[D_1, \dots, D_m]$ , определяет область  $D$ .

Применение описанного метода для решения задач оптимального покрытия множеств, имеющих сложную форму, приведем ниже, после описания метода и алгоритма решения задачи об оптимальном многократном покрытии заданного множества.

**Описание метода решения.** Поскольку для компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  и непрерывной функции  $c(x, \tau)$  оптимальное  $k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$  заданным числом  $N$  шаров одинакового радиуса существует, то задачу (5) можно переписать следующим образом:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (6)$$

где

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \overline{1, N}} (c(x, \tau_i)).$$

Свойства целевой функции  $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6) для случая евклидовой нормы  $c(x, \tau_i)$  рассмотрены в [4,5]. Одно из них, полезное для дальнейшего описания алгоритма решения задачи, приведем здесь.

**Свойство.** Для непустого компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  и  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$  из  $\Omega^N$  справедливо следующее равенство:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \overline{1, N}} (c(x, \tau_i)) = \max_{m \in \overline{1, \dots, M}} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} (c(x, \tau_i)),$$

где множества  $\Omega_m, m \in \overline{1, M}$ ,  $M \leq \frac{k}{N}$ , составляют  $k$ -кратную диаграмму Вороного для множества  $\Omega$ , т.е. такое разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ , что:

$$\bigcup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega; \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad \forall i \neq j, i, j = \overline{1, M};$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega \mid \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\},$$

где  $T_{mk} = \{i_{12}^m, i^m, \dots, i^m\}$ ,  $1, \overline{mM}$  – всевозможные  $k$ -элементные подмножества множества индексов  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

Поскольку множество  $\Omega_m$  определяется набором из  $k$  центров с индексами  $i_{12}^m, i^m, \dots, i^m$ , вместо  $\Omega_m$  будем использовать обозначение  $\Omega(\overline{T}^m)$ , указывая при этом, что данная ячейка Вороного соответствует набору центров  $\overline{\tau}^m = \{i_{12}^m, \tau_{i^m}, \dots, \tau_{i^m}\}$ .

Приведем далее формулы для вычисления субградиента целевой функции  $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6).

Обозначим через  $V$  фиксированное разбиение непустого компактного множества  $\Omega$  на  $\overline{M} \subseteq \overline{N}$  подмножеств  $V_1, \dots, V_m, \dots, V_{\overline{M}}$ , составляющих  $k$ -кратную диаграмму Вороного для  $\Omega$ , причем все  $V_i$  – непустые, компактные.

Введем также для каждого  $1 \leq i \leq N$  функции

$$R_{i^m}(\tau^N) = \max_{T_{hm} \in T} \max_{x \in \overline{T}^m} c(x, \tau^N). \quad (7)$$

Субградиентное множество  $G_{R_{i^m}}(\hat{\tau}^N)$  в точке  $\hat{\tau}^N$  функции (7) вычисляем по формуле

$$G_{R_{i^m}}(\hat{\tau}^N) = \overline{\text{co}}_{x \in \overline{T}^m} \{c(x, \tau_i)\}, \quad (8)$$

где  $I(\hat{\tau}^N) = \left\{ x \in \bigcup_{m \in T_m} V_m; c(x, \hat{\tau}_i) = R_{i^m}(\hat{\tau}^N) \right\}$ ;  $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$  – субдифференциал

функции  $c(x, \tau_i)$  по  $\tau_i$  на  $E_n$  при фиксированном  $x \in \overline{T}^m$ .

Обобщенный градиент целевой функции задачи (6) имеет следующий вид:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N), \dots, g_R(\tau^N)),$$

$i$ -я компонента которого является элементом субградиентного множества функции  $R_i(\overline{T}^N, 1, \overline{N})$ , из (7) в точке  $\tau_i$ , записываемого так:

$$G_{R_i^v}^{\tau_i}(\tau^{NN}) = \arg \min_{\tau_i} \left\{ \max_{T_m \in T} \max_{x \in \bar{\Omega}^m} c(x, \tau_i) \right\}, \quad 1, \dots, iN, \quad (9)$$

где  $g_{\tau_i}^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$  – обобщенный градиент функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_{iN}, \dots, \tau_N)$ , а  $\tau_i = (\tau_{ii}^{(1)}, \dots, \tau_{ii}^{(n)})$ . Как замечено в [4, 5], субградиентное множество  $G_{R_i^v}^{\tau_i}(\mathcal{G}^N)$  непустое, выпуклое, компактное.

В формуле (9)  $T_m$  –  $m$ -е подмножество фиксированного  $k$ -кратного разбиения множества  $\Omega$ . Однако, если разбиение множества  $\Omega$  на подмножества не фиксированно и неизвестно заранее положение точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующих оптимальное покрытие множества  $\Omega$ , а значит, и соответствующее  $k$ -кратное разбиение Вороного, то функция  $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6) не является выпуклой на  $\Omega^N$  вследствие невыпуклости по  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  на  $\Omega^N$  функции  $\hat{r}(x, \tau^N) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \bar{N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$ .

Хотя функция  $\hat{r}(x, \tau^N)$  не является выпуклой по  $\tau^N$  при любом фиксированном  $x \in \Omega$ , она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции  $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , поэтому ее почти градиент совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Далее опишем подход к решению задачи об оптимальном шаровом покрытии, в которой требуется принадлежность всех центров шаров покрываемой области. Алгоритм решения задачи в случае, когда центры могут выходить за пределы заданной области, представлен в [4; 5].

Для решения задачи (5), (3) предлагаем следующий подход. Для учета дополнительных условий (3) в задаче многократного покрытия введем в рассмотрение штрафную функцию вида

$$P_1(\tau_1, \dots, \tau_N) = M \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)),$$

где  $M \gg 0$  – коэффициент штрафа. Для учета принадлежности размещаемых центров заданному множеству  $\Omega$  введем функцию штрафа, накладываемого за выход за пределы этого множества. Пусть логика по-

строения области  $\Omega$  задана булевой функцией  $\Omega = F[D_1, \dots, D_m]$ , где области  $D_1, \dots, D_m$  определяются неравенствами

$$f_1(x) \geq 0; f_2(x) \geq 0; \dots; f_m(x) \geq 0,$$

а неравенство

$$\Psi(x) \equiv \phi[f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)] \geq 0,$$

где  $\phi[z_1, z_2, \dots, z_m]$  –  $\mathbf{R}$ -функция, соответствующая булевой функции

$D = F[D_1, \dots, D_m]$ , определяет область  $\Omega$ . Пусть функция  $P_2: E_n \rightarrow R$  такова, что

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \Psi(\tau) \geq 0 \\ > 0, & \Psi(\tau) < 0. \end{cases}$$

Тогда от задачи (5), (3) совершаем переход к задаче без ограничений (задаче со штрафами):

$$\bar{R}_M(\mathfrak{F}^N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (10)$$

где

$$\bar{R}_M(\mathfrak{F}^N) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + P_1(\tau_1, \dots, \tau_N) + M \sum_{i=1}^N P_2(\tau_i) =$$

$$\max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} (cx, \tau_i^{\lambda}) (x) + P_1(\tau_1, \dots, \tau_N) + M \sum_{i=1}^N P_2(\tau_i).$$

Численный алгоритм решения задачи (10), приведенный ниже, базируется на методе обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности последовательных обобщенных градиентов (г-алгоритм Шора [8, 9]). При этом  $j$ -ю компоненту  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_{R_M}^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N) = (g^{\tau_1}(\mathfrak{F}^N), \dots, g^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N), \dots, g^{\tau_N}(\mathfrak{F}^N)) \quad (11)$$

функции  $\bar{R}_M(\mathfrak{F}^N)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  будем вычислять по формуле

$$g_{R_j^{\tau_j}}^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N) = g_{R_j^{\tau_j}}^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N) + \frac{\partial P_1(\tau_1, \dots, \tau_N)}{\partial \tau_j} + \frac{\partial P_2(\tau_j)}{\partial \tau_j}, \quad (12)$$

где  $g_{R_j^{\tau_j}}^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N) \in G_{R_j^{\tau_j}}^{\tau_j}(\mathfrak{F}^N)$  (см. формулу (9));

$$\frac{\partial P_1(\tau_1, \dots, \tau_N)}{\partial \tau_{ij}} = M c \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \max(\sigma, (\tau_{ij}, \tau_j)) \frac{\partial c(\tau_{ij}, \tau_j)}{\partial \tau_{ij}};$$

$$\frac{\partial \Phi_2(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}} = \max(\text{sign}(\Psi(\tau_{ij}))) \Psi(\tau_{ij}).$$

**Алгоритмы решения задач оптимального многократного шарового покрытия заданного множества**

Представим приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $c$ -шаровое покрытие множества, а также алгоритм решения задачи о минимальном  $k$ -кратном  $c$ -шаровом покрытии с размещением центров шаров в области  $\Omega$  так, чтобы минимальное расстояние между каждыми двумя центрами было не меньше заданной величины  $\sigma$ .

Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Для упрощения обозначений в алгоритме вместо вектора  $\tau^N$  будем писать  $\tau$ .

Вначале приведем алгоритм решения задачи о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное покрытие заданного множества  $\Omega$  из  $E_n$   $c$ -шарами с фиксированными центрами. Если область  $\Omega$  имеет сложную форму, то заключим  $\Omega$  в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, введя вспомогательную функцию  $\rho(x)$ , определенную на  $\Pi$ , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega, \end{cases}$$

и в задаче (6) под функцией  $c(x, \tau_i)$  будем понимать функцию  $c(x, \tau_i) \rho(x)$ , определенную на параллелепипеде  $\Pi$  и совпадающую с  $c(x, \tau_i)$  на  $\Omega$ .

**Алгоритм 1-К**

**Предварительный этап.** Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta \tau_{ij}, j = 1, \dots, n$ ; обозначим  $\Pi$  – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

**Шаг 1.** Для каждой точки  $x$  сетки  $\Pi$  строим массив расстояний от этой точки до всех центров:  $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$ .

**Шаг 2.** Полученный массив расстояний  $D(x)$  сортируем по возрастанию элементов.

**Шаг 3.** В каждом отсортированном массиве отбираем элемент с порядковым номером  $k$ , обозначим этот элемент  $c^k(x, \tau_{i_k})$ .

**Шаг 4.** Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$R = \max_{x \in \Pi} c^k(x, \tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение  $R$  и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках  $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , которые  $k$ -кратно покрывают множество  $\Omega$ .

Алгоритм **1.К** описан.

Представим далее один из возможных численных алгоритмов решения задачи (10) об оптимальном  $k$ -кратном покрытии – отыскания координат центров  $(\tau_1^{**}, \dots, \tau_N^{**})$ , минимизирующих целевую функцию  $\bar{R}_M(\mathcal{T}^N)$ . В основе этого алгоритма лежит метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. Составной частью алгоритма является этап построения  $k$ -кратной диаграммы Вороного и вычисление вектора обобщенного градиента целевой функции задачи (10) по формулам (11) – (12).

### Алгоритм 2.К

**Предварительный этап.** Куб  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta \tau_j, j = 1, \dots, n$ . Множество узлов прямоугольной сетки на множестве  $\Omega$  обозначим  $\Omega$ . Задаем величину штрафа  $M \gg 0$ . Задаем начальное положение центров покрытия  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ . Вычисляем по этим центрам величину  $\hat{R}(\mathcal{T}^{(0)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda_Q \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \mathcal{M}} (c(x, \tau_i^{(0)}))$ , используя алгоритм

**1.К** решения задачи поиска радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное с-шаровое покрытие заданного множества  $\Omega$ . При этом для каждого

$1, \dots, iN$  вычисляем значение функции (7):  $R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_{mi} \in T} \max_{x \in \mathbb{R}^n} c(x, \tau^{(0)})$ .

Вычисляем величину  $\bar{R}_M(\mathbb{Y}^{(0)}) = \hat{R}(\mathbb{Y}^{(0)}) + P(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ .

По формуле (9) строим субградиентное множество  $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\mathbb{Y}^{(0)}) = \overline{\text{co}} \left\{ \tau_i(x, \tau^{(0)}), \bar{x} : c(x, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)}) \right\}, 1, \dots, iN$ , где  $g_{R_i}^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$  – обобщенный градиент функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau^{(0)}$ . Выбираем вектор  $g_{R_M}^{\tau}(\mathbb{Y}^{(0)})$  по формулам (11), (12), задаем начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма  $h_0 > 0$ .

**Первый шаг** алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = \tau^{(0)} - h_0 g_{R_M}^{\tau}(\mathbb{Y}^{(0)}),$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $m, m = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получен вектор  $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$ . Опишем **(m+1)-й шаг** алгоритма.

По центрам  $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$  с помощью алгоритма **1-К** вычисляем величину

$$\hat{R}(\mathbb{Y}^{(m)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \mathbb{N}} (c(x, \tau_i^{(m)})),$$

используя алгоритм **1-К** решения задачи поиска радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное с-шаровое покрытие заданного множества  $\Omega$ . При этом для каждого  $1, \dots, iN$  вычисляем значение функции (7):

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_{mi} \in T} \max_{x \in \mathbb{R}^n} c(x, \tau_i^{(m)}).$$

2. По формуле (9) строим субградиентное множество  $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\mathbb{Y}^{(m)})$ . Выбираем вектор  $g_{R_M}^{\tau}(\mathbb{Y}^{(m)})$  по формулам (11), (12). Проводим  $(m+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма в  $H$ -форме [8], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m+1)} = \tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{R_M}^{\tau}(\mathbb{Y}^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{R_M}^{\tau}(\mathbb{Y}^{(m)}), -(\tau^{(m)}))}},$$

где  $H_{m+1}$  – матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  (его целесообразно брать равным от 3 до 7) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi \xi^T}{(H_m \xi \xi^T, m)}, \quad \xi_m = g_R^-(\mathcal{Y}^{(m)}) - g_R^-(\mathcal{Y}^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета  $H_{m+1}$  перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг  $h_m$  выбираем из условия

$$\min_{h>0} \bar{R} \left( \tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_R^-(\mathcal{Y}^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R^-(\mathcal{Y}^{(m)}), -( \cdot ))}} \right).$$

Если условие

$$\| \tau^{(m+1)} - \tau^{(m)} \| \leq \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1 \tag{13}$$

не выполняется, переходим к  $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

Полагаем  $\tau_l^* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (13) завершения работы алгоритма.

Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\mathcal{Y}_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i \in \bar{1}, l} (cx, \tau_{*i}^{(l)})(x)$$

с помощью алгоритма **1-К**.

Алгоритм **2-К** описан.

**Анализ результатов вычислительных экспериментов.** Приведем здесь результаты решения задачи об оптимальном шаровом покрытии области  $\Omega$ , представляющей собой квадрат  $[0,1] \times [0,1]$  за исключением внутренности круга  $(x_{\frac{1}{2}} - 0.5)^2 + (y_{\frac{1}{2}} - 0.5)^2 \leq 0.09$ . Указанную область  $\Omega$  можно представить с помощью следующих областей:

$$D_1: 0.09 - (x_{\frac{1}{2}} - 0.5)^2 - (y_{\frac{1}{2}} - 0.5)^2 \leq 0; \quad D_2: x_1 \leq 0; \quad D_3: x_1 \geq 1;$$

$$D_4: x_2 \leq 0; \quad D_5: x_2 \geq 1.$$

Логика построения области  $\Omega$  определяется формулой

$$\Omega = (D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge D_4 \wedge D_5) = \left( \bigwedge_{i=1}^{i=6} D_i \right).$$

Область  $\Omega$  определяется неравенством

$$\Psi(x_{12}^x) = \bigwedge_{i=1}^{i=6} f_i(x_{12}^x) \geq 0,$$

где  $f_i(x_{12}^x)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , – левые части неравенств, задающих соответствующие области.

На рис. 1 представлены результаты одно- и двукратного покрытия описанной выше области 29-ю и 51-им с-шарами соответственно, полученные при решении задачи (1), (2) с помощью алгоритма 2.К, метрика – евклидова:

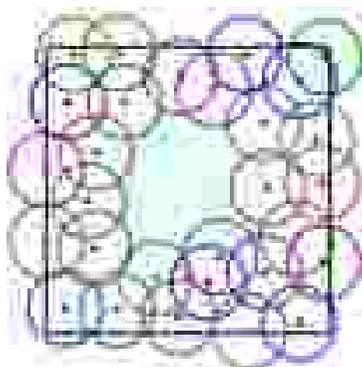
$$c(x, \tau_{ii}) = \|x - \tau\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}.$$

Нетрудно заметить, что и в одном, и в другом случае почти все центры размещены внутри  $\Omega$ . Те единичные центры, которые вышли за границу области, фактически для покрытия соответствующей кратности являются лишними, так как обеспечивают покрытие той части области, которая уже покрыта шарами с соседними центрами. Так как ограничения (3) в данном случае не учитывались, то и расположение центров при двукратном оптимальном покрытии (рис. 1, б) получилось таковым, что некоторые центры практически совмещены.

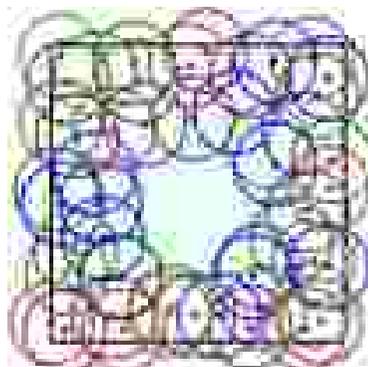
На рис. 2 а, б приведены результаты работы алгоритмов 1.К и 2.К соответственно при решении задачи об оптимальном двукратном шаровом покрытии множества  $\Omega$  29-ю с-шарами (евклидова метрика). Причем случай 2, б соответствует решению задачи (1) – (3) с ограничениями, минимальное расстояние между ближайшими центрами не меньше 0.07. Как и в предыдущем случае, два центра, которые оказались вне допустимой области для оптимального двукратного покрытия, не играют никакой роли, так как лишний раз покрывают уже покрытую дважды область.

**Заключение.** Таким образом, в работе представлены математическая модель и метод решения непрерывной задачи многократного покрытия области, имеющей сложную форму, шарами минимального радиуса. Задачу также характеризует наличие ограничений на расстояние между размещаемыми сервисными центрами. Кроме того, разработан и программно реализован алгоритм решения указанной задачи, основанный на задании области с помощью R-функций, дискретизации заданной области, применении аппарата штрафных функций для учета ограничений и границ по-

крываемой области, а также  $r$ -алгоритма Шора для решения полученной задачи недифференцируемой оптимизации. Для приближенного вычисления компонент субградиента расширенной целевой функции использовались диаграммы Вороного высших порядков.

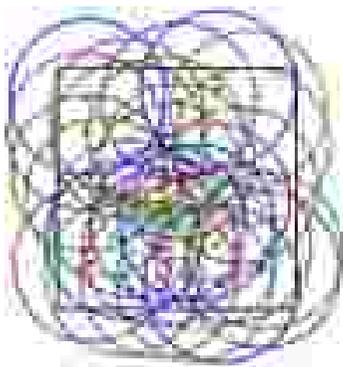


*a*  $N=29$ ,  $k=1$ ;  $R=0.1308$

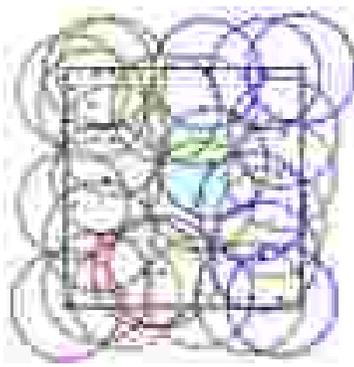


*b*  $N=51$ ,  $k=2$ ;  $R=0.1423$

**Рис. 1.  $k$ -кратное покрытие невыпуклой области, метрика евклидова**



*a*  $N=29$ ,  $k=2$



*b*  $N=29$ ,  $k=2$ ;  $R=0.23005$

**Рис. 2. Двукратное покрытие невыпуклой области:**

*a* – с заданными центрами  $s$ -шаров; *b* – с размещением центров при условиях

#### Библиографические ссылки

1. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения [Текст]: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.

2. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи [Текст]: монография / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
3. **Михалева, А.А.** Непрерывные задачи оптимального шарового покрытия и их практические приложения [Текст] / А.А. Михалева // III Международный форум студентов, аспирантов, молодых ученых. – Днепропетровск, 2015. – С. 504 – 506.
4. **Киселева, Е.М.** Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системные технологии. – Д.: ДМетАУ, 2014. – Вып. 4 (93). – С. 3 – 16.
5. **Коряшкина, Л.С.** Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия [Текст] / Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева, В.И. Навоенко // Питання прикл. математики і математ. моделювання. Зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2014. – С. 141 – 154.
6. **Киселева, Е.М.** Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева // Системні технології. – Дніпропетровськ. – 2015. – №1. – С. 165 – 179.
7. **Рвачёв, В.Л.** Теория R-функций и некоторые её приложения [Текст] / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
8. **Шор, Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения [Текст] / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
9. **Шор, Н.З.** Использование модификации г – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций [Текст] / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.

*Надійшла до редколегії 01.06.2015*

УДК 519.8

**О.М. Ґісельова\*, Л.І. Лозовська\*, Л.М. Бандоріна\*\***

*\*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

*\*\*Національна металургійна академія України, м. Дніпропетровськ*

## **АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН У РАЗІ ОБМЕЖЕНЬ НА ПОТУЖНОСТІ ІЗ ЗАДАНИМ РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН**

Розглянуто спеціального типу неперервну задачу оптимального розбиття множини із простору  $E_n$  у разі обмежень на потужності. При цьому оптимальне розбиття спільне для всіх продуктів одночасно. Запропоновано алгоритм розв'язання даної задачі, побудований на основі теорії оптимального розбиття множин.

Рассмотрена специального вида непрерывная задача оптимального разбиения множества из пространства  $E_n$  при ограничениях на мощности. При этом оптимальное разбиение является общим для всех продуктов одновременно. Предложен алгоритм решения этой задачи, построенный на основе теории оптимального разбиения множеств.

We consider a specific kind of a problem of optimal continuous partitioning of a set in  $E_n$  space with capacity restrictions. In this case the optimal partitioning is shared by all products. We suggest an algorithm for solving this problem which is based on the theory of optimal set partitioning.

**Ключові слова:** діаграма Діріхле – Вороного, функціонал Лагранжа, оптимальне розбиття множини,  $r$ -алгоритм.

**Вступ.** Інтенсивне впровадження медичної реформи потребує певної реорганізації закладів охорони здоров'я, що, у свою чергу, передбачає збільшення мережі медичних закладів, а також з'ясування оптимальних умов розміщення нових медичних установ за існуючих як часових, так і транспортних обмежень.

Стосовно оптимального розміщення медичних закладів із визначенням меж територій обслуговування населення можна виділити такі типи задач:

– розміщення амбулаторій у заданій області відповідно до вже функціонуючих медичних установ та знаходження меж територій, які вони обслуговуватимуть із урахуванням заданих обмежень;

- розширення мережі медичних закладів первинного рівня, знаходження оптимальних координат розміщення нових амбулаторій;
- будівництво нових закладів первинної ланки та знаходження оптимальних меж територій, які вони будуть обслуговувати.

Оскільки повне закриття існуючої мережі поліклінік і будівництво нових закладів економічно невиправдане й не вигідне, доцільно розглянути задачі із визначення оптимальних меж територій обслуговування як функціонуючих поліклінік, так і часткового розширення їх мережі за рахунок будівництва нових медичних закладів.

Дані задачі можна розглядати як окремі випадки задач оптимального керування зведені в математичній постановці до задач оптимального розбиття множин (ОРМ) із розташуванням (або без) «центрів підмножин» для мінімізації деякого критерію якості розбиття [1]. Відмінність задач оптимального розміщення медичних закладів полягає у тому, що ці заклади необхідно розмістити із одночасним урахуванням усіх послуг, які надаватиме кожен заклад.

**Постановка задачі.** Метою нашого дослідження є аналіз однієї спеціального типу задачі ОРМ за обмежень на потужності у вигляді нерівностей із заданими центрами підмножин. При цьому необхідно побудувати оптимальне розбиття множини, спільне для всіх видів продукції, яку випускають.

Отже, постановка задачі визначення оптимальних меж територій, що будуть обслуговувати існуючі амбулаторії, матиме такий вигляд. Множину пацієнтів  $\Omega$  можна розбивати на зони обслуговування  $\Omega_i$  пацієнтів  $i$ -ї амбулаторії, що не перетинаються, при цьому сумарна кількість пацієнтів, яких обслуговує  $i$ -та амбулаторія і які потребують отримання  $j$ -ї послуги і проживають на ділянці  $\Omega_i$ , не повинна перевищувати заданих обсягів [Там же]:

$$\int_{\Omega_i} \rho^{ij}(x,y) dx dy \leq b_i, \quad i=1, \dots, N; \quad j=1, \dots, M, \quad (1)$$

де  $\rho^{ij}(x,y)$  – потреба в  $j$ -й послугі в точках  $(x,y)$ ;  $b_i^j$  – максимально можлива кількість послуг  $j$ -го типу, які надає  $i$ -та амбулаторія;  $M$  – кількість послуг;  $N$  – кількість центрів.

Не виключено, що деякі з підмножин  $\Omega_i$  виявляться порожніми або кількість пацієнтів, яких обслуговують ці амбулаторії, буде менша допустимого рівня, прийнятого адміністрацією, у цьому випадку  $i$ -ту амбулаторію доцільно закрити.

Слід розбити множину пацієнтів  $\Omega$  на зони обслуговування їх  $N$  амбулаторіями, тобто на підмножини  $\Omega_i, i = 1, \dots, N$  так, щоб мінімізувати функціонал сумарної вартості амбулаторного обслуговування і транспортні витрати:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \sum_{i \neq j}^{NM} \sum_{\Omega_i} (c(x, y, \tau_i) + a_i^{ij}) (x, y) dx dy \rightarrow \min, \quad (2)$$

де  $c(x, y, \tau_i)$  – функція визначення транспортних витрат;  $a_i^{ij}$  – собівартість надання  $j$ -ї послуги  $i$ -ю амбулаторією.

Сукупна потужність усіх амбулаторій, які надаватимуть медичну допомогу, повинна перевищувати загальні потреби населення:

$$R = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^{ij}(x, y) dx dy \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_i^j, \quad 0 < b_i^j \leq R, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

де  $R$  – загальна потреба в медичних послугах у регіоні.

**Результати.** Нехай  $\Omega$  – обмежена, замкнена та вимірювана за Лебегом множина у  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $E_n$ . Сукупність вимірюваних за Лебегом підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  з  $\Omega \subset E_n$  називатимемо можливим розбиттям множини, якщо

$$\sum_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

де  $\text{mes}()$  означає міру Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини  $\Omega$  через  $\sum_{\Omega}^N$ . Тобто

$$\sum_{\Omega}^N = \left\{ \left\{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \right\} : \sum_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N \right\}. \quad (5)$$

Уведемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i \neq j}^{NM} \sum_{\Omega_i} (c(x, y, \tau_i) + a_i^{ij}) (x, y) dx dy, \quad (6)$$

де функції  $c(x, y, \tau_i)$  – дійсні, обмежені, визначені на  $\Omega \times \Omega$ , вимірювані за  $x$  за будь-якого фіксованого  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  із  $\Omega$  для всіх  $i = 1, \dots, N$  ;

$\rho^j(x)$  – обмежені, вимірювані, невід’ємні на  $\Omega$  функції;  $a_i^j$  – задані невід’ємні числа.

Тоді під неперервною спеціального типу задачею оптимального розбиття множини  $\Omega$  із  $E_n$  на його підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються у разі обмежень у формі нерівностей із заданими координатами центрів  $\tau_1, \dots, \tau_N$  підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  відповідно, будемо розуміти таку задачу.

**Задача А.** Знайти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\tau_i^j + a_i^j) \int_{\Omega_i} \rho^j(x) dx, \quad (7)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho^j(x) dx \leq b_i^j, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

де  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_i^j$  – задані додатні числа, причому виконуються умови розв’язності задачі

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_i^j, \quad (9)$$

$$0 < b_i^j \leq S, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$$

Уведемо характеристичну функцію підмножин  $\Omega_i$ :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\tau_i^j + a_i^j) \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i(x) dx, \quad (11)$$

де вектор-функція  $\lambda(x)$  має вигляд  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$ . Очевидно, що

$$I(\lambda) = I(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}). \quad (12)$$

Перепишемо задачу А за допомогою термінів характеристичних функцій  $\lambda_i(x)$  підмножин  $\Omega_i, i=1, \dots, N$  у такому вигляді.

**Задача В.** Знайти вектор-функцію  $\lambda(x) \in \Gamma$  таку, що

$$I(\lambda) = \min_{\lambda \in \Gamma_1} ( \quad ) \quad (13)$$

де

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega; \}$$

$$\int_{\Omega} \rho_i \lambda_i(x) dx \leq b, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \}$$

$$\Gamma_{II} = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; i=1, \dots, N, \}$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \}$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданий вектор із  $\Omega^N$ .

Уведемо задачу В із булевими змінними  $\lambda_i(x)$  у відповідну задачу із неперервними змінними  $\lambda(x)$ :

**Задача С.** Знайти вектор-функцію  $\lambda(x) \in \Gamma$ , таку, що

$$I(\lambda) = \min_{\lambda \in \Gamma_2} ( \quad )$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.в. для } x \in \Omega; \}$$

$$\int_{\Omega} \rho_i \lambda_i(x) dx \leq b, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \}$$

де

$$\Gamma = \{ \lambda(x): 0 \leq \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i=1, \dots, N, \}$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega. \}$$

Задача С має розв'язок.

Серед множини оптимальних розв'язків задачі С знаходяться оптимальні розв'язки задачі В. Розв'язання задачі В еквівалентне знаходженню сідлової точки функціонала Лагранжа.

Уведемо функціонал Лагранжа для задачі В:

$$h(\lambda(), \Psi) = I(\lambda()) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Psi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i(x) dx - b_i^j \right). \quad (14)$$

де  $\Psi_i^j$  – дійсні невід’ємні числа ( $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$ ),  $\lambda(x) \in \Gamma$  для  $x \in \Omega$ .

Пару  $(\lambda_*, \Psi^*)$  називатимемо сідловою точкою функціонала (14) на множині  $\Gamma \times \Lambda$ , де

$$\Lambda = \{ \Psi = (\Psi_{11}, \dots, \Psi_{1M}, \dots, \Psi_{N1}, \dots, \Psi_{NM}) \in E_{MN} : \Psi_{ij} \geq 0, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M \},$$

якщо

$$h(\lambda_*, \Psi^*) \leq h(\lambda(), \Psi^*) \leq h(\lambda(), \Psi)$$

для всіх  $\lambda(x) \in \Gamma, \Psi \in \Lambda$  або

$$h(\lambda_*, \Psi^*) = \min_{\lambda \in \Gamma} \sup_{\Psi \in \Lambda} h(\lambda(), \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \inf_{\lambda \in \Gamma} h(\lambda(), \Psi).$$

Позначимо

$$G(\Psi) = \inf_{\lambda \in \Gamma} h(\lambda(), \Psi), \Psi \in \Lambda. \quad (15)$$

Задача, двоїста до задачі **B**, має вигляд

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \Psi \in \Lambda. \quad (16)$$

Для знаходження сідлової точки функціонала Лагранжа (14) конкретизуємо двоїсту задачу (16). Підставивши в (15) вираз для  $h(\lambda_*, \Psi^*)$  із (14), одержимо

$$G(\Psi) = \min_{\lambda \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_i^j \tau_i + a_i^j + \Psi_i^j) \rho^j(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Psi_i^j b_i^j, \quad (17)$$

$\Psi \in \Lambda$ .

Мінімальне значення функціонала  $h(\lambda_*, \Psi^*)$  із (17) для кожного  $\Psi \in \Lambda$  досягається на вектор-функції  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ ,  $i$ -та компонента якої має вигляд

$$\lambda_{\omega_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_i) + a_i^j + \psi_i^j) \rho^j(x) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^j) \rho^j(x) \\ i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках, тоді } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}. \end{cases} \quad (18)$$

Підставивши у (17) замість  $\lambda_i(x)$  вираз із (18) і врахувавши, що  $\lambda_{\omega_i}(x)$  задовольняє умову  $\sum_{i=1}^N \lambda_{\omega_i}(x) = 1$  м. в. для  $x \in \Omega$ , одержимо

$$G(\Psi) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_i^j b_i^j + \int_{\Omega} \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^j) \rho^j(x) dx, \quad (19)$$

$\Psi \in \Lambda$ .

Із вигляду оптимального розв'язку (18), за припущення, що виконуються умови  $\rho^j(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ , аналогічно до [1] випливає така теорема

**Теорема.** Для того щоб можливе розбиття  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N})$  було оптимальне для задачі (4) – (6), необхідне і достатнє існування дійсних констант  $\Psi_{11}, \Psi_{1M}, \dots, \Psi_{NN}, \Psi$  таких, що

$$\sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_i) + a_i^j + \psi_i^j) \rho^j(x) \leq (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^j) \rho^j(x), \quad (20)$$

$i \neq k$  м.в. для  $x \in \Omega_{*i}, i, k = 1, \dots, N$ .

**Теорема.** Сідлову точку  $(\lambda_{\omega_i}, \Psi)$  (де перша компонента  $\lambda_{\omega_i}()$  – оптимальний розв'язок задачі **B**) функціонала (14) на множині  $\Gamma \times \Lambda$  визначають для  $i=1, \dots, N$  і майже всіх  $x \in \Omega$  таким чином:

$$\lambda_{\omega_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (21)$$

де

$$\Omega_{*i}(x) = \begin{cases} x \in \Omega : \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_i) + a_i^j + \psi_i^{j*}) \rho^j(x) = \\ = \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^{j*}) \rho^j(x), i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega \end{cases}$$

як  $\Psi_{11}^{1*}, \Psi^{MM}, \Psi_{NN}^{1*}, \Psi^*$  обирають оптимальний розв'язок двоїстої задачі (16), зведеної до вигляду

$$G(\Psi) = - \sum_{i=1}^{NM} \sum_{j=1}^M \Psi_{ij}^{jj} + \int_{\Omega} \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k^j \rho^j(x) dx \rightarrow \max, \quad (22)$$

за умов

$$\Psi_i^j \geq 0, \quad i=1, \dots, N, j=1, \dots, M. \quad (23)$$

Для розв'язання задачі (22), (23) застосуємо  $r$ -алгоритм [2]. Для цього перейдемо до задачі безумовної максимізації із введенням у цільову функцію (22) негладкої штрафної функції множини  $\{\Psi_i^j \geq 0, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M\}$ :

$$P(\Psi) = G(\Psi) - S \cdot \sum_{i=1}^{NM} \sum_{j=1}^M \max(0, -\Psi_i^j) \rightarrow \max, \Psi \in E_{MN}, \quad (24)$$

де  $S$  – достатньо велике додатне число (значно більше за максимальний множник Лагранжа для функції (22)).

Визначимо  $i$ -ту компоненту вектора узагальненого градієнта  $g_P(\Psi) = (g_P^{11}(\Psi), \dots, g_P^{MM}(\Psi), \dots, g_P^{1N}(\Psi), \dots, g_P^{NM}(\Psi))$  функції (24) у точці  $\Psi = (\Psi_{11}, \dots, \Psi^{MM}, \dots, \Psi_{NN}, \dots, \Psi)$ :

$$g_P^{ij}(\Psi) = \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i(x) dx - b_i^j + S \cdot \max(0, \text{sign}(-\Psi_i^j)), \quad (25)$$

$$i=1, \dots, N, j=1, \dots, M,$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k^j \rho^j(x) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^M (c_k^j, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k^j \rho^j(x) \\ i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega, k=1, \dots, N, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (26)$$

Опишемо алгоритм розв'язання задачі  $\mathbf{A}$  [1].

**Алгоритм.** Область  $\Omega$  уміщуємо в паралелепіпед  $\Pi$ , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Уважатимемо  $r^j(x) = 0$ ,  $j=1, \dots, M$ , для  $x \in \Pi \cap \mathbb{Q}$ . Паралелепіпед  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення  $\Psi = \Psi^{(0)}$ . Обчислюємо значення  $\lambda^{(0)}(x)$  у вузлах сітки за формулою (26) за  $\lambda^{(0)}(x)$ . Обраховуємо значення  $g_P^\Psi(\Psi)$  у вузлах сітки за формулами (25) за  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\Psi = \Psi^{(0)}$ . Обираємо початковий пробний крок  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритму та знаходимо

$$\Psi \leftarrow \Psi + h_0 g_P^\Psi(\Psi^{(0)}).$$

Переходимо до другого кроку.

Нехай у результаті обчислень після  $k, k=1, 2, \dots$  кроків алгоритму одержали певні значення  $\Psi^{(k)}, \lambda^{(k)}(x)$  у вузлах сітки. Опишемо  $(k+1)$ -й крок:

1. Обчислимо значення  $\lambda^{(k)}(x)$  у вузлах сітки за формулою (26) за  $\Psi = \Psi^{(k)}$ .

2. Обраховуємо значення  $g_P^\Psi(\Psi)$  за формулами (25) за  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\Psi = \Psi^{(k)}$ .

3. Проведемо  $(k+1)$ -й крок  $r$ -алгоритму для максимізації функції (24) відносно  $\Psi$  на  $E_{M^*}$ , коротка схема якого має вигляд

$$\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + h_k B_{k+1} g_P^\Psi, \quad (27)$$

де  $B_{k+1}^\Psi$  – оператор відображення перетвореного простору в основний простір  $E_{M^*}$ , причому  $B_{k+1}^\Psi = (I - \text{одична матриця})$ ;  $g_P = \Psi_{k+1}^* g_P^{(k)}$ ;  $h_k$  – кроковий множник, вибір якого здійснюють із умови мінімуму за напрямком.

4. Якщо умова

$$\|\Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)}\| \leq \varepsilon \quad (28)$$

не виконується, перейдемо до  $(k+2)$ -го кроку алгоритму. Якщо виконується – до наступного пункту.

5. Уважатимемо  $\Psi^l = \Psi^0$ ,  $\lambda_i^l(x) = \lambda_i^0(x)$ , де  $l$  – номер ітерації, на якій виконано умову (28).

6. Обчислимо оптимальне значення цільового функціонала за формулою (22) за  $\Psi = \Psi^*$ , а для контролю правильності розрахунку – за формулою

$$I(\lambda_i^l) = \int_{\Omega} \sum_{i \in I} (c_i \tau_i + a_i^j) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (29)$$

Алгоритм описано.

Алгоритм реалізовано мовою C++ із використанням графічних бібліотек Qt. Програмний продукт протестовано на модельних задачах.

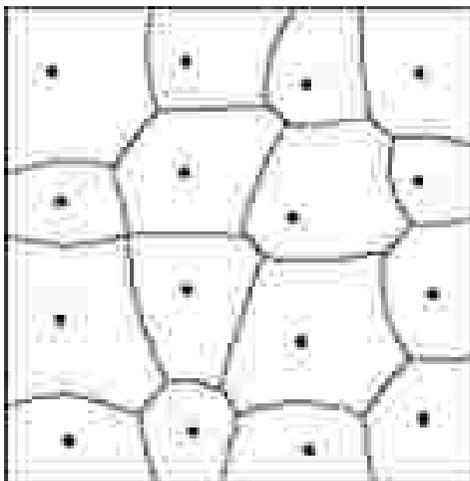
Подамо результати роботи алгоритму для розв’язання задачі оптимального розбиття множини на 16 підмножин із вхідними даними (таблиця ).

**Вихідні дані для задачі**

№ центра	Координати центра (x; y)	Вектор $b$	Вектор $a$
1	(0.123; 0.125)	(0.8; 0.8; 0.4)	(0.4; 0.9; 0.3)
2	(0.126; 0.395)	(0.5; 0.3; 0.5)	(0.3; 0.5; 0.3)
3	(0.127; 0.645)	(0.3; 0.6; 0.6)	(0.2; 0.4; 0.6)
4	(0.125; 0.883)	(0.3; 0.5; 0.8)	(0.6; 0.3; 0.5)
5	(0.374; 0.106)	(0.5; 0.4; 0.2)	(0.2; 0.5; 0.2)
6	(0.376; 0.333)	(0.9; 0.4; 0.6)	(0.9; 0.4; 0.3)
7	(0.375; 0.587)	(0.6; 0.1; 0.4)	(0.1; 0.7; 0.1)
8	(0.373; 0.859)	(0.2; 0.7; 0.5)	(0.3; 0.2; 0.8)
9	(0.626; 0.14)	(0.4; 0.3; 0.6)	(0.2; 0.5; 0.5)
10	(0.624; 0.414)	(0.8; 0.5; 0.2)	(0.5; 0.6; 0.2)
11	(0.622; 0.667)	(0.4; 0.6; 0.1)	(0.2; 0.4; 0.3)
12	(0.622; 0.894)	(0.5; 0.8; 0.8)	(0.6; 0.8; 0.5)
13	(0.875; 0.118)	(0.1; 0.7; 0.6)	(0.1; 0.6; 0.6)
14	(0.873; 0.356)	(0.4; 0.3; 0.4)	(0.3; 0.5; 0.3)
15	(0.874; 0.609)	(0.3; 0.8; 0.3)	(0.4; 0.6; 0.3)
16	(0.875; 0.87)	(0.1; 0.9; 0.3)	(0.3; 0.7; 0.2)

При цьому задамо розмірність сітки 500, кількість надаваних послуг –  $M = 3$ .

У результаті роботи алгоритму за 13 ітерацій одержали значення функціонала 1,361. Оптимальне розбиття зображено нижче (рисунок).



Оптимальне розбиття на 16 підмножин

**Висновки.** Досліджено спеціального типу задачу оптимального розбиття множин із заданими положеннями центрів підмножин за обмежень на потужності підмножин. Побудовано математичну модель цієї задачі. Для розв'язання поставленої задачі розроблено алгоритм.

Створено зручний програмний продукт, що в доступній формі забезпечує числове розв'язання неперервної спеціального типу задачі оптимального розбиття множин із фіксованими центрами підмножин. Алгоритм програмно реалізовано мовою C++ із використанням графічних бібліотек Qt і протестовано на модельних задачах.

#### Бібліографічні посилання

1. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005. – 562 с.

2. **Шор, Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения [Текст] / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.

*Надійшла до редколегії 13.04.2015*

УДК 519.8

**О.М. <sup>10</sup>Кісельова\*, В.О. Стросва\*\***

*\*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

*\*\*Дніпродзержинський державний технічний університет*

## **ОПТИМАЛЬНЕ РОЗМІЩЕННЯ БАЗОВИХ СТАНЦІЙ СУМІСНОГО ВИКОРИСТАННЯ З ВИЗНАЧЕННЯМ ЕКОЛОГІЧНО ЗНАЧИМИХ ЗОН**

Наведено результат розв'язання неперервної нелінійної багатопродуктової задачі оптимального розміщення базових станцій мережі мобільного зв'язку сумісного використання з одночасним розбиттям заданої області абонентів на зони обслуговування з метою мінімізувати загальну вартість виробничих витрат і витрат на доставку трафіка до абонентів, з визначенням екологічно значимих зон.

Приведен результат решения непрерывной нелинейной многопродуктовой задачи оптимального размещения базовых станций сети мобильной связи совместного использования с одновременным разбиением заданной области абонентов на зоны обслуживания с целью минимизировать общую стоимость производственных расходов и расходов на доставку трафика к абонентам, с определением экологически значимых зон.

The results of solving continuous nonlinear multigrocery problems of the optimum placing of the base stations of mobile communication of sharing network with the simultaneous set partition area of subscribers on the areas of service with the purpose of minimization of total worth of production charges and charges on delivery of traffic to the subscribers, identifying ecologically significant areas.

**Ключові слова:** оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача, базові станції, трафік, сумісне використання мережі, екологічно значимі зони.

**Вступ.** Інтенсивний розвиток господарської та інформаційної діяльності суспільства спричинив появу нового небезпечного чинника – електромагнітне забруднення навколишнього середовища. За останні двадцять років до головних джерел електромагнітного забруднення населених пунктів України додалася велика кількість базових станцій (БС) мобільного зв'язку. Їх кількість з кожним роком невідомо збільшується, що, безперечно, впливає на санітарно-гігієнічний ступінь електромагнітного забруднення населених територій.

Відомо, що електромагнітне забруднення навколишнього середовища поряд із хімічним і радіаційним стало найбільш масштабним видом забруднення, яке в багато разів перевищує рівень природного електромагнітного випромінювання. Саме тому Всесвітня організація охорони здоров'я (ВООЗ) включила проблему електромагнітного забруднення навколишнього середовища в перелік пріоритетних проблем людства.

БС – є основним складником мобільного зв'язку. Вони являють собою системний комплекс приймально-передавальної апаратури, що здійснює централізоване обслуговування групи кінцевих абонентських пристроїв. БС утворюють зони покриття, в межах яких абоненти можуть одержувати послуги від операторів мобільного зв'язку. До цих послуг належать *телефонні розмови, текстові повідомлення, ММС, локальні послуги, Інтернет* та ін.

Число абонентів в системі стільникової мережі зв'язку визначають пропускну здатністю та числом БС, що дорівнює числу робочих зон, яке збільшується за квадратичним законом із зменшенням радіуса робочої зони за постійного радіуса зони обслуговування. Так, якщо 9-10 років тому радіус робочої зони в стільниковій системі зв'язку на території України становив 5-15 км, то на сьогодні він становить 350-500 м. Зменшення радіуса робочої зони, з одного боку, дозволило збільшити в тисячі разів число рухомих абонентів, а з іншого боку, з'явилась можливість зменшити потужність передавачів базових станцій та приймачів (радіотелефонів) і тим самим зменшити вплив базових станцій на гігієнічний стан електромагнітної обстановки.

Дослідженнями ряду зарубіжних (Adey W.P., Nietanen M., Michaelson S., Morgan R.W., Owen R.D. та вітчизняних учених (Думанський Ю.Д., Сердюк А.М., Лось І.П., Андрієнко Л.Г., Шандала М.Г., Прохватолюк Е.В.) переконливо доведено, що електромагнітне випромінювання істотно впливає на стан здоров'я людини.

У роботах Думанського В.Ю. [1], [2] порушено проблему гігієнічної оцінки електромагнітної ситуації та науково обґрунтовано вимоги до її безпеки в Україні.

Матеріали теоретичних розрахунків показали, що БС на прилеглих до них територіях на висоті 2 м від поверхні землі на відстанях 2,200 м від них утворюють рівень електромагнітного поля в межах 0,0033-0,0145 мкВт/см<sup>2</sup> за гігієнічного нормативу для населення – 2,5 мкВт/см<sup>2</sup>. Ці рівні не несуть загрози для здоров'я населення. Зважаючи на це, автор зробив висновок, що для базових станцій на рівні поверхні землі, як правило, не потрібно встановлювати санітарно-захисні зони. Водночас слід звернути увагу на те, що на висотах 5 м та вище від поверхні землі рівні електромагнітного

випромінювання від базових станцій у ряді випадків перевищують гранично допустимий рівень. У таких випадках з метою захисту населення від електромагнітного випромінювання необхідно встановлювати зони обмеження забудови, які наносять на топографічну карту міста і які обов'язково мають урахуватися у процесі його розбудови.

Ця робота продовжує дослідження, розпочаті в публікації [3], а саме розгляд задачі оптимального розміщення БС мережі мобільного зв'язку сумісного використання з одночасним розбиттям заданої області абонентів на зони обслуговування в умовах технічних обмежень санітарно-захисної зони.

### Постановка задачі

**Задача А.** Нехай у деякому регіоні (області обслуговування абонентів)  $\Omega$  довільної форми необхідно розмістити БС сумісного використання  $M$  операторами мобільного зв'язку, з метою оптимізувати загальну вартість виробничих витрат та витрат на доставку трафіка від БС до абонентів з урахуванням розподілу їх попиту на послуги операторів з визначенням екологічно значимих зон (наприклад, під житлові забудови, зони відпочинку), з урахуванням рівня електромагнітного випромінювання (ЕМВ).

Наведемо математичну модель цієї задачі.

Задано множину  $\Omega = \{(x, y)\}$  абонентів мобільного зв'язку, які можуть користуватися послугами  $M$  операторів ( $j = \overline{1, M}$ ), що сумісно використовують інфраструктуру  $N$  БС ( $i = \overline{1, N}$ ).

Вартість транспортування одиниці трафіка  $c^j(x, y, \tau_i)$   $j$ -м оператором від  $i$ -ї БС до абонента з координатами  $(x, y)$  задається відповідно до виду оператора;  $\tau_1, \dots, \tau_N$  – пункти можливого розміщення БС;  $\rho^j(x, y)$  – попит абонента  $(x, y)$  у пропускній спроможності  $j$ -го оператора ( $j = \overline{1, M}$ ).

Передбачається, що прибуток оператора залежить від його витрат, які є сумою виробничих витрат (устаткування майданчика, будівництво, радіоустаткування, експлуатація і обслуговування), і витрат на доставку трафіка. Для кожної  $i$ -ї БС задана функція  $\varphi_i^{jj}(Y)$ , що описує залежність вартості виробництва від її потужності  $Y_i^j$ , яку визначають за формулою

$$Y_i^{jj} = \iint_{\Omega_i} \rho^j(x, y) dx dy,$$

і наведені капітальні витрати на реконструкцію  $i$ -ї БС з метою збільшити її потужність від існуючої до проектної  $Y_i^j$ .

Нехай  $A$  – рівень ЕМВ радіо поля на одиниці відстані від БС, тоді  $A \cdot \rho^j(x, y)$  – рівень ЕМВ від  $i$ -ї БС у точці  $(x, y)$ . Отже, вираз

$$\sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j^i} A \cdot \rho^j(x, y) dx dy$$

визначає рівень електромагнітного випромінювання  $i$ -ї БС в області  $\Omega$ .

$\Omega$  потрібно розбити на зони обслуговування  $\Omega_i^j$  абонентів  $i$ -ю БС  $i = 1, \dots, N$  послугами  $M$  операторами. Потужність  $i$ -ї БС, яка сумісно використовується  $M$  операторами, визначають сумарною активністю абонентів, що належить  $\Omega_i^j$ .

При цьому для  $i$ -ї БС  $i = \overline{1, p}$  потужність має дорівнювати заданим об'ємам:

$$0 \leq \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 1, p,$$

а для БС з номерами  $i = \overline{p+1, N}$  потужність не перевищує заданих об'ємів:

$$0 \leq \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

та виконуються умови розв'язності задачі:

$$S = \int \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Деякі з підмножин  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  можуть виявитися порожніми.

Необхідно розбити множину абонентів  $\Omega$  на їх зони обслуговування  $\Omega_i^j$   $N$  базовими станціями системи мобільного зв'язку окремо по кожному з  $M$  операторів так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \quad j = \overline{1, M}, \quad \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

з метою мінімізації функціонала сумарних витрат операторів та рівня ЕМВ:

$$\begin{aligned} F((\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2, \dots, \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M), (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)) = \\ = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j \left( \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx \right) + \iint_{\Omega_i^j} (c^j(x, y, \tau_i) + A) \rho^j(x, y) dx dy \right]. \end{aligned}$$

**Результати.** Скориставшись підходом, застосованим у [4], отримасмо розв’язок задачі А в такому аналітичному вигляді (1), де параметри (2), що входять до розв’язку (1), знаходимо чисельним методом із застосуванням сучасної модифікації  $\Gamma$ -алгоритму Н.З. Шора:

$$\Omega_{*i}^j = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Omega: c^j(x, \tau_i^*) + A + \Psi_i^* + \Phi_{ij}^{\prime j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right) = \\ = \min_{k=1, N} \left[ c^j(x, \tau_k^*) + A + \Psi_k^* + \Phi_{kj}^{\prime j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{*k}^j(x) dx \right) \right] \\ i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M, \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega_{*iq}^j \text{ і } x \notin \Omega, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \Omega_{*i}^j. \end{cases} \quad (2)$$

**Висновки.** Наведено результати оптимального розміщення базових станцій сумісного використання декількох операторів мобільного зв’язку, які надають послуги абонентам з певної області у разі одночасного її розподілу на зони обслуговування кожною базовою станцією для кожного з операторів залежно від попиту абонентів на їх послуги з визначенням екологічно значимих зон.

#### Бібліографічні посилання

1. **Думанський, В.Ю.** Стільниковий мобільний зв’язок як джерело електромагнітного забруднення навколишнього середовища [Текст] / В.Ю.Думанський // Гігієна населених місць. – К., 2003. – Вип. 42. – С. 180–188.
2. **Думанський, В.Ю.** Гігієнічна оцінка електромагнітного випромінювання, що створюється обладнанням стільникового мобільного зв’язку стандарту GSM – 900 [Текст] / В. Ю. Думанський // Там само. – К., – 2004. – Вип. 43. – С. 233–241.
3. **Кісельова, О.М.** Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання (Network sharing) декількох операторів мобільного зв’язку [Текст] / О.М. Кісельова, В.О.Строева // Питання прикл. математики і математ. моделювання: зб. наук. пр. – Д.: ДНУ, 2012. – С. 143–154.
4. **Киселёва, Е.М.** Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств [Текст] / Е.М. Киселёва, В.А. Строева // Пробл. упр. и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40 – 53.

Надійшла до редколегії: 17.06.2015

УДК 65.012

**О.С.<sup>11</sup> Лозовський, В.О. Саліков**

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ ПАСАЖИРІВ АЕРОПОРТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ІМІТАЦІЙНИХ ПРОЦЕДУР ЗА ТЕХНОЛОГІЄЮ ARENA**

Проаналізовано бізнес-процеси типового аеропорту, побудовано функціональну модель бізнес-процесу реєстрації пасажирів у середовищі BPWin. Розроблено імітаційну модель реєстрації пасажирів із метою дослідити динаміку процесу обслуговування пасажирів, проаналізувати інформаційні потоки та вивчити статистичні характеристики. Проведено експерименти за технологією Arena.

Проведен анализ бизнес-процессов типового аэропорта, построена функциональная модель бизнес-процесса регистрации пассажиров в среде BPWin. Разработана имитационная модель регистрации пассажиров с целью исследования динамики процесса обслуживания пассажиров, анализа информационных потоков и изучения статистических характеристик. Проведены эксперименты с применением технологии Arena.

Business processes of a typical airport are analyzed, a functional model of a business process passenger check-in was built in BPWin environment. We developed a simulation model of passenger check-in in order to study the dynamics of passenger service process, the analysis of information flows and statistical characteristics. Experiments are performed using Arena technology.

**Ключові слова:** інформаційна система, комп'ютерна мережа, імітаційне моделювання, концептуальна модель, функціональна модель.

**Вступ.** В умовах формування ринкових відносин особливої актуальності набуває проблема підвищення ефективності оперативного та стратегічного керування авіапідприємствами. Комп'ютеризація і впровадження нових інформаційних технологій в аеропортах дозволяють істотно збільшити їх пропускну здатність, а отже, і повний пасажирооборот, а також підвищити рівень сервісу. Крім того, за допомогою інформаційної системи можна підвищити якість обслуговування пасажирів і повітряних суден. Оперативність, рівень надання інформаційних послуг і підтримка користувачів займають важливе місце в роботі інформаційних служб цивільної авіації.

Дослідження роботи інформаційних служб аеропорту дає можливість поліпшити характеристики організаційної структури (кількість рівнів і персоналу на кожному рівні підтримки), а також оцінити реакцію системи в разі зміни значень основних параметрів (кількості користувачів системи, інтенсивності запитів і т.д.).

**Постановка задачі.** Виходячи з актуальності розглянутої проблеми, основним завданням нашого дослідження є розробка концептуальної моделі бізнес-процесів системи реєстрації пасажирів та відповідної імітаційної моделі процесу реєстрації пасажирів, що дозволить визначити коефіцієнт завантаження стійок реєстрації, середній час очікування пасажирів в черзі, середній час перебування елемента потоку в системі та ін.

**Актуальність роботи.** У типовому аеропорті здійснюють: технічне обслуговування авіаційної техніки; обслуговування пасажирів, багажу, пошти і вантажів внутрішніх і міжнародних повітряних перевезень; аеродромне забезпечення та ін.

Організаційна система керування аеропорту являє собою ієрархічну структуру й характеризується лінійно-функціональними зв'язками між працівниками апарату керування, а також є відображенням повноважень і обов'язків, покладених на кожного з працівників апарату керування.

Основні складники типової інформаційної системи аеропорту:

- підсистема диспетчерського центру;
- підсистема обслуговування літаків;
- підсистема обслуговування пасажирів.

Інформаційна система забезпечує збір інформації з різних джерел, включаючи розклад руху, оперативні бази даних стосовно перевізного процесу, системи реєстрації та наявності квитків, комплексну обробку вхідної інформації, формування і виведення оброблених даних на різні робочі місця і засоби відображення [1]. Завдяки інтеграції оперативної бази даних і зовнішніх джерел інформації забезпечують функціонування єдиного інформаційного простору для аеропорту.

Інформаційна система дозволяє здійснити виведення інформації на засоби відображення – інформаційні табло різного призначення, табло на базі моніторів, інформаційно-довідкові кіоски та ін. Наявність засобів конфігурації дозволяє швидко коригувати форму відображення інформації.

Також у складі інформаційної системи часто реалізують автоматичне гучномовне оповіщення на транспортному терміналі. Використання звукових станцій із керуванням різними зонами озвучування дозволяє в автоматичному режимі видавати звукові повідомлення тільки в потрібні

приміщення та території об'єкта. При цьому істотно підвищується здатність сприймання голосової інформації пасажирями.

Система керування дозволяє в єдиному інтерфейсі об'єднати моніторинг і керування різноманітним обладнанням та програмними засобами. Можливість автоматичної подачі тривожних повідомлень на засоби візуалізації та голосового забезпечення, доведення до обслуговуючого та чергового персоналу інформації про функціонування всіх компонентів системи робить програмно-апаратний комплекс інформаційно-керувальних систем унікальним засобом керування транспортними потоками.

Результати аналізу показали, що із урахуванням зазначених особливостей функціонування інформаційної системи типового аеропорту система реєстрації пасажирів та прийому багажу неефективна. У свою чергу відсутність науково обґрунтованих принципів побудови інформаційної системи реєстрації пасажирів і багажу призводить до додаткових витрат на реалізацію і до низької ефективності її функціонування.

Оскільки обслуговування пасажирів – основний бізнес-процес у діяльності аеропорту, то в даній роботі побудовано модель саме цього процесу.

**Результати. Концептуальна модель бізнес-процесів системи реєстрації пасажирів.** У загальному випадку концептуальна модель являє собою певну множину понять і зв'язків між ними, що є понятійною структурою розглянутої предметної області. Отже, у першу чергу доцільно провести аналіз основних бізнес-процесів авіакомпанії з необхідним ступенем деталізації. Оскільки моделювання досить тривалий і трудомісткий процес, дослідження було поділено на такі етапи:

- дослідження діяльності підприємства, побудова концептуальної моделі підприємства із використанням засобів візуального моделювання;
- оцінювання адекватності цієї моделі, порівняння варіантів реальної діяльності з результатами імітаційного моделювання;
- формування рекомендацій щодо вдосконалення існуючих бізнес-процесів.

Побудова концептуальної моделі дозволяє виявити проблемні місця і модифікувати структуру бізнес-процесів компанії. При цьому за допомогою побудованої концептуальної моделі як комплексу організаційного, інформаційного та функціонального аналізу можна всебічно вивчити предметну область. Під час розробки концептуальної моделі типового аеропорту було використано середовище розробки  $BPWin$ , до переваг якого належать: наочність; простота складання діаграм; чітка логіка побудови моделей, яка дозволяє уникнути багатьох помилок у ході проектування;

інтуїтивно зрозумілий інтерфейс системи; наявність вбудованих засобів імітаційного моделювання; можливість подання всіх видів даних (функціональних, інформаційних та ієрархічних моделей) у вигляді єдиної карти компанії – комплексного опису системи [5].

Інформаційний аналіз полягає в дослідженні інформаційних потоків, що циркулюють між функціональними компонентами організаційної системи керування. Його виконують для визначення взаємодії між підрозділами та з'ясування складу переданої документації. Результати інформаційного аналізу надалі використовують під час класифікації об'єктів.

За допомогою функціонального аналізу (рис. 2) з'ясовують функціональні зв'язки і послідовність виконання функцій, завдань і процедур. Даний аналіз передбачає багаторівневий розгляд: на основі декомпозиції кожен функцію ділять на завдання, а ті, у свою чергу, ділять на процедури. Таке дослідження в практиці створення інформаційних систем отримало назву бізнес\_моделювання, а зміст функціональних моделей – бізнес\_процес.

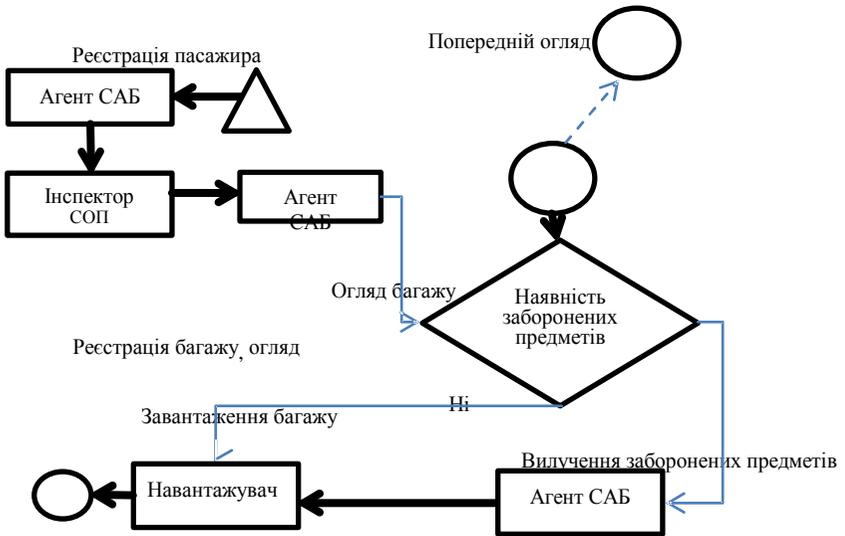


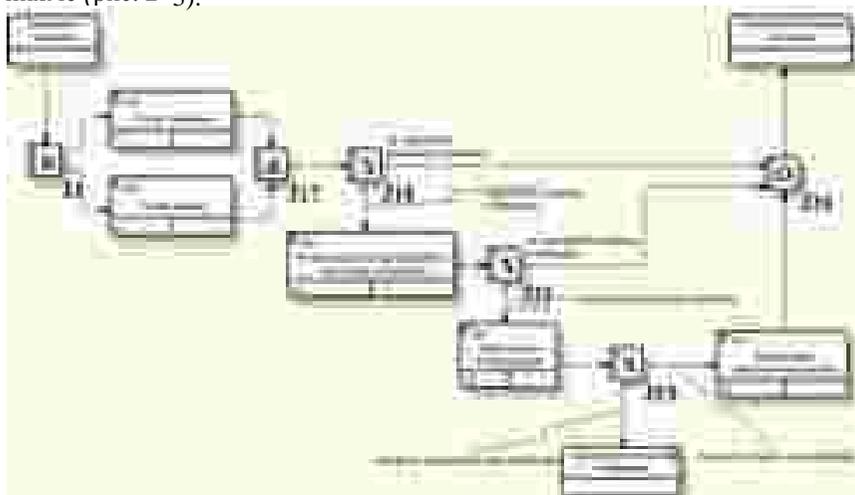
Рис. 1. Функціональна модель процесу ресстрації пасажирів

Результатом функціонального аналізу є одержання низки функціональних моделей, що відображають бізнес\_процеси конкретного авіапідприємства із заданим рівнем деталізації. Їх аналіз дозволить

локалізувати проблемні місця, оцінити переваги нових функціональних компонентів і глибину змін існуючої їх організації.

Деталізація функціональних компонентів бізнес-процесів дозволяє виявити недоліки організації навіть там, де функціональність на перший погляд здається очевидною.

На основі аналізу предметної області побудовано функціональну модель бізнес-процесу реєстрації пасажирів у середовищі BPWin для виявлення місць зниження продуктивності. Було побудовано контекстну діаграму бізнес-процесу обслуговування пасажирів, яка являє собою саме загальний опис системи та її взаємодії із зовнішнім середовищем. Далі проведено функціональну декомпозицію системи (розбиття системи на великі фрагменти) із подальшою декомпозицією кожного великого фрагмента системи на більш дрібні тощо до досягнення необхідного рівня деталізації опису. Діаграми декомпозиції деяких основних бізнес-процесів подано нижче (рис. 2–3).



**Рис. 2. Діаграма «Огляд на вході до аеропорту»**

Результати дослідження показали, що більшість інформаційних та матеріальних потоків зосереджено в процесі реєстрації пасажирів. Співробітники аеропорту, які виконують реєстрацію, збирають, обробляють і передають до інформаційної системи такі дані: інформацію про кількість прибулих пасажирів; інформацію про відсутніх пасажирів у кінці реєстрації; дані про багаж, відповідність зазначеного місця багажу номеру

бирки й оголошеній цінності; дані про службову пошту; інформацію про відміну реєстрації пасажирів, зняття багажу і видалення багажної бирки.

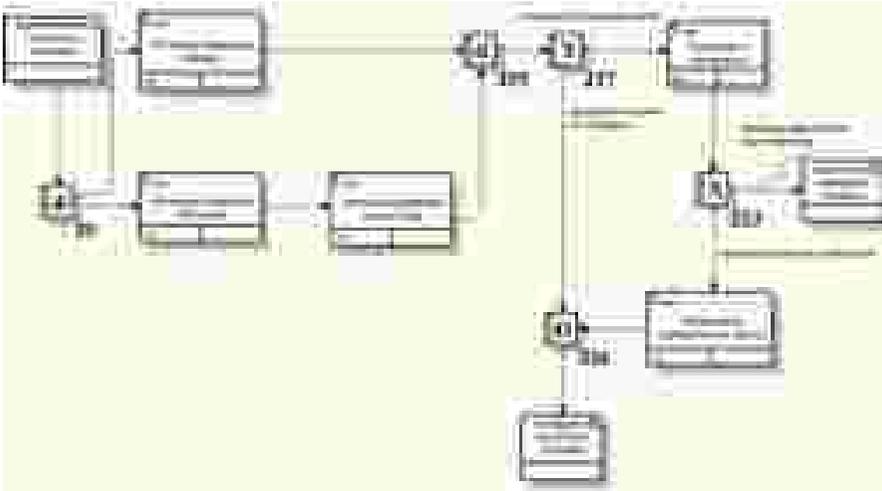


Рис.3. Діаграма «Контроль авіабезпеки»

Діаграма дерева вузлів демонструє ієрархію проведених робіт і дозволяє розглянути всю модель цілком, але не демонструє взаємозв'язку між окремими роботами. У процесі побудови функціональної моделі та моделі потоків даних, пов'язаної з обслуговуванням пасажирів, було визначено «вузькі місця» в існуючій системі:

- виникнення великих черг під час реєстрації пасажирів;
- тривалий час обслуговування пасажирів перед вильотом;
- багаторазовий огляд пасажирів і багажу, що призводить до збільшення часу реєстрації.

**Створення імітаційної моделі реєстрації пасажирів.** Для аналізу динаміки процесу обслуговування пасажирів, дослідження інформаційних потоків і вивчення статистичних характеристик процесу було побудовано імітаційну модель, що описує процес обслуговування пасажирів в аеропорту.

Вихідні дані для побудови імітаційної моделі процесу приходу пасажирів на реєстрацію: біномний закон розподілу; тривалість реєстрації – 120 хв; максимальний пасажиропотік – на 50–70 хв реєстрації.

Для розрахунку основних характеристик застосовано такі формули.

Імовірність приходу пасажирів в  $k$ -й інтервал реєстрації [3] (результати розрахунків наведено в таблиці):

$$P_{kn} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad (1)$$

де  $p$  – імовірність «успішного» приходу пасажирів в довільний інтервал часу (у даному випадку обрана 0,5);  $C_n^k$  – кількість сполучень із  $n$  по  $k$ ;  $k = \{0, \dots, n\}$  – номер інтервалу,  $n = 11$  (період реєстрації розбиваємо на проміжки в 10 хв).

Кількість пасажирів, які потрапили в  $k$ -й інтервал реєстрації [3]:

$$N_{kk} = P \cdot N, \quad (2)$$

де  $N$  – максимальна кількість пасажирів (визначають кількістю посадкових місць).

Середній період часу між приходом пасажирів у  $k$ -й інтервал [2]

$$t = \frac{1}{\lambda_k},$$

де  $\lambda_k$  – середня інтенсивність приходу пасажирів  $k$ -го інтервалу за 1 хв [Там же]:

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda_{i \text{ зарейсами}}}{n}.$$

Як програмну платформу для створення імітаційної моделі було обрано систему імітаційного моделювання Arena, оскільки вона дозволяє генерувати необхідні імовірнісні розподіли, докладно описувати бізнес-процеси із зазначенням необхідних матеріальних, фінансових та інформаційних ресурсів. Анімація процесів, що відбуваються в аеропорту, і детальні звіти дають обширний статистичний матеріал для аналізу їх ефективності та подальшої оптимізації.

У середовищі Arena було побудовано імітаційну модель обслуговування пасажирів в аеропорту. Верхній рівень цієї моделі містить такі основні процеси:

- Regvar Dosmotr – первинний огляд усіх людей, які входять в аеропорт, на наявність вибухових речовин і небезпечних вантажів;

- Registracia passajira – перевірка документів і квитків, уведення даних в інформаційну систему, призначення місця в літаку, видача посадкового талона;

– Registracia bagaja – реєстрація багажу, що передбачає зважування багажу пасажирів та оплати в разі необхідності ваги, що перевищує норму (20 кг), прикріплення багажних бирок;

– Osmotr bagaja – огляд співробітником авіаційної безпеки пасажирів та ручної поклажі на наявність небезпечних речовин і забороненого вантажу і за необхідності їх вилучення;

– Pogruzka bagaja – перевірка багажу на наявність небезпечних речовин і забороненого вантажу, завантаження багажу в машину і порівняння реальної кількості місць багажу з кількістю, зареєстрованою в системі;

– Posadka i vilet – перевірка пасажирів на наявність заборонених до перевезень предметів і речовин, знаходження пасажирів у залі очікування аеропорту, перевезення їх на автобусі до трапу літака, перевірку посадкових талонів та розміщення пасажирів у салоні літака, виліт.

**Імовірність приходу пасажирів в  $k$ -й інтервал реєстрації**

$k$	0	1	2	3	4	5
$P_k$	0.000488	0.005371	0.026855	0.080566	0.161133	0.225586
$k$	6	7	8	9	10	11
$P_k$	0.225586	0.161133	0.080566	0.026855	0.005371	0.000488

У разі успішного завершення всіх етапів агент із реєстрації друкує багажну відомість і передає її вантажникам. Якщо кількість місць багажу не збігається із зазначеною, то з'ясовують помилку й усувають її. Після цього вантажники відправляються до літака, передають багажну відомість льотної бригаді і вантажать багаж у літак.

**Результати моделювання.** Для аналізу основних характеристик процесу обслуговування пасажирів (час обслуговування пасажирів і середній час їх перебування в черзі) проведено такі експерименти.

Експеримент 1:

- пасажиропотік не змінено;
- параметри складових блоків моделі відповідають заданим вище.

Експеримент 2:

- кількість пасажирів, які вилітають, збільшено на 15 %;
- параметри складових блоків моделі відповідають заданим вище.

Експеримент 3:

- кількість пасажирів, які вилітають, збільшено на 15 %;
- кількість стійок реєстрації – 14;
- час реєстрації пасажирів – 50 с;

– час обробки одиниці багажу – 19 с.

Експеримент 4:

– кількість пасажирів, які вилітають, збільшено на 15 %;

– кількість стійок реєстрації – 10;

– час реєстрації одного пасажирів і обробки одиниці багажу дорівнює початково заданому.

У результаті моделювання для кожного експерименту було визначено час обслуговування пасажирів (рис. 4) і середній час їх перебування в черзі (рис. 5).

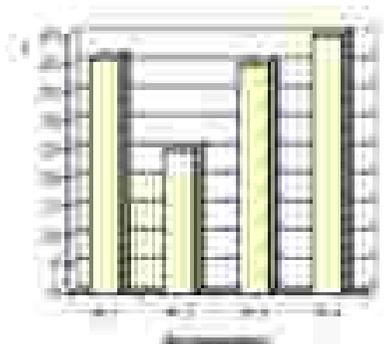


Рис.4. Середній час обслуговування

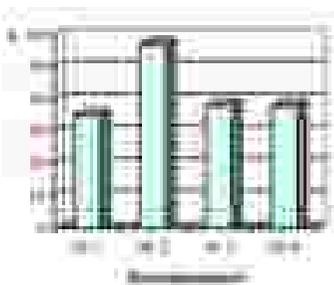


Рис. 5. Середній час у черзі

**Висновок.** Розроблено концептуальну й імітаційну моделі бізнес-процесів системи реєстрації пасажирів. Застосування імітаційної моделі обслуговування пасажирів в аеропорту дозволило одержати докладні звіти про використання матеріальних та інформаційних ресурсів у типовому аеропорту. Виявлено потенційні «вузькі» місця системи реєстрації пасажирів і багажу.

Проаналізовано результати проведених експериментів. Показники третього експерименту виявилися найуспішнішими.

На основі результатів детального аналізу кількісних характеристик модельованого процесу можна визначити необхідну кількість стійок реєстрації в умовах заданої інтенсивності вхідного потоку пасажирів, що дозволить скоротити витрати підприємства на обслуговування місць реєстрації пасажирів і багажу. Таке визначення допоможе удосконалити основні бізнес-процеси системи реєстрації пасажирів аеропорту, необхідні для забезпечення нормального функціонування аеропорту.

Разом із запропонованим інженерно-прикладним способом моделювання матеріальних та інформаційних процесів можна запропонувати

більш оперативний і спрощений підхід у вигляді аналітичного моделювання за допомогою засобів теорії масового обслуговування. Зокрема, для моделювання процесів реєстрації пасажирів і багажу можна застосовувати багатоканальні однофазні моделі з пуассонівським вхідним потоком, експоненціальним законом часу обслуговування і дисципліною Fifo (перший прийшов перший обслужений). Застосування відомих теоретичних формул для зазначеної постановки дає можливість досить оперативно одержати такі результати за наявності заданої інтенсивності вхідного потоку та інтенсивності обробки елементів потоку в обслуговуючих пристроях (стійках реєстрації):

- коефіцієнт завантаження;
- середній час очікування;
- середній час перебування елемента потоку в системі та ін.

При цьому можна застосовувати моделі з необмеженою і обмеженою кількістю місць очікування.

Навіть за таких спрощених умов розрахунку можливо одержати необхідну кількість апаратів обслуговування для збереження заданого загального часу обслуговування пасажиропотоку.

#### **Бібліографічні посилання**

1. **Дмитриев, С.А.** Реинжиниринг бизнес-процессов проектирования и производства [Текст] / С.А. Дмитриев, А.А. Саломатина, Ю.Н. Фомина; под общ. ред. Е.И. Яблочникова. – СПб.: СПбГУИТМО, 2008. – 236 с.
2. **Советов, Б.Я.** Моделирование систем [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
3. **Кельпон, В.** Имитационное моделирование [Текст] / В. Кельпон. – СПб.: Питер; К.: ВНУ, 2004. – 847 с.
4. ADONIS. Version 3.81. Volume II User Manual [Electronic resource]. – Access mode: [http://www.csd.uoc.gr/~hy565/neupage/docs/pdfs/ADONIS\\_user\\_manual.pdf](http://www.csd.uoc.gr/~hy565/neupage/docs/pdfs/ADONIS_user_manual.pdf).

*Надійшла до редколегії 17.05.2015*

УДК 519.8

**А.Ю.<sup>12</sup>Міняйло, В.А. Турчина**

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

## **ВИКОРИСТАННЯ ВІДСТАНІ ЛЕВЕНШТЕЙНА ДЛЯ АНАЛІЗУ ПОДІБНОСТІ ДАНИХ**

Розглянуто алгоритми нечіткого пошуку для виявлення однакових даних, що надходять до системи з різних джерел. Наведено їх порівняльну характеристику з обґрунтуванням вибору найбільш ефективного в межах контексту конкретної веб-системи. Подано вказівки щодо розробки програми для пошуку інформації за нечітким запитом.

Рассмотрены алгоритмы нечеткого поиска для обнаружения одинаковых данных, поступающих в систему из различных источников. Приведена их сравнительная характеристика с обоснованием выбора наиболее эффективного в рамках контекста конкретной веб-системы. Даются указания по разработке программы, осуществляющей поиск информации по нечеткому запросу.

The article deals with fuzzy search algorithms to identify similar data coming into the system from various sources. There are their comparative description and justification of the most effective within the context of a particular web system. The guidance on developing a program that searches for information by a fuzzy query is provided.

**Ключові слова:** відстань Левенштейна, нечіткий пошук, fuzzy string search, аналіз даних сучасних веб-систем, редакційний припис, оф-лайн алгоритми пошуку, он-лайн алгоритми пошуку.

**Вступ.** Наразі комп'ютерні бази даних містять дуже великий обсяг інформації (електронних даних). Однак вибір текстової інформації ускладнюється, коли текст написаний з помилками або нашвидку, тобто при цьому інформаційний текст не точний. Дана проблема досить часто постає під час обробки в автоматичному режимі прайс-листів інтернет-магазинів, пошукового рядка на сайті та ін.

Її можна вирішити за допомогою алгоритмів нечіткого пошуку рядків, які набули значного поширення в системах автоматизації перекладу, орфографічних коректорах, програмах розпізнавання друкованого тексту та навіть у пошукових системах.

З алгоритмами нечіткого пошуку тісно пов'язане поняття метрики схожості рядків. Уперше таку задачу поставив у 1965 р. радянський мате-

матик В. Й. Левенштейн, вивчаючи послідовності бітів  $0 - 1$  [1]. Невдовзі більш загальну задачу для довільного алфавіту пов'язали з його ім'ям, а метрику назвали «відстанню Левенштейна» (також редакційна відстань, або дистанція редагування) – це мінімальна кількість операцій вставки одного символу, видалення одного символу та заміни одного символу на інший, необхідних для перетворення одного рядка на інший. Вагомий внесок у вивчення даного питання належить Дену Гасфілду [2].

У загальному випадку нечіткий текстовий пошук передбачає пошук довільних ділянок тексту, але часто задачу можна звести до словникового пошуку (тобто зробити початкове індексування вхідних даних). Такий підхід будемо називати оф\_лайнним пошуком.

У багатьох роботах з нечіткого пошуку рядків розглядають пошук без попереднього індексування, який в англійських роботах часто називають on-line пошуком [3; 4]. Словниковий пошук з попередньою індексацією (off-line пошук) – порівняно маловивчений напрямок.

Мета роботи полягає у знаходженні оптимального алгоритму та його застосуванні для реальних даних, зокрема для пошуку схожих рядків у сучасних веб\_системах.

У роботі ми спиралися в основному на оф\_лайнні алгоритми пошуку. Варто зазначити, що на сьогодні розроблено чимало методів і алгоритмів:  $n$ -грамна індексація, заснована на індексації фіксованої довжини [5], різні модифікації метричних дерев [6], алгоритми пошуку в абстрактних метричних просторах [7], trie-дерева (промені) [8; 9], але існує мало робіт, присвячених порівняльному аналізу алгоритмів нечіткого словникового пошуку.

**Постановка задачі.** Алгоритми нечіткого пошуку характеризуються метрикою – функцією відстані між двома словами, що дозволяє оцінити ступінь їх подібності в даному контексті. Строге математичне визначення метрики включає необхідність відповідності умові нерівності трикутника ( $X$  – безліч слів,  $\rho$  – метрика):  $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ ,  $x,y,z \in X$ .

У більшості випадків під метрикою розуміють більш загальне поняття, яке не потребує виконання такої умови, це поняття можна також назвати відстанню (або у ще більш загальному плані – функцією схожості рядків).

Функція схожості рядків – це основа нечіткого словникового пошуку. Вибір необхідної функції схожості впливає не тільки на якість вибірки та швидкість пошуку, а також на складність реалізації індексу. Вдало підібрана функція схожості слів враховує різні типи змін у слові, включаючи видалення, заміни, вставки та транспозиції символів, а в найкращому випадку і схожість звучання слів.

Розглядатимемо алгоритми пошуку лише відносно елементарної відстані Левенштейна (без урахування транспозицій і вагів символічних перетворень). Такий підхід доцільний у випадку, коли функція Левенштейна може бути застосована як фільтр. Якщо обсяг вибірки, отриманої за допомогою простих алгоритмів, невеликий, то для кожного знайденого рядка можна уточнити відстань до пошукового зразка, використовуючи більш якісну та ресурсомістку функцію.

**Оф\_лайн пошук.** Мета індексації списку слів – прискорення пошуку рядків за подібністю, тобто знаходження всіх слів, для яких відстань (тут й далі маємо на увазі відстань Левенштейна) до пошукового шаблону не перевищує задану величину. Розглянемо алгоритми оф\_лайн пошуку.

**Хешування за сигнатурою.** У разі хешування за сигнатурою зразок перетвориться на сигнатурний вектор, який можна розглядати як запис числа у двійковому вигляді. Таким чином, хеш\_функція  $H(a)$  однозначно визначає перетворення  $F(w)$  рядка на ціле число.  $F(w)$  – хеш-функція, яка може бути застосована для індексації словника.

Якщо видалити або додати одну літеру, то зміниться не більше одного біта сигнатури. Може не змінитися жоден біт, якщо видалених букв у слові більше однієї, або у слові є літера, відображена функцією  $H(a)$  в той же самий індекс сигнатури, що й видалена літера. За умов заміни одного символу зміниться не більше двох бітів сигнатури. У випадку зміни двох бітів один біт обнуляється, а інший стає рівним одиниці [10].

**Частотні trie\_дерева.** Хешування за сигнатурою доцільне для так званого «дискового» пошуку, коли сторінки індексу ми беремо безпосередньо з диска, оскільки у процесі пошуку зчитується відносно невелике число списків із декількох послідовних дискових сторінок.

Для індексів, що цілком завантажуються в пам'ять, можна застосувати більш ефективний підхід, індексуючи замість бітової сигнатури частотний вектор. Імовірність появи слова із заданим частотним вектором значно менша, ніж ймовірність появи слова із заданою сигнатурою за умови, що сигнатурний і частотний вектор мають однаковий розмір, а також побудовані за допомогою однієї і тієї ж хеш\_функції  $H(a)$ . Саме тому структури даних на основі частотних векторів потенційно мають більшу здатність до скорочення перебору.

Списки частотних векторів менші порівняно зі списками сигнатур, але число різних частотних векторів більше, ніж число сигнатурних. На відміну від хешування за сигнатурою, для індексації частотних векторів не

можна використовувати хеш\_таблицю, ключ якої є частотний вектор, тому що для перебору елементів такої таблиці витрачено занадто багато часу.

Щоб вирішити проблему ефективної вибірки схожих частотних векторів, слід їх проіндексувати (наприклад, методом *trie-дерева*).

**Алгоритм розширення вибірки.** Припустимо, що слово  $u$  відрізняється від слова  $v$  рівно на одну операцію редагування. Якщо побудувати множину всіх слів, які утворюються з  $u$  в результаті однієї вставки, заміни або видалення символу, то отримана множина буде містити  $v$ .

Цю властивість можна застосовувати для зведення нечіткого пошуку до точної вибірки. Перевага алгоритму полягає в тому, що час пошуку практично не збільшується зі зростанням числа записів у словнику. За результатами експериментів для індексу завантаженого в пам'ять і максимально допустимої відстані редагування рівної одиниці – це найшвидший алгоритм.

Основний недолік алгоритму: він не є практично корисний для пошуку з максимально допустимою відстанню  $k$ , більшою за одиницю.

**Метод  $n$ -грам.** Основа класичного алгоритму  $n$ -грам – інвертування. Уже більше 30 років (рекомендуємо відвідати веб\_сторінку [www.clei.cl](http://www.clei.cl) для детального вивчення даного питання)  $n$ -грамну індексацію застосовують у сфері інформаційного пошуку.

Словникова  $n$ -грамна індексація заснована на такій властивості: якщо слово  $u$  можна отримати зі слова  $w$  у результаті не більше ніж  $k$  елементарних операцій редагування (за винятком перестановок символів), то за умов будь-якого подання  $u$  у вигляді конкатенації з  $k+1$ -го рядка один із рядків буде точним підрядком  $w$ .

Цю властивість можна посилити, зауваживши, що серед підрядків цього подання існує такий, різниця між позиціями якого у рядках  $w$  і  $u$  не більше ніж  $k$ .

Таким чином, задача пошуку зводиться до задачі вибірки усіх слів, що містять заданий підрядок. Для розв'язання цієї задачі зручно застосовувати інвертування щодо набору  $n$ -грам слова.

**Аналіз результатів.** Вищенаведені алгоритми протестовано на сукупності текстів (розміром 3Гб). На їх базі було побудовано словник із кількістю слів – 3.2 млн. Комп'ютер, використаний для тестів, має такі характеристики: процесор Intel(R) Core(TM) i7-4750HQ, 8Гб оперативної пам'яті, ОС Windows 8.1. Графічно отримані дані подано на рис. 1.

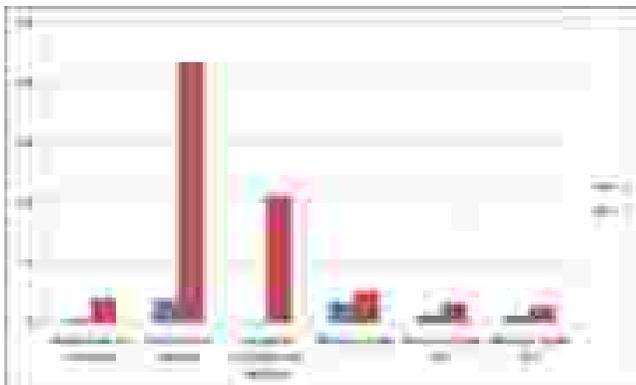


Рис.1. Результати аналізу роботи алгоритмів

**Застосування нечіткого пошуку до практичної задачі.** Задача розглядається у межах розробки веб\_системи (точніше веб\_сервісу) для страхування. Основна мета цього сервісу – надавати користувачеві найнижчі тарифи на певні види страхування. Веб\_сервіс отримує цю інформацію за допомогою автоматичного опитування інших страхових сайтів.

Етапи роботи веб\_сервісу:

- 1) користувач заповнює формуляр із даними щодо певного страхування ;
- 2) веб\_сервіс знаходить усі сайти страховиків, наявні в його системі ;
- 3) кожен страховик вимагає, у свою чергу, формуляр, заповнений відповідно до його вимог. Тому на цьому етапі формуляр веб\_сервісу «відображається» за наперед заданими правилами на кожен із формулярів страховиків ;
- 4) кожен новоотриманий формуляр із п.3 надсилається автоматично до відповідного страховика та отримуються тарифи ;
- 5) тарифи зводяться до загального виду ;
- 6) показується сукупність тарифів користувачеві .

Нам цікавий п.3, а саме деякі його особливості у межах страхування автомобілів та мотоциклів. У авто\_ та мотострахованні необхідно надавати користувачеві список усіх підтримуваних марок та моделей. Кожен страховик оперує власним списком. Наше завдання полягає:

- 1) у завантаженні кожного списку марок та моделей від усіх страховиків ;
- 2) формуванні власного списку, який має доповнюватися (змінюватися) із надходженням нових списків від нових страховиків ;
- 3) створенні відображення нашого списку на кожен список страховика (тобто за вибору певної марки та моделі з нашого списку це значення

відображається на певне значення із списку іншого страховика або не відображається, якщо страховик не підтримує це значення).

Саме у цьому полягає проблема нечіткого пошуку. Нові списки у системі можуть надходити з різною манерою написання (або з помилками).

**Вибір алгоритму нечіткого пошуку.** Застосовуємо нечіткий пошук саме для «кореневих» значень. Наприклад, якщо до системи надійде 3 моделі – BLADER KING, BLADER KING X, BLADER KING LIMITED, то «кореневим» значення для усіх трьох буде « BLADER KING ». Таким чином, до системи надходять нові моделі. Ми виділяємо з них «кореневі» значення та шукаємо відповідні значення у нашій таблиці.

Обґрунтування вибору нечіткого пошуку та індексації:

- нове «кореневе значення» може мати похибку (або ж значення із нашої системи може бути написано неправильно);
- таблиця «кореневих значень» тільки після поповнення від двох страховиків отримала більше 20000 унікальних записів, тому постає проблема **швидкого** нечіткого пошуку.

За результатами тестів обираємо алгоритм розширення вибірки. Зауважимо, що ми розглядаємо випадок із максимальною кількістю помилок, не більшою 1 ( $k = 1$ ). За іншого значення  $k$  нам би довелося обрати інший алгоритм, оскільки алгоритм розширення вибірки дуже неефективний, якщо  $k > 1$ .

Для обраного алгоритму маємо найкращі показники: оптимальний час пошуку, невеликий розмір індексу, незначний час створення індексу (це важливо, тому що до системи постійно надходять нові моделі, а тому індекс доведеться часто перебудувати).

**Висновок.** У роботі класифіковано та експериментально порівняно існуючі алгоритми нечіткого словникового пошуку. З огляду на результати зробимо висновок про те, що сучасні методики словникового нечіткого пошуку набагато ефективніші за алгоритм послідовного перебору. Застосування алгоритмів нечіткого пошуку в реальних пошукових системах тісно пов'язане з фонетичними алгоритмами, алгоритмами лексичного стемінгу – виділення базової частини у різних словоформах одного і того ж слова (наприклад, таку функціональність надають *Snowball* і *Яндекс mystem*), а також із ранжуванням на основі статистичної інформації або ж із використанням складних метрик. Розглянуті методи застосовували до реальної задачі з побудови веб\_системи для страхування.

### **Бібліографічні посилання**

1. **Левенштейн, В.И.** Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов [Текст] / В.И.Левенштейн // Докл. АН СССР. – М., 1965. – С. 845–848.
2. **Гасфилд, Д.** Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: Информатика и вычислительная биология [Текст] / Д.Гасфилд / пер. с англ. И.В.Романовского. – СПб.: Невский Диалект БВХ.Петербург, 2003. – 654 с.
3. **Wagner, R.A.** The String to String Correction Problem [Text] / R.A.Wagner, M.J. Fisher // J. of the ACM. – 1974. – P.168–173.
4. **Wu, S.** Fast Text Searching with Errors [Text] / S.Wu, U.Manber. // J. of the ACM. – 1992. – P.83–91.
5. **Navarro, G.** A Practical q-Gram Index for Text Retrieval Allowing Errors [Text] / G.Navarro, R.Baeza-Yates // CLEI Electronic J. – 1998. – Vol. 1(2).
6. **Baeza-Yates, R.** Fast Approximate String Matching in a Dictionary [Text] / R.Baeza-Yates, G.Navarro // Proceedings of the 5th South American Symposium on String Processing and Information Retrieval (SPIRE'98). – 1998. – P.14–22.
7. **Bentley, J.L.** Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching [Text] / J.L.Bentley // J. of the ACM. – 1975.
8. **Кнут, Д.** Искусство программирования [Текст] / Д.Кнут. – 3-е изд. – М.: Издат. дом “Вильямс”, 2000. – 682 с.
9. **Shang, H.** Tries for Approximate String Matching [Text] / H.Shang, T.H.Merret // In IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 1996. – P.540–547.
10. **Бойцов, Л.М.** Использование хеширования по сигнатуре для поиска по сходству [Текст] / Л.М.Бойцов // Прикл. математика и информатика. – 2001. – № 8. – С.135–154.
11. **Бойцов, Л.М.** Классификация и экспериментальное исследование современных алгоритмов нечеткого словарного поиска [Текст] / Л.М.Бойцов // In Proceedings of the 6th Russian Conference on Digital Libraries, 2004.

*Надійшла до редколегії 05.05.2015*

**Н. И. <sup>13</sup>Недашковская**

*Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа»  
НТУУ «КПИ», г. Киев*

## **МОДЕЛИ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ЭКСПЕРТОВ**

**Исследованы модели вычисления приоритетов или относительных важностей (весов) объектов на основании интервальных оценок парных сравнений этих объектов, выполненных экспертом. Проанализированы результаты работы моделей на экспертных оценках разного уровня несогласованности. Рассмотренные модели применяются в методах и технологиях поддержки принятия решений и многокритериального оценивания альтернатив решений по качественным критериям.**

**Досліджено моделі обчислення пріоритетів чи відносних важливостей (ваг) об'єктів на основі інтервальних оцінок парних порівнянь цих об'єктів, виконаних експертом. Проаналізовано результати роботи моделей на експертних оцінках різного рівня неузгодженості. Розглянуті моделі застосовують у методах і технологіях підтримки прийняття рішень та багатокритеріального оцінювання альтернатив рішень за якісними критеріями.**

**The paper deals with investigation of models for calculation of priorities or coefficients of relative importance (weights) of objects on basis of interval pairwise comparison judgments of these objects made by an expert. Results of the models are analyzed when using expert judgments of different consistency levels. The investigated models are used in decision support methods and technologies and multiple criteria evaluation of decision alternatives on basis of qualitative criteria.**

**Ключевые слова: поддержка принятия решений, экспертные оценки парных сравнений, коэффициенты относительных важностей альтернатив решений, интервальные экспертные оценки, согласованность .**

**Введение.** Работа посвящена исследованию моделей вычисления приоритетов (весов) альтернатив решений на основании оценок парных сравнений этих альтернатив, выполненных экспертом в шкале. Известны несколько семейств моделей парных сравнений, которые применяют в таких методах и технологиях поддержки принятия решений и многокритериаль-

ного оценивания, как метод анализа иерархий и его модификации [1 – 3], методы PROMETHEE [4], технологии целевого оценивания альтернатив [5] и др. Вычисление весов  $w \in R_+^n$ ,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , альтернатив решений на основании экспертных оценок парных сравнений выполняется с использованием матрицы парных сравнений (МПС)  $D_{n \times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$  со свойствами  $d_{ij} > 0$  и  $d_{ji} = 1/d_{ij}$  (мультипликативная МПС). Основная идея состоит в минимизации нормы отклонения МПС от некоторой неизвестной МПС  $C = (w_i / w_j)$ , считающейся в методах парных сравнений наилучшей аппроксимацией заданной МПС. МПС  $C = (w_i / w_j)$  называют согласованной или теоретической.

Исторически работа первых моделей парных сравнений основывалась на четких МПС, элементы которых  $d_{ij} \in R$ . Среди них традиционным является метод главного собственного вектора парных сравнений [1; 2]. В зависимости от выбора функции нормы матрицы различают модели наименьших квадратов, взвешенных наименьших квадратов, логарифмических наименьших квадратов и т.д. (см. обзор, выполненный в [3]).

Другие семейства моделей парных сравнений вычисляют веса на основании интервальных и нечетких оценок эксперта. Считается, что предоставление оценок в нечетком виде уменьшает нагрузку на эксперта, так как вместо точечных оценок эксперт дает более удобные для него и одновременно более соответствующие реальности лингвистические оценки вида «приблизительно равно  $x$ », «между величиной  $x$  и  $y$ ». В частности, разработано достаточно много моделей для вычисления весов элементов принятия решений на основании интервальных МПС (ИМПС)  $I = \{(l_{ij}, u_{ij}) \mid 0 < l_{ij} \leq u_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ . К этим моделям прибегают также и в задачах оценивания альтернатив решений, в которых экспертные оценки формализуются с применением теории нечетких множеств, а в последующем – принципа декомпозиции и переходом к множествам уровня.

Среди наиболее широко распространенных моделей на основании ИМПС можно выделить модели FPP [6] и 2SLGP [7], которые приводят к четким результирующим весам, а также модели GPM [8], LUAM [9] и TLGP [10], результатами которых являются веса альтернатив решений в виде интервалов.

В данной статье исследованы модели GPM, LUAM и TLGP, результатом работы которых являются интервальные веса альтернатив решений.

Интервальные результирующие веса, на наш взгляд, более предпочтительны по сравнению с четкими, поскольку сохраняют бóльшую часть информации из исходной ИМПС. Разные методы и модели в общем случае приводят к разным результирующим весам. Поэтому возникает задача анализа и сравнения моделей с целью определения наиболее достоверного вектора весов.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим положительную обратно симметричную интервальную матрицу парных сравнений (ИМПС):

$$A = \left\{ a_{ij} \mid a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}], i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n \right\} \quad (1)$$

где  $u_{ij} \geq m_{ij} \geq l_{ij} > 0$ ,  $l_{ij} = \frac{1}{u_{ji}}$ ,  $u_{ij} = \frac{1}{l_{ji}}$  и  $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$ .

Задача состоит в нахождении вектора интервальных весов  $w = \{(w_i) \mid w_i = [w_i^l, w_i^u], i = 1, n\}$ , который отображает предпочтения, записанные в ИМПС  $A$  (1).

**Определение 1.** ИМПС называется **согласованной**, если следующая допустимая область непустая:

$$W = \left\{ w = (w_1, \dots, w_n) \mid l_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq u_{ij}, \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i > 0 \right\}.$$

**Утверждение.** ИМПС является согласованной тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют ограничению

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq \min_k (u_{ik} u_{kj}) \text{ для } \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим наиболее широко используемые методы и модели вычисления вектора весов на основании ИМПС (1).

## 2. Методы и модели вычисления весов на основании ИМПС

### 2.1. Модель целевого линейного программирования GPM (LGPPM)

ИМПС  $A$  (1) можно представить двумя вещественными положительными матрицами  $A^L$  и  $A^U$ , где  $A^L \leq A \leq A^U$ :

$$A_L = \{(l_{ij})\}, A_U = \{(u_{ij})\}.$$

Известно, что для заданной экспертом ИМПС  $A$  (1) существует нормированный вектор  $W = (w_i)$ ,  $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ , близкий к  $A$  в смысле  $a_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} \varepsilon_{ij}$  для всех  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $\varepsilon_{ij}$  – некоторое возмущение.

Рассмотрим согласованную ИМПС  $\tilde{A} = \{(\tilde{a}_{ij})\}$ :

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[ \frac{w_i^L}{w_j^L}, \frac{w_i^U}{w_j^L} \right] \quad (2)$$

и представим ее с помощью двух четких неотрицательных матриц  $\tilde{A}^L$  и  $\tilde{A}^U$ :

$$\tilde{A}^L = \begin{bmatrix} w_i^L \\ w_j^U \end{bmatrix}, \tilde{A}^U = \begin{bmatrix} w_i^U \\ w_j^L \end{bmatrix}.$$

Запишем в матричном виде

$$\begin{aligned} \tilde{A}_L W_U &= W_U + (n-1)W_L, \\ \tilde{A}_U W_L &= W_L + (n-1)W_U, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $W_L = \{(w_i^L) | i = 1, \dots, n\}$ ,  $W_U = \{(w_i^U) | i = 1, \dots, n\}$  – четкие векторы весов.

ИМПС  $A$  (1) в общем случае несогласованна, поэтому равенства (3) для  $A$  выполняются только приближенно. Введем векторы отклонений:

$$\begin{aligned} E &= (A_L - I)W_U - (n-1)W_L, \\ \Gamma &= (A_U - I)W_L - (n-1)W_U, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E = \{(\varepsilon_i) | i = 1, \dots, n\}$ ,  $\Gamma = \{(\gamma_i) | i = 1, \dots, n\}$ ,  $I$  – единичная матрица размерности  $n$ . Величины  $\varepsilon_i, \gamma_i$  при  $i = \overline{1, n}$  являются показателями отклонений. Желательно, чтобы абсолютные значения этих показателей были как можно меньшими (предельный случай  $\varepsilon_i = \gamma_i = 0$  соответствует согла-

сованности ИМПС  $A$ ). Поэтому для нахождения вектора весов  $W = (w_i)$ ,  $w_i = [w_i^L, w_i^U]$  строится следующая модель целевого программирования [8].

**Модель 1**

Минимизировать  $J = \sum_{i=1}^n (|\varepsilon_i| + |\gamma_i|)$  (5)

при ограничениях:

$$E = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L,$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U,$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j^U + w_i^L \geq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j^L + w_i^U \leq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$W_U - W_L \geq 0,$$

$$W_L \geq 0.$$

В модели 1 первые два ограничения записаны в соответствии с условием (4), следующие два задают необходимое и достаточное условия нормировки для интервального вектора весов [8]. Последние два – это условия на нижний и верхний концы интервального веса и их неотрицательность.

Так как векторы отклонений  $E$  и  $\Gamma$  могут принимать отрицательные значения, выполним замену переменных:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}, \quad \varepsilon_i^- = \frac{-\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}, \quad \gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2} \quad \text{и} \quad \gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\varepsilon_i^+ \geq 0, \quad \varepsilon_i^- \geq 0, \quad \gamma_i^+ \geq 0 \quad \text{и} \quad \gamma_i^- \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Перепишем модель 1 (5) с учетом замены переменных и получим модель 2 линейного программирования [8].

**Модель 2**

Минимизировать  $J = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- + \gamma_i^+ + \gamma_i^-) = e^T (E^+ + E^- + \Gamma^+ + \Gamma^-)$  (6)

при ограничениях:

$$E^+ + E^- = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L,$$

$$\Gamma^+ + \Gamma^- = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U,$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j^U + w_i^L \geq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j^L + w_i^U \leq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$W_U - W_L \geq 0,$$

$$W_L, E^+, E^-, \Gamma^+, \Gamma^- \geq 0.$$

Для согласованных ИМПС значения целевых функционалов  $J$  моделей 1 и 2 равны нулю. Если  $J^* \neq 0$ , то ИМПС несогласованна. Величина отклонения  $J^*$  от нуля служит оценкой несогласованности экспертных оценок.

## 2.2. Модель нижней и верхней аппроксимаций (LUAM)

Так же как и для предыдущей модели, предположим, что для заданной экспертом ИМПС  $A$  (1) существует нормированный вектор  $W = (w_i)$ ,  $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ , близкий к  $A$  в смысле  $a_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} \varepsilon_{ij}$  для всех  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $\varepsilon_{ij}$  – некоторое возмущение.

Построим две аппроксимации ИМПС  $A$  (1) – нижнюю  $c_{ij}$  и верхнюю  $d_{ij}$ :

$$c_{ij} \subseteq a_{ij} \text{ (нижняя аппроксимация),} \tag{7}$$

$$a_{ij} \subseteq d_{ij} \text{ (верхняя аппроксимация),}$$

где  $c_{ij}$  и  $d_{ij}$  – оценки нижнего и верхнего (левого и правого) концов интервальных оценок для отношений весов.

Обозначим  $w1_i = [w1_i^L, w1_i^U]$  – нижние интервальные веса;  
 $w2_i = [w2_i^L, w2_i^U]$  – верхние интервальные веса.

Используя интервальную арифметику, распишем условия (7):

$$(c_{ij} \subseteq a_{ij}) \Leftrightarrow \left( \frac{w1_i^L}{w1_j^U} \geq l_{ij} \right) \wedge \left( \frac{w1_i^U}{w1_j^L} \leq u_{ij} \right), \quad (8)$$

$$(d_{ij} \supseteq a_{ij}) \Leftrightarrow \left( \frac{w2_j^L}{w2_j^U} \leq l_{ij} \right) \wedge \left( \frac{w2_i^U}{w2_j^L} \geq u_{ij} \right).$$

При побудові нижньої і верхньої моделей будемо шукати найбільшу нижню і найменшу верхню границю кінців інтервальних весів відповідно. Оптимізаційна задача для максимізації сумми довжин інтервальних чисел  $c_{ij}$  при першому обмеженні в (8) формулюється як нижня модель [9]. Оптимізаційна задача для мінімізації сумми довжин інтервальних чисел  $d_{ij}$  при другому обмеженні в (8) формулюється як верхня модель [9].

Нижня модель

$$J1 = \sum_{i=1}^n (w1_i^U - w1_i^L) \rightarrow \max \quad (9)$$

при обмеженнях:

$$w1_i^{LU} \geq l_{ij} w1_j, \quad \forall i, j, i \neq j,$$

$$w1_i^{UL} \leq u_{ij} w1_j, \quad \forall i, j, i \neq j,$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w1_j^U + w1_i^L \geq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w1_j^L + w1_i^U \leq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$w1_i^U - w1_i^L \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$w1_i^L > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Верхня модель

$$J2 = \sum_{i=1}^n (w2_i^U - w2_i^L) \rightarrow \min \quad (10)$$

при обмеженнях:

$$w2_i^{LU} \leq l_{ij} w2_j, \quad \forall i, j, i \neq j,$$

$$w2_i^{UL} \geq u_{ij} w2_j, \quad \forall i, j, i \neq j,$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w2_j^U + w2_i^L \geq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n w2_j^L + w2_i^U \leq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$w2_i^U - w2_i^L \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$w2_i^L > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Основна мета нижньої моделі – знайти такі ваги альтернатив, щоб відповідна теоретична (узгоджена) ІМПС обмежувала задану ІМПС (1) знизу. При цьому найбільш бажані ті ваги, які мають найбільшу можливу неточність, виражену шириною інтервального числа. Тому нижня модель формулюється

как задача максимизации. Первые два ограничения нижней модели обеспечивают приближение соответствующей теоретической (согласованной) ИМПС к заданной ИМПС (1) снизу. Следующие два ограничения – необходимые и достаточные условия нормировки интервального вектора весов. Последние два условия обеспечивают корректность интервального числа и его положительность. Среди особенностей нижней модели можно отметить отсутствие ее решения при некотором уровне несогласованности экспертных оценок [9].

Верхняя модель предназначена для нахождения таких весов альтернатив, чтобы соответствующая теоретическая ИМПС ограничивала заданную ИМПС (1) сверху. Наиболее желательны веса, которые имеют наименьшую возможную степень неточности, поэтому верхняя модель формулируется как задача минимизации. Ограничения верхней модели аналогичны соответствующим ограничениям нижней модели. Можно доказать, что оптимальное решение верхней модели всегда существует.

### 2.3. Двухэтапная модель целевого программирования TLGP

Экспертные оценки парных сравнений альтернатив, заданные в виде интервалов, можно интерпретировать как ограничения на отношения весов альтернатив:

$$l_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq u_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots, n$$

или после логарифмирования

$$\ln l_{ij} \leq \ln w_i - \ln w_j \leq \ln u_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots, n.$$

Эти неравенства справедливы для согласованных оценок. В общем случае, как для согласованных, так и для несогласованных оценок, выполняются ограничения:

$$\ln l_{ij} - p_{ij} \leq \ln w_i - \ln w_j \leq \ln u_{ij} + q_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots, n,$$

где  $p_{ij} \geq 0$ ,  $q_{ij} \geq 0$  — такие величины отклонений, что для каждой пары  $(p_{ij}, q_{ij})$  оба числа не могут одновременно быть положительными:  $p_{ij}q_{ij} = 0$ .

Величины отклонений  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$  для качественного решения должны быть как можно меньшими. Поэтому строится следующая задача целевого

программирования, целевая функция которой минимизирует несогласованность ИМПС (1) [10]:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_{ij} + q_{ij}) \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\ln w_i - \ln w_j + p_{ij} \geq \ln l_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots, n,$$

$$\ln w_i - \ln w_j - q_{ij} \leq \ln u_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n \ln w_i = 0,$$

$$p_{ij}, q_{ij} \geq 0, \quad p_{ij}q_{ij} = 0 \text{ при } i, j = 1, \dots, n.$$

Введем переменные  $x_i$  и  $y_i$ , которые всегда будут неотрицательны:

$$x_i = \frac{\ln w_i + |\ln w_i|}{2}, \quad y_i = \frac{-\ln w_i + |\ln w_i|}{2}.$$

Тогда задачу можно упростить и записать в одном из двух эквивалентных вариантов: с учетом только элементов верхней или только элементов нижней треугольной частей исходной ИМПС. Запишем задачу для элементов одной верхней треугольной части матрицы. Эта задача представляет первый этап модели.

**Этап 1:**

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_{ij} + q_{ij}) \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \geq \ln l_{ij} \text{ при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n,$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \leq \ln u_{ij} \text{ при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0,$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad x_i y_i = 0 \text{ при } i = 1, \dots, n,$$

$$p_{ij}, q_{ij} \geq 0, \quad p_{ij}q_{ij} = 0 \text{ при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n.$$

Можно показать, что ИМПС А (1) согласованна тогда и только тогда, когда  $J^* = 0$ , где  $J^*$  — оптимальное значение целевой функции задачи этапа 1. Решение задачи первого этапа в общем случае не единственно.

Для вычисления допустимых интервалов для весов  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) строится и решается пара задач целевого программирования (этап 2), которые в качестве ограничения используют оптимальное значение  $J^*$  целевой функции, полученное на первом этапе [10].

**Этап 2:**

$$\ln w_i = x_i - y_i \rightarrow \min/\max$$

при ограничениях:

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \geq \ln l_{ij} \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n,$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \leq \ln u_{ij} \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_{ij} + q_{ij}) = J^*,$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad x_i y_i = 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, n,$$

$$p_{ij}, q_{ij} \geq 0, \quad p_{ij} q_{ij} = 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n.$$

В результате решения задачи минимизации этапа 2 получим значение  $\ln w_i^L$  логарифма левого конца интервального веса  $w_i$ , а задачи максимизации —  $\ln w_i^U$  логарифма правого конца интервального веса  $w_i$ . Отметим, что пара задач этапа 2 решается отдельно для каждого значения индекса  $i = 1, \dots, n$ . Оптимальные значения этих задач формируют интервалы  $\ln w_i = [\ln w_i^L; \ln w_i^U]$ . Тогда интервальные веса  $w_i = [w_i^L; w_i^U]$  можно определить, применяя обратное преобразование:

$$w_i^L = \exp(\ln w_i^L), \quad w_i^U = \exp(\ln w_i^U).$$

Перейдем к анализу рассмотренных моделей с целью определения наиболее достоверного вектора весов.

**3. Анализ моделей GPM, LUAM и TLGP**

На основании описаний моделей, приведенных в п.2, можно сделать следующие выводы.

- Все три рассмотренные модели разработаны для ИМПС, построенных по экспертным оценкам в мультипликативных шкалах. Они могут

применяться как для согласованных, так и несогласованных ИМПС и в результате дают интервальные веса.

- Модель GPM состоит в минимизации абсолютных значений отклонений заданной экспертом ИМПС от теоретической ИМПС. Модель TLGP вычисляет вектор весов в два этапа. На первом минимизируется сумма неотрицательных ошибок в трансформированном пространстве логарифмов, результатом является множество решений. На втором этапе для каждой альтернативы в отдельности решаются две задачи линейного программирования для выбора из этого множества минимального и максимального значений веса, которые формируют соответственно левый и правый концы интервала для этого веса. В результате применения модели LUAM получаем два интервальных вектора весов, которые ограничивают неизвестные реальные веса альтернатив двумя теоретическими ИМПС сверху и снизу. Эти результаты представляются менее удобными для дальнейшего использования, но в основном содержат решения моделей GPM и TLGP.

- Модели GPM и LUAM позволяют определить нормированные интервальные веса, а модель TLGP – нет. Модель TLGP работает в логарифмическом пространстве весов и предусматривает дальнейшее применение обратного преобразования. Интервальные веса, вычисленные моделью TLGP, требуют последующей нормировки с целью их использования в решении многокритериальной задачи. При выборе метода нормировки интервальных величин нужно учитывать, что применение расширенных бинарных операций часто приводит к неоправданно широким результирующим интервалам и поэтому не всегда оправданно на практике.

- Модель TLGP в качестве исходных данных использует элементы только одной треугольной части ИМПС, причем результаты по верхней и нижней частям матрицы эквивалентны между собой. Модели GPM и LUAM используют все элементы ИМПС.

- Модели GPM и TLGP в отличие от LUAM позволяют в некоторой степени оценить несогласованность ИМПС (исходных экспертных оценок). Оценками несогласованности в этих моделях могут служить оптимальные значения целевых функций  $J^*$ . Однако определяется только наличие несогласованности в ИМПС, что соответствует  $J^* \neq 0$ . Модели GPM и TLGP не позволяют оценить допустимость этой несогласованности для ее использования в процессе принятия решений в отличие, например,

от традиционного метода главного собственного вектора для четких МПС с разработанными пороговыми значениями, с которыми сравнивается показатель несогласованности.

- Целевая функция модели GPM содержит сумму всех отклонений по строкам заданной ИМПС от идеальной (теоретической) ИМПС. Поэтому становится возможным определить наиболее несогласованный элемент ИМПС путем нахождения максимального слагаемого в этой сумме, т.е. строки ИМПС, которая вносит наибольшее отклонение. Тогда можно осуществить повышение согласованности ИМПС, например, организовав обратную связь с экспертом, возвратив ему наиболее несогласованный элемент для пересмотра. Отметим, что модель LUAM не имеет подобного свойства, не позволяет осуществить повышение согласованности ИМПС, исключить циклы (нетранзитивные суждения экспертов) в этой матрице.

- Преимуществом модели GPM есть возможность достаточно легкого ее расширения на случай нечетких матриц парных сравнений, элементы которых заданы, например, треугольными или трапециевидными нечеткими множествами.

Исследуем результаты работы моделей GPM, LUAM и TLGP на ИМПС разного уровня несогласованности. Проведем также сравнение с результатами по традиционному методу главного собственного вектора (EM), построив для каждой из рассматриваемых ИМПС соответствующую четкую матрицу. Для облегчения сравнительного анализа представим результаты по моделям GPM, LUAM и TLGP веса в дефазифицированном виде.

**Пример 1 (согласованная ИМПС).** Рассмотрим согласованную ИМПС:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & [1; 3] & [3; 5] & [5; 7] & [5; 9] \\ \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & 1 & [1; 4] & [1; 5] & [1; 4] \\ \left[ \frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right] & \left[ \frac{1}{4}; 1 \right] & 1 & \left[ \frac{1}{5}; 5 \right] & [2; 4] \\ \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{5} \right] & \left[ \frac{1}{5}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{5}; 5 \right] & 1 & [1; 2] \\ \left[ \frac{1}{9}; \frac{1}{5} \right] & \left[ \frac{1}{4}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] & \left[ \frac{1}{2}; 1 \right] & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 1

**Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС  $A_1$  (пример 1)**

	TLGP	GPM	LUAM	EM
	$J^* = 0$			CR = 0.022
$w_1$	0.464	0.453	0.350	0.478
$w_2$	0.238	0.236	0.214	0.240
$w_3$	0.140	0.146	0.105	0.138
$w_4$	0.093	0.097	0.086	0.079
$w_5$	0.065	0.063	0.091	0.064

Согласованная ИМПС характеризуется наименьшим уровнем противоречивости экспертных суждений. Ранжирования, полученные моделями GPM, TLGP и традиционным EM, совпадают. Немного отличается ранжирование по модели LUAM, что может быть следствием применения более сложного метода дефаззификации двух интервальных векторов весов по верхней и нижней моделям.

**Пример 2 (возмущенная согласованная ИМПС).** Возмущенная ИМПС имитирует неточность и субъективность экспертных оценок. Она вычисляется на основании согласованной ИМПС путем добавления шума, а именно, каждый элемент согласованной ИМПС случайным образом сдвигается на 1–2 деления шкалы. Дефаззифицированные веса по разным моделям для такой ИМПС  $A_2$  приведены в табл. 2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & [1; 3] & [1; 3] \\ 1 & 1 & 1 & [1; 3] & [1; 5] \\ 1 & 1 & 1 & 1 & [1; 3] \\ \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & 1 & 1 & 1 \\ \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{5}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС  $A_2$  (пример 2)**

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 0,579$			CR = 0,014
$w_1$	0.263	0,220	0.241	0.230	0,249
$w_2$	0.273	0,220	0.269	0.245	0,258
$w_3$	0.203	0,200	0.218	0.230	0,220
$w_4$	0.154	0,194	0.138	0.150	0,148
$w_5$	0.106	0,166	0.132	0.145	0,121

Результаты по модели GPM, так же как и по EM, можно считать близкими к эталонным, поскольку задают ранжирование альтернатив  $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$ , которое совпадает с ранжированием эталонных весов. Модели TLGP и LUAM на данном примере показали худшие результаты: они задают частичные ранжирования, не различая некоторые альтернативы.

**Пример 3 (слабо согласованная ИМПС)**. МПС  $D$  называется **слабо согласованной**, если для всех ее элементов выполняются порядковые транзитивности:  $(d_{ij} > 1) \wedge (d_{jk} > 1) \Rightarrow (d_{ik} > 1)$  [11]. Рассмотрим слабо согласованную ИМПС:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] & \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{5} \right] & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] \\ [1; 3] & 1 & [3; 5] & [4; 6] & [1; 3] \\ [2; 4] & \left[ \frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right] & 1 & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right] \\ [5; 7] & \left[ \frac{1}{6}; \frac{1}{4} \right] & [1; 3] & 1 & \left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \\ [1; 3] & \left[ \frac{1}{3}; 1 \right] & [3; 5] & [2; 4] & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 3

**Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС  $A_3$  (пример 3)**

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 1,610$			CR = 0,211
$w_1$	0.094	0,081	0.042	0.109	0.088
$w_2$	0.340	0,396	0.425	0.274	0.377
$w_3$	0.159	0,096	0.091	0.119	0.104
$w_4$	0.172	0,127	0.148	0.124	0.175
$w_5$	0.235	0,300	0.281	0.177	0.257

Несмотря на значительный уровень несогласованности данной ИМПС, все рассмотренные модели приводят к одинаковому полному ранжированию альтернатив  $a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1$ , которое совпадает с эталонным ранжированием.

**Пример 4 (слабо несогласованная ИМПС).** Этот тип матриц моделирует нетранзитивные экспертные суждения. МПС  $D$  называется **слабо несогласованной**, если существует тройка ее элементов, такая что нарушается порядковая транзитивность на множестве сравниваемых альтернатив:  $(d_{ij} > 1) \wedge (d_{jk} > 1) \wedge (d_{ik} < 1)$  [11]. Рассмотрим слабо несогласованную ИМПС:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & [1; 5] & [4; 8] & [3; 7] & [2; 6] \\ \left[ \frac{1}{5}; 1 \right] & 1 & \left[ \frac{1}{6}; \frac{1}{2} \right] & \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{3} \right] & [3; 7] \\ \left[ \frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right] & [2; 6] & 1 & \left[ \frac{1}{4}; 1 \right] & \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{3} \right] \\ \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{3} \right] & [3; 7] & [1; 4] & 1 & [1; 5] \\ \left[ \frac{1}{6}; \frac{1}{2} \right] & \left[ \frac{1}{7}; \frac{1}{3} \right] & [3; 7] & \left[ \frac{1}{5}; 1 \right] & 1 \end{pmatrix}.$$

**Веса альтернатив, вычисленные разными методами на основании ИМПС  $A_4$  (пример 4)**

	Эталонные веса	TLGP	GPM	LUAM	EM
		$J^* = 2,036$			CR = 0,447
$w_1$	0,338	0,485	0.481	0.25	0,400
$w_2$	0,079	0,082	0.129	0.133	0,142
$w_3$	0,125	0,090	0.058	0.133	0,117
$w_4$	0,275	0,213	0.226	0.136	0,211
$w_5$	0,181	0,130	0.063	0.133	0,130

ИМПС  $A_4$  имеет наибольший уровень несогласованности среди всех рассмотренных примеров. Для данного типа матриц наилучшие результаты показала модель TLGP: она привела к полному ранжированию  $a_1 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_3 \succ a_2$ , которое совпадает с эталонным. Все остальные модели дали в данном примере неверные результаты. Так, модель GPM, как и метод EM, привела к ранжированию  $a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_3$ , отличному от эталонного. Ранжирование по модели LUAM частично (альтернативы  $a_2, a_5, a_3$  оказались неразличимы) и также отличается от эталона.

### Заклучение

Проведен анализ и сравнение моделей GPM, LUAM и TLGP парного оценивания альтернатив решений на основании интервальных матриц, построенных по экспертным суждениям в мультипликативных шкалах. Эти модели применяются как для согласованных, так и несогласованных ИМПС и в результате дают интервальные веса. Анализ результатов работы моделей выполнен на ИМПС разного уровня несогласованности. Также проведено сравнение с результатами, полученными традиционным методом главного собственного вектора на основе дефаззифицированных ИМПС.

### **Библиографические ссылки**

1. **Саати, Т.Л.** Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети [Текст] / Т.Л. Саати. – М.: Книж. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.
2. **Saaty, T.L.** Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary [Текст] / T.L. Saaty // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.145, №1. – P.85 – 91.
3. **Панкратова, Н.Д.** Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування [Текст]: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська. – К: ІВЦ «Вид. во «Політехніка», 2010. – 371 с.
4. **Corrente, S.** Multiple Criteria Hierarchy Process with ELECTRE and PROMETHEE [Текст] / S. Corrente, S. Greco, R. Słowiński // Omega. – 2013. – Vol. 41, Issue 5. – P. 820–846.
5. **Циганок, В.В.** Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів [Текст] / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2008. – Т.10, №2. – С.121 – 127.
6. **Mikhailov, L.** Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgements [Текст] / L. Mikhailov // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – Vol. 134(3). – P. 365 – 385.
7. **Chandran, B.** Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process [Текст] / B. Chandran, B. Golden, E. Wasil // Computers & Operations Research. – 2005. – Vol.32. – P. 2235 – 2254.
8. **Wang, Y.M.** A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix [Текст] / Y.M.Wang, T.M.S. Elhag // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 177. – P. 458–471.
9. **Sugihara, K.** Interval priorities in AHP by interval regression analysis [Текст] / K. Sugihara, H. Ishii, H. Tanaka // European Journal of operational research. – 2004. – Vol.158. – P. 745 – 754.
10. **Wang, Y.M.** A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices [Текст] / Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu // Fuzzy sets and systems. – 2005. – Vol.152. – P. 475 – 498.
11. **Недашківська, Н.І.** Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм [Текст] / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – №4. – С.67 – 79.

*Надійшла до редколегії 14.09.2015*



УДК 519.8

**Н.И. <sup>1</sup>Ободан, М.К. Гук**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

## **ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОСВЕЩЕНИЕМ АВТОМОБИЛЯ**

Рассмотрена задача управления элементами осветительной системы автомобиля в зависимости от состояния внешней среды. Управление динамической системой реализовано на основе модели логического вывода, позволяющего учесть неопределенность начального состояния системы и состояние внешней среды. Разработан алгоритм управления, который идентифицирует систему в процессе функционирования и управляет ею в режиме реального времени.

Розглянуто задачу керування елементами освітлювальної системи автомобіля залежно від стану зовнішнього середовища. Керування динамічною системою реалізовано на основі моделі логічного виведення, що дозволяє враховувати невизначеність початкового стану системи і стан зовнішнього середовища. Розроблено алгоритм керування, який ідентифікує систему в процесі функціонування і керує нею в режимі реального часу.

The problem of control elements of the lighting system of the car depending on the state of the environment is investigated. Control of dynamic system is implemented based on the model inference. This allows taking into account the uncertainty of the initial state of the system and the state of the environment. Control algorithm, which identifies the system during operation and manages in real time, is developed.

**Ключевые слова:** система освещения автомобиля, динамическая система управления, логический вывод, микропроцессор, Arduino, GPS.

**Введение.** При управлении сложной системой возможны ситуации, когда начальное состояние системы, состояние внешней среды и цель управления могут быть как частично неопределенными, так и нечеткими, при этом информация о состоянии объекта и внешней среды поступает в дискретном режиме. Наличие разнообразных помех также является источником неопределенности и приводит к неполной априорной информации об объекте управления. К таким системам относятся, например, системы управления движением сложных технических объектов [2 ; 4; 5 ], системы освещения, системы регулирования, системы моделирования технологических процессов [3], интеллектуальные системы мониторинга окружающей среды, системы управления телекоммуникационными сетями и др.

Применение классических подходов к управлению такими системами с использованием традиционного математического аппарата теории управления приводит к непреодолимым трудностям.

В настоящее время для моделирования таких систем применяют когнитивные структуры [7], называемые знаниями, а для решения задач управления – методы теории интеллектуальных систем, основанные на таких базовых технологиях, как экспертные системы, нечеткая логика, искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы. Положительной особенностью применения таких подходов является способность адаптации системы в изменяющейся среде, невысокая чувствительность к полноте описания состояний.

С развитием микропроцессорной техники наблюдается тенденция алгоритмической и системотехнической интеграции системы управления и объекта управления, аппаратной платформой для которой служат специализированные вычислительные системы – микроконтроллеры, программируемые микросхемы и их гибриды [1]. Поэтому актуальным является создание встраиваемых интеллектуальных систем управления, сочетающих в себе простоту и надежность с возможностью реализации сложных алгоритмов интеллектуального управления.

Кроме того, применение такого подхода к управлению динамической системой обеспечивает возможность гибкого изменения алгоритма управления в процессе модернизации или при адаптивной модификации в процессе функционирования.

В данном исследовании рассматриваем задачу управления элементами осветительной системы автомобиля в зависимости от состояния внешней среды.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему управления внешними осветительными устройствами автомобиля, которая обеспечивает выполнение правил дорожного движения и в автоматическом режиме включает ближний свет фар автомобиля или дневные ходовые огни в зависимости от реальных условий, в которых находится автомобиль – освещенности, календарной даты, местоположения автомобиля по отношению к границам населенных пунктов.

**Математическая модель объекта и системы управления.** Модель динамической системы, которая описывает целенаправленное поведение осветительной системы автомобиля, представим в виде

$$x(t+1) = \Phi(\Psi(\{x(t), u(t)\})),$$

где  $x(t) = \{x_i(t)\}$  – вектор состояния осветительной системы в момент времени  $t$ ;  $u(t)$  – управление.

Процедура  $\Phi$  – процедура замыкания множества наблюдаемых фактов  $S$ , которая управляет вычислениями и рассуждениями, направленными на формирование вектора состояния  $x(t)$

$$\Phi(S(t)) = x(t).$$

Процедура диахромного перехода  $\Psi$  осуществляет переход на определенный тип управления по текущему состоянию. Процедуры  $\Phi$  и  $\Psi$  реализуются при помощи выполнения правил двух типов  $RS$  и  $RD$  соответственно, которые образуют базу правил  $R = \{RS, RD\}$ .

Правило является продукционным и может быть представлено упорядоченной тройкой множеств  $r = \{C, A, D\}$ , где  $C$  – условие правила;  $A$  – множество фактов, добавляемых правилом;  $D$  – множество фактов, удаляемых правилом.

Правила замыкания  $RS$  содержат такие действия, результат которых расширяет описание состояния системы в фиксированный момент времени  $t$ , правила перехода  $RD$  содержат правила, результат действия которых формирует новое состояние системы.

**Метод решения и алгоритм работы системы управления.** Для обеспечения управляемости системы база правил удовлетворяет следующим требованиям [5]:

1. Для каждого подмножества правил  $R_i \subseteq R$  и каждого состояния  $S$  должны выполняться условия

$$S \subseteq A(R_i) \text{ и } S \cap D(R_i) = \emptyset,$$

где  $A(R_i)$  – объединение множества всех фактов, добавляемых правилами из  $R_i$ ;  $D(R_i)$  – объединение множеств всех фактов, удаляемых правилами  $R_i$ ;

2. С помощью управления  $u_i(t)$  система должна переводиться из состояния  $x_1$  в состояние  $x_2$ , каждый факт встречается не более чем в одном правиле.

На каждой итерации в процессе решения уравнения  $\Phi(S) = x(t)$  для каждого события  $x_i$  текущего состояния  $x(t)$  процедура  $\Phi$  предполагает обращение к базе знаний и выполнение следующих действий:

1) в базе правил  $RS$  на множестве имен и концептов событий выполняется поиск всех правил, условия которых сопоставимы с ситуацией  $S_i$ ;

2) для каждого найденного правила  $R_i^+$  вида *ЕСЛИ C ТО A*, где  $A$  – список добавляемых событий, строится множество  $\Phi(S) = S \cup A$ ;

3) для каждого найденного правила  $R_i^-$  ЕСЛИ С ТО  $D$ , где  $D$  – список удаляемых событий и  $D \in S$ , строится множество  $\varphi(S) = S \setminus D$ , если  $D \notin S$ , то строится множество  $\varphi(S) = S$ ;

4) для каждого экземпляра  $x$  события\_прототипа  $X$  запускаются все процедуры, которым  $x$  доставляет фактические параметры, вычисляются процедурами экземпляра  $Z$  и  $\varphi(S) = S \cup Z_0$ ;

5) шаги повторяются до стабилизации  $\varphi(S)$ .

Принятие решений о поведении системы осуществляется на основе базы знаний, индексируемой информацией о текущем состоянии системы.

Правило типа  $RS$  реализует процедуры вычисления дополнительных фактов о текущей ситуации – вычисление времени восхода (захода) солнца по географическим и календарным данным, определение состояния освещенности по значениям, полученным от датчиков освещенности.

С каждым правилом  $RD$  связано действие исполнительного органа, обеспечивающее включение одного или нескольких компонент системы освещения. Эти же правила применяются для компоновки элементов системы освещения в текущей ситуации.

На основании правил типа  $RD$  процедура  $\psi$  предусматривает выбор правила перехода для осуществления воздействия системой управления. Для каждого события  $S$  текущего состояния  $x(t)$  процедура  $\psi$  выполняет действия, аналогичные действиям, указанным в пунктах 1) – 3). При этом в качестве заключения правила выступает команда перехода на один из типов управления и его реализация. Процесс организуется следующим образом:

1) выбирается некоторое правило типа  $RD$ ;

2) проверяется выполнимость условия ЕСЛИ С правила в состоянии  $S_i$  (текущая ситуация);

3) если условие выполнимо, то для множества добавляемых и удаляемых фактов выполняются условия присваивания:

$$k := i, t = i + v,$$

где  $v$  – время сдвига начала добавляемого факта по отношению к текущему моменту времени  $k$ , в который выполнены условия правила;

4) в каждое правило на места свободных переменных подставляются соответствующие значения из базы правил;

5) каждый из полученных фактов записывается в состояние  $S(t)$ .

Шаги выполняются до исчерпания множества применимых правил.

К полученному состоянию применяется процедура  $\Phi$  и строится состояние  $\Phi(S(t))$ .

Проиллюстрируем работу предложенного метода и алгоритма управления на примере управления осветительной системой автомобиля.

Одним из важных факторов активной безопасности является заметность автомобиля на дороге для других участников дорожного движения, поэтому своевременно включенные внешние осветительные устройства (фары ближнего света, дневные ходовые огни) на автомобиле являются обязательными.

В соответствии с Правилами дорожного движения Украины (ПДД Украины) [6] дневные ходовые огни (ДХО) на движущемся автомобиле должны быть включены за пределами населенного пункта в период с 1 октября по 1 мая (п. 9.8. ПДД Украины). Также регламентируются условия для включения фар ближнего света (ФБС) – темное время суток, условия недостаточной освещенности дороги (п.19.1. ПДД Украины). При этом темное время суток определяется как время от захода до восхода солнца, а недостаточная освещенность – как видимость дороги в направлении движения меньше 300 м. В силу специфики сформулированных условий при управлении автомобилем возможны ситуации, например, въезд в тоннель, когда решение о включении освещения надо принимать мгновенно, что увеличивает вероятность неверного решения и отвлекает водителя от управления автомобилем.

Информация о состоянии внешней среды может быть получена в виде дискретных сигналов от датчика освещенности и модуля позиционирования GPS.

Модель системы управления включает следующие компоненты:

- 1) модель освещенности;
- 2) модель позиционирования;
- 3) модель текущего времени.

Значения параметров для каждой из моделей поступают

- от датчика освещенности – состояние действующих на данный момент дорожных условий (ухудшение погоды, туман, снегопад, въезд в тоннель и т.д.);

- от модуля позиционирования GPS – календарная дата для определения необходимости включения в этот день ДХО, географические координаты для определения местоположения автомобиля по отношению к границам населенного пункта, текущее время. При этом значение текущего времени периодически сравнивается со временем восхода (захода) солнца, которое вычисляется для данной даты и географической широты.

Вводятся входные переменные с множеством дискретных значений:

освещенность = {светло, темно}; время суток = {день, ночь}; местополо-

жение автомобиля = {город, трасса}, географические координаты автомобиля = {значение широты, значение долготы}; календарная дата = {день, месяц, год}, время восхода (захода) солнца = {часы, минуты, секунды}; текущее время = {часы, минуты, секунды};

Каждая из моделей описывается вектором состояния, значения компонент которого могут быть получены непосредственно от датчиков или вычислены на основании правил замыкания. Так, модель освещенности описывается вектором {освещенность, время суток}; модель позиционирования описывается вектором {географические координаты автомобиля, географические координаты границ населенных пунктов, календарная дата, текущее время}; модель текущего времени: {календарная дата, текущее время, время восхода (захода) солнца}. Для формирования конкретных значений в векторах состояний используются показания датчика освещенности, показания модуля GPS и правила замыкания.

Множество возможных состояний разбивается на три зоны управления. В каждой зоне действуют свои законы управления, определяемые правилами. Выделяются следующие зоны управления:

- 1) ДХО – выключены, ФБС – выключены.
- 2) ДХО – включены, ФБС – выключены.
- 3) ДХО – выключены, ФБС – включены.

Значения включен / выключен в базе правил перехода обозначены булевыми константами 1 / 0.

Правила замыкания представляются в форме ЕСЛИ условие ТО заключение, где заключение состоит из списков добавляемых и удаляемых фактов. Примеры правил  $RS$  имеют вид:

1) ЕСЛИ географические координаты автомобиля =  $\{\alpha, \beta\}$  ТО время восхода (захода) солнца = функция  $(\alpha, \beta, \omega_0, \phi, \delta)$ ;

2) ЕСЛИ географические координаты автомобиля =  $\{\alpha, \beta\}$  И географические координаты границ населенных пунктов = заданы ТО местоположение автомобиля = процедура определения принадлежности точки области (географические координаты автомобиля, географические координаты границ населенных пунктов);

3) ЕСЛИ текущее время < время восхода солнца И текущее время > время захода солнца ТО время суток = ночь;

4) ЕСЛИ текущее время > время восхода солнца И текущее время < время захода солнца ТО время суток = день;

5) ЕСЛИ показание датчика освещенности > начало интервала И показание датчика освещенности < конец интервала ТО освещенность = светло;

6) ЕСЛИ показание датчика освещенности > конец интервала И показание датчика освещенности < начало интервала ТО освещенность = темно;

Приведенные примеры правил содержат функцию вычисления времени восхода (захода) солнца и процедуру определения местоположения автомобиля по отношению к границам населенных пунктов.

Вычисление времени восхода (захода) солнца для конкретной географической координаты осуществляется в соответствии с [8]:

$$\text{функция } (\alpha, \beta, \omega_0, \delta) = 12 - (+) \cos \omega_0,$$

где  $\alpha, \beta$  – значение широты, значение долготы точки на местности;  $\cos \omega_0 = -\tan \alpha \cdot \tan \delta$ ;  $\omega_0$  – часовой угол солнца при восходе (если выбрано отрицательное значение) или при заходе (если выбрано положительное значение);  $\delta$  – склонение солнца.

**Процедура определения** местоположения автомобиля по отношению к границам населенных пунктов в качестве входных данных использует географические координаты автомобиля, полученные как сигнал модуля позиционирования GPS, и географические координаты границ населенных пунктов.

Для определения географических координат точек, из которых состоит граница населенных пунктов, выбран открытый картографический сервис OpenStreetMap (OSM). С использованием инструмента для доступа к базам данных OSM – Overpass turbo могут быть построены xml\_запросы и получены xml\_файлы с географическими координатами всех точек, принадлежащих границе города.

Алгоритм определения местоположения автомобиля таков:

1. Подготовить входные данные с географическими координатами границы населенного пункта в виде отдельных файлов «n.txt», названия которых совпадают со значением географической долготы n, n – целое число. Один файл содержит информацию о точках со значениями долготы от n.000 до x.999. Координаты точек сортируются по долготы от меньшего значения к большему.

2. Определить географические координаты положения автомобиля, присвоить переменным  $\alpha, \beta$  эти значения. Открыть файл, название которого совпадает с целой частью текущего значения географической долготы.

3. Выполнить проверку условия, если файл с таким названием не существует, то переход на пункт 7, иначе переход на пункт 4.

4. Организовать цикл по перебору точек массива до достижения точки, долгота которой совпадает с географической долготой автомобиля.

Вести переменные before и after, значения которых инкрементируются по правилу: если широта точки, принадлежащей границе области, больше значения широты точки, в которой находится автомобиль, то переменная before инкрементируется на 1, иначе \_ переменная after.

5. После выхода из цикла анализируются значения переменных before и after по правилам: если значения обеих переменных равны 0, то переход к пункту 7 (автомобиль находится вне области); если значения обеих переменных нечетные, то переход к пункту 6., если четные, то переход к пункту 7.
6. Автомобиль находится в пределах области. Переход к пункту 8.
7. Автомобиль находится вне области. Переход к пункту 8.
8. Конец.

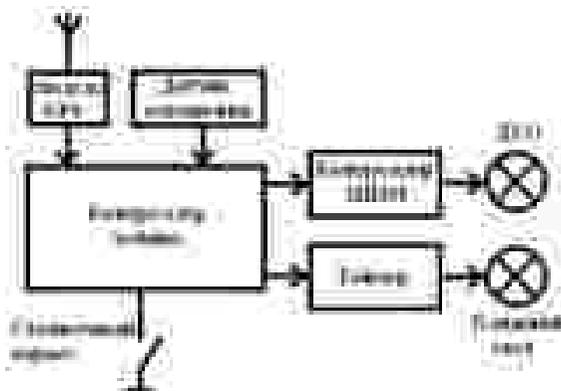
Правила перехода представлены в виде таблицы:

Таблица

темно	светло	темно	светло	темно	светло	темно	светло	темно	светло	темно	светло	темно	светло	темно	светло	
день		ночь		день		ночь		день		ночь		день		ночь		
город				трасса				город				трасса				
1 мая – 1 октября								1 октября – 1 мая								
ДХО																
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Фары ближнего света																
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

**Практическая реализация автоматизированной системы управления.** Изложенный подход к построению системы управления освещением автомобиля был реализован в виде технического устройства на основе контроллера Arduino [9]. На входы контроллера поступают сигналы от датчика освещенности и модуля позиционирования GPS. Команды загрузки базы правил и результат выполнения функций логического вывода поступают от микроконтроллера через порты ввода – вывода. На выходах контроллера осуществляется управление фарами ближнего света и ДХО в зависимости от значений сигналов на входах.

Блок-схема прибора изображена на рисунке.



**Выводы.** В работе показано, что автоматизированная система управления освещением автомобиля может быть реализована на основе модели логического вывода, позволяющего учесть неопределенность начального состояния системы и состояние внешней среды. Разработан алгоритм управления, который идентифицирует систему в процессе функционирования и управляет ею в режиме реального времени. Изготовлен экспериментальный образец, на котором проверена работоспособность системы управления и программного обеспечения.

#### Библиографические ссылки

1. **Бирюков, С.А.** Цифровые устройства на МОП интегральных микросхемах [Текст] / С.А. Бирюков. – М.: Радио и связь – 1996 г., 128 с.
2. **Виноградов, А.Н.** Динамические интеллектуальные системы. Представление знаний и основные алгоритмы [Текст] / А.Н. Виноградов, Л.Ю. Жилияков, Г.С. Осипов // Известия АН. Теория и сист. упр. – 2002. – № 6. – С. 119–127.
3. **Волин, Ю.М.** Оптимизация технологических процессов в условиях недостаточной экспериментальной информации на этапе функционирования [Текст] / Ю.М. Волин, Г.М. Островский // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 8. – С. 3–21.
4. **Глумов, В.М.** Синтез обобщенного алгоритма адаптации на основе нечеткой логики для дискретной системы управления деформируемым космическим аппаратом [Текст] / В.М. Глумов, И.Н. Крутова // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 6. – С. 174–193.
5. **Лебедева, Т.Г.** Архитектура и управляемость дискретных динамических систем, основанных на знаниях [Текст] / Т.Г. Лебедева, Г.С. Осипов // Известия АН Теория и сист. упр. – 2000. – № 5. – С. 37–43.

6. Правила дорожнього руху України з змінами та доповненнями у відповідності з постановою Кабінета Міністрів України №111 від 11.02.2013 та №136 від 06.03.2013
7. **Пупков, К.А.** Методы робастного, нейронечеткого и адаптивного управления [Текст] / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов, А.И. Гаврилов.– М.: Изд.-во МГТУ им. Баумана.—2002.—743 с.
8. The Astronomical Almanac for the Year 2015. – United States Naval Observatory [Text]/ Nautical Almanac Office, 2014.
9. **Соммер, У.** Программирование микроконтроллерных плат Arduino/Freduino [Текст] / У. Соммер. – СПб.: БХВ,Петербург, 2012. – 256 с.

*Надійшла до редколегії 29.04.2015*

УДК 519.6

**Н.И. <sup>2</sup>Ободан, Н.А. Гук, А.С. Магас**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

## **КОРРЕКТНОСТЬ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА**

Исследована корректность нейросетевой аппроксимации решения обратной задачи для нелинейного эллиптического уравнения типа Кармана. Показано, что операторы, описывающие обобщенное решение прямой задачи, являются непрерывными и ограниченными. На основании топологической леммы установлена непрерывность значений функции выхода нейронной сети от функции входа. Показано, что с использованием нейронной сети возможна идентификация свойств нелинейной модели, если свойства описываются на компактном множестве.

Досліджено коректність нейромережної апроксимації розв'язання оберненої задачі для нелінійного еліптичного рівняння типу Кармана. Показано, що оператори, які описують узагальнений розв'язок прямої задачі, є неперервні і обмежені. На підставі топологічної лемми встановлено неперервність значень функцій виходу нейронної мережі від функції входу. Показано, що з використанням нейронної мережі можлива ідентифікація властивостей нелінійної моделі, якщо властивості описувати на компактній множині.

The correctness of the neural's network approximation for the solution of the inverse problem for a nonlinear elliptic type equation Karman is investigated. Continuity and boundedness of generalized solutions of the direct problem is proved. Continuous dependence of the output values from the neural network input function is set on the basis of the topological lemma. Using a neural network to identify the properties of non-linear model is possible if the properties are described on the compact set.

**Ключевые слова:** обратная задача, нейронная сеть, аппроксимация, компактное множество.

**Введение.** Постановка и решение обратных задач является основным инструментом идентификации моделей, в частности, описываемых уравнениями Кармана, по дополнительной информации о решении. Существуют многочисленные методы решения указанной задачи, опирающиеся на вариационную постановку задачи в сочетании с числовыми методами оптимизации [1; 4; 5].

Указанные подходы, как правило, требуют значительных вычислительных мощностей и являются весьма чувствительными к выбору начального приближения и к свойствам модели, так что не могут быть использованы для прикладных задач, решаемых в процессе идентификации моделей действительности в режиме on-line.

Альтернативным подходом можно назвать использование инверсных нейронных сетей, сконструированных так, что входом является дополнительная информация, получаемая для системы в действительности, а выходом – решение обратной задачи.

Теорема Колмогорова [3] об универсальной аппроксимации служит математической основой для применения нейронных сетей. Теорема утверждает, что для заданного  $\varepsilon > 0$  и произвольной непрерывной функции  $f$ , определенной на  $n$ -мерном единичном кубе  $[0; 1]^n$ , может быть найдена функция  $f^*$ , представленная в виде суммы  $m$  суперпозиций непрерывных и монотонных отображений единичных отрезков:

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{ij} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j + b_i \right), \quad (1)$$

где  $a_i$  – коэффициент суммы;  $\varphi_{ij}$  – непрерывные функции одной переменной, определенные на отрезке  $[0; 1]$ ;  $x_j \in [0; 1]$

При этом выполняется условие

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f^*(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \text{ для всех } x_i \in [0; 1], i = \overline{1, n}$$

Так как основным требованием для применения аппроксимации (1) является непрерывность выхода по входу, необходимо рассмотреть свойства функций прямой и обратной задач.

**Математическая модель обратной задачи.** Рассмотрим задачу определения коэффициентов нелинейного эллиптического уравнения типа Кармана, прямую задачу для которого сформулируем следующим образом: вектор-функцию  $\tilde{u}(X, H(X))$  в ограниченной липшицевой области

$\Omega = \{X = (x_1, x_2) \in R^2\}$  с границей  $\Gamma$  опишем уравнениями

$$Q_1 \equiv \nabla_{ij} (A_1^{ijkl} (H_1) \mathcal{N}_{kl} u_1) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} u_2 (B_{ij} (H_1) + \nabla_{ij} u_1) = \lambda H_2; \quad (2)$$

$$Q_2 \equiv \nabla_{ij} (A_2^{ijkl} (H_1) \mathcal{N}_{kl} u_2) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} u_1 (B_{ij} (H_1) + \nabla_{ij} u_1) = 0; \quad (3)$$

$$Q = \{Q_1, Q_2\}^T, H = \{H_1, H_2\}^T, u = \{u_1, u_2\}^T,$$

с граничными условиями

$$u_{\Gamma} = 0 ; \frac{\partial u_{\Gamma}}{\partial n} = u_n = 0, \quad (4)$$

где  $A_2^{ijkl}(H_1) > 0$ ,  $A_2^{ijkl}(H_2) > 0$ ,  $B_{ij}(H_1)$  – известные функционалы известной функции  $H_1(X)$ ;  $H_2$  – правая часть;  $\square$  – кусочно\_гладкая граница области  $\Omega$ ;  $\Gamma_i$  – кусочно\_гладкие контуры класса  $C_1^1$ ,  $\sum_i \Gamma_i = \Gamma$ ;

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \nabla_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; i, j = 1, 2, \lambda - \text{вектор параметров; } n - \text{нормаль к}$$

поверхности  $\Omega$ .

Введем множество допустимых решений:

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(X) \in V_{\Omega}^{12}; Q(\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = 0, \tilde{u}_n|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right. ; \tilde{H} : \left\{ \begin{array}{l} H \leq \tilde{H} \leq \bar{H}; H \in W_{2\Omega}^1 \\ a \leq \frac{\partial H}{\partial u} \leq b; \frac{\partial^2 \tilde{H}(X)}{\partial u^2} \geq 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь  $W_{2\Omega}^1$  – специальное пространство.

Функции, принадлежащие множеству  $\tilde{H}$ , являются равномерно ограниченными, монотонными, выпуклыми, следовательно, множество  $\tilde{H}$  есть компакт. Здесь  $\tilde{u}$  – множество решений задачи (2)-(3),  $\tilde{H}$  – множество неизвестных функций обратной задачи.

Решение обратной задачи предполагает по известным следам функции  $u$  в точках  $\gamma_r$

$$u(\gamma_r, H) = u^*, r = 1, N \quad (6)$$

определение функций  $H(X)$ . При использовании вариационного подхода задача сводится к задаче минимизации функционала

$$\rho_{V_{\Omega}^{12}} = \left( u(\gamma_r, H), u^* \right)_{V_{\Omega}^{12}}, H \in \tilde{H}, u^* \in V_{\Omega}^{12}, \quad (7)$$

характеризующего расстояние в пространстве  $V_{\Omega}^{12}$  между значением  $u(\gamma_r, H)$ , найденным из решения прямой задачи, и заданным значением  $u^*$ . Решение обратной задачи имеет вид

$$H = \operatorname{arg\,inf}_{V_{\Omega}^2} \rho_{V_{\Omega}^2}((\gamma_r, H), u^*), \quad H \in \tilde{H}, \quad u \in \tilde{u}, \quad (8)$$

где  $\rho_{V_{\Omega}^2}$  – функциональная норма, определяемая метрикой в пространстве  $V_{\Omega}^2$ .

**Обоснование использования нейронных сетей.** Обобщенное решение для краевой задачи (2), (3) имеет вид

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{V_{\Omega}^1} &= \int_{\Omega} [{}^{ik}1^{jl} (\mathcal{B}_{ij} v_1 - \nabla_i v_1 \nabla_j u_1) \mathcal{N}_{kl} u_2 - H_2 v_1] d\Omega; \\ (u_2, v_2)_{V_{\Omega}^2} &= - \int_{\Omega} [{}^{ik}1^{jk} (\mathcal{B}_{ij} u_1 - \nabla_i u_1 \nabla_j u_1) \mathcal{N}_{kl} v_2] d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

где  $v = (v_1, v_2)^T$  – произвольная вектор-функция,  $v \in V_{\Omega}^{1,2}$ .

Здесь введены функциональные пространства  $V_{\Omega}^1, V_{\Omega}^2, V_{\Omega}^{1,2}$  со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{V_{\Omega}^1} &= \int_{\Omega} A_1^{ijkl} (H) \mathcal{N}_{ij} u_1 \nabla_{kl} v_1 d\Omega; \\ \|u_1\| &= \int_{\Omega} A_1^{ijkl} (H) \mathcal{N}_{ij} u_1 \nabla_{kl} u_1 d\Omega; \\ (u_2, v_2)_{V_{\Omega}^2} &= \int_{\Omega} A_2^{ijkl} (H) \mathcal{N}_{ij} u_2 \nabla_{kl} v_2 d\Omega; \\ \|u_2\| &= \int_{\Omega} A_2^{ijkl} (H) \mathcal{N}_{ij} u_2 \nabla_{kl} u_2 d\Omega; \\ (u, v)_{V_{\Omega}^{1,2}} &= [(u_1, u_2)(v_1, v_2)]_{V_{\Omega}^{1,2}} = (u_1, v_1)_{V_{\Omega}^1} + (u_2, v_2)_{V_{\Omega}^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы слагаемое  $\int_{\Omega} \lambda H_2 v_1 d\Omega$  было ограниченным функционалом, необходимо, чтобы

$$\sup_{\Omega} \frac{\int_{\Omega} \lambda H_2 v_1 d\Omega}{\|v_1\|} = \operatorname{const} < \infty$$

для всех  $v_1 \in V_{\Omega}^1$ . Тогда по теореме Рисса

$$\int_{\Omega} \lambda H_2 v_1 = (u_{\Pi}, v_1)_{V_{\Omega}^1},$$

что дает возможность превратить  $\overline{V_{\Omega}^1}$  в гильбертово пространство. Для двух элементов  $H_2^1$  и  $H_2^2$  из  $\overline{V_{\Omega}^1}$  имеем

$$(H_2^1)(H_2^2)_{V_\Omega^1} = (u_{\Pi_1}, u_{\Pi_2})_{V_\Omega^2} \text{ и } \|\lambda_{H_2}\| = \|u_{\Pi}\|_{V_\Omega^1}.$$

Определение обобщенного решения корректно, если  $u_1 \in V_\Omega^1$ ,  $u_2 \in V_\Omega^2$ , т.к. каждый член в правой части (9) определен:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} (B_{ij} v_1 - \nabla_{i v_1} \nabla_{j u_1}) \nabla_{kl} u_2 d\Omega &\leq \|1^{ik} 1^{jl} B_{ij}\|_{C_\Omega} \cdot \|v_1\|_{L_2\Omega} \cdot \|\nabla_{kl} u_2\|_{L_2\Omega} \\ + \|1^{ik} 1^{jl} \nabla_{i v_1} \nabla_{j u_1}\|_{L_2\Omega} \cdot \|\nabla_{kl} u_2\|_{L_2\Omega} &\leq m \|1^{ik} 1^{jl} B_{ij}\|_{C_\Omega} \cdot \|v_1\|_{V_\Omega^1} \cdot \|u_2\|_{V_\Omega^2} \\ + m \|v_1\|_{L_4\Omega} \cdot \|u_1\|_{L_4\Omega} \cdot \|u_2\|_{V_\Omega^2} &\leq m \|v_1\|_{V_\Omega^1} \cdot \|u_2\|_{V_\Omega^2} \left(1 + \|u_1\|_{V_\Omega^1}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Указанные неравенства следуют из теорем вложения и свойств пространств

$$\begin{aligned} \nabla_{ij} u \in L_2\Omega, \quad \|\nabla_{ij} u\|_{L_2\Omega} &\leq m \|u\|_{V_\Omega^1}; \\ \nabla_{i u_1} \cdot \nabla_{j u_1} \in L_q\Omega \quad (q \geq 1); \\ \|\nabla_{i u_1}\|_{L_{qd}} &\leq m \|u_1\|_{V_\Omega^1}; \quad \|\nabla_{j u_1}\|_{L_{qd}} \leq m \|u_1\|_{V_\Omega^1}. \end{aligned}$$

Аналогично, из свойств пространства  $V_\Omega^2$

$$\int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} (B_{ij} u_1 - \nabla_{i u_1} \cdot \nabla_{j u_1}) \nabla_{kl} u_2 \cdot d\Omega \leq m \|u_1\|_{V_\Omega^1} \cdot \|u_2\|_{V_\Omega^2} \left(1 + \|u_1\|_{V_\Omega^1}\right) \quad (12)$$

В силу теоремы Рисса из (9) можно записать

$$u_1 = N_{V_\Omega^1} (u_{\Pi}, u); \quad u_2 = M_{V_\Omega^2} (u_{\Pi}, u). \quad (13)$$

Отыскание обобщенного решения задачи (2) сведено к определению неподвижной точки отображения (13) и последующего определения

Из соотношений, определяющих  $M_{V_\Omega^2}^i$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ ,  $N_{V_\Omega^1}^j$ ,  $j \in \overline{1, 3}$ , получаем оценки

$$\begin{aligned} \|M\|_{V_\Omega^2} &\leq m \|u_1\|_{V_\Omega^1}^i; \\ \|N\|_{V_\Omega^1} &\leq m \|u_1\|_{V_\Omega^1}^j. \end{aligned}$$

Покажем, что операторы  $M_{V_\Omega^2}^i$  действуют усиленно непрерывно в  $V_\Omega^2$ .

Если имеется последовательность  $u_{1n} \rightarrow u_1$  в  $V_\Omega^1$ , то

$$\begin{aligned}
 & \left( M_{V\Omega^2} (u_1) - M_{V\Omega^2} (u_{1n}) \right) \Big|_V = \\
 & = \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} B_{ij} (u_1 - u_{1n}) \mathcal{N}_{kl} \nu d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{i u_1} \nabla_{kl} \nu (\nabla_{i u_1} - \nabla_{j u_1}) d\Omega \leq \\
 & \left| \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jk} B_{ij} (u_1 - u_{1n}) \mathcal{N}_{kl} \nu d\Omega \right| + \\
 & + \left| \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jk} \nabla_{i u_1} \nabla_{kl} \nu (\nabla_{i u_1} - \nabla_{j u_1}) d\Omega \right| \leq \\
 & m \left( \left\| 1^{ik} 1^{jk} \right\| \cdot 1_{kl} \cdot \|u_1 - u_{1n}\|_{L_2\Omega} + \right. \\
 & \left. + \left\| 1^{ik} 1^{jk} \right\|_{C\Omega} \left\| \nabla_{j u_1} \right\|_{L_4\Omega} \left\| \nabla_{i u_1} - \nabla_{j u_1} \right\|_{L_4\Omega} \left\| \nu \right\|_{V\Omega^2} \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

С учетом усиленной непрерывности оператора вложения  $u_1 \in V\Omega^1$  в  $V\Omega^2$

$$\left\| M_{V\Omega^2} (u_1) - M_{V\Omega^2} (u_{1n}) \right\|_{V\Omega^2} \rightarrow 0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\left\| N_{V\Omega^1} (u_1) - N_{V\Omega^1} (u_{1n}) \right\|_{V\Omega^1} \rightarrow 0. \tag{15}$$

Таким образом, операторы  $\boxed{M}$ ,  $\boxed{N}$  усиленно непрерывны по  $u$  при фиксированных  $A_1^{ijkl}$ ,  $A_2^{ijkl}$ ,  $\boxed{B_{ij}}$ ,  $H_2$ .

Теперь установим дифференцируемость по Фреше операторов  $\boxed{M}$  и  $\boxed{N}$  по  $H$ .

Пусть  $H_0(x)$  – некоторая известная функция. Зададим  $H(x) = H_0 + \Delta H$ ,  $\|\Delta H\| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – малое число, и определим два решения  $\overset{(1)}{u}(H_0)$  и  $\overset{(2)}{u}(H_0 + \Delta H) = \overset{(1)}{u}(H_0) + \Delta u$  соответственно.

Представим

$$\overset{(2)}{A}_p^{ijkl} = \overset{(1)}{A}_p^{ijkl} + \left. \frac{\partial A_p^{ijkl}}{\partial H} \right|_{H=H_0} \Delta H = \overset{(1)}{A}_p^{ijkl} + \Delta A^{ijkl} \Delta H;$$

$$B_{ij}^{(2)} = B_{ij}^{(0)} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial H} \Big|_{H=H_0} \Delta H = B_{ij}^{(0)} + \Delta B_{ij} \Delta H. \quad (16)$$

Пусть далее  $V_{\Omega}^{(1)}$ ,  $V_{\Omega}^{(2)}$  – пространства, построенные для точек типа  $(u_0, H_0)$ , а  $V_{\Omega}^{(1)}$ ,  $V_{\Omega}^{(2)}$  – для точек типа  $(u_0 + \Delta u, H_0 + \Delta H)$ . Покажем, что

эти пространства эквивалентны, поэтому каждую функцию  $u_p \in V_{\Omega}^{(2)}$  рассмотрим как элемент  $V_{\Omega}^{(1)}$  и наоборот. Тогда из соотношения (10) можно определить

$$\left( u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(2)}}^{(2)} = \left( u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(1)}}^{(0)} + \int_{\Omega} \left( \Delta A_p^{ijkl} \Delta H \nabla_{ij} u_p \nabla_{kl} v_p \right) d\Omega$$

и

$$\left( u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(2)}}^{(2)} - \left( u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(1)}}^{(0)} \leq m \|\Delta H\| \cdot \|u_p\|_{V_{\Omega}^{(1)}} \cdot \|v_p\|_{V_{\Omega}^{(2)}}, \quad p=1,2. \quad (17)$$

Введем операторы  $D_p$  [2], определяемые соотношениями

$$\left( D_p u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(1)}}^{(0)} = \left( u_p, v_p \right)_{V_{\Omega}^{(2)}}^{(2)}, \quad p=1,2. \quad (18)$$

Учитывая условие (17), получим

$$1 - m \|\Delta H\| \leq D_p \leq 1 + m \|\Delta H\|, \quad p=1,2. \quad (19)$$

Оценивая все слагаемые в обобщенном решении с помощью теоремы вложения, получим

$$\left\| \left( \frac{0}{M} - \frac{(2)}{M} \right) \right\|_{V_{\Omega}}^{(0)} \leq m \|\Delta H\| \left( 1 + \|\Delta u_1\|_{V_{\Omega}^{(1)}} + \|\Delta u_1\|_{V_{\Omega}^{(2)}}^2 \right);$$

$$\left\| \left( \frac{0}{N} - \frac{(2)}{N} \right) \right\|_{V_{\Omega}}^{(0)} \leq m \|\Delta H\| \left( 1 + \|\Delta u_1\|_{V_{\Omega}^{(1)}} + \|\Delta u_1\|_{V_{\Omega}^{(2)}}^2 + \|\Delta u_1\|_{V_{\Omega}^{(2)}}^3 \right). \quad (20)$$

Таким образом, главная часть приращения операторов  $\boxed{M}$ ,  $\boxed{N}$  линейно зависима от  $\|\Delta H\|$  и конечна.

На основании топологической леммы [6] устанавливаем непрерывность вектор-функции  $H(X)$  по  $u(X)$ . Это следует из того, что метриче-

ское пространство  $\tilde{H}$  отображается на метрическое пространство  $V_{\Omega}^{12}$  с помощью непрерывных операторов  $M, N$  и существует  $u^*$  – образ множества  $H^*$ ,  $\tilde{H}^* \subset \tilde{H}$  при этом отображении. Тогда, если отображение  $\tilde{H} \rightarrow V_{\Omega}^{12}$  непрерывно (20) и множество  $\tilde{H}$  обладает свойствами (5), обратное отображение  $u^* \rightarrow H^*$  также непрерывно на метрике  $\tilde{H}$ .

Таким образом, для построения отображения  $u^*$  на  $\tilde{H}^*$  можно прибегнуть к нейронной сети, т.к. выполняется условие использования теоремы Колмогорова.

**Метод решения обратной задачи.** Соотношения (1) дают возможность использовать нейронную сеть, архитектуру которой определяют свойства функций  $H_i$ . В качестве входа и выхода нейронной сети используются векторы значений аппроксимируемых функций  $u^*(x)$  и  $H(x)$ .

Дискретизацию функций  $u(x)$ ,  $u^*(x)$  и  $H(x)$  производят на основе метода конечных элементов, для чего следует ввести 3 сетки дискретизации соответственно:

- $X_s$ , где  $X_s = \{x_1^s, x_2^s\}$  – для определения вектора  $u = \{u_s\}$ ,  $s = \overline{1, S}$ ;
- $X_j$ , где  $X_j = \{x_1^j, x_2^j\}$   $j = \overline{1, M}$  – для определения вектора  $H = \{H_j\}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ;
- $X_r$ ,  $r = \overline{1, N}$  – для определения вектора  $u^*(X_r)$ .

Здесь  $u_s, H_s$  – узловые значения функций  $u(x), H(x)$ .

В качестве обучающей выборки используют точки  $(u_n^*, H_n^*)$ ,  $n = \overline{1, K}$ , которые представляют собой решения прямых задач на множестве допустимых значений  $\tilde{H}$ , дискретизированных методом конечных элементов на сетке  $X_j$ ,  $j = \overline{1, M}$  с интервалом  $\Delta H$ ,  $\|\Delta H\| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – малое число. Число элементов выборки  $K$  определяют величиной интервала  $\overline{H} - H$  и значением  $\|\Delta H\|$ . Как показано выше в (20), при  $\|\Delta H\| \leq \varepsilon$ , если существует точка  $(u_n, H_n)$ , где  $u_n$  – решение (3), то на интервале  $H_n \leq H \leq H_n + \Delta H$  существует решение  $u_n + \Delta u$ , где  $\|\Delta u\| \leq \delta(\|\Delta H\|)$ ,  $\delta(\|\Delta H\|) \rightarrow 0$ , если  $\|\Delta H\| \rightarrow 0$ .

Решения прямых задач  $(u_n, H_n)$ ,  $n = \overline{1, K}$  строят на основе нелинейного конечного элемента, реализованного в пакете «COSMOS» методом продолжения по параметру правой части  $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ , где  $\lambda^*$  – заданное значение.

**Числовая реализация.** Построена нейронная сеть в виде многослойного персептрона для случая идентификации правой части нагрузки на замкнутую цилиндрическую оболочку. Область  $\Omega$  – замкнутая цилиндрическая оболочка с параметрами  $L/R = 4$ ,  $R/h = 100$ ,  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu = 0,3$ , где  $L, R, h$  – длина, радиус, толщина оболочки;  $E, \mu$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Закон изменения функции нагрузки (правой части) с моделирован зависимостью вида  $\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0, & 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0/2, \\ 0, & |\varphi| > \varphi_0 \end{cases}$ , где  $\lambda_0$  – пара-

метр нагрузки;  $\varphi_0$  – угол, характеризующий область нагружения оболочки

Результаты решения прямой задачи, полученные при фиксированных значениях параметров  $\lambda_0, \varphi_0$  из диапазонов  $0,4 \leq \lambda_0 \leq 1,35$ ,  $\pi/18 \leq \varphi_0 \leq \pi$ , нормировались, образуя вектора входных сигналов нейронной сети. Для обучения нейронной сети число элементов обучающей выборки составило  $K = 80$ , для проверки обобщающей способности нейронной сети использовано  $n = 16$  элементов тестирующей выборки. При этом  $H_i^* = \{\lambda_0^{(i)}, \varphi_0^{(i)}\}$ .

На рис. 1 приведены значения  $\lambda_0$ , полученные из нейронной сети для элемента тестирующей выборки. Сплошные квадраты – исходные значения  $\lambda_0$ ; кресты – полученное значение  $\lambda_0$  из нейронной сети;

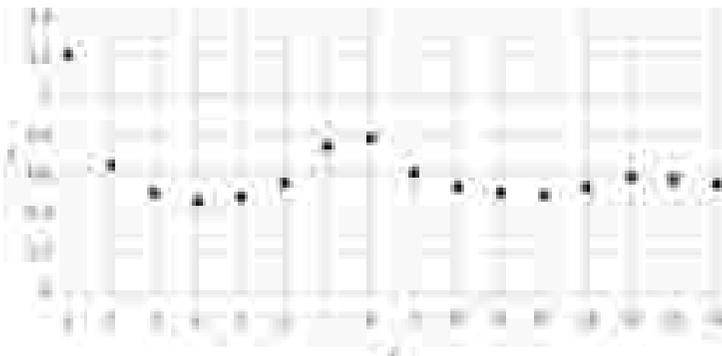


Рис. 1. Идентификация параметра  $\lambda_0$  с помощью нейронной сети

На рис. 2 приведені значення  $\Phi_0$ , отримані з нейронної мережі для елемента тестуючої вибірки. Сплошні квадрати – вихідні значення  $\Phi_0$ ; крести – отримане значення  $\Phi_0$  з нейронної мережі;

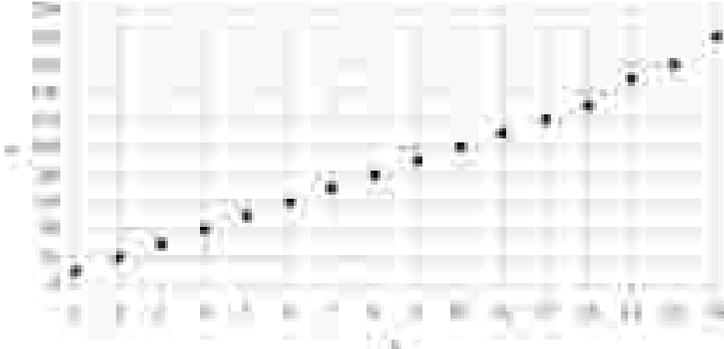


Рис. 2. Ідентифікація параметра  $\Phi_0$  з допомогою нейронної мережі

Среднеквадратическая погрешность аппроксимации на тестирующей выборке составила  $\approx 1\%$ .

**Выводы.** Нейросетевая аппроксимация решений обратных задач является корректной, позволяющей идентифицировать свойства нелинейной модели типа уравнений Кармана в случае, если они описываются компактом. Среднеквадратическая погрешность аппроксимации на тестирующей выборке составляет  $\approx 1\%$ .

#### Бібліографічні посилання

1. **Алифанов О.М.** Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст] / О.М.Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. **Ворович И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек [Текст] / И.И. Ворович. М.: Наука, 1989. 373 с.
3. **Горбань А.Н.** Обучение нейронных сетей [Текст] / А.Н. Горбань. М.: СССРСША СП «Параграф», 1990. 160 с.
4. **Самарский А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Набищевич. М.: Едиториал УРСС, 2004. 80 с.
5. **Сергиенко И.В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.Дейнека. Ж.: Наукдумка, 2009. – 639 с.
6. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я.Арсенин. М.: Наука, 1979. 386 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2015

Н.И.<sup>3</sup> Ободан, Н.А. Гук, А.С. Фещенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассмотрена обратная спектральная задача для нелинейного уравнения типа Кармана. Неизвестным является значение коэффициента взаимовлияния компонент системы, приводящее к наличию заданной точки ветвления. Обратная задача сформулирована в вариационной постановке и сводится к решению конечномерной задачи оптимизации с ограничениями. В качестве ограничений выбраны условия принадлежности решения компактному множеству. Для операторов, характеризующих обобщенное решение прямой задачи, на основании теорем вложения доказана дифференцируемость по Фреше. Приведен итеративный алгоритм решения задачи.

Розглянуто обернену спектральну задачу для нелінійного рівняння типу Кармана. Значення коефіцієнта взаємодії компонент системи, що приводить до наявності заданої точки розгалуження, є невідоме. Обернену задачу сформульовано в варіаційній постановці та зводиться до розв'язання скінченновимірної задачі оптимізації з обмеженнями. Як обмеження обрано умови належності розв'язку компактній множині. Для операторів, що характеризують узагальнений розв'язок прямої задачі, доведено диференційованість по Фреше на підставі теорем вкладення. Наведено ітеративний алгоритм розв'язання задачі.

Inverse spectral problem for the nonlinear equation of Karman is considered. The coefficient of interference component of the system, in which a given branch point is realized, is unknown. The inverse problem in the variation formulation is formulated and is reduced to the solution of a finite-dimensional optimization problem with constraints. Condition, that solution belongs to compact set, is selected as constraints. For operators of the generalized solution of the direct problem Freche differentiable are proved on the basis of the embedding theorems. Iterative algorithm for solving the problem is presented.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, уравнение Кармана, обобщенное решение, теорема вложения, компактное множество, метод множителей Лагранжа.

**Введение.** Метод обратных задач, как способ идентификации и выбора моделей различных наблюдаемых систем, нашел широкое применение [26]. Использование указанного метода ограничивается условием существования

неособого решения соответствующей прямой задачи. Альтернативная постановка – определение оптимальных, с точки зрения выполнения функций цели, решений для задачи на собственные значения также достаточно изучена [4].

Между тем существует класс задач, сформулированных с использованием нелинейных эллиптических операторов, для которого постановка обратной задачи связана с наличием точек ветвления прямой задачи, не описываемых классической задачей на собственные значения. Для обеспечения возможности решения указанных задач требуется непрерывность функционала, характеризующего обращение решения прямой задачи на решение обратной задачи в точке ветвления. Ниже рассмотрим такую обратную задачу: для уравнения типа Кармана определим значение коэффициента взаимовлияния компонент системы, приводящее к наличию заданной точки ветвления, фиксированной по значению правой части в уравнениях прямой задачи.

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная липшицева область в  $R^2$ ,  $x_1, x_2 \in \Omega$  с границей  $\Gamma \in C^1$ .

На области  $\Omega$  задана нелинейная краевая задача

$$\begin{aligned} A_1^{ijkl} \nabla_{ij} (\nabla_{kl} \tilde{u}_1) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} \tilde{u}_2 (B_{ij} + \nabla_{ij} \tilde{u}_1) &= \lambda F(x_1, x_2) \\ A_2^{ijkl} \nabla_{ij} (\nabla_{kl} \tilde{u}_2) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} \tilde{u}_1 (B_{ij} + \nabla_{ij} \tilde{u}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при  $\tilde{u}_\Gamma = 0$ ;  $\frac{\partial \tilde{u}_\Gamma}{\partial n} = 0$

Здесь  $\tilde{u} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}^T$ ;  $A^{ijkl} = \{A_1^{ijkl}, A_2^{ijkl}\}$   $0 \leq \lambda \leq \lambda_{kp}$ ;  $n$  – нормаль к поверхности, принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Обратной спектральной задачей для нелинейного уравнения Кармана будем называть задачу определения вектор-функций  $A^{ijkl}$  и (или)  $B_{ij}$  по заданному значению  $\lambda_{kp}$ , определяющему первую точку ветвления краевой задачи (1). Ограничимся определением вектор-функции  $B = \{B_{ij}\}$ , характеризующей взаимное влияние компонент системы  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ . Тогда необходимо найти такое  $B = \{B_{ij}\}$ , чтобы

$$B = \arg \min_{B \in B} J, \quad (2)$$

где  $J = (\lambda_{kp} - \lambda_{\min}(B))^2$ ;  $\lambda_{\min}(B)$  – первая точка ветвления решения уравнения (1) при соответствующем  $B$ .

**Метод рішення.** Определим множество

$$\tilde{B} = \left[ B_{ij} \in W_{2\Omega}^1, B \leq B_{ij} \leq \bar{B}, B, \bar{B} \geq 0, c \leq \frac{dB}{d\lambda_{\min}} \leq \bar{c}, \text{sign } c = \text{sign } \bar{c} \right]. \quad (3)$$

Зададим  $\tilde{u} = u_0 + u$ , тогда условие, определяющее точку ветвления, имеет вид

$$A_1^{ijkl} (\nabla_{ij} \nabla_{kl} u_1) - 1^{ik} 1^{jl} \left[ \nabla_{kl} u_2 (B_{ij}(X) + \nabla_{ij} u_1^0(\lambda)) + \nabla_{kl} u_2^0(\lambda) \nabla_{ij} u_1 \right] = 0; \quad (4)$$

$$A_2^{ijkl} (\nabla_{ij} \nabla_{kl} u_2) - 1^{ik} 1^{jl} \left[ \nabla_{kl} u_1 (B_{ij}(X) + \nabla_{ij} u_1^0(\lambda)) \right] = 0 \quad (5)$$

при  $u \{u_1, u_2\}^T \neq 0, \lambda = \lambda_{\min}$  в первой точке ветвления.

Соответствующее обобщенное решение

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{V_1\Omega} &= \int 1^{ik} 1^{jl} \left[ B_{ij} v_1 - \nabla_{ij} v_1 \nabla_{kl} u_1^0(\lambda) \right] \nabla_{kl} u_2 - \nabla_{kl} u_2^0(\lambda) \nabla_{ij} v_1 \nabla_{kl} u_1 d\Omega; \\ (u_2, v_2)_{V_2\Omega} &= \int 1^{ik} 1^{jl} \left[ B_{ij} u_1 - \nabla_{ij} u_1^0(\lambda) \nabla_{kl} u_1 \right] \nabla_{kl} v_2 d\Omega, \quad u \neq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где введены пространства  $V_1\Omega, V_2\Omega$  со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{V_1\Omega} &= \int_{\Omega} A_1^{ijkl} \nabla_{ij} u_1 \nabla_{kl} v_1 d\Omega; \\ \|u_1\|_{V_1\Omega} &= \int_{\Omega} A_1^{ijkl} \nabla_{ij} u_1 \nabla_{kl} u_1 d\Omega; \\ (u_2, v_2)_{V_2\Omega} &= \int_{\Omega} A_2^{ijkl} \nabla_{ij} u_2 \nabla_{kl} v_2 d\Omega; \\ \|u_2\|_{V_2\Omega} &= \int_{\Omega} A_2^{ijkl} \nabla_{ij} u_2 \nabla_{kl} u_2 d\Omega; \\ (u, v)_{V_{12}\Omega} &= [(u_1, u_2)(v_1, v_2)]_{V_{12}\Omega} = (u_1, v_1)_{V_1\Omega} + (u_2, v_2)_{V_2\Omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем соотношения (6) в виде

$$a_B - b_B(\lambda) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1B} &= (u_1, v_1)_{V_1\Omega} - \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} B_{ij} v_1 \nabla_{kl} u_2 d\Omega; \\ a_{2B} &= (u_2, v_2)_{V_2\Omega} - \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} B_{ij} u_1 \nabla_{kl} v_2 d\Omega; \\ b_{1B} &= \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left( \nabla_{kl} u_2 \nabla_{ij} u_1^0 \lambda + \nabla_{kl} u_2^0 \lambda \nabla_{ij} u_1 \right) d\Omega; \end{aligned}$$

$$b_{1B} = \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \left( \nabla_{kl} u_1 \nabla_{ij} u_1^{0\lambda} \right) d\Omega,$$

и рассмотрим свойства функционалов  $a_{iB}$ ,  $b_{iB}$ .

Пусть точка  $P_1 = \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ B, u, \lambda_{\min} \end{matrix} \right)$  удовлетворяет условию (6). Дадим

функции  $\textcircled{0} B$  приращение  $\Delta B$ ,  $\|\Delta B\| \leq \varepsilon$  и оценим разности  $\textcircled{2} a_B \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ B + \Delta B \end{matrix} \right) - a_B \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ B \end{matrix} \right)$ ,  $\textcircled{2} b_B \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ B + \Delta B \end{matrix} \right) - b_B \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ B \end{matrix} \right)$  для точки

$$P_2 = \left( \begin{matrix} \textcircled{2} \\ B, u, \lambda_{\min} \end{matrix} \right).$$

Пусть  $V_{1\Omega}$ ,  $V_{2\Omega}$ ,  $V_{1\Omega}$ ,  $V_{2\Omega}$  – пространства, соответствующие точкам типа  $P_1$  и  $P_2$ . Эти пространства эквивалентны [1], поэтому каждую функцию  $u_p \in V_{p\Omega}$ ,  $p=1,2$  можно рассматривать как элемент  $V_{p\Omega}$  и наоборот. Тогда из соотношений (7) можно определить

$$\Delta_p \equiv \left( \begin{matrix} \textcircled{2} \\ u_p, v_p \end{matrix} \right)_{V_{p\Omega}} - \left( \begin{matrix} \textcircled{0} \\ u_p, v_p \end{matrix} \right)_{V_{p\Omega}} = \int_{\Omega} 1^{ik} 1^{jl} \Delta B \nabla_{ij} u_p \nabla_{kl} v_p d\Omega, \quad p=1,2,$$

откуда, используя теоремы вложения, получаем

$$\Delta_p \leq m \|\Delta B\| \|u_p\|_{V_{p\Omega}} \|v_p\|_{V_{p\Omega}}. \quad (9)$$

Введем оператор, определяемый отношением

$$\left( D_p u_p, v_p \right)_{V_{p\Omega}} = \left( u_p, v_p \right)_{V_{p\Omega}}, \quad p=1,2, \quad (10)$$

откуда, учитывая условие (9), имеем

$$1 - m\Delta B \leq \|D_p\| \leq 1 + m\Delta B, \quad p=1,2, \quad m = \text{const}. \quad (11)$$

Оценивая все слагаемые в выражениях для  $a_B$ ,  $b_B$  с помощью теорем вложения [1], окончательно получим

$$\begin{aligned} \textcircled{2} a_B - a_B &\leq m_1 \|\Delta B\| \|u\|_{V_{1\Omega}} \|v_1\|_{V_{1\Omega}}; \\ \textcircled{2} b_B - b_B &\leq m_2 \|\Delta B\| \|u\|_{V_{1\Omega}} \|v_2\|_{V_{1\Omega}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогічно устанавлюємо при  $\overset{(2)}{\lambda}_{\min} = \overset{(1)}{\lambda}_{\min} + \Delta\lambda$

$$\overset{(2)}{b}_B(\overset{(2)}{\lambda}_{\min} + \Delta\lambda) - \overset{(1)}{b}_B(\overset{(1)}{\lambda}_{\min}) \leq m_3 \Delta\lambda \|u_1\|_{V_1\Omega}^{(1)} \|v_2\|_{V_1\Omega}^{(1)}. \quad (13)$$

Таким образом, можно записать

$$\overset{(2)}{a}_B - \overset{(1)}{a}_B = n_1 \|\Delta B\|_{W_1^1\Omega} \|u\|_{V_1\Omega}^{(1)} \|v\|_{V_1\Omega}^{(1)} + w(\Delta B),$$

$$\overset{(2)}{b}_B - \overset{(1)}{b}_B = n_2 \Delta B \|u\|_{V_1\Omega}^{(1)} \|v_2\|_{V_1\Omega}^{(1)} + w(\Delta B), \quad (14)$$

где  $\|w(\Delta B)\| = 0$  ( $\|\Delta B\|$ ) при  $\Delta B \rightarrow 0$

$$\overset{(2)}{b}_B(\overset{(2)}{\lambda}_{\min} + \Delta\lambda) - \overset{(1)}{b}_B(\overset{(1)}{\lambda}_{\min}) = m_3 \Delta\lambda \|u_1\|_{V_1\Omega}^{(1)} \|v_2\|_{V_1\Omega}^{(1)} + w(\Delta\lambda), \quad (15)$$

где  $\|w(\Delta\lambda)\| = 0$  ( $\|\Delta\lambda\|$ ) при  $\Delta\lambda \rightarrow 0$

Отсюда следует дифференцируемость по Фреше операторов  $a_B, b_B$  по  $B$  и  $\lambda_{\min}$ .

Введем характеристические функции  $\mu_{1i}, \mu_{2i}, i=1, M$ :

$$\mu_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{если } (B_i - B) < 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}, \quad \mu_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{если } (\overline{B} - B_i) < 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

С учетом условий (3) функционал для определения квазиришения (2) имеет вид

$$J = (\lambda_{kp} - \lambda_{\min})^2 + \sum_{i=1}^M \left( \varphi_{1i} \mu_{1i} (B_i - B)^2 + \varphi_{2i} \mu_{2i} (\overline{B} - B_i)^2 \right). \quad (16)$$

Здесь  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ , – множители Лагранжа;  $\lambda_{\min}$  – значение параметра  $\lambda$  в точке ветвления  $(B, u, \lambda_{\min})$  при значении  $B$ , определенном из условия

$$B = \arg \min_{B \in \tilde{B}} J(\lambda_{\min}, B, u_0, \varphi_1, \varphi_2), \quad (17)$$

где  $u_0$  – решение в точке ветвления  $\lambda_{\min}$ .

Для сведения задачи (1), (2), (6) к конечномерной используем дискретизацию методом конечных элементов. Решение задачи (1), (2), (6) опишем векторами  $U^0 = \{U_{0k}, k=1, M\}$ ,  $U = \{U_j, j=1, M\}$ ,  $B = \{B_i, i=1, M\}$ , где  $U_{0k}, U_j, B_i$  – узловые значения функций  $u_0(x), u(x), B(x)$  на соответст-

вующих сетках. Процедура метода конечных элементов сводит задачу (1), (6) к совместному решению двух систем уравнений – нелинейной алгебраической

$$K_1(U_0, U, B) = \lambda R, \quad (18)$$

где  $K_1(U_0, U, B)$  – нелинейная матрица, и линейной однородной

$$K_2(U_0(\lambda), B)U = 0, \quad (19)$$

определяющей точку ветвления как

$$\det K_2(U_0(\lambda), B) = 0. \quad (20)$$

Решение системы (18) и проверку условия (19) проводим методом продолжения по параметру  $\lambda$  [7] при фиксированном векторе  $B^{(n)}$ , где  $\Delta B_i^{(n)}, \varphi_i^{(n)}$  определим из условия (17) методом Ньютона

$$\Delta \Phi^{(n)} = -H^{-1}G, \quad (21)$$

где  $G = \left\{ \frac{\partial J}{\partial B_i} \right\}_{B=B^{(n-1)}}$ ,  $H = GG^T$ ,  $i = \overline{1, M}$

$$\Delta \Phi^{(n)} = \left\{ \Delta B^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)} \right\}, \quad \varphi_1 = \{ \varphi_{1i} \}, \quad \varphi_2 = \{ \varphi_{2i} \}, \quad i = \overline{1, M}.$$

Для получения решения выполним итеративный процесс продолжения решения по параметру, в качестве которого выступает одна из компонент вектора  $B$  или параметр  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} B^{(n)} &= B^{(n-1)} + \Delta B^{(n)}; \\ \lambda_{\min}^{(n)} &= \lambda_{\min}^{(n-1)} + \Delta \lambda_{\min}^{(n)}; \\ U^{(n)} &= U^{(n-1)} + \Delta U^{(n)}; \\ U_0^{(n)} &= U_0^{(n-1)} + \Delta U_0^{(n)}; \\ \lambda^{(s)} &= \lambda^{(s-1)} + \Delta \lambda, \quad s = \overline{1, S}. \end{aligned}$$

Разрешающие соотношения метода продолжения по параметру для определения приращения решения  $\Delta U_0^{(n)}$ , вызванного изменением вектора  $B^{(n-1)}$  на величину  $\Delta B^{(n)}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(U_0^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda)_{\lambda=\lambda_{\min}^{(n)}} \Delta U_0^{(n)} + \overline{K}_1(U_0^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda)_{\lambda=\lambda_{\min}^{(n)}} \Delta B^{(n)} = 0; \quad (22) \\ \overline{K}_1 = \{ \overline{k}_{ij} \}, \quad i, j = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

где  $\overline{K}_1(U^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda_{\min})$  – матрица, полученная путем линеаризации матрицы  $K_1$ ;  $\tilde{K}_1$  – матрица, полученная из линеаризованной матрицы  $\overline{K}_1(U^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda_{\min})$  заменой  $l$ -го столбца  $a_{il}, i = \overline{1, M}$  столбцом  $\frac{\partial \overline{K}_1}{\partial B_l}$ ;  $\Delta U_0$  – вектор  $\Delta U_0$ , в котором компонента  $\Delta U_{0l}$  заменена на  $\Delta B_l$ . Такая замена обеспечивает смену параметра продолжения, поскольку

в точке  $(U_0, \lambda_{\min})$  линеаризованная матрица  $\overline{K}_1$  вырождена,  $\overline{K}_1(U_0^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda_{\min}) = K_2(U_0^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda_{\min})$

После построения решения в точке  $(\lambda_{\min}^{(n)}, U_0^{(n)}, B^{(n)})$  решение продолжаем по параметру  $\lambda$  до достижения точки  $\lambda_{\min}^{(n)}$ , где  $\det K_2(U_0^{(n-1)}, B^{(n-1)}, \lambda_{\min}) = 0$ . Невязку  $(\lambda_{\min}^{(n)} - \lambda_{кр})$  используем для определения  $\Delta B^{(n)}$ . Для построения вектора  $\left\{ \frac{dJ_{\min}^{(n)}}{dB_i} \right\}$  производную

Фреше в точке  $\lambda_{\min}^{(n)}$  определим численно.

### Алгоритм

1. Задать:  $B_0, A_i, a_j^i, i, j = 1, 2, b_1, b_2, \varphi_i^0 = 0, \lambda_{нач} = 0, \lambda_{кр}, \varepsilon = 10^{-2}$ .
2. Задать  $n = 0$ .
3. Определить  $\lambda_{\min}^{(n)}, U_0^{(n)}$  методом продолжения по параметру  $\lambda$ .
4. Вычислить  $\left\{ \frac{dJ}{dB_i} \right\}, i = \overline{1, M}$ .
5. Определить  $B_i^{(n+1)}, \varphi_i^{(n+1)}, (\lambda_{\min}^{(n+1)} - \lambda_{кр}) \geq \varepsilon$ , иначе перейти на п. 7.
6.  $n = n + 1$ , перейти на п. 3.
7. Конец.

**Числовой анализ.** Исследуется задача определения  $B_{22} = \text{const}$  при  $B_{11} = B_{12} = 0$  и  $A^{ijkl} = \text{const}$ , удовлетворяющему условию (3). В качестве области  $\Omega$  использована цилиндрическая панель с фиксированной

опорной хордой, для которой  $B_{22} = \frac{1}{R}$ , где  $R$  – безразмерный радиус кривизны панели, длина  $-1 \leq x_1 \leq 1$ , на криволинейных кромках панели реализованы условия шарнирного опирания, прямолинейные кромки свободные.

Метод конечных элементов реализован с помощью пакета «COSMOS».

На рис. 1 приведены значения  $B_{22}$  для различных значений  $\lambda_{кр}$ , отнесенных к соответствующим значениям  $\lambda_{кр}$  для цилиндрической оболочки. Как видно существуют точки решений, для которых  $\frac{d\lambda_{\min}}{dB} = 0$ , т.е. условия (1) не удовлетворяются. Эти точки разделяют области значений  $B$ , являющиеся компактами, для которых  $B \in \bar{B}_k$ , где  $\bar{B}_k$  – компактное множество. На рис. 2 показан вид решений  $U_0 + U$ , соответствующих  $\lambda = \lambda_{\min}$ . Видно, что каждому компактному  $\bar{B}_k$  соответствуют различные формы решений  $U_0 + U$ .

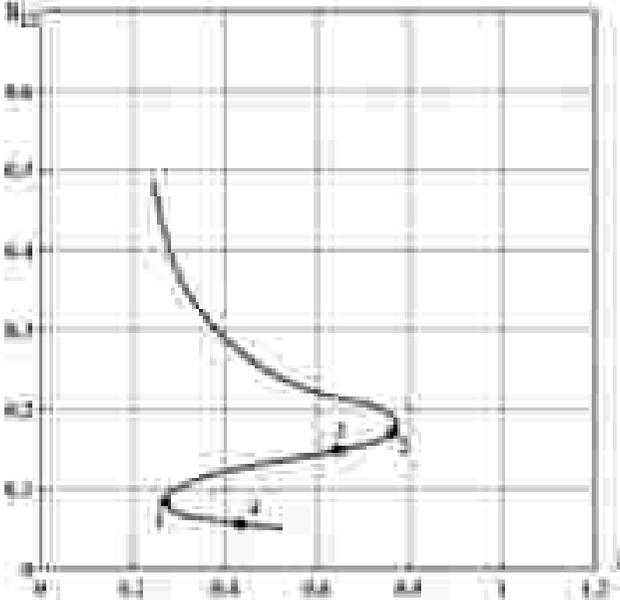


Рис.1. Зависимость значений  $B_{22}$  для разных значений  $\lambda_{кр}$

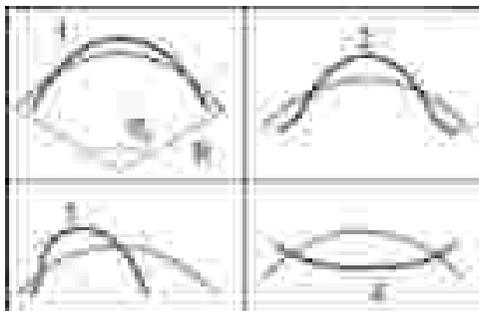


Рис. 2. Формы решений прямой задачи

Таким образом, значения  $B$  ограничиваются областью  $c \leq \frac{dB}{d\lambda_{\min}} \leq \bar{c}$ , где  $c, \bar{c}$  определяем из условия  $\text{sign } c = \text{sign } \bar{c}$ .

**Выводы.** Обратная спектральная задача для нелинейных уравнений Кармана, где в качестве неизвестной вектор-функции  $B$  выступают связи между компонентами системы, имеет решение на компактном множестве, ограниченном условием  $\frac{d\lambda_{\min}}{dB} = 0$ . Решение может быть построено итеративным путем, путем решения конечномерной задачи оптимизации с ограничениями.

#### Библиографические ссылки

1. **Ворович, И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек [Текст] / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
2. **Гасанов, А.И.** Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов [Текст] / А.И. Гасанов // Мат. моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1-32.
3. **Латтес, Р.** Метод квазиобращения и его приложения [Текст] / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 336 с.
4. **Литвинов, В.Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями в механике [Текст] / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
5. **Сергиенко, И.В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 2009. – 639 с.
6. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.
7. **Шалашин, В.И.** Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация [Текст] / В.И. Шалашин, Е.Кузнецов. –М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2015

**О.М. <sup>4</sup>Притоманова**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОЛОГИИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА К УПРАВЛЕНИЮ БАНКОВСКИМИ ПРОБЛЕМНЫМИ КРЕДИТАМИ**

Обосновано применение системного подхода при организации управления проблемными кредитами в банковской деятельности. Предложена практическая реализация системы управления проблемными кредитами, основным компонентом которой является математическая модель оценки степени проблемности кредита с применением нейронечетких технологий. Применение нейронечетких технологий позволяет расширить возможности моделирования сложных объектов и процессов, что является актуальной задачей в реальных условиях при отсутствии достоверных данных, неполной и нечеткой информации об объекте исследования, сложных нелинейных зависимостях выходов системы от ее входов.

Обґрунтовано застосування системного підходу під час організації управління банківськими проблемними кредитами. Запропоновано практичну реалізацію системи управління проблемними кредитами, основним компонентом якої є математична модель оцінки ступеня проблемності кредиту із застосуванням нейронечітких технологій. Застосування нейронечітких технологій дозволяє розширити можливості моделювання складних об'єктів, процесів, що є актуальним завданням в реальних умовах за відсутності достовірних даних, неповної і нечіткої інформації про об'єкт дослідження, складних нелінійних залежностей виходів від входів системи.

The systematic approach of problem loans management establishment in banks is substantiated. The systematic approach to establish problem loan management in banks is provided. A practical implementation of problem loans management, which main component is a mathematical model for problem degree loans valuation using neuro-fuzzy technologies is described. Application of neuro-fuzzy technology allows to extend capabilities of complex objects and processes modeling, that is a topical problem in practice, because of lack of valid data, incomplete and fuzzy information about the object of research, complex of non-linear dependence of the system on its inputs.

**Ключевые слова:** системный подход, проблемный кредит, система управления, нейронечеткие технологии

**Введение.** Одним из последствий кризиса в Украине стал рост объемов проблемных кредитов в банковской системе. Выход на нормальный для нашей страны уровень просроченных кредитов, по оптимистическим прогнозам экспертов, будет достаточно длительным, что обусловлено, прежде всего, умеренными темпами роста экономики в перспективе ближайших лет [1]. Очевидно, что наличие значительных объемов проблемной кредитной задолженности нарушает экономическое равновесие в государстве, своеобразным механизмом поддержки которого является банковское дело [2]. Именно поэтому одной из самых острых проблем функционирования банковской системы Украины в посткризисный период является обеспечение эффективного управления проблемными активами с целью уменьшения их объемов. Это обуславливает необходимость системного исследования как в теоретическом, так и в практическом плане задачи управления проблемной задолженностью банков. Значимость решения этой задачи для обеспечения эффективного и стабильного функционирования отечественной банковской системы определили актуальность и цель данной статьи.

**Целью статьи** является обоснование системного подхода к управлению банковскими проблемными кредитами, разработка на его основе механизма функционирования системы управления проблемными кредитами в банке и ее практическая реализация с применением методов математического моделирования. Считаем, что построение эффективной системы управления банковскими проблемными кредитами на современном этапе невозможно без разработки математической модели оценки степени проблемности кредита.

**Основные результаты исследования.** Системный подход является одним из основных методологических направлений научного исследования различных объектов и процессов [3]. Типичным свойством практических задач системного анализа является неопределенность [4]. Она объективно присуща любой предпринимательской деятельности. В кредитовании будущее развитие событий при возвращении кредитов является неоднозначным из-за наличия целого ряда различных рисков [5]. Избежать неопределенности при кредитовании невозможно, однако можно научиться принимать решения в условиях неопределенности с целью минимизации количества проблемных кредитов, то есть управлять рисками.

В основе системного подхода к управлению рисками лежат общепринятые, научно обоснованные принципы Generally accepted risk principles (GARP) [6]. Они были разработаны на основе использования опыта работы западных экономистов. В работах экономистов, изучающих проблематику рисков и применяющих принципы GARP, управление риском рассматривается, как правило, в качестве специфического вида деятельности, содержащего последовательно определенные этапы, такие как политика

управления риском, идентификация (определение) риска, измерение риска и его оценка, минимизация риска, мониторинг риска, составление отчетности о риске [6].

Считаем, что методологическая основа процесса управления проблемными кредитами в системе банковского риск-менеджмента также должна строиться на основе системного анализа и в соответствии с общими принципами управления рисками. Учитывая важность и сложность процессов управления проблемными кредитами, предлагаем в рамках системы управления кредитными риском выделить управление проблемными кредитами как отдельную подсистему. В частности, это может быть выделено, упорядочено и отражено в целостной системе управления.

В словаре современной экономической науки [7] определение системы управления (control system) подается через понятие управляющей системы, которая состоит из блока формулировки целей и блока регулирования, который поддерживает систему на траектории, заданной первым блоком. Именно такая система управления является, по нашему мнению, системой управления проблемными кредитами в банке как форма практической реализации стратегического управления проблемной задолженностью. Определим ее составные элементы, принципы и основные механизмы функционирования в соответствии с принципами GARP.

Система управления проблемными кредитами в банке может быть определена, по нашему мнению, как совокупность взаимосвязанных субъектов, объектов, стратегий, методов и инструментов управления, которые субъекты управления применяют и направляют на уменьшение уровня проблемной задолженности банка. Таким образом, система управления проблемными кредитами является целостной системой взаимосвязанных элементов, реализующих соответствующие стратегии банковского менеджмента по управлению проблемной задолженностью.

Определим методические основы функционирования системы управления проблемными банковскими кредитами [6]:

1. Система управления проблемными кредитами охватывает, кроме объекта управления, управленческие субъекты (внешние и внутренние). Внешние субъекты на макроэкономическом уровне представлены законодательными, финансово-контрольными и государственными органами регулирования, центральное место среди которых принадлежит НБУ. Внутренние субъекты на микроэкономическом уровне представлены руководством банка и органами управления финансовыми ресурсами и рисками.

2. Стратегии управления проблемными кредитами состоят из соответствующих методов и методик. Кроме методов, применяемых субъектами управления, в данной системе важную роль играют инструменты выбран-

ных стратегий. Эти инструменты должны учитывать экономические и административные меры, применяемые органами банковского надзора, регулирования и контроля для обеспечения надлежащих объемов проблемной задолженности в банке и банковской системе страны.

3. Важную роль в формировании системы управления проблемными кредитами играет организационная структура банка, а также уровень связей как между элементами этой структуры, так и связи с клиентами, акционерами банка. То есть эффективность и результативность процесса управления проблемной задолженностью в значительной степени зависит от организационного уровня банка.

4. Система управления проблемными кредитами не является статическим образованием, а постоянно находится в развитии. Необходимо учитывать конкретные экономические условия, в которых функционирует банк, и, в соответствии с изменениями в экономической среде, вносить коррективы в состав и функции системы управления проблемными кредитами, принимать адаптационные меры.

Основываясь на методологии системного анализа, считаем, что важным условием эффективного функционирования системы управления проблемными кредитами банка является соблюдение в процессе управления комплекса принципов, к которым следует отнести, по нашему мнению, следующие:

- принцип единства действий и средств достижения цели субъектами управления системы;
- принцип единства стратегии и тактики в процессе управления проблемной задолженностью для обеспечения его непрерывности;
- принцип взаимосвязи и взаимообусловленности элементов системы управления проблемными кредитами банка, который заключается в том, что функционирование отдельного элемента предопределяет особенности действия другого, а взаимное влияние и целеустремленность всей совокупности элементов обеспечивают результативность процесса управления;
- принцип гибкости системы и процесса управления проблемными кредитами, который позволяет адаптироваться к возможным изменениям на финансовом рынке.

Для четкого распределения функциональных обязанностей субъектов управления выбранным стратегиям, методам и инструментам регулирования проблемной задолженности необходимо выделить в системе управления проблемными кредитами банков соответствующие блоки и элементы. Каждый блок данной системы состоит из определенных элементов, которые, в свою очередь, ему подчинены и определяют содержание того или иного блока. Составляющими системы являются следующие:

1. Субъекты системы управления проблемными кредитами банка.
2. Объект системы управления проблемными кредитами банка.
3. Процесс управления проблемными кредитами банка, который соответствует выбранной стратегии управления и охватывает следующие элементы:

а) общеэкономические методы управления (планирование, анализ, оценка, регулирование и контроль);

б) практические методики и инструменты управления.

Предоставим характеристику составляющих системы управления проблемными кредитами.

Первая составляющая данной системы охватывает субъекты управления, которые должны отвечать за эффективность и непрерывность функционирования системы управления проблемными кредитами банков. От их компетентности и качества менеджмента будет зависеть объем проблемной задолженности банка.

Вторая составляющая системы охватывает объект управления, которым является проблемная задолженность банка, и определяется через следующие характеристики:

1) показатели проблемной кредитной задолженности банка (оценка и методы анализа этих показателей предложены в [8]);

2) степень проблемности отдельной кредитной сделки.

Третья составляющая представлена процессом управления проблемными кредитами, который функционирует как на макроэкономическом, так и на микроэкономическом уровне.

Основными задачами систем управления проблемными активами банка (в соответствии с приведенными выше принципами GARP) являются:

– идентификация источников возникновения проблемной задолженности;

– выявление и регулирование концентрации вероятности возникновения проблемных кредитов в разрезе направлений кредитования;

– количественная оценка уровня проблемности кредитного портфеля, анализ и контроль за его влиянием на результаты деятельности банка;

– выбор источников покрытия проблемных кредитов и оценка их достаточности;

– разработка, реализация и оценка эффективности методов нейтрализации или снижения уровня проблемной задолженности;

– мониторинг и контроль за долей проблемных кредитов.

Практическая реализация предложенной системы управления проблемными кредитами невозможна без применения информационно-аналитических систем (ИАС) класса систем поддержки принятия решений.

Механизм функционирования такой ИАС предполагается следующий: после введения в систему основных формализованных показателей по конкретной сделке (показатели финансово-хозяйственной деятельности заемщика, внешние показатели отрасли деятельности заемщика и др.) в базе данных ИАС сопоставляются введенные фактические данные с типичными данными системы признаков проблемности кредитных договоров. Далее определяется состояние этого кредитного договора, рассчитывается оценка его степени проблемности и формируется перечень необходимых первоочередных мер с целью улучшения качества договора. Создание такой ИАС особенно важно и актуально в кризисные периоды, когда объемы проблемной задолженности могут быстро расти и необходимо вовремя принимать соответствующие меры.

Следует отметить, что главной составляющей предложенной системы управления банковскими проблемными кредитами является количественная оценка степени проблемности кредитного соглашения, от адекватной оценки которой зависит успешность и результативность дальнейших этапов системы управления.

Задача оценки степени проблемности кредита опирается на комплексную оценку кредитоспособности клиента и относится к типу так называемых слабоструктурированных проблем. Основными чертами слабоструктурированных проблем является объективное наличие в их составе как качественных, так и количественных показателей. Известны примеры решения таких задач путем трансформации качественных переменных в количественные на основе метода анализа иерархий Саати [9]. И противоположным путем – с помощью перехода от количественных показателей к качественным, таким образом сведения задачи к неструктурированной и ее решения на основе методологии вербального анализа [10].

В последнее время получил развитие подход, позволяющий анализировать качественные и количественные факторы без их преобразования. Он связан с применением теории нечетких множеств [14] и нейронных сетей [12]. Сочетание этих двух технологий представляет собой объединение способностей к обучению нейронных сетей с наглядностью и легкой интерпретацией нечетких правил «ЕСЛИ \_ТО». Эти правила позволяют формализовать с помощью нечеткой логики экспертную информацию о закономерностях, обнаруженных в относительно малых выборках имеющих экспериментальных данных [11].

В статье предлагается подход к построению модели оценки степени проблемности кредита с применением нейронечетких технологий, который позволяет учитывать неопределенности не только статистической, но и лингвистической природы. Нейронные сети и нечеткая логика являются

универсальными аппроксиматорами сложных (нелинейных) функциональных зависимостей во многих интеллектуальных задачах: многофакторном анализе, распознавании образов, диагностике и др.

В основе нейронечетких технологий лежит сочетание двух принципиально различных математических конструкций: нейронных сетей и нечеткой логики. Искусственные нейронные сети рассматриваются как схожие с человеческим мозгом универсальные модели, способные обучаться распознаванию неизвестных закономерностей. Они строятся по принципу организации и функционирования их биологических аналогов (сетей нейронов головного мозга человека). В последние годы нейронные сети вошли в практику везде, где нужно решать задачи идентификации, прогнозирования, классификации, управления [16].

В отличие от нейронных сетей, в которых по неструктурированным числовым данным осуществляется поиск решения задачи путем обучения и тренировки, нечеткие технологии (fuzzy -системы) используют экспертную информацию о закономерности, обнаруженной в имеющихся экспериментальных данных, в виде естественно -языковых правил «ЕСЛИ \_ТО» [13]. Эти правила, которые формализуются с помощью нечеткой логики, позволяют строить модели идентификации и прогноза при относительно малых (по сравнению с нейронными сетями) выборках экспериментальных данных.

Сочетание двух описанных технологий представляет собой объединение способностей к обучению нейронных сетей с наглядностью и понятной интерпретацией нечетких правил «ЕСЛИ \_ТО».

Для построения модели оценки степени проблемности кредита предлагаем применить метод лингвистической идентификации [Там же]. Задача идентификации (восстановления) сложной нелинейной зависимости рассматривается как построение модели объекта по экспертно-экспериментальным данным о взаимосвязи <вход> - <выход> и решается, как правило, в два этапа:

1) структурная идентификация: формирование нечеткой базы знаний, грубо воспроизводит зависимость выхода (оценки степени проблемности кредита) от входов (факторов -признаков его проблемности) с помощью лингвистических правил «ЕСЛИ \_ТО», генерируемых с экспериментальными данными о завершенных проблемных кредитных сделках;

2) параметрическая идентификация: поиск таких параметров нечеткой базы знаний, которые минимизируют отклонение результатов, рассчитанных по модели, от экспериментальных.

Перейдем к построению математической модели оценки степени проблемности банковского кредита с применением описанного нейронечеткого подхода.

Основываясь на исследовании факторов появления проблемной задолженности и выявлении основных признаков проблемного кредита, проведенного авторами в работе [11], основными факторами, значимо влияющими на степень проблемности кредита, выбраны следующие (табл. 1).

Таблица 1

**Факторы, влияющие на степень проблемности кредита**

Группа	Фактор	Обозначение
Внешние	Информационный	x1
	Юридический	x2
	Рыночный	x3
Финансовые	Кредитный (выполнение договорных обязательств)	x4
	Залог	x5
	Финансовое состояние	x6
	Валютный риск	x7
Организационно-психологические	Риск менеджмента/собственников	x8
	Организационный	x9
	Политическое влияние собственников	x10

Эти показатели могут быть лингвистически описаны экспертами-экономистами, которые занимаются кредитованием, примеры такого описания приведены ниже (табл. 2).

В качестве значений интегральной оценки степени проблемности кредита ( $y$ ) выберем такие лингвистические значения:

– *низкий* (Н), если были выполнены условия кредитного договора между заемщиком и банком в полном объеме,

– *средний* (С), если условия кредитного договора были выполнены более чем на 50 % от первоначальных условий;

– *высокий* (В), если условия кредитного договора были выполнены менее чем на 50 % от первоначальных условий;

– *дефолтный* (Дф), если условия кредитного договора не были выполнены, то есть кредит был списан.

Нейронечеткую модель зависимости степени проблемности кредита от факторов-показателей заемщика  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  представим в следующем виде:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}). \quad (1)$$

Построение модели (1) в явном виде начнем с формирования нечеткой продукционной базы знаний [11], которая представляет собой совокупность нечетких экспертно-лингвистических правил типа «ЕСЛИ ТО», связывающих между собой лингвистические оценки входных переменных ( $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ) и выходной переменной  $y$

Таблица 2

**Пример лингвистического описания факторов, влияющих на степень проблемности кредита**

	Фактор	Значение	Содержание показателя
x1	Информационный	Низкий (Н)	Наличие негативной информации о заемщике из внешних информационных источников не установлено или она единична
		Средний (С)	Негативная информация о заемщике из внешних источников в течение длительного времени
		Высокий (В)	Информация о начале процедуры банкротства / ликвидации заемщика / залогодателя
x2	Юридический	Низкий (Н)	Отсутствие судебных исков со стороны кредиторов, наличие других судебных процессов в отношении заемщика, которые могут негативно повлиять на выполнение заемщиком своих обязательств по договору
		Средний (С)	Рискованная юридическая структура кредитной операции, признание или риск признания недействительными договоров по кредитным операциям
		Высокий (В)	Принятие решения о начале процедуры банкротства / ликвидации по решению собственника

Для сбора фактического материала по описанному выше набору факторов был отобран 21 кредитный договор. По каждому кредитному договору зафиксированы условия (дата выдачи, планируемая и фактическая даты погашения, объем ссуды, процент, тип обеспечения), характеристики хозяйственной деятельности заемщика, параметры фактического выполнения договора (оплачены и списаны проценты и штрафы, максимальный и средний за период действия объем кредита). Проведен анализ выбранных кредитных договоров по описанным выше факторами  $x_1$  -  $x_{10}$ .

На основе проведенного анализа правило принятия решения о степени проблемности кредита по кредитному договору может быть представлено лингвистическим выражением типа: ЕСЛИ  $\langle x_1 \text{ низкий} \rangle$  И  $\langle x_2 \text{ средний} \rangle$  И  $\langle x_3 \text{ высокий} \rangle$  И  $\langle x_4 \text{ высокий} \rangle$  И  $\langle x_5 \text{ высокий} \rangle$  И  $\langle x_6 \text{ высокий} \rangle$  И  $\langle x_7 \text{ средний} \rangle$  И  $\langle x_8 \text{ средний} \rangle$  И  $\langle x_9 \text{ средний} \rangle$  И  $\langle x_{10} \text{ средний} \rangle$  ТО  $\langle \text{степень проблемности кредита высокая} \rangle$ . Подобным образом формируется вся нечеткая база знаний.

Таким образом, для построения модели (1) формируется нечеткая база знаний как система нечетких лингвистических высказываний типа «ЕС-ЛИ.ТО», которые связывают лингвистические оценки (*низкий, средний* и др.) входных переменных с выходной переменной. Выходная переменная, как было отмечено выше, принимает четыре значения (табл. 3).

Таблица 3

**Классы и их центры для выходной переменной**

Класс	Значение	Центр класса	Значение центра
K1	Н	$z_1$	1
K2	С	$z_2$	2
K3	В	$z_3$	3
K4	Дф	$z_4$	4

Представим ниже базу знаний в виде, удобном для моделирования (табл. 4).

Таблица 4

**Компактный вид базы знаний**

i	p	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
1	1	Н	Н	В	Н	Н	В	Н	Н	Н	Н
	2	В	В	Н	В	В	С	Н	Н	Н	Н
	3	Н	Н	В	Н	В	В	В	Н	Н	Н
	4	Н	Н	В	Н	Н	В	В	Н	В	Н
	5	Н	Н	Н	Н	С	В	В	Н	Н	С
	6	Н	Н	Н	Н	С	С	В	Н	Н	Н
	7	С	В	Н	В	В	В	В	С	Н	Н
	8	Н	Н	С	Н	В	С	В	Н	Н	Н
	9	Н	Н	В	Н	С	В	Н	Н	Н	С
2	1	С	Н	В	В	В	В	С	С	Н	В
	2	Н	Н	Н	Н	В	В	Н	В	С	В
	3	С	Н	Н	В	В	В	В	В	В	Н
	4	Н	Н	В	В	С	В	В	Н	С	В
	5	Н	Н	В	В	С	В	В	С	Н	В

Окончание табл. 4

j	p	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
3	1	Н	С	В	В	В	В	С	С	С	С
	2	Н	Н	С	Н	С	В	Н	С	Н	С
	3	Н	Н	В	Н	С	В	В	Н	Н	В
	4	С	В	Н	В	С	В	В	Н	С	С
4	1	Н	Н	В	В	Н	В	В	В	В	С
	2	Н	В	С	В	С	В	В	В	В	С
	3	Н	Н	Н	В	С	В	В	В	В	Н

Функции  $\mu^{d_j}(y)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  зависят от функций принадлежности факторов-показателей деятельности заемщика, вид которых определяется на основе построенной базы знаний (табл. 4). Для примера приведем расчет функции принадлежности выходной переменной  $y$  для класса К4 от функций принадлежности входных факторов, а именно

$$\mu(y_4) = \min \begin{cases} 1, \\ w_{19} \cdot \mu_1^H(x_1) \cdot \mu_2^H(x_2) \cdot \mu_3^C(x_3) \cdot \mu_4^C(x_4) \cdot \mu_5^H(x_5) \cdot \mu_6^C(x_6) \cdot \mu_7^C(x_7) \cdot \mu_8^C(x_8) \times \\ \times \mu_{10}^C(x_{10}) + \\ + w_{20} \cdot \mu_1^H(x_1) \cdot \mu_2^C(x_2) \cdot \mu_3^C(x_3) \cdot \mu_4^C(x_4) \cdot \mu_5^C(x_5) \cdot \mu_6^C(x_6) \cdot \mu_7^C(x_7) \cdot \mu_8^C(x_8) \times \\ \times \mu_{10}^C(x_{10}) + \\ + w_{21} \cdot \mu_1^H(x_1) \cdot \mu_2^H(x_2) \cdot \mu_3^H(x_3) \cdot \mu_4^C(x_4) \cdot \mu_5^C(x_5) \cdot \mu_6^C(x_6) \cdot \mu_7^C(x_7) \cdot \mu_8^C(x_8) \times \\ \times \mu_{10}^C(x_{10}), \end{cases}$$

где  $w_{jp}$  – вес  $jp$ -го правила – число в диапазоне  $[0,1]$ , которое характеризует субъективную меру уверенности эксперта относительно высказывания с номером  $jp$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $p = 1, \dots, kj$  (для  $j = 4$   $kj = 3$ ) базы знаний (табл. 4).

Подобным образом осуществляется расчет функций принадлежности выходной переменной  $y$  другим лингвистическим термам. Определение точного значения результирующей переменной на основе этих функций принадлежности можно осуществить по соотношению, которое реализует представления объекта (1) в явном виде

$$y = \frac{\sum_{j=1}^4 z_j \mu^{d_j}(y)}{\sum_{j=1}^4 \mu^{d_j}(y)}, \tag{2}$$

где  $d_j$  – лингвистические значения переменной  $y$  (Н, С, В или Дф). В качестве центров классов установлены значения согласно данным табл. 4.

Для компьютерной реализации предложенного подхода было разработано программное обеспечение в среде Visual C++. Далее приведем результаты моделирования, полученные с помощью разработанного программного обеспечения.

Качество модели оценим по значениям абсолютного и относительного среднеквадратичного отклонения между результатом расчета по модели и данными из статистической выборки (рис. 1).

В табл. 5 приведены значения параметров  $w$  для каждого правила базы знаний до и после настройки. На рис. 2 изображены графики функции принадлежности входной переменной  $x_1$  также до и после настройки.



Рис. 1. Оценка точности моделирования степени проблемности кредита

Таблица 5

**Значения параметров  $w$  до и после обучения**

№ правила	$w$ до	$w$ после	№ правила	$w$ до	$w$ после
	настройки	настройки		настройки	настройки
11	1	0.997707	23	1	0.00129623
12	1	1.0000	24	1	0.991411
13	1	0.806101	25	1	0.982676
14	1	0.994244	31	1	1.0000
15	1	0.912973	32	1	0.151294
16	1	0.99418	33	1	0.770405
17	1	0.939074	34	1	0.997798
18	1	0.975686	41	1	0.979853
19	1	0.535094	42	1	0.925271
21	1	0.997336	43	1	0.948666
22	1	0.999332			

Из табл. 5 следует, что вес правил 19, 23 и 32 стал незначительным, что указывает на их некоторую противоречивость. Ниже представлены результаты расчетов по построенной модели зависимости (2) до и после настройки (рис. 3).

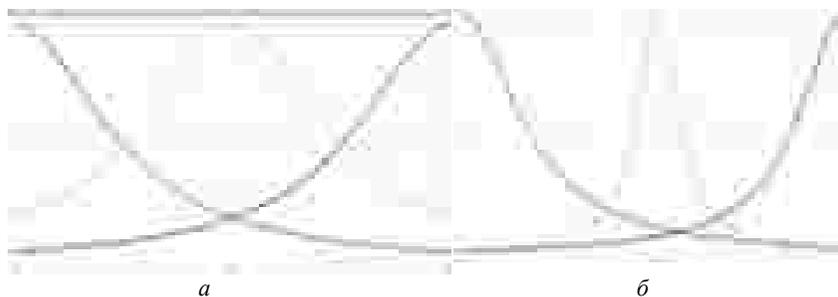
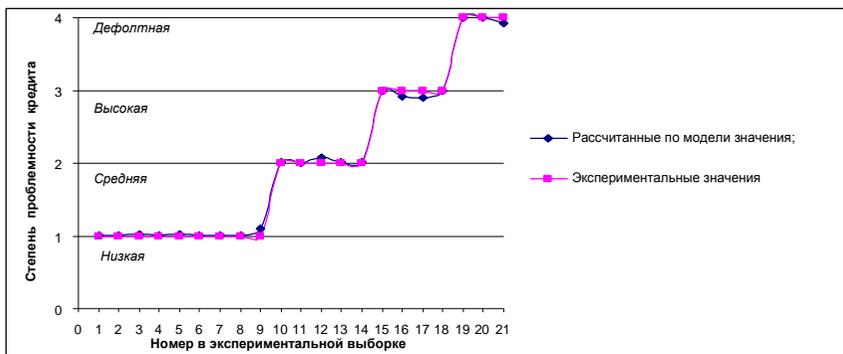
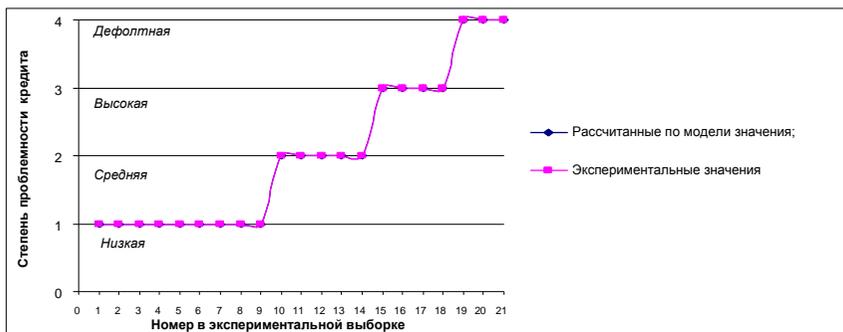


Рис. 2. Функции принадлежности переменной  $x_1$ , соответствующие нечетким термам (низкий, средний, высокий)  $a$  – до настройки,  $b$  – после настройки



$a$



$b$

Рис. 3. Экспериментальные и рассчитанные по модели значения степени проблемности кредита:  $a$  – до настройки,  $b$  – после настройки

Таким образом, как видно из графика (рис. 3 , б), модель оценки зависимости степени проблемности кредита от факторов \_показателей его деятельности после обучения практически совпадает с графиком, построенным по данным статистической выборки.

Построенная нейронечеткая модель представляет нелинейную аналитическую зависимость влияния изменений рассмотренных показателей деятельности заемщика на степень проблемности его кредита. На выходе модели рассчитанная степень проблемности кредита (зависимая переменная  $y$ ) принимает значение в диапазоне [1 ; 4].

Построенная нейронечеткая модель реализует нелинейную аналитическую зависимость степени проблемности кредита от влияния изменений факторов из сформированного перечня показателей деятельности заемщика и условий внешней среды. Разработанную модель можно применять для расчета прогнозного значения степени проблемности кредита, а также определения диапазонов изменения каждого из показателей деятельности заемщика и внешних условий его функционирования, при которых степень проблемности кредита остается высокой.

Отметим еще одно важное свойство построенной нейронечеткой модели, а именно возможность пополнения ее факторами \_показателями, которые могут влиять на степень проблемности кредита (это не вносит существенных изменений в алгоритм построения модели).

Модель на основе нейронечеткого подхода может служить основой для создания систем поддержки принятия решений по управлению проблемными кредитами с целью снижения объемов проблемной задолженности в кредитном портфеле банка.

Предложенную методику анализа и прогнозирования показателей проблемной задолженности по кредитам целесообразно реализовать в качестве программного обеспечения и включить в систему поддержки принятия решений (СППР) в процессе мониторинга риска кредитного портфеля банка. Считаем, что решения, которые будут приниматься с помощью информационно-аналитической СППР , существенно улучшат качество процесса управления кредитным риском, позволят кредитной организации более эффективно работать с проблемной задолженностью.

**Выводы.** Применение методологии системного подхода при организации управления процессами кредитования в банковской деятельности, которой присуща традиционно высокая степень рисков, особенно важно в условиях кризисных явлений в экономике, когда существенно увеличиваются негативные последствия управленческих ошибок. Реализация научно обоснованных подходов к организации систем управления проблемными кредитами позволит банкам противостоять действию различных негативных факторов.

Основным компонентом предложенной в статье системы управления проблемными кредитами является математическая модель оценки степени проблемности кредита с применением нейронечетких технологий. Нейронечеткие технологии позволяют расширить возможности моделирования сложных объектов и процессов, что является актуальной задачей в реальных условиях при отсутствии достоверных данных, неполной и нечеткой информации об объекте исследования, сложных нелинейных зависимостей выходов от входов системы.

Эффективное функционирование предложенной системы управления проблемными кредитами обеспечит достижение стратегических и тактических финансовых целей банка, будет способствовать снижению рисков банковского кредитования.

### **Библиографические ссылки**

1. **Папера, М.** Оптимальні шляхи посткризового розвитку [Текст] / М. Папера // Вісн. НБУ. – 2011. – №7. – С.55–57.
2. **Вовчак, О.Д.** Кредит у системі макроекономічної рівноваги [Текст] / О.Д. Вовчак // Там само. – № 2. – С. 28–33.
3. Системный анализ и научное знание [Текст]/ под ред. Д. П. Горского. — М.: Наука, 1978. – 245 с.
4. **Згуровский, М.З.** Системный анализ: проблемы, методология, приложения [Текст]/ М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. – К.: Наук. думка, – 2005. – 744 с.
5. **Валравен, К.Д.** Управление рисками коммерческого банка [Текст]: учеб. пособие / К.Д. Валравен ; под ред. : М.Э. Уорд, Я.М. Миркина. – Вашингтон : Мировой банк реконструкции и развития, 1993. – 112 с.
6. **Білай, О. С.** Системний підхід до управління проблемними кредитами у банківській діяльності [Текст]/ О. С. Білай, Н. В. Стукало // Екон. часопис. – XXI, 2012. – № 11–12. – С. 55–57.
7. **Лопатников, Л.И.** Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки [Текст]/ Л.И. Лопатников. – 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с.
8. **Притоманова, О.М.** Аналіз та прогнозування основних показників проблемної заборгованості за кредитами у банках України [Текст]/ О.М. Притоманова, О.С. Білай // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». – 2011. – №720. – С.97–109.
9. **Saaty, T. L.** Theory of the Analytic Hierarchy Process, Part 2.1 [Текст] / T. L. Saaty // Систем. Дослідж. та інформ. технології. – 2003. – № 1. – С. 48–72.
10. **Ларичев, О.И.** Качественные методы принятия решений [Текст] / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. – М.: Наука, 1996. – 207 с.

11. **Притоманова, О. М.** Нейронечітка модель оцінки ступеня проблемності кредиту [Текст] / О. М. Притоманова, О. С. Білай // Нейронечіткі технології моделювання в економіці. – 2013. – №2. – С. 135–160.
12. **Матвійчук, А. В.** Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка [Текст]: монографія / А. В. Матвійчук. – К.: КНЕУ, 2011. – 439 с.
13. **Ротштейн, О. П.** Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети [Текст] / О.П. Ротштейн. – Вінниця: Універсум, 1999. – 320 с.
14. Прогнозування економічних і фінансових процесів на основі нейронечітких технологій [Текст] / О. М. Кисельова, Н. Є. Бойцун, О. М. Кисельова, О.М. Притоманова // Фінанси України. – 2005. – №5. – С.87–99.
15. **Zimmerman, H.-J.** Fuzzy Sets Theory – and Its Applications [Text] / H.-J. Zimmerman. – 4th ed. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 514 P.
16. **Киселева, Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения [Текст]: монография / Е. М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук думка, 2005. – 564 с.

*Надійшла до редколегії 01.09.2015*

УДК 519.24

**В. О. <sup>5</sup>Стросва, В.І. Авраменко**

*Дніпродзержинський державний технічний університет*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ДОВЖИНИ ХОРДИ В КОЛІ**

**Розглянуто закони розподілу довжини випадкової хорди в колі для різних моделей і порівняно їх із результатами статистичного моделювання. Отримано розподіли довжин хорд в еліпсі.**

**Рассмотрены законы распределения длины случайной хорды в круге для разных моделей и выполнено их сравнение с результатами статистического моделирования. Получены распределения длин хорд в эллипсе.**

**Considered the laws of distribution of the length of the random chord in a circle for different models and was comparing them with the results of statistical modeling. Received distributions of lengths of Hord in elipsi.**

**Ключові слова:** закони розподілу, довжина хорди, статистичне моделювання.

---

© Стросва В.О., Авраменко В.І., 2015

**Вступ.** Для відомої задачі, спрощене формулювання якої таке: «Якщо хорда вибирається наздогад в заданому колі, то яка ймовірність того, що її довжина більша за радіус?» [3, с. 14], наведено варіанти відповідей для трьох різних моделей і зроблено висновок, що задача не має визначеного розв'язку [Там же, с. 47 – 48]. Аналогічна невизначеність має місце і в задачі «парадокс Бертрана» [2, с. 39, 178]. Нижче розглянемо задачу про визначення законів розподілу довжини хорди в колі для різних моделей.



Рис. 1. Підприємство кола  
визначеною хордою

Маємо взаємне випадкове положення кола радіуса  $r=1$  із центром в довільній точці  $O(x, y)$  і прямої, яка перетинає коло (рис. 1). Довжина хорди  $AB$  однозначно визначена відстанню  $OC$  центра кола від прямої. Тоді

$$l_1 = |AB| = 2|AC| = 2\sqrt{1 - |OC|^2} = 2\sqrt{1 - y^2}. \quad (1)$$

Розглядаючи задачу як одновимірний варіант про монету на решітці, можна вважати  $y$  випадковою величиною, яка для  $l_1 \neq 0$  з однаковою ймовірністю набуває будь-якого значення на інтервалі  $[-1, 1]$ . Тоді щільність її розподілу  $f(y) = 0,5$  за умови  $-1 < y < 1$ .

Обчислимо середню довжину хорди, яка дорівнює математичному сподіванню функції  $l_1 = \varphi(y)$ :

$$M(l_1) = \int_{-1}^1 \varphi(y) f(y) dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} \cdot 0,5 dy = \dots = \frac{\pi}{2} = 1,572. \quad (1a)$$

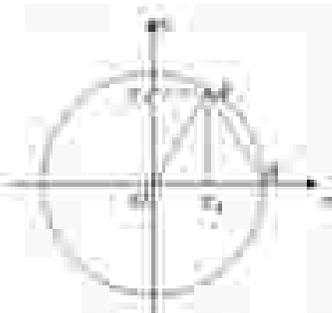


Рис. 2. Довжина хорди  
визначеною хордою

Розглянемо іншу модель визначення довжини хорди (рис. 2). Нехай центр кола збігається з початком координат, тоді його рівняння  $x^2 + y^2 = 1$ . Враховуючи ізометричність фігури, точку  $B$  виберемо на осі  $x$ , отже, координати кінців хорди  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(1, 0)$ . Тоді

$$\begin{aligned} l_2 = |AB| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(x_A - 1)^2 + (\sqrt{1 - x_A^2} - 0)^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot (1 - x_A)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де величина  $x_A$  набуває довільного зна-

чення на інтервалі  $(-1, 1)$ . За рівномірним законом розподілу маємо  $f(x_A) = 0,5$ , де  $-1 < x_A < 1$ , і середня довжина хорди

$$M(l_2) = \int_{-1}^1 \sqrt{2 \cdot (1 - x_A)} \cdot 0,5 dx = 1,333. \quad (2a)$$



Наведемо ще одну модель для обчислення довжини випадкової хорди, коли вона вимірюється центральним кутом  $\alpha$  (рис. 3), який набуває довільних значень на інтервалі  $(0, 2\pi)$ . У такому випадку

$$l_3 = |AB| = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

За рівномірним законом розподілу щільність розподілу  $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$  за умови  $0 < \alpha < 2\pi$ . Обчислимо середню довжину хорди для цієї моделі:

$$M(l_3) = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} d\alpha = \dots = \frac{4}{\pi} = 1,273. \quad (3a)$$

Аналогічний вираз отримаємо і для моделі, коли полюс розташований на самому колі, а довжина хорди виражена через кут  $\beta$  між дотичною і хордою ( $0 < \beta < \pi$ ).

**Постановка задачі.** Різні відповіді у наведених моделях свідчать про те, що припущення про закони розподілу складових елементів моделей не завжди є слушними. Визначимо закони розподілу довжини хорди  $l$  для різних моделей.

Для першої моделі з виразу  $l_1 = 2\sqrt{1 - y^2}$  отримуємо  $y = \frac{\sqrt{4 - l_1^2}}{2}$  і похідну  $y' = \frac{-l_1}{2\sqrt{4 - l_1^2}}$ . На інтервалі  $(-1, 0)$  функція  $l_1 = \varphi(y)$  зростаюча, на інтервалі  $(0, 1)$  – спадна. Тоді щільність розподілу  $g(l_1)$  випадкової величини  $L$  становитиме [1, с. 86]  $g(l_1) = f(y) \cdot |y'(l_1)| = \frac{l_1}{2\sqrt{4 - l_1^2}}$ . Отже, щільність розподілу  $g(l_1)$  і інтегральна функція розподілу  $G(l_1)$  мають вирази

$$g(l_1) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_1 < 0 \\ \frac{l_1}{2\sqrt{-l_1^2}}, \text{ якщо } 0 \leq l_1 \leq 2, \\ 0, \text{ якщо } l_1 > 2 \end{cases} \quad G(l_1) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_1 < 0 \\ \frac{24\sqrt{-l_1^2}}{2}, \text{ якщо } 0 \leq l_1 \leq 2. \\ 1, \text{ якщо } l_1 > 2 \end{cases} \quad (16)$$

Для такого закону розподілу середнє значення довжини хорди (математичне сподівання)  $M(l_1) = \int_0^2 l_1 \cdot g(l_1) dl = \frac{\pi}{2} = 1,572$ , дисперсія  $D(l_1) = 0,199$ . Як бачимо, середня довжина хорди за цією моделлю дорівнює чверті довжини кола.

Для другої моделі  $l_2 = \sqrt{2 \cdot (1-x)}$ , де  $f(x) = 0,5$ ,  $-1 < x < 1$ , отримуємо  $x = 1 - 0,5 \cdot l_2^2$ ;  $|x'| = l_2$ , щільність розподілу та функція розподілу відповідно дорівнюють

$$g(l_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_2 < 0 \\ 0,5 \cdot l_2, \text{ якщо } 0 \leq l_2 \leq 2, \\ 0, \text{ якщо } l_2 > 2 \end{cases} \quad G(l_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_2 < 0 \\ 0,25 \cdot l_2^2, \text{ якщо } 0 \leq l_2 \leq 2. \\ 1, \text{ якщо } l_2 > 2 \end{cases} \quad (26)$$

Математичне сподівання  $M(l_2) = 1,333$ , дисперсія  $D(l_2) = 0,222$ .

Для третьої моделі  $l_3 = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ , де  $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ , де  $0 < \alpha < 2\pi$ .

Здійснюючи перетворення  $\alpha = 2 \arcsin \frac{l_3}{2}$ ,  $\alpha' = \frac{2}{\sqrt{4-l_3^2}}$ , отримуємо

$$g(l_3) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_3 < 0 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{4-l_3^2}}, \text{ якщо } 0 \leq l_3 \leq 2, \\ 0, \text{ якщо } l_3 > 2 \end{cases} \quad G(l_3) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l_3 < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{l_3}{2}, \text{ якщо } 0 \leq l_3 \leq 2. \\ 1, \text{ якщо } l_3 > 2 \end{cases} \quad (36)$$

Математичне сподівання  $M(l_3) = 1,273$ , дисперсія  $D(l_3) = 0,379$ . Можна відмітити, що внаслідок першої важливої границі за  $l_3 \rightarrow 0$  значення  $g(l_3) \rightarrow 0,318$ , що є мало прийнятним.

**Метод розв'язування.** Для порівняння різних моделей розглянемо узагальнену модель випадкового положення хорди в колі із застосуванням методу статистичних випробувань.

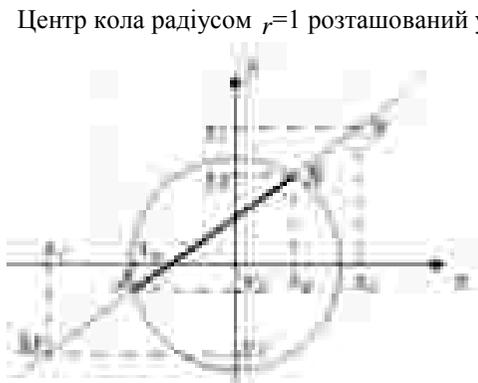


Рис. 4. У випадку коли пряма перетинає коло

Центр кола радіусом  $r=1$  розташований у початку координат. Випадковим чином на площині  $XOY$  вибрано дві довільні точки  $M(x_1, y_1)$  і  $N(x_2, y_2)$  (рис. 4). Через дві точки  $M$  і  $N$  завжди можна провести пряму  $y=k \cdot x+b$ , де

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - k \cdot x_1.$$

Якщо пряма  $MN$  перетинає коло, то кінці хорди (точки  $A$  і  $B$ ) шукають як точки перетину прямої і кола  $x^2 + y^2 = 1$ .

Отримуємо

$$x_{A,B} = \frac{-k \cdot b \pm \sqrt{k^2 + 1 - b^2}}{k^2 + 1}, \quad y_{A,B} = k \cdot x_{A,B} + b.$$

Якщо дискримінант  $D = k^2 + 1 - b^2 < 0$ , то пряма  $MN$  не перетинає коло. Обчислимо довжину випадкової хорди ( $D > 0$ ):

$$l_4^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \quad \dots \quad l_4 = 2 \cdot \sqrt{\frac{k^2 + 1 - b^2}{k^2 + 1}}. \quad (4)$$

Координати точок  $M$  і  $N$  мають рівномірний закон розподілу в усій розглядуваній області, отже, можливі значення параметрів  $k$  і  $b$  прямої  $MN$  теж є випадковими на інтервалі  $(-\infty; \infty)$ , тому отримання аналітичного виразу закону розподілу довжини хорди через закони розподілу координат точок  $M(x_1, y_1)$  і  $N(x_2, y_2)$  – складна задача. Методом статистичних випробувань здійснено оцінку емпіричних частот попадання значень довжини хорди на окремі інтервали відрізка  $[0; 2]$ . Повна кількість випробувань  $n=1 \cdot 10^6$ , з них тільки 15,2% перетинають коло, якщо розглядати область  $(|x| < 10, |y| < 10)$ ; в області  $(|x| < 5, |y| < 5)$  таких випробувань 29,3%.

Аналіз розподілу кутів нахилу хорд, який дорівнює  $\arctg k$ , показав деяку їх нерівномірність з локальними максимумами в околі значень  $\pi/4$  і  $3\pi/4$ , що обумовлено більшими розмірами квадратних областей по діагоналях. Тому було розглянуто іншу модель, коли точки  $M$  і  $N$  вибирали на колі великого радіуса  $R$  і їх координати обчислювали за формулами

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \alpha_1, \\ y_1 = R \sin \alpha_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = R \cos \alpha_2, \\ y_2 = R \sin \alpha_2 \end{cases}, \text{ де } \alpha_i - \text{ випадкові числа, рівномірно}$$

розподілені на інтервалі  $(0, 2\pi)$ . Формули для обчислення довжин хорд залишились незмінними, а величини  $\arctg k$  мають рівномірний розподіл на інтервалі  $(0, \pi)$ .

Результати статистичних експериментів для різних  $R \geq 2$  практично збігаються між собою і з результатами для квадратної області.

На рис. 5 наведено графіки теоретичних ймовірностей потрапляння на інтервали довжиною 0,1 для трьох теоретичних моделей і гистограма статистичних частот для узагальненої моделі. Гистограма збігається з ймовірностями першої моделі, інші графіки суттєво відрізняються.

Слід відмітити, що в ході складання алгоритму методу статистичних випробувань узагальненої моделі не висловлено жодних припущень про взаємне положення кола і прямої. Отже, відповідність першої моделі результатам статистичного моделювання може свідчити про слушність припущень про закон розподілу складників першої моделі.

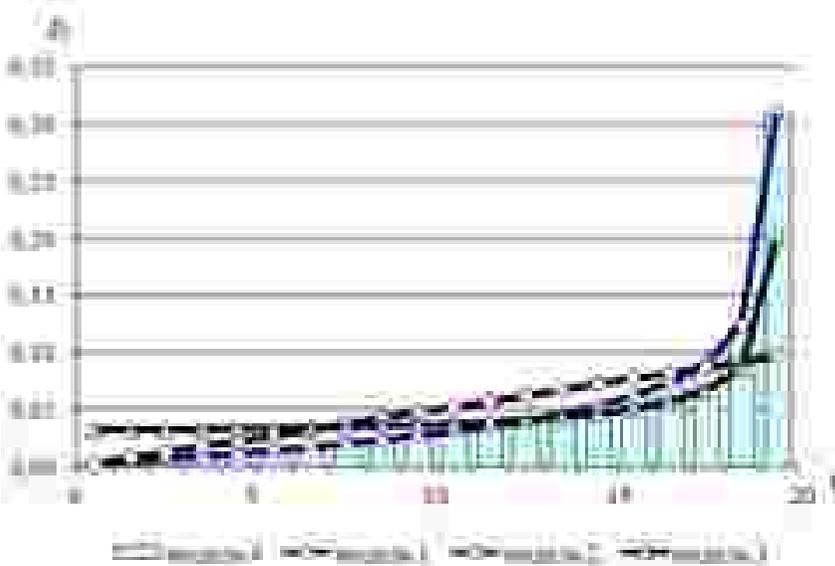


Рис. 5. Графіки теоретичних ймовірностей і статистичних частот

У той же час можна відмітити, що припущення про рівномірність результатів за рівномірної зміни параметрів другої і третьої моделей не зовсім слушне. Так, статистичні дослідження параметрів розподілу  $x_A$  і  $\alpha$

другої і третьої моделей суттєво відрізняються від рівномірного у припущенні, що правдиві результати статистичного моделювання.

Можна також констатувати складний характер впливу параметрів моделей на довжину хорди. Як зазначено вище, за великого значення радіуса  $R$  великого кола результати практично не змінюються. Зі зменшенням величини радіуса  $R$  до 1 характер кривих накопичених частот, аналогів інтегральних функцій розподілу дещо змінюється.

Це видно на рис. 6. Якщо  $R=1$ , точки  $M$  і  $N$  узагальненої моделі збігаються з точками  $A$  і  $B$ , тому слід розглядати третю модель, коли фіксується точка – полюс на площині і оцінюється довжина хорди за неперервного повороту променя, що виходить з полюса. Результати статистичного моделювання за узагальненим алгоритмом, якщо  $R=r=1$ , повністю збігаються з даними третьої моделі (крива на рис. 6 для  $R=1$  збігається з графіком інтегральної функції розподілу  $G(l_3)$ ). Можна припустити, коли точки належать колу, не можна говорити про незалежність розподілів параметрів моделі.

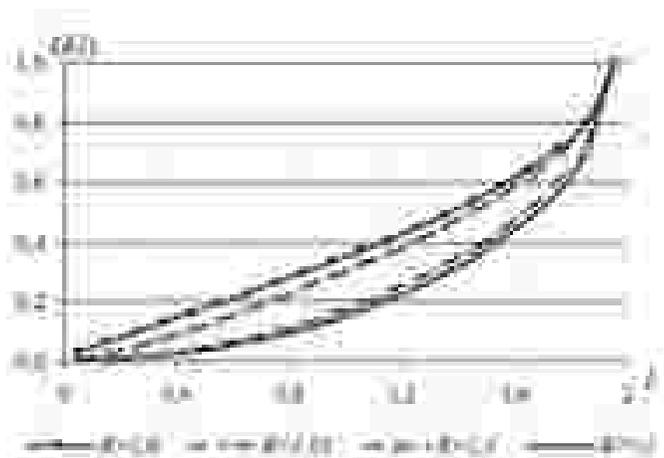


Рис. 6. Графіки накопичених частот за різних величин радіуса області  $R$

Щодо моделі з полюсом можна зробити такі зауваження. Для першої розглянутої моделі за малого приросту аргументу  $\Delta y$  довжина хорди змінюється на величину  $|\Delta l| = \left| 2\sqrt{1-(y+\Delta y)^2} - 2\sqrt{1-y^2} \right| = \dots \approx 2y \cdot \Delta y$  (застосовано розвинення в ряди). У цій моделі величина  $y$  змінюється рівномірно на інтервалі  $(-1, 1)$ . У третій моделі з полюсом в центрі в разі зміни кута на невелике значення  $\Delta \alpha$  довжина хорди зміниться на величину

ну  $|\Delta l_3| = |2 \sin(\alpha + \Delta\alpha) - 2 \sin \alpha| = \dots \approx 2 \cos \alpha \cdot \Delta\alpha$ , отже, більш обґрунтованим є припущення, що кут  $\alpha$  змінюється на визначеному інтервалі таким чином, щоб косинус цього кута з однаковою ймовірністю набував значення на інтервалі  $[-1, 1]$ .

Візьмемо  $\cos \alpha = z$ , де  $f(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z < -1 \\ 0,5, & \text{якщо } -1 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{якщо } z > 1 \end{cases}$ . Тоді  $\alpha = \arccos z$  і

$$l_3 = 2 \cdot |\sin \arccos z| = 2 \cdot \left| \sin \arcsin \sqrt{1 - z^2} \right| = 2 \cdot \sqrt{1 - z^2}, \text{ де } -1 < z < 1.$$

Отриманий вираз для довжини хорди повністю збігається з таким для першої розглянутої моделі, тому за слушності припущення про рівномірність розподілу косинуса  $\alpha$  конфлікту між моделями не існує.

**Результати.** Розглянуті алгоритми обчислення довжини хорди в колі є окремим випадком визначення довжини хорди в еліпсі. Узагальнений алгоритм встановлення довжини хорди полягає в знаходженні точок перетину прямої  $y = k \cdot x + d$  і еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Після викладок, аналогічних вище наведеним, отримуємо

$$l_E = \frac{2 \cdot a \cdot b}{b^2 + a^2 \cdot k^2} \sqrt{(1 + k^2) \cdot (a^2 \cdot k^2 + b^2 - d^2)}, \quad (5)$$

де  $D = a^2 \cdot k^2 + b^2 - d^2 > 0$  – дискримінант квадратного рівняння.

Випадок  $a = b = 1$  є розглянуте вище коло. Поклавши  $a = 1$  (більша піввісь, отже,  $b < 1$ ), отримуємо вираз довжини хорди  $l_E$  через велику піввісь,  $0 \leq l_E \leq 2$ .

На рис. 7 наведено графіки статистичних частот довжин хорд для еліпсів з різними значеннями ексцентриситету  $E = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ , графік для  $E = 0$  збігається з таким для моделей 1 і 4 (хорда в колі).

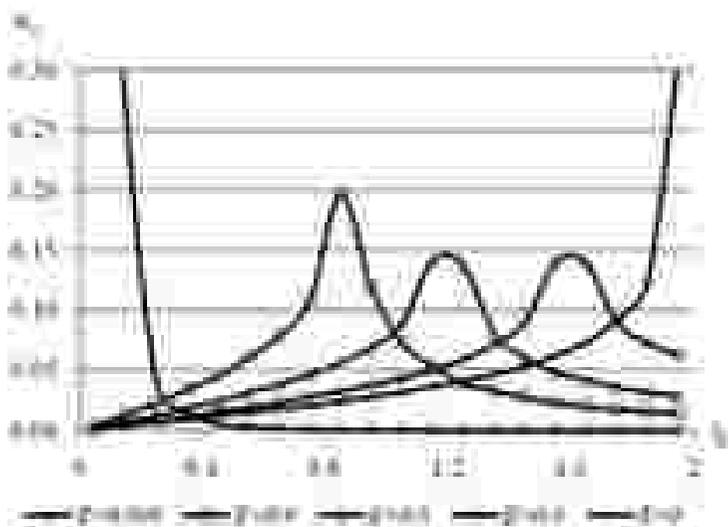


Рис. 7. Графіки відносних частот довжин хорд в еліпсі

Далі (див. таблицю) наведено значення середніх довжин  $\bar{l}_E$  хорд в еліпсах з різним ексцентриситетом  $E$  (виражені в одиницях довжини більшої півосі  $a$ )

Значення середніх довжин хорд в еліпсі

$E$	0	0.6	0.8	0.9	0.999
$\bar{l}_E$	$1.56a$	$1.39a$	$1.16a$	$0.913a$	$0.100a$

Оскільки еліпс не є ізометричною фігурою, перша і друга моделі визначення довжини хорди в колі не можуть бути застосовані. Аналог третьої моделі для еліпса може бути складений у такому вигляді. На лінії еліпса, півосі якого дорівнюють  $a$  і  $b$  (див. рис. 8), вибирають дві довільні точки  $A$  і  $B$ , координати яких у полярній системі координат

$x_A = a \cdot \cos \alpha$ ,  $y_A = a \cdot \sin \alpha$ ,  $x_B = b \cdot \cos \beta$ ,  $y_B = b \cdot \sin \beta$ ,  
де  $\alpha$  і  $\beta$  – довільні кути з інтервалу  $(0, 2\pi)$ . Тоді довжина хорди

$$\begin{aligned}
 l_E &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\
 &= 2a \cdot \left| \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = 2a \cdot |\sin \gamma| \cdot \sqrt{1 - E^2 \cdot \cos^2 \delta}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

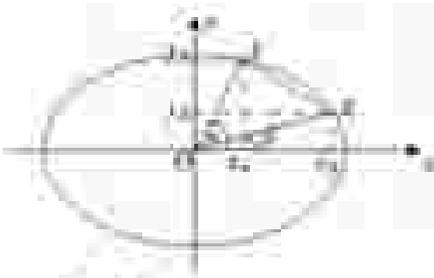


Рис. 5. Підвищення значення  
кута  $\gamma$  в еліпсі

де  $E$  - ексцентриситет еліпса, а кути  $\gamma$  і  $\delta$  мають симетричні трикутні розподіли на інтервалах  $(-\pi, \pi)$  і  $(0, 2\pi)$  відповідно. У випадку  $E=0$  отримуємо формулу (3) для довжини хорди в колі. Розподіл модуля  $\sin \gamma$  збігається з розподілом  $\sin \varphi$ , де значення  $\varphi$  рівномірно розподілені на інтервалі  $(0, \pi)$ , тому для обчислення за формулою (6) слід застосувати зауваження до моделі 3 і

рівномірний закон розподілу кутів під знаком тригонометричних функцій замінити на рівномірний закон розподілу значень їх косинусів.

### Бібліографічні посилання

1. **Авраменко, В.І.** Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст]: навч. посіб. / В. І. Авраменко, І. К. Карімов. - 2-ге вид., переробл. і доповн. - Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2013.
2. **Вуколов, Э. А.** Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы [Текст] / Э. А. Вуколов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова. - М., 1984.
3. **Мостеллер, Ф.** Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями [Текст] / Ф. Мостеллер. - М., 1971.

Надійшла до редколегії 21.06.2015

**П.И. <sup>6</sup> Стецюк, А.В. Фесюк**

*Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины*

## **ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕПАРАБЕЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОДНИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ И ГРАНИЦАМИ НА ПЕРЕМЕННЫЕ**

Исследован вопрос о построении эффективного алгоритма для решения задачи минимизации строго выпуклой сепарабельной квадратичной функции при одном ограничении равенстве и двусторонних ограничениях на переменные. Рассмотрена двойственная задача, которая связана с максимизацией гладкой вогнутой функции от одной переменной, и исследованы ее свойства. Построены алгоритмы решения двойственной задачи на основе метода дихотомии и ее ускорения, которое использует рекордное значение вогнутой функции. Приведены результаты вычислительного эксперимента по сравнению обычного и ускоренного двойственных методов.

Досліджено питання про побудову ефективного алгоритму для розв'язання задачі мінімізації строго опуклої сепарабельної квадратичної функції за одного обмеження рівності та двосторонніх обмеженнях на змінні. Розглянуто двоїсту задачу, пов'язану з максимізацією гладкої увігнутої функції від однієї змінної, та досліджено її властивості. Побудовано алгоритми розв'язання двоїстої задачі на основі методу дихотомії та її прискорення, яке використовує рекордне значення увігнутої функції. Наведено результати обчислювального експерименту з порівняння звичайного та прискореного двоїстих методів.

The topic of constructing an efficient algorithm for solving the problem of minimization of strictly convex separable quadratic function with a single equality constraint and bilateral constraints on variables is investigated. We considered the dual problem, which is connected with maximization of the smooth concave function of one variable, and studied its properties. Algorithms for solving the dual problem on the basis of the dichotomy and its acceleration, which uses a record value of concave function, were developed. The results of computational experiments comparing normal and accelerated dual methods are given.

**Ключевые слова:** задача квадратичного программирования, сепарабельная квадратичная функция, двусторонние ограничения на переменные, частичная функция Лагранжа, двойственная задача, метод дихотомии, сдвиг по рекорду вогнутой функции, вычислительный эксперимент.

**Введение.** При построении декомпозиционных алгоритмов для решения задач минимизации сепарабельной квадратичной функции при ограничениях производственно-транспортного вида [1] требуется в качестве подзадачи многократно решать следующую задачу квадратичного программирования:

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d_i x_i^2 + c x_i \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $d_i > 0$ ,  $u_i \geq l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $b$  такое, что  $\sum_{i=1}^n l_i \leq b \leq \sum_{i=1}^n u_i$ . Её характеризует одно ограничение – равенство и двусторонние ограничения на переменные.

В работе [2] рассмотрен частный случай задачи (1)–(2) в виде

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{Q} x_i^2 + s x_i \quad (3)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = Q, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где  $\varepsilon > 0$  и  $Q > 0$ . Для него получен следующий результат.

**Утверждение 1 [2].** Положительные компоненты решения задачи (3)–(4) вычисляются по формулам  $x_i^* = \frac{Q}{2\varepsilon} (\alpha^* - s_i)$ ,  $i : s_i < \alpha^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где

$\alpha^*$  – единственный корень непрерывной, кусочно-линейной, неубывающей функции  $\varphi(\alpha) = \frac{Q}{2\varepsilon} \left[ \sum_{s_i < \alpha} (\alpha - s_i) \right]$ .

Задачи, подобные (3)–(4), возникают, когда применяется  $\varepsilon$ -квадратичное сглаживание при решении задач линейного программирования путем декомпозиции по ограничениям [1, с. 132–136]. Задачу (3)–(4) требуется многократно решать для задач производственно-транспортного планирования, если нет ограничений сверху на переменные. Алгоритм на основе утверждения 1 использует метод дихотомии для нахождения нуля функ

ції  $\varphi(\lambda)$  і способен обеспечить нахождение решения  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  с требуемой точностью.

Нижє для решения задачи (1)–(2) построим двойственный алгоритм, который требует максимизации гладкой вогнутой функции от одной переменной. В отличие от алгоритма на основе утверждения 1 двойственный алгоритм можно ускорить, используя свойство вогнутости одномерной функции и рекордное значение функции. Насколько удастся для двойственного алгоритма ускорить метод дихотомии, обсудим ниже.

**Двойственная задача и ее свойства.** Двойственный алгоритм будет базироваться на свойстве прямой задачи (1)–(2), которое означает, что, решая двойственную к прямой задачу, мы одновременно находим и оптимальные значения переменных в прямой задаче. Это свойство отражает следующая лемма.

**Лемма 1.** *Задача (1)–(2) имеет единственное решение  $x^*$ , компоненты которого вычисляются по формуле*

$$x_i^* = \min \max \left( l_i, -\frac{c_i + \lambda^*}{d_i}, u_i \right), \quad i=1, \dots, n, \quad (5)$$

где  $\lambda^*$  – точка максимума вогнутой гладкой функции

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n dx_i^2(\lambda) + \sum_{i=1}^n cx_i(\lambda) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i(\lambda) - b \right), \quad (6)$$

где  $x_i(\lambda) = \min \max \left( l_i, -\frac{c_i + \lambda}{d_i}, u_i \right), \quad i=1, \dots, n$ . Производная и значение

функции  $\psi(\lambda)$  в точке  $\bar{\lambda}$  вычисляются по формулам

$$\nabla \psi(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^n x_i(\bar{\lambda}) - b; \quad \psi(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n dx_i^2(\bar{\lambda}) + \sum_{i=1}^n cx_i(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda} \psi(\bar{\lambda}). \quad (7)$$

**Доказательство.** Если  $\lambda$  – множитель Лагранжа, который соответствует ограничению равенству в (2), то частичная функция Лагранжа для задачи (1)–(2) имеет следующий вид:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n cx_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - b \right).$$

Поэтому двойственная задача связана с максимизацией вогнутой функции

$$\psi(\lambda) = \min_{l_i \leq x_i \leq u_i, i=1, \dots, n} L(x, \lambda) = \min_{l_i \leq x_i \leq u_i, i=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n cx_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - b \right) \right\},$$

которая зависит от одной переменной  $\lambda$ . Вогнутость функции  $\psi(\lambda)$  следует из взятия операции минимума по переменным  $x = (x_1, \dots, x_n)$  от функции  $L(x, \lambda)$ , которая линейно зависит от переменной  $\lambda$ .

Учитывая, что функция Лагранжа может быть записана в виде

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_i}{2} x_i^2 + (c_i + \lambda)x_i - \lambda b_i \right),$$

функцию  $\psi(\lambda)$  можно записать в таком виде:

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \min_{l_i \leq x_i \leq u_i} \left( \frac{d_i}{2} x_i^2 + (c_i + \lambda)x_i - \lambda b_i \right).$$

Отсюда легко видеть, что функция  $\psi(\lambda)$  содержит задачу минимизации по  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ , которая является суммой минимумов одномерных

строго выпуклых по  $x_i$  квадратичных функций  $\psi_i(x_i) = \frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda)x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Эта задача имеет единственное решение  $x(\lambda) = \{x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda)\}$ , компоненты которого равны

$$x_i(\lambda) = \min \left( \max \left( l_i, -\frac{c_i + \lambda}{d_i} \right), u_i \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Действительно, квадратичная функция  $\psi_i(x_i) = \frac{1}{2} d_i x_i^2 + (c_i + \lambda)x_i$  при  $d_i > 0$  является строго выпуклой по переменной  $x_i$  и имеет единственную точку минимума  $x_i^*(\lambda) = -\frac{c_i + \lambda}{d_i}$ . Поэтому единственной будет и точка минимума функции  $\psi_i(x)$  на интервале  $l_i \leq x_i \leq u_i$ . Эта точка будет совпадать с нижней границей  $l_i$ , если  $x_i^*(\lambda) \leq l_i$ , и с верхней границей  $u_i$ , если  $x_i^*(\lambda) \geq u_i$ .

Учитывая, что  $x(\bar{\lambda}) = (x_1(\bar{\lambda}), \dots, x_n(\bar{\lambda}))$  определяется единственным образом, в точке  $\bar{\lambda}$  функция  $\psi(\lambda)$  непрерывно дифференцируемая. При этом производная функции  $\psi(\lambda)$  в точке  $\bar{\lambda}$  определяется по формуле

$$\nabla \psi(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^n x_i(\bar{\lambda}) - b_i \quad (\text{см. теорему 1.18 [3]}).$$

Это доказывает как тот факт, что двойственная задача связана с нахождением точки минимума вогнутой

гладкой функции  $\psi(\lambda)$ , которая определена формулой (6), так и формулу (7), где значение функции  $\psi(\lambda)^{-}$  определено через вычисленную ранее производную  $\nabla\psi(\lambda)^{-}$ .

И последнее, справедливость формулы (5) следует из того, что из теории двойственности имеем  $\psi^* = \psi(\lambda^*) = f(x^*) = f^*$ . Здесь не возникает проблем, связанных с отсутствием конечнозначного максимума  $\psi^{**} = \psi(\lambda)$ , так как задача (1)–(2) имеет решение в силу того, что при

условии  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \xi_{ij} \leq \xi$  и ограничения (2) являются совместными. Точка

$\lambda^*$  будет единственной тогда, когда оптимальное решение задачи (1)–(2) содержит хотя бы одну компоненту  $x_i^*$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , которая не является граничной точкой интервала  $[l_i, u]$ . Если решение в задаче (1)–(2) достигается в вершинах гиперкуба  $[l_i, u]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то функция  $\psi(\lambda)$  может иметь много точек максимума. Но всем этим точкам в силу формулы (5) будет соответствовать одна и та же вершина гиперпараллелепипеда  $[l_i, u]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Доказательство леммы завершено.

Лемма 1 дает возможность строить двойственные алгоритмы решения задачи (1)–(2), и конкретный алгоритм будет определяться выбранным методом для максимизации одномерной функции  $\psi(\lambda)$ .

**О двойственном алгоритме для задачи (3)–(4).** Для задачи (3)–(4), которая является частным случаем задачи (1)–(2), лемму 1 можно упростить. Двойственные алгоритмы для решения задачи (3)–(4) будет определять следующая лемма.

**Лемма 2.** *Задача (3)–(4) имеет единственное решение  $x^*$ , компоненты которого вычисляются по формуле*

$$x_{ii}^{**} = \max\left(0, \right) - \frac{Q}{2\varepsilon} (s + \lambda), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где  $\lambda^*$  – единственная точка максимума вогнутой гладкой функции

$$\psi(\lambda) = \frac{\varepsilon}{Q} \sum_{i=1}^n x_i^2(\lambda) + \sum_{i=1}^n s x_i(\lambda) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i(\lambda) - Q \right), \quad (9)$$

где  $x_{ii}(\lambda) = \max\left(0, \right) - \frac{Q}{2\varepsilon} (s + \lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Производная и значение функции  $\psi(\lambda)$  в точке  $\bar{\lambda}$  вычисляются по формулам

$$\nabla \psi(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^n x_i(\bar{\lambda}) - Q; \quad \psi(\bar{\lambda}) = \frac{\varepsilon}{Q} \sum_{i=1}^n x_i^2(\bar{\lambda}) + \sum_{i=1}^n s_{\lambda_i}(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda} \psi_{\lambda_1}(\bar{\lambda}). \quad (10)$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 с тем отличием, что ряд формул упрощается из-за отсутствия в задаче (3)–(4) верхних границ на переменные  $x_i, i=1, \dots, n$ . Кроме того, поскольку задача (3)–(4) всегда имеет решение, то не требуется никаких дополнительных предположений для того, чтобы у функции  $\psi(\lambda)$  существовал конечнозначный максимум  $\psi_{11}^{**} = \psi(\lambda^*)$ , который достигается в единственной точке  $\lambda^*$ .

Лемма 2 дает альтернативный способ решения задачи (3)–(4) по отношению к тому, который получается при использовании утверждения 1. Так, если утверждение 1 требует процедуры нахождения нуля кусочно-линейной, неубывающей одномерной функции  $\phi(x)$ , то лемма 2 требует нахождения максимума вогнутой гладкой одномерной функции  $\psi(\lambda)$ . Примеры графиков обеих функций даны на рис. 1 и 2.

Они соответствуют такой задаче квадратичного программирования:

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \int_0^1 f(x) = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{10} \beta_i x_i \quad (3a)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10, \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, 10. \quad (4a)$$

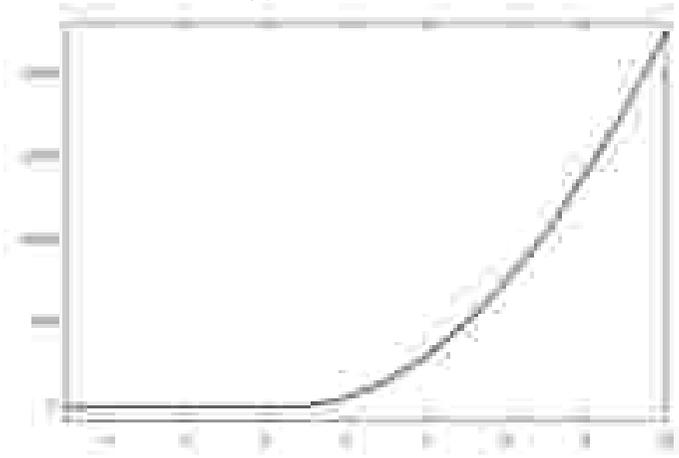


Рис. 1. График функции  $\phi(x)$  для задачи (3a)–(4a) при  $\alpha \in [5, 10]$

В задаче (3а)-(4а) всего десять переменных,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $Q = 10$ , а при линейных членах коэффициенты выбраны такими:  $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_{10} = 10$ .

Из рис. 1 видим, что кусочно -линейная, неубывающая функция  $\varphi(x)$  очень напоминает гладкую экспоненту. Это означает, что функция  $\varphi(x)$  содержит очень большое количество линейных кусков.

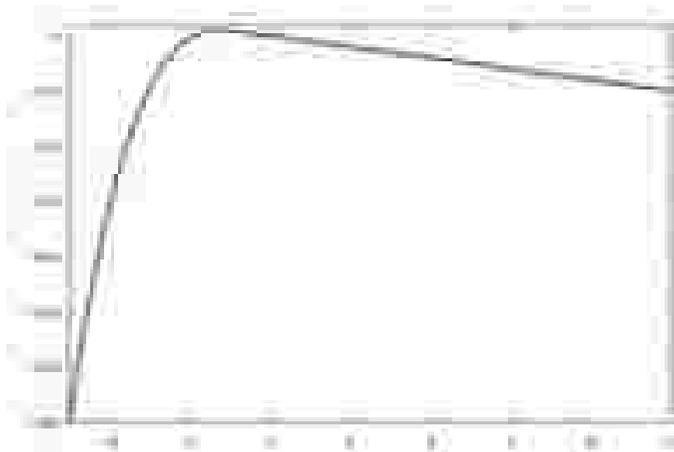


Рис. 2. График функции  $\psi(\lambda)$  для задачи (3а)-(4а) при  $\lambda \in [5, 10]$

Из рис. 2 легко видеть, что до точки максимума скорость роста функции намного больше, чем скорость уменьшения функции после точки максимума.

**Двойственные алгоритмы (на основе метода дихотомии).** Если для максимизации функции  $\psi(\lambda)$  выбрать метод дихотомии, то для решения задачи (1)-(2) можно построить два двойственных алгоритма. Первый алгоритм будет гарантировать локализацию точки максимума в интервале, который с каждой последующей итерацией уменьшается в два раза. Для него необязательным является вычисление значения функции, а достаточно только вычисления производной. Второй алгоритм будет уточнять локализацию за счет «сдвига по вогнутости» максимизируемой функции, который использует рекурное значение функции  $\psi(\lambda)$ . Сдвиг по вогнутости следует из неравенства  $\psi(\lambda) \leq \psi(\bar{\lambda}) + \nabla \psi(\bar{\lambda}) * (\lambda - \bar{\lambda})$ , которое выполняется при любых  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  [4]. Для второго алгоритма требуется вычислять значения функции и производной в точке.

Двойственный алгоритм на основе метода дихотомии требует только вычисления производной  $g = \nabla \psi(\lambda)$ . Он имеет следующий вид.

**Инициализация.** На итерации  $k=0$  имеем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  такие, что точка максимума  $\lambda^*$  лежит внутри интервала  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , и точность  $\varepsilon$ , с которой будем находить приближение к  $\lambda^*$ . Перейдем к очередной итерации со значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

**Итерационный процесс.** Пусть на  $k$ -й итерации найдены  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для перехода к  $(k+1)$ -й итерации выполняем такие действия.

1. Вычислим  $\lambda_k = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
2. Если  $|\lambda_2 - \lambda_1| < \varepsilon$ , то ОСТАНОВ ( $\lambda = \lambda_k$  и  $itm = k$ ).
3. Вычислим производную  $g_{kk} = \nabla \psi(\lambda_k)$ . Если  $g_{kk} > 0$ , то полагаем  $\lambda_1 = \lambda_k$ , иначе полагаем  $\lambda_2 = \lambda_k$ .
4. Переходим к  $(k+1)$ -й итерации с новыми  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Ускоренный двойственный алгоритм требует вычисления как производной  $g = \nabla \psi(\lambda)$ , так и значения функции  $\psi(\lambda)$ . Он имеет такой вид.

**Инициализация.** На итерации  $k=0$  имеем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  такие, что  $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , и точность  $\varepsilon$ , с которой требуется найти приближение к  $\lambda^*$ . Вычислим  $g_{11} = \nabla \psi(\lambda_1)$ ,  $\psi_{11} = \psi(\lambda_1)$ , и  $g_{22} = \nabla \psi(\lambda_2)$ ,  $\psi_{22} = \psi(\lambda_2)$ . Установим рекордное значение функции  $\psi_r = \max\{\psi_{11}, \psi_{22}\}$ . Вычислим уточненные границы интервала:  $\lambda_{11} = \lambda_1 + \frac{\psi_r - \psi_{22}}{g_{11}}$  и  $\lambda_{22} = \lambda_2 - \frac{\psi_r - \psi_{11}}{g_{22}}$ . Перейдем к очередной итерации со значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

**Итерационный процесс.** Пусть на  $k$ -й итерации найдены  $\lambda_{1k}$ ,  $g_{1k}$  и  $\lambda_{2k}$ ,  $g_{2k}$ . Для перехода к  $(k+1)$ -й итерации выполним такие действия.

1. Вычислим  $\lambda_k = \frac{1}{2}(\lambda_{1k} + \lambda_{2k})$ .
2. Если  $|\lambda_{2k} - \lambda_{1k}| < \varepsilon$ , то ОСТАНОВ ( $\lambda = \lambda_k$  и  $itm = k$ ).
3. Вычислим  $g_{kk} = \nabla \psi(\lambda_k)$ ,  $\psi_{kk} = \psi(\lambda_k)$ . Если  $g_{kk} > 0$ , то полагаем  $\lambda_1 = \lambda_{1k}$ ,  $g_{1k} = g_{kk}$ , иначе полагаем  $\lambda_2 = \lambda_{2k}$ ,  $g_{2k} = g_{kk}$ .
4. Вычислим новый рекорд  $\psi_r = \max\{\psi_{kk}, \psi_r\}$  и уточним границы  $\lambda_{1k} = \lambda_{1k} + \frac{\psi_r - \psi_{kk}}{g_{1k}}$  и  $\lambda_{2k} = \lambda_{2k} - \frac{\psi_r - \psi_{kk}}{g_{2k}}$ .
5. Переходим к  $(k+1)$ -й итерации с новыми  $\lambda_{1k}$ ,  $g_{1k}$  и  $\lambda_{2k}$ ,  $g_{2k}$ .

Для сравнения обоих двойственных алгоритмов была разработана программа на МАТЛАБ -подобном некоммерческом языке GNU Octave. В программе использовался параметр -индикатор **shift**, который определяет, будет или не будет использоваться ускорение за счет сдвига по вогнутости максимизируемой функции. Если **shift=0**, то программа реализует первый алгоритм (метод дихотомии). Если **shift=1**, то программа реализует ускоренный вариант метода дихотомии. В силу такой реализации программы время, затраченное методом дихотомии, можно считать завышенным в два-три раза, так как в него входит и необязательное вычисление значения функции, а не только ее производной.

Вычисления проводились на компьютере Pentium 2.5GHz в системе WindowsXP/32 с использованием GNU Octave версии 3.0.0. Тестовые задачи генерировались с помощью **rand("seed", 2015)** – октавовского датчика случайных чисел с равномерным распределением на (0,1). В таблице приведены результаты вычислений для восьми задач (1)-(2) с количеством переменных от  $n = 100$  до  $n = 500000$ . Для всех задач оптимальные значения  $\lambda$  находились с одной и той же точностью –  $\varepsilon = 10^{-9}$ .

№	$n$	Двойственный алгоритм (дихотомия)			Ускоренный двойственный алгоритм		
		$itn$	$time$	$\nabla\psi(\lambda)_{in}$	$itn$	$time$	$\nabla\psi(\lambda)_{in}$
1	100	40	0.0245	-6.5E-09	21	0.0057	-3.9E-08
2	500	40	0.0104	-1.0E-06	21	0.0062	1.1E-07
3	1000	40	0.0117	7.9E-10	20	0.0066	-3.9E-08
4	5000	40	0.0228	-8.1E-08	23	0.0141	8.0E-07
5	10000	40	0.0363	5.8E-08	21	0.0203	-3.8E-06
6	50000	40	0.1618	3.9E-08	22	0.0962	-2.5E-06
7	100000	40	0.4888	6.4E-08	21	0.2646	6.2E-06
8	500000	40	2.4039	-1.1E-06	21	1.3058	1.1E-06

Вычислительный эксперимент свидетельствует о том, что время решения задачи (1)-(2) двойственными алгоритмами незначительно зависит от количества переменных. Здесь время решения задач приведено в секундах. Количество итераций для ускоренного двойственного метода почти в два раза меньше, чем для двойственного метода с дихотомией. При этом окончание работы ускоренного метода происходит в точках с большей по норме производной и связано это с тем, что для учета сдвига по выпуклости приходится делить на малые величины, так как производная стремится к нулю по мере приближения точки к точке  $\lambda^*$ .

**Заключення.** В даній роботі досліджена можливість побудови ефективних двойственных алгоритмов для рішення задачі мінімізації строго выпуклої сепарабельної квадратичної функції при одному обмеженні, рівності і двусторонніх обмеженнях на змінні. В їх основі лежить задача максимізації гладкої вогнутої функції від однієї змінної, яка відповідає двойственной задачі. Показано, що використання методу дихотомії дозволяє будувати ефективні по часу програмні реалізації двойственных алгоритмов для сучасних персональних комп'ютерів. Це означає, що розроблені алгоритми можна використовувати для рішення підзадач в схемах декомпозиції по обмеженням в структурованих задачах лінійного і квадратичного програмування.

Двойственные алгоритми планується застосовувати при вирішенні задач планування оптимальної завантаженості енергоблоків теплових електростанцій (ТЕС)[5]. В систему обмежень цих задач входять такі обмеження:

$$\sum_{i=1}^n x_{it} = E_t, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \quad (11)$$

$$p_i^{low} \leq x_{it} \leq p_i^{up}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (12)$$

де  $p_i^{low}$  і  $p_i^{up}$  – нижня і верхня межі на допустимі навантаження енергоблоку  $i \in \{1, \dots, N\}$ ;  $E_t$  – електрична навантаження енергосистеми на плановий період  $t \in \{1, \dots, T\}$ ;  $x_{it}$  – невідома електрична навантаження  $i$ -го енергоблоку в інтервалі  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Легко побачити, що обмеження (11),(12) при фіксованому інтервалі збігаються з обмеженнями задачі (1)-(2).

#### Бібліографічні посилання

1. **Михалевич, В.С.** Оптимізаційні задачі виробничого планування [Текст] / В.С. Михалевич, В.А. Трубин, Н.З. Шор. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
2. **Гершович, В.И.** Квадратичне згладжування в декомпозиційному підході до рішення задач лінійного програмування виробничого типу [Текст] / В.И. Гершович, А.П. Лиховид, А.М. Приятель // Методи дослідження екстремальних задач. – К.: 1988. – С. 55–61.
3. **Шор, Н.З.** Квадратичні екстремальні задачі і недиференційована оптимізація [Текст] / Н.З. Шор, С.И. Стеценко. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. **Поляк, Б.Т.** Мінімізація негладких функціоналов [Текст] // Журн. вичисл. математики і мат. фізики. – 1969. – Т9, № 3. – С. 507–521.
5. **Стецюк, П.І.** Математичні моделі та програмне забезпечення в задачах енергетики [Текст] / П.І. Стецюк, М.Г. Журбенко, О.П. Лиховид. – К.: ІІП «Ательє «Поліграфічний комплекс», 2012. – 64 с.

Надійшла до редколегії 03.06.2015

УДК 519.6:618.3

С.А.<sup>7</sup> Ус, М.С. Павлов

ДВНЗ «Національний гірничий університет», м. Дніпропетровськ

## ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС OBSL ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ БАЗОВИХ СТАНЦІЙ

Представлено програмний комплекс для розв'язування задачі оптимального розміщення базових станцій на даній території. Запропонований комплекс ґрунтується на алгоритмі оптимального розбиття множин і дозволяє враховувати рельєф місцевості, густоту будівель та попит на послуги мобільного зв'язку. Розглянуто особливості програмної реалізації даного алгоритму.

Представлен програмний комплекс для решения задачи оптимального размещения базовых станций мобильной связи на заданной территории. Основой предложенного комплекса является алгоритм оптимального разбиения множеств. Разработанный комплекс позволяет учитывать рельеф местности, плотность застройки и спрос на услуги мобильной связи. Рассмотрены особенности программной реализации данного алгоритма.

A program system for solving the problem of optimal base stations placement of mobile network on a given territory are proposed. The proposed algorithm is based on the optimal set partition method. The developed system allows to take into account the terrain, building density and the demand for mobile services. The features of software implementation of the algorithm were considered.

**Ключові слова:** стільниковий зв'язок, проектування мережі бездротового зв'язку, оптимальне кульове покриття.

**Вступ.** Наразі стільниковий зв'язок – популярне та поширене явище нашого життя, тому задачі підвищення ефективності мереж стільникового зв'язку та їх оптимального проектування залишаються важливими. Чисельні публікації присвячено розробці нових методів і алгоритмів розв'язування таких задач [2 – 6]. Основою застосованих методів є математичні моделі дискретної оптимізації, зокрема дискретні задачі розміщення, які розв'язують із використанням Лагранжевих евристик та генетичних алгоритмів різного типу [4 – 6]. Особливість запропонованої у даній роботі програмної реалізації полягає у застосуванні математичних моделей змішаного типу, які дозволяють враховувати неперервний розподіл клієнтів. Алгоритми розв'язування таких задач мають високу обчислювальну складність, тому ефективна програмна реалізація таких алгоритмів також являє собою актуальне завдання.

**Постановка задачі.** У роботах [11; 12] запропоновано математичні моделі змішаного (дискретно-неперервного) типу та алгоритми, засновані на методі оптимального розбиття множин, для розв'язування задачі оптимального розміщення базових станцій (БС) стільникового зв'язку на даній території. Сформулюємо деякі з них.

Задача 1. Нехай множина  $J = \{1, \dots, m\}$  задає перелік можливих пунктів розміщення БС. У кожному з пунктів  $j \in J$  можна встановити БС і величина  $b_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) задає її потужність – максимальну кількість абонентів, яких вона водночас може обслуговувати. Маємо множину користувачів мобільного зв'язку, нерівномірно розподілених в області  $\Omega$ , а також дані про попит на послуги у кожній точці  $x$  області  $\Omega$ . Задача полягає у визначенні підмножини  $S \subseteq J, S \neq \emptyset$  із  $N$  БС, які встановлюють, й розбитті множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  кожною зі станцій таким чином, щоб задовольнити попит усіх споживачів і обмеження за потужністю та забезпечити мінімальне згасання радіосигналу.

Нехай

$$s_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } j\text{му пункті встановлюють БС,} \\ 0 & \text{– в інших випадках.} \end{cases} \quad (1)$$

Тоді задача може бути записана у такому вигляді:

$$\max_{x \in \Omega} \min_{\tau \in S} PL(x, \tau) \rightarrow \min_{S \subseteq J} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m s_j N_j = N, \quad (3)$$

$$\bigcap_{j=1}^N \Omega_j = \Omega, \quad (4)$$

$$mes(\Omega_{ij} \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq b_j, j = \overline{1, N}. \quad (6)$$

де  $PL$  – згасання радіосигналу БС (втрати) у дБ у точці  $x$ , обчислене за моделлю Окамура-Хаті,

$$PL(x, \tau) = 69,55 + 26,16 \lg f - 13,82 \lg h_1^j - a h_2^x + \\ + (44,9 - 6,55 \lg h_1^j) \lg d(x, \tau) \in S, \quad (7)$$

де 
$$d(x, \tau) = \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}, \quad (8)$$

$$a_k^{xx} = (1,11g f_{mh} - 0,7)h - (1,561g f_{mh} - 0,8), \quad (9)$$

$$SB = 30 - 251g \cdot l, \text{ де } 0 < B_l \leq 51\%.$$

Ця задача є аналог неперервної задачі про оптимальне покриття. Для її розв’язування застосовують алгоритм, який ґрунтується на алгоритмі оптимального розбиття множин з [7].

Задача 2.

Нехай множина  $J = \{1, \dots, m\}$  задає перелік можливих пунктів розміщення БС для забезпечення покриття стільникової мережі. У кожному з пунктів  $j \in J$  можна встановити базову станцію и величина  $b_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) задає її потужність – максимальну кількість абонентів, яких вона водночас може обслуговувати. Маємо множину користувачів мобільного зв’язку, нерівномірно розподілених в області  $\Omega$ , а також дані про попит на послуги у кожній точці  $x$  області  $\Omega$ . Задача полягає у визначенні кількості  $N$  БС, які встановлюють, й розбитті множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  кожною зі станцій таким чином, щоб задовольнити попит усіх споживачів і обмеження за потужністю та забезпечити заданий рівень радіосигналу в кожній точці множини  $\Omega$ .

Математична модель цієї задачі з урахуванням введених вище позначень має такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^m s_j \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\max_{x \in \Omega} \min_{\tau \in S} PL(x, \tau) \geq P, \quad (11)$$

$$\bigcap_{j=1}^m \Omega_j = \Omega, \quad (12)$$

$$mes(\Omega_{ij} \cap \Omega) = 0, i \neq j, \quad (13)$$

$$\int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq b_j, j = \overline{1, m}. \quad (11)$$

де  $PL$  – згасання радіосигналу БС (втрати) у дБ у точці  $x$ .

Мета даної роботи полягає у створенні програмного комплексу для реалізації запропонованих в роботах [11 ; 12] алгоритмів, який забезпечує зручне користування і можливість вводу вихідних даних, включаючи кар-

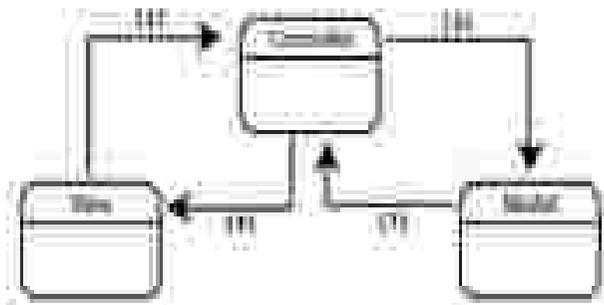
ту місцевості й інформацію про необхідні припущення для розрахунку, наприклад густоту забудови території та вимог щодо якості зв'язку.

**Метод розв'язання.** В даному програмному комплексі для розв'язування задачі розміщення застосовано алгоритми, сформульовані у роботі [12]. Вони є результатом комбінування методів дискретної та неперервної оптимізації, зокрема основа для розв'язування задачі оптимального покриття – метод оптимального розбиття множин [7]. Дослідження його застосування до таких задач проведено у статтях [7 – 10]. Критерієм оптимальності є рівень втрат корисного сигналу під час передачі, обчислюваний за моделлю Окамура –Хаті (як в наведених вище моделях), що дає можливість враховувати рельєф місцевості. Обчислення проводили за формулами, запропонованими у [1–2] відповідно до математичних моделей [11, 12]. Крім того, можливе також застосування інших критеріїв.

**Особливості програмної реалізації.** Структурно програму можна поділити на три основні модулі, мовою Java – це пакети. Перший, «Model» (Модель), містить компоненти, які виконують усі основні функції для розв'язування поставленої задачі, а саме реалізують алгоритми оптимального розбиття множин, оптимального розміщення БС стільникового зв'язку, алгоритм локальних околиць та інші підмодулі. Другий модуль – «View» (вид), який містить лише графічний інтерфейс, необхідний для зручного користування програмою. Третій модуль – «Controller» (Контролер). Якщо перші два модулі можна вважати пасивними, то Controller – це активний модуль. Він забезпечує взаємодію інтерфейсу та моделі: необхідні вхідні дані, які користувач увів в інтерфейсі, зчитуються, обробляються та передаються у модель для проведення розрахунків; після цього отримані дані передаються в інтерфейс для того, щоб користувач міг їх побачити. Такий підхід в програмуванні називають MVC (Model-View-Controller). Його застосовують для відділення логіки програми від її графічного інтерфейсу. Таким чином, можна змінювати кожний компонент незалежно від іншого і це робить програму дуже гнучкою. Схематично взаємодію модулів показано на рис. 1.

У табл. 1 подано компонентний склад модулів. Опишемо їх докладніше.

Спочатку опишемо модуль, який реалізує алгоритм оптимального розбиття множин. Він являє собою ядро усього пакета Model. Визначимо базові компоненти, якими оперує цей модуль. Найпростіший, але дуже важливий – клас Point (точка). У ньому є три поля  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і деякі методи. Наприклад, метод «equals()» застосовують для порівняння двох точок. Метод перевизначає стандартний метод equals() класу Object. Цей клас дотримується патерну «Незмінний об'єкт», що дуже зручно в багатопотоковому середовищі. Це означає, що об'єкт неможливо змінити після його створення.



**Рис. 1. Схема взаємодії модулів:**

*1 - дії користувача; 2. розрахунки на основі даних користувача; 3 - результати розрахунків; 4 - повідомлення користувача про результати обчислень*

*Таблиця 1*

**Компоненти модулів**

Пакет	Компоненти
Model	OptimalPartition OptimalPlacement Metric EuclideanMetric ManhattanMetric MinkowskiMetric Point Subset ColorGenerator Surface Bitmap
View	MainWindow MapEditor ControlPanel DrawPanel ScalePanel StatusBar TowerCreationPanel
Controller	MainController

Наступний компонент – інтерфейс Metric (метрика). У ньому лише один метод, який має бути математичним виразом. Він схожий на шаблон, за яким можна реалізовувати конкретні класи метрики. Наприклад, клас EuclidianMetric, що являє собою евклідову метрику.

Останній компонент – клас Subset (підмножина). Масив підмножин є результатом роботи даного алгоритму. Клас Subset містить: центр (Point), масив точок (Point), цієї підмножини, інформацію стосовно цієї підмножини (найбільша та найменша відстань, кількість точок).

Вхідними даними алгоритму є множина точок та центри. І множина, і центри – масиви об'єктів Point. Суть алгоритму полягає у визначенні для кожної точки множини до якого центру відстань буде меншою. Якщо в один момент часу з'ясувати це питання тільки для однієї точки, то такий підхід ефективний лише для вхідної множини невеликого розміру. Це означає, що за розміру множини в декілька мільйонів точок час розрахунку буде дуже великим. Крім того, він суттєво залежить від складності функції метрики. Тому для підвищення ефективності вирішено організувати пул потоків.

Потік – це послідовність команд мови програмування. Якщо потоків декілька, команди в потоках виконуються паралельно. Пул потоків – це фіксована множина потоків, до яких передаються команди для паралельного виконання. У випадку нашої програми це означає, що питання щодо належності точки до підмножини буде вирішуватися водночас для декількох точок. Головний цикл буде ділити вхідну множину на порції точок та передавати кожну порцію в окремий потік. Таким чином, маємо два параметри, які впливають на швидкість розрахунків – кількість потоків та розмір буфера. Найбільш вдала комбінація цих параметрів залежить від конкретної архітектури ПК, де буде застосовано програму. Залежність часу виконання програми від кількості потоків подано у табл. 2. Результати показано для таких вхідних даних: кількість точок у множині – 4000000; кількість центрів – 5; розмір буфера – 16384 точок. Рис. 2 відтворює графічну інтерпретацію цієї залежності.

Інші алгоритми реалізовані без суттєвих змін і мають лінійну структуру. Для побудови 3D моделі у програмі була використана бібліотека SurfacePlotter - <https://code.google.com/p/surfaceplotter/>

Зауважимо, що додаткові можливості розробленого програмного комплексу забезпечують зручне та комфортне користування ним:

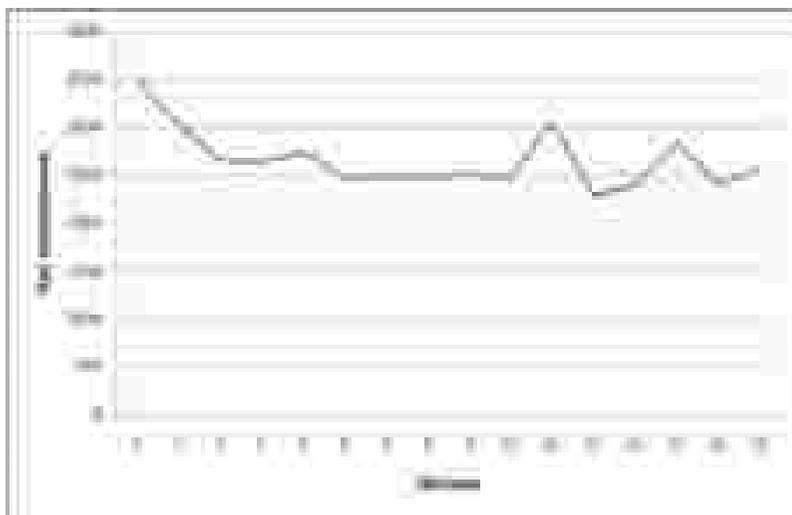
- створення карти висот за допомогою вбудованого графічного редактора;
- створення карти висот за допомогою стандартних функцій;
- зчитування карти висот із зображення форматів: jpg, png, gif, bmp;

- побудова 3D моделі карти висот;
- збереження карти покриття у вигляді зображення або текстового файлу.

Таблиця 2

**Залежність часу виконання від кількості потоків**

Кількість потоків	Час виконання (мсек)	Кількість потоків	Час виконання (мсек)
1	3486	9	2512
2	3027	10	2478
3	2653	11	3056
4	2643	12	2294
5	2728	13	2388
6	2467	14	2830
7	2477	15	2392
8	2484	16	2562

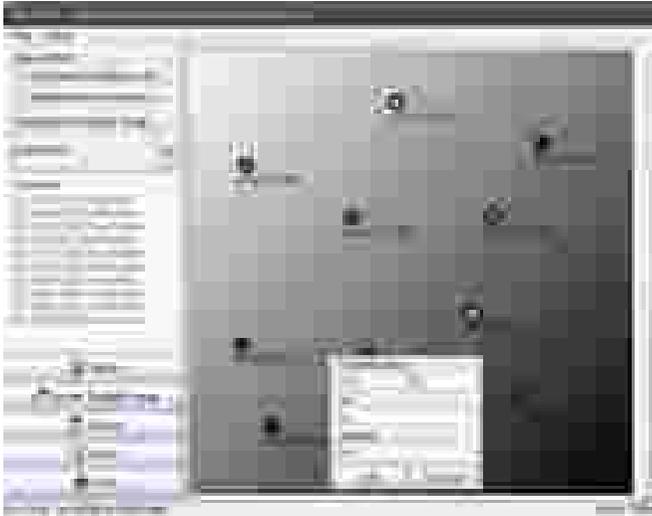


**Рис. 2. Графік залежності часу виконання (мсек) від кількості потоків**

**Інструкція користувачу**. Для початку роботи необхідно запустити виконавчий файл програми OBSL. Програма написана мовою програмування Java, тому для її роботи на комп'ютері має бути встановлений Java Development Kit 7 (JDK7), який можна знайти на сайті компанії Oracle –

[www.oracle.com](http://www.oracle.com), JDK7 випущений під [GNU General Public License](http://www.gnu.org/licenses/gpl.html), і доступ до нього безкоштовний.

Далі потрібно задати карту висот. За замовчуванням вона генерується за допомогою однієї із стандартних функцій: список можна побачити у меню «Standart height map» (див. рис. 3). Також це можна зробити у графічному редакторі (File/Map editor) або загрузити із файлу (File/Load map).



**Рис. 3. Карта висот і можливі точки розміщення станцій**

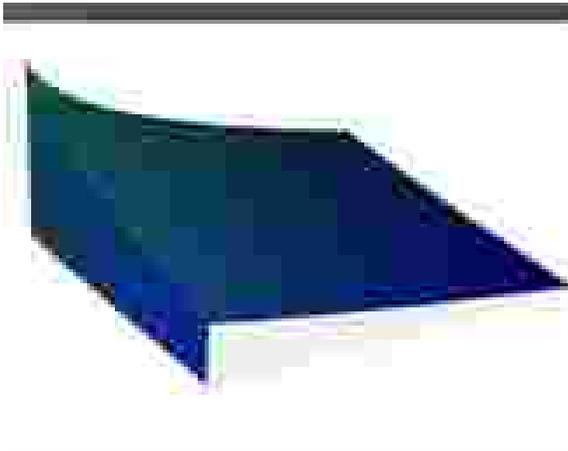
Після цього необхідно задати хоча б одне можливе місце для розміщення базової станції. Це можна зробити звичайним кліком, указавши у діалоговому вікні (рис. 3) необхідні параметри.

Для початку розрахунків варто скористатися меню File/Split або кнопкою «Split» на панелі у лівій частині. Результати розрахунків можна зберегти у графічний (File/Save image) або у текстовий (File/Save data) файл.

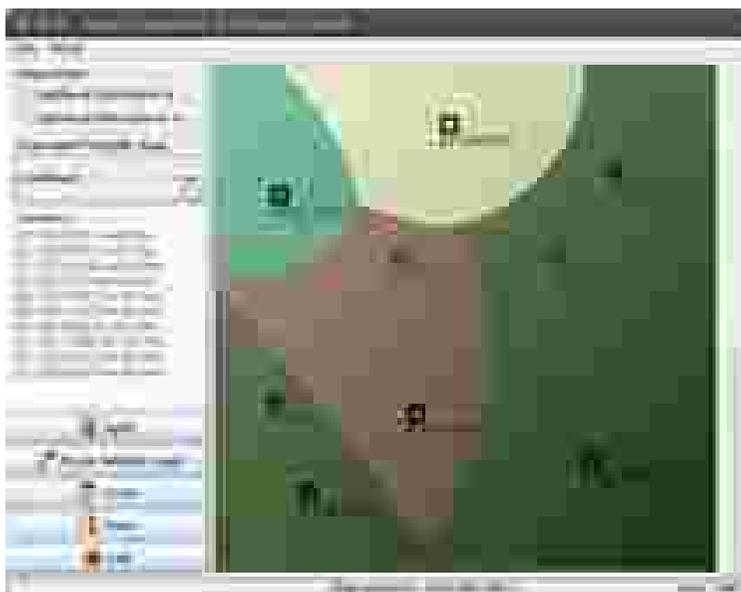
Зауважимо, що розмір вхідної множини (карти покриття) та кількість станцій обмежені лише технічними параметрами ПК, на якому буде виконуватися програма.

**Приклад роботи програми.** Розглянемо приклад роботи програми за таких вихідних даних: розмір карти – 500x500; кількість можливих точок розміщення станцій – 10. Вхідну карту висот у вигляді 3D моделі показано на рис. 4. Необхідно визначити кількість станцій мобільного зв'язку та координати їх розташування для забезпечення максимального рівня сигналу.

Результати роботи програми подано на рис. 5. Обрано 5 місць для розміщення БС (квадрати). Подальше збільшення кількості станцій (до кількості заданих місць) не зумовить зміну рівня сигналу. Максимально можливий рівень сигналу – 100,7 dBm.



**Рис. 4. 3D модель карти висот**



**Рис. 5. Карта покриття**

**Висновки.** Розроблено програмний комплекс, який реалізує змішану модель оптимального розміщення БС мобільного зв'язку. У програмному комплексі реалізовано алгоритми, особливістю яких є можливість врахування факторів, пов'язаних зі специфікою прикладних задач, а саме рельєфом місцевості, густотою забудови, густотою населення на території, яку обслуговують, обмеженнями на сумарну потужність БС, різноманітних критеріїв оптимального розбиття.

#### **Бібліографічні посилання**

1. **Махмудов, М.** Повышение потребительских качеств услуг телекоммуникаций на примере сотовой подвижной радиосвязи [Текст] / М. Махмудов // infoCOM.UZ. – 2005 – №5. – С. 27 – 30.
2. **Вишневский, В.М.** Теоретические основы проектирования компьютерных сетей [Текст] / В.М.Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – С. 512.
3. **Пиявский, С.А.** Об оптимизации сетей [Текст] / С.А. Пиявский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1968. – №1. – С. 68 – 80.
4. **Галенко, С.В.** Оптимальное расположение базовых станций при проектировании беспроводных сетей [Текст] / С.В. Галенко // Тр. XLV науч. Конф. МФТИ. 2002.
5. **Галенко, С.В.** Использование гибридных алгоритмов для решения задач оптимального расположения базовых станций при проектировании беспроводных сетей передачи данных [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.masters.donntu.edu.ua/2007/kita/bukiy/library/13.htm>.
6. **Береснев, А.В.** Алгоритм локализации абонентской нагрузки в пространстве и времени в сотовых системах подвижной радиосвязи стандарта GSM [Текст] / А.В. Береснев // Томский гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. Журн. радиоэлектроники. – 2002. – № 11.
7. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
8. **Киселева, Е.М.** Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Ч. 1. Теоретические основы [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С.Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. 2015. – Т. 51. – № 3. – С. 3 – 15.
9. **Киселева, Е. М.** Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А. А. Михалева // Системные технологии. – 2014. – Т. 93. – № 4. – С. 3 – 16.
10. **Киселева, Е.М.** Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Ч. 2. Алгоритмы построения диаграмм Вороного на основе теории оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51. – № 4. – С. 3 – 14.
11. **Ус, С. А.** Решение задачи оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи [Текст] / С. А. Ус, Е. А. Горячко // Питання приклад. математики і мат. моделювання: зб. наук. пр. – 2009. – С. 359 – 363.

12. Us, S. A. Application of the optimal set partitioning method to problem of wireless network engineering [Text] / S. A. Us // Energy Efficiency Improvement of Geotechnical Systems - International Forum on Energy Efficiency. – CRC Press/ Balkema - Taylor & Francis Group. – 2013. – PP. 175–181.

Надійшла до редколегії 15.05.2015

УДК 519.8

**А.Д. <sup>8</sup>Фирсов\***, **В.А. Громов\*\***

*\*Університет таможенного дела и финансов, г. Днепрпетровск*

*\*\*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

### **ВЛИЯНИЕ СГЛАЖИВАНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА**

Рассмотрено влияние сглаживания на хаотичность нелинейного временного ряда. В качестве модельной системы рассмотрен ряд Лоренца, а в качестве меры хаотичности – старший показатель Ляпунова, вычисленный с помощью метода аналога. Установлена немонотонность зависимости старшего показателя Ляпунова от величины сглаживания.

Розглянуто вплив згладжування на хаотичність нелінійного часового ряду. Як модельну систему розглянуто ряд Лоренца, а як міру хаотичності – старший показник Ляпунова, який було розраховано методом аналога. Установлено немонотонність залежності старшого показника Ляпунова від ступеня згладжування.

The present paper is concerned with a relationship between time series smoothness and its chaoticity. The Lorenz system was employed as a benchmark; the highest Lyapunov exponent (calculated with the employment of analogue method) provides an estimate for series chaoticity. It was ascertained that dependence of the HLE on smoothness parameter is non-monotonous.

**Ключевые слова:** хаотические временные ряды, старший показатель Ляпунова, сглаживание временного ряда.

**Введение.** В значительном числе случаев исследование нелинейных динамических систем сводится к анализу порождённых ими временных рядов. Это обусловлено отсутствием достаточных знаний о системе-генераторе. Фактически такая система рассматривается как «чёрный ящик», на выходе которого есть временной ряд с известной частотой дис-

кретизации. При этом информация о ряде, получаемая в результате его обработки методами нелинейной динамики (энтропия, показатель Ляпунова, размерность аттрактора), является достаточной для практического применения таких рядов, однако она мало даёт для понимания физической природы системы.

Одной из основных задач анализа временных рядов является прогнозирование их динамики. В [ 2; 3 ] в рамках парадигмы прогнозирования на основе кластеризации (predictive clustering) были получены результаты, позволяющие говорить о возможности сжатия информации о исследуемом временном ряде (информация представляется в виде дискретных структур) и о генерации временного ряда со свойствами, близкими к исходному ряду по сохранённой информации: в первой работе для сохранения информации использовался мультиграф, в качестве механизма сбора информации – алгоритм муравьиных колоний; во второй применялись соответственно центры кластеров, полученных кластеризацией отрезков временного ряда, и алгоритм Уишарта.

Для эффективного применения указанных алгоритмов (равно как и других алгоритмов парадигмы прогнозирования на основе кластеризации) важное значение имеет частота дискретизации [ 1 ]: слишком высокая приводит к избыточности и трудностям в обработке, низкая – к изменению исходной зависимости.

В настоящей работе исследуется вопрос о сохранности фундаментальных характеристик ряда и его поведения при сжатии и деформации. Вопрос влияния на характеристики ряда частоты дискретизации изучен теоретически и численно [ Там же ]. Влияние сжатия требует дальнейшего изучения. Далее в рамках подходов, предложенных в [ 2; 3 ], исследуется влияние усреднения на характеристики ряда.

**Методология исследования.** С целью анализа влияния сжатия на характеристики хаотического ряда была предложена следующая схема вычислительного эксперимента. В качестве параметра ряда, характеризующего его хаотичность, выбран старший показатель Ляпунова как индикатор, позволяющий оценить энтропию динамической системы и горизонт прогнозирования. Расчёт старшего показателя Ляпунова осуществлялся с помощью метода аналога, который основан на измерении скорости расхождения близких траекторий, фактически при помощи алгоритмического расчета зависимости:

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{t_n - t_0} \left( \ln \frac{\|u_1(t_1)\|}{\|u_1(t_0)\|} + \ln \frac{\|u_2(t_2)\|}{\|u_2(t_1)\|} + \dots + \ln \frac{\|u_n(t_n)\|}{\|u_n(t_{n-1})\|} \right),$$

где  $t_n, t_0$  – соответственно конечный и начальный моменты времени;  $u_i(t)$  – разность между соседними траекториями системы [4]. Для сглаживания

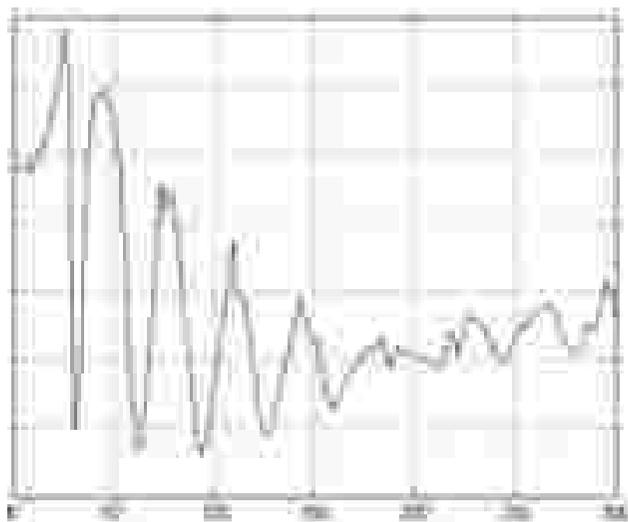
была выбрана стандартная процедура вычисления скользящего среднего (МА) с заданным окном, а в качестве модельной системы – система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma \cdot (y - x) \\ \dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot z \\ \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$ .

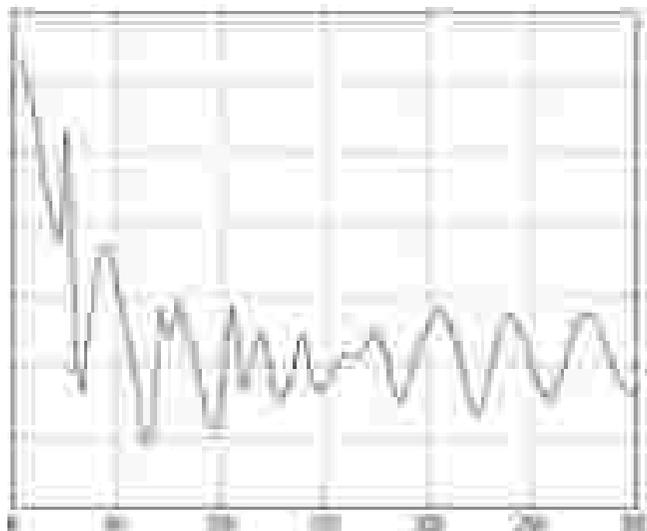
Идея вычислительного эксперимента заключалась в последовательном сглаживании временного ряда, составленного из значений одной из координат системы Лоренца, и вычислении первого показателя Ляпунова на каждом шаге сглаживания. В качестве среды разработки был выбран Matlab r2013a по причине наличия отлаженных библиотек для расчётов. В виду большой вычислительной сложности эксперимента процесс расчёта был распараллелен на четыре ядра. Стоит отметить, что расчёт полученных результатов занял несколько суток.

Временной интервал дискретизации был выбран 0,02 [3]. Длина ряда – в диапазоне от 3000 до 10000. Вычисление первого показателя Ляпунова выполнялось при разных длинах сравниваемых векторов, а также при различных мерах подобия этих векторов. Наиболее характерные результаты приведены ниже (рис. 1–5).

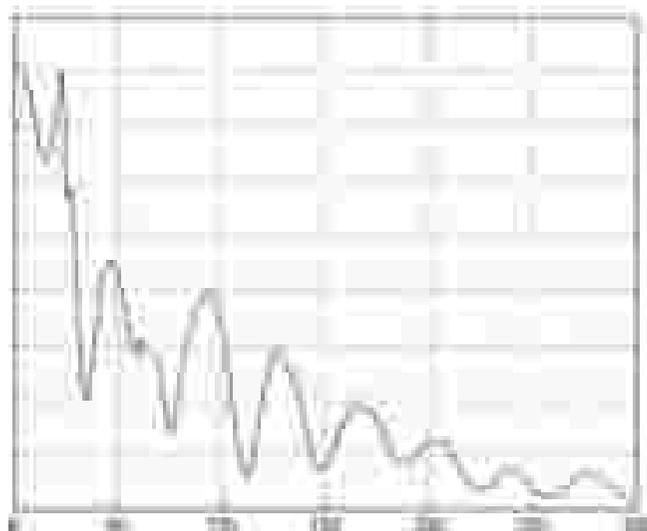


**Рис.1.** Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних

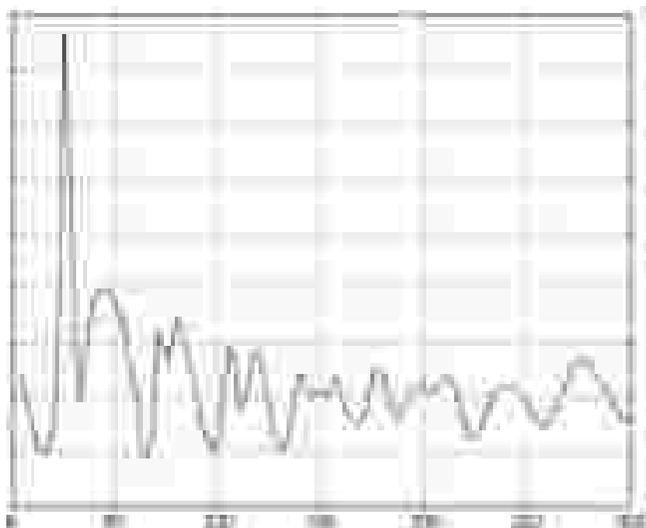
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,1.



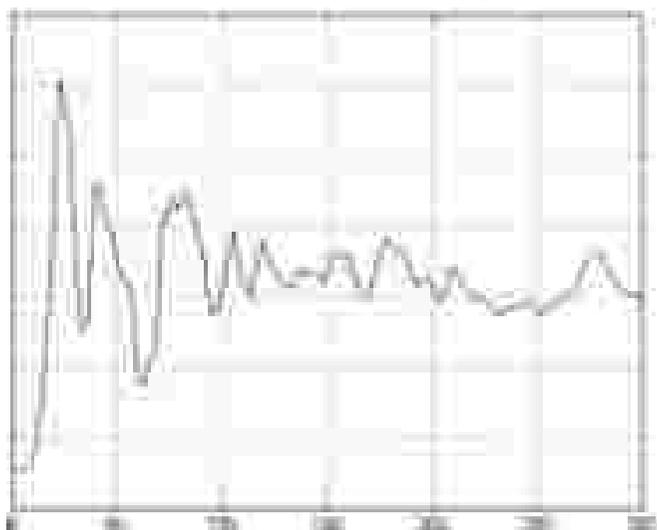
**Рис.2.** Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних  
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,3.



**Рис.3.** Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних  
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,7.

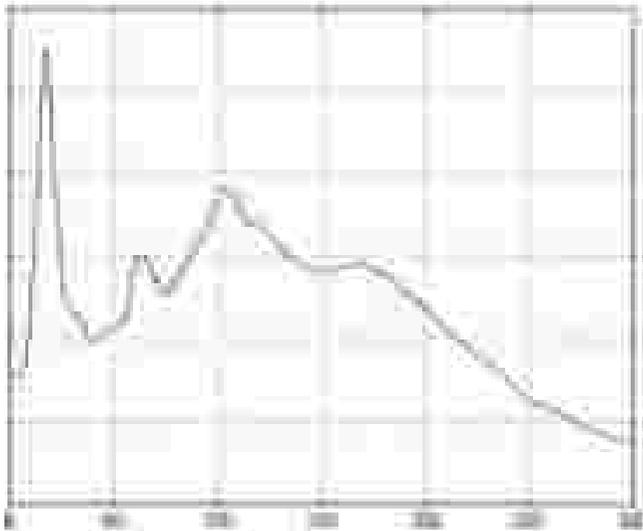


**Рис.4.** Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних  
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 10; мера подобия – 0,7.



**Рис.5.** Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних  
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 20; мера подобия – 1,0.

Из общетеоретических соображений следует, что хаотичность системы после сглаживания должна уменьшаться. Таким образом, возникает вопрос о пороговом значении, после которого динамика системы перестаёт иметь хаотический характер. Однако вычислительный эксперимент при различных значениях ширины окна сглаживания и размерности векторов в методе аналога показал, что при увеличении ширины окна сглаживания происходят флуктуации значения коэффициента Ляпунова. Далее для выявления динамики изменения старшего показателя Ляпунова в зависимости от сглаживания был проведён вычислительный эксперимент, в рамках которого на каждой итерации выполнялось сглаживание сглаженного ряда с одинаковой шириной окна и вычисление показателя. Выбор такого подхода объясняется необходимостью проведения расчётов для разных деформаций исходного ряда и выявления значений, при которых динамика ряда существенно меняется. Результаты вычислений приведены ниже (рис. 6).



**Рис.6. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних**  
*Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 20; мера подобия – 2,0.

Как видно из рис . 6, область значений с шириной окна сглаживания от 170 до 300 может быть выделена как область равномерного убывания показателя Ляпунова. Соответственно в районе до 170 наблюдаются флук-

туації, демонструючі можливість росту хаотичності ряду після сглаживання.

**Висновки.** Таким образом, по результатам расчётов можно сделать вывод о принципиальной возможности роста хаотичности ряда после сглаживания значений исходного нелинейного ряда, что означает возможность усложнения зависимости между значениями на основе новых закономерностей, порождённых методом, а не данными, это, в свою очередь, требует тщательного исследования границ применимости методов парадигмы прогнозирования на основе кластеризации.

### **Бібліографічні посилання**

1. **Малинецкий, Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики [Текст] / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
2. **Gromov, V.A.** Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction [Text] / V.A. Gromov, E.A. Borisenko // Neural Computing & Applications DOI: 10.1007/s00521-015-1845-8. – 2015.
3. **Gromov, V.A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization [Text] / V.A. Gromov, A.N. Shulga // Expert Systems with Applications. – 2012. – №39 – P. 8474–8478.
4. Determining Lyapunov exponents from a time series [Text] / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // Physica D. – 1985. – №3 – P. 285–317.

*Надійшла до редколегії 14.07.2015*

УДК 519.6

**Ж.В. 9 Худа, Є.А. Тонконог**

*Дніпродзержинський державний технічний університет*

## **МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З МІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ**

Розроблено сплайн\_колокаційну схему розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, яка ґрунтується на застосуванні майже інтерполяційних  $L_3$ -сплайнів порядку три, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку порівняно з розв'язками, знайденими за існуючими методами.

Разработана сплайн\_коллокационная схема решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, основанная на использовании почти интерполяционных  $L_3$ -сплайнов порядка три, что позволяет повысить точность приближенного решения по сравнению с решениями, найденными существующими методами.

Designed spline collocation scheme for solving the boundary value problem for second order differential equation with variable coefficients, which is based on the use of almost interpolation  $L_3$ -splines three of order, that improves the accuracy of the approximate solution compared with solutions found by existing methods.

**Ключові слова:** сплайн, колокаційна схема, крайова задача.

**Вступ.** Наразі залишається актуальним питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші. Дослідженню шляхів підвищення точності розв'язків крайових задач присвячено чимало робіт, серед них слід відзначити праці Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошніченко, С.Б. Стечкіна, Ю.М. Субботіна, А.О. Лигуна. Найбільш ефективним засобом у вирішенні питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач стало застосування сплайн\_колокаційних схем, заснованих на різних узагальненнях сплайнів. Побудову узагальнених майже інтерполяційних  $L_3$ -сплайнів наведено в роботах Ж.В. Худой [ 1; 2 ]. Доцільно розглянути такі сплайни в ході розв'язання крайових задач з різними граничними умовами.

**Постановка задачі.** Дану роботу присвячено питанням відшукування наближеного розв'язку крайової задачі виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (1)$$

$$A_1 y'(a) + B_1 y'(a) = \gamma_a, \quad A_2 y(b) + B_2 y'(b) = \gamma_b, \quad (2)$$

де  $p(x), q(x), f(x)$  – двічі неперервно диференційовані функції;  $A_1, \gamma_a, A_2, B_2, \gamma_b \in R$ . Розв’язок потрібно знайти з більш високою точністю порівняно з розв’язками, знайденими за існуючими методами, які зазвичай дають точність порядку  $O(h^2)$ . Для цього розроблено сплайн-колокаційну схему, засновану на застосуванні  $L_3$ -сплайнів порядку три, що дозволяє підвищити точність наближеного розв’язку.

**Метод розв’язування та аналіз одержаних результатів.** Запропоновано шукати наближений розв’язок задачі (1) – (2) за допомогою колокаційної схеми, а як наближений розв’язок можна застосовувати сплайни виду

$$S_3(y, x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{3,i}(x - ih) \quad (i = 0, 1, \dots, N), \quad (3)$$

які, у свою чергу, на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  є розв’язками рівнянь виду

$$S_3^{(4)} + p_i S_3^{(3)} + q_i S_3'' = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, N), \quad (4)$$

де  $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$  на кожному інтервалі  $[x_{i-1}, x_i]$ . Сплайни (3) є узагальненими  $L_3$ -сплайнами порядку три, введені за рівномірним розбиттям  $\Delta_N[a, b]$  відрізка  $[a, b]$  на частини  $\Delta_N[a, b] = \{x_i | x = a + ih, h > 0, i = 0, 1, \dots, N\}$ , а  $B_{3,i}(x)$  – базисні функції з мінімальним носієм  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ , які також задовольняють рівняння (4) і нормовані умовою  $B_{3,i}(x_{i+1}) + B_{3,i}(x_i) + B_{3,i}(x_{i-1}) = 1$ . Узагальнені базисні функції  $B_{3,i}(x)$  побудовані та наведені в роботах [1;2].

Оскільки підібрати єдине рівняння виду (4), яке найкращим чином описує наближений розв’язок задачі (1) – (2) на кожному проміжку дуже складно, доводиться вдаватися до рівняння, коефіцієнти якого змінюються від відрізка до відрізка. Отже, ми можемо підібрати вид сплайна  $S_3(x)$  для кожного конкретного рівняння виду (1). Побудувавши один раз базисні функції, а потім змінюючи тільки вид  $p(x), q(x)$ , можна очікувати, що отримаємо сплайн (3), параметри якого підібрані таким чином, що цей

сплайн краще (у сенсі мінімізації ухилення від точного розв'язку) описує шуканий розв'язок моделі, ніж поліноміальні сплайни. Наближений розв'язок задачі (1) – (2) будемо у вигляді сплайна (3), де параметри сплайна обрано на підставі умов

$$\begin{cases} A_1 \alpha_0 + B_1 \beta_0 + C_0 \gamma_a, \\ A_2 \alpha_N + B_2 \beta_N + C_N \gamma_b, \\ S_i'' + p_i S_i' + q_i S_i = f_i, \end{cases} \quad (i = 0, N), \quad (5)$$

де  $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$  ( $i = -1, N + 1$ ) на кожному інтервалі  $[x_{i-1}, x_i]$ ;  $S_i = S(x_i)$ .

Застосовуючи явний вигляд базисних функцій  $B_{3,i}(x)$  ( $i = -1, N + 1$ ) і значення цих функцій та їх похідних у вузлах колокації, отримаємо систему з тридіагональною матрицею відносно коефіцієнтів сплайна (3) –  $C_i$  ( $i = -1, N + 1$ ):

$$\begin{cases} (C_{-1} \alpha_0 + C_1 \alpha_1) \left( A_1 + \frac{B_1}{h} + A_1 \theta_0 \right) C_0 = \gamma_a, \\ C_{i-1} (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + C_i (\theta_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\ + C_{i+1} (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}) = f_i, \quad (i = 1, N - 1) \\ (C_{N-1} \alpha_{N-1} + C_{N+1} \alpha_N) \left( A_2 + \frac{B_2}{h} + A_2 \alpha_N C_N \right) = \gamma_b, \end{cases} \quad (6)$$

де  $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$ ,  $\beta_i = B'_{3,i}(x_i)$ ,  $\theta_i = B''_{3,i}(x_i)$ , а  $B_{3,i}(x)$  – базисні функції, що задовольняють рівняння (4).

Доведемо, що порядок точності такої схеми становить  $O(h^4)$  в довільній точці розбиття для сплайнів виду (3).

**Теорема.** Нехай  $q(x), f(x) \in L^\infty_{[a, b]}$ ,  $p(x) \in L^5_{[a, b]}$ ,  $q(x) < 0$  для  $x \in [a, b]$  і  $h$  таке, що для  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  виконуються умови

$$\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} - \frac{p_i^2}{6} + \frac{q_i}{12} + \frac{h}{24} (q_i' - p_i q_i - p_i' p_i) > 0,$$

$$q_i - h^2 \left( \frac{(p_i')^2}{12} - \frac{p_i' q_i}{24} + \frac{p_i^4}{192} + \frac{q_i''}{24} - \frac{p_i'' p_i}{24} - \frac{p_i^2 q_i}{96} \right) < 0, \quad (7)$$

якщо  $y_*(x) \in L_\infty^6[a, b]$  – точний розв’язок задачі (1) – (2), а  $S_3(x)$  – сплайн виду (3), який задовольняє умови (4), де  $C_i (i=0, N+1)$  – розв’язки системи (6), тоді, коли  $h \rightarrow 0$ , виконується нерівність

$$\|y_* - S_3\|_{C[a, b]} \leq Dh^4 + O(h^5), \quad (8)$$

де

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{1}{12} (A_1 + B_1)(y_i'' + p_i y_i') + (A_2 + B_2)(q_i + p_i') y_i + \frac{1}{36} (q_i^{(4)} + p_i y_i^{(3)} + q_i y_i'') \right|.$$

**Доведення теореми.** Для отримання оцінки точності сплайн-розв’язку (3), коефіцієнти якого знайдено із системи (6), застосуємо нерівність

$$|S_3(x) - y_*| \leq |S_3(x) - S_3(x, y_*)| + |S_3(x, y_*) - y_*|, \quad (9)$$

де  $y_*$  – точний розв’язок задачі (1) – (2);  $S_3(x, y_*)$  – узагальнений майже інтерполяційний сплайн. Сплайни  $S_3(x, y_*)$  побудовано в роботі [2]. Такі сплайни мають вигляд

$$S_3(x, y_*) = \sum_{i=-1}^{N+1} \tilde{C}_i B_{3,i}(x - ih). \quad (10)$$

Коефіцієнти  $\tilde{C}_i$  розраховані таким чином, що значення сплайна у вузлі майже збігаються зі значеннями інтерпольованої функції  $y_*$ , яка, у свою чергу, є розв’язком задачі (1)–(2). На кожному інтервалі  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i = & y_i \left( 1 - \frac{1}{12} p_i' h^2 - \frac{1}{120} h^4 \left( \frac{5}{6} p_i''' + q_i'' - \frac{1}{3} (p_i p_i'' + (p_i')^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} (p_i' q_i + p_i q_i' - p_i^2 p_i') + \frac{1}{42} q_i'^2 - \frac{1}{504} q_i p_i'^2 - \frac{1}{252} p_i^4 \right) \right) - \\ & - \Delta y_i \left( \frac{1}{24} p_i h + \left( \frac{1}{180} q_i' - \frac{1}{1440} p_i^3 - \frac{11}{1440} p_i p_i' + \frac{1}{480} p_i q_i \right) h^3 \right) - \\ & - \Delta^2 y_i \left( \frac{1}{6} + \left( -\frac{1}{72} p_i' - \frac{1}{45} q_i - \frac{1}{180} p_i^2 \right) h^2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $y_i = y(ih)$ ,  $p_i = p(ih)$ ,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}$ ,  $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$ .

У роботі [2] доведено, що на кожному з проміжків  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{0, N}$ ) рівномірно за  $i$  та  $x$  буде виконано співвідношення

$$\begin{aligned} |S_3(x y_*) - y_*| = & \left| \frac{1}{24} (x - x_{ij})^2 (x - x_{+1}) (y''(x) + p(x) y'(x) + \right. \\ & \left. + (q(x) + p'(x)) y(x) + \frac{1}{36} h^4 (y_i^{(4)} + p y_i^{(3)} + q y_i'') + O(h^5) \right| \end{aligned} \quad (12)$$

Тобто відхилення майже інтерполяційного сплайна від точного розв'язку задачі (1)-(2) не перевищує  $O(h^4)$  у довільній точці. Тобто для доведення теореми нам залишається оцінити різницю  $|S_3(x) - S_3(x, y_*)|$ .

Оскільки обидва сплайни побудовані на основі узагальнених базисних функцій  $B_{3,i}(x)$ , то питання оцінки відхилення  $S_3(x) - S_3(x, y_*)$  може бути зведено до оцінки різниці  $\delta_i = \tilde{C}_i - C_i$ . Для доведення того що це відхилення має порядок  $O(h^4)$ , розглянемо допоміжний оператор

$$\begin{aligned} L_i(\tilde{C}_i) = & \tilde{C}_{i-1} (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + \tilde{C}_i (q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\ & + \tilde{C}_{i+1} (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}), \end{aligned}$$

де  $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$ ,  $\beta_i = B'_{3,i}(x_i)$ ,  $\theta_i = B''_{3,i}(x_i)$ .

Підставимо значення різниці  $\delta_i$  в оператор  $L_i$ .

$$\begin{aligned}
 L_i(\delta_i) = & L(C_i) - L(y_i) \left( 1 - \frac{1}{12} p_i' h^2 - \frac{1}{120} h^4 \left( \frac{5}{6} p_i''' + q_i'' - \frac{1}{3} (p_i p_i'' + (p_i')^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4} (p_i' q_i + p_i q_i' - p_i^2 p_i') + \frac{1}{42} q_i'^2 - \frac{1}{504} q_i p_i'^2 - \frac{1}{252} p_i^4 \right) \right) + \\
 + & L_i(\Delta y_i) \left( \frac{1}{24} p_i h + \left( \frac{1}{180} q_i' - \frac{1}{1440} p_i^3 - \frac{11}{1440} p_i p_i' + \frac{1}{480} p_i q_i \right) h^3 \right) + \\
 + & L(\Delta^2 y_i) \left( \frac{1}{6} + \left( -\frac{1}{72} p_i' - \frac{1}{45} q_i - \frac{1}{180} p_i^2 \right) h^2 \right), \tag{13}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 L(y_i) = & y_{i-1} (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + y_i (q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\
 & + y_{i+1} (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}), \\
 L(\Delta y_i) = & (y_i - y_{i-2}) (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + \\
 & + (y_{i+1} - y_{i-1}) (q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\
 & + (y_{i+2} - y_i) (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}), \tag{14} \\
 L(\Delta^2 y_i) = & (y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i) (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + \\
 & + (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) (q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\
 & + (y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i) (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Застосовуючи у формулах (14) розвинення  $y_{i-2}, y_{i+2}, y_{i-1}, y_{i+1}$ , за формулою Тейлора в точці  $x = ih$  отримаємо розвинення  $L(y_i), L(\Delta y_i), L(\Delta^2 y_i)$  у точці  $x_i$ . Після підстановки цих розвинень у формулу (13), враховуючи, що  $L(C_i) = f_i$  і  $y_i'' + p_i y_i' + q_i y_i = f_i$ , отримаємо: рівномірно за  $i$  ( $i = \overline{1, N}$ )  $L_i(\delta_i) = O(h^4)$ , тобто

$$\begin{aligned}
 & \delta_{i-1} (\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}) + \delta_i (q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i) + \\
 & + \delta_{i+1} (\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}) = d_i, \quad \partial e \quad d_i = O(h^4). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Таким чином, одержано систему (15) із тридіагональною матрицею. Застосуємо лему Адамара. Якщо система  $AX = D$ , де  $A = \{a_{ij}\}_1^N$  – матриця з діагональним переважанням,  $D = (d_1, d_2, \dots, d_N)$  має єдиний розв’язок, то правдива оцінка [1]:

$$\max_{1 \leq i \leq N} |x_i| \leq \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|d_i|}{G_i}, \quad \text{де } G_i = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0 \quad (i, j = \overline{1, N}). \quad (16)$$

Доведемо, що матриця системи (15) є матрицею з діагональним переважанням. Для цього розглянемо різницю

$$G_i = |q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i| - |\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}| - |\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}| \quad (17)$$

( $i = \overline{1, N}$ ).

Після підстановки явного вигляду значень базисних сплайнів та їх похідних (наведених у роботі [2])  $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$ ,  $\beta_i = B'_{3,i}(x_i)$ ,  $\theta_i = B''_{3,i}(x_i)$  у рівність (17) з урахуванням умов (7) отримаємо

$$G_{ii} = q + h^2 \left( \frac{p_i'^2}{12} - \frac{p_i q_i}{24} + \frac{p_i^4}{192} + \frac{q_i''}{24} - \frac{p_i p_i''}{24} - \frac{p_i^2 q_i}{96} \right) > 0. \quad (18)$$

Нерівність (18) доводить, що умова (17) виконана і матриця системи (15) є матрицею з діагональним переважанням. Тоді за лемою Адамара для розв’язків системи (15) правдива оцінка (16), тобто

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\tilde{C}_i - C_i| \leq O(h^4), \quad \text{звідки випливає } \|S_3(x) - S_3(x; *)\|_C = O(h^4).$$

Беручи до уваги отриману рівність, а також рівність (12) і те, що

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{1}{12} ((A_1 + B_1)(y_i'' + p_i y_i') + (A_2 + B_2)(q_i + p_i') y_i) + \frac{1}{36} (y_i^{(4)} + p_i y_i^{(3)} + q_i y_i'') \right|,$$

з урахуванням нерівності (9), отримаємо нерівність (8). Таким чином, теорему доведено.

**Висновки.** Розроблено метод розв'язання крайової задачі, реалізований за допомогою побудованих раніше узагальнених  $L$ -сплайнів порядку три. Наведений метод ефективний та зручний у застосуванні. Він дає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю порівняно зі звичайними колокаційними методами. Доведено, що відхилення отриманого розв'язку від точного не перевищує  $O(h^4)$ .

#### **Бібліографічні посилання**

1. **Худая, Ж.В.** Об одном свойстве  $L$ -сплайнов с переменными коэффициентами [Текст] / Ж.В. Худая // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Д., 2006. – С. 250–260.
2. **Худая, Ж.В.** Об асимптотике приближения функции  $L$ -сплайнами в зависимости от положения точки [Текст] / Ж.В. Худая // Там само. – Д., 2007. – С. 317–327.

*Надійшла до редколегії 02.07.2015*

## ДО ВІДОМА АВТОРІВ

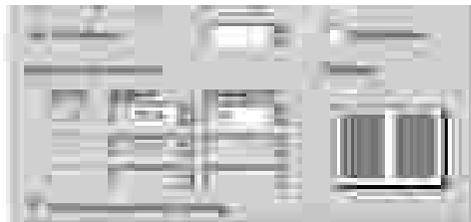
1. У статті подають представлені результати нових досліджень автора з повним їх обґрунтуванням. Посилання на неопубліковані праці недопустиме. Статті можуть бути написані українською, російською та англійською мовами. Оптимальний обсяг статті – до 12 сторінок.

2. Структура рукопису статті (згідно з вимогами Постанови ВАК України № 7\_05/1 від 15 січня 2003 р.):

- **анотація** трьома мовами (українська, російська, англійська) – не більше 5 рядків. **Ключові слова** – мовою основного тексту статті;
- постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими або практичними задачами, аналіз досягнень і публікацій за тематикою дослідження даної проблеми, наголошення на невіршених раніше питаннях загальної проблеми, розглядуваних у статті (**Вступ**);
- постановка розглядуваної задачі (**Постановка задачі**);
- викладення основного матеріалу з повним обґрунтуванням одержаних наукових результатів (**Метод розв'язання та Аналіз одержаних результатів**);
- висновки за проведеними дослідженнями і перспективи подальших досліджень (**Висновки**).

### 3. Вимоги до набору:

- текст слід набирати в MS Word, **шрифт** – Times New Roman;
- формат паперу – А4 (210x297), альбомна орієнтація;
- параметри сторінки (поля):
  - \_ верхнє – 15 мм;
  - \_ нижнє – 25 мм;
  - \_ ліве – 20 мм;
  - \_ праве – 20 мм.
- колонки



- автоматичні переноси ; сторінки не нумерують, відсутність «висячих» рядків; абзац (відступ першого рядка) – 5 мм;

- стиль і форматування для елементів статті (таблиця):

<b>УДК</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Ініціали і прізвища авторів</b> (прізвище, ім'я, по батькові)	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний;
<b>Місце роботи</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Назва статті</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Анотація</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Основний текст статті</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 6 pt
<b>Заголовки структурних елементів статті</b> (вступ, постановка задачі, висновки)	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
<b>Заголовок «Бібліографічні посилання»</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 6 pt <i>інтервал після:</i> 6 pt
<b>Бібліографічні посилання в алфавітному порядку (зразок наведено нижче)</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, (ПІБ – напівжирний, решта ні) прямий, нумерований список; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>відступ:</i> номери – 0 мм, <i>тексту:</i> 5 мм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 6 pt <i>інтервал після:</i> 6 pt
<b>Дата надходження до редколегії</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 12 pt

Закінчення таблиці

<b>Підрисункові підписи</b>	<i>Шрифт: Times, 9 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; інтервал після: 6 pt</i>
<b>Назва таблиці</b> (перший рядок: слово <i>Таблиця</i> ; другий: її назва)	<i>Шрифт: Times, 9 pt, перший рядок: курсив; вирівнювання: за правим краєм; міжрядковий інтервал: одинарний; другий рядок напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний</i>

○ **УВАГА!**

Лапки : « » .  
Дефіс : - .  
Тире : - .

○ **УВАГА! Бібліографічні посилання оформлюють за зразком:**

1. **Слезкин, Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / Н.А. Слезкин. – М., 1955. – 493 с.
2. **Белоносов, С.М.** Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса [Текст] / С.М. Белоносов, И.Л. Черноус. – М., 1985. – 312 с.
3. **Евдокимов, Д.В.** Построение матриц фундаментальных решений для системы уравнений Стокса [Текст] / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, А.Н. Фетищев // Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. – 2003. – № 3 (19). – С. 127–130.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами [Текст] / под ред. М. Абрамович, И. Стиган. – М., 1979.
5. **Остапенко, Н.А.** Необходимые и достаточные условия существования периодических решений в системах с переменной структурой [Текст] / Н.А. Остапенко // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2002. – Вып. 7. – С. 56–58.
6. **Перехрест, В.І.** Новий клас розв'язків гідродинамічних рівнянь Ейлера для осесиметричних вихорових течій [Текст] / В.І. Перехрест // Доп НАНУ. – 2004. – № 3. – С. 35–42.
7. **Перехрест, В.І.** Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності [Текст] : зб. наук. пр. / В.І. Перехрест, О.А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування – Д., 2003. – С. 141–148.
8. **Кузнецова, В.И.** О дискретных линейных системах с медленно меняющимися параметрами [Текст] / В.И. Кузнецова // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 7. – С. 43–48.
9. **Беляев, Н.М.** Методы теории теплопроводности [Текст] : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М., 1982. – Ч.1–2.
10. **Мацевитый, Ю.М.** Обратные задачи теплопроводности [Текст] : в 2 т. / Ю.М. Мацевитый. – К., 2003. – Т.1–2.

- рисунки виконують у будь-якому форматі, імпортованому графічними фільтрами MS Word. Рисунки вставляють у текст статті як окремий незалежний об'єкт (положення — у тексті), при цьому можна пересувати текст стосовно нього. Під рисунком обов'язково подають пояснювальний підпис із номером рисунка.
- формули набирають у редакторі Microsoft Equation або MathType: якщо формула з номером, то вирівнюють за правим краєм, якщо ні – за серединою і з такими установками:



**4. До редакційної колегії потрібно подати:**

- у роздрукованому вигляді примірник статті, набраний згідно з вимогами щодо стилю й форматування для елементів статті, наведених вище;
- електронний варіант статті, набраний згідно з вимогами стосовно стилю й форматування для елементів статті, поданих вище ;
- витяг із протоколу засідання кафедри (наукового семінару) із рекомендацією до публікації, експертний висновок про можливість публікації статті .

**5. Статті, виконані з порушенням правил, до збірника не будуть включені.**

**6.** Адреса редколегії: Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики, просп. Карла Маркса, 35, корп. №3, м. Дніпропетровськ.

## ЗМІСТ

<b>Базилевич Ю. Н.</b> Новые вычислительные алгоритмы в задачах точной декомпозиции .....	3
<b>Бурдюк В. Я.</b> Рациональні групи як векторні простори .....	8
<b>Волошко Л. В., Волошко В. Л.</b> Чисельний розв'язок задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння .....	15
<b>Галкін О. А.</b> Процес розпізнавання на основі ядерних оцінок щільності з використанням множини оптимальних мір згладжування .....	22
<b>Гарт Л.Л.</b> Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений .....	33
<b>Громов В.А., Конев А.С.</b> Применение методологии прогнозирования с помощью кластеризации для ранней идентификации популярных тем в социальной сети «TWITTER» .....	47
<b>Киселева Е.М., Гарт Л.Л., Довгай П.А.</b> О численном моделировании производной детерминированного временного ряда .....	61
<b>Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А.А.</b> Оптимальное многократное шаровое покрытие невыпуклых областей .....	72
<b>Кісельова О.М., Лозовська Л.І., Бандоріна Л.М.</b> Алгоритм розв'язання спеціального вигляду задачі оптимального розбиття множин у разі обмежень на потужності із заданим розташуванням центрів підмножин .....	88
<b>Кісельова О.М., Стросва В.О.</b> Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання з визначенням екологічно значимих зон .....	99
<b>Лозовський О.С., Саліков В.О.</b> Дослідження динамічних характеристик процесу обслуговування пасажирів аеропорту з використанням імітаційних процедур за технологією ARENA.....	104
<b>Міняйло А.Ю., Турчина В.А.</b> Використання відстані Левенштейна для аналізу подібності даних.....	114
<b>Недашковская Н.И.</b> Модели парных сравнений на основании интервальных оценок экспертов.....	121
<b>Ободан Н.И., Гук М.К.</b> Дискретная динамическая модель управления освещением автомобиля .....	138
<b>Ободан Н.И., Гук Н.А., Магас А.С.</b> Корректность нейросетевой аппроксимации решения обратной задачи для нелинейного эллиптического оператора .....	147

<b>Ободан Н.И., Гук Н.А., Фещенко А.С.</b> Об одной обратной задаче для уравнений Кармана .....	157
<b>Притоманова О.М.</b> Применение методологии системного анализа к управлению банковскими проблемными кредитами.....	166
<b>Стросва В. О., Авраменко В.І.</b> Дослідження закону розподілу довжини хорди в колі .....	181
<b>Стецюк П.И., Фесюк А.В.</b> Двойственный алгоритм решения задачи сепарабельного квадратичного программирования с одним ограничением и границами на переменные .....	191
<b>Ус С.А., Павлов М.С.</b> Програмный комплекс OBSL для розв'язування задач оптимального розміщення базових станцій .....	201
<b>Фирсов А.Д., Громов В.А.</b> Влияние сглаживания на характеристики хаотического временного ряда .....	211
<b>Худа Ж.В., Тонконог Є.А.</b> Метод розв'язання крайової задачі з мішаними граничними умовами.....	218
<b>ДО ВІДОМА АВТОРІВ</b> .....	226