

ВСТУП

Програма вивчення вибіркової навчальної дисципліни “Теорія випадкових процесів” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра напрямку Статистика.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є методологічні та методичні аспекти формалізації випадкових процесів та їх використання під час побудови ймовірнісних моделей досліджуваних систем.

Міждисциплінарні зв'язки: дисципліна “Теорія випадкових процесів” викладається після вивчення студентами курсу “Теорія ймовірностей та математична статистика”, передуює вивченню дисципліни “Теорія ризику”, “Теорія випадкових процесів II”.

Програма навчальної дисципліни складається з таких змістових модулів:

1. Поняття випадкового процесу
2. Елементи стохастичного аналізу
3. Процес Пуассона
4. Процес Вінера

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Теорія випадкових процесів” є надання студентам ґрунтовних знань з теорії випадкових процесів та практичних навичок побудови та дослідження математичних моделей стохастичних явищ.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Теорія випадкових процесів” є ознайомлення та оволодіння основними математичними поняттями, теоретичними положеннями і методами сучасної теорії випадкових процесів, застосування цих методів до розв'язання типових задач.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати :

означення випадкового процесу та його властивості, стохастично еквівалентних випадкових процесів, характеристики другого порядку випадкових процесів, основні класи випадкових процесів, збіжність випадкових процесів, неперервність випадкових процесів, диференційованість випадкових процесів, інтегрування випадкових процесів, неперервність траєкторій випадкових процесів, означення та основні властивості процесу Вінера та процесу Пуассона.

вміти :

перевіряти стохастичну еквівалентність процесів; досліджувати випадкові процеси на збіжність, неперервність, диференційованість та інтегрованість; знаходити деякі ймовірнісні характеристики для процесів Пуассона та Вінера.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 360 годин/ 10 кредитів ECTS.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Поняття випадкового процесу

Тема 1. Вимірні простори.

Класи множин. Співвідношення між класами. Породжені класи. Теорема про систему Динкіна. Метод підхожих множин. Вимірний простір. Сігма-алгебра борелевих множин. Продакт-простір. Сігма-алгебра циліндричних множин.

Тема 2. Простори з мірою.

Означення міри, приклади. Ймовірнісна міра. Приклади ймовірнісних просторів. Побудова ймовірності на множинах послідовностей. Узгоджена сім'я мір. Теорема Колмогорова про сім'ю узгоджених мір.

Тема 3. Збіжність.

Збіжність ймовірнісних розподілів. Збіжність ймовірнісних мір на польському просторі. Теорема Александра про слабку збіжність. Теорема Прохорова.

Тема 4. Випадкові елементи.

Означення випадкового елемента. Сігма-алгебра, породжена випадковим елементом. Теорема про вимірність відносно породженої сігма-алгебри. Незалежні класи подій. Незалежність випадкових елементів.

Змістовий модуль 2. Елементи стохастичного аналізу

Тема 5. Означення випадкового процесу.

Загальне означення випадкового процесу. Скінченновимірні розподіли. Фазовий простір. Траєкторія та зріз процесу. Стохастична еквівалентність, ідентичність процесів.

Тема 6. Сепарабельність.

Сепарабельна функція. Теорема про сепарабельну модифікацію.

Тема 7. Вимірність.

Вимірність та прогресивна вимірність. Теорема про вимірність прогресивно вимірного процесу. Теорема про прогресивну вимірність стохастично неперервного процесу.

Тема 8. Неперервність.

Стохастична неперервність. Теорема про зв'язок між збіжністю за ймовірністю та збіжністю двовимірних розподілів. Неперервність майже напевно. Теорема про неперервність в термінах модуля неперервності. Достатня умова Колмогорова неперервності майже напевно. Процеси неперервні справа зі скінченими зліва границями

Тема 9. Процеси другого порядку.

Простір інтегрованих в середньому квадратичному процесів. Критерій збіжності в середньому квадратичному. Неперервність в середньому квадратичному.

Тема 10. Диференційованість.

Диференційованість випадкових процесів за ймовірністю та в середньому квадратичному. Приклади. Критерій диференційованості в середньому квадратичному.

Тема 11. Інтегрованість.

Інтегрування в середньому квадратичному. Критерій інтегрованості. Диференційованість за верхньою границею.

Змістовий модуль 3. Процес Пуассона

Тема 12. Процеси з незалежними приростами.

Означення процесу з незалежними приростами. Теорема про існування процесу з незалежними приростами для заданого початкового розподілу та мультиплікативної характеристичної функції. Процеси Леві.

Тема 13. Означення процесу Пуассона.

Означення I та II, еквівалентність означень. Теорема про ординарний однорідний процес з незалежними приростами.

Тема 14. Властивості траєкторій.

Теорема Пуассона для серій. Властивості траєкторій процесу Пуассона. Розподіл часу між появою подій для процесу Пуассона.

Тема 15. Елементарний стохастичний потік.

Стохастичний потік подій. Лічильний процес. Означення III процесу Пуассона.

Тема 16. Марковська властивість.

Перезапущений процес Пуассона. Перезапуск у фіксовані моменти та у моменти реалізації подій.

Тема 17. Умови на кількість та моменти стрибків.

Розподіл моментів стрибків за фіксованих значень процесу Пуассона. Умовний розподіл моментів стрибків.

Тема 18. Сума процесів Пуассона.

Теорема про суму процесів Пуассона. Теорема про появу подій певного типу для суми процесів Пуассона.

Тема 19. Узагальнені процеси Пуассона.

Складний процес Пуассона. Процес Пуассона зупинений у випадковий момент часу. Процес Пуассона з випадковою інтенсивністю. Процес відновлення.

Змістовий модуль 4. Процес Вінера

Тема 20. Означення процесу Вінера.

Означення I та II, еквівалентність означень. Перетворення процесу Вінера.

Тема 21. Варіація траєкторій.

Сума p -варіацій. Повна p -варіація та варіація вздовж розбиття. Квадратична варіація процесу Вінера в середньому квадратичному. Теорема про повну p -варіацію.

Тема 22. Побудова процесу Вінера.

Апроксимація випадковим блуканням. Теорема про міру Вінера. Функції Хаара та Шаудера. Теорема Леві-Цесельські. Довизначення процесу на всю дійсну піввісь.

Тема 23. Процес Вінера відносно фільтрації.

Потік сігма-алгебр. Зародкова та хвостова сігма-алгебри. Означення відносно фільтрації. Марковська властивість. Закон 0 та 1 для процесу Вінера. Теорема про повернення в нуль.

Тема 24. Мартингальна властивість процесу Вінера.

Мартингальність процесу Вінера. Моменти зупинки та відповідні сігма-алгебри. Теорема Дуба про оптимальну зупинку. Теорема про рівність Вальда. Розподіл ймовірності виходу з інтервалу. Очікуваний час досягнення рівня. Генератриса моменту досягнення рівня.

Тема 25. Процес Вінера на стохастичному базисі.

Оператор зсуву. Стохастичний базис. Теорема про строго марковську властивість.

Тема 26. Функціонали процесу Вінера.

Екстремуми та моменти досягнення областей. Стохастична еквівалентність моменту досягнення рівня та моменту виходу за рівень. Принцип віддзеркалювання. Спільний розподіл значення процесу та його максимуму. Незалежність та стаціонарність приростів моментів досягнення рівнів. Розподіл моменту досягнення максимуму.

3. Рекомендована література

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа., 1988. – 439 с.
2. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. Киев: 1980. – 343 с.
3. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов: Учеб. пособие . – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
4. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. - К.:Либідь, 1990.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Издание второе перераб. и доп. - М.:Наука, 1977.
6. Д.В.Гусак, О.Г.Кукуш, О.М.Кулик, Ю.С.Мішура, А.Ю.Пилипенко, Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань, К. 2008, 287 с.
7. А.В.Булинский, А.Н.Ширяев, Теория случайных процессов, М. 2003, 400с.

4. Форма підсумкового контролю успішності навчання залік, екзамен

5. Засоби діагностики успішності навчання контрольні роботи з кожного змістовного модулю