

## ВСТУП

### Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета:** викладання дисципліни є надання студентам ґрунтовних знань з теорії марковських ланцюгів, достатніх для подальшого набуття ними професійних знань у прикладних науках, що безпосередньо або частково використовують теоретико-ймовірнісні методи.

Курс "Марковські ланцюги" є продовженням нормативного курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика" і спрямований на поглиблене і розширене вивчення теорії ймовірностей.

**Завдання:** вивчення основ теорії марковських ланцюгів для застосування їх при розв'язанні прикладних задач.

В результаті вивчення дисципліни фахівець повинен

**знати:** означення ланцюгів Маркова з дискретним часом, умови рекурентності станів ланцюга, типи станів та їх асимптотичну поведінку; умови нерекурентності та асимптотичну поведінку нерекурентних станів, ергодичну теорему та ергодичний розподіл для неперіодичних ланцюгів Маркова, ергодичну теорему періодичних ланцюгів, критерії нерекурентності та рекурентності марковського ланцюга; ланцюг, що описує чергу та його характеристики; процес Маркова з неперервним часом та рівняння Колмогорова-Чепмена, процеси народження та загибелі;

**вміти:** класифікувати стани марковського ланцюга, досліджувати рекурентність станів та вміти визначити їх тип (суттєві, нульові, періодичні); досліджувати граничну поведінку розподілу як неперіодичного так і періодичного ланцюга Маркова; досліджувати ланцюги, що описують чергу та застосовувати отримані знання при розв'язку практичних задач

## 2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

### Програма навчальної дисципліни

#### Змістовний модуль 1. Ланцюги Маркова – основні поняття і факти.

##### Тема 1. Основні означення.

Детерміновані і стохастично детерміновані системи. Означення ланцюга Маркова. Матриця перехідних імовірностей. Рівняння Колмогорова-Чепмена і наслідки з нього. Приклади марковських ланцюгів: одновимірне випадкове блукання, азартна гра, сума незалежних випадкових величин, марковський ланцюг, що описує довжину серії успіхів. Задання марковського ланцюга матрицею однокрокових перехідних імовірностей. Обчислення імовірності перебування у стані за матрицею перехідних імовірностей. Задання марковського ланцюга стохастичною матрицею.

##### Тема 2. Рекурентні стани. Класи еквівалентності.

Рекурентність. Твірні функції і лема Абеля. Необхідні і достатні умови рекурентності стану. Суттєві стани. Класи еквівалентності. Теорема солідарності. Нульові класи еквівалентності. Асимптотика нульового ланцюга. Одновимірне випадкове блукання по цілочисельній ґратці. Випадкове блукання по двовимірній цілочисельній ґратці. Скінчені ланцюги Маркова. Рівняння для імовірностей досягнення стану. Необхідні і достатні умови рекурентності, нерекурентності стану в класі еквівалентності. Теорема про імовірності досягнення у рекурентному і нерекурентному ланцюзі. Імовірності відвідування рекурентного і нерекурентного стану. Періодичні ланцюги. Структура періодичного ланцюга.

#### Змістовний модуль 2. Граничні теореми для марковських ланцюгів. Марковські ланцюги з неперервним часом

**Тема 3.** Ергодична теорема для неперіодичного ланцюга.

Дискретне рівняння відновлення. Ергодична теорема для неперіодичного ланцюга. Ергодичний і стаціонарний розподіл марковського ланцюга.

**Тема 4.** Граничний розподіл марковського ланцюга та ергодична теорема для періодичного ланцюга.

Граничний розподіл марковського ланцюга. Ергодична теорема для періодичного ланцюга. Імовірності поглинання. Критерій нерекурентності марковського ланцюга. Достатня умова рекурентності марковського ланцюга. Дискретний марковський ланцюг, що описує чергу. Граничний розподіл довжини черги. Задача про банкрутство гравця. Імовірність банкрутства гравця.

**Тема 5.** Марковські ланцюги з неперервним часом.

Основні поняття і означення, рівняння Колмогорова-Чепмена, задання марковського ланцюга. Процес чистого народження. Імовірності перебування у стані. Пуассонів процес. Процес Юла. Процеси народження і загибелі. Прямі і обернені диференціальні рівняння Колмогорова для процесу народження і загибелі. Обслуговування з очікуванням. Ергодичний і стаціонарний розподіл процесу народження і загибелі. Граничні імовірності перебування у стані. Обслуговування з очікуванням.

**Тема 6.** Марковський ланцюг, що описує чергу.

Марковський ланцюг, що описує чергу. Гранична поведінка довжини черги. Властивість диференційовності перехідних імовірностей. Розподіл часу перебування у стані. Вкладений марковський ланцюг. Структура марковського ланцюга з неперервним часом. Обернені диференціальні рівняння Колмогорова. Марковський ланцюг з двома станами і неперервним часом.

### **3. Рекомендована література**

#### **Базова**

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа., 1988. – 439 с.
2. Боровков А.В. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 431 с.
3. Турчин В.Н., Турчин Е.В. Марковские цепи: Основные понятия, примеры, задачи: : Учеб. пособ. Для студентов вузов. – Днепропетровск: ЛизуновПресс, 2016. – 192с.

#### **Допоміжна**

1. Миллер Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах/ Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М.: Мир, 1971. – 536 с.

**4. Форма підсумкового контролю успішності навчання –залік (5-й семестр).**

**5. Засоби діагностики успішності навчання – самостійні роботи, залік.**