

Вступ

Програма вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Основи теорії узагальнених функцій та її застосування» складена відповідно до освітньо-професійної програми для першого бакалаврського рівня спеціальності 6.040201 Математика

Предметом вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Основи теорії узагальнених функцій та її застосування» є: 1) поширення диференціального числення на розривні (тобто, недиференційовні) функції; 2) застосування цього поширення для розв'язання початкових та крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних із сталими коефіцієнтами.

Міждисциплінарні зв'язки: математичний аналіз, теорія функцій та функціональний аналіз, звичайні диференціальні рівняння, асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, рівняння математичної фізики; простори *Соболева* та узагальнені розв'язки задач математичної фізики.

1. Мета та завдання вибіркової навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання вибіркової навчальної дисципліни «Основи теорії узагальнених функцій та її застосування» є засвоєння деяких розділів теорії узагальнених функцій та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, а саме методів знаходження узагальнених розв'язків початкових та крайових задач математичної фізики.

1.2. Основними завданнями вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Основи теорії узагальнених функцій та її застосування» є:

- поширення класичного поняття функції;
- поширення класичного поняття похідної;
- поширення класичних понять розв'язків крайових та початкових задач для лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами;
- застосування поширених понять функції, похідної та розв'язків до розв'язання крайових та початкових задач для рівнянь математичної фізики;
- утворення логічних зв'язків з іншими дисциплінами, які вказані в розділі «Міждисциплінарні зв'язки», зокрема створити основу для вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Простори Соболева та узагальнені розв'язки задач математичної фізики».

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти мають:

знати:

- 1) поняття узагальненої похідної за *Соболевим*;
- 2) поняття узагальнених функції та похідної за *Шварцем*;
- 3) поняття узагальнених функції та похідної за *Коломбо* та *Сато*;
- 4) поняття узагальнених диференціальних операторів теорії поля і узагальнені інтегральних формули теорії поля;
- 5) поняття узагальнених розв'язків лінійних диференціальних рівнянь;
- 6) поняття фундаментальних розв'язків операторів *Лапласа*, теплопроводності та хвильового;

вміти:

- 1) обчислювати узагальнені похідні за *Соболевим*;
- 2) обчислювати узагальнені похідні за *Шварцем*;
- 3) знаходити фундаментальні розв'язки лінійних диференціальних операторів із сталими коефіцієнтами;
- 4) знаходити узагальнені розв'язки задач *Діріхле* для рівнянь *Лапласа* та *Пуассона*;

- 5) знаходити узагальнені розв'язки задачі *Koши* для рівняння теплопроводності;
 6) знаходити узагальнені розв'язки задачі *Koши* для хвильового рівняння.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 180 годин / 3 кредити ECTS.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Узагальнені функції та похідні

Тема 1. Узагальнене диференціювання за *Соболевим* в \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , простори *Соболева* (клас основних нескінченно диференційованих функцій, формула інтегрування за частинами як формула перекидання похідної на функції з основного класу; означення узагальненої похідної; властивості узагальненої похідної; означення просторів *Соболева*; властивості просторів *Соболева*)

Тема 2. Узагальнені функції та похідні за *Шварцем* в \mathbb{R} , \mathbb{R}^n (простори основних функцій; узагальнені функції як лінійні функціонали або розподіли в полі \mathbb{R} (\mathbb{C}) над просторами основних функцій; регулярні та сингулярні функціонали; властивості узагальнених функцій; наближення сингулярних функціоналів регулярними; δ -функція; δ -подібна послідовність регулярних функціоналів; слабка збіжність регулярних функціоналів; теорема про слабку збіжність δ -подібної послідовності; регуляризація функціоналів за *Адамаром*; диференціювання та інтегральні перетворення узагальнених функцій)

Тема 3. Диференціальні оператори теорії поля та інтегральні формули (класичні та узагальнені означення градієнту скалярного поля, дивергенції та ротору векторного поля; класичні та узагальнені формули *Стокса* та *Остроградського-Гауса*)

Тема 4. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних із сталими коефіцієнтами (поняття фундаментального розв'язку лінійного диференціального оператора; теорема *Мальгранжа-Ерєнпрайза* про існування фундаментального розв'язку лінійного диференціального оператора; побудова розв'язків початкових та крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь як інтегральних формул, тобто згорток відповідних фундаментальних розв'язків із даними задач)

Змістовий модуль 2. Узагальнені розв'язки рівнянь математичної фізики

Тема 5. Узагальнені розв'язки задачі *Діріхле* для рівнянь *Лапласа* та *Пуасона* (побудова фундаментальних розв'язків оператора *Лапласа* в \mathbb{R}^2 і в \mathbb{R}^n ($n > 2$) та регуляризація функціоналів; основна та допоміжні формули *Гріна*; узагальнені гармонічні функції)

Тема 6. Узагальнений розв'язок задачі *Koши* для рівняння теплопроводності (побудова фундаментальних розв'язків оператора теплопроводності в \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n , виведення інтегральних формул для розв'язків задач *Koши*)

Тема 7. Узагальнений розв'язок задачі *Koши* для хвильового рівняння (побудова фундаментальних розв'язків хвильового оператора в \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ; виведення інтегральних формул для розв'язків задач *Koши*)

Тема 8. Узагальнені функції та похідні за *Коломбо* та *Сато* (поширення теорії узагальнених функцій, відмінні від розподілів *Шварца*)

3. Рекомендована література

01. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 312 с.
02. *Агранович М.С.* Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами // *Успехи математических наук.* — 1961. — Т. 16, вып 2. — С. 27 — 93.
03. *Агранович М.С.* Обобщенные функции и соболевские пространства. — М.: Изд-во НМУ, 2003. — 67 с. (*Лекции Нового Московского Университета*)
04. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. — М.: Мир, 1968. — 276 с.

05. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 288 с. (*Справочная математическая библиотека*)
06. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — 2-е изд., испр. и дополн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 320 с. (*Современные физико-технические проблемы*)
07. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд., исправл. и дополн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 512 с.
08. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Задача Коши // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 32. — М.: ВИНТИ СССР, 1988. — С. 5 — 98. (*Итоги науки и техники*)
09. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 440 с. (*Обобщенные функции*; Выпуск 1)
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 308 с. (*Обобщенные функции*; Выпуск 2)
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 276 с. (*Обобщенные функции*; Выпуск 3)
12. *Демидов А.С.* Обобщенные функции в математической физике. Основные идеи и понятия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 112 с.
13. *Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И.* Введение в теорию обобщенных функций. — М.: МИАН, 2006. — 164 с. (*Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*; Вып. 5)
14. *Егоров Ю.В., Шубин М.А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 31. — М.: ВИНТИ СССР, 1988. — С. 5 — 125. (*Итоги науки и техники*)
15. *Егоров Ю.В.* К теории обобщенных функций // *Успехи математических наук.* — 1990. — Т. 45, вып. 5. — С. 3 — 40.
16. *Земанян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 400 с.
17. *Лопатинский Я.Б.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных. — К.: Наукова думка, 1980. — 216 с.
18. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике: Пер. с рум. — М.: Мир, 1978. — 520 с.
19. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Изд-во РУДН, 1997. — 447 с.
20. *Микусинский Я., Сикорский Р.* Элементарная теория обобщенных функций I: Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 78 с. (*Библиотека сборника Математика*)
21. *Микусинский Я., Сикорский Р.* Элементарная теория обобщенных функций II: Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 68 с. (*Библиотека сборника Математика*)
22. *Михайлов В. П., Гуцин А.К.* Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”. — М.: МИАН, 2007. — 146 с. (*Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*; Вып. 7)
23. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — 3-е изд., перераб. и доп. / Под ред. *О.А. Олейник.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 336 с.
24. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2-х т.: Т. 1. Псевдодифференциальные операторы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 360 с.
25. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2-х т.: Т. 2. Интегральные операторы Фурье: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 400 с.

26. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных: Пер. с англ. М.: Мир, 1959. — 132 с. (Библиотека сборника *Математика*)
27. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т.: Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 464 с.
28. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т.: Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 456 с.
29. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т.: Т. 3. Псевдодифференциальные операторы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 696 с.
30. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т.: Т. 4. Интегральные операторы Фурье: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 448 с.
31. *Шатира П.* Теория гиперфункций: Пер. с фр. — М.: Мир, 1972. — 144 с. (Библиотека сборника *Математика*)
32. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук: Пер. с франц. — М.: Мир, 1965. — 412 с.
33. *Colombeau J.F.* New Generalized Functions and Multiplication of Distribution. — Amsterdam: Elsevier, 1984. — xii + 376 p.
34. *Colombeau J.F.* Elementary Introduction to New Generalized Functions. — Amsterdam: Elsevier, 1984. — xiv + 282 p.
35. *Colombeau J.F.* Multiplication of Distribution. A Tool in Mathematics, Numerical Engineering and Theoretical Physics. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — x + 184 p.
36. *Kythe P.K.* Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications. — Boston: Birkhäuser, 1996. — xxiv + 414 p.
37. *Lützen J.* The Prehistory of the Theory of Distributions. — NY: Springer-Verlag, 1982. — viii + 232 p. (*Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, Vol. 7)
38. *Sato M.* Theory of Hyperfunctions I / *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*. — 1959. — Vol. 8, Part I. — P. 139 — 193.
39. *Sato M.* Theory of Hyperfunctions I / *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*. — 1960. — Vol. 8, Part II. — P. 387 — 437.
40. *Schwartz L.* Théorie des distributions. — Nouvelle éd., entièrement corrigée, refondue et augmentée. — Paris: Hermann, 1966. — xiv + 420 p.

Студенти, які обирають вибірково навчальну дисципліну «Основи теорії узагальнених функцій та її застосування», мають змогу послуговуватися конспектом лекцій, який також містить довідковий матеріал (що дозволяє не звертатися безпосередньо до дисциплін, вказаних в розділі «Міждисциплінарні зв'язки»), численні приклади розв'язання задач та задачі для самостійного розв'язання, перелік літератури та путівник до нього.

4. Форма підсумкового контролю успішності навчання: залік.

5. Засоби діагностики успішності навчання: кнр.