Researches in Mathematics
Res. Math. **27**(1), 2019, p. 67–74
doi:10.15421/241907

https://vestnmath.dnu.dp.ua
ISSN (Print) 2664-4991
ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

M. Ye. Tkachenko*, **V. M. Traktynska****
* Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro, 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*
** Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro, 49050. *E-mail: traktynskaviktoriia@gmail.com*

The uniqueness of the best non-symmetric L_1-approximant with a weight for continuous functions with values in KB-space

Досліджена задача єдиності елемента найкращого несиметричного наближення у метриці простору L_1 з вагою для неперервних на метричному компакті Q функцій зі значеннями в строгонормованому напіввпорядкованому KB-просторі X довільними підпросторами H простору $C(Q, X)$ неперервних на Q функцій зі значеннями в KB-просторі X з нормою $||\cdot||_X$. У термінах класів так званих "тестових"функцій $H' = \{h \in C(Q, X) : \quad \exists g_h \in H \quad \forall x \in Q \quad h(x) = \pm g_h(x)\}$ отримана характеризація підпросторів єдиності елемента найкращого (α, β)-наближення в інтегральній метриці $||f||_{1;\theta;\alpha,\beta} = \int\limits_Q \theta(x)||\alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)||_X d\mu(x)$ з вагою θ для функцій непрервних на метричному компакті Q зі значеннями в строго нормованому KB-просторі X зі строго монотонною нормою.

Такий клас "тестових"функцій H', що характеризує скінченномірні підпростори єдиності елемента найкращого L_1-наближення для неперервних на відрізку $[a, b]$ дійсних функцій у випадку $\alpha = \beta = 1$ ввів у розгляд Ганс Штраус.

За допомогою вказаного класу функцій підпростори простору непрервних на метричному компакті функцій зі значеннями в KB-просторі легко досліджувати на єдиність елемента найкращого наближення в інтегральній метриці, оскільки запропонований клас є набагато вужчим, ніж увесь простір $C(Q, X)$. У статті подано декілька необхідних і достатніх умов, які зводять задачу дослідження єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення з вагою для функцій простору $C(Q, X)$ довільним підпростором цього простору до аналогічної задачі для "тестових"функцій.

Крім того, доведено, що, якщо підпростір простору $C(Q, X)$ задовольняє A-властивості, яка також була введена до розгляду Гансом Штраусом, то вказаний підпростір є простором єдиності елемента найкращого (α, β)-наближення в інтегральній метриці з вагою для неперервних на метричному компакті Q функцій зі значеннями у строго нормованому KB-просторі X зі строго монотонною нормою для довільних вимірних вагових функцій θ таких, що $0 < inf\{\theta(x) : x \in Q\} \leq sup\{\theta(x) : x \in Q\} < \infty$.

Ключові слова: єдиність елемента найкращого несиметричного наближення з вагою, (α, β)-наближення з вагою, інтегральна метрика, KB-простір.

Исследована задача единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения с весом для непрерывных на метрическом компакте Q функций со

значениями в строгонормированном полуупорядоченном KB-пространстве X произвольными подпространствами пространства $C(Q, X)$ непрерывных на Q функций со значениями в X. В терминах классов "тестовых"функций получена характеризация подпространств единственности элемента наилучшего (α, β)-приближения в интегральной метрике с весом для функций пространства $C(Q, X)$.

Ключевые слова: единственность элемента наилучшего несимметричного приближения с весом, (α, β)-приближение с весом, интегральная метрика, KB-пространство.

The task of uniqueness of the best non-symmetrical L_1-approximant with a weight for continuous functions on metric compact set Q with values in strictly convex partially ordered KB-space X by a subspaces of space $C(Q, X)$ of continuous functions on Q with values in X is investigated. The characterization of subspaces of uniqueness of the best (α, β)-approximant in integral metric with a weight for functions of space $C(Q, X)$ in the terms of classes of “test” functions is found.

Key words: uniqueness of the best non-symmetric approximant with a weight, (α, β)-approximation with a weight, integral metric, KB-space.

MSC2010: Pri 41A52, Sec 41A65, 46B40

Let X be a partially ordered set and its order is consistent with algebraic operations.

The following definitions are given in [5] .

Let $E \subset X$ be a non-empty set. The element $y \in X$ is called supremum (infimum) of the set E and is denoted by $\sup E$ ($\inf E$) if the following conditions hold:

1) $x \leq y$ ($x \geq y$) $\forall x \in E$;

2) for any element $z \in X$ such that $x \leq z$ ($x \geq z$), it follows that $y \leq z$ ($y \geq z$).

The supremum of the set E is denoted by $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$ and the infimum of the set E is denoted by $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ if the set E consists of elements $x_1, x_2, ..., x_n$.

Suppose in the space X for any two elements $x, y \in X$ there exists their supremum $x \vee y$; then the element $x_+ = x \vee 0$ is called the positive part of the element $x \in X$, the element $x_- = (-x) \vee 0$ is its negative part, and the element $|x| = x_+ + x_-$ is the module of the element x. Two elements $x, y \in X$ are called disjunctive and are denoted by $x \Delta y$ if $|x| \wedge |y| = 0$.

Let a order of a partially ordered vector space X is consistent with algebraic operations and for any two elements $x, y \in X$ there exists their supremum $x \vee y$. Then a space X is called a KN-lineal if in X the monotone norm is defined, i. e., $|x| \leq |y| \Rightarrow ||x||_X \leq ||y||_X$.

A KN-lineal is called a KN-space (or $K_\sigma N$-space) if for any (or any numbered) non-empty set bounded above or below there exists the its upper or lower bound respectively.

Let X is a KN-linear and X^* is a space of linear continuous in the usual sense functionals on X, then X^* is a complete KN-space in the usual sense.

A $K_\sigma N$-space is called a KB-space if its norm satisfies two conditions:

1) $||x_n||_X \to 0$ if $x_n \downarrow 0$;

2) $||x_n||_X \to +\infty$ if $x_n \uparrow +\infty$ ($x_n \geq 0$).

Let Q be a metric compact set with metric ρ, Σ be a σ-field of Borel subsets of Q, μ be a non-atomic non-negative finite measure. Furthermore, assume that μ be positive on each non-empty open subset of Σ.

Let X be a KB-space with the norm $||\cdot||_X$.

By $C(Q,X)$ denote the space of continuous functions $f: Q \to X$ and by Θ denote the set of all μ-measurable real functions θ on Q such that $0 < inf\{\theta(x) : x \in Q\} \leq sup\{\theta(x) : x \in Q\} < \infty$.

For any $x \in Q$ and positive numbers α, β put

$$|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x),$$

$$||f(x)||_{X;\alpha,\beta} = ||\alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)||_X,$$

where $f_\pm(x) = (\pm f(x)) \vee 0$.

Suppose the space $C(Q,X)$ is supplied with the non-symmetric L_1-norm with a weight $\theta \in \Theta$:

$$||f||_{1;\theta;\alpha,\beta} = \int\limits_Q \theta(x)||f(x)||_{X;\alpha,\beta} d\mu(x).$$

For $f \in C(Q,X)$, $H \subset C(Q,X)$ and $\theta \in \Theta$ the quantity

$$E(f,H)_{1;\theta;\alpha,\beta} = \inf_{g\in H} \|f-g\|_{1;\theta;\alpha,\beta} \tag{1}$$

is called the best (α,β)-approximation of a function f by a set H in the metric L_1 with a weight θ. The function $g^* \in H$ is the best (α,β)-approximant of a function f by elements of a set H in the metric L_1 with a weight θ if g^* realizes the greatest lower bound in the equality (1). By $P^{(\alpha,\beta)}_{H,\theta}(f)$ denote the set of the best (α,β)-approximant of a function f by a set H with a weight θ, by Z_f denote the set of zeros for a function f, and $N_f = Q \setminus Z_f$.

For $f, g \in C(Q,X)$ put

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_-(f,g)_{1;\theta} = \lim_{t\to -0} \frac{||f+tg||_{1;\theta;\alpha,\beta} - ||f||_{1;\theta;\alpha,\beta}}{t}$$

and for $x \in Q$ put

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_-(f(x),g(x))_X = \lim_{t\to -0} \frac{||(f+tg)(x)||_{X;\alpha,\beta} - ||f(x)||_{X;\alpha,\beta}}{t}.$$

For $\alpha = \beta = 1$ such functional was considered in [2] and [1].

The following theorem (see [6]) is needed for the sequel.

Theorem 1. *Let H be a subspace of $C(Q,X)$. An element g^* is the best (α,β)-approximant of a function $f \in C(Q,X)$ by elements from H in the metric L_1 with a weight $\theta \in \Theta$ iff $\forall g \in H$*

$$\int\limits_{N_{f-g^*}} \theta(x)\tau^{(\alpha,\beta)}_-(f-g^*,g)_X d\mu(x) \leq \int\limits_{Z_{f-g^*}} \theta(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x). \tag{2}$$

A normalized space X is called strictly convex if for any $x, y \in X$ such that $||x+y|| = ||x|| + ||y||$, it follows that there is $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $y = \lambda \cdot x$.

Let X be a strictly convex KB-space with a strictly monotone norm, i.e., $|x| < |y| \Rightarrow ||x||_X < ||y||_X$.

Let H be a subspace of the space $C(Q, X)$. We set

$$H' = \{h \in C(Q, X) : \quad \exists g_h \in H \quad \forall x \in Q \quad h(x) = \pm g_h(x)\}.$$

Such classes were considered in [1]. Originaly such sets were introduced by Hans Strauss [3] for $X = \mathbb{R}$, $Q = [a, b]$.

The following lemma is needed for the sequel.

Lemma 1. *Suppose $h \in H' \setminus \{0\}$, $0 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$, and $g_h \in H$ is a function such that $h(x) = \pm g_h(x), \forall x \in Q$; then $g_h \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$.*

Proof. It is clear that $Z_h \subset Z_{h-g_h}$ and $h(x) - g_h(x) = 2h(x)$ $\forall x \in N_{h-g_h}$.

Since $0 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$, using Theorem 1 and the properties of $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$, we get

$$\int\limits_{N_{h-g_h}} \theta(x) \cdot \tau_-^{(\alpha,\beta)}((h - g_h)(x), g(x))_X d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{N_{h-g_h}} \theta(x) \cdot \tau_-^{(\alpha,\beta)}(2h(x), g(x))_X d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{N_h} \theta(x) \cdot \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))_X d\mu(x) - \int\limits_{Z_{h-g_h} \setminus Z_h} \theta(x) \cdot \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))_X d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{Z_h} \theta(x) \cdot ||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) + \int\limits_{Z_{h-g_h} \setminus Z_h} \theta(x) \cdot ||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Z_{h-g_h}} \theta(x) \cdot ||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) \qquad \forall g \in H.$$

Thus $g_h \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$.

Using the methods of Strauss [3] and Babenko [4] we prove the following theorem, it generalizes results of [3], [2], [4].

Theorem 2. *Let X be a strictly convex KB-space with a strictly monotone norm, H be a subspace of $C(Q, X)$. Each function $f \in C(Q, X)$ has at most one best (α, β)-approximant with a weight $\theta \in \Theta$ by elements from H iff each function $h \in H'$ has at most one best (α, β)-approximant with a weight θ by subspace H.*

Proof. The necessary condition is obvious. Prove the sufficient condition. Suppose each function $h \in H'$ has at most one best (α, β)-approximant with a weight θ by subspace H. Assume the converse. Then there exists a function $f \in C(Q, X)$ such that $p_1, p_2 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(f)$, $p_1 \neq p_2$. Then $\frac{p_1+p_2}{2} \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(f)$ and

$$\|f - \frac{p_1 + p_2}{2}\|_{1;\theta;\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\|f - p_1\|_{1;\theta;\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\|f - p_2\|_{1;\theta;\alpha,\beta}$$

or

$$\int\limits_Q \theta(x) \left\| \left(f - \frac{p_1 + p_2}{2}\right)(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_Q \frac{1}{2}\theta(x) \left(\|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta}\right) d\mu(x).$$

Since norms are continuous, subintegral functions are not negative, and measure μ is positive on each non-empty open subset of Q, we obtain

$$\|(f-p_1)(x)+(f-p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} = \|(f-p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta}+\|(f-p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \quad \forall x \in Q. \quad (3)$$

Since norm of X is monotonous and $(f + g)_\pm \leq f_\pm + g_\pm$, it follows that

$$\|(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \leq$$

$$\leq \|\alpha(f - p_1)(x)_+ + \alpha(f - p_2)(x)_+ + \beta(f - p_1)(x)_- + \beta(f - p_2)(x)_-\|_X \leq$$

$$\leq \|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \quad \forall x \in Q.$$

Using (3) and strictly monotony of norm, we get

$$((f - p_1)(x) + (f - p_2)(x))_\pm = (f - p_1)(x)_\pm + (f - p_2)(x)_\pm \quad \forall x \in Q \quad (4)$$

or

$$|(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)| = |(f - p_1)(x)| + |(f - p_2)(x)| \quad \forall x \in Q \quad (5)$$

and $\forall x \in Q$

$$\left\| |(f - p_1)(x)|_{\alpha,\beta} + |(f - p_2)(x))|_{\alpha,\beta} \right\|_X = \|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta}. \quad (6)$$

Note that X is a strictly convex KB-space. Then equality (6) holds true iff for any $x \in Q$ $|(f-p_1)(x)|_{\alpha,\beta} = 0$ or $|(f-p_2)(x)|_{\alpha,\beta} = 0$ or $|(f-p_1)(x)|_{\alpha,\beta} = c(x)|(f-p_2)(x)|_{\alpha,\beta}$, where $c(x)$ is a positive real function.

The last equality corresponds following equality $\forall x \in Q$

$$\alpha\left[(f - p_1)(x)_+ - c(x)(f - p_2)(x)_+\right] + \beta\left[(f - p_1)(x)_- - c(x)(f - p_2)(x)_-\right] = 0.$$

Using (4), we get

$$(f - p_1)(x)_\pm \Delta (f - p_2)(x)_\pm \quad \forall x \in Q, \quad (7)$$

and from Theorem III.6.3 in [5] it follows that

$$\alpha((f-p_1)(x)_+ - c(x)(f-p_2)(x)_+)\Delta\beta((f-p_1)(x)_- - c(x)(f-p_2)(x)_-) \quad \forall x \in Q.$$

Therefore, $\forall x \in Q$

$$\alpha((f-p_1)(x)_+ - c(x)(f-p_2)(x)_+) = 0$$

and

$$\beta((f-p_1)(x)_- - c(x)(f-p_2)(x)_-) = 0.$$

Hence equality (6) holds true iff $\forall x \in Q$ $(f-p_1)(x) = 0$ or $(f-p_2)(x) = 0$ or $(f-p_1)(x) = c(x)(f-p_2)(x)$, where $c(x)$ is a positive real function and $c(x) \neq 1 \quad \forall x \in N_{p_1-p_2}$.

We set

$$f_0(x) = f(x) - \frac{(p_1+p_2)(x)}{2}.$$

Hence there exists a real function $\gamma(x)$ such that $f_0(x) = \gamma(x)(p_1-p_2)(x)$ for $x \in N_{p_1-p_2}$, and $0 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(f_0)$. It is clear that $Z_{f_0} \subset Z_{p_1-p_2}$.

Let $h(x) = \mathrm{sgn} x(p_1-p_2)(x)$ for $x \in N_{p_1-p_2}$, and $h(x) = 0$ for $x \in Z_{p_1-p_2}$. It is clear that $h \in H'$, where $g_h = p_1 - p_2$, $h \neq 0$.

Since $0 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(f_0)$ it follows that $\forall g \in H$

$$\int\limits_{N_h} \theta(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x),g(x))_X d\mu(x) = \int\limits_{N_h} \theta(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))_X d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{N_{f_0}} \theta(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))_X d\mu(x) - \int\limits_{Z_h \setminus Z_{f_0}} \theta(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))_X d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{Z_{f_0}} \theta(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) + \int\limits_{Z_h \setminus Z_{f_0}} \theta(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) = \int\limits_{Z_h} \theta(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x).$$

Therefore, $0 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$, and by Lemma 1 $p_1 - p_2 \in P_{H,\theta}^{(\alpha,\beta)}(h)$. This contradicts the assumption. The theorem is proved.

The following corollary follows from Theorem 2 and Lemma 1.

Corollary 1. *Let X be a strictly convex KB-space with a strictly monotone norm, H be a subspace of space $C(Q,X)$. Each function $f \in C(Q,X)$ has at most one the best (α,β)-approximant with a weight $\theta \in \Theta$ by elements from H iff for any function $h \in H' \setminus \{0\}$ the zero element is not the best (α,β)-approximant with a weight $\theta \in \Theta$ by elements from H.*

The Corollary 2 follows from Corollary 1 and Theorem 1.

Corollary 2. *Let X be a strictly convex KB-space with a strictly monotone norm, H be a subspace of space $C(Q,X)$. Each function $f \in C(Q,X)$ has at most one the best (α,β)-approximant with a weight $\theta \in \Theta$ by elements from H iff for any function $h \in H' \setminus \{0\}$ there exists a function $g_0 \in H$ such that*

$$\int\limits_{N_h} \theta(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g_0(x))_X d\mu(x) > \int\limits_{Z_h} \theta(x)||g_0(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x).$$

Further, following Strauss [3] and Kroo [1] we consider next property of subspace H.

The subspace $H \subset C(Q,X)$ is called an A-subspace (or is said to satisfy the A-property) if for any $h \in H' \setminus \{0\}$ there exists a $g \in H$ such that

(i) $g(x) = 0$ a.e. on Z_h;

(ii) $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))_X \geq 0$ a.e. on N_h and this inequality is strict on a subset of N_h of positive measure.

Theorem 3. *Let X be a strictly convex KB-space with a strictly monotone norm and assume that H is an A-subspace of $C(Q,X)$. Then each function $f \in C(Q,X)$ has at most one best (α,β)-approximant with a weight $\theta \in \Theta$ by elements from H for every $\theta \in \Theta$.*

Proof. Assume the converse. Then $f \in C(Q,X)$ has more than one best (α,β)-approximant with some weight $\widetilde{\theta} \in \Theta$ by H. By Corollary 2 there exists a $\widetilde{h} \in H' \setminus \{0\}$ such that

$$\int\limits_{N_{\widetilde{h}}} \widetilde{\theta}(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(\widetilde{h}(x), g(x))_X d\mu(x) \leq \int\limits_{Z_{\widetilde{h}}} \widetilde{\theta}(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x),$$

for any $g \in H$.

Since H is an A-subspace, we see that by (ii) there exists a $g \in H$ such that $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(\widetilde{h}(x), g(x))_X \geq 0$ a.e. on $N_{\widetilde{h}}$ and this inequality is strict on a subset of $N_{\widetilde{h}}$ of positive measure. Hence $\int\limits_{N_{\widetilde{h}}} \widetilde{\theta}(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(\widetilde{h}(x), g(x))_X d\mu(x) > 0$. Besides, by (i) $\int\limits_{Z_{\widetilde{h}}} \widetilde{\theta}(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) = 0$.

This contradiction proves the theorem.

References

1. *Kroo A.* A general approach to the study of Chebyshev subspaces in L_1-approximation of continuous functions // J. Approx. Theory. 1987. 51. P. 98–111.

2. *Pinkus A.* L_1-approximation. Cambridge: Cambridge Univ.Press, 1989. 239 p.

3. *Strauβ H.* Eindeutigkeit in der L_1-approximation // Math.Z. 1981. 176. S. 63–74.

4. *Бабенко В. Ф., Ткаченко М.Е.* Вопросы единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения непрерывных функций со значениями в КВ-пространствах // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, № 7. С. 867–878.
5. *Вулих, Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматтиз, 1961. 407 с.
6. *Ткаченко М. Є., Трактинська В. М.* Критерії елемента найкращого несиметричного наближення для функцій зі значеннями у КВ-просторі у метриках просторів L_p і L_1 з вагою // Вісн. ДНУ. Сер.: Математика. 2017. Вип. 22. С. 97–102.

Received: 01.05.2019. *Accepted:* 10.06.2019