Researches in Mathematics https://vestnmath.dnu.dp.ua
Res. Math. **27**(1), 2019, p. 39–44 ISSN (Print) 2664-4991
doi:10.15421/241904 ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

A. M. Pasko*
* Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro 49050. *E-mail:pasko08@meta.ua*

The homology groups of the space $\Omega_n(m)$

У статті введено простір $\Omega_n(m)$, як певне узагальнення просторів узагальнених досконалих сплайнів Ω_n. Сплайни простору $\Omega_n(m)$, на відміну від сплайнів простору Ω_n, набувають значень не ± 1, а значень серед множини G_m, яка складається з m рівновіддалених вузлів одиничного кола комплексної площини. Як і для простору Ω_n, топологія простору $\Omega_n(m)$ наслідувана з L_1. При $m = 2$ простір $\Omega_n(2)$ збігається з простором Ω_n. Систематичне дослідження гомотопічних інваріантів простору Ω_n було започатковане В.І. Рубаном, який побудував клітинну структуру цього простору, і з її допомогою 1985 року знайшов групи n-вимірних гомологій простору Ω_n, а 1999 року повністю розв'язав задачу відшукання груп його когомологій. В подальшому гомотопічні інваріанти простору Ω_n вивчалися В.А. Кощеевим, який встановив однозв'язність Ω_n, та А.М. Паськом, який знайшов гомотопічні групи цих просторів у вимірностях від 2 до n. Задля вивчення гомотопічних інваріантів простору $\Omega_n(m)$ введено клітинну структуру цього простору, яка узагальнює побудовану В.І. Рубаном клітинну структуру простору Ω_n. Кожна клітина простору $\Omega_n(m)$ має вигляд $c^q(l_0, l_1, \ldots, l_q)$, де $q, q \leq n$, є кількість вузлів сплайнів, з яких складається клітина, а $l_0, l_1, \ldots, l_q$ є номери значень множини G_m, яких набувають сплайни на відповідних інтервалах, для кожної клітини побудовано характеристичне відображення. Таким чином, $\Omega_n(m)$ перетворено на n-вимірний клітинний простір. Побудована клітинна структура простору $\Omega_n(m)$ дозволяє легко обчислити кількість клітин у кожній вимірності. Ейлерова характеристика будь-якого скінченновимірного клітинного простору виражається через кількості клітин у кожній вимірності, що дозволило обчислити ейлерову характеристику просторів $\Omega_n(m)$, потрібну для обчислення його гомологічних груп. З допомогою введеної клітинної структури простору $\Omega_n(m)$ також з'ясовано вигляд межового оператора на групах ланцюгів цього простору. Для обчислення гомологічних груп клітинного простору $\Omega_n(m)$ введено оператор $D : C_q(\Omega_n(m)) \to C_{q+1}(\Omega_{n+1}(m))$, що діє з групи q-вимірних ланцюгів простору $\Omega_n(m)$ у групу $q+1$-вимірних ланцюгів простору $\Omega_{n+1}(m)$. Зазначимо, що простір $\Omega_n(m)$ завжди є підмножиною простору $\Omega_{n+1}(m)$, що дозволяє розглянути оператор вкладення $i : \Omega_n(m) \to \Omega_{n+1}(m)$, який породжує гомоморфізм $\bar{i} : C_q(\Omega_n(m)) \to C_q(\Omega_{n+1}(m))$ відповідних груп клітинних ланцюгів. Побудований вище оператор D разом із формулою для обчислення межового оператора дозволяє довести що у всіх вимірностях $q \geq 1$ оператор $\bar{i}$ ланцюгово гомотопний тривіальному, а отже ним породжений оператор i_* тривіальний. Тривіальність цього оператора, разом із технікою точної гомологічної послідовності пари дозволяє встановити тривіальність груп гомологій простору $\Omega_n(m)$ у вимірностях від 1 до $n-1$. Оскільки простір однозв'язний, то його 0-вимірна група гомологій ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Отже, нами знайдено всі гомологічні групи просторів $\Omega_n(m)$ у вимірностях від 0 до $n-1$. Підрахунок ейлерової характеристики дозволяє знайти n-вимірні групи гомологій.

Key words: узагальнені досконалі сплайни, клітинний простір, групи гомологій

The spaces $\Omega_n(m)$ that generalize the spaces Ω_n are introduced. In order to investigate the homotopy invariants of the space $\Omega_n(m)$ the CW-structure of the space is $\Omega_n(m)$ is build. Using exact homology sequence the homology groups of the space $\Omega_n(m)$ are calculated.

Key words: generalized perfect spline, CW-complex, homology groups

MSC2010: Pri 41A10, Sec 41A44, 46E20

Let $\omega(t), t \geq 0$, be the non-negative, continuous increasing function, $\omega(0) = 0$. Consider integer $q \geq 0$, integer $m \geq 2$ and the system of the knots

$$0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1.$$

Let $F(\eta, s, t)$ be the function (ω-spline)

$$F(\eta, s, t) = s_k \cdot \min\{\omega(t - \eta_{k-1}), \omega(\eta_k - t)\}, \qquad for \quad t \in [\eta_{k-1}, \eta_k], \tag{1}$$

with

$$s_k \in G_m = \left\{ e^{i\frac{2\pi l}{m}} : l = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}.$$

Denote by $\Omega_n(m)$, $n \geq 2$, the subspace of the space $L_1[0,1]$ that consists of the splines (1) for $q \leq n$. The space $\Omega_n(2)$ coincides with the space Ω_n that has been studied in [1], [2], [4], [5]. V.I. Ruban [4], [5] has built CW structure on Ω_n and calculated the cohomologies of the space Ω_n

$$H^k(\Omega_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}^{\frac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}{3}}, & k = n, \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$$

V.A.Koshcheev [1] has proved that the spaces Ω_n are simply connected. A.M. Pasko [2] has established that the homotopy groups

$$\pi_k(\Omega_n) = \begin{cases} 0, & 2 \leq k \leq n-1, \\ \mathbb{Z}^{\frac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}{3}}, & k = n. \end{cases}$$

The space $\Omega_n(m)$ is the generalization of the space Ω_n. Thus the problem of finding of their homotopy invariants is of interest. In order to investigate the homotopy invariants of the space $\Omega_n(m)$ we will construct the structure of CW-complex on $\Omega_n(m)$ which is analogue of the CW-structure Ω_n build in [4], [5].

CW-complex is a Hausdorff space E written as a union

$$E = \bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{k \in I_q} e_k^q$$

of the non-overlapping sets e_k^q (q-cells) in such a way that any q-cell e_k^q has a continuous characteristic map $f_k^q : D^q \to E$ of closed q-dimensional ball D^q to E such that the restriction of f_k^q to IntD^q is a homeomorphism between IntD^q and e_k^q. Herewith E satisfies the conditions:

(C) the boundary $\dot{e}_k^q = \bar{e}_k^q \setminus e_k^q$ of any q-cell lies in the union of a finite number of j-cells for $j < q$;

(W) subset $F \subset E$ is closed if and only if all the intersections $F \bigcap \bar{e}_k^q$ are closed.

The q-skeleton of the CW-complex E is the union $\text{ske}_q(E) = \bigcup\limits_{j \le q} e_k^j$. The CW-complex E is said to be finite if it consists of finite amount of cells.

Let q be the nonnegative integer. Consider the collection of integers

$$l_0, l_1, \ldots, l_q \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Let the q-cell $c^q(l_0, l_1, \ldots, l_q)$ be the set of the ω-splines (1) for

$$s_k = e^{i\frac{2\pi l_{k-1}}{m}}, k = 1, 2, \ldots, q+1. \tag{2}$$

Thus

$$\Omega_n(m) = \bigcup_{q=0}^{n} \bigcup_{l_0, l_1, \ldots, l_q} c^q(l_0, l_1, \ldots, l_q).$$

In order to build characteristic map of q-cell $c^q(l_0, l_1, \ldots, l_q)$ write the closed ball D^q as the simplex

$$B^q = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q : x_k \ge 0, \ \sum_{k=0}^{q} x_k = 1\}.$$

For any $x = (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in B^q$ consider the system of knots

$$\eta_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} x_j, \ k = 1, \ldots, q+1, \ \eta_0(x) = 0, \quad \eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \ldots, \eta_{q+1}(x)), \tag{3}$$

Then define the characteristic map $\pi^q_{l_0, l_1, \ldots, l_q} : B^q \longrightarrow \Omega_n(m)$ of the cell $c^q(l_0, l_1, \ldots, l_q)$ by the equality

$$\pi^q_{l_0, l_1, \ldots, l_q}(x) = F(\eta(x), s, *),$$

where the system of knots $\eta(x)$ is defined by (3) and the system of coefficients $s = \{s_k\}$ is defined by (2).

Consider CW-complex E. The set of the q-cells of E may be used as the basis of a free abelian group $C_q(E)$. Elements of $C_q(E)$ are called q-chains. There are the homomorphisms of groups $\partial = \partial_q : C_q(E) \to C_{q-1}(E)$. This homomorphisms are called boundary operators. Consider the groups $Z_q(E) = \text{Ker}\partial_q$ (the groups of q-cycles) and $B_q(E) = \text{Im}\partial_{q+1}$ (the groups of q-boundaries). The identity $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ implies $B_q(E) \subset Z_q(E)$ that allows to define the homology groups $H_q(E) = Z_q(E)/B_q(E)$.

It is obvious that the boundary of the q-cell $c^q(l_0, l_1, \dots, l_q)$ of the space $\Omega_n(m)$ is given by

$$\partial c^q(l_0, l_1, \dots, l_q) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k c^{q-1}(l_0, \dots \hat{l}_k \dots l_q), \tag{4}$$

where the sequence $(l_0, \dots \hat{l}_k \dots l_q)$ is $(l_0, \dots, l_{k-1}, l_{k+1} \dots l_q)$.

The sum

$$\chi(E) = \sum_k (-1)^k \mathrm{rank} H_k(E)$$

is called the Euler characteristic of a space E. A.M. Pasko and Y.O. Orekhova [3] proved the following lemma.

Lemma 1. *The Euler characteristic of the space $\Omega_n(m)$ equals*

$$\chi\left(\Omega_n(m)\right) = \frac{m}{m+1}\left(1 + (-1)^n m^{n+1}\right). \tag{5}$$

Proof. For the sake of completeness let us prove the lemma. It is known that the Euler characteristic of the finite CW-complex E equals

$$\chi(E) = \sum_k (-1)^k v_k,$$

where v_k is the amount of the k-cells of E. The amount of the q-cells $c^q(l_0, l_1, \dots, l_q)$ is equal m^{q+1}, so

$$\chi\left(\Omega_n(m)\right) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q m^{q+1} = \frac{m + (-1)^n m^{n+2}}{m+1} = \frac{m}{m+1}\left(1 + (-1)^n m^{n+1}\right).$$

The proof is completed.

The main result of our paper is the following theorem.

Theorem 1. *The homology groups of the space $\Omega_n(m)$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, are equal*

$$H_k\left(\Omega_n(m)\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, n, \\ \mathbb{Z}^{\frac{m^{n+2} + (-1)^{n+1}}{m+1}}, & k = n. \end{cases} \tag{6}$$

Proof of theorem. Consider the homomorphism $D : C_q(\Omega_n(m)) \to C_{q+1}(\Omega_{n+1}(m))$ defined on the generators by the equality

$$Dc^q(l_0, l_1, \dots, l_q) = c^{q+1}(0, l_0, l_1, \dots, l_q).$$

By virtue of (4)

$$\partial D c^q = c^q - D\partial c^q, \tag{7}$$

for any q-cell $c^q \in C_q(\Omega_n(m)), q \geq 1$. The inclusion $i : \Omega_n(m) \to \Omega_{n+1}(m)$ induces the homomorphism $\bar{i} : C_q(\Omega_n(m)) \to C_q(\Omega_{n+1}(m))$ of the groups of q-chains and the homomorphism $i_* : H_q(\Omega_n(m)) \to H_q(\Omega_{n+1}(m))$ of the homology groups. It follows from (7) that

$$\bar{i}c^q = \partial D c^q + D\partial c^q, \quad q \geq 1.$$

Therefore for any $q \geq 1$ the homomorphism $i_* : H_q(\Omega_n(m)) \to H_q(\Omega_{n+1}(m))$ is trivial: $i_* = 0$.

It is obvious that for $q \leq n$ the q-skeleton $\mathrm{ske}_q(\Omega_n(m)) = \Omega_q(m)$, so the relative homology groups

$$H_k(\Omega_n(m), \Omega_{n-1}(m)) = 0, \quad k < n. \tag{8}$$

Consider the exact homology sequence of the pair $((\Omega_{n+1}(m), \Omega_n(m))$, $(k > 0)$

$$... \to H_{k+1}(\Omega_{n+1}(m), \Omega_n(m)) \xrightarrow{\partial} H_k(\Omega_n(m)) \xrightarrow{i_*=0} H_k(\Omega_{n+1}(m)) \xrightarrow{j_*}$$

$$\xrightarrow{j_*} H_k(\Omega_{n+1}(m), \Omega_n(m)) \to ....$$

By virtue of (8) for $1 \leq k < n$ it turns into

$$0 \to H_k(\Omega_n(m)) \xrightarrow{i_*=0} H_k(\Omega_{n+1}(m)) \to 0.$$

This implies that

$$H_k(\Omega_n(m)) = 0, \quad 1 \leq k < n. \tag{9}$$

The space $\Omega_n(m)$ is path-connected, so

$$H_0(\Omega_n(m)) = \mathbb{Z}. \tag{10}$$

It follows from (5), (9), (10) that the Euler characteristic of the space $\Omega_n(m)$

$$\chi(\Omega_n(m)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{rank} H_k(\Omega_n(m)) = 1 + (-1)^n \mathrm{rank} H_n(\Omega_n(m)) =$$

$$= \frac{m}{m+1}\left(1 + (-1)^n m^{n+1}\right).$$

Therefore

$$\mathrm{rank} H_n(\Omega_n(m)) = \frac{m^{n+2} + (-1)^{n+1}}{m+1}.$$

The CW-complex $\Omega_n(m)$ has not the cells in the dimensions greater than n, so $H_n(\Omega_n(m))$ is a free abelian group and

$$H_n(\Omega_n(m)) = \mathbb{Z}^{\frac{m^{n+2}+(-1)^{n+1}}{m+1}}.$$

The proof is completed.

References

1. *Koshcheev V. A.* The fundamental groups of the spaces of generalized perfect splines. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN V. 15, №1. (2009), 159–165.
2. *Pasko A. M.* On the homotopy of the spaces of generalized perfect splines. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **17** (2012), 138–140.
3. *Pasko A. M., Orekhova Y. O.* The Euler characteristic of the space $\Omega_n(m)$. Zbirnik centru naukovikh publikaciy "Veles"za materialami IV mizhnar. nauk.-prakt. konf. «Innovaciyni pidkhodi i suchasna nauka». March, p. 2. Kiyiv. (2018), 65–66
4. *Ruban V. I.* The CW-structure of the spaces of Ω-splines. Issledovania po sovr. problemam summirovania i priblizhenia funkciy i ikh prilozheniam. Dnipropetrovsk. (1985), 39–40.
5. *Ruban V. I.* The CW-structure and the cohomology of the spaces of generalized perfect splines. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **4** (1999), 85–90.

Received: 02.04.2019. *Accepted:* 10.06.2019