

Голові разової спеціалізованої вченої ради
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
доктору фізико-математичних наук,
професору, професору кафедри
математичного аналізу та оптимізації
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
Когуту Петру Іллічу

ВІДГУК

офіційного опонента Шидліча Андрія Любомировича,
доктора фізико-математичних наук, старшого наукового співробітника
на дисертаційну роботу Козиненка Олександра Віталійовича
на тему **“Адаптивна анізотропна апроксимація
функцій багатьох змінних”**,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційну роботу О. В. Козиненка “Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних” присвячено розв’язанню низки класичних задач теорії апроксимації. У ній, зокрема, отримуються точні нерівності типу Колмогорова для функцій, заданих на додатній півосі, а також знаходяться точні порядкові оцінки величин найкращих адаптивних наближень класів Соболева функцій багатьох змінних за допомогою кусково-сталих на опуклих розбиттях функцій.

Нерівностями типу Колмогорова прийнято називати нерівності, у яких оцінюється норма проміжної похідної функції через норму самої функції та норму її похідної старшого порядку. Напрямок, пов’язаний з отриманням таких нерівностей, бере свій початок з відомих робіт Ж. Адамара, Г. Гарді, Дж. Літлвуда, А. Кнезера, а також робіт А. М. Колмогорова, який зробив значний внесок в їх дослідження. Нерівності такого типу отримано також у роботах Б. Д. Боянова, С. Карліна, Е. Ландау, А. Пінкуса, О. Ю. Шадріна та багатьох інших. Протягом останніх десятиріч даний напрям активно розвивається завдяки зусиллям Дніпровської математичної школи, до якої належить здобувач. Зокрема, значний внесок в розвиток даної тематики здійснили В. Ф. Бабенко, В. О. Кофанов, А. О. Лигун, Н. В. Парфінович, Д. С. Скороходов та ін. Дані нерівності викликають особливий інтерес математиків, оскільки вони, а також методи їх доведення мають широке застосування. Підтвердженням викладеного вище і є дисертаційне дослідження О. В. Козиненка, у якому отримано низку оригінальних і теоретично обґрунтованих результатів, і які, на наш погляд, є істотним внеском у даний напрям.

Адаптивна апроксимація функцій є одним із основних підрозділів сучасної теорії наближень.

Основоположними в цій тематиці вважаються дослідження С. Б. Стечкина 60-х років минулого століття, які присвячені відшукуванню критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. С. Б. Стечкину вдалося сформулювати такий критерій, запровадивши нову на той час апроксимативну характеристику, а саме величину найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою n -членних поліномів за даною системою. З того часу величини найкращих n -членних наближень та їх аналоги стали предметом досліджень провідних фахівців теорії наближень, зокрема, В. Ф. Бабенка, Е. С. Белінського, О. В. Давидова, Р. ДеВора, Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова та багатьох інших. Їхні дослідження сформувались в окремий напрямок теорії наближень, а результати, отримані в цьому напрямку, знаходять своє застосування в різноманітних галузях математики, зокрема, обчислювальній математиці, диференціальних рівняннях, геометричному моделюванні поверхонь, стисненні зображень, обробці даних ландшафтів та ін. Слід зазначити, що адаптивність розбиття області визначення функції є ключовим аспектом практичних задач, оскільки вона дозволяє адаптувати форму та розмір елементів розбиття до поведінки функції. З огляду на вище сказане, дослідження даної дисертаційної роботи, які стосуються оцінок величин найкращих адаптивних наближень класів Соболева функцій багатьох змінних за допомогою кусково-сталих функцій, представляють безумовний науковий інтерес. Ці дослідження, зокрема, можуть скласти основу для розробки нових ефективних методів обчислення у високорозмірних та складних задачах, що має також велике практичне значення.

Дисертаційна робота О. В. Козиненка має загальний обсяг у 117 сторінок і складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, одного додатку і списку використаних джерел із 84 найменувань.

У *вступі*, зокрема, висвітлено актуальність обраної теми, вказано мету, об'єкт, предмет дослідження, представлено наукову новизну і цінність отриманих результатів, вказано зв'язок дисертаційних досліджень з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара та іншими науковими програмами, наведено дані про апробацію результатів, а також коротко викладено зміст основної частини дисертації.

Перший розділ роботи присвячено розв'язанню задачі про знаходження точних нерівностей типу Тайкова-Шадріна (деякого підвиду нерівностей типу Колмогорова) у вагових просторах Лебега функцій заданих на дійсній півосі. У ньому, зокрема, отримано нерівності, у яких модуль значення проміжної похідної функції в деякій точці оцінюється через норму самої функції та норму її похідної старшого порядку, а також показано, що отримані оцінки є точними.

У *другому розділі* в просторах функцій, визначених на додатній півосі, отримано нові нерівності типу Колмогорова, які оцінюють L_∞ -норму $\|D_-^k f\|_\infty$ дробової похідної в сенсі Маршо функції f через L_p -норму самої функції $\|f\|_p$ та L_1 -норму її другої похідної $\|f''\|_1$. Одержані результати застосовано до розв'язання задачі про найкраще наближення оператора дробового диференціювання в сенсі Маршо D_-^k лінійними обмеженими операторами на класах $W_{p,1}^2$ функцій, які задаються обмеженням на похідну другого порядку.

У *третьому розділі* досліджується задача про оцінку найкращих адаптивних наближень

функцій багатьох змінних з класів Соболева $W_q^2(\Omega)$ за допомогою кусково сталих на опуклих розбиттях функцій. Адаптивність в назві цих величин полягає в тому, що спочатку розглядаються величини найкращих наближень довільної функції із заданих класів за допомогою кусково сталих на будь-яких фіксованих опуклих розбиттях функцій, а потім розглядається питання про відшукування розбиття, яке найкраще (в сенсі отриманих оцінок) адаптується до поведінки заданої функції. В результаті проведених досліджень отримано оцінки зверху для таких величин і, що є дуже важливим для подальших прикладних застосувань, розроблено алгоритм, який будує адаптивно уточнене підрозбиття, на якому досягається найкращий порядок даного наближення. Крім цього, у третьому розділі одержано оцінку знизу згаданих вище величин і встановлено їх порядок насичення (у певному сенсі), що, в свою чергу, говорить про певну завершеність даних досліджень.

Четвертий розділ присвячено задачі найкращого наближення функцій багатьох змінних кусково сталими функціями на так званих розріджених сітках. У цьому розділі, зокрема, отримано порядкові оцінки таких величин для функцій з деяких класів типу Соболева. У ньому також показано зв'язок наближення кусково сталими на розріджених сітках з наближенням поліномами Хаара, що, на нашу думку, є важливим як для подальшого вивчення найкращих адаптивних наближень, так і апроксимаційних властивостей поліномів Хаара.

У *Додатку А* наведено перелік статей і тез доповідей, у яких було висвітлено основні одержані результати, а також повні назви наукових конференцій та семінарів, на яких ці результати пройшли апробацію.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують новизну дослідження, значення його результатів, одержані дисертантом особисто. Результати дисертації опубліковано у 15 наукових працях, серед яких, зокрема, 1 стаття опублікована у високореєтинговому математичному журналі *Journal of Complexity* (SJR (2020) — Q2, Scopus (2023) — Q1, Web of Science (2023) — Q1), 1 стаття — у науковому фаховому виданні України — *Український математичний журнал*, англomовний переклад якого (*Ukrainian Mathematical Journal*) також міститься в міжнародних наукометричних базах (SJR (2021) — Q2, Scopus (2023) — Q4, Web of Science (2023) — Q4), і 2 статті в науковому фаховому виданні України (*Researches in Mathematics*, SJR (2023) — Q4). Достовірність результатів забезпечується строгим доведенням теорем, які з достатньою повнотою наведені в дисертації.

До змісту та оформлення дисертації є низка зауважень і побажань. Наведемо основні з них:

1. На стор. 2 (4-й абзац) при описі результатів першого розділу замість “класів $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ і $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ ” слід писати “просторів $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ і $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ ”. Крім цього, для кращого розуміння варто також було вказати, що це деякі вагові простори Лебега. Аналогічно варто було також коротко описати класи $W_{p,1}^2(\mathbb{R})$ (2-й абзац знизу), $W_p^{(1,\dots,1)}$ та W_∞^3 (стор. 3, 2-й абзац знизу та стор. 23, 1-й абзац).

2. На стор. 3 (1-й абзац) фразу “В результаті були отримані нові порядки збіжності просторів Соболева” варто сформулювати коректніше із врахуванням формули, яку наведено після неї. Наприклад, таким чином: “В результаті були отримані оцінки зверху для величин найкращих наближень функцій з класів Соболева кусково сталими на опуклих розбиттях функціями”. Крім

цього, у назву величин $E_N(f)_p$, на нашу думку, варто було додати слово “адаптивні” (“найкращі адаптивні наближення”), зазначивши, що адаптивність полягає в тому, що спочатку розглядаються величини найкращих наближень довільної функції із заданих класів за допомогою кусково сталих на будь-яких фіксованих опуклих розбиттях функцій, а потім розглядається питання про відшукування розбиття, яке найкраще (в сенсі отриманих оцінок) адаптується до поведінки заданої функції. Також у цьому ж абзаці замість “ L_p -метрична помилка” слід писати “ L_p -метрична похибка”.

3. На стор. 6 (публікація 3) замість “Ukr. Mat. Zhurn.” слід писати “Ukr. Math. J.” або ж навести точно дані україномовної версії цієї публікації (Укр. мат. журн., 2020, т. 72, № 10, С. 1372–1385) та відповідного її англomовного перекладу (Ukr. Math. J., 2021, v. 72, pp. 1579–1594). При описі тез публікацій варто було більше конкретизувати дані про їх видання. На стор. 20 (4-й абзац) замість “IOWAT?2021” слід писати “IOWAT-2021”.

4. На стор. 10 перелік умовних позначень варто доповнити множиною всіх комплексних чисел \mathbb{C} , оскільки такі числа також використовуються у роботі (див., наприклад, стор 13, 2-а стрічка знизу), а також додати строге означення величини $E_N(f)_p$ або ж посилання на відповідну сторінку. Крім цього, при описі множин H^ω та $H_p^\omega(\Omega)$ (стор. 11) слід користуватися загальноприйнятими означеннями (див., наприклад, відомі монографії з теорії апроксимації М. П. Корнейчука, В. К. Дзядика, О. І. Степанця та ін.).

5. На стор. 13 (1-й абзац знизу) замість “Перший раз такий показник з’явився...” слід писати “Перший раз така величина з’явилася”. Крім цього, в цьому ж абзаці замість “ $c_\alpha \in C$ ” слід писати “ $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ”, а замість “ $c_\alpha \in R$ ” – “ $c_\alpha \in \mathbb{R}$ ”.

6. На стор. 15 (1-й абзац) замість “А. А. Лігун” слід писати “А. О. Лигун”. На стор. 16 (3-й абзац) замість “Г. Г. Харді”, на стор. 24 (1-й абзац) замість “Г. Г. Гарді” та на стор. 25 (1-й абзац), стор. 39 (1-й абзац і далі у тексті) замість “Г. Г. Гарді ” слід писати “Г. Г. Гарді” (Годфрі Гарольд Гарді).

7. На стор. 17 завдання дослідження слід було виділити окремим пунктом, а не при формулюванні мети роботи. На стор. 18 наукову новизну отриманих результатів варто було конкретизувати, навівши їх подібно до того, як це зроблено на стор. 104–105 роботи (для яких саме класів та просторів отримано оцінки, побудовано алгоритми, доведено нерівності і т.п.).

8. На стор. 19 варто було чіткіше висвітлити основний внесок здобувача у спільні роботи, зазначивши при цьому конкретні твердження, які йому належать. Зокрема, не зовсім зрозумілою є фраза “У спільних статтях, де співавторами є О. В. Давидов та Д. С. Скороходов, було сформульовано постановки задач і проаналізовано вибір методів їх дослідження, а також обговорено одержані результати.”, а після неї “У праці [44] внесок кожного співавтора є рівнозначним та нероздільним.”

9. Перший розділ дисертаційної роботи присвячено отриманню нерівностей типу Тайкова-Шадріна для певних вагових просторів Лебега. Однак на стор. 21 у описі результатів розділу 1, а також на стор 37 у висновках до розділу 1 вказано, що “Перший розділ присвячено розв’язанню задачі про знаходження точного значення лінійного одновимірного поперечника класів функцій однієї змінної з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій...”.

Даний опис скоріш за все є помилкою редагування автора при підготовці тексту дисертації і його слід вилучити або переробити.

10. На стор. 24 означення просторів $L_p(G)$ слід було навести більш точніше, зокрема, зазначивши, що величина $\|x\|_{L_p(G)}$ існує і є скінченною. Крім цього, дане означення варто в роботі навести один раз і потім ним користуватися в інших розділах. На початку розділу 1 (стор. 25, 26) автору також варто було б навести не лише посилання на відповідні джерела, а й строгі означення поліномів Якобі, Лежандра та Ерміта, оскільки ці поліноми суттєво використовуються при формулюванні основних тверджень розділу.

11. На стор. 39 (ост. формула) і стор. 40 (2-а стр.) позначення величин " $\kappa(k, n)$ " та " $\chi(k, n)$ " варто було узгодити, вибравши одне з них. На стор. 42 (1-й абзац знизу) фразу "Дана робота має таку структуру." слід замінити, наприклад, такою "Даний розділ має таку структуру."

12. На стор. 56 у формулі (3.2) замість "and" слід писати "і". На стор. 59, 1-й абзац перед лемою 3.2.1 і далі у тексті, замість "полуадитивною" слід писати "напіваадитивною". Варто також уточнити позначення " $[\cdot]$ ". На стор. 67 у формулі (3.19) замість " $L_p(\omega)$ " слід писати " $L_p(\Omega)$ ". На стор. 77 (7-а стр. знизу) і далі у тексті замість "згідно до Леми..." слід писати "згідно з Лемою...".

13. Не зовсім природньою є структура розділу 3, у якому строгі означення просторів, класів та величин наводяться у підрозділі 3.5 (стор. 73), а не на початку розділу. При цьому в попередніх його підрозділах використовуються низка позначень і тверджень з цього підрозділу.

14. На стор. 85 (2-ий абзац) варто було навести більш строгі означення системи \mathcal{P} кількох накладених кубоїдних розбиттів Ω , а також оператора слабкого диференціювання D^k (3-й абзац знизу). На стор. 87 (3-й абзац знизу) варто було б також пояснити позначення $W_\infty^{(1,1,\dots,1)}$, наприклад, зазначивши, що $W_p^{(r_1, r_2, \dots, r_d)} = W_p^{\mathbf{r}}$, де $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$. На стор. 96 (1-й абзац після формули (4.5)) слід уточнити посилання "[?]".

15. У списку використаних джерел дані робіт [40] та [64] слід уточнити, вказавши відповідні сторінки (1-5 та 3-16). Крім цього, список використаних джерел, на нашу думку, варто було також доповнити роботами О.І. Степанця та А.С. Романюка, наприклад, навівши монографії

A. I. Stepanets, Methods of Approximation Theory, VSP, Leiden-Boston, 2005.

А. С. Романюк, Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных, Киев: Ин-т математики НАН України, 2012. (Праці Інституту математики НАН України; Т.93).

які містять, зокрема, важливі результати, з нелінійної апроксимації функцій однієї та багатьох змінних. Варто також було згадати роботи офіційного опонента, пов'язані з цією ж тематикою, наприклад,

A. L. Shidlich, Nonlinear approximation of the classes $\mathcal{F}_{q,r}^\psi$ of functions of several variables in the integral metrics, Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2016. Т. 13, №3. С. 256-274.

а також серію робіт В.С. Романюка 2014–2016 років, присвячених нелінійній апроксимації та наближенням функцій з класів Бесова за допомогою поліномів, побудованих за кратним базисом Хаара.

Зазначимо, що наведені зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи О. В. Козиненка. Дана дисертація відповідає всім вимогам, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40. Порухень академічної доброчесності у дисертації та публікаціях, в яких висвітлено наукові результати О. В. Козиненка, не знайдено.

Основні результати пройшли достатню апробацію і доповідалися на низці наукових семінарів та конференцій.

Дисертаційна робота О. В. Козиненка на тему “Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних” виконана на високому науковому рівні. Отримані в цій дисертаційній роботі наукові результати є новими, достовірними, мають важливе теоретичне значення і доповнюють важливі аспекти сучасної теорії наближення, а розроблені методи можуть знайти застосування при подальшому вивченні різних питань математичного аналізу, диференціальних рівнянь, обчислювальної математики та теорії функцій.

Вважаю, що дисертаційне дослідження О. В. Козиненка на тему “Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних” та наукові публікації, в яких представлено результати даного дослідження, відповідають спеціальності 111 Математика, вимогам “Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії”, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р., № 44 (зі змінами, внесеними згідно з Постановою КМУ № 341 від 21.03.2022), а її автор – КОЗИНЕНКО Олександр Віталійович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України

