

Голові разової спеціалізованої вченої ради
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
доктору фізико-математичних наук, доценту,
завідувачу кафедри геометрії і алгебри
ДНУ ім. О.Гончара
Пипці Олександр Олександровичу

В І Д Г У К

офіційного опонента Станжицького Олександра Миколайовича,
доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача кафедри загальної математики
Київського національного університету ім. Тараса Шевченка

на дисертаційну роботу

Когута Ярослава Петровича

**"Апроксимація розв'язків задач оптимального керування
для рівнянь типу Перона-Маліка"**

подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження. Дисертація присвячена дослідженню одного класу задач оптимального керування для нелінійних вироджених еліптичних та параболічних рівнянь. Основна увага автором приділяється питанням розв'язаності таких задач та методам апроксимації їх розв'язків. Характерною особливістю розглянутого класу задач є те, що вони формулюються для об'єктів, які описуються рівняннями математичної фізики з немонотонними та некоерцитивними операторами. Типовими представниками такого типу рівнянь є рівняння Перона-Маліка та їх узагальнені варіанти. Для означеного класу рівнянь є характерними такі риси як відсутність апріорних оцінок на їх слабкі розв'язки та неіснування глобальних розв'язків відповідних крайових задач. Ці обставини суттєво ускладнюють дослідження питання щодо існування оптимальних керувань такими об'єктами. Як окрема проблема тут виступає пошук схем та методів апроксимації розв'язків відповідних задач оптимального керування розв'язками інших оптимізаційних задач, які були б значно простішими з точки зору їх практичної реалізації. Аналіз літератури з відкритих джерел показує, що обрана тематика є новою і багато ключових питань, які пов'язані з такими задачами, нині залишаються відкритими. З огляду на вище наведене, вважаю тему дисертаційного дослідження, яка обрана здобувачем, актуальною.

2. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, списку публікацій здобувача, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чо-

тирьох розділів, кожен з яких супроводжується висновками, списку використаних джерел, додатків А та Б і має 166 сторінок машинописного тексту.

3. У вступі здобувач зазначає актуальність обраної теми для наукових досліджень, наводить стислий огляд літератури за обраною тематикою, вказує на зв'язок роботи з науковими програмами, планами темами кафедри тощо, формулює мету і завдання дослідження, вказує на практичне значення одержаних результатів, зазначає свій особистий внесок, наводить інформацію стосовно апробації матеріалів дисертації та коротко описує зміст кожного з розділів дисертації.

Перший розділ носить оглядово-технічний характер, де наводяться основні відомі результати та факти з нелінійного функціонального аналізу та теорії рівнянь в частинних похідних, які суттєво використовуються в подальшому аналізі. Зокрема, даються означення та основні властивості просторів Соболева та Соболева-Орлича, а також теореми вкладення, які з ними пов'язані. Окремим пунктом виступає стислий огляд просторів функцій з обмеженою варіацією та властивості компактності обмежених множин в таких просторах. Наводяться також маловідомі результати Boccardo-Murat стосовно поточної збіжності градієнтів розв'язків непараметризованих нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь. Частину з наведених результатів автор далі узагальнює в своїй роботі та залучає їх до обґрунтування отриманих ним результатів.

Другий розділ присвячено дослідженню одного класу оптимізаційних задач, коли об'єктом керування виступає крайова задача Неймана для стаціонарного рівняння Перона-Маліка, яке в своїй головній частині містить некоерцитивний та немонотонний диференціальний оператор дивергентного типу. А саме, розглядається така задача оптимального керування

$$(\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\ + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left(\frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right|$$

за наявності обмежень

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega, \\ \partial_{\nu} u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ 0 \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \\ v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega),$$

характерною особливістю якої є те, що вона формулюється для квазі-лінійного еліптичного рівняння з немонотонним та некоерцитивним дивергентним оператором. В зв'язку з цим в роботі запропоновано залучити так званий непрямий підхід до перевірки існування оптимальних пар в означеній задачі. З цією метою автор апроксимує вихідну задачу сукупністю параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного дивергентного оператора. Основною перевагою

запропонованої апроксимації є той факт, що апроксимаційні задачі формуються для лінійних невідроджених еліптичних рівнянь.

Залучаючи певне узагальнення теореми Boccardo-Murat автор показує, що будь-яка послідовність оптимальних розв'язків для апроксимаційних задач є компактною в певній топології і це дозволяє перейти до границі в основних співвідношеннях апроксимаційної задачі. Такий підхід дозволив показати, що будь-яка кластерна точка послідовності оптимальних розв'язків апроксимаційних задач є оптимальною парою для вихідної задачі. Тим самим, автор отримує достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування, а також наводить схему побудови наближень її розв'язків.

Третій розділ присвячено питанням існування розв'язків одного класу задач оптимального керування для еволюційної версії рівнянь Перона-Маліка, та методів їх апроксимації. Запропоновано загальний підхід до апроксимації розв'язків таких задач параметризованими задачами з фіктивними керуваннями для коректних за Адамаром початково-крайових задач Коппі-Неймана. За аналогією з попереднім розділом, показано, що кожна з апроксимаційних задач є коректно поставленою, має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, прямує до оптимальної пари для вихідної задачі керування. Проте, з технічної точки зору, основні результати цього розділу опираються на принципово іншу версію узагальнення теореми Boccardo-Murat для квазі-лінійних параболічних рівнянь. Окрім цього було показано, що окремою достатньою умовою розв'язаності поставленої задачі оптимального керування, є обмеженість обраної послідовності розв'язків апроксимаційних задач в заданій топології. Насправді, виконанням цієї умови можна знехтувати, якщо множина допустимих розв'язків для вихідної задачі є непорожньою. Проте в еволюційному випадку, через можливе неіснування глобальних розв'язків, ця проблема залишається відкритою. Таким чином, залучаючи непрямий підхід, автор отримує достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка, а також наводить схему апроксимації її розв'язків.

В четвертому розділі пропонується нове формулювання задачі відновлення цифрових зображень, які спотворені адитивним та кумулятивним шумом, у вигляді задачі оптимального керування для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним $p[u]$ -лапласіаном та керуванням з класу L^1 . А саме, об'єктом керування виступає така початково-крайова задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u &= f \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) &= f_0 \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Тут

$$A_w(t, x, \nabla u) := |D(t, x, w) \nabla u|^{p_w(t, x) - 2} D(t, x, w) \nabla u,$$

Характерною особливістю запропонованої постановки є те, що змінний порядок нелінійності $p(t, x)$ і тензор анізотропної дифузії $D(t, x)$ в дивергентному операторі

параболічного рівняння не є а priori визначеними, а, натомість, ці характеристики нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі для означеного параболічного рівняння. Залучаючи методи теорії збурень та принцип нерухомої точки Шаудера, автором показується, що така задача допускає існування слабких розв'язків в змінному просторі Соболева-Орліча, які можна отримати як границі послідовностей розв'язків певних збурених задач. Такі розв'язки було названо W_0 -досяжними. Виходячи з цього було запропоновано перейти від вихідної задачі оптимального керування до дослідження її релаксаційного варіанту, переформулювавши її на пошук оптимальних пар на множині W_0 -досяжних розв'язків з ослабленим функціоналом якості. Таке уточнення дозволило автору встановити достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування та отримати ітераційну процедуру для апроксимації оптимальних пар. Для ілюстрації одержаних в цьому розділі результатів, автор наведе в **Додатку Б** модельні розрахунки з обезшумлення супутникових зображень, залучаючи запропонований ним підхід.

4. На мою думку **науковий рівень** дисертації є достатньо високим. Всі основні результати дисертації є **новими**. Вони з достатньою повнотою викладені і доведені, як в самій роботі, так і у відповідних публікаціях автора. При цьому методи дослідження, технічні прийоми та отримані результати є досить нетривіальними і становлять безумовний науковий інтерес для фахівців в галузі оптимального керування системами з розподіленими параметрами. До **ключових результатів** цієї дисертації я би відніс такі:

1. Достатні умови розв'язаності задач оптимального керування для стаціонарного та еволюційного рівнянь Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області.
2. Запропоновану автором схему апроксимації задач оптимального керування для стаціонарного та еволюційного рівнянь Перона-Маліка, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного еліптичного оператора.
3. Отримані автором варіаційні властивості апроксимаційних задач, які полягають в тому, що кожна з апроксимаційних задач має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, яка утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології і всі її кластерні точки є оптимальними парами для вихідної задачі.
4. Достатні умови розв'язаності запропонованої автором моделі відновлення цифрових зображень у формі задачі оптимального керування на класі розріджених керувань для квазі-лінійного параболічного рівняння зі змінним порядком нелінійності та виродженим тензором анізотропної дифузії, які нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі.

5. Разом з тим, за матеріалами даної дисертаційної роботи можна зробити декілька зауважень. А саме:

1. Було б доречним в розділі 4 чітко відокремити поняття слабкого розв'язку, з яким працює автор, від ентропійних розв'язків таких задач та розв'язків, які називають 'viscosity solutions'.
2. На мою думку автор мало уваги приділив аналізу існуючих варіантів регуляризації рівнянь типу Перона-Маліка, які ґрунтуються на залученні операторів згладжування до множника $\frac{1}{1+|\nabla u|^2}$ в головному диферентному операторі.
3. Насправді існує багато варіантів вибору характеру анізотропності в рівнянні Перона-Маліка окрім того, на якому зупинився автор обравши таким множник $\frac{1}{1+|\nabla u|^2}$. Чи означає це, що запропонований в дисертації підхід можна поширити на інші типи рівнянь Перона-Маліка?
4. Доречно було б апроксимаційну схему для задачі оптимального керування в розділі 4 подати у вигляді ітераційної процедури.
5. У більшості випадків автор обмежується доведенням збіжності розв'язків апроксимаційних задач до оптимального розв'язку вихідної задачі. Проте такий результат бажано було б посилити, вказавши оцінки для таких наближень.
6. В другому та третьому розділах поняття w -збіжності бажано означити до того, як дається узагальнення теореми Бокардо-Мюра, оскільки інакше вона є прямим наслідком такої теореми.

Загалом помилок принципового характеру в дисертації немає, хоча є певні неточності, повтори та друкарські помилки. Наприклад,

- на стор. 3 (третій рядок зверху) потрібно прибрати лишнє тире;
- на стор.30 в формулі (15) залучено позначення, якому немає пояснення;
- на стор.50 автор веде мову про соленоїдальні вектори не даючи означення цьому поняттю;
- на стор.59 бажано вказати закон, за яким малий параметр може міняти свої значення (дискретний чи неперервний);
- на стор.62 і далі автор часто залучає до одного і того ж об'єкта різні назви — набір, кортеж, трійка.

6. Загалом, не зважаючи на зроблені мною зауваження, вважаю, що дана дисертація відповідає всім вимогам, які затверджені наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40.

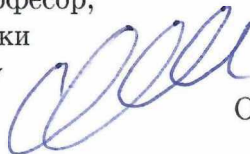
Порушень академічної доброчесності у дисертації та публікаціях, в яких висвітлено наукові результати Когута Я.П., немає.

Основні результати пройшли достатню апробацію і доповідалися на низці наукових семінарів та конференцій.

Отримані в дисертаційній роботі наукові результати є новими, достовірними та мають важливе теоретичне значення для подальших досліджень в галузі теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами. Також вони можуть знайти застосування в обчислювальній математиці та математичній фізиці.

Хочу окремо підкреслити високий науковий рівень отриманих здобувачем результатів. Застосовані ним методи та підходи до розв'язання нетривіальних задач є нестандартними та цікавими для фахівців у галузі варіаційного числення та теорії оптимізації. Виходячи з наведеного, вважаю, що дисертаційне дослідження Когути Я.П. на тему "Апроксимація розв'язків задач оптимального керування для рівнянь типу Перона-Маліка" та наукові публікації, в яких представлено результати даного дослідження, відповідають спеціальності 111 Математика, вимогам "Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішень про присудження ступеня доктора філософії", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р., № 44, а її автор — **КОГУТ Ярослав Петрович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії.**

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри загальної математики
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка



Олександр СТАНЖИЦЬКИЙ

Підпис проф. Станжицького Олександра Миколайовича засвідчую:

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НАЧ
КАРАУЛЬНА Н.В.
2025Р.

