Голові разової спеціалізованої вченої ради
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
доктору фізико-математичних наук, професору
кафедри математичного аналізу
та оптимізації ДНУ ім. О.Гончара
Когуту Петру Іллічу

В І Д Г У К

офіційного опонента Вакарчука Сергія Борисовича, доктора фізико-математичних наук, професора кафедри інформаційних технологій Вищого навчального закладу "Університет імені Альфреда Нобеля"

на дисертаційну роботу
Козиненка Олександра Віталійовича
"Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних"

подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження

Дисертація присвячена подальшому розвиненню декількох класичних задач теорії апроксимації функцій: нерівностям типу Колмогорова, зокрема, нерівностям типу Карлсона - Тайкова - Шадріна та найкращому наближенню функцій декількох змінних кусково-сталими функціями.

Нагадаємо, що нерівності, які оцінюють L_q-норму проміжної похідної функції через L_q-норму самої функції та L_s-норму її старшої похідної, називають нерівностями типу А.М.Колмогорова. Вони відіграють важливу роль у багатьох напрямках математичної науки та її застосуваннях. Різні аспекти цієї проблеми вирішувались в роботах Е.Ландау, Г.Гарді, Дж.Літтлвуда, Д.Поліа, Ф.Карлсона, Л.В.Тайкова, В.М.Тихомирова, Н.П.Купцова, С.З.Рафальсона, В.М.Габушина, А.О.Лигуна, А.Ю.Шадріна, В.Ф.Бабенко та інших. Ставша вже класичною нерівність А.М.Колмогорова дала значний поштовх до розуміння функціонально-аналітичної природи мультиплікативних нерівностей, які відіграють важливу роль в теорії вкладення класів гладких функцій, в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними тощо. В зазначеній тематиці виокремилися основні напрямки, які отримали назви математиків, які в них працювали, наприклад, нерівності типу Карлсона - Тайкова - Шадріна.

Певна кількість задач, пов'язаних з отриманням точних констант в нерівностях типу А.М.Колмогорова, Карлсона - Тайкова - Шадріна тощо на сьогодні ще не отримала свого остаточного вирішення. Це стосується як функцій однієї змінної, так і функцій багатьох змінних, де дослідження, що пов'язані з отриманням нерівностей зазначеного типу, мають не таку довгу історію.

З середини 50-х років минулого сторіччя у теорію апроксимації функцій міцно увійшли сплайн-функції, як один з її потужних інструментів. Сплайн-апроксимація у її сучасному вигляді вперше з'явилась у 1946 році в одній з робіт Шенберга, якому і належить цей термін. Свій подальший розвиток теорія сплайнів отримала в дослідженнях Дж.Альберга, Е.Нільсона, Дж.Уолша, М.Шульца, Р.С.Варги, Л.Шумейкера, де Бора, Ю.С.Зав'ялова, Ю.М. Субботіна, Н.П.Корнійчука, В.М.Тихомирова, В.П.Моторного, А.О.Лігуна, О.А. Женсикбаєва, В.Ф.Бабенка та інших. З самого початку розвитку теорії сплайнів увагу математиків привернули задачі локальної сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції, в яких значення сплайна в точці залежать від заданих значень функції та її похідних тільки в деякому околі цієї точки. Тобто певного покращення в швидкості наближення функції сплайнами можна досягти шляхом обирання розбиття відрізку (випадок $d = 1$) або обмеженої області (випадок $d \geqslant 2, d \in \mathbb{N}$) в залежності від наближуваної функції. Перші систематичні дослідження нелінійних (адаптивних) методів наближення сплайнами були започатковані М.Ш.Бірманом та М.З.Соломяком у 70-х роках минулого сторіччя. Слід зазначити, що у порівняння з одновимірним випадком питання сплайн-апроксимації функцій багатьох змінних є набагато складнішими, оскільки область, на якій здійснюється наближення, може мати складну форму; диференціально-різницеві властивості функції можуть бути різними по різних напрямках; ускладнюється процедура побудови багатовимірної сплайн-апроксимації тощо. З наведеного очевидно. що методи дослідження низки задач теорії сплайн-апроксимації в одновимірному випадку стають непридатними для багатовимірного випадку. Враховуючи все вище наведене, вважаю тему дисертаційного дослідження, обрану збодувачем, **актуальною**.

2. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, списку публікацій здобувача, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, кожен з яких супроводжується висновками, списку використаних джерел, додатку А і має 117 сторінок машинописного тексту.

3. У **вступі** здобувач зазначає актуальність обраної теми наукових досліджень, вказує на зв'язок роботи з науковими програмами, планами темами кафедри тощо; формулює мету і завдання дослідження; вказує на практичне значення одержаних результатів; зазначає свій особистий внесок; наводить інформацію стосовно апробації матеріалів дисертації; коротко описує зміст кожного розділу дисертації.

Перший розділ дисертації присвячений отриманню точних нерівностей типу Карлсона - Тайкова - Шадріна. У вступі до розділу надається історична довідка стосовно нерівностей типу А.М.Колмогорова та їх подальшого розвитку. Також наводиться низка отриманих раніше іншими математиками тверджень, які пов'язані з досліджуваним питанням. В доведених у пп. 1.2 та 1.3 теоремах 1.2.1 (адитивна середньоквадратична нерівність), 1.2.2 (мультиплікативна нерівність) у просторі $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ та теоремах 1.3.1 (адаптивна середньоквадратична нерівність), 1.3.2 (мультиплікативна нерівність) у просторі $L_{2e^{-t^2}}(\mathbb{R})$

отримано точні нерівності вказаного вище типу.

Другий розділ присвячений отриманню нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних функцій в сенсі Маршо, визначених на додатній півосі. У вступі до розділу надається історична довідка стосовно отримання мультиплікативних нерівностей типу Колмогорова

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)} \leqslant k\|f\|^{\mu}_{L_p(G)} \cdot \|f^{(r)}\|^{\lambda}_{L_s(G)},$$

де G – дійсна вісь $\mathbb{R}$, або напіввісь $\mathbb{R}_+$; $1 \leqslant p, s, q \leqslant \infty$; $k \in \mathbb{Z}_+$; $r \in \mathbb{N}$, $r > k$, та відзначається важливість одержання подібних результатів для норм дробових похідних. Наведено достатньо повний огляд вже отриманих у цьому напрямку результатів. Також надано певну інформацію про задачу С.Б.Стєчкіна стосовно найкращого наближення необмежених операторів лінійними обмеженими та інформацію щодо найкращого відновлення операторів на класі, елементи якого задано з похибкою. Основними результатами цього розділу є теорема 2.2.1 (адитивна нерівність типу Колмогорова для дробової похідної $D^k_- f$ в сенсі Маршо) та наслідок 2.2.1 (точна мультиплікативна нерівність типу Колмогорова для дробової похідної в сенсі Маршо), теорема 2.2.2 (розвязок задачі Стєчкіна про найкраще навлиження оператора D^k_- на класі $W^2_{p,1}$) та теорема 2.2.3 (найкраще відновлення оператора D^k_- за допомогою множини відображень O на елементах класу $W^2_{p,1}$, які задані з похибкою δ).

Розділ три присвячений дослідженню найкращого наближення кусково-сталими функціями на опуклих розбиттях. У вступі до розділу наведено необхідні означення, поняття та історичну довідку стосовно задачі, яка вирішується. Також вказано на відкрите питання стосовно порядку похибки найкращого L_p-наближення функції $f \in W^2_q(\Omega)$ кусково-сталими функціями на розбиттях $\mathfrak{D}_N$ (при певних співвідношеннях між d, p та q), коли $N \to \infty$. Ще одне відкрите питання виникає для класів $W^r_q(\Omega)$ при $\dfrac{2d}{d+1} < r < 2$ стосовно можливості покращення оцінки зверху величини $E_N(f)_\infty$ тощо. Пункт 3.2 носить допоміжний характер, оскільки в ньому, зокрема, узагальнюється один з результатів Бірмана - Соломяка (Mat. Sb., 1967, v.73, N3, P. 331-355) на випадок, коли кожному діадичному підкубу з певного розбиття куба $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ зі стороною h присвоюється різна кількість ступенів волі в залежності від розміру (леми 3.2.1 та 3.2.2). У підпункті 3.3 отримано оцінки зверху похибки найкращого нелінійного L_p-наближення функцій з класу Соболєва $W^2_q(\Omega)$ кусково-сталими функціями (теореми 3.3.2 та 3.3.3). Важливу роль тут відіграв запропонований у дисертації алгоритм побудови адаптивно уточненого діадичного розбиття з наступним анізотропним уточненням, де досягається найкращий порядок наближення $N^{-2/(d+1)}$. В наступному підрозділі шляхом отримання оцінки знизу величини $E_N(W^r_q(\Omega))_\infty$ було показано, що оптимальний порядок наближення $N^{-2/(d+1)}$ не досягається, коли $r < 2d/(d+1)$ (теорема 3.4.1). В підрозділі 3.5 здобувач встановив, що коли $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, при виконанні умови $2/(d+1) + 1/p - 1/q \geqslant 0$ величина $N^{-2/(d+1)}$ є порядком насичення для $f \in W^2_q(\Omega)$ в сенсі, запропонованому О.В.Давидовим (J. Appox. Theory. - 2014.-v. 185, P. 107-123). Цей факт витікає з теореми 3.5.1, доведення якої базується, зокрема, на допоміжних геометричних твердженнях, викладених у лемах 3.5.1, 3.5.2, 3.5.4. На мій погляд, результати третього розділу є потужними і мають не тільки теоретичне, а й певне практичне значення.

У **четвертому розділі** досліджується найкраще наближення кусково-сталими на розріджених сітках (декількох накладених опуклих розбиттях). Зокрема, в теоремі 4.5.1 для функцій f з класу $W_\infty^{(1,\dots,1)}(\Omega)$, де $\Omega = [0,1]^d$, встановлено, що похибка найкращого L_∞-наближення f кусково-сталими на декількох кубоїдних розбиттях з загальною кількістю клітин N має порядок $\ln^{2(d-1)}(N)/N$. У двовимірному випадку (зауваження 4.5.2), в більш загальній ситуації, коли $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, $\Omega = [0,1]^2$, $f \in W_q^{(1,1)}(\Omega)$, для L_q-наближення функції f вдалося отримати порядок величини $E_N(f)_q$ виду $\ln^2(N)/N$ при певному виборі значення N. Також у двовимірному випадку (теорема 4.6.1) було показано, що для функцій з класу $W_\infty^3(\Omega)$ порядок наближення кусково-сталими дорівнює $\ln(N)/N$, тобто його вдалося суттєво покращити у порівнянні з результатом загальної теореми 4.5.1, коли $d = 2$. Також було встановлено зв'язок між наближенням поліномами Хаара та наближенням кусково-сталими на розріджених сітках для класів $W_p^{(1,\dots,1)}(\Omega)$ в метриці L_p. На мій погляд, низка результатів, отриманих в цьому розділі, є цікавими і не залишать байдужими спеціалістів у галузі теорії апроксимації функцій.

4. Однак, по дисертаційній роботі є певна кількість зауважень.

1. До переліку умовних позначень не внесена множина комплексних чисел $\mathbb{C}$; неточно дані означення класів функцій H^ω та $H_p^\omega(G)$; двічи повторюються означення множини функцій $L_p(G)$; символ $\mu\Omega$ (міра вимірної за Лебегом множини $\Omega \subset \mathbb{R}^d$) в дисертації не використовується, а замість нього застосовується символ $|\Omega|$, який не вказаний в переліку (див., наприклад, стор. 85, 8-й рядок зверху). Деякі позначення не використовувались зовсім.

2. Нечітко сформульована наукова новизна низки отриманих результатів (стор. 18). Немає жодної історичної довідки стосовно апроксимації поліномами, побудованими по системі Хаара у багатовимірному випадку.

3. На стор. 21 при описанні результатів першого розділу записане те, чого немає в дисертації, а саме знаходження точних значень лінійних одновимірних поперечників; це ж саме спостерігається і у формулюванні висновків до розділу 1 (стор. 37).

4. При формулюванні означення простору $L_p(G)$, де $1 \leqslant p < \infty$, а G є необмеженою множиною $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+$, треба додатково зазначити, що p-та степінь модуля функції є інтегрованою за Лебегом на будь-якому кінцевому відрізку з G.

5. Не наведено чіткого пояснення ролі, яку відіграє лема 2.2.1 (яка, зокрема, має потужне доведення) при отриманні деяких з основних результатів.

6. Поняття "опуклого" та "ізотропного" розбиттів (стор. 55, 56) доцільно було навести зразу на початку підпункту 3.1 (стор. 54). Доцільно було б нагадати поняття "вільного" розбиття.

7. Одним символом ω позначено модуль неперервності (стор. 10, 11), куб (стор. 59, 16-й рядок зверху), функцію (стор. 44, 6-й рядок зверху), індекс (стор. 96, 1-й рядок знизу).

8. На стор. 64 (4-й рядок зверху) введене означення величини $\Phi(\cdot) := |f|^q_{w_q^1(\cdot)} + |f|^q_{w_q^2(\cdot)}$, але далі, в теоремах 3.3.2, 3.3.3. та на сторінці 67 (6 та 7-й рядки зверху; 3, 8-й рядки знизу) цей символ не використовується, хоча по змісту він потрібен.

9. На стор. 73 два останні абзаци повторюють інформацію вже наведену на сторінках 54 (останній абзац) та 55 (перший абзац, останній абзац).

10. На відміну від розгорнутого доведення леми 3.5.1, де спершу розглядається тривіальний випадок для $\mathbb{R}^2$, при доведенні леми 3.5.3 розглянуто лише випадок зростаючої опуклої функції з класу $C^2((a,b))$. Доцільно було зазначити хоча б декількома фразами, яким буде доведення для загального випадку $f \in C^2((a,b))$, оскільки на основі цієї леми доводиться лема 3.5.4, яка узагальнює лему 3.5.3. Зокрема, виходячи з умов леми 3.5.3 знак модуля в інтегралі справа (стор. 79, 4-й рядок знизу) можна замінити круглими дужккми, а знак модуля в першому інтегралі (стор. 79, 3-й рядок знизу) прибрати взагалі.

11. В формулюванні леми 3.5.4 зазначається, що $diam(\Omega)$ - найдовший відрізок всередені Ω. В формулі (3.39) при оцінці величини $E_1(f)_1$ знизу записаний множник $diam^2(\Omega)$ (тобто $diam(\Omega)$ – це число). На сторінці 81 (8-й рядок знизу) здобувач зазначає, що "...Ω' – проекція Ω на координатну гіперплощину, ортогональну до $diam(\Omega)$...". У 8-му рядку зверху (стор. 81) зазначається ".... що напрямок $diam$ і осі OX_1 співпадають...". Як це треба розуміти?

12. В переліку умовних позначень наведено символ $\mathbb{Z}_+$, але замість нього чомусь використовується символ $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ (стор. 86, 12-й рядок зверху; стор. 26, 10-й рядок зверху; стор. 27, 1-й та 13-й рядок зверху; стор. 28, 12-й рядок зверху тощо). Для мультиіндексів $k, s \in \mathbb{Z}_+^d$ використовуються різні символи $|k| := k_1 + ... + k_d$ (стор. 85, 7-й рядок знизу) та $\|s\|_1 := s_1 + ... + s_d$ (стор. 86, 9-й рядок знизу), хоча зміст цих виразів однаковий.

13. На сторінці 95 (9-й рядок знизу) та на стор. 96 (3-й рядок зверху) підінтегральні вирази треба взяти в дужки. На сторінці 96 (1, 2, 8, 12, 13, 14, 15-й рядки зверху) пропущено верхній індекс ω для символа $Q_{j,i_j} f$ $(j = 1, 2, ..., k)$. Треба $Q^{\omega}_{j,i_j} f$.

14. В формулі похибки m-членного наближення (стор. 87, 9-й рядок зверху) треба в правій частині дописати ще точну нижню границю по $c_i \in \mathbb{R}$, де $i = 1, ..., m$.

15. По тексту дисертації термін "кусково-стала"записаний в різних варіантах: "... за допомогою кускових констант ..." (стор. 58, 2-й рядок знизу); "... кусково-постійного наближення ..." (стор. 74, 5-6-й рядки знизу); "... суми кусково-констант ..." (стор. 95, 1-й рядок зверху) тощо.

16. В тексті дисертації відбулась значна плутанина з нумерацією лем, теорем та формул, а саме: *замість леми 3.5.1* треба записати лема 3.2.1 (стор. 60 - в зауваженні 3.2.1; стор. 62, 5 та 11-й рядки знизу; стор. 63, 10-й рядок зверху та 3-й рядок знизу; стор. 64, 4-й рядок зверху; стор. 67, 10-й рядок знизу; стор. 68, 3-й рядок зверху) тощо; *замість леми 3.5.3* треба записати лема 3.2.2 (стор. 63, 12-й рядок знизу; стор. 68, 2-й рядок зверху, 8 та 12-й рядки знизу); *замість теореми 3.5.2* треба записати теорема 3.3.2 (стор. 65, 10-й рядок зверху; стор. 68, 2, 7 та 12-й рядки знизу); *замість нумерації (3.33)* треба записати (3.3) (стор. 56, 13-й рядок зверху; стор. 58, 11 та 15-й рядки зверху; стор. 59, 11-й рядок зверху); *замість нумерації (3.34)* треба записати (3.4) (стор.58, 7 та 11-й рядки зверху).

17. В деяких місцях дисертації при цитуванні літератури замість номера посилання записаний символ [?] (див. стор. 98, 6-й рядок зверху; стор. 96, 5 та 6-й рядки зверху; стор. 95, 8-й рядок знизу).

18. В тексті дисертації багато "русизмів"та граматичних помилок. Зустрічаються місця, де замість українських термінів, які повинні бути за змістом, написано англійські слова (стор. 63, 1-й рядок знизу; стор. 73, 12-й рядок знизу; стор. 78, 1-й рядок знизу; стор. 90, 9-й рядок зверху).

5. Дана дисертація відповідає всім вимогам, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40.

Порушень академічної доброчесності у дисертації та публікаціях, в яких висвітлено наукові результати Козиненка О.В., немає.

Основні результати пройшли достатню апробацію і доповідалися на низці наукових семінарів та конференцій.

Отримані в дисертаційній роботі наукові результати є новими, достовірними та мають важливе теоретичне значення для подальших досліджень в галузі теорії апроксимації функцій багатьох змінних, зокрема, в теорії сплайн-функцій; при розв'язанні певного кола екстремальних задач, пов'язаних з знаходженням точних нерівностей для норм проміжних похідних тощо. Також вони можуть знайти застосуваня в обчислювальній математиці та математичній фізиці.

Не зважаючи на зроблені зауваження, хочу відзначити високий науковий рівень низки результатів, отриманих здобувачем особливо у третьому та четвертому розділах. Застосовані ним методи та підходи до розв'язання нетривіальних задач є нестандартними та цікавими для фахівців у галузі математичного аналізу та теорії апроксимації.

Виходячи з наведеного, вважаю, що дисертаційне дослідження Козиненка О.В. на тему "Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних" та наукові публікації, в яких представлено результати даного дослідження, відповідають спеціальності 111 Математика, вимогам "Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р., № 44, а її автор - **КОЗИНЕНКО Олександр Віталійович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії.**

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри інформаційних технологій
Вищого навчального закладу
"Університет імені Альфреда Нобеля" Сергій Вакарчук

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «УНІВЕРСИТЕТ імені АЛЬФРЕДА НОБЕЛЯ» УКРАЇНА м. ДНІПРО і.к. 20201672

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
Дата «21» 11 2023 р.