

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу
КОЗИНЕНКА Олександра Віталійовича
на тему:

"Адаптивна анізотропна апроксимація фуній багатьох змінних",
представлену на здобуття ступеня доктора філософії у галузі знань 11
Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Тематика роботи присвячена класичним задачам теорії наближення функцій багатьох змінних кусково-сталими сплайнам і тісно пов'язаними з ними задачами теорії нерівностей типу Колмогорова для норм похідних цілого та дробового порядку, а також найкращого відновлення операторів та функціоналів.

Дослідження за тематикою, якій присвячена дисертація, проводяться у багатьох наукових центрах різних країн світу. Вагомі досягнення з цієї проблематики отримано на кафедрі математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дана дисертаційна робота виконувалась саме в цьому закладі згідно з планами наукових досліджень кафедри математичного аналізу та оптимізації. Отже, тема дисертаційної роботи "*Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних*" є актуальною.

Дисертація загальним обсягом 117 сторінок складається з анотації, списку публікацій здобувача, переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 84 найменувань.

У вступі характеризується актуальність обраної теми, визначаються мета і завдання, а також об'єкт і предмет досліджень автора роботи. Вказано на зв'язок дисертації з науковими програмами і темами, що виконувались на кафедрі математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно гранту DAAD Scholarship, Germany за програмою Research Grants — Bi-nationally Supervised Doctoral Degrees, 2016/19 (57214225). Наведено перелік основних завдань і методів дослідження та результатів роботи, що виносяться на захист. Охарактеризовано ступінь наукової новизни отриманих результатів та їх практичне значення, наведено кількість фахових видань та видань, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, де ці результати опубліковано. Вказано на особистий внесок здобувача у спільні результати. Вступ містить перелік конференцій і наукових семінарів, на яких доповідались основні результати. Розкрито зміст дисертації та кожного її розділу.

У першому розділі отримано точні середньо-квадратичну і мультиплікативну нерівності типу Тайкова-Шадріна для функцій з простору

$L^2_{2,r;\alpha,\beta}(I)$ та точні аналоги нерівності Тайкова-Шадріна для функцій з простору $L^r_{2,2,c-t_2}(R)$. В результаті досліджень також розв'язано задачі про знаходження точного значення лінійного одновимірного поперечника класів функцій однієї змінної з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій, та задачі оптимізації лінійних методів наближення на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності в просторі неперервних функцій.

У другому розділі досліджуються точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних та споріднена задача Стечкіна про найкраще наближення необмежених операторів лійними обмеженими. Зокрема, отримано нову точну мультиплікативну нерівність, що дає оцінку L_∞ -норми дробової похідної в сенсі Маршо функції, визначеної на півосі $[0, \infty)$, через L_p -норму самої функції та L_1 -норму її похідної другого порядку. Як наслідок отриманої нерівності розв'язано задачу про найкраще наближення оператора дробового диференціювання в сенсі Маршо лійними обмеженими операторами на класах функцій з обмеженням на похідну другого порядку. Крім того, побудовано оператори найкращого наближення, оператора диференціювання в сенсі Маршо на класах функцій $W^2_{p,1}(R_+)$.

У третьому розділі досліджується задача найкращого адаптивного наближення $E_N(f)_p$ функцій f класу $W^2_q(\Omega)$, $q > 1$, визначених на d -вимірному кубі Ω , в метриці простору L_p кусково сталими функціями на опуклих розбиттях Ω з заданою кількістю елементів. Доведена нерівність

$$E_N(f)_p \leq C N^{-2/(d+1)} \|f\|_{W^2_q(\Omega)} \quad (1)$$

для $f \in W^2_q(\Omega)$ і $q < \infty$, які задовольняють умову $2/(d+1) + 1/p - 1/q \geq 0$, де C залежить тільки від d, p, q . Ця нерівність підсилює результат роботи Давидова О., в якій встановлено, що порядок $E_N(f)_p$ дорівнює $O(N^{-2/(d+1)})$ для функцій $f \in W^2_p(\Omega)$. Таким чином, нерівність (1) розширює клас функцій, для яких досягається порядок наближення $O(N^{-2/(d+1)})$. Крім того, знайдено алгоритм побудови адаптивно уточненого діадичного підрозбиття, з подальшим анізотропним уточненням, на якому досягається найкращий порядок наближення $N^{-2/(d+1)}$ та отримана оцінка знизу для порядку насичення апроксимації двічі неперервних функцій кусково-сталими на опуклих розбиттях. Доведено, що $N^{-2/(d+1)}$ є порядком насичення наближення кусково-сталими на опуклих розбиттях у наступному сенсі: якщо для двічі неперервно диференційованої функції $f : \Omega \rightarrow R$ маємо оцінку $E_N(f)_p = o(N^{-2/(d+1)})$ при $N \rightarrow \infty$, то гесіан функції f не є ні позитивно, ні негативно визначеним в жодній точці Ω .

У четвертому розділі досліджується задача найкращого наближення функцій багатьох змінних кусково сталими функціями на декількох накладених опуклих розбиттях (розріджених сітках). З'ясовано, що порядок наближення на таких розбиттях для функцій класу $W^{(1,\dots,1)}_\infty$ дається формулою

$\frac{\ln^{2(d+1)}N}{N}$. В двовимірному випадку для функцій з класу W_{∞}^3 цей порядок був покращений до $\frac{\ln N}{N}$. Крім того, встановлено зв'язок наближення кусково сталими на розріджених сітках з наближенням поліномами Хаара.

Таким чином, ядро дисертації утворюють результати по відшукуванню точних нерівностей типу Колмогорова та точних оцінок важливих апроксимаційних характеристик на класах функцій однієї та багатьох змінних у просторах Лебега та у просторах суттєво обмежених функцій.

Науковий рівень дисертації є високим. Всі основні результати дисертації є новими. Вони з достатньою повнотою викладені і доведені, як в самій роботі, так і у відповідних публікаціях автора. При цьому методи дослідження, технічні прийоми та отримані результати є дуже нетривіальними і становлять безумовний науковий інтерес для фахівців в галузі аналізу і теорії наближення.

Вважаю, що дисертація є завершеною працею, в якій отримано вагомі результати теоретичного характеру, що дають розв'язок ряду важливих екстремальних задач теорії наближення та теорії нерівностей для похідних і нові підходи до розв'язання таких задач.

Результати роботи і запропоновані в ній методи можуть бути використані для подальших досліджень екстремальних задач теорії наближення, а також у теоретичних дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики. Крім того, отримані в дисертації результати можуть бути основою для побудови оптимальних чисельних алгоритмів наближення функцій.

Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. В роботах, які опубліковані у співавторстві, або внесок усіх авторів є рівноцінним, або точно вказано на результати, які належать автору дисертації.

Основні результати достатньо повно викладені в 15 наукових публікаціях у фахових виданнях, з них 1 роботи належать здобувачу особисто, а 13 – надруковано у виданнях, що входять до наукометричних баз даних. Виходячи з цього можна оцінити сумарний внесок здобувача як цілком достатній для вирішення питання про його докторську кваліфікацію.

Помилка принципового характеру в дисертації немає. В роботі є неточності, повтори та друкарські помилки. Наприклад,

1. на стор. 21₅ фраза “В розділі також показано, що отримані оцінки зверху є точними” є зайвою;
2. на стор. 37 у висновках до розділу 1 сказано, що в цьому розділі розв'язано задачі про знаходження точного значення лінійного одновимірного поперечника..., а також задачі оптимізації лінійних методів наближення... З іншого боку, в змісті дисертації на стор. 8 є лише два підрозділи розділу 1, що присвячені дослідженням нерівностей типу Тайкова-Шадріна;
3. на стор. 38⁶ у фразі “через $\|f\|_p$, $1 < p < \infty$, і $\|f\|_p$ і $\|f\|_1$ ” вираз “і $\|f\|_p$ ” є зайвим;

4. на стор. 54⁹ замість “пристосування розбиттів” треба “пристосування розбиттів”;
5. на стор. 54¹⁶ сказано, що “використання анізотропних опуклих багатогранних розбиттів дозволяє майже вдвічі *збільшити* порядок наближення у порівнянні з “ізоотропними” розбиттями” Здається, автор хотів сказати, що таке використання “дозволяє майже вдвічі *зменшити* порядок наближення”;
6. на стор. 56₁ замість “покаращення” треба “покращення”...

Наведені зауваження не впливають суттєво на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи, а зроблені автором висновки є строго обґрунтованими і їх достовірність не викликає сумніву. Вважаю, що робота “*Адаптивна анізотропна апроксимація функцій багатьох змінних*” відповідає встановленим вимогам до дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії, а її автор О. В. Козиненко заслуговує присудження йому ступеня доктора філософії.

Рецензент
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
та оптимізації Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара



Володимир КОФАНОВ

Підпис професора Кофанова В. О. засвідчую

Вчений секретар ДНУ



Тетяна ХОДАНЕН