

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛЕБЕДЄВ ДАНИЛО МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 519.8

ДИСЕРТАЦІЯ

**УЗАГАЛЬНЕНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКИХ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Д.М. Лебедєв

Науковий керівник:

Кісельова Олена Михайлівна,

доктор фізико-математичних наук,

професор

Дніпро – 2026

АНОТАЦІЯ

Лебедєв Д.М. Узагальнені алгоритми розв'язання нечітких двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – Математика та статистика). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2026.

Дисертаційна робота присвячена розробці та обґрунтуванню узагальнених алгоритмів розв'язання ряду двоетапних задач теорії оптимального розбиття множин, що характеризуються наявністю двох етапів транспортування та нечіткістю у вхідних або у вихідних даних.

Теорія оптимального розбиття множин (ОРМ) є сучасним та ефективним інструментом для розв'язання широкого спектру задач неперервно-дискретної оптимізації, у яких виконується розбиття обмеженої частини n -вимірного евклідового простору на скінченну кількість підмножин. До задач ОРМ зводиться велика кількість задач, таких як задача побудови діаграми Вороного, задача оптимального кульового покриття, задача розпізнавання образів, задача кластеризації, а також задача оптимального розміщення-розбиття та неперервно-дискретна транспортна задача. Розв'язки задач ОРМ використовуються у різних сферах прикладних наук: медицині, фізиці, астрономії, біології, екології, комп'ютерній графіці, кристалографії, а розв'язки транспортно-логістичних задач ОРМ застосовуються у таких галузях як логістика, промисловість, економіка, міське планування, урбаністика тощо. Перевагою теорії ОРМ є гнучкість її математичного апарату, що дозволяє формулювати та розв'язувати найрізноманітніші задачі розбиття множин шляхом адаптації вже існуючих моделей під конкретні прикладні випадки за допомогою введення додаткових обмежень або внесення змін у математичну модель.

Математичні засади теорії ОРМ впливають з робіт Г. Монжа і Л. Канторовича, що стосуються нескінченновимірних транспортних задач. Теорія ОРМ дозволяє розв'язувати саме неперервно-дискретний випадок транспортної задачі, але значно

розширює класичну постановку. Фундатором теорії ОРМ є О. М. Кісельова, яка зробила найбільший внесок у становлення та розвиток цієї теорії. На зародження теорії ОРМ також вплинув Н. З. Шор, один з основоположників напряму недиференційовної оптимізації у математичному програмуванні, чії методи недиференційовної оптимізації лежать у основі підходу числового розв'язання задач ОРМ. У роботі під час розв'язання задач ОРМ задача нескінченновимірної оптимізації зводиться до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних за допомогою введення функціонала Лагранжа.

Під керівництвом О. М. Кісельової сформувалася школа досліджень задач теорії ОРМ, відбуваються систематичні дослідження та упорядкування нових видів задач, вже розв'язано десятки задач різних підкатегорій, такі як динамічні, нечіткі, стохастичні задачі, задачі керування тощо, написана велика кількість статей та низка монографій, що фундаментально охоплюють низку напрямів задач теорії ОРМ.

Дана робота присвячена дослідженням у напрямі одного класу задач, що зводяться до задач теорії ОРМ – двоетапні логістичні задачі оптимального розміщення-розбиття. У класичній транспортній задачі, яку ще називають одноетапною транспортною задачею, перевезення товарів моделюється напряму, у одну дію, від постачальників до споживачів. Разом з тим, такий підхід часто не відповідає процесам перевезень у реальному світі. Зазвичай шлях товару від виробника до споживача є значно довшим та більш заплутаним, та проходить через велику кількість складів, сортувальних центрів, логістичних хабів різного розміру та пропускної здібності, а також етапів перевезення з різною вартістю. Так, наприклад, ціна перевезення однієї тони товару океаном на великому вантажному судні може бути у тисячі разів нижчою, аніж перевезення такої ж кількості товару кур'єрами, які доставляють товари до домівок на автомобілях, мопедах, велосипедах або пішки. При цьому, обидва етапи є необхідними, і остаточна ціна товару включає в себе витрати на перевезення на кожному з етапів.

Оскільки методи теорії ОРМ дозволяють розв'язувати не просто транспортну задачу, а саме задачу оптимального розміщення-розбиття, де окрім визначення обсягів транспортування також визначаються оптимальні координати центрів

постачання, то дана робота розглядає також побудову математичних моделей з оптимальним розміщенням центрів транспортування першого етапу.

На поточний момент переважна більшість двоетапних логістичних задач теорії ОРМ досліджувалась в умовах визначеності. Однак часто вхідні дані задач є нечіткими з ймовірнісною або лінгвістичною природою нечіткості. Теорія нечітких множин, введена Л. А. Заде, дозволяє описати випадки, коли елемент належить множині лише з деякою мірою впевненості. Математичні моделі, сформульовані з використанням нечітких змінних, краще пристосовані до роботи з даними реального світу. Дана робота демонструє застосування нейронечітких технологій для відновлення нечіткої функції щільності у моделі ОРМ.

Крім вимушеної нечіткості у вхідних даних, нечіткість може бути бажаною у вихідних даних. Так, наприклад оптимальне розбиття множини може бути нечітким – у такому випадку кожна точка множини буде належати до відповідного центру лише з деякою мірою визначеності, яка може бути інтерпретована як ступінь впевненості споживачів або ймовірність постачання. Дана робота розглядає математичну модель, що дозволяє побудову нечіткого розбиття. Вводиться коефіцієнт нечіткості, що регулює нечіткість вихідного розбиття.

У роботі досліджено чотири види двоетапних задач теорії ОРМ:

- двоетапна чітка задача оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами підмножин;
- двоетапна чітка задача оптимального розміщення-розбиття з оптимальним розміщенням центрів підмножин;
- двоетапна нечітка задача оптимального розміщення-розбиття з нейронечітким відновленням нечіткої функції щільності;
- двоетапна нечітка задача оптимального розміщення-розбиття з нечітким розбиттям множини;

Математичні моделі вказаних задач включають адитивні та мультиплікативні коефіцієнти центрів постачання першого етапу та обмеження у вигляді рівностей на обсяг наявних товарів у кінцевих центрах.

Наукова новизна результатів, отриманих у дисертаційній роботі:

- *вперше* розроблено та обґрунтовано метод розв'язання двоетапної нечіткої задачі оптимального нечіткого розміщення-розбиття з фіксованими центрами;
- *вперше* розроблено та обґрунтовано метод розв'язання нечіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з нейронечітким відновленням нечіткої функції щільності споживання з розміщенням центрів першого етапу;
- *дістав подальшого розвитку* метод розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами підмножин;
- *дістав подальшого розвитку* метод розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з оптимальним розміщенням центрів підмножин;
- *узагальнено* запропоновані алгоритми введенням адитивного та мультиплікативного коефіцієнтів для центрів першого етапу, нерівномірної функції щільності споживання, окремих функцій вартості транспортування на першому та другому етапах, та обмеженнями у вигляді рівностей на кількість наявної продукції у центрах постачання;
- розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані узагальнені алгоритми та дозволяє задавати адитивні та мультиплікативні коефіцієнти центрів першого етапу, нерівномірну функцію щільності споживання, коефіцієнт здешевлення транспортування на другому етапі, та обмеження на наявну кількість товарів у центрах постачання; побудова оптимального розбиття виконується з використанням паралельних обчислень на відеокарті з метою прискорення обчислень;
- розв'язано ряд модельних задач з метою демонстрації роботи кожного з запропонованих алгоритмів;

Практичне значення одержаних результатів полягає у наступному: запропоновані узагальнені алгоритми дозволяють розв'язувати ряд прикладних задач, що виникають у промисловості, логістиці, економіці, міському плануванні та інших галузях, що характеризуються однією або декількома наступними рисами:

- кількість споживачів є незрівнянно більшою за кількість постачальників або просто недоцільною для подання у дискретному вигляді;

- розташування споживачів у просторі та обсяг їх попиту задані або можуть бути задані у вигляді мапи щільності;
- необхідно позбутися нечіткості у мапі щільності попиту, яка описується через нейронечітку базу даних;
- повний цикл переміщення продукту відбувається у два етапи (транспортування товарів, обробка сировини, багатоетапне виробництво);
- необхідно порівняти ефективність поточного розташування центрів постачання з теоретично можливим оптимальним розташуванням центрів виробництва;
- необхідно оптимально розмістити центри виробництва з метою мінімізації витрат;
- необхідно побудувати модель задачі двоетапного нечіткого розбиття-розміщення;

Розроблені алгоритми можуть бути використані для розв'язання задач розміщення-розбиття: знаходження оптимальних розташувань поштоматів, заводів, відділень поліції, пожежних станцій, медичних пунктів, електростанцій тощо, з одночасним поділенням території на зони, що відносяться до відповідних центрів.

Отримані висновки та розроблені підходи можуть бути рекомендовані до впровадження у навчальний процес для методичного забезпечення підготовки фахівців зі спеціальностей «Системний аналіз» та «Прикладна математика».

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 8 наукових працях: 3 статті у наукових фахових виданнях України категорії Б зі спеціальності 113 «Прикладна математика», 2 статті у міжнародних фахових виданнях, що індексуються науково-метричною базою Scopus (у тому числі одна стаття у журналі квартиля Q2); 3 тез доповідей у збірниках матеріалів регіональних і міжнародних науково-практичних конференцій.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, оптимальне розміщення-розбиття, нескінченновимірне математичне програмування, нечіткі множини, нейронечітка ідентифікація, двоетапна транспортна задача, неперервно-дискретна транспортна задача, умовна оптимізація, безумовна оптимізація, недиференційовна оптимізація, r -алгоритм Шора.

ABSTRACT

Lebediev D. Generalized algorithms for solving fuzzy two-stage problems of optimal location-allocation. – Qualifying scientific work submitted as a manuscript.

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 «Applied Mathematics» (11 – Mathematics and Statistics). – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2026.

The dissertation is devoted to development and substantiation of generalized algorithms for solving a class of two-stage problems in optimal set partitioning theory characterized by the presence of two transportation stages and fuzziness in the input or output data.

The mathematical theory of optimal set partitioning (OSP) is a powerful tool for solving a wide range of continuous-discrete optimization problems involving the partitioning of a bounded part of an n -dimensional Euclidean space into a finite number of subsets. A large number of problems can be reduced to OSP problems, including the construction of Voronoi diagrams, optimal sphere covering problems, pattern recognition problems, clustering problems, as well as optimal location-allocation problems with partitioning and continuous-discrete transportation problems. Solutions to OSP problems are applied in various fields of applied science, including medicine, crystallography, physics, astronomy, microbiology, and computer graphics, while solutions to transportation and logistics OSP problems are used to address problems in logistics, industry, economics, urban planning, urban studies, ecology, and related areas. An advantage of OSP theory is the flexibility of its mathematical framework, which makes it possible to formulate and solve a wide variety of set partitioning problems by adapting existing models to specific applied cases through the introduction of additional constraints or modifications to the mathematical model.

The mathematical foundations of the theory of OSP stem from the works of G. Monge and L. Kantorovich concerning infinite-dimensional transportation problems. The theory of OSP allows for the solution of specifically the continuous-discrete case of the transportation problem, while significantly expanding upon the classical formulation. The founder of the

theory of OSP is O. Kiseleva, who made the most significant contribution to the establishment and development of this theory. The emergence of the theory of OSP was also influenced by N. Shor, one of the pioneers of non-differentiable optimization in mathematical programming, whose non-differentiable optimization methods underlie the numerical solution approach for OSP problems. In solving OSP problems, the infinite-dimensional optimization problem is reduced to the optimization of a non-smooth function of a finite number of variables by introducing the Lagrange functional.

Under the leadership of O. Kiseleva, a school of research on the problems of the theory of OSP has been formed, systematic research and ordering of new types of problems are taking place, dozens of problems of various subcategories have already been solved, such as dynamic, fuzzy, stochastic problems, control problems, etc., a large number of articles and a number of monographs have been written, which fundamentally cover a number of areas of problems of the theory of OSP.

This work is devoted to research in the direction of one class of problems that are reduced to the problems of the theory of OSP – two-stage transportation problems of optimal location-allocation. In the classical transportation problem, which is also called a one-stage transportation problem, the transportation of goods is simulated directly, in one step, from producers to consumers. At the same time, this approach often does not correspond to the processes of transportation in the real world. Usually, the path of goods from manufacturer to consumer is much longer and more confusing, and passes through a large number of warehouses, sorting centers, logistics hubs of various sizes and throughput. Moreover, the path of the goods includes transportation by different modes of transport, in which the conditions and price of transportation can vary significantly. For example, the price of transporting one ton of goods across the ocean on a large cargo ship can be thousands of times lower than transporting the same amount of goods by couriers who deliver goods to homes by cars, mopeds, bicycles and on foot. At the same time, both stages are necessary, and the final price of the goods includes the cost of transportation at each of the stages.

Since the methods of OSP theory make it possible to solve not merely a transportation problem, but specifically an optimal location-allocation problem, in which not only the transportation volumes are determined but also the optimal coordinates of transportation

centers are found, this dissertation also considers the construction of mathematical models with the optimal placement of first-stage transportation centers.

To date, the vast majority of two-stage transportation problems in OSP theory have been studied under conditions of certainty. However, the input data of such problems are often fuzzy, with either probabilistic or a linguistic nature of fuzziness. Fuzzy set theory, introduced by L. Zadeh, makes it possible to describe cases in which an element belongs to a set with only a certain degree of confidence. Mathematical models formulated using fuzzy variables are better suited to handling real-world data. This dissertation demonstrates the application of neuro-fuzzy technologies for reconstructing a fuzzy density function in the OSP model.

Besides the fuzziness in the input data, fuzziness may also be desirable in the output data. For example, an optimal partitioning of a set may itself be fuzzy; in such a case, each point of the set belongs to the corresponding center only to a certain degree of membership, which may be interpreted as the degree of consumer confidence or the probability of supply. This dissertation considers a mathematical model that makes it possible to construct a fuzzy partition. A fuzziness coefficient is introduced to regulate the degree of fuzziness of the resulting partitioning.

The dissertation examines four types of two-stage OSP problems:

- a two-stage crisp optimal location-allocation problem with fixed subset centers;
- a two-stage crisp optimal location-allocation problem with optimally located subset centers;
- a two-stage fuzzy optimal location-allocation problem with neuro-fuzzy reconstruction of a fuzzy density function;
- a two-stage fuzzy optimal location-allocation problem with fuzzy set partitioning;

The mathematical models of these problems include additive and multiplicative coefficients of the supply centers, as well as equality constraints on the volume of available goods at each center.

The scientific novelty of the results obtained in the dissertation is as follows:

- *for the first time*, a method for solving the two-stage optimal fuzzy location-allocation problem with fixed centers has been developed and substantiated;

- *for the first time*, a method for solving the optimal location-allocation problem with neuro-fuzzy reconstruction of a fuzzy consumption density function and placement of first-stage centers has been developed and substantiated;
- the method for solving the two-stage crisp optimal location-allocation problem with fixed subset centers *has been further developed*;
- the method for solving the two-stage crisp optimal location-allocation problem with optimal placement of subset centers *has been further developed*;
- the proposed algorithms have been generalized by introducing additive and multiplicative coefficients for first-stage centers, a non-uniform consumption density function, separate transportation cost functions for the first and second stages, and equality constraints on the amount of available products at the supply centers;
- software has been developed that implements the proposed generalized algorithms and allows the user to specify additive and multiplicative coefficients for first-stage centers, a non-uniform consumption density function, a transportation cost reduction coefficient for the second stage, and constraints on the available quantity of goods at the supply centers; software has also been developed for constructing the optimal partition using parallel computations on a graphics processing unit in order to accelerate computations;
- a number of model problems have been solved in order to demonstrate the operation of each of the proposed algorithms.

The practical significance of the results obtained is as follows: the proposed generalized algorithms make it possible to solve a range of practical problems arising in industry, logistics, economics, urban planning, and other fields that are characterized by one or more of the following features:

- the number of consumers is incomparably greater than the number of suppliers, or it is simply impractical to represent them in discrete form;
- the spatial distribution of consumers and the volume of their demand are given, or can be given, in the form of a density map;
- it is necessary to eliminate fuzziness in the demand density map described by a neuro-fuzzy database;

- the full cycle of product movement takes place in two stages (transportation of goods, processing of raw materials, multistage production);
- it is necessary to compare the efficiency of the current location of supply centers with the theoretically possible optimal location of production centers;
- it is necessary to optimally locate production centers in order to minimize costs;
- it is necessary to construct a model of a two-stage fuzzy location-allocation problem.

The developed algorithms can be used to solve location-allocation problems such as determining the optimal locations of parcel lockers, factories, police stations, fire stations, medical centers, power plants, and similar facilities, while simultaneously partitioning the territory into zones assigned to the corresponding centers.

The obtained results may be recommended for use in the educational process in the training of students specializing in “Systems Analysis” and “Applied Mathematics”.

The main results of the dissertation have been published in 8 scientific works: 3 articles in Ukrainian category B specialized scientific journals in specialty 113 “Applied Mathematics”, 2 articles in international peer-reviewed journals indexed in the Scopus scientometric database (including 1 article published in a Q2 journal), and 3 conference abstracts in proceedings of regional and international scientific and practical conferences.

Keywords: optimal set partitioning, optimal partitioning-allocation, infinite-dimensional mathematical programming, fuzzy sets, neuro-fuzzy reconstruction, two-stage transportation problem, continuous-discrete transportation problem, constrained optimization, unconstrained optimization, non-differential optimization, Shor’s r-algorithm.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. M., **Lebediev D. M.**, & Filat, O. A. (2023). Software for solving the two-stage location-allocation problems. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 23, 94–100. <https://doi.org/10.15421/322310> (фахове видання, категорія Б) (особистий внесок Лебедева Д.М.: розробка узагальненого алгоритму розв'язку, розробка програмного забезпечення, розв'язання і оформлення модельних задач; Кісельової О.М.: постановка мети дослідження, формулювання математичної моделі, методологія, контроль; Притоманової О.М.: формулювання математичної моделі, контроль; Філата О.А.: проведення числових експериментів і перевірка коректності розв'язків модельних задач;)
2. Bulat, A., Kiseleva, E., Yakovlev, S., Prytomanova, O., & **Lebediev, D.** (2024). Solving the Problem of Fuzzy Partition-Distribution with Determination of the Location of Subset Centers. *Computation*, 12(10), 199. <https://doi.org/10.3390/computation12100199> (Scopus-індексоване видання, кuartиль Q2) (особистий внесок Лебедева Д.М.: розробка узагальненого алгоритму розв'язання, розробка програмного забезпечення, формулювання, розв'язання та візуалізація модельних задач, перевірка коректності результатів розрахунків; Булата А.Ф.: концептуалізація, методологія, редагування та рецензування рукопису; контроль; Кісельової О.М.: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, контроль; Яковлева С.В.: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, контроль; Притоманової О.М. методологія, перевірка результатів розв'язання модельних задач, редагування та рецензування рукопису)
3. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & **Lebediev, D. M.** (2024). Solving continuous-discrete two-stage logistic problem of optimal partitioning-allocation. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 24, 99–112. <https://doi.org/10.15421/322410> (фахове видання, категорія Б) (особистий

внесок Лебедєва Д.М.: розробка узагальненого алгоритму розв'язання, розробка програмного забезпечення, формулювання, розв'язання та візуалізація модельних задач, перевірка коректності результатів розрахунків; Притоманової О.М.: формулювання математичної моделі, контроль; Кісельової О.М.: постановка мети дослідження, формулювання математичної моделі, методологія, контроль)

4. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Solving two-stage logistic problem of optimal location-allocation. *Studies in Systems, Decision and Control. Springer Nature Switzerland*, 205–224. https://doi.org/10.1007/978-3-031-97529-5_13 (**Scopus-індексоване видання**) (особистий внесок Лебедєва Д.М.: розробка узагальненого алгоритму розв'язання, розробка програмного забезпечення, формулювання, розв'язання та візуалізація модельних задач, перевірка коректності результатів розрахунків; Кісельової О.М.: постановка мети дослідження, формулювання математичної моделі, контроль; Притоманової О.М.: формулювання математичної моделі, контроль)
5. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Оптимальне розбиття множин і неперервно-дискретні транспортні задачі: огляд теоретичних і прикладних підходів. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 25, 86–103. <https://doi.org/10.15421/322508> (**фахове видання, категорія Б**) (особистий внесок Лебедєва Д.М.: пошук, аналіз та систематизація літературних джерел для оглядового дослідження; Кісельової О.М.: постановка мети дослідження, контроль; Притоманової О.М.: контроль та узагальнення отриманих результатів)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Кісельова, О. М., Притоманова, О. М., Лебедєв, Д. М., & Балеєко, Н. В. (2021). Застосування теорії оптимального розбиття до побудови нечітких діаграм Вороного. (МПЗІС-2021): *Тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції*, с. 87. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2021/12/mpzis-2021.pdf#page=87>

2. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. V., & **Lebediev, D. M.** (2023). Object-oriented approach to programmable solution of two-stage location-allocation problems. *Mathematical support and software for intelligent systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International scientific and practical conference*, p. 18. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf#page=18>
3. Кісельова, О. М., Притоманова, & О. М., **Лебедєв, Д. М.** (2025). Метод розв'язання нечіткої двоетапної задачі оптимального розбиття множин. (МПЗІС-2025): *Тези доповідей XXIII Міжнародної науково-практичної конференції*, с. 167. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2025/11/%D0%9C%D0%9F%D0%97%D0%86%D0%A1-2025.pdf#page=168>

ЗМІСТ

ВСТУП.....	17
Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ ЗАСАДИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН	23
1.1 Неперервні, дискретні та неперервно-дискретні транспортні задачі.	23
1.2 Неперервно-дискретні задачі у контексті теорії оптимального розбиття множин.	26
1.3 Класифікація задач ОРМ	29
1.4 Задачі ОРМ в умовах невизначеності	36
1.5 Висновки до розділу.....	38
Розділ 2. АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ ЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З ФІКСОВАНИМИ ЦЕНТРАМИ ПІДМНОЖИН	40
2.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі	40
2.2 Алгоритм розв'язання задачі.....	49
2.3 Приклади розв'язання модельних задач	51
2.4 Висновки до розділу.....	55
Розділ 3. АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ ЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З РОЗМІЩЕННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН	57
3.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі	57
3.2 Алгоритм розв'язання задачі.....	63
3.3 Приклади розв'язання модельних задач	67
3.4 Висновки до розділу.....	73
Розділ 4. АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З НЕЙРОНЕЧІТКОЮ ІДЕНТИФІКАЦІЄЮ ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ	75
4.1 Застосування методів ІІІ для розв'язання двоетапної логістичної задачі з нейронечіткою ідентифікацією функції, що входить до цільового функціоналу	75

4.2 Нейронечітка ідентифікація залежності функції щільності від її аргументів	83
4.3 Алгоритм розв'язання задачі з нейронечіткою ідентифікацією функції щільності, що входить у цільовий функціонал	87
4.4 Приклад розв'язання модельної задачі	90
4.5 Висновки до розділу	94
РОЗДІЛ 5. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З ПОБУДОВОЮ НЕЧІТКОГО РОЗБИТТЯ	96
5.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі	96
5.2 Алгоритм розв'язання задачі	109
5.3 Приклади розв'язання модельних задач та аналіз результатів	111
5.4 Висновки до розділу	120
Розділ 6. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ	122
6.1 Опис програмної реалізації алгоритму та програмних модулів	122
6.2 Опис інтерфейсу програми та інструкція користувача	125
6.3 Опис структури файлів задання початкових умов задач	129
6.4 Висновки до розділу	131
ВИСНОВКИ	132
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	134
ДОДАТОК А. ОПИС R-АЛГОРИТМУ ШОРА	145
ДОДАТОК Б. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА	149

ВСТУП

Актуальність теми. Транспортування товарів і ресурсів є одним із базових процесів сучасної економіки. Щоденно у світі переміщуються мільйони тон продукції, а ефективність логістичних систем безпосередньо впливає на вартість виробництва, функціонування інфраструктури та розвиток економіки загалом. У таких умовах особливого значення набуває побудова математичних моделей транспортних процесів, які достатньо точно відображають особливості реальних логістичних систем та дозволяють оптимізувати перевезення за наявними вхідними даними.

Реальні транспортно-логістичні системи характеризуються низкою властивостей, які ускладнюють їх математичне моделювання. Зокрема, кількість споживачів може бути значно більшою за кількість постачальників або настільки великою, що доцільніше розглядати її у неперервному вигляді через функцію щільності попиту. Крім того, транспортування ресурсів у практичних системах зазвичай відбувається у декілька етапів, із використанням проміжних складів, сортувальних центрів або логістичних хабів. При плануванні виникає необхідність знаходження оптимального розміщення таких центрів постачання чи обробки ресурсів. У ряді випадків необхідно також враховувати вимоги до надійності та відмовостійкості логістичної системи.

Ефективним математичним апаратом для дослідження таких задач є теорія оптимального розбиття множин (ОРМ), яка дозволяє розв'язувати широкий клас неперервно-дискретних задач оптимізації, зокрема неперервно-дискретні транспортні задачі та задачі оптимального розміщення-розбиття. У межах цього підходу задача нескінченновимірної оптимізації зводиться до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних, що робить можливим застосування ефективних числових методів.

Додаткову складність створює те, що вхідні дані реальних задач часто є невизначеними або нечіткими. Зокрема, функція щільності споживання товару у просторі може бути задана приблизно, на основі нечітких даних. Використання апарату теорії нечітких множин дозволяє формалізувати таку невизначеність і

побудувати математичні моделі, які краще відображають реальні умови функціонування системи. Для переходу від нечітких даних до чітких моделей можуть застосовуватися, зокрема, методи нейронечіткої ідентифікації.

Нечіткість може бути притаманна не лише вхідним даним, але й самому розв'язку задачі. У класичних задачах оптимального розбиття множин кожна точка простору однозначно належить до однієї підмножини. Однак у ряді прикладних ситуацій доцільно розглядати нечітке розбиття простору, у якому точка може належати до декількох центрів постачання з різним ступенем належності. Такий підхід дозволяє інтерпретувати розв'язок, наприклад, як міру ймовірності обслуговування споживача певним центром або як ступінь переваги відповідного варіанта постачання.

Таким чином, актуальною є задача розроблення математичних моделей і числових алгоритмів розв'язання двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття з можливістю оптимального розташування центрів постачання, використанням нечіткої функції щільності споживання та моделюванням нечіткості розбиття.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Під час роботи над дисертацією, автор проводив дослідження у відповідності з планами наукових досліджень науково-дослідної лабораторії оптимізації складних систем (науковий керівник – чл.-кор. НАНУ, проф. О.М. Кісельова) кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара у межах держбюджетних тем «Розробка та реалізація методів оптимального функціонування складних систем» (№ держреєстрації 0122U001466, 2022-2024 рр.) та «Технології нейронечіткого моделювання і оптимізації в системах розпізнавання образів та штучного інтелекту» (№ держреєстрації 0122U001224, 2022-2024 рр.).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи є розробка і програмна реалізація узагальнених числових алгоритмів розв'язання ряду двоетапних неперервно-дискретних транспортних задач, що зводяться до задач теорії ОРМ та*

характеризуються двома етапами транспортування, необхідністю оптимального розміщення центрів підмножин, та нечіткістю у вхідних або у вихідних умовах.

Завданнями дослідження були:

- розробка математичної моделі, обґрунтування теоретичного методу, розробка алгоритму розв'язання нечіткої двоетапної задачі оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами;
- розробка узагальненого алгоритму розв'язання двоетапної задачі оптимального розміщення-розбиття з нейронечіткою ідентифікацією нечіткої функції щільності;
- розробка узагальненого алгоритму розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами підмножин;
- розробка узагальненого алгоритму розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з оптимальним розміщенням центрів підмножин;
- розробка програмного забезпечення, що реалізує усі сформульовані узагальнені алгоритми, ефективно використовуючи наявні обчислювальні ресурси комп'ютера, та виконує інтерактивну візуалізацію отриманих розв'язків;
- розв'язання модельних задач з метою демонстрації роботи запропонованих узагальнених алгоритмів та надання числових та графічних результатів розв'язків;

Об'єктом дослідження є двоетапні неперервно-дискретні транспортні задачі з нечіткістю у вхідних або вихідних даних, що зводяться до задач теорії ОРМ.

Предметом дослідження є узагальнені алгоритми та методи розв'язання двоетапних неперервно-дискретних транспортних задач з нечіткістю у вхідних або вихідних даних.

Методи дослідження. Під час проведення досліджень застосовувалися методи опуклої оптимізації, недиференційовної оптимізації, дискретної оптимізації, нечіткої логіки та нейронечіткої ідентифікації.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- *вперше* розроблено та обґрунтовано метод розв'язання нечіткої двоетапної задачі оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами;
- *вперше* розроблено та обґрунтовано метод розв'язання задачі оптимального розміщення-розбиття з нейронечітким відновленням нечіткої функції щільності споживання з розміщенням центрів першого етапу;
- *дістав подальшого розвитку* метод розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами підмножин;
- *дістав подальшого розвитку* метод розв'язання двоетапної чіткої задачі оптимального розміщення-розбиття з оптимальним розміщенням центрів підмножин;
- *узагальнено* запропоновані алгоритми введенням адитивного та мультиплікативного коефіцієнтів для центрів першого етапу, нерівномірної функції щільності споживання, окремих функцій вартості транспортування на першому та другому етапах, та обмеженнями у вигляді рівностей на кількість наявної продукції у центрах постачання;
- розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані узагальнені алгоритми та дозволяє задавати адитивні та мультиплікативні коефіцієнти центрів першого етапу, нерівномірну функцію щільності споживання, коефіцієнт здешевлення транспортування на другому етапі, та обмеження на наявну кількість товарів у центрах постачання; розроблено програмне забезпечення, що виконує побудову оптимального розбиття з використанням паралельних обчислень на відеокарті з метою прискорення обчислень;
- розв'язано ряд модельних задач з метою демонстрації роботи кожного з розроблених узагальнених алгоритмів;

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені узагальнені алгоритми дозволяють розв'язувати чіткі та нечіткі двоетапні неперервно-дискретні транспортні задачі оптимального розміщення-розбиття, де перевезення ресурсу/продукту відбувається у два етапи із застосуванням проміжних пунктів транспортування, які є відповідними центрами підмножин, на які розбивається обмежена частина площини постачання/споживання. Відповідна прикладна задача

може бути сформульована з заданими координатами центрів підмножин або з умовою відшукування оптимальних координат центрів підмножин як частини розв'язку. У вхідних даних задачі може бути наявна нечітка функція щільності та експертна база даних, за допомогою якої буде виконана нейронечітка ідентифікація функції щільності під час розв'язання задачі. Задача також може бути сформульована як нечітка у разі необхідності моделювання відмовостійкості системи.

Дані алгоритми можуть бути застосовані для розв'язання задач розміщення-розбиття: знаходження оптимальних розташувань поштоматів, заводів, відділень поліції, пожежних станцій, медичних пунктів, електростанцій тощо, з одночасним поділенням території на зони, що відносяться до відповідних центрів.

Отримані висновки та розроблені підходи можуть бути рекомендовані до впровадження у навчальний процес для методичного забезпечення підготовки фахівців зі спеціальностей «Системний аналіз» та «Прикладна математика».

Особистий внесок здобувача. Основні результати, отримані в ході дисертаційного дослідження, представлені у 8 наукових працях [1-8]. Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором особисто. У публікаціях [1-8] здобувачеві належить розробка узагальненого числового алгоритму розв'язання, розробка програмного забезпечення для розв'язання задач та візуалізації розв'язків, формулювання модельних задач та аналіз їх розв'язків; співавторам належить формулювання умов та тверджень, що стосуються створення математичних моделей розв'язуваних задач, контроль, редагування та рецензування.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися у рамках доповідей на міжнародній науковій конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (м. Дніпро, 2021, 2024, 2025 рр.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 8 наукових працях: 3 статті у наукових фахових виданнях України категорії «Б» з фізико-математичних наук [1,3,5], 2 статті у міжнародних фахових виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus (у тому числі 1 стаття у журналі

квартиля Q2) [2,4]; 3 тез доповідей у збірниках матеріалів міжнародних науково-практичних конференцій [6-8].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, переліку використаних джерел, що містить 128 найменування на 11 сторінках, та двох додатків на 6 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 150 сторінок, обсяг основного тексту – 117 сторінок. Робота містить 23 рисунка та 1 таблицю.

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ ЗАСАДИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

1.1 Неперервні, дискретні та неперервно-дискретні транспортні задачі.

Проблема переміщення з одного місця до іншого та транспортування корисного навантаження з мінімальними витратами зусиль хвилювала людство від найдавніших часів. У Новому часі її важливість почала відображатися у математичних дослідженнях: від перших неформальних головоломок і практичних задач – до формальних математичних постановок та систематичного пошуку оптимальних рішень. Так з'явилися класичні задачі, підходи до розв'язання яких стали підґрунтям сучасної теорії оптимізації, зокрема задача комівояжера [9,10], транспортна задача [11-13], задача максимального потоку [14], задача маршрутизації транспортних засобів (vehicle routing problem, VRP) [15]. До цієї ж групи належать задачі, у постановках яких для мінімізації витрат на транспортування необхідно визначити кількість і оптимальні місця розташування виробничих об'єктів чи пунктів постачання: задача Вебера [16], задача пошуку p -медіани [17,18], а також загальна задача розміщення об'єктів (facility location problem, FLP) [19]. Значна частина з наведених задач може розглядатися як окремі випадки або розширення класу задач розміщення-розподілу (location-allocation) [20].

Кожна з перелічених категорій породжує значну кількість варіацій постановок і підтипів задач, що відрізняються між собою типами вхідних даних, структурою обмежень, природою змінних, що підлягають оптимізації, та іншими аспектами. Таке різноманіття цілком закономірне, адже транспортні процеси є невід'ємною частиною сучасного життя: обсяги перевезень зростають, маршрути стають довгими, логістичні системи – складнішими. За таких масштабів навіть невеликі зміни у конфігурації маршрутів чи місць розташування об'єктів можуть призводити до суттєвих економічних наслідків – як збитків, так і заощаджень. Тому актуальність швидкого і недорогого транспортування у сучасному світі важко переоцінити.

У даній роботі основну увагу зосереджено на теорії *оптимального розбиття множин*, яка є фундаментальним апаратом для розв'язання неперервно-дискретних

логістичних задач та ряду інших, більш загальних задач. У межах цієї теорії розглядаються існуючі способи формулювання та аналізу транспортних задач, а також задач розміщення-розбиття (location-allocation), у яких процес розбиття обмеженої підмножини простору відіграє ключову роль. Проаналізовано рівень розробленості різних підтипів задач, окреслено напрями, що на сьогодні залишаються недостатньо дослідженими, та визначено потенціал їх подальшого розвитку з метою формування узагальненого прикладного математичного апарату.

Вперше задача оптимального переміщення мас була сформульована Г. Монжем у трактаті «Про переміщення мас землі» (1781 р.) – так звана *задача про рови та насипи* [11]. У цій постановці задача мала повністю неперервний характер, у якій обидві множини є континуальними. Проте така модель вимагала надто жорстких умов на відображення між цими множинами, що істотно ускладнювало пошук розв'язків і, як відомо, призводило до відсутності розв'язності у широкому класі випадків.

У ХХ ст. Л. В. Канторович запропонував «послаблене» формулювання задачі Монжа, замінивши жорстке відображення планом транспортування у вигляді міри на декартовому добутку просторів. Це формулювання, відоме як неперервна транспортна задача Монжа-Канторовича, сьогодні вважається класичним [12, 13]. У загальному вигляді транспортна задача визначається як задача мінімізації сумарних витрат на переміщення певного обсягу продукції (мас, ресурсів) від множини постачальників до множини споживачів.

Наведемо формальну постановку «послабленої» неперервної транспортної задачі. Нехай μ позначає ймовірнісну міру на просторі X , а ν позначає ймовірнісну міру на просторі Y . Нехай $c: X \times Y \rightarrow R$ є функцією вартості. Назвемо $\pi: X \times Y \rightarrow R$ планом відображення, якщо він є ймовірнісною мірою на $X \times Y$, і для довільних множин $S \subset X$, $T \subset Y$ маємо, що $\pi(S \times Y) = \mu(S)$ та $\pi(X \times T) = \nu(T)$. Нехай, $\Pi(\mu, \nu)$ позначає множину всіх допустимих планів відображення. Тоді, необхідно знайти:

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi, \quad (1.1)$$

за умов:

$$\int_X \pi(x, y) dx = f(y), \quad (1.2)$$

$$\int_Y \pi(x, y) dy = g(x). \quad (1.3)$$

Дана транспортна задача (1.1)-(1.3) є неперервною задачею лінійного програмування, коли обидві множини (постачальники та споживачі) є неперервними. Існує також дискретна постановка транспортної задачі, де обидві множини є дискретними. Вона формалізується у наступному вигляді, необхідно знайти:

$$\min_{v_{ij} \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} v_{ij}, \quad (1.4)$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = a_j, \quad j = 0, \dots, M, \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i, \quad i = 0, \dots, N. \quad (1.6)$$

Для розв'язання дискретної транспортної задачі (1.4)-(1.6) застосовують симплекс-метод, розроблений Д. Б. Данцігом у 1947 році [21], або метод потенціалів, який розглядають як спеціалізовану версію симплекс-методу, адаптовану саме для транспортних моделей.

Окремий інтерес становить змішана постановка – *неперервно-дискретна транспортна задача*, у якій одна з множин (постачальники або споживачі) є неперервною, а інша – дискретною. Такі моделі природно виникають у ситуаціях, коли кількість елементів однієї множини є дуже великою і нераціональною для дискретного подання, або коли сама природа об'єкта є неперервною. Наприклад, просторовий розподіл населення на карті зазвичай подається у вигляді неперервної функції щільності, тоді як пункти постачання можуть бути дискретними.

В наведених вище постановках відстані між постачальниками та споживачами вважаються фіксованими. Проте в практичних застосуваннях часто виникає потреба *оптимально визначити місця розташування* пунктів постачання або обслуговування. Такі задачі вже виходять за межі класичної транспортної моделі й наближаються до задач *розміщення-розбиття* (location-allocation). Існує значна кількість розширень транспортної задачі, які передбачають додаткові обмеження, нелінійні залежності або

оптимізацію геометрії розміщення, через що їх неможливо ефективно розв'язувати стандартними методами лінійного програмування.

Узагальнити ці різноманітні постановки та забезпечити єдиний підхід до їх розв'язання дозволяє *теорія оптимального розбиття множин*, яка природним чином поєднує неперервно-дискретні транспортні моделі з задачами розбиття-розміщення.

1.2 Неперервно-дискретні задачі у контексті теорії оптимального розбиття множин.

Теорія оптимального розбиття множин є сучасним напрямом нескінченновимірної оптимізації, який дозволяє розв'язувати неперервно-дискретні транспортні задачі та задачі оптимального розміщення-розбиття. Широкий клас практично важливих задач оптимізації зводиться до задач оптимального розбиття заданої множини на деякі її підмножини.

Математична теорія оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n є новим розділом нескінченновимірної математичної програмування з булевими змінними. Основні результати математичної теорії оптимального розбиття множин n -вимірною евклідовою простору, розробленої членом-кореспондентом Національної Академії наук України професором О.М. Кісельовою та представниками її наукової школи при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара, викладено у понад 600 наукових публікаціях, у тому числі 7 монографій [22-28]. Детальний історичний огляд становлення теорії оптимального розбиття множин як самостійного математичного напрямку викладено у роботі [29].

Зазвичай задачі ОРМ розв'язуються згідно з єдиним універсальним підходом. Спочатку формулюється оригінальна математична модель нескінченновимірної задачі оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей або нерівностей. Далі за допомогою метода множників Лагранжа виконується перехід від задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації. Таким чином, початкова нескінченновимірна задача оптимізації зводиться до допоміжної скінченновимірної негладкої задачі максимуму (пари двоїстих задач), для розв'язання якої

використовуються числові методи недиференційовної оптимізації, наприклад r -алгоритм Шора та його модифікації [30,31].

Центральним етапом у математичному обґрунтуванні запропонованих методів ОРМ є формулювання необхідних умов оптимальності, на яких ґрунтується розробка числових алгоритмів розв'язання задач ОРМ. У кожному з розглянутих типів задач ОРМ такі умови отримані з використанням свого теоретичного апарату, залежно від специфіки конкретної задачі. В даний час ведуться дослідження, спрямовані на створення єдиної теоретичної бази для побудови загальних необхідних та достатніх умов оптимальності для широкого класу задач ОРМ, на основі апарату теорії функцій множин.

Для опису основних принципів (ознак) класифікації задач ОРМ наведемо найбільш загальну постановку неперервної задачі ОРМ.

Нехай Ω – континуальна, обмежена, вимірنا за Лебегом множина з n -вимірною евклідовою простору E_n , (Ω, Σ, μ) – вимірний простір, Σ – алгебра множини Ω . У якості міри μ розглядатимемо міру Лебега.

Означення 1.1. Розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин назвемо систему її підмножин $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$, щодо яких виконуються умови:

- 1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, N}$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$;
- 3) $\mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}$.

Позначимо через Σ_{Ω}^N простір всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

При цьому розбиття, що відрізняються тільки множиною нульової міри, будемо вважати рівними елементами простору Σ_{Ω}^N .

Очевидно, що $\Sigma_{\Omega}^N \subset \Sigma^N$. Для елементів простору $\Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma}_N$ –

декартового добутку N алгебр множини Ω , а відповідно й для елементів Σ_{Ω}^N , введемо метрику

$$\rho(\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N)\}, \{(\bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_N)\}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \mu^2(\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i)},$$

де під означенням $\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i$ розуміється симетрична різниця множин.

Постановка загальної задачі ОРМ. Нехай $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j: \Sigma_{\Omega}^N \rightarrow \mathbb{R}^1, j=1, \dots, M$

– псевдонерервні функції розбиття;

$$F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M F^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j);$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M G_i^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j), i=1, \dots, m.$$

Потрібно знайти набір підмножин $(\Omega_1^{1*}, \dots, \Omega_N^{1*}; \dots; \Omega_1^{M*}, \dots, \Omega_N^{M*}) \in (\Sigma_{\Omega}^N)^M$, при якому функція розбиття F досягає свого мінімального значення і виконуються умови:

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \leq 0, i=1, \dots, p,$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = 0, i=p+1, \dots, m.$$

Введемо наступні позначення:

$$(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = (\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \in (\Sigma_{\Omega}^N)^M;$$

$$U = \left\{ (\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in (\mathfrak{R}_{\Omega}^N)^M : G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \leq 0, i=\overline{1, p}; \right.$$

$$\left. G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = 0, i=\overline{p+1, m} \right\}.$$

Тоді, коротко задачу оптимального розбиття множин можна записати так:

$$F(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in U} \quad (1.7)$$

Тепер наведемо один більш конкретний приклад постановки задачі ОРМ. Нехай це буде *лінійна статична однопродуктова задача оптимального розбиття множин без обмежень із відшукуванням координат центрів підмножин* з кодом класифікації А2.

Постанова задачі А2.

Під неперервною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття множини Ω з E_n на її неперетинні підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути й порожні) без обмежень з розміщенням центрів $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, будемо розуміти наступну задачу.

Задача А2. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

$$(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; координати $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центру $\tau_i, i = 1, \dots, N$, наперед невідомі (підлягають визначенню).

1.3 Класифікація задач ОРМ

До неперервно-дискретних моделей оптимального розбиття множин зводиться у математичній постановці досить широкий клас як теоретичних, так і прикладних задач оптимізації.

У сучасній теорії неперервних задач ОРМ сформувалася низка напрямів, зумовлених як різними сферами її застосувань, так і типами математичних постановок задач розбиття. Кожна задача ОРМ може бути класифікована за рядом властивостей. На Рисунку 1 зображено основні властивості, за якими розрізняються задачі, і які якісно впливають на вид задачі. У лівій половині діаграми зображені більш прості види, а у правій більш складні.

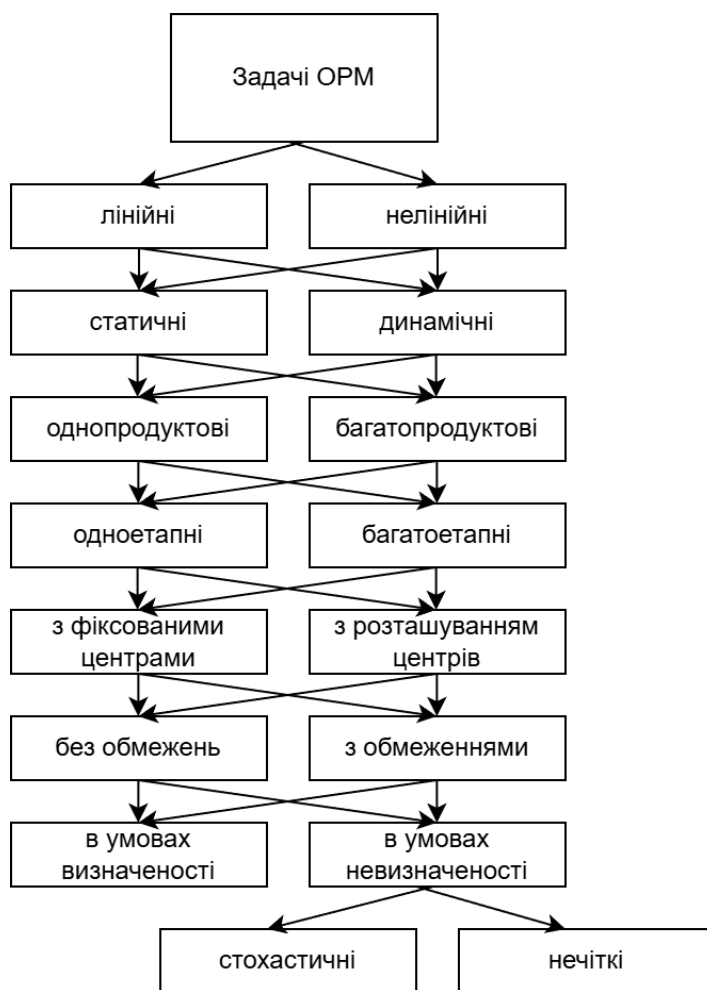


Рисунок 1.1. Класифікація задач ОРМ

Стисло опишемо кожен з підкласів задач ОРМ. У нелінійних динамічних задачах ОРМ властивість нелінійності мають або функціонал якості розбиття, або диференціальне рівняння, що описує зміну стану системи, що розглядається. Динамічною задачею ОРМ називається, коли будь-яка з вхідних змінних є функцією від часу, або коли необхідно знайти оптимальну керуючу функцію для змінної, що входить у цільовий функціонал. У динамічних задачах ОРМ розбиття може мати як статичний, так і динамічний характер, тобто межі між підмножинами протягом розглядуваного періоду часу можуть або залишатися незмінними, або бути рухомими. Багатопродуктовою є задача, у якій необхідно задовольнити споживачів з потребами у декількох продуктах різної природи (не можна замінювати потребу у одному продукті іншим). Багатоетапними є задачі, у яких доставка товарів проводиться не напряму від постачальників до споживачів, а у декілька етапів з проміжними центрами постачання. У задачах ОРМ з оптимальним розташуванням координати

центрів підмножин не є фіксованими і підлягають визначенню разом з розбиттям множини, так, щоб сумарна ціна транспортування була мінімальною (location-allocation).

Велика кількість різних видів задач та їх комбінацій вже була розглянута у роботах ряду авторів, це:

- одноетапні детерміновані лінійні та нелінійні, однопродуктові та багатодуктові задачі ОРМ за наявності обмежень, як з фіксованими координатами центрів підмножин, так і з оптимальним розміщенням центрів підмножин [23,32-41];
- одноетапні задачі з оптимальним розміщенням центрів підмножин з обмеженнями на їх допустиме розташування [42,43];
- динамічні задачі оптимального розбиття та задачі оптимального розбиття з управлінням деякою заданою керованою системою [44-51];
- неперервні задачі кульового покриття, які можуть бути представлені у вигляді задач оптимального розбиття множин [52-55];
- оптимізація обчислень та більш ефективного використання наявних обчислювальних потужностей для прискорення побудови розбиття [56];
- задачі пошуку оптимальних координат розміщення нових центрів постачання за умови вже існуючих центрів постачання з фіксованими координатами [57];
- задачі штучного інтелекту та розпізнавання образів, що зводяться до задач ОРМ [58];

А також роботи, у яких розглядаються задачі, що є дотичними до обраних напрямів досліджень даної роботи:

- двоетапні чіткі неперервно-дискретні задачі оптимального розміщення-розбиття [59-69];
- мультиплексні задачі ОРМ, де декілька постачальників можуть забезпечувати одного споживача, що позитивно впливає на відмовостійкість системи [70-73]. Слід зазначити, що у цих задачах кінцеве мультиплексне розбиття залишається чітким.

Додаткові оглядові роботи та матеріали, у яких виконано аналіз напрямів задач ОРМ та задач оптимального розміщення-розбиття і їх методів [74-80].

З прикладної точки зору, можна навести наступні приклади задач, що зустрічаються у науковій літературі, для розв'язання яких було застосовано апарат теорії оптимального розбиття множин:

- Двоетапна задача раціональної *організації евакуації людей та гуманітарної допомоги* у регіонах, постраждалих від надзвичайної ситуації [62,63].
- *Задачі розміщення підприємств*, які супроводжуються поділом заданого району на області обслуговування споживачів, де кожна область закріплюється за одним підприємством, із метою мінімізації сумарних витрат виробництва та транспортування [66,67,81-85].
- *Задача розміщення зарядних станцій для електромобілів* у межах міста з визначенням їх оптимальної кількості [86].
- *Нескінченновимірні транспортні задачі* [84,87,88], які є частинним випадком попередніх.
- *Задача поділу адміністративного району на шкільні округи*, спрямована на зменшення загальних витрат на транспортування учнів до шкіл [87].
- *Задача територіального планування сфери обслуговування* [89-91]. Тут у ролі шкіл з попереднього прикладу можуть виступати, наприклад, поштомати, відділення видачі замовлень, магазини, паркувальні майданчики, аптеки, пункти з питною водою, та багато інших.
- *Задачі складського планування* [87].
- *Задачі встановлення меж виборчих округів* [87].
- *Задачі планування автомобільних стоянок* [92].
- *Задача територіального та функціонального розподілу множини телефонних абонентів між АТС із невідомим наперед розташуванням*, що передбачає мінімізацію сумарних витрат на побудову телефонної мережі [87,92].
- *Задачі розміщення військових споруд* з метою підвищення обороноздатності регіону [90].
- *Задачі розміщення укриттів на заданій території* з метою захисту населення у разі ракетно-дронових атак із одночасним розбиттям території на зони обслуговування, кожна з яких закріплюється за одним укриттям [93].

- *Задача перетворення рельєфу місцевості*, що передбачає задані початковий і проєктний рельєфи місцевості (мапа висот) та відомі витрати на транспортування одиниці об'єму ґрунту, з метою знаходження плану переміщення земних мас із мінімальною сумарною вартістю [12].
- *Задача оптимального зрошення ділянки землі*, у якій задано потреби у воді для всіх точок території та множину можливих місць розташування водонапірних станцій із відомими питомими витратами транспортування води, полягає у розбитті території на зони обслуговування, що мінімізує загальні витрати на водопостачання, будівництво та експлуатацію системи зрошення [94].
- *Задача вибору оптимальних фізичних умов опромінення злоякісних пухлин* з метою утворення в організмі такого сумарного дозованого поля, яке було б якомога ближче до заданого [95-100].
- *Задачі ідентифікації та класифікації образів*, спрямовані на мінімізацію середніх втрат, зумовлених помилками розпізнавання [26,101,102].
- *Окремі задачі охорони навколишнього природного середовища*, що розглядаються в рамках відповідних моделей оптимізації та управління [103-105].
- *Задача просторового планування екологічно значущих зон* у районі розташування промислових об'єктів, яка полягає у виділенні територій під різні види землекористування за умови дотримання санітарних обмежень щодо рівня забруднення та мінімізації витрат на відновлення довкілля і будівництво інженерних комунікацій.
- *Задача оптимального розміщення об'єктів зберігання радіоактивних відходів* атомних електростанцій з урахуванням регіональної екологічної структури та вимог екологічної безпеки.
- *Комбінаторні геометричні задачі*, такі, як задача про мінімальне евклідове дерево; задача про найближчих сусідів множини точок P_1, \dots, P_n ; задача про мінімальну триангуляцію; задача про побудову опуклої оболонки множини з n точок; задача про коло найбільшого радіусу, що не містить заданих точок, центр якого належить опуклій оболонці цих точок; задача про k найближчих точок із числа заданих; задача про коло мінімального радіусу, що містить задані n точок, та деякі інші [106-108].

- *Задачі, що виникають у теорії статистичних рішень* під час розбиття простору ознак на класи, що не перетинаються [109].
- *Задачі теорії класифікації, кластеризації, прогнозування*, що вивчають питання поділу заданої множини елементів (скінченної або нескінченної) на неперетинні підмножини [26,110].
- *Задачі оптимального розбиття* мають близькі за постановкою аналоги серед задач *геометричного проєктування*, до яких належать задачі оптимального розкрою матеріалів, проєктування з'єднань для збірки друкованих плат та розбиття множини мікросхем на підмножини згідно зі структурою апаратних модулів комп'ютерної системи [107,108].

Задачі оптимального розбиття виникають також під час уточнення обмежень у *слабко формалізованих задачах математичного програмування*, під час розв'язання *задач глобальної оптимізації* для відшукування областей тяжіння екстремумів, під час розв'язання деяких *задач про покриття*, під час розв'язання *задачі Неймана-Пірсона*, при визначенні *вузлових точок оптимальних квадратурних та кубатурних формул* для числового обчислення інтегралів, під час *відновлення функцій* за їх значеннями у скінченній кількості точок, під час обчислення вирішальних правил у *нелінійних задачах цілочисельного стохастичного програмування*, а також під час розв'язання багатьох інших практично важливих задач [90,111-113].

Теорія оптимального розбиття множин та неперервно-транспортні задачі також мають тісний зв'язок з задачами побудови діаграм степенів кіл (power diagrams), які часто розглядають як узагальнення діаграм Вороного. *Діаграми Вороного* являють собою математичну конструкцію розбиття площини або простору на окремі непересічні області за кількістю наперед заданих спеціальних точок-генераторів, де усі точки однієї області відносяться до однієї точки-генератора і розташовані у певному сенсі «ближче» до неї, ніж до усіх інших точок-генераторів. Такі області називають *клітинами Вороного*.

Розглянута геометрична структура отримала назву на честь українського математика Георгія Вороного, однак у літературі також використовуються назви *полігони Тіссена* та *стільники Діріхле* у двовимірному випадку. Діаграми Вороного у дво- та тривимірних просторах широко застосовуються в задачах прикладного характеру, зокрема у комп'ютерній графіці, фізиці та кристалографії, біології та

екології, медицині (офтальмологія) та інших. У фізиці конденсованих середовищ такі мозаїки також відомі як *блоки Вігнера-Зейтца*. Для загальних решіток у групах Лі клітини називають просто *фундаментальними областями*. У випадку загальних метричних просторів клітини часто називають *метричними фундаментальними багатокутниками*. Існують також інші назви цієї математичної структури (або конкретних важливих її застосувань): *багатогранники Вороного*, *полігони Вороного*, *домени впливу*, *розкладання Вороного*, *мозаїки Вороного*, *теселяції Діріхле*, *розбиття Вороного-Діріхле* або *Діріхле-Вороного*.

Застосування діаграм Вороного дає можливість розробляти ефективні алгоритми комбінаторних геометричних задач. Це – задача про мінімальне евклідове дерево; задача про найближчих сусідів множини M точок площини; задача про мінімальну триангуляцію; задача про коло найбільшого радіусу, що не містить заданих точок, центр якого належить опуклій оболонці цих точок; задача про k найближчих точок з числа заданих; задача про коло мінімального радіусу, що містить задані k точок. Діаграми Вороного знаходять також застосування у задачах, пов'язаних з оптимальним розміщенням підприємств у заданому районі; з оцінкою інтегралів від монотонних функцій на заданій множині; під час розв'язання проблеми упаковки куль у тривимірному евклідовому просторі. Діаграми Вороного покладено в основу побудови теорії поліедрів і квадратичних форм. Плідним виявляється застосування діаграм Вороного під час вивчення термодинамічних властивостей різних молекулярних та іонних сполук. За видом діаграми Вороного судять про термодинамічні характеристики сполук, про їх стійкість, форму еквіпотенційних поверхонь та областей «впливу» іонів. В археології багатокутники Вороного використовуються для нанесення на карту ареалу застосування знарядь праці в стародавніх культурах та для вивчення впливу центрів торгівлі, які суперничають. Використання діаграми Вороного, що відбиває картину розселення тварин та розподілу життєво важливих ресурсів, допомагає досліджувати ефект перенаселеності.

Хоча методологія теорії ОРМ дозволяє будувати діаграми Вороного, її можливості простягаються значно ширше, ніж побудова базових діаграм Вороного у евклідовій метриці.

1.4 Задачі ОРМ в умовах невизначеності

Переважає більшість досліджень у межах теорії ОРМ була виконана для задач в умовах визначеності. Водночас практичні задачі, для опису яких використовуються моделі оптимального розбиття множин, дуже часто характеризуються наявністю різноманітних джерел невизначеності.

За таких умов ефективність рішень, отриманих під час розв'язання задач оптимального розбиття множин, значною мірою залежить від того, наскільки повно враховано невизначені чинники, що впливають на процес прийняття рішення, а також від адекватності їх математичного опису. У зв'язку з цим є актуальним створення та використання математичного інструментарію, здатного враховувати невизначеність на етапі формування моделі та забезпечувати механізми її формалізації та обробки.

Одним із методів моделювання невизначеності є апарат *нечітких множин* та *нечіткої логіки*, які вів Л. Заде [114]. На відміну від класичної теорії множин, яка оперує бінарними станами належності елементів належить/не належить, теорія нечітких множин допускає поступовий характер належності.

У класичній теорії множин існує декілька способів задання множини, одним з яких є використання характеристичної функції. Нехай X – це універсальна множина, елементи якої утворюють простір розглядуваних об'єктів у межах певного класу задач (наприклад, множина всіх цілих чисел). Тоді характеристична функція множини $A \subseteq X$ – це функція $\lambda_A(x)$, яка визначає належність елемента $x \in X$ множині A , тобто задає, чи входить відповідний елемент до цієї множини:

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, x \in X \\ 0, & \text{якщо } x \notin A, x \in X \end{cases}.$$

Особливістю характеристичної функції у класичній теорії множин є дискретний, двозначний характер її значень. Теорія нечітких множин розширює класичне поняття множини, допускаючи, що характеристична функція може набувати довільних значень на інтервалі $[0; 1]$. У межах теорії нечітких множин така функція отримала назву *функції належності* $\mu_A(x)$, а її значення інтерпретуються як ступінь належності елемента нечіткій множині.

Задачі ОРМ, які пов'язані з моделюванням та врахуванням стохастичних (ймовірнісних) процесів, відносять відповідно до стохастичних задач. Натомість постановки, що передбачають врахування невизначеності не статистичної чи ймовірнісної природи, прийнято відносити до нечітких задач ОРМ.

Формалізація задач ОРМ може здійснюватися в умовах різних типів невизначеності. Зокрема, нечіткий характер можуть окремі параметри математичної моделі або функціональні залежності між змінними. Крім того, джерелами невизначеності можуть виступати недостатньо точний опис досліджуваних процесів, нечітко сформульовані критерії оптимальності чи система обмежень, а також вплив зовнішніх неконтрольованих чинників та збурень. Такі задачі називаються нечіткими задачами ОРМ з нечіткістю у вхідних даних.

Іншою категорією є задачі, у яких вхідні умови задані чітко, але у яких оптимальний розв'язок містить нечіткість, наприклад, коли оптимальне розбиття чіткої множини є нечітким. В таких задачах оптимальний розв'язок надається використовуючи функцію належності елементів простору до підмножин нечіткого розбиття, а самі задачі називаються нечіткими з нечіткістю у розв'язку.

У наукових працях О. М. Кісельової було закладено основи формалізації нечітких задач оптимального розбиття множин і розроблено базові підходи для їх розв'язання, які продовжили її учні Л. Л. Гарт, С. В. Журавель, О. О. Жильцова, О. О. Кузенков, О. Ю. Лебідь, О. М. Притоманова, П. В. Сьомчина. Фундаментальною є монографія О.М. Кісельової [30], що фокусується на розв'язку саме нечітких задач ОРМ. Наведемо також ряд інших робіт, присвячених наступним задачам в умовах невизначеності:

- динамічна задача оптимального розбиття множин в умовах невизначеності [44,45];
- задача побудови нечіткої діаграми Вороного [115];
- задача побудови діаграми Вороного в умовах невизначеності [116];
- задача побудови діаграми Вороного з використанням нейро-нечітких технологій [117];

- задача побудови оптимального розбиття множин з нейро-нечіткою ідентифікацією функцій у цільовому функціоналі [118,119];
- стохастична задача оптимального розбиття множин, де функції, що входять у цільовий функціонал та функції обмежень залежать від випадкового параметра [120,121];
- стохастична задача оптимального розбиття множин з відновленням цільового функціоналу [122];
- узагальнені логістичні задачі з використанням нейро-нечітких технологій [123];
- задача оптимального розбиття множин з нечіткими параметрами [124].

У останні роки кількість робіт з дослідження задач ОРМ в умовах невизначеності збільшилась, проте їх кількість значно менша порівняно з кількістю досліджень, що стосуються чітких задач ОРМ. Це може бути пов'язано з відносною новизною напряму, складністю моделювання стохастичних та нечітких процесів, складністю інтеграції нечіткості у математичну модель, та складністю з візуалізацією та інтерпретацією результатів. Однак, у дослідженні таких задач є практичний зміст, оскільки це дозволить більш ефективно моделювати та розв'язувати задачі реального світу, що містять природну невизначеність.

1.5 Висновки до розділу

Теорія оптимального розбиття множин є потужним інструментом оптимізації, існує багато наукових робіт та фундаментальних монографій з цього напряму. На даний момент проблеми оптимального транспортування ресурсів від виробників до споживачів, що формулюються як неперервно-дискретні транспортні задачі, продовжують активно досліджуватись. Альтернативними назвами задач цього роду є задачі оптимального розбиття множин та оптимального розбиття-розміщення. Теорія оптимального розбиття множин надає зрозумілий та ефективний інструментарій для формулювання, аналізу та розв'язку широкого спектру задач, включаючи нелінійні, багатопродуктові, з оптимальним розміщенням центрів постачання, нечіткі тощо.

Статичні, однопродуктові, одноетапні, чіткі задачі є добре дослідженими. Однак, є можливість розвинути методологію теорії ОРМ ще далі, для більш складних

класів задач. Прикладну користь принесе розв'язання задач з більшою кількістю проміжних пунктів транспортування з одночасним розміщенням центрів постачання (багатоетапні задачі ОРМ), поглиблене вивчення динамічних задач ОРМ, а також розв'язання таких задач, як двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального нечіткого розбиття-розміщення.

Основні результати розділу опубліковані в [5].

Розділ 2. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ ЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З ФІКСОВАНИМИ ЦЕНТРАМИ ПІДМНОЖИН

2.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі

Постанова задачі. Нехай Ω – обмежена, замкнена, вимірна за Лебегом множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}$ множини $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на її неперетинні підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини Ω на неперетинні підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}.$$

Тоді під двоетапною неперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розміщення-розбиття з фіксованими положеннями центрів підмножин з обмеженнями у вигляді рівності будемо розуміти наступну задачу.

Задача 2.1. Необхідно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$ і такий невід'ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, які досягають

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^{II} = (\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}) \in \Omega^M.$$

Тут b_j^{II} , $j = 1, \dots, M$, – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови існування розв’язку задачі:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}, \quad 0 \leq b_j^{II} \leq S, \quad j = 1, \dots, M.$$

Зауважимо, що у термінах класичної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має значення обсягів транспортування продукції між центрами постачання першого етапу τ_i^I , $i = 1, \dots, N$, та центрів постачання другого етапу τ_j^{II} , $j = 1, \dots, M$.

Функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)}) \in \Omega$ для усіх $i = 1, \dots, N$; функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід’ємна на Ω ; $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i = 1, \dots, N$, – деяка задана точка простору, яка відноситься до Ω_i і називається центром цієї підмножини; $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \dots, \tau_j^{II(n)})$, $j = 1, \dots, M$, – деяка задана точка простору Ω , яка називається центром постачання другого етапу;

$c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$, – задана обмежена, визначена на $\Omega \times \Omega$ функція, яка є функцією «відстані» у відповідній метриці між точками τ_i^I і τ_j^{II} .

Тут і надалі інтеграли мають розумітись у сенсі Лебега. Будемо вважати, що міри множини граничних точок підмножин Ω_i , $i=1, \dots, N$, дорівнюють нулю.

Пару $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком *Задачі 2.1*, будемо називати оптимальною.

Введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини Ω_i , $i=1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}, \quad (2.1)$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вигляд $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_i(x), \dots, \lambda_N(x))$, а вектор v має вигляд $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$. Очевидно, що

$$I(\lambda(\cdot), v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}).$$

Перепишемо *Задачу 2.1* у термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин Ω_i , $i=1, \dots, N$, у наступному вигляді.

Задача 2.2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v)} I(\lambda(\cdot), v),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j=1, \dots, M;$$

$\lambda_i(x) = 0 \vee 1$ майже скрізь (м.с.) для $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$;

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega;$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Від нескінченновимірної *Задачі 2.2* з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 2.3. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma_1 \times Q} I(\lambda(\cdot), v),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.с. для } x \in \Omega;$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M\};$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega\};$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

При кожному фіксованому $v \in Q$ *Задача 2.3*, як доведено у [23] має розв'язок.

Дійсно, оскільки Γ_1 – обмежена, замкнена, опукла множина гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$, а функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ при кожному фіксованому $v \in Q$ є лінійним (а значить опуклим) та неперервний відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_1 , то згідно з узагальненою теоремою Веєрштрасса [26] опуклий неперервний функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ при фіксованому $v \in Q$ на обмеженій, замкненій, опуклій множині Γ_1 гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$ досягає своєї нижньої грані.

Твердження 2.1. При кожному фіксованому $v \in Q$ обмежена, замкнена, опукла множина Γ_1 гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$ є слабо компактною та (згідно з теоремою Крейна-Мільмана [23]) містить принаймні одну крайню точку.

Твердження 2.2. Серед множини точок Γ_1^* , у яких лінійний відносно $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ досягає при кожному фіксованому $v \in Q$ мінімального за $\lambda(\cdot)$ значення на множині Γ_1 , знайдеться хоча б одна крайня точка множини Γ_1

Твердження 2.3. Крайні точки множини Γ_1 являють собою характеристичні функції деяких підмножин Ω_j , які утворюють розбиття множини Ω при кожному фіксованому $v \in Q$.

З Тверджень 2.1-2.3 виходить, що при кожному фіксованому $v \in Q$ у множині оптимальних розв'язків *Задачі 2.3* містяться оптимальні розв'язки *Задачі 2.2*, що дозволяє у подальшому перейти до розгляду *Задачі 2.3*.

Застосування методу множників Лагранжа.

Введемо функціонал Лагранжа для *Задачі 2.3* наступним чином:

$$L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), v) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^{\text{II}} - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right), \quad (2.2)$$

де $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_M)$ – $(N + M)$ -вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ м.с. для $x \in \Omega$; $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ – $(N + M)$ -вимірний вектор дійсних невід'ємних чисел.

Пару елементів $(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$ назвемо сідловою точкою функціонала (2.2) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$, де

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\},$$

$$\Lambda = \left\{ \Psi = (\psi; \eta) \in E^{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E^N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E^M \right\},$$

якщо $L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi) \leq L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*)$ для $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in Q$, $\Psi \in \Lambda$

або

$$L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi).$$

Введемо функціонали

$$X\{\lambda(\cdot), v\} = \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \Psi \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі

$$X\{\lambda(\cdot), v\} \rightarrow \min, \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q \quad (2.3)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \Psi \in \Lambda. \quad (2.4)$$

Задачу (2.3) назвемо прямою, а задачу (2.4) – двоїстою (дуальною) до задачі (2.3).

Нескладно показати (за аналогією з [23]), що задачі (2.3), (2.4) пов'язані відношенням двоїстості $X_* = G^*$ і розв'язання пари двоїстих задач (2.3) та (2.4), (для кожної з яких розв'язок існує) еквівалентно відшукуванню сідлової точки функціонала Лагранжа (2.2) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$.

Для відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа (2.2) конкретизуємо двоїсту задачу (2.4). Для цього від задачі відшукування $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$

перейдемо, згідно з [24], до наступної задачі:

$$\min_{v \geq 0} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi).$$

Позначимо

$$G_1(\Psi) = G_1(\psi, \eta) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi). \quad (2.5)$$

Підставляючи у (2.5) вираз для $L(\{\lambda(\cdot), \nu\}, \Psi)$ з (2.2), враховуючи (2.1), а також той факт, що функціонал (2) є лінійним сепарабельним відносно λ (при кожному фіксованому $\nu \geq 0$) на множині Γ , див. [24], отримуємо

$$G_1(\psi, \eta) = \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, i=1, \dots, N}} \left\{ c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \right\} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \right) \nu_{ij} \quad (2.6)$$

Легко бачити, див. [23], що у (2.6) мінімальне значення i -го, $i=1, \dots, N$ виразу, що стоїть у фігурних дужках, для кожного $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$, досягається при $\lambda_i(x) = \lambda_{*i}(x)$, де

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, i \neq k, \text{ м.в. для } x \in \Omega, k=1, \dots, N, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}, \quad (2.7)$$

і функціонал $G(\Psi)$ приймає вигляд

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \min_{\nu \geq 0} G_1(\psi, \eta) = \\ = \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min_{\nu \geq 0} \left(c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \right) \nu_{ij}. \quad (2.8)$$

Очевидно, що для $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$ та усіх $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$ має місце

$$\min_{\nu_{ij} \geq 0} \left(c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \right) \nu_{ij} = \begin{cases} 0, & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \geq 0, \\ -\infty, & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j < 0. \end{cases}$$

Оскільки двоїста задача (2.4) полягає у максимізації функціонала $G(\Psi)$ (2.8) на множині Λ , то його максимум має сенс шукати на множині тільки тих $(\psi, \eta) \in \Lambda$, для яких $c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \geq 0$. Тому двоїсту задачу (2.4), з урахуванням виконаних перетворень, можна сформулювати наступним чином:

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^II \rightarrow \max_{\Psi} \quad (2.9)$$

за умов

$$\begin{aligned} \eta_j &\leq c_{ij}^{II} \left(\tau_i^I, \tau_j^{II} \right) - \psi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ \psi &\in E^N, \quad \eta \in E^M. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Перепишемо умови (2.10) у вигляді

$$\eta_j = \min_{1 \leq k \leq N} \left(c_{kj}^{II} \left(\tau_k^I, \tau_j^{II} \right) - \psi_k \right), \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.11)$$

Підставляючи вираз (2.11) в (2.9), і тим самим, виключаючи змінну η з функціонала $G(\Psi)$, отримуємо двоїсту задачу (2.4) у вигляді

$$\begin{aligned} G(\Psi) = G_2(\psi) &= \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^M b_j^{II} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_{kj}^{II} \left(\tau_k^I, \tau_j^{II} \right) - \psi_k \right) \rightarrow \max_{\psi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E^N. \quad (2.13)$$

Таким чином, переходячи від початкової (2.3) через функціонал Лагранжа (2.2) до двоїстої задачі, зведеної до вигляду (2.12), (2.13), ми отримали вираз для першої компоненти $\lambda_*(\cdot)$ оптимального розв'язку *Задачі 2.3* у вигляді (2.7), де у якості $\psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (2.12), (2.13).

Далі, підставляючи у цільовий функціонал (2.1) початкової *Задачі 2.3* знайдений вираз для $\lambda_*(\cdot)$ із (2.7) при $\psi = \psi^*$, переходимо до наступної *Задачі 2.4* відшукування другої компоненти $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ оптимального розв'язку початкової *Задачі 2.3*.

Задача 2.4. Необхідно знайти

$$I(\lambda_*(\cdot), v) = \text{const} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II} \left(\tau_i^I, \tau_j^{II} \right) v_{ij} \rightarrow \min_v$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

де значення $const = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k^* \right) \rho(x) dx$ не впливає на значення точки

мінімуму функції $I(\lambda_*(\cdot), v)$.

Очевидно, *Задача 2.4* – це класична скінченновимірна (дискретна) транспортна задача, для якої виконується умова балансу (транспортна задача є закритою)

$$\int_{\Omega} \rho(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^II.$$

Для розв'язання *Задачі 2.4* можна застосувати відомий метод потенціалів [21].

Сформулюємо теорему про оптимальний розв'язок неперервно-дискретної двоетапної задачі.

Теорема 2.1. Перша компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*i}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$

оптимального розв'язку *Задачі 2.3* визначається для усіх $i = 1, \dots, N$, і майже усіх $x \in \Omega$ наступним чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_{*i}^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*, \quad i \neq k, \quad k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

у якості $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (4), зведеної до вигляду (2.12), (2.13).

Друга компонента $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM})$ знаходиться як оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної транспортної задачі методом потенціалів [21]:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_{*i}^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v \quad (2.14)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i=1, \dots, N, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j=1, \dots, M, \quad (2.16)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \quad (2.17)$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^II. \quad (2.18)$$

Далі наведемо алгоритм розв'язку *Задачі 2.3*, який базується на сформульованій вище теоремі, складовими якою є, з урахуванням недиференційовності функції $G_2(\psi)$, один із варіантів r -алгоритму Шора Н.З., див. [23,25,30,31], який застосовується для числового розв'язку двоїстої задачі (2.12)-(2.13), і метод потенціалів [21], який застосовується для розв'язку задачі (2.14)-(2.18) відшукування другої компоненти v_* оптимального розв'язку *Задачі 2.3*.

2.2 Алгоритм розв'язання задачі

Перед тим як сформулювати алгоритм розв'язання *Задачі 2.3*, який базується на сформульованій *Теоремі 2.1*, визначимо i -у, $i=1, \dots, N$ компоненту вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi) = (g_{G_2}^{\psi_1}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_i}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_N}(\psi))$ функції $G_2(\psi)$ задачі (2.12) у точці $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ наступним чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^II q_{ij}), \quad i=1, \dots, N, \quad (2.19)$$

де

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, \quad i \neq k, \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad k=1, \dots, N, \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

Опишемо алгоритм.

Етап підготовки. Область Ω укладаємо у n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, та задаємо $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед покриваємо прямокутною сіткою, у вузлах якої будемо розраховувати значення $\lambda(x)$ та $g_{G_2}(\psi)$ за формулами (2.20).

Алгоритм 2.1. Псевдокод розв'язку двоетапної задачі з фіксованими центрами

Початок алгоритму

1. Задаємо номер ітерації $k = 0$.
2. Довільно задаємо початкове наближення вектору штрафних значень $\psi^{[0]}$.
3. Розраховуємо значення $\lambda^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (2.20) при $\psi = \psi^{[0]}$.
4. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (2.19) при $\psi = \psi^{[0]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$.
5. Задаємо номер ітерації $k = 1$.
6. Обчислюємо значення вектору $\psi^{[1]}$ за формулою $\psi^{[1]} = \psi^{[0]} + h_0 g_{G_2}(\psi^{[0]})$, де h_0 – початковий розмір кроку.
7. Доки не виконується жодна з умов зупинки алгоритму $\|\psi^{[k]} - \psi^{[k-1]}\| \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\|g_{G_2}(\psi^{[k]})\| \leq \varepsilon_g$, $\varepsilon_g > 0$, виконуємо цикл:
 8. Приймаємо $k = k + 1$.
 9. Розраховуємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (2.20) при $\psi = \psi^{[k]}$.
 10. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (2.19) при $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$.
 11. Виконуємо обчислення за ітераційною формулою алгоритму Шора (Додаток А) $\psi^{[k+1]} = \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi$, де B_{k+1}^ψ – оператор відображення перетвореного простору у основний простір E_N , при чому $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^* g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k – розмір кроку.
 12. Кінець циклу.

13. Приймаємо $\psi^* = \psi^{[k]}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{[k]}(x)$, де k – номер ітерації, на якій було завершено цикл кроків 7-11.
14. Розв'язуємо транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$ і $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$.
15. Розраховуємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\psi)$ двоїстої задачі (2.12)-(2.13) при $\psi = \psi^*$ і, для правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу (2.1) *Задачі 2.3* за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), v_*) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{*ij}$$

Кінець роботи алгоритму.

2.3 Приклади розв'язання модельних задач

Для демонстрації роботи алгоритму та програми розв'язання і візуалізації було обрано декілька модельних задач. Обрані задачі є простими для інтуїтивного розуміння та пояснення особливостей роботи алгоритму.

На рисунках з візуалізацією розв'язків модельних задач центри постачання першого етапу позначені як чорні круги, а центри постачання позначені як чорні квадрати; межі між підмножинами, які відносяться до різних центру постачання першого етапу, позначені чорним кольором; накреслені та підписані обсяги транспортувань між центрами постачання першого та другого етапів. Усі модельні задачі розв'язані на одиничному квадраті, функція попиту ресурсу скрізь визначена як 1, а сумарна пропозиція дорівнює сумарному попиту, тобто транспортна задача є закритою (збалансованою).

Приклад 2.1. Двоетапна задача з двома центрами першого етапу, та одним центром другого етапу. Вхідні дані задачі: центри першого етапу мають координати (0.2; 0.5) та (0.8; 0.5), центр постачання другого етапу має координати (0.4; 0.4). Необхідно знайти оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів та оптимальне розбиття множини попиту на дві підмножини, які відносяться до конкретних центрів постачання першого етапу.

Результати розв'язання: значення цільового функціоналу 0.60587; кількість ітерацій 76.

На *Рисунку 2.1(б)* представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на дві підмножини. На *Рисунку 2.1(а)* можна побачити оптимальне розбиття перед початком роботи алгоритму на першій ітерації $K=0$.

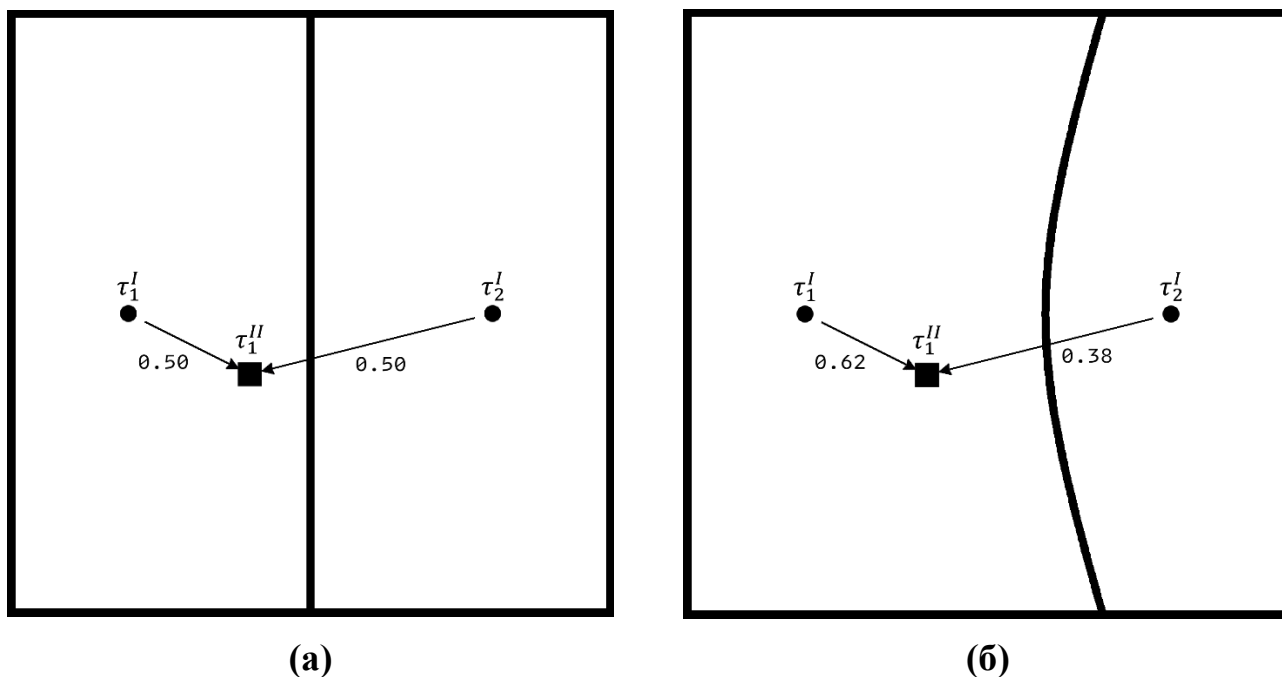


Рисунок 2.1. Ітерації отримання оптимального розв'язку: (а) $K=0$ (відповідає розв'язку одноетапної задачі); (б) $K=76$;

На першій ітерації цільовий функціонал має значення 0.61766. Оскільки на першій ітерації усі величини вектору штрафних значень $\psi = \psi^{(0)}$ є однаковими, то за формулою (2.7) очевидно, що на першій ітерації отримане розбиття є аналогічним до одноетапної задачі оптимального розбиття-розміщення. Після завершення роботи алгоритму розбиття має інший вигляд і значення цільового функціоналу є меншим. Це наочно демонструє необхідність розв'язувати двоетапну задачу як єдине ціле замість розв'язання двох окремих задач – розбиття-розміщення та дискретної транспортної.

Приклад 2.2. Двоетапна задача з п'ятьма центрами першого етапу та двома центрами другого етапу. Вхідні дані задачі: центри першого етапу мають координати (0.2; 0.2), (0.8; 0.8), (0.2; 0.8), (0.8; 0.2) та (0.5; 0.5); центри постачання другого етапу мають координати (0.35; 0.25) і (0.77; 0.6), та однакові потужності 0.5. Необхідно знайти оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів та

оптимальне розбиття множини попиту на п'ять підмножин, які відносяться до конкретних центрів постачання першого етапу.

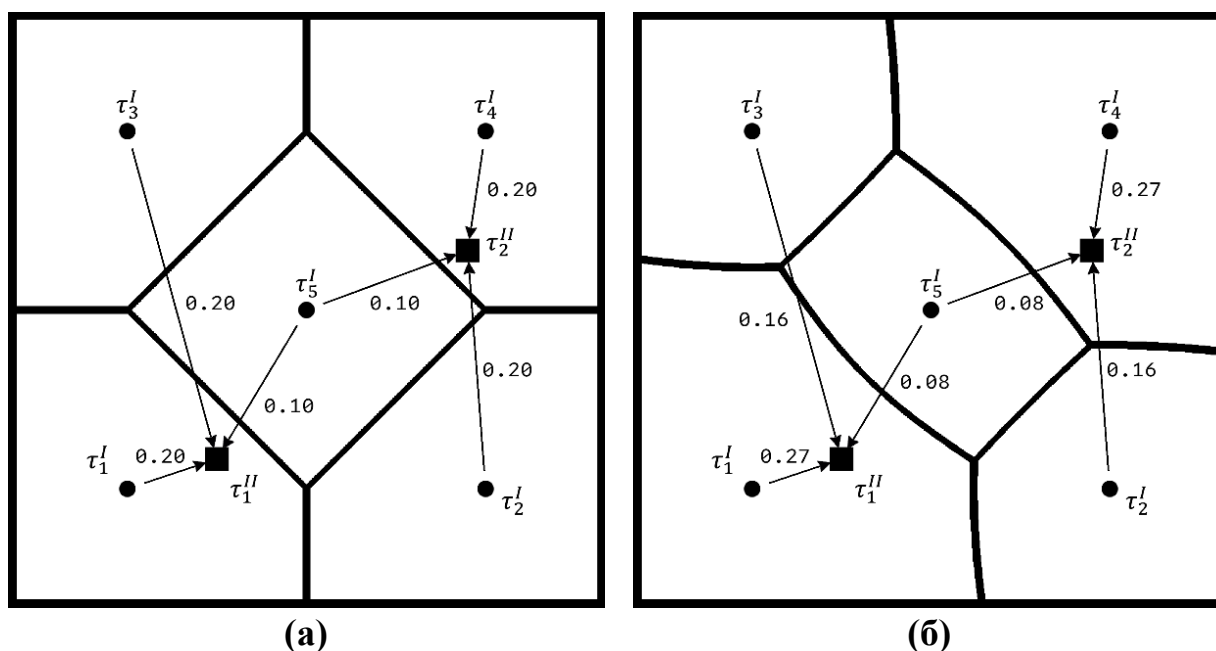


Рисунок 2.2. Ітерації отримання оптимального розв'язку: (а) $K=0$ (відповідає розв'язку одноетапної задачі); (б) $K=71$;

Результати розв'язання: значення цільового функціоналу 0.476; кількість ітерацій 71. На *Рисунку 2.2* представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на п'ять підмножин.

Приклад 2.3. Двоетапна задача з шістьма центрами першого етапу та трьома центрами другого етапу. Вхідні дані задачі: центри першого етапу мають координати (0.25; 0.1), (0.25; 0.50), (0.25; 0.9), (0.75; 0.10), (0.75; 0.50), (0.75; 0.9); центри постачання другого етапу мають однакові потужності 0.33 та координати (0.35; 0.25), (0.1; 0.65), (0.77; 0.6). Необхідно знайти оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів та оптимальне розбиття множини попиту на шість підмножин, які відносяться до конкретних центрів постачання першого етапу.

Результати розв'язання: значення цільового функціоналу 0.447; кількість ітерацій 85. На *Рисунку 2.3* представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на шість підмножин.

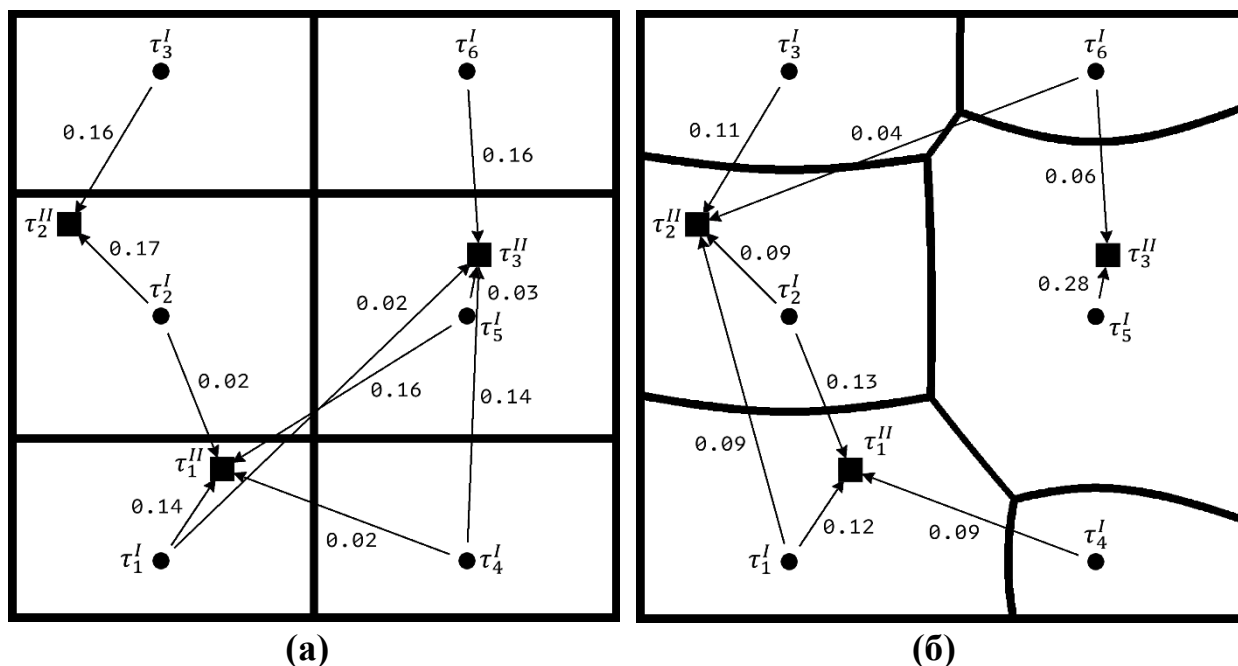


Рисунок 2.3. Ітерації отримання оптимального розв'язку: (а) $K=0$ (відповідає розв'язку одноетапної задачі); (б) $K=85$;

На *Рисунку 2.3(б)* можна побачити розв'язок двоетапної задачі. Як і у минулому прикладі, розбиття множини попиту на першій ітерації розв'язку двоетапної задачі відповідає оптимальному розв'язку одноетапної задачі. Проте оптимальне розбиття множини у двоетапній задачі значно відрізняється: розбиття змінюється таким чином, щоб надавати перевагу тому центру першого етапу, який знаходиться найближче до центру другого етапу, а отже, і має найдешевшу вартість перевезення.

Приклад 2.4. Двоетапна задача з трьома центрами першого етапу та шістьма центрами другого етапу. Вхідні дані задачі: центри першого етапу мають координати $(0.2; 0.2)$, $(0.5; 0.8)$, $(0.8; 0.2)$; центри постачання другого етапу мають однакові потужності 0.166 та координати $(0.6; 0.15)$, $(0.55; 0.55)$, $(0.9; 0.5)$, $(0.9; 0.85)$, $(0.1; 0.9)$, $(0.3; 0.4)$.

Дана задача симулює ситуацію, коли центрів постачання другого етапу більше, ніж центрів постачання першого етапу. Як можна побачити з *Рисунка 2.4*, фінальне розбиття організоване таким чином, що центри другого етапу призначаються до найближчого центра першого етапу, і чим більше центрів другого етапу віднесено до центру першого етапу, тим більшу частину площини постачання виділено до того ж самого центру першого етапу. У даній задачі найбільшу частину площини виділено

для центра постачання першого етапу з трьома центрами другого етапу, а найменше для центра першого етапу з тільки одним центром другого етапу.

Результати розв'язання: значення цільового функціоналу 0.559; кількість ітерацій 190. На *Рисунку 2.4* представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на три підмножини.

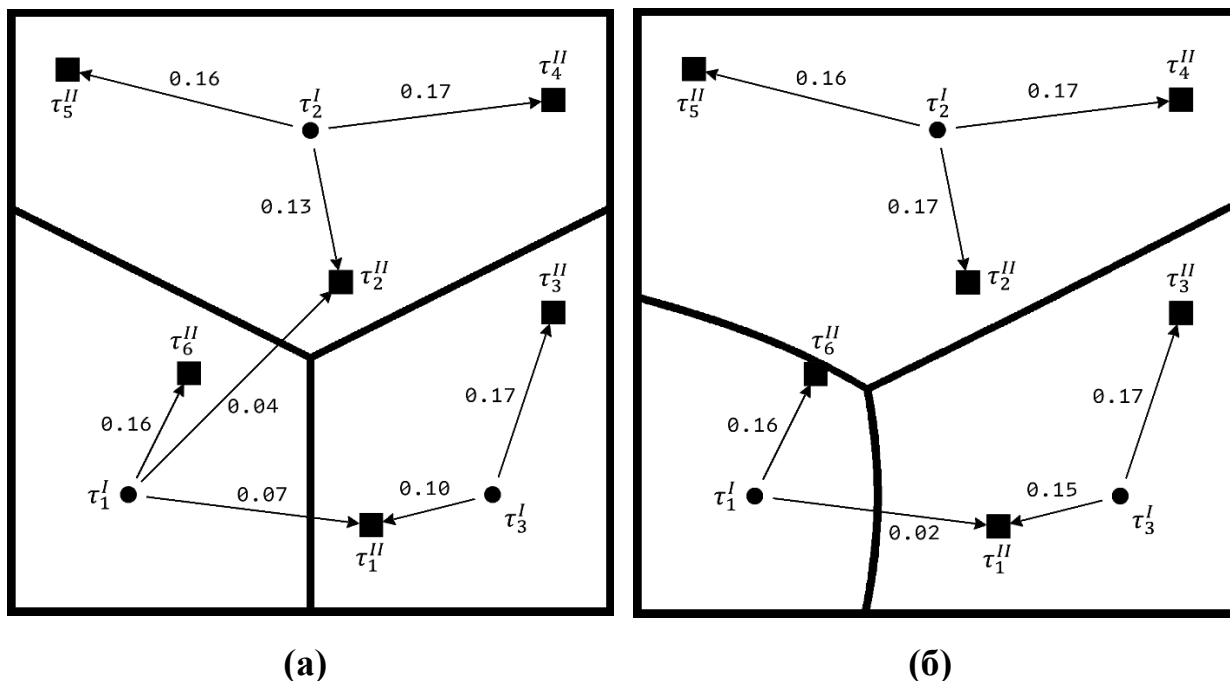


Рисунок 2.4. Ітерації отримання оптимального розв'язку: (а) $K=0$ (відповідає розв'язку одноетапної задачі); (б) $K=190$;

2.4 Висновки до розділу

У розділі було розроблено алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі з фіксованими центрами підмножин, яка поєднує у собі дві підзадачі оптимізації – дискретну транспортну задачу, та задачу оптимального розбиття множин, яка є нескінченновимірною задачею. Алгоритм розроблено на основі існуючих в межах теорії ОРМ доведеної теорії про існування розв'язку та виду оптимального розв'язку, і реалізовано у програмному вигляді. Програмна реалізація має багато налаштувань, дозволяє будувати розв'язки двоетапної задачі з великою точністю, надає візуалізацію як кінцевого розв'язку, так і проміжних розв'язків.

Розв'язання двоетапної задачі є важливим наступним кроком у наближенні математичних моделей до прикладних задач реального світу, оскільки враховує

більше етапів перевезень і надає більш оптимальні розв'язки, ніж одноетапні задачі ОРМ.

Основні результати розділу опубліковані в [1, 3].

Розділ 3. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ ЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З РОЗМІЩЕННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

3.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі

Постанова задачі [60]. Нехай Ω – обмежена, замкнена, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij},$$

де $\tau_1^I, \dots, \tau_N^I$ – сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, званих центрами цих підмножин ($\tau_i^I \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$), причому координати центрів $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i = 1, \dots, N$, невідомі і вимагають свого визначення; $\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}$ – деякі задані точки множини Ω ; v_{ij} ($i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$) – вагові параметри, що виражають зв'язок між центрами підмножин $\tau_i^I \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$

, та заданими точками $\tau_j^H \in \Omega$, $\tau_j^H = (\tau_j^{H(1)}, \dots, \tau_j^{H(n)})$, $j=1, \dots, M$. Функція $\rho(x) \geq 0$ – задана обмежена, вимірна на Ω ; $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i=1, \dots, N$, – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані дійсні обмежені функції, вимірні за аргументом $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)}) \in \Omega_i \subset \Omega$; $c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H)$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$ – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані обмежені функції, які мають сенс «відстані» між точками $\tau_i^I \in \Omega_i$ та $\tau_j^H \in \Omega$ у відповідній метриці простору E_n .

Тоді під двоетапною неперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розміщення-розбиття з розміщенням (відшуканням координат) центрів підмножин за наявності обмежень у вигляді рівності будемо розуміти наступну задачу.

Задача 3.1. Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$, такі координати центрів $\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*i}^I, \dots, \tau_{*N}^I$ цих підмножин в області Ω і такий невід’ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j=1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M; \quad x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega;$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^H = (\tau_1^H, \dots, \tau_M^H) \in \Omega^M.$$

Тут b_j^H , $j=1, \dots, M$, – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язання задачі

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^I, \quad 0 \leq b_j^I \leq S, \quad j=1, \dots, M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має прикладне значення обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу $\tau_i^I, i=1, \dots, N$, до пунктів $\tau_j^I, j=1, \dots, M$, кінцевого споживання (другого етапу).

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин $\Omega_i, i=1, \dots, N$, дорівнює нулю.

Означення 3.1. Трійку $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком *Задачі 3.1*, назвемо оптимальною.

Введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини $\Omega_i, i=1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^I(\tau_i^I, \tau_j^I) v_{ij} \quad (3.1)$$

де вектор-функція $\lambda(\cdot)$ має вид $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$. Очевидно, що $I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$.

Перепишемо *Задачу 3.1* в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин $\Omega_i, i=1, \dots, N$, у такому вигляді.

Задача 3.2. Необхідно знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v)} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega;$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Від нескінченновимірної *Задачі 3.2* з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями функцій $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 3.3. Необхідно знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v) \in \Gamma_1 \times \Omega^N \times Q} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.с. для } x \in \Omega;$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega\};$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N;$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

У [60] показано, що при кожному фіксованому $v \in Q$ *Задача 3.3* має розв'язок, за допомогою функціонала Лагранжа, заданого для задачі *Задача 3.3* таким чином:

$$L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi\right) = I\left(\lambda(\cdot), \tau^I, v\right) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^H - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right), \quad (3.2)$$

де $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_M)$ – $(N+M)$ -вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ м.с. для $x \in \Omega$; $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N$; $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ – $N \times M$ -вимірний вектор дійсних невід’ємних чисел.

Означення 3.2. Пару елементів $\left(\left\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\right\}, \Psi^*\right)$ назвемо **сідловою точкою** функціонала (3.2) на множині $\left\{\Gamma \times \Omega^N \times Q\right\} \times \Lambda$, де

$$Q = \left\{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\right\},$$

$$\Lambda = \left\{\Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E_M\right\},$$

якщо для всіх $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $\tau^I \in \Omega^N$, $v \in Q$, $\Psi \in \Lambda$:

$$L\left(\left\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\right\}, \Psi\right) \leq L\left(\left\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\right\}, \Psi^*\right) \leq L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi^*\right),$$

або

$$\begin{aligned} L\left(\left\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\right\}, \Psi^*\right) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi\right) = \\ &= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi\right). \end{aligned}$$

Введемо функціонали

$$X\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}\right) = \max_{\Psi \in \Lambda} L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi\right), \quad \left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}, \Psi\right), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі

$$X\left(\left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\}\right) \rightarrow \min, \quad \left\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\right\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q \quad (3.3)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \Psi \in \Lambda \quad (3.4)$$

Задачу (3.3) назвемо прямою, а задачу (3.4) – двоїстою до задачі (3.3).

Нескладно показати, що задачі (3.3)-(3.4) пов'язані співвідношенням подвійності $X_* = G^*$ і розв'язок пари двоїстих задач (3.3)-(3.4), (кожна з яких є розв'язуваною) еквівалентний відшукуванню сідлової точки функціонала Лагранжа (3.2) на множині $\{\Gamma \times \Omega^N \times Q\} \times \Lambda$.

Двоїсту задачу (3.4) можна сформулювати у вигляді:

$$G(\Psi) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_2(\tau^I, \psi) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} \left[\int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k \right) \right] \rightarrow \max_{\psi} \quad (3.5)$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N \quad (3.6)$$

У [60] доведено теорему, яка визначає оптимальний розв'язок *Задачі 3.2*.

Теорема. Компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*i}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$ оптимального розв'язку *Задачі 3.2* визначається для всіх $i = 1, \dots, N$ і майже всіх $x \in \Omega$ таким чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_{*i}^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*, i \neq k, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $(\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I), (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі (3.4), зведеної до виду (3.5)-(3.6). Компонента $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM})$ є оптимальним розв'язком скінченновимірної транспортної задачі

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v \quad (3.7)$$

за умов

$$\sum_j v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, i = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.9)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.10)$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^II. \quad (3.11)$$

3.2 Алгоритм розв'язання задачі

Алгоритм розв'язання *Задачі 3.1* включає алгоритм розв'язання *Задачі 3.2*, який заснований на сформульованій вище теоремі. Складовими частинами алгоритму розв'язання *Задачі 3.2* є, з урахуванням недиференційовності функції $G_2(\tau^I, \psi)$, один із варіантів r -алгоритму Шора – метод узагальнених псевдоградієнтів [30,31], який застосовується для числового розв'язання двоїстої задачі (3.5)-(3.6), і метод потенціалів [21], що застосовується для розв'язування задачі (3.7)-(3.11) відшукування значення компоненти v_* оптимального розв'язку *Задачі 3.2*.

Перш ніж сформулювати алгоритм розв'язання *Задачі 3.1*, визначимо i -ту, $i = 1, \dots, N$, компоненту вектору узагальненого псевдоградієнта

$$\begin{aligned} g_{G_2}(\tau^I, \psi) &= (g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi}(\tau^I, \psi)) = \\ &= (g_{G_2}^{\tau_1^I}(\tau^I, \psi), \dots, g_{G_2}^{\tau_N^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi_1}(\tau^I, \psi), \dots, -g_{G_2}^{\psi_N}(\tau^I, \psi)) \end{aligned}$$

функції $G_2(\tau^I, \psi)$ задачі (5)-(6) в точці $(\tau^I, \psi) = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I, \psi_1, \dots, \psi_N)$ таким чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\tau^I, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^II q_{ij}), \quad (3.12)$$

$$\text{де } q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}^II(\tau_i^I, \tau_j^II) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^II(\tau_k^I, \tau_j^II) - \psi_k), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$g_{G_2}^{\tau_i^I} = \int_{\Omega} \rho(x) g_{c^I}^{\tau_i^I}(\tau, x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^II r_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.13)$$

$$\text{де } r_{ij} = \begin{cases} g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II}), & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), \quad j=1, \dots, M, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$g_{c^I}^{\tau_i^I}(\tau^I, x)$ – i -та компонента, $i=1, \dots, N$, N -вимірному вектору узагальненого

градієнта $g_{c^I}^{\tau_i^I}(\tau^I, x)$ функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$;

$g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – i -та компонента, $i=1, \dots, N$, N -вимірному вектору узагальненого

градієнта $g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$;

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, \\ & i \neq k, \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad k=1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Опишемо алгоритм. Опис алгоритму поділений на дві частини для спрощення сприйняття та більш прямолінійної реалізації у програмному вигляді. Розв'язок двоетапної задачі розміщення-розбиття ділиться на розв'язок внутрішньої двоетапної задачі, де знаходиться оптимальне розбиття множини при фіксованих координатах центрів першого етапу, та розв'язок зовнішньої двоетапної задачі, у якій знаходяться оптимальні координати центрів першого етапу.

Етап підготовки. Вкладемо область Ω в n -вимірний паралелепіпед Π , грані якого паралельні осям декартової системи координат, визначимо $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Виконаємо дискретизацію області Π за допомогою рівномірної прямокутної сітки.

Алгоритм 3.1. Псевдокод розв'язку двоетапної задачі з фіксованими координатами центрів першого етапу

Початок алгоритму

1. Задаємо номер ітерації $k = 0$.
2. Довільно задаємо початкове наближення вектору $\psi^{[0]}$.
3. Розраховуємо значення $\lambda^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.20) при $\psi = \psi^{[0]}$.

4. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (19) при $\psi = \psi^{[0]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$.
5. Задаємо номер ітерації $k = 1$.
6. Обчислюємо значення вектору $\psi^{[1]}$ за формулою $\psi^{[1]} = \psi^{[0]} + h_0 g_{G_2}(\psi^{[0]})$, де h_0 – розмір кроку, що визначається з умови максимуму функції $G_2(\psi)$ за напрямком узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi^{[0]})$.
7. Поки не виконується умова $\|\psi^{[k]} - \psi^{[k-1]}\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, виконуємо цикл:
 8. Приймаємо $k = k + 1$.
 9. Розраховуємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.20) при $\psi = \psi^{[k]}$.
 10. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (3.19) при $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$.
 11. Виконуємо обчислення за ітераційною формулою алгоритму Шора (Додаток А) $\psi^{[k+1]} = \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi$, де B_{k+1}^ψ – оператор відображення перетвореного простору у основний простір E_N , при чому $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^* g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k – розмір кроку.
 12. Кінець циклу.
13. Приймаємо $\psi^* = \psi^{[k]}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{[k]}(x)$, де k – номер ітерації, на якій було завершено цикл [7-11].
14. Розв'язуємо транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$ і $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$.

Завершення роботи алгоритму.

Далі наведена друга частина – алгоритм розв'язку двоетапної транспортної задачі з оптимальним розміщення центрів першого етапу. Цей алгоритм буде використовувати попередньо наведений *Алгоритм 3.1* як допоміжну підпрограму для побудови оптимального розміщення-розбиття при фіксованих τ^I .

Алгоритм 3.2. Псевдокод розв'язку двоетапної транспортної задачі з оптимальним розміщенням центрів першого етапу

Початок алгоритму

1. Задаємо номер ітерації $k = 0$.
2. Довільно задаємо початкове наближення вектору $\tau^{I[0]}$.

3. За допомогою *Алгоритму 3.1* розраховуємо оптимальні значення вектору $\psi^{*[0]}$ та оптимальне розбиття $\lambda^{*[0]}(x)$ у вузлах сітки при фіксованому $\tau^I = \tau^{I[0]}$.
4. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}(\tau^I)$ у вузлах сітки за формулами () при $\psi = \psi^{*[0]}$, $\lambda(x) = \lambda^{*[0]}(x)$.
5. Задаємо номер ітерації $k = 1$.
6. Обчислюємо значення вектору $\tau^{I[1]}$ за формулою
$$\tau^{I[1]} = P_{\Omega^N} \left[\tau^{I[0]} - h_0 g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^{I[0]}, \psi^{I[0]}) \right],$$
 де h_0 – початковий розмір кроку, P_{Ω^N} – оператор проєктування на Ω^N , щоб запобігти виходу значень τ^I за межі області Ω .
7. Поки не виконується умова $\left\| \tau^{I[k]} - \tau^{I[k-1]} \right\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, виконуємо цикл:
8. Приймаємо $k = k + 1$.
9. За допомогою *Алгоритму 3.1* розраховуємо оптимальні значення вектору $\psi^{*[k]}$ та оптимальне розбиття $\lambda^{*[k]}(x)$ у вузлах сітки при фіксованому $\tau^I = \tau^{I[k]}$.
10. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}^{\tau^I}$ у вузлах сітки за формулою (3.13) при $\psi = \psi^{*[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{*[k]}(x)$.
11. Виконуємо обчислення за ітераційною формулою алгоритму Шора (Додаток А) $\tau^{I[k+1]} = \tau^{I[k]} + h_k B_{k+1}^{\tau^I} \tilde{g}_{G_2}^{\tau^I}$, де $B_{k+1}^{\tau^I}$ – оператор відображення перетвореного простору у основний простір E^N , при чому $B_0^{\tau^I} = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^{\tau^I} = B_{k+1}^* g_{G_2}(\tau^{I[k]})$, h_k – розмір кроку.
12. Кінець циклу.
13. Приймаємо за фінальний розв'язок $\tau_*^I = \tau^{I[k]}$, $\lambda_*(\cdot) = \lambda(\cdot)^{[k]}$, $v_* = v^{[k]}$, $\psi_* = \psi^{[k]}$ де k – номер ітерації, на якій було завершено цикл [7-11].
14. Розраховуємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\tau^I, \psi)$ двоїстої задачі (3.12)-(3.13) при $\tau^I = \tau_*^I$, $\psi = \psi_*$ і, для перевірки правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (3.1)

$$I(\lambda_*(\cdot), v_*) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{*ij}.$$

Завершення роботи алгоритму.

3.3 Приклади розв'язання модельних задач

Для демонстрації роботи алгоритму розв'язання та пояснення нюансів його роботи було обрано декілька модельних задач. Перед розглядом прикладів наведемо початкові умови, спільні для усіх прикладів.

Деяке виробництво ресурсу є неперервно розподіленим з щільністю $\rho(x) = 1$ у області $\Omega = \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \leq x^{(1)} \leq 1, 0 \leq x^{(2)} \leq 1 \right\}$. На першому етапі видобутий ресурс транспортується від усієї площини виробництва до центрів першого етапу (проміжних центрів транспортування). На другому етапі ресурс транспортується до від центрів першого етапу до центрів другого етапу. Сумарне постачання ресурсу дорівнює сумарному попиту, тобто транспортна задача є закритою (збалансованою). Координати центрів другого етапу задані у початкових умовах. Координати центрів першого етапу невідомі і повинні бути знайдені як частина розв'язку. Також необхідно знайти оптимальне розбиття площини виробництва на підмножини за кількістю центрів першого етапу та призначити кожній підмножині відповідний центр першого етапу, у який буде транспортуватися продукція з цієї підмножини. Фінальний розв'язок задачі повинен бути оптимальним за сумарною вартістю транспортування всієї продукції від площини виробництва до центрів другого етапу через центри першого етапу.

Вартість перевезення одиниці продукту від площини постачання з точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ до центру першого етапу з координатами $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ задана у вигляді функції евклідової відстані:

$$c_i^I(x, \tau_i^I) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{I(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{I(2)})^2}, \quad i = 1, \dots, N$$

Вартість перевезення одиниці продукту від i -го пункту першого етапу $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ до j -го пункту другого етапу $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)})$ задана у вигляді функції евклідової відстані з мультиплікативним коефіцієнтом K :

$$c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = K \sqrt{(\tau_i^{I(1)} - \tau_j^{II(1)})^2 + (\tau_i^{I(2)} - \tau_j^{II(2)})^2}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots M$$

Як можна побачити, функції вартості перевезення на першому та другому етапах задані функцією евклідової відстані та відрізняються тільки коефіцієнтом K . Коефіцієнт K – це деяка константа, задана у початкових умовах задачі, вона показує, у скільки разів вартість перевезення на другому етапі відрізняється від вартості перевезення на першому етапі. Практичний зміст та вплив коефіцієнта K на оптимальний розв’язок буде показаний та проаналізований під час розгляду прикладів розв’язків модельних задач, буде показано, що має сенс задавати значення K з діапазону $[0; 1]$.

На рисунках з візуалізацією розв’язків модельних задач центри постачання першого етапу позначені як чорні круги, а центри постачання другого етапу позначені як чорні квадрати; межі між підмножинами, які відносяться до різних центрів постачання першого етапу, позначені чорним кольором; накреслені стрілки та підписані обсяги транспортувань між центрами постачання першого та другого етапів.

Приклад 3.1. Двоетапна задача з розміщенням двох центрів першого етапу. Вхідні дані: центри другого етапу розташовані у точках $(0.25; 0.1)$, $(0.75; 0.1)$ та мають однаковий попит продукції 0.5, мультиплікативний коефіцієнт до функції вартості другого етапу $K=1$. Необхідно знайти оптимальні координати двох центрів першого етапу, оптимальне розбиття площини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу.

Результати розв’язання: оптимальні координати центрів першого етапу $(0.25; 0.1)$, $(0.75; 0.1)$; значення цільового функціоналу 0.44835624, значення двоїстого функціоналу 0.44835618.

На *Рисунку 3.1(a)* показано графічну ілюстрацію результату розв'язку з оптимальним розбиттям одиничного квадрата з E_2 на дві підмножини.

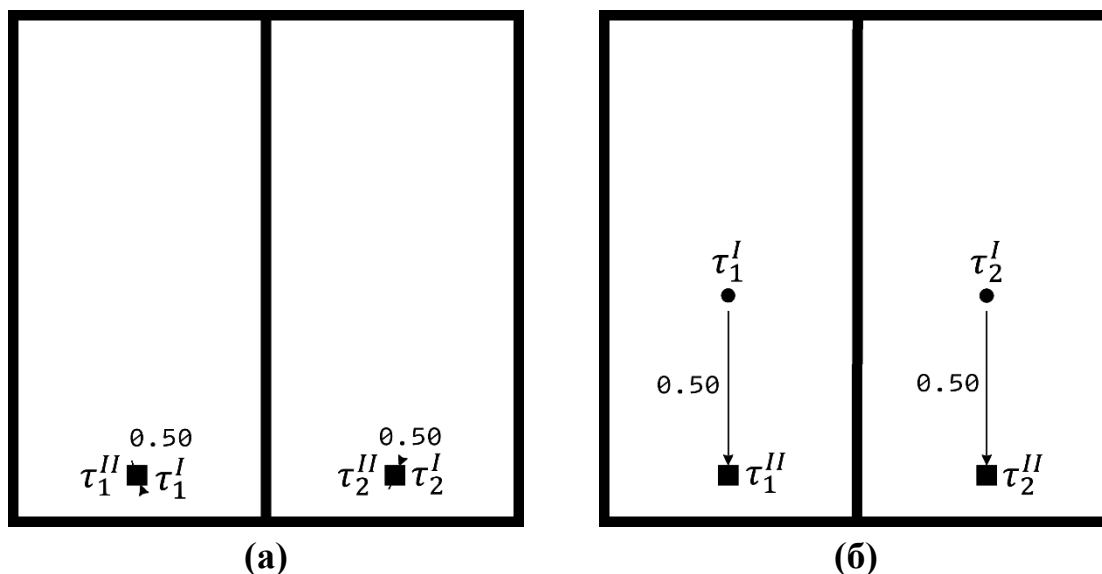


Рисунок 3.1. Оптимальні розміщення-розбиття до Прикладу 3.1 при (а) $K=1$; (б) $K=0.1$

Аналіз: особливістю розв'язку є розміщення центрів першого етапу у точках з координатами центрів другого етапу. Така поведінка відбувається через те, що коефіцієнт K дорівнює 1. Це означає, що вартість транспортування одиниці продукції від площини постачання до центрів першого етапу та від центрів першого етапу до центрів другого етапу є однаковою. Тоді, за властивістю трикутника, при якій сума довжин двох сторін завжди більша за довжину третьої сторони: для будь-якої точки площини доставка через проміжний центр першого етапу, координати якого не співпадають з координатами центра другого етапу, завжди буде дорожчою, ніж доставка через центр першого етапу, координати якого співпадають з координатами центру другого етапу. Таким чином, у ситуації, коли $K=1$, а кількість центрів першого етапу дорівнює або більше кількості центрів другого етапу, розв'язок є тривіальним і полягає в тому, щоб розмістити центри першого етапу у координатах, де розміщені центри другого етапу. Зайві центри першого етапу можуть бути проігноровані. Можна назвати таку задачу виродженою. Для порівняння, на *Рисунку 3.1(б)* наведений розв'язок тієї самої задачі при $K=0.1$. Можна побачити, що розміщені центри першого етапу більше не співпадають з центрами другого етапу.

Приклад 3.2. Двоетапна задача з розміщенням двох центрів першого етапу. Вхідні дані: центр другого етапу розташований у точці $(0.5; 0.5)$, має попит продукції 1.0, мультиплікативний коефіцієнт до функції вартості другого етапу $K=0.1$. Необхідно знайти оптимальні координати двох центрів першого етапу, оптимальне розбиття площини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу.

На *Рисунку 3.2* показано графічну ілюстрацію результату розв'язку з оптимальним розбиттям одиничного квадрата з E_2 на дві підмножини.

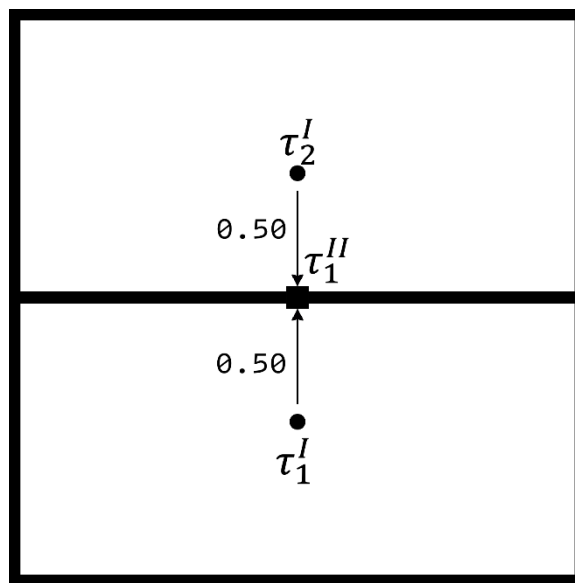


Рисунок 3.2. Оптимальне розміщення-розбиття до Прикладу 3.2

Аналіз: у цьому прикладі транспортування між центрами першого та другого етапу є у 10 разів дешевшим, ніж від площини постачання до центрів першого етапу. З точки зору оптимізації, це означає, що можна перевезти великий обсяг продукції спочатку на проміжний центр першого етапу, позиція якого не співпадає з центром другого етапу, а вже потім у центр другого етапу, і це буде значно дешевше, аніж везти продукцію напряму, коли позиції центрів співпадають. Цей приклад моделює реальні процеси транспортування, коли морський транспорт є значно дешевшим за, наприклад, автоперевезення. Справді, з таким коефіцієнтом здешевлення, алгоритм розв'язку вже не розміщує центри першого та другого етапу у одній точці, тому що тепер це не є оптимальним. Навпаки, центри першого етапу симетрично

розміщуються на деякій відстані по різні сторони від центру другого етапу, а обсяги продукції порівну діляться між центрами першого етапу.

Приклад 3.3. Двоетапна задача з розміщенням двох центрів першого етапу. Вхідні дані: центри другого етапу розташовані у точках $(0.25; 0.25)$, $(0.25; 0.75)$, $(0.75; 0.25)$, $(0.75; 0.75)$ та мають однаковий попит продукції 0.25 , мультиплікативний коефіцієнт до функції вартості другого етапу $K=0.1$. Необхідно знайти оптимальні координати двох центрів першого етапу, оптимальне розбиття площини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу.

Результати розв'язку: оптимальні координати центрів першого етапу $(0.25; 0.5)$, $(0.75; 0.5)$; значення цільового функціоналу 0.5464845 , значення двоїстого функціоналу 0.5464844 .

Аналіз: у цьому прикладі розглядається задача, у якій центрів другого етапу більше ніж центрів першого етапу. Оптимальне розбиття є симетричним, центри першого етапу розміщено на однаковій відстані від центрів другого етапу, обсяги перевезень рівні між собою.

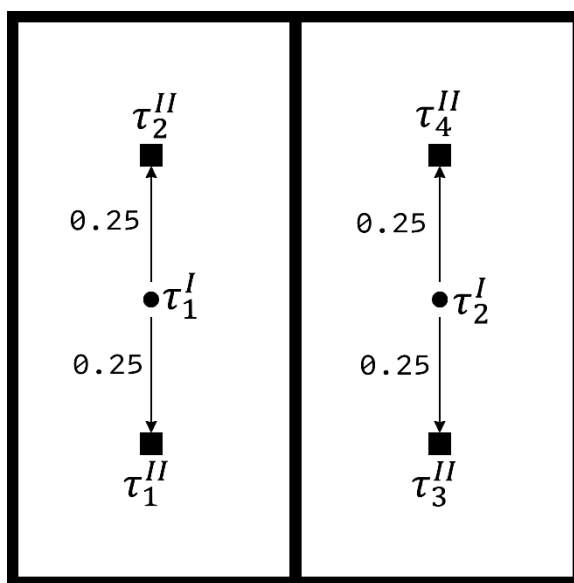


Рисунок 3.3. Оптимальні розміщення-розбиття до Прикладу 3.3

Приклад 3.4. Двоетапна задача з розміщенням чотирьох центрів першого етапу. Вхідні дані: центри другого етапу розташовані у точках $(0.25; 0.25)$, $(0.25; 0.75)$, $(0.75; 0.25)$, $(0.75; 0.75)$ та мають однаковий попит продукції 0.25 ; мультиплікативний коефіцієнт вартості другого етапу $K=0.1$. Необхідно знайти оптимальні координати

двох центрів першого етапу, оптимальне розбиття площини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу.

Результати розв'язку: оптимальні координати центрів першого етапу (0.245; 0.279), (0.245; 0.721), (0.755; 0.279), (0.755; 0.721); значення цільового функціоналу 0.41805017, значення двоїстого функціоналу 0.41805.

На *Рисунку 3.4* показано графічну ілюстрацію результату розв'язку з оптимальним розбиттям одиничного квадрата з E_2 на чотири підмножини.

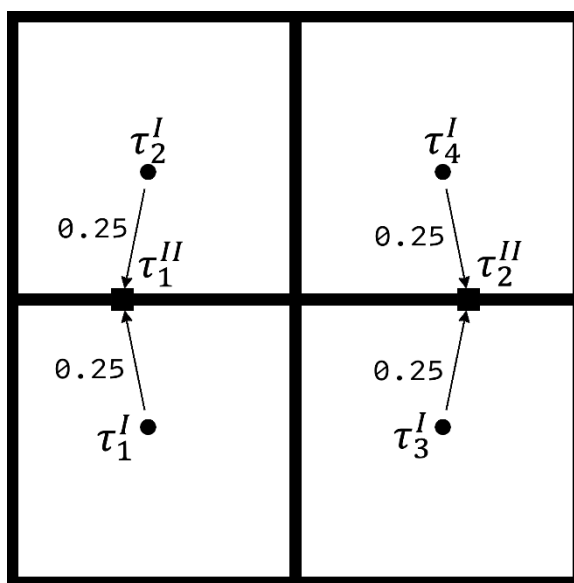


Рисунок 3.4. Оптимальні розміщення-розбиття до Прикладу 3.4

Аналіз: розв'язок не є виродженим, оскільки оптимальні координати центрів першого етапу не співпадають з координатами центрів другого етапу, це відбувається, тому що коефіцієнт K менше одиниці. Центри першого етапу розміщені симетрично та рівномірно по площині, оптимальне розбиття є симетричним, обсяги перевезень рівномірно поділені.

Приклад 3.5. Двоетапна задача з розміщенням двох центрів першого етапу. Вхідні дані: центри другого етапу розташовані у точках (0.25; 0.1), (0.75; 0.1) та мають однаковий попит продукції 0.5, мультиплікативний коефіцієнт функції вартості другого етапу $K=0.1$. Необхідно знайти оптимальні координати двох центрів першого етапу, оптимальне розбиття площини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу.

Результати розв'язку: оптимальні координати центрів першого етапу (0.5; 0.377), (0.171; 0.728), (0.829; 0.728); значення цільового функціоналу 0.7304922, значення двоїстого функціоналу 0.7304922.

На *Рисунку 3.5* показано графічну ілюстрацію результату розв'язку з оптимальним розбиттям одиничного квадрата з E_2 на три підмножини.

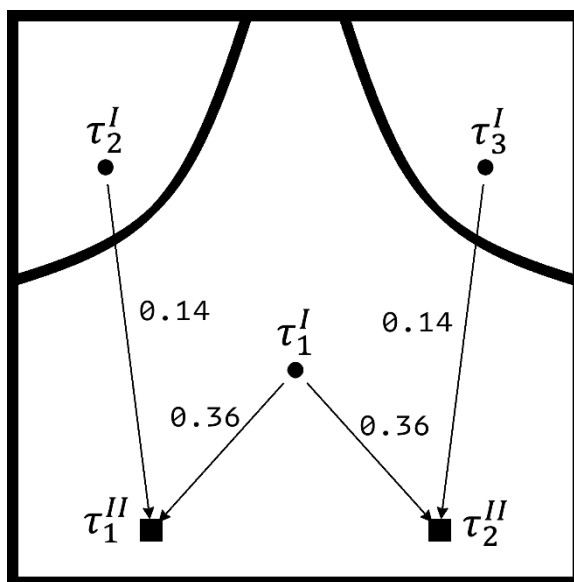


Рисунок 3.5. Оптимальні розміщення-розбиття до Прикладу 3.5

Аналіз: у даному розбитті центри другого етапу асиметрично зміщені до однієї сторони площини, тому транспортування продукції з протилежних кутів площини є достатньо дорогим. Як можна побачити на *Рисунку 3.5*, два центри першого етапу розміщуються у дальніх кутах для того, щоб мінімізувати вартість доставки. Через маленький коефіцієнт вартості перевезення другого етапу $K=0.1$, стає вигідним спочатку транспортувати великий обсяг продукції розміром 0.14 на велику відстань за меншу вартість, а транспортування з більшою вартістю виконувати у невеликому околі центрів першого етапу τ_2^I та τ_3^I . При цьому центр першого етапу τ_1^I розміщується по центру площини і виконує транспортування з решти площини.

3.4 Висновки до розділу

Розроблено новий алгоритм розв'язання двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розміщення-розбиття з розміщенням центрів підмножин. Алгоритм ґрунтується на існуючих методах розв'язання нескінченновимірних задач

OSP та методах розв'язання задач негладкої оптимізації за допомогою r -алгоритму Шора, що є різновидом субградієнтного спуску.

Розроблений алгоритм реалізовано у вигляді програмний продукту, який підтримує всі основні середовища запуску програм, оптимально використовує наявні обчислювальні потужності, при можливості розпаралелює обчислення та переносить їх на відеокарту. З точки зору зручності користування, програмна реалізація дозволяє налаштовувати вхідні умови задачі, будує та виводить оптимальні розв'язки, розраховує цільовий та двоїстий функціонали задачі, візуалізує проміжні та кінцеві розв'язки та має багато налаштувань візуалізації оптимального розміщення-розбиття. Це робить аналіз прикладів швидким та зручним.

Для демонстрації роботи алгоритму, було виконано розв'язання та аналіз модельних задач. Модельні задачі були підібрані таким чином, щоб розглянути різні нюанси у розв'язках залежно від різних початкових умов. В залежності від співвідношення кількостей центрів першого та другого етапу, та цін транспортування, були отримані та пояснені концептуально різні розв'язки.

Розв'язання двоетапної транспортної задачі з розміщенням проміжних транспортних центрів стало ще одним кроком, який наближує математичні моделі транспортних задач до рівня, близького до задач реального світу. Створені наукові напрацювання не тільки дозволяють розв'язувати окремий вид двоетапних транспортних задач, але й послугують підґрунтям для подальшого розв'язання ще більш складних варіацій транспортних задач.

Основні результати розділу опубліковані в [4].

Розділ 4. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З НЕЙРОНЕЧІТКОЮ ІДЕНТИФІКАЦІЄЮ ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ

4.1 Застосування методів ШІ для розв'язання двоетапної логістичної задачі з нейронечіткою ідентифікацією функції, що входить до цільового функціоналу

Як було згадано у *Розділі 1.4*, невизначеність у задачах може міститись у параметрах моделі та мати іншу природу, аніж стохастично-ймовірнісну. У теорії ОРМ такі задачі класифікуються як нечіткі задачі ОРМ з нечіткістю у вхідних даних, а одним з джерел такого виду нечіткості є неточності та розбіжності у кількісному та якісному оцінюванні одних і тих самих явищ різними людьми. Нечіткість суб'єктивної людської оцінки формалізується через поняття лінгвістичної змінної. *Лінгвістична змінна* являє собою формальний механізм пов'язування числових значень із суб'єктивними оцінками, вираженими природною мовою. Так, кожному числовому значенню заданої лінгвістичної змінної через функцію належності ставиться у відповідність певний терм природної мови з певною мірою впевненості.

Для розв'язання нечітких задач ОРМ з нечіткими вхідними даними, що формалізуються через лінгвістичні змінні, існує підхід, що базується на нейронечітких технологіях [125]. Його основна ідея полягає у попередньому усуненні нечіткості, присутньої у вхідних параметрах та обмеженнях моделі, шляхом нейронечіткої ідентифікації складних нелінійних залежностей. Після цього задача може бути трансформована до постановки в умовах визначеності, що дозволяє використати відомі математичні моделі та алгоритми теорії ОРМ [126].

Такий підхід можна застосувати у випадку, коли двоетапна неперервно-дискретна транспортна задача ОРМ формулюється з нечіткою функцією щільності, значення якої задані через лінгвістичні змінні. Для відновлення (ідентифікації) числових значень функції щільності використовуються нейронечіткі технології та допоміжна експертно-експериментальна база знань. Даний розділ присвячений розробці узагальненого алгоритму розв'язання двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі з розміщенням центрів підмножин першого етапу та

нейронечіткою ідентифікацією функції щільності, що входить до цільового функціоналу.

Постановка задачі та обґрунтування методу її розв'язання. Математична постановка двоетапної логістичної задачі з розміщенням центрів підмножин першого етапу в умовах визначеності, тобто з відомими функціями, що входять до цільового функціоналу, досліджена у роботі [60]. Наведемо її формулювання.

Нехай Ω – обмежена, замкнена, вимірنا за Лебегом множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на її непересічні підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij},$$

де $\tau_1^I, \dots, \tau_N^I$ – сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, званих центрами цих підмножин ($\tau_i^I \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$), причому координати центрів $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i = 1, \dots, N$, невідомі і повинні бути визначені;

$\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}$ – деякі задані точки множини Ω ; v_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$) – вагові параметри, що виражають зв'язок між центрами підмножин $\tau_i^I \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, та

заданими точками $\tau_j^H \in \Omega$, $\tau_j^H = (\tau_j^{H(1)}, \dots, \tau_j^{H(n)})$, $j=1,2,\dots,M$. Функція $\rho(x) \geq 0$ – задана обмежена, вимірна на Ω ; $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i=1,2,\dots,N$, – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані обмежені дійснозначні функції, вимірні за аргументом $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)}) \in \Omega_i \subset \Omega$; $c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H)$, $i=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,M$, – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані обмежені функції, які мають сенс «відстані» між точками $\tau_i^I \in \Omega_i$ и $\tau_j^H \in \Omega$ у відповідній метриці простору E_n .

Тоді під двоетапною неперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття-розміщення з відшукуванням координат центрів підмножин будемо розуміти наступну задачу.

Задача 4.1. Необхідно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$, такі координати центрів $\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*i}^I, \dots, \tau_{*N}^I$ цих підмножин у області Ω та такий невід’ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, що забезпечують

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j=1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M; \quad x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega;$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^H = (\tau_1^H, \dots, \tau_M^H) \in \Omega^M.$$

Тут b_j^H , $j=1, \dots, M$, – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови існування розв’язку задачі:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^H, \quad 0 \leq b_j^H \leq S, \quad j=1, \dots, M.$$

Відмітимо, що у термінах класичної дискретної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має сенс обсягів транспортування товарів із пунктів першого етапу τ_i^I , $i = 1, \dots, N$, до пунктів τ_j^II , $j = 1, \dots, M$, другого етапу (кінцевого споживання).

Тут і надалі інтеграли приймаються у сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, дорівнює нулю.

Трійку $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком *Задачі 4.1*, будемо називати оптимальною. Введемо характеристичні функції

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^{II} - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right), \quad (4.1)$$

де вектор-функція $\lambda(\cdot)$ має вигляд $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_i(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$. Очевидно,

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}).$$

Перепишемо *Задачу 4.1* у термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, у наступному вигляді.

Задача 4.2. Знайти $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v)} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$, за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ майже скрізь (м.с.) для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega$$

$$; \quad \tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Від нескінченновимірної *Задачі 4.2* з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями функції $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 4.3. Знайти $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v) \in \Gamma_1 \times \Omega^N \times Q} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$, де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.с. для } x \in \Omega;\}$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega\};$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N;$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

Для кожного фіксованого $\tau^I \in \Omega^N$ і кожного фіксованого $v \in Q$ *Задача 4.3*, як доведено у [29], має розв'язок. У множині оптимальних розв'язків *Задачі 4.3* містяться оптимальні розв'язки *Задачі 4.2*, що дозволяє далі перейти до розгляду *Задачі 4.3* та знайти її розв'язок за допомогою функціонала Лагранжа:

$$L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^II - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right) \quad (4.2)$$

де $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_M)$ – $(N + M)$ -вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ м.с. для $x \in \Omega$;

$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N$; $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ – $N \times M$ -вимірний вектор дійсних невід'ємних чисел.

Пару елементів $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\}, \Psi^*)$ назовемо сідловою точкою функціонала (4.2)

на множині $\{\Gamma \times \Omega^N \times Q\} \times \Lambda$, де

$$Q = \left\{ v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\},$$

$$\Lambda = \left\{ \Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E_M \right\},$$

$$\text{якщо } L\left(\left\{ \lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_* \right\}, \Psi\right) \leq L\left(\left\{ \lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_* \right\}, \Psi^*\right) \leq L\left(\left\{ \lambda(\cdot), \tau^I, v \right\}, \Psi^*\right) \quad \text{для}$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma, \tau^I \in \Omega^N, v \in Q, \Psi \in \Lambda,$$

або

$$\begin{aligned} L\left(\left\{ \lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_* \right\}, \Psi^*\right) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L\left(\left\{ \lambda(\cdot), \tau^I, v \right\}, \Psi\right) = \\ &= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\left\{ \lambda(\cdot), \tau^I, v \right\}, \Psi\right). \end{aligned}$$

Розглянемо задачу

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \Psi \in \Lambda \quad (4.3)$$

$$\text{де } G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\left\{ \lambda(\cdot), \tau^I, v \right\}, \Psi\right), \Psi \in \Lambda.$$

У [60] сформульовано та доведено теорему про оптимальний розв'язок *Задачі 4.3*.

Теорема. Компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*i}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$ оптимального розв'язку *Задачі 4.3* визначається для усіх $i = 1, \dots, N$, та майже всіх $x \in \Omega$ наступним чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_{*i}^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*, i \neq k, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (4.4)$$

у якості $(\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I)$, $(\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок *Задачі 4.3*,

зведеної до виду:

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_2(\tau^I, \psi) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} \left[\int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k \right) \right] \rightarrow \max_{\psi} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Компонента $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM})$ знаходиться як оптимальний розв'язок наступної класичної дискретної транспортної задачі за допомогою методу потенціалів:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II} (\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v \quad (4.6)$$

за умов

$$\sum_j v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.8)$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}. \quad (4.9)$$

У математичній моделі *Задачі 4.1* (та можливих варіаціях постановки) в цільовий функціонал входить скалярна функція $\rho(x)$, $x \in \Omega$, що описує питому щільність у кожній точці заданої обмеженої частини простору, яку необхідно розбити на підмножини. В залежності від постановки задачі та напрямку транспортування, функція щільності $\rho(x)$ описує або інтенсивність споживання продукту в точках множини споживання, або потужність видобутку ресурсу в точках множини постачання. Так, можна сказати, що споживання/постачання є розподіленим у заданій області з певною щільністю.

Також, у постановці *Задачі 4.1*, яка є постановкою чіткої задачі ОРМ, передбачається, що функція $\rho(x)$ задана у чіткому вигляді – аналітично через формулу, у табличному вигляді, графічно тощо. Проте це не завжди має місце у прикладних задачах – часто вхідні дані є нечіткими, опис залежностей між параметрами є неповним або неточним, або модель може мати залежності від багатьох сторонніх чинників, вплив яких неможливо змодельовати у явному вигляді. Наприклад, у транспортній задачі функція щільності попиту $\rho(x)$ може неявно залежати від поточної політичної ситуації, цін на паливо, стабільності національної валюти, пори року, погоди, масових культурних заходів тощо. Таку складну нелінійну

залежність значень функції від її аргументів дуже складно змоделювати вручну людині-експерту. У такій ситуації експерт зазвичай може сформулювати лише базу даних, що містить вибірку значень функції та відповідних аргументів для окремих моментів часу. Однак, провести інтерполяцію значень на випадки, для яких відсутні дані у базі даних, може бути дуже складно.

Тому, для моделювання складних процесів, об'єктів і систем, коли відсутня явна аналітична залежність, що описує поведінку досліджуваного об'єкта, або коли експертні знання про об'єкт можуть бути сформульовані лише в лінгвістичній формі, доцільно застосовувати методи штучного інтелекту [127]. Відновлення (ідентифікація) складних нелінійних залежностей розглядається як задача побудови математичної моделі об'єкта на основі неповної бази знань про можливі зв'язки значень вхідних та вихідних даних. Підхід до лінгвістичної ідентифікації ґрунтується на апроксимації нелінійних об'єктів за допомогою систем нечіткого логічного виведення [128]. Процес нечіткого логічного виведення являє собою виконання алгоритму, який отримує апроксимований результат на основі нечітких вхідних даних та використовує для цього поняття і методи теорії нечітких множин і нечіткої логіки, такі як функції належності, лінгвістичні змінні, операції над нечіткими множинами, нечіткі відношення, методи нечіткої імплікації та нечіткої композиції тощо [114].

Однак точність нечіткої моделі залежить від її структури, а саме від бази знань і параметрів функцій належності, а також від реалізації логічних операцій тощо [26,27]. Оскільки ці компоненти обираються суб'єктивно, вони можуть бути не цілком адекватними об'єкту, що моделюється, тому на першому етапі формується груба модель об'єкта, яка апроксимує зв'язок «вхід-вихід». Для підвищення якості моделі в системах з нечіткою логікою використовують нейронні мережі [125]. Нейронні мережі застосовують для отримання більш точної моделі, розв'язуючи задачу оптимізації її параметрів шляхом налаштування нечіткої нейронної мережі.

У даному розділі пропонується застосувати нейронечіткі технології для ідентифікації залежності функції від її аргументів.

4.2 Нейронечітка ідентифікація залежності функції щільності від її аргументів

Розглянемо функціональну залежність виходу y від входів x_1, x_2, \dots, x_n у вигляді:

$$y = \rho(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad x \in \Omega \quad (4.10)$$

Щоб розв'язати задачу ідентифікації, повинні бути задані наступні змінні:

1) області визначення входів та область значень виходу для (4.10):

- області визначення вхідних змінних:

$$U_i = [x_{\min_i}, x_{\max_i}], \quad x_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

- n -вимірний паралелепіпед, що містить в собі множину Ω :

$$U = U_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times U_n$$

- область значень вихідної змінної y :

$$Y = [y_{\min}, y_{\max}] \quad (4.12)$$

2) масив експертно-експериментальних даних, що описує шукану залежність у вигляді вибірки пар спостережень за вхідними та вихідними координатами об'єкта $\{x_{\text{exp}}^{(m)}, y_{\text{exp}}^{(m)}\}$, де вектор вхідних параметрів для кожного в m -го спостереження, $m = \overline{1, M}$, декомпонується як $x_{\text{exp}}^{(m)} = \{x_{1\text{exp}}^{(m)}, x_{2\text{exp}}^{(m)}, \dots, x_{n\text{exp}}^{(m)}\}$.

Прийmemo, що вхідні дані та вихідне значення є лінгвістичними змінними, заданими на універсальних множинах (4.11)-(4.12), і задача полягає у ідентифікації залежності між ними.

Для якісної та кількісної оцінки вихідного параметра y та компонентів вхідного вектора $x_i, i = 1, \dots, n$ у структурі моделі (4.10) вводяться наступні терм-множини:

- Для вихідної змінної y сформовано терм-множину $D = \{D_k\}$, де D_k позначає k -й лінгвістичний терм, $k = \overline{1, L}$. Тут параметр L визначає загальну кількість дискретних класів вихідної координати y . У межах кожного окремого класу D_k виділяється репрезентативний елемент $d_k \in D_k$, який має властивості «найбільш характерного представника» і визначається як центр класу.

- Для кожної вхідної змінної $x_i, i = 1, \dots, n$ задано індивідуальну терм-множину $A_i = \{A_{ir}\}$, елементами якої є лінгвістичні терми A_{ir} , де $i = \overline{1, n}$, а індекс терму змінюється в межах $r = \overline{1, p_i}$. Величина p_i визначає кількість термів у терм-множині A_i змінної x_i . Причому, в загальному випадку, $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$.

Конкретні значення для лінгвістичних термів D_k та A_{ir} створюються на основі обробки емпіричної та експертної інформації про об'єкт, що моделюється у (4.10).

Лінгвістичні терми $A_{ir} \in A_i$ та $D_k \in D$ інтерпретуються як нечіткі множини, що задані на відповідних універсальних просторах $U_i, i = 1, \dots, n$, та Y з (4.11)-(4.12). При цьому кожен лінгвістичний терм $A_{ir} \in A_i$, співвідноситься з певною нечіткою підмножиною на області визначення аргументу x_i . Функція належності $\mu_{ir}(x_i)$, яка формалізує вказану нечітку множину, моделюється за допомогою узагальненого дзвоноподібного розподілу за формулою:

$$\mu_{ir}(x_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_i - b_{ir}}{c_{ir}} \right|^{2t_{ir}}}; i = 1, \dots, n; r = 1, \dots, p_i, \quad (4.13)$$

де $\mu_{ir}(x_i)$ – число у діапазоні $[0;1]$, суб'єктивна міра відповідності поточного значення змінної x_i визначеному нечіткому терму A_{ir} ; b_{ir} , c_{ir} і t_{ir} – параметри адаптації функції належності, які на першому етапі встановлюються на основі експертних оцінок, а надалі оптимізуються за допомогою емпіричних даних: b_{ir} – координата екстремуму (максимуму) розподілу, для якої виконується рівність $\mu_{ir}(b_{ir}) = 1$, c_{ir} – коефіцієнт, що визначає масштаб (стиснення або розтягнення) функції $\mu_{ir}(x_i)$, t_{ir} – показник крутизни (форми) схилів графіка функції належності $\mu_{ir}(x_i)$, $t_{ir} > 0$.

У результаті побудови нечіткої системи на основі вхідної інформації математична модель об'єкта дослідження набуває наступного вигляду:

$$y = F(x, B, C, T, W), \quad (4.14)$$

де:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – вхідний вектор,

$W = \{w_j^k\}$, $j = 1, 2, \dots, s_k$, $k = 1, 2, \dots, L$, набір вагових коефіцієнтів правил,

$B = \{b_{ij}^k\}$, $C = \{c_{ij}^k\}$, $T = \{t_{ij}^k\}$ – множини параметрів налаштування функцій

належності, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s_k$, $k = 1, \dots, L$;

F – оператор (функція) відображення вхід-вихід, що реалізує послідовність нечітких перетворень.

Якщо отримана модель (4.14) за поточних значень параметрів виконує відновлення значень з похибкою, що перевищує допустиме значення, виникає задача її параметричного налаштування. Ця процедура полягає в знаходженні таких значень параметрів множин B , C , T , W , які мінімізують розбіжності між теоретичними значеннями (сформованими моделлю (4.14)) та емпіричними (експериментальними) даними.

Формалізація етапу налаштування нечіткої моделі (4.14) у термінах математичного програмування зводиться до пошуку оптимального вектора параметрів (B, C, T, W) , що забезпечує:

$$\|F(x, B, C, T, W) - y_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, T, W}. \quad (4.15)$$

Позначимо вектор $Q = (B, C, T, W)$ і перепишемо задачу оптимізації у вигляді:

$$\varphi(Q) \rightarrow \min_Q, \quad (4.16)$$

де $\varphi(Q) = \|y - y_{\text{exp}}\|$, y – вектор значень, розрахованих за моделлю (4.14), y_{exp} – вектор емпіричних значень з бази даних.

Для оцінки величини розбіжностей у якості норми $\|\cdot\|$ будемо використовувати евклідову метрику:

$$\|y - y_{\text{exp}}\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y_{\text{exp}}^{(m)})^2}, \quad (4.17)$$

де $y_{\text{exp}}^{(m)}$ – значення вихідної змінної y , що відповідає m -му запису з емпіричної бази даних виду $\{x_{\text{exp}}^{(m)}, y_{\text{exp}}^{(m)}\}$, $m = 1, \dots, M$; $y^{(m)}$ – значення виходу моделі,

обчислене для відповідного вектора вхідних змінних для m -го запису бази даних та поточних значеннях параметрів B, C, T, W .

Потенціальний нелінійний характер цільової функції задачі (4.16) не дозволяє використати класичні градієнтні метод оптимізації, оскільки недотримання умов гладкості може призвести до розбіжності відповідних обчислювальних процедур. Тому для розв'язання безумовної задачі мінімізації (4.16) буде використано r -алгоритм Шора недиференційовної оптимізації.

У результаті розв'язання задачі (4.16) отримаємо вектор оптимальних значень параметрів $Q^* = (B^*, C^*, T^*, W^*)$, за якого цільова функція $\varphi(Q)$, що позначає розбіжність, досягає мінімуму. Тобто будуть отримані такі значення $W^* = \{w_j^{k*}\}$ – вагових коефіцієнтів правил, $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$ – параметрів функцій належності, за яких розбіжність вигляду (4.17) між емпіричними та модельними даними, отриманими після налаштування нечіткої моделі, досягає мінімального значення.

На основі отриманих оптимальних параметрів результуюча нейронечітка ідентифікація нечіткої функції $\rho(x)$, яка буде застосовуватись у подальшому, записується у наступному вигляді:

$$\rho(x) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k u_{D_k}^*(y)}{\sum_{k=1}^L u_{D_k}^*(y)}, \quad (4.18)$$

де

$$\mu_{D_k}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1, \\ 1, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$p_j^{k*}(x_1, \dots, x_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(x_i) \quad (4.20)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(x_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right|^{2t_{ij}^{k*}}}, \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, s_k, \quad k=1, \dots, L \quad (4.21)$$

В співвідношеннях (4.18)-(4.21) значення $\mu_{ij}^{k*}(x_i)$, $p_j^{k*}(x_1, \dots, x_n)$, $\mu_{D_k}^*(y)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $W^* = \{w_j^{k*}\}$, $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$, отриманих після налаштування.

Як показано вище, оптимальний розв'язок задачі в термінах характеристичних функцій $\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x)$ підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$, що складають оптимальне розбиття множини Ω , з припущення, що $\rho(x)$ – невід'ємна на Ω функція, визначається формулами (4.3), (4.4).

Для розв'язання отриманої скінченновимірної задачі оптимізації (4.4) з недиференційованою цільовою функцією $G(\tau)$ застосуємо алгоритм узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різності двох послідовних антиградієнтів (r -алгоритм Шора [30,31]).

4.3 Алгоритм розв'язання задачі з нейронечіткою ідентифікацією функції щільності, що входить у цільовий функціонал

Перш ніж сформулювати алгоритм розв'язку *Задачі 4.3*, який базується на сформульованій вище теоремі, визначимо i -у, $i=1, \dots, N$, компоненту вектора узагальненого псевдоградієнта

$$g_{G_2}(\tau^I, \psi) = (g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi}(\tau^I, \psi)) = (g_{G_2}^{\tau_1^I}(\tau^I, \psi), \dots, g_{G_2}^{\tau_N^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi_1}(\tau^I, \psi), \dots, -g_{G_2}^{\psi_N}(\tau^I, \psi)) \quad \text{функції} \quad G_2(\tau^I, \psi) \quad \text{задачі} \quad (4.5) \quad \text{у} \quad \text{точці} \quad (\tau^I, \psi) = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I, \psi_1, \dots, \psi_N) \quad \text{наступним} \quad \text{чином:}$$

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\tau^I, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^{II} q_{ij}), \quad i=1, \dots, N \quad (4.22)$$

де

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), i=1, \dots, N, j=1, \dots, M, \\ 0, & \text{у інших випадках,} \end{cases}$$

$$g_{G_2}^{\tau_i^I} = \int_{\Omega} \rho(x) g_{c^I}^{\tau_i^I}(\tau, x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^{II} r_{ij}), i=1, \dots, N, \quad (4.23)$$

де

$$r_{ij} = \begin{cases} g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II}), & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), j=1, \dots, M, \\ 0, & \text{у інших випадках,} \end{cases}$$

де $g_{c^I}^{\tau_i^I}(\tau^I, x)$ – i -а компонента, $i=1, \dots, N$, N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_{c^I}^{\tau^I}(\tau^I, x)$ функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ у точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$; $g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – i -а компонента, $i=1, \dots, N$, N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_{c^{II}}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ у точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$.

Опишемо алгоритм.

Алгоритм

Етап підготовки. Вкладемо область Ω в n -вимірний паралелепіпед Π , грані якого паралельні осям декартової системи координат, визначимо $\rho(x)=0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Виконаємо дискретизацію області Π за допомогою рівномірної прямокутної сітки. Задаємо початкові наближення $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах мітки за формулами (4) при $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення вектора узагальненого псевдоградієнта $g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ у вузлах сітки за формулами (4.22)-(4.23) при $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Обираємо початковий крок $h_0 > 0$.

Перший крок алгоритму проводимо за формулою

$$\tau^{I(1)} = P_{\Omega^N} \left[\tau^{I(0)} - h_0 g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}) \right],$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}^\psi \left(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)} \right),$$

P_{Ω^N} – оператор проєктування на Ω^N

Переходимо до другого кроку. Нехай у результаті обчислень після k , $k = 1, 2, \dots$, кроків алгоритму отримані значення $\tau^{I(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\lambda^{k-1}(x)$ у вузлах сітки.

Опишемо $(k+1)$ -й крок алгоритму.

1. Обчислюємо значення $\lambda^k(x)$ у вузлах сітки за формулами (4.4) при

$$\tau^I = \tau^{I(k)}, \psi = \psi^{(k)}.$$

2. Обчислюємо значення вектора $g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ у вузлах сітки за формулами

$$(4.22)-(4.23) \text{ при } \tau^I = \tau^{I(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x).$$

3. Виконуємо $(k+1)$ -й крок r -алгоритму Шора [30], ітераційна формула якого

має вигляд

$$\tau^{I(k+1)} = P_{\Omega^N} \left[\tau^{I(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau^I} \tilde{g}_{G_2}^{\tau^I} \right], \psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi,$$

де $B_{k+1}^{\tau^I}$, B_{k+1}^ψ – оператори проєктування перетвореного простору у основний простір

E_N , причому $B_0^{\tau^I} = I_N$, $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^{\tau^I} = B_{k+1}^{*\tau^I} g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^{I(k)}, \psi^{(k)})$,

$\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^{*\psi} \tilde{g}_{G_2}^\psi(\tau^{I(k)}, \psi^{(k)})$, h_k – кроковий множник, вибір якого виконується з умови

мінімуму різності $\left[G_2(\tau^{I(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_2(\tau^{I(k)}, \psi^{(k-1)}) \right]$ за напрямком узагальненого

антипсевдоградієнта – $g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ у перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\| (\tau^{I(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{I(k)}, \psi^{(k)}) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (4.24)$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -му кроку алгоритму, якщо виконується, то до

п.5.

5. Вважаємо $\tau_*^I = \tau^{I(l)}$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалась умова (4.24).
6. Розв'язуючи транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$, $\tau^I = \tau_*^I$ и $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$.
7. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\tau^I, \psi)$ задачі (4.5) при $\tau^I = \tau_*^I$, $\psi = \psi^*$ та, для перевірки коректності, оптимальне значення цільового функціоналу (4.1) *Задачі 4.3* за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_{*i}^I) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_{*i}^I, \tau_j^{II}) v_{*ij}.$$

Алгоритм описаний.

4.4 Приклад розв'язання модельної задачі

Проілюструємо описаний алгоритм на прикладі наступної модельної задачі з [118]. Спочатку наведемо прикладну постановку задачі цієї задачі з [118] з функцією щільності $\rho(x)$, заданою у явному вигляді. Припустимо, існує місто з приблизно рівномірним рівнем злочинності за винятком центральної частини, яка має її рівень значно вищим за інші частини міста. Необхідно розмістити на території міста чотири нових відділення поліції з метою найліпшого контролю криміногенної ситуації. Введемо доповнення у постановку задачі з [118], щоб отримати двоетапну неперервно-дискретну задачу ОРМ. Чотири нових відділення поліції, які необхідно оптимально розмістити – це центри 1-го етапу, а два центри 2-го етапу (два міських поліцейських управління) задані своїми координатами.

Аналітично функцію щільності $\rho(x)$, яка буде характеризувати рівень злочинності і місті, можна задати у вигляді:

$$\rho(x) = \begin{cases} 100, \text{ якщо } (x_1 \in [0; 0.33] \wedge x_2 \in [0.33; 0.67]), \\ 1, \text{ якщо } (x_1 \in [0; 1] \wedge x_2 \in [0; 0.33]) \vee \\ \quad (x_1 \in [0; 1] \wedge x_2 \in [0.67; 1]) \vee \\ \quad (x_1 \in [0.33; 1] \wedge x_2 \in [0.33; 0.67]). \end{cases} \quad (4.25)$$

На *Рисунку 4.1* представлено її тривимірне зображення для області $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

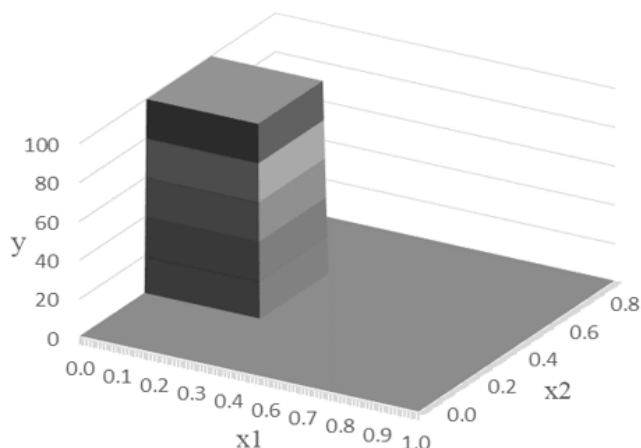


Рисунок 4.1. Графік функції щільності $\rho(x)$, заданої співвідношенням (4.25)

Для цієї задачі було отримано один з локальних оптимальних розбиттів Ω , представлено на *Рисунку 4.2*.

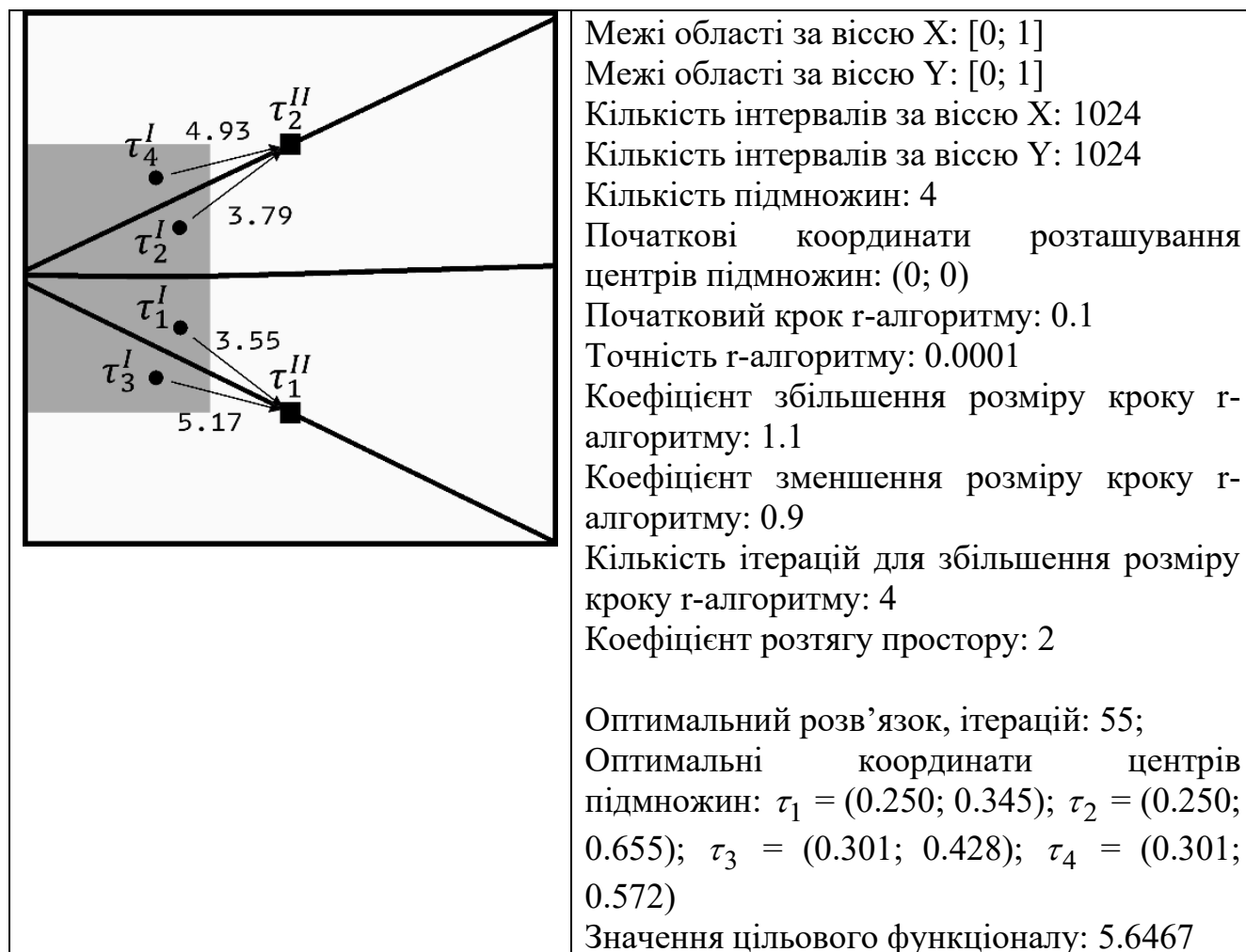


Рисунок 4.2 Оптимальне розбиття множини Ω з функцією щільності $\rho(x)$, заданою аналітично у вигляді (4.25)

Тепер припустимо, що для функції щільності $\rho(x)$ у наведеній вище модельній задачі не задана функціональна залежність у явному вигляді. Відновимо цю залежність за допомогою описаного у розділі 4.2 метода нейронечіткої ідентифікації. Після цього знайдемо оптимальні розв'язки цієї задачі з відновленою функцією $\rho(x)$ за допомогою алгоритму описаного у підрозділі 4.3 (до та після налаштування), та порівняємо їх з оптимальним розв'язком задачі ОРМ у випадку явно заданої функції $\rho(x)$.

Відновлення залежності $\rho(x)$ виду

$$\begin{aligned} y &= \rho(x), \text{ де } x = (x_1, x_2) \in U = U_1 \times U_2, \\ x_1 &\in U_1 = [0,1], x_2 \in U_2 = [0,1], y \in Y = [1,100], \end{aligned} \quad (4.26)$$

за допомогою метода нейронечіткої ідентифікації виконано авторами у [118]. Використаємо ці результати. Побудована у [118] нечітка модель об'єкта (4.26) у вигляді співвідношень (4.18)-(4.21) дозволяє розрахувати значення залежності $\rho(x)$ від будь-яких пар значень вхідних змінних з області їх визначення. Проте, як і було згадано, без проведення процесу налаштування модель нейронечіткої ідентифікації виконує відновлення функції з незадовільною точністю.

На Рисунку 4.3 представлені тривимірні графіки залежності $y = \rho(x)$, відновлені за допомогою методу нейронечіткої ідентифікації до та після налаштування.

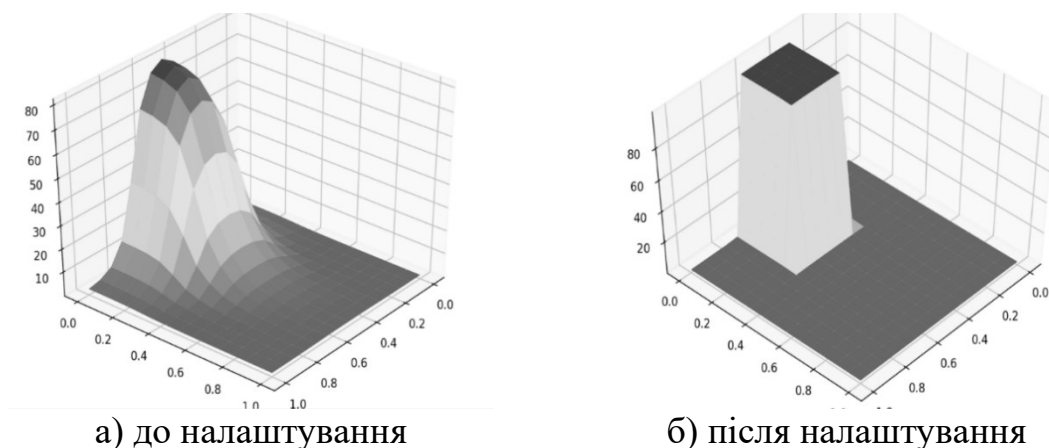


Рисунок 4.3. Графіки залежності $y = \rho(x)$, відновленні за допомогою методу нейронечіткої ідентифікації: (а) до налаштування, (б) після налаштування

Перейдемо до розв'язання модельної тестової неперервно-дискретної двоетапної задачі ОРМ з розміщенням центрів 1-го етапу, використовуючи алгоритм сформульований у підрозділі 4.3, зі значеннями функції $\rho(x)$, отриманими (відновленими) за допомогою метода нейронечіткої ідентифікації до та після налаштування нечіткої моделі.

Оптимальний розв'язок модельної задачі, отриманий за цим алгоритмом з функцією $\rho(x)$, відновленою до налаштування нечіткої моделі, наведено на *Рисунку 4.4*, після налаштування – на *Рисунку 4.5*.

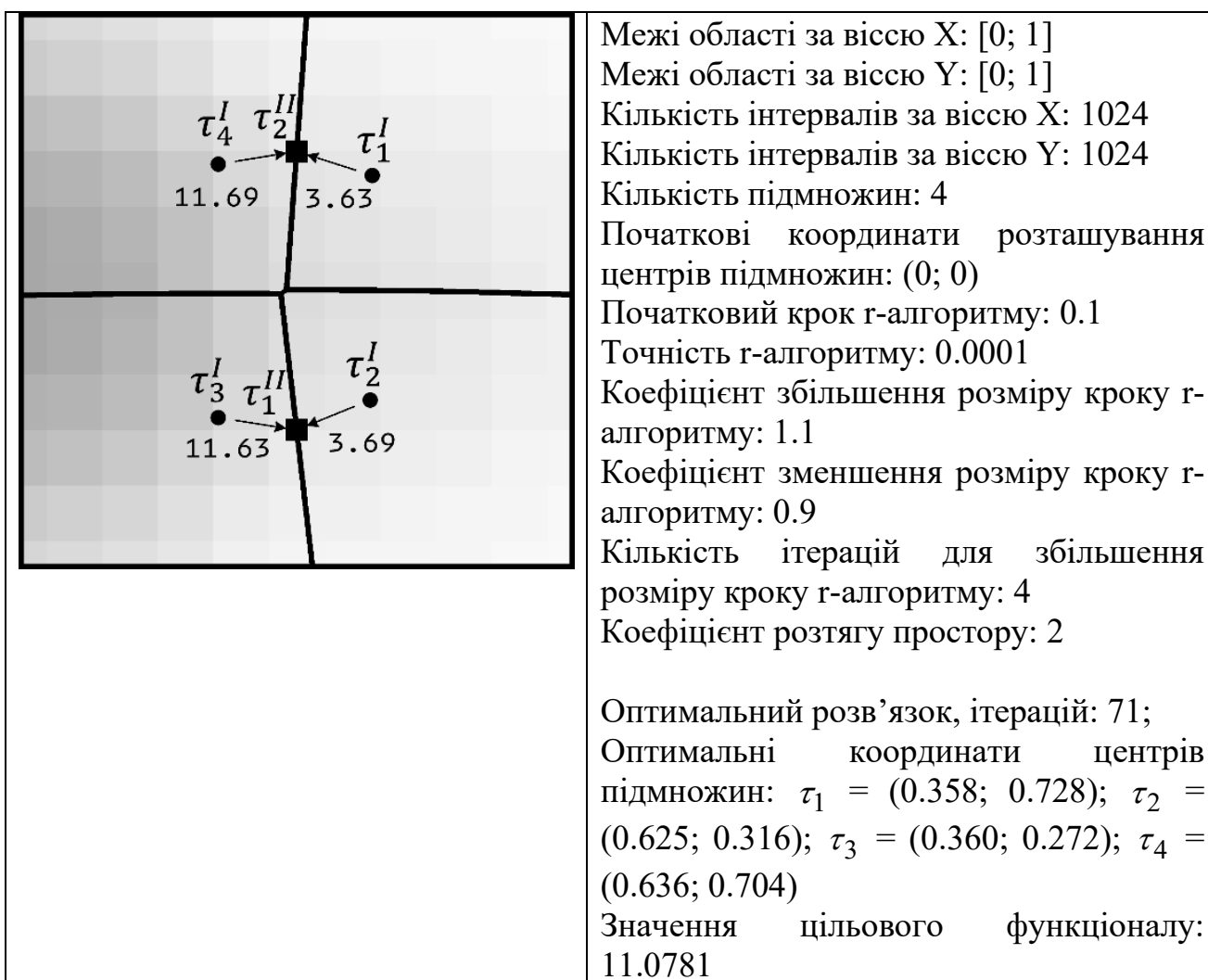


Рисунок. 4.4. Оптимальне розбиття множини Ω з функцією щільності $\rho(x)$, відновленої за допомогою метода нейронечіткої ідентифікації до налаштування

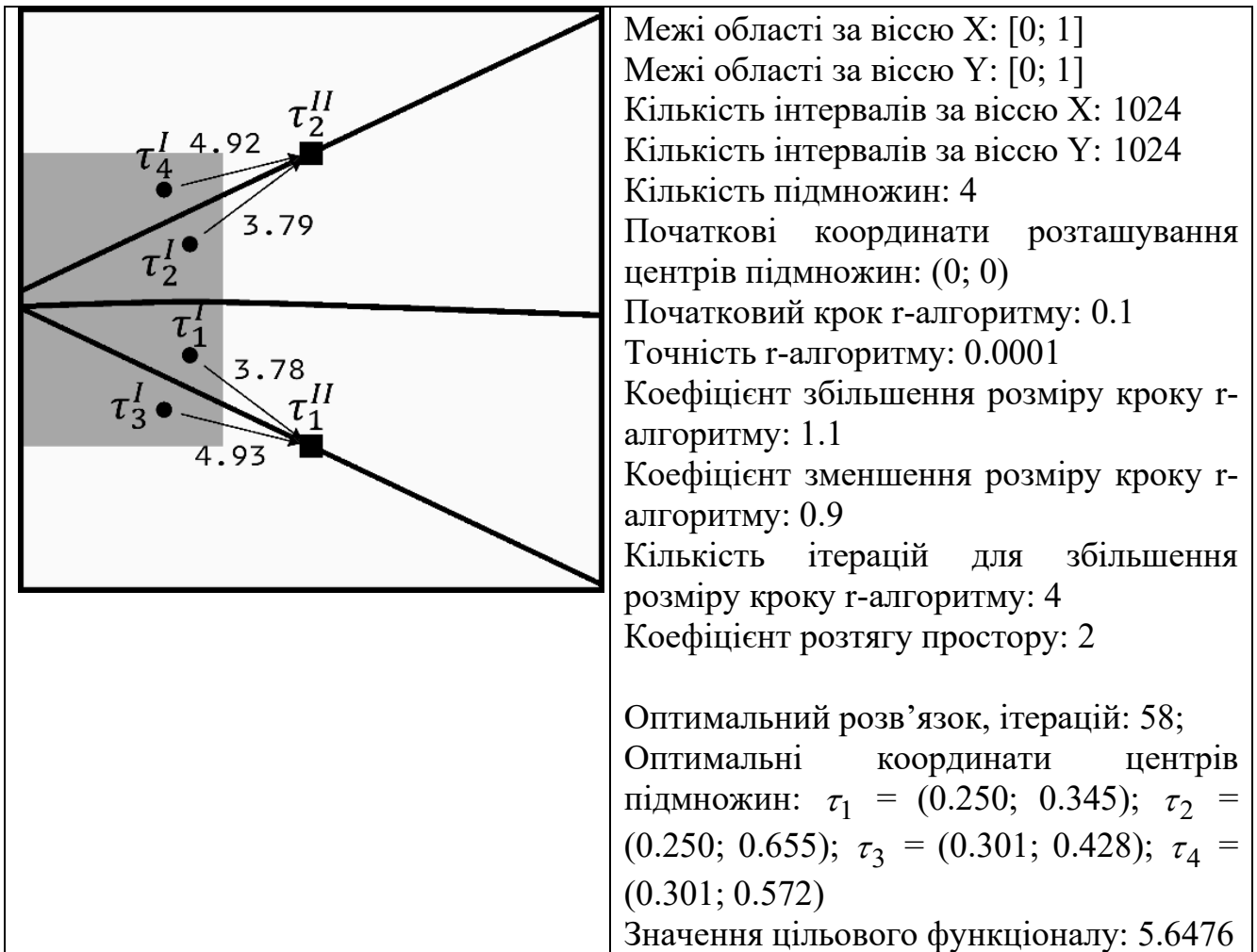


Рисунок 4.5. Оптимальне розбиття множини Ω з функцією щільності $\rho(x)$, відновленою за допомогою методу нейронечіткої ідентифікації після налаштування

Порівнюючи результати розв'язання задачі ОРМ, що отримані для явно заданої функції щільності $\rho(x)$ у цільовому функціоналі (Рисунок 4.3) та для функції щільності $\rho(x)$, відновленої за допомогою метода нейронечіткої ідентифікації після налаштування (Рисунок 4.5), бачимо, що оптимальні розв'язки цих задач співпадають з достатнім ступенем точності.

4.5 Висновки до розділу

У розділі запропоновано алгоритм розв'язання двоетапної логістичної задачі, яка у математичній постановці зводиться до неперервно-дискретної двоетапної задачі оптимального розбиття множини n -вимірною евклідового простору E_n на підмножини з оптимальним розміщенням координат центрів 1-го етапу у випадку, коли у цільовий функціонал задачі входить функція щільності, явний аналітичний

вигляд якої невідомий. Для відновлення функції щільності запропоновано один з методів штучного інтелекту, що базується на застосуванні нейронечітких технологій.

Складовими частинами запропонованого алгоритму є один з варіантів r -алгоритму Шора (метод узагальнених псевдоградієнтів), що застосовується з урахуванням недиференційовності цільової функції для числового розв'язку двоїстої задачі, та метод потенціалів, що застосовується для розв'язання дискретної транспортної задачі на другому етапі.

Демонстрація роботи алгоритму на модельній задачі показала, що метод нейронечіткої ідентифікації з високим ступенем точності відновлює залежності, явний аналітичний вигляд який невідомий або присутній недостовірний математичний опис цих залежностей.

Основні результати розділу базуються на публікації автора [4].

РОЗДІЛ 5. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ З ПОБУДОВОЮ НЕЧІТКОГО РОЗБИТТЯ

5.1 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання задачі

Теорія нечітких множин бере свій початок з праць Л. Заде [114] і розширює поняття множини припущенням, що характеристична функція множини може набувати будь-яких значень в інтервалі $[0;1]$, а не тільки значення 0 або 1. Поєднання теорії нечітких множин з теорією оптимального розбиття множин дозволяє сформулювати задачу оптимального нечіткого розбиття множини – тепер немає умови, щоб кожна точка простору абсолютно безперечно входила тільки в одну з підмножин розбиття. Напроти, кожна точка простору тепер може лише з певною мірою відноситись до конкретної підмножини розбиття, а загалом одночасно відноситись до декількох підмножин розбиття. За допомогою введення спеціального параметра у постановку задачі – коефіцієнта нечіткості – постановка задачі заохочує і регулює наскільки нечітким буде кінцеве оптимальне розбиття. У нашому прикладі такою неперервною множиною, яку ми будемо розбивати, є обмежена частина n -вимірного простору. Ми покажемо, як впливає коефіцієнт нечіткості на форму оптимального розбиття, сумарну вартість транспортування, та наведемо його прикладну інтерпретацію.

Введені характеристики транспортної задачі роблять її складною і цікавою, а ще наближеною до реальних прикладних задач, і таким чином актуальною. А потужний математичний апарат теорії оптимального розміщення-розбиття дозволяє як сформулювати метод розв'язку, так і запропонувати ефективний числовий алгоритм розв'язку.

Для формулювання математичної постановки нечіткої двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розміщення-розбиття наведемо означення чіткого та нечіткого розбиття множини Ω з n -вимірного простору E_n з метрикою l^p [27]. Щоб розрізнити поняття, чітка (класична) множина буде позначатися символом « Ω », а нечітка множина з функцією належності $\mu_\Omega(x)$ буде позначатися символом « Ω ».

Підмножини чіткого розбиття будуть позначатися символами « Ω_i », а нечіткі підмножини нечіткого розбиття з функціями належності $\mu_{\Omega_i}(x)$ будуть позначатися символами « Ω_i ». Також, для спрощення запису позначимо $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$.

Під *нечіткою множиною* A , що задана на базовій множині $X \subseteq R^n$, розуміють сукупність упорядкованих пар вигляду $(x, \mu_A(x))$, де $x \in X$. При цьому відображення $\mu_A : X \rightarrow [0;1]$ є функцією належності, яка визначає ступінь приналежності елементів до нечіткої множини A .

Носієм нечіткої множини A називають чітку підмножину A_X базової універсальної множини X , яка складається з усіх елементів, для яких значення функції належності є строго додатним:

$$A_X = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Висотою нечіткої множини A є величина h_A , яка визначається як точна верхня межа (супремум) значень її функції належності на просторі X :

$$h_A = \sup_{x \in X} (\mu_A(x)).$$

Нехай A і B – нечіткі множини в універсальній множині X . Говорять, що нечітка множина A *включає в себе* (домінує) нечітку множину B (B є нечіткою підмножиною A), якщо $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Нехай на універсумі X задано нечіткі множини A і B . Стверджують, що множина A *містить у собі* (домінує) нечітку множину B (B є нечіткою підмножиною A), якщо для всього простору X виконується

Ядром нечіткої множини називається чітка множина A^1 , утворена елементами універсуму X , ступінь належності яких дорівнює одиниці:

$$A^1 = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}.$$

Межами нечіткої множини є чітка підмножина A^2 , що містить елементи універсуму X , значення функції належності яких знаходяться у відкритому інтервалі від 0 до 1:

$$A^2 = \{x \in X : \mu_A(x) \in (0;1)\}.$$

Перетином двох нечітких множин $A = (X_A, \mu_A)$ та $B = (X_B, \mu_B)$ є нова нечітка множина $C = (X_A \cup X_B, \mu_C)$, функція належності μ_C якої для кожного елемента обчислюється як мінімальне значення серед відповідних функцій належності компонентів:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Інтеграл від дійснозначної функції $f: X \rightarrow R$, заданої на нечіткій множині $A \subset X$, за певною мірою p формалізується у такий спосіб:

$$\int_A f(x) dp = \int_A f(x) \mu_A(x) dp \quad (5.1)$$

Означення 5.1. Чітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω – обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина, назвемо систему її чітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, для яких виконуються три умови:

$$1) \Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N;$$

$$2) \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$$

$$3) \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k) = 0, \quad \forall i \neq k; i, k = 1, 2, \dots, N, \text{ де } \text{mes}(\cdot) \text{ – міра Лебега.}$$

Означення 5.2. Нечітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина, назвемо систему нечітких підмножин $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = 1, \dots, N\}$, для яких виконуються три умови:

1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, \dots, N$, де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$, $\mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega$, тобто це чітка множина Ω , що розглядається як окремий випадок нечіткої множини;

$$2) \sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k, \quad \forall i \neq k, i, k = 1, \dots, N, \text{ де } h_C = \sup_{x \in \Omega} \mu_C(x) \text{ – висота нечіткої}$$

множини C ; $\mu_C(x)$ – функція належності: $\mu_C: \Omega \rightarrow [0, 1]$.

В означенні 5.2 умови 1) – 3) є нечітким аналогом відповідних умов для означення 5.1 чіткого розбиття множини. Відзначимо, що умова 2) в термінах нескінченновимірної транспортної задачі може розумітися як вимога того, щоб всі

потреби кожного споживача були повністю і без надлишків задоволені за рахунок одного або декількох виробників в нечіткому варіанті задачі, на відміну від одного виробника – в чіткому варіанті.

Як доведено в [27], умова 3) в означенні 5.2 випливає з умов 1) і 2). Тоді означення 5.2 еквівалентно наступному.

Означення 5.3. *Нечітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина, назвемо систему нечітких підмножин*

$$\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N\},$$

де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$, $\mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega$, для яких виконується наступна умова:

$$\sum_{k=1}^N \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Постановка задачі.

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n , тобто $\Omega \subset E_n$. Позначимо через P_Ω^N клас всіх можливих нечітких розбиттів чіткої множини Ω на N нечітких підмножин. Слід відзначити, що клас чітких можливих розбиттів Σ_Ω^N є підкласом класу P_Ω^N .

Нехай, $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$ – це вектор з N елементів $\tau_i^I \subset \Omega, i = 1, \dots, N$, де кожен елемент вектору належить підмножині Ω з E_n , тобто $\tau_i^I \in \Omega, \tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}; \dots; \tau_i^{I(k)})$, $i = 1, \dots, N$. Нехай, $\tau^II = (\tau_1^II, \dots, \tau_j^II, \dots, \tau_M^II)$ – це вектор з M елементів $\tau_j^II \subset \Omega, j = 1, \dots, M$, де кожен елемент вектору належить підмножині Ω з E_n , тобто $\tau_j^II \in \Omega, \tau_j^II = (\tau_j^{II(1)}; \dots; \tau_j^{II(k)})$, $j = 1, \dots, M$. Нехай, $c^I(x, \tau_i^I)$ – це метрика, задана на E_n , для визначення відстані між Ω та τ^I , що має прикладний сенс ціни транспортування одиниці товару від простору виробництва до центрів першого етапу. Нехай, $c^{II}(\tau_i^I, \tau_i^II)$ – це метрика, задана на E_n , для визначення відстані між τ^I та τ^II , що має прикладний сенс ціни транспортування одиниці товару від центрів першого етапу до центрів другого етапу. Нехай, $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_N)$ – це вектор адитивних

коефіцієнтів, які впливають на ціну транспортування одиниці товару між Ω та τ^I . Нехай, $w = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_N)$ – це вектор мультиплікативних коефіцієнтів, які впливають на ціну транспортування одиниці товару між Ω та τ^I . Нехай, $\rho(x)$ це – неперервна функція щільності, задана на Ω , що має прикладний сенс потужності виробництва продукту у даній точці простору. Нехай, v_{ij} – це матриця чисел розмірністю $N \times M$, яка має прикладний сенс обсягів транспортування продукту між центрами першого та другого етапу.

Сформулюємо наступну задачу нечіткого розбиття.

Задача 5.1. Знайти таке нечітке розбиття $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, n}\}$ множини Ω з множини розбиттів P_Ω^N , яке б в деякому розумінні «мінімізувало» цільовий функціонал:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N; v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(w_i c^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \quad (5.2)$$

Використовуючи формулу (5.1), запишемо функціонал (5.2) у термінах функції належності $\mu(x)$:

$$F(\mu_1(\cdot), \dots, \mu_i(\cdot), \dots, \mu_N(\cdot); v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(w_i c^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) \mu_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \quad (5.3)$$

Функціонал (5.3) визначає сумарну вартість транспортування усього товару між множиною Ω та центрами другого (кінцевого) етапу для деякого потенційно нечіткого розбиття P_Ω^N та обсягів перевезення v_{ij} . Як доведено у [61], у такій постановці задачі оптимальне розбиття завжди буде чітким. Для того, щоб описати необхідну міру нечіткості розбиття (те, наскільки нечітким повинно бути оптимальне розбиття), введемо коефіцієнт нечіткості m . Розглянемо наступний функціонал:

$$I(\mu_1(\cdot), \dots, \mu_i(\cdot), \dots, \mu_N(\cdot); v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(w_i c^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) (1 + \mu_i(x))^m dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \quad (5.4)$$

Зазначимо, що введений функціонал (5.4) вже не є формулою для розрахування сумарної вартості транспортування товару – для цього слід використовувати формулу (5.3) – проте він пов’язує побудову оптимального розбиття з коефіцієнтом нечіткості. Частина формули (5.4) у вигляді $(1 + \mu_i(x))^m$ є регуляризаційним членом попиту споживача, його можна інтерпретувати як опуклий штраф за концентрацію споживчого попиту на окремих центрах постачання, який моделює зростаючі граничні логістичні та ризикові витрати. Степенева функція обрана, тому що вона є опуклою при $m > 1$ і дозволяє моделювати прискорене зростання ефекту концентрації постачання від одного джерела. Подібні залежності використовуються у різних соціально-економічних моделях, зокрема при оцінці ризиків залежності від окремого постачальника, витрат на страхові запаси та в економічних індексах концентрації. Така функція природно стимулює більш рівномірний розподіл поставок між кількома близькими центрами постачання. При розв’язанні прикладних задач конкретний вид регуляризаційного члена має обиратись фахівцем на основі відомих даних та залежностей. Як буде показано далі, при $m = 1$, задача зводиться до чіткої, при $m > 1$ оптимальне розбиття стає нечітким, причому ступінь нечіткості зростає зі збільшенням коефіцієнта m .

Тоді, під двоетапною неперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального нечіткого розміщення-розбиття з заданими координатами центрів підмножин з обмеженнями у вигляді рівностей будемо розуміти наступну задачу.

Задача 5.2. Необхідно знайти таку вектор-функцію $\mu^*(x) = (\mu_1^*(x), \dots, \mu_n^*(x))$, $x \in \Omega$ та такий вектор невід’ємних чисел $v^* = (v_{11}^*, \dots, v_{ij}^*, v_{NM}^*)$, що забезпечують:

$$\min_{\{\mu_1(\cdot), \dots, \mu_N(\cdot)\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} I(\{\mu_1(\cdot), \dots, \mu_N(\cdot)\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1, \quad x \in \Omega$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$$

$$\tau^{II} = (\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_M \in \Omega^M$$

Тут $b_j^II, j = 1, \dots, M$ – задані невід’ємні числа, причому такі, що виконуються

умови існування розв’язку задачі:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^II$$

У цій задачі:

$$\Gamma_1 = \{\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)) \in \Gamma \text{ майже скрізь (м.с.) для } x \in \Omega;\}$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

$$\Gamma = \{\mu(x) : 0 \leq \mu_i(x) \leq 1, x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1 \text{ м.с. для } x \in \Omega\};$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

Отже, для того, щоб мати змогу ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ множини Ω , треба знати вектор-функцію належності вигляду:

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad x \in \Omega.$$

Для кожного фіксованого $v \in Q$ *Задача 5.1*, як доведено у [61], має розв'язок.

Дійсно, оскільки Γ_1 – обмежена, замкнена, опукла множина гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$, а функціонал $I(\mu(\cdot), v)$ для кожного фіксованого $v \in Q$ є лінійним (а значить опуклим) та неперервний відносно $\mu_i(\cdot)$ на Γ_1 , то в силу узагальненої теореми Веєрштрасса [64] опуклий неперервний функціонал $I(\mu_i(\cdot), v)$ при фіксованому $v \in Q$ на замкненій обмеженій, опуклій множині Γ_1 гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$ досягає своєї нижньої грані.

Метод множників Лагранжа. Для зведення задачі 5.2 умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації, до якої далі можна буде застосувати метод безумовної недиференційовної оптимізації, введемо поняття функціонала Лагранжа. Під функціоналом Лагранжа для задачі 5.2 будемо розуміти такий функціонал:

$$\begin{aligned} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi) = & I(\mu(\cdot), v) + \int_{\Omega} \varphi(x) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i(x) - 1 \right) dx \\ & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^H - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

де $\Psi = (\varphi(x); \psi_1, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_M)$ – це множники (штрафні коефіцієнти) методу Лагранжа, де $\varphi(x)$ – дійсна функція, визначена на Ω , $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ – це вектор з N дійсних чисел, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ – це вектор з M дійсних чисел, $\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)) \in \Gamma$ м.с. для $x \in \Omega$.

Пару елементів $(\{\mu^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*)$ назвемо сідловою точкою функціоналу (5.5) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$, де

$$Q = \left\{ v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \right\}$$

$$\Lambda = \left\{ \Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E_M \right\},$$

якщо

$$L(\{\mu_*(\cdot), v_*\}, \Psi) \leq L(\{\mu_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) \leq L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi^*) \text{ для } \mu(\cdot) \in \Gamma, v \in Q, \Psi \in \Lambda,$$

або

$$L(\{\mu_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) = \min_{\{\mu(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\mu(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi).$$

Покажемо, що задача (5.4) може бути зведена до задачі знаходження сідлової точки функціонала (5.5).

Введемо функціонали

$$X(\{\mu(\cdot), v\}) = \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi), \quad \{\mu(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\mu(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі:

$$X(\{\mu(\cdot), v\}) \rightarrow \min, \quad \{\mu(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q \quad (5.6)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda \quad (5.7)$$

Задачу (5.6) назвемо прямою, задачу (5.7) – двоїстою до задачі (5.6).

Нескладно показати (за аналогією з [27]), що задачі (5.6), (5.7) пов'язані відношенням дуальності $X_* = G^*$, і розв'язок пари дуальних задач (5.6) і (5.7), (кожна з яких має розв'язок) є еквівалентом до відшукування сідлової точки функціоналу Лагранжа (5.5) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$.

Для відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа (5.5) конкретизуємо двоїсту задачу (5.6). Для цього, від задачі відшукування $\min_{\mu(\cdot) \in \Gamma, v \in Q} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi)$ перейдемо, згідно [27], до такої задачі:

$$\min_{v \geq 0} \min_{\mu(\cdot) \in \Gamma} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi).$$

Позначимо:

$$G_1(\Psi) = G_1(\varphi(\cdot), \psi, \eta) = \min_{\mu(\cdot) \in \Gamma} L(\{\mu(\cdot), v\}, \Psi) \quad (5.8)$$

Підставляючи у (5.8) вираз для $L(\{\mu(\cdot), \nu\}, \Psi)$ із (5), і враховуючи той факт, що функціонал (5.5) є лінійним сепарабельним відносно μ (при кожному фіксованому $\nu \geq 0$) на множині Γ , див. [27], отримаємо:

$$G_1(\varphi(\cdot), \psi, \eta) = \int \sum_{i=1}^N \min_{\mu(\cdot)} \left\{ \left(w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) (1 + \mu_i(x))^m + (\psi_i \rho(x) + \varphi(x)) \mu_i(x) \right\} dx \quad (5.9)$$

$$+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i - \eta_j \right) \nu_{ij}$$

Розглянемо задачу мінімізації виразу у дужках відносно $\mu(\cdot)$ окремо.

Задача 5.3.

$$\int \sum_{i=1}^N \min_{\mu(\cdot)} \left\{ \left(w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) \mu_i(x)^m + (\psi_i \rho(x) + \varphi(x)) \mu_i(x) \right\} dx \rightarrow \min$$

На відміну від *Задачі 5.2*, де екстремум відшукується на обмеженій множині, *Задача 5.3* належить до класу задач безумовної оптимізації щодо функціонального параметра $\mu(\cdot)$.

Базуючись на [30], сформулюємо необхідну умову екстремуму для *Задачі 5.3*.

Теорема 5.1. Нехай $\mu^*(x) \in E$ – оптимальний розв'язок *Задачі 5.2*. Тоді тотожно виконується умова:

$$\text{grad}_{\mu}(\mu^*(x)) \equiv 0 \quad (5.10)$$

Доведення. Зафіксуємо довільну вектор-функцію $\mu(x) \in E$ та задамо однопараметричне сімейство функцій $\mu^\lambda(x)$ за формулою:

$$\mu^\lambda(x) = \mu^*(x) + \lambda(\mu(x) - \mu^*(x)),$$

де параметр $\lambda \in \mathfrak{R}$. Очевидно, що для будь-якого обмеженого значення λ справедливе включення $\mu^\lambda(x) \in E$. При цьому виконується нерівність:

$$h(\mu^\lambda(x), \varphi^*(x)) \geq h(\mu^*(x), \varphi^*(x)).$$

Звідси наведеного співвідношення випливає, що скалярна функція дійсної змінної $\nu(\lambda) = h(\mu^\lambda(x), \varphi^*(x))$ набуває свого мінімального значення у точці $\lambda = 0$.

Відповідно до класичної теорії екстремальних задач для функцій однієї змінної впливає, що:

$$v'(0) = \left. \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Аналітичний вираз для похідної $v'(0)$ записується як

$$v'(0) = \int_{\Omega} [\text{grad}_{\mu}(\mu^*(x)), \mu(x) - \mu^*(x)] dx = 0, \text{ де символ } [...] \text{ позначає скалярний}$$

добуток. Звідси при $\mu(x) = \mu^*(x) + \text{grad}_{\mu}(\mu^*(x))$ отримаємо

$$v'(0) = \int_{\Omega} [\text{grad}_{\mu}(\mu^*(x)), \text{grad}_{\mu}(\mu^*(x))] dx = 0. \text{ Звідси безпосередньо впливає}$$

справедливість рівності (5.10). Доведено.

Тоді, якщо *Задача 5.3* має єдиний розв'язок, то раніше встановлена необхідна умова (5.10) одночасно є і достатньою умовою оптимальності.

При m – парне натуральне число, функціонал $h(\mu(x), \psi_0(x))$ стає параболічним степеня m відносно $\mu(x)$, і це забезпечує виконання умов існування та єдиності розв'язку при $\mu(x) \in E$.

Тепер, на основі умови (5.10), достатність якої була доведена, отримаємо у аналітичному вигляді вираз для знаходження оптимального значення $\mu^*(x)$:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mu_i}(\mu_i(x)) &= m \cdot (1 + \mu_i(x))^{m-1} \left(w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) + \\ &+ \psi_i^* \rho(x) + \varphi^*(x) = 0 \quad \forall i = \overline{1, n} \end{aligned}$$

$$\mu_i(x) = \left(-\frac{\psi_i^* \rho(x) + \varphi^*(x)}{m \rho(x) (c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}} - 1 \quad (5.11)$$

Враховуючи, що $(c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \geq 0$, впливає, що знайдена екстремальна точка дає мінімум функціонала.

Тоді, для обчислення з урахуванням обмежень:

$$\mu_i^*(x) = \begin{cases} \mu_i(x), & \text{якщо } \mu_i(x) \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} [1 - \text{sign grad}_{\mu_i}(\mu_i(x))], & \text{якщо } \mu_i(x) \notin [0, 1] \end{cases} \quad (5.12)$$

Задача 5.3 розв'язана.

Продовжимо розв'язання задачі 5.2. З (5.9) можна помітити, що для $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$ і усіх $\Psi = (\varphi(\cdot), \psi, \eta) \in \Lambda$, має місце

$$\min_{v_{ij} \geq 0} \left(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i - \eta_j \right) v_{ij} = \begin{cases} 0, & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i - \eta_j \geq 0, \\ -\infty, & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i - \eta_j < 0. \end{cases}$$

Оскільки двоїста задача (5.7) полягає у максимізації функціонала $G(\Psi)$ (5.8) на множині Λ , то його максимум має сенс шукати на множині тільки тих (ψ, η) із Λ , для яких $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i - \eta_j \geq 0$. Тому двоїсту задачу (5.7), з врахуванням виконаних перетворень, можна сформулювати наступним чином:

$$\begin{aligned} G(\Psi) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\mu(\cdot)} \left(\left(w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) (1 + \mu_i(x))^m + (\psi_i \rho(x) + \varphi(x)) \mu_i(x) \right) dx + (5.13) \\ & + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} \rightarrow \max_{\Psi} \end{aligned}$$

за умов:

$$\eta_j \leq c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_k, k=1, \dots, N, j=1, \dots, M, \quad (5.14)$$

$$\psi \in E_N, \eta \in E_M.$$

Перепишемо умови (5.14) у вигляді:

$$\eta_j = \min_{1 \leq k \leq N} \left(c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k \right), j=1, \dots, M \quad (5.15)$$

Підставляючи вираз (5.15) у (5.9), і там самим, позбавляючись змінної η з функціоналу $G(\Psi)$, отримаємо двоїсту задачу (5.7) у вигляді:

$$\begin{aligned} G(\Psi) = G_2(\psi) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\mu(\cdot)} \left\{ \left(w_i c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i \right) \rho(x) (1 + \mu_i(x))^m + (\psi_i \rho(x) + \varphi(x)) \mu_i(x) \right\} dx (5.16) \\ & + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k \right) \rightarrow \max_{\psi} \end{aligned}$$

Таким чином, переходячи від початкової задачі 5.2 (через функціонал Лагранжа (5.4)) до двоїстої задачі, зведеної до вигляду (5.16), ми отримали вираз для першої компоненти $\mu_*(\cdot)$ оптимального розв'язку *Задачі 5.3* у вигляді (5.12), де у якості $\Psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (5.16).

Далі, підставляючи у цільовий функціонал (5.4) початкової задачі 5.2 знайдений вираз для $\mu_*(\cdot)$ із (12) при $\Psi = \Psi^*$, переходимо до наступної задачі відшукування другої компоненти $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ оптимального розв'язку початкової задачі 5.3.

Задача 5.4.

$$I(\mu_*(\cdot), v) = \text{const} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II} (\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v$$

за умов

$$\sum_j v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \mu_{*i}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

де значення $\text{const} = \min_{\mu(\cdot)} I(\mu(\cdot), v)$ не впливає на значення точки мінімуму функції

$$I(\mu_*(\cdot), v).$$

Очевидно, задача 5.4 – це класична скінченновимірна транспортна задача, для якої виконуються умови балансу:

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}.$$

Для розв'язку задачі 5.4 можна застосувати відомий метод потенціалів. Сформулюємо теорему, яка підводить підсумок нашим міркуванням для розв'язку задачі 5.2.

Теорема 5.2. Перша компонента оптимального розв'язку *Задачі 5.2*, вектор-функція $\mu^*(x) = (\mu_1^*(x), \dots, \mu_n^*(x))$ знаходиться для всіх $i = 1, \dots, N$ наступним чином:

$$\mu_i^*(x) = \left(-\frac{\psi_i \rho(x) + \varphi(x)}{m \rho(x) (c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}} - 1.$$

Друга компонента, $v_* = (v_{11*}, \dots, v_{ij*}, v_{NM*})$ визначається як оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної транспортної задачі за допомогою методу потенціалів:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II} (\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v,$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Причому виконується умова балансу:

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}.$$

Далі наведемо алгоритм розв'язку *Задачі 5.2*, заснований на сформульованій вище теоремі, складовими якого є, з урахуванням недиференційовності функції $G_2(\Psi)$, r-алгоритм Н. З. Шора [25,30,31], який застосовується для числового розв'язку двоїстої задачі (5.6)-(5.7), та метод потенціалів, який застосовується для розв'язку *Задачі 5.4*, що дає вектор оптимальних обсягів перевезень v_* для *Задачі 5.2*.

5.2 Алгоритм розв'язання задачі

Перед тим як сформулювати алгоритм розв'язку *Задачі 5.2*, заснований на сформульованій вище теоремі, визначимо i -у, $i = 1, \dots, N$, компоненту вектору узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi) = (g_{G_2}^{\psi_1}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_i}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_N}(\psi))$ функції $G_2(\psi)$ задачі 5.2 у точці $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ наступним чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \mu_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^{II} q_{ij}), \quad (5.17)$$

де

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^I(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), i=1, \dots, N, j=1, \dots, M, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Також:

$$g_{G_2}^{\varphi_i}(\varphi_i(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \mu_i(x) - 1 \quad (5.18)$$

Опишемо алгоритм.

Етап підготовки. Вкладемо область Ω в n -вимірний паралелепіпед Π , грані якого паралельні осям декартової системи координат, визначимо $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Виконаємо дискретизацію області Π за допомогою рівномірної прямокутної сітки.

Алгоритм 5.1. Псевдокод розв'язку двоетапної задачі оптимального нечіткого розбиття з фіксованими координатами центрів

Початок алгоритму

1. Задаємо номер ітерації $k = 0$.
2. Довільно задаємо початкове наближення вектору $\psi^{[0]}$ та сітки $\varphi^{[0]}(x)$, наприклад значеннями 0.
3. Розраховуємо значення $\mu^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (5.11)-(5.12) при $\psi = \psi^{[0]}$ та $\varphi(x) = \varphi^{[0]}(x)$.
4. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}^{\psi_i}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (5.17)-(5.18) при $\psi = \psi^{[0]}$, $\mu(x) = \mu^{[0]}(x)$.
5. Задаємо номер ітерації $k = 1$.
6. Обчислюємо значення вектору $\psi^{[1]}$ за формулою $\psi^{[1]} = \psi^{[0]} + h_0 g_{G_2}(\psi^{[0]})$, де h_0 – початковий розмір кроку.
7. Поки не виконується умова $\|\psi^{[k]} - \psi^{[k-1]}\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, виконуємо цикл:
 8. Приймаємо $k = k + 1$.
 9. Розраховуємо значення $\mu^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (5.20) при $\psi = \psi^{[k]}$.
 10. Розраховуємо значення вектору узагальненого градієнту $g_{G_2}^{\psi_i}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (5.19) при $\psi = \psi^{[k]}$, $\mu(x) = \mu^{[k]}(x)$.

11. Виконуємо обчислення за ітераційною формулою

$$\psi^{[k+1]} = \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi$$
, де B_{k+1}^ψ – оператор відображення перетвореного простору у основний простір E_N , при чому $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^* g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k – розмір кроку.
12. Кінець циклу.
13. Приймаємо $\psi^* = \psi^{[k]}$, $\varphi(x)^* = \varphi(x)^{[k]}$, $\mu_*(x) = \mu^{[k]}(x)$, де k – номер ітерації, на якій було завершено цикл [7-11].
14. Розв'язуємо транспортну задачу методом потенціалів при $\mu(x) = \mu_*(x)$ і $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$.

Завершення роботи алгоритму.

5.3 Приклади розв'язання модельних задач та аналіз результатів

Для демонстрації роботи запропонованого алгоритму було обрано і розв'язано декілька модельних задач. Деякі задачі підібрані таким чином, щоб оптимальний розв'язок був інтуїтивно зрозумілий, деякі так, щоб показати ефективність алгоритму, а деякі так, щоб пояснити вплив різних початкових параметрів на оптимальний розв'язок та отримане розбиття.

Перед розглядом прикладів, наведемо початкові умови та параметри числового розв'язку, спільні для усіх тестових задач. Якщо у певній задачі параметри відрізняються від загальних, це буде зазначено у описі задачі.

Виробництво деякого ресурсу є неперервно розподіленим з щільністю $\rho(x) = 1$ у області $\Omega = \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \leq x^{(1)} \leq 1, 0 \leq x^{(2)} \leq 1 \right\}$, тобто Ω – це одиничний квадрат з рівномірно розподіленою щільністю виробництва. Сумарний обсяг наявного продукту, що розподілений з щільністю $\rho(x)$ у області Ω , виражається як $\int_{\Omega} \rho(x) dx$, і для усіх наведених прикладів дорівнює 1.

Уся множина постачання Ω розбивається на підмножини Ω_i , і на першому етапі ресурс транспортується від кожної підмножини до відповідного центру першого етапу (проміжного центру транспортування). На другому етапі ресурс транспортується до від центрів першого етапу до центрів другого етапу. Сумарна

пропозиція ресурсу дорівнює сумарному попиту, тобто транспортна задача є закритою (збалансованою). Координати центрів першого та другого етапу задані у початкових умовах, тобто є фіксованими.

Коефіцієнт нечіткості дорівнює 2, якщо не вказано інше. Роздільна здатність сітки для числового обчислення оптимального розбиття – 1024 на 1024. Порядок інтегрування числовим методом Гауса-Лежандра – 8. Для методу субградієнтного спуску r-алгоритму Шора: максимальна кількість ітерацій 300, кількість ітерацій для збільшення кроку – 4, граничне значення величини градієнту для завершення ітерацій – 0.0001, величина початкового кроку – 0.1, коефіцієнт розтягу простору – 2, коефіцієнт збільшення кроку – 1.1, коефіцієнт зменшення кроку – 0.9, коефіцієнт розтягу простору обраний рівним 2, оскільки це рекомендоване значення для даного методу [30].

Необхідно знайти таке розбиття одиничного квадрата Ω на підмножини за кількістю центрів транспортування першого етапу та такі обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів, щоб сумарна вартість перевезення усього продукту від площини виробництва до центрів споживання була мінімальною, за умови задоволення усіх обмежень. Розбиття одиничного квадрата може бути нечітким, але не є обов'язковою умовою.

Для кожного розв'язку задачі буде наведено дві числових характеристики: значення цільового функціоналу, розраховане за формулою (5.4), та значення функціоналу сумарної вартості транспортування товару, розраховане за формулою (5.3).

Результати розв'язку будуть представлені і графічно. Введемо поняття ступеню недовіри як допоміжний інструмент в аналізі графічного зображення розбиття. Це необхідно, оскільки у нечіткому розбитті кожна точка простору може одночасно відноситись з різною мірою до декількох центрів.

Ступінь недовіри (CH) – це параметр для аналізу та візуалізації нечіткого розбиття множини. Ступінь недовіри задає мінімальне значення функції належності $\mu_i(x)$, при досягненні якого точка простору може бути однозначно (при поточному CH) віднесена до конкретної підмножини і конкретного центру підмножини.

Ступінь недовіри не входить у математичну модель задачі і не бере участь у алгоритмі розв'язання. Це виключно інструмент дослідження нечіткого розбиття, мінімальний поріг значення функції належності, при якому точка простору починає відноситись, або належати певній підмножині. Ступінь недовіри можна використовувати, щоб побачити регіони на рисунку, де значення функції належності менші та більші певного значення. Точки простору, які при заданому СН не можна однозначно віднести ні до якої підмножини, утворюють нечітку межу між підмножинами.

На рисунках з графічним зображенням нечіткого розбиття точки, які при поточному СН не можна однозначно віднести до конкретного центру (нечітка межа), будуть позначені сірим кольором.

Кожна підмножина, з якої складається розбиття одиничного квадрата, має свій колір. Якщо певна точка площини відноситься з певною мірою до декількох центрів першого етапу, міра відносин позначається як пропорційне змішення декількох кольорів у цій точці, де міра нечіткості представлена інтенсивністю певного кольору. На рисунках з графічним зображенням розв'язків модельних задач центри постачання першого етапу позначені як чорні круги, а центри постачання другого етапу позначені як чорні квадрати; межі між підмножинами, які відносяться до різних центрів постачання першого етапу, позначені чорним кольором; накреслені стрілки та підписані обсяги транспортувань між центрами постачання першого та другого етапів.

Приклад 5.1. Двоетапна задача оптимального нечіткого розбиття з фіксованими центрами першого і другого етапу. Вхідні дані: два центри першого етапу з координатами $(0.2; 0.5)$ і $(0.8; 0.5)$; один центр другого етапу з координатами $(0.5; 0.5)$ з часткою попиту продукту рівною 1.0. Необхідно знайти оптимальне розбиття обмеженої частини простору на дві потенційно нечіткі множини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів.

Результати: значення цільового функціоналу 2.091618, значення функціоналу вартості транспортування 0.499982.

На *Рисунку 5.1(a)* показано графічну ілюстрацію розв'язку до *Прикладу 5.1*.

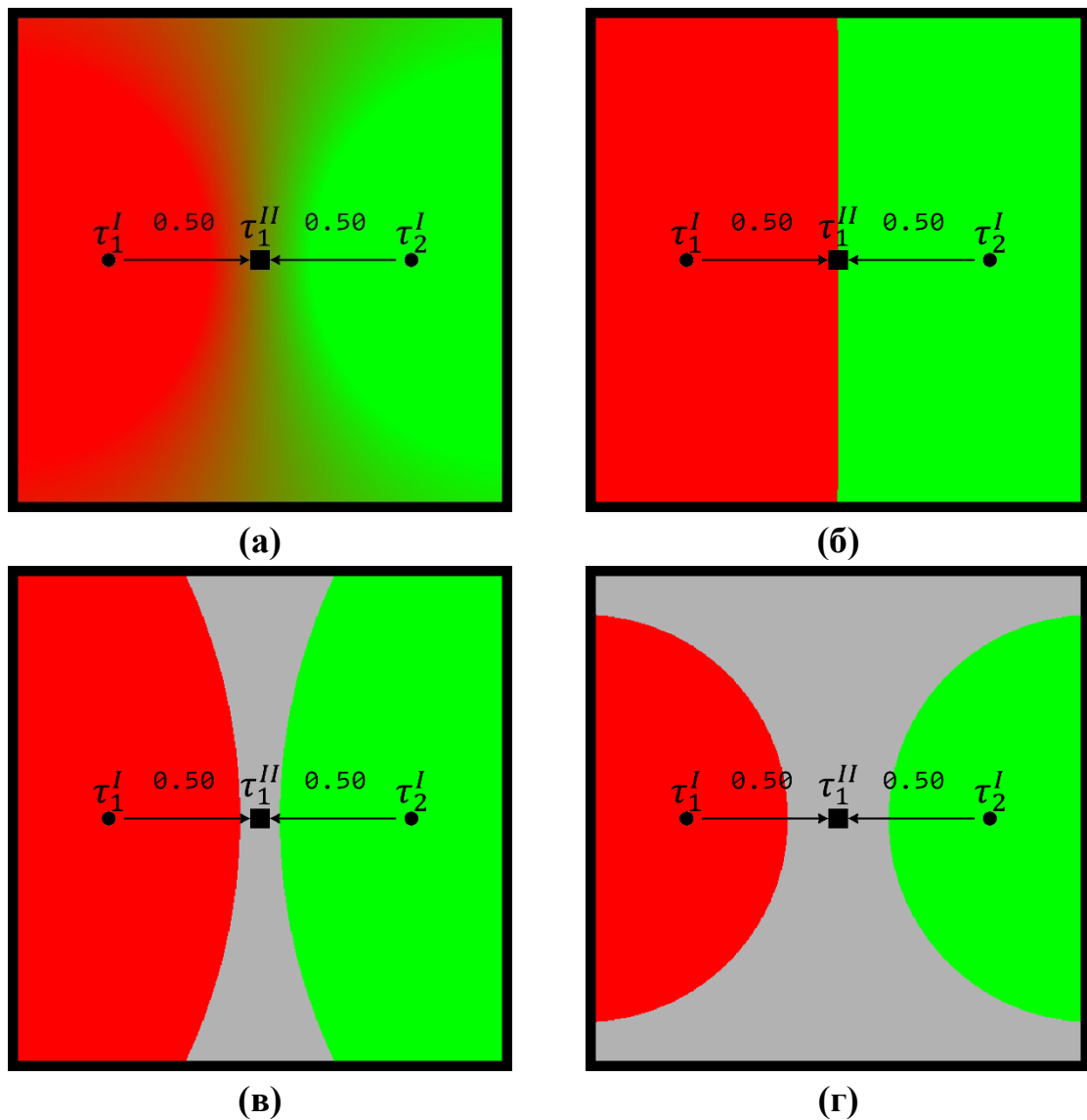


Рисунок 5.1. Оптимальний розв'язок до Прикладу 5.1
 (а) Без CH; (б) $CH \in [0.0; 0.5]$; (в) $CH = 0.7$ (г) $CH = 1.0$

Аналіз результатів: на *Рисунку 5.1(а)* видно, що оптимальне розбиття є нечітким, причому чим ближче розташована точка простору до центру першого етапу, тим з більшою вірогідністю ця точку відноситься до цього центру (тим менша нечіткість у цій точці). І навпаки: чим далі знаходиться точка від обох центрів першого етапу, тим більша нечіткість, і така точка майже у рівній мірі відноситься до обох центрів першого етапу. Тому посередині рисунку формується вертикальна розмита межа змішаного зелено-червоного кольору, у якій обидві функції належності прямують до значення 0.5. При цьому, через симетричність розташування центрів першого і другого етапів, оптимальне розбиття також виходить дуже симетричним. На *Рисунку 5.1(б)* показано візуалізацію розбиття зі ступенем нечіткості (CH), рівним

0.5. Як впливає з означення СН, на *Рисунку 5.1(б)*, при значеннях СН в діапазоні $[0; 0.5]$, в усіх точках червоного кольору $\mu_1(x, y) > 0.5$, а в усіх точках зеленого кольору навпаки: $\mu_2(x, y) > 0.5$. На *Рисунку 5.1(в)* при $СН=0.7$ можна побачити сіру межу нечіткості – множину точок, де жодна з функцій належності не перевищує значення 0.7. А на *Рисунку 5.1(г)* при $СН=1.0$ можна побачити *чітке ядро* нечіткого розбиття – множину точок, які абсолютно точно відносяться до певного центру першого етапу (функції належності дорівнюють 1.0 та 0.0 відповідно, і навпаки).

Приклад 5.2. Двоетапна задача оптимального нечіткого розбиття з фіксованими центрами першого і другого етапу. Вхідні дані: чотири центри першого етапу з координатами (0.13; 0.63), (0.28; 0.46), (0.44; 0.77) і (0.65; 0.33); два центри другого етапу з координатами (0.15; 0.11), (0.3; 0.8) і частками попиту 0.2 та 0.8 від сумарної кількості продукту відповідно. Необхідно знайти оптимальне розбиття та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів.

Результати: значення цільового функціоналу 2.825116, значення функціоналу вартості транспортування 0.574644.

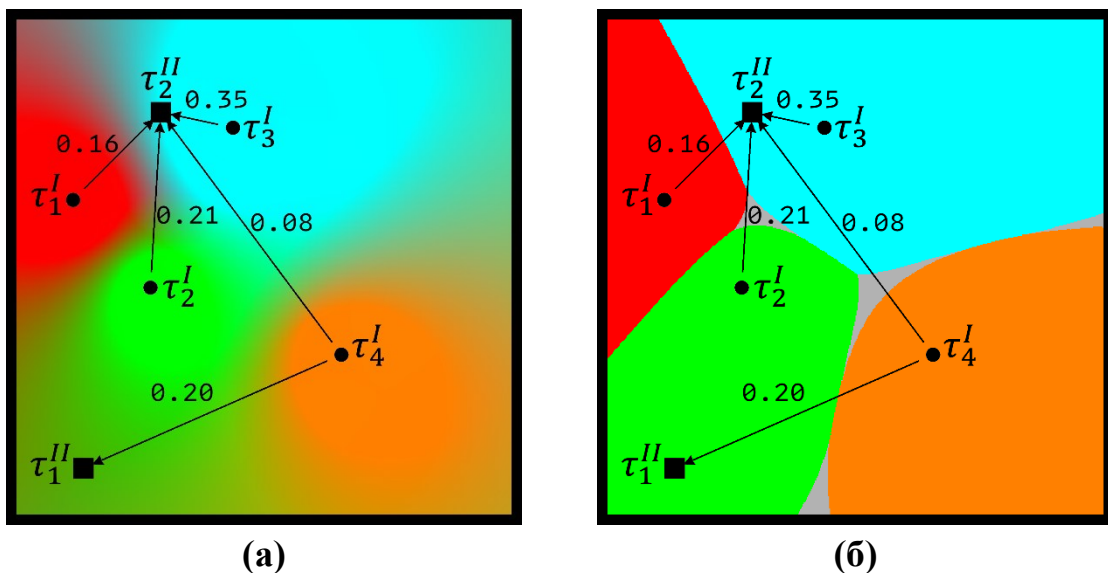


Рисунок 5.2. Оптимальний розв'язок до Прикладу 5.2
(а) Без СН; (б) СН=0.5

Приклад 5.3. Двоетапна задача оптимального нечіткого розбиття з фіксованими центрами першого і другого етапу. Вхідні дані: сім центрів першого етапу з координатами (0.72; 0.81), (0.30; 0.49), (0.13; 0.92), (0.12; 0.61), (0.45; 0.22), (0.69; 0.16), (0.63; 0.49); три центри другого етапу з координатами (0.08; 0.15), (0.87;

0.69), (0.08; 0.15) і частками попиту 0.2, 0.3 і 0.5 відповідно. Необхідно знайти оптимальне розбиття та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів.

Результати: значення цільового функціоналу 4.281913, значення функціоналу вартості транспортування 0.538211.

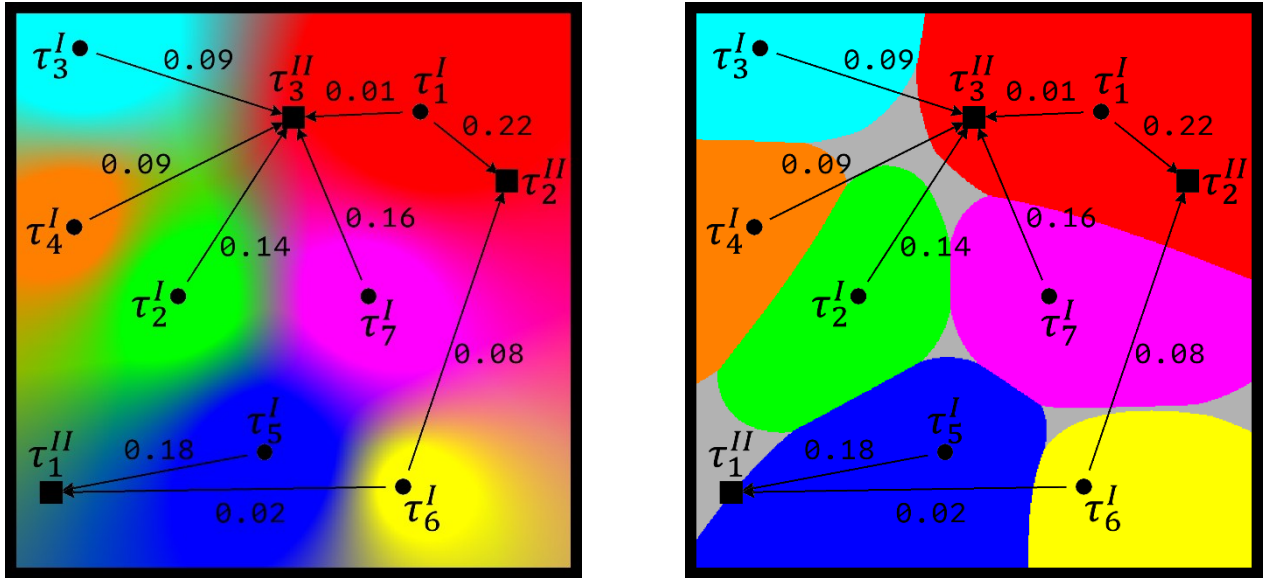


Рисунок 5.3. Оптимальний розв'язок до Прикладу 5.3

(а) Без СН; (б) СН=0.5

Приклад 5.4. Двоетапна задача оптимального нечіткого розбиття з фіксованими центрами першого і другого етапу. Вхідні дані: чотири центри першого етапу з координатами (0.13; 0.63), (0.28; 0.46), (0.44; 0.77), (0.65; 0.33); два центри другого етапу з координатами (0.15; 0.11), (0.3; 0.8) і частками попиту 0.2 та 0.8 відповідно. Необхідно знайти оптимальне розбиття та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів.

Дана задача була розв'язана у чотирьох варіантах з різними значеннями коефіцієнта нечіткості m : 1, 2, 4, 12.

Результати: у Таблиці 5.1 наведені значення цільового функціоналу та функціоналу транспортування для оптимальних розв'язків задачі для кожного заданого m . На Рисунку 5.4(а)-(г) наведено графічні ілюстрації розв'язків до Прикладу 5.4.

Таблиця 5.1

Коефіцієнт нечіткості	Цільовий функціонал	Сумарна вартість транспортування	Кількість ітерацій r -алгоритму
$m=1$	0.506523	0.506523	8
$m=2$	1.946596	0.524540	9
$m=4$	4.220848	0.598949	9
$m=12$	106.076200	0.647265	9

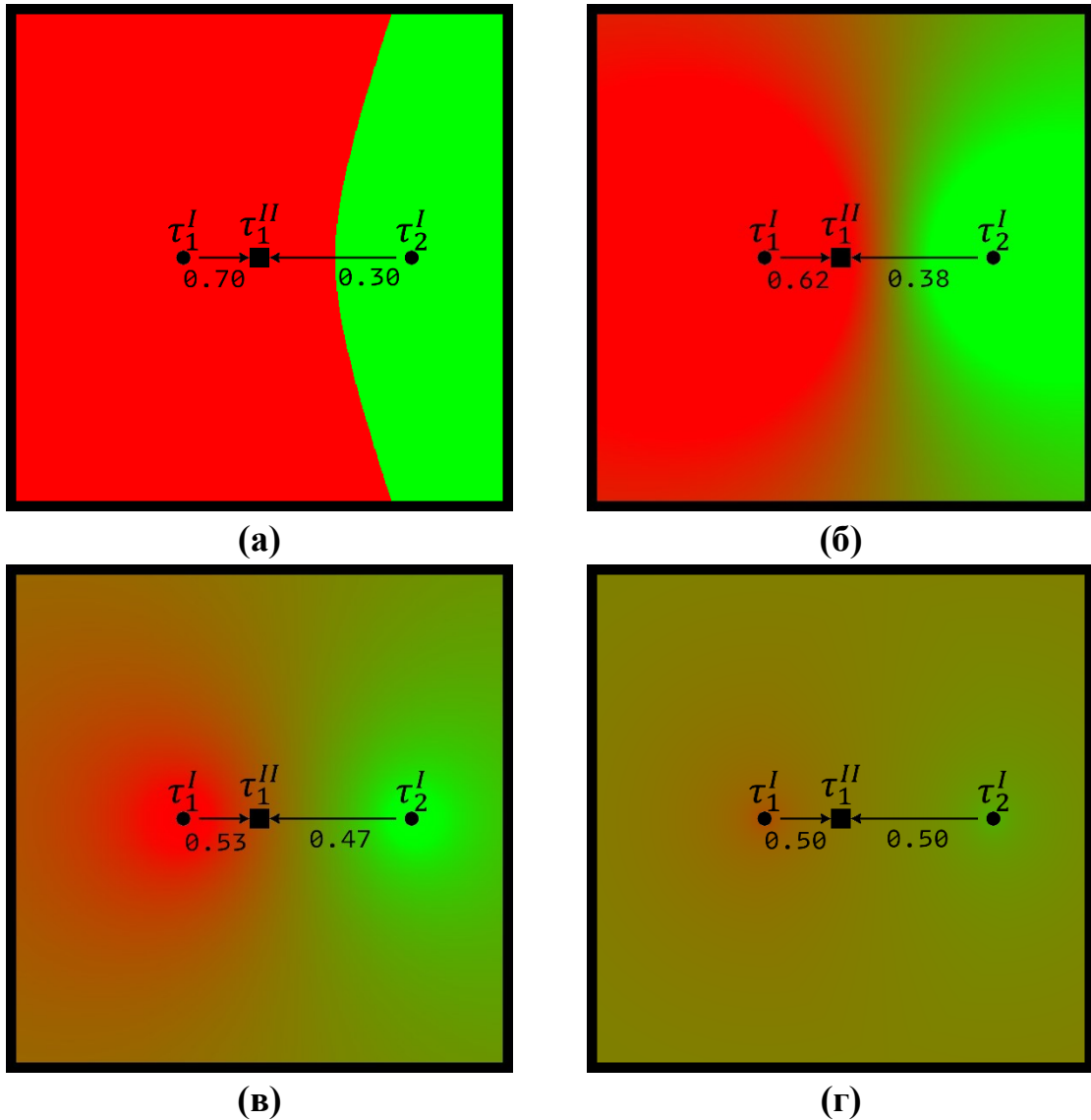


Рисунок 5.4. Оптимальний розв'язок до Прикладу 5.4

(а) $m=1$; (б) $m=2$; (в) $m=4$; (г) $m=12$;

Аналіз: отримані результати показують, як змінюється оптимальне розбиття залежно від значення коефіцієнта нечіткості (Рисунки 5.4(а)–(г)). При значенні $m=1$ оптимальне розбиття є повністю чітким. Це відповідає очікуванням, адже у такому випадку задача зводиться до класичної двоетапної чіткої задачі оптимального

розбиття-розміщення, де оптимізація виконується виключно за критерієм мінімізації вартості транспортування. Проте вже при $m=2$ оптимальне розбиття набуває нечіткого характеру.

Запропонуємо дві можливі прикладні інтерпретації коефіцієнта нечіткості та відповідних рішень.

По-перше, коефіцієнт нечіткості можна розглядати як параметр, що моделює поведінку споживачів в залежності від відстані. У такій інтерпретації вибір постачальника окремим споживачем не є детермінованим, а описується функцією розподілу ймовірностей. Залежно від значення m , система відображає ситуацію, коли споживачі схильні або концентруватися на одному постачальнику, або розподіляти замовлення між кількома.

По-друге, коефіцієнт нечіткості можна трактувати як параметр, що відображає рівень надійності та відмовостійкості системи. У чіткому випадку слабким місцем є те, що вихід з ладу одного чи кількох постачальників призводить до повної втрати постачання для частини споживачів. Для низки прикладних ситуацій такий сценарій є неприйнятним. Наприклад, у задачах постачання електроенергії або води від центральних станцій відмова окремого джерела означає повне відключення частини населення від критично важливої інфраструктури.

У такій інтерпретації зростання коефіцієнта нечіткості зменшує вагу критерію відстані та підсилює роль критерію «надійності» системи, що виражається у більш рівномірному розподілі постачання між усіма центрами. При достатньо великих значеннях m оптимальне розбиття прагне до рівномірного забезпечення кожного споживача від усіх постачальників. Така ситуація ілюстрована на *Рисунку 5.4(г)*: при $m=12$ практично вся площа поділена рівномірно між двома центрами, незалежно від відстані. При цьому, можна побачити, що сумарна вартість транспортування товарів збільшується зі збільшенням коефіцієнту нечіткості – це є очікуваним, оскільки товар тепер транспортується не тільки від найближчого постачальника.

Приклад 5.5. Двоетапна задача оптимального нечіткого розбиття з фіксованими центрами підмножин і фіксованими центрами другого етапу. Вхідні дані: три центри першого етапу з координатами (0.25; 0.25), (0.25; 0.75), (0.5; 0.9); два

центри другого етапу з координатами $(0.2; 0.4)$, $(0.8; 0.4)$ та рівними частками попиту 0.5 . Необхідно знайти оптимальне розбиття одиничного квадрата на три потенційно нечіткі множини та оптимальні обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів.

Дана задача була розв'язана у трьох різних метриках просторів L^p : Мангеттенській ($p=1$), звичайній Евклідовій ($p=2$) та метриці шахової дошки ($p=\infty$).

Результати: при $p=1$ цільовий функціонал дорівнює 1.0493524 , при $p=2$ цільовий функціонал дорівнює 0.8044038 , при $p=\infty$ цільовий функціонал дорівнює 0.703357 .

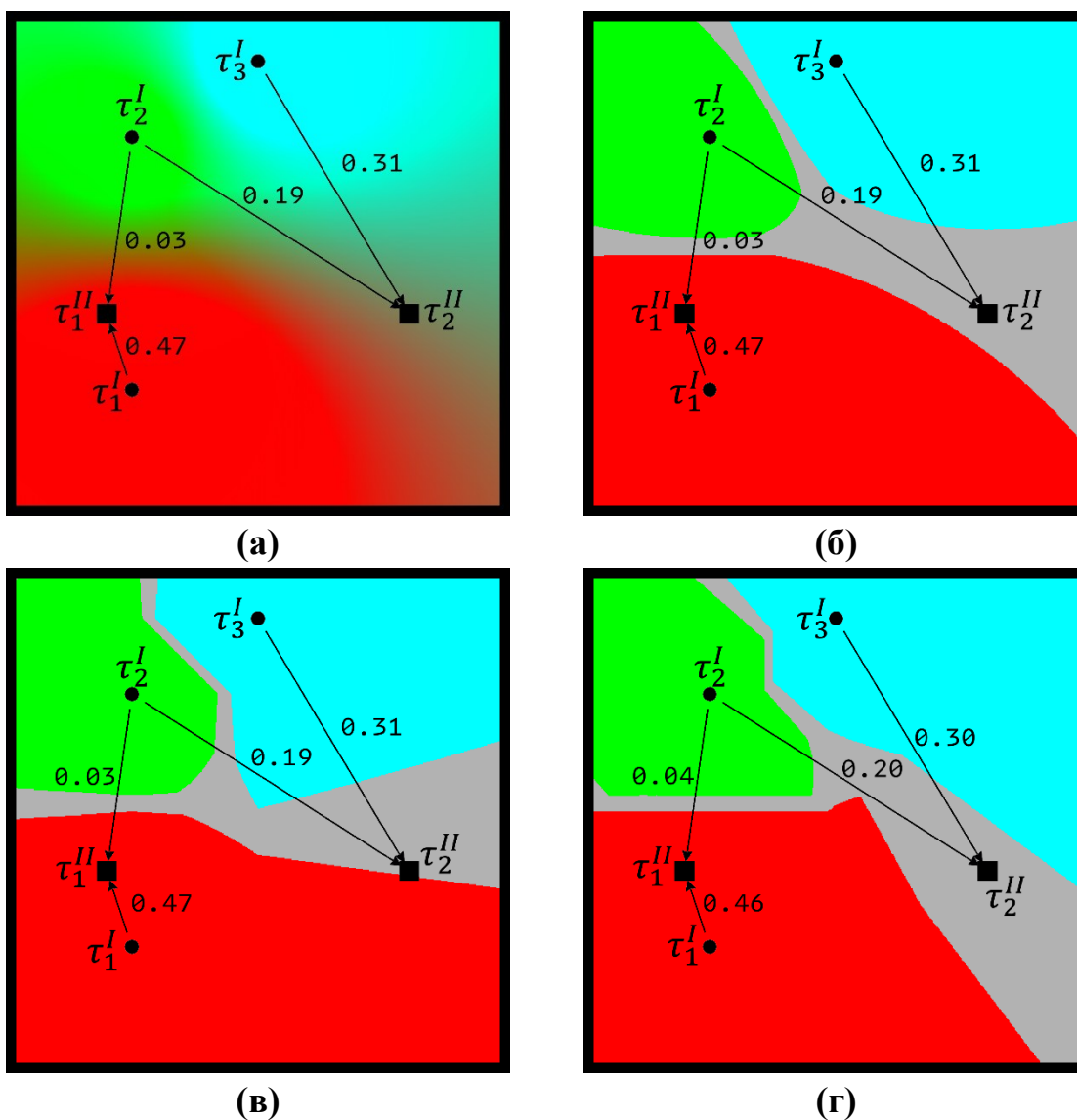


Рисунок 5.5. Оптимальний розв'язок до Прикладу 5.5
(а) $p=2$; (б) $p=2, CH=0.6$; (в) $p=1, CH=0.6$ (г) $p=\infty, CH=0.6$

Аналіз: на рисунках можна побачити, як змінюється оптимальне розбиття в залежності від метрики простору. Даний приклад демонструє, що запропонований метод не прив'язаний до конкретної метрики простору і легко може бути застосований до різних метрик. В усіх трьох випадках оптимальне розбиття та переміщення ресурсів вийшли різними, але схожими.

5.4 Висновки до розділу

У розділі побудовано математичну модель, розроблено метод розв'язку та сформульовано алгоритм для розв'язання двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі оптимального нечіткого розміщення-розбиття з фіксованими координатами центрів транспортування обох етапів. Запропонований алгоритм базується на існуючих методах розв'язку нескінченновимірних задач оптимального нечіткого розбиття множин, методах недиференційовної оптимізації та лінійної оптимізації, таких як r -алгоритм Шора для недиференційовної оптимізації та метод потенціалів для розв'язання класичної дискретної транспортної задачі.

Сформульований алгоритм розв'язку був реалізований програмно мовою C++ із використанням платформи паралельних обчислень OpenCL та графічної платформи OpenGL. Програмний продукт підтримує всі основні середовища запуску програм, оптимально використовує наявні обчислювальні потужності, при можливості розпаралелює обчислення та переносить їх на відеокарту. З точки зору зручності користування, програмна реалізація дозволяє налаштовувати вхідні умови задачі, будує та виводить оптимальні розв'язки, з високою точністю розраховує цільовий та двоїстий функціонали задачі, візуалізує проміжні та кінцеві розв'язки, має багато налаштувань візуалізації оптимального розміщення-розбиття та дозволяє зберігати зображення розбиття. Це робить аналіз прикладів швидким та зручним.

Для демонстрації роботи алгоритму, було виконано розв'язання та аналіз модельних задач. Модельні задачі були підібрані таким чином, щоб дати всебічний огляд можливих нюансів. Показано також, що відповідна двоетапна задача чіткого розбиття є окремим (виродженим) випадком двоетапної задачі нечіткого розбиття за умови коефіцієнта нечіткості, що дорівнює одиниці. Показано вплив коефіцієнту

нечіткості на оптимальне розбиття та надано прикладну інтерпретацію коефіцієнта нечіткості, пов'язану з надійністю вихідної системи.

Розв'язання двоетапної транспортної задачі з нечітким розбиттям носить практичний характер та показує потужність теорії оптимального розбиття множин. Створені методичні та програмні напрацювання не тільки дозволяють розв'язувати окремий вид двоетапних транспортних задач, але й послугують підґрунтям для подальшого розв'язання ще більш складних варіацій транспортних задач, включаючи, але не обмежуюсь, задачу з оптимальним розміщенням центрів першого етапу, та задачу з довільною кількістю етапів транспортування.

Основні результати розділу базуються на публікації автора [2].

Розділ 6. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ

6.1 Опис програмної реалізації алгоритму та програмних модулів

На основі розроблених узагальнених числових алгоритмів був створений комплексний програмний продукт, що включає у себе ряд програм, які дозволяють розв'язувати відповідні двоетапні задачі оптимального розміщення-розбиття. Програмна реалізація алгоритму розв'язку написана мовою програмування C++ з використанням можливостей стандарту C++20. Для прискорення тих обчислень, які можна виконати паралельно, таких як побудова оптимального розбиття при фіксованих координатах центрів, частину алгоритму було реалізовано за допомогою програмної платформи OpenCL. Ця платформа дозволяє перенести обчислення з центрального процесора на графічний процесор, який надає значне прискорення при розрахунках великих обсягів незалежних обчислень, що виконуються за одним алгоритмом. Для візуалізації розв'язку було використано графічну платформу OpenGL. Програма отримує початкові умови задачі з текстового файлу формату JSON, який зручно редагувати людьському користувачу. Щоб забезпечити можливість розрахунків підвищеної точності, окрім вбудованих числових типів з плаваючою комою розміром 32 та 64 біти, у програму була додана підтримка числових типів з плаваючою комою розміром 128 та 256 біт за допомогою бібліотеки Boost.Multiprecision. Вищезазначені технології були обрані таким чином, щоб результуюча програмна реалізація була ефективною та гнучкою за швидкістю та точністю обчислень, мала зручний графічний інтерфейс для кінцевого користувача, підтримувала якомога більше платформ виконання, таких як операційні системи та графічні процесори, та була побудована на технологіях з відкритим кодом та дозвільною ліцензією вільного програмного забезпечення.

Примітка щодо обмежень програмної реалізації: як вже було згадано у *Задачі 5.3*, відшукування оптимальних $\mu(\cdot)$ у аналітичному вигляді можливе тільки у випадку парних натуральних значень коефіцієнту нечіткості m , оскільки це пов'язано з операцією взяття кореню $(m-1)$ -го степеня, яка при непарних або нецілих значеннях m невизначена для від'ємних чисел. У таких випадках розв'язок рівняння

не завжди існує у реальних числах, і аналітичний розв'язок стає неможливим, а числове розв'язання стає нетривіальним. Тому для програмної демонстрації роботи алгоритму обмежимося парними натуральними значеннями m , яких буде цілком достатньо для демонстрації усіх нюансів роботи алгоритму.

Окрім використання можливостей стандартної бібліотеки, що надаються у стандарті C++20, наступні програмні бібліотеки були використані для побудови обчислювальної та графічної частин програми:

- Boost.JSON – бібліотека для роботи з файлами у форматі JSON, який використовується для задання початкових умов задач OPM.
- Boost.ProgramOptions – бібліотека для роботи з аргументами командної строки.
- Google Benchmark – бібліотека для виконання часових вимірювань для оцінки швидкодії окремих частин програми.
- Google Test – бібліотека для написання тестів для перевірки коректності роботи різних частин та алгоритмів програми.
- fmt – бібліотека для зручного форматування строк.
- spdlog – бібліотека для виведення інформації різного рівня детальності у термінал.
- glm – бібліотека для роботи з векторами та матрицями невеликої розмірності, що використовуються для виведення графічного зображення розбиття.
- opengl – бібліотека, що дозволяє користуватися можливостями платформи OpenGL для паралельних обчислень на графічному процесорі.
- GLFW – бібліотека, що дозволяє створювати вікна графічного інтерфейсу та користуватися можливостями графічної платформи OpenGL.
- ImGUI – бібліотека для створення графічного інтерфейсу користувача.
- Eigen – бібліотека, що дозволяє працювати з векторами та матрицями великої розмірності, та ефективно проводити операції множення векторів та матриць.
- GLAD – бібліотека, що дозволяє використовувати програмний інтерфейс графічної платформи OpenGL.

- `rapidcsv` – бібліотека для завантаження сітки неоднорідної щільності постачання з файлу з CSV таблиць.
- `lodepng` – бібліотека, що дозволяє зберігати створені зображення оптимальних розбиттів у форматі PNG та додавати інформацію про початкові умови задачі у метаянформацію файлу зображення у форматі EXIF.

Програмну реалізацію для розв’язання задач ОРМ, що розглядаються у роботі, можна поділити на дві частини: математично-обчислювальна частина, та графічна частина, що будує графічне зображення розбиття та інтерфейс користувача.

Обчислювальна частина програмної реалізації складається з наступних модулів:

- Модуль інтегрування по площині за допомогою числового методу Гауса-Лежандра. Цей числовий метод інтегрування був обраний, оскільки він дозволяє гнучко налаштовувати точність інтегрування за допомогою зміни алгебраїчного порядку точності. Цей модуль також включає в себе підмодуль розрахунку коренів поліномів Лежандра, які використовуються у зазначеному методі числового інтегрування.
- Модуль побудови опорного плану дискретної транспортної задачі за допомогою методу апроксимації Фогеля. Даний метод був обраний, оскільки він дозволяє отримати більш оптимальні базові розв’язки транспортної задачі, порівняно з іншими класичними методами (метод північно-західного кута, метод найменшої вартості).
- Модуль пошуку оптимального розв’язку дискретної збалансованої транспортної задачі за допомогою методу потенціалів.
- Модуль, який реалізовує оптимізаційний субградієнтний r -алгоритм Шора. Детальний опис варіанту r -алгоритму, що використовується у роботі, наведено у Додатку А.
- Модуль, який розраховує значення градієнту двоетапної задачі у вузлах сітки.
- Модуль, який розраховує значення цільового функціоналу та функціоналу транспортування.

- Модуль, який розраховує оптимальне розбиття за наданими координатами центрів першого етапу та обчислює оцінку отриманого розбиття.
- Модуль, який реалізовує розрахунки функцій вартості та їх градієнтів.
- Модуль, який поєднує усі вищезазначені модулі і реалізовує ітераційний розв'язок двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі оптимального розміщення-розбиття з оптимальним розміщенням центрів першого етапу.

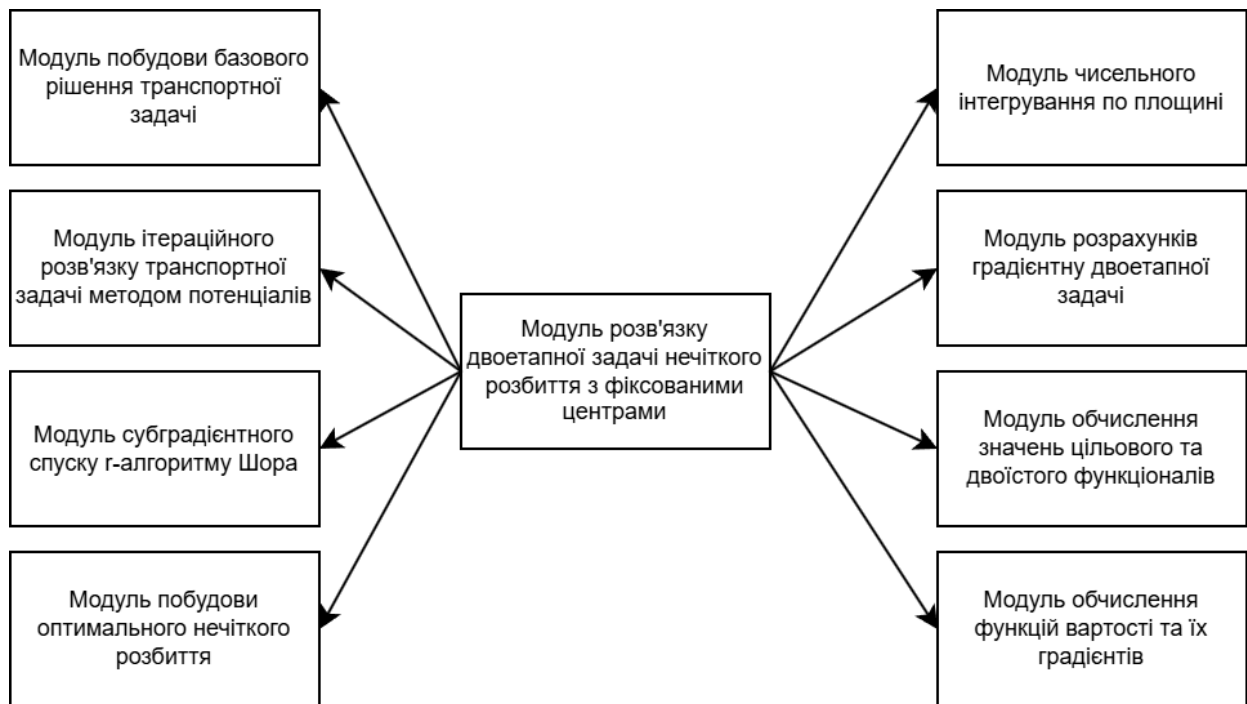


Рисунок 6.1 Структура модулів обчислювальної частини програми

6.2 Опис інтерфейсу програми та інструкція користувача

Для розв'язку кожної задачі ОРМ, що розглядається у даній роботі, було створено окрему програму, при цьому усі програми використовують спільні базові програмні модулі та мають однаковий інтерфейс. Програму можна запустити як з консолі, так і звичайним подвійним натисканням миші. Запуск програми з консолі дозволяє передати програмі додаткові параметри через аргументи командної строки, що будуть впливати на деталі її роботи.

Програма підтримує наступні аргументи командної строки:

- **--help, -h** – вивести інструкцію користувача у термінал.
- **--verbose, -v** – ввімкнути максимальний рівень детальності інформації.
- **--config, -c** – задати шлях до файла з описом початкових умов задачі ОРМ.

- **--no-gui** – вимкнути графічний віконний режим. Програма буде виконуватись винятково з виводом інформації у термінал, вікно з графічним інтерфейсом не буде показано. Після розв’язання задачі, програма виведе та збереже результати і завершить роботу. Цей режим може використовуватись, коли необхідно провести розв’язки цілого ряду задач у автоматичному режимі, без участі людського управління.
- **--precision, -p** – задати точність, з якою будуть виконуватись розрахунки. Програма підтримує наступні аргументи для обрання точності розрахунків: **float32, float64, float128, float256**, що дозволяють обрати для обчислень відповідно 32-, 64-, 128- та 256-бітні типи числових даних з плаваючою комою. За замовчуванням програма використовує розрахунки з 32-бітною точністю. Оскільки розрахунки для 32- та 64-бітної точності підтримуються сучасними комп’ютерами на апаратному рівні, то швидкість розв’язання задач з такою точністю є високою і обчислення за можливості виконуються на графічному процесорі. І хоча обчислення з 128- та 256- бітною точністю надає надзвичайно високий рівень точності результатів, але даний вид обчислень не підтримується на апаратному рівні, не може бути перенесений на графічний процесор для прискорення, і вимагає великого часу. Тому розрахунки з підвищеною точністю рекомендовано проводити тільки у окремих випадках, коли це дійсно необхідно.
- **--compute-backend, -b** – опція, яка визначає підсистему проведення розрахунків.

Запуск програми через інтерфейс командного рядка дозволяє задати усі значення підтримуваних аргументів, але не є основним способом роботи з програмою. Запуск програми через подвійне натискання миші є основним способом роботи, у такому випадку програма за замовчуванням використовує оптимальні значення для параметрів, що можуть бути задані через аргументи командного рядка. Після запуску програми через графічний інтерфейс за допомогою подвійного натискання відразу відкривається діалогове вікно для вибору файлу з початковими

умовами задачі. Після цього запускається процес розв'язання задачі і подальший досвід користування програмою є однаковим для обох способів запуску програми.

Інтерфейс програми складається з двох вікон: консольне вікно текстового виводу та вікно графічного інтерфейсу користувача. У консольному вікні текстового виводу користувач може спостерігати за покроковим виконанням алгоритму розв'язання задачі, отримувати більш детальну інформацію про хід розв'язання, отримувати числові результати у форматі, зручному для копіювання.

Вікно з графічним інтерфейсом користувача містить наступні інформаційні елементи та елементи управління:

- 1) Заголовок вікна програми – містить назву розв'язуваної задачі ОРМ та шлях до файлу конфігурації з початковими умовами задачі.
- 2) Перемикання між кольоровим на чорно-білим розбиттям.
- 3) Ввімкнути/вимкнути показ чорних границь між підмножинами розбиття.
- 4) Ввімкнути/вимкнути показ стрілок напрямків транспортування.
- 5) Ввімкнути/вимкнути підписи центрів першого та другого етапів.
- 6) Ввімкнути/вимкнути показ підписів обсягів транспортування.
- 7) Перемикання між автоматичним розміщенням надписів та ручним.
- 8) Ввімкнути інформаційне вікно про точку простору (елемент номер 20).
- 9) Кнопка збереження візуалізації розбиття у файл зображення у файлову систему комп'ютера користувача.
- 10) Регулювання товщин границь між підмножинами розбиття.
- 11) Регулювання товщини стрілок напрямку транспортування.
- 12) Регулювання розміру шрифту підписів.
- 13) Обрання палітри кольорів візуалізації неоднорідної щільності.
- 14) Регулювання прозорості кольорів щільності для одночасного перегляду розбиття і мапи щільності.
- 15) Кількість виконаних ітерацій алгоритму Шора та номер ітерації алгоритму, що показана на поточний момент (перемикання між ітераціями клавішами вправо-вліво).
- 16) Значення цільового функціонала задачі на поточній ітерації алгоритму.

- 17) Місце розташування та підпис центру першого етапу.
- 18) Підпис обсягу товару та напрямок транспортування.
- 19) Місце розташування та підпис центру другого етапу.
- 20) Інформація про точку простору у місці, куди наведений курсор – координати точки простору та щільність у цій точці.

На *Рисунку 6.2* зображено вікно графічної частини програми з відповідними номерами анотацій.

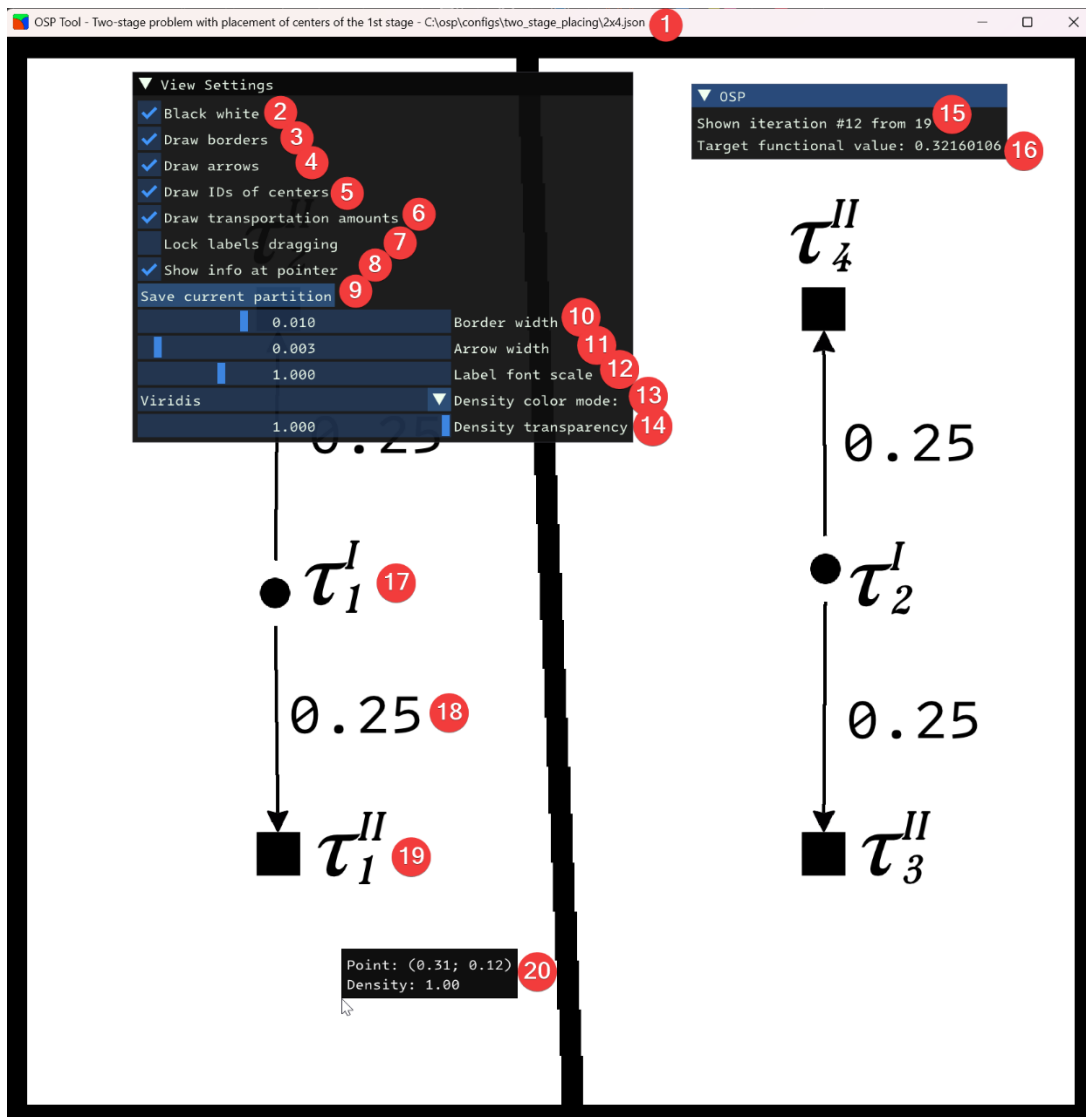


Рисунок 6.2 Інтерфейс користувача графічної частини програми

Графічна частина програми підтримує управління з клавіатури:

- Q – приховати/показати графічний інтерфейс з елементами управління.
- W – приховати/показати стрілки з обсягами перевезень між центрами першого та другого етапів.

- E – приховати/показати підписи центрів.

```

C:\Users\Dan\source\repos\lo x + v - □ x
[2026-03-19 23:07:28.364] [info] From center2 #5 to center1 #1 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.364] [info] From center2 #5 to center1 #2 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.364] [info] From center2 #5 to center1 #3 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.364] [info] From center2 #5 to center1 #4 - 0.125
[2026-03-19 23:07:28.364] [info] From center2 #6 to center1 #1 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.365] [info] From center2 #6 to center1 #2 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.365] [info] From center2 #6 to center1 #3 - 0.125
[2026-03-19 23:07:28.365] [info] From center2 #6 to center1 #4 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.365] [info] From center2 #7 to center1 #1 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.365] [info] From center2 #7 to center1 #2 - 0.125
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #7 to center1 #3 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #7 to center1 #4 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #8 to center1 #1 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #8 to center1 #2 - 0.125
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #8 to center1 #3 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.366] [info] From center2 #8 to center1 #4 - 0.000
[2026-03-19 23:07:28.367] [info] Transportation amounts in matrix form:
0.12  0.00  0.00  0.00
0.12  0.00  0.00  0.00
0.00  0.00  0.00  0.12
0.00  0.00  0.12  0.00
0.00  0.00  0.00  0.12
0.00  0.00  0.12  0.00
0.00  0.12  0.00  0.00
0.00  0.12  0.00  0.00
[2026-03-19 23:07:28.397] [info] Time spent on solving: 06.34
[2026-03-19 23:07:28.397] [info] Finished solving the problem.

```

Рисунок 6.3 Вигляд інтерфейсу консольної частини програми

На *Рисунку 6.3* зображено вікно консольної частини програми. У консольній частині програми можна детально прослідити хід розв’язання, побачити проміжні та кінцеві числові дані, що обчислюються під час розв’язання.

6.3 Опис структури файлів задання початкових умов задач.

Для передачі умов задачі до програми, користувач записує початкові умови задачі до файлу у форматі JSON. Правильно оформлений файл з початковими умовами задачі має містити наступні поля у кореневому JSON елементі:

- "metric": "euclidean" – метрика простору задачі. Допустимими значеннями є “euclidean”, “manhattan”, “chebyshev”.
- "bottom_left_bound": [0.0, 0.0] – ліва нижня границя множини Ω , що є обмеженою частиною простору E_2 .
- "top_right_bound": [1.0, 1.0] – права верхня границя множини Ω .
- "partition_grid_resolution": [512, 512] – роздільна здатність сітки дискретизації множини Ω . Чим більша сітка, тим більш точним є розв’язок задачі і кінцеве зображення розбиття, але тим більше обчислень необхідно виконати..
- "centers_first_level": [] – масив елементів, що описують фіксовані центри першого етапу (центри підмножин). Використовується тільки у задачах з

заданими центрами підмножин. Кожен елемент масиву задається наступним чином:

- "position": [0.2, 0.5] – координати центру підмножини.
- "additive_coeff": 0.0 – адитивний коефіцієнт.
- "multiplicative_coeff": 1.0 – мультиплікативний коефіцієнт.
- "centers_second_level": [] – масив елементів, що описують центри другого етапу (кінцеві центри). Кожен елемент масиву задається наступним чином:
 - "position": [0.2, 0.5] – координати центру.
 - "capacity": 0.5 – наявний обсяг товарів у даному центрі у процентному відношенні щодо суми усіх товарів у всіх центрах другого етапу. Сума значень цього поля усіх центрів другого етапу повинна дорівнювати 1.0.
- "gauss_legendre_rule_order": 32 – порядок інтегрування по площині за допомогою метода Гауса-Лежандра. Більшим значенням відповідає більш точний розв'язок.
- "fuzzy_coeff": 4 – коефіцієнт нечіткості розбиття m . Задається тільки для задачі нечіткого розбиття.
- "gradient_phi_step_const": 1 – константа φ для побудови нечіткого розбиття. Задається тільки для задачі нечіткого розбиття.
- "gradient_phi_eps": 0.01 – граничне значення для умови закінчення ітерацій побудови нечіткого розбиття. Задається тільки для задачі нечіткого розбиття.
- "gradient_phi_max_iterations": 50 – максимальна кількість ітерацій під час побудови нечіткого розбиття. Задається тільки для задачі нечіткого розбиття.
- "gradient_descent_settings": {} – мапа значень, що відносяться до налаштувань градієнтного спуску за допомогою r -алгоритму Шора (детальний опис алгоритму Шора наведений у Додатку А). Має містити наступні налаштування:
 - "type": "shor" – тип градієнтного спуску, який використовується для розв'язання.
 - "max_iterations_number": 100 – максимальна кількість ітерацій слугує однією з умов зупинки алгоритму. Більшим значенням може відповідати більш точний і довший розв'язок.

- "iterations_number_to_increase_step": 4 – кількість ітерацій перед збільшенням
- "gradient_magnitude_threshold": 0.0001 – граничне значення довжини вектора градієнта функції, слугує однією з умов зупинки алгоритму. Меншим значенням відповідає більш точний і довший розв'язок.
- "solutions_diff_threshold": 0.0001 – граничне значення різниці між двома послідовними розв'язками, слугує однією з умов зупинки алгоритму. Меншим значенням відповідає більш точний і довший розв'язок.
- "initial_step_size": 0.01 – початковий крок алгоритму.
- "space_stretching_coeff": 2.0 – коефіцієнт розтягу простору.
- "step_increase_multiplier": 1.1 – коефіцієнт збільшення кроку.
- "step_decrease_multiplier": 0.95 – коефіцієнт зменшення кроку.

6.4 Висновки до розділу

Створений програмний продукт є сучасною та гнучкою реалізацією запропонованих у розділах 2, 3, 4 та 5 узагальнених алгоритмів, що ефективно використовує наявні обчислювальні потужності комп'ютера. Активне використання паралельних обчислень дозволяє виконувати великі обсяги розрахунків для швидкої побудови оптимального розбиття множини з великою роздільною здатністю сітки дискретизації множини розбиття. Програмний продукт підтримує задання початкових умов задачі у зручному для користувача вигляді, і дозволяє налаштовувати велику кількість параметрів, включно з роздільною здатністю сітки дискретизації, початковими положеннями центрів підмножин для їх розміщення, параметрами виконання r -алгоритму Шора та іншими.

Окрім того, модульність програмного продукту не тільки дозволяє, але й заохочує використовувати вже існуючі програмні компоненти для розв'язання інших задач подібного роду під час подальших досліджень.

Основні результати розділу опубліковані в [3,4].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота містить нові актуальні результати обґрунтування теоретичних методів та розробки числових алгоритмів розв'язання задач для чотирьох видів двоетапних неперервно-дискретних транспортних задач, що зводяться до задач теорії оптимального розбиття множин.

Підбиваючи підсумки виконаних досліджень, можна виділити наступні досягнення та зробити наступні висновки:

1. Проведено аналіз поточного стану теорії ОРМ, публікацій та досліджень за останні роки. На основі виконаного оглядового дослідження були окреслені перспективні напрями подальшого розвитку теорії ОРМ, а саме, що математичний апарат теорії оптимального розбиття множин може бути розширений шляхом більш детального вивчення двоетапних транспортних задач, а також за рахунок введення елементів нечіткості у вхідні або вихідні дані у відповідних математичних моделях.
2. Подальшого розвитку дістав метод розв'язання двоетапної чіткої неперервно-дискретної транспортної задачі з фіксованими центрами підмножин.
3. Подальшого розвитку дістав метод розв'язання двоетапної чіткої неперервно-дискретної транспортної задачі з оптимальним розміщенням центрів підмножин.
4. У модельних задачах двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі введено коефіцієнт здешевлення ціни транспортування на другому етапі; показано, що введення даного коефіцієнту впливає на оптимальне положення центрів підмножин і моделює реальні економічні процеси транспортування.
5. Розроблено і теоретично обґрунтовано метод розв'язання нечіткої двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі з нейронечіткою ідентифікацією нечіткої функції щільності.
6. Розроблено і теоретично обґрунтовано метод розв'язання нечіткої двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі з побудовою оптимального нечіткого розбиття.

7. Введено коефіцієнт нечіткості розбиття у математичну модель двоетапної неперервно-дискретної транспортної задачі; показано, що таке формулювання узагальнює чітку постанову задачі на нечіткий випадок і дозволяє отримувати як чіткі, так і нечіткі розбиття шляхом регулювання коефіцієнта нечіткості.
8. Розроблено програмний продукт на основі запропонованих узагальнених алгоритмів для розв'язання кожного з чотирьох видів задач, що розглядаються у роботі.
9. Розв'язано модельні задачі для кожного типу розглянутих транспортних задач, надано числові та графічні результати, що дозволило акцентувати увагу на нюансах роботи алгоритмів та їх можливих прикладних застосуваннях.
10. Проаналізовано розв'язки модельних задач, надано можливу прикладну інтерпретацію результатів.
11. Показано, що запропоновані математичні моделі двоетапних нечітких транспортних задач більш точно моделюють певні транспортні процеси порівняно з одноетапними та чіткими моделями, та можуть застосовуватись для розв'язання відповідних прикладних задач зі сфери логістики, економіки, міського планування.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. M., Lebediev D. M., & Filat, O. A. (2023). Software for solving the two-stage location-allocation problems. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 23, 94–100. <https://doi.org/10.15421/322310>
2. Bulat, A., Kiseleva, E., Yakovlev, S., Prytomanova, O., & Lebediev, D. (2024). Solving the Problem of Fuzzy Partition-Distribution with Determination of the Location of Subset Centers. *Computation*, 12(10), 199. <https://doi.org/10.3390/computation12100199>
3. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2024). Solving continuous-discrete two-stage logistic problem of optimal partitioning-allocation. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 24, 99–112. <https://doi.org/10.15421/322410>
4. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Solving two-stage logistic problem of optimal location-allocation. In *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer Nature Switzerland, 205–224. https://doi.org/10.1007/978-3-031-97529-5_13
5. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Оптимальне розбиття множин і неперервно-дискретні транспортні задачі: огляд теоретичних і прикладних підходів. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 25, 86–103. <https://doi.org/10.15421/322508>
6. Кісельова, О. М., Притоманова, О. М., Лебедев, Д. М., & Балеєко, Н. В. (2021). Застосування теорії оптимального розбиття до побудови нечітких діаграм Вороного. (МПЗІС-2021): *Тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції*, с. 87. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2021/12/mpzis-2021.pdf#page=87>
7. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2023). Object-oriented approach to programmable solution of two-stage location-allocation problems. *Mathematical support and software for intelligent systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International scientific and practical conference*, p. 18. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf#page=18>
8. Кісельова, О. М., Притоманова, О. М., & Лебедев, Д. М. (2025). Метод розв'язання нечіткої двоетапної задачі оптимального розбиття множин. (МПЗІС-2025): *Тези доповідей XXIII Міжнародної науково-практичної конференції*, с. 167. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2025/11/%D0%9C%D0%9F%D0%97%D0%86%D0%A1-2025.pdf#page=168>
9. Biggs, N. L., Lloyd, E. K., & Wilson, R. J. (1998). *Graph Theory 1736-1936*. Oxford, England: Clarendon Press.
10. Menger, K. (1932). Das botenproblem. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*. Leipzig: Teubner. 2(4), 11-12.

11. Monge, G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *De l'Imprimerie Royale*.
12. Kantorovich, L. V. (2006). On the Translocation of Masses. *Journal of Mathematical Sciences*, 133(4), 1381–1382. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0049-2>
13. Kantorovich, L. V. (2006). On a Problem of Monge. *Journal of Mathematical Sciences*, 133(4), 1383–1383. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0050-9>
14. Ford, L. R., Jr., & Fulkerson, D. R. (1956). Maximal Flow Through a Network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 399–404. <https://doi.org/10.4153/cjm-1956-045-5>
15. Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 6(1), 80–91. <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.80>
16. Drezner, Z., Klamroth, K., Schöbel, A., & Wesolowsky, G. O. (2002). The Weber Problem. In *Facility Location* (pp. 1–36). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56082-8_1
17. Hakimi, S. L. (1964). Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. *Operations Research*, 12(3), 450–459. <https://doi.org/10.1287/opre.12.3.450>
18. Daskin, M. S. (2013). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications, Second Edition*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118537015>
19. Hale, T. S., & Moberg, C. R. (2003). Location Science Research: A Review. *Annals of Operations Research*, 123(1–4), 21–35. <https://doi.org/10.1023/a:1026110926707>
20. Azarmand, Z., & Neishabouri, E. (2009). Location Allocation Problem. In *Contributions to Management Science* (pp. 93–109). Physica-Verlag HD. https://doi.org/10.1007/978-3-7908-2151-2_5
21. Dantzig, G. (1963). *Linear Programming and Extensions*. RAND Corporation. <https://doi.org/10.7249/r366>
22. Кісельова, О.М. (1982). *Математичні методи оптимального розбиття множин та їх застосування*. Дніпро: ДНУ, 108 с.
23. Кісельова, О.М., & Шор, Н.З. (2005) *Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, застосування*. Київ: Наукова думка, 564 с.
24. Кісельова, О.М., Коряшкіна, Л.С. (2013). *Моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин: лінійні, нелінійні, динамічні задачі*. Київ: Наукова думка, 606 с.
25. Кісельова, О.М., Коряшкіна, Л.С. (2015). *Неперервні задачі оптимального розбиття множин та r-алгоритми*. Київ: Наукова думка, 400 с.
26. Кісельова, Є.М., Коряшкіна, Л.С., Ус, С.А. (2015). *Теорія оптимального розбиття множин у задачах розпізнавання образів, аналізу та ідентифікації систем*. Дніпро: НГУ, 270 с.
27. Кісельова, О.М., Притоманова, О.М., Гарт, Л.Л., & Бале́йко, Н.В. (2020). *Нечіткі задачі оптимального розбиття множин: теоретичні основи, алгоритми, застосування*. Дніпро: Ліра, 400 с. ISBN 978-966-981-471-5

28. Кісельова, О.М., Притоманова, О.М., Гарт, Л.Л. (2024). *Теорія оптимального розбиття множин. Методи, алгоритми, застосування*. Дніпро: Ліра, 608 с. ISBN 978-617-8519-06-3
29. Kiseleva, E. M. (2018). The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n Dimensional Euclidean Space. Theory and Application. *Journal of Automation and Information Sciences*, 50(9), 1–24. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i9.10>
30. Shor, N. Z. (1985). Minimization Methods for Non-Differentiable Functions. In *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-82118-9>
31. Shor, N. Z. (1998). Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. In *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6015-6>
32. Кісельова, О.М., & Довгай, П.О. (2008) Про визначення обчислювальної складності одного алгоритму розв'язання неперервних задач оптимального розбиття. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 117–128.
33. Кісельова, О.М., & Дунайчук, М.С. (2007) Обґрунтування методу розв'язання нелінійних задач оптимального розбиття множин із розташуванням центрів підмножин при обмеженнях. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 91–114.
34. Кісельова, О.М., & Дунайчук, М.С. (2008) Про розв'язання неперервної нелінійної задачі оптимального розбиття множин у випадку увігнутої нелінійної частини цільового функціонала. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 129–138
35. Zhiltsova, A. A., & Kiseleva, E. M. (2008). The Necessary Optimality Conditions for Continuous Problems of Set Partitioning in Terms of the Theory of Set Functions. *Journal of Automation and Information Sciences*, 40(12), 14–26. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v40.i12.20>
36. Кісельова, О.М., & Строева, В.О. (2013) Розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 151–166
37. Kiseleva, E. M., & Shor, N. Z. (1985). An algorithm of solution of a multiproduct problem of optimal partitioning with constraints. *Cybernetics*, 21(1), 90–99. <https://doi.org/10.1007/bf01075123>
38. Kiseleva, E., Hart, L., Prytomanova, O., & Zhuravel, S. (2020). Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning. *Matematychni Studii*, 53(1), 109–112. <https://doi.org/10.30970/ms.53.1.109-112>
39. Kiseleva, E. M., Hart, L. L., & Prytomanova, O. M. (2020). Algorithm for Constructing Voronoi Diagrams with Optimal Placement of Generator Points Based

- on Theory of Optimal Set Partitioning. *Journal of Automation and Information Sciences*, 52(3), 1–12. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v52.i3.10>
40. Kiseleva, E. M., & Kadochnikova, Y. E. (2009). Solving a Continuous Single-product Problem of Optimal Partitioning with Additional Conditions. *Journal of Automation and Information Sciences*, 41(7), 48–63. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v41.i7.30>
 41. Kiselyova, E. M., & Dunaichuk, M. S. (2008). Solving a continuous nonlinear problem of optimal set partition with arrangement of subset centers in the case of a convex objective functional. *Cybernetics and Systems Analysis*, 44(2), 261–275. <https://doi.org/10.1007/s10559-008-0026-5>
 42. Kiseleva, O., Prytomanova, O., & Serhieiev, O. (2020). An Algorithm for Solving the Optimal Set Partitioning Problem with Constraints on the Centers Location. In *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)* (pp. 1–5). 2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC). IEEE. <https://doi.org/10.1109/saic51296.2020.9239209>
 43. Kiseleva, E. M., & Prytomanova, O. M. (2020). Fuzzy problem of the optimal set partition with constraints on the subsets centers location. *System Research and Information Technologies*, 0(1), 78–89. <https://doi.org/10.20535/srit.2308-8893.2020.1.07>
 44. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Kuzenkov, O. O. (2025). Software Implementation of an Algorithm for Solving a Dynamic Problem of Optimal Set Partitioning Under Uncertainty. *Science and Transport Progress*, 3(111), 59–67. <https://doi.org/10.15802/stp2025/342252>
 45. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Kuzenkov, O. (2025). On the dynamic problem of optimal set partitioning with fixed centers under uncertainty. *Problems of Control and Informatics*, 70(4), 6–23. <https://doi.org/10.34229/1028-0979-2025-4-1>
 46. Yakovlev, S., Kiseleva, E., Hart, L., Kuzenkov, O., & Zakutnii, D. (2025). On the dynamic problem of optimal set partitioning with fixed centers. *Modern Problems of Modeling*, 28, 190–203. <https://doi.org/10.33842/2313-125x-2025-30-190-203>
 47. Kiseleva, E., & Kuzenkov, O. (2025). On the Dynamic Problem of Optimal Set Partitioning with Determination of Subset Center Coordinates. Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, *Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems*, 65, 33–45. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-65-03>
 48. Kiseleva O.M., Koriashkina L.S. (2013). On Solving and Properties of the Simplest Dynamical Problem of Optimal Set Partition Problem. *Journal of Automation and Information Sciences*, 45(6), 1–12. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v45.i6.10>
 49. Kiseleva O. M., Koriashkina, L. S., & Shevchenko, T. A. (2013). On Dynamical Problem of Optimal Set Partition with Integral Constraints. *Journal of Automation*

- and Information Sciences*, 45(7), 41–53.
<https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v45.i7.50>
50. Kiseleva, E. M., Hart, L. L., Kuzenkov, O. O., & Zakutnii, D. V. (2024). On the implementation of algorithms for solving the simplest dynamic problem of optimal set partitioning. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 66–75.
<https://doi.org/10.15421/322407>
 51. Kiseleva O M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A. (2014). Solving the Dynamic Optimal Set Partitioning Problem with Arrangement of Centers of Subsets. *Cybernetics and Systems Analysis*, 50(6), 842–853. <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9675-8>
 52. Кісельова, О.М., Коряшкіна, Л.С., & Міхальова, А.А. (2015). Неперервна задача багаторазового кульового покриття з обмеженнями та метод її розв'язання. *Системні технології*, 1(96), 165–179.
 53. Kiseleva, E. M., Lozovskaya, L. I., & Timoshenko, E. V. (2009). Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis*, 45(3), 421–437.
<https://doi.org/10.1007/s10559-009-9113-5>
 54. Кісельова, О.М., & Лозовська, Л.І. (2013). Про моделювання неперервних задач багатократного кульового покриття множини. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 174–180.
 55. Кісельова, О. М., Лозовська, Л. І., & Бандоріна, Л. М. (2014). Алгоритм розв'язання однієї неперервної задачі про оптимальне кульове покриття множини кулями заданих радіусів. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 125–132.
 56. Лубенець, Д. Є. (2025). Оптимізація обчислень в алгоритмах мультиплексного розбиття континуальних множин. *Науковий Вісник Ужгородського Університету. Серія: Математика і Інформатика*, 46(1), 195–208.
[https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).195-208](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).195-208)
 57. Zhao, R., Xiao, Y., Luo, R., Yang, R., Zhou, S., & Zhang, S. (2023). Discrete-continuous model for facility location problem with capacity-cost relation constraints. *Computers & Industrial Engineering*, 185, 109661.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109661>
 58. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Hart, L. (2021). Application of optimal set partitioning theory to solving problems of artificial intelligence and pattern recognition. *System Research and Information Technologies*, 4, 91–101.
<https://doi.org/10.20535/srit.2308-8893.2021.4.07>
 59. Kiselova, O. M., Prytomanova, O. M., Dzyuba, S. V., & Padalko, V. G. (2019). Solving a two-step continuous-discrete optimal split-distribution problem with fuzzy parameters. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*.
<https://doi.org/10.15421/321911>

60. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Hart, L. (2020). Solving a Two-stage Continuous-discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with Subsets Centers Placement. *Open Computer Science*, 10(1), 124–136. <https://doi.org/10.1515/comp-2020-0142>
61. Kiseleva O.M., Prytomanova O.M., Us S.A. (2020). Solving a Two-Stage Continuous-Discrete Problem of Optimal Partition-Allocation with a Given Position of the Centers of Subsets. *Cybernetics and Systems Analysis*, 56(1), 1–12. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00215-y>
62. Koriashkina, L. S., Dziuba, S. V., Us, S. A., Stanina, O. D., & Odnovol, M. M. (2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 1, 130–139. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130>
63. Сергеев, О. С., & Ус, С. А. (2024). Дослідження двох підходів до розв'язання двоетапної задачі розміщення-активації. Науковий Вісник Ужгородського Університету. *Серія: Математика і Інформатика*, 45(2), 249–258. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).249-258](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).249-258)
64. Дзюба, С., Коряшкіна, Л., Станіна, О., & Лубенець, Д. (2023). Математичні моделі оптимізаційних задач частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням регіону. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 3, 13–21. <https://doi.org/10.32782/it/2023-3-2>
65. Stetsyuk, P., Khomiak, O., & Liashko, V. (2023). Two-Stage Transportation Problem with Unknown Consumer Demands. NaUKMA Research Papers. *Computer Science*, 5, 92–96. <https://doi.org/10.18523/2617-3808.2022.5.92-96>
66. Bulat, A., Dziuba, S., Minieiev, S., Koriashkina, L., & Us, S. (2020). Solution of the problem to optimize two-stage allocation of the material flows. *Mining of Mineral Deposits*, 14(1), 27–35. <https://doi.org/10.33271/mining14.01.027>
67. Blyuss, B., Koriashkina, L., Us, S., Minieiev, S., & Dziuba, S. (2019). An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises. *E3S Web of Conferences*, 109, 00008. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900008>
68. Us, S. A., Koriashkina, L. S., & Stanina, O. D. (2019). An optimal two-stage allocation of material flows in a transport-logistic system with continuously distributed resource. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 0(1). <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-24>
69. Zelentsov D. , Us S., Koryashkina L., Stanina O. (2017). Solving Continual Two-Stage Problems of Optimal Partition of Sets. *International Journal of Research Studies in Computer Science and Engineering*, 4(4). <https://doi.org/10.20431/2349-4859.0404009>
70. Koriashkina, L. S., Lubenets, D. E., Minieiev, O. S., & Sazonova, M. S. (2025). Mathematical foundations of methods for solving continuous problems of optimal multiplex partitioning of sets. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (2), 68–83. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2025-2-6>
71. Blyuss, B., Dziuba, S., Koriashkina, L., & Lubenets, D. (2025). Improvement of mathematical models of two-stage resource allocation processes in emergency

- logistics systems. *Geo-Technical Mechanics*, 174, 88–104. <https://doi.org/10.15407/geotm2025.174.088>
72. Коряшкіна, Л., & Лубенець, Д. (2023). Математичні моделі та методи мультиплексного розбиття і багатократного покриття множин для задач розміщення-розподілу. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 4, 20–31. <https://doi.org/10.32782/it/2023-4-3>
73. Коряшкіна, Л., Сазонова, М., & Одновол, М. (2023). Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів із перекриттям зон обслуговування. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 12–25. <https://doi.org/10.32782/it/2023-2-2>
74. Marianov, V., & Eiselt, H. A. (2024). Fifty Years of Location Theory - A Selective Review. *European Journal of Operational Research*, 318(3), 701–718. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.01.036>
75. Drezner, Z., & Eiselt, H. A. (2024). Competitive location models: A review. *European Journal of Operational Research*, 316(1), 5–18. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.10.030>
76. Dieci, L., & Omarov, D. (2023). Techniques for continuous optimal transport problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 146, 176–191. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.06.036>
77. Drezner, Z. (2022). Continuous Facility Location Problems. In *The Palgrave Handbook of Operations Research* (pp. 269–306). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-96935-6_9
78. Padalko, V. G. (2022). Структура та основні напрями розвитку математичної теорії оптимального розбиття множин. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 21, 161–180. <https://doi.org/10.15421/322117>
79. Kiseleva, E. M., & Koriashkina, L. S. (2015). Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(3), 325–335. <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9725-x>
80. Kiseleva, E. M., Koriashkina, L. S. (2015). Theory of Continuous Optimal set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. II. Algorithms for Constructing Voronoi Diagrams Based on the Theory of Optimal set Partitioning. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(4), 489–499. <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9740-y>
81. Bollobás, B. (1973). The Optimal Arrangement of Producers. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-6(4), 605–613. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-6.4.605>
82. Brimberg, J., Hansen, P., Mladenovic, N., Salhi, S. (2008). A Survey of Solution Methods for the Continuous Location-Allocation Problem. *International Journal of Operation Research*, 5(1), 1–12.
83. Laporte, G., Nickel, S., & Saldanha da Gama, F. (Eds.). (2019). *Location Science*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-32177-2>

84. Mallozzi, L., & Napoli, A. P. di. (2015). Optimal transport and a bilevel location-allocation problem. *Journal of Global Optimization*, 67(1–2), 207–221. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0347-7>
85. Wolf, G. W. (2022). Solving location-allocation problems with professional optimization software. *Transactions in GIS*, 26(7), 2741–2775. <https://doi.org/10.1111/tgis.12997>
86. Koriashkina, L. S., & Belyaev, A. R. (2019). Determination of optimal number and places of location of charging station for electric vehicles inside the city. *Computer Modeling: Analysis, Control, Optimization*, 5(1), 23–29. <https://doi.org/10.32434/2521-6406-2019-5-1-23-29>
87. Corley, H.W., Roberts, S.D. (1972). A partitioning problem with applications in regional design. *Operations Research*. 20(5), 1010–1019.
88. Corley, Jr., H. W., & Roberts, S. D. (1972). Duality Relationships for a Partitioning Problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 23(4), 490–494. <https://doi.org/10.1137/0123052>
89. Chen, R., & Handler, G. Y. (1987). Relaxation method for the solution of the minimax location-allocation problem in Euclidean space. *Naval Research Logistics*, 34(6), 775–788. [https://doi.org/10.1002/1520-6750\(198712\)34:6<775::aid-nav3220340603>3.0.co;2-n](https://doi.org/10.1002/1520-6750(198712)34:6<775::aid-nav3220340603>3.0.co;2-n)
90. Friedman, M. (1976). On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems. *Computers & Operations Research*, 3(4), 283–294. [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(76\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0305-0548(76)90011-3)
91. Juel, H., Love, R. (1988). A localization property for facility-location problems with arbitrary norms. *Nav. Res. Log.*, 35(2), 203–207.
92. Francis, R. L. (1967). Sufficient Conditions for Some Optimum-Property Facility Designs. *Operations Research*, 15(3), 448–466. <https://doi.org/10.1287/opre.15.3.448>
93. Alexander, M. N., Ferebee, J. B., Grim, P. J., Lebow, L. S., Senturia, S. D., & Singleterry, A. M. (1958). Effect of Population Mobility on the Location of Communal Shelters. *Operations Research*, 6(2), 207–231. <https://doi.org/10.1287/opre.6.2.207>
94. Кісельова, О.М., & Дунайчук, М.С. (2005). Розв'язання нескінченновимірної задачі зрошення методами оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 113–122.
95. Blyuss, O., Koriashkina, L., Kiseleva, E., Molchanov, R. (2015). Optimal Placement of Irradiation Sources in the Planning of Radiotherapy: Mathematical Models and Methods of Solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 1–8. <https://doi.org/10.1155/2015/142987>
96. Censor Y. (1999). Mathematical Aspects of Radiation Therapy Treatment Planning: Continuous Inversion Versus Full Discretization and Optimization Versus Feasibility. *Computational Radiology and Imaging: Therapy and Diagnosis. The IMA Volumes in*

- Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 110, 101–112.
97. Censor, Y., Unkelbach, J. (2012). From analytic inversion to contemporary IMRT optimization: Radiation therapy planning revisited from a mathematical perspective. *Physica Medica. European Journal of Medical Physics*, 28, 109–118.
 98. Hansen E., Roach M. (2010). *Handbook of Evidence-Based Radiation Oncology. 2nd ed.* New York: Springer, 786 p.
 99. Klepper L.Y. (2003). Formation of Optimum Dose Fields in Contact Radiation Therapy of Malignant Tumors. *Biomedical Engineering*, 37(2), 111–117.
 100. Raphael, C. (1992). Mathematical modelling of objectives in radiation therapy treatment planning. *Physics in Medicine and Biology*, 37(6), 1293–1311. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/37/6/007>
 101. Bulat, A. F., Kiseleva, O. M., Hart, L. L., & Prytomanova, O. M. (2022). Mathematical models of two-stage problems of optimal location-partitioning under uncertainty. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*. <https://doi.org/10.15421/322202>
 102. Кісельова, О.М., Фірсова, Т.О., Сидорук, Ю.О. (2016). Метод розв'язання задачі ідентифікації відбитків пальців на основі теорії оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 79–90.
 103. Кісельова, О.М., Строева, В.О. (2017). Дослідження моделі оптимального розподілу рекреаційних ресурсів в умовах сучасної та перспективної структури рекреаційних потреб. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 17, 96–102.
 104. Кісельова, О.М., Строева, В.О. (2012). Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання (Network sharing) декількома операторами мобільного зв'язку. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 143–154.
 105. Кісельова, О.М., Строева, В.О. (2015). Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання з визначенням екологічно значимих зон. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 99–103.
 106. Boschetti, M. A., Mingozzi, A., & Ricciardelli, S. (2008). A dual ascent procedure for the set partitioning problem. *Discrete Optimization*, 5(4), 735–747. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2008.06.001>
 107. Yakovlev, S. V. (2019). Formalizing Spatial Configuration Optimization Problems with the Use of a Special Function Class. *Cybernetics and Systems Analysis*, 55(4), 581–589. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00167-y>
 108. Yakovlev, S. V. (2017). The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 53(5), 725–731. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9974-y>

109. Jandl, H., & Wieder, K. (1988). A continuous set covering problem as a quasidifferentiable optimization problem. *Optimization*, 19(6), 781–802. <https://doi.org/10.1080/02331938808843392>
110. Кісельова, О.М., Лебідь, О.Ю. (2003). Побудова моделі прогнозу на основі нейронечіткої технології з застосуванням методу оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 90–99.
111. Jooyandeh, M., Mohades, A., Mirzakhah, M. (2009). Voronoi Diagram. *Information Processing Letters*. Elsevier, 109(13), 709–712.
112. Neyman, J., & Pearson, E. S. (2023). Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. In *Joint Statistical Papers* (pp. 203–239). University of California Press. <https://doi.org/10.2307/jj.8501414.11>
113. IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. (1933). *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231(694–706), 289–337. <https://doi.org/10.1098/rsta.1933.0009>
114. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/s0019-9958\(65\)90241-x](https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x)
115. Kiseleva, E., Prytomanova, O., Hart, L., & Blyuss, O. (2022). Application of the Theory of Optimal Set Partitioning for Constructing Fuzzy Voronoi Diagrams. In *Studies in Computational Intelligence* (pp. 287–313). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94910-5_15
116. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Padalko, V. (2020). An Algorithm for Constructing Additive and Multiplicative Voronoi Diagrams Under Uncertainty. In *Advances in Intelligent Systems and Computing* (pp. 714–727). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54215-3_46
117. Kiseleva, O. M., Hart, L. L., Prytomanova, O. M., & Kuzenkov, O. O. (2019). An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. *CEUR Workshop Proceedings*, 2386(12), 148–162. <https://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf>
118. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Zhuravel, S. V. (2018). Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional. *Journal of Automation and Information Sciences*, 50(3), 1–20. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i3.10>
119. Kiseleva, E. M., & Lebed, O. Yu. (2009). Classification of Fuzzy Problems of Optimal Sets Partition and Some Approaches to Their Solution. *Journal of Automation and Information Sciences*, 41(1), 15–26. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v41.i1.30>
120. Kiseleva, E. M., & Kuznetsov, K. A. (1999). On Application of the Method of Potential Functions to the Stochastic Problem of the Optimal Partitioning of Sets.

- Journal of Automation and Information Sciences, 31(1–3), 108–112.
<https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v31.i1-3.140>
121. Kiseleva, E. M., & Kuznetsov, K. A. (1998). On harnessing of potential function method in solution of stochastic optimal set partitioning problem. *Problemy Upravleniya I Informatiki (Avtomatika)*, 2, 123–128.
 122. Kiseleva, E. M., & Kuznetsov, K. A. (1997). On solution of continuous stochastic problem of optimal partitioning with aim functional restoration. *Problemy Upravleniya I Informatiki (Avtomatika)*, 6, 81–88.
 123. Bulat, A., Kiseleva, E., Hart, L., & Prytomanova, O. (2023). Generalized Models of Logistics Problems and Approaches to Their Solution Based on the Synthesis of the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies. In *Studies in Computational Intelligence* (pp. 355–376). Springer Nature Switzerland.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-37450-0_21
 124. Kiselova, O. M., Prytomanova, O. M., Zhuravel, S. V., & Sharavara, V. V. (2018). Solving an infinite-dimensional problem of location-allocation with fuzzy parameters. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 18, 99–109.
<https://doi.org/10.15421/321810>
 125. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Zhuravel, S. (2016) Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies. *Journal of Automation and Information Sciences*, 5, 1–22.
 126. Kiseleva, E., Prytomanova, O., & Hart, L. (2021). Application of optimal set partitioning theory to solving problems of artificial intelligence and pattern recognition. *System Research and Information Technologies*, 4, 91–101.
<https://doi.org/10.20535/srit.2308-8893.2021.4.07>
 127. Russell, S., & Norvig, P. (2021). *Artificial intelligence: A modern approach, global edition* (4th ed.). Pearson Education.
 128. Babuška, R., & Verbruggen, H. (2003). Neuro-fuzzy methods for nonlinear system identification. *Annual Reviews in Control*, 27(1), 73–85.
[https://doi.org/10.1016/s1367-5788\(03\)00009-9](https://doi.org/10.1016/s1367-5788(03)00009-9)

ДОДАТОК А. ОПИС R-АЛГОРИТМУ ШОРА

Даний додаток описує конкретний варіант r -алгоритму Шора, який використовується для числового розв'язання задач у основній частині. Оскільки задачі ОРМ часто зводяться до негладких скінченновимірних задач безумовної оптимізації, то для числового розв'язання таких задач необхідно застосовувати відповідні методи недиференційовної оптимізації. Для задач теорії ОРМ таким надійним, випробуваним та ефективним методом, що активно та успішно застосовується у галузі багато років, є r -алгоритм Шора.

Сімейство r -алгоритмів винайшов їх автор, академік Н.М. Шор, у другій половині 20-го століття під час дослідження методів оптимізації негладких функцій. Даний алгоритм відноситься до класу алгоритмів узагальненого градієнтного спуску з розтягом простору у напрямку різниці двох послідовних градієнтів, які скорочено називаються r -алгоритмами. Цей підхід є розвиненим методом градієнтного спуску, що дозволяє розв'язувати задачі недиференційовної оптимізації та ефективно розв'язувати задачі, що мають вкрай повільну збіжність при застосуванні звичайного методу градієнтного спуску – наприклад, при роботі з яружними функціями. Детальний огляд, доведення збіжності, числові експерименти та можливі застосування r -алгоритмів наведені у ряді монографій [17, 22, 23].

Існує декілька варіацій r -алгоритмів, які відрізняються у деталях обрання параметрів алгоритму, зміни розміру кроку, матриці розтягу простору тощо. Наведемо опис r -алгоритму Шора у так званій H -формі, програмна реалізація якого використовується у роботі для розв'язання задач безумовної оптимізації. Порівняно з B -формою, це дозволяє значно скоротити кількість арифметичних операцій, пов'язаних з перетворенням простору – перетворення матриці B_k замінюється перетворенням симетричної матриці $H_k = B_k B_k^*$.

Визначення. Функція $f(x)$, задана у n -вимірному евклідовому просторі E_n , називається майже диференційовною, якщо вона задовольняє наступні умови:

- 1) У будь-якій обмеженій області задовольняє умові Ліпшиця (локально ліпшицева).

- 2) Майже скрізь диференційовна.
- 3) Її градієнт є неперервним на тій множині M , де він існує.

Сформулюємо задачу безумовної недиференційовної оптимізації, яку розв'язує числовий r -алгоритм Шора.

Нехай, $f(x)$ – задана майже диференційовна функція, визначена на множині $M \subseteq E_n$ n -вимірного евклідового простору E_n . Необхідно знайти точку x^* , $x^* \in M$ таку, що $x^* = \min_{x \in M} f(x)$.

Етап підготовки.

Перед початком виконання r -алгоритму необхідно задати ряд параметрів, які будуть впливати на швидкість збігання методу, кількість ітерацій та кінцеву точність розв'язку. Ці параметри можуть обиратися емпірично для кожної окремої задачі, щоб отримувати найбільш оптимальний результат, але для задач ОРМ також існують загальноживані значення для деяких з цих параметрів. Їх перелік:

- $\alpha > 1, \beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ – коефіцієнт розтягу простору α та відповідна йому обернена величина.
- h_0 – початковий розмір кроку градієнтного спуску.
- L – ціле число, що означає граничну кількість кроків спуску, після якої розмір кроку h буде збільшено.
- $\gamma, 0 < \gamma < 1$ – коефіцієнт зменшення кроку h .
- $\mu \geq 1$ – коефіцієнт збільшення кроку h .
- $H_0 = I_n$ (одинична матриця) – матриця, що пов'язана з матрицею розтягу простору.
- $\varepsilon_g > 0$ – достатньо мале число для умови закінчення алгоритму за умовою розміру вектору градієнта, впливає на кінцеву точність розв'язку.
- $\varepsilon_x > 0$ – достатньо мале число для умови закінчення роботи алгоритму за умовою різниці між двома послідовними наближеннями x^* , впливає на кінцеву точність розв'язку.

Користувач обирає значення параметрів $x_0, h_0, \alpha, \mu, \gamma, L, \varepsilon_g, \varepsilon_x$. Алгоритм складається з ітераційного процесу градієнтного спуску, де кожна ітерація g -алгоритму у свою чергу полягає у покроковому пошуку мінімуму за напрямком градієнту функції, який обчислюється на початку кожної ітерації, базуючись на поточному значенні матриці розтягу простору а також значень градієнту у двох попередніх ітераціях. Рух за обчисленим напрямком градієнту відбувається поступово з кроком h_k до тих пір, поки функція спадає. Після цього відбувається зміна розміру кроку, базуючись на кількості виконаних кроків під час поточної ітерації, і ітерація завершується.

Алгоритм 1. Псевдокод виконання g -алгоритму.

Початок алгоритму.

1. Задаємо номер ітерації $k = 0$.
2. Довільно задаємо початкове наближення точки мінімуму $x_0 \in M$.
3. Обчислюємо довільний субградієнт $g_f(x_0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 .
4. Обчислюємо значення x_1 за формулою $x_1 = x_0 - h_0 g_f(x_0)$.
5. Виконуємо перевірку умов зупинки алгоритму перед виконанням наступної ітерації g -алгоритму. Якщо виконується будь-яка з умов $\|g_f(x_k)\| \leq \varepsilon_g$, $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon_x$, то ітераційний процес вважається завершеним і виконується перехід до п.15.
6. Приймаємо $k = k + 1$.
7. Обчислюємо довільний субградієнт $g_f(x_k)$ функції $f(x)$ у точці x_k .
8. Обчислюємо різницю градієнтів $r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k)$.
9. Обчислюємо матрицю:

$$H_{k+1} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{(H_k r_k, r_k)} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{r_k^T H_k r_k}$$
10. Обчислюємо напрямок, у якому буде виконано спуск з точки x_k :

$$\eta_k = \frac{H_k g_f(x_k)}{\sqrt{(H_k g_f(x_k), g_f(x_k))}}$$
11. Задаємо номер кроку $l = 0$, приймаємо $z_1 = x_k$.
12. З точки z_l робимо крок довжиною h_k у напрямку η_k :

$$z_{l+1} = z_l + h_k \eta_k$$
13. Обчислюємо $f(z_{l+1})$. Якщо $f(z_{l+1}) < f(z_l)$, то приймаємо $l = l + 1$ і переходимо до п.12, щоб зробити наступний крок.

- Якщо $f(z_{l+1}) > f(z_l)$, то приймаємо $x_{k+1} = z_l$ і переходимо до п.14.
14. Якщо $l = 1$, це означає, що поточний крок завеликий, і його необхідно зменшити, прийнявши $h_{k+1} = \gamma h_k$.
Якщо $l > L$, це означає, що поточний крок замалий, і його необхідно зменшити, прийнявши $h_{k+1} = \mu h_k$.
Ітерація r-алгоритму завершена. Переходимо до п.5.
15. Приймаємо за остаточний розв'язок $x^* = x_k$.

Завершення роботи алгоритму.

Існує ще одна можливість модифікації r-алгоритму – використання так званої операції відновлення, коли після заданої кількості ітерацій періодично виконується відновлення матриці розтягу простору, тобто вона замінюється на одиничну матрицю.

Як показав досвід обчислень, значення коефіцієнта розтягу простору має сенс приймати рівним 2 або 3 (досліди виконувалися і для багатьох інших значень коефіцієнта розтягу), оскільки у більшості випадків при збільшенні α кількість ітерацій якщо і зменшується, то у незначній мірі, проте значно збільшується середня кількість обчислень функції при пошуку мінімуму за напрямком.

ДОДАТОК Б. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. M., Lebediev D. M., & Filat, O. A. (2023). Software for solving the two-stage location-allocation problems. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 23, 94–100. <https://doi.org/10.15421/322310> (фахове видання, категорія Б)
2. Bulat, A., Kiseleva, E., Yakovlev, S., Prytomanova, O., & Lebediev, D. (2024). Solving the Problem of Fuzzy Partition-Distribution with Determination of the Location of Subset Centers. *Computation*, 12(10), 199. <https://doi.org/10.3390/computation12100199> (Scopus-індексоване видання, квартиль Q2)
3. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2024). Solving continuous-discrete two-stage logistic problem of optimal partitioning-allocation. *Problems of Applied Mathematics and Mathematic Modeling*, 24, 99–112. <https://doi.org/10.15421/322410> (фахове видання, категорія Б)
4. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Solving two-stage logistic problem of optimal location-allocation. In *Studies in Systems, Decision and Control. Springer Nature Switzerland*, 205–224. https://doi.org/10.1007/978-3-031-97529-5_13 (Scopus-індексоване видання)
5. Kiseleva, E. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2025). Оптимальне розбиття множин і неперервно-дискретні транспортні задачі: огляд теоретичних і прикладних підходів. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, 25, 86–103. <https://doi.org/10.15421/322508> (фахове видання, категорія Б)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Кісельова, О. М., Притоманова, О. М., Лебедєв, Д. М., & Балеєко, Н. В. (2021). Застосування теорії оптимального розбиття до побудови нечітких діаграм Вороного. (МПЗІС-2021): *Тези доповідей XIX Міжнародної науково-*

- практичної конференції, с. 87. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2021/12/mpzis-2021.pdf#page=87>
2. Kiseleva, O. M., Prytomanova, O. M., & Lebediev, D. M. (2023). Object-oriented approach to programmable solution of two-stage location-allocation problems. *Mathematical support and software for intelligent systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International scientific and practical conference*, p. 18. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf#page=18>
3. Кісельова, О. М., Притоманова, О. М., & Лебедєв, Д. М. (2025). Метод розв'язання нечіткої двоетапної задачі оптимального розбиття множин. (МПЗІС-2025): *Тези доповідей XXIII Міжнародної науково-практичної конференції*, с. 167. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2025/11/%D0%9C%D0%9F%D0%97%D0%86%D0%A1-2025.pdf#page=168>