

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**БЕЙЦУН ВІКТОР СЕРГІЙОВИЧ**

УДК 531.8:629.78

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ  
ФУНКЦІОНУВАННЯ МАНІПУЛЯТОРА КОСМІЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ**

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ В. С. Бейцун

Наукові керівники:  
**Дзюба Анатолій Петрович,**  
доктор технічних наук, професор  
**Тарасов Сергій Васильович,**  
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник

## АНОТАЦІЯ

*Бейцун В. С.* Математичне моделювання механічних процесів функціонування маніпулятора космічного призначення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2025.

Останні десятиліття характеризуються стрімким розвитком ракетно-космічної галузі, що спричиняє зростання вимог до складних багатоланкових систем, зокрема космічних маніпуляторів. Ці механізми відіграють ключову роль у виконанні широкого спектра завдань, таких як технічне обслуговування орбітальних станцій, захоплення й транспортування об'єктів у космосі, а також монтаж і демонтаж обладнання. Одним із найважливіших аспектів функціонування таких маніпуляторів є їхня здатність забезпечувати високу точність позиціонування корисного навантаження, зокрема антен, що розкладаються, або інших розгортальних, телескопічних, гнучких конструкцій, відносно космічного апарату для забезпечення стабільного зв'язку та ефективного виконання місій.

На високоточне позиціонування маніпулятора безпосередньо впливає податливість його конструкції, зокрема деформаційні характеристики шарнірних і фланцевих з'єднань. Незважаючи на значну кількість досліджень у цій сфері, недостатньо вивченими залишаються питання континуальної та локальної податливості конструкції маніпулятора. В тому числі, проблема люфтів у шарнірних вузлах потребує подальшого аналізу, оскільки такі ефекти можуть суттєво змінювати кінематичні та динамічні характеристики системи, ускладнюючи точне керування її рухом. Виявлення та моніторинг люфтів є вкрай складним завданням як з точки зору реалізації, так і з точки зору обчислювальних методів, оскільки ці ефекти мають нелінійну природу та можуть проявлятися лише в певних режимах функціонування маніпулятора.

Одним із підходів до вирішення цієї проблеми може стати застосування експериментальних методів, зокрема фотограмметричного, який дозволяє безпомилково визначати переміщення чи деформації в шарнірних з'єднаннях. Його основними перевагами є безконтактність, висока точність вимірювань та універсальність застосування в різних умовах.

Під час маневрування космічного апарату в маніпуляторі виникають динамічні процеси, що проявляються у вигляді коливань його конструкції. Через відсутність ефективних демпфуючих елементів ці коливання можуть затримувати стабілізацію положення маніпулятора, що значно ускладнює налаштування системи керування як самим маніпулятором, так і космічним апаратом загалом. Важливо враховувати також ефект поступового наростання відхилень: навіть незначне переміщення у шарнірному або фланцевому з'єднанні призводить до збільшення похибки у наступних ланках, що може істотно вплинути на кінцеве положення корисного навантаження.

Таким чином, дослідження механічних процесів функціонування космічного маніпулятора, включаючи аналіз податливості, люфтів і динамічних коливань, є актуальним і необхідним для підвищення точності й надійності таких систем. Отримані результати можуть сприяти вдосконаленню методів проєктування та керування багатоланковими маніпуляторами, що, у свою чергу, забезпечить ефективне виконання складних космічних місій.

**У вступі** дисертаційної роботи обґрунтовано актуальність теми дисертації; окреслено зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами; сформульовано мету й задачі дослідження; відзначено наукову новизну, достовірність і практичне значення одержаних результатів; наведено відомості про апробацію результатів роботи, публікації та особистий внесок автора, структуру та обсяг дисертації.

**У першому розділі** подано аналітичний огляд сучасного стану моделювання процесів функціонування космічних маніпуляторів. Наведено класифікацію даних систем за конструктивними особливостями та їх

призначенням. Проаналізовано методи моделювання як самих конструкцій маніпуляторів, так і задач, пов'язаних з їх робочими процесами. Проведено огляд наукових публікацій стосовно застосування фотограмметричного методу як безконтактної системи стеження за об'єктами у різних галузях, що може слугувати інструментом для дослідження пружної податливості шарнірних вузлів.

У **другому розділі** роботи для побудови математичної моделі маніпулятора наведено основні співвідношення теорії пружності та теорії коливань стрижнів, а також загальні положення та аспекти методу скінченних елементів. Описано вихідні параметри досліджуваної моделі та її розрахункову схему. Розроблено нову математичну модель маніпулятора для імітаційного моделювання процесів виконання програмних рухів та визначення силових факторів в шарнірних вузлах конструкції. Встановлено залежності силових факторів від часу виконання програмних рухів маніпулятора космічного призначення в складі системи космічний апарат – маніпулятор - корисне навантаження. Визначено вплив континуальної податливості ланок маніпулятора на точність програмних рухів за допомогою метода скінченних елементів, де отримані результати обчислень верифіковані за допомогою відомих аналітичних співвідношень.

У **третьому розділі** розроблено нову методику експериментального оцінювання люфтів та впливу податливості шарнірних вузлів бортових маніпуляторів на їх динамічні характеристики. Запропонований підхід ґрунтується на застосуванні фотограмметрії як безконтактного методу моніторингу руху конструкції та її складових. Аналіз траєкторій руху шарнірів шляхом порівняння експериментальних даних із запрограмованими параметрами дозволяє визначати відхилення та кількісно оцінювати величину люфтів. Врахування цих факторів сприяє підвищенню точності налаштування системи керування космічного апарата. Проведено чисельне моделювання впливу люфту у шарнірному вузлі на траєкторію його руху.

У **четвертому розділі** розроблено методику експериментального

визначення впливу пружної податливості фланцевого з'єднання маніпулятора космічного призначення від дії основних видів механічних навантажень. Проаналізовано існуючі методи розрахунку міцності фланцевих з'єднань. Отримано широкий спектр експериментальних даних та проведено порівняння результатів випробувань з обчисленою моделлю ланки маніпулятора, що не має локальних знижень жорсткості у вигляді вузла кріплення.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:

- **вперше** отримані результати системних теоретико-експериментальних досліджень податливості ланок маніпулятора, шарнірних та фланцевих вузлів маніпулятора космічного призначення;

- проведено **нові** обчислювальні експерименти для аналізу динамічних характеристик і зусиль у шарнірному вузлі дволанкової маніпуляторної системи; отримано **нові** залежності величини моменту в шарнірі від часу розвороту однієї ланки маніпулятора, а також від врахування масово-інерційних параметрів основного тіла та корисного навантаження;

- розроблена та апробована **оригінальна** методика експериментальних досліджень для визначення люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів, що базується на фотограмметричному методі;

- побудована **авторська** методика експериментальних випробувань та отримані **нові** дані досліджень податливості зразка фланцевого з'єднання ланок маніпулятора на основні види механічних навантажень: згинання, кручення та розтяг-стиск.

**Практичне значення одержаних результатів.** Методика, запропонована в дисертаційній роботі, може бути використана для побудови та проведення експериментальних досліджень пружних податливостей і люфтів у шарнірних вузлах багатоланкових конструкцій та механізмів. Це дозволяє мінімізувати похибки позиціонування із застосуванням фотограмметричного методу.

Розроблена у дисертаційній роботі методика визначення локальних

податливостей у фланцевих з'єднаннях під впливом основних видів механічних навантажень має *науково-методичне значення*, оскільки забезпечує підвищену точність оцінки характеристик таких вузлів.

Побудована математична модель кінематики та динаміки космічного маніпулятора надає можливості для оцінки впливу часу розкладання ланки на силові характеристики поворотних вузлів із врахуванням конструктивних особливостей його функціонування.

Отримана модель може бути узагальнена для аналізу динамічних характеристик і силових навантажень як окремих шарнірних з'єднань між ланками маніпулятора, так і всієї системи у цілому, що надає можливості для оптимізації параметрів керування маніпулятором та розширення функціональних можливостей космічного апарату.

Отримані результати можуть бути рекомендовані для упровадження в проєктуванні та оптимізації багатоланкових конструкцій ракетно-космічної техніки, зокрема у конструкторських бюро та науково-дослідних установах, що займаються розрахунком і виготовленням таких систем. Це дозволить підвищити достовірність моделювання робочих режимів маніпуляторних систем, що безпосередньо впливатиме на їхню довговічність, надійність і безпеку експлуатації.

**Ключові слова:** космічний маніпулятор, стрижневі конструкції, динаміка, напруження, деформація, податливість, математичне моделювання, шарнір, фланцеве з'єднання, кінематичне керування, експериментальне моделювання, фотограмметрія, ракетно-космічна техніка, міцність, надійність.

## ABSTRACT

*Beitsun V. S.* Mathematical modeling of mechanical processes in the functioning of a space manipulator. – Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics. – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2025.

In recent decades, the aerospace industry has experienced rapid development, leading to increased demands on complex multibody systems, particularly space manipulators. These mechanisms play a critical role in a wide range of tasks, including orbital station maintenance, object capture and transportation in space, as well as equipment assembly and disassembly. One of the most important operational aspects of such manipulators is their ability to ensure high-precision positioning of payloads—such as deployable antennas or other expandable, telescopic, and flexible structures—relative to the spacecraft to maintain stable communication and successful mission execution.

The precision of a manipulator's positioning is significantly influenced by the compliance of its structure, particularly the deformation characteristics of joint and flange connections. Despite a substantial body of research in this field, the issues related to both distributed and localized structural compliance remain insufficiently addressed. In particular, backlash in joint assemblies requires further investigation, as such nonlinear phenomena can considerably alter the system's kinematic and dynamic behavior, complicating accurate motion control. The detection and monitoring of backlash is a challenging task from both implementation and computational perspectives due to its nonlinear nature and occurrence under specific operational conditions.

One potential approach to addressing this issue involves the application of experimental techniques, notably photogrammetry, which enables accurate and contactless measurement of displacements and deformations in joint assemblies. The method offers key advantages such as non-invasiveness, high measurement

precision, and adaptability to diverse testing environments.

During spacecraft maneuvers, dynamic effects arise within the manipulator, often manifesting as structural vibrations. In the absence of effective damping mechanisms, these oscillations may delay the stabilization of the manipulator's position, thereby complicating the tuning of both manipulator and spacecraft control systems. Additionally, the cumulative effect of even minor displacements in joint or flange connections can result in significant deviations along the manipulator's kinematic chain, ultimately affecting the final payload positioning.

Accordingly, studying the mechanical behavior of space manipulators—including the analysis of structural compliance, joint backlash, and dynamic oscillations—is essential for improving the precision and reliability of such systems. The results obtained may contribute to the enhancement of design and control methods for multibody manipulators, ultimately supporting the successful execution of complex space operations.

**The introduction** of the dissertation substantiates the relevance of the research topic, outlines its relation to scientific programs, projects, and objectives, and defines the purpose and tasks of the study. It also highlights the scientific novelty, credibility, and practical significance of the results, and provides information on their validation, publication, and the author's personal contribution, as well as the structure and volume of the dissertation.

**The first chapter** presents an analytical review of the current state of modeling the behavior of space manipulators. It includes a classification of these systems based on design and functional purpose, and a comparative analysis of modeling methods for both manipulator structures and their operational processes. The chapter also reviews the use of photogrammetry as a non-contact object-tracking system in various industries, which may serve as a tool for investigating joint compliance.

**The second chapter** introduces the mathematical framework for modeling the manipulator, based on the theory of elasticity, beam vibration theory, and the finite element method (FEM). The model configuration and input parameters are



described, and a novel mathematical model is developed for simulating programmed manipulator motions and computing force interactions within its joints. Time-dependent force characteristics during manipulator operation within a spacecraft–manipulator–payload system are determined. The influence of distributed compliance on trajectory accuracy is assessed using FEM, and the results are validated against known analytical solutions.

**The third chapter** presents a novel methodology for experimentally evaluating backlash and the influence of joint compliance on the dynamic behavior of onboard manipulators. The approach is based on the use of photogrammetry for contactless monitoring of structural motion. The trajectory analysis—comparing experimental and programmed joint movements—enables identification and quantification of backlash. Accounting for these factors supports the fine-tuning of spacecraft control systems. Numerical simulations are conducted to demonstrate the impact of backlash on joint trajectory accuracy.

**The fourth chapter** develops an experimental methodology for evaluating the influence of elastic compliance in flange joints of space manipulators under primary mechanical loading conditions. Existing analytical strength calculation methods for flange joints are reviewed. A wide set of experimental data is obtained and compared with computational results from a model without local stiffness reductions introduced by fastening nodes.

**The scientific novelty of the obtained results** consists in the following:

- **for the first time**, systematic theoretical and experimental results have been obtained on the compliance of manipulator links, joint, and flange assemblies of space manipulators.

- **new** computational experiments were conducted to analyze the dynamic characteristics and forces within the joint of a two-link manipulator system. **New** relationships were established between the joint torque and both the rotation time of a manipulator link and the mass-inertial parameters of the base structure and payload.

- an **original** experimental methodology was developed and validated to

determine backlash and elastic compliance in the joint assemblies of space manipulators and booms, based on the application of the photogrammetric method.

- a **new author's** experimental testing procedure was constructed, and **new** research data have been obtained on the compliance of the flange joint specimen of a manipulator links under the main types of mechanical loading: bending, torsion, and tension-compression.

### **Practical significance of the obtained results.**

The methodology proposed in this dissertation can be employed to design and perform experimental studies on elastic compliance and backlash in the joint assemblies of multibody structures and mechanisms. This enables improved positioning accuracy through the application of photogrammetric measurements.

The developed method for identifying local compliance in flange joints under primary mechanical loads has methodological significance, as it enhances the precision of evaluating the characteristics of such structural elements.

The constructed mathematical model of the kinematics and dynamics of a space manipulator enables assessment of the influence of link deployment time on the load characteristics of rotary joints, taking into account structural specifics of the system.

This model can be generalized to analyze the dynamic properties and load distribution of individual joints as well as the entire manipulator system, providing opportunities for optimization of control parameters and expansion of the spacecraft's functional capabilities.

The obtained results are recommended for implementation in the design and optimization of multibody structures in rocket and space technology, particularly within design bureaus and research institutions involved in the analysis and manufacturing of such systems. This will improve the accuracy of operational mode simulations for manipulator systems, directly impacting their durability, reliability, and operational safety.

**Keywords:** space manipulator, rod structures, dynamics, stress, deformation, compliance, mathematical modeling, hinge, flange connection, kinematic control, experimental modeling, photogrammetry, rocket and space technology, strength, reliability.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

### Статті у наукових фахових виданнях України

1. Бейцун В. С., Тарасов С. В. Динаміка і зусилля у шарнірі дволанкової системи при позиціонуванні корисного навантаження відносно космічного апарату // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2022. – Вип. 35. – С. 5-16. <https://doi.org/10.15421/4222211> **(фахове видання, категорія Б)** (особистий внесок Бейцуна В. С.: аналітичний огляд, підбір та опрацювання літератури, побудова математичної моделі, аналітичне та числове розв'язання задачі, обговорення і формулювання висновків; особистий внесок Тарасова С. В.: постановка задачі, консультування, обговорення і формулювання висновків).
2. Бейцун В. С., Тарасов С. В. Методика фотограмметричного вимірювання люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах транспортних маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Технічна механіка. 2024. Вип. 3. С. 124-137. <http://doi.org/10.15407/itm2024.03.124> **(фахове видання, категорія Б)** (особистий внесок Бейцуна В. С.: аналітичний огляд, підбір та опрацювання літератури, збір та обробка експериментальних даних, формулювання висновків; особистий внесок Тарасова С. В.: аналітичний огляд, постановка задачі, консультування).
3. Бейцун В. С., Дзюба А. П. Експериментальне дослідження податливості фланцевих з'єднань у моделі маніпулятора космічного призначення // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2024. – Вип. 38. – С. 5-19. <https://doi.org/10.15421/4224101> **(фахове видання, категорія Б)** (особистий внесок Бейцуна В. С.: аналітичний огляд, побудова математичної моделі, збір та обробка експериментальних даних, інтерпретація результатів, формулювання висновків; особистий внесок Дзюби А. П.: постановка задачі, консультування, обговорення і формулювання висновків).

*Матеріали конференцій*

4. *Khoroshylov S. V., Shamakhanov V. K., Beitsun V. S., et al.* Dynamics modelling and analysis of the deployable reflector antenna for sar mini-satellites // 41st ESA Antenna Workshop on Large Deployable Antennas (25 - 28 September 2023). – Noordwijk, The Netherlands: ESA-ESTEC, 2023. [https://www.researchgate.net/publication/374544077\\_DYNAMICS\\_MODELING\\_AND\\_ANALYSIS\\_OF\\_THE\\_DEPLOYABLE\\_REFLECTOR\\_ANTENNA\\_FOR\\_SAR\\_MINI-SATELLITES](https://www.researchgate.net/publication/374544077_DYNAMICS_MODELING_AND_ANALYSIS_OF_THE_DEPLOYABLE_REFLECTOR_ANTENNA_FOR_SAR_MINI-SATELLITES).

*Тези доповідей*

5. *Бейцун В. С., Тарасов С. В., Дзюба А. П.* Математичне моделювання розкладання маніпулятора космічного призначення // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (травень 2022 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2022. – С. 100. [https://spacehuman.org/\\_files/doc/sbornik2022.pdf](https://spacehuman.org/_files/doc/sbornik2022.pdf).

6. *Бейцун В. С., Тарасов С. В.* Методи фото- та відеограмметрії при дослідженні динаміки просторово розвинених космічних систем // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (12 – 14 квітня 2023 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2023. – С. 121. <https://spacehuman.org/uploads/source/doc/sbornik2023.pdf>.

7. *Бейцун В. С., Тарасов С. В.* Методи візуального стеження при натурному моделюванні динаміки бортових маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Актуальні проблеми механіки: Тези доповідей на Міжнародній науковій конференції (до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка, 14–16 листопада 2023 р.). – Дніпро, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 2023. – С. 280 – 281. [https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual\\_problems\\_of\\_mechanics/abstracts.pdf](https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual_problems_of_mechanics/abstracts.pdf).

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	16
РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН МАТЕМАТИЧНОГО ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ КОСМІЧНИХ МАНІПУЛЯТОРІВ .....	23
1.1 Конструктивні та кінематичні особливості функціонування космічних маніпуляторів.....	23
1.2 Методи моделювання процесів функціонування космічних маніпуляторів .....	30
1.3 Огляд наукових праць із застосуванням фотограмметрії для спостереження за об'єктами .....	33
Висновки до розділу 1 .....	39
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РОЗПОДІЛЕНОЇ ПОДАТЛИВОСТІ ЛАНОК МАНІПУЛЯТОРА .....	40
2.1 Вихідні передумови та розрахункова схема .....	40
2.2 Основні співвідношення теорії пружності та теорії коливань стрижнів .....	44
2.3 Побудова математичної моделі кінематики та динаміки космічних маніпуляторів з урахуванням конструктивних та функціональних особливостей .....	47
2.4 Імітаційне моделювання кінематичного керування маніпулятором .....	53
2.5 Скінченно-елементний аналіз податливості маніпулятора.....	62
2.5.1 Основні положення методу скінченних елементів .....	63
2.5.2 Результати скінченно-елементного аналізу .....	66
2.6 Порівняння обчислювальних та аналітичних результатів .....	68
Висновки до розділу 2 .....	70
РОЗДІЛ 3. ВИЗНАЧЕННЯ ПОДАТЛИВОСТІ ШАРНІРНИХ ВУЗЛІВ МАНІПУЛЯТОРА .....	72

3.1	Застосування фотограмметрії для дослідження податливості у шарнірах маніпулятора.....	72
3.1.1	Основні принципи та функціональні можливості фотограмметрії.....	73
3.1.2	Методика дослідження люфтів у шарнірах маніпулятора за допомогою фотограмметричного методу .....	78
3.2	Числове моделювання впливу величини люфту у шарнірі маніпулятора .....	86
	Висновки до розділу 3 .....	91
	<b>РОЗДІЛ 4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПОДАТЛИВОСТІ ФЛАНЦЕВИХ З'ЄДНАНЬ МАНІПУЛЯТОРА .....</b>	<b>92</b>
4.1	Методи розрахунку міцності пружних фланцевих з'єднань.....	92
4.2	Експериментальні дослідження податливості фланцевого з'єднання при дії механічних навантажень.....	94
4.2.1	Згинальні переміщення .....	98
4.2.2	Крутильні переміщення .....	101
4.2.3	Поздовжні переміщення.....	104
	Висновки до розділу 4 .....	107
	ВИСНОВКИ.....	108
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	111
	ДОДАТОК А Лістинг Матлаб-функції для функціонування шарніра за допомогою кутового переміщення.....	127
	ДОДАТОК Б Список публікацій автора за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....	128
	ДОДАТОК В Акт впровадження результатів дисертаційної роботи в освітній процес Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара .....	130
	ДОДАТОК Г Довідка про впровадження результатів дисертаційної роботи в Інституті транспортних систем і технологій НАН України .....	131

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Останні десятиліття характеризуються стрімким розвитком ракетно-космічної галузі, що спричиняє зростання вимог до складних багатоланкових систем, зокрема космічних маніпуляторів. Ці механізми відіграють ключову роль у виконанні широкого спектра завдань, таких як технічне обслуговування орбітальних станцій, захоплення й транспортування об'єктів у космосі, а також монтаж і демонтаж обладнання. Одним із найважливіших аспектів функціонування таких маніпуляторів є їхня здатність забезпечувати високу точність позиціонування корисного навантаження відносно космічного апарату.

На високоточне позиціонування маніпулятора безпосередньо впливає податливість його конструкції, зокрема деформаційні характеристики шарнірних і фланцевих з'єднань. Незважаючи на значну кількість досліджень у цій сфері, недостатньо вивченими залишаються питання континуальної та локальної податливості конструкції маніпулятора. В тому числі, проблема люфтів у шарнірних вузлах потребує подальшого аналізу, оскільки такі ефекти можуть суттєво змінювати кінематичні та динамічні характеристики системи, ускладнюючи точне керування її рухом.

Під час маневрування космічного апарату в маніпуляторі виникають динамічні процеси, що проявляються у вигляді коливань його конструкції. Через відсутність ефективних демпфуючих елементів ці коливання можуть затримувати стабілізацію положення маніпулятора, що значно ускладнює налаштування системи керування як самим маніпулятором, так і космічним апаратом загалом. Важливо враховувати також ефект поступового наростання відхилень: навіть незначне переміщення у шарнірному або фланцевому з'єднанні призводить до збільшення похибки у наступних ланках, що може істотно вплинути на кінцеве положення корисного навантаження.

Таким чином, дослідження механічних процесів функціонування космічного маніпулятора, включаючи аналіз податливості, люфтів і



динамічних коливань, є актуальним і необхідним для підвищення точності позиціонування корисного навантаження й надійності таких систем в цілому. Отримані результати можуть сприяти вдосконаленню методів проектування та керування багатоланковими маніпуляторами, що, у свою чергу, забезпечить ефективне виконання складних космічних місій.

**Актуальність дослідження** зумовлена потребами ракетно-космічної галузі в створенні досконалих маніпуляторів для високоточного позиціонування, розміщених на супутниках, приладів в космічному просторі. У дисертації пропонується методологія удосконалення параметрів даних конструкцій шляхом визначення та врахування пружних податливостей як континуальної, так і локальних. Це дасть змогу більш точніше контролювати динамічний процес транспортування та позиціонування корисного навантаження, або враховувати на етапі проектування конструкцій пружні податливості елементів, адаптуючи відповідним чином систему керування.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження за темою дисертації здійснювалися в проблемній науково-дослідній лабораторії міцності і надійності конструкцій кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетних тем № 1-657-21 «Розробка методів прогнозування несучої здатності елементів конструкцій ракетної техніки без використання руйнуючих випробувань і вибір їх раціональних параметрів», номер державної реєстрації № 0121U109768 (2021–2023 рр.) та № 1-676-24 «Експериментальні і числові дослідження процесів руйнування та живучості оболонкових конструкцій з пошкодженнями при екстремальному статичному, локальному ударному і тепловому навантаженні», номер державної реєстрації № 0124U000328 (2024–2026 рр.); а також у відділі технічної механіки та енергетичних систем Інституту

транспортних систем і технологій НАН України в рамках держбюджетної теми № 1.3.6.19 (прикладні дослідження) «Розробки та прикладні дослідження магнітолевітуючих транспортних і інноваційних енергетичних систем», номер державної реєстрації № 0121U108602, 2021–2023 рр.

**Мета і завдання дослідження.** *Мета роботи* полягає у розробці методології удосконалення параметрів конструкції та процесів виконання програмних рухів космічного маніпулятора для забезпечення його високоточного позиціонування в просторі.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі *завдання*:

- провести аналітичний огляд існуючих методів моделювання робочих процесів космічних маніпуляторів та їх конструктивних схем;
- розробити математичну модель маніпулятора для імітаційного моделювання процесів виконання програмних рухів та визначення силових факторів в шарнірних вузлах та інших елементах конструкції. Встановити залежності силових факторів від часу виконання програмних рухів маніпулятора космічного призначення в складі системи космічний апарат-маніпулятор-корисне навантаження;
- розробити розрахункову кінематичну схему, що відтворює виконання основних програмних рухів маніпулятора;
- провести числові дослідження впливу континуальної податливості маніпулятора на параметри коливальних процесів його ланок методом скінченних елементів; верифікувати результати обчислень з відомими аналітичними співвідношеннями;
- розробити методику та провести експериментальні дослідження для визначення люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів з використанням фотограмметричного методу;
- розробити методику та провести експериментальні дослідження впливу податливості фланцевих з'єднань ланок маніпулятора на динаміку програмних рухів шляхом проведення випробувань на основні види

механічних навантажень: згинання, кручення та розтяг-стиск;

- здійснити порівняльний аналіз результатів обчислень досліджуваного вузла з'єднання маніпулятора методом скінченних елементів та експериментальних досліджень;

- на основі результатів імітаційного моделювання процесів переміщення корисного навантаження та експериментальних досліджень деформованого стану його конструкції провести аналіз впливу податливості елементів маніпулятора на його програмні рухи. Сформулювати практичні рекомендації щодо вибору основних жорсткісних та масових параметрів маніпулятора на етапі ескізного проектування.

**Об'єкт дослідження** – математичне та експериментальне моделювання процесів функціонування стрижневих маніпуляторів космічного призначення.

**Предмет дослідження** – стрижневі системи та елементи конструкцій, з'єднані за допомогою шарнірних вузлів та фланцевих з'єднань, що утворюють маніпулятор спеціального призначення.

**Методи дослідження.** При виконанні дисертаційної роботи використовувались методи механіки деформівного твердого тіла, динаміки стрижнів та систем твердих тіл, теорії коливань та обчислювальної математики. Для розробки методики експериментального визначення люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів використовувався фотограмметричний метод. Визначення впливу фланцевого з'єднання на локальну жорсткість маніпулятора проводилось за допомогою експериментальних методів механіки деформівного твердого тіла. Для дослідження впливу континуальної податливості маніпулятора на точність програмних рухів застосовано метод скінченних елементів.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- **вперше** отримані результати системних теоретико-експериментальних досліджень податливості ланок маніпулятора, шарнірних та фланцевих вузлів маніпулятора космічного призначення;

- проведено **нові** обчислювальні експерименти для аналізу динамічних характеристик і зусиль у шарнірному вузлі дволанкової маніпуляторної системи; отримано **нові** залежності величини моменту в шарнірі від часу розвороту однієї ланки маніпулятора, а також від врахування масово-інерційних параметрів основного тіла та корисного навантаження;

- розроблена та апробована **оригінальна** методика експериментальних досліджень для визначення люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів, що базується на фотограмметричному методі;

- побудована **авторська** методика експериментальних випробувань та отримані **нові** дані досліджень податливості зразка фланцевого з'єднання ланок маніпулятора на основні види механічних навантажень: згинання, кручення та розтяг-стиск.

**Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів** забезпечується коректним застосуванням відомих методів аналітичної динаміки, положень лінійної теорії пружності, апробованих математичних моделей і числових алгоритмів розрахунків, а також наукових положень фотограмметричного методу при експериментальних дослідженнях. Додатково, достовірність підтверджується коректним вибором розрахункових схем, зіставленням отриманих результатів у часткових випадках із відомими розв'язками інших авторів, відповідністю результатів розв'язання нових задач фізичній суті досліджуваних явищ і результатами експериментальних досліджень.

**Теоретичне і практичне значення одержаних результатів.** Побудована в дисертаційній роботі нова математична модель кінематики та динаміки космічного маніпулятора з урахуванням конструктивних та функціональних особливостей може служити науковим підґрунтям для створення нових, більш досконалих конструкцій. Розроблена методика експериментального визначення пружних податливостей і люфтів у шарнірних вузлах багатоланкових конструкцій та механізмів за допомогою

фотограмметричного методу може бути корисною для підвищення достовірності моделювання динамічних процесів, вдосконалення алгоритмів керування та оптимізації конструкцій роботизованих систем. Запропонована методика експериментального дослідження дії основних механічних навантажень може слугувати методичною основою для оцінювання локальних податливостей у фланцевих з'єднаннях. Результати досліджень впливу часу розкладання частини маніпулятора на силові параметри поворотних вузлів становлять важливу основу для оптимізації програмних рухів та підвищення точності керування маніпулятором у реальних умовах експлуатації.

У цілому, використання результатів дисертаційної роботи дозволить підвищити достовірність моделювання робочих режимів маніпуляторних систем, що сприяє їх довговічності та безпеці роботи.

Представлені методики можуть бути використані під час розробки елементів реальних конструкцій чи об'єктів ракетно-космічної техніки. Основні результати можуть бути застосовані у конструкторських організаціях, що займаються проєктуванням, розрахунком, виготовленням та оптимізацією багатоланкових конструкцій.

Одержані автором результати знайшли застосування в Інституті транспортних систем і технологій НАН України (Довідка про впровадження, 2025 р., див. Додаток Г) та впроваджені в освітній процес спеціальності 113 Прикладна математика Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара МОН України (Акт впровадження, 2025 р., див. Додаток В).

**Публікації та особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертації опубліковано у 7 наукових працях, серед яких: 3 статті [9, 10, 13] у фахових виданнях України, встановленому МОН України, 1 матеріалів міжнародних наукових конференцій [83] і 3 тез доповідей [11, 12, 14].

Усі основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У працях, написаних у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у побудові математичних моделей задач, запропонованих методиках й алгоритмах числових реалізацій їх розв'язування, безпосередній участі у

виконанні всіх етапів робіт: комп'ютерне моделювання, проведення обчислювальних та натурних експериментів, інтерпретація результатів, обговорення і формулювання висновків.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати роботи доповідались і обговорювались на міжнародних наукових конференціях: «Людина і космос» (Дніпро, 2022, 2023), «Актуальні проблеми механіки» (до 145-річчя від дня народження С. П. Тимошенка; Київ, Україна, 2023), 41st ESA Antenna Workshop on Large Deployable Antennas (Noordwijk, The Netherlands, 2023).

У цілому дисертація доповідалась на міжкафедральному науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, 2025, керівник – професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки, д-р фіз.-мат. наук Лобода В. В.).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, що містять 35 рисунків та 3 таблиці, висновків, списку використаних джерел із 145 найменувань на 16 сторінках і чотирьох додатків на 5 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 131 сторінку.

## **РОЗДІЛ 1.**

### **СУЧАСНИЙ СТАН МАТЕМАТИЧНОГО ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ КОСМІЧНИХ МАНІПУЛЯТОРІВ**

У даному розділі подано аналітичний огляд сучасного стану моделювання процесів функціонування космічних маніпуляторів. Наведено класифікацію даних систем за конструктивними особливостями та їх призначенням. Проаналізовано методи моделювання як самих конструкцій маніпуляторів, так і задач, пов'язаних з їх робочими процесами. Проведено огляд наукових публікацій стосовно застосування фотограмметричного методу як безконтактної системи стеження за об'єктами у різних галузях. Оскільки даний метод може використовуватись для дослідження конструкцій маніпуляторів як на етапі конструювання, так і під час виконання робочих процесів у космосі.

#### **1.1 Конструктивні та кінематичні особливості функціонування космічних маніпуляторів**

Вже протягом декількох десятиліть дослідження маніпуляторів космічного призначення становлять широкий клас наукоємних задач. Бортові космічні маніпулятори поділяють відносно наступних характеристик: спеціалізація, вантажопідйомність, кінематична схема, число ступенів свободи, спосіб встановлення на основне тіло (базу), вид приводів, система керування, спосіб програмування. Поєднання та контроль усіх параметрів таких багатoelementних конструкцій, які мають відповідати поставленим задачам та технічним характеристикам, – вкрай відповідальна місія для інженерів та науковців.

Компанія Data Bridge Market Research у 2023 році представила тенденції розвитку роботизованих маніпуляторів та прогноз на 2024-2031 роки [73]. На

основі аналізу світового ринку промислових роботів-маніпуляторів за 2016-2022 роки зроблено висновки стосовно перспективності їх застосування. Роботизовані маніпулятори сприяють підвищенню ефективності, точності та швидкості виробничих операцій, що забезпечує зростання продуктивності та економічної доцільності у таких галузях, як автомобілебудування, електроніка, медицина, аерокосмічна промисловість тощо. Їхнє застосування дозволяє оптимізувати технологічні процеси та покращити експлуатаційні показники систем. Також повідомляється, що з кожним роком, починаючи з 2024, вартість роботизованих систем на світовому ринку в середньому буде зростати на 13,9% щорічно. Тому дослідження про механічні, вібраційні, температурні тестування маніпуляторів з різноманітними геометричними характеристиками, дослідження динаміки та схем розкладання, точністю позиціонування відносно основних тіл та корисних навантажень, системою керування є досить актуальними.

Космічні маніпулятори є ключовими елементами сучасних космічних систем, що виконують широкий спектр завдань, зокрема обслуговування супутників, збір космічного сміття, монтажні роботи, наукові експерименти, переміщення вантажів та взаємодії з об'єктами в умовах зниженої сили гравітації. Існує велика кількість конструктивних варіантів космічних маніпуляторів, кожен із яких має свої особливості, переваги та недоліки, що визначають їхню сферу застосування. Їх конструкція та кінематичні характеристики визначають ефективність виконання поставлених завдань та стабільність роботи в екстремальних умовах космічного простору.

Одним із типів є маніпулятори-стріли, які можуть мати пантографну [117, 127], ножничну [86, 90] або надувну [97, 126] конструкцію (рис. 1.1). Пантографні маніпулятори забезпечують високу стабільність і рівномірний розподіл навантаження, що важливо для точного позиціонування. Ножничні механізми дозволяють змінювати довжину маніпулятора, що зручно для транспортування та компактного зберігання. Надувні маніпулятори



вирізняються малою масою та компактністю у складеному вигляді, проте мають обмежену жорсткість і вимагають спеціальних методів стабілізації.

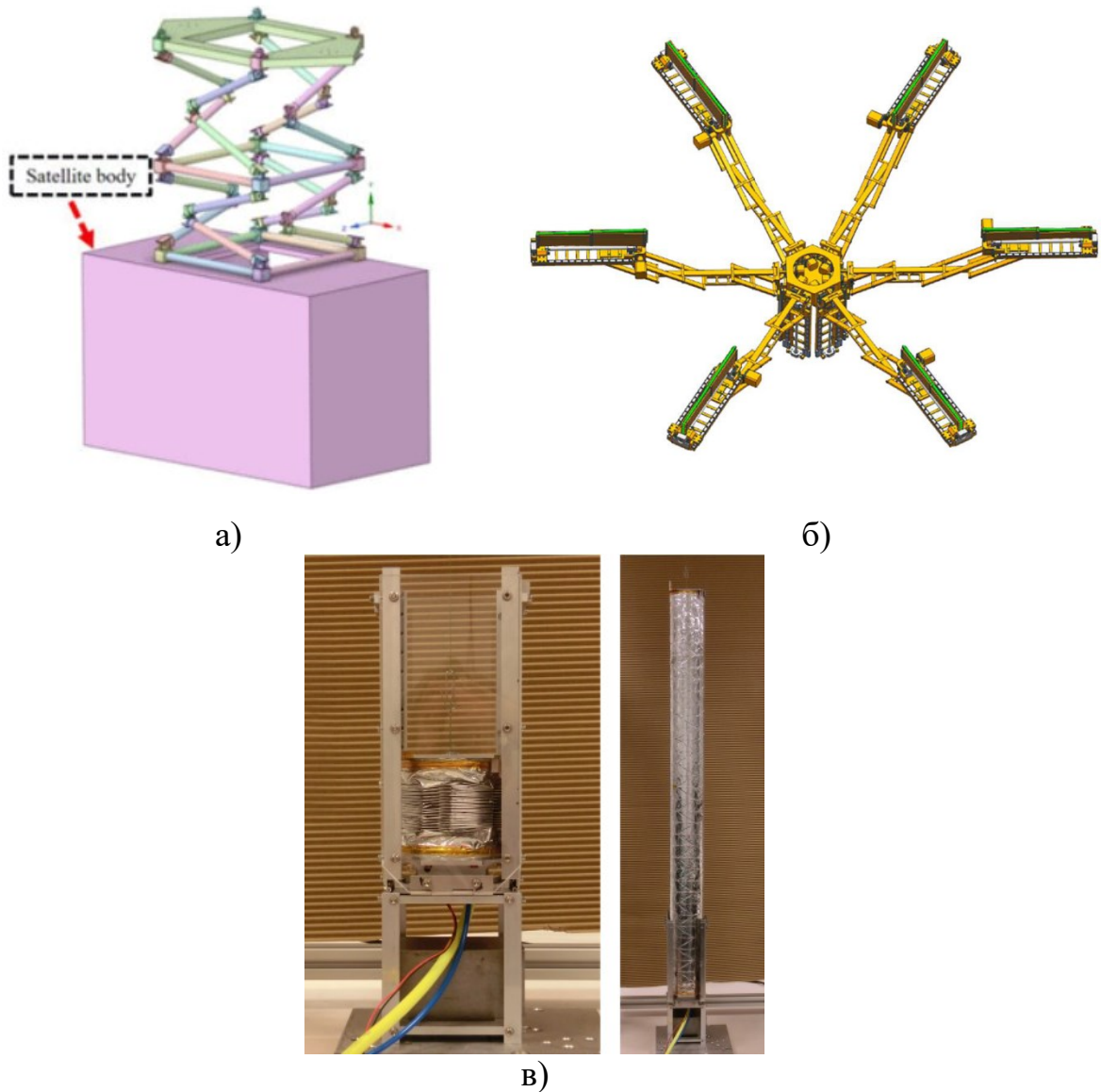


Рис. 1.1 Конструкції маніпуляторів космічного призначення:

а) пантографна [117]; б) ножнична [86]; в) надувна [126]

Окрему групу складають маніпулятори, побудовані з використанням пружних композитних матеріалів [71, 102] та еластичних елементів [60, 95, 104, 111, 129]. Вони дозволяють зменшити масу конструкції та накопичувати енергію під час розгортання, що є значною перевагою для автоматизованих розкладних систем, які повинні мінімізувати використання енергетичних ресурсів під час місії. Однак управління таким процесом потребує складних алгоритмів прогнозування. Такі маніпулятори можуть адаптуватися до

зовнішніх навантажень, проте їхнім недоліком є необхідність ретельного розрахунку механічних характеристик для уникнення неконтрольованих деформацій.

Маніпулятори також можуть мати різні поперечні перерізи. Наприклад, стрічкові маніпулятори N- та M-подібної форми [137, 138] забезпечують високу гнучкість і можливість компактного складання (рис. 1.2). Вони застосовуються для розгортання антен, сенсорних систем і легких модулів. Основним їхнім недоліком є знижена жорсткість, що може ускладнювати виконання точних місій у космічному просторі.

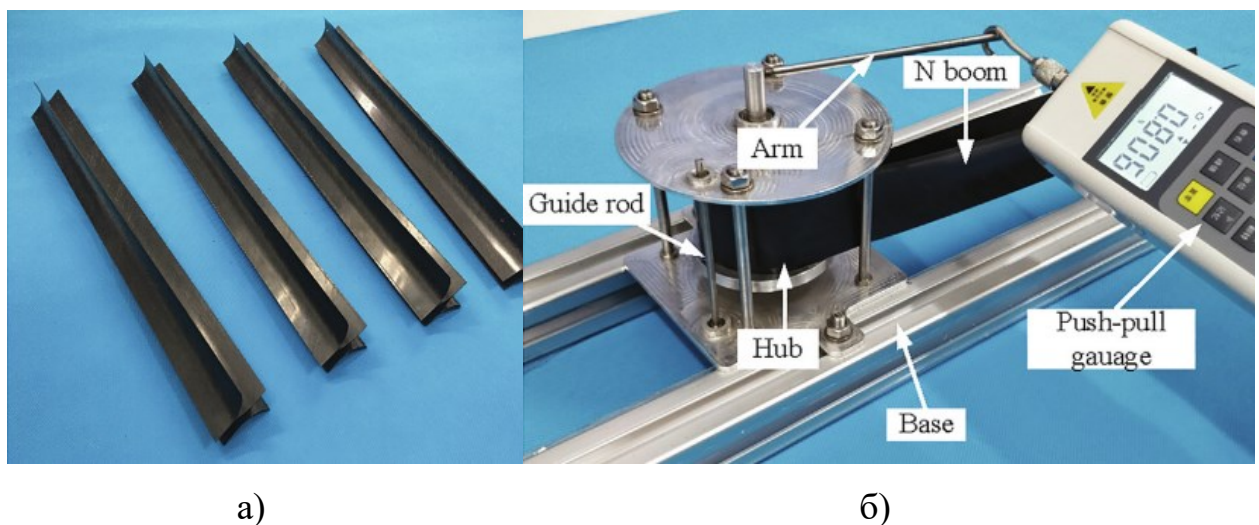


Рис. 1.2 Види перерізів стрічкових маніпуляторів [137, 138]:

а) М-подібний; б) намотування N-подібної стрічки

Тонкостінні та багатошарові маніпулятори [54, 55, 95, 96, 104, 111, 126, 129] мають значний потенціал у застосуванні для легких конструкцій, що потребують мінімізації ваги. Вони забезпечують необхідну міцність при малій масі, але водночас є чутливими до механічних пошкоджень та термічних впливів у відкритому космосі.

В цілому, конструкція космічних маніпуляторів базується на використанні легких та міцних матеріалів, таких як вуглепластики, алюмінієві сплави та титанові компоненти, що дозволяє зменшити їх масу при збереженні високої жорсткості. Основними структурними компонентами маніпулятора є сегментовані ланки, що забезпечують необхідний ступінь свободи руху,

обертальні та поступальні з'єднання, які дозволяють виконувати складні траєкторії руху, привідна система, що складається з електромеханічних, п'єзоелектричних чи електростатичних актуаторів, а також контрольні та сенсорні системи, які включають гіроскопи, енкодери та камери, що забезпечують зворотний зв'язок для точного позиціонування. Однією з ключових конструктивних характеристик є наявність гнучких елементів або компенсаторів вібрацій, що дозволяє зменшити вплив механічних коливань під час роботи маніпулятора.

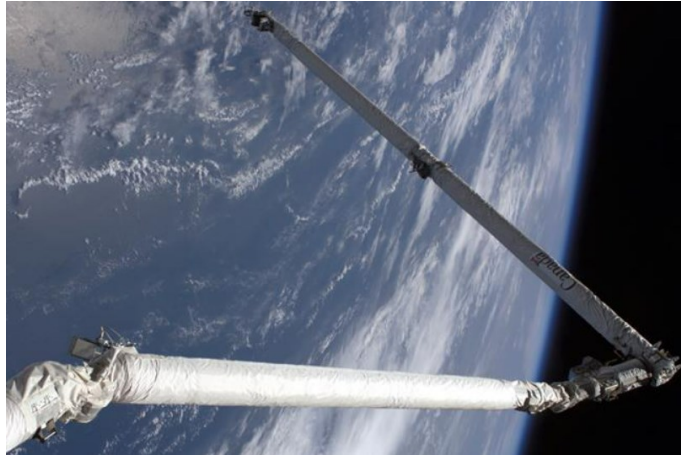
Стрижневі багатосекційні маніпуляторні конструкції [50, 66, 70, 72, 82, 84, 108], фермові [71, 142, 143] та скелетні [110, 140] структури використовуються в основному для монтажних, транспортних та обслуговуючих завдань (рис. 1.3). Їхні переваги полягають у високій міцності та можливості трансформування. Водночас такі системи можуть мати значну масу, що потребує ефективних способів їх розгортання та управління.

Телескопічні маніпулятори [35, 51] широко застосовуються для завдань, де необхідна зміна довжини робочої частини маніпулятора. Вони дозволяють зменшувати габарити у складеному стані, що полегшує їх транспортування, однак комплексність конструкції та механізмів розкладання може ускладнювати їхнє використання в умовах космічного середовища.

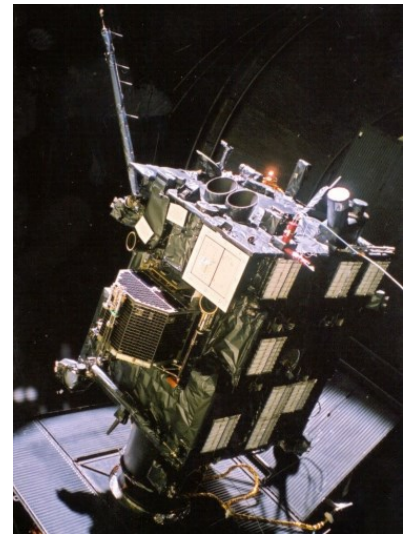
Застосування антропоморфних маніпуляторів стає дедалі популярним серед промислових та ракетно-космічних галузей. До переваг включення до конструкцій космічних апаратів такого типу маніпуляторів відносять універсальність, здатність системи керування у нештатних чи аварійних випадках до виконання автоматичних алгоритмів переміщення.

Космічні маніпулятори працюють в умовах зниженої сили гравітації, що накладає особливі вимоги до їх кінематики. Однією з важливих задач у функціонуванні космічного маніпулятора є забезпечення точної орієнтації його захоплювального пристрою відносно цільового об'єкта [4, 63, 64]. Це включає розв'язання задачі зворотної кінематики, яка полягає у визначенні необхідних кутів повороту та переміщень кожної ланки маніпулятора для

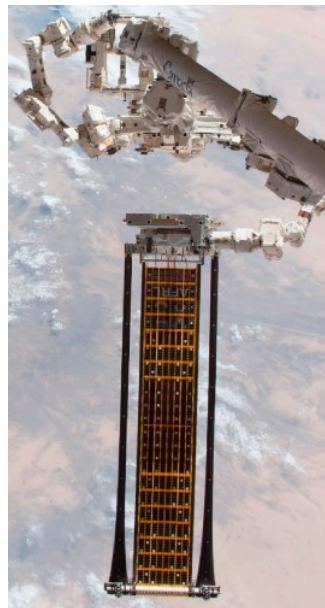
досягнення заданого положення та орієнтації захоплювального пристрою. Використання числових методів оптимізації дозволяє підвищити точність орієнтування навіть у складних динамічних умовах.



а)



б)



в)

Рис. 1.3 Місії багатосекційних маніпуляторів:

- а) Canadarm – транспортування [50]; б) ROSETTA – монтаж датчиків [54]; в) ROSA – розгортання та позиціонування плоскої сонячної батареї [60]

Кінематичне керування кожним з приводів маніпулятора [10, 45, 112, 141] є ще одним критично важливим аспектом його роботи. Умови зниженої сили тяжіння накладають певні обмеження на роботу приводів, оскільки відсутність власної ваги змінює динамічні характеристики системи. Важливою

задачею є синхронізація руху всіх ланок маніпулятора таким чином, щоб уникати резонансних явищ та надлишкових навантажень на конструкцію. Для цього використовують методи адаптивного управління та моделі прогнозного керування, що дозволяють враховувати затримки в роботі приводів та вплив гнучкості маніпулятора.

Кінематичні особливості функціонування маніпуляторів космічного призначення включають у себе ряд важливих аспектів. По-перше, більшість таких систем є надлишково визначеними, тобто кількість ступенів свободи може перевищувати мінімально необхідну для виконання задачі. Це дозволяє реалізовувати різні траєкторії руху, обходячи можливі перешкоди та зменшуючи вплив зовнішніх збурень. По-друге, через наявність значної податливості в з'єднаннях та структурах маніпулятора, необхідно враховувати його гнучкість під час розрахунку траєкторій. В іншому випадку можливі небажані автоколивання, що можуть ускладнити точне позиціонування.

Також однією з важливих особливостей є компенсація реактивних моментів, які виникають при русі маніпулятора [6, 15, 113]. Через відсутність жорсткого закріплення в космічному просторі будь-який рух маніпулятора спричиняє зміну орієнтації основного космічного апарата. Тому часто застосовуються стратегії руху з мінімальним впливом на орієнтацію всієї системи, наприклад, використання внутрішніх балансувальних механізмів або рух за принципом гіростабілізації.

Сучасні космічні маніпулятори інтегрують штучний інтелект та алгоритми машинного навчання, що дозволяє покращити їх автономність та адаптивність до нових завдань. Використання багатомасових моделей та методів чисельного моделювання дозволяє оптимізувати їх конструкцію та кінематичні параметри, забезпечуючи високу точність та ефективність виконання задач у відкритому космосі. Подальші дослідження космічних маніпуляторів спрямовані на вдосконалення матеріалів, оптимізацію механічних характеристик та розробку нових методів управління такими системами.

Дані конструкції мають бути спроектовані з урахуванням усіх ризиків штатних та нештатних ситуацій, детально прораховані та виготовлені за найвищим класом прецизійності, а саме керування має бути відлагодженим та безвідмовним. Важливу роль у розробці та виготовленні маніпуляторів з приводними механізмами відіграє підбір приводних механізмів та їх параметрів, тому створення універсальних програм для розрахунків динамічних характеристик, кінематичного керування вузлів багатоланкових систем, проведення їх імітаційного моделювання становить актуальну область досліджень.

## **1.2 Методи моделювання процесів функціонування космічних маніпуляторів**

Спектр завдань, що виконується космічними маніпуляторами, постійно розширюється через активне впровадження нових технологій та зростаючі потреби в автоматизованих системах для роботи в космічному просторі. Завдяки підвищеним вимогам до точності, надійності та автономності таких систем, питання моделювання їхньої поведінки набуває особливого значення. Сучасні методи моделювання дозволяють проводити детальний аналіз механічних, динамічних та програмно-керованих характеристик космічних маніпуляторів, що суттєво впливає на ефективність їхнього проектування та експлуатації. Розглядаються основні підходи до моделювання космічних маніпуляторів, серед яких аналітичне моделювання, чисельне моделювання за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), методи мульти-тілесної динаміки (Multibody Dynamics) та гібридні методи, що інтегрують експериментальні дані для підвищення збіжності розрахунків.

Поширеним прикладом опису кінематики та динаміки багатоелементних систем є розбиття на більш прості підсистеми з подальшим встановленням взаємозв'язків між ними. Такий підхід дозволяє ефективніше аналізувати

зміну положення кожної ланки маніпулятора та забезпечувати точне керування його функціональними елементами.

Аналітичне моделювання космічних маніпуляторів ґрунтується на використанні систем рівнянь, отриманих із законів класичної механіки, де рух кожного елемента описується диференціальними рівняннями з урахуванням інерційних, жорсткісних та демпфуючих характеристик. Цей підхід дозволяє отримати загальні закономірності поведінки системи при різних режимах роботи, визначити власні частоти коливань, стабільність руху та оптимальні параметри конструкції. Наприклад, класичні моделі ланцюгових механізмів дозволяють аналітично визначити зв'язок між кутовими швидкостями, моментами інерції та жорсткостями пов'язаних елементів [2, 10, 14, 15, 28, 37, 41, 48, 56, 75, 97, 107, 123, 129, 136].

Хоча аналітичне моделювання дозволяє отримати базові результати з високою обчислювальною швидкістю, воно часто обмежується спрощеними гіпотезами та моделями, такими як лінійність властивостей матеріалів або ідеальність зчеплень, що не завжди відповідає реальним умовам експлуатації космічних маніпуляторів.

Для більш детального аналізу конструктивних особливостей та нелінійних ефектів широко застосовується чисельне моделювання за допомогою МСЕ. Цей підхід дозволяє поділити конструкцію маніпулятора на дискретні елементи, для кожного з яких генеруються локальні рівняння рівноваги, після чого формується система рівнянь, що описує всю конструкцію. МСЕ-моделювання застосовується для аналізу напружено-деформованого стану [60, 85, 96, 116, 119, 137, 143], визначення зон концентрації напружень [105, 128], оцінки впливу термічних навантажень [93], а також для прогнозування втомних процесів і можливих дефектів [60, 93, 96, 106, 115].

Значною перевагою МСЕ є можливість врахування складної геометрії, неоднорідності матеріалів та нелінійних контактних умов, що забезпечує високу точність розрахунків при проектуванні та оптимізації космічних



маніпуляторів. Проте цей метод вимагає значних обчислювальних ресурсів, особливо при розв'язанні тривимірних нелінійних задач.

Методи багатотільної динаміки (Multibody Dynamics) спрямовані на моделювання руху систем, що складаються з великої кількості взаємозв'язаних тіл. Цей підхід дозволяє врахувати взаємодію між різними компонентами космічного маніпулятора, включаючи зчеплення, шарніри, та інші рухомі вузли [35, 36, 67, 81, 85, 89, 109, 139]. Моделі багатотільної динаміки зазвичай базуються на використанні принципів Лагранжа або Гамільтона, що дозволяє отримати диференціальні рівняння руху системи. Завдяки цьому методів можна проводити симуляції як статичні, так і динамічних процесів [51, 60, 63, 66, 70, 80, 82, 105, 111-113], включаючи коливальні рухи [8, 52, 86, 88, 91, 98, 121], резонансні явища та вплив зовнішніх сил [87, 93, 116, 118, 141].

Метод багатотільної динаміки дозволяє моделювати складні системи з великою кількістю ступенів свободи, враховуючи взаємодію компонентів, але для точного аналізу деяких локальних явищ може бути недостатнім або некоректним, що стимулює розробку гібридних методів.

Гібридне або комплексне моделювання, яке поєднує чисельний аналіз методом скінченних елементів з багатотільною динамікою та експериментальними даними, стає все більш популярним підходом для комплексного дослідження космічних маніпуляторів та їх складових [9, 54, 55, 63, 66, 71, 94, 96, 110]. Такий підхід дозволяє врахувати як глобальні динамічні характеристики системи, так і локальні ефекти, пов'язані з деформаціями та контактними явищами. Гібридне моделювання сприяє підвищенню точності прогнозів та дозволяє оптимізувати конструктивні рішення на ранніх етапах проєктування.

Гібридне моделювання дозволяє поєднати переваги різних підходів: високоточність локального аналізу за допомогою МСЕ, здатність багатотільної динаміки описувати комплексну взаємодію компонентів, а також валідацію результатів через експериментальні дані, отримані за



допомогою сучасних методів вимірювання (фотограмметрія, інтерферометрія, тензометрія) [11-13, 57, 60, 63-65, 67, 96, 119, 132].

Сучасні методи моделювання космічних маніпуляторів є надзвичайно різноманітними і охоплюють як аналітичні, так і чисельні підходи, що дозволяє отримувати детальні прогнози щодо поведінки систем під дією різноманітних навантажень. Вибір конкретного методу або комбінації методів залежить від вимог до точності аналізу, складності конструкції та можливостей обчислювальних ресурсів. Завдяки розвитку комп'ютерних технологій та інтеграції експериментальних методів підвищується надійність розрахункових моделей, що сприяє оптимізації конструктивних рішень і підвищенню ефективності космічних апаратів. Подальші дослідження у цій галузі спрямовані на розробку нових алгоритмів і програмних комплексів, що дозволять ще точніше моделювати динаміку та взаємодію складних систем, забезпечуючи тим самим безпеку і ефективність експлуатації космічних маніпуляторів [3, 68, 72, 95, 126].

### **1.3 Огляд наукових праць із застосуванням фотограмметрії для спостереження за об'єктами**

Безконтактні методи вимірювання та стеження все частіше застосовуються при експериментальних дослідженнях багатотільної динаміки та механіки деформованого тіла. Фотограмметрія демонструє, зокрема, високу точність та детальність у зборі даних, що робить її незамінним інструментом для аналізу деформацій та переміщень у реальному часі. Її застосування охоплює широкий спектр галузей (рис. 1.4): від аерокосмічної та автомобільної промисловості до архітектури та геймдизайну (створення комп'ютерних ігор), що свідчить про її універсальність та практичну реалізованість.

Однією з галузей, де використовують фотограмметрію, є вітроенергетика. За допомогою безконтактних вимірювань визначають

величину деформацій лопатей, траверс та інших елементів конструкцій вітряних турбін. Наприклад, у роботі [101] було визначено три форми коливань лопатей турбіни, діаметр яких 2,56 м, за різних режимів роботи. Дані вдалося одержати за допомогою фотограмметрії. Аналіз та фільтрація даних відбувалися за допомогою скрипта, написаного у Matlab.

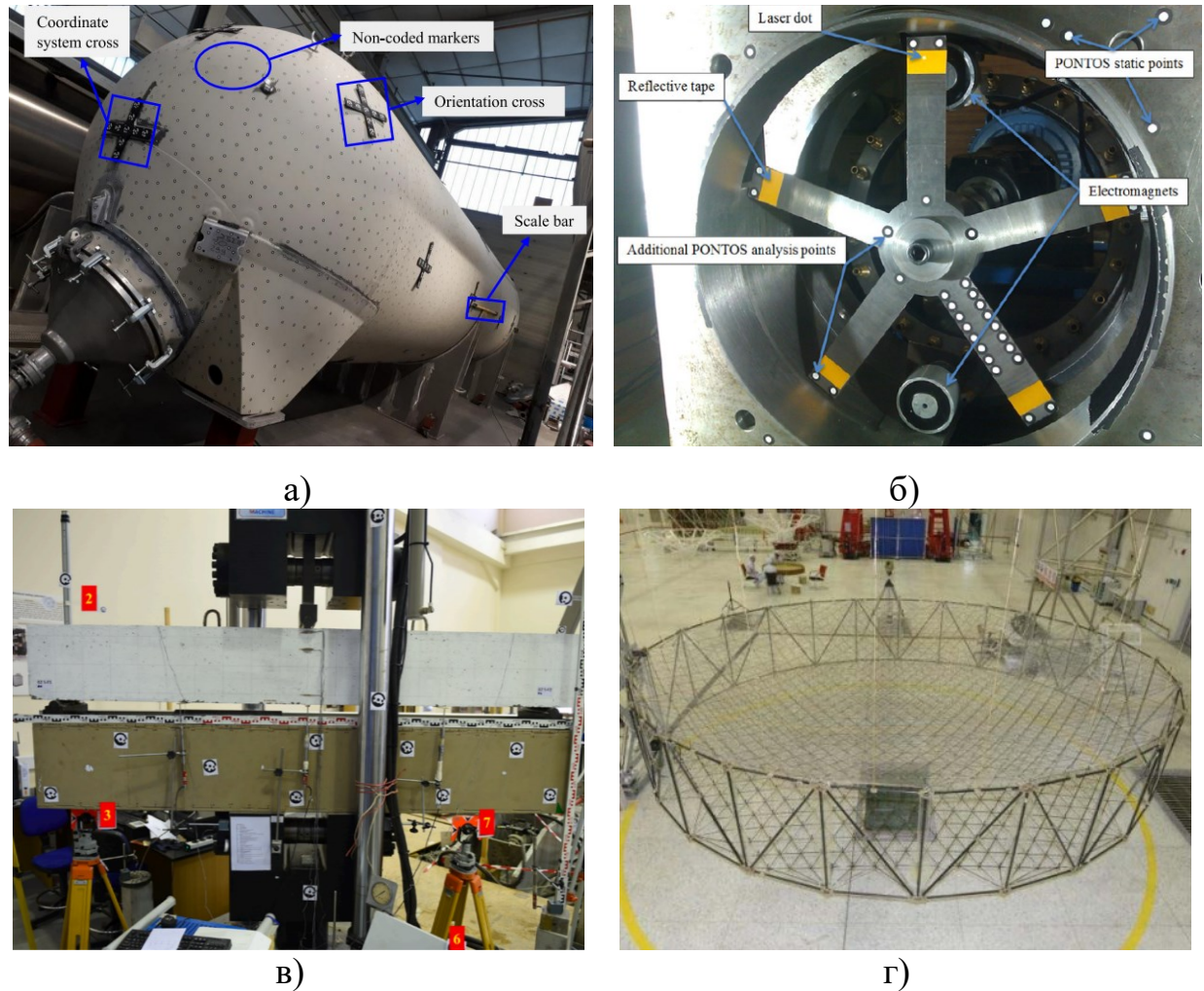


Рис. 1.4 Застосування фотограмметричного методу:

- а) дослідження деформацій промислового резервуара [74]; б) аналіз вібрацій лопатей турбомашини [78]; в) дослідження процесу руйнування бетонної плити [53]; г) моніторинг розкладання сітчастої антени [105]

Також проводяться дослідження полів деформацій лопатей турбіни: наявність тріщин та моніторинг їх зростання; вплив вібрацій та температурних змін. Так, у статті [109] проводилися вібротести лопатей вітряної турбіни Windspot потужністю 3,5 кВт. Розглянута лопать була випробувана в різних температурних режимах від  $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+40\text{ }^{\circ}\text{C}$  з кроком  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  з метою контролю

температурно залежних властивостей матеріалу як у низькому, так і у високому режимах. Також враховувалася вологість. Проводилися два типи вібротестів тривалістю по 120 с для сигналу білого шуму з ефективною смугою частот від 0 до 400 Гц та для синусоїдального сигналу із частотами від 1 Гц до 300 Гц. Всі експерименти фіксувалися камерами, що дало змогу отримати результати переміщень контрольних точок.

Основним критерієм для фотограмметричних експериментів є точність вимірювань, яка безпосередньо залежить від багатьох факторів (параметри камери, освітленість, наявність маркерів, температура та вологість навколишнього середовища тощо). Власне використання методу цифрової кореляції зображень (ЦКЗ) у порівнянні з розрахованими комп'ютерними моделями має досить високу точність [131]. Метод ЦКЗ сходиться із запрограмованим більш ніж на 95 %. Похибка для різних експериментів – не більше 2 мм для відхилень кінчиків лопатей.

Велику кількість робіт присвячено дослідженню коливальних процесів конструкцій за допомогою фотограмметрії [78, 87, 133, 136]. Розробляються або вдосконалюються методи експериментального модального аналізу на основі фотограмметрії, в якому цифрова камера використовується для вимірювання переміщень мішеней зображення, пов'язаних із лазерними плямами на об'єкті контролю. Чисельно показано, що розрахункові піксельні координати центру ваги цільового зображення добре співвідносяться з фактичними координатами при застосуванні методу стеження за точкою. Таким чином, універсальність методу дозволяє відстежувати коливання та їх форми як для тестових балок, так і для великогабаритних конструкцій, наприклад, мостів.

Дослідження полів деформацій у конструкціях, викликаних впливом температур [77], гравітаційним [115], крутильним або поздовжнім навантаженнями [140] може бути реалізовано за допомогою фотограмметричних експериментів. У поєднанні з методом скінченних елементів, обчисленні результати мають низьку похибку вимірювань.

Наприклад, результати експерименту з навантаження опори для лінії електропередач показують, що запропонований метод може забезпечити точність 0,1 мм/м, що є досить достовірно для такого роду конструкцій [134].

В ракетно-космічній галузі фотограмметрія застосовується завдяки можливості досягнення низької похибки вимірювань, що є вкрай важливим при дослідженні/тестуванні таких конструкцій: антен, сонячних панелей, виносних маніпуляторів та інших об'єктів, що трансформуються [80, 89, 92, 94, 103].

Налаштування та калібрування багатoelementних конструкцій з високою точністю – важка та трудомістка задача. Щоб перевірити працездатність нової антени, що розгортається, був розроблений, виготовлений і випробуваний прототип діаметром 5,0 м в наземному експерименті [120]. Результат тестового розгортання показав, що антену може бути успішно розкладено. У той же час була виготовлена відбиваюча поверхня антени, збіжність якої 0,65 мм була досягнута за рахунок фотограмметрії, і налаштування профілю, що забезпечило штатну роботу антени.

Фотограмметрія дозволяє проводити моніторинг конструкцій не тільки в лабораторних умовах, а й у реальних – наприклад, у космосі. Roll-Out Solar Array (ROSA) – це інноваційна, легка сонячна батарея з гнучкою підкладкою, яка використовує накопичену енергію деформації у своїх складових конструктивних елементах, щоб забезпечити розгортання без використання двигунів, зберігаючи при цьому ефективну упаковку [60]. Розкриття сонячної панелі становить 3 хв. 21 с. На батарею нанесені мітки, динаміка яких за допомогою фотограмметрії досліджується на коливання. Проведено порівняльний аналіз математичних моделей у Abaqus, Ansys із реальним експериментом в космосі.

У статті [67] описано метод вимірювання деформацій великої розкладної сітчастої мікрохвильової антени на основі фотограмметрії. Досліджується масив точок, розташованих у вузлах комірок антени. Обчислюються всі

координати даних вузлів. За допомогою методу найменших квадратів розрахована найкраща параболічна поверхня антени.

Окрім цього, широкий клас задач імітаційного та натурального моделювання становлять дослідження динаміки бортових маніпуляторів, штанг космічних апаратів або їх прототипів. Вивчається рух як окремих вузлів, наприклад, шарнірних з'єднань [97], так і цілих систем: тросових чи захоплення [64, 65]. Налаштування маніпуляторів для виконання заданих рухів потребує калібрування органів стеження (камери встановлюють безпосередньо на останній елемент конструкції або на нерухомі штативи таким чином, аби вони повністю охоплювали робоче поле маніпулятора). Так, у [57] розроблено нову систему калібрування шестиступеневого робота, що базується на відстеженні положення та орієнтації його схвату. На захоплювальному пристрої представлено маркери нового типу ArUco. Для вивчення ефективності системи калібрування на реальному устаткуванні було проведено експерименти в реальних умовах. У цих експериментах помилки абсолютного положення та орієнтації сходилися до 2,5 мм та  $0,2^\circ$  відповідно.

Інтегрований алгоритм фотограмметрії для розпізнавання маркерів, координати яких відслідковуються, може бути відкоригований за допомогою адаптивного розширеного методу Калмана [63]. Наприклад, у [113] був розроблений розширений фільтр Калмана для оцінки динаміки об'єктів у площині зображення. Даний алгоритм відпрацьовувався на стенді для наземного моделювання орбітальної діяльності космічного маніпулятора. Ця оцінка використовується як підвищення точності визначення стану кінематики об'єкта. У цій роботі також показано, що визначити пружну поведінку системи маніпулятора можна завдяки аналізу зображення, отриманого під час руху конструкції.

Отже, отримані координати маркерів, що порівняні з початковими або еталонними значеннями, використовуються при дослідженні коливань або у розрахунках за допомогою метода скінченних елементів. Таким чином, можна отримати поля напружень, деформацій та переміщень конструкцій або їх

вузлів. Яскравим прикладом цього можуть слугувати експериментальні дослідження за допомогою фотограмметрії для надувного маніпулятора, що складається з надувних тканинних трубок з покриттям і з'єднаннями сильфонного типу [97]. У цій роботі були проведені випробування на двосторонній розтяг, зсув для оцінки пружних констант мембран з полієфірної тканини та ПВХ-покриттям надувної конструкції. Прогнозування механічної поведінки конструкції надувного маніпулятора було проведено за допомогою методу скінченних елементів. Був оцінений вплив кількості, ширини і глибини складок на «надувній руці». Для експериментального дослідження поведінки розкладання був розроблений прототип надувної руки. За допомогою фотограмметрії ближньої дії було виміряно деформації та кут повороту маніпулятора. В результаті фотограмметричного експерименту були отримані координати контрольних точок, за якими було обчислено поля деформацій надувної руки, де результати моделювання збігаються з експериментальними.

Таким чином, переваги фотограмметричного методу роблять його ефективним для широкого спектра застосувань у різних галузях. Перспективність фотограмметрії полягає в її здатності адаптуватися до новітніх технологій, що дозволяє розширювати можливості в умовах складних та змінюваних середовищ, таких як космічний простір.

## Висновки до розділу 1

Здійснено всебічний аналіз наукових праць, присвячених існуючим і перспективним конструкціям космічних маніпуляторів, а також їх застосуванню для виконання різноманітних місій. Оцінено переваги та недоліки різних типів конструкцій, а також проблеми, з якими стикаються розробники та дослідники під час їхнього проектування та експлуатації.

Розглянуто кінематичні особливості функціонування космічних маніпуляторів, зокрема їхню динамічну поведінку, процеси вібрацій та деформацій, а також методи їхнього моделювання. Проведено аналіз підходів до розв'язання відповідних задач, включаючи числові методи та аналітичні підходи.

Окрему увагу приділено застосуванню фотограмметрії як ефективного безконтактного методу стеження за об'єктами та процесами у різних галузях. Встановлено, що фотограмметрія має високий потенціал для дослідження динамічних процесів конструкцій космічних маніпуляторів, забезпечуючи високу точність вимірювань та контролю параметрів руху.

Встановлено, що комплексний аналіз податливостей як конструкції маніпуляторів, так і їхніх вузлів залишається недостатньо вивченим. Зокрема, вплив локальних деформацій і люфтів у шарнірних та фланцевих з'єднаннях на точність позиціонування і динамічні характеристики системи потребує детальнішого дослідження. Врахування цих факторів є ключовим для підвищення ефективності керування та надійності маніпуляторних систем.

## **РОЗДІЛ 2.**

### **МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РОЗПОДІЛЕНОЇ ПОДАТЛИВОСТІ ЛАНОК МАНІПУЛЯТОРА**

Сучасні маніпулятори не є абсолютно жорсткими, а їхня податливість впливає на точність позиціонування та динамічну стійкість системи. Для аналізу цих ефектів застосовуються методи теорії пружності та коливань стрижнів, що описують деформаційні характеристики конструкцій. Ефективним інструментом моделювання є метод скінченних елементів, який дозволяє оцінити напружено-деформований стан ланок та усієї конструкції. Дослідження впливу розподіленої податливості допомагає краще зрозуміти динамічну поведінку маніпулятора та можливі шляхи компенсації деформацій. У даному розділі розглядаються основні співвідношення теорії пружності та коливань стрижнів, математична модель кінематичного керування дволанковою системою, принципи МСЕ та аналіз континуальної податливості маніпулятора.

#### **2.1 Вихідні передумови та розрахункова схема**

В умовах космічного простору, де відсутня атмосфера і знижена сила тяжіння, маніпулятори використовуються для виконання складних завдань, таких як монтаж і демонтаж обладнання, управління супутниками, а також маніпулювання з корисними вантажами, наприклад, сітчастими антенами або науковими приладами. Багатоланкові маніпулятори космічного призначення є важливим компонентом, що дозволяє виконувати ці завдання з високою точністю відпрацювання. Вони складаються з послідовно з'єднаних між собою шарнірними чи фланцевими вузлами гнучких стрижнів, що утворюють рухому механічну структуру. Особливість таких систем полягає у їхній складності та вимогах до високої точності роботи в умовах екстремальних навантажень та космічного вакууму.



Кожна ланка може бути представлена у вигляді гнучкого стрижня, що є основним елементом конструкції маніпулятора. Він є еластичною одиницею, здатною зазнавати деформації під впливом зовнішніх сил. Для моделювання його поведінки використовуються рівняння теорії пружності, які описують як стрижень реагує на навантаження, залежно від його геометричних характеристик (довжини, поперечного перерізу) та матеріалу. Податливість стрижня є важливою характеристикою, яка визначає ступінь його здатності до деформації при прикладанні сили. У контексті космічного маніпулятора податливість стрижня має суттєве значення, оскільки навіть незначні деформації впливають на точність виконання місій, особливо при роботі з високоточними приладами чи вантажами.

Граничні умови для гнучкого стрижня залежать від типу з'єднання з іншими елементами маніпулятора. Як правило, кінці стрижня закріплені на шарнірних або фланцевих вузлах, що забезпечують певну свободу руху, однак виникають обмеження на моменти і сили, що діють на кінці стрижня. У космічному середовищі ці граничні умови визначаються не тільки механічними характеристиками матеріалу, а й специфічними вимогами, пов'язаними з експлуатацією в умовах вакууму і відсутності атмосферного опору.

У космосі на конструкцію маніпулятора діють різні механічні сили, які можна класифікувати на внутрішні та зовнішні. Внутрішні сили в маніпуляторі включають пружні сили та моменти, що виникають у гнучких стрижнях через їхню податливість і прагнення відновити початкову форму після деформації, сили напружено-деформованого стану, зумовлені згинальними, осьовими та зсувними навантаженнями, а також сили реакції в шарнірах та з'єднаннях, які передають взаємодію між ланками й забезпечують кінематичні обмеження. Окрім цього, у матеріалі конструкції діють сили внутрішнього демпфування, що сприяють частковому поглинанню енергії коливань і їхньому згасанню, зменшуючи ризик неконтрольованих вібрацій.

Зовнішні сили виникають через вплив на маніпулятор гравітаційних полів, а також сили, пов'язані з рухом космічного апарату. Однією з найбільших проблем є виникнення сил інерції під час поворотів чи зупинок космічного апарату. При виконанні маніпулятором операцій, таких як розкриття або поворот, зміни його швидкості в умовах закону збереження кількості руху призводять до появи інерційних сил. Ці сили діють на всі ланки маніпулятора та викликають додаткові навантаження на його структуру, що потребує ретельного аналізу для забезпечення її стабільності та безпеки.

Крім того, важливим є врахування сил, що виникають при розкладанні самого маніпулятора чи корисного навантаження, наприклад, сітчастої антени [83, 120, 121]. В такому випадку важливими стають зміни тензора інерції, що пов'язані з перерозподілом частин конструкції. Зміна геометрії системи викликає зміни у динамічних характеристиках маніпулятора, що вимагає адаптації алгоритмів управління та точного моделювання його поведінки під час роботи.

Проблеми, що виникають при експлуатації маніпуляторів космічного призначення, мають різноманітний характер і включають як механічні, так і динамічні аспекти. Однією з основних проблем є демпфування коливань, які виникають в результаті зовнішніх впливів або швидких змін в русі маніпулятора. Коливання можуть бути результатом інерційних сил, що виникають при різких рухах, а також через підвищену податливість конструкції, що ускладнює точне виконання маніпуляцій. Для зменшення цих ефектів використовуються різні системи демпфування, що дозволяють знижувати амплітуду коливань та покращувати стабільність роботи маніпулятора.

Іншою важливою проблемою є стабілізація всієї конструкції маніпулятора під час його роботи. В умовах космічного простору відсутність значних механічних впливів, таких як сила тяжіння, ускладнює процес стабілізації маніпулятора. Для вирішення цієї проблеми застосовуються різні

алгоритми управління, що враховують не тільки рухи маніпулятора, але й його взаємодію з космічним апаратом.

Також важливою є проблема забезпечення точності позиціонування маніпулятора при високих швидкостях його руху та великих відстанях до об'єкта маніпуляції. Для цього необхідно враховувати всі можливі сили, що впливають на маніпулятор, а також застосовувати інноваційні методи управління, що дозволяють забезпечити стабільність і точність виконання операцій. Врахування всіх цих факторів є необхідною умовою для створення ефективного маніпулятора космічного призначення, що виконуватиме складні завдання в умовах, де звичайні механізми не здатні забезпечити належну точність та надійність.

У даній роботі розглядається модель пружного маніпулятора космічного призначення, який представлений як стрижнева система з елементами конструкції, з'єднаними за допомогою шарнірних вузлів і фланцевих з'єднань. Така конструкція забезпечує гнучкість маніпулятора, необхідну для виконання технологічних процесів у космічному просторі, а також дозволяє адаптувати його конфігурацію відповідно до поставлених завдань. Особливістю цієї моделі є дослідження розподіленої податливості елементів, яка визначає механічну реакцію конструкції на зовнішні навантаження та впливає на точність її кінематичного функціонування.

Основна увага приділяється аналізу континуальної податливості елементів маніпулятора, а також локальних зон підвищеної податливості, зокрема у шарнірних вузлах і фланцевих з'єднаннях, де можуть виникати значні деформації та втрати жорсткості. Для врахування цих особливостей застосовується імітаційне моделювання кінематичного керування маніпулятором, що дозволяє коригувати програмні рухи та компенсувати вплив податливості на точність позиціонування. Такий підхід сприяє підвищенню ефективності управління маніпулятором у складних умовах експлуатації.

## 2.2 Основні співвідношення теорії пружності та теорії коливань стрижнів

У даному розділі використовуються класичні поняття теорії пружності та теорії коливань стрижневих елементів. Тому має місце висвітлення термінів та основних співвідношень, обраних для опису та пояснень ключових аспектів [1, 30, 42].

Розглянемо напружено-деформований стан у довільній точці тривимірного тіла  $A = \{x, y, z\}^T$ , на яку діють зовнішні об'ємні сили  $F(A) = \{F_x, F_y, F_z\}^T$ , від дії яких виникають переміщення  $u(A) = \{u, v, w\}^T$ .

Рівняння рівноваги у розглянутій точці мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При лінійній постановці співвідношення між переміщеннями  $u(A) = \{u, v, w\}^T$  та рівняннями Коші мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В лінійному випадку деформації та переміщення пов'язані між собою додатковими шістьма рівняннями сумісності деформацій Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y}, \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

При лінійному зв'язку деформацій та ізотропії матеріалу закон Гука без врахування температурних деформацій записується у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), \gamma_{xy} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z), \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu} \tau_{xz}, \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z), \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Або, виражаючи напруження, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\mu \varepsilon_x + \lambda \theta, \sigma_{xy} = \mu \tau_{xy}, \\
\sigma_y &= 2\mu \varepsilon_y + \lambda \theta, \sigma_{yz} = \mu \tau_{yz}, \\
\sigma_z &= 2\mu \varepsilon_z + \lambda \theta, \sigma_{xz} = \mu \tau_{zx},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

де  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – об'ємна деформація,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – коефіцієнти Ляме.

Диференційне рівняння поздовжніх коливань стрижня, що має гомогенні характеристики по усій довжині (жорсткість при поздовжньому навантаженні  $EF = \text{const}$ , лінійна густина маси  $\rho F = \text{const}$ ,  $F$  – площа перерізу), буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{2.6}$$

де  $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$  – швидкість поширення поздовжніх хвиль у стрижні, а функція поздовжнього переміщення  $u(x, t)$  на його кінцях повинна задовільнять граничним умовам.

Розв’язок (2.6) представляють у вигляді [17, 46]:

$$u(x, t) = U(x) \cos(\omega t - \kappa), \quad (2.7)$$

де  $\omega, \kappa$  – відповідно частота та фаза коливань.

Відповідно, рішення (2.7) може бути знайдене за наступною формулою

$$U(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x, \quad (2.8)$$

де

$$\beta = \omega \left( \frac{\rho}{E} \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c_0},$$

а константи  $C_1, C_2$  визначаються з крайових умов.

Існує аналогія між поздовжніми та крутильними коливаннями. Тому рівняння крутильних коливань стрижня (2.6), що має незмінні вздовж всього стрижня жорсткість при крученні  $GI_K$  та лінійну масову інерцію  $\rho I_0$ , перепишеться наступним чином:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_K^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

де  $c_K = [GI_K/(\rho I_0)]^{1/2}$  характеризує швидкість поширення крутильних хвиль у стрижні.

Розв’язок рівняння (2.9), а саме вираз функції переміщення при крученні  $\theta(x, t)$  записується у наступному вигляді:

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \cos \omega t. \quad (2.10)$$

У виразі (2.10)  $\Theta(x)$  – просторовий розподіл кута закручування по довжині стрижня, який можна представити наступним чином

$$\Theta(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x, \quad (2.11)$$

$C_1, C_2$  - константи інтегрування, визначені граничними умовами.

Аналіз динамічної поведінки призматичного стрижня при згинальних коливаннях описуються диференціальним рівнянням:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.12)$$

де  $w(x, t)$  – прогин стрижня,  $EI$  – згинальна жорсткість стрижня,  $\rho F$  – масова лінійна щільність.

Функція прогину стрижня  $w(x, t)$  знаходиться у наступному вигляді

$$w(x, t) = W(x) \cos \omega t. \quad (2.13)$$

Просторовий розподіл прогину стрижня  $W(x)$  розв’язується так:

$$W(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx, \quad (2.14)$$

де хвильове число  $k = \sqrt{\frac{\rho F \omega^2}{EI}}$ . Для визначення констант інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4$  необхідно задати граничні умови, які залежать від типу опори стрижня на кінцях.

### **2.3 Побудова математичної моделі кінематики та динаміки космічних маніпуляторів з урахуванням конструктивних та функціональних особливостей**

Розглянемо механічну систему з кінематичною схемою, зображеною на рис. 2.1. Дана система складається з двох абсолютно твердих тіл, що з’єднані безмасовим шарніром з одним обертальним ступенем свободи у точці  $O$ . Вісь обертання перпендикулярна до площини руху.

На рис. 2.1 введено такі позначення:  $m_1, m_2$  – маси першого та другого тіл;  $\varphi$  – кут повороту шарніра;  $\bar{v}_1$  – вектор швидкості центру мас першого тіла відносно базису  $\bar{e}^c$ ;  $\bar{v}_2$  – вектор швидкості центру мас другого тіла відносно  $\bar{e}^c$ ;  $\bar{\omega}_1$  – вектор кутової швидкості першого тіла відносно  $\bar{e}^c$ ;  $\bar{\omega}_2$  – вектор кутової швидкості другого тіла відносно  $\bar{e}^c$ ;  $\theta_1, \theta_2$  – тензори інерції першого і

другого тіл у точках  $C_1, C_2$  відповідно;  $M(t)$  – керуючий момент у шарнірі (момент, створюваний приводом ступеня рухливості).

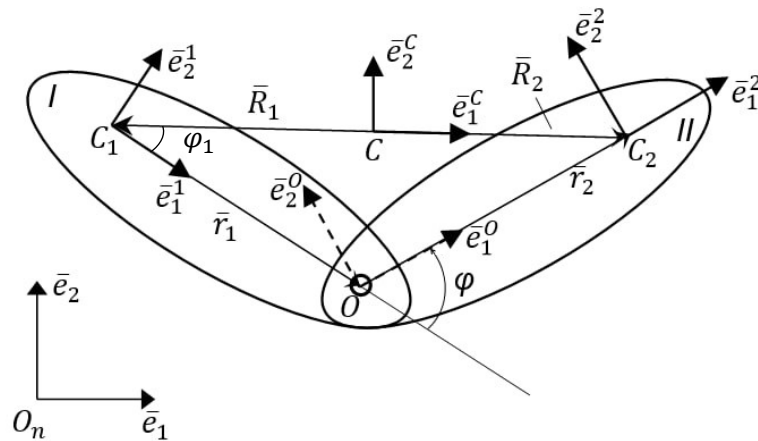


Рис. 2.1 – Механічна розрахункова схема дволанкової системи

Необхідно вивести рівняння руху даної механічної системи, провести дослідження динамічних характеристик дволанкового маніпулятора за наявності моделей космічного апарату (КА), корисного навантаження (КН) та без них. Провести порівняння розрахованого керуючого моменту у шарнірному вузлі в залежності від часу розгортання однієї ланки відносно іншої для отримання динамічних характеристик, які будуть використовуватися для рекомендацій стосовно підбору параметрів двигунів у шарнірах.

Згідно з [31, 44, 47] отримаємо та дослідимо рівняння динаміки дволанкової системи відносно базису, розташованого у центрі мас системи і поступово рухається відносно інерційного базису. Орбітальний рух системи не розглядаємо. Припускаємо, що зовнішніх активних та збурюючих силових факторів до тіл системи не прикладено. Конфігурація системи змінюється виключно внутрішнім моментом  $M(t)$ , що розвиває привід в шарнірі  $O$ .

У відповідності до теореми Кеніга, кінетична енергія руху системи відносно базису  $\bar{e}^c$

$$T = T_1 + T_2, \quad (2.15)$$

де  $T_1, T_2$  – кінетичні енергії першого та другого тіл.



$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_1 \cdot \theta_1 \cdot \bar{\omega}_1, \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_2 \cdot \theta_2 \cdot \bar{\omega}_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Кутові швидкості  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  і кутову швидкість у шарнірі  $O$  пов'язує співвідношення

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}, \quad (2.17)$$

де  $\bar{\omega}$  – кутова швидкість в шарнірі  $O$ .

Лінійну швидкість центру мас другого тіла  $\bar{v}_2$  отримаємо, диференціюючи за часом у базисі  $\bar{e}^c$  векторне співвідношення

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_1 + \bar{r}_1 + \bar{r}_2; \quad (2.18)$$

$$\dot{\bar{R}}_2 = \bar{v}_2 = \dot{\bar{R}}_1 + \dot{\bar{r}}_1 + \dot{\bar{r}}_2; \quad (2.19)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}) \times \bar{r}_2. \quad (2.19)$$

Після проєктування (2.17) та (2.19) на напрями базисних векторів  $\bar{e}_1^1, \bar{e}_2^1$  та  $\bar{e}_3^1$  отримаємо

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega} \text{ або } \phi_2 = \phi_1 + \phi; \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} v_{x2} = v_{x1} - \omega_1 r_{1y} - (\omega_1 + \omega) r_{y2} \\ v_{y2} = v_{y1} + \omega_1 r_{1x} + (\omega_1 + \omega) r_{x2} \end{cases}. \quad (2.21)$$

Як видно з рис. 2.1

$$\begin{cases} r_{x1} = r_1 \\ r_{y1} = 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} r_{x2} = r_2 \cos \varphi \\ r_{y2} = r_2 \sin \varphi \end{cases}. \quad (2.23)$$

Після підстановки (2.22) та (2.23) до (2.21) отримаємо

$$\begin{cases} v_{x2} = v_{x1} - (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}) r_2 \sin \varphi \\ v_{y2} = v_{y1} + \dot{\phi}_1 r_1 + (\dot{\phi}_1 + \omega \dot{\phi}) r_2 \cos \varphi \end{cases}. \quad (2.24)$$

Перепишемо вираз кінетичної енергії (2.15) у скалярній формі з урахуванням (2.16)

$$T = \frac{1}{2} \{ m_1 (v_{x1}^2 + v_{y1}^2) + I_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 (v_{x2}^2 + v_{y2}^2) + I_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi})^2 \}. \quad (2.25)$$

Підставимо (2.24) до (2.25)

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \{ & v_{x1}^2 (m_1 + m_2) + v_{y1}^2 (m_1 + m_2) + \dot{\varphi}_1^2 [I_1 + I_2 + m_2 (r_1^2 + r_2^2 + \\ & + 2r_1 r_2 \cos \varphi)] + \dot{\varphi}^2 (I_2 + m_2 r_2^2) + v_{x1} \dot{\varphi}_1 (-2m_2 r_2 \sin \varphi) + \\ & + v_{x1} \dot{\varphi} (-2m_2 r_2 \sin \varphi) + v_{y1} \dot{\varphi}_1 (2m_2 r_1 + 2m_2 r_2 \cos \varphi) + \\ & + v_{y1} \dot{\varphi} (2m_2 r_2 \cos \varphi) + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} (2m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \varphi + 2I_2) \}, \quad (2.26) \end{aligned}$$

де  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$  – проєкції вектору лінійної швидкості базису  $\bar{e}^1$  у напрямку базисних векторів  $\bar{e}_1^1$  та  $\bar{e}_2^1$ .

Знайдемо зв'язок між проєкціями вектору  $\bar{v}_1$  у базисах  $\bar{e}_1^1$  та  $\bar{e}_2^1$  (рис. 2.2).

$$\begin{cases} v_{xc} = v_{x1} \cos \varphi_1 - v_{y1} \sin \varphi_1 \\ v_{yc} = v_{x1} \sin \varphi_1 + v_{y1} \cos \varphi_1 \end{cases}$$

де  $v_{xc}$  та  $v_{yc}$  – проєкції вектору  $\bar{v}_1$  у базисі  $\bar{e}^c$ .

У матричній формі

$$\begin{pmatrix} v_{xc} \\ v_{yc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{pmatrix};$$

$$v_c = A v_1; \quad v_1 = A^T v_c.$$

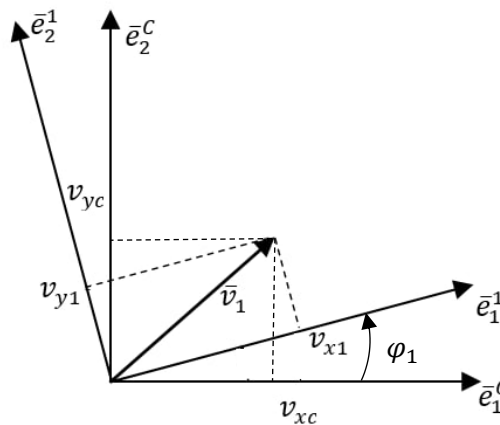


Рис. 2.2 – Вектор  $\bar{v}_1$  у базисах  $\bar{e}_1^1$  та  $\bar{e}_2^1$

Тоді

$$\begin{cases} v_{x1} = v_{xc} \cos \varphi_1 + v_{yc} \sin \varphi_1 \\ v_{y1} = -v_{xc} \sin \varphi_1 + v_{yc} \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Оскільки  $\bar{v}_1 = \dot{\bar{R}}_1$ , то  $v_{xc} = \dot{x}, v_{yc} = \dot{y}$ , де  $x, y$  – координати радіус-вектору  $\bar{R}$  в базисі  $\bar{e}^c$ .

Тоді

$$\begin{cases} v_{x1} = \dot{x} \cos \varphi_1 + \dot{y} \sin \varphi_1 \\ v_{y1} = -\dot{x} \sin \varphi_1 + \dot{y} \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Підставимо (2.27) в (2.26). Для цього знайдемо

$$\begin{cases} v_{x1}^2 = \dot{x}^2 \cos^2 \varphi_1 + \dot{y}^2 \sin^2 \varphi_1 + 2\dot{x}\dot{y} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ v_{y1}^2 = \dot{x}^2 \sin^2 \varphi_1 + \dot{y}^2 \cos^2 \varphi_1 - 2\dot{x}\dot{y} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \{ \dot{x}^2 (m_1 + m_2) + \dot{y}^2 (m_1 + m_2) + \dot{\varphi}_1^2 [I_1 + I_2 + m_2(r_1^2 + r_2^2 + \\ & + 2r_1 r_2 \cos \varphi)] + \dot{\varphi}^2 (I_2 + m_2 r_2^2) + \dot{x} \dot{\varphi}_1 [-2m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + \\ & + \dot{y} \dot{\varphi}_1 [2m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + \dot{x} \dot{\varphi} (-2m_2 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)) + \\ & + \dot{y} \dot{\varphi} (2m_2 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)) + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} (2(m_2 r_2 (r_2 + r_1 \cos \varphi) + I_2)) \}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Рівняння Лагранжа II роду.** Відносний рух вихідної системи (рис. 2.1) описується системою диференціальних рівнянь [20]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, (i = \overline{1,4}) \quad (2.31)$$

де  $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi_1, q_4 = \varphi$  – узагальнені координати;  $Q_i$  – зовнішні сили по відповідним узагальненим координатам, що впливають на механічну систему.

Виведемо компоненти для цієї системи:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(m_1 + m_2) + \dot{\varphi}_1 [-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] +$$

$$+ \dot{\varphi} (-m_2 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi));$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y}(m_1 + m_2) + \dot{\varphi}_1 [m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] +$$

$$+ \dot{\varphi} (m_2 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi));$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = \dot{\phi}_1(m_1 + m_2) + \dot{\phi}_1[I_1 + I_2 + m_2(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi)] + \\ &+ \dot{x}[-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + \dot{y}[m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + \\ &+ \dot{\phi}[m_2r_2(r_2 + r_1 \cos \varphi) + I_2];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_2 + m_2r_2^2) + \dot{x}[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{y}[m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)].\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_3} &= \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \dot{x}\dot{\phi}_1[-m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + \\ &+ \dot{y}\dot{\phi}_1[-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + \\ &+ \dot{x}\dot{\phi}[-m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \dot{y}\dot{\phi}[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_4} &= \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \dot{\phi}_1^2[-m_2r_1r_2 \sin \varphi] + \dot{x}\dot{\phi}_1[-m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{y}\dot{\phi}_1[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \dot{x}\dot{\phi}[-m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{y}\dot{\phi}[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \dot{\phi}_1\dot{\phi}[-m_2r_2r_1 \cos \varphi].\end{aligned}$$

**Рівняння динаміки за узагальненими координатами.** За узагальненою координатою  $q_1 = x$  маємо:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(m_1 + m_2) &+ \ddot{\phi}_1[-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + \ddot{\phi}[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{\phi}_1^2[-m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}[-m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{\phi}^2[-m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] = 0.\end{aligned}$$

За узагальненою координатою  $q_2 = y$  маємо

$$\begin{aligned}\ddot{y}(m_1 + m_2) &+ \ddot{\phi}_1[m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + \ddot{\phi}[m_2r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{\phi}_1^2[-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \\ &+ \dot{\phi}^2[-m_2r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] = 0.\end{aligned}$$

За узагальненою координатою  $q_3 = \varphi_1$  маємо

$$\begin{aligned} \ddot{x}[-m_2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi))] + \ddot{y}[m_2(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi))] + \\ + \ddot{\varphi}_1[I_1 + I_2 + m_2(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi)] + \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}[-m_2 r_1 r_2 \sin \varphi] + \dot{\varphi}^2[-m_2 r_1 r_2 \sin \varphi] = 0. \end{aligned}$$

За узагальненою координатою  $q_4 = \varphi$  маємо

$$\begin{aligned} \ddot{x}[-m_2 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)] + \ddot{y}[m_2 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi)] + \ddot{\varphi}(I_2 + m_2 r_2^2) + \\ + \dot{\varphi}_1^2[-m_2 r_1 r_2 \sin \varphi] + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}[-m_2 r_1 r_2 \sin \varphi] = M(t). \end{aligned}$$

Розв'язуючи перші два рівняння відносно  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  та підставляючи отримані розв'язки у рівняння для  $\varphi_1$ , одержимо рівняння динаміки для  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \left[ I_1 + I_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi) \right] - \dot{\varphi} \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} [r_2^2 + r_1 r_2 \cos \varphi] + \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} m_2 [r_1 r_2 \sin \varphi] - \dot{\varphi}^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [r_1 r_2 \sin \varphi] = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Підставляючи отримані розв'язки у рівняння для  $\varphi$ , одержимо рівняння динаміки для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} [r_2(r_2 - r_1 \cos \varphi)] + \ddot{\varphi} \left[ r_2^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + I_2 \right] - \\ - \dot{\varphi}_1^2 \left[ \frac{m_1 m_2 + 2m_2^2}{m_1 + m_2} r_1 r_2 \sin \varphi \right] - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} [m_2 r_1 r_2 \sin \varphi] = M(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким чином, рівняння (2.32), (2.33) повністю описують відносний рух дволанкової системи під дією внутрішнього моменту  $M(t)$ . При відомих вхідних параметрах та відомому кінематичному керуванні, ми можемо знайти значення керуючого моменту  $M(t)$ .

## 2.4 Імітаційне моделювання кінематичного керування маніпулятором

Імітаційне моделювання кінематичного керування маніпулятором реалізоване у MATLAB Simulink – програмному середовищі для

проектування, симуляції та аналізу динамічних систем [105]. Розглядався рух дволанкової системи без моделей КА – модель зображено синім кольором, КН – червоним (рис. 2.5, а) та з ними (рис. 2.5, б). Ланки розгортаються по черзі: перша ланка – проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з вільного торця першого вузла; а друга – по ходу годинникової стрілки. Кожне з тіл має три системи координат (СК): у місцях кріплення тіла з попереднім (СК1) і наступним тілами (СК2), у центрі мас тіла (СКЦ). Введення параметрів моделей проводиться у блоці Body (рис. 2.3). Орієнтація тіла відбувається шляхом повороту вісей координат необхідної СК (рис. 2.4). Використовувалося два види шарнірів: шестиступеневий – знаходиться у СКЦ КА; з одним ступенем свободи (обертання навколо однієї вісі) – знаходяться у шарнірних вузлах секцій маніпулятора та КА і першої ланки. Як вісь обертання у кожному блоці обрана вісь абсцис.

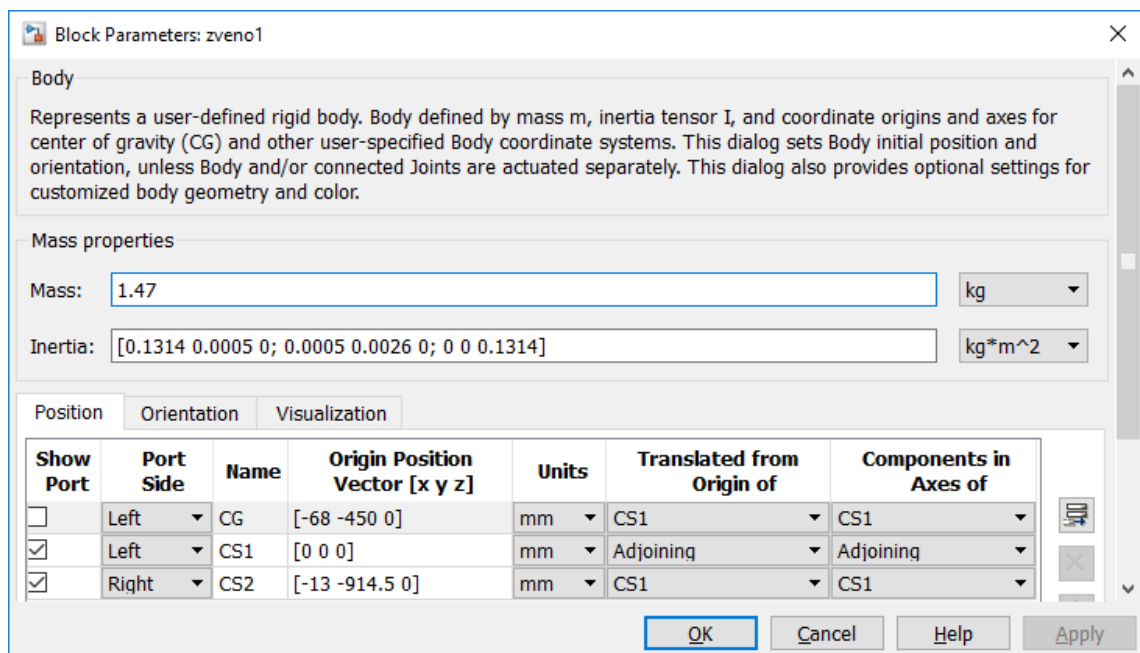


Рис. 2.3 – Блок параметрів першої ланки маніпулятора (позиціонування СК)

В якості тестової розрахункової моделі динаміки дволанкової системи були обрані тіла з такими характеристиками:

- для ланок:  $СК1 = [0 \ 0 \ 0]$  мм,  $СК2 = [13 \ 914,5 \ 0]$  мм,  $СКЦ = [68 \ 450 \ 0]$  мм, маса  $m = 1,47$  кг, тензор інерції  $I = [0,1314 \ 0,0005 \ 0; 0,0005 \ 0,0026 \ 0; 0 \ 0 \ 0,1314]$  кг·м<sup>2</sup>;

- для космічного апарату:  $СК1 = [0 \ 0 \ 0]$  мм,  $СК2 = [0 \ 0 \ 0]$  мм,  $СКЦ = [407 \ 719 \ 9]$  мм, маса  $m = 330$  кг, тензор інерції  $I = [72,4309 \ 0,008 \ 0,0007; 0,008 \ 35,2022 \ 0,001; 0,0007 \ 0,001 \ 72,4368]$  кг·м<sup>2</sup>;
- для корисного навантаження:  $СК1 = [0 \ 0 \ 0]$  мм,  $СК2 = [0 \ 0 \ 0]$  мм,  $СКЦ = [139,6 \ 0 \ 433,6]$  мм, маса  $m = 7,8$  кг, тензор інерції  $I = [0,5265 \ 0 \ 0; 0 \ 0,5265 \ 0; 0 \ 0 \ 0,0759]$  кг·м<sup>2</sup>.

Функціонування шарнірів маніпулятора проводиться по черзі шляхом подачі сигналу кутового переміщення, що генерується запрограмованою Matlab-функцією, лістинг якої наведено у додатку А. Як вхідні параметри функції виступають поточний час симуляції  $t$  і час розвороту однієї ланки  $t_{зв}$ .

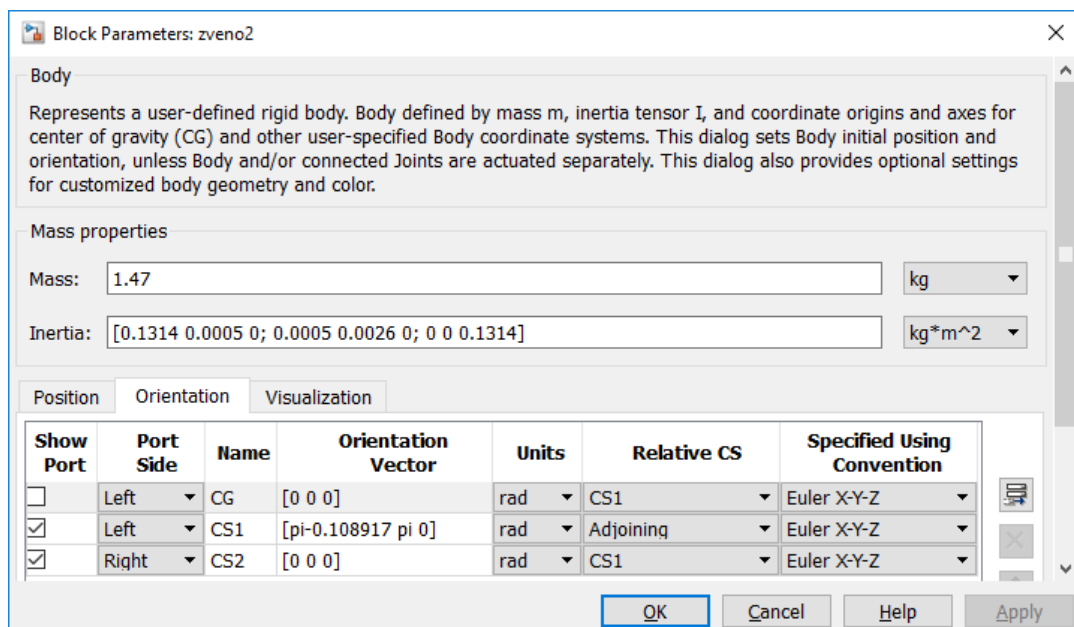


Рис. 2.4 – Блок параметрів другої ланки маніпулятора (поворот СК)

Сигнал кутового переміщення  $\varphi$  демонструє зміну кута повороту шарніра у часі (рис. 2.6, а). Його крива складається з двох параболічних сегментів, які забезпечують плавний розгін та гальмування. Початок і завершення руху характеризуються низьким градієнтом, що мінімізує динамічні навантаження на конструкцію.

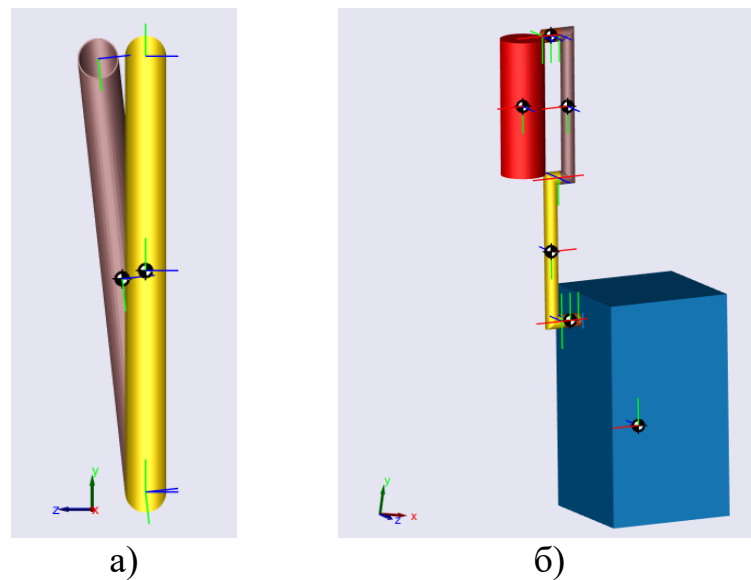


Рис. 2.5 – Схема дволанкової системи:

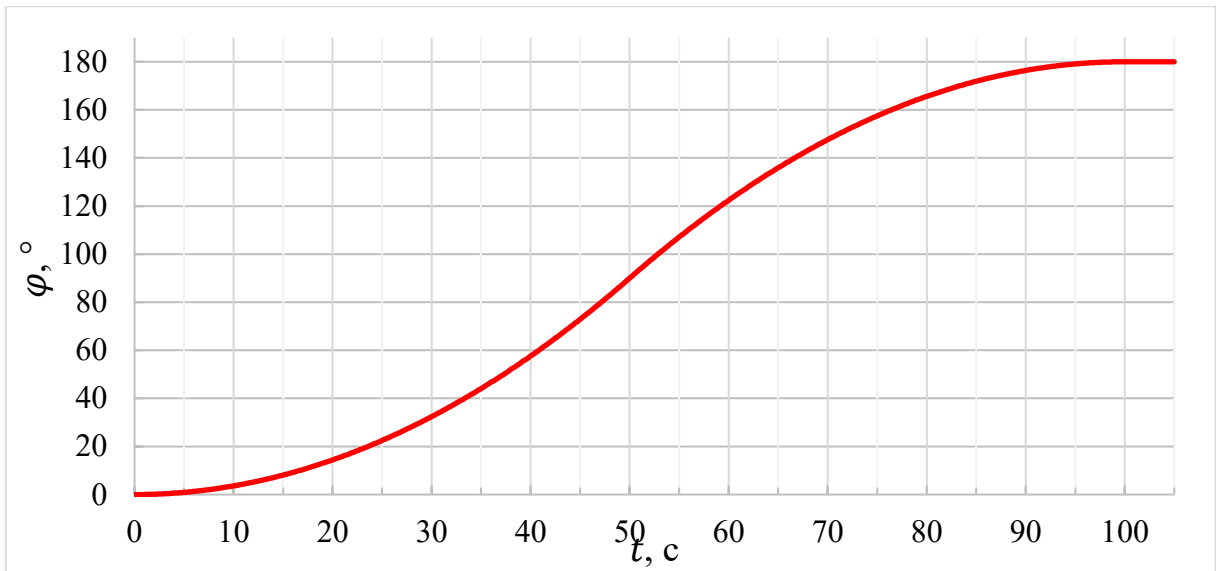
а) без моделей КА, КН; б) з моделями КА, КН

Після генерації сигналів кутових переміщень ведуться розгалуження до блоків першої та другої похідних, тим самим отримуючи кутові швидкість та прискорення відповідно (рис. 2.6, б та рис. 2.6, в). Графік кутової швидкості  $\dot{\phi}$  має лінійну залежність, що свідчить про рівномірне прискорення та гальмування. Спостерігається симетрична трикутна форма, де максимальне значення швидкості досягається у середині інтервалу, після чого відбувається плавне зниження до нуля.

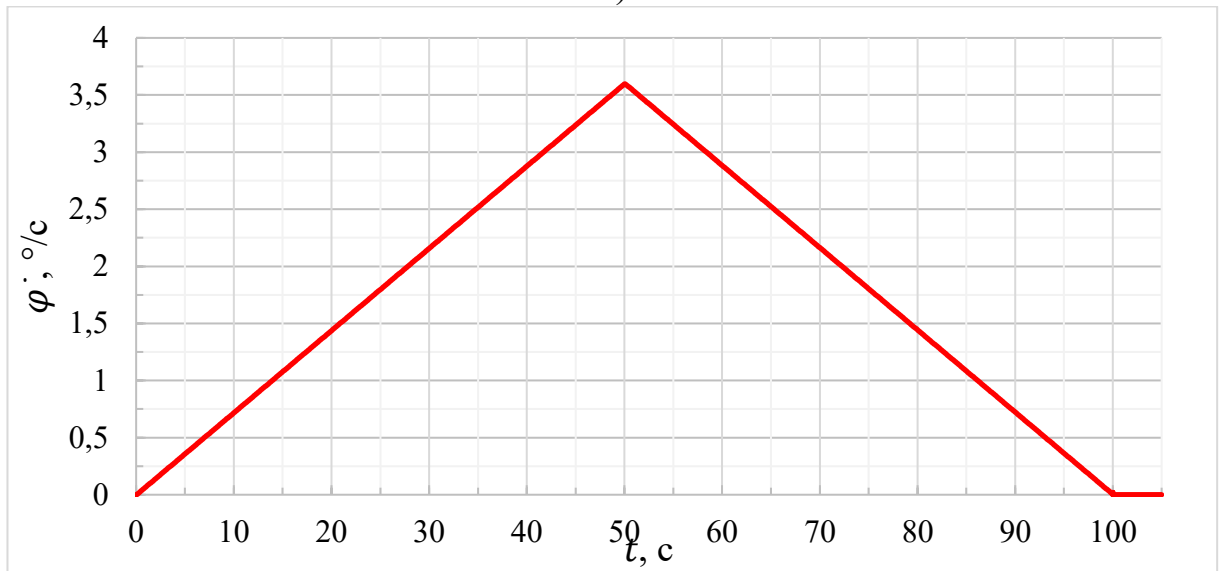
Графік кутового прискорення  $\ddot{\phi}$  характеризується двома сталими рівнями позитивного та негативного значення, що вказує на рівномірний характер зміни швидкості. Відповідно, на початку руху прискорення має додатне значення, у середній фазі воно стає нульовим, а при гальмуванні приймає від'ємне значення, що сприяє поступовій зупинці шарніра.

Задання кутових характеристик шарніра маніпулятора у такій формі забезпечує плавний, контрольований і стабільний рух механізму. Параболічна форма сигналу кутового переміщення дозволяє уникнути різких змін швидкості та прискорення, що зменшує інерційні навантаження, знижує ризик деформацій і підвищує точність позиціонування. Плавний розгін і гальмування запобігають коливанням маніпулятора, що важливо для точних технологічних процесів, зокрема в космосі.

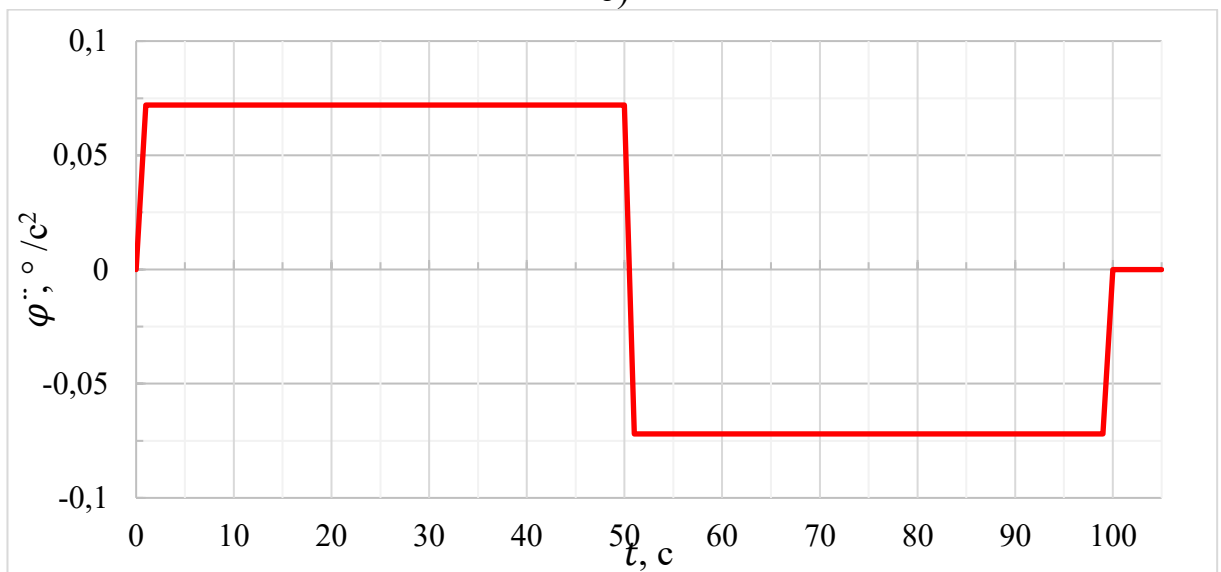




а)



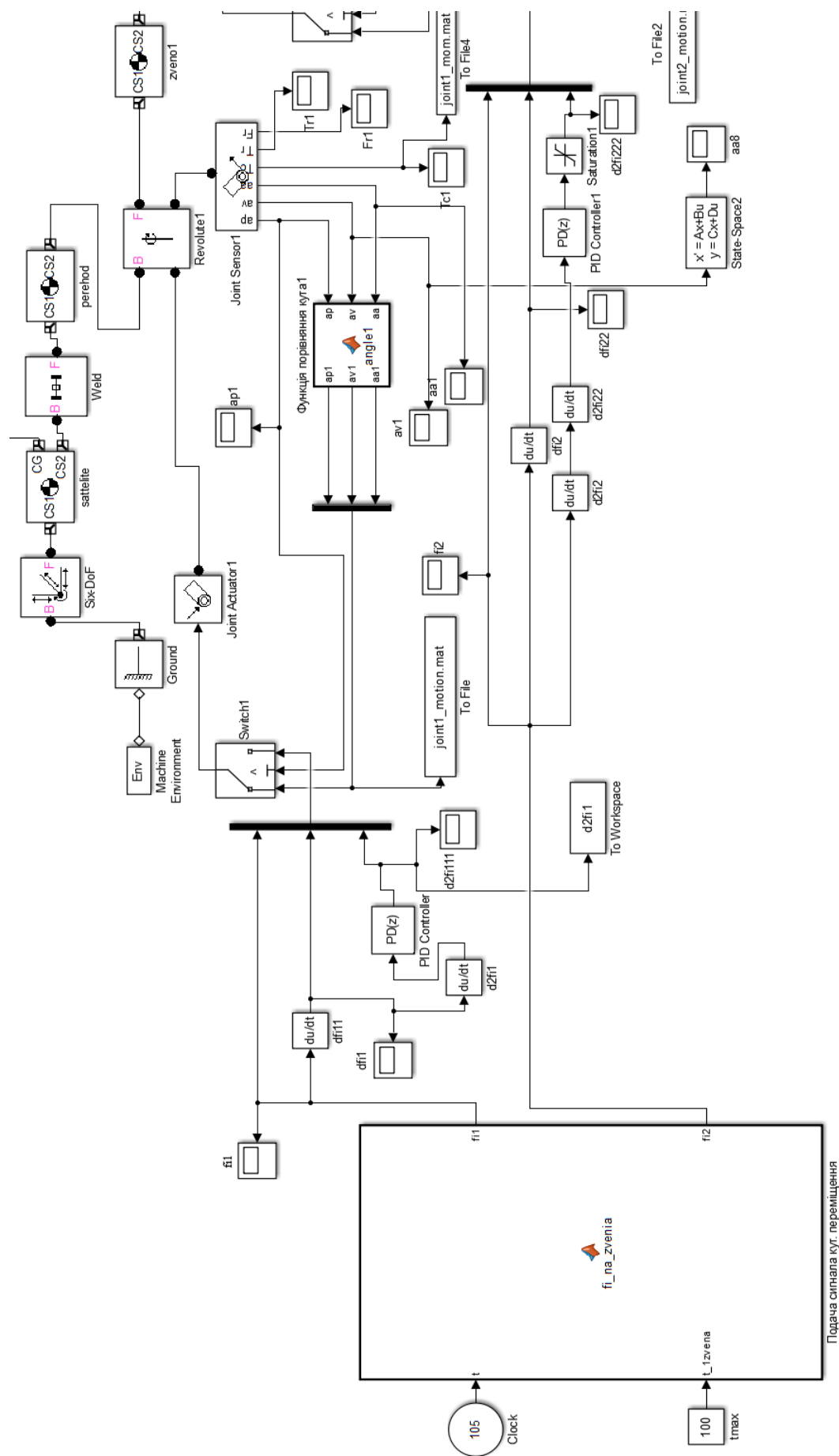
б)



в)

Рис. 2.6 – Кутова кінематика шарніра:

а) кутове переміщення; б) кутова швидкість; в) кутове прискорення



Контрольований профіль швидкості та прискорення робить рух прогнозованим, спрощує керування та узгоджує роботу кількох шарнірів. Відсутність різких прискорень мінімізує енергоспоживання й навантаження на приводи, що підвищує ефективність та надійність роботи системи. Менші механічні навантаження та вібрації сприяють збільшенню терміну служби маніпулятора, що критично для автономних та високоточних систем.

Через блок Мух сигнали кутових переміщень, швидкості та прискорення об'єднуються в один і подаються на умовний перемикач Switch. Логічна складова цього блока полягає в подачі сигналів кутових характеристик блока Joint Actuator залежно від значення кута повороту ланки, що зчитується з Joint Sensor (рис. 2.7).

Якщо кут повороту першого шарніра знаходиться в діапазоні  $0^\circ \geq \varphi_1 < 180^\circ$ , на блок Joint Actuator надходять сигнали від Matlab-функції. Щойно значення кута повороту першої ланки досягає  $180^\circ$ , блок Switch автоматично перемикає джерело сигналу з Matlab-функції на *Функцію порівняння кута1*, яка зчитує кутові характеристики безпосередньо із сенсора шарніра.

*Функція порівняння кута1* передає на Joint Actuator постійне значення кута повороту  $180^\circ$  та нульові кутову швидкість і прискорення, тим самим блокуючи обертальний рух вузла.

На етапі зчитування сигналів кутових характеристик, моментів та сил реакцій використовується блок To File для збереження даних у файл. Цей документ може в подальшому замінити початкову Matlab-функцію та слугувати як індивідуальний сигнал кутового моменту для кожного шарніра.

Керування другим шарніром маніпулятора організовано аналогічно. Дана програма може адаптуватися під  $N$  кількість ланок, відповідно, і шарнірів. Модифікація поточного варіанту системи проводиться шляхом впровадження блоків необхідної кількості ланок маніпулятора, розширюючи за аналогією Matlab-функцію та відповідні зв'язки у блок-схемі.

У таблиці 2.1 наведено максимальні значення розрахованого моменту  $M(t)$  у шарнірі між ланками маніпулятора. При імітаційному моделюванні

динаміки дволанкової системи з масово-інерційними параметрами КА, КН спостерігаємо найвищі значенні моментів  $M(t)$ , які перевищують результати у випадку без КА, КН у понад 5 разів.

Таблиця 2.1 – Порівняння максимальних значень  $M(t)$  у шарнірному вузлі при наявності КА, КН та без них

$t_{зв}, c$	$M(t) \cdot 10^{-3}, H \cdot m$	
	Без моделей КА, КН	З моделями КА, КН
20	10,7	67,1
40	2,825	17,23
60	1,277	7,902
80	0,725	5,166
100	0,599	4,23

Результати чисельного моделювання свідчать про значний вплив масово-інерційних параметрів КА та КН на величину максимального значення моменту в шарнірі маніпулятора. Аналіз таблиці показує, що в усіх випадках величина моменту у шарнірі є значно більшою при врахуванні моделей КА та КН порівняно з варіантом без них.

Зі збільшенням часу розвороту однієї ланки  $t_{зв}$  від 20 до 100 с спостерігається суттєве зменшення моменту  $M(t)$  у шарнірі. Зокрема:

- без моделей КА та КН величина моменту зменшується від  $10,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$  (при  $t_{зв} = 20 \text{ с}$ ) до  $0,599 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$  (при  $t_{зв} = 100 \text{ с}$ ), що є зниженням більш ніж у 17 разів;
- при врахуванні моделей КА та КН момент також зменшується, але залишається значно вищим: від  $67,1 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$  (при  $t_{зв} = 20 \text{ с}$ ) до  $4,23 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$  (при  $t_{зв} = 100 \text{ с}$ ), що відповідає зниженню майже у 16 разів.

Отримані результати підтверджують, що збільшення часу розвороту зменшує момент у шарнірі, оскільки знижуються інерційні навантаження, пов'язані з прискореним рухом ланок. Врахування масово-інерційних

параметрів КА та КН суттєво впливає на розрахункові значення моменту, що вказує на необхідність їхнього аналізу під час проектування та оптимізації керування маніпулятором.

На прикладі  $t_{зв} = 80$  с розглянемо поведінку графіка розрахованого моменту у шарнірі між ланками моделі маніпулятора з урахуванням КА та КН (рис. 2.8). Динаміка моменту в першому шарнірі безпосередньо залежить від кутових характеристик (переміщення, швидкості та прискорення), які подаються як сигнали актуації, що зображені на рис. 2.6. У період 0–40 с спостерігається фаза розгону першої ланки: момент у шарнірі зростає, що відповідає поданню кутового прискорення для досягнення необхідної швидкості обертання. При  $t = 40$  с момент досягає свого максимального значення, після чого починається фаза гальмування (40–80 с), під час якої момент поступово зменшується, забезпечуючи плавне припинення руху першої ланки.

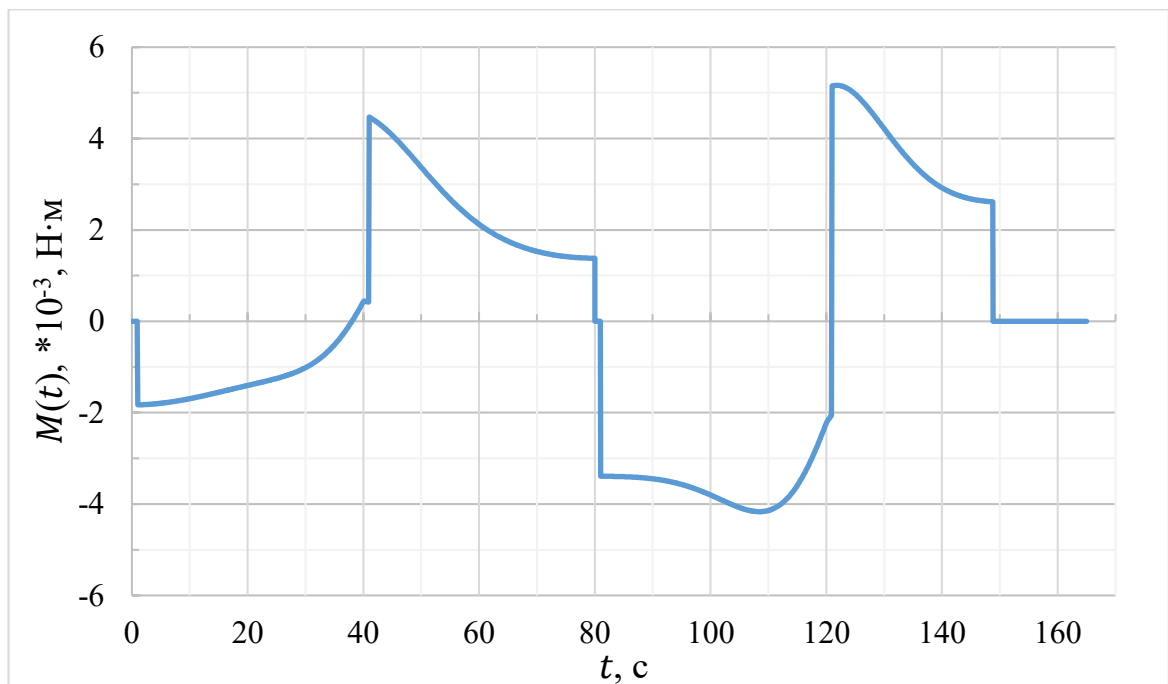


Рис. 2.8 – Графік розрахованого моменту у шарнірі між ланками з моделями КА, КН та  $t_{зв} = 80$  с

Після  $t = 80$  с керуючі сигнали на перший шарнір більше не подаються, оскільки починає працювати другий шарнір, забезпечуючи розгортання другої ланки. Проте, навіть за відсутності прямої актуації, момент у першому шарнірі

продовжує змінюватися (80–165 с). Це пояснюється реакцією системи на рух другої ланки, що спричиняє перерозподіл навантажень у всій конструкції. Зокрема, на початку цього періоду спостерігається різкий стрибок моменту у протилежний бік, що є наслідком інерційного впливу та зміни конфігурації системи. Далі момент поступово спадає, стабілізуючись ближче до нуля.

Таким чином, аналіз графіка підтверджує залежність моменту від кутових характеристик маніпулятора та їх змін у часі, а також демонструє вплив взаємодії двох шарнірів у багатоланковій системі.

Для оцінки точності чисельного моделювання був проведений порівняльний аналіз отриманих числових результатів із аналітичними розв'язками, наведеними у виразах (2.32) та (2.33). Розрахунки показали, що розбіжність між числовими та аналітичними значеннями моменту в шарнірі маніпулятора не перевищує 4%, що свідчить про високу достовірність запропонованої чисельної моделі.

Застосовані спрощення та припущення у моделюванні не призводять до суттєвого викривлення динамічних характеристик маніпулятора. Зокрема, врахування моделей космічного апарата та корисного навантаження адекватно відображається в отриманих числових даних, що дозволяє використовувати цю методику для практичного прогнозування навантажень у шарнірних вузлах маніпулятора.

Додатково, проведений аналіз демонструє, що рівень точності чисельного методу є достатнім для його застосування у процесі проєктування маніпуляторних систем.

## **2.5 Скінченно-елементний аналіз податливості маніпулятора**

Визначення континуальної податливості моделі космічного маніпулятора є необхідним для точного моделювання динаміки. Через гнучкість його конструктивних елементів, класичні жорсткі моделі не здатні адекватно описати деформації, що виникають під дією навантажень.

Застосування методу скінченних елементів дозволяє дискретизувати стрижневі елементи маніпулятора, отримати локальні жорсткісні та податливі характеристики, що враховують змінний переріз, анізотропію матеріалу та граничні умови. Це критично важливо для точного прогнозування деформацій та динамічної поведінки маніпулятора під час складних маневрів.

Також МСЕ дає змогу оцінити податливість у реальних умовах експлуатації, коли маніпулятор піддається комбінованим навантаженням (згин, кручення, розтяг). Включення континуальної податливості в модель дозволяє більш точно розраховувати керуючі дії для компенсації гнучкості та забезпечення стабільності виконання програмних рухів маніпулятора у відкритому космосі.

### **2.5.1 Основні положення методу скінченних елементів**

Метод скінченних елементів для тривимірної моделі з урахуванням теорії пружності ґрунтується на загальних принципах дискретизації та апроксимації, але враховує специфіку тривимірного напружено-деформованого стану матеріалу. Основними етапами для вирішення задач методом скінченних елементів називають [19, 24]:

- 1) побудова функціонала повної потенціальної енергії системи;
- 2) дискретизація системи на скінченні елементи та вибір координатних функцій;
- 3) побудова матриці жорсткості та зведення локального навантаження вузловим для кожного СЕ;
- 4) побудова канонічних рівнянь (накладення граничних умов);
- 5) визначення кількості ступенів свободи системи;
- 6) визначення компонентів напружено-деформованого стану (переміщень, напружень) в області СЕ, тобто в усіх невідомих вузлах.

За допомогою функцій форми знаходиться зв'язок між вузловими значеннями та значеннями всередині елемента. Тому переміщення у кожному скінченному елементі можуть бути подані у наступному вигляді:

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad (2.34)$$

де  $N_i(x, y, z)$  – функції форми,  $u_i$  – вузлові переміщення,  $i = \overline{1, n}$  – номер вузла у СЕ.

Функціонал повної потенціальної енергії для тривимірного напруженого стану записується у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} (F_x u + F_y v + F_z w) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.35)$$

де  $\Omega$  – область дискретизації системи.

Основні співвідношення у матричній формі приймуть вигляд:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}; \{\varepsilon\} = [D]\{u\}, \quad (2.36)$$

де  $\{u\}, \{\sigma\}, \{\varepsilon\}, [E], [D]$  – відповідно вектори переміщень, напружень, деформацій та матриці пружності, диференціювання.

Матриця пружності для ізотропного матеріалу має вигляд:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

де  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ляме.

Матриця диференціювання записується наступним чином:



$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Тепер функціонал повної потенціальної енергії для тривимірного тіла (2.34) прийме більш компактний вигляд:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \{F\}^T \{u\} d\Omega. \quad (2.39)$$

Системи алгебричних рівнянь (2.36) розв'язуються чисельно методами прямого або ітераційного типу (метод Гаусса-Зейделя, метод спряжених градієнтів, тощо). В результаті обчислюються напруження та деформації у всій області.

Для підвищення збіжності результатів проводиться адаптивне уточнення сітки шляхом її локального згущення в областях концентрації напружень. Також виконується порівняння отриманих результатів із теоретичними розрахунками або експериментальними даними.

Таким чином, МСЕ для тривимірних моделей у рамках теорії пружності забезпечує чисельне моделювання складних механічних конструкцій та дозволяє визначати їхні характеристики напружено-деформованого стану з урахуванням реальних граничних умов і навантажень.

### 2.5.2 Результати скінченно-елементного аналізу

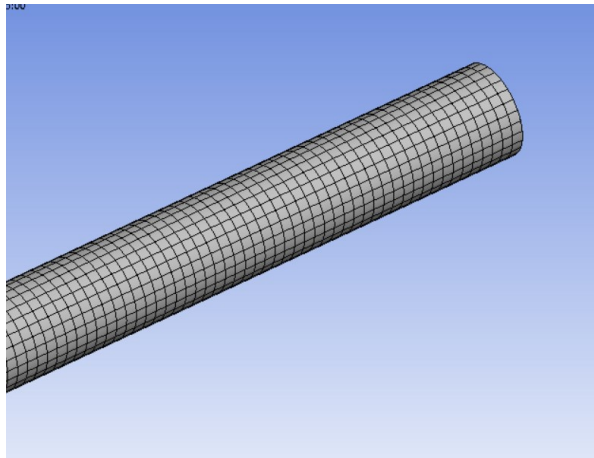
Для дослідження континуальної податливості було проведено комп'ютерне моделювання модального аналізу для спрощеної моделі маніпулятора без фланців та шарнірних вузлів. До уваги бралися перші шість форм вільних коливань. Дана модель є консольно закріпленою балкою у вигляді тонкостінної труби з вантажем на вільному кінці, що імітує корисне навантаження у складеному вигляді. Таким чином, проводиться імітація вільних коливань розгорнутого маніпулятора, що жорстко зафіксований одним кінцем до космічного апарату, а на іншому – несе корисне навантаження. Розрахунки проводилися за допомогою метода скінченних елементів у пакеті прикладних програм ANSYS.

*Вхідні параметри:* для тонкостінної циліндричної труби застосовувався матеріал *вуглепластик CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymer)* з *матрицею PEEK (Polyetheretherketone)* з наступними характеристиками: густина  $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга уздовж волокон  $E_1 = 120 \text{ ГПа}$  та впоперек –  $E_2 = 5 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; довжина труби  $L = 3,745 \text{ м}$ , внутрішній діаметр  $\varnothing_{\text{вн}} = 0,08 \text{ м}$  та товщиною стінки  $\delta = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , маса балки  $m = 2,59 \text{ кг}$ , маса вантажу  $M = 4,56 \text{ кг}$  була реалізована як зосереджена у точці. Досліджувана модель була розбита на 13055 елементів (рис. 2.9, а), кількість вузлів склала 74745 одиниць. Використовувались 20-вузлові квадратичні гексагональні лагранжеві скінченні елементи з трьома ступенями свободи ( $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ ) (рис. 2.9, б). Розмір СЕ становив 10 мм. Час розрахунку склав 14,7 с.

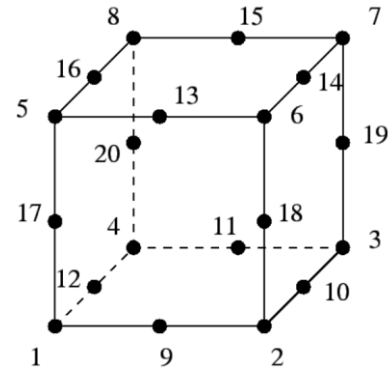
Невідомі функції переміщень апроксимуються неповним поліномом 4-го ступеня виду [25]:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7z^2 + c_8xy + c_9xz + \\ & + c_{10}yz + c_{11}x^2y + c_{12}x^2z + c_{13}y^2x + c_{14}y^2z + c_{15}z^2x + c_{16}z^2y + c_{17}xyz + \\ & + c_{18}x^2yz + c_{19}y^2xz + c_{20}z^2xy, \end{aligned} \quad (2.40)$$

де  $c_i$  ( $i = \overline{1,20}$ ) - невідомі коефіцієнти, що визначаються із умови збігу значення скалярної величини  $\psi$  в кожному  $i$ -му вузлі з відповідними вузловими значеннями функцій переміщень.



а)



б)

Рис. 2.9 Розбиття моделі на скінченні елементи:

а) фрагмент скінченно-елементної сітки, б) вид СЕ

Максимальні переміщення та частоти перших шести форм коливань наведені у таблиці 2.2, а на рис. 2.10, 2.11 зображено деформований та недеформований стани моделі при першій та других гармоніках.

Для визначення характерних конфігурацій вигину стрижня при вільних коливаннях використовують аналітичні розрахунки [17, 18, 46] для простих та ідеалізованих випадків конструкцій. Для більш ускладнених моделей застосовують МСЕ, метод Рітца або методи власних значень з певним ступенем апроксимації.

Таблиця 2.2 – Результати модального аналізу

Форма коливань	Мах переміщення, мм	Частота, Гц
1	13,901	3,2709
2	13,901	3,271
3	29,167	42,328
4	29,167	42,329
5	29,627	133,38
6	29,627	133,38

Першу гармоніку можна оцінити спрощеними методами, проте вищі форми мають складніші розподіли деформації та напружень, які не можна просто отримати емпірично. Вони залежать від деталей геометрії, граничних умов та розподілу маси; тому і визначаються лише за допомогою числових методів.

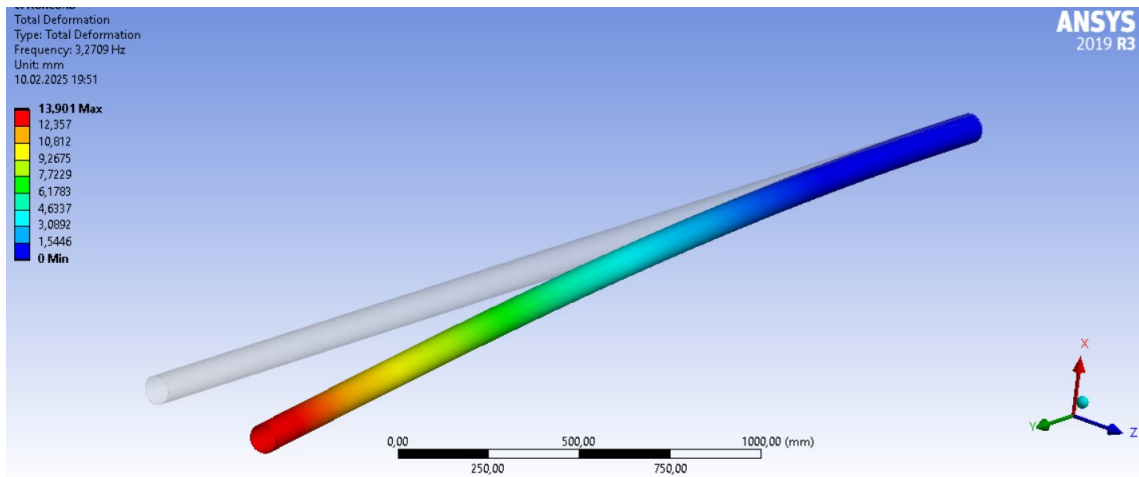


Рис. 2.10 Деформація моделі при першій формі коливань

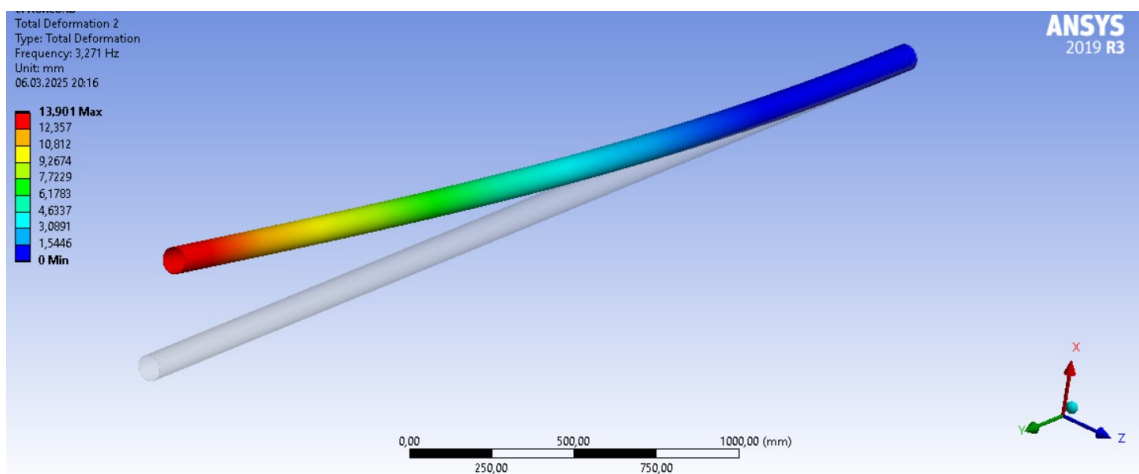


Рис. 2.11 Деформація моделі при другій формі коливань

## 2.6 Порівняння обчислювальних та аналітичних результатів

Оскільки перша форма власних коливань має найнижчу частоту і найбільш просту форму вигину, вона може бути знайдена та оцінена як аналітично, так і за допомогою емпіричних формул. Для багатьох конструкцій

інженерні стандарти орієнтовані насамперед на запобігання резонансу першої форми, оскільки вона найімовірніше проявиться під дією динамічних навантажень. Також у випадку резонансу саме перша гармоніка буде визначати найбільші переміщення та напруження у моделі.

Порівняння першої форми вільних коливань консольної балки з вантажем на кінці, отриманої при розрахунку у Ansys, будемо виконувати за допомогою емпіричної формули Ірвіна [125], що записується у вигляді:

$$f_1 = \sqrt{\frac{3EI}{(0,2235m + M)L^3}}, \quad (2.41)$$

де  $E$  — модуль пружності матеріалу балки,  $I$  — момент інерції перерізу балки,  $m$  — маса балки,  $M$  — маса вантажу на кінці консолі,  $L$  — довжина балки.

Таким чином, підставляючи у (2.41) всі вхідні дані обчислювальної моделі, описаної у пункті 2.5.2, отримаємо аналітично розраховану першу власну частоту стрижня:  $f_1 = 3,2824$  Гц та порівняємо її з даними, наведеними у таблиці 2.2.

Обчислимо відносну похибку результатів:

$$\delta = \frac{3,2824 - 3,2709}{3,2824} \cdot 100\% = 0,35 \, \%.$$

Отже, як можна побачити, збіжність аналітичних та отриманих за допомогою МСЕ результатів досить висока.

## Висновки до розділу 2

За результатами проведеного комп'ютерного моделювання і низки обчислювальних експериментів стосовно дослідження динамічних властивостей та зусиль у шарнірному вузлі дволанкової системи отримані залежності величини розрахованого моменту від часу розвороту однієї ланки маніпулятора обраного типу, а також від наявності моделей основного тіла та корисного навантаження. Розв'язана обернена задача динаміки для маніпулятора як аналітично, так і чисельно, де відносна похибка результатів складає менше 4%.

Створена програма розрахунку зусиль у шарнірних вузлах адаптується під будь-яку кількість ланок і шарнірів, оскільки її модифікація здійснюється шляхом додавання блоків, що відповідають необхідній кількості ланок маніпулятора.

Розраховане значення моменту у шарнірному вузлі маніпулятора значно змінюється, зокрема більше ніж у 5 разів, залежно від того, чи використовуються моделі космічного апарата (КА) або корисного навантаження (КН), в даному випадку – складеної параболічної антени, при розрахунках.

Показано, що чим менший час розгортання однієї ланки маніпулятора, тим більші результати обчислених моментів у шарнірі. Саме тому програмні рухи кінематичного керування як усією конструкцією маніпулятора, так і кожного шарнірного привода мають бути плавними та безперервними, що дозволяє знижувати навантаження на окремі компоненти. Плавність рухів є важливою для досягнення високої точності позиціонування, оскільки різкі коливання чи зміни швидкості викликають додаткові динамічні ефекти, що впливають на точність виконання завдань.

Проведено верифікацію першої форми коливань моделі маніпулятора, отриманої за допомогою МСЕ, з емпіричною формулою Ірвіна з досить високою збіжністю результатів. Відносна похибка результатів становить 0,35%.

Розглянуті задачі можуть бути також використані для вибору та відпрацювання алгоритмів керування рухом систем взаємного позиціонування космічного апарату та корисного навантаження, а також при оптимальному проєктуванні конструкцій космічних маніпуляторів.

### **РОЗДІЛ 3.**

## **ВИЗНАЧЕННЯ ПОДАТЛИВОСТІ ШАРНІРНИХ ВУЗЛІВ МАНІПУЛЯТОРА**

Основним фактором, що впливає на точність роботи маніпуляторів та штанг космічних апаратів, що служать для переміщення і фіксації корисного навантаження відносно апарата та розміщення периферійного обладнання, є континуальна пружна податливість елементів конструкції, місця локального зменшення жорсткості у фланцевих з'єднаннях, а також податливість і люфти в шарнірах механізму. З наведених вище факторів люфти і податливість шарнірних вузлів найважче піддаються розрахунку і, як правило, визначаються експериментально.

В даному розділі для експериментального визначення люфтів і податливостей шарнірних вузлів бортових маніпуляторів і штанг запропоновано використовувати метод фотограмметрії, який використовує серію зображень, зафіксованих камерами, лазерними трекерами, теодолітами, тощо [76] для визначення координат точок, границь об'єктів чи їх зміни з часом [74].

### **3.1 Застосування фотограмметрії для дослідження податливості у шарнірах маніпулятора**

Вивченню люфтів у шарнірних вузлах різноманітних механізмів присвячено велику кількість робіт. Вплив люфтів призводить до появи нелінійних складових у рівняннях руху та алгоритмах керування. Вони ускладнюють, а інколи і унеможливають, обчислення та точне моделювання робочих процесів даних конструкцій. Так, у [122] авторами Tian Q., Flores P., Lankarani H. M. було розглянуто 500 різноманітних джерел, які описували найбільш актуальні аналітичні, чисельні та експериментальні підходи для кінематичного та динамічного аналізу багатотільних механічних систем з



люфтами у шарнірних з'єднаннях. Автори зазначають, що більшість робіт присвячена моделюванню та чисельним алгоритмам для простих механізмів із зазорами у з'єднаннях. Однак, багато складних механізмів з великою кількістю з'єднань з люфтами, таких як розгортальні конструкції у космосі, системи з підшипниками, біомеханічні та магнітні з'єднання потребують більш детального вивчення, як на етапі проєктування, так і на етапах експериментального моделювання чи у процесах розкладання-складання. Оскільки, виготовлення та збирання шарнірних вузлів без люфтів неможливо, тому саме для таких задач необхідні нові методи, підходи для моделювання, стеження, контролю зазорів у багатоеlementних конструкціях.

### **3.1.1 Основні принципи та функціональні можливості фотограмметрії**

Фотограмметрія є науково-технічною дисципліною, яка займається отриманням геометричної інформації про об'єкти та простір за допомогою фотографічних зображень, зроблених з різних точок огляду. Її теоретична база спирається на принципи геометрії, оптики та сучасних інформаційних технологій. У результаті обробки зображень створюються точні тривимірні моделі об'єктів і місцевості. Фотограмметрія поділяється на два основні види: наземну та аерофотограмметрію, що застосовується для аналізу даних, отриманих з повітряних носіїв, таких як дрони, літаки та супутники.

Основним призначенням фотограмметрії є отримання точних вимірювань та геометричної інформації для вирішення прикладних завдань у різних галузях. У картографії та геодезії вона використовується для створення топографічних карт, цифрових моделей рельєфу та визначення координат. У сфері архітектури й будівництва фотограмметрія забезпечує документування стану будівель, моніторинг будівельних робіт та створення тривимірних моделей споруд. Її можливості також активно застосовуються для збереження культурної спадщини, зокрема для документування археологічних об'єктів та пам'яток архітектури. У промисловості та інженерії фотограмметрія використовується для оцінки стану конструкцій, виявлення дефектів і

створення цифрових моделей для проектування. В екології та сільському господарстві вона дозволяє проводити моніторинг стану екосистем, аналізувати посіви й досліджувати водні ресурси.

Фотограмметрія має значний набір технічних можливостей. Однією з ключових переваг є створення детальних тривимірних моделей об'єктів та місцевості з високою точністю, яка в деяких випадках досягає міліметрового рівня. Іншим важливим аспектом є здатність аналізувати динамічні зміни об'єктів або територій на основі даних, отриманих у різний час. Сучасні програмні засоби забезпечують автоматизацію процесів обробки зображень і побудови цифрових моделей, що суттєво підвищує швидкість і ефективність робіт. Фотограмметрія також дозволяє дистанційно досліджувати важкодоступні чи небезпечні для людини зони, наприклад, за допомогою дронів. Її інтеграція з іншими технологіями, такими як геоінформаційні системи (ГІС) і лазерне сканування, розширює сфери застосування та підвищує точність отриманих результатів.

Метод фотограмметрії можна класифікувати на основі типу цілей (досліджуваних маркерів), які використовуються для відстеження точок, кореляції цифрових зображень або підходів без цілей. Алгоритм відстеження точок використовує фотограмметричні камери для визначення координат окремих маркерів, встановлених на досліджуваних об'єктах. Для цього методу серія оптичних мішеней (як правило, висококонтрастних круглих точок або світловідбиваючих маркерів) встановлюється на досліджувану конструкцію [100, 116, 134]. Центри оптичних цілей визначаються за допомогою алгоритму пошуку еліпса, а координати точок у тривимірному просторі визначаються за допомогою техніки тріангуляції. Тривимірне відстеження точок визначає переміщення цілей шляхом відстеження оптичних цілей на різних часових етапах і порівняння їх координат з еталонною або початковою стадією. Для другої категорії цифрова кореляція зображень — це метод оптичного вимірювання, який працює на основі варіацій безперервних шаблонів у градаціях сірого. Перед вимірюванням необхідно підготувати ділянку тестової

конструкції. Підготовка поверхні зазвичай виконується шляхом нанесення висококонтрастного стохастичного малюнка на структуру (зазвичай чорно-білого). Відповідний розмір точок у цьому методі зазвичай менший, ніж розмір оптичних цілей, які використовуються в тривимірному відстеженні точок. Після підготовки поверхні робиться серія знімків за допомогою однієї чи декількох камер. Метод кореляції зображень працює шляхом створення фасетів (або підмножин), що перекриваються, на загальній області дослідження [59, 123, 131, 132]. Оскільки стохастичний візерунок створюється випадковим чином, кожна грань має унікальне значення інтенсивності світла, і програмне забезпечення може розпізнавати рух кожного унікального фасетного візерунка на різних етапах. Зсув і деформація по всій досліджуваній області обчислюються шляхом порівняння кожної грані з відповідною фасеткою в початковому або еталонному етапах. В останньому типі, у безцільовому підході, немає оптичної цілі або шаблону для визначення деформації конструкції. Автори використовували внутрішні елементи або краї структури, щоб ідентифікувати об'єкт або ділянки об'єкта, які потрібно відстежувати [52, 53, 62]. Цей підхід може бути не таким точним, як тривимірне відстеження точок або кореляція цифрових зображень, але він має свої переваги: коли немає можливості встановити оптичні цілі на структуру або нанести на поверхню візерунок.

Серед трьох перерахованих вище методик 3D-точкове відстеження є найбільш зручним і практичним для широкомасштабного обстеження конструкцій, які зазнають статичних механічних навантажень. Насправді метод ЦКЗ забезпечує вимірювання деформації об'єктів всієї області, але він обмежений полем огляду камер і може вимірювати відбиття лише на тих частинах конструкції, що розпізнаються камерами. Таким чином, цей метод не можна використовувати для вимірювання зміщення великих і складних конструкцій [74].

Основу фотограмметрії складають векторна алгебра і аналітична геометрія. Основними концепціями аналітичної фотограмметрії є умови

колінеарності та компланарності векторів, які є важливими для розвитку цифрової фотограмметрії.

Нехай маємо прямокутну праву систему координат  $OXYZ$ , в якій точка  $O_1$  має координати  $X, Y, Z$ ; та іншу просторову систему координат  $SX'Y'Z'$ , де точка  $O_1$  має координати  $X', Y', Z'$ .  $S$  – центр проекції або центр об'єктива фотокамери. В загальному вигляді, як викладено у [21], аналітичне перетворення координат точок знімка із просторової системи  $Sxyz$  у фотограмметричну систему координат  $SX'Y'Z'$  реалізується за допомогою рівняння переводу координат (3.1). Спочатку проводиться трансформування координат, що зображено на рис. 3.1, – паралельне перенесення початку координат з точки  $O_1$  в точку  $S$ , а також «повороту простору» з допомогою кутів Ейлера  $\alpha, \omega, \kappa$  та направляючих косинусів.

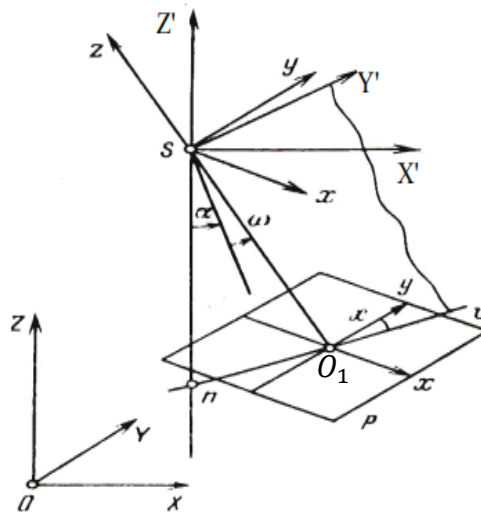


Рис. 3.1 – Просторові системи координат для визначення положення точок знімка [23]

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix}, \text{ або } \left. \begin{aligned} X' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) - a_3f \\ Y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) - b_3f \\ Z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) - c_3f \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

де  $A$  – матриця направляючих косинусів;  $f$  – фокусна відстань камери;  $a_i, b_i, c_i$  – направляючі косинуси кутів між осями  $X', Y', Z'$  та осями  $x, y, z$  відповідно,  $i = 1, 2, 3$ ;  $x_0, y_0$  – координати головної точки  $O_1$  на площині  $P$  обраного знімку. На рис. 3.1  $n$  – точка надиру, утворена перпендикуляром

від центру об'єктива до площини фотознімку;  $nv$  – луч, що утворює головну вертикаль знімка.

Обчислення просторових координат нахилених знімків можна виразити у формі наступних формул [22]:

$$\begin{aligned} X &= X_S + (Z - Z_S) \frac{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3f}, \\ Y &= Y_S + (Z - Z_S) \frac{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3f}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Якщо ж необхідно, навпаки, отримати координати точок знімку за допомогою відомих координат відповідних точок об'єкта, використовують зворотні залежності:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= f \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}, \\ y - y_0 &= f \frac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

У формулах (3.2), (3.3)  $X_S, Y_S, Z_S$  – координати центра проєкції (передньої вузлової точки об'єктива в момент знімання).

Таким чином, координати кодованих мішеней обчислюються на всіх фотознімках, на яких вони з'являються. Кожна мітка повинна бути видимою, чіткою і не розмитою на двох або трьох фотографіях з мінімальним кутом огляду, щоб забезпечити її виявлення та підтвердження з високим рівнем достовірності. З усіх ракурсів має бути розпізнано мінімум по 8–10 чітких міток без значних змін у перспективі зйомки. Вже після розпізнавання усіх мішеней можна вводити до фотосету еталонну міру/и, відстань до якої або її довжину відомо і яку можна використовувати як масштаб для проведення необхідних вимірювань.

Фотограмметрія є сучасним та універсальним інструментом для вирішення широкого кола завдань у науці, інженерії, екології та інших сферах. Вона забезпечує високий рівень точності, автоматизації та інтеграції, що

робить її незамінною у процесах дослідження та проектування просторових об'єктів і явищ.

### **3.1.2 Методика дослідження люфтів у шарнірах маніпулятора за допомогою фотограмметричного методу**

Для експериментального визначення люфтів у шарнірних вузлах маніпуляторів запропоновано методику, яка відпрацьовувалася в лабораторних умовах на базі виготовленої дволанкової конструкції. Фотограмметричний метод був реалізований з використанням кодованих мішеней. Експерименти включали налаштування системи імітації невагомості моделі маніпулятора та дослідження впливу кута повороту маніпулятора на точність вимірювань.

В якості досліджуваного об'єкту використовувався дволанковий маніпулятор, який було встановлено на макет компенсації ваги, що імітує умови невагомості для верхньої ланки. Модель маніпулятора (рис. 3.2) складалася з двох алюмінієвих труб та колін, з'єднаних аргонодуговим зварюванням з вольфрамовим електродом під кутом  $45^\circ$ , марки *АДЗ1Т5* та фланців з алюмінієвого сплаву *Д16Т*. Діаметр, товщина стінки та довжина труб складали 85 мм, 2,5 мм, 750 мм відповідно. Поворотний механізм був розташований в середині конструкції.

Для зменшення тертя рухомих частин, між ними використовувався фторопластовий сепаратор марки Ф-4.

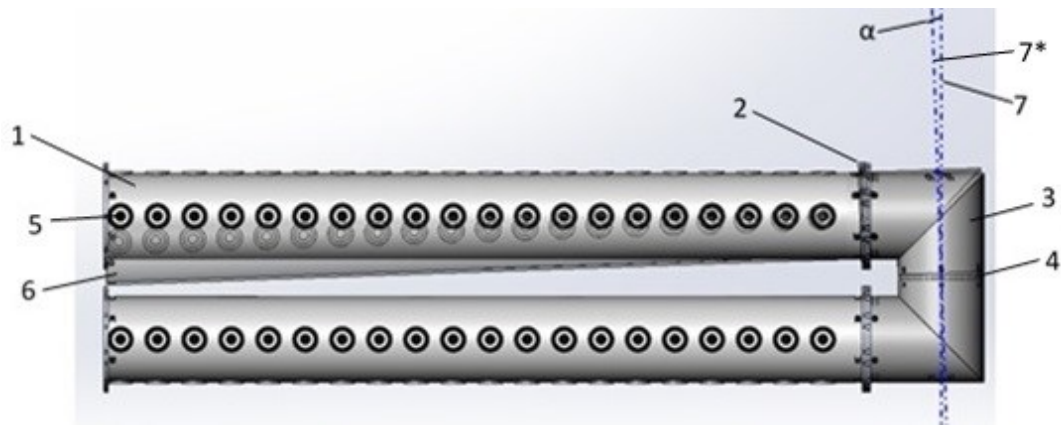


Рис. 3.2 – Модель дволанкового маніпулятора: 1 – труба, 2 – з'єднувальні фланці, 3 – перехідне коліно, 4 – сепаратор, 5 – кодована мішень, 6 – труба маніпулятора, нахилена у площині зображення на кут  $\alpha$  через люфт, 7 – вісь обертання шарнірного вузла маніпулятора, 7\* - вісь обертання шарнірного вузла маніпулятора, відхилена на кут  $\alpha$

Зйомка проводилася за допомогою однієї цифрової камери Nikon D5100 з фокусною відстанню  $f = 35$  мм. Параметри камери наведені на рис. 3.3. Фотограмметричне дослідження складалося з наступних етапів:

- підготовка досліджуваного об'єкта до фотограмметричного експерименту (друк кодованих мішеней, їх розподіл та фіксація на маніпуляторі, області навколо нього). Міжцентрова відстань для маркерів, розташованих безпосередньо на маніпуляторі, складала 37 мм, а для інших – 76 мм та 82,5 мм по горизонталі та вертикалі відповідно;
- калібрування камери за допомогою спеціальної калібрувальної сітки. Для високоточного налаштування необхідно розпізнати більше, ніж 80 зі 100 наявних точок;
- проведення аналітичних вимірювань у місцях з'єднань масивів кодованих маркерів та їх розташувань за допомогою цифрового штангенциркуля ШЦЦ-150, похибка якого, за технічними характеристиками, не перевищує 0,1 мм;
- налаштування джерел світла та їх кількості;

- фотозйомка об'єкта з різних ракурсів, під різними кутами нахилу/повороту камери, встановленої на штатив. Відстань від об'єктиву камери до найвіддаленішого маркеру становила близько 2,5 м;
- обробка фотозображень, розпізнавання маркерів (контрольних точок);
- додаткова фотозйомка тих ракурсів маніпулятора, де не були розпізнані маркери (за необхідністю);
- обчислення координат маркерів та розрахунок похибки вимірювань.

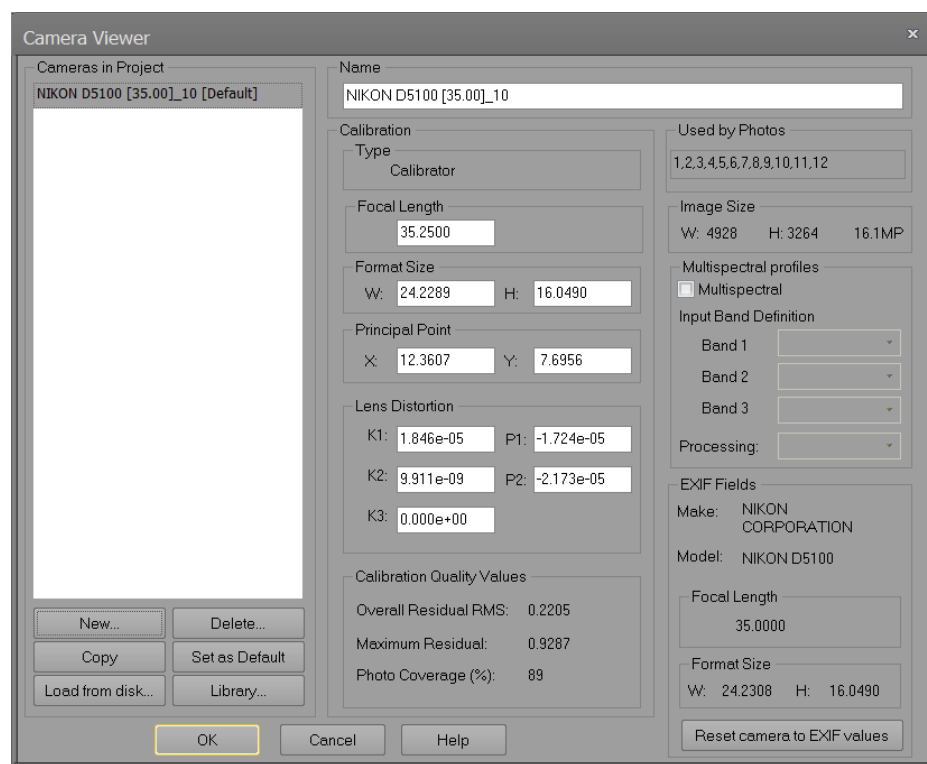


Рис. 3.3 Характеристики камери Nikon D5100 при калібруванні  
фотограмметричною програмою

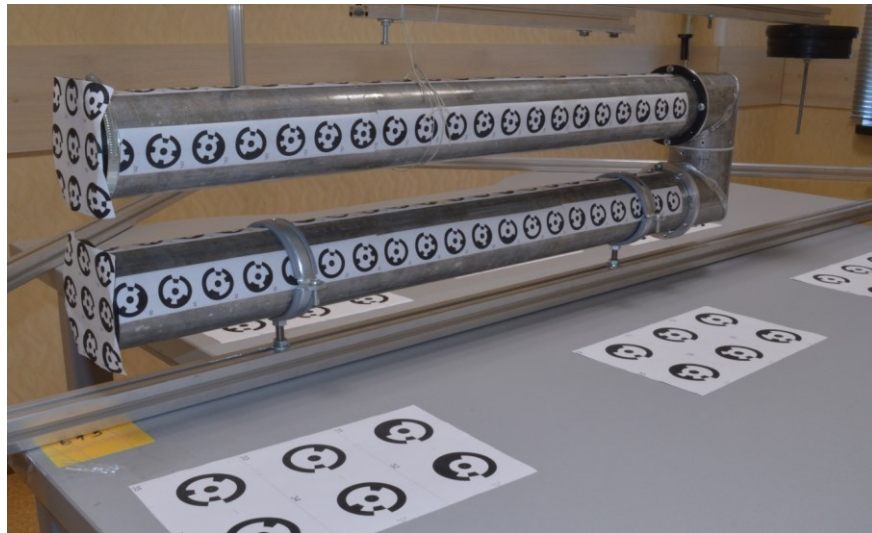
Також існує можливість синхронізації зображень з декількох камер [85]. Для цього всі камери повинні мати однакові параметри (фокусна відстань, світлочутливість, тощо) та бути відкалібровані за однакових умов. В процесі зйомки камери повинні перетинати зони видимості одна одної. Такий варіант використання камер дає змогу проводити вимірювання довгих елементів системи тіл та великих робочих просторів.



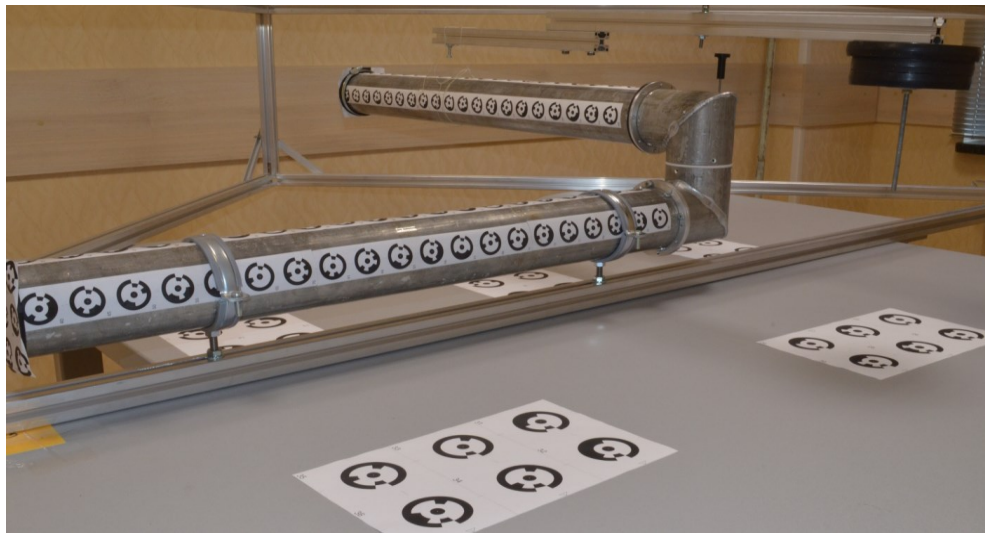
Під час зборки експериментальної моделі маніпулятора на стенді імітації невагомості було виявлено неспіввісність дотичних елементів у поворотному вузлі конструкції. Відхилення від осі обертання шарніра відбувалося у площині, ортогональній до виду, зображеного на рис. 3.2. Виявлена похибка перешкоджала формуванню єдиної площини, утвореної торцевими поверхнями секцій маніпулятора, що унеможливлювало отримання достовірних результатів та реалізацію штатного розкриття конструкції. Для усунення цього відхилення методом фотограмметрії було визначено відстані між контрольними маркерами, розташованими на верхній та нижній ланках маніпулятора. Отримані значення були зіставлені з відповідними розмірами комп'ютерної 3D-моделі та скориговані відповідно до проєктних параметрів. Оскільки кут  $\alpha$  мав незначне значення, його компенсація вимагала високоточного інструментального забезпечення для коригування геометричних параметрів конструкції.

Додатково було проведено дослідження похибки вимірювань геометричних параметрів системи залежно від різних конфігурацій розкриття маніпулятора:  $0^\circ$  (рис. 3.4, а),  $90^\circ$  (рис. 3.4, б),  $180^\circ$  (рис. 3.4, в). Аналіз проводився з метою оцінки точності визначення просторового положення конструктивних елементів при зміні їхнього взаємного розташування.

У початковому положенні маніпулятора зафіксовано найвищий відсоток розпізнаних маркерів, координати яких були успішно визначені, – 96 % від загальної кількості мішеней, що потрапили у зону фіксації фотознімків. У проміжному положенні ( $90^\circ$ ) цей показник знизився до 87 %, а у кінцевому положенні ( $180^\circ$ ) – до 83 %. Решта маркерів були ідентифіковані шляхом ручного коригування в процесі обробки даних. Зменшення кількості автоматично розпізнаних маркерів із зростанням кута розкриття маніпулятора зумовлено збільшенням його довжини, що ускладнює ідентифікацію маркерів при заданих параметрах зйомки. Подовження конструкції призводить до зміни перспективних спотворень, варіацій освітлення та кута зйомки, що негативно впливає на якість розпізнавання.



а)



б)



в)

Рис. 3.4 Дослідження точності вимірювання геометрії дволанкового маніпулятора у різних положеннях: а)  $0^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $180^\circ$

Крім того, відбувалося часткове перекриття маркерів елементами маніпулятора та вихід окремих міток за межі області чіткого фокусування камери, що також ускладнювало їх коректну ідентифікацію. Проте дана проблема була вирішена при додатковому фотосеті тієї частини маніпулятора, де було найменша кількість розпізнаних маркерів.

Результати фотограмметричних експериментів показали, що за умови використання правильно відкаліброваної цифрової камери та дотримання всіх вимог фотограмметричних вимірювань вдалося досягти точності 0,1–0,15 мм на еталонному інтервалі 700,5 мм. Цю відстань було виміряно цифровим штангенциркулем між крайніми маркерами масиву, розташованого на верхній рухомій ланці маніпулятора. У таблиці 3.1 наведено результати вимірювань контрольного інтервалу та значення похибок залежно від положення маніпулятора.

Похибка вимірювань визначалась як різниця між еталонною та отриманою за допомогою фотограмметрії відстанями. Аналіз отриманих результатів показав, що в початковому положенні маніпулятора ( $0^\circ$ ) спостерігається найменша похибка, яка становить 0,086 мм, що свідчить про високу точність методу за оптимальних умов зйомки. У проміжному положенні ( $90^\circ$ ) зафіксовано відхилення від еталонного значення -0,146 мм, що може бути зумовлено зміною геометрії конструкції, оптичними спотвореннями ракурсів зйомки. У кінцевому положенні ( $180^\circ$ ) похибка зросла до 0,121 мм, що пояснюється труднощами автоматичного розпізнавання маркерів і граничними спотвореннями камери. Точність вимірювань може бути покращена шляхом застосування більш високоточних оптичних приладів, зокрема камер із кращими сенсорами та вдосконалених освітлювальних систем, що мінімізують вплив тіней і відблисків від поверхні досліджуваного об'єкта на розпізнавання маркерів.

Загалом результати підтверджують, що використаний фотограмметричний метод дозволяє досягти високої точності. Однак, похибка вимірювань збільшується зі збільшенням кута розкриття маніпулятора, що

необхідно враховувати при проведенні подібних досліджень. Для покращення результатів доцільно використовувати камери з більш високою роздільною здатністю, додаткові калібрувальні процедури та оптимізовані методи розпізнавання маркерів.

Таблиця 3.1 – Значення похибок вимірювання при різних положеннях маніпулятора

Положення розкриття маніпулятора	Еталонне значення, мм	Вимірювання за допомогою фотограмметрії, мм	Похибка вимірювань, мм
0°	700,5	700,586	0,086
90°	700,5	700,354	-0,146
180°	700,5	700,621	0,121

Після проведення калібрування фотограмметричного обладнання процедура визначення люфту в шарнірному вузлі реалізується за наступним алгоритмом. На рухомій і нерухомій частинах шарніра вибираються оптимальні місця для розміщення маркерів, при цьому їх розташування має забезпечувати чітку фіксацію змін у взаємному положенні елементів конструкції внаслідок наявності люфту, бажано з максимальною чутливістю до його проявів. У рамках даного дослідження контрольний маркер закріплювався в центральній частині торця нерухомого штифта, що є віссю обертання шарніра. Відносно цієї референтної точки здійснюється моніторинг траєкторії іншого маркера, який встановлено на рухомій частині шарніра. Під час розгортання натурної моделі маніпулятора (рис. 3.4 а), б), в)) методом фотограмметрії визначається фактична траєкторія переміщення контрольного маркера при реальному фізичному люфті, наявного в шарнірному вузлі.

На наступному етапі дослідження застосовується математична модель динаміки маніпулятора, яка враховує люфт у шарнірному з'єднанні як окремий параметр. Геометричні та масово-інерційні характеристики моделі задаються відповідно до параметрів натурної конструкції, що забезпечує коректність порівняння результатів. За допомогою цієї математичної моделі проводиться імітаційне моделювання процесу розгортання маніпулятора для

різних значень люфту.

У ході моделювання визначається траєкторія руху точок, що відповідають координатам контрольних маркерів. Оптимальним значенням люфту вважається таке, при якому розраховані траєкторії контрольних маркерів, отримані на основі експериментальних та чисельних даних, співпадають із заданою точністю.

Знайдене значення люфту далі використовується для розрахунків програмних рухів маніпулятора та при дослідженні стійкості його нелінійної системи керування.

На рисунку 3.5 подано графічне зображення траєкторій шарніра, що дозволяє порівняти результати чисельного та експериментального досліджень. Зеленим кольором позначено траєкторію контрольного маркера, розраховану чисельним методом за умови наявності люфту 0,1 мм, червоним – експериментально отриману траєкторію за допомогою фотограмметричного аналізу, а синім – еталонну траєкторію вузла без люфтів. Аналіз графіків свідчить, що фактична величина люфту знаходиться в межах 0,1–0,15 мм.

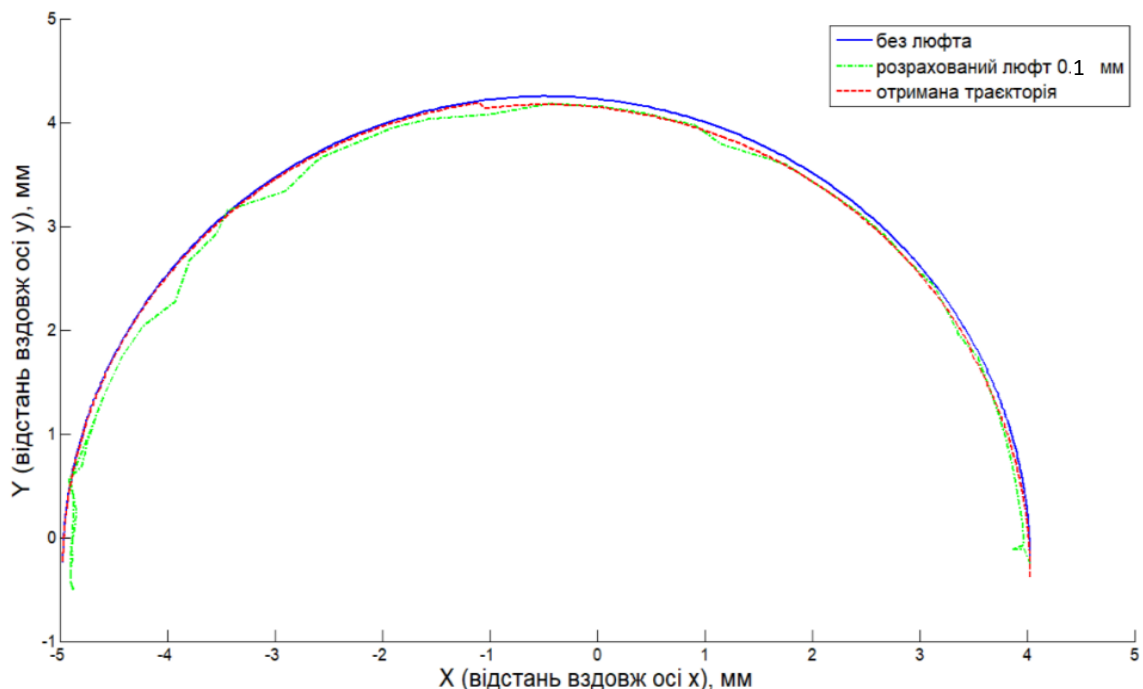


Рис. 3.5 Порівняння траєкторій руху шарніра маніпулятора за різними методами визначення

Наявність люфту пояснюється конструктивними особливостями шарніра, зокрема зазором між дотичними поверхнями кулькового підшипника та штифта, а також можливими відхиленнями у взаємному розташуванні рухомих і нерухомих елементів через технологічні похибки виготовлення та зборки. Ці фактори суттєво впливають на точність позиціонування маніпулятора та можуть спричиняти небажані відхилення у траєкторії його руху.

Запропонована методика без значних змін адаптується для дослідження пружних податливостей елементів конструкції багатоланкових систем в місцях її локального зниження, наприклад у фланцевих з'єднаннях та місць кріплення на ланках допоміжного обладнання.

### **3.2 Числове моделювання впливу величини люфту у шарнірі маніпулятора**

Важливим аспектом аналізу кінематичних характеристик маніпуляторів є вплив люфтів у шарнірних з'єднаннях, що суттєво впливає на точність позиціонування, динамічну поведінку та навантаження на конструктивні елементи. У даному дослідженні розглядається один із найбільш значущих типів люфту, що виникає у вузлі по осі розкриття шарніра, а саме у площині, ортогональній до осі обертання. Такий люфт може бути спричинений зносом деталей, неточністю процесу зборки або конструктивними особливостями механізму.

Числове моделювання впливу величини люфту у шарнірному вузлі маніпулятора проводилося у програмному середовищі MSC Adams. Досліджувалася модель шарніра, що складається з двох частин, які мають спільну вісь обертання та здійснюють розкриття на  $180^\circ$  (рис. 3.6). Для спрощення моделі уздовж всієї осі обертання між торцями шарніра встановлено штифт, що проходить через проушини обох частин шарніра, забезпечуючи їхню взаємодію.

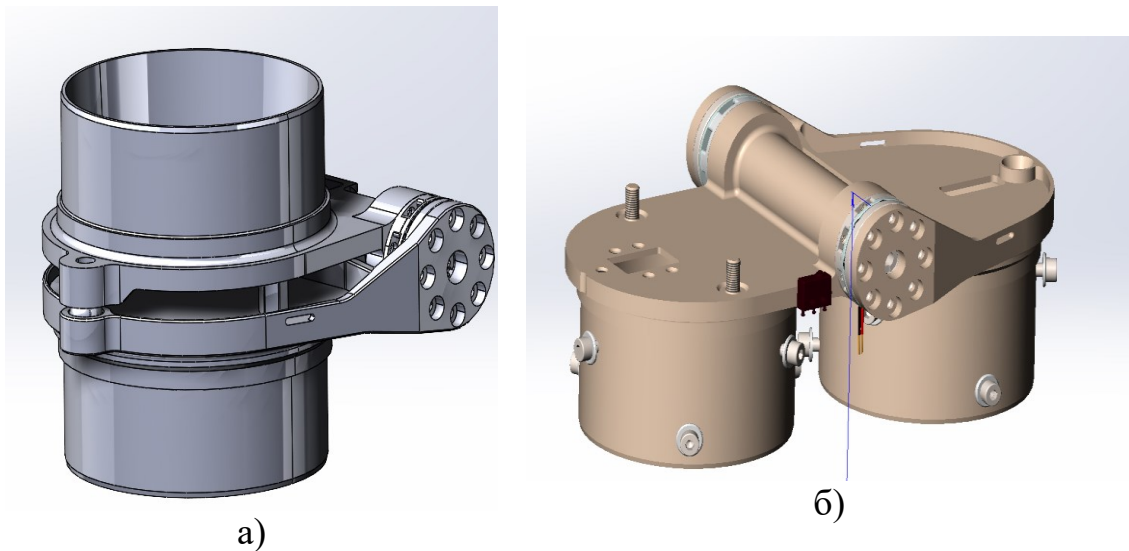


Рис. 3.6 – Модель шарніра маніпулятора:

а) у закритому положенні; б) у відкритому положенні

Динамічний аналіз виконувався за допомогою МСЕ (рис. 3.7, а), що дозволяє детально аналізувати вплив деформацій та контактних взаємодій у шарнірному вузлі.

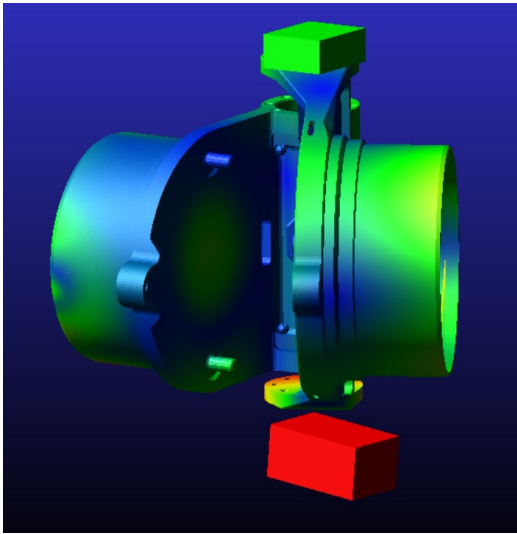
Застосовувався матеріал *алюміній АА 2014* з наступними характеристиками: густина  $\rho = 2920 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 73 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Маса досліджуваного зразка шарніра становила 0,78 кг. Комп'ютерна модель була розбита на 39562 елементи, кількість вузлів склала 197811 одиниць. Використовувались 10-вузлові квадратичні тетраедричні лагранжеві скінченні елементи (рис. 3.7, б) з трьома ступенями свободи ( $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ ). Розмір СЕ становив 1,5 мм. Час розрахунку даної задачі склав 23 хв.

Для забезпечення реалістичності моделювання були задані наступні умови:

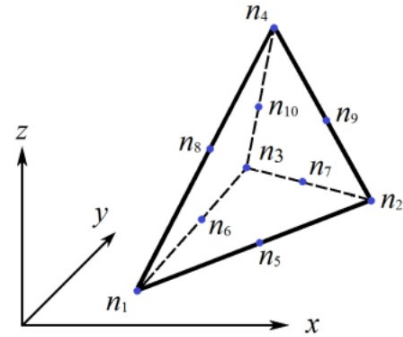
- умови контакту між тілами, що взаємодіють, для врахування пружних та пластичних деформацій (рис. 3.8);
- пружні характеристики тіл, що дозволяють враховувати вплив податливості елементів маніпулятора;
- динамічне навантаження у процесі циклічного розкриття-закриття шарніра для аналізу змін кінематичних параметрів у часі;



- контрольні маркери для фіксації траєкторій руху та визначення зміщень внаслідок люфту.



а)



б)

Рис. 3.7 Аналіз МСЕ динаміки шарніра:

а) вид моделі під час розрахунку; б) вид СЕ

Для дослідження впливу люфту на кінематику маніпулятора використовувався метод моніторингу траєкторій контрольних маркерів, встановлених у ключових точках вузла. Контрольні маркери були розташовані на провусині рухомої частини шарніра - для оцінки локальних переміщень у зоні контакту з штифтом; та на середині торця осьового стрижня - для визначення впливу зазору на загальну кінематику рухомої частини.

Одна з частин шарніра разом із стрижнем залишалася нерухомою, а інша - оберталася у межах  $0-180^\circ$  навколо вісі. Це дозволило отримати детальні графіки траєкторій рухомого маркера відносно нерухомого та оцінити максимальні відхилення у процесі роботи механізму.

Експериментальна та математична апробація методики проводилася при відстані 4,5 мм між контрольними маркерами, що знаходились в одній площині. Для оцінки впливу люфту діаметр торця штифта змінювався у наступних варіантах:

- 9 мм – ідеальний варіант без люфту;
- 8,95 мм – люфт 0,025 мм;



- 8,9 мм – люфт 0,05 мм;
- 8,85 мм – люфт 0,075 мм;
- 8,8 мм – люфт 0,1 мм.

Contact Name		CONTACT_1
Contact Type		Flex Body to Flex Body
I Flexible Body	hinge1_1_flex	
J Flexible Body	hinge1_2_flex	
<input type="checkbox"/> Force Display		Red
Normal Force		Impact
Stiffness	1.0E+04	
Force Exponent	1.5	
Damping	1.0	
Penetration Depth	1.0E-02	
Friction Force		None
OK		Apply
		Close

Рис. 3.8 Параметри задання умов контакту між двома тілами у MSC Adams

На рисунку 3.9 подані траєкторії контрольного маркера для різних значень люфту у шарнірному з'єднанні, отримані в результаті імітаційного моделювання за допомогою математичної моделі маніпулятора. Як видно з графіків, зі збільшенням величини люфту у шарнірі спостерігається суттєве зростання відхилень у траєкторії контрольного маркера. Навіть незначний люфт у межах 0,025–0,05 мм викликає помітне зміщення траєкторії руху, що особливо критично для високоточних маніпуляторів. При максимальному люфті 0,1 мм відхилення траєкторії значно збільшуються, що може призводити до накопичення похибок у роботі всієї системи. У процесі циклічного обертання шарніра за наявності люфту виникають нелінійні ефекти у поведінці механізму. Спостерігається затримка реакції рухомої

частини у моменти зміни напрямку обертання, що може негативно впливати на точність керування маніпулятором.

Дане моделювання дозволяє оцінити вплив люфту на кінематичні характеристики системи та визначити межі можливих відхилень у траєкторії рухомих елементів.

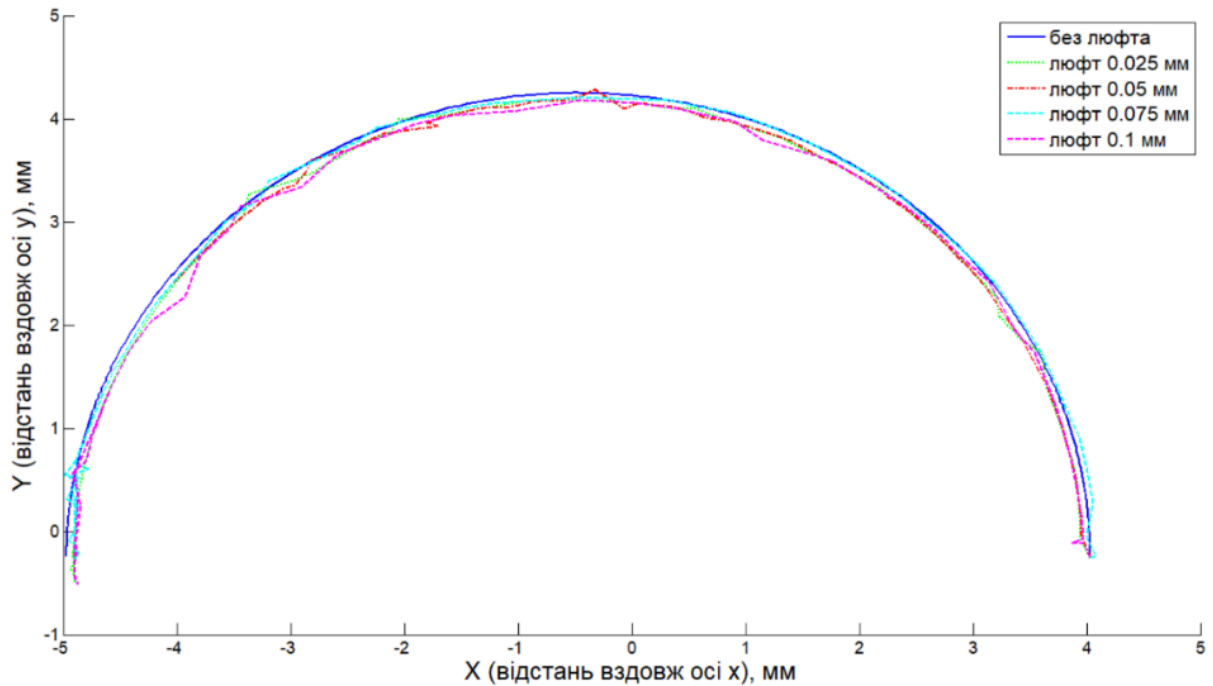


Рис. 3.9 Розраховані траєкторії контрольного маркера в залежності від величини люфту у шарнірі

Таким чином, результати числового моделювання показали, що навіть невеликий люфт у шарнірному з'єднанні може суттєво впливати на точність роботи маніпулятора. Отримані дані можуть бути використані для оптимізації конструкції шарнірних вузлів, підвищення жорсткості з'єднань та розробки алгоритмів компенсації люфтів у системах керування.

### Висновки до розділу 3

Розроблено та апробовано методику експериментального визначення люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів, що базується на фотограмметричному методі.

При відпрацюванні запропонованої методики використовувалась розроблена та виготовлена модель дволанкового фрагмента маніпулятора. Фотограмметричний експеримент, який був проведений на основі відстеження кодованих маркерів, показав високу точність вимірювання геометрії маніпулятора та застосовність для дослідження динаміки трансформованих конструкцій. Реалізовано моніторинг процесу розкладання-складання маніпулятора, що дало змогу виявити неточність зборки та налаштувати систему імітації невагомості стенда.

За допомогою побудованої розрахункової схеми для визначення впливу люфту у шарнірному з'єднанні були отримані траєкторії розворотів ланки маніпулятора з урахуваннями різних величин зазорів. Виявлено, що за допомогою фотограмметрії можна визначати траєкторії кожного з контрольних маркерів на шарнірі у процесі всього робочого часу вузла. Це дає змогу уточнювати розрахункові схеми з обчисленими величинами люфтів.

Даний метод вимірювання можна застосовувати при дослідженні динаміки багатотільних чи наддовгих конструкцій, синхронізувавши декілька цифрових камер. В той час, як традиційні вимірювальні прилади обмежені зоною дії в місцях встановлення, фотограмметричне обладнання обмежено лише зонами покриття застосованих камер, які є досить великими. Таким чином, можна реалізовувати моніторинг рухомих конструкцій у космосі дистанційно.

## РОЗДІЛ 4.

### ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПОДАТЛИВОСТІ ФЛАНЦЕВИХ З'ЄДНАНЬ МАНІПУЛЯТОРА

Фланцеві з'єднання є одним із незамінних способів поєднання елементів конструкцій. Основними проблемними питаннями у дослідженнях фланцевих вузлів є забезпечення його жорсткості та герметичності шляхом визначення напружено-деформованого стану під дією зовнішніх навантажень, оцінка рівня концентрації напружень у місцях контакту ущільнювальних поверхонь, а також моделювання поведінки болтових елементів під змінними навантаженнями. Важливим аспектом є врахування впливу температурних деформацій та корозійного зношування, що можуть суттєво знижувати довговічність з'єднання. Окрім цього, актуальним залишається питання оптимізації конструктивних параметрів з'єднання для зменшення маси та підвищення експлуатаційної надійності.

#### 4.1 Методи розрахунку міцності пружних фланцевих з'єднань

Розрахунок міцності пружних фланцевих з'єднань є ключовим етапом у проектуванні відповідальних конструкцій у ракетно-космічній, авіаційній та машинобудівній галузях. Фланцеві з'єднання у маніпуляторах космічного призначення забезпечують передавання навантажень і збереження механічної цілісності конструкції в умовах змінних зовнішніх впливів. Моделювання їх міцності передбачає використання декількох основних підходів, серед яких аналітичні методи, чисельне моделювання та експериментальні дослідження.

Аналітичні методи включають метод класичної теорії пружності, що базується на рівняннях рівноваги, закону Гука та геометричних умовах деформації. У рамках цього підходу використовується метод балкового наближення [38, 39, 49] для визначення силових факторів у болтових та фланцевих елементах, а також метод теорії контактної взаємодії Герца [43] для

оцінки контактних напружень між ущільнювальними поверхнями. Також проводяться оцінки ослаблення болтових з'єднань і визначення зусиль у різьбових елементах [128, 144]. Такі підходи ефективні для простих геометрій, однак не враховують нелінійні ефекти, пластичність та складну контактну взаємодію.

Числові методи розрахунку, зокрема метод скінченних елементів [32, 33, 93], є основним інструментом для дослідження складних фланцевих з'єднань. Використання комерційних програмних пакетів, таких як ANSYS, Abaqus, MSC Nastran, дозволяє проводити тривимірний аналіз напружень та оцінювати зони концентрації напружень, локальні пластичні деформації та ризики втрати герметичності. У межах чисельного аналізу застосовуються метод контактних скінченних елементів для дослідження взаємодії між поверхнями ущільнення, метод нелінійного матеріального моделювання [145] для врахування пружно-пластичних властивостей болтових і фланцевих елементів, а також моделювання циклічного навантаження та втомного руйнування [79, 107] для оцінки довговічності з'єднань. Додатково використовується метод гібридного моделювання [61, 135], що поєднує МСЕ із експериментальними даними для підвищення точності прогнозів.

Експериментальні методи розрахунку та верифікації чисельних моделей включають метод тензометрії, що дозволяє отримати реальні значення напружень у критичних зонах фланцевих з'єднань, цифрову кореляцію зображень для оцінки деформаційного стану, лазерну інтерферометрію для вимірювання мікропереміщень та метод фотограмметрії, який використовується для контролю зміщень та перевірки точності чисельних моделей [114, 139]. Випробування герметичності здійснюється за допомогою методу акустичної емісії [34] та гідравлічних випробувань під тиском [29, 99] для оцінки надійності ущільнень під дією змінних навантажень.

Поєднання аналітичних, чисельних та експериментальних методів дозволяє розраховувати міцність пружних фланцевих з'єднань з високою

точністю, прогнозувати поведінку конструкцій у реальних умовах експлуатації та підвищувати їхню довговічність і надійність.

#### **4.2 Експериментальні дослідження податливості фланцевого з'єднання при дії механічних навантажень**

Вирішення проблеми податливості одноланкових маніпуляторів може бути достатньо ефективно отримано з використанням числового моделювання.

Числові дослідження податливості елементів фланцевих з'єднань пов'язані з необхідністю оцінки багатьох факторів (нелінійні характеристики матеріалів, недосконалість виготовлення та/або зборки, неоднорідні умови контакту між елементами та ін.) та розробкою методики їх коректного врахування. Проте і після цього етапу можуть бути уточнення розрахункової моделі, що зумовлено складністю врахування усіх нелінійних складових.

Передбачається, що досліджувана модель маніпулятора буде застосовуватися для виведення відносно космічного апарату сітчастої антени, описаної у [88, 121]. Сама конструкція складається з трьох послідовно з'єднаних секцій, які за допомогою фланців приєднуються до шарнірних вузлів, що забезпечують обертання поточної ланки відносно попередньої. Модель з двома ланками досліджуваного маніпулятора була описана у [13].

Розглядається фланцевий вузол з'єднання моделі космічного маніпулятора. Досліджуваний зразок (рис. 4.1) складається з двох круглих алюмінієвих труб марки *АД31Т5*, довжиною  $L = 0,14$  м, внутрішнім діаметром  $\varnothing_{\text{вн}} = 0,08$  м та товщиною стінки  $\delta = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м; двох фланців, що з'єднуються між собою, та фіксуючих оснасток, в які монтуються кріплення для випробувальних машин. Усі елементи поєднуються між собою гвинтовими з'єднаннями.

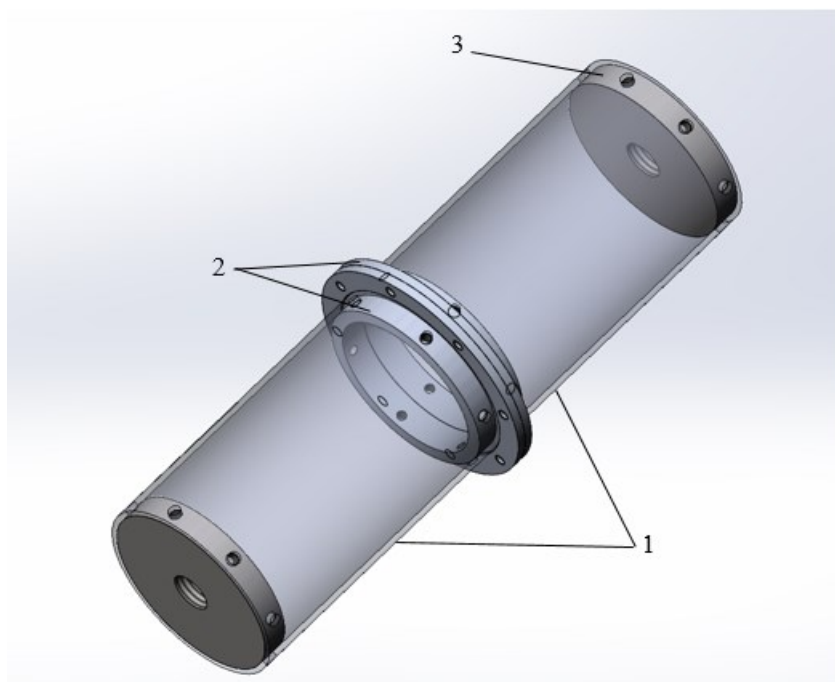


Рис. 4.1 – Схема досліджуваного зразка: 1 – циліндрична труба,  
2 – фланець, 3 – фіксуюча оснастка

Для проведення експериментальних випробувань була розроблена детальна методика, що охоплює всі етапи підготовки досліджуваного зразка та випробувального обладнання. Було визначено ключові параметри навантаження, точки прикладання сил, характер фіксації зразка, а також очікувані максимальні навантаження. На основі цих даних розроблено схему, яка враховує особливості геометрії та механічних властивостей досліджуваного зразка, забезпечуючи рівномірний розподіл навантаження та мінімізуючи вплив небажаних деформацій.

Підготовлено випробувальні стенди, що відповідають специфіці експериментів. Проведено перевірку їх функціональності, включаючи оцінку стану елементів, які контактують із досліджуваним зразком, з метою виключення неконтрольованого тертя або зсувів. Вибір обладнання базувався на вимогах до точності вимірювань, стабільності навантаження та можливості реєстрації параметрів у режимі реального часу. Перед початком випробувань здійснено ретельне калібрування датчиків, вимірювальних приладів та навантажувальних механізмів. Особливу увагу приділено налаштуванню точності датчиків переміщень, щоб забезпечити відповідність отриманих даних

реальним значенням. Процедура калібрування виконувалася з урахуванням робочих умов експериментів, включаючи можливі коливання температури або інші зовнішні фактори.

Зразок був ретельно перевірений на відповідність заданим геометричним і фізико-механічним параметрам. Здійснено візуальний огляд на наявність дефектів, а також попереднє тестування для оцінки поведінки матеріалу під незначними навантаженнями. Окрім цього, розроблено протокол, що описує всі етапи проведення експерименту, включаючи процедури фіксації зразка, послідовність прикладання навантаження, інтервали зняття даних та умови їх обробки. Завдяки комплексній підготовці було забезпечено високу точність, відтворюваність і достовірність отриманих експериментальних результатів.

У відповідності з описанням проведених механічних експериментів у [26, 27, 40], методологія досліджень полягає у ступеневому, рівномірному навантаженні випробуваної моделі. Кожен експеримент складається з двох процесів: покрокового навантаження із записом показань тензодатчиків та розвантаження з фіксацією переміщень досліджуваного зразка.

В середньому, проводилося по 15 досліджень кожного типу для моделі вузла маніпулятора. Показання тензодатчиків при перших трьох навантаженнях-розвантаженнях не враховувалися, оскільки тоді мінімізовувався вплив нелінійних складових (затяжка гвинтів, видовження тросів та ін.).

Модель маніпулятора, що розглядається, у спрощеному вигляді представляє собою стрижень постійного поперечного перерізу, що закріплюється до основного тіла – космічного апарату, а на вільному кінці несе вантаж у вигляді антени. Відповідно, з урахуванням люфтів у фланцевих з'єднаннях, дана конструкція з  $N$  секцій може мати лінійні та/або радіальні переміщення у кожному з вузлів з'єднання. Тобто кожен ланку маніпулятора можна розглядати як окрему субмодель у вигляді стрижня з пружними граничними умовами.



Дослідження податливості фланцевого з'єднання маніпулятора слід проводити з урахуванням теорії коливань призматичних стрижнів, оскільки сама конструкція механізму складається з послідовного з'єднання ланок незмінного перерізу. Урахування переміщень при згинальних, поздовжніх і крутильних коливаннях дозволяє більш точно оцінити вплив локальних неоднорідностей чи дефектів на жорсткість, міцність і динамічну стабільність конструкцій [17].

У наступних пунктах описуються дослідження усіх типів переміщень, що розглядаються у даному розділі. Також наведені рівняння вільних коливань призматичного стрижня довжиною  $l$  з відповідними граничними умовами [46]: перший торець має пружне закріплення бруса, що враховує податливість на лінійні та крутильні переміщення; а другий – вільний.

Для порівняння отриманих результатів, а також дослідження впливу податливості фланцевого з'єднання, було проведено комп'ютерне моделювання ідентичної моделі частини секції маніпулятора без фланців. Розрахунки проводилися за допомогою метода скінченних елементів у пакеті прикладних програм ANSYS. Застосовувався матеріал *алюміній АД31Т5* з наступними характеристиками: густина  $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 71 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ .

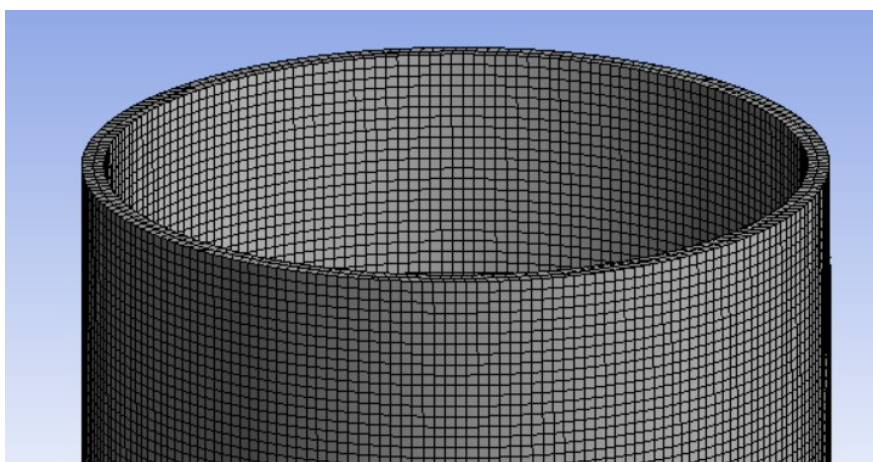


Рис. 4.2 – Фрагмент скінченно-елементної сітки

Граничні умови відповідали схемам навантаження (рис. 4.3, 4.6, 4.9). Досліджувана модель була розбита на 47121 елемент (рис. 4.2), кількість

вузлів складала 258617 одиниць. Використовувались 20-вузлові квадратичні гексагональні лагранжеві скінченні елементи (рис. 2.9, б) з трьома ступенями свободи ( $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ ). Розмір СЕ становив 1,25 мм. Час розрахунку для даних задач складав 32-41 с.

#### 4.2.1 Згинальні переміщення

Досліджуваний зразок встановлювався на випробувальний стенд, фіксуючись гвинтовим з'єднанням одним торцем, а до іншого – закріплювався сталевий тросик, що утворював перпендикуляр з осьюовою лінією моделі. Таким чином, перекинутий через блок підвіс з вантажем утворював схему навантаження для поперечного вигину зразка. Для моніторингу переміщення верхньої частини вузла з'єднання встановлювався тензодатчик годинникового типу на окремому штативі та торкався важелем до крайньої точки моделі (рис. 4.4).

Схему навантаження випробувального зразка зображено на рис. 4.3. Вантаж масою  $m$  утворювався набором гирь по 5 кг кожна, поступово та рівномірно збільшуючи навантаження.

Математичне формулювання розрахункової моделі вільних згинальних коливань приймалось у вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \rho E \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0; \quad (4.1)$$

з такими граничними умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - c_1 \omega = 0 \Big|_{x=0}, EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \Big|_{x=l}, EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=l}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де  $\omega$  – прогин стрижня;  $\rho$  – густина матеріалу стрижня;  $F$  – площа перерізу стрижня;  $E$  – модуль пружності;  $c_1$  – коефіцієнт жорсткості на переміщення у закріпленні;  $c_2$  – коефіцієнт жорсткості на кручення у закріпленні.

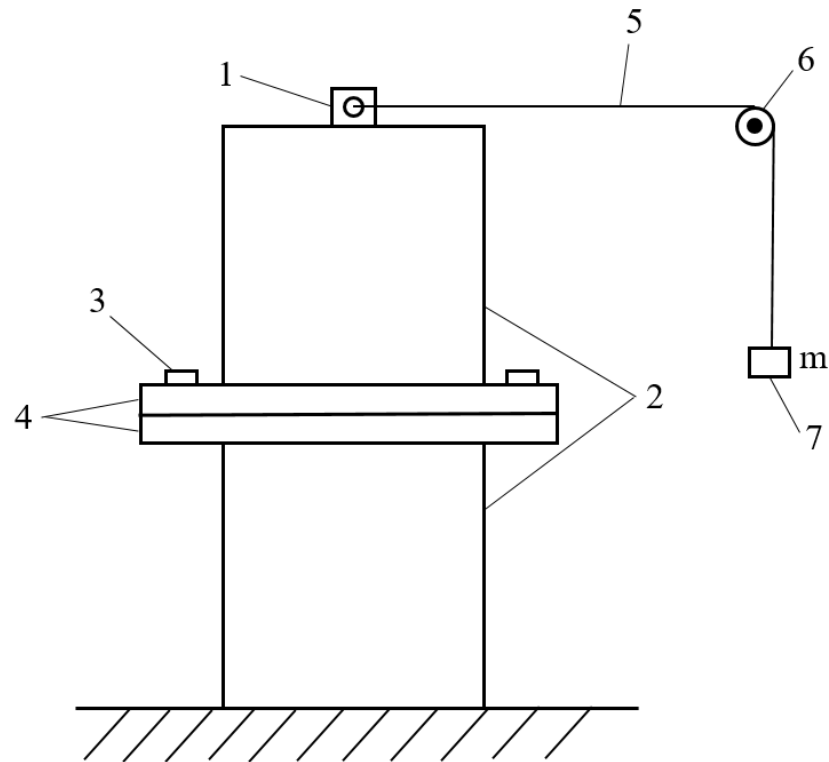


Рис. 4.3 – Схема навантаження досліджуваного зразка при поперечному вигині: 1 – отвір для кріплення, 2 – циліндричні труби, 3 – гвинти, 4 – фланці, 5 – тросик, 6 – блок, 7 – вантаж масою  $m$

Відповідно до представлених геометричних, механічних та динамічних характеристик [88, 121], для усіх видів досліджень були встановлені діапазони та величини послідовного навантаження, які можуть виникати у фланцевих з'єднаннях під час розкладання маніпулятора, розкриття антени чи руху самого космічного апарату.

На рис. 4.5 представлено графік залежності переміщення крайньої точки на вільному кінці досліджуваної моделі від дії згинальної сили, тобто величини мертвого вантажу. Для порівняння отриманих результатів блакитним кольором відображено поведінку ідентичної моделі маніпулятора, яка не має фланцевого з'єднання.



Рис. 4.4 – Експеримент на поперечний вигин

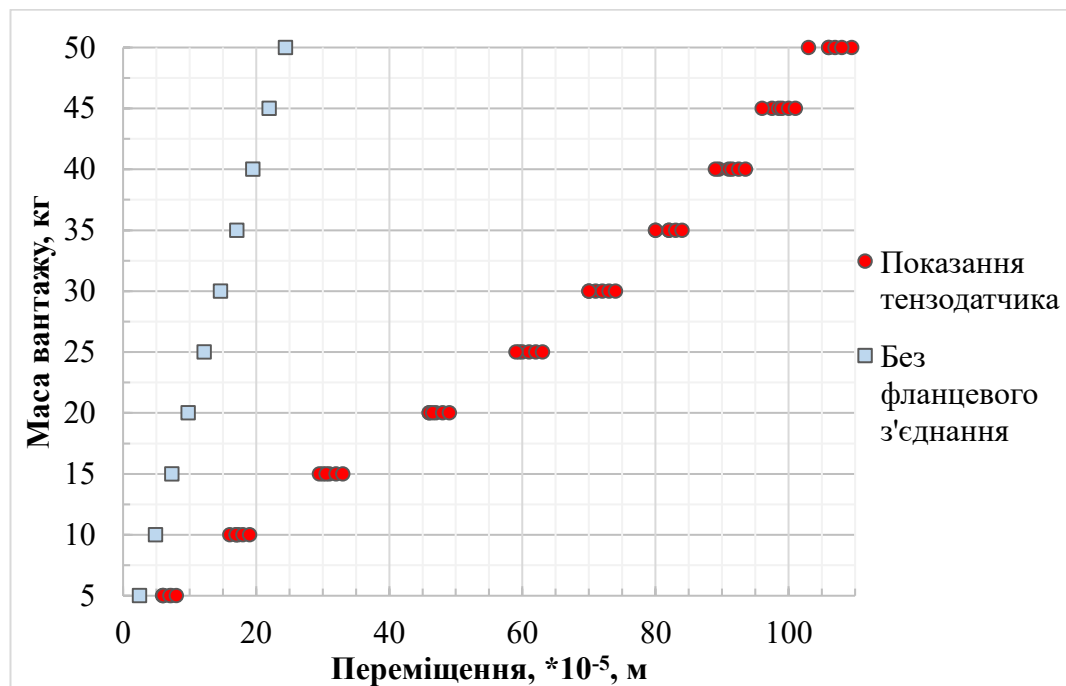


Рис. 4.5 – Графік «Навантаження-переміщення» при поперечному вигині зразка

Як видно з графіків, податливість фланцевого з'єднання сильно впливає на величину переміщень. Одразу ж на першому навантаженні у 5 кг відмінність між обчисленими результатами та експериментальними сягає понад 65%, а далі тенденція стрімкого зросту графіку зберігається. Наприклад,

при масі вантажу у 25 кг максимальні переміщення за показаннями тензодатчика відрізняються у 5 разів від моделі, яка не має фланцевого з'єднання. І навпаки, при максимальних переміщеннях у  $2 \cdot 10^{-4}$  м суцільна труба навантажується 40 кг, проте варіант з фланцями – лише 10 кг, що у 4 рази менше.

#### 4.2.2 Крутильні переміщення

У даному експерименті модель вузла маніпулятора досліджувалась на наявність та вплив люфтів у фланцевому з'єднанні при крутильному навантаженні. Як і в попередньому пункті, проводилось встановлення досліджуваного зразка на стенд. На вертикальних стрижнях фіксувалися блоки-опори, через які проходили сталеві тросики. Відстань від фіксуючої оснастки випробувального зразка до лінії дії сили становила 0,2 м. Дані тросики утворювали перпендикуляри з підвісами для вантажів, а також зі стрижнем, що був приєднаний до верхнього торця моделі. Таким чином, поступово та рівномірно навантажуючи вузол з'єднання, реалізовувався експеримент на крутильне навантаження (рис. 4.7). Кручення проводилось проти годинникової стрілки, дивлячись зі сторони незафіксованого торця моментом  $M$ . Для відстеження переміщень верхньої частини до виносного стрижня, зафіксованого на твірній поверхні верхньої труби, встановлювався тензодатчик годинникового типу.

Схему крутильного навантаження випробувального зразка зображено на рис. 4.6. Два підвіси, рівновіддалених від центральної вісі зразка, поступово та одночасно навантажувалися гилями по 1 кг.

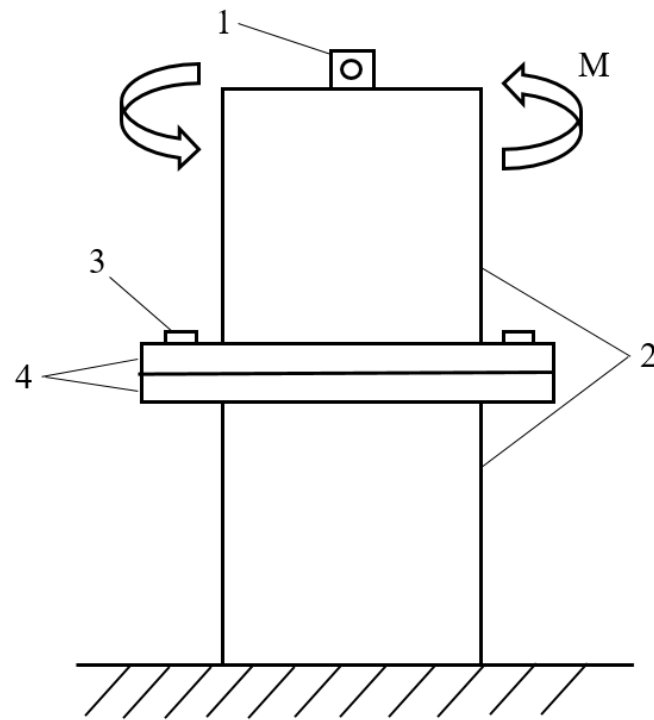


Рис. 4.6 – Схема навантаження досліджуваного зразка крутним моментом  $M$ :

1 – отвір для кріплення, 2 – циліндричні труби,

3 – гвинти, 4 – фланці

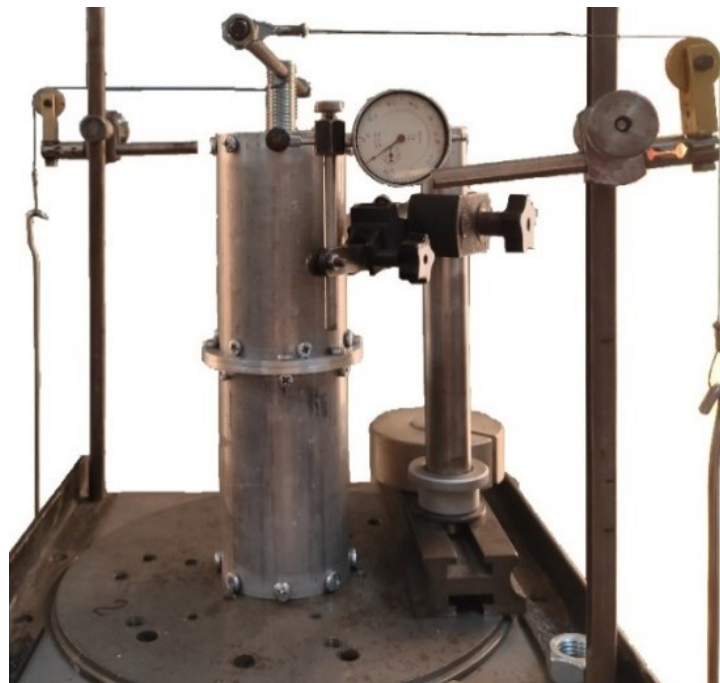


Рис. 4.7 – Експеримент на крутильне навантаження

Математична модель вільних крутильних коливань призматичного стрижня мала вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G I_K \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0; \quad (4.3)$$

з такими граничними умовами

$$G I_K \frac{\partial \theta}{\partial x} - c_2 \theta = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l}, \quad (4.4)$$

де  $\theta$  – кутове переміщення стрижня;  $G$  – модуль зсуву;  $I_0, I_K$  – полярний момент інерції перерізу та момент інерції при крученні відповідно.

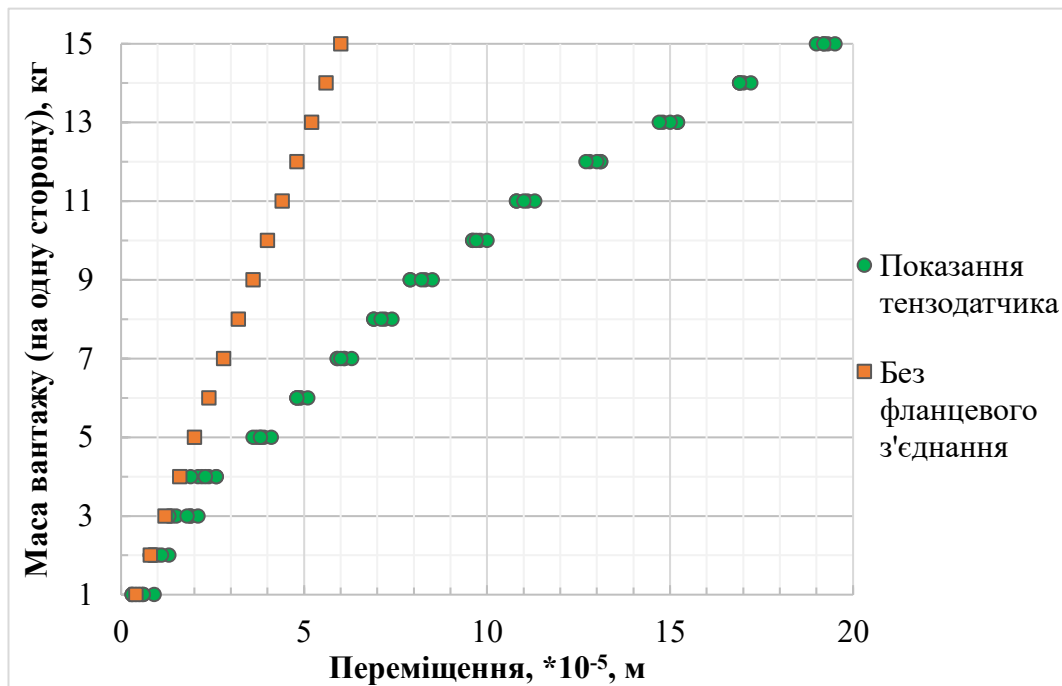


Рис. 4.8 – Графік «Навантаження-переміщення» при дії крутного моменту на зразок

Особливою відмінністю на рис. 4.8 можна вважати нелінійний вигляд графіка переміщень для моделі з фланцевим з'єднанням. Так, на початку навантаження, на етапі 1 кг – 4 кг, експериментальні максимальні переміщення та обчислені майже не відрізняються. Проте подальше навантаження досліджуваного зразка викликає нелінійне зростання максимальних переміщень. Якщо при вантажі на одну вісь у 2 кг різниця між отриманими та обчисленими результатами складає 33 %, то при 13 кг – 65,8 %.

### 4.2.3 Поздовжні переміщення

У даному експерименті проводилось дослідження податливості з'єднувального вузла моделі маніпулятора при дії поздовжнього навантаження. Розтяг зразка виконувався на стенді важільного типу. Каретка підвісу з вантажем встановлювалася на відмітці, коли співвідношення маси вантажу до навантаження становило 1:50. Осьові гвинти на торцях зразка вставлялися та закріплювалися у затискачах. Поруч з конструкцією стенда був встановлений штатив з двома тензодатчиками годинникового типу: верхній фіксував переміщення верхньої частини моделі, а нижній, попередньо зведений, – переміщення фланцевого з'єднання відносно нижньої частини вузла (рис. 4.10). Тобто різниця між значеннями тензодатчиків показувала саме переміщення у фланцевому з'єднанні.

Схему навантаження на розтяг випробувального зразка зображено на рис. 4.9. Підвіс, приєднаний до важеля установки, поступово та рівномірно навантажувався гирями по 0,1 кг.

Формулювання математичної моделі вільних поздовжніх коливань приймало вигляд:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (4.5)$$

з такими граничними умовами

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} - c_1 u = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l} \quad (4.6)$$

де  $u$  – лінійне переміщення стрижня.

Для аналізу поздовжніх переміщень у досліджуваній моделі використовувалися масиви даних з двох тензодатчиків (рис. 4.11), що фіксували переміщення всієї конструкції (верхній) та нижньої опори фланцевого з'єднання (нижній).



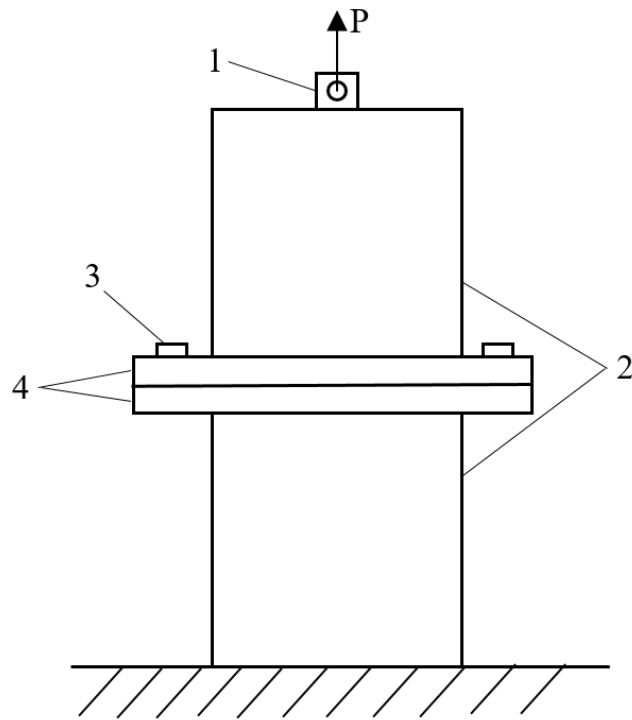


Рис. 4.9 – Схема навантаження досліджуваного зразка на розтяг силою  $P$ :

1 – отвір для кріплення, 2 – циліндричні труби, 3 – гвинти, 4 – фланці

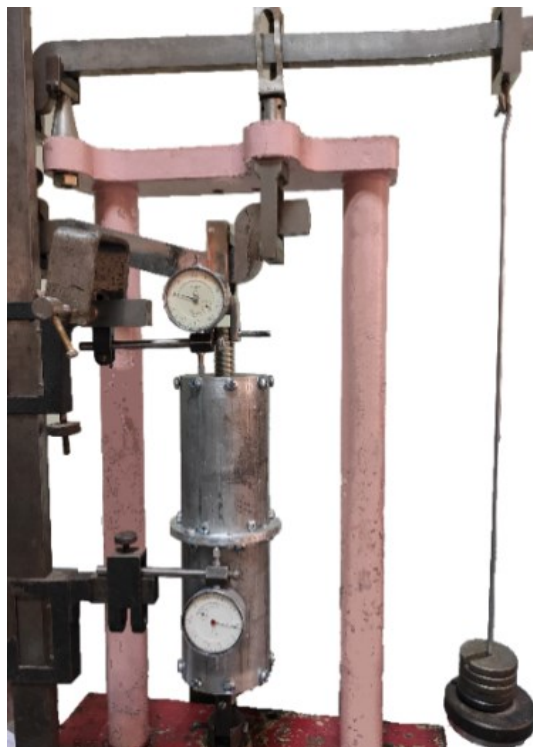


Рис. 4.10 – Експеримент на розтяг зразка

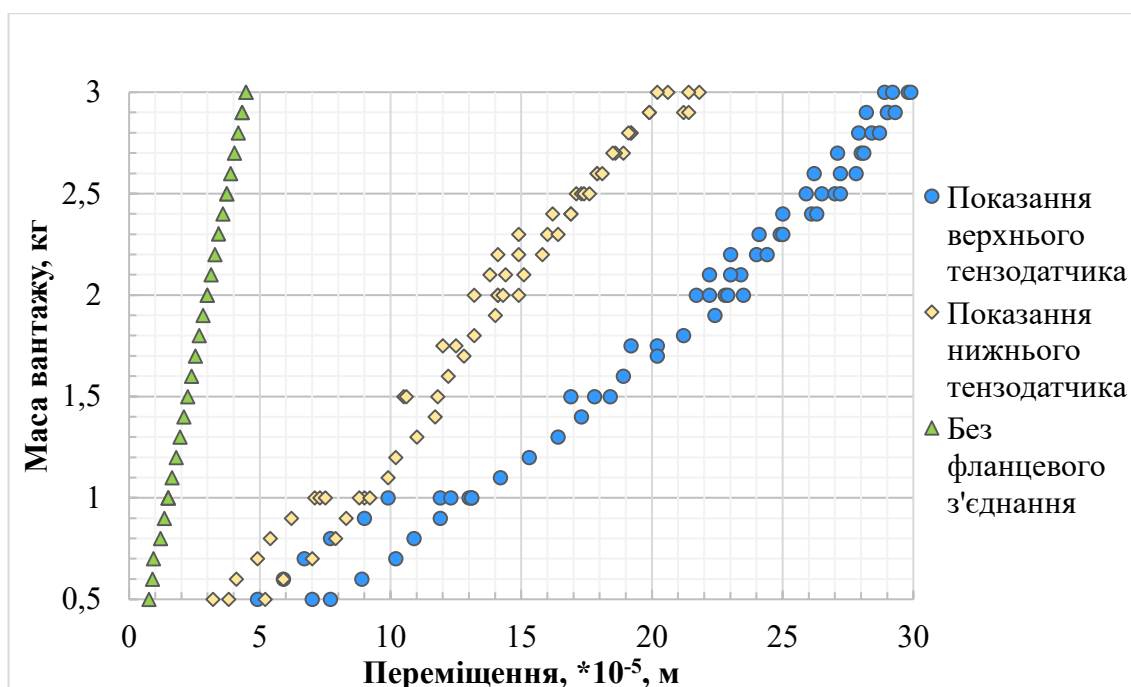


Рис. 4.11 – Графік «Навантаження-переміщення» при дії на зразок сили розтягу

Як і в попередніх випадках, на рис. 4.11 можна побачити, що при збільшенні навантаження максимальні переміщення у експериментах зростають стрімкіше, ніж у моделі без з'єднання. При максимальних переміщеннях у  $5 \cdot 10^{-5}$  м маса вантажу для суцільної ланки становить 3 кг, а у варіанті зі з'єднанням – лише 0,7 кг, що у більш, ніж 4 рази менше. Однак, можна відмітити, що у випадку моделі з фланцями зріст кривої переміщень відбувається більш плавно та лінійно. Також, слід враховувати, що випробувальна установка має систему важелів та коефіцієнт навантаження 1:50. Тобто максимальна маса вантажу у даному експерименті складала 150 кг.

#### Висновки до розділу 4

Отримані достовірні параметри з експериментального визначення податливості фланцевих з'єднань є важливими для підвищення точності числового моделювання конструкцій та їх елементів. Зокрема, ці дані можуть бути використані для більш коректного застосування методу скінченних елементів, що сприятиме оптимізації проєктування і аналізу конструкцій.

При проведенні експериментальних досліджень виявлено, що фланцеві з'єднання впливають на податливість конструкції, знижуючи опір на різні види навантажень. Показано, що найбільш критичними навантаженнями для випробуваної моделі були саме згинальні. Переміщення при поперечному вигині найшвидше зростає від дії ступеневого рівномірного навантаження. Також зафіксовано, що характер кривої «Навантаження-переміщення» найбільш нелінійний при крутильних навантаженнях. При поздовжньому навантаженні досліджувана модель маніпулятора мала переміщення у 50 разів менші випадків згинання і кручення.

Грунтуючись на результатах експериментальних досліджень, було враховано, що для моделі маніпулятора обраного типу [13] необхідно збільшити діаметри кріпильних гвинтів, збільшуючи жорсткість фланцевого з'єднання. Це дає змогу запобігти критичним переміщенням, які негативно вплинуть на штатну роботу маніпулятора та точність наведення антени.

## ВИСНОВКИ

В результаті проведеного системного комп'ютерного моделювання та аналізу експериментальних випробувань розроблено методологію удосконалення параметрів конструкції космічного маніпулятора та процесу виконання програмних рухів для забезпечення ефективності його функціонування. Одержано нові наукові результати, а саме:

- **вперше** розроблено методику комплексного теоретико-експериментального дослідження податливості ланок, шарнірних та фланцевих вузлів космічних маніпуляторів;
- отримані **нові** дані обчислювальних експериментів для аналізу динамічних характеристик і силових навантажень у шарнірному вузлі дволанкової маніпуляторної системи, що дозволяє отримати залежності розрахованого моменту від часу розвороту однієї ланки маніпулятора з урахуванням масово-інерційних параметрів основного тіла та корисного навантаження;
- розроблено **авторську** методику та проведено експериментальні дослідження пружних податливостей та люфтів у шарнірних вузлах маніпуляторів і штанг космічних апаратів із застосуванням фотограмметричного методу;
- запропоновано **оригінальну** методику та отримано **нові** експериментальні дані визначення впливу податливості фланцевого з'єднання на динамічні параметри робочих процесів з'єднувального вузла космічного маніпулятора, призначеного для просторового керування сітчастими антенами або науковими приладами, під впливом основних видів механічних навантажень, зокрема згинання, кручення та розтягу-стиску, які можуть бути корисними при проєктуванні та створенні таких конструктивних елементів;
- показано, що суттєвий вплив на точність функціонування розглянутої конструктивної схеми космічного маніпулятора мають пружні податливості шарнірних вузлів, включаючи люфти, континуальна

податливість всієї конструкції та податливість у фланцевих з'єднаннях;

- за результатами числового і експериментального моделювання механічних процесів функціонування маніпулятора встановлено:

- люфт у шарнірних вузлах та їх локальна податливість є найбільш критичними факторами, що суттєво погіршують точність позиціонування маніпулятора, який транспортує сітчасту параболічну антену;
- вплив континуальної податливості конструкції є суттєво (в рази) меншим, ніж податливості, що виникає в шарнірних вузлах;
- податливістю у фланцевих з'єднаннях можна знехтувати, оскільки її вплив на загальну жорсткість маніпулятора є незначним;

- напрацьовані **рекомендації** щодо вибору основних жорсткісних та масових параметрів маніпулятора на етапі ескізного проєктування, які пов'язані:

- з підвищенням континуальної жорсткості конструкції - рекомендується використовувати матеріали з вищими жорсткісними характеристиками та оптимізувати перерізи елементів для збільшення жорсткісного параметра  $EI$  (добуток модуля пружності на момент інерції перерізу);
- зі зменшенням люфтів у шарнірах та локальних податливостей у фланцевих з'єднаннях - необхідно висувати жорсткіші вимоги до вибору матеріалів, конструктивних компонентів з'єднань, а також оптимізувати механічні вузли (зубчасті передачі, муфти, вали) для зменшення деформацій та підвищення міцності;
- із застосуванням розробленої та апробованої методики дослідження шарнірних вузлів за допомогою фотограмметричного методу - для моніторингу та локалізації люфтів;
- з розробленою методикою, яка може бути застосована при аналізі пружних податливостей у механічних системах із високими вимогами до точності позиціонування, а також застосована при

проектуванні багатоланкових конструкцій;

- отримані результати можуть бути використані конструкторами та інженерами при проектуванні космічних маніпуляторів, моніторингу експлуатаційних характеристик механізмів, в процесі модернізації та оптимізації конструкцій, що дозволить підвищити надійність і довговічність таких систем, а також в навчальному процесі підготовки фахівців у галузі механіки та робототехніки, що забезпечує ґрунтовне розуміння принципів проектування та оптимізації конструкцій космічної техніки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров А. В.* Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
2. *Алпатов А.П.* Динамика космических летательных аппаратов. К.: Наук. думка. 2016. С. 488.
3. *Алпатов А.П., Белоножко П.А., Белоножко П.П., Кузьмина Л.К., Тарасов С.В., Фоков А.А.* Перспективы использования и особенности исследования динамики космических манипуляторов с упругими конструктивными элементами // Техн. механика. 2012. Вып. 1. С. 82-92.
4. *Ащепкова Н. С.* Анализ удерживающих усилий схвата манипулятора // RS Global - World Science. 2019. Vol. 1. No. 11. P. 10-15. [https://doi.org/10.31435/rsglobal\\_ws/30112019/6760](https://doi.org/10.31435/rsglobal_ws/30112019/6760).
5. *Ащепкова Н. С.* Определение оптимальных конфигураций антропоморфного манипулятора с шестью степенями подвижности // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер. : Інформатика та моделювання : зб. наук. пр. – Харків : НТУ "ХПІ", 2019. – № 28. – С. 94-107. <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2019.28.01>.
6. *Ащепкова Н. С., Шептун Ю. Д.* Влияние движения манипулятора на динамику КА // Ракетно-космическая техника. — Днепропетровск: ДГУ, 1996. — С. 77—81.
7. *Ащепкова Н. С., Шептун Ю. Д.* Математическая модель движения космического аппарата с манипулятором // Косм. наука технол. 1997. Т. 3. Вып. 3. С. 34 – 42. <https://doi.org/10.15407/knit1997.05.034>.
8. *Ащепкова Н.С.* Анализ влияния упругих колебаний манипулятора на ориентацию космического аппарата измеряемой конфигурации // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. - 2014. - Т. 17. - С. 19-24. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/sptahat\\_2014\\_17\\_4](http://nbuv.gov.ua/UJRN/sptahat_2014_17_4).
9. *Бейцун В. С., Дзюба А. П.* Експериментальне дослідження податливості фланцевих з'єднань у моделі маніпулятора космічного призначення // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць.

- Дніпро: Ліра, 2024. – Вип. 38. – С. 5-19. <https://doi.org/10.15421/4224101>.
10. Бейцун В. С., Тарасов С. В. Динаміка і зусилля у шарнірі дволанкової системи при позиціонуванні корисного навантаження відносно космічного апарату // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2022. – Вип. 35. – С. 5-16. <https://doi.org/10.15421/4222211>.
  11. Бейцун В.С., Тарасов С.В. Методи візуального стеження при натурному моделюванні динаміки бортових маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Актуальні проблеми механіки: Тези доповідей на Міжнародної наукової конференції (до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка, 14–16 листопада 2023 р.). – Дніпро, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 2023. – С. 280 – 281. [https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual\\_problems\\_of\\_mechanics/abstracts.pdf](https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual_problems_of_mechanics/abstracts.pdf).
  12. Бейцун В.С., Тарасов С.В. Методи фото- та відеограмметрії при дослідженні динаміки просторово розвинених космічних систем // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (12 – 14 квітня 2023 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2023. – С. 121. <https://spacehuman.org/uploads/source/doc/sbornik2023.pdf>.
  13. Бейцун В.С., Тарасов С.В. Методика фотограмметричного вимірювання люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах транспортних маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Технічна механіка. 2024. Вип. 3. С. 124-137. <https://doi.org/10.15407/itm2024.03.124>.
  14. Бейцун В.С., Тарасов С.В., Дзюба А.П. Математичне моделювання розкладання маніпулятора космічного призначення // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (травень 2022 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2022. – С. 100. [https://spacehuman.org/\\_files/doc/sbornik2022.pdf](https://spacehuman.org/_files/doc/sbornik2022.pdf).
  15. Белозеров В. Е., Волкова С. А. Геометрический подход к проблеме



- стабилизации систем управления: Монограф. – Днепропетровск: Из-во Днепропет. нац. ун-та, 2006. – 440 с.: ил. 44.
16. *Белоножко П. А., Белоножко П. А., Жечев М. М., Тарасов С. В.* К математическому моделированию динамики системы двух тел, связанных упругим многосвязником // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 7. С. 96–103.
  17. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа. 1980. С. 408.
  18. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность, устойчивость, колебания. Том 1 — М.: Машиностроение, 1968. — 831 с.
  19. *Варвак П. М.* Метод конечных элементов / П. М. Варвак, И. М. Бузун и др.; под ред. П. М. Варвака. – К.: Вища шк., 1981. – 176 с.
  20. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
  21. *Дорожинський О. Л.* Аналітична та цифрова фотограмметрія. - Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. - 163 с
  22. *Дорожинський О. Л.* Математичні моделі аналітичної та космічної фотограмметрії: монографія / О. Л. Дорожинський; Нац. ун-т "Львів. політехніка". - Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015. - 142 с.
  23. *Дорожинський О. Л.* Фотограмметрія та дистанційне зондування / О. Л. Дорожинський; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2019. – Кн. 1. – 176 с.: іл.
  24. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 271 с.
  25. *Карпіловський В. С.* Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. – Київ: «Софія А», 2022. – 275 с.
  26. *Касаткин Б.С., Кудрин А.Б, Лобанов Л.М. и др.* Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. - К.: Наукова думка, 1981. С. 584.
  27. *Кобаяси А., Атлури С., Делли Д. и др.* Экспериментальная механика. В 2-х книгах: Книга 1. М.: Мир, 1990. С. 616.
  28. *Костюк В.И.* Промышленные роботы: Конструирование, управление,

- експлуатація / К.: Вища шк. 1985. С. 359.
29. *Літот О.В., Манько Т.А.* Екстриментальне дослідження роз'ємних фланцевих з'єднань кріогенних трубопроводів ракет-носіїв із вуглепластику // Вісник Дніпровського університету імені Олеся Гончара. Серія: Ракетно-космічна техніка. 2024. Т. 33. Вип. 4. С. 88-93. <https://doi.org/10.15421/452429>.
  30. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. - 640.
  31. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ. 1961. 824 с.
  32. *Малков І. В.* Аналіз характеристик локального напружено-деформованого стану з'єднання металевого комля з композитною лопаттю повітряного гвинта // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології. 2024. № 100. С. 67-76. <http://doi.org/10.32620/oikit.2024.100.06>.
  33. *Мартиненко В. Г.* Чисельне та експериментальне дослідження кінцевого з'єднання лопатки роторної машини // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер. : Динаміка і міцність машин: зб. наук. пр. – Харків: НТУ "ХПІ", 2023. – № 1. – С. 14-20. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.1.284029>.
  34. *Недосека С.А., Недосека А.Я., Бойчук О.І., Яременко М.А., Овсієнко М.А.* Особливості акустичної емісії при оцінці стану матеріалів // Технічна діагностика і неруйнівний контроль. 2020. №2. С. 3-12. <https://doi.org/10.37434/tdnk2020.02.01>.
  35. *Печеневская Т. М., Тарасов С. В.* Динамика двух тел, соединенных телескопическим многосзвенником // Техн. механика. 1993. Вып. 2. С. 43-47.
  36. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора - М.: Наука, 1976. – 104 с.
  37. *Пономарев С. Д., Андреева Л. Е.* Расчет упругих элементов машин и приборов. – М. Машиностроение, 1980. – 326 с., ил.
  38. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с., ил.
  39. *Светлицкий В. А.* Механика стержней: В 2-х ч. Ч. II. Динамика. – М.: Высш.

- шк., 1987. – 304 с.: ил.
40. *Серьезнов А. Н.* Измерения при испытаниях авиационных конструкций на прочность. - М. Машиностроение, 1976. – 224 с.
  41. *Тарасов С.В., Фоков А.А.* Модельные задачи для класса систем взаимного позиционирования космического аппарата и полезной нагрузки // Техн. механіка. 2017. № 2. С. 20–32.
  42. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер . – М.: Наука, 1975. – 576 с.
  43. *Ткачук М. М.* Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР. 2011. Вип. 22. С. 123–140.
  44. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 624 с.
  45. *Цыбульский Г.А.* Управление силовым воздействием манипуляционного робота // Автоматическая сварка. 2009. № 4. С. 39–41.
  46. *Челомей В. Н.* Вибрации в технике: В 6-ти т./ Ред. Совет: В. Н. Челомей (пред.). – М. Машиностроение, 1978. – Т. 1. Колебания линейных систем/ Под ред. В. В. Болотина. 1978. 352 с.
  47. *Шахинпур М.* Курс робототехники: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 527 с., ил.
  48. *Шептун Ю.Д., Тарасов С.В., Мищанин Л.В.* Пространственные матрицы в уравнениях движения манипуляторов. уравнения частных движений // Техн. механика. 1997. Вып. 5. С. 52-59.
  49. *Шулькин Ю. Б.* Теория упругих стержневых конструкций. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 272 с.
  50. About Canadarm, Canadarm-2, Canadarm-3. Canadian Space Agency: веб-сайт. URL: <https://asc-csa.gc.ca/eng/canadarm/about.asp>. (дата звернення 08.01.2025).
  51. *Aghajari M., Dehkordi S. F., Korayem M. H.* Nonlinear dynamic analysis of the extended telescopic joints manipulator with flexible links // Arab J Sci Eng. 2021. Vol. 46. Pp. 7909–7928. <https://doi.org/10.1007/s13369-020-05316-6>.

52. *Alemdar Z. F., Browning J., Olafsen J.* Photogrammetric measurements of RC bridge column deformations // *Engineering Structures*. 2011. Vol. 33. No. 8. Pp. 2407–2415. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.04.015>.
53. *Al-Ruzouq R., Dabous S. A., Junaid M. T., Hosny F.* Nondestructive deformation measurements and crack assessment of concrete structure using close-range photogrammetry // *Results in Engineering*. 2023. No. 18. Pp. 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101058>.
54. *Andion J. A.* ROSETTA DEPLOYABLE BOOMS / J. A. Andion, R. Lopez, G. Ybarra // *Proceedings of the 10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*. San Sebastian, Spain. 24-26 September 2003. Pp. 247-254.
55. *Andion J.* Useful experiences in a series of deployable booms for CLUSTER satellites / J. Andión, C. Pascual // *Proceedings of the 9th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*. Liège, Belgium. 19-21 Sep. 2001. Pp.113 – 120.
56. *Armstrong B.* The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm / B. Armstrong, O. Khatib, J. Burdick // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. - San Francisco, CA, USA. April 1986. Pp. 510-518.
57. *Balanji H. M., Turgut A. E., Tunc L. T.* A novel vision-based calibration framework for industrial robotic manipulators // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2022. No. 73. Pp. 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2021.102248>.
58. *Cao X., Xu G., Hu Y., Zhou J., Kang J.* Rigid-flexible coupling dynamics analysis of boom-hoisting system of wind power crane // *The 8th International Conference on Advances in Construction Machinery and Vehicle Engineering*. ICACMVE 2023. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Singapore. Pp. 3-20. [http://dx.doi.org/10.1007/978-981-97-1876-4\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-981-97-1876-4_1).
59. *Carmo R.N.F., Valença J., Bencardino F., Cristofaro S., Chiera D.* Assessment of plastic rotation and applied load in reinforced concrete, steel and timber beams using image-based analysis // *Engineering Structures*. 2019. No. 198. Pp. 1-13.

- <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109519>.
60. *Chamberlain M. K., Kiefer S. H., LaPointe M., LaCorte P.* On-orbit flight testing of the Roll-Out Solar Array // *Acta Astronautica*. 2021. No. 179. Pp. 407–414. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.10.024>.
  61. *Chen, Y., Mou, W., Guo, Y. et al.* Experimental/numerical study of a circular rib-stiffened flange connection with inner and outer flange plates under combined bending and tensile loading // *Sci Rep*. 2022. Vol. 12. No. 1. 18 p. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-12896-w>.
  62. *Dabous S. A., Al-Ruzouq R., Llorc D.* Three-dimensional modeling and defect quantification of existing concrete bridges based on photogrammetry and computer aided design // *Ain Shams Engineering Journal*. 2023. Vol. 14. No. 12. Pp. 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2023.102231>.
  63. *Dong G., Zhu Z. H.* Autonomous robotic capture of non-cooperative target by adaptive extended Kalman filter based visual servo // *Acta Astronautica*. 2016. No. 122. Pp. 209–218. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.02.003>.
  64. *Dong G., Zhu Z.H.* Position-based visual servo control of autonomous robotic manipulators // *Acta Astronautica*. 2015. No. 115. Pp. 291–302. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.05.036>.
  65. *Dong G., Zhu Z.H.* Vision-based Pose and Motion Estimation of Non-cooperative Target for Space Robotic Manipulators // *AIAA SPACE 2014 Conference and Exposition*. (San Diego, CA, 2014). San Diego, 2014. Pp. 1-9. <https://doi.org/10.2514/6.2014-4263>.
  66. *Dong K., Li D., Lin Q., Qiu H., Cong Q., Li X.* Design and analysis of a novel hinged boom based on cable drive // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2021. Vol. 35. No. 3. Pp. 592-606. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.04.006>.
  67. *Dong M. L., Deng W. Y., Sun Y. N., Wang Y.Q.* Photogrammetric Measurement of Deformation of Large Deployable Mesh Microwave Antenna // *Key Engineering Materials*. 2008. No. 381. Pp. 309–312. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.381-382.309>.
  68. *Ellery A.* Tutorial review on space manipulators for space debris mitigation //

- Robotics. 2019. Vol. 8. No. 2. Pp. 34. <https://doi.org/10.3390/robotics8020034>.
69. *Fan Q., Wu Y., Bi K., Liu Y.* Autonomous Vision-Guided Two-Arm Collaborative Microassembly Using Learned Manipulation Model // IEEE Robotics and Automation Letters. 2024. Vol. 9. No. 3. Pp. 2375-2382. <https://doi.org/10.1109/LRA.2024.3355635>.
70. *Felicetti L., Gasbarri P., Pisculli A., Palmerini G.B., Sabatini M.* Design of robotic manipulators for orbit removal of spent launchers' stages // Acta Astronautica. 2016. Vol. 119. Pp. 118-130. <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.11.012>.
71. *Fernandez J.M.* DEPLOYMENT MECHANISMS OF A GOSSAMER SATELLITE DEORBITER / J.M. Fernandez, M. Schenk, G. Prassinis, V.J. Lappas, S.O. Erb // 15th European Space Mechanisms and Tribology Symposium. - Noordwijk, The Netherlands. 2013.
72. *Flores-Abad A., Ma O., Pham K., Ulrich S.* A review of space robotics technologies for on-orbit servicing // Progress in Aerospace Sciences. 2014. Vol. 68. Pp. 1–26. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2014.03.002>.
73. Global Robotic Arm Market – Industry Trends and Forecast to 2031. Data Bridge Market Research: веб-сайт. URL: <https://www.databridgemarketresearch.com/reports/global-robotic-arm-market>. (дата звернення 08.01.2025).
74. *Goda I., L'Hostis G., Guerlain P.* In-situ non-contact 3D optical deformation measurement of large capacity composite tank based on close-range photogrammetry // Optics and Lasers in Engineering. 2019. No. 119. Pp. 37–55. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.02.006>.
75. *Gouliaev V.I., Zavrzhina T.V.* Dynamics of a flexible multi-link cosmic robot-manipulator // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 243. No. 4. Pp. 641–657. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3409>.
76. *Guan X., Xu Y., Xing C.* A Method for Rapid Measurement of the Deformation and Spatial Attitude of Large Radar Antennas Inside Radomes // IEEE Access. 2016. No. 4. Pp. 1-10. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3076000>.
77. *Guo X., Yuan Y., Suo T., Su X., Liu Y., Ge Z.* A novel temperature-strain

- synchronous measurement method // Optics and Lasers in Engineering. 2021. No. 147. Pp. 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106723>.
78. *Gwashavanhu B., Oberholster A. J., Heyns P. S.* Rotating blade vibration analysis using photogrammetry and tracking laser Doppler vibrometry // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. No. 76. Pp. 174–186. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.019>.
79. *Hossain M. M., Tafheem Z., Amanat K. M.* Experimental investigation on bolted flanged steel pipe joint subjected to flexure // International Journal of Structural Engineering (IJSTRUCTE). 2021. Vol. 11. No. 2. 15 p. <http://doi.org/10.1504/IJSTRUCTE.2021.114265>.
80. *Iwasa T., Ota K., Harada T., Muramatsu R.* High-resolution surface shape measurement of parabola antenna reflector by using grating projection method with virtual targets // Acta Astronautica. 2018. No. 153. Pp. 95-108. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.09.031>.
81. *Jayaswal K., Palwalia D. K., Kumar S.* Analysis of robust control method for the flexible manipulator in reliable operation of medical robots during COVID-19 pandemic // Microsystem Technologies. 2020. Vol. 27. No. 5. Pp. 2103–2116. <https://doi.org/10.1007/s00542-020-05028-9>.
82. *Kalaycioglu S., de Ruiter A.* Dual arm coordination of redundant space manipulators mounted on a spacecraft // Robotica. 2023. Vol. 41. No. 8. Pp. 2489-2518. <https://doi.org/10.1017/S0263574723000504>.
83. *Khoroshylov S. V., Shamakhanov V. K., Beitsun V. S., et al.* Dynamics modelling and analysis of the deployable reflector antenna for sar mini-satellites // 41st ESA Antenna Workshop on Large Deployable Antennas (25 - 28 September 2023). – Noordwijk, The Netherlands: ESA-ESTEC, 2023. [https://www.researchgate.net/publication/374544077\\_DYNAMICS\\_MODELING\\_AND\\_ANALYSIS\\_OF\\_THE\\_DEPLOYABLE\\_REFLECTOR\\_ANTENNA\\_FOR\\_SAR\\_MINI-SATELLITES](https://www.researchgate.net/publication/374544077_DYNAMICS_MODELING_AND_ANALYSIS_OF_THE_DEPLOYABLE_REFLECTOR_ANTENNA_FOR_SAR_MINI-SATELLITES).
84. *Khoroshylov S., Shamakhanov V., Vasyliov V.* Modeling of centrifugal deployment of three-section minisatellite boom // Technical mechanics. 2021. Vol. 4. Pp. 56–



- 65.
85. *Koehl M., Delacourt T., Boutry C.* Image capture with synchronized multiple-cameras for extraction of accurate geometries // *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci.* 2016. Vol. XLI-B1. Pp. 653–660.  
<https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLI-B1-653-2016>.
86. *Kuang Y., Wang S., Gao Y., Xu B., Xu S.* Design and preliminary ground experiment for deployable sunshade structures of a modular space telescope // *Sensors*. 2024. Vol. 24. No. 7. Pp. 2280. <http://doi.org/10.3390/s24072280>.
87. *Lee H., Rhee H.* 3-D measurement of structural vibration using digital close-range photogrammetry // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2013. No. 196. Pp. 63–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2013.03.010>.
88. *Li T.* Deployment analysis and control of deployable space antenna // *Aerospace Science and Technology*. 2012. Vol. 18. No. 1. Pp. 42–47.  
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.04.001>.
89. *Li Y., Zhang J., Han J., Cai Z., Wang Y., Li Y.* Research on Flatness Rapid Measurement Technology of Large Deployable Antenna // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. No. 816. Pp. 1-6.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899x/816/1/012022>.
90. *Liao Y., Krishnan S.* Deployable scissor structures: Classification of modifications and applications // *Automation in Construction*. 2024. Vol. 265. Pp. 1-27.  
<http://doi.org/10.1016/j.autcon.2024.105547>.
91. *Lima M. F. M., Machado J. A. T., Crisóstomo M.* Experimental backlash study in mechanical manipulators // *Robotica*. 2010. Vol. 29. No. 2. Pp. 211–219.  
<https://doi.org/10.1017/s0263574710000056>.
92. *Lin G. C., Bai X. H., Tan H. F., Wan Z. M.* Surface Accuracy Measurement of a Novel Inflatable Antenna by Photogrammetry // *Advanced Materials Research*. 2011. Vol. 301-303. Pp. 713–718.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.301-303.713>.
93. *Ling L., Xuyang D., Jingjing W., Xiaoguang R., Anjiang C.* Analysis of bolt load uniformity in raised flange connection // *Insights of Automation in Manufacturing*.



2024. Vol. 1. No. 1. P. 127–134. <https://doi.org/10.59782/iam.v1i1.233>.
94. *Liu T., Burner A. W., Jones T. W., Barrows D. A.* Photogrammetric techniques for aerospace applications // *Progress in Aerospace Sciences*. 2012. No. 54. P. 1–58. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2012.03.002>.
  95. *Liu T.-W., Bai J.-B., Fantuzzi N.* Folding behavior of the thin-walled lenticular deployable composite boom: Analytical analysis and many-objective optimization // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 30. No. 11. Pp. 2221–2239. <http://doi.org/10.1080/15376494.2022.2053766>.
  96. *Liu T.-W., Bai J.-B., Fantuzzi N., Zhang X.* Thin-walled deployable composite structures: A review // *Progress in Aerospace Sciences*. 2024. Vol. 146. <http://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.100985>.
  97. *Liu Y., Zhang D., Hu J., Chen W., Gao C., Qiu Z.* Design and structural analysis of an inflatable coated fabric manipulation arm // *Thin-Walled Structures*. 2019. No. 139. Pp. 310–320. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.020>.
  98. *Lu J.-W., Sun X.-M., Vakakis A. F., Bergman L. A.* Influence of backlash in gear reducer on dynamic of single-link manipulator arm // *Robotica*. 2014. Vol. 33. No. 8. Pp. 1671–1685. <https://doi.org/10.1017/s0263574714000915>.
  99. *Lu K., Dong J., Zhang A., Gao B.* Analysis on the leakage of the flange connection of the water-containing hydrofluoric acid pipeline // *Processes*. 2021. Vol. 9. No. 11. 11 p. <https://doi.org/10.3390/pr9111986>.
  100. *Luhmann T.* Close range photogrammetry for industrial applications // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. 2010. Vol. 65. No. 6. Pp. 558–569. <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2010.06.003>.
  101. *Lundstrom T., Baqersad J., Niezrecki C., Avitabile P.* Using High-Speed Stereophotogrammetry Techniques to Extract Shape Information from Wind Turbine/Rotor Operating Data // *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. 2012. Vol. 6. No. 26. P. 269–275. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-2419-2\\_26](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-2419-2_26).
  102. *Ma X., An N., Cong Q. et al.* Design, modeling, and manufacturing of high strain composites for space deployable structures // *Commun Eng*. 2024. Vol. 78.

<http://doi.org/10.1038/s44172-024-00223-2>.

103. *Ma X., Song Q., Jia Q., Fang H., Chen G.* Design and experiment for a high precision reflector // IEEE International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS) and IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM). 2017. Pp. 42–47. <https://doi.org/10.1109/ICCIS.2017.8274746>.
104. *Mallol P.* Deployment simulations of a composite boom for small satellites // Dept. of mechanics, Royal institute of technology. Stockholm, Sweden. 2013. 40 p.
105. *Moler C. B.* Numerical Computing with MATLAB / Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, USA. 2004. Chapter 7.
106. *Nanos K., Papadopoulos E. G.* On the dynamics and control of flexible joint space manipulators // Control Engineering Practice. 2015. Vol. 45. Pp. 230–243. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2015.06.009>.
107. *Ni H., Zhang S., Lei H.* Experimental study on variable amplitude fatigue performance of high-strength bolts in steel structure flange connections // Buildings. 2024. Vol. 14. No. 12. 18 p. <https://doi.org/10.3390/buildings14123736>.
108. *Omarov M., Korobskyi V., Nevliudova V.* Features of kinematics and control of multi-link manipulator robots // Системи управління, навігації та зв'язку: зб. наук. праць. – Харків, 2023. – Вип. 1. – С. 127-133. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2023.127>.
109. *Ou Y., Tatsis K.E., Dertimanis V.K., Spiridonakos M.D., Chatzi, E.N.* Vibration-based monitoring of a small-scale wind turbine blade under varying climate conditions. Part I: An experimental benchmark // Struct. Control. Health Monit. 2021. Vol. 28. No. 6. Pp.1-18. <https://doi.org/10.1002/stc.2660>.
110. *Pistone A., Ludovico D., et al.* Modelling and control of manipulators for inspection and maintenance in challenging environments: A literature review // Annual Reviews in Control. 2024. No 57. Pp. 1-25. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2024.100949>.
111. *Pulford M., Lake M.S.* Deployable Roll-Out Composite (ROC) Booms for Smallsat Antennas // AIAA SCITECH 2023 Forum. 2023. <http://doi.org/10.2514/6.2023-2698>.

112. *Rice J. J., Schimmels J. M.* Passive Compliance Control of Redundant Serial Manipulators // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2018. Vol. 10. No. 4. Pp. 1-8. <https://doi.org/10.1115/1.4039591>.
113. *Sabatini M., Monti R., Gasbarri P., Palmerini G.* Deployable space manipulator commanded by means of visual-based guidance and navigation // *Acta Astronautica*. 2013. No. 83. Pp. 27–43. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.10.015>.
114. *Schierl C., Stang A., Ghafoori E., Schaumann P.* Experimental investigation on stress state and deformation in bolts through tightening of perfect flange connections // *Ce/papers*. 2023. Vol. 6. No. 3-4. Pp. 1319-1324. <https://doi.org/10.1002/cepa.2246>.
115. *Shankar N. U., Duraichelvan R., Ateequlla C.M., et al.* Photogrammetric Measurements of a 12-meter Preloaded Parabolic Dish Antenna // *National Workshop on the Design of Antenna & Radar Systems (DARS)*, (Bangalore, 13-14 February 2009). Bangalore, 2009. Pp. 1-7.
116. *Shen J., Wheeler C., O'Shea J., Ilic D.* Investigation of the dynamic deflection of conveyor belts via experimental and modelling methods // *Measurement*. 2018. No. 127. Pp. 210–220. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.05.091>.
117. *Sheng D., Ma R., Su C.* Dynamic analysis of a box-structured satellite deployment mechanism with self-actuated torsion joints // *Mech. Sci.* 2024. Vol. 15. Pp. 63–76. <http://doi.org/10.5194/ms-15-63-2024>.
118. *Slamani M., Nubiola A., Bonev I. A.* Modeling and assessment of the backlash error of an industrial robot // *Robotica*. 2012. Vol. 30. No. 7. Pp. 1167–1175. <https://doi.org/10.1017/s0263574711001287>.
119. *Subedi D., Tyapin I., Hovland G.* Dynamic modeling of planar multi-link flexible manipulators // *Robotics*. 2021. Vol. 10. No. 2. 26 p. <https://doi.org/10.3390/robotics10020070>.
120. *Sun Z., Zhang Y., Yang D.* Structural design, analysis, and experimental verification of an H-style deployable mechanism for large space-borne mesh antennas // *Acta Astronautica*. 2021. No. 178. Pp. 481-498.

<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.09.032>.

121. *Sushko O., Medzmariashvili E., Filipenko F., et al.* Modified design of the deployable mesh reflector antenna for mini satellites // CEAS Space J. 2021. Vol. 13. No. 4. Pp.533 – 542. <https://doi.org/10.1007/s12567-020-00346-0>.
122. *Tian Q., Flores P., Lankarani H. M.* A comprehensive survey of the analytical, numerical and experimental methodologies for dynamics of multibody mechanical systems with clearance or imperfect joints // Mechanism and Machine Theory. 2018. No. 122. P.1-57. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.12.002>.
123. *Uheida K., Deng Y., Zhang H., Galuppi L., Gao J., Xie L., Mohamed A.* Determining equivalent-sectional shear modulus in torsion tests for laminated glass beams using photogrammetry method // Composite Structures. 2021. No. 276. Pp. 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114572>.
124. *Varedi, S.M., Daniali, H.R., & Farajtabar, M.* The effects of joint clearance on the dynamics of the 3RRR planar parallel manipulator // Robotica. 2016. No. 35. Pp. 1223 - 1242.
125. Vibrationdata Structural Dynamics - Beam Vibration. Tom Irvine: веб-сайт. URL: <https://www.vibrationdata.com/beams.htm>. (дата звернення 03.12.2024).
126. *Viquerat A., Schenk M., Sanders B., Lappas V.* Inflatable rigidisable mast for end-of-life deorbiting system // European conference on spacecraft structures, materials & environmental testing. Braunschweig, Germany. 1-4 April, 2014. Vol. 727. Pp. 1-10.
127. *Wang B., Zhu J., Zhong S., Liang W., Guan C.* Space deployable mechanics: A review of structures and smart driving // Materials & Design. 2024. Vol. 237. Pp. 1-19. <http://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.112557>.
128. *Wang H. H., Feng Y. J., Zhu W. M., Zhang Z. M.* Finite element analysis of bolted flanged joints subjected to external loads // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 750. P. 324-329. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.750.324>.
129. *Wang S., Xu S., Lu L., Sun L.* Roll-out deployment process analysis of a fiber reinforced polymer (FRP) composite tape-spring boom // Polymers. 2023. Vol. 15. No. 11. <http://doi.org/10.3390/polym15112455>.

130. *Wenfu Xu, Zhonghua Hu, Yu Zhang, Bin Liang.* On-orbit identifying the inertia parameters of space robotic systems using simple equivalent dynamics // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 132. Pp. 131-142. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.12.031>.
131. *Winstroth J., Schoen L., Ernst B., Seume J. R.* Wind turbine rotor blade monitoring using digital image correlation: a comparison to aeroelastic simulations of a multi-megawatt wind turbine // *Journal of Physics: Conference Series*. 2014. Ser. 524. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/524/1/012064>.
132. *Winstroth J., Seume J.R.* Wind turbine rotor blade monitoring using digital image correlation: 3d simulation of the experimental setup // *Journal of Physics: Conference Series*. 2014. Ser. 524. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/524/1/012064>.
133. *Wu T., Tang L., Du P., Liu N., Zhou Z., Qi X.* Non-contact measurement method of beam vibration with laser stripe tracking based on tilt photography // *Measurement*. 2022. No. 187. Pp. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110314>.
134. *Xiao Z., Liang J., Yu D., Asundi A.* Large field-of-view deformation measurement for transmission tower based on close-range photogrammetry // *Measurement*. 2011. No. 44. Pp. 1705-1712. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2011.07>.
135. *Xing W. C. , Wang J., Wang Y. O.* An effective model for bolted flange joints and its application in vibrations of bolted flange joint multiple-plate structures: Theory with experiment verification // *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 126. Pp. 482-505. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.11.013>.
136. *Xu Y., Guan F.* Structure design and mechanical measurement of inflatable antenna // *Acta Astronautica*. 2012. No. 76. Pp. 13–25. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.02.005>.
137. *Yang H., Guo H., Wang Y., Feng J., Tian D.* Analytical solution of the peak bending moment of an M boom for membrane deployable structures // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 206. Pp. 236-246. <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.005>.

138. *Yang H., Lu F., Guo H., Liu R.* Design of a new N-shape composite ultra-thin deployable boom in the post-buckling range using response surface method and optimization // IEEE Access. 2019. Vol. 7. Pp. 129659–129665.
139. *Yang H., Xia H., Zhu L. et al.* Measurement and assembly methods for bolted flange joints using three-dimensional digital image correlation // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2024. Vol. 208. Pp. 105-136. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2024.105136>.
140. *Yang J., Peng H., Zhou W., Zhang J., Wu Z.* A modular approach for dynamic modeling of multisegment continuum robots // Mechanism and Machine Theory. 2021. No. 165. Pp. 1-22. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104429>.
141. *Yao H., Liang L., Ma W., Zhang H., Zhao Y., Cui H.* An enhanced continuous contact force model for deployable structures with clearance joints: Validation, simulation, and dynamic characteristics // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2025. Vol. 239. No. 1. Pp. 19-37. <https://doi.org/10.1177/09544062241277770>.
142. *Yao H., Huang Y., Ma W., Liang L., Zhao Y.* Dynamic analysis of a large deployable space truss structure considering semi-rigid joints // Aerospace. 2023. Vol. 10. No. 9. Pp.19. <http://doi.org/10.3390/aerospace10090821>.
143. *Yildiz K., Lesieutre, G.A.* Sizing and prestress optimization of Class-2 tensegrity structures for space boom applications // Engineering with Computers. 2022. Vol. 38. Pp. 1451–1464. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01111-x>.
144. *Zhao P., Liu J., Gong H., Xue F.* Study on tightening, anti-loosening, and fatigue resistance performances of bolted joints with different anti-loosening washers and nuts // Appl. Sci. 2023. Vol. 13. No. 24. <https://doi.org/10.3390/app132413253>.
145. *Zhu L., Bouzid A., Hong J.* Numerical and experimental study of elastic interaction in bolted flange joints // J. Pressure Vessel Technol. 2017. Vol. 139. No. 2. 7 pp. <https://doi.org/10.1115/1.4035316>.

## ДОДАТОК А

**Лістинг Матлаб-функції для функціонування шарніра за допомогою  
кутового переміщення**

```
function [fi1,fi2] = fi_na_zvenia(t, t_1zvena)
%#codegen
% k1,2 90 grad/0.5perioda razvorota zvena
    k1 = 90/(0.5*t_1zvena);
    k2 = -90/(0.5*t_1zvena);
    fi1 = 0; fi2 = 0; fi3 = 0; fi4 = 0;
    p=2/t_1zvena;
    % p - vremennoi poluperiod razvorota zvena
    if t>=0 & t<=0.5*t_1zvena
        fi1 = p*k1*t^2;
        elseif t>0.5*t_1zvena & t<t_1zvena
            fi1 = p*k2*(t-t_1zvena)^2+180;
    else
        fi1=180;
    end
    fi1 = fi1;

    if t>t_1zvena & t<=1.5*t_1zvena
        fi2 = -p*k1*(t-t_1zvena)^2;
        elseif t>1.5*t_1zvena & t<=2*t_1zvena
            fi2 = -p*k2*(t-2*t_1zvena)^2-180;
        elseif t>2*t_1zvena
            fi2 = -180;
        end
    fi2 = fi2;
```



## ДОДАТОК Б

### Список публікацій автора за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

#### *Статті у наукових фахових виданнях України*

1. Бейцун В. С., Тарасов С. В. Динаміка і зусилля у шарнірі дволанкової системи при позиціонуванні корисного навантаження відносно космічного апарату // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2022. – Вип. 35. – С. 5-16. <https://doi.org/10.15421/4222211> (фахове видання, категорія Б).

2. Бейцун В. С., Тарасов С. В. Методика фотограмметричного вимірювання люфтів та пружних податливостей в шарнірних вузлах транспортних маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Технічна механіка. 2024. Вип. 3. С. 124-137. <http://doi.org/10.15407/itm2024.03.124> (фахове видання, категорія Б).

3. Бейцун В. С., Дзюба А. П. Експериментальне дослідження податливості фланцевих з'єднань у моделі маніпулятора космічного призначення // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2024. – Вип. 38. – С. 5-19. <https://doi.org/10.15421/4224101>. (фахове видання, категорія Б).

#### *Матеріали конференцій*

4. Khoroshylov S. V., Shamakhanov V. K. , Beitsun V. S., et al. Dynamics modelling and analysis of the deployable reflector antenna for sar mini-satellites // 41st ESA Antenna Workshop on Large Deployable Antennas (25 - 28 September 2023). – Noordwijk, The Netherlands: ESA-ESTEC, 2023. [https://www.researchgate.net/publication/374544077\\_DYNAMICS\\_MODELING\\_AND\\_ANALYSIS\\_OF\\_THE\\_DEPLOYABLE\\_REFLECTOR\\_ANTENNA\\_F](https://www.researchgate.net/publication/374544077_DYNAMICS_MODELING_AND_ANALYSIS_OF_THE_DEPLOYABLE_REFLECTOR_ANTENNA_F)



*Тези доповідей*

5. *Бейцун В.С., Тарасов С.В., Дзюба А.П.* Математичне моделювання розкладання маніпулятора космічного призначення // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (травень 2022 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2022. – С. 100.  
[https://spacehuman.org/\\_files/doc/sbornik2022.pdf](https://spacehuman.org/_files/doc/sbornik2022.pdf).

6. *Бейцун В.С., Тарасов С.В.* Методи фото- та відеограмметрії при дослідженні динаміки просторово розвинених космічних систем // Людина і космос: Збірник тез XXIV Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції “Людина і космос” (12 – 14 квітня 2023 р.). – Дніпро, ДКАУ НЦАОМ ім. О. М. Макарова, 2023. – С. 121.  
<https://spacehuman.org/uploads/source/doc/sbornik2023.pdf>.

7. *Бейцун В.С., Тарасов С.В.* Методи візуального стеження при натурному моделюванні динаміки бортових маніпуляторів та штанг космічних апаратів // Актуальні проблеми механіки: Тези доповідей на Міжнародній науковій конференції (до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка, 14–16 листопада 2023 р.). – Дніпро, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 2023. – С. 280 – 281.  
[https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual\\_problems\\_of\\_mechanics/abstracts.pdf](https://inmech.kyiv.ua/doc/news/2023/actual_problems_of_mechanics/abstracts.pdf).

## ДОДАТОК В

**Акт впровадження результатів дисертаційної роботи в освітній процес  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара**

ЗАТВЕРДЖЕНО

Проректор з науково-педагогічної  
роботиДніпровського національного  
університету імені Олеся Гончара

Наталія ГУК

“ 21 ” 03 2025 р.

## А К Т

впровадження результатів дисертації Бейцуна Віктора Сергійовича  
«Математичне моделювання механічних процесів функціонування  
маніпулятора космічного призначення»,  
поданій на здобуття наукового ступеня доктора філософії,  
в освітній процес спеціальності 113 Прикладна математика  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

Комісія у складі: к. ф.-м. н., проф. Хамініча О.В., к. ф.-м. н., доц. Комарова О.В., д. т. н. проф. Дзюби А.П. склади цей акт про те, що наукові дослідження, виконані Бейцуном В.С. у дисертаційній роботі, поданій на здобуття наукового ступеня доктора філософії, впровадженні у навчальний процес і використовуються при викладанні курсів «Методи моделювання в механіці деформівного твердого тіла», «Моделі і методи оптимізації конструкцій нової техніки» та при виконанні кваліфікаційних робіт здобувачами першого і другого освітнього рівня спеціальності 113 Прикладна математика.

Члени комісії:

Декан механіко-математичного  
факультету,  
к. ф.-м. н., проф.



Олександр ХАМІНІЧ

В. о. завідувача кафедри  
теоретичної та комп'ютерної  
механіки,  
к. ф.-м. н., доц.



Олександр КОМАРОВ

Науковий керівник,  
професор кафедри  
теоретичної та комп'ютерної  
механіки,  
д. т. н., проф.



Анатолій ДЗЮБА

## ДОДАТОК Г

Довідка про впровадження результатів дисертаційної роботи  
в Інституті транспортних систем і технологій НАН України

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**  
 **ІНСТИТУТ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ**

вул. Писаржевського, 5, м. Дніпро, 49005  
 тел. +38(056) 370-22-03, +38(056) 377-77-60  
 e-mail: itst@westa-inter.com; president@westa-inter.com веб сайт: https://itst.org.ua  
 Код ЄДРПОУ 20204271

№ \_\_\_\_\_ На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖЕНО



Директор Інституту,  
 д.ф.-м.н., ст. наук. співр.

Дмитро РЕДЧИЦЬ

2025 р.

## Довідка про впровадження

Робота «Математичне моделювання механічних процесів функціонування маніпулятора космічного призначення» (автор Бейцун В. С., аспірант механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара) присвячена дослідженню механічних процесів функціонування космічного маніпулятора, включаючи аналіз податливості секцій, шарнірних та фланцевих вузлів конструкції.

Представлені у роботі математичні моделі динаміки та кінематики багатоланкових маніпуляторів, програми та результати імітаційного моделювання робочих режимів, методики експериментальних досліджень просторово розвинених механічних систем, висновки та рекомендації щодо практичного застосування результатів є актуальними та мають науково-інженерну цінність для виконання фундаментальних та прикладних досліджень Інституту.

Запропонована та апробована нова методика експериментального визначення та дослідження впливу на програмні рухи транспортних маніпуляторів і штанг космічних апаратів люфтів та пружних податливостей у шарнірних вузлах із застосуванням фотограмметричного методу рекомендується до застосування в практиці дослідження робочих режимів і проектуванні великогабаритних роторів вертикально-осьових вітроустановок з різновидами ротору Дар'є.

Заступник директора з  
 наукової роботи,  
 к.т.н., ст. наук. співр.



Сергій ТАРАСОВ