

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛЕВЧЕНКО МАКСИМ СТАНІСЛАВОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛЮВАННЯ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОМАТЕРІАЛАМИ З
УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ ЇЇ
ЗАПОВНІЮВАЧА

113 Прикладна математика
11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____М.С.Левченко

Наукові керівники:

Лобода Володимир Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор
Лапуста Юрій Миколайович
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2024

АНОТАЦІЯ

Левченко М.С. Моделювання тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами з урахуванням електричної проникності її заповнювача. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2024.

Частини конструкцій, створені з п'єзокерамічних матеріалів, широко застосовуються в різних галузях сучасної техніки. Особливу важливість здобули п'єзокерамічні композитні матеріали, які відрізняються легкістю, міцністю, надійністю та стійкістю до впливу навколишнього середовища. Однак їх експлуатаційні характеристики значною мірою залежать від наявності різних дефектів, зокрема тріщин між різними матеріалами, які виникають з технологічних або експлуатаційних причин на межі складових композиту. У дисертаційній роботі розроблено методи та проведено розв'язання плоских та просторових задач для біматеріальних п'єзоелектричних тіл з міжфазними тріщинами під дією електричного та механічного навантаження, зокрема розроблено новий спосіб моделювання заповнювача тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами.

У **вступі та огляді літератури** проведено аналіз публікацій за тематикою дисертації та висвітлено внесок досліджень інших авторів до розвитку цього напрямку.

У **розділі 1** розглянуто плоску та просторову задачі для біматеріального п'єзоелектричного композиту з електро-ізолюваною тріщиною на межі поділу матеріалів. Спочатку в припущенні, що розмір тріщини набагато менший, розміру пластини, було застосовано аналітичний підхід. Використовуючи метод комплексних потенціалів, проблему було зведено до задачі лінійного спряження Гільберта-Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок.

На основі цього розв'язку отримано вирази для електромеханічних факторів на межі поділу матеріалів.

Для побудови розв'язку у випадку області скінченних розмірів використовувався чисельний алгоритм, заснований на методі скінченних елементів. У плоскому випадку використовувались сітка із 8-вузлових чотирикутних скінченних елементів, яка згущувалась при підході до тріщини і особливо до її вершин. Для просторового випадку розрахункова область являла собою біматеріальний куб з тунельною тріщиною на межі поділу матеріалів. Сітка формувалась із 20-вузлових скінченних елементів та згущувалась у напрямку фронтів тріщини. Отримано напруження, електричні зміщення та розкриття тріщин для всіх трьох розглянутих випадків. При цьому для просторового випадку, особлива увага зверталась на переріз, що проходить через середню точку фронту тріщини, перпендикулярно до нього. Показано дуже добру узгодженість результатів, отриманих для цього перерізу з аналітичним та чисельним розв'язком плоскої задачі, що підтверджує правильність використаних аналітичної та чисельної методик.

Розділ 2 присвячено дослідженню впливу різних типів електричних граничних умов на тріщині у п'єзоелектричному біматеріалі на її розкриття та швидкість вивільнення енергії. Розглядалася плоска деформація біматеріалу, складеного з двох півпросторів заповнених різними п'єзоелектричними матеріалами та тріщиною на межі їх поділу. Сформульовано граничні умови на інтерфейсі та механічні і електричні умови на зовнішній границі розрахункової області.

Скінченно-елементне розв'язання граничних задач здійснювалося в геометрично лінійній постановці за умови прикладання статичного навантаження. Для отримання параметрів руйнування, реалізована можливість визначення швидкості вивільнення енергії, котре було отримано за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщин та постпроцесорної обробки отриманих чисельних результатів. Отримані результати показали, що

для моделі електропроникної тріщини, величина її розкриття залежить лише від механічної складової навантаження. При використанні моделі електроізолюваної тріщини видно що наявність електричного поля сприяє додатковому розкриттю тріщини. Для електропровідної тріщини має місце контактна взаємодія між берегами тріщини внаслідок дії електричного поля. У частковому випадку тріщини, набагато коротшої характерного розміру розрахункової області, довжини зон контакту, а також максимальні значення розкриття тріщини добре збігаються з точними, отриманими для області нескінченних розмірів. Результати для електропровідної тріщини демонструють суттєвий вплив електричного поля на характер деформування. Це зумовлено тим, що на берегах електродованої тріщини в паралельному їй електричному полі індуються вільні заряди, наявність яких якісно змінює вид поля в околі тріщини. Розглянуто також випадок частково електродованої тріщини. Для цього випадку характер деформування відрізняється від результатів для інших видів електростатичних граничних умов, зокрема, спостерігається утворення контактної зони в середній частині тріщини.

У **розділі 3** проведено аналітичний та чисельний аналіз тріщини зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією зовнішнього механічного навантаження та електричного поля. Спочатку вважається, що розрахункова область нескінченно велика. Вважаючи, що заповнювач тріщини має ненульову скінченну діелектричну проникність, отримано електричну умову в області тріщини, яка зв'язує електричний потік через тріщину зі стрибками переміщень та електричного потенціалу її берегів. На основі цієї умови, яка аналогічна моделі конденсатора, знайдено трансцендентне рівняння для знаходження електричного потоку уздовж берегів тріщини. Показано що в більшій частині області тріщини, величина електричного потоку залишається практично постійною. Наведені значення електричного потоку та швидкості вивільнення енергії для різних навантажень та величин діелектричної проникності.

Аналогічну проблему, але для області скінченних розмірів проаналізовано за допомогою методу скінченних елементів. Розв'язок проводився для тієї ж моделі тріщини і при тих же параметрах, що і аналітичний аналіз. Зокрема, в припущенні, що розмір тріщини значно менший характерного розміру області, використовувались електричні зміщення берегів тріщини, одержані при аналітичному аналізі. Результати показали, що в більшій частині проміжку тріщини розбіжність в результатах є незначною. Це підтверджує достовірність як аналітичного підходу, так і чисельного розрахунку.

Також було проведено аналіз п'єзоелектричного біматеріального композиту з тріщиною на межі поділу матеріалів з позиції тривимірної теорії пружності. Використовувалась та ж, що і раніше, конденсаторна модель тріщини зі скінченною електричною проникністю і застосовувався метод скінченних елементів. Задаючи на берегах тріщини електричні зміщення, отримані із аналітичного розв'язку, проводився чисельний аналіз і результати порівнювались із заданими. В результаті для середнього перерізу, ортогонального фронтам тріщини, узгодження отриманого електричного потоку із заданим є дуже хорошим. Враховуючи, що для інших перерізів, особливо для близьких до торців, розбіжність збільшується, було проведено уточнення вказаних значень методом ітерації. Для цього береги тріщини розбивались на окремі елементи по напрямку її фронтів і з застосуванням процедури ітерації знаходились значення електричного потоку через тріщину з необхідною точністю.

У **розділі 4** розглянуто задачу плоскої деформації, аналогічну до попереднього розділу, але було використано інший спосіб моделювання заповнювача тріщини, без використання рівняння для знаходження електричного потоку вздовж берегів тріщини. Вважалось, що тріщина має форму еліпса, вертикальна вісь якого набагато менша горизонтальної. Тріщина заповнена гіпотетичним матеріалом модулі пружності і

п'єзоелектричні константи якого є на декілька порядків меншими від відповідних характеристик верхнього матеріалу, а діелектрична проникність приймається рівною діелектричним проникностям реальних матеріалів.

Дана модель була досліджена методом скінченних елементів. При цьому розрахункова область розглядалась як об'єднання трьох підобластей з різними фізичними характеристиками, які ідеально з'єднані на лініях їх стику. Використовувались 8-вузлові чотирикутні та 6-вузлові трикутні скінченні елементи лагранжевого типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її вершин. Отримані результати для різних значень діелектричної проникності тріщини показали хороше узгодження в порівнянні з результатами попереднього розділу. З огляду на це, можна говорити про адекватність запропонованої моделі та можливість її застосування для вивчення тріщини зі скінченною електричною проникністю між п'єзоелектричними матеріалами.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому:

З використанням аналітичного підходу та методу скінченних елементів проведено аналіз електроізолюваної тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами у плоскому та просторовому випадках. Запропоновано та реалізовано методику дослідження міжфазної тріщини в п'єзоелектричному композиті скінченних розмірів при різних видах електричних граничних умов на її берегах, яка включає знаходження швидкості вивільнення енергії; детально проаналізовано вплив електричного поля на електропровідну тріщину. З використанням аналітичного розв'язку для тріщини зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами проведено чисельний аналіз цієї моделі тріщини у плоскому і просторовому випадках для тіла скінченних розмірів; у просторовому випадку для різних поперечних перерізів, ортогональних фронтам тріщини, знайдені величини електричного потоку та інші електромеханічні характеристики. Запропоновано

новий підхід до аналізу міжфазної тріщини зі скінченною електричною проникністю без урахування спрощуючих моделей взаємодії її берегів.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблена ефективна скінченно-елементна методика розв’язування плоских та тривимірних задач для п’єзоелектричних біматеріальних тіл з міжфазними тріщинами при скінченній електричній проникності їх заповнювача, яка може використовуватись в інженерній практиці підприємств, пов’язаних з проєктуванням та виготовленням електронних виробів, що включають п’єзоелектричну складову.

Ключові слова: напруження, деформація, композит, тріщина, електрична проникність, п’єзоелектрик, пластинка, метод скінченних елементів, просторовий, швидкість вивільнення енергії.

ABSTRACT

Levchenko M.S. Modeling of a crack between two piezoelectric materials taking into account the electrical permeability of its filler. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics - Dnipro National University named after Oles Honchar, Dnipro, 2024.

Parts of structures created from piezoceramic materials are widely used in various fields of modern technology. Piezoceramic composite materials, which are distinguished by lightness, strength, reliability and resistance to environmental influences, have gained special importance. However, their operational characteristics largely depend on the presence of various defects, in particular cracks between different materials, which arise for technological or operational reasons at the interfaces of the composite components. The methods were developed in the dissertation and the solutions of planar and spatial problems were carried out for bimaterial piezoelectric bodies with interfacial cracks under the action of electrical and mechanical loading, in particular, a new method of modeling the crack filler between two piezoelectric materials was developed.

In the **introduction and review** of the literature, an analysis of publications on the subject of the dissertation was carried out and the contribution of research by other authors to the development of this direction was highlighted.

Section 1 deals with planar and spatial problems for a bimaterial piezoelectric composite with an electrically insulated crack at the material interface. Initially, assuming that the size of the crack is much smaller than the size of the plate, an analytical approach was applied. Using the method of complex potentials, the problem was reduced to the Hilbert-Riemann linear conjugation problem, for which an exact analytical solution was presented. Based on this solution, expressions for electromechanical factors at the interface of materials were obtained.

A numerical algorithm based on the finite element method was used to construct the solution in the case of a domain of finite dimensions. In the plane case,

a grid of 8-node quadrilateral finite elements was used, which thickened when approaching the crack and especially its tips. For the spatial case, the computational domain was a bimaterial cube with a tunnel crack at the material interface. The mesh was formed from 20-node finite elements and thickened in the direction of the crack fronts. Stresses, electrical displacements and crack opening were obtained for all three considered cases. At the same time, for the spatial case, special attention was paid to the section passing through the middle point of the crack front, perpendicular to it. A very good consistency of the results obtained for this section with the analytical and numerical solution of the plane problem is shown, which confirms the correctness of the used analytical and numerical methods.

Chapter 2 is devoted to the study of the influence of different types of electrical boundary conditions at the crack faces in a piezoelectric bimaterial on its opening and the energy release rate. The plane deformation of a bimaterial composed of two half-spaces filled with different piezoelectric materials and a crack at their interface was considered. Boundary conditions at the interface and mechanical and electrical conditions at the outer boundary of the calculation area are formulated.

The finite-element solution of boundary value problems was carried out in a geometrically linear formulation under the condition of applying static load. To find the fracture parameters, the ability to determine the energy release rate was implemented. It was realized using the integral method of virtual crack closure and post-processing of the obtained numerical results. The obtained results showed that for the electrically permeable crack model, the size of its opening depends only on the mechanical component of the load. When using the model of an electrically insulated crack, it is found out that the presence of an electric field contributes to the additional opening of the crack. For an electrically conductive crack, there is a contact interaction between the edges of the crack due to the action of the electric field. In the particular case of a crack length much shorter of characteristic size of the calculated area, the length of the contact zones, as well as the maximum values of the crack opening agree well with the exact values obtained for the area of infinite

dimensions. The results for an electrically conductive crack demonstrate a significant effect of the electric field on the nature of the deformation. This is due to the fact that free charges are induced on the faces of an electroded crack in an electric field parallel to it and the presence of this field qualitatively changes the appearance of the field around the crack. The case of a partially electroded crack is also considered. In this case, the nature of the deformation differs from the results for other types of electrostatic boundary conditions, in particular, the formation of a contact zone in the middle part of the crack is observed.

In **Chapter 3**, an analytical and numerical analysis of a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials under the action of an external mechanical load and an electric field is carried out. Initially, it is assumed that the calculation domain is infinitely large. Assuming that the crack filler has a non-zero finite dielectric constant, an electrical condition in the crack region is obtained, which connects the electric flux through the crack and the displacements and electric potential jumps of its faces. Based on this condition, which is similar to the capacitor model, a transcendental equation for finding the electric flux along the crack faces was found. It is shown that in the most part of the crack region, the magnitude of the electric flux remains practically constant. The values of electric flux and energy release rate for different loads and values of dielectric constant are given.

A similar problem, but for a domain of finite dimensions, was analyzed using the finite element method. The solution was carried out for the same crack model and with the same parameters as the analytical analysis. In particular, in the assumption that the size of the crack is significantly smaller than the characteristic size of the domain, the electrical displacements of the crack faces, obtained during the analytical analysis, were used. The results showed that in the most part of the crack region, the discrepancy in the results is insignificant. This confirms the reliability of both the analytical approach and the numerical calculation.

An analysis of the piezoelectric bimaterial composite with a crack at the material separation boundary was also carried out from the point of view of the three-dimensional theory of elasticity. The same capacitor model of the crack with finite electrical permeability was used as before and the finite element method was applied. By setting the electric displacements obtained from the analytical solution on the faces of the crack, a numerical analysis was carried out and the results were compared with the given ones. As a result, for the middle section, orthogonal to the crack fronts, the agreement of the obtained electric flux with the given one is very good. Taking into account that the discrepancy increases for other cross-sections, especially those close to the ends, the mentioned values were refined by the iteration method. For this, the faces of the crack were divided into separate elements in the direction of its fronts, and using the iteration procedure, the values of the electric flux through the crack were found with the required accuracy.

In **Chapter 4**, a plane strain problem similar to the previous chapter was considered, but a different way of modeling the crack filler was used. This way does not use the equation for definition of the electric flux along the crack faces. It was assumed that the crack has the shape of an ellipse, the vertical axis of which is much smaller than the horizontal. The crack is filled with a hypothetical material, which modulus of elasticity and piezoelectric constants are several orders of magnitude lower than the corresponding characteristics of the upper material, and the dielectric constant is assumed to be equal to the dielectric constants of real materials.

This model was investigated by the finite element method. Herewith, the calculation area was considered as a combination of three subareas with different physical characteristics, which are perfectly connected on the lines of their junction. 8-node quadrilateral and 6-node triangular finite elements of the Lagrangian type were used. The mesh thickening when approaching the crack and especially its tips takes place. The obtained results for different values of the dielectric constant of the crack showed a good agreement in comparison with the results of the previous section. In view of this, we can talk about the adequacy of the proposed model and

the possibility of its application for the study of a crack with finite electrical permeability between piezoelectric materials.

The scientific novelty of the obtained results is as follows:

Using the analytical approach and the finite element method, the analysis of an electrically insulated crack between two piezoelectric materials in the plane and spatial cases was carried out. A methodology for investigating an interfacial crack in a piezoelectric composite of finite dimensions under various types of electrical boundary conditions on its faces has been proposed and implemented. It includes the energy release rate determination; the influence of the electric field on the conductive crack is analyzed in detail. Using the analytical solution for a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials, a numerical analysis of this crack model was carried out in the plane and spatial cases for a body of finite dimensions; for different cross-sections, orthogonal to the crack fronts, the magnitudes of the electric flux and other electromechanical characteristics were found for the spatial case. A new approach to the analysis of an interfacial crack with finite electrical permeability which is not based upon simplifying models of the interaction of its faces is proposed.

The practical significance of the obtained results is that an effective finite-element method for solving planar and three-dimensional problems for piezoelectric bimaterial bodies with interfacial cracks with finite electrical permeability of their filler has been developed. It can be used in the engineering practice of enterprises related to design and manufacture of electronic products that include a piezoelectric component.

Key words: stress, strain, composite, crack, electrical permeability, piezoelectric, plate, finite element method, spatial, energy release rate.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Левченко М. С., Гергель І. Ю., Лобода В. В. Про особливості деформування тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 86–97. DOI: 10.15421/4221008
2. М. Левченко, В. Лобода. Аналіз тріщини зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». 50 Серія: Динаміка і міцність машин. № 1. 2023, с. 45-50, DOI: 10.20998/2078-9130.2023.1.275582.
3. Левченко, М. С., Лапуста, Ю.М., Лобода, В.В. Про спосіб моделювання заповнювача тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2(37), с.94-104. <https://doi.org/10.15421/4223219>

Статті у наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних

1. Adlucky V. J., Levchenko M. S., Loboda V. V. Finite-element analysis of the parameters of fracture in a piezoelectric bimaterial with interface crack for various types of boundary conditions on its faces // J. Math. Sci. – 2024. – 279, No. 2. – P. 181–196. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07004-4>
2. Levchenko M., Lapusta Y., Loboda V. 3-D analysis of a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials. Procedia Structural Integrity 59 (2024) 724–730. 10.1016/j.prostr.2024.04.103

Тези доповідей

1. Левченко М.С., Лобода В.В. Тріщина між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією механічного навантаження та електричного поля. // Математичні проблеми технічної механіки-2018. Матеріали міжнародної наукової конференції. – Київ, Черкаси, Кам'янське. – 2018. – С. 60.
2. Левченко М.С., Лобода В.В. Чисельно-аналітичний аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. // Математичні проблеми технічної механіки-2021. Матеріали міжнародної наукової конференції. – Київ, Черкаси, Кам'янське.. -2021.- С. 42.
https://www.dstu.dp.ua/uni/downloads/maket_zbirnik_mater_conf_mptm2021.pdf
3. В. Адлуцький, М. Левченко, В. Лобода Визначення параметрів руйнування п'єзоелектричного біматеріалу при наявності інтерфейсної тріщини з використанням МСЕ. // Сучасні проблеми механіки та математики – 2023. Матеріали міжнародної наукової конференції. Львів. – 2023 - с.185.
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_26.pdf

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ВСТУП.....	17
РОЗДІЛ 1. ПЛОСКА ТА ПРОСТОРОВА ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛЕКТРОІЗОЛЬОВАНОЇ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ.....	30
1.1 Постановка задачі для плоского випадку	30
1.2 Аналітичний розв'язок задачі.....	31
1.3 Особливості застосування методу скінченних елементів (МСЕ)	41
1.3.1 Зведення задачі теорії пружності до варіаційної задачі	41
1.3.2 Дискретизація варіаційної задачі методом скінченних елементів ...	42
1.4 Чисельний розрахунок для плоского та просторового випадків	44
1.5 Результати для плоского та просторового випадків та їх обговорення .	46
1.6 Висновки до першого розділу	48
РОЗДІЛ 2. ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТРІЩИНІ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ НА ЇЇ РОЗКРИТТЯ ТА ШВИДКІСТЬ ВИВІЛЬНЕННЯ ЕНЕРГІЇ.....	50
2.1 Постановка задачі.....	50
2.2 Чисельна реалізація	54
2.3 Чисельні результати	59
2.4 Висновки до другого розділу.....	67
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТРІЩИНИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ.....	69
3.1. Плоско-деформований стан	69
3.1.1 Формулювання проблеми	69
3.1.2 Аналітичний розв'язок.....	71
3.1.3 Чисельна ілюстрація аналітичного розв'язку	74
3.1.4 Чисельний розрахунок для плоского випадку	77
3.2. Просторовий випадок.....	82
3.2.1 Формулювання проблеми	82

3.2.2 Чисельний розрахунок для просторового випадку	83
3.3 Висновки до третього розділу	87
РОЗДІЛ 4. СПОСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАПОВНЮВАЧА ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ	89
4.1. Формулювання проблеми	89
4.2 Формулювання розрахункової моделі та її чисельний аналіз	90
4.3 Результати розрахунків та їх аналіз	92
4.4 Висновки до четвертого розділу.....	96
ВИСНОВКИ	98
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	101

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В останні десятиріччя істотно збільшується використання складних механізмів та приладів, що містять велику кількість деталей, виготовлених з п'єзоелектричних матеріалів. Елементи конструкцій, виготовлені з п'єзокерамічних матеріалів, знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Особливого розповсюдження набули п'єзокерамічні композитні матеріали, які відзначаються легкістю, міцністю, надійністю та стійкістю до впливу навколишнього середовища. Однак їх експлуатаційні характеристики значною мірою залежать від наявності різного роду дефектів, передусім тріщин між різними матеріалами (міжфазних тріщин), які з технологічних або експлуатаційних причин виникають на межі складових композиту.

Проблемі дослідження тріщин між різними п'єзоелектричними матеріалами присвячено значну кількість досліджень українських та закордонних авторів. Розглянемо найбільш важливі дослідження стосовно безпосередньо цієї тематики, а також основних робіт, що забезпечили підґрунтя для одержання вказаних результатів.

Основні методи розв'язання задач для тріщин викладені у відомих монографіях Гузя О. М. [7, 8], Камінського А. О. [9, 10], Кіта Г. С. і Хая М. В. [16], Кіта Г. С. і Побережного О. В. [17], Мухелішвілі М. І. [33], Панасюка В. В. [40], Панасюка В. В. Саврука М. П. і Дацишина А. П. [41], Партона В. З. і Кудрявцева Б. А. [42], Попова Г. Я. [44], Савіна Г. Н. [45], Саврука М. П. [46], Черепанова Г. П. [56] та інших.

Тріщина між двома ізотропними та анізотропними матеріалами.

Вперше задача для тріщини, розташованої на межі поділу двох різних ізотропних півплощин, що знаходилась під дією рівномірно розподіленого на нескінченності розтягуючого навантаження, була сформульована

Williams M. L. та розв'язана ним же у роботі [135]. В цій праці отримано точний аналітичний розв'язок та показано, що в околі вершин тріщини має місце осциляція переміщень та напружень, тобто було встановлене фізично неможливе явище взаємопроникнення берегів тріщини один в одне. Далі в рамках цієї моделі в роботах Грілицького Д. В. [5], Rice J. R. і Sih G. C. [120] були розв'язані плоскі задачі за різних граничних умов на берегах тріщини та різних видів віддаленого навантаження. Також в цих роботах було введено поняття коефіцієнтів інтенсивності напружень спеціального вигляду. Методи сингулярних інтегральних рівнянь при розв'язку плоскої задачі для кусково-однорідних тіл з тріщинами були використані в праці Сулима Г. Т. і Грілицького Д. В. [50]. Точний розв'язок задачі про дисковидну тріщину, що знаходиться на межі поділу двох різних ізотропних півпросторів під дією рівномірного віддаленого осесиметричного розтягуючого навантаження, був отриманий у праці Моссаковського В. І. і Рибки М. Т. [32]. Для розв'язку був використаний метод комплексних потенціалів.

Динамічні задачі для тріщини на межі поділу пружних матеріалів під дією гармонічного навантаження, розглянуті у роботах Меньшикова В. О. [30], Меньшикова В. О., Меньшикова О. В., Гузя І. О. [31]. Досліджено, зокрема, вплив контакту берегів тріщини на характеристики напружено-деформівного стану в околі її вершин.

Першою роботою, в якій досліджувалася система тріщин, розташованих між анізотропними півпросторами, була праця Clements D. L. [61]. В цій статті представлено точний аналітичний розв'язок в рамках "відкритої" моделі при довільному механічному навантаженні на берегах тріщин. Розглядався випадок, коли пружнодеформівний стан тіла не залежить від однієї з координат, тому просторові рівняння теорії пружності для анізотропного тіла представлені через аналітичні функції комплексної змінної. Отримано задачу спряження, розв'язок якої знайдено в замкненій формі.

Серед інших досліджень міжфазної тріщини на межі поділу анізотропних матеріалів потрібно відзначити роботи Hwu C. [84],

Kattis M. A. [85], Quan W. і Sun C. T. [119].

Ting T. C. T. [129 – 131] провів дослідження ступеня осциляції полів напружень та переміщень для тріщини між двома анізотропними матеріалами і, зокрема, дійшов висновку про незмінність ступеня осциляції при незмінній відносній орієнтації головних осей анізотропії.

Деякі контактні задачі для ортотропної півполоси і прямокутника, які математично близькі до задач для тріщин, розглянуто в роботах Павленка А. В. і Кагадій Т. С. [38] та Павленка А. В., Кагадій Т. С. і Щербини І. В. [39].

Модель, запропонована Comninou M. [62], припускає контакт берегів тріщин поблизу їх вершин, причому величини зон контакту заздалегідь невідомі. В роботах [62,63] задача для тріщини між різнорідними ізотропними півплощинами за наявності гладких зон контакту в околі вершин тріщин була зведена до інтегрального рівняння, яке досліджувалося чисельно. Довжина зони контакту однозначно визначалася з додаткових рівнянь, отриманих з умов для напружень та переміщень.

В роботах Dundurs J. і Comninou M. [67], Comninou M. і Dundurs J. [64], Ni L. і Nemat-Nasser S. [111,112], Huang Y., Wang W., Liu C., Rosakis A. J. [83] чисельно розв'язувались сингулярні інтегральні рівняння, до яких зводилися плоскі задачі для тріщин з зонами контакту. При чисельному розв'язанні інтегральних рівнянь виникає проблема, пов'язана з визначенням довжин зон контакту, оскільки межі інтегрування є невідомими та мають бути знайдені з додаткових рівнянь, сформульованих на основі умови обмеженості напружень в точках змикання берегів тріщин. Оскільки це є досить складною проблемою, були прийняті спроби отримання аналітичних розв'язків.

Задачу для тріщини, що знаходиться між двома ізотропними матеріалами, з урахуванням однієї зони контакту вперше аналітично розв'язав Симонов І. В. [47]. В результаті точного розв'язку з використанням комплексних потенціалів отримано трансцендентне рівняння, з якого визначалася довжина зони контакту берегів тріщин. Встановлено, що

механічні поля у вершинах тріщини мають кореневу особливість, а КІН, введені традиційним способом, є дійсними величинами.

В подальшому аналітичні розв'язки для тріщини з однією та двома зонами контакту були одержані з використанням різних методів та при різному зовнішньому навантаженні у працях Симонова І. В. [47 – 49], Лободи В. В. [26], Улітко А. Ф. [51], Острика В. І. та Улітко А. Ф. [34, 35], Atkinson С. [58], Gautesen А. К. і Dundurs J. [73,74], Dundurs J. і Gautesen А. К. [68], Gautesen А. К. [75, 76], Loboda V. V. [103]. В цих роботах були зроблені дослідження щодо впливу однієї зони контакту на іншу та зроблено висновки, що нехтування зоною контакту поблизу однієї з вершин призводить до несуттєвих похибок у визначенні КІН поблизу іншої вершини.

Задача для системи міжфазних тріщин з гладкими зонами контакту аналітично розв'язана в пружному і термопружному випадках, відповідно, у роботах Kharun I. V. і Loboda V. V. [86,87]. Довільно розташоване зосереджене навантаження розглядалося в роботі Харуна І. В. і Лободи В. В. [55].

Тріщини у п'єзоелектричних матеріалах.

Основні положення механіки п'єзоелектричних матеріалів викладені в монографіях Гринченка В. Т., Улітко А. Ф. і Шульги М. О. [6], Партона В. З. і Кудрявцева Б. О. [42]. Тут, зокрема, розглянуто основні співвідношення лінійної теорії деформування п'єзоелектричних середовищ, сформульовано та розв'язано низку задач електропружності.

При розв'язанні задач для п'єзоелектричних тіл з тріщинами важливим аспектом є коректне формулювання електричних умов на берегах тріщин. Тріщини зазвичай заповнені якимось середовищем (повітря, вода, тощо), тому властивості цього середовища повинні бути враховані. Оскільки це непросто, використовуються спеціальні підходи для моделювання наближених граничних випадків, основними з яких є електропроникна та

електроізолювана тріщини.

У статті Кудрявцева Б. О., Партона В. З. і Ракітіна В. І. [19] аналітично розв'язана задача для однієї тріщини на межі поділу двох п'єзоелектриків в рамках граничного випадку повністю електропроникної тріщини. Формулюванню електричних граничних умов на берегах тріщини присвячена робота Половинкіної І. В. і Улітко А. Ф. [43].

Функція Гріна для складеної п'єзокерамічної площини з електропроникною міжфазною тріщиною, побудована у праці Фільштинського Л. А., Фільштинського М. Л. [53] та розвинена у монографії Фільштинського Л. А. [54].

Дослідження протилежного граничного випадку електроізолюваної тріщини було започатковано у роботі Deeg W. F. [66]. У праці Sosa H. [126] побудовано точний розв'язок для тріщини між різнорідними п'єзоелектричними півплощинами в рамках "класичної" моделі. Були введені функції, подібні до функції Ері, а розв'язок, як граничний випадок задачі для еліптичного отвору в нескінченній площині, представлено через аналітичні функції комплексної змінної.

Одним з найгрунтовніших досліджень електроізолюваної тріщини є робота Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. [128], в якій для випадку плоскої та антиплоскої деформації побудовано точний аналітичний розв'язок із застосуванням підходу Ліхницького С. Г. [20] і Stroh A. N. [127]. Автори ввели коефіцієнти інтенсивності спеціального вигляду, проаналізувавши можливі види степеневих особливостей функцій напружень та переміщень в околі вершини тріщини.

Gao C. F. і Fan W. X. [72], розглянувши в однорідному п'єзоелектричному матеріалі еліптичний отвір, граничним випадком якого є тріщина, дослідили коректність спрощених електричних умов для тріщини. Оскільки в околі вершини електроізолюваної тріщини з'являється сингулярність електричної індукції, яка залежить від електричного

навантаження, автори дійшли висновку, що модель електропроникної тріщини є більш реалістичною.

Методи теорії функції комплексного змінного і інтегральних перетворень використовувалися в роботах Loboda V., Lapusta Y., Govorukha V. [102], Pak Y. E. [113], Ru C. Q, Mao X., Epstein M. [122], Ru C. Q. [123], Shen S., Nishioka T., Hu S. L. [125], Wang X. D. [133], Wang X. D., Meguid S. A. [134], в яких в рамках різних граничних випадків електричної проникності берегів досліджувалися тріщини між різнорідними п'єзоелектричними матеріалами.

Умови на берегах тріщини, які дозволяють брати до уваги властивості середовища (електропроникність тріщини) були запропоновані Партоном В. З. і Кудрявцевим Б. О. [42], а також Нео Т. Н., Shen Z. Y. [80]. В цій моделі використовувалися граничні умови, відповідно до яких тріщина розглядалася як конденсатор, що давало змогу враховувати електричну проникність заповнювача тріщини.

Слід відзначити, що даний підхід привернув значну увагу дослідників, про що свідчить велика кількість публікацій, серед яких слід відзначити роботи Dunn M. L. [69], McMeeking R. M. [108], Xu X. і Rajapakse R. K. N. D. [136], Wang B. L. і May Y. W. [132]. Методом скінченних елементів така задача була розв'язана у праці Gruebner O., Kamlah M., Munz D. [79]. В усіх вищеперелічених статтях розглядався однорідний п'єзоелектричний матеріал.

У праці Govorukha V. B., Loboda V. V., Kamlah M. [77] аналітично досліджена тріщина на межі поділу двох різних п'єзоелектричних матеріалів з урахуванням електричної проникності заповнювача тріщини. Також в цій роботі, як частковий випадок, проведено аналіз для тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі.

Li Q. і Chen Y. H. [99,100] провели дослідження тріщини скінченної електричної проникності, що знаходиться на межі поділу двох п'єзоелектричних, а також п'єзоелектричного та діелектричного матеріалів. В роботах Lapusta Y.M., Komarov A.V., Labesse-Jied F., Moutou Pitti R., Loboda V.V [95] та Lapusta Y.M., Loboda V.V. [96] модель тріщини скінченної

електричної проникності використана у динамічному випадку та у випадку тріщини у прошарку між п'єзоелектричними матеріалами. Loboda V.V., Lapusta Y.M., Sheveleva A.E. [104] досліджували вказану модель разом із врахуванням електро-механічних зон передруйнування тріщини у адгезійному прошарку між двома п'єзоелектричними матеріалами. В роботі Loboda V.V., Sheveleva A.E., Chapelle F., Lapusta Y.M. [107] модель тріщини зі скінченною електричною проникністю досліджена на прикладі системи міжфазних тріщин у п'єзоелектричному біматеріалі. Zhou Z. G., Chen Z. T. [137] розглянули взаємодію двох тріщин зі скінченною електричною проникністю між п'єзоелектричними матеріалами зі змінними фізичними характеристиками.

Енергетично сумісні граничні умови стосовно тріщин в однорідних матеріалах були запропоновані у праці Landis C. M. [94] та розвинені Li W., McMeeking R. M., Landis C. M. [101], Ricoeur A. і Kuna M. [121].

У зв'язку зі складністю розв'язання задачі для тріщини з урахуванням зони контакту, такі дослідження почали проводитися відносно нещодавно. В роботі Qin Q.-H., Mai Y.-W. [117] методом сингулярних інтегральних рівнянь в рамках вказаної моделі досліджено термопружну задачу, а в роботі Govorukha V. B., Kamlah M. [77] застосовано метод комплексних потенціалів. Слід також відзначити роботи Herrmann K. P. і Loboda V. V. [81] та Herrmann K. P., Loboda V. V. і Govorukha V. B. [82], в яких отримано точний аналітичний розв'язок для електропроникної та електроізолюваної тріщини, яка знаходиться на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів. У праці Лободи В. В. і Філіпової О. С. [29] проведено дослідження зовнішньої електропроникної тріщини в рамках контактної моделі. Комаров О. В. та Лобода В. В. [18] провели дослідження параметрів руйнування електропроникної тріщини, що рухається з дозвуковою швидкістю по межі поділу п'єзоелектричних матеріалів.

Задачі для електропровідних тріщин між двома п'єзоелектричними матеріалами розв'язувались в роботах Beom H. G., Atluri S. N [60], Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. [106], Loboda V., Mahnken R [105] та ін.

В роботах Антипова Ю. А. [4], Острика В. І. [36], Острика В. І. і Улітко А. Ф. [37], Улітко А. Ф. і Острика В. І. [52] досліджувалися тріщини з зоною контакту за наявності в ній тертя. Поставлені задачі були зведені до інтегральних рівнянь, для яких отримані наближені асимптотичні розв'язки. Інший спосіб моделювання привершинних зон міжфазної тріщини запропоновано у роботах Камінського А. О., Кіпніс Л. А. і Колмакової В. А. [11, 12], Камінського А. О., Дудик І. В., Кіпніс Л. А. [13-15], Лободи В. В. і Шевельової А. Є. [28], в яких вводилися зони послаблених міжчасткових зв'язків на подовженні тріщини. Задача для тріщини, яка знаходиться на лінії поділу ортотропних матеріалів, з урахуванням тертя в зоні контакту аналітично розв'язана в роботі Лободи В. В. і Харуна І. В. [27].

Чисельні методи аналізу композитів скінченних розмірів з тріщинами.

Слід зазначити, що коло задач механіки руйнування п'єзоматеріалів далеко не обмежується випадками нескінченних областей. Практичний інтерес становлять розрахунки для скінченних областей складної форми. В таких випадках, природно, виникає необхідність в застосуванні чисельних методів, в першу чергу – методу скінченних елементів (Zienkiewicz O. C. і Taylor R. L. [138]). Існує ряд робіт, в яких розглядаються різні аспекти реалізації МСЕ стосовно до п'єзоматеріалів: Gruebner O., Kamlah M., Munz D. [79], Kumar S., Singh R. N. [88-90], Kuna M. [91], Kuna M. [92], Kuna M., Rao B. N. [93]. Як правило, в цілях тестування точності скінченноелементних алгоритмів обираються задачі для нескінченних областей, для яких є аналітичні розв'язки. Важливою проблемою при реалізації МСЕ є адекватне моделювання електричних та механічних умов на берегах тріщин та границях між різними матеріалами. Крім того, оскільки в задачах, пов'язаних з руйнуванням, основний інтерес становить отримання достовірних даних про параметри руйнування, актуальною є побудова ефективних алгоритмів

обчислення таких величин, як розкриття тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень, J -інтеграли, швидкість вивільнення енергії. Ці питання розглядались в роботах Адлуцький В. Я., Лобода В. В. [1], Лобода В.В., Волошко О.І. [25], Benkaci N., Maugin G. [59], Cun-Fa Gao, Minghao Zhao, Pin Tong, Tong-Yi Zhang [65], . McMeeking R. M [109], Rybicki E.F., Kanninen M.F. [124], Park S. B., Sun C. T [114], Park S. B., Sun C. T [115].

Дослідження задач для міжфазних тріщин у тривимірній постановці дуже обмежені. Можна назвати роботу J. Qu, Y. Xue [118], де розглянута тріщина між двома анізотропними матеріалами без урахування осциляції напружень біля вершини тріщини.

Таким чином, із вказаного огляду витікає, що на теперішній час найбільш повно досліджені моделі електроізолюваної та електропроникної тріщин між двома п'єзоелектричними матеріалами у плоскому та антиплоскому випадку. Але ці моделі не враховують в достатній мірі фізичні властивості середовища, що заповнює тріщину та характеристики її берегів. Вказані фактори найбільш повно можуть бути враховані в моделі тріщини зі скінченною електричною проникністю, однак до теперішнього часу кількість досліджень у цьому напрямку є недостатньою для адекватного та повного відображення процесів взаємодії фізико-механічних полів у п'єзоелектричних композитах з міжфазними тріщинами, особливо при їх розгляді з позицій тривимірної теорії пружності. Враховуючи вказані обставини вибрану тему дослідження можна вважати актуальною.

Мета і завдання дослідження. *Мета роботи* полягає в розробці методик та розв'язання нових плоских та тривимірних задач механіки руйнування для складених п'єзоелектричних тіл з міжфазними дефектами під дією механічного навантаження та електричних полів, зокрема, розвиток моделі міжфазної тріщини зі скінченною електричною проникністю у п'єзоелектричному біматеріалі.

Досягнення поставленої мети потребує розв'язання таких *завдань*:

- на прикладі електроізолюваної тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами розробити методику її дослідження в плоскому та просторовому випадках. Провести порівняння отриманих результатів та результатів аналітичного аналізу;

- для випадку плоскої задачі проаналізувати вплив різних електричних граничних умов на берегах тріщини на її розкриття, швидкості вивільнення енергії при розвитку тріщини.

- дослідити тріщину на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів з урахуванням електричної проникності середовища тріщини аналітично, шляхом зведення проблеми до розв'язку задачі лінійного спряження та чисельно за допомогою методу скінченних елементів. В останньому випадку розглянути плоску та просторову моделі тріщини. Порівняти отримані результати;

- для тріщини між двома різнорідними п'єзоелектричними матеріалами побудувати розрахункову модель, що враховує діелектричну проникність середовища тріщини без використання спрощуючих гіпотез про взаємодію берегів тріщини та провести аналіз цієї моделі за допомогою методу скінченних елементів

Об'єкт дослідження - процес деформування композитів з тріщинами на межі поділу п'єзоелектричних матеріалів з урахуванням діелектричної проникності середовища тріщини та різних типів граничних умов на її берегах

Предмет дослідження - електромеханічні поля в околі тріщини, швидкість вивільнення енергії, особливості врахування діелектричної проникності заповнювача тріщини при аналізі п'єзоелектричного біматеріалу.

Методи дослідження. Для побудови й аналізу математичних моделей використовується лінійна теорія пружності, механіка руйнування, теорія функцій комплексної змінної, а для чисельного розв'язання – метод скінченних елементів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

1. Проведено аналіз електроізолюваної тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами у плоскому та просторовому випадках. Виконано порівняння отриманих результатів з аналітичними, які знайдені для випадку тріщини, набагато меншої розміру біматеріального тіла.
2. Запропоновано та реалізовано методику дослідження міжфазної тріщини в п'єзоелектричному композиті скінченних розмірів при різних видах електричних граничних умов на її берегах, яка включає знаходження швидкості вивільнення енергії. Детально проаналізовано електропровідну модель, для якої встановлено можливість виникнення макрозон контакту берегів тріщини в залежності від інтенсивності зовнішнього електричного поля.
3. З використанням аналітичного розв'язку для тріщини зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами проведено чисельний аналіз цієї моделі тріщини у плоскому і просторовому випадках для тіла скінченних розмірів. У просторовому випадку, для різних поперечних перерізів, ортогональних фронтам тріщини, знайдені її розкриття, величини електричного потоку та стрибки електричного потенціалу при переході через тріщину.
4. Запропоновано підхід до аналізу міжфазної тріщини зі скінченною електричною проникністю без урахування спрощуючих моделей взаємодії її берегів. Цей підхід базується на скінченно-елементному моделюванні заповнювача тріщини і дозволяє визначити електричний потік через тріщину та інші її електромеханічні параметри.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується коректним застосуванням математичного апарату й апробованих рівнянь лінійних теорій пружності, електропружності та методів теорії функцій комплексної змінної; зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із вже відомими розв'язками інших авторів; порівнянням аналітичних значень параметрів руйнування з результатами, отриманими за

допомогою методу скінченних елементів; відповідністю результатів розв’язування нових задач фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблено ефективна скінченно-елементна методика розв’язування плоских та тривимірних задач, для п’єзоелектричних біматеріальних тіл з міжфазними тріщинами при скінченній електричній проникності їх заповнювача, яка може використовуватись в інженерній практиці підприємств, пов’язаних з проєктуванням та виготовленням електронних виробів, що включають п’єзоелектричну складову. Це має велике практичне значення, оскільки дозволяє оцінити розподіл фізико-механічних полів у конструкціях з п’єзоелектричних матеріалів та дати оцінки їхньої міцності, тріщиностійкості та експлуатаційного ресурсу.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 5 статей. Дві з них опублікована у виданні, що входить до наукометричної бази Scopus [57, 98]. Три статті входять до переліку наукових фахових видань України [22, 24, 97]. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику В. В. Лободі. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [22, 24, 97] – побудова аналітичних розв’язків, їхня чисельна реалізація, проведення скінченно-елементного аналізу, візуалізація результатів; [57, 98] – побудова скінченно-елементних моделей, їх реалізація та аналіз результатів, порівняння результатів розрахунків для часткового випадку з відомими.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2021-2024 років; а також на міжнародних конференціях:

1. Математичні проблеми технічної механіки. – Київ, Черкаси, Кам’янське. – 2018

2. Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпро, Кам'янське. 13-16 квітня, 2021
3. Сучасні проблеми механіки та математики – Львів. – 23-25 травня, 2023.
4. In-service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction – Ternopil, Ukraine. – 18-20 October, 2023.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження за темою дисертації здійснювалися також в науково-дослідній лабораторії механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетної теми 1-655-21 «Моделі та методи визначення параметрів руйнування п'єзоактивних та п'єзопасивних композитів з дефектами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0121U109767, 2021– 2023 рр.

Структура та обсяг дисертації.

Робота містить вступ, огляд літератури, 4 розділи, висновки та список використаних джерел, що містить 138 найменувань на 15 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 115 сторінок, обсяг основного тексту – 104 сторінки. Робота містить 31 рисунок та 12 таблиць.

РОЗДІЛ 1. ПЛОСКА ТА ПРОСТОРОВА ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛЕКТРОІЗОЛЬОВАНОЇ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

1.1 Постановка задачі для плоского випадку

Розглянемо квадратну пластину розміром $l \times l$ (рис.1.1) з тріщиною довжини $2b$ в центрі під дією розтягуючого зусилля, що прикладене до двох протилежних зовнішніх граней та електричного зміщення. Обидві частини пластини виготовлені з різних п'єзoeлектричних матеріалів, властивості яких задаються матрицями жорсткості $c_{ijkl}^{(m)}$, п'єзoeлектричних $e_{ikl}^{(m)}$ та діелектричних $\chi_{il}^{(m)}$ констант.

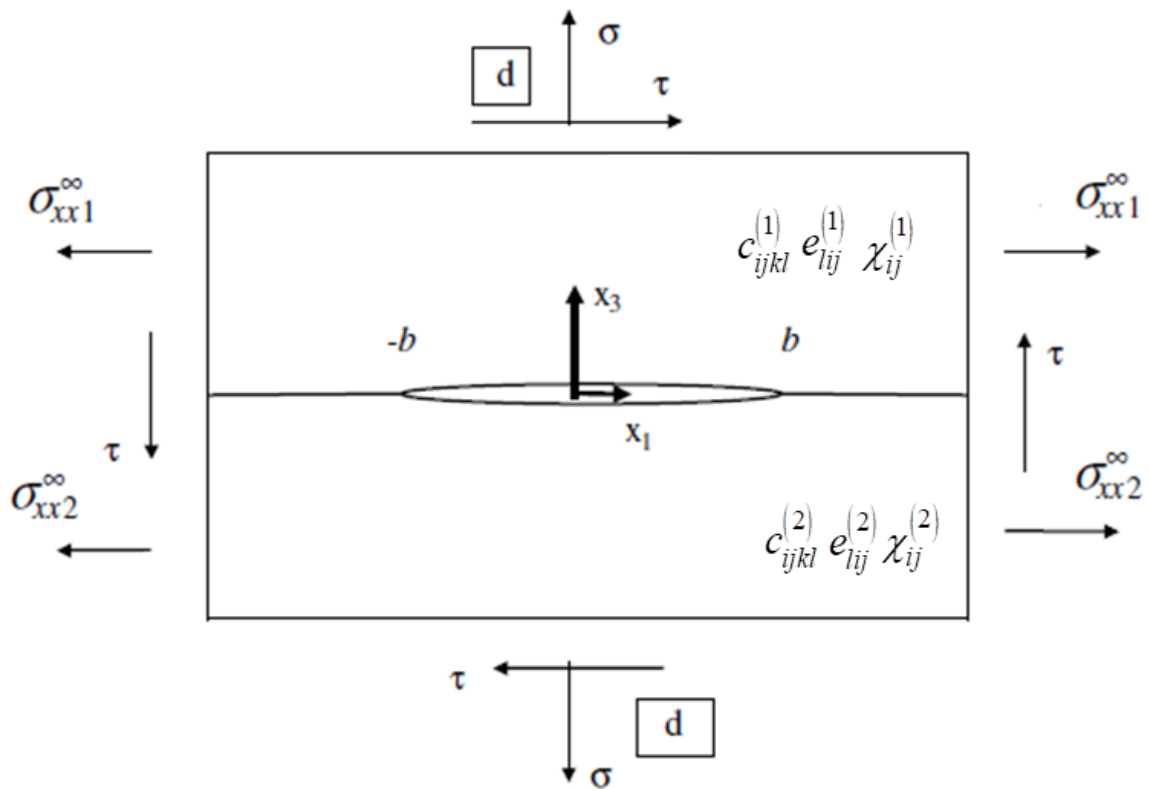


Рис. 1.1. Тріщина у п'єзoeлектричному біматеріалі (плоский випадок)

Пластина навантажена рівномірно розподіленими розтягуючими та зсувними зусиллями (σ, τ) та електричним зміщенням d . Крім того, на бічні сторони

діють нормальні напруження σ_{xxt}^{∞} , які забезпечують неперервність деформації ε_{11} при переході через інтерфейс на віддаленні від тріщини [31].

1.2 Аналітичний розв'язок задачі

Приймаючи спочатку, що розмір тріщини набагато менший розміру пластини будемо вважати, що розмір пластини нескінченно великий. Тобто розглянемо плоску задачу для тріщини $-b \leq x_1 \leq b, x_3 = 0$ між двома напівнескінченими п'єзокерамічними просторами.

Граничні умови мають вигляд:

$$\text{для } x_1 \notin (-b, b) : \langle \mathbf{V}(x_1, 0) \rangle = 0, \langle \mathbf{t}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{для } x_1 \in (-b, b) : \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \langle D_3(x_1, 0) \rangle = 0, \quad (1.2)$$

де \mathbf{V}, \mathbf{t} - вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}^T,$$

квадратні дужки означають стрибок функції при переході через вісь x_1 .

Співвідношення для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності об'ємних сил і вільних зарядів можна представити у вигляді (Рак У.Е., [113])

$$\Pi_{iJ} = E_{iJKl} V_{K,l}, \quad (1.3)$$

$$\Pi_{iJ,i} = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{де } V_K = \begin{cases} u_k, & K = 1, 2, 3 \\ \varphi, & K = 4 \end{cases}, \quad (1.5)$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & i, J = 1, 2, 3 \\ D_i, & i = 1, 2, 3; J = 4 \end{cases}, \quad (1.6)$$

$$\text{та } E_{iJKL} = \begin{cases} c_{ijkl}, & J, K = 1, 2, 3 \\ e_{lij}, & J = 1, 2, 3; K = 4 \\ e_{ikl}, & K = 1, 2, 3; J = 4 \\ -\chi_{il}, & J = K = 4 \end{cases}, \quad (1.7)$$

$u_k, \varphi, \sigma_{ij}$ та D_i – переміщення, електричний потенціал, напруження та електричний потік, відповідно. Крім того c_{ijkl}, e_{lij} та χ_{ij} – модуль пружності, п'єзoeлектрична проникність та діелектрична проникність, відповідно. Малі нижні індекси в (1.3) – (1.5) і далі, завжди мають діапазон від 1 до 3, великі нижні індекси знаходяться в діапазоні від 1 до 4, а в (1.3), (1.4) використовується правило сумування Ейнштейна.

Припускаючи що всі поля не залежать від координат x_2 , розв'язок (1.3), (1.4) згідно з методом запропонованим Eshelby *et al.* [70], можна представити у вигляді (Pak Y.E., [113])

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{f}(z), \quad (1.8)$$

де $z = x_1 + p x_3$, $\mathbf{V} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$, \mathbf{f} є довільною 4-компонентною вектор-функцією, яку необхідно визначити; $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ та p є власним вектором і власним значенням, відповідно, які можна отримати з рівняння

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}] \mathbf{a} = 0, \quad (1.9)$$

з 4×4 матрицями \mathbf{Q}, \mathbf{R} і \mathbf{T} визначеними як $Q_{JK} = E_{1JK1}, R_{JK} = E_{1JK3}, T_{JK} = E_{3JK3}$

Тут і далі верхній індекс T означає транспоновану матрицю.

Оскільки рівняння (1.9) не має дійсних власних значень (Suo *et al.*, [128]) позначаємо власне значення рівняння (1.9) з додатними уявними частинами як p_α , а відповідні власні вектори (1.9) \mathbf{a}_α (нижній індекс α тут і далі

приймає значення 1,2,3,4). Найзагальніший дійсний розв'язок рівнянь (1.3), (1.4) можна представити як (Suo et al., [128])

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (1.10)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ - матриця, що складається з власних векторів, $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T$ - довільна вектор-функція, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$ а риска над нею позначає комплексне спряження.

Представимо вектор наступним чином

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T. \quad (1.11)$$

Тоді за допомогою рівнянь (1.4) цей вектор можна записати у вигляді

$$\mathbf{t} = \mathbf{B} \mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (1.12)$$

де 4×4 матриця \mathbf{B} визначається як

$$B_{J\alpha} = (E_{3JK1} + p_\alpha E_{3JK3}) A_{K\alpha} \text{ (не підсумовано за індексом } \alpha \text{)} \quad (1.13)$$

$$\text{та } \mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^T. \quad (1.14)$$

Розв'язок для анізотропного п'єзоелектричного біматеріалу зі змішаними граничними умовами на межі розділу

Розглянемо біматеріал, що складається з двох різних п'єзоелектричних напівнескінченних просторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$ з властивостями, визначеними матрицями $E_{iJKl}^{(1)}$ та $E_{iJKl}^{(2)}$ відповідно. Припускаємо, що вектор \mathbf{t} неперервний по всій біматеріальній межі та частині $L = \{(-\infty, c_1) \cup (b_1, c_2) \cup \dots (b_n, \infty)\}$ інтерфейсу $-\infty < x_1 < \infty$, $x_3 = 0$ є механічно та електрично обмеженим, тобто граничні умови на межі поділу $x_3 = 0$ є наступними:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (1.15)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L, \quad (1.16)$$

У цьому випадку згідно з (1.10), (1.12) розв'язок рівнянь (1.3), (1.4) для кожної підобласті можна записати у вигляді

$$\mathbf{V}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}^{(m)}(z) + \overline{\mathbf{A}}^{(m)} \bar{\mathbf{f}}^{(m)}(\bar{z}), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{t}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(m)} \mathbf{f}'^{(m)}(z) + \overline{\mathbf{B}}^{(m)} \bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}), \quad (1.18)$$

де $m=1$ для $x_3 > 0$ та $m=2$ для $x_3 < 0$; вектор функції $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ є аналітичними у верхній ($x_3 > 0$) та нижній ($x_3 < 0$) області, відповідно.

Рівняння (1.18) та граничні умови (1.15) приводять до співвідношення:

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \quad (1.19)$$

для $-\infty < x_1 < \infty$.

Ліва частина рівняння (1.19) є граничним значенням аналітичної функції в області $x_3 > 0$, а права частина рівняння (1.19) є граничним значенням іншої аналітичної функції в області $x_3 < 0$. Рівняння (1.19) означає, що обидві функції аналітично продовжуються на всю площину, тобто дорівнюють при $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, відповідно, функції $\mathbf{M}(z)$, аналітичній на всій площині. Беручи до уваги що напруження та електричне зміщення обмежені на нескінченності з рівняння (1.18) слідує що $\mathbf{M}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \mathbf{M}^{(0)} = \text{const}$. Це означає що рівняння $\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}^{(0)}$ справедливе у всій площині. Таким чином з рівняння (1.19) випливає

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(\bar{z}) &= \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \\ \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(z) - \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(\bar{z}) &= \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

де $\mathbf{M}^{(0)}$ – довільний постійний вектор. Припустимо, що власні значення є різними та беручи до уваги, що матриці в рівнянні (1.20) є несингулярними, отримаємо

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Оскільки $\mathbf{f}'^{(1)}(z)$ та $\mathbf{f}'^{(2)}(z)$ є довільними функціями, можна вибрати $\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{0}$ та підставивши в рівняння (1.21) отримаємо формули

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z) \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(z) \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Розглянемо вектор

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0) \quad (1.23)$$

похідних зміщення та стрибків потенціалу через межу розділу матеріалів. Використовуючи рівняння (1.17) та (1.22) можемо записати

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{D} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1), \quad (1.24)$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)}$.

Тоді за допомогою рівняння (1.18), вектор $\mathbf{t}^{(1)}$ на межі поділу матеріалів можна записати як

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \quad (1.25)$$

Представимо вектор функцію $\mathbf{W}(z)$ формулою

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \mathbf{N}(z) & \text{для } x_3 > 0 \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{N}}(z) & \text{для } x_3 < 0 \end{cases}. \quad (1.26)$$

Тоді, враховуючи, що $\mathbf{N}(z) = \begin{bmatrix} f_1'^{(1)}(z), f_2'^{(1)}(z), f_3'^{(1)}(z), f_4'^{(1)}(z) \end{bmatrix}$,

отримуємо наступні вирази

$$[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{G}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (1.28)$$

$$\text{де } [\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0), \quad (1.29)$$

$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \overline{\mathbf{A}}^{(2)} (\overline{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)}$ та $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$. Слід зазначити що вектор-функція $\mathbf{W}(z)$ є аналітичною у всій площині з розрізом уздовж $(-\infty, \infty) \setminus L$.

Варто відзначити, що матриця \mathbf{G} та вектор-функція $\mathbf{W}(z)$ пов'язані з матрицею \mathbf{H} та вектор-функцією $\mathbf{h}(z)$ в роботі (Suo *et al.* [128]) як $i\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}$, $\mathbf{W}(z) = -i\mathbf{H}\mathbf{h}(z)$ ($i = \sqrt{-1}$), відповідно і рівняння (1.27), (1.28) можна записати в термінах матриці \mathbf{H} та вектор-функції $\mathbf{h}(z)$ з роботи (Suo *et al.* [128]). Але для формулювання проблем, розглянутих у наступних розділах, представлення (1.27), (1.28) здається більш зручним, ніж у роботі (Suo *et al.* [128]). Співвідношення (1.27), (1.28) відіграють певну роль для постановки широкого кола задач лінійного спряження для п'єзоелектричних біматеріалів з тріщиною на межі поділу матеріалів.

Далі увага зосереджена на п'єзоелектричних матеріалах класу симетрії 6mm (Parton and Kudryavtsev, [116]), поляризованих у напрямку x_3 , які мають істотне практичне значення, як так звана поляризована кераміка. У цьому випадку для навантажень, які не залежать від координати x_2 , ми можемо шукати поля в (x_1, x_3) – площинах, де переміщення V_2 вектор-функції \mathbf{V} з рівняння (1.5) відділяється від компонентів (V_1, V_3, V_4) (Suo *et al.*, [128]). Через простоту визначення V_2 наша увага буде зосереджена на плоскій задачі для компонентів (V_1, V_3, V_4) . У цьому випадку подібно до скорочених позначень анізотропної теорії пружності [20] можна ввести наступні співвідношення для коефіцієнтів матриці \mathbf{E} , що відносяться до площини (x_1, x_3) : $E_{1111} = c_{11}$, $E_{1133} = c_{13}$, $E_{3333} = c_{33}$, $E_{1313} = c_{44}$, $E_{1143} = e_{31}$, $E_{3343} = e_{33}$, $E_{1341} = e_{15}$,

$E_{1441} = -\chi_{11}$, $E_{3443} = -\chi_{33}$. Крім того, як випливає з результатів роботи Suo et al. [128], а також чисельно підтверджено, що матриця \mathbf{G} має наступну структуру (без другого рядка та стовпця)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i g_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & i g_{33} & i g_{34} \\ g_{41} & i g_{43} & i g_{44} \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

де всі g_{ij} дійсні. Крім того, матриця $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{bmatrix}$ є позитивно визначеною, але g_{44} є від'ємною величиною і крім того виконуються рівняння $g_{31} = -g_{13}$, $g_{41} = -g_{14}$, $g_{43} = g_{34}$.

Розглянемо довільну однорядкову матрицю $\mathbf{S} = [S_1, S_3, S_4]$ та добуток $\mathbf{St}^{(1)}(x_1, 0)$ який за допомогою (1.28) з матрицею \mathbf{G} , визначеною формулою (1.30), можна записати так

$$\mathbf{St}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{SGW}^+(x_1) - \overline{\mathbf{SGW}}^-(x_1). \quad (1.31)$$

Введемо функцію

$$F(z) = \mathbf{YW}(z). \quad (1.32)$$

Вважаючи $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_3, Y_4] = \mathbf{SG}$ і припускаючи

$$\overline{\mathbf{SG}} = -\gamma \mathbf{SG}, \quad (1.33)$$

рівняння (1.31) можна записати у вигляді

$$\mathbf{St}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (1.34)$$

де γ та \mathbf{S}^T є власним значенням та власним вектором системи

$$(\gamma \mathbf{G}^T + \overline{\mathbf{G}}^T) \mathbf{S}^T = 0. \quad (1.35)$$

Корені рівняння $\det(\gamma \mathbf{G}^T + \overline{\mathbf{G}}^T) = 0$ з використанням (1.30) мають вигляд

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad (1.36)$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{g_{14}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{44} - 2g_{14} g_{13} g_{34}}{g_{11}(g_{33} g_{44} - g_{34}^2)}. \quad (1.37)$$

Власний вектор $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j4}]$, що відповідає власному значенню γ_j ($j=1,3,4$), можна знайти з системи (1.35) і якщо припустити що S_{k3} дійсний, то S_{k1} уявний і S_{k4} ($k=1,3$) є дійсним для $\delta^2 > 0$, і обидва вони є уявними для $\delta^2 < 0$. Компоненти відповідних векторів

$$\mathbf{Y}_j = [Y_{j1}, Y_{j3}, Y_{j4}] = \mathbf{S}_j \mathbf{G} \quad (j=1,3,4) \quad (1.38)$$

мають такі властивості: Y_{k1} є дійсним коли Y_{k3} та Y_{k4} є уявними для $\delta^2 > 0$ та Y_{kj} ($k=1,3; j=1,3,4$) є комплексними для $\delta^2 < 0$. Слід зазначити, що справедливими є рівняння $S_{41} = Y_{41} = 0$ і крім того значення S_{44} є дійсним незалежно від δ , а значення Y_{43} та Y_{44} є уявним для дійсного S_{43} .

Таким чином, отримано наступні три набори співвідношень для $j=1,3,4$

$$\mathbf{S}_j \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (1.39)$$

$$\text{де } F_j(z) = Y_j \mathbf{W}(z). \quad (1.40)$$

З рівняння (1.40) і властивостей $\mathbf{W}(z)$ випливає, що функція $F_j(z)$ аналітична у всій площині, розрізаній уздовж $L_1 \cup L_2$.

Беручи до уваги що для $x_1 \in L$ справедливі співвідношення $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F_j(x_1)$, маємо

$$(1 + \gamma_j) F_j(x_1) = \mathbf{S}_j \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

Але з урахуванням того що функція $F_j(z)$ є аналітичною у всій площині, розрізаній уздовж $L_1 \cup L_2$ і, враховуючи, що $\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = [\tau, \sigma, d]^T$ для $z \rightarrow \infty$, маємо

$$F_j(z) = r_j^{-1}(S_{j1}\tau + S_{j3}\sigma + S_{j4}d) \text{ для } z \rightarrow \infty, \quad (1.42)$$

де $r_j = (1 + \gamma_j)$.

Чисельний аналіз показує, що для одного типу біматеріальної кераміки нерівність

$$\delta^2 > 0 \quad (1.43)$$

виконується, тоді як для іншої групи ця нерівність не виконується. Цей факт був також вказаний у статті (Suo *et al.* [128]). Далі увагу буде приділено кераміці, яка задовольняє нерівність (1.43). У цьому випадку відповідно до наведених вище висновків щодо властивостей S_j та Y_j ($j=1,3,4$) і вибору $S_{j3} = 1$, можна написати

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4}D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (1.44)$$

$$\text{де } F_j(z) = n_{j1}W_1(z) + i[n_{j3}W_3(z) + n_{j4}W_4(z)] \quad (1.45)$$

та $m_{j4} = S_{j4}$, $m_{j1} = -iS_{j1}$, $n_{j1} = Y_{j1}$, $n_{j3} = -iY_{j3}$, $n_{j4} = -iY_{j4}$ де m_{jl}, n_{jl} ($j, l=1,3,4$)

залежать від матеріальних констант та мають дійсні значення.

Розв'язок (1.44) разом з граничними умовами приводить до наступного співвідношення:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0, \quad (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in (-b, b). \quad (1.46)$$

Це є проблема Гільберта – Рімана, розв'язок якої знаходимо при таких умовах на нескінченості

$$F_j(z)|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_j^* - i\tau_j^*, \quad (1.47)$$

де $\sigma_j^* = \frac{1}{r_j}(\sigma + m_{j4}d)$, $\tau_j^* = -m_{j1}\tau/r_j$, $r_j = (1 + \gamma_j)$ ($j=1,3,4$).

На основі Мусхелішвілі [33], розв'язок задачі (1.46), (1.47) записується у вигляді.

$$F_j(z) = X_j(z) \left(\sigma_j^* - i\tau_j^* \right) (z - 2ib\varepsilon_j), \quad (1.48)$$

де $X_j(z) = (z+b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (z-b)^{-1/2-i\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}$.

Використавши (1.45), отримаємо

$$n_{j1} \left[u_1'(x_1, 0) \right] + i \left\{ n_{j3} \left[u_3'(x_1, 0) \right] + n_{j4} \left[\varphi'(x_1, 0) \right] \right\} = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \quad (1.49)$$

Підставляючи в це рівняння (1.48), маємо

$$n_{j1} \left[u_1'(x_1, 0) \right] + i \left\{ n_{j3} \left[u_3'(x_1, 0) \right] + n_{j4} \left[\varphi'(x_1, 0) \right] \right\} = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \left(\sigma_j^* - i\tau_j^* \right) (x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (x_1 - b)^{-1/2-i\varepsilon_j} (x_1 - 2ib\varepsilon_j). \quad (1.50)$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо формулу

$$n_{j1} \left[u_1(x_1, 0) \right] + i \left\{ n_{j3} \left[u_3(x_1, 0) \right] + n_{j4} \left[\varphi(x_1, 0) \right] \right\} = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \left(\sigma_j^* - i\tau_j^* \right) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\varepsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} \quad \text{для } x_1 \in (-b, b). \quad (1.51)$$

Аналіз показує, що для кераміки класу бтт з напрямком поляризації x_3 є справедливими співвідношення $n_{41}=0, \varepsilon_4=0, \gamma_4=1$ (Herrmann *et al.*, [82]) Тому з формули (1.51) можуть бути отримані наступні рівняння для $x_1 \in (-b, b)$.

$$n_{13} \left[u_3(x_1, 0) \right] + n_{14} \left[\varphi(x_1, 0) \right] = \text{Im} \left\{ \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \left(\sigma_1^* - i\tau_1^* \right) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\varepsilon_1} \sqrt{x_1^2 - b^2} \right\},$$

$$n_{43} \left[u_3(x_1, 0) \right] + n_{44} \left[\varphi(x_1, 0) \right] = -2i \left(\sigma_4^* - i\tau_4^* \right) \sqrt{x_1^2 - b^2}. \quad (1.52)$$

Ці співвідношення є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої запишеться так

$$\begin{aligned} \left[u_3(x_1, 0) \right] &= (n_{13}n_{44} - n_{43}n_{44})^{-1} \left\{ n_{44}H_1(x_1) - n_{14}H_2(x_1) \right\}, \\ \left[\varphi(x_1, 0) \right] &= (n_{13}n_{44} - n_{43}n_{44})^{-1} \left\{ -n_{43}H_1(x_1) + n_{13}H_2(x_1) \right\}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

де

$$H_1(x_1) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \left(\sigma_1^* \cos \alpha + \tau_1^* \sin \alpha \right) \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad H_2(x_1) = 2\sigma_4^* \sqrt{b^2 - x_1^2}.$$

1.3 Особливості застосування методу скінченних елементів (МСЕ)

1.3.1 Зведення задачі теорії пружності до варіаційної задачі

При розв'язку задач теорії пружності найчастіше ми стикаємося зі значною складністю рівнянь, які необхідно розв'язувати. Тому замість аналітичних методів часто використовуються чисельні методи. Одним з широко поширених та ефективних чисельних методів розв'язання задач механіки деформованого твердого тіла є метод скінченних елементів, який частіше всього ґрунтується на варіаційному формулюванні крайової задачі.

Математична сутність МСЕ розглядалася на задачі теорії пружності для пружного тіла. В класичних лінійних задачах теорії пружності в переміщеннях, де на шукані функції накладаються обмеження у вигляді рівностей, має місце варіаційний принцип Лагранжа.

Розглядалася замість диференційної постановки задачі еквівалентна варіаційна задача

$$\begin{aligned} I(u, v) &\rightarrow \min \\ (u, v) &\in V, \end{aligned} \quad (1.54)$$

де функціонал $I(u, v)$:

$$I(u, v) = R(u, v) - A(u, v, \sigma, \tau). \quad (1.55)$$

В цих формулах:

$A(u, v, \sigma)$ – робота зовнішніх зусиль,

$R(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau$ – потенціальна енергія деформації,

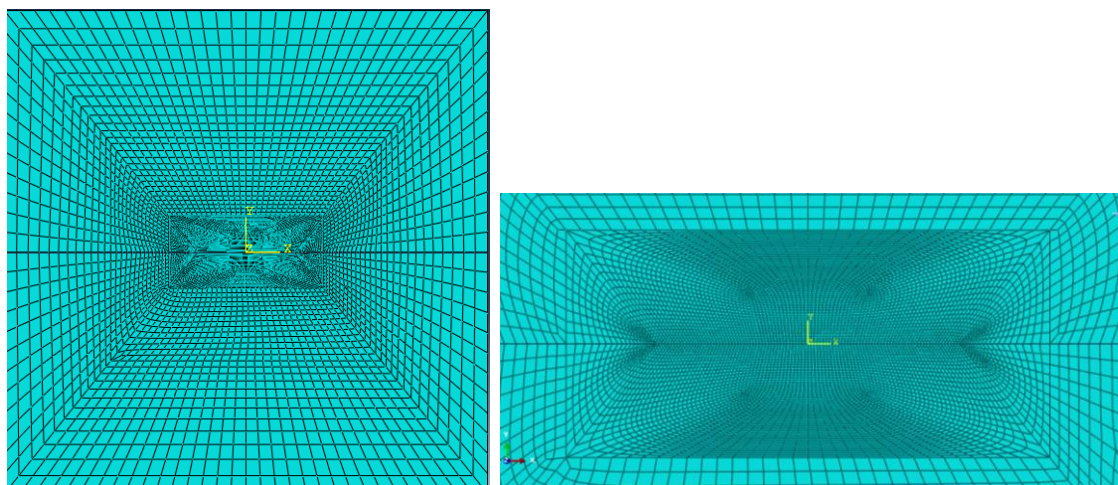
V – допустима множина розв’язків задачі – множина кінематично-можливих переміщень.

Тобто з математичної точки зору, розв’язок задачі теорії пружності зводиться до мінімізації функціоналу Лагранжа і пошуку відповідного поля переміщень (u, v) .

1.3.2 Дискретизація варіаційної задачі методом скінченних елементів

Перший етап розв’язку задачі полягає в дискретизації області і переході до скінченно-вимірної задачі, що ми виконали за допомогою поділу області на скінченні елементи.

Як відомо, основна ідея МСЕ – апроксимація неперервних величин (в цьому випадку переміщення) дискретною моделлю на множині кусково-неперервних функцій. Для побудови такої моделі використовувались 8-вузлові чотирикутні та 6-вузлові трикутні скінченні елементи лагранжевого типу. Дискретизація крайової задачі починається з розбиття області на під-області, які і називаються скінченними елементами. Розміри елементів можуть бути різними. Сукупність усіх скінченних елементів називають скінченно-елементною сіткою. Вершини скінченних елементів створюють вузли скінченно-елементної сітки. На практиці існує велика кількість способів створення сітки. У даній роботі розбиття проводилося таким чином, щоб границі скінченних елементів співпадали з початком і кінцем тріщини. Пластину було розділено на декілька підобластей за віддаленістю від тріщини. Приклад сітки показано на (рис. 1.2).



(а)

(б)

Рис. 1.2. Сітка скінченних елементів: (а) – для усієї області,
(б) – в околі тріщини

Наступний крок дискретизації по МСЕ – наближена заміна шуканих функцій деякими поліномами в границях кожного скінченного елемента.

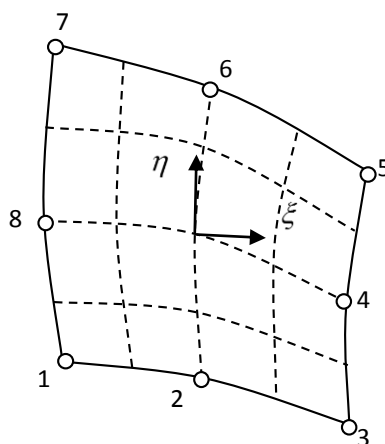


Рис. 1.3. Елемент сітки

Ми взяли довільний елемент Π_1 з вершинами \mathbf{p}_{i1} , \mathbf{p}_{i2} , \mathbf{p}_{i3} , \mathbf{p}_{i4} , (рис. 1.3) розмірами $2\Delta x$ і $2\Delta y$ по осі абсцис та ординат відповідно. Ввели в границях виділеного елемента локальну систему координат $O\xi\eta$ з початком посередині скінченного елемента; напрямок осей $O\xi$ та $O\eta$ співпадає з напрямком осей Ox та Oy , відповідно. Ці координати мають між собою наступний зв'язок:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (1.56)$$

де N_i – функції форми в i -му вузлі, що визначаються за формулою:

$$\begin{aligned} N_i = & \left[(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i) - \right. \\ & \left. - (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i) \right] \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + \\ & + (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i)(1 - \xi_i^2) / 2 + \\ & + (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i)(1 - \eta_i^2) / 2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Позначивши через $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ та $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ компоненти переміщень \mathbf{u} та \mathbf{v} у вузлах 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Замість функцій $u(\xi, \eta)$ та $v(\xi, \eta)$ в границях даного елемента підставили білінійні функції в наступному вигляді:

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad (1.58)$$

Підставляючи далі ці представлення у функціонал (1.55) та проводячи його мінімізацію можна одержати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої і дає шукані вузлові значення переміщень.

1.4 Чисельний розрахунок для плоского та просторового випадків

Для області скінченних розмірів розв'язок задачі проводився методом скінченних елементів. Використовувались 8-вузлові чотирикутні скінченні елементи лагранжевого типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її вершин. Структура сітки, а також поле вертикальних переміщень показані на (рис. 1.4)

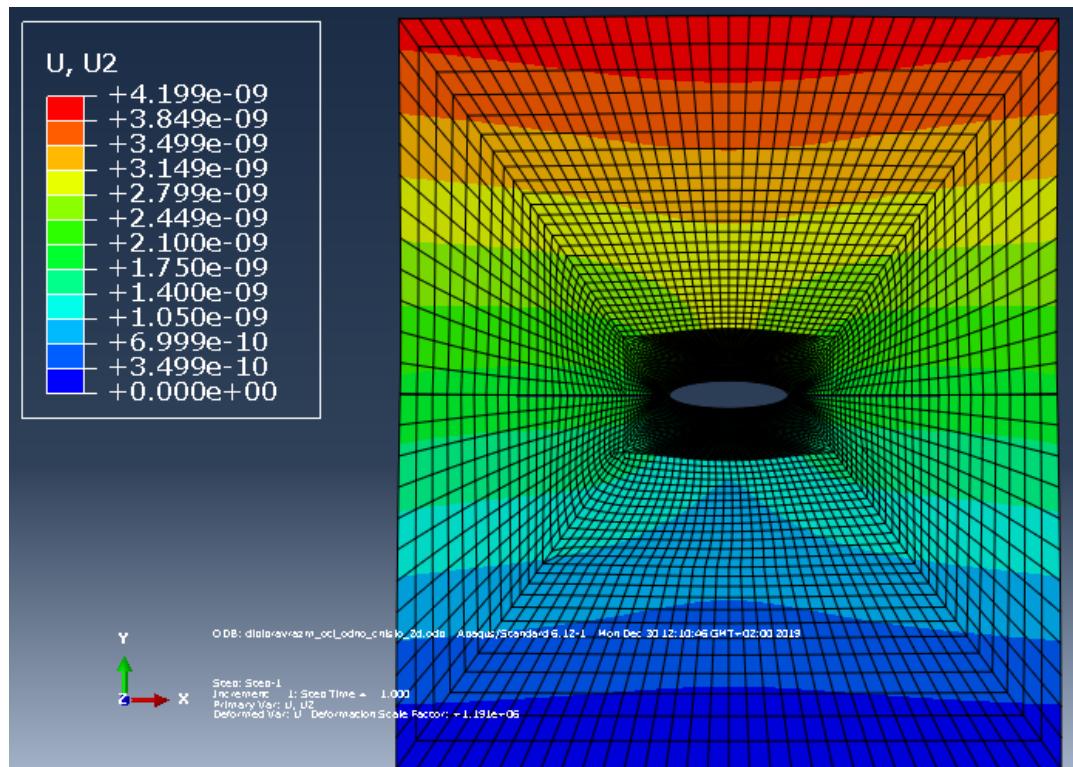


Рис. 1.4. Структура сітки та розкриття тріщини при $\sigma = 10^4 \text{ МПа}$ та $d = 0$

Вважалось, що верхня частина пластини виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу PZT-4, нижня є п'єзоелектриком PZT-5H. Властивості цих матеріалів в системі одиниць СІ задаються відомими матрицями жорсткості, п'єзоелектричних та діелектричних констант, а саме:

$$\text{PZT-4: } c_{11} = 139 \times 10^9, \quad c_{12} = c_{13} = 74,3 \times 10^9, \quad c_{33} = 113 \times 10^9, \quad c_{44} = 25,6 \times 10^9, \\ e_{15} = 13,4, \quad e_{31} = -6,98, \quad e_{33} = 13,8, \quad d_{11} = 6 \times 10^{-9}, \quad d_{33} = 5,47 \times 10^{-9};$$

$$\text{PZT-5H: } c_{11} = 126 \times 10^9, \quad c_{12} = c_{13} = 53 \times 10^9, \quad c_{33} = 117 \times 10^9, \quad c_{44} = 35,3 \times 10^9, \\ e_{15} = 17, \quad e_{31} = -6,5, \quad e_{33} = 23,3, \quad d_{11} = 15,1 \times 10^{-9}, \quad d_{33} = 13 \times 10^{-9}.$$

Вважалось, що нормальне навантаження $\sigma = 10^4 \text{ МПа}$, електричне зміщення $d = 0$, $l = 50 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ мм}$.

Розглянуто також просторовий випадок. У цьому випадку розрахункова область являє собою біматеріальний куб розміром $l \times l \times l$ (рис. 1.5). В області $-b \leq x_1 \leq b$ площини поділу матеріалів $x_2 = 0$ розташована електрично

ізолювана тунельна тріщина, яка вільна від напружень. На верхню та нижню грані діють розтягувальні напруження σ та електричний потік інтенсивності d . Для розв'язання задачі використано метод скінченних елементів. Вибрана сітка з 20-вузлових скінченних елементів, яка згущується при підході до тріщини і особливо до її вершин. Структуру цієї сітки видно з рисунка 1.5, на якому зображено поле вертикальних переміщень, що виникають під дією зусилля $\sigma = 10^4 \text{ МПа}$ та електричного зміщення $d = 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$.

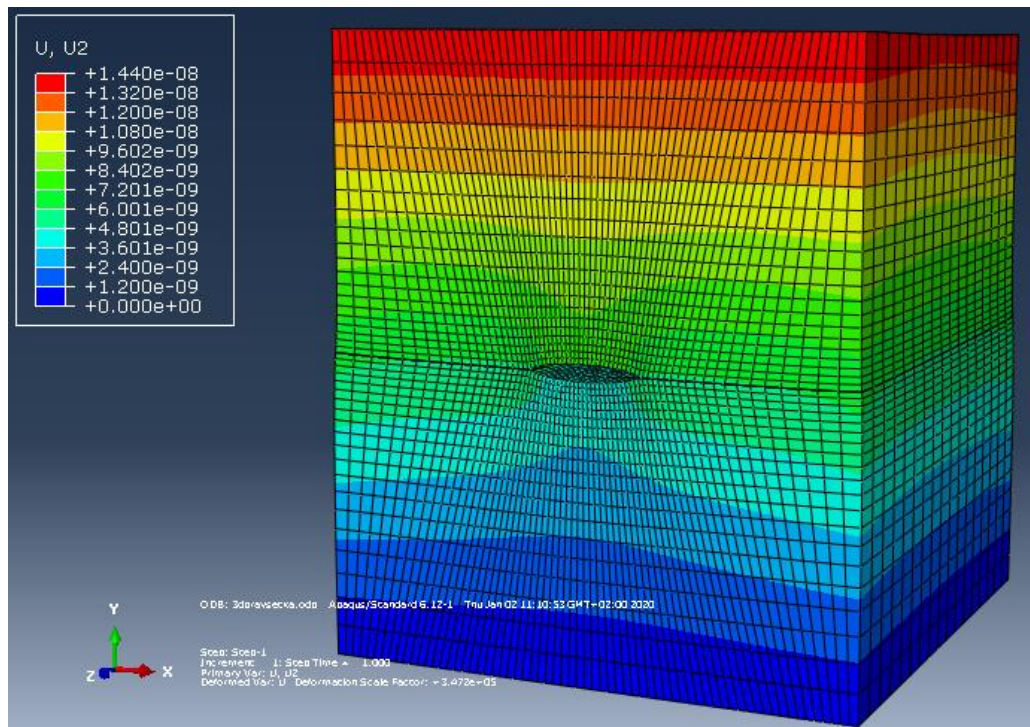


Рис. 1.5. Структура сітки та розкриття тріщини в просторовому випадку при $\sigma = 10^4 \text{ МПа}$ та $d = 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$

1.5 Результати для плоского та просторового випадків та їх обговорення

Для областей з тими ж геометричними характеристиками, що і на (рис. 1.4) і (рис. 1.5), для тих же матеріалів побудовані графіки розкриття тріщини при $\sigma = 10^4 \text{ МПа}$ і $d = 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$. Результати, які отримані аналітичним та чисельним методами для плоского і просторового випадків, наведені на (рис. 1.6).

Слід зазначити, що максимальні значення розкриття тріщини δ_2 , отримані різними способами, наступні:

- аналітичним: $\delta_2 = 3,37 \cdot 10^{-9} \text{ м}$,
- чисельним (плоский випадок): $\delta_2 = 3,42 \cdot 10^{-9} \text{ м}$,
- чисельним (просторовий випадок): $\delta_2 = 3,39 \cdot 10^{-9} \text{ м}$.

В останньому випадку вибирався переріз, що проходить через середню точку фронту тріщини, перпендикулярно до нього.

Видно, що спостерігається дуже добра узгодженість результатів, отриманих різними способами, що підтверджує правильність аналітичної і чисельної методик, які використовуються у даній роботі. Що стосується нормального напруження σ_{33} на продовженні тріщини, то результати, отримані трьома способами дуже близькі між собою. Всі вони різко зростають біля вершини тріщини і швидко затухають на віддаленні від неї, прямуючи до своїх номінальних значень. Різке зростання пояснюється кореневою особливістю біля вершини тріщини, яка, як видно з аналітичного розв'язку, є ще й осциляційною.

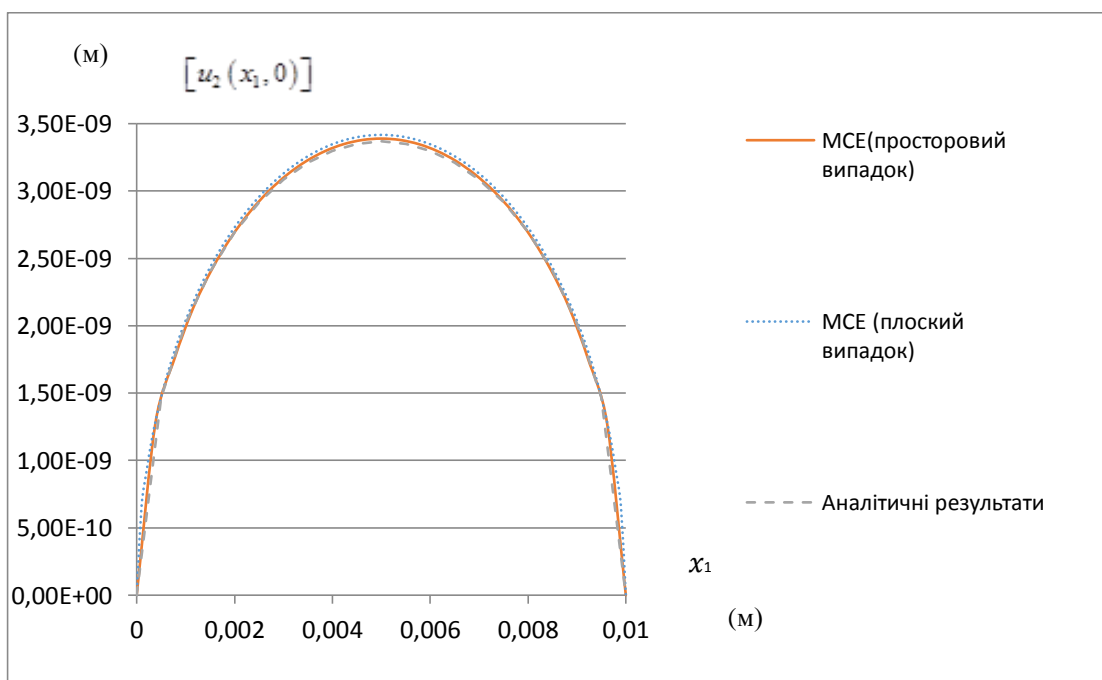


Рис. 1.6. Розкриття тріщини, які отримані аналітичним

та чисельним методами, для плоского і просторового випадків

На (рис. 1.7) для просторового випадку показано графік зміни максимального розкриття тріщини вздовж осі x_2 , паралельної фронту тріщини. Як і слід було очікувати, максимальні розкриття тріщини мають місце біля граней, ортогональних фронту тріщини. З наближенням же до центрального перерізу розкриття тріщини спадає і досягає свого найменшого значення $(u_2^+ - u_2^-)_{max} = 3,39 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ в центральному перерізі тривимірної області.

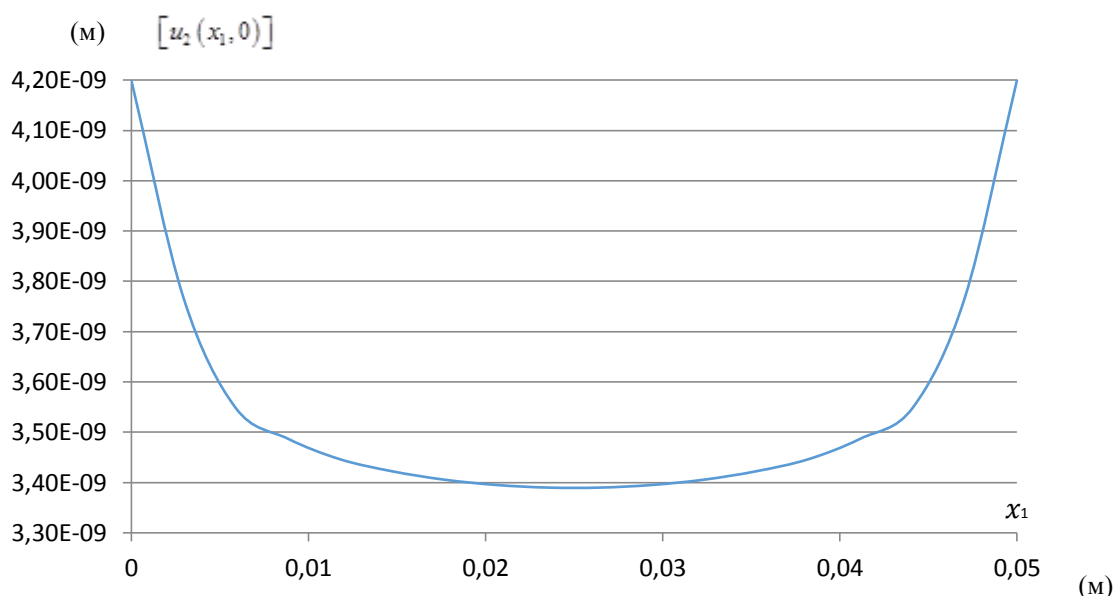


Рис. 1.7. Зміна максимального розкриття тріщини вздовж координати, паралельної її фронту

1.6 Висновки до першого розділу

Розглянуто міжфазну тріщину у п'єзоелектричному біматеріальному пружному тілі під дією розтягуючого зусилля, що прикладене до двох протилежних зовнішніх граней та електричного зміщення. Спочатку, в припущенні, що тіло нескінченно велике, побудовано аналітичний розв'язок задачі, а для випадку тіла скінченних розмірів – чисельний розв'язок. Знайдене значення переміщень та напружень аналітичним методом та методом скінченних елементів. Задача розв'язана для плоского та просторового випадків. Отримані результати порівняні та виявлена добра їх узгодженість. Продемонстрована зміна максимального розкриття тріщини по координаті,

яка співнаправлена з її фронтом. Показано, що розкриття досягають максимальних значень на бічних гранях області, що розглядається, і мінімальних значень – в її середньому перерізі.

РОЗДІЛ 2. ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТРІЩИНІ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ НА ЇЇ РОЗКРИТТЯ ТА ШВИДКІСТЬ ВИВІЛЬНЕННЯ ЕНЕРГІЇ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо плоску деформацію біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$ і заповнених п'єзоматеріалами 1 та 2 відповідно, поляризованими вздовж осі x_3 . На відрізку $AB: x_1 \in L = (-l, l)$ інтерфейсу розташована міжфазна тріщина (рис. 2.1).

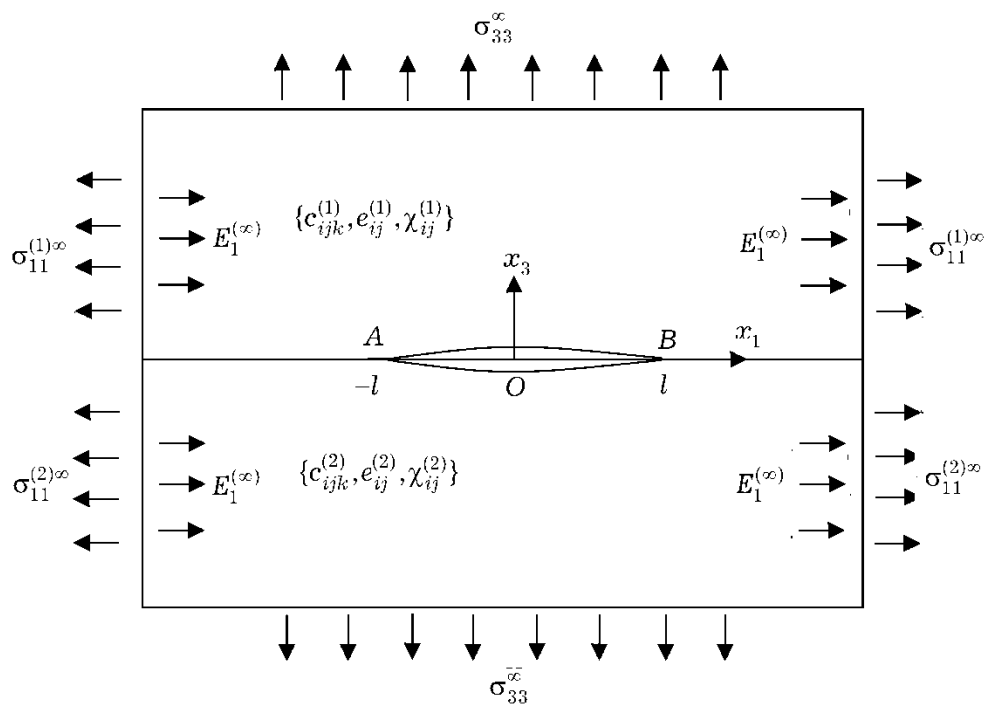


Рис.2.1. Схема навантаження п'єзоелектричного біматеріалу

Замкнена система рівнянь п'єзостатики за відсутності масових сил і вільних зарядів, яка розглянута у розділі 1, можна записати у вигляді (Fang and Liu , [71])

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k; \quad D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k; \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad D_{i,i} = 0; \quad \epsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad i, j, k, l = 1, 3,$$

де u_i – компоненти вектора переміщень; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень та деформацій; E_i – компоненти вектора електричного поля; D_i – компоненти вектора електричної індукції; φ – електричний потенціал; c_{ijkl} , e_{ijk} , χ_{ij} – компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць. Кома означає похідні по відповідним координатним змінним. В умовах плоскої деформації $u_2=0$, $\sigma_{12}=0$, $\sigma_{23}=0$, $\varepsilon_{12}=0$, $\varepsilon_{23}=0$, $E_2=0$, $D_2=0$, а всі інші компоненти є функціями лише змінних x_1 та x_3 .

З виключенням напружень і деформацій система (2.1) зводиться до наступної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} (c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi)_{,li} &= 0, \\ (e_{ikl}u_k - \chi_{il}\varphi)_{,li} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

На нескінченності задаємо компоненти електричних та механічних полів $\sigma_{11}^{(1)\infty}$, $\sigma_{11}^{(2)\infty}$, σ_{33}^{∞} , E_1^{∞} . Граничні умови на інтерфейсі для відкритої тріщини L мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) &= \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \quad \varphi^{(1)}(x_1, 0) = \varphi^{(2)}(x_1, 0), \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) &= D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \\ x_1 &\in (-\infty, \infty) \setminus L, \quad \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad m=1, 2, \quad i=1, 3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Припускаємо, що береги тріщини можуть знаходитись в умовах безфрикційного контакту на інтервалі $x_1 \in (c, d)$, $-l \leq c < d \leq l$. Таким чином, до умов на інтерфейсі додаються механічні умови

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in [-l, c] \cup [d, l];$$

$$u_3^{(1)}(x_1,0)=u_3^{(2)}(x_1,0); \sigma_{13}^{(m)}(x_1,0)=0; \sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\sigma_{33}^{(2)}(x_1,0), \quad x_1 \in (c,d) \quad (2.4)$$

$$m=1,2, \quad i=1,3$$

Також розглянемо наступні варіанти електростатичних умов на берегах тріщини: 1) електропроникна тріщина; 2) електроізолювана тріщина; 3) електропровідна тріщина; 4) тріщина, електродована на частині $|x_1| \leq 0,5l$ верхнього берега та електроізолювана вздовж решти берегів. Розшукуються такі параметри руйнування: розкриття тріщини $\Delta(x_1)=|u_3^{(2)}(x_1,0)-u_3^{(1)}(x_1,0)|$, швидкості вивільнення енергії G у вершинах тріщини A і B .

Розглянемо п'єзоматеріали з кристалічною симетрією 6mm, для яких за допомогою скорочених індексних позначень [71] $c_{11}=c_{1111}$, $c_{33}=c_{3333}$, $c_{13}=c_{1133}$, $c_{44}=c_{1313}$, $e_{31}=e_{311}$, $e_{33}=e_{333}$, $e_{15}=e_{113}$, пружна, п'єзоелектрична та діелектрична матриці набувають вигляду:

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix};$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \|\chi_{ij}\| = \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix}.$$

При цьому співвідношення стану е-типу [71] приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3; \quad \sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3; \\ \sigma_{13} &= c_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1; \quad D_1 = e_{15}\varepsilon_{13} + \chi_{11}E_1; \quad D_3 = e_{31}\varepsilon_{11} + e_{33}\varepsilon_{33} + \chi_{33}E_3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничні умови на нескінченності повинні задовольняти умові неперервності деформацій ε_{11} вздовж інтерфейсу біматеріалу:

$$\varepsilon_{11}^{(1)\infty} = \varepsilon_{11}^{(2)\infty} = \varepsilon_{11}^{\infty}. \quad (2.6)$$

З урахуванням неперервності на інтерфейсі напружень σ_{33} та індукції D_3 , з формул (2.5) та (2.6) отримаємо наступні співвідношення для компонентів електромеханічних полів у граничних умовах:

$$\sigma_{11}^{(m)\infty} = c_{11}^{(m)} \varepsilon_{11}^{\infty} + c_{13}^{(m)} \varepsilon_{33}^{(m)\infty} - e_{31}^{(m)} E_3^{(m)\infty},$$

$$\sigma_{33}^{\infty} = c_{13}^{(m)} \varepsilon_{11}^{\infty} + c_{33}^{(m)} \varepsilon_{33}^{(m)\infty} - e_{33}^{(m)} E_3^{(m)\infty},$$

$$D_3^{\infty} = e_{31}^{(m)} \varepsilon_{11}^{\infty} + e_{33}^{(m)} \varepsilon_{33}^{(m)\infty} + \chi_{33}^{(m)} E_3^{(m)\infty}, \quad m=1,2.$$

Розв'язуючи ці співвідношення відносно $\varepsilon_{11}^{\infty}, \varepsilon_{33}^{(1)\infty}, \varepsilon_{33}^{(2)\infty}, E_3^{(1)\infty}, E_3^{(2)\infty}$ та D_3^{∞} , отримаємо наступні умови:

$$\left\{ \sigma_{11}^{(1)\infty} \left[\left(e_{33}^{(1)} \right)^2 + c_{11}^{(1)} \chi_{33}^{(1)} \right] - \sigma_{33}^{\infty} \left(e_{31}^{(1)} e_{33}^{(1)} + c_{13}^{(1)} \chi_{33}^{(1)} \right) + D_3^{\infty} \left(c_{33}^{(1)} e_{31}^{(1)} - c_{13}^{(1)} e_{33}^{(1)} \right) \right\} (\delta^{(1)})^{-1} =$$

$$\left\{ \sigma_{11}^{(2)\infty} \left[\left(e_{33}^{(2)} \right)^2 + c_{11}^{(2)} \chi_{33}^{(2)} \right] - \sigma_{33}^{\infty} \left(e_{31}^{(2)} e_{33}^{(2)} + c_{13}^{(2)} \chi_{33}^{(2)} \right) + D_3^{\infty} \left(c_{33}^{(2)} e_{31}^{(2)} - c_{13}^{(2)} e_{33}^{(2)} \right) \right\} (\delta^{(2)})^{-1}, \quad (2.7)$$

$$\delta^{(m)} = c_{33}^{(m)} \left(e_{31}^{(m)} \right)^2 - 2c_{13}^{(m)} e_{31}^{(m)} e_{33}^{(m)} + c_{11}^{(m)} \left(e_{33}^{(m)} \right)^2 + \left[c_{11}^{(m)} c_{33}^{(m)} - \left(c_{13}^{(m)} \right)^2 \right] \chi_{33}^{(m)}, \quad m=1,2.$$

Для матеріалу 1 – PZT-4 та матеріалу 2 – PZT-5H за умови $D_3^{\infty} = 0$ співвідношення (2.7) набуває вигляду

$$\sigma_{33}^{\infty} = 9.418 \sigma_{11}^{(1)\infty} - 10.029 \sigma_{11}^{(2)\infty}$$

В табл. 2.1 наведено декілька значень $\sigma_{11}^{(m)\infty} / \sigma_{33}^{\infty}, m=1,2$, що відповідають цьому співвідношенню.

Таблиця 2.1. Значення механічних навантажень $\sigma_{11}^{(m)\infty}, m=1,2$, що забезпечують неперервність деформацій ε_{11} на інтерфейсі біматеріалу PZT-4/PZT-5Н

$\sigma_{11}^{(1)\infty} / \sigma_{33}^{\infty}$	$\sigma_{11}^{(2)\infty} / \sigma_{33}^{\infty}$
0.106	0
0	-0.100
-1.637	-1.637

За додаткової умови неперервності компоненти E_3 електричного поля:

$E_3^{(1)\infty} = E_3^{(2)\infty}$, умова неперервності деформацій ε_{11} приймає вигляд

$$\sigma_{11}^{(1)\infty} = 0.954\sigma_{33}^{\infty}; \quad \sigma_{11}^{(2)\infty} = 0.797\sigma_{33}^{\infty}.$$

Якщо замість умови $D_3^{\infty} = 0$ виконуються умови $E_3^{(1)\infty} = E_3^{(2)\infty} = 0$, то неперервність деформацій ε_{11} має місце при

$$\sigma_{11}^{(1)\infty} = 7.594\sigma_{33}^{\infty}; \quad \sigma_{11}^{(2)\infty} = 8.301\sigma_{33}^{\infty}.$$

2.2 Чисельна реалізація

Моделювання п'єзоелектричного біматеріалу з міжфазною тріщиною здійснювалось за допомогою методу скінченних елементів, що є найбільш ефективним обчислювальним засобом розв'язування широкого кола задач механіки суцільного середовища (Zienkiewicz, Taylor, [138]). Моделювання та розрахунки здійснювались у середовищі пакету Abaqus. Нескінченна область

апроксимувалась скінченною областю $|x_1| \leq b, |x_3| \leq b$, де $b = 20l$, що, як показали чисельні експерименти, забезпечує достатню збіжність з наявними аналітичними результатами для нескінченної області.

Електромеханічні граничні умови на віддаленні від тріщини задавалися на границях скінченної області. При цьому компоненти електричного поля виражались через різницю потенціалів $\Delta\varphi$ на протилежних сторонах скінченної області

$$E_1^\infty = -\Delta\varphi / (2b).$$

Для стабілізації тіла від переміщень як жорсткого цілого в кожному куті зовнішньої границі додавалися дві закріплені з одного кінця пружини – горизонтальна і вертикальна, жорсткість яких вибиралася на декілька порядків меншою, ніж жорсткість біматеріалу. Як показали чисельні дослідження, така фіксація не вносить помітних змін у напружений стан біматеріалу. Для дискретизації області використовувались чотирикутні 8-вузлові п'єзoeлектричні елементи з поліноміальною апроксимацією другого порядку. В кожному вузлі визначались компоненти переміщень u_1, u_3 і потенціал електричного поля φ . Неоднорідні сітки скінченних елементів згущувались в околі тріщини й розріджувались в міру наближення до зовнішньої границі біматеріалу. Окрема увага приділялась належному моделюванню околів вершин тріщини, де використовувались концентричні сітки скінченних елементів, довжина радіальних сторін яких поступово зменшувалася від $0,3560l$ до $0,0012l$, та дуговою мірою $\alpha = 11,25^\circ$ (рис. 2.2). Розрахункова модель в середньому налічувала близько 10^4 скінченних елементів з $3 \cdot 10^4$ вузлами, що забезпечувало практичну незмінність результатів, отриманих при ще більш щільних сітках. У вироджених трикутних елементах, що примикають до вершин тріщини, вздовж радіальних сторін здійснювався зсув середніх вузлів в напрямку вершини тріщини на $1/4$ довжини сторони, що

забезпечувало моделювання асимптотики ступеню 0,5 для переміщень та потенціалу в околі вершини. Можливий контакт між берегами тріщини моделювався за допомогою створення контактної пари між берегами тріщини при умовах взаємного непроникнення контактуючих поверхонь та відсутності тертя між ними.

У випадку електропровідної тріщини виконувалась умова

$$\varphi(x_1) = \varphi_0 = \text{const}, x_1 \in L \quad (2.8)$$

яка реалізувалась за допомогою багатоточкового обмеження, згідно якому потенціали в усіх вузлах електродованої тріщини дорівнювали потенціалу в одному з заздалегідь обраному вузлі.

У випадку електропроникної тріщини граничні умови на тріщині задавались у вигляді

$$\varphi^{(1)}(x_1) = \varphi^{(2)}(x_1), x_1 \in L \quad (2.9)$$

для кожної пари вузлів на протилежних берегах тріщини з однією і тією ж координатою x_1 . Як і у попередньому випадку, такі умови реалізувались за допомогою багатоточкових обмежень, але для пар вузлів з однією і тією ж координатою x_1 .

У випадку електроізолюваної тріщини реалізувалась умова

$$D_3^{(m)}(x_1) = 0, x_1 \in L, m = 1, 2 \quad (2.10)$$

Скінченно-елементне розв'язання граничних задач здійснювалося в геометрично лінійній постановці за умови прикладання статичного навантаження.

Через відсутність в пакеті Abaqus можливості отримання силових (КІН) або енергетичних (J-інтеграли) характеристик руйнування тріщини для п'єзоактивних матеріалів, виникає необхідність в постпроцесорній обробці

даних для отримання параметрів руйнування. Визначення швидкостей вивільнення енергії G у вершинах тріщини реалізувалось за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщини, згідно якого приріст потенційної енергії при підростанні тріщини на величину δ дорівнює віртуальній роботі, яку створюють напруження і індукція на проміжку δ перед фронтом тріщини на переміщеннях і потенціалах на проміжку тієї ж довжини позаду тріщини при її закритті на довжину δ . Метод спершу було запропоновано для тріщин в електропасивних матеріалах (Rybicki and Kanninen, [124]), а згодом поширено на п'єзоактивні матеріали (Kuna *et al.*, [91-93])

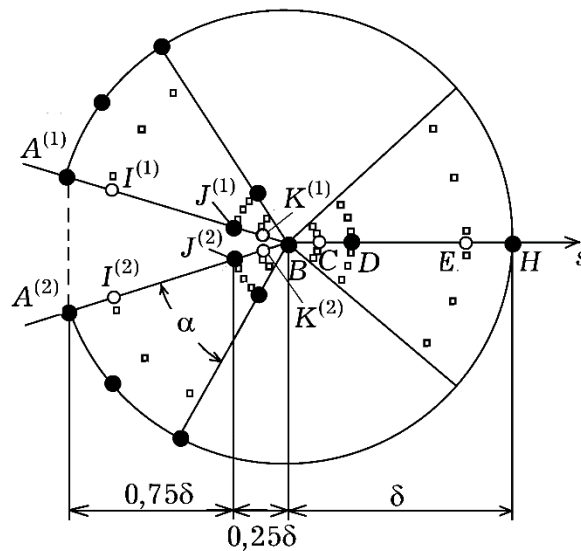


Рис.2.2. Схема дискретизації околу вершини тріщини B

Швидкість вивільнення енергії в околі вершини B тріщини (рис. 2.2) характеризується величиною (Park and Sun, [114-115])

$$G(B) = G^M(B) + G^E(B) \quad (2.11)$$

де $G^M(B)$, $G^E(B)$ – відповідно механічна та електрична складові швидкості вивільнення енергії в околі вершини тріщини B ,

$$G^M(B) = -\frac{1}{2\delta} \int_0^\delta [\sigma_{13}(s) \Delta u_1(s-\delta) + \sigma_{33}(s) \Delta u_3(s-\delta)] ds; \quad (2.12)$$

$$G^E(B) = -\frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \left[D_3(s) \Delta \varphi(s-\delta) - D_3^{(1)}(s-\delta) \varphi^{(1)}(s-\delta) + D_3^{(2)}(s-\delta) \varphi^{(2)}(s-\delta) - \Delta D_3(s-\delta) \varphi(s) \right] ds \quad (2.13)$$

$$\Delta u_i(s) = u_i^{(1)}(s) - u_i^{(2)}(s), \quad i=1,3;$$

$$\Delta \varphi(s) = \varphi^{(1)}(s) - \varphi^{(2)}(s); \quad \Delta D_3(s) = D_3^{(1)}(s) - D_3^{(2)}(s).$$

В рамках запропонованої чисельної реалізації стрибки переміщень $\Delta u_i^{(m)}(s)$ і потенціалів $\Delta \varphi^{(m)}(s)$ на берегах тріщини апроксимуються за допомогою методу найменших квадратів з використанням значень скінченноелементного розрахунку в вузлах $A^{(m)}, J^{(m)}, B, m=1,2$:

$$\Delta u_i(s) = \alpha_i^{\Delta u} s + \beta_i^{\Delta u} \sqrt{-s}, \quad i=1,3; \quad \Delta \varphi(s) = \alpha^{\Delta \varphi} s + \beta^{\Delta \varphi} \sqrt{-s}, \quad -\delta \leq s \leq 0 \quad (2.14)$$

Потенціали $\varphi(s)$ перед фронтом тріщини апроксимуються у вигляді

$$\varphi(s) = \alpha^\varphi + \beta^\varphi s + \gamma^\varphi \sqrt{s}, \quad 0 \leq s \leq \delta \quad (2.15)$$

з використанням значень у вузлах B, D, H . Напруження $\sigma_{i3}(s)$ та індукції $D_3(s)$ перед фронтом тріщини апроксимуються у вигляді

$$\sigma_{i3}(s) = \alpha_i^\sigma + \beta_i^\sigma s + \gamma_i^\sigma \sqrt{s-1}, \quad i=1,3; \quad D_3(s) = \alpha^D + \beta^D s + \gamma^D \sqrt{s-1}, \quad 0 \leq s \leq \delta \quad (2.16)$$

за даними в точках C, D, E , отриманими за допомогою усереднення відповідних даних, узятих з двох найближчих точок інтегрування – вузлів кубатурної формули Гауса третього порядку (позначені на рис.2.2. квадратами), оскільки у скінченноелементних розрахунках напруження та індукції обчислюються саме в цих точках. Індукції $D_3(s)$ на берегах тріщини апроксимуються у вигляді, аналогічному (2.16) (із заміною s на $-s$), за даними в точках $I^{(m)}, J^{(m)}, K^{(m)}, m=1,2$. Дані в цих точках отримуються з найближчих точок інтегрування. Це не вносить значних похибок, оскільки відстані між вказаними точками та найближчими до них точками

інтегрування, а також змінюваності даних у нормальному до берегів тріщини напрямку, є малими. Варто зауважити, що точки $D, I^{(m)}, J^{(m)}, m=1,2$ співпадають з вузлами відповідних скінченних елементів.

Внаслідок того, що на всіх скінченних елементах, які примикають до вершини тріщини, здійснюється стискання простору в радіальному напрямку для відображення кореневих асимптотик електричного потенціалу та переміщень у вершині тріщини, координати точок C, D, E дорівнюють відповідно $\frac{\delta}{4}(1-\sqrt{3/5})^2, \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}(1+\sqrt{3/5})^2$, а координати точок $I^{(m)}, J^{(m)}, K^{(m)}, m=1,2$ – відповідно $-\frac{\delta}{4}(1+\sqrt{3/5})^2, -\frac{\delta}{4}, -\frac{\delta}{4}(1-\sqrt{3/5})^2$.

Дану схему реалізовано у середовищі пакету Mathematica. Розв'язання тестових задач з наявними аналітичними розв'язками продемонструвало задовільну точність отриманих результатів. Похибки чисельних результатів у всіх розглянутих задачах не перевищували 0,5%.

2.3 Чисельні результати

У всіх розрахунках довжина тріщини $2l$ дорівнювала 0,02м. На рис. 2.3 представлено графіки залежності розкриття Δ електропроникної тріщини від параметрів σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н. В даному випадку величина розкриття тріщини залежить лише від механічної складової навантаження.

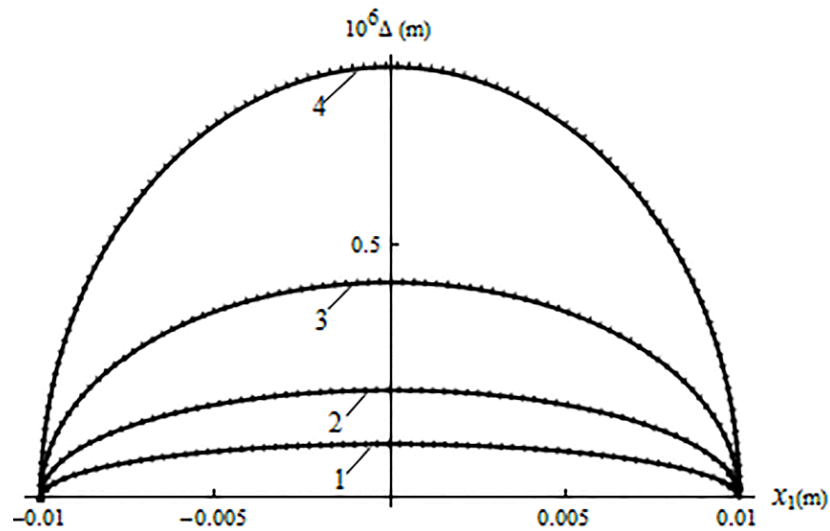


Рис. 2.3. Розкриття Δ електропроникної тріщини для біматеріалу PZT-4 / PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \times 10^5$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (крапки) для різних рівнів напруження σ_{33}^∞ : 1 – $\sigma_{33}^\infty = 0,25$ МПа; 2 – $\sigma_{33}^\infty = 0,5$ МПа;

$$3 - \sigma_{33}^\infty = 1,0 \text{ МПа}; 4 - \sigma_{33}^\infty = 2,0 \text{ МПа}$$

В табл. 2.2 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах електропроникної тріщини для різних рівнів механічного навантаження біматеріалу. З умови неперервності потенціалу та нормальної компоненти індукції на берегах електропроникної тріщини із співвідношення (2.13) випливає, що $G^E = 0$.

Таблиця 2.2. Залежність швидкостей вивільнення енергії в вершинах електропроникної тріщини від рівня механічного навантаження

σ_{33}^∞ (МПа)	0,25	0,5	1,0	2,0
$G(A), G(B)$ (Н/м)	0,02	0,08	0,33	1,35

На рис. 2.4 представлено графіки залежності розкриття Δ для тріщини з ізолюваними берегами від параметрів σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-

5Н. Як витікає з наведених даних, наявність електричного поля E_1^∞ сприяє додатковому розкриттю тріщини. При $\sigma_{33}^\infty = 0$ розкриття тріщини практично відсутнє.

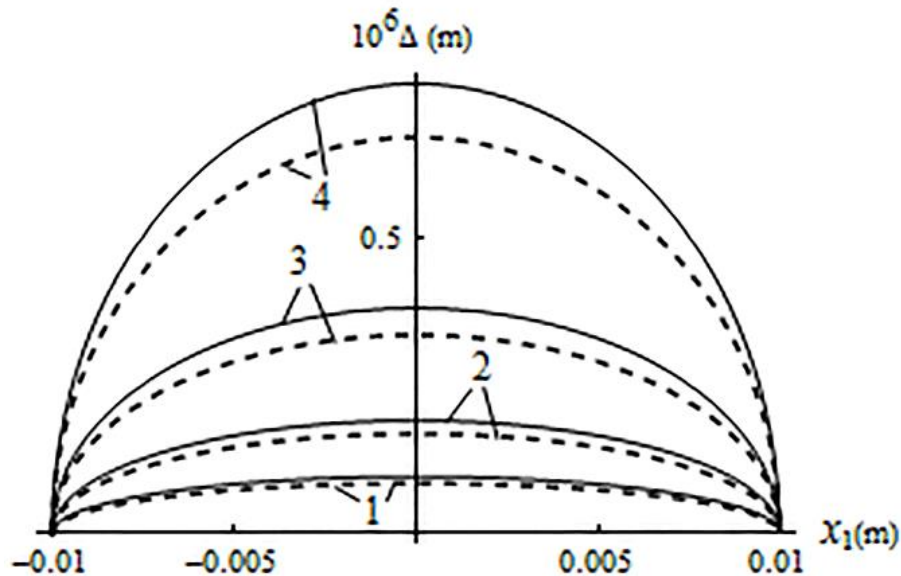


Рис. 2.4. Розкриття Δ електроізолюваної тріщини для біматеріалу PZT-4 / PZT-5Н при $E_1^\infty = -2 \times 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (крапки) для різних рівнів напруження σ_{33}^∞ : 1 – $\sigma_{33}^\infty = 0,25$ МПа; 2 – $\sigma_{33}^\infty = 0,5$ МПа;

$$3 - \sigma_{33}^\infty = 1,0 \text{ МПа}; 4 - \sigma_{33}^\infty = 2,0 \text{ МПа}$$

В табл. 2.3 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах електроізолюваної тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу, округлені до 0,5% від загальної величини G . Внаслідок граничної умови (2.10), в співвідношенні (2.13) для G^E присутній лише перший член.

Таблиця 2.3. Залежність швидкостей вивільнення енергії в вершинах електроізолюваної тріщини від рівнів електромеханічного навантаження

E_1^∞ (В/м)	σ_{33}^∞ (МПа)	$G^M(A), G^M(B)$ (Н/м)	$G^E(A), G^E(B)$ (Н/м)
0	0,25	0,02	0,00
0	0,5	0,07	0,00
0	1,0	0,27	0,00
0	2,0	1,06	0,00
-2×10^6	0,25	0,02	0,00
-2×10^6	0,5	0,08	0,00
-2×10^6	1,0	0,30	0,02
-2×10^6	2,0	1,20	0,07

На рис. 2.5 представлено графіки залежності розкриття Δ електропровідної тріщини від значень σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н. При цьому в граничній умові (2.8) прийнято $\varphi_0 = 0$. На відміну від вищерозглянутих, в даному випадку має місце контактна взаємодія між берегами тріщини внаслідок дії електричного поля. Довжини зон контакту, а також максимальні значення розкриття тріщини добре збігаються з точними значеннями, отриманими в роботі (Loboda *et al.*, [104]).

Наведені результати демонструють суттєвий вплив електричного поля на характер деформування. Це зумовлено тим, що на берегах електродованої тріщини в паралельному їй електричному полі індуються вільні заряди, наявність яких якісно змінює вид поля в околі тріщини (на електродованих берегах анулюється дотична компонента електричного поля). Окрім цього через виникнення зсувних деформацій, викликаних п'єзоефектом, в цій зоні суттєво змінюється вид напружено-деформованого стану. Утворення зон

контактної взаємодії між берегами електродованої тріщини обумовлено комбінацією двох факторів – наявністю електричного поля E_1^∞ і різницею електромеханічних властивостей п'єзоматеріалів, що складають біматеріал, внаслідок чого деформації берегів тріщини різняться одна від одної. На рис. 2.6 наведено порівняльні дані розкриття Δ для біматеріалу PZT-4/PZT-5Н та однорідного матеріалу PZT-4, з яких видно, що для однорідного матеріалу контактна взаємодія між берегами електропровідної тріщини відсутня.

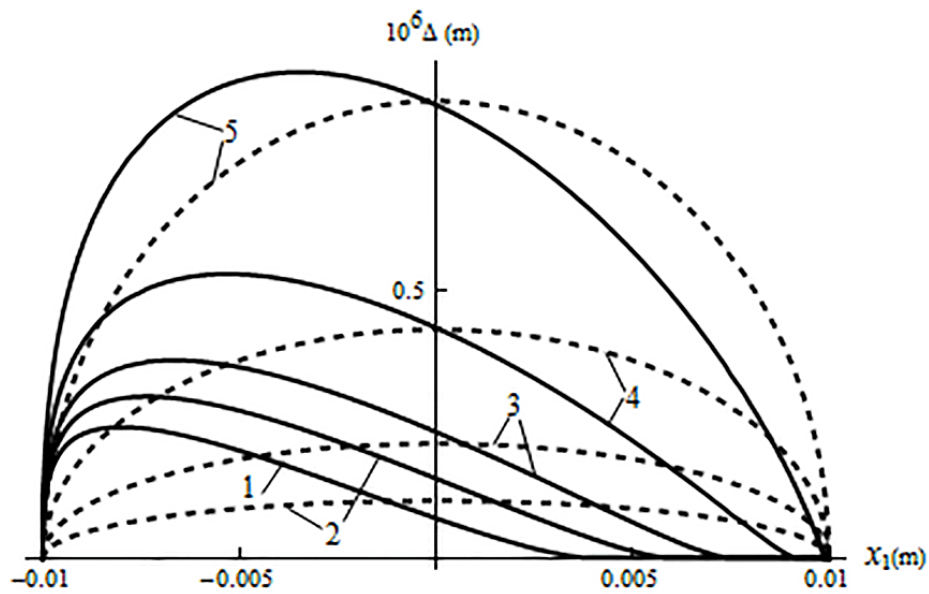


Рис. 2.5. Розкриття Δ електропровідної тріщини для біматеріалу PZT-4 / PZT-5Н при $E_1^\infty = -2 \times 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (крапки) для різних рівнів напруження σ_{33}^∞ : 1 – $\sigma_{33}^\infty = 0,25$ МПа; 2 – $\sigma_{33}^\infty = 0,5$ МПа;

$$3 - \sigma_{33}^\infty = 1,0 \text{ МПа}; 4 - \sigma_{33}^\infty = 2,0 \text{ МПа}$$

Варто відмітити, що розкриття тріщини для біматеріалу при $E_1^\infty \neq 0$ має місце навіть при відсутності механічного навантаження, в той час як у випадку однорідного п'єзоматеріалу під дією одного тільки електричного поля розкриття тріщини не спостерігається – має місце лише взаємне проковзування берегів тріщини. В цьому випадку при $E_1^\infty = -2 \times 10^6$ В/м для матеріалу PZT-4 $G^M(A) = G^M(B) = 0,17$ Н/м, $G^E(A) = G^E(B) = 721,0$ Н/м.

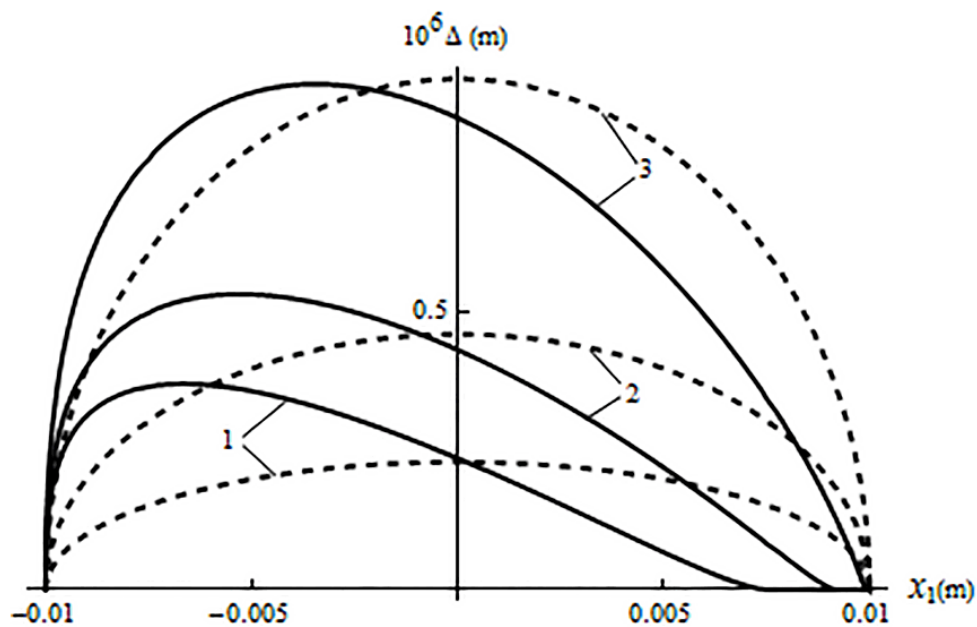


Рис. 2.6. Порівняння розкриття Δ електропровідної тріщини

для біматеріалу PZT-4 / PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \times 10^6 \text{ В/м}$ (суцільні лінії) та

однорідного матеріалу PZT-4 (пунктирні лінії) при різних рівнях

напруження σ_{33}^∞ :

1 – $\sigma_{33}^\infty = 0,5 \text{ МПа}$; 2 – $\sigma_{33}^\infty = 1,0 \text{ МПа}$; 3 – $\sigma_{33}^\infty = 2,0 \text{ МПа}$

В табл. 2.4 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах електропровідної тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу.

Таблиця 2.4. Залежність швидкостей вивільнення енергії в вершинах електропровідної тріщини від рівнів електромеханічного навантаження

E_1^∞ (В/м)	σ_{33}^∞ (МПа)	$G^M(A)$ (Н/м)	$G^E(A)$ (Н/м)	$G^M(B)$ (Н/м)	$G^E(B)$ (Н/м)
0	0,25	0,02	0,00	0,02	0,00
0	0,5	0,08	0,00	0,08	0,00

0	1,0	0,33	0,00	0,33	0,00
0	2,0	1,34	0,00	1,34	0,00
-2×10^6	0,0	6,35	1044,1	0,09	1050,1
-2×10^6	0,25	7,16	1042,5	0,00	1051,2
-2×10^6	0,5	8,05	1040,8	-0,10	1052,2
-2×10^6	1,0	10,03	1037,4	-0,35	1054,5
-2×10^6	2,0	14,61	1030,4	-1,09	1059,7

Наведені дані демонструють суттєве зростання вкладу електричної складової в величину швидкості вивільнення енергії для електродованої тріщини при $E_1^\infty \neq 0$ у порівнянні з раніше розглянутими варіантами граничних умов. Також спостерігається велика різниця в значеннях механічних складових швидкості вивільнення енергії в вершинах тріщини A і B . У випадку застосування критерію руйнування, заснованого на врахуванні лише механічної складової швидкості вивільнення енергії G^M (Park and Sun, [114-115]), при $E_1^\infty \neq 0$ менш небезпечною є вершина B , де має місце змикання берегів тріщини ($G^M(B) < 0$, тобто має місце дефіцит потенційної енергії, необхідної для підростання тріщини).

На рис. 2.7 представлено графіки залежності розкриття Δ для тріщини, електродованої на частині $|x_1| \leq 0,5l$ верхнього берега, та ізолюваної на решті границі, від значень σ_{33}^∞ і E_1^∞ для біматеріалу PZT-4/PZT-5H. При цьому на електродованій частині прийнято $\varphi^{(1)}(x_1) = 0$, $|x_1| \leq 0,5l$.

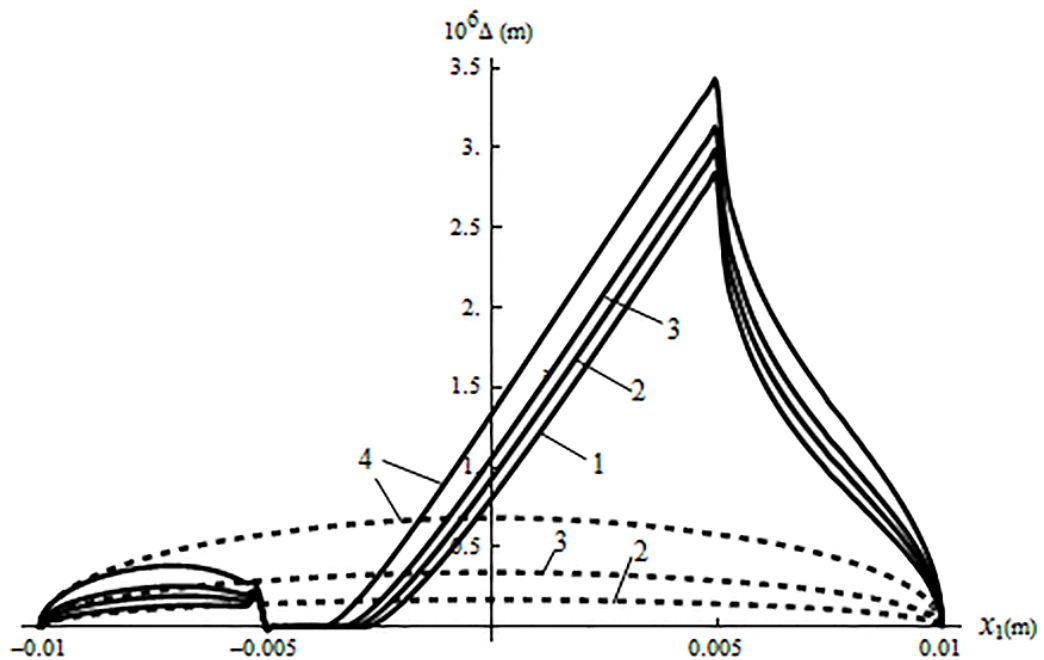


Рис. 2.7. Розкриття Δ частково електродованої тріщини для біматеріалу PZT-4 / PZT-5H при $E_1^\infty = -2 \times 10^6$ В/м (суцільні лінії) та $E_1^\infty = 0$ (пунктирні лінії) для різних рівнів напруження σ_{33}^∞ : 1 – $\sigma_{33}^\infty = 0$ МПа; 2 – $\sigma_{33}^\infty = 0,5$ МПа; 3 – $\sigma_{33}^\infty = 1,0$ МПа; 4 – $\sigma_{33}^\infty = 2,0$ МПа

Аналіз переміщень показує суттєвий вплив електричного поля E_1 на картину деформування. Під дією електричного поля електродована частина верхнього берега тріщини зберігає горизонтальне положення, тоді як решта тріщини внаслідок п'єзоефекту зазнає повороту. Через це утворюються дві зони розкриття тріщини й проміжна контактна зона, довжина якої зменшується із зростанням рівня механічного навантаження σ_{33}^∞ . З рис. 2.7 видно, що максимальне розкриття тріщини значно перевищує значення, що спостерігалися для раніше розглянутих граничних умов.

В табл. 2.5 наведено дані для швидкостей вивільнення енергії у вершинах частково електродованої тріщини при різних рівнях електромеханічного навантаження біматеріалу.

Таблиця 2.5. Залежність швидкостей вивільнення енергії в вершинах частково електродованої тріщини від рівнів електромеханічного навантаження

E_1^∞ (В/м)	σ_{33}^∞ (МПа)	$G^M(A)$ (Н/м)	$G^E(A)$ (Н/м)	$G^M(B)$ (Н/м)	$G^E(B)$ (Н/м)
0	0,5	0,07	0,00	0,07	0,00
0	1,0	0,27	0,00	0,27	0,00
0	2,0	1,06	-0,02	1,06	0,00
-2×10^6	0,0	1,00	-20,72	1,90	-33,08
-2×10^6	0,5	1,25	-20,03	2,49	-34,51
-2×10^6	1,0	1,55	-19,33	3,20	-35,96
-2×10^6	2,0	2,34	-17,96	4,96	-38,87

2.4 Висновки до другого розділу

Побудовано скінченно-елементну модель п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною на його інтерфейсі. Розроблено схеми скінченно-елементної реалізації основних електростатичних граничних умов на берегах тріщини. Запропоновано модифікацію методу віртуального закриття тріщини для постпроцесорного обчислення швидкостей вивільнення енергії в вершинах тріщини.

Отримано чисельні розв'язки задач для деяких варіантів електростатичних умов: 1) електропроникна тріщина, 2) електроізолювана тріщина, 3) електропровідна тріщина, 4) частково електродована і частково електроізолювана тріщина. Представлені результати показують, що вид електростатичних граничних умов на берегах тріщини суттєво впливає на напружено-

деформований стан і параметри руйнування п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною. З'ясовано, що у випадках електропроникної або електроізолюваної тріщин під впливом електричного поля E_1^∞ має місце безконтактне деформування з відсутністю асиметрії, характерної для електродованої тріщини. Ця асиметрія обумовлена комбінацією таких факторів, як наявність електричного поля і різниці електромеханічних властивостей п'єзоматеріалів, що складають біматеріал. При $E_1^\infty \neq 0$ для електродованої тріщини наявне суттєве зростання вкладу електричної складової в величину швидкості вивільнення енергії. У випадку частково електродованої тріщини характер деформування якісно відрізняється від випадків завдання основних видів електростатичних граничних умов. Спостерігається утворення контактної зони в середній частині тріщини, а також значне зростання величини максимального розкриття тріщини.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТРІЩИНИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

3.1. Плоско-деформований стан

3.1.1 Формулювання проблеми

Визначальні рівняння, рівняння рівноваги та геометричні рівняння для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності об'ємних сил і вільних зарядів у тривимірному випадку наведені в розділі II, рівнянні (2.1). У плоскому випадку ці рівняння мають вигляд :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\varepsilon_{11} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3, \\ \sigma_{13} &= c_{44}(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) - e_{15}E_1, \\ D_1 &= e_{15}(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) + \chi_{11}E_1, \\ D_3 &= e_{31}\varepsilon_{11} + e_{33}\varepsilon_{33} + \chi_{33}E_3.\end{aligned}\tag{3.1}$$

де $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$ - компоненти тензора напружень; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{33}$ - компоненти тензора деформацій; E_1, E_3 - компоненти вектора електричного поля; D_1, D_3 - компоненти вектора електричної індукції; $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ - компоненти пружної матриці; $e_{13}, e_{15}, e_{31}, e_{33}$ - компоненти п'єзоелектричної матриці; χ_{11}, χ_{33} - компоненти діелектричної матриці.

Розглядається тріщина довжини $2b$ на межі розділу двох напівнескінченних п'єзокерамічних просторів $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$ (рис. 3.1).

Вважається, що $c_{11}^{(1)}, c_{13}^{(1)}, c_{33}^{(1)}, c_{44}^{(1)}, e_{13}^{(1)}, e_{15}^{(1)}, e_{31}^{(1)}, e_{33}^{(1)}, \chi_{11}^{(1)}, \chi_{33}^{(1)}$ і $c_{11}^{(2)}, c_{13}^{(2)}, c_{33}^{(2)}, c_{44}^{(2)}, e_{13}^{(2)}, e_{15}^{(2)}, e_{31}^{(2)}, e_{33}^{(2)}, \chi_{11}^{(2)}, \chi_{33}^{(2)}$ є матрицями фізичних властивостей для

верхнього та нижнього матеріалів відповідно, і обидва матеріали мають клас симетрії $6mm$ із напрямком поляризації x_3 .

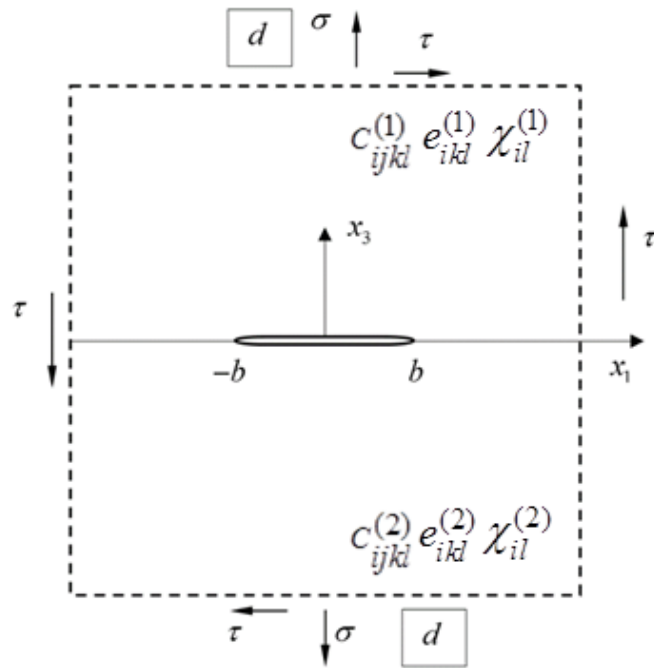


Рис. 3.1. П'єзоелектрична біматеріальна площина з міжфазною тріщиною, що має скінченну електричну проникність

Вважаємо, що заповнювач тріщин має діелектричну проникність

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad (3.2)$$

де ε_r – відносна діелектрична проникність, а $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$ – діелектрична проникність вакууму.

Навантаження на нескінченності визначається як $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau$, $D_3^{(m)} = d$, $\sigma_{xx}^{(m)} = \sigma_{xxm}^\infty$, $D_1^{(m)} = D_{xm}^\infty$ ($m=1$ позначає верхню область, а $m=2$ – нижню). Оскільки навантаження не залежить від координати x_2 , можна розглянути плоску задачу про деформацію в площині, зображеній на рис. 3.1. Вважаємо, що тріщина повністю відкрита і її грані вільні від заданих

механічних навантажень і електричних зарядів. Крім того, ми вважаємо, що електричне поле всередині тріщин можна знайти як

$$E_a = -\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \text{ для } x_1 \in (-b, b).$$

Враховуючи, що $D_3 = \varepsilon_a E_a$, приходимо до наступної електричної умови

$$D_3 = -\varepsilon_a \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \text{ для } x_1 \in (-b, b) \quad (3.3)$$

вздовж області тріщини, яку раніше використовували Нао Т. Н. і Shen Z. Y. [80]. Таким чином, граничні умови на поверхні розділу матеріалів можна записати як

$$\text{для } x_1 \notin (-b, b) : \langle \mathbf{V}(x_1, 0) \rangle = 0, \langle \mathbf{t}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{для } x_1 \in (-b, b) : \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \langle D_3(x_1) \rangle = 0,$$

$$D_3(x_1) \langle u_3(x_1) \rangle = -\varepsilon_a \langle \varphi(x_1) \rangle. \quad (3.5)$$

де $\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T$, $\mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}^T$, квадратні дужки означають стрибок відповідної функції при переході через вісь x_1 .

3.1.2 Аналітичний розв'язок

На основі результатів розділу 1 для п'єзoeлектричної біматеріальної площини маємо

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4} D_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (3.6)$$

$$n_{j1} \langle u_1'(x_1) \rangle + i \left\{ n_{j3} \langle u_3'(x_1) \rangle + n_{j4} \langle \varphi'(x_1) \rangle \right\} = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (3.7)$$

де $m_{jl}, n_{jl}, \gamma_j (j, l = 1, 3, 4)$ залежать від матеріальних констант та мають дійсні значення для певних класів п'єзoкераміки. Крім того, співвідношення (3.6),

(3.7) побудовані таким чином, що друга рівність (3.4) виконується для усього інтерфейсу, а перша рівність (3.4) забезпечує аналітичність функції $F_j(z)$ у всій площині за виключенням області тріщини.

Припустимо, що електричний потік уздовж берегів тріщини зберігає постійне значення, тобто

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (3.8)$$

де D - поки що невідома константа.

Рівняння (3.6) і (3.8) разом з умовами на межі розділу матеріалів (3.5) призводять до задачі лінійного спряження Гільберта-Рімана

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = m_{j4} D, \quad (j=1, 3, 4), \text{ для } x_1 \in (-b, b). \quad (3.9)$$

Для $x_1 \notin (-b, b)$ справедливі умови $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1)$ і значить на основі (3.6) можемо записати наступні умови на нескінченності для функцій $F_j(z)$:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \hat{\sigma}_j - i \hat{\tau}_j, \quad (3.10)$$

де $\hat{\sigma}_j = \frac{1}{r_j} (\sigma + m_{j4} d)$, $\hat{\tau}_j = -m_{j1} \tau / r_j$, $r_j = (1 + \gamma_j)$ ($j=1, 3, 4$).

Введемо нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) - \frac{m_{j4} D}{1 + \gamma_j}. \quad (3.11)$$

Тоді рівняння (3.9) та (3.10) запишуться у вигляді

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0, \quad (j=1, 3, 4) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (3.12)$$

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_j^* - i \tau_j^*, \quad (3.13)$$

$$\text{де } \sigma_j^* = \hat{\sigma}_j - m_{j4} D / r_j, \quad \tau_j^* = \hat{\tau}_j \quad (j=1,3,4). \quad (3.14)$$

Згідно з Мусхелішвілі [33], розв'язок задачі (3.12), (3.13) має вигляд

$$\Phi_j(z) = X_j(z)(\sigma_j^* - i\tau_j^*)(z - 2ib\varepsilon_j), \quad (3.15)$$

$$\text{де } X_j(z) = (z+b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (z-b)^{-1/2-i\varepsilon_j}, \quad \varepsilon_j = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}.$$

Підставляючи (3.15) в (3.11), а потім у (3.6), одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = (1 + \gamma_1) (\sigma_1^* - i\tau_1^*) (x_1 - 2ib\varepsilon_1) (x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_1} (x_1 - b)^{-1/2-i\varepsilon_1} + m_{14} D, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44} D_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{2\sigma_4^* x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + m_{44} D. \quad (3.17)$$

Із системи (3.16), (3.17) можуть бути отримані вирази $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ і $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$ для $x_1 > b$.

З рівнянь (3.7), (3.11) та (3.15) аналогічно до Розділу 1 одержуємо такі вирази:

$$\begin{aligned} n_{j1} [u_1(x_1, 0)] + i \{ n_{j3} [u_3(x_1, 0)] + n_{j4} [\phi(x_1, 0)] \} = \\ \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (\sigma_j^* - i\tau_j^*) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\varepsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} \quad \text{для } x_1 \in (-b, b), \end{aligned} \quad (3.18)$$

з яких витікають наступні формули для стрибків переміщення та електричного потенціалу

$$\begin{aligned} \langle u_3(x_1, 0) \rangle &= \Delta^{-1} \{ n_{44} H_1(x_1) - n_{14} H_2(x_1) \}, \\ \langle \phi(x_1, 0) \rangle &= \Delta^{-1} \{ -n_{43} H_1(x_1) + n_{13} H_2(x_1) \}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{де } H_1(x_1) = \gamma_0(\sigma_1^* \cos \alpha + \tau_1^* \sin \alpha) \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad H_2(x_1) = 2\sigma_4^* \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma_1 + 1}{\sqrt{\gamma_1}},$$

$$\alpha = \varepsilon_1 \ln \left(\frac{b + x_1}{b - x_1} \right), \quad \Delta = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}.$$

Підставляючи вирази (3.19) в (3.3), отримуємо

$$D = \varepsilon_a \frac{n_{43}\tilde{H}_1(x_1) - n_{13}\tilde{H}_2}{n_{44}\tilde{H}_1(x_1) - n_{14}\tilde{H}_2} \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (3.20)$$

$$\text{де } \tilde{H}_1(x_1) = \gamma_0(\sigma_1^* \cos \alpha + \tau_1^* \sin \alpha), \quad \tilde{H}_2 = 2\sigma_4^*.$$

3.1.3 Чисельна ілюстрація аналітичного розв'язку

Для кожного значення x_1 співвідношення (3.20) являє собою трансцендентне рівняння відносно електричного потоку D . Його розв'язок легко знаходиться чисельно. Важливо зазначити, що для реальних п'єзоелектричних матеріалів величина ε_1 є дуже малою, тому $\cos(\alpha)$ і $\sin(\alpha)$ практично не змінюються для $x_1 \in (-b, b)$. А це означає, що $H_1(x_1)$ практично не змінюється в цьому проміжку і значить величина електричного потоку D для кожного ε_a є практично константою. Для прикладу в таблиці 3.1 наведені значення коренів рівняння (3.20) для різних $x_1 \in (-b, b)$ при $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ і $b = 5$ мм.

Табл. 3.1. Значення коренів рівняння (3.20) для різних

$$x_1 \in (-b, b) \text{ при } \varepsilon_a = \varepsilon_0 \text{ і } b = 5 \text{ мм.}$$

x_1 , мм	0	1	2	3	4	5
$10^3 D \text{ Кл/м}^2$	5.0709	5.0709	5.0710	5.0710	5.0710	5.0711

$x_1, \text{ мм}$	6	7	8	9	9.5	9.9
$10^3 D \text{ Кл/м}^2$	5.0712	5.0713	5.0715	5.0710	5.0720	5.0743

З цієї таблиці видно, що в більшій частині проміжку $(0, b)$ величина D залишається практично постійною і тільки біля точки b спостерігається незначне відхилення, величиною $\approx 0.067\%$. Це підтверджує справедливості припущення стосовно постійного значення електричного потоку через тріщину і дозволяє для його знаходження використовувати, наприклад, середину тріщини $x_1 = 0$.

Знайдемо також швидкість вивільнення енергії (ШВЕ) при розвитку тріщини. Згідно Партон В. З. і Кудрявцев Б. А. [42] ШВЕ біля правої вершини тріщини може бути представлена у вигляді:

$$G_b = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_b^{b+\Delta l} \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle + D_3^{(1)}(x_1, 0) \langle \varphi(x_1 - \Delta l, 0) \rangle \right] dx_1 \right\}. \quad (3.21)$$

Підставляючи вирази для напружень і електричного зміщення, отримані з (3.16), (3.17), а також стрибки переміщень і електричного потенціалу, знайдені з (3.18) і виконуючи інтегрування, одержуємо:

$$G_b = \frac{\pi(1+4\varepsilon_1^2)}{8\cosh(\pi\varepsilon_1)} h_1 h_2 + a\pi h_3 (\sigma_5^*)^2, \quad (3.22)$$

$$\text{де } h_1 = \frac{m_{44}n_{44} + n_{43}}{p_1 p_2} - \frac{1}{m_{11}n_{11}}, \quad h_2 = \frac{a}{\sqrt{\gamma_1}} \left\{ \left[\sigma + m_{14}(d - D) \right]^2 + \tau^2 \right\}, \quad h_3 = \frac{m_{14}n_{14} + n_{13}}{p_1 p_2},$$

$$p_1 = m_{44} - m_{14}, \quad p_2 = n_{13}n_{44} - n_{14}n_{43}.$$

Формула (3.22) справедлива як для біматеріалу, так і для однорідного матеріалу. Зокрема, в останньому випадку цю формулу можна спростити і записати у вигляді:

$$G_b = \frac{\pi b}{4p_2} \left\{ n_{44} [\sigma + m_{14}(d - D)]^2 - n_{14} [\sigma + m_{44}(d - D)]^2 \right\}. \quad (3.23)$$

Враховуючи також співвідношення

$$n_{13} = -m_{44}n_{14}, \quad n_{43} = -m_{14}n_{44}, \quad \frac{1}{m_{11}n_{11}} = \frac{m_{44}n_{44} + n_{43}}{p_1p_2}, \quad h_1 = \frac{2n_{44}}{p_2}, \quad h_3 = -\frac{n_{14}}{p_2},$$

цю формулу можна переписати так

$$G_b = \frac{\pi b}{4} [\mathcal{G}_{11}\sigma^2 + (\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{21})\sigma(d - D) + \mathcal{G}_{22}(d - D)^2], \quad (3.24)$$

де $\mathcal{G}_{11} = \Delta^{-1}(n_{44} - n_{14}), \quad \mathcal{G}_{12} = \Delta^{-1}(m_{14}n_{44} - m_{44}n_{14}), \quad \mathcal{G}_{21} = \Delta^{-1}(n_{13} - n_{43}),$
 $\mathcal{G}_{22} = \Delta^{-1}(m_{44}n_{13} - m_{14}n_{43}), \quad \Delta = p_2.$

В таблицях 3.2 та 3.3 наведені деякі результати чисельної реалізації одержаних аналітичних формул. Зокрема, в табл. 3.2 показані значення електричного потоку в області тріщини та ШВЕ для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $\tau = 0$, $d = 0$ та різних величин діелектричної проникності заповнювача тріщини, а в табл. 3.3 наведені ті ж значення, але для $d = 0.01 \text{ Кл/м}^2$.

Таблиця 3.2. Зміна електричного потоку в області тріщини та ШВЕ для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $d = 0$ та різної діелектричної проникності заповнювача тріщини

ε_a	$100D, \text{ Кл/м}^2$	$G_b, \text{ Н/м}$
0	0	30.25
ε_0	-0.206	39.73
$2.5 \varepsilon_0$	-0.242	40.37

$81 \varepsilon_0$	-0.274	40.70
$4000 \varepsilon_0$	-0.276	40.71

Таблиця 3.3. Зміна електричного потоку в області тріщини та ШВЕ для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $d = 0.01 \text{ Кл/м}^2$ та різної діелектричної проникності заповнювача тріщини

ε_a	$100D, \text{ Кл/м}^2$	$G_b, \text{ Н/м}$
0	0	-16.15
ε_0	0.507	36.48
$2.5 \varepsilon_0$	0.626	40.16
$81 \varepsilon_0$	0.721	40.71
$4000 \varepsilon_0$	0.724	40.71

З одержаних результатів видно, що для моделі електроізолюваної тріщини ШВЕ приймає від'ємні значення, що є фізично невиправдано і ставить під сумнів можливість використання цієї моделі тріщини. При значному ж збільшенні електричної проникності тріщини, ШВЕ прямують до одного значення незалежно від величини прикладеного електричного потоку. Це пояснюється тим, що при великих значеннях електричної проникності тріщини ми фактично приходимо до моделі електропроникної тріщини, фізичні характеристики якої не залежать від електричного потоку.

3.1.4 Чисельний розрахунок для плоского випадку

Для області скінченних розмірів, що являє собою 2 спаяних прямокутники висоти l і ширини $2l$ з тріщиною $-b \leq x_1 \leq b$, $x_2 = 0$ в центральній частині інтерфейсу, розв'язок задачі проводився методом скінченних елементів. Використовувались 8-вузлові чотирикутні скінченні

елементи лагранжевого типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її вершин. Структура сітки, а також розподіл електричного потенціалу показані на рис. 3.2

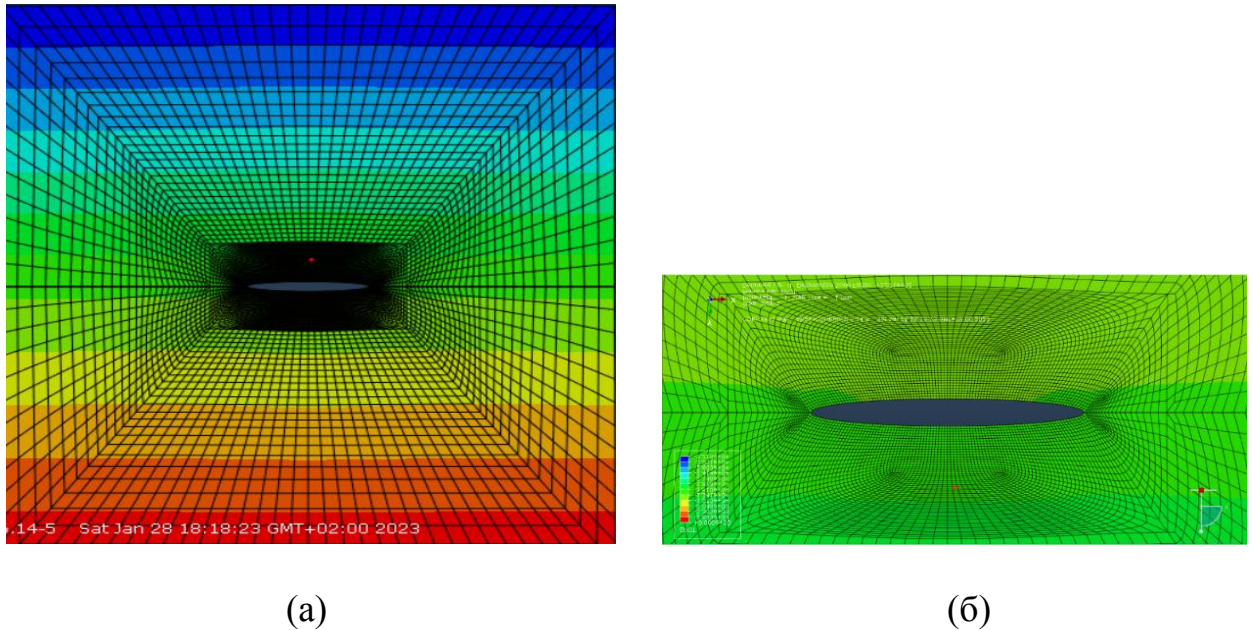


Рис.3.2. Структура сітки та розподіл електричного потенціалу,
(а) – вся область, (б) – окіл тріщини

Вважається, що верхня частина пластини виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу PZT-4, нижня є п'єзоелектриком PZT-5. Властивості цих матеріалів в системі одиниць СІ задаються відомими матрицями жорсткості, п'єзоелектричних та діелектричних констант, а саме

$$\begin{aligned} \text{PZT-4: } c_{11} &= 139 \times 10^9, & c_{12} &= c_{13} = 74,3 \times 10^9, & c_{33} &= 113 \times 10^9, & c_{44} &= 25,6 \times 10^9, \\ e_{15} &= 13,4, & e_{31} &= -6,98, & e_{33} &= 13,8, & \chi_{11} &= 6 \times 10^{-9}, & \chi_{33} &= 5,47 \times 10^{-9}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{PZT-5: } c_{11} &= 126 \times 10^9, & c_{12} &= c_{13} = 53 \times 10^9, & c_{33} &= 117 \times 10^9, & c_{44} &= 35,3 \times 10^9, & e_{15} &= 17, \\ e_{31} &= -6,5, & e_{33} &= 23,3, & \chi_{11} &= 15,1 \times 10^{-9}, & \chi_{33} &= 13 \times 10^{-9}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Вважалось, що:

- до верхньої і нижньої граней прикладене рівномірно розподілене нормальне розтягуюче напруження $\sigma = 10 \text{ МПа}$;
- через усю область проходить електричний потік $d = 10^{-2} \text{ Кл/м}^2$, який реалізується задаванням на верхній грані рівномірно розподіленого заряду інтенсивності $(-10^{-2} \text{ Кл/м}^2)$;
- на нижній грані заданий нульовий електричний потенціал;
- розміри пластини і тріщини визначаються величинами $l = 25 \text{ мм}, b = 5 \text{ мм}$;

Будемо вважати, що тріщина заповнена повітрям. Тоді згідно з табл. 3.2 електричний потік через тріщину дорівнює 0.00507 Кл/м^2 . Для перевірки правильності цього результату задаємо в області тріщини вказаний електричний потік, розв'яжемо задачу методом скінченних елементів і перевіримо виконання співвідношення (3.3).

Згідно з правилами пакету Абакус для реалізації потрібного електричного потоку через тріщину треба на її верхньому березі задати рівномірно розподілений заряд величиною $+0.00507 \text{ Кл/м}^2$, а на нижньому – рівномірно розподілений заряд -0.00507 Кл/м^2 .

Розрахунок був проведений на сітці, показаній на рис. 3.2. Кольорова розкраска на цьому рисунку показує результуючий розподіл електричного потенціалу. Графіки переміщень верхнього та нижнього берегів тріщини показані на рис. 3.3 та 3.4, відповідно, а значення електричного потенціалу на верхньому та нижньому берегах – на рис. 3.5 та 3.6, відповідно.

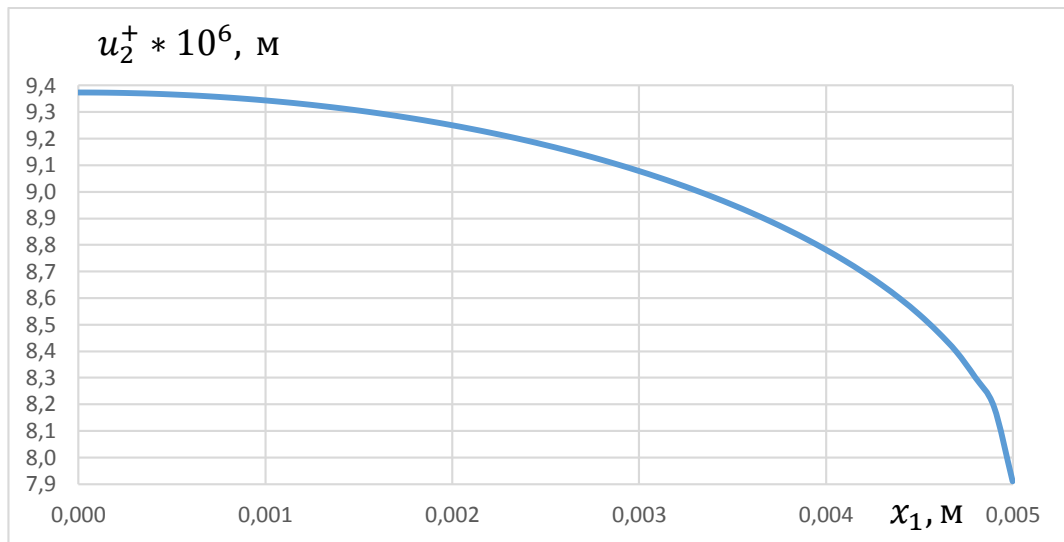


Рис. 3.3. Графік переміщень верхнього берега тріщини

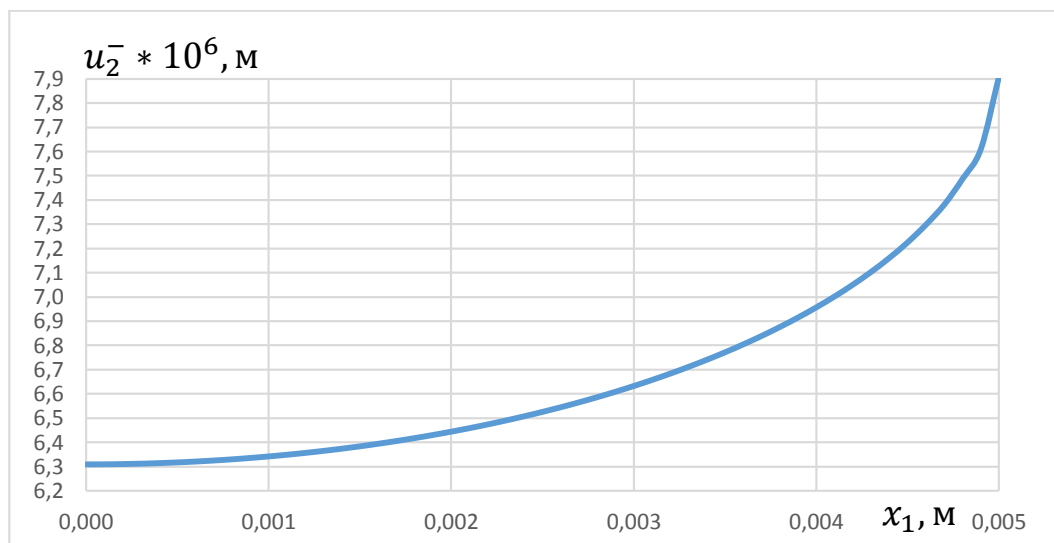


Рис. 3.4. Графік переміщень нижнього берега тріщини

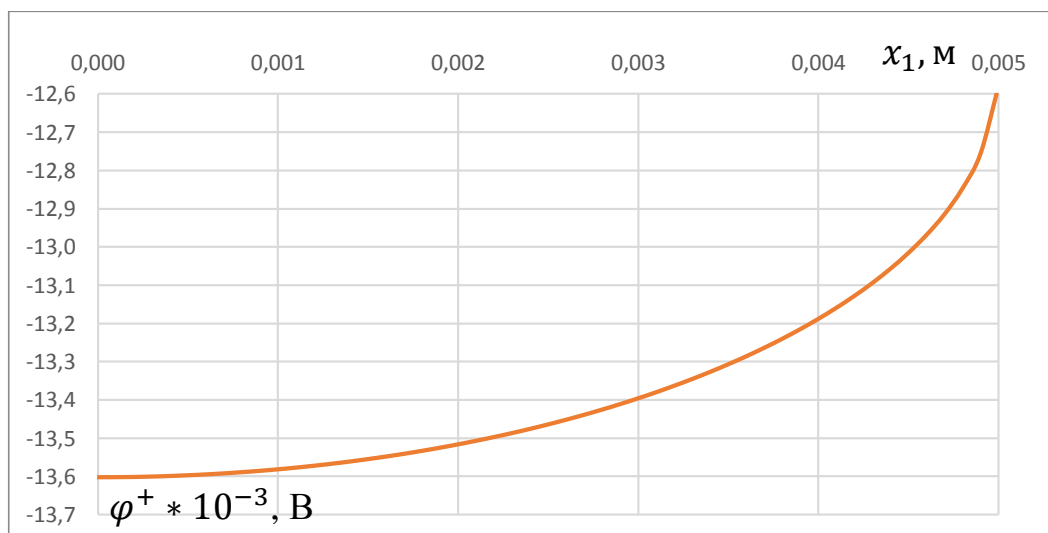


Рис. 3.5. Розподіл електричного потенціалу на верхньому березі тріщини

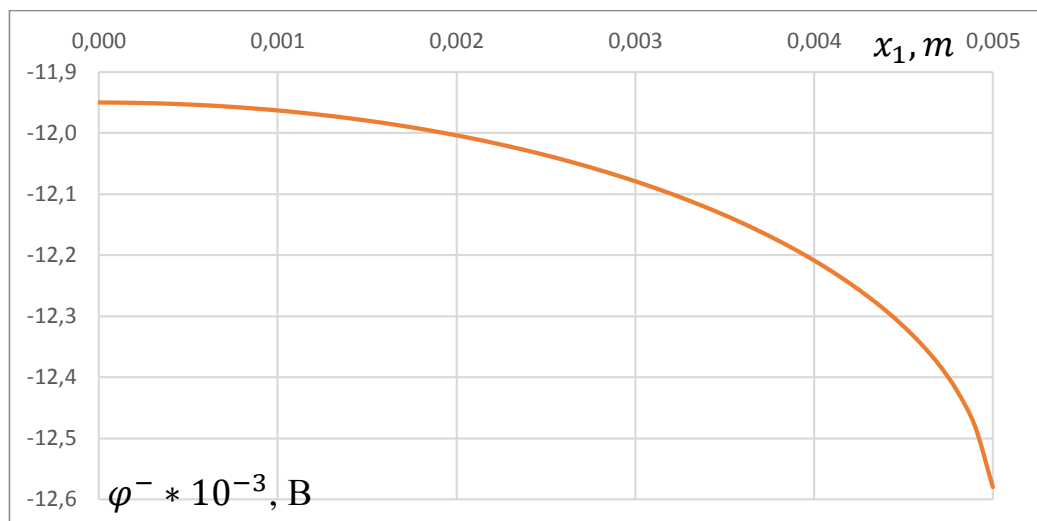


Рис. 3.6. Розподіл електричного потенціалу на нижньому березі тріщини

На основі цих результатів отримані значення правої частини співвідношення (3.3). Для декількох значень x_1 їх величини наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3. Значення електричного потоку, обчислені відповідно до правої частини формули (3.3)

$10^3 x_1, m$	0	1.8	3.8	4.8	4.9
$10^3 \varepsilon_a \langle \varphi \rangle / \langle u_3 \rangle Кл / м^2$	5.289	5.280	5.271	5.111	4.68

Порівнюючи одержані результати з лівою частиною рівняння (3.3), яка у цьому випадку повинна дорівнювати $5.07 \times 10^{-3} Кл / м^2$ можемо побачити, що в більшій частині проміжку $(0, b)$ розбіжність в результатах є незначною і складає біля 4,1% і тільки в безпосередній близькості до вершини тріщини ця похибка дещо зростає, але знаходиться в межах 10%. Цей результат підтверджує достовірність як аналітичного підходу, так і чисельного розрахунку.

3.2. Просторовий випадок

3.2.1 Формулювання проблеми

Розглядається біматеріальний паралелепіпед $-l_1 \leq x_1 \leq l_1$, $-l_2 \leq x_2 \leq l_2$, $-l_3 \leq x_3 \leq l_3$ (рис. 3.7). В області $-b \leq x_1 \leq b$ площини поділу матеріалів $x_3 = 0$ розташована тунельна тріщина, яка має скінченну електричну проникність і вільна від напружень та електричних зарядів на її берегах. На верхню та нижню грані паралелепіпеда діють розтягувальні напруження $\sigma_{33} = \sigma$, зсувні напруження $\tau_{23} = \tau$ та електричний потік інтенсивності $D_3 = d$ (рис. 3.7). Вважається, що $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{lij}^{(1)}$, $\chi_{ij}^{(1)}$ і $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{lij}^{(2)}$, $\chi_{ij}^{(2)}$ є матрицями фізичних властивостей для верхнього та нижнього матеріалів, відповідно, і обидва матеріали мають клас симетрії 6 mm із напрямком поляризації x_3 .

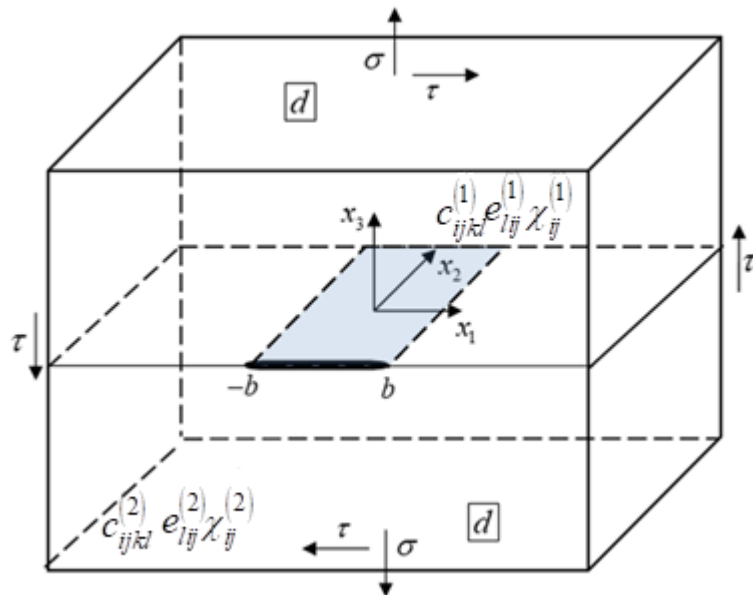


Рис. 3.7. П'єзоелектричний біматеріальний паралелепіпед з міжфазною тріщиною, що має скінченну електричну проникність

Для побудови розв'язку даної задачі в якості початкового наближення будемо використовувати знайдені вище аналітичні розв'язки плоскої задачі і застосовувати їх для окремих перерізів, ортогональних осі x_2 , біматеріалу зображеного на рис. 3.7.

3.2.2 Чисельний розрахунок для просторового випадку

Будемо вважати $l_1 = l_3 = 25$ мм, $l_2 = 40$ мм, $b = 5$ мм. Розв'язок проводився методом скінченних елементів. Використовувались 20-вузлові кінцеві brick-елементи лагранжевого типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її лівого і правого фронтів. Структура сітки, а також розподіл електричного потенціалу біля тріщини показані на рис. 3.8.

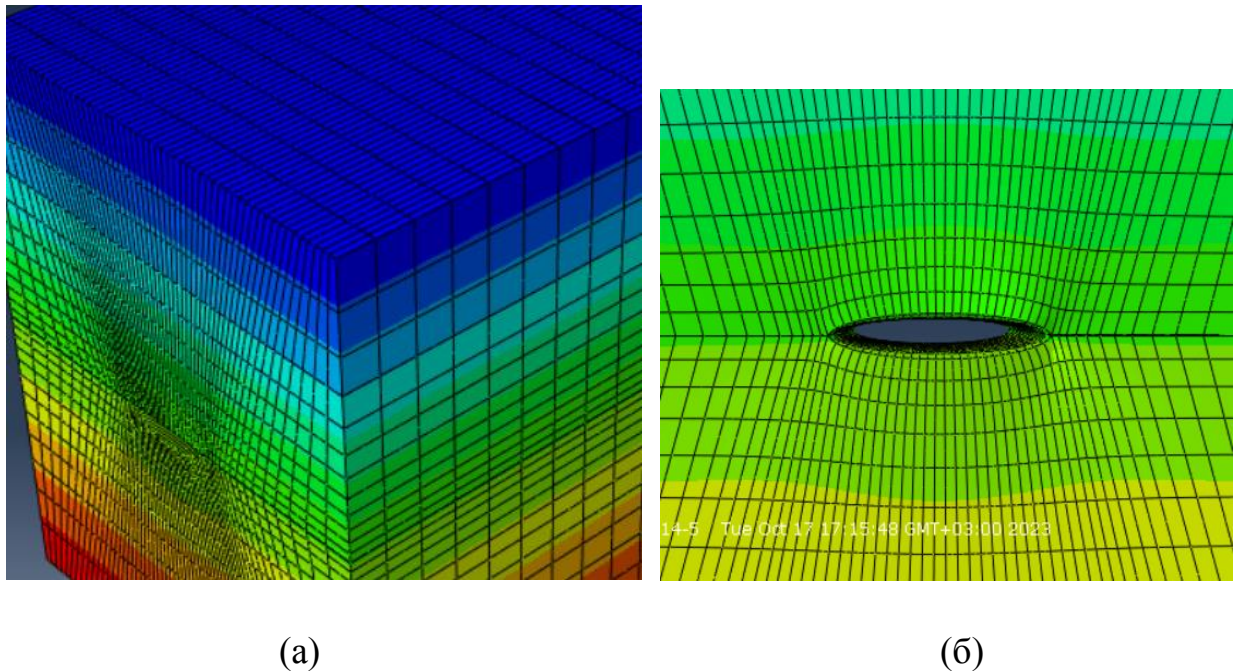


Рис. 3.8 Структура сітки та розподіл електричного потенціалу:

(а) – вся область, (б) – окіл тріщини

Вважається, що верхня частина пластини виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу PZT-4, нижня є п'єзоелектриком PZT-5. Властивості цих матеріалів в системі одиниць СІ задаються відомими матрицями жорсткості, п'єзоелектричних та діелектричних констант, які наведені формулами (3.25), (3.26).

Вважалось, що:

- до верхньої і нижньої граней прикладене рівномірно розподілене нормальне розтягуюче напруження $\sigma = 10 \text{ МПа}$;

- через усю область проходить електричний потік $d=10^{-2} \text{ Кл}/\text{м}^2$, який реалізується задаванням на верхній грані рівномірно розподіленого заряду інтенсивності $(-10^{-2} \text{ Кл}/\text{м}^2)$;
- на нижній грані заданий нульовий електричний потенціал;

Будемо вважати, що тріщина заповнена повітрям. Тоді згідно з табл. 3.2 в плоскому випадку електричний потік через тріщину наближено дорівнює $0.005 \text{ Кл}/\text{м}^2$. Припустимо, що такий електричний потік постійної величини має місце і у 3-вимірному випадку. Тобто, згідно з правилами пакету Абакус для реалізації вказаного електричного потоку через тріщину на її верхньому березі треба задати рівномірно розподілений заряд величиною $+0.005 \text{ Кл}/\text{м}^2$, а на нижньому – рівномірно розподілений заряд $-0.005 \text{ Кл}/\text{м}^2$. Для вказаних зовнішніх чинників розрахунок був проведений на сітці, показаній на рис. 3.8. Кольорова розкраска на цьому рисунку показує результуючий розподіл електричного потенціалу. Крім того, можна відзначити наступні найбільш цікаві результати:

Було отримано графіки розкриття тріщини для різних перерізів по напрямку осі x_2 які наведені на рис. 3.9. Лінії I та II відповідають $x_2=0$ та $x_2=l_2/2$ (їх значення дуже близькі одне до одного тож відповідні лінії майже ідентичні). Лінія III проведена для поперечного перерізу $x_2=9l_2/10$, який розташований дуже близько до лицьової грані паралелепіпеда $x_2=l_2$.

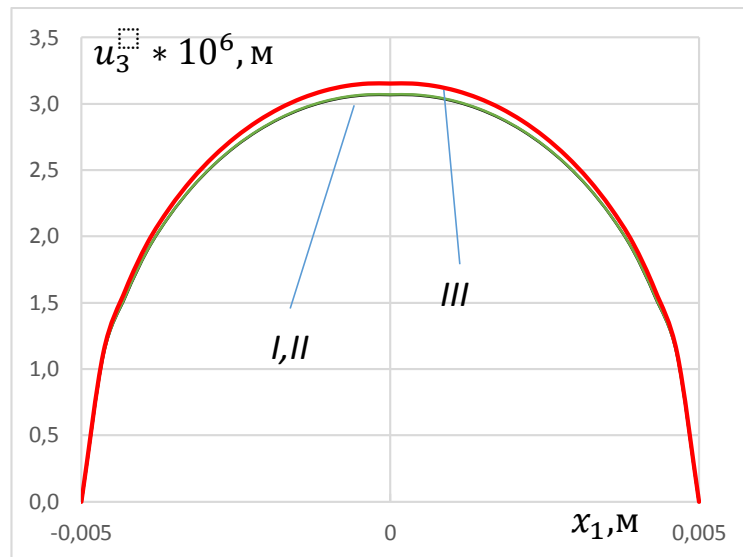


Рис. 3.9. Розкриття тріщини в різних перерізах

Стрибки електричного потенціалу показані на рис. 3.10 для тих же перерізів, що і на рис. 3.9. З рис. 3.9 та 3.10 випливає, що розкриття тріщини збільшується при наближенні до лицьової грані паралелепіпеда, тоді як стрибок електричного потенціалу для цих перерізів зменшується.

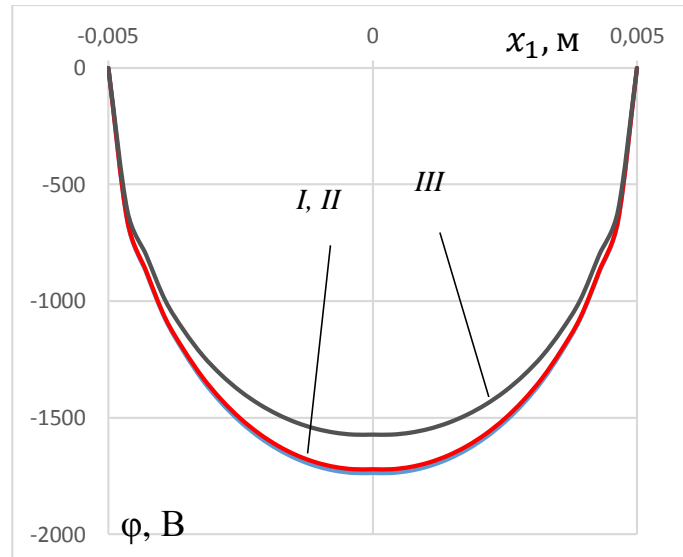


Рис. 3.10. Стрибок потенціалів для різних перерізів тіла

Розкриття тріщини в середній точці середнього перерізу дорівнює $3.07 \times 10^{-6} \text{ м}$, а стрибок потенціалу у цій точці дорівнює $-1.74 \times 10^3 \text{ В}$. Обчислення по формулі (3.3) дають значення D_3 рівними 0.005009 Кл/м^2 .

В таблиці 3.4 вказані значення D_3 в трьох перерізах, ортогональних осі x_2 . Як і слідувало очікувати, для середнього перерізу узгодження отриманого електричного потоку із заданим є дуже хорошим (похибка складає 0.18%), для перерізу, що віддалений від лицьового торця на $1/4$ довжини паралелепіпеда $2l_2$, ця похибка складає 0.74%. Для перерізів, розташованих в непосередній близькості до лицьової грані ця похибка виростає і, наприклад, на відстані $l_2/10$ від торця вона складає 11.8%.

Табл. 3.4 Значення електричного потоку через тріщину для різних перерізів, ортогональних осі x_2

Координата перерізу x_2	0(центр)	$l_2/2$	$9l_2/10$
D_3	0.005009	0.004963	0.004411

Оскільки результати в таблиці 3.4 недостатньо добре узгоджуються із заданими значеннями електричного потоку через тріщину, то методом ітерації проведено уточнення вказаних значень. Для цього береги тріщини розбивались на прямокутники шириною $2l_2/n$ і на кожній з них задавались значення електричного потоку отримані на попередній ітерації. Далі проводився новий розрахунок по вказаному вище скінченно-елементному алгоритму і одержані результати порівнювались із заданими. При їх незадовільному узгодженні аналогічним шляхом виконувалась наступна ітерація і т.д. В таблиці 3.5 наведений результат розрахунків, які проведені при $n=8$.

Табл. 3.5 Значення електричного потоку для різних перерізів, ортогональних осі x_2 , при $n=8$

Координата перерізу x_2	$l_2/10$	$3l_2/10$	$l_2/2$	$7l_2/10$	$9l_2/10$
$1000 \tilde{D}_3$	5.0	4.99	4.98	4.97	4.45
$1000 \hat{D}_3$	5.015	5.014	5.013	4.939	4.401

В таблиці 3.5 \tilde{D}_3 являє собою значення електричного зміщення, що задавалось на останній ітерації на відповідній ділянці верхнього берега тріщини, а \hat{D}_3 - значення електричного потоку, який отримано в результаті скінченно-елементного розв'язку і застосування формули (3.3). Оскільки різниця між цими значеннями для усіх перерізів не перевищує 1%, то знайдені значення \hat{D}_3 будемо вважати шуканими значеннями електричного потоку через тріщину.

Результати в таблиці 3.5 наведені для середніх точок кожного перерізу. Але, як було підтверджено при аналізі плоскої задачі (Розділ 3.1, Табл. 3.1), розподіл D_3 вздовж тріщини для кожного перерізу є майже постійним. У 3-вимірному випадку така поведінка також була підтверджена і показано, що електричний потік у кожному поперечному перерізі демонструє практично постійні значення для основної частини області тріщини, і лише в безпосередній близькості до берегів тріщини спостерігаються незначні відхилення від постійних значень.

3.3 Висновки до третього розділу

Досліджено напружено-деформівний стан п'єзоелектричного біматеріалу з міжфазною тріщиною. Вважається, що тріщина має скінченну електричну проникність, а на віддаленні від неї діє механічне навантаження та електричний потік. Спочатку приймається, що довжина тріщини набагато менша від розмірів тіла, тому останнє розглядається як нескінченно велике. Важаючи, що електричний потік через тріщину не змінюється по її довжині,

формулюється задача лінійного спряження (3.12), (3.13), для якої виписується аналітичний розв'язок. З використанням цього розв'язку формулюється рівняння (3.20) для знаходження величини електричного потоку. Для конкретних матеріалів і навантажень розв'язок цього рівняння є практично незмінним по довжині тріщини. Виводиться також досить проста формула (3.22) для ШВЕ. Наводяться результати чисельної реалізації отриманого аналітичного розв'язку.

Для подібної задачі, але у випадку області скінченних розмірів розв'язок побудований за допомогою методу скінченних елементів. Використано електричний потік через тріщину, який отриманий аналітично, і проведено розв'язання отриманої задачі за допомогою МСЕ. Перевірка одержаних чисельних результатів показала, що вони з достатньою точністю задовольняють рівнянню (3.3) для електричного потоку через тріщину, що підтверджує достовірність як аналітичного підходу, так і проведеного чисельного розрахунку.

Для просторового випадку розглянуто два зв'язаних прямокутних п'єзоелектричних паралелепіпеда з обмежено проникною тріщиною на межі поділу матеріалів. На початку досліджено задачу плоскої деформації середнього перерізу тривимірної області. Електричний потік через область тріщини визначається з цього розв'язку та використовується як початкове наближення для 3-D задачі. Для аналізу останньої використовувався метод скінченних елементів. Було застосовано ітераційний алгоритм для визначення електричного потоку через область тріщини, згідно з яким згаданий потік на кожному кроці визначався за допомогою методу скінченних елементів і рівняння (3.3). Завдяки такому підходу з високою точністю знайдено значення електричного потоку та одержано підтвердження щодо його квазірівномірного розподілу по берегах тріщини для будь-якого поперечного перерізу тривимірного тіла.

РОЗДІЛ 4. СПОСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАПОВНЮВАЧА ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

4.1. Формулювання проблеми

Визначальні рівняння, рівняння рівноваги та геометричні рівняння для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності об'ємних сил і вільних зарядів, для плоского випадку наведені в розділі III, рівняння (3.1).

Розглядається задача плоскої деформації в площині (x_1, x_3) для двох спаяних п'єзоелектричних прямокутників $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$ висоти l і ширини $2l$ з тріщиною $-b \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ в центральній частині інтерфейсу (рис. 4.1). Вважається, що $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{lij}^{(1)}$, $\chi_{ij}^{(1)}$ і $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{lij}^{(2)}$, $\chi_{ij}^{(2)}$ є матрицями фізичних властивостей для верхнього та нижнього матеріалів, відповідно, і обидва матеріали мають клас симетрії $6mm$ із напрямком поляризації x_3

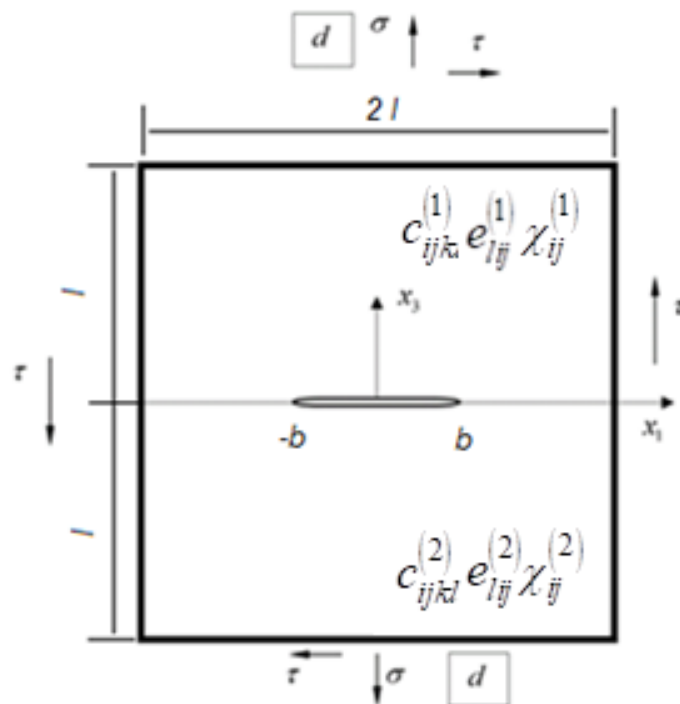


Рис. 4.1. П'єзоелектричний біматеріальний елемент з міжфазною тріщиною, що має скінченну електричну проникність

Навантаження на зовнішніх границях областей визначається як $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau$, $D_3^{(m)} = d$, ($m=1$ позначає верхню область, а $m=2$ - нижню). Вважається, що навантаження не залежить від координати x_2 , тому можна розглянути плоску задачу про деформацію в площині (x_1, x_3) . Приймаємо, що тріщина повністю відкрита, а її грані вільні від заданих механічних навантажень і електричних зарядів.

Вважаємо, що заповнювач тріщини має діелектричну проникність

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (4.1)$$

де ε_r – відносна діелектрична проникність, а $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$ – діелектрична проникність вакууму.

4.2 Формулювання розрахункової моделі та її чисельний аналіз

Для моделювання поставленої задачі за допомогою МСЕ, побудуємо дві прямокутні області та третю область, що буде відповідати тріщині між ними (рис.4.2). В якості області для моделювання тріщини виберемо еліпс, вертикальна вісь якого складає величину порядку 10^{-6} від довжини горизонтальної осі. Така форма тріщини найбільш адекватно відповідає її деформованому стану.

Крім того, вважаємо, що тріщина заповнена гіпотетичним п'єзоелектричним матеріалом, модулі пружності і п'єзоелектричні константи якого є також величинами порядку 10^{-6} від відповідних характеристик верхнього матеріалу. Діелектричні ж проникності можуть змінюватись і бути рівними діелектричним проникностям реальних матеріалів (повітря, силікон, вода і т.д.), що можуть заповнювати тріщину. Вважається, що $c_{ijkl}^{(3)}$, $e_{lij}^{(3)}$, $\chi_{ij}^{(3)}$ є матрицями фізичних властивостей для матеріалу тріщини.

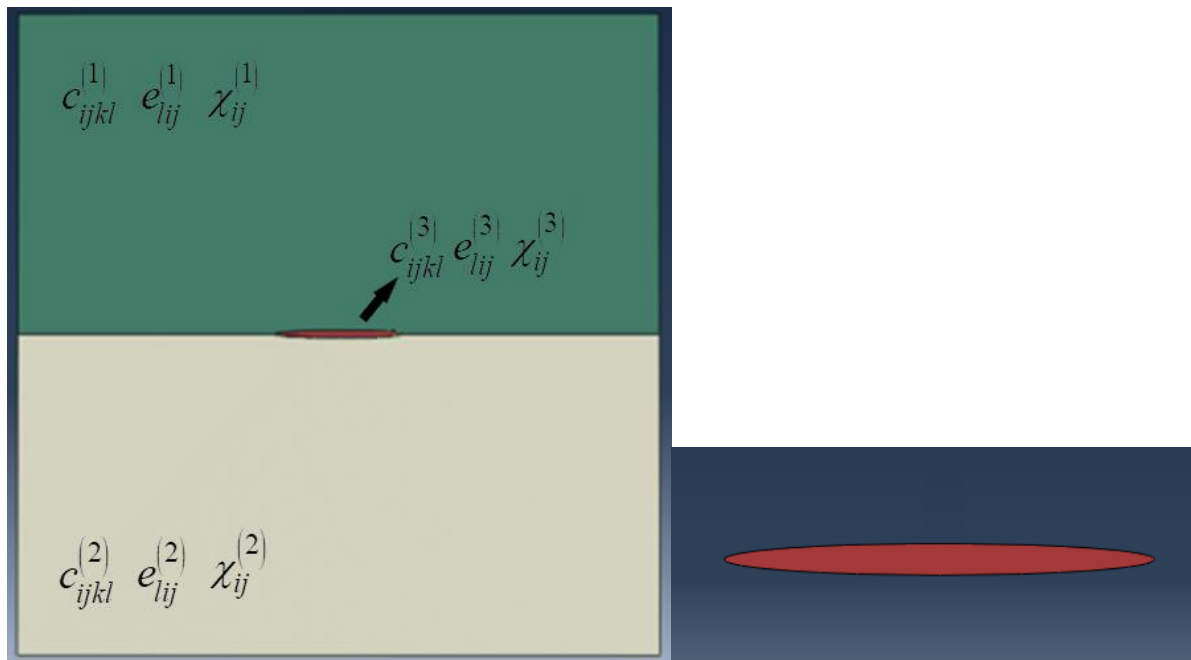


Рис. 4.2. П'єзоелектричний біматеріальний елемент з тріщиною еліптичної форми

Очевидно, що така модель є адекватним відображенням тріщини заповненої рідиною або повітрям, але вона також з високим ступенем точності відображає основні характеристики моделі, описаної в параграфах 3.1.2, 3.1.3, яка сформульована для математичного розрізу з тими ж діелектричними характеристиками його заповнювача.

Для дослідження пружно-деформівного стану описаного п'єзоелектричного біматеріалу з еліптичною тріщиною використовуємо метод скінчених елементів (МСЕ). Для того, щоб в подальшому була можливість порівняти отримані результати з результатами аналітичної моделі дослідженої у попередньому розділі, будемо вважати, що довжина тріщини набагато менша характерних розмірів верхнього і нижнього прямокутників.

МСЕ полягає у розбитті розрахункової області на скінченні елементи і подальшій апроксимації невідомих функцій на цих елементах. У випадку, що розглядається, розрахункова область буде складатись із трьох підобластей з різними фізичними характеристиками, які ідеально з'єднані на лініях їх стику. Використовувались 8-вузлові чотирикутні скінченні елементи лагранжевого

типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її вершин. Структура сітки в деформованому стані, а також розподіл нормальної компоненти електричного поля показані на рис. 4.3.

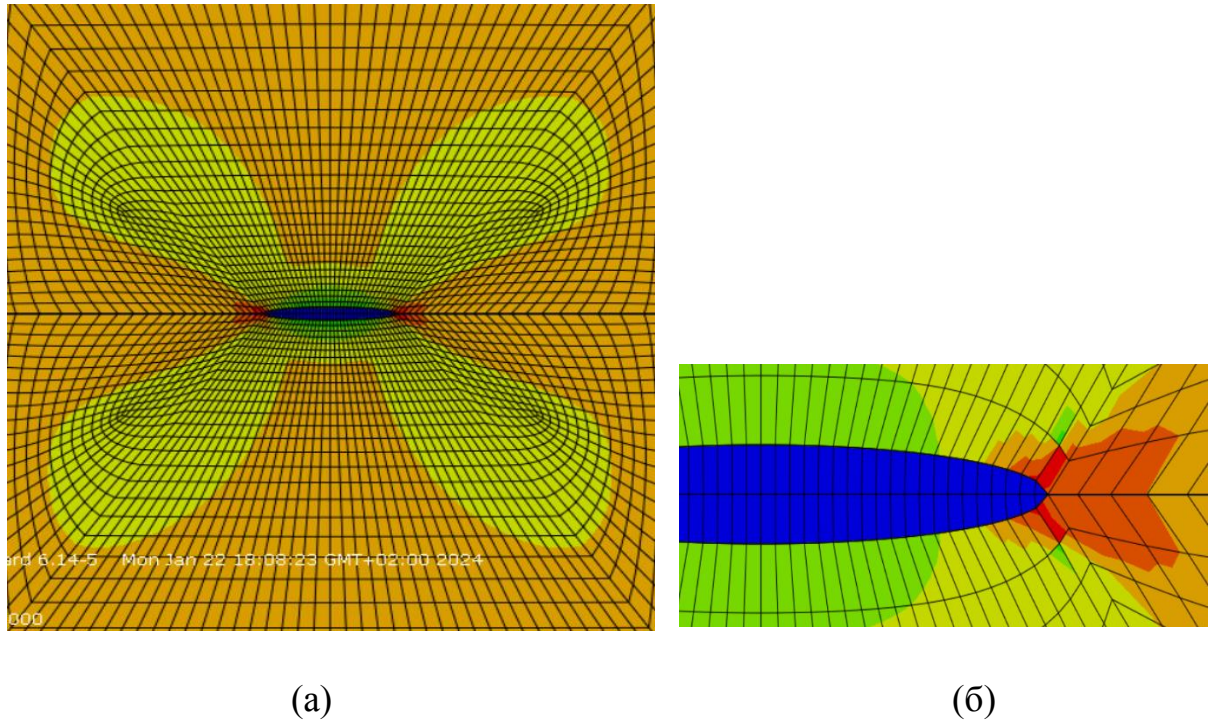


Рис. 4.3. Структура сітки у всій області (а) та в околі тріщини (б)

4.3 Результати розрахунків та їх аналіз

При проведенні розрахунків вважалось, що верхня підобласть виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу PZT-4, а нижня є п'єзоелектриком PZT-5. Властивості цих матеріалів в системі одиниць СІ задаються відомими матрицями жорсткості, п'єзоелектричних та діелектричних констант, які наведені в розділі III формулами (3.24), (3.25).

Пружні та п'єзоелектричні константи матеріалу в області тріщини вибирались в 10^6 раз меншими відповідних констант матеріалу PZT-4, а діелектричні константи варіювались. Значення l , що визначають розміри верхнього і нижнього прямокутників, вибиралось рівним 25мм, а півдовжина тріщини $b=5$ мм. Вважалось, що $\sigma=10^7$ Па, $\tau=0$, $d=0.01$ Кл/м², тобто, на

біматеріальну область діє розтягувальне напруження, перпендикулярне тріщині, а також електричний потік по напрямку осі x_3 .

Результати розрахунків, що отримані при різних значеннях діелектричної проникності тріщини наведені в графічній та табличній формах. Зокрема у другому стовпчику таблиці 4.1 наведені значення нормальної компоненти електричного потоку D_3 в області тріщини для $\varepsilon_r = 1$ (вакуум), $\varepsilon_r = 2.5$ (силікон), $\varepsilon_r = 80$ (вода) і $\varepsilon_r = 4000$ (повна електрична проникність)

Табл. 4.1. Зміна електричного потоку в області тріщини для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $d = 0.01 \text{ Кл/м}^2$ та різної діелектричної проникності заповнювача тріщини

№	ε_a	$100D_3, \text{ Кл/м}^2$ (МСЕ)	$100D_3, \text{ Кл/м}^2$ (Розділ 3)
1	ε_0	0.506	0.507
2	$2.5 \varepsilon_0$	0.611	0.626
3	$81 \varepsilon_0$	0.720	0.721
4	$4000 \varepsilon_0$	0.724	0.724

З таблиці 4.1 видно що розбіжність в результатах аналітичного і числового аналізу не перевищує 2,4%, а в більшості випадків вона є набагато меншою і складає біля 0, 2%.

Слід також відзначити, що одержані результати підтверджують припущення [77] про близький до постійного розподіл нормальної компоненти електричного потоку D_3 по області тріщини. Вказані розподіли по довжині тріщини показані на рис. 4.4 для тих же значень вхідних параметрів, що і в таблиці 4.1.

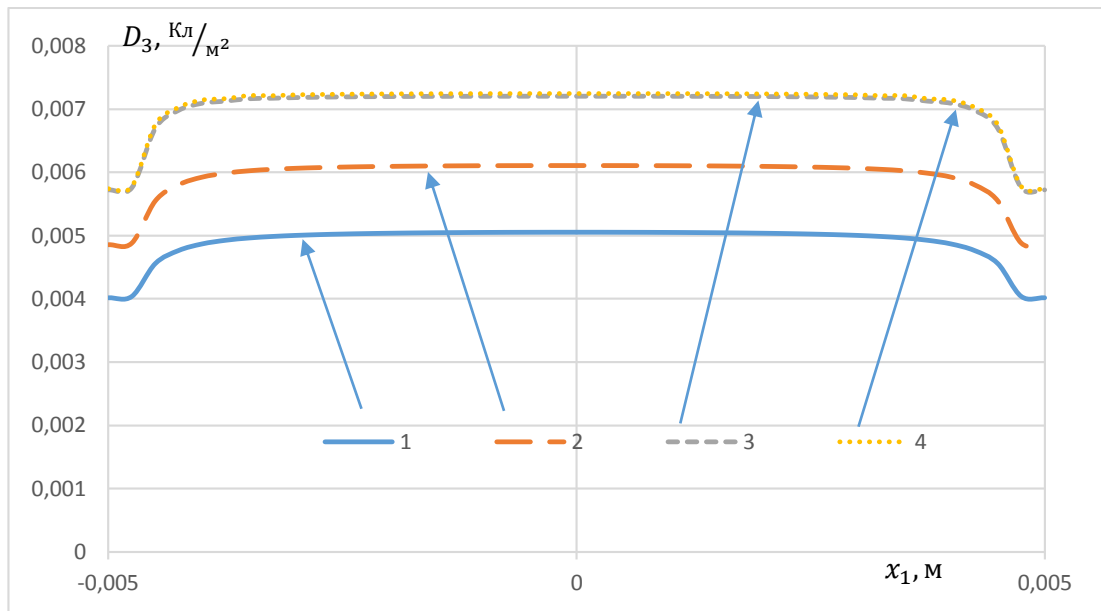


Рис 4.4. Розподіл нормальної компоненти електричного потоку D_3 по області тріщини

Із цього рисунку видно, що для кожного значення діелектричної проникності наповнювача тріщини нормальна компонента електричного потоку залишається майже постійною по всій довжині тріщини і лише безпосередньо біля її вершин має місце деяке відхилення від цього розподілу. Таке відхилення було встановлено і для аналітичного розв'язку і воно пов'язано з осциляційною особливістю, що має місце біля вершин міжфазної тріщини.

На рисунках 4.5 та 4.6 наведені, відповідно, розподіли стрибків переміщень $\langle u_2(x_1) \rangle = u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)$ та електричного потенціалу $\langle \varphi(x_1) \rangle = \varphi^+(x_1) - \varphi^-(x_1)$ вздовж тріщини.

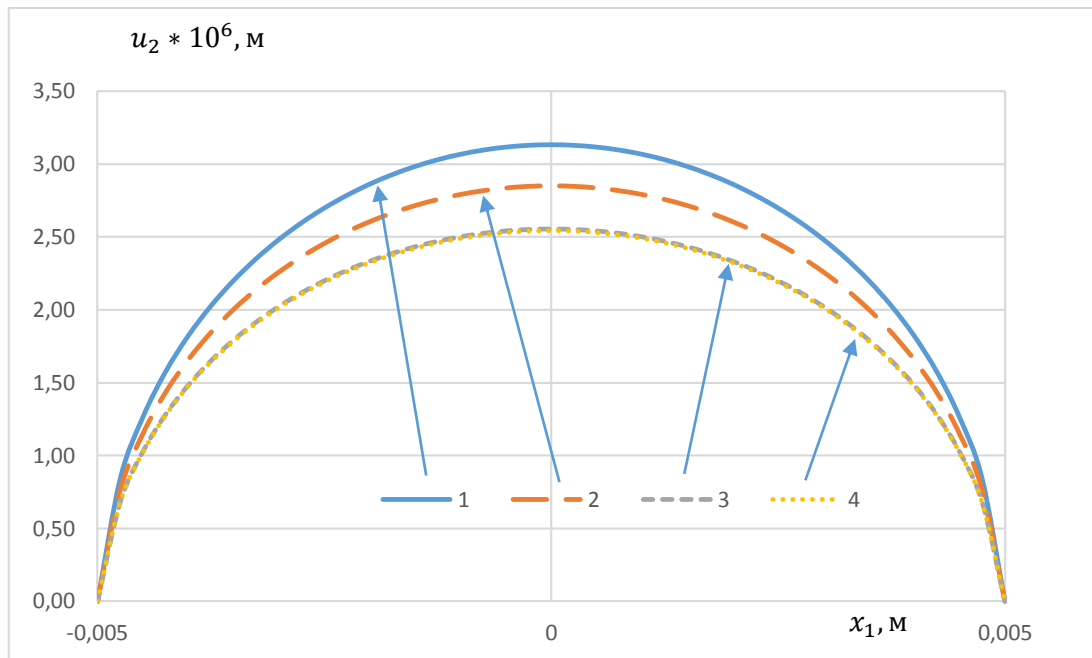


Рис 4.5. Розподіл стрибків переміщень вздовж тріщини

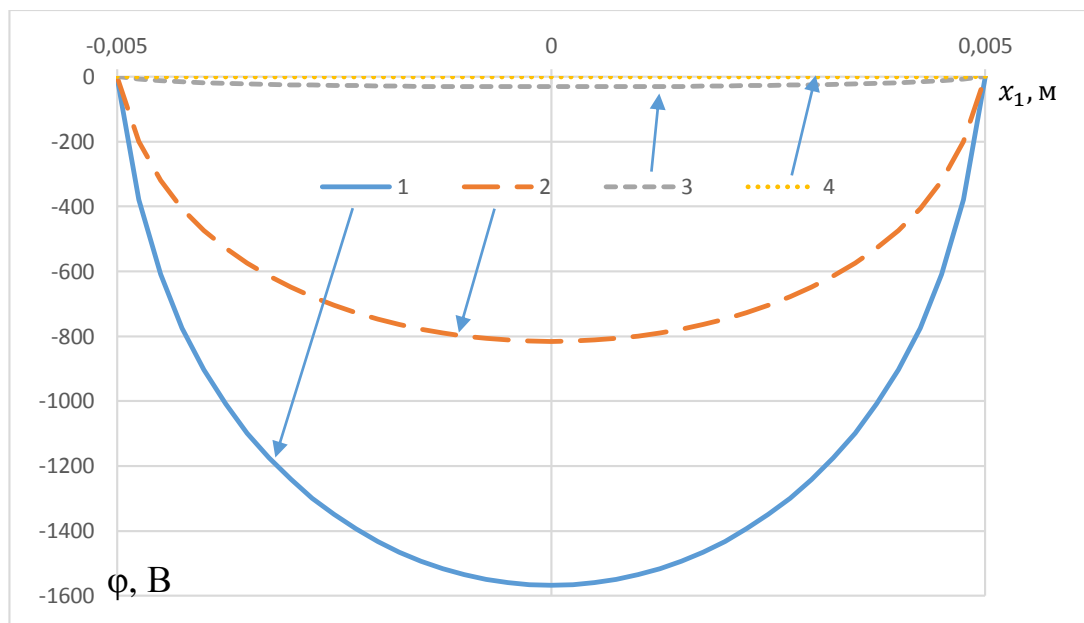


Рис 4.6. Розподіл стрибків електричного потенціалу вздовж тріщини

Видно, що графіки вказаних факторів для $\varepsilon_r = 80$ і $\varepsilon_r = 4000$ практично зливаються. Більш того, стрибок електричного потенціалу для вказаних значень діелектричної проникності близький до 0 у всіх точках тріщини. Ця обставина ще раз підтверджує той факт, що для $\varepsilon_r \geq 80$ тріщина стає практично електропроникною і не викликає різниці потенціалів на її берегах.

На рисунку 4.7 показані розподіли напружень на продовженні тріщини для таких же значень вхідних параметрів, як на попередніх рисунках. Вказані розподіли показані на відрізку межі поділу матеріалів, який дорівнює довжині тріщини. Видно, що отримані графіки зміни нормального напруження майже зливаються, що вказує на дуже слабку залежність напруження від електричної проникності середовища тріщини. З отриманого графіка також витікає, що напруження різко зростають при наближенні до вершини тріщини і практично сходяться до свого номінального значення, рівного заданому напруженню на нескінченності, на віддаленні від вершини, рівній довжині тріщини.

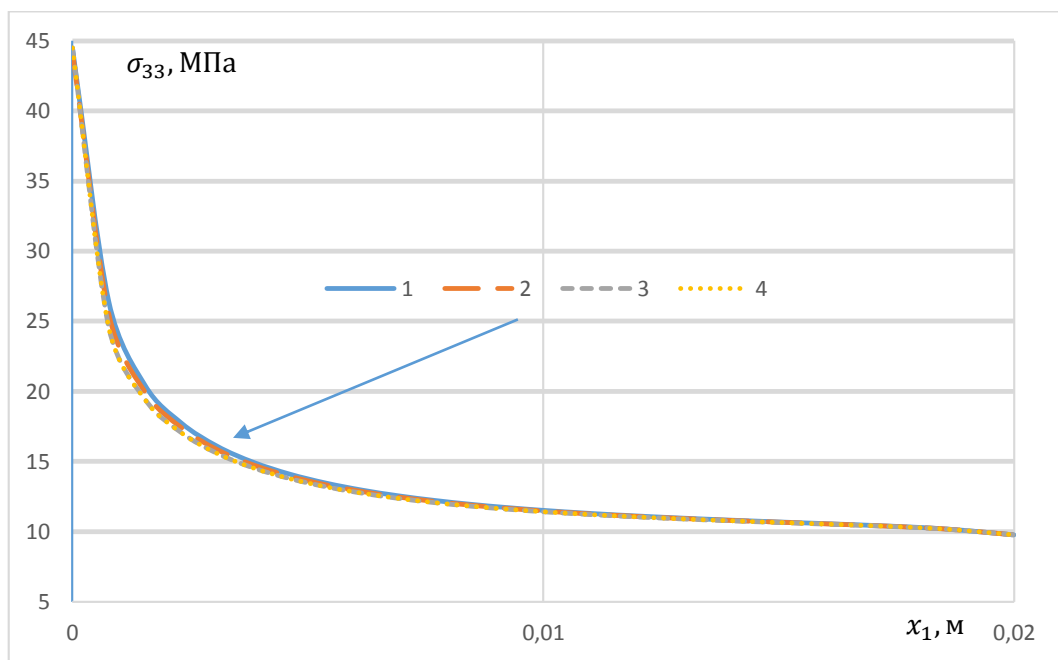


Рис 4.7. Розподіл напружень на продовженні тріщини.

4.4 Висновки до четвертого розділу

Досліджена тріщина на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів. Побудована розрахункова модель, що враховує діелектричну проникність середовища тріщини. Згідно з цією моделлю тріщина розглядається як дуже вузький еліпс, заповнений гіпотетичним матеріалом з дуже малими пружними та п'єзоелектричними константами, але реальними значеннями діелектричних

проникностей. Для конкретних матеріалів матриць та заповнювача тріщини і зовнішніх впливів виконано аналіз цієї моделі за допомогою методу скінченних елементів. Отримано, що значення електричного потоку через тріщину добре узгоджується з результатами аналітичного аналізу, виконаного на основі моделі тріщини зі скінченною електричною проникністю. Представлені графіки розподілів електричного потоку, стрибків переміщень та електричного потенціалу на берегах тріщини. Зокрема показано, що для заповнювача тріщини з діелектричною проникністю більшою або рівною діелектричній проникності води тріщина є практично електропроникною і різниця потенціалів на її берегах майже відсутня.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано дослідження нових задач для систем тріщин на межах поділу п'єзоелектричних матеріалів і отримано такі результати:

- 1) Розглянуто електроізолювану міжфазну тріщину у п'єзоелектричному біматеріальному пружному тілі під дією розтягувального зусилля та електричного зміщення. В припущенні, що тіло нескінченно велике, побудовано аналітичний розв'язок задачі, а для випадку тіла скінченних розмірів – чисельний. Задача розв'язана для плоского та просторового випадків. Отримані результати порівняні та виявлена добра їх узгодженість.
- 2) Для електропроникної та електропровідної моделей тріщин розроблено скінченно-елементну методику розрахунку п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною на його інтерфейсі. Розроблено схеми скінченно-елементної реалізації основних електростатичних граничних умов на берегах тріщини. Запропоновано модифікацію методу віртуального закриття тріщини для постпроцесорного обчислення швидкостей вивільнення енергії у вершинах тріщини.
- 3) Досліджено плоску задачу для тріщини зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами в рамках конденсаторної аналогії. Для нескінченно великої області побудовано аналітичний розв'язок задачі, а для скінченної – чисельний. Підтверджено, що електричний потік через тріщину практично не змінюється по її довжині. Досліджено залежності глобальних та локальних параметрів руйнування від діелектричної проникності заповнювача тріщини. Для випадку тріщини, набагато меншої характерного розміру області, проведено порівняння отриманих аналітичних і чисельних результатів, і отримане їх хороше узгодження.
- 4) В рамках моделі тріщини зі скінченною електричною проникністю досліджено біматеріальне п'єзоелектричне тіло для просторового

випадку. Спочатку проаналізовано задачу плоскої деформації середнього перерізу тривимірної області і визначено електричний потік через область тріщини, який використано як початкове наближення для просторової задачі. При аналізі останньої застосовано метод скінченних елементів в поєднанні з ітераційним алгоритмом для визначення електричного потоку через область тріщини. Завдяки такому підходу з високою точністю знайдено значення електричного потоку та одержано підтвердження щодо його квазірівномірного розподілу по берегах тріщини для будь-якого поперечного перерізу ортогонального її фронту.

- 5) Для тріщини на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів побудована нова розрахункова модель, що враховує діелектричну проникність середовища тріщини. Згідно з цією моделлю тріщина розглядається як дуже вузький еліпс, заповнений гіпотетичним матеріалом з дуже малими пружними та п'єзоелектричними константами, але реальними значеннями діелектричних проникностей. Для конкретних матеріалів матриць та заповнювача тріщини і зовнішніх впливів виконано аналіз цієї моделі. Отримано, що значення електричного потоку через тріщину добре узгоджується з результатами аналітичного аналізу, виконаного на основі моделі тріщини зі скінченною електричною проникністю.
- 6) Аналіз результатів проведених числових досліджень, у рамках розроблених моделей, дав можливість виявити і сформулювати нові ефекти та закономірності, серед яких найбільш вагомими є наступні:
 - а) для електроізолюваної тріщини між двома п'єзоелектричними паралелепіпедами розкриття досягають максимальних значень на бічних гранях, ортогональних фронту тріщини, і мінімальних значень – в її середньому перерізі.

- б) вид електростатичних граничних умов на берегах тріщини суттєво впливає на напружено-деформований стан і параметри руйнування п'єзоелектричного біматеріалу з тріщиною. Зокрема для електродованої тріщини електричне поле приводить до значних змін в формі її деформування і навіть до утворення макрозон контакту берегів тріщини
- в) для випадку тріщини зі скінченою електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами:
- має місце квазірівномірний розподіл електричного потоку вздовж берегів тріщини у плоскому випадку, а у тривимірному випадку такий розподіл зберігається для будь-якого поперечного перерізу, ортогонального фронту;
 - для тривимірному випадку розкриття тріщини зростає, а стрибок електричного потенціалу спадає при наближенні до граней тіла, ортогональних фронту тріщини.
 - при значному збільшенні електричної проникності тріщини швидкості вивільнення енергії прямують до одного значення незалежно від величини прикладеного електричного потоку. Це пояснюється тим, що при великих значеннях електричної проникності тріщини, фактично стає справедливою модель електропроникної тріщини, фізичні характеристики якої не залежать від електричного потоку.
- г) при розгляді тріщини у вигляді дуже вузького еліпса, заповненого гіпотетичним матеріалом з дуже малими пружними та п'єзоелектричними константами, але реальними значеннями діелектричних проникностей, результати знаходження електричного потоку через тріщину добре узгоджуються з відповідними результатами, отриманими в рамках конденсаторної аналогії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адлущкий В. Я., Лобода В. В. Скінченноеlementний аналіз пружно-пластичного стану площини з еліптичним включенням при наявності міжфазної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 1. – С. 65–74.
2. Адлущкий В.Я., Лобода В.В. Пружно-пластична контактна задача для міжфазної тріщини в площині з еліптичним включенням. VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». КНУ ім. Тараса Шевченка. 30–31 серпня 2021, с. 9.
3. Адлущкий В. Я., Левченко М.С, Лобода В.В. Визначення параметрів руйнування п'єзоелектричного біматеріалу при наявності інтерфейсної тріщини з використанням МСЕ / Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023", Львів, 2023 с.185.
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_26.pdf
4. Антипов Ю. А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения / Ю. А. Антипов // ПММ. – 1995. – №2. – С. 290–306.
5. Грилицкий Д. В. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезами / Д. В. Грилицкий // Прикладная механика. – 1966. – 2, №5. – С. 12–18.
6. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наукова думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
7. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями / А. Н. Гузь. – К. : Наук. думка, 1990. – 286 с. (Неклассические пробл. механики разрушения: В 4 т. Т. 2).
8. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь. – К. : Наук. думка, 1993. – 236 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. Т. 4).

9. Каминский А. А. Механика разрушения вязко-упругих тел / А. А. Каминский. – К. : Наук. думка. – 1980. – 159 с.
10. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / А. А. Каминский. – К. : Наук. думка, 1990. – 312 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 3 т. Т. 1).
11. Каминский А. А. Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 86–91.
12. Каминский А. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35. – С. 63–68.
13. Каминский А. А. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, И. В. Дудик // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 74–81.
14. Каминский А. А. О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, И. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23.
15. Каминский А. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред / А. А. Каминский, И. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикладная механика. – 2006. – 43 (53), № 10. – С. 28–41.
16. Кит Г. С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами / Г. С. Кит, М. В. Хай. – К. : Наук. думка, 1989. – 282 с.
17. Кит Г. С. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин / Г. С. Кит, О. В. Побережный. – К. : Наук. думка, 1992. – 216 с.
18. Комаров А. В. Анализ параметров разрушения электропроникающей трещины, движущейся с дозвуковой скоростью по границе раздела сред в пьезоэлектрическом биматериальном пространстве / А. В. Комаров,

- В. В. Лобода // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2004. – Вип. 8, Т. 2. – С. 118–128.
19. Кудрявцев Б. А. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная тоннельная трещина на границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 1. – С. 149–159.
20. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с.
21. Левченко М.С., Лобода В.В. Чисельно-аналітичний аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. –«Математичні проблеми технічної механіки-2018». Матеріали міжнародної наукової конференції. – Київ, Черкаси, Кам'янське. – 2018. – С. 60.
22. Левченко М. С., Гергель І. Ю., Лобода В. В. Про особливості деформування тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами / Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 86–97.
23. Левченко М.С., Лобода В.В. Чисельно-аналітичний аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. Міжнародна наукова конференція Математичні проблеми технічної механіки-2021. С. 42.
https://www.dstu.dp.ua/uni/downloads/maket_zbirnik_mater_conf_mptm2021.pdf.
24. Левченко М.С., Лобода В.В. Аналіз тріщини зі скінченою електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами / Вісник Національного технічного університету «ХПІ». 50 Серія: Динаміка і міцність машин. № 1. 2023, с. 45-50.
25. В.В. Лобода, О.І. Волошко. Чисельно-аналітичний аналіз міжфазної тріщини з зоною контакту. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. - Дніпропетровськ: ДНУ - 2008. – Вип. 12, т.2. - С. 50-58.

26. Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов / В. В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск, 1991. – С. 78–86.
27. Лобода В. В. Плоская задача про тріщину на лінії стику ортотропних пластин з тертям її берегів / В. В. Лобода, І. В. Харун // Фізико–хімічна механіка матеріалів. – 2001. – Т. 44, № 5. – С. 45–51.
28. Лобода В. В. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами / В. В. Лобода, А. Е. Шевелева // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82.
29. Лобода В. В. Контактна модель зовнішньої електро-проникної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі / В. В. Лобода, О. С. Філіпова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 3. – С. 77–85.
30. Меньшиков В. А. Круговая трещина в плоскости раздела упругих материалов под действием нормальной гармонической нагрузки / В. А. Меньшиков // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 166–170.
31. Меньшиков В. А. Предельные переходы в динамической задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред / В. А. Меньшиков, А. В. Меньшиков, И. А. Гузь // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44 (54), № 7. – С. 26–34.
32. Моссаковский В. И. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела / В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка // Прикладная математика и механика. – 1964. – № 6. – С. 1061–1069.
33. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
34. Острик В. І. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів / В. І. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.

35. Острик В. И. Контактная задача для межфазной полубесконечной трещины / В. И. Острик, А. Ф. Улитко // Мат. методы та фізико-механічні поля. – 2001. – Т. 44, № 3. – С. 88–95.
36. Острик В. И. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву / В. И. Острик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 58–65.
37. Острик В. И. Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь / В. И. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 1. – С. 84–94.
38. Павленко А. В. Решение контактной задачи для ортотропной полуполосы с учетом трения / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 85–90.
39. Павленко А. В. Решение задачи Галина для ортотропного прямоугольника / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, И. В. Щербина // Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпропетровськ. – 2005. – С. 34.
40. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наукова думка, 1968. – 246 с.
41. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К. : Наукова думка, 1976. – 456 с.
42. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М. : Наука, 1988. – 470 с.
43. Половинкина И. В. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами / И. В. Половинкина, А. Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 10–17.
44. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.

45. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
46. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
47. Симонов И. В. Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов / И. В. Симонов // ПММ. – 1984. – 48. – Вып.3. – С. 482–489.
48. Симонов И. В. О хрупком расклинивании кусочно–однородной среды / И. В. Симонов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, № 2. – С. 275–283.
49. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений / И. В. Симонов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
50. Сулим Г. Т. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами / Г. Т. Сулим, Д. В. Грилицкий // Физ.-хим. мех. материалов. – 1972. – Т. 8, № 11. – С. 58–65.
51. Улитко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жесткого соединения полупластин из различных материалов / А. Ф. Улитко // Совр. проблемы мех. сплошной среды. – Ростов-на-Дону. – 1995. – С. 185–193.
52. Улітко А. Ф. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів / А. Ф. Улітко, В. І. Острик // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 133–141.
53. Фильштинский Л. А. Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной / Л. А. Фильштинский, М. Л. Фильштинский // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 2. – С. 159–166.
54. Фильштинский Л. А. Моделирование физических полей в кусочно–однородных деформируемых телах / Л. А. Фильштинский. – Сумы : Изд. СГУ, 2001. – 451 с.

55. Харун І. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів / І. В. Харун, В. В. Лобода // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 103–113.
56. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. – 640 с.
57. Adlucky V. J., Levchenko M. S., Loboda V. V. Finite-element analysis of the parameters of fracture in a piezoelectric bimaterial with interface crack for various types of boundary conditions on its faces // J. Math. Sci. – 2024. – 279, No. 2. – P. 181–196. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07004-4>.
58. Atkinson C. The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) / C. Atkinson // Int. J. of Fracture. – 1982. – Vol. 18. – P. 161–177.
59. Benkaci N., Maugin G. J integral computation for piezo-ceramics // Revue Européenne des Éléments Finis. – 2001. – 10, – No 1. – P. 99–128. – <https://doi.org/10.1080/12506559.2001.11869241>.
60. Beom H. G., Atluri S. N. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media // International Journal of Fracture. – 2002. – 118. – P. 285–301. – <https://doi.org/10.1023/A:1023381215338>.
61. Clements D. L. A crack between dissimilar anisotropic media / D. L. Clements // Int. J. Engen. Sci. – 1971. – Vol. 9. – P. 257–265.
62. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // J. Appl. Mech. – 1977. Vol. 44. – P. 631–636.
63. Comninou M. The interface crack in a shear field / M. Comninou // ASME J. of Appl. Mech. – 1978. – Vol. 45. – P. 287–290.
64. Comninou M. Partial closure of cracks at the interface between a layer and a half-space / M. Comninou, J. Dundurs // Eng. Fract. Mech. – 1983. – Vol. 18. – P. 315–323.
65. Cun-Fa Gao, Minghao Zhao, Pin Tong, Tong-Yi Zhang. The energy release rate and the J-integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material // International Journal of Engineering Science. – 2004. – 42. – P.

2175–2192.

– <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.08.007>.

66. Deeg W. F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids / W. F. Deeg. – Ph.D. Thesis. – Stanford University – 1980.
67. Dundurs J. Some consequences of inequality conditions in contact and crack problems / J. Dundurs, M. Comninou // *Journal of Elasticity*. – 1979. – Vol. 9. – P. 71–82.
68. Dundurs J. An opportunistic analysis of the interface crack / J. Dundurs, A. K. Gutesen // *Int. J. Fracture*. – 1988. – Vol. 36. – P. 151–159.
69. Dunn M. L. The effect of crack faces boundary conditions on the fracture mechanics of piezoelectric solids / M. L. Dunn // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – Vol. 48. – P. 25–39.
70. Eshelby, J.D., Read, W.T. and Shockley, W. (1953). Anisotropic elasticity with application to dislocation theory. *Acta Metallurgica* 1, 251–259.
71. Fang D., Liu J. Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids / Tsinghua University Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – 416 p
72. Gao C.-F. Exact solution for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic hole or a crack / C.-F. Gao, W. X. Fan // *Int. J. Solid Struct.* – 1999. – Vol. 36. – P. 2527–2540.
73. Gutesen A. K. The interface crack in a tension field / A. K. Gutesen, J. Dundurs // *J. Appl. Mech.* – 1987. – Vol. 54. – P. 93–98.
74. Gutesen A. K. The interface crack under a combined loading / A. K. Gutesen, J. Dundurs // *ASME J. of Appl. Mech.* – 1988. – Vol. 55. – P. 580–586.
75. Gutesen A. K. The interface crack in a tension field: an eigenvalue problem for the gap / A. K. Gutesen // *Int. J. of Fracture*. – 1992. – Vol. 55. – P. 261–271.
76. Gutesen A. K. The interface crack under combined loading / A. K. Gutesen // *Int. J. of Fracture*. – 1993. – Vol. 60. – P. 349–361.

77. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // *Int. J. Solid Struct.* – 2006. – Vol. 43. – P. 1399–1413.
78. Govorukha V. B., Kamlah M. On contact zone models for an electrically limited permeable interface crack in a piezoelectric bimateria // *Int. J. Fracture.* 2010. Vol. 164. P. 133–146.
79. Gruebner O. Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium / O. Gruebner, M. Kamlah, D. Munz // *Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – P. 793–802.
80. Hao T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – Vol. 47. – P. 793–802.
81. Herrmann K. P. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // *Arch. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.
82. Herrmann K. P. On contact zone model for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric biomaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, V. B. Govorukha // *Int. J. of Fracture.* – 2001. – Vol. 111. – P. 203–227.
83. Huang Y. Intersonic crack growth in bimaterial interfaces: an investigation of crack face contact / Y. Huang, W. Wang, C. Liu, A. J. Rosakis // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1998. – Vol. 46. – P. 2233–2259.
84. Hwu C. Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks / C. Hwu // *Eng. Fracture Mech.* – 1993. – Vol. 45. – P. 89–97.
85. Kattis M. A. Nonplanar interfacial cracks in anisotropic bimaterials / M. A. Kattis // *Int. J. of Fracture.* – 1999. – Vol. 98. – P. 313–327.

86. Kharun I. V. A set of interface cracks with contact zones in combined tension-shear field / I. V. Kharun, V. V. Loboda // *Acta Mechanica*. – 2003. – Vol. 166. – P. 43–56.
87. Kharun I. V. A thermoelastic problem for interface cracks with contact zones / I. V. Kharun, V. V. Loboda // *Int. J. Solids Structures*. – 2004. – Vol. 41. – P. 159–175.
88. Kumar S., Singh R. N. Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings // *Acta Materialia*. – 1996. – 44, – P. 173–200.
89. Kumar S., Singh R. N. Influence of applied electric field and mechanical boundary condition on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials // *Materials Science and Engineering*. – 1997. – 231. – P. 1–9.
– [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00038-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00038-5)
90. Kumar S., Singh R. N. Effect of the mechanical boundary condition at the crack surfaces on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials // *Materials Science and Engineering*. – 1998. – 252. – P. 64–77.
– [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(98\)00629-7](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(98)00629-7)
91. Kuna M. Finite element analyses of crack problems in piezoelectric structures // *Comp. Materials Sci*. – 1998. – 13. – P. 67–80.
– [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(98\)00047-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(98)00047-0)
92. Kuna M. Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures // *Key Engineering Materials*. – 2007. – 348-349. – P. 629–632.
– <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.629>
93. Kuna M., Rao B. N. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials // *Int. J. of Solids and Struct*. – 2008. – 45. – P. 5237–5257. – <https://doi.org/10.1115/PVP2008-61875>.
94. Landis C. M. Electrically consistent boundary conditions for electromechanical fracture / C. M. Landis // *Int. J. Solids Struct*. – 2004. – Vol. 41. – P. 6291–6315.

95. Lapusta Y.M., Komarov A.V., Labesse-Jied F., Moutou Pitti R., Loboda V.V. Limited permeable crack moving along the interface of a piezoelectric bi-material // *European J. Mechanics A / Solids*. 2011. Vol. 30. P. 639–649.
96. Lapusta Y.M., Loboda V.V. Electro-mechanical yielding for a limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials // *Mech. Res. Communic.* 2009, Vol. 36, P. 183-192.
97. Levchenko M. S., Lapusta Y. M., Loboda V. V., On the method of simulating a crack filler between two piezoelectric materials. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій (Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures)* . – 2023. – вип. 37. – С. 94–104. (vol. 37. – P. 94–104.)
98. Levchenko M., Lapusta Y., Loboda V. 3-D analysis of a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials. *Procedia Structural Integrity* 59 (2024) 724–730. 10.1016/j.prostr.2024.04.103
99. Li Q, Chen Y. H., Solution for a semi-permeable interface crack between two dissimilar piezoelectric material // *J. Appl. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 833–844.
100. Li Q., Chen Y. H. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric/ piezoelectric bimetals // *Trans. ASME. J. Appl. Mech*, 2008. Vol. 75. P. 011010-1–011010-13.
101. Li W. On the crack face boundary conditions in electromechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates / W. Li, R. M. McMeeking, C. M. Landis // *European J. of Mechanics A/Solids*. – 2008. – Vol. 27. – P. 285–301.
102. V. Loboda, Y. Lapusta, V. Govorukha. Mechanical and electrical yielding for an electrically insulated crack in an interlayer between piezoelectric materials. *International J. Eng. Sciences*, 46, 2008, 260-272.
103. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks / V. V. Loboda // *Eng. Fracture Mech.* – 1993. – Vol. 44, № 4. – P. 573–580.

104. Loboda V.V., Lapusta Y.M., Sheveleva A.E. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding // *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. P. 1795-1806.
105. Loboda V., Mahnken R. An investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading // *Acta Mech.* – 2011. – 221. – P. 327–339. – <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0519-6>.
106. Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2014. – 51. – P. 63–73. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.09.012>
107. Loboda V.V, Sheveleva A.E., Chapelle F., Lapusta Y.M. Multiple electrically limited permeable cracks in the interface of piezoelectric materials // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Published online: 22 Feb. 2023. – <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2180695>
108. McMeeking R. M. Crack tip energy release rate for a piezoelectric compact tension specimen / R. M. McMeeking // *Eng. Fract. Mech.* – 1999. – Vol. 64. – P. 217–244.
109. McMeeking R. M. The energy release rate for a Griffith crack in a piezoelectric material // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – 71. – P. 1149–1163. – [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00135-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00135-8).
110. Men'shikov V. A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading / V. A. Men'shikov, A. V. Men'shikov, I. A. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 43, № 8. – P. 856–873.
111. Ni L. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: an analytical solution / L. Ni, S. Nemat-Nasser // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1991. – Vol. 39. – P. 113–144.
112. Ni L. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case / L. Ni, S. Nemat-Nasser // *Quarterly of Applied Mathematics.* – 1992. – Vol. 2. – P. 305–322.

113. Pak Y. E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials / Y. E. Pak // Int. J. of Fracture. – 1992. – Vol. 54. – P. 79–100.
114. Park S. B., Sun C. T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics // J. Am. Ceram. Soc. – 1995. – 78, No. 6. – P. 1475–1480. – <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1995.tb08840.x>
115. Park S. B., Sun C. T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics // Int. J. Fract. – 1995. – 70. – P. 203–216. – <https://doi.org/10.1007/BF00012935>.
116. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. Electromagnetoelasticity / Gordon and Breach Science Publishers, New York. – 1988. – 504 p.
117. Qin Q.-H. A closed crack tip model for interface cracks in thermopiezoelectric materials / Q.-H. Qin, Y.-W. Mai // Int. J. Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36. – P. 2463–2479.
118. Qu J. Three-dimensional interface cracks in anisotropic bimaterials: the non-oscillatory case / J. Qu, Y. Xue // J. of Appl. Mech. – 1998. – Vol. 65. – P. 1048–1055.
119. Quan W. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids / W. Quan, C. T. Sun // Int. J. Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, № 25. – P. 3317–3330.
120. Rice J. R. Plane problems of cracks in dissimilar media / J. R. Rice, G. C. Sih // J. of Appl. Mech. – 1965. – Vol. 32. – P. 418–423.
121. Ricoeur A. Electrostatic traction at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions / A. Ricoeur, M. Kuna // Mech. Research Communications. – 2009. – Vol. 36. – P. 330–335.
122. Ru C. Q. Electric-field induced interfacial cracking in multilayer electrostrictive actuators/ C. Q. Ru, X. Mao, M. Epstein // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – Vol. 46. – P. 1301–1318.
123. Ru C. Q. Effect of electrical polarization saturation on stress intensity factors in a piezoelectric ceramic / C. Q. Ru // Int. J. of Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36. – P. 869–883.

124. Rybicki E.F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // Eng. Fract. Mech. –1977. – 9. – P. 931–938.– [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(77\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90013-3).
125. Shen S. Crack propagation along the interface of piezoelectric bimaterial / S. Shen, T. Nishioka, S. L. Hu // Theor. And Appl. Fracture Mech. – 2000. – Vol. 34. – P. 185–203.
126. Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defects / H. Sosa // Int. J. Solids Structures. – 1991. – Vol. 28. – P. 491–505.
127. Stroh A. N. Steady state problems in anisotropic elasticity / A. N. Stroh // J. Math. Phys. –1962. – Vol. 41. – P. 77–103.
128. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.
129. Ting T. C. T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites / T. C. T. Ting // Int. J. Solids Struct. – 1986. – Vol. 22. – P. 965–983.
130. Ting T. C. T. Interface cracks in anisotropic bimaterial / T. C. T. Ting // J. Mech. Phys. Solids. – 1990. – Vol. 38. – P. 505–513.
131. Ting T. C. T. Recent developments in anisotropic elasticity / T. C. T. Ting // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 401–409.
132. Wang B. L. On the electrical boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics / B. L. Wang, Y. W. May // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – Vol. 41. – P. 633–652.
133. Wang X. D. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials / X. D. Wang // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 6031–6049.
134. Wang X. D. On the electroelastic behaviour of a thin piezoelectric actuator attached to an infinite host structure / X. D. Wang, S. A. Meguid // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 3231–3251.

135. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – № 49. – P. 199–204.
136. Xu X. On a plane crack in piezoelectric solids / X. Xu, R. K. N. D. Rajapakse // Int. J. Solids Struct. – 2001. – Vol. 38. – P. 7643–7658.
137. Zhou Z. G., Chen Z. T. The interaction of two parallel Mode-I limited-permeable cracks in a functionally graded piezoelectric material // European Journal of Mechanics A/Solids. 2008. Vol. 27. P. 824–846.
138. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method for solid and structural mechanics. – Vol. 2. – Oxford etc.: Elsevier, 2005. – 736 p.