

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЖУШМАН ВЛАДИСЛАВ ВІКТОРОВИЧ

УДК 539.3:004.8:681.3

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ В. В. Жушман

Науковий керівник:
Зайцева Тетяна Анатоліївна
кандидат технічних наук, доцент

Дніпро - 2024

АНОТАЦІЯ

Жушман В.В. Математичне та комп'ютерне моделювання контактної взаємодії тіл складної форми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2024.

Інтенсивний розвиток методів математичного та комп'ютерного моделювання як ефективних засобів дослідження складних процесів контактної взаємодії є однією з актуальних проблем прикладної математики. Завдяки цьому з'являються нові можливості для розвитку механіки деформівного твердого тіла, а також значно розширюються перспективи створення та практичного застосування систем автоматизованого проектування та експертних систем. Найважливішими з цього погляду є питання подальшого розвитку перспективних прикладних методів математичного та комп'ютерного моделювання стосовно розв'язання нових класів задач математичні постановки яких у найзагальнішому вигляді враховують складні фізико-механічні ефекти, що виникають в процесі деформування з урахуванням контактної взаємодії. Це дає можливість проведення більш повного і детального аналізу напружено-деформівного стану відповідальних деталей, елементів конструкцій, механізмів, будівель, їх фундаментів та ін., що піддаються складному силовому навантаженню, та отримання на його основі даних для більш точної оцінки ресурсних характеристик. Таким чином, створення математичних та комп'ютерного моделей і розв'язання на їхній основі конкретних завдань є однією з актуальних проблем сьогодення. Саме вирішенню таких проблем і присвячена дана дисертаційна робота.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дослідження, наукову новизну та практичну значущість отриманих результатів, основні положення, що виносяться на захист, а також наведено дані про структуру та обсяг дисертації.

У **першому розділі** було проведено аналіз публікацій за проблематикою дисертаційного дослідження, а саме, присвячених математичному та комп'ютерному моделюванню контактної взаємодії тіл складної форми. Проведений огляд наукових публікацій мав на меті вивчення сучасних підходів до питань моделювання контактної взаємодії тіл складної форми, розв'язання контактних задач ідентифікації форми площадок контакту, а також оцінку коректності побудованих моделей. Обґрунтовано вибір напрямку дослідження.

У **другому розділі** надано постановку задачі контактної взаємодії плоского абсолютно жорсткого двозв'язного в плані штампу та пружного півпростору. Використано алгоритм зведення задачі про вдавлювання в ізотропний пружний півпростір жорсткого штампу, коли площадка контакту займає двозв'язну область, контур якої складається з двох ліній, що не перетинаються та можуть бути неподібними, до послідовності задач для області контакту в формі кругового кільця. При цьому застосовується відомий розв'язок задачі про кільцевий штамп в формі подвійного ряду, коефіцієнти якого визначаються з рекурентних співвідношень. Використано метод розкладу за малим параметром, який може мати фізичне значення або будь-яке інше, наприклад, характеризувати форму і розміри площадки контакту. Наведено розвинення потенціалу простого шару при відображенні двозв'язної області інтегрування на кругове кільце за допомогою перетворення змінних інтегрування та перетворення координат полюса ядра. В результаті одержано послідовність аналогічних задач для кругового кільця для визначення функцій, що характеризують розподіл нормального тиску під штампом в формі некругового кільця, а також заглиблення, проекції векторів повороту штампу та ліній, які обмежують область контакту. Було проведено

розрахунки для штампів різної конфігурації, а саме у формі кільця границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників та штампу лінії контурів якого не є подібні. Отримано аналітичні розв'язки для двозв'язного близького до трикутного, шестикутного та восьмикутного кільцевих в плані штампів (за рахунок іншого розкладання у ряд контуру штампа).

Було розроблено спеціальне програмне забезпечення на мові програмування C++ для аналізу та візуалізації отриманих результатів. Наведено графіки розподілу нормального тиску під основою штампів різної конфігурації близьких до кільцевих. Проведено порівняння результатів з отриманими раніше аналітично.

У **третьому розділі** використовуючи систему автоматизованого проектування ANSYS були розроблені моделі контактної взаємодії плоских абсолютно жорстких штампів з пружним півпростором. Було створені моделі контактної взаємодії для одностов'язних та двостов'язних в плані штампів за формою поперечного перерізу близькою до круга, трикутника, шестикутника, кругового кільця, кільця, близького до трикутного та інші. Виконано порівняння отриманих результатів в середині зони контакту з результатами аналітичного розв'язку, яке продемонструвало, задовільне узгодження, що свідчить про адекватність запропонованих моделей. Потім на основі розроблених моделей, були створені групи таких, що мали різні типи і степені пошкоджень, або зношення.

Було розроблено програмне забезпечення під ANSYS на специфічній пропрієтарній мові програмування для інженерних рішень (APDL) для корегування параметрів комп'ютерної моделі через функціонал, який відсутній в поточному інтерфейсі користувача програмного комплексу ANSYS. Побудовані графіки розподілу напружень.

Результати чисельних експериментів були збережені у базі для подальшої передачі їх і систему CLIPS для створення експертної системи.

У **четвертому розділі** було розроблено експертну систему. Для створення і підтримки експертної системи було обрано програмний

інструмент CLIPS, що дозволило автоматизувати процес прийняття рішень на основі набору правил та знань, які були створені і використані для розв'язання конкретних завдань. Була організована база знань, як один із ключових компонентів експертної системи. Вона включила в себе інформацію про геометричні характеристики і властивості матеріалів штампів і півпростору, інформацію щодо напружено-деформівного стану системи штамп-пружний півпростір, а також набір правил і фактів. Побудована експертна система дозволила автоматизувати ідентифікацію поперечних перерізів штампів з плоскою підшвою, що тиснуть на пружний півпростір.

Для забезпечення зручності використання та інтеграції програмної системи CLIPS у розроблений проект на мові програмування C++, було створено додаткові бібліотечні файли. У підсумку узагальнюючий алгоритм для задач створення та аналізу математичних і комп'ютерних моделей контактної взаємодії абсолютно жорсткого циліндричного штампу із плоскою основою з пружним півпростором під дією стискаючої сили. У якості прикладів розв'язані задачі ідентифікації геометричної форми поперечних перерізів абсолютно жорстких штампів що тиснуть на пружний півпростір, але мають пошкодження, які заздалегідь не відомі.

Наприкінці роботи наведено **висновки** відповідно до мети і поставлених завдань дослідження та описано результати, що були отримані під час проведення дослідження.

***Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:* отримано аналітичні розв'язки для задачі про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого плоского двозв'язного штампу в формі близької до кільця. Вперше було розв'язано задачі для штампів у формі кільця, границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників у вигляді розкладання за новим малим параметром. Розроблено програмне забезпечення на мові C++ для аналізу і візуалізації аналітичного розв'язку. Розроблено модульний доданок

до ANSYS на специфічній пропрієтарній мові програмування для інженерних рішень (APDL) для корегування параметрів комп'ютерної моделі через функціонал, що відсутній в поточному інтерфейсі користувача програмного комплексу ANSYS. Було створено та протестовано експертну систему для розв'язання задач ідентифікації геометричної форми поперечних перерізів абсолютно жорстких штампів, що тиснуть на пружний півпростір, але мають пошкодження, які заздалегідь не відомі. Створено підхід для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штампу із застосуванням сучасних математичних алгоритмів та інформаційних технологій, а саме, вперше розроблено узагальнюючий алгоритм у якому використовуються аналітичні підходи, програмні системи ANSYS, CLIPS, і використано розроблені власні програмні додатки, які поєднують всі етапи дослідження в один комплексний продукт.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані під час розроблення ефективних методик, алгоритмів і комплексів прикладних програм, що дають змогу з порівняно малими часовими витратами проводити пошукові, оптимізаційні та діагностичні обчислювальні експерименти під час розв'язання контактних задач статички. Також, результати проведеного дослідження можуть бути використані дослідниками та інженерами при проектуванні конструкцій, які будуть перебувати наприклад під дією агресивного середовища, або в складних природних умовах, а розроблених узагальнюючий алгоритм і програмне забезпечення мають елементи універсальності та можуть бути використані для створення і аналізу інших моделей контактної взаємодії штампів з пружним півпростором.

Ключові слова: контактна задача, штамп, аналітичний розв'язок, асимптотичний метод, розподіл напружень, випадкові пошкодження, малий параметр, метод скінченних елементів, взаємодія, експертна система, узагальнюючий алгоритм, мова C/C ++, мова JavaScript, система CLIPS, програмний комплекс ANSYS.

ABSTRACT

V. V. Zhushman. Mathematical and computer modeling of contact interaction of bodies of complex shape. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on a specialty 113 Applied mathematics – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2024.

The intensive development of mathematical and computer modeling methods as effective means of studying complex processes of contact interaction is one of the most pressing problems of applied mathematics. This opens up new opportunities for the development of deformable solid mechanics, as well as significantly expands the prospects for the creation and practical application of computer-aided design and expert systems. From this point of view, the most important are the issues of further development of advanced applied methods of mathematical and computer modeling for solving new classes of problems, the mathematical formulations of which in the most general form take into account the complex physical and mechanical effects arising in the process of deformation with regard to contact interaction. This makes it possible to conduct a more complete and detailed analysis of the stress-strain state of critical parts, structural elements, mechanisms, buildings, their foundations, etc. subjected to complex power loads, and to obtain data based on it for a more accurate assessment of resource characteristics. Thus, creating mathematical and computer models and solving specific problems on their basis is one of the most pressing problems of today. This dissertation is devoted to solving such problems.

In the **introduction**, the relevance of the topic is substantiated, the aim and objectives of the study, the scientific novelty and practical significance of the results, the main provisions to be defended are formulated, and the structure and scope of the dissertation are presented.

The first chapter analyzed publications on the subject of the dissertation research, namely, those devoted to mathematical and computer modeling of contact interaction of bodies of complex shape. The review of scientific publications was aimed at studying modern approaches to modeling the contact interaction of bodies of complex shapes, solving contact problems of identifying the shape of contact areas, and assessing the correctness of the built models. The choice of the research area is substantiated.

In **the second chapter**, the problem of contact interaction between a flat, rigid, double-connected punch and an elastic half-space is presented. An algorithm is used to reduce the problem of pressing a rigid punch into an isotropic elastic half-space, when the contact area occupies a double-connected region whose contour consists of two non-intersecting lines that may be dissimilar, to a sequence of problems for a contact area in the form of a circular ring. In doing so, a known solution to the problem of a ring punch in the form of a double row is used, the coefficients of which are determined from recurrence relations. The method of expansion by a small parameter is used, which can have a physical value or any other, for example, to characterize the shape and size of the contact area. The development of the potential of a simple layer is presented when the double-connected domain of integration is mapped onto a circular ring by means of the transformation of integration variables and the transformation of the coordinates of the kernel pole. As a result, a sequence of similar problems for a circular ring was obtained to determine the functions characterizing the distribution of normal pressure under a punch in the form of a non-circular ring, as well as the recess, the projection of the punch rotation vectors and the lines that delimit the contact area. Analytical solutions were obtained for double-connected close to triangular, hexagonal and octagonal ring punches (due to a different series expansion of the punch contour).

Special software in the C++ programming language was developed to analyze and visualize the results. The graphs of the distribution of normal pressure

under the base of punches of different configurations close to the ring ones are presented. The results are compared with those obtained analytically earlier.

In **the third chapter**, using the ANSYS computer-aided design system, models of contact interaction of flat rigid punches with an elastic half-space were developed. Models of contact interaction were created for single- and double-connected punches with a cross-sectional shape close to a circle, triangle, hexagon, circular ring, ring close to a triangular one, and others. The results obtained in the middle of the contact zone were compared with the results of the analytical solution, which demonstrated a satisfactory agreement, indicating the adequacy of the proposed models. Then, on the basis of the developed models, groups were created that had different types and degrees of damage or wear.

Software was developed for ANSYS in a specific proprietary programming language for engineering solutions (APDL) to adjust the parameters of the computer model through functionality that is not available in the current user interface of the ANSYS software package. Stress distribution graphs were constructed.

The results of numerical experiments were saved in the database for further transfer to the CLIPS system to create an expert system.

In **the fourth chapter**, an expert system was developed. The CLIPS software tool was chosen to create and maintain the expert system, which allowed automating the decision-making process based on a set of rules and knowledge that were created and used to solve specific problems. A knowledge base was organized as one of the key components of the expert system. It included information on the geometric characteristics and material properties of the punches and half-space, information on the stress-strain state of the punches-elastic half-space system, as well as a set of rules and facts. The developed expert system made it possible to automate the identification of cross-sections of flat-soled punches pressing on an elastic half-space.

To ensure ease of use and integration of the CLIPS software system into the developed C++ project, additional library files were created.

As a result, a generalizing algorithm for the problems of creating and analyzing mathematical and computer models of contact interaction of a rigid cylindrical punch with a flat base with an elastic half-space under the action of a compressive force was developed. As examples, the problems of identifying the geometric shape of cross-sections of rigid punches pressing on an elastic half-space but having damage that is not known in advance are solved.

At the end of the work, **the conclusions** are drawn in accordance with the purpose and objectives of the study and the results obtained during the study are described.

The scientific novelty of the obtained results is as follows: Analytical solutions for double-connected close to triangular, hexagonal and octagonal ring-shaped punches were obtained (due to a different series expansion of the punch contour). Software was developed to analyze and visualize the analytical solution for pressing a rigid stamp in the plan of a shape close to the annular one into an elastic half-space, which was obtained earlier. A modular add-on to ANSYS in a specific proprietary programming language for engineering solutions (APDL) was developed to correct the parameters of the computer model through the functionality that is not available in the current user interface of the ANSYS software package. Computer models of contact interaction of flat rigid punches of complex shape with an elastic half-space were developed. For the first time, an integrated approach to solving engineering problems was proposed, combining ANSYS, CLIPS, software applications that combine all services into one integrated product, and a single trajectory was created to build a solution to the contact problem of the system for identifying the geometric shape of cross-sections of rigid punches pressing on an elastic half-space, but having damage that is not known in advance. An expert system has been created and tested to solve the problem of identifying the geometric shape of cross-sections of rigid punches pressing on an elastic half-space, but having damage that is not known in advance. For the first time, an algorithm is proposed to solve the problem of identifying the complex shape of cross-sections of flat-soled punches.

The practical significance of the obtained results is that they can be used in the development of effective methods, algorithms and complexes of application programs that allow for relatively low time costs to conduct search, optimization and diagnostic computational experiments in solving contact problems of statics. Also, the results of this study can be used by researchers and engineers in the design of structures that will be exposed to aggressive environments or in difficult natural conditions, and the developed generalizing algorithm and software have elements of versatility and can be used to create and analyze other models of contact interaction between a punch and an elastic half-space.

Keywords: contact problem, stamp, analytical solution, asymptotic method, stress distribution, random damage, small parameter, finite-element method, interaction, expert system, generalized algorithm, C/C++ language, JavaScript language, CLIPS system, ANSYS software package.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Зайцева Т.А., Жушман В.В. Про побудову скінченно-елементної моделі взаємодії двозв'язного в плані штампа з пружним півпростором. *Збірник наукових праць «Питання прикладної математики і математичного моделювання»*. Дніпро, 2021. – Вип. 21.–С.78-86.

<https://doi.org/10.15421/322108>

2. Жушман В.В. Інтелектуальні системи для вирішення обернених контактних задач. *Збірник наукових праць «Питання прикладної математики і математичного моделювання»*. Дніпро, 2023. – Вип. 23.–С.64-71.

<https://doi.org/10.15421/322307>

3. Жушман В.В., Зайцева Т.А. Комплексний підхід до розв'язання задачі взаємодії абсолютно жорсткого двозв'язного штампу та пружного півпростору. *Регіональний міжвузівський збірник наукових праць «Системні технології»*. 2024. Vol. 2 № 151. Р.133-143. <https://doi.org/10.34185/1562-9945-2-151-2024-12>.

Стаття у науковому фаховому виданні України, яке входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus

4. Zaytseva T., Zhushman V. Construction of mathematical and computer models for calculating contact characteristics of interaction between a rigid punch and an elastic half-space. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2024. 2 (7 (128)). Р 67–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.302792>

Статті у періодичних наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science Core Collection

5. Shyshkanova G., Zaytseva T., Zhushman V., Levchenko N., Korotunova O. Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics: Conference Series*, 2023. – V.2609, №1 – p. 012001. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001>

Тези доповідей

6. Zhushman V., Zaytseva T., Hurko O. The latest information technologies for modeling problems of mechanics of deformed solid *Сучасні науково-технічні дослідження у контексті мовного простору (англійською мовою): матеріали X Регіон. наук.-практ. конф. молодих науковців та студентів, 13 травня 2021р. м. Дніпро, 2021. С. 171-173*

7. Жушман В. В. Сучасні методи розв'язання класичних задач механіки деформованого твердого тіла. *Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених. м. Харків, 2021. С. 240-243.*

8. Зайцева Т. А., Жушман В. В. Застосування програмного комплексу ANSYS для моделювання контактної задачі механіки. *World science: problems, prospects and innovations. Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. Perfect Publishing. Toronto, Canada. 2021. Pp. 393-396.* <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2021/04/WORLD-SCIENCE-PROBLEMS-PROSPECTS-AND-INNOVATIONS-21-23.04.2021.pdf>

9. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Комп'ютерне моделювання взаємодії тіл складної форми з пружним півпростором. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2021): Матеріали XIX міжнародної науково-практичної конференції, 17-19 листопада 2021., м. Дніпро, 2021. С. 77.* <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2021/12/mpzis-2021.pdf>

10. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Комп'ютерне моделювання взаємодії тіл складної форми з пружним півпростором під дією позацентральної сили. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2022): Матеріали XX ювілейної міжнародної науково-практичної конференції, 23-25 листопада 2022., м. Дніпро, 2022.* С. 87. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2022/12/MPZIS-2022-1.pdf>
11. Жушман В. В. Рендерінг процесів взаємодії складнопрофільних тіл. *Виклики та проблеми сучасної науки.* м. Дніпро, 2023. Т. 1. С. 474–476. <https://fti.dp.ua/conf/2023/06047-2130/>.
12. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Експертні системи для розв'язання обернених контактних задач статички. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023): Матеріали XXI міжнародна науково-практична конференція до 105-річчя Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 22-24 листопада 2023., м. Дніпро, 2023.* С. 126-127. <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf>

ЗМІСТ

ВСТУП.....	17
РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ПРИСВЯЧЕНОЇ РОЗВ'ЯЗАННЮ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ТІЛ.....	25
1.1 Розвиток досліджень в області механіки контактної взаємодії	25
1.2 Огляд сучасних досліджень моделювання контактної взаємодії	31
1.3 Розв'язання задач ідентифікації форми площадки контакту	34
1.4 Висновки до розділу	39
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО В ПЛАНІ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПУ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ	40
2.1 Постановка задачі. Основні рівняння.	40
2.2 Зведення задачі для штамп у формі некругового кільця до послідовності задач для кругового кільця.	42
2.2.1 Перетворення границь контакту.....	42
2.2.2 Преведення області контакту до кругового кільця	44
2.2.3 Представлення інтегральних рівнянь рівноваги у вигляді розвинень за малим параметром	45
2.2.4 Отримання послідовності систем рівнянь для кругового кільця....	47
2.3 Автоматизація розрахункових аналітичних формул.....	49
2.4 Взаємодія штамп з основою у формі не кругового кільця з пружним півпростором	52
2.4.1 Взаємодія штамп з основою у формі кільця обмеженого лініями близькими до трикутника з пружним півпростором	52
2.4.2 Взаємодія штамп з основою у формі кільця обмеженого лініями близькими до багатокутників з пружним півпростором.....	56
2.5 Висновки до розділу	62
РОЗДІЛ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ.....	64

3.1 Постановка задачі	64
3.2 Чисельне моделювання контактних задач за допомогою програмного комплексу ansys	64
3.3 Опис обраного скінченного елемента	68
3.4 Опис розробленого програмного забезпечення на мові apdl	71
3.5 Аналіз отриманих результатів та перевірка моделі на адекватність	72
3.6 Висновки до розділу	85
РОЗДІЛ 4. РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФОРМИ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ШТАМПА	87
4.1 Постановка задачі	87
4.2 Загальний підхід до розв’язання контактної задачі як оберненої.....	88
4.3 Ідентифікація форми поперечного перерізу штампа шляхом застосування оптимізаційного підходу	90
4.4 Опис розробленого програмного забезпечення.....	98
4.5 Аналіз отриманих результатів	108
4.6 Висновки до розділу	112
ВИСНОВКИ.....	114
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	116

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

В процесі дослідження напружень і деформацій у деталях машин та елементах інженерних споруд є постійна необхідність у розв'язуванні контактних задач теорії пружності, які належать до числа актуальних наукових проблем механіки деформівного твердого тіла. Специфічність досліджень у області контактної взаємодії пов'язана з необхідністю побудови фізично адекватних математичних і комп'ютерних моделей, які б дозволяли досліджувати механічні ефекти, що виникають у задачах цього класу і складністю математичного аналізу мішаних задач теорії пружності, які формуються в рамках прийнятних математичних та комп'ютерних моделей. Наприклад, одним із першочергових завдань сучасного машинобудування є підвищення надійності та довговічності машин і приладів. Недостатня контактна міцність останніх, знижує експлуатаційні можливості машин, приладів і апаратів. Розв'язання такого завдання, значною мірою зумовлене подальшим удосконаленням методів розрахунку на міцність деталей машин і елементів інженерних споруд, застосуванням нових матеріалів, прогресивних технологій тощо. Розробленню методів розв'язання контактних задач і аналізу розподілу напружень присвячено велику кількість робіт українських і зарубіжних авторів.

Актуальність дослідження.

Розвиток техніки поставив проблему контактної взаємодії в низку актуальних задач сучасної механіки деформівного твердого тіла. Складність цих завдань зумовила велику кількість чисельних і аналітичних методів, які використовують під час їх вирішення. Для застосування сучасних методик розрахунку на міцність необхідне детальне вивчення напружено-деформівного стану елементів конструкцій з урахуванням умов їх навантаження, особливостей форми та розмірів зон контакту. Вирішення цих

проблем тісно пов'язано з використанням розв'язків контактних задач механіки деформівного твердого тіла.

Саме математичне та комп'ютерне моделювання контакту кількох тіл, що деформуються, має важливе прикладне значення для багатьох інженерних розрахунків, що зумовлює актуальність розроблення ефективних обчислювальних алгоритмів, які враховують можливий нелінійний характер взаємодії лінійно-пружних тіл. При цьому останнім часом дедалі частіше виникає необхідність формулювання контактних взаємодій коли можуть бути невідомі границі і форма площадок контакту.

На сьогодні ще не існує загального математичного апарату для розв'язання задач такого класу з різними умовами контакту та різними формами контактуючих тіл. Кожна постановка потребує розробки свого методу розв'язку.

Тому актуальними є проблеми створення нових математичних та комп'ютерних моделей, нових підходів та ефективних алгоритмів, також розробки на їх основі сучасного прикладного програмного забезпечення для розв'язання контактних задач теорії пружності.

Мета і завдання дослідження. *Метою даної роботи є побудова нових математичних та комп'ютерних моделей контактної взаємодії тіл складної форми, подальший розвиток аналітичних підходів до розв'язання просторових контактних задач, а також створення узагальнюючого алгоритму для організації комплексного підходу в задачах моделювання контактної взаємодії. А саме, шляхом поєднання за рахунок створеного власного програмного продукту наступних кроків – отримання аналітичних рішень, проведення чисельних експериментів, створення експертної системи для ідентифікації форми площадки контакту із застосуванням сучасного прикладного програмного забезпечення.*

Досягнення поставленої мети потребує вирішення таких *завдань*:

- для задачі про тиснення на однорідний та ізотропний пружний півпростір абсолютно жорсткого плоского двозв'язного штампа отримати

розрахункові формули аналітичного розв'язку задач для плоских штампів близьких до кільцевих в плані (кільця границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників). Застосувати змінене представлення меж області контакту;

- розробити відповідне програмне забезпечення для проведення розрахунків і аналізу отриманих аналітичних результатів;

- побудувати скінченно-елементні моделі процесу контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампу з пружним півпростором за допомогою програмного комплексу ANSYS. Провести комп'ютерне моделювання для розрахунку напружено-деформівного стану. Створити групи скінченно-елементних моделей для врахування можливих пошкоджень у разі перебування системи в складних природних умовах або в агресивному середовищі. Таким чином сформувати базу знань з метою подальшого застосування її у експертній системі;

- сформулювати проблему для контактної задачі про взаємодію абсолютно жорсткого штампа і пружного півпростору для випадку коли область контакту є заздалегідь невідомою; розробити підхід для розв'язання цієї задачі із застосуванням сучасних математичних алгоритмів та інформаційних технологій; створити експертну систему для ідентифікації форми поперечного перерізу штампу за допомогою програмного засобу CLIPS, провести визначення контуру пошкодженої форми штампу із застосуванням розробленого інструментарію;

- розробити узагальнюючий алгоритм розв'язання контактної задачі для випадка взаємодії абсолютно жорсткого штампа з пружним півпростором.

Об'єктом дослідження є процеси деформування пружного півпростору під дією поверхнево навантажених абсолютно жорстких штампів різної форми.

Предметом дослідження є компоненти напружено-деформованого стану пружного півпростору, що знаходиться під дією поверхневого

навантажених абсолютно жорстких штампів різної форми, а також ідентифікація площадок контакту для випадків її невідомості.

Методи дослідження: Для побудови і аналізу математичних та комп'ютерних моделей контактної взаємодії складних тіл застосовано аналітичні методи лінійної теорії пружності, обчислювальної математики, об'єктно-орієнтованого програмування, метод скінченних елементів, об'єктно-орієнтованого програмування.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- Отримано аналітичні розв'язки для задачі про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого плоского двозв'язного штампа в формі близької до кільця (трикутного, шестикутного і восьмикутного, коли межі області контакту не є подібними). **Вперше** було розв'язано задачі для штампів у формі кільця, границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників у вигляді розкладання за новим малим параметром.
- Розроблено **нове** програмне забезпечення на мові C++ для аналізу і візуалізації аналітичного розв'язку про вдавлювання в ізотропний пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого штампу поперечний переріз якого займає двозв'язну область. Наведено відповідні порівняльні результатами.
- **Вперше** розроблено програмне забезпечення під ANSYS на специфічній пропрієтарній мові програмування для інженерних рішень (APDL) для корегування параметрів комп'ютерної моделі через функціонал, який відсутній в поточному інтерфейсі користувача програмного комплексу ANSYS.
- Було створено та протестовано експертну систему для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штампу, що діє на пружний півпростір. Для цього **вперше** було застосовано програмну

систему CLIPS і розроблено програмне забезпечення на мові програмування COOL під CLIPS.

- **Вперше** було створено підхід для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штапу із застосуванням сучасних математичних алгоритмів та інформаційних технологій, а саме, розроблено узагальнюючий алгоритм у якому використовуються аналітичні підходи, програмні системи ANSYS, CLIPS, і розроблено власні програмні додатки, які поєднують всі етапи дослідження в один комплексний продукт.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується використанням загальновизнаних положень, співвідношень та методів механіки деформівного твердого тіла; гарантується суворістю використовуваного математичного апарату і підтверджується порівнянням результатів з отриманими раніше з використанням різних методів, а також з відомими результатами обчислювальних експериментів і експериментальними даними інших авторів. Сформульовані в роботі припущення обґрунтовані як шляхом їх змістовного характеру, так і методами математичного моделювання.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблені в дисертаційній роботі нові математичні та комп'ютерні моделі, алгоритми і підходи можуть бути використані як при проведенні обчислювальних експериментів, так під час розв'язання практичних інженерних задач. Вони можуть служити науково-методичною основою для перспективних розробок в механіці контактної взаємодії для розв'язання актуальних задач, що виникають в інженерній практиці при розрахунках контактних характеристик в конструкціях та спорудах.

Проведені дослідження та їх результати складають відповідний розділ ініціативних науково-дослідних робіт «Математичне та комп'ютерне моделювання контактної взаємодії тіл складної форми» (№ держреєстрації 0119U101053, 2019-2021 р.р.), «Детерміновані та стохастичні алгоритми

комп'ютерного моделювання об'єктів та процесів різної природи» (№ держреєстрації 0122U001467, 2022-2024 р.р.) при кафедрі комп'ютерних технологій у відповідності до тематичних планів науково-дослідних робіт

Теоретичні та практичні положення роботи стали складовою частиною навчальної дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика ОП «Комп'ютерне моделювання та технології програмування» та дисципліни «Методи Computer modeling and simulation» (для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика ОП «Інформатика»). Окремі теоретичні результати було використано при виконанні курсових та дипломних робіт студентами факультету прикладної математики.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 5 статей. Дві з них у виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus [125, 141]. Три статті – у виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України категорії Б [11, 17, 20]. Усі результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику Т. А. Зайцевій. У працях, що опубліковані у співавторстві, здобувачеві належить:

[20] – розроблено програмне забезпечення для розрахунку контактних характеристик взаємодії жорсткого штампу у формі близького до трикутного кільця з пружним півпростором; побудовано скінченно-елементні моделі для системи штамп – пружній півпростір, штамп у поперечному перерізі займає форму близьку до трикутних кілець різної ширини; проведені числові експерименти; виконане порівняння з результатами отриманими раніше, [125] – розроблено програмне забезпечення для розрахунку контактних характеристик взаємодії жорстких штампів у формі близької до кільця з пружним півпростором; отримано аналітичний розв'язок для деяких форм штампів; проведені числові експерименти; надані результати комп'ютерного

модельовання системи штамп – пружний півпростір, яке проведено на основі розробленого програмного додатку, [141, 17] – створено експертну систему для розв'язання контактної задачі взаємодії двозв'язних та однозв'язних штампів з пружним півпростором для ідентифікації геометричної форми основ штампів яка була змінена в результаті пошкоджень; розроблено програмне забезпечення для комп'ютерного модельовання контактної взаємодії, забезпечення комунікації між експертною системою і даними та для реалізації аналізу отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2021-2024 років, доповідались і обговорювались на семінарі «Актуальні питання оптимізації та дискретної математики» при Науковій раді НАН України з проблеми «Кібернетика», який функціонує при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара, а також на міжнародних конференціях:

1. Матеріали X Регіональної науково-практичної конференції молодих науковців та студентів «Сучасні науково-технічні дослідження у контексті мовного простору (англійською мовою)», 13 травня 2021р., м. Дніпро.
2. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених «Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО: історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти», 08-09 квітня 2021р., м. Харків.
3. Proceedings of the 8th International scientific and practical conference «World science: problems, prospects and innovations», Toronto, Canada. 2021.
4. Матеріали XIX міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2021)» 17-19 листопада 2021 р., м. Дніпро.

5. Матеріали XX ювілейної міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2022)», 23-25 листопада 2022 р., м. Дніпро.

6. The International Scientific and Practical Conference, combined with scientific and pedagogical internship «Challenges and issues of modern science». 4 червня 2023р., м. Дніпро.

7. Матеріали XXI міжнародна науково-практична конференція до 105-річчя Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023)». 22-24 листопада 2023 р., м. Дніпро.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційні дослідження здійснювалися у відповідності до планів наукових досліджень кафедри комп'ютерних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках наукових тем «Математичне та комп'ютерне моделювання контактної взаємодії тіл складної форми» (№ держреєстрації 0119U101053, 2019-2021 р.р.), «Детерміновані та стохастичні алгоритми комп'ютерного моделювання об'єктів та процесів різної природи» (№ держреєстрації 0122U001467, 2022-2024 р.р.) при кафедрі комп'ютерних технологій у відповідності до тематичних планів науково-дослідних робіт Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел, що містить 144 найменувань на 16 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 131 сторінка, обсяг основного тексту – 114 сторінки. Робота містить 30 рисунків та 1 таблицю.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, кандидату технічних наук, доценту Зайцевій Тетяні Анатоліївні за постійну увагу, доброзичливе ставлення та допомогу в роботі.

Розділ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ПРИСВЯЧЕНОЇ РОЗВ'ЯЗАННЮ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ТІЛ

1.1 Розвиток досліджень в області механіки контактної взаємодії

Механіка контактної взаємодії тіл представляє собою вагомому частину механіки суцільного середовища, що активно розвивається та постійно перебуває в центрі сучасних досліджень. Цю важливість можна обґрунтувати тим, що всі конструкції та механізми складаються з тим чи іншим чином контактуючих елементів, а розподіл контактних зусиль між цими елементами заздалегідь невідомий. Контактні задачі можна вважати ключовими в рамках механіки деформівного твердого тіла в зв'язку з тим, що контакт є основним засобом передачі зусиль [5, 6, 9, 25, 26, 33, 35, 39, 51, 54, 80, 82, 94, 111, 112].

Можна вважати, що перші класичні дослідження контактної взаємодії твердих тіл були проведені Г. Герцем (H. Hertz) [92] та Я. Буссінеском (J. Boussinesque) [74]. Г. Герц перший отримав розв'язок контактної задачі взаємодії двох пружних параболоїдів [92], надав формули, що описують площадку контакту та розподіл контактних тисків. При цьому Герц виходив з наступних припущень: лінійна пружність та ізотропність взаємодіючих тіл; малість площадки контакту в порівнянні з розмірами кожного з тіл; тертя на поверхні контакту відсутнє. Наступні п'ятьдесят років можна охарактеризувати як етап активної розробки та утвердження математичної основи теорії контактних задач. Протягом цього періоду були опубліковані наукові праці дослідників, в яких розв'язувалися задачі, пов'язані з експериментальною перевіркою теорії Герца, її подальшим розвитком і застосуванням у інженерній практиці.

На початку XX століття теорія контактних задач отримала свій розвиток у роботах С.А. Чаплигіна, О. М. Динника [9] та інших. Н.І. Мусхелішвілі, І.Н. Векуа, Н.П. Векуа, Д. І. Шерманом [47] було запропоновано використання методів функцій комплексного змінного. Такий підхід мав свій розвиток у роботах Л.О. Галіна [5], С.Г. Міхліна [30],

Г.М. Савіна, Д. І. Шермана та інших. Значний внесок в теорію просторових змішаних задач було зроблено А. І. Лур'є [26], І. Я. Штаерманом [50, 51], Л. О. Галінім [5].

З середини ХХ століття можна виділити декілька основних напрямків в розробці математичних підходів до вирішення проблем контактної взаємодії. В роботах, Я.С. Уфлянда [45], І.І. Воровіча, А.Ф. Улітка [43, 44], Н.М. Бородачева [3, 4] та інших запропоновано зведення задачі до деяких парних або потрійних функціональних рівнянь, що тим чи іншим чином перетворюються в інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, розв'язання яких відбувається наближеними методами. За допомогою методу власних векторних функцій А.Ф. Улітко [43, 44] одержано ряд важливих результатів в просторових задачах теорії пружності.

А. І. Лур'є [26] висвітлив фундаментальні принципи теорії пружності, включаючи основні рівняння рівноваги та руху твердого тіла в умовах деформації, а також складніші аспекти, зокрема розрахунки напружено-деформівних станів. Розглянуто основні закони теорії пружності, включаючи закон Гука, і досліджено властивості матеріалів, які впливають на їх поведінку при деформації. Крім того, надано оцінки прикладним аспектам теорії пружності, зокрема розрахункам напруження в конструкціях та інженерних застосуваннях.

Задачі про жорсткий штамп, вдавнений у пружний півпростір, широко застосовувані для розрахунку балок, плит, фундаментів, що лежать на пружній основі і є настільки жорсткими порівняно з основою, що їх деформаціями можна знехтувати при розрахунку нормальних напружень. Важливою проблемою є прогнозування осідань і кренів конструкцій, що експлуатуються, у випадку складних, наприклад, інженерно-геологічних умов. Крім того, в процесі експлуатації, конструкції піддаються різного роду місцевим навантаженням, які часто передаються через підсилюючі елементи (ребра жорсткості, облицювання, стрижневі системи – рами і ферми). Наявність кронштейнів, патрубків, різноманітних опор і кріплень, а також

інших конструктивних елементів також призводить до виникнення локальних навантажень. Л.О. Галінім була розглянута задача про вдавлювання в пружний півпростір штампу з плоскою основою довільної форми в плані [5]. Для установлення залежності між переміщенням штампу та діючою на нього силою отримані аналітичні вирази.

В.І. Моссаковським отримано загальний розв'язок задачі про визначення тиску під круговим в плані штампом, обмеженим довільною поверхнею, без урахування тертя [31]. В цьому випадку запропоновано просторову задачу теорії потенціалу для гармонічної функції, звести до плоскої. Потім шляхом інтегральних перетворень перейти до задачі лінійного спряження. При вирішенні задачі лінійного спряження пропонується застосування розвинення за малим параметром, величина якого пов'язана з геометричними характеристиками штамп. У роботі [32] В. І. Моссаковський та В.С. Губенко розглянули математичні моделі і умови, що характеризують розподіл контактного тиску між кільцевим штампом і поверхнею пружного півпростору.

І. Я. Штаерманом запропоновано враховувати шорсткість контакту [51]. В роботі досліджено математичні моделі, що описують залежність між контактним тиском, деформаціями та геометричними параметрами тіл, що знаходяться у контакті. Він розглядає різноманітні умови контакту, такі як гладкі та негладкі поверхні, наявність тертя та інші фактори, що впливають на поведінку системи.

Підходи до розв'язання просторових задач контактної взаємодії довільного у плані штамп з пружним півпростором з урахуванням тертя і шорсткості наведені у роботі [22, 36, 37]. Також багато уваги приділяється пошуку рішень задач для взаємодії тіл складної форми [42]. В роботі В. Т. Грінченко, А. Ф. Улітко [7] задача про кільцевий в плані штамп одержала свій подальший розвиток. Отримано розв'язок просторової контактної задачі для трикутного кільцевого в плані штамп за наявності тертя [47].

В.Л. Рвачевим, Н.С. Синєкопом, В.С. Проценко [38, 39] розвинуто структурний метод, що дозволив одержати наближені розв'язки для неklasичних областей.

С. Ф. Шишканова та А. Б. Ройтман [115] вперше отримали аналітичний розв'язок задачі для кільцевого штампа у вигляді подвійного ряду, в якому коефіцієнти обчислюються точно з простих рекурентних співвідношень. Створення такого підходу надало можливості впровадити використання достатньо простих математичних перетворень для пошуку нових аналітичних розв'язків класичних і неklasичних задач механіки.

Продовжуються активні дослідження контактних задач з використанням штампів канонічної в плані форми [27, 121]. Залишається вкрай актуальним застосування розроблених аналітичних методів розв'язання контактних задач механіки та пошук нових аналітичних методів [115, 116]. Робота [126] присвячена дослідженню контактного тиску під несиметрично деформованим кільцевим штампом за наявності та без наявності сил тертя.

В роботі О. Д. Шамровського, Е. М. Богданової [46] методом послідовних переміщень на основі стрижневої моделі суцільного середовища розв'язана задача про втискання штампу з прямолінійною основою в пружну скінченну область.

Значну увагу приділяють дослідженню вісесиметричних контактних задач. Продовжено дослідження контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружним півпростором. У роботі [52] Н. О. Ярецька описує контактну взаємодію абсолютно жорсткого штампа без початкового напруження та пружного півпростору з початковим напруженням без урахування сил тертя. В свою чергу, у роботі [1] С. Ю. Бабич і Н. О. Ярецька провели дослідження контактної задачі про взаємодію попередньо напруженого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковим напруженням. Автори [63] розглянули задачу про контактну взаємодію пружних тіл з початковими залишковими напруженнями без урахування сил

тертя. Випадок жорсткого циліндричного кільцевого штампа та пружного півпростору вивчався в роботі [64].

Не втрачають актуальності дослідження контактної взаємодії штампів різної форми. Наприклад, в роботі [132] представлена комплексна математична модель, яка надає можливість враховувати множинну контактну взаємодію елементів досліджуваних систем. Представлена модель має можливість розв'язувати задачі синтезу на основі нелінійних задач аналізу. Було запропоновано підхід із застосуванням поповнюваної бази даних розрахунків напружено-деформівного стану, що забезпечило точність і оперативність розв'язання задач даного класу. В роботі [40] Ю. В. Сачуком. і О. В. Максимуком наведено розв'язок задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми з пружним півпростором з урахуванням зношування матеріалу. У роботі [125] авторами досліджено проблеми вдавлювання штампів з плоскою основою, обмеженою двозв'язними близькими до багатокутників площадками контакту.

В роботі [122] запропоновано аналітичний метод, що базується на використанні розвинення потенціалу простого шару для областей близьких до кільцевих, який застосований до задач тріщиностійкості. Що дозволяє стверджувати про достатню універсальність запропонованого методу. Подальший розвиток метод отримав у роботі [126] для сімейства задач про тиснення штампів на пружний півпростір з формою поперечного перерізу близького до кільця. Дослідження стійкості розв'язку отриманого таким аналітичним шляхом, проведено у роботі [124].

Задачі зі складною геометрією контакту на сьогодні залишаються недостатньо вивченими [83]. Аналітичні розв'язки контактних задач без тертя для жорсткого штампа з основою, близькою до двозв'язних прямокутників, отримано в роботі [128]. Обидва випадки гладкої та шорсткої поверхонь пружного півпростору розглядалися окремо в роботах [126, 128]. У роботах застосовано чисельно-аналітичні методи розв'язання задачі для жорсткого штампа з двозв'язною основою, обмеженою лініями, близькими до

прямокутників, з урахуванням сил тертя та оптимізації форми для двозв'язаного штампа.

У роботі [136] дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Також важливі дослідження у цьому напрямку проведено рядом науковців [137]. Робота [2] присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та двох пружних півпросторів з початковими напруженнями. С. Ю. Бабичем, Н. О. Ярецькою, В. Ф. Лазарем і Н. П. Щеканем, розв'язано задачу для випадку нерівних коренів визначального рівняння. Саме за допомогою такого підходу можна вивчити вплив початкових (залишкових) напружень у двох пружних півпросторах та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень в області контакту.

Слід відзначити, що процес аналітичного розв'язку задач контактної взаємодії тіл є складним і не завжди можливим для проведення. Тому доцільно використовувати для цього чисельні методи розв'язку даної задачі, наприклад метод скінченних елементів [23, 24, 29, 62, 101, 103, 109, 118].

Тенденції в розумінні механізмів контакту твердих тіл у трибосистемах були узагальнені І. Г. Горячевою [84], Н. К. Мишкіним [104], та А. Н. Гузьом [8, 90], та інші [70, 71, 75, 85]. Авторами I. Zare, M. S. Allen розглянуто квазістатичні контактні задачі [140]. F Wang., H. Wei у своїй роботі [134] запропонували нову скінченно-елементна постановку контактної задачі між номінально гладкими тілами, але такими, що мають, мікроскопічні шорсткості на поверхні. Урахування тертя в процесі контакту тіл є одним з важливих питань. Під час явища тертя одночасно можуть відбуватися різні процеси такі як механічні, електричні, теплові, хімічні та вібраційні. B. Li, P Li., R Zhou., X Feng., K. Zhou, у роботі [100] розглянуто ускладнену постановку задачі із пошкодженнями під поверхнею.

1.2 Огляд сучасних досліджень моделювання контактної взаємодії

В своїй роботі Л.О. Галіним (L. A. Galin) і G. M. Gladwell [82], було представлено розв'язки контактних задач для класичних областей, що отримано з використанням аналітичних методів. Багато сучасних публікацій розвивають цю проблематику, наприклад, Дж. Р. Барбер (J. R. Barber) [68].

Задача про кільцевий штамп залишається актуальною в контактній механіці і сьогодні. I. Argatov, S. Nazarov [58] дослідили контактну задачу для вузького кільцевого в плані штампа методом узгоджених асимптотичних розкладів.

В роботі [28] Р. М. Мартиняк, О. В. Приходько отримали розв'язок для просторової контактної задачі про вдавлювання близького до плоского штампа з заокругленими краями в пружний шорсткий півпростір.

Математична модель контактної взаємодії двох прямокутних пластин була представлена в роботі [99]. Напружено-деформований стан аналізувався шляхом застосування метода ітерацій

В роботі [111] V. L. Popov, M. Heß, E. Willert для контактних задач надано деякі точні розв'язки, такі що придатні для практичного застосування. Крім того, авторами розглянуто контакт між трансверсально-ізотропними пружними матеріалами та функціонально-градієнтними матеріалами. Такі проблеми є предметом сучасних досліджень, особливо в галузі біомеханіки. I. Argatov, G. Mishuris [61] розробили комплексний і об'єднуючий підхід до механіки суглобового контакту з акцентом на контактну взаємодію тонких хрящових шарів без урахування тертя.

Залишається невирішеним питання коректності постановки задачі для складних областей контакту. Багато сучасних авторів розвивали і розвивають такі підходи [102] і розповсюджують їх на фізично різні задачі. Наприклад, математичний апарат для розв'язання задач про взаємодію зчепленого з основою і ковзного штампу, на колінеарні міжфазні тріщини з різними

електричними умовами на їхніх берегах. Авторами [102] створюються подібні математичні моделі, а також методики розв'язання, засновані на використанні подібного математичного апарату, що демонструє достатню універсальність застосовуваних аналітичних підходів. [60, 70, 71, 73, 75, 84, 85, 128].

Знаходження напружень і деформацій в елементах інженерних систем є традиційною задачею контактної механіки. Розв'язання таких задач характеризується значними математичними труднощами, як зазначено J. R. Barber в [68]. Це призводить до спрощення моделей, що не враховують деякі реальні характеристики поверхні, початкові напруження, тертя тощо. Загальний математичний апарат для розв'язання тривимірних задач з різними умовами та складною геометрією контакту досі не існує. Кожна постановка задачі вимагає розробки власного методу розв'язання. Чисельний аналіз розв'язків і побудова надійних та ефективних алгоритмів їх чисельної апроксимації з заданою точністю залишається актуальною задачею.

У зв'язку зі стрімким розвитком комп'ютерної техніки, методи скінченних елементів та граничних елементів широко використовуються в сучасній механіці [73, 101, 103, 139]. Однак застосування цих методів часто обмежене, оскільки контактні задачі мають сингулярності в рівняннях стану, які погіршують стійкість чисельного розв'язку, коли вихідна точка знаходиться в елементі, що інтегрується. Обробка сингулярності необхідна для кожної окремої постановки задачі. Ефективним методом регуляризації сингулярних і гіперсингулярних ядер для тривимірної задачі у пружній постановці визнається метод скінченних елементів L.F. Prado Leite, R.S. de Melo, F.C. da Rocha [113].

Робота [130] присвячена дослідженню математичних аспектів в механіці контактної взаємодії. M. Sofonea описує математичні моделі, які виникають у зв'язку з вивченням процесів контакту між тілами, де розглядаються нелінійні взаємодії та важливі аспекти їхнього аналізу. Окремий акцент у роботі приділяється механічній інтерпретації результатів,

що надає практичне застосування у контексті реальних проблем механіки контактної взаємодії.

Використання методу скінченних елементів надає можливість вирішувати більш складні задачі механіки. Існують спеціалізовані програми для реалізації методу скінченних елементів, такі як ANSYS [56], Abaqus, COMSOL, OpenFOAM і багато інших. Але зазвичай системи автоматизованого проектування накладають певні обмеження на безкоштовні версії, або не в повному обсязі розв'язують поставлену задачу, тому існують і такі системи автоматизованого проектування, які розробляються безпосередньо дослідниками [143].

В роботі [78] було представлено модель напружено-деформівного стану конструкції дорожнього покриття методом скінченних елементів за допомогою програмного комплексу ANSYS з різними варіантами розміщення транспортного навантаження. Дослідження режимів руйнування перфорованих сталевих балок представлено в [55].

Робота [138] присвячена обчислювальному аспекту механіки контактної взаємодії. V. A. Yastrebov детально розглядає основний механізм аналізу методів скінченних елементів, які використовуються при дослідженні контактних явищ. Значна складність у експериментальному вивченні контакту полягає в їхньому мультифізичному характері, і в обмеженому доступі до контактних поверхонь для непрямих спостережень.

Ключові аспекти теорії нелінійної механіки суцільного середовища та її використання в контактних задачах висвітлено P. Wriggers [135]. Також було представлено огляд сучасних методів моделювання контактів за допомогою методу скінченних елементів. Розглядаються різні методи дискретизації, приділяючи увагу малим і великим деформаціям при контакті. Велике значення приділяється алгоритмам, які є важливим елементом розробки ефективних методів для моделювання контактів. Особливий інтерес викликають адаптивні методи, які базуються на контролі помилок у методі

скінченних елементів та методах адаптації сітки, що спрямовані на досягнення надійних числових розв'язків контактних задач.

J. Bonari, M. R. Marulli, N. Hagmeyer, M. Mayr, A. Popp, M. Paggi в роботі [73] запропоновано підхід, що поєднує метод скінченних елементів для моделювання взаємодій на макрорівні з методом граничних елементів для рішення контактної задачі на мікрорівні.

1.3 Розв'язання задач ідентифікації форми площадки контакту

Продовжується розробка альтернативних шляхів розв'язання контактних задач, які дозволяють спростити моделювання та покращити ефективність розрахунків [34, 88, 105, 120]. Метод розв'язання обернених задач було запропоновано Н. А. Гук та Н. І. Ободан [88], де розглядалася задача теорії оболонок у варіаційній постановці. Цей метод набув свого розвитку у роботі [107], де авторами було розв'язано контактну задачу як обернену. В роботі [106] цей метод отримав розвинення і було розглянуто плоску контактну задачу теорії пружності для двошарової системи, яка знаходиться в умовах нормального розподіленого навантаження. Задачу сформульовано з урахуванням геометричної та конструктивної нелінійності у вигляді крайової задачі з додатковими умовами, що описують явища ковзання, відриву та зчеплення шарів на лінії контакту. Задачу ідентифікації додаткового силового впливу для запобігання явища відриву шарів для двошарової системи сформульовано як обернену задачу. За відомими характеристиками напружено-деформівного стану в зоні контакту визначено місце розташування та параметри додаткового зовнішнього навантаження.

У роботі [87] для розв'язання контактної задачі як оберненої застосовано варіаційний підхід, що базується на використанні модифікованого повного функціоналу Лагранжа, у випадку деформування тришарової системи з невідомими заздалегідь умовами на межі шарів. За допомогою характеристичних функцій приєднуються додаткові умови, що вказують на наявність або відсутність зон відриву і тертя та їх геометрію.

Розроблено ітераційний числовий алгоритм розв'язання задач теорії пружності з односторонніми зв'язками, що поєднує метод скінченних елементів, метод продовження за параметром навантаження і метод Ньютона–Рафсона. Чисельно досліджено односторонню контактну взаємодію шарів тришарового аеродромного покриття з урахуванням тертя.

Розв'язання контактної задачі, яка виникає при тисненні штампа в пружний півпростір з урахуванням тертя та наявності зон зчеплення, ковзання і відриву є достатньо складною. Тому використання підходу, що ґрунтується на постановці задачі як оберненої, з невідомими розмірами зон зчеплення, значно полегшило її розв'язання [34].

Продовжується дослідження контактних задач за наявності різних додаткових умов [40, 93].

Саме розв'язання обернених задач дозволяє отримати характеристики системи на основі непрямих спостережень за її станом. Невідомими характеристиками можуть бути функції, що описують навантаження, граничні чи початкові умови, геометрію області, коефіцієнти рівнянь. Відомою інформацією можуть бути, наприклад, напружено-деформівний стан системи. Інформація про нього можна отримати шляхом зняття з датчиків чи реальних, чи умовних. Основні підходи до розв'язання таких задач викладені у роботах А. М. Тихонова [131], Н. І. Ободан, Н. А. Гук [88], Y. Chen [77], H.W. Engl [79], G. Q. Xie, R. Kress [98], J. Q. Lin, M. Yamamoto, P. Wriggers [135].

Обернені задачі в варіаційній постановці відрізняються способом отримання розв'язку прямої задачі (аналітичний або числовий розв'язок), виглядом цільового функціоналу і методом пошуку мінімуму. Функціонал цілі може бути сформульований у вигляді, що забезпечує не тільки мінімум квадрата нев'язки, а й дозволяє врахувати додаткові умови, які визначаються фізичними принципами й приєднуються до функціонала з використанням множників Лагранжа.

Розв'язання обернених задач потребує застосування специфічних методів, таких як інтегральні рівняння, скінченно-елементні техніки, граничні інтегральні рівняння та варіаційні постановки. Дослідження в цьому напрямку також вказують на наявність використання нейронних мереж і генетичних алгоритмів при пошуку рішень складних обернених задач ідентифікації механічних властивостей матеріалів [81], геометричних характеристик тіл контактерів тощо.

Сьогодні експертні системи набули значного поширення в різних прикладних галузях людської діяльності для розв'язання таких завдань, як прогнозування, розпізнавання образів, діагностика, управління, автоматизоване проектування, прикладні задачі механіки та інші. Основним компонентом експертної системи є база знань, що містить набір правил ухвалення рішень, виражених у формі чітких або нечітких продукцій.

У розвиток теорії експертних систем внесли значний внесок дослідники і фахівці з усього світу у цій галузі знань. Зокрема, А. Г Венделін, Л. А. Заде [144], Ч. Карра, Ж. Касілас, М. Лозано, Ж. Л. Лор'єр, Дж. Ф. Люггер, Т. Саати, М. Сакава, К. Таунсенд, Е. Х. Тиугу, Дж. Ульман, Д. Уотермен, Ф. Херрера, Ф. Хоффман, П. К. Фішберн, Ф. Форсайт, Т. Фукуда, Р. Янг та інші.

Існують різноманітні програмні додатки для створення експертних систем, серед них CLIPS [76], Drools, Jess, Prolog, PyKnow, Expert System Shell (ESS), Сус., RapidMiner та інші. Ці програмні додатки надають різні підходи до створення експертних систем з використанням правил та інференції знань. Кожен з них має свої особливості і можливості, що дозволяє розробляти і створювати експертні системи в різних областях застосування.

Експертні системи можуть бути використані для побудови моделей контактних задач і вирішення їх на основі експертного досвіду та знань [110, 117, 119]. N. Bolloju C. Schneider, V. Sugumaran пропонують використання експертних систем, побудованих на основі знань для аналізу моделей та

описів використання, для виявлення невідповідностей та конфліктів між ними [72]. У цьому випадку система використовує знання, накопичене експертами, для автоматичного виявлення і виправлення можливих проблем. J. R. Rabunal, J. Dorado демонструють різні сценарії застосування експертних систем у реальних задачах і показують величезні переваги такого підходу до вирішення складних проблем [114]. Важко переоцінити застосування нейронних мереж у вирішенні завдань, пов'язаних з виявленням пошкоджень в структурах та будівлях [53]. M. Abambres, M. Marcy, G. Doz вважають, що у цьому випадку експертні системи можуть використовуватися спільно з нейронними мережами для вдосконалення процесу діагностики та прогнозування пошкоджень. Так для випадку перебування системи чи конструкції у складних природних умовах або в агресивному середовищі за певний час, можуть відбуватися пошкодження різного характеру. Тобто випадкові пошкодження, пошкодження типу зношення, або такі, що виникають за певним законом, наприклад, корозія. Тобто, за таких умов, з часом, розміри деталей, елементів конструкцій, зон контакту можуть змінюватися і стають невідомими [11, 141].

Багато реальних проблем і завдань, які виникають у контексті експертних систем, мають нечіткі або неоднозначні характеристики. Сучасний вже класичний підхід запропоновано Н.З. Шором (N. Z. Shor) [123] допомагає побудувати алгоритми мінімізації негладких функцій, що забезпечують формування ефективних методів розв'язання великомасштабних задач. Саме теорія оптимального розбиття допомагає ефективно управляти такими ситуаціями, дозволяючи краще розуміти та моделювати нечіткість в знаннях.

Робота [95] присвячена теорії оптимального розбиття множин у контексті задач розпізнавання образів. Автори досліджують основні підходи до розбиття наборів даних для максимізації ефективності розпізнавання. Зокрема, робота включає огляд теорії розпізнавання образів, математичні моделі для оптимального розбиття, застосування цих моделей для рішення

конкретних задач, а також аналіз ефективності різних підходів до оптимального розбиття даних.

Можливість застосування математичної теорії оптимального розбиття наборів в n -вимірному евклідовому просторі до вирішення проблем штучного інтелекту та розпізнавання образів досліджено в [96]. О. М. Кісельова, О. М. Притоманова та Л. Л. Гарт розглядають нестандартні задачі математичного програмування в нескінченновимірному просторі, які пов'язані з оптимальним розбиттям множин.

Теоретичні засади оптимального розбиття множин, які можуть бути використані для моделювання нечітких або неоднозначних знань у експертних системах було наведено в [97].

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova було запропоновано ефективний метод мінімізації концентрації контактних напружень і контролю їх розподілу з додатковим урахуванням невизначеностей навантаження і зносу, що також було продемонстровано на декількох практичних прикладах [67]. Метод оптимізації форми поверхні контактера і жорсткості матеріалу, заснований на методах оптимізації, був розроблений авторами Yi. Zhou, Q. Lin, J. Hong, N. Yang у роботі [142]. У [129] G. Shyshkanova, A. Walther запропоновано метод аналітичного розв'язку квазістатичної тривимірної контактної задачі про рух абсолютно твердого штампу вздовж межі пружного однорідного півпростору з урахуванням сил тертя. Також, використовуючи запропоноване розкладання потенціалу простого шару, була вирішена задача оптимізації розподілу тиску в контактній зоні, шляхом поділу її на дві послідовно розв'язувані задачі, як це було зроблено N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova в [67].

Н. В. Банічуком, I Argatov, Y.S. Chai, та іншими розглядались питання щодо пошуку оптимальної форми в механіці контактної взаємодії [57, 59, 60, 65, 69, 91, 108]. У якості невідомого при проектування обиралася форма штампу. N. Banichuk, S. Ivanova, E. Makeev запропоновано ефективний метод декомпозиції де розв'язання першої задачі вирішує проблему пошуку

розподілу напружень, а друга задача безпосередній пошук відповідної форми штампу [66, 67].

1.4 Висновки до розділу

Аналіз публікацій, наведених в першому розділі, показує, що пошук рішень контактних задач переважно відбувається аналітичними, чисельними, або чисельно-аналітичними методами. Треба відзначити, що розв'язання таких задач потребує побудови нових та ефективних математичних і комп'ютерних моделей, розробки нових підходів та алгоритмів, тому що всі існуючі на сьогодні методи є достатньо трудомісткими та ресурсоемними. Важливість подальшого розвитку цього напрямку обумовлена широким спектром можливих практичних застосувань результатів досліджень.

Все це дає підстави стверджувати, що за останні десятиліття зацікавленість у пошуку нових методів і шляхів розв'язання контактних задач тільки зростає. Стає очевидною необхідність у поєднанні вже існуючих класичних підходів із сучасними новітніми, що базуються на використанні систем, наприклад, експертних. Саме в галузі механіки, де задачі часто потребують складних та ресурсоемних розрахунків, аналізу великої кількості змінних, експертні системи можуть допомогти, наприклад, в діагностиці та моніторингу механічних систем, надаючи точні та надійні рішення для підтримки їхньої працездатності. Всебічний аналіз, наприклад, конструкції може виявити оптимальні рішення, які зазвичай неочевидні при більш вузькому підході. Інтеграція різних методів і прийомів може привести до удосконалень класичних підходів і появи нових в області контактних задач механіки.

За результатами проведеного аналітичного огляду зроблено висновки щодо місця дисертаційної роботи серед сучасних досліджень з питань механіки контактної взаємодії, обґрунтовано актуальність та визначені основні задачі.

Розділ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО В ПЛАНІ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПУ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

2.1 Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо задачу, коли на абсолютно жорсткий циліндричний штамп діє вертикальна сила, що прикладена у центрі тяжіння штампу. Поперечний переріз штампу займає двозв'язну область у формі некругового кільця. Будемо вважати, що підшва штампу є плоскою. Під дією сили, штамп заглиблюється у однорідний та ізотропний пружний півпростір (рис.2.1) [22, 26, 48, 125].

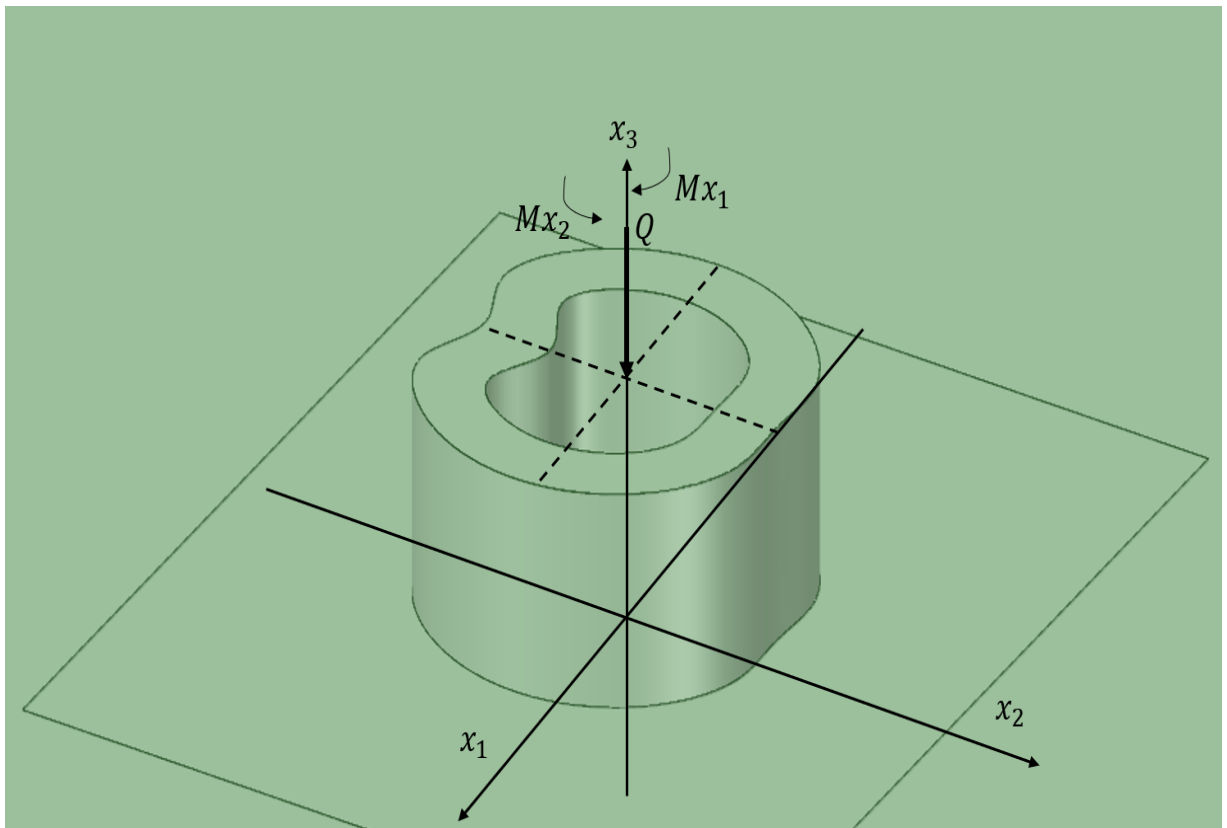


Рис. 2.1 Двозв'язний штамп

Область Ω , обмежена кривими Γ_1 і Γ_2 , і має всі точки, розташовані

після деформації на зміщеній поверхні основи штамп. Крайові умови виконуються на поверхні пружного півпростору, що знаходиться поза зоною контакту. Будемо вважати, що основа штамп є абсолютно гладкою:

$$x_3 = 0: \sigma_{31} = 0, \sigma_{23} = 0. \quad (2.1)$$

Для точок області Ω діє стискаюча сила $p(x)$:

$$\sigma_{33}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega, \\ -p(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Розподіл тиску $p(x)$ є невідомий. Для умов рівноваги (2.2), (2.3) маємо такі рівняннями:

$$P = \iint_{\Omega} p(x) dx \quad (2.3)$$

$$M_1 = \iint_{\Omega} x_2 p(x) dx, \quad (2.4)$$

$$M_2 = -\iint_{\Omega} x_1 p(x) dx, \quad (2.5)$$

де P , M_1 , M_2 – головний вектор і головні моменти прикладених до штамп сил.

Для єдиності розв'язку задачі необхідно виконання умови оовернення в нуль функцій переміщення на нескінченості. Введемо позначення і запишемо, для поступового переміщення, що відбувається паралельно вісі x_3 , через δ , а β_1 , β_2 - проекції вектору повороту.

$$x_3 = 0, (x_1, x_2) \in \Omega: U_3 = \delta - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2. \quad (2.6)$$

Для умов донної задачі маємо двовимірне інтегральное рівняння першого роду для розподілу нормального тиску $p(x)$:

$$\delta - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} \frac{p(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}}, \quad (2.7)$$

де G - модуль зсуву, μ – коефіцієнт Пуассона, δ – поступальне переміщення штампу паралельно осі Ox_3 : β_1, β_2 – проекції вектора повороту штампу.

Відзначимо, що штамп повинен бути притисненим по усій області контакту:

$$p(x_1, x_2) \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.8)$$

Для випадка двозв'язної області контакту, отримано для шуканого напружено-деформівного стану рішення інтегральне рівняння Лур'є-Штаєрмана [5, 22, 25, 26, 41, 48, 125].

2.2 Зведення задачі для штампa у формі некругового кільця до послідовності задач для кругового кільця.

2.2.1 Перетворення границь контакту

Припускаємо, що основа, якою штамп притискується до півпростору, має форму гладкої поверхні, площадка контакту займає в площині Ox_1x_2 двозв'язну область Ω , обмежену замкненими лініями Γ_1 і Γ_2 [22, 48, 125].

Представимо рівняння границь Γ_1 і Γ_2 , що обмежують Ω , область контакту, у вигляді:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \quad \rho &= a \cdot (1 + f_1(\varepsilon, \theta)); \\ \Gamma_2: \quad \rho &= b \cdot (1 + f_2(\varepsilon, \theta)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $a < b$, $\varepsilon < 1$, функції $f_1(\varepsilon, \theta)$, $f_2(\varepsilon, \theta)$ – неперервні та однозначні функції. Представимо їх у вигляді рядів за степенями ε :

$$f_1(\varepsilon, \theta) = \varepsilon f_{10}(\theta) + \varepsilon^2 f_{20}(\theta) + \varepsilon^3 f_{30}(\theta) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_{i0}(\theta), \quad (2.10)$$

$$f_2(\varepsilon, \theta) = \varepsilon f_{01}(\theta) + \varepsilon^2 f_{02}(\theta) + \varepsilon^3 f_{03}(\theta) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_{0k}(\theta), \quad (2.11)$$

коефіцієнти, яких $f_{ik}(\theta)$ - неперервні функції на відрізку $[0, 2\pi]$.

Штамп вдавлюється в пружний півпростір вертикальною силою Q , яка паралельна осі Ox_3 .

$$P = Q; \quad (2.12)$$

$$M_1 = x_{20}Q, \quad (2.13)$$

$$M_2 = -x_{10}Q, \quad (2.14)$$

Рівняння ліній, що обмежують область Ω , (2.10, 2.11) залежать від малого параметру ε . Будемо вважати, що і шуканий розподіл нормального тиску (2.3), (2.7) залежить від малого ε . Представимо шуканий розв'язок рівняння (2.7) у вигляді ряду за степенями ε .

$$p(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\rho, \theta) \varepsilon^k. \quad (2.15)$$

Запишемо у вигляді ряду за степенями ε :

$$U = \iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta}{r} = \sum_{i=0}^{\infty} U_i \varepsilon^i. \quad (2.16)$$

Коефіцієнтами (2.16) є похідні за параметром ε подвійного інтеграла U зі слабкою особливістю [22, 48, 125] у випадку, коли рівняння меж області інтегрування Ω залежать від цього параметру.

Оскільки підінтегральна функція в (2.16) наближається до нескінченності в точці $(\rho_0, \theta_0) \in \Omega$, то при знаходженні похідних, потрібно спочатку виключити цю точку з області Ω [5, 22, 26, 41, 51].

2.2.2 Преведення області контакту до кругового кільця

Введемо нові змінні R і φ :

$$\rho = R + \frac{R-a}{b-a} b f_2(\varepsilon, \varphi) + \frac{R-b}{a-b} a f_1(\varepsilon, \varphi), \quad \theta = \varphi. \quad (2.17)$$

Для випадку $R = a$ або $R = b$ отримаємо рівняння (2.9) внутрішньої Γ_1 і зовнішньої Γ_2 меж області Ω : відбувається перехід форми області у кругове кільце D : $a \leq R \leq b$, де $\rho = R$ при $\varepsilon = 0$.

Розподіл нормальних тисків - $p(\rho, \theta)$ (2.15) має вигляд для такого розвинення.

$$p(R, \varphi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(R, \varphi) \varepsilon^i \quad (2.18)$$

Де

$$\begin{aligned} P_0(R, \varphi) &= p_0(R, \varphi) \\ P_1(R, \varphi) &= p_1(R, \varphi) + f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R \cdot p'_0(R, \varphi), \\ P_2(R, \varphi) &= p_2(R, \varphi) + p'_1(R, \varphi) f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + \\ &+ p'_0(R, \varphi) f_2^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + \frac{1}{2} p''_0(R, \varphi) [f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R]^2 \\ P_3(R, \varphi) &= p_3(R, \varphi) + p'_2(R, \varphi) f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + p'_1(R, \varphi) f_2^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + \\ &+ 2 p''_1(R, \varphi) [f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R]^2 \cdot R + p'_0(R, \varphi) f_3^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + \\ &+ p''_0(R, \varphi) f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot f_2^{(1)}(R, \varphi) \cdot R^2 + \frac{1}{6} p'''_0(R, \varphi) [f_1^{(1)}(R, \varphi)]^3 \cdot R^3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Введемо позначення:

$$f_i^{(1)}(R, \varphi) = \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{R-a}{b-a} b f_{0i}(\varphi) + \frac{R-b}{a-b} a f_{i0}(\varphi) \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Виразимо потенціал простого шару для некругового кільця через потенціали для кругового кільця, у випадку $\alpha \rightarrow 0$ і $\varepsilon = 0$ запишемо

коефіцієнти U_i розвинення (2.16), які для $i = 0, 1, 2$ у вигляді:

$$U_0(R_0, \varphi_0) = \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} ds, \quad (2.21)$$

$$U_1(R_0, \varphi_0) = \iint_D \frac{P_1(R, \varphi)}{r(R, R_0)} ds + (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(1)}(R, \varphi) ds + \\ + \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(2)}(R, \varphi) ds. \quad (2.22)$$

$$U_2(R_0, \varphi_0) = \iint_D \frac{P_2(R, \varphi)}{r(R, R_0)} ds + (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_1(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(1)}(R, \varphi) ds + \\ + \iint_D \frac{P_1(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(2)}(R, \varphi) ds + (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_2^{(1)}(R, \varphi) ds + \\ + \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r} f_2^{(2)}(R, \varphi) ds + \frac{1}{2} R_0^2 \frac{\partial^2}{\partial R_0^2} \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} [f_1^{(1)}(R, \varphi)]^2 ds.$$

Де D - кругове кільце: $a \leq R \leq b$; $ds = R dR d\varphi$;

$$r^2(R, R_0) = R^2 + R_0^2 - 2R \cdot R_0 \cos(\varphi - \varphi_0); (R_0, \varphi_0) \in D,$$

$$f_i^{(2)}(R, \varphi) = \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{ab}{b-a} f_{0i}(\varphi) + \frac{ab}{a-b} f_{i0}(\varphi) \right]. \quad (2.23)$$

2.2.3 Представлення інтегральних рівнянь рівноваги у вигляді розвинень за малим параметром

Представимо поступальне переміщення штампа δ та проекції вектора повороту штампа β_1 і β_2 , у вигляді рядів за степенями ε [22, 48, 125]:

$$\delta = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \varepsilon^i; \quad (2.24)$$

$$\beta_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{1i} \varepsilon^i; \quad \beta_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} \varepsilon^i. \quad (2.25)$$

Також представимо інтеграли у рівняннях рівноваги у вигляді

розвинень за степенями ε .

Для цього знайдемо необхідні похідні і приведемо деякі з них.

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d}{d\varepsilon} \iint_{\Omega} p(\rho, \theta) d\Omega \right]_{\varepsilon=0} &= \iint_D P_1(R, \phi) ds + 2 \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \\
 &+ \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds \\
 \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \iint_{\Omega} p(\rho, \theta) d\Omega \right]_{\varepsilon=0} &= \iint_D 2P_2(R, \phi) ds + \iint_D 4P_1(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \\
 &+ 2 \iint_D P_1(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds + \iint_D 4P_0(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds + \\
 &+ 2 \iint_D P_0(R, \phi) f_2^{(2)}(R, \phi) ds + 2 \iint_D P_0(R, \phi) [f_1^{(1)}(R, \phi)]^2 ds + \\
 &+ 2 \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d}{d\varepsilon} \iint_{\Omega} p(\rho, \theta) \rho \sin \theta d\Omega \right]_{\varepsilon=0} &= \iint_D P_1(R, \phi) R \sin \phi ds + \\
 &+ 3 \iint_D P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D 2P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(2)}(R, \phi) ds.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Отримаємо наступні розвинення:

$$\iint_{\Omega} p(\rho, \theta) d\Omega = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\iint_D P_i(R, \phi) ds + F_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}) \right]; \tag{2.28}$$

$$\iint_{\Omega} p(\rho, \theta) \rho \sin \theta d\Omega = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\iint_D P_i(R, \phi) R \sin \phi ds + V_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}) \right]; \tag{2.29}$$

$$\iint_{\Omega} p(\rho, \theta) \rho \cos \theta d\Omega = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\iint_D P_i(R, \phi) R \cos \phi ds + W_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}) \right]; \tag{2.30}$$

Введемо такі позначення F_i , V_i , W_i для інтегральних операторів, у випадку $i = 0, 1, 2$:

$$F_0 = 0; \quad F_1(P_0) = 2 \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds; \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
F_2(P_0, P_1) = & \iint_D 2P_1(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D P_1(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds + \\
& + \iint_D 2P_0(R, \phi) f_2^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D P_0(R, \phi) f_2^{(2)}(R, \phi) ds + \\
& + \iint_D P_0(R, \phi) [f_1^{(1)}(R, \phi)]^2 ds + \iint_D P_0(R, \phi) f_1^{(1)}(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds
\end{aligned}$$

$$V_0 = 0;$$

$$V_1(P_0) = \iint_D 3P_0(R, \phi) \rho \sin \phi \cdot f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D 2P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(2)}(R, \phi) ds;$$

$$\begin{aligned}
V_2(P_0, P_1) = & \iint_D 3P_1(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \\
& + \iint_D 2P_1(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(2)}(R, \phi) ds + \iint_D 3P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_2^{(1)}(R, \phi) ds + \\
& + \iint_D 2P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_2^{(2)}(R, \phi) ds + \iint_D 3P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot [f_1^{(1)}(R, \phi)]^2 ds + \\
& + \iint_D 2P_0(R, \phi) R \sin \phi \cdot f_1^{(1)}(R, \phi) f_1^{(2)}(R, \phi) ds.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$W_0 = 0; W_1(P_0) = \iint_D P_0(\rho, \theta) 3f_1(\theta) \rho \cos \theta ds;$$

$$\begin{aligned}
W_2(P_0, P_1) = & \iint_D 3 \left[P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + \right. \\
& \left. + P_0(\rho, \theta) f_1^2(\theta) \right] \rho \cos \theta ds
\end{aligned}$$

2.2.4 Отримання послідовності систем рівнянь для кругового кільця

Застосовуючи залежності (2.12) і прирівнюючи вирази при однакових степенях ε , одержуємо наступні системи рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розвинень $P_i(R, \phi)$, δ_i , β_{1i} , β_{2i} :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_k 2\pi G}{1-\nu} &= \iint_D \frac{P_k(R, \phi)}{r} ds + \Phi_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}); \\
Q_k &= \iint_D P_k(R, \phi) ds + F_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}); \\
x_{10} Q_k &= \iint_D P_k(R, \phi) R \sin \phi \, ds + V_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}); \\
x_{20} Q_k &= \iint_D P_k(R, \phi) R \cos \phi \, ds + W_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Тут прийняті наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \delta_k + \beta_{1k} R_0 \sin \phi_0 - \beta_{2k} R_0 \cos \phi_0 + \zeta_k(R_0, \phi_0); \\
Q_0 &= Q; \quad Q_k = 0; \quad k \neq 0; \quad ds = R dR d\phi.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(R_0, \phi_0) \cdot \varepsilon^k$$

Оператори F_k , V_k , W_k такі самі, як і в (2.31), (2.32).

Наведемо інтегро-диференціальні оператори Φ_k для $k = 0, 1, 2$, які необхідні в перших наближеннях при розв'язанні задачі:

$$\Phi_0 = 0; \quad \Phi_1(P_0) = L_1(P_0); \quad \Phi_2(P_0, P_1) = L_1(P_1) + L_2(P_0). \tag{2.35}$$

де

$$L_1(P_0) = (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_0(R, \phi)}{r(R, R_0)} f_1^{(1)}(R, \phi) ds + \iint_D \frac{P_0(R, \phi)}{r(R, R_0)} f_1^{(2)}(R, \phi) ds \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
L_2(P_0) &= (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_0(R, \phi)}{r(R, R_0)} f_2^{(1)}(\rho, \theta) ds + \\
&+ \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r(R, R_0)} f_2^{(2)}(R, \phi) ds + \frac{1}{2} R_0^2 \frac{\partial^2}{\partial R_0^2} \iint_D \frac{P_0(R, \phi)}{r(R, R_0)} [f_1^{(1)}(R, \phi)]^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

D - кругове кільце: $a \leq \rho \leq b$;

Відзначимо що, в процесі пошуку поступального переміщення штампа δ (2.24), проекцій вектора повороту β_1 , β_2 (2.25) і функції $p(\rho, \theta)$ (2.13), які є розв'язком задачі (2.4), (2.5), (2.7) для двозв'язної області Ω , побудовано

послідовність аналогічних задач (2.33) для кругового кільця D [22, 48].

Коли $f_1(\rho, \theta) = f_2(\rho, \theta)$ розвинення потенціалу простого шару одержано в [49]. Продовжене дослідження у роботах [22, 48, 125].

$$U = \iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta)}{r} d\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\iint_D \frac{P_k(R, \varphi)}{r(R, R_0)} ds + \Phi_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) \right]. \quad (2.38)$$

В одержаному розвиненні (2.38) потенціалу коефіцієнти при степенях ε залежать від аналогічних потенціалів, розповсюджених по області в формі кругового кільця [22, 48, 125].

2.3 Автоматизація розрахункових аналітичних формул

З метою моделювання та виконання обчислень було розроблено спеціальне програмне забезпечення, реалізоване на мові програмування C++. В процесі імплементації було застосовано сучасні підходи до розробки програмного забезпечення на мові C++, що сприяло підвищенню ефективності обчислювальних процесів та забезпечило високу стабільність в роботі.

Вибір мови програмування C++ для реалізації програмного забезпечення визначився низкою обґрунтованих причин, які сприяли ефективному вирішенню поставленої задачі автоматизації розрахунків контактних характеристик. Головною причиною вибору мови програмування C++ стала швидкість виконання коду, що є критичним в контексті розв'язання складних математичних задач для виконання обчислювальних завдань. Мова C++ має широкий набір багатфункціональних бібліотек пов'язаних з проведенням математичного аналізу, що допомагають вирішувати задачі поставленого класу.

Об'єктно-орієнтований підхід до програмування, підтримуваний мовою C++, сприяє створенню структурованих та легко збережених програм, що є

надзвичайно важливим для обчислювальних наукових досліджень. А розроблені класи можуть бути повторно використані в рамках наступних інших досліджень. Додатково треба відзначити, переносимість коду, що забезпечується мовою C++. Саме це дозволило створити програмне забезпечення, що може бути виконане на різних платформах, що є важливим аспектом для наукових досліджень. Зазвичай такі наукові дослідження можуть вимагати використання різних обчислювальних ресурсів.

```

t..rho/b|epsilon = 0,2 |epsilon = 0,4 |epsilon = 0,6 |
t..|0.51|3.79176 / 3.78987|3.92706 / 3.91268|4.17809 / 4.12639|
t..|0.525|2.55226 / 2.54888|2.65285 / 2.63800|2.84222 / 2.79746|
t..|0.55|1.98858 / 1.98779|2.07685 / 2.06067|2.24550 / 2.19726|
t..|0.6|1.67624 / 1.67599|1.76211 / 1.75937|1.92849 / 1.87467|
t..|0.7|1.62591 / 1.62494|1.72097 / 1.70498|1.90765 / 1.84846|
t..|0.8|1.83800 / 1.83796|1.95178 / 1.93198|2.17471 / 2.12710|
t..|0.85|2.06420 / 2.06298|2.19416 / 2.17876|2.44892 / 2.38141|
t..|0.9|2.46965 / 2.46798|2.62710 / 2.61190|2.93582 / 2.87340|
t..|0.95|3.42213 / 3.42179|3.64237 / 3.62874|4.07429 / 3.92110|
t..|0.975|4.79463 / 4.79257|5.10438 / 5.08439|5.71191 / 5.66390|
t..C:\Users\vlad\source\repos\cpp-text-table\Debug\cpp-text-table.exe (process 7796) exited with code 0.
t..To automatically close the console when debugging stops, enable Tools->Options->Debugging->Automatically close the console when debugging stops.
t..Press any key to close this window . . .

```

Рис. 2.2. Консольний вивід результатів розробленого ПЗ

Така мобільність значно спрощує розв'язання проблеми створення комунікації між різними програмними додатками. Крім того, C++ має велику та активну спільноту розробників, що забезпечує наявність значної кількості ресурсів, документації та можливість розширяти роботу над уже існуючими програмними застосунками.

Розроблене програмне забезпечення на мові програмування C++ дозволяє отримувати чисельні результати на основі складних аналітичних

формул з наперед заданою точністю при розв'язанні задач контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампа з пружним півпростором під дією стискаючої сили.

У таблиці 2.1. приведені значення контактного тиску під основою штампу при $b=2a$ для різних ε , обчислені обмежуючись у розвиненнях (2.13), (2.24) третім та четвертим степенем ε включно.

$\frac{\rho}{b}$	$\varepsilon = 0.1406$, три члена ряду	$\varepsilon = 0.1406$, чотири члена ряду
0.51	7.21315	7.23708
0.525	5.18108	5.22611
0.55	4.03681	4.09139
0.6	3.40276	3.47135
0.7	3.30059	3.39031
0.8	3.73114	3.84503
0.85	4.19032	4.32249
0.9	5.01338	5.17538
0.95	6.94692	7.17546
0.975	9.73309	10.0556

Таблиця 2.1. Значення тиску для $\varepsilon = 0.1406$ під штампом з поперечним перерізом у формі близькою до трикутного кільця

Таким чином, програмне забезпечення на мові C++ відкриває можливості для отримання точних та надійних результатів при розв'язанні складних математичних задач, дозволяючи автоматизувати процеси обчислень і аналізу. Приклад роботи спеціального програмного додатку представлено на рис. 2.2.

2.4 Взаємодія штампу з основою у формі не кругового кільця з пружним півпростором

2.4.1 Взаємодія штампу з основою у формі кільця обмеженого лініями близькими до трикутника з пружним півпростором

Плоский штамп вдавлюється в пружний півпростір. Під дією вертикальної сили Q він робить крім поступального вертикального переміщення ще й поворот навколо деякої осі в площині Oxy залежно від координат (x_0, y_0) точки перетину лінії дії вертикальної сили із площиною Oxy та наявності моментів, що діють на штамп. У силу цього для визначення заглиблення штамп і розподілу тиску під ним необхідно вирішувати систему чотирьох рівнянь (2.32)-(2.33) із чотирма невідомими: δ – поступальне вертикальне переміщення штамп, β_1, β_2 , – проекції вектора повороту штамп, $p(\rho, \theta)$ – функція, що характеризує розподіл тиску під штампом.

Розглянемо плоский штамп, що займає в плані область Ω , контур якої обмежений двома трикутниками Γ_1, Γ_2 (рис. 2.3) [20, 22, 125].

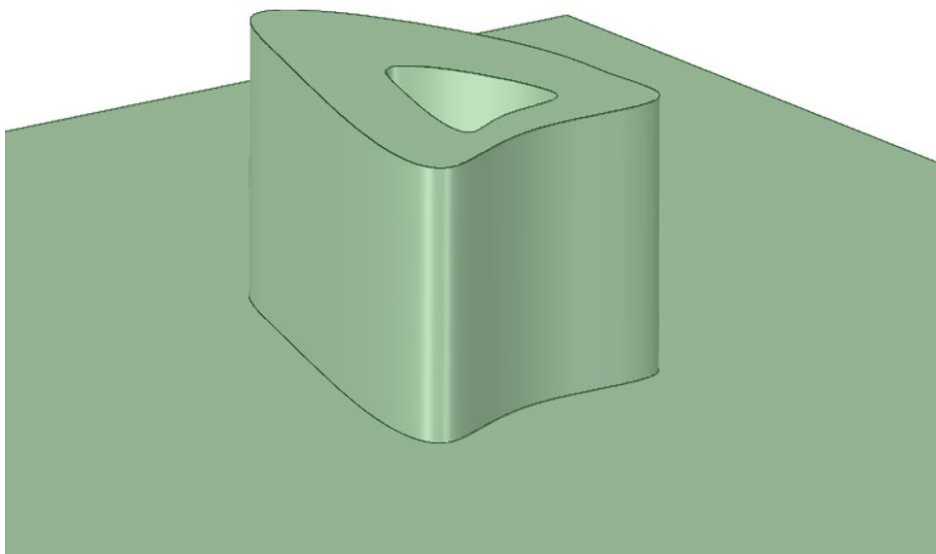


Рис. 2.3. Система двозв'язний в плані штамп – пружний півпростір

Початок координат розмістимо в центрі описаного кола. Позначимо b - радіус кола, описаного навколо зовнішнього трикутника, a - навколо внутрішнього. Рівняння меж області контакту в полярній системі координат представимо у наступному вигляді:

$$\rho_{\Gamma_1} = a f(\theta), \quad \rho_{\Gamma_2} = b f(\theta), \quad (2.39)$$

$$\text{де } f(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_i(\theta),$$

$$f_1(\theta) = -1 + 0,03571 \cos 2\theta; \quad (2.40)$$

$$f_2(\theta) = 0,08077 \cos \theta + 1,2880 \cos 3\theta + 0,07158 \cos 4\theta;$$

$$f_3(\theta) = 0,3351 \cos 5\theta + 1,3485 \cos 6\theta + 0,1805 \cos 7\theta$$

$$f_4(\theta) = 1,2623 \cos 8\theta + 1,6531 \cos 9\theta + 0,4761 \cos 10\theta$$

$$\varepsilon = 0,3697.$$

Штамп вдавлюється в пружний півпростір вертикальною силою Q , лінія дії якої проходить через початок координат.

Невідомі проекції вектора повороту штампа β_1 , β_2 , вертикальне переміщення штампа δ , функцію розподілу нормального тиску під штампом $p(\rho, \theta)$, які є розв'язками системи рівнянь (2.4)–(2.5), представимо у вигляді розвинень по степенях ε (2.25), (2.24), (2.13) або (2.18). Для визначення невідомих коефіцієнтів цих розвинень δ_k , β_{1k} , β_{2k} , $p_k(\rho, \theta)$ одержуємо систему рівнянь (2.33) [20, 22, 125].

У нульовому наближенні, коли $\varepsilon = 0$, при знаходженні перших коефіцієнтів розкладів (2.13), (2.24), (2.25) δ_0 , β_{10} , β_{20} , $p_0(\rho, \theta)$, при $k = 0$ одержуємо систему рівнянь [18, 21]:

$$\delta_0 + \beta_{10} \rho_0 \sin \theta_0 - \beta_{20} \rho_0 \cos \theta_0 = \frac{1 - \nu^2}{2\pi G} \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} ds;$$

$$Q = \iint_D P_0(\rho, \theta) ds,$$

Аналогічну одержаним [50], розв'язок визначається наступним виразом

$$P_0(\rho) = p_{00}(\rho); \quad p_{i,m}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_{2k}^{(i,m)} \left(\frac{\rho}{b} \right)^{2k} + y_{2k+3}^{(i,m)} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2k+3} \right] \quad (2.41)$$

$$x_{2k}^{(i,m)} = \frac{1}{2\pi b} \sum_{n=0}^3 C_{i,m}^{(n)} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{pk}^{(n)} \left(\frac{a}{b} \right)^p;$$

$$y_{2k+3}^{(i,m)} = \frac{1}{2\pi b} \sum_{n=0}^3 C_{i,m}^{(n)} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{pk}^{(n)} \left(\frac{a}{b} \right)^p; \quad (2.42)$$

$$C_{00}^{(1)} = C_{00}^{(2)} = C_{00}^{(3)} = 0; \quad C_{00}^{(0)} = \gamma \frac{\pi Q}{2b}; \quad \delta_0 = \gamma \frac{Q(1-\nu)}{4Gb};$$

$$\gamma^{-1} = \sum_{k,p=0}^{\infty} \pi / 2 (a/b)^p \left(\alpha_{pk}^{(0)} / (2k+2) - \beta_{pk}^{(0)} (a/b)^{2k+3} / (2k+1) \right), \quad (2.43)$$

Враховуючи вигляд функції $f_1(\theta)$ (4.1), (4.2) в рівняннях меж і функції $P_0(\rho)$ аналогічно одержуємо системи рівнянь в наступних наближеннях при $k=1,2,\dots$

Обчислимо контактний тиск, обмежуючись в розвиненні (2.18) другою степеню ε , тобто першими трьома наближеннями. Одержуємо, що тиск під несиметричним кільцевим штампом, коли $b=2a$, в точках (ρ, θ_*) променю, що виходить з початку координат та перетинає зовнішній і внутрішній контури області контакту в точках $(\rho_{\Gamma 1}, \theta_*)$ і $(\rho_{\Gamma 2}, \theta_*)$, відповідно, визначається залежністю:

$$p(\rho, \theta) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2, \quad (2.44)$$

де $\varepsilon = 0,3697$, $\varepsilon^2 = 0,1367$, $P_0 = \tilde{Q} \sigma_0$,

$$P_1 = \tilde{Q} [2\sigma_0 + (0,0006776\sigma_0 - 0,02418\sigma_1) \cos 2\theta_*],$$

$$P_2 = \tilde{Q} [2,9821\sigma_0 + 0,000864\sigma_1 + (0,0002033\sigma_0 - 0,07254\sigma_1) \cos 2\theta_* + (0,034750\sigma_0 + 0,2347\sigma_1 + 0,01231\sigma_2 - 0,4585\sigma_3) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \cos 4\theta_* + (0,2357\sigma_0 + 0,06788\sigma_1) \rho_{\Gamma_1} / \rho \cos \theta_* + (0,7458\sigma_0 - \\
& - 0,7204\sigma_1 + 0,3340\sigma_2) \rho_{\Gamma_1} / \rho \cos 3\theta_* + 0,08077 [\sigma'_0 (\rho / \rho_{\Gamma_2} - \\
& - \frac{\rho^2}{\rho_{\Gamma_2}^2} \frac{b}{a+b} - \frac{a}{a+b}) - 3 \frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \frac{b}{a+b} \sigma_0] \cdot \cos \theta_* + \\
& + 1,2880 \sigma'_0 \left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} - \frac{\rho^2}{\rho_{\Gamma_2}^2} \frac{b}{a+b} - \frac{a}{a+b} \right) \cdot \cos 3\theta_*]. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

$$\sigma_i = \pi \gamma / 2 \sum_{k,p=0}^{\infty} \left[(\rho / \rho_{\Gamma_2})^{2k} \alpha_{pk}^{(i)} + (\rho_{\Gamma_1} / \rho)^{2k+3} \beta_{pk}^{(i)} \right] (a/b)^p. \quad (2.46)$$

Вираз для вертикального переміщення штампа приймає вигляд:

$$\delta = \frac{1-\nu}{G} \frac{Q}{4b\gamma^{-1}} (1 + \varepsilon + 0,9818\varepsilon^2). \quad (2.47)$$

В окремому випадку, при $a = 0$ отримуємо вираз для функції розподілу тиску під штампом для однозв'язної області, обмеженої лінією, близькою до трикутника [20, 22, 125]:

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma}}, \theta_*\right) = & \frac{Q}{2\pi b^2} \frac{\rho_{\Gamma}}{\sqrt{\rho_{\Gamma}^2 - \rho^2}} \left\{ 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \left[(3 - 0,5 \cdot 0,03573^2) + \right. \right. \\
& + 0,08077 \left(\frac{\rho^2}{(\rho + \rho_{\Gamma}) \rho_{\Gamma}} - \frac{4\rho}{\rho_{\Gamma}} \right) \cos \theta_* + 1,2880 \frac{\rho^2}{(\rho + \rho_{\Gamma}) \rho_{\Gamma}} \cos 3\theta_* + \\
& \left. \left. + (0,07158 + 3/4 \cdot 0,03573^2) (\rho / \rho_{\Gamma})^2 \cos 4\theta_* \right] \right\}
\end{aligned}$$

Співвідношення між заглибленням штампа та діючою на штамп силою задовольняє нерівність, одержану в [5], та має вигляд :

$$\delta = (1 - \nu^2) / E \cdot Q / 2b \cdot [1 + \varepsilon + \varepsilon^2 (1 - 0,03573^2 / 2)].$$

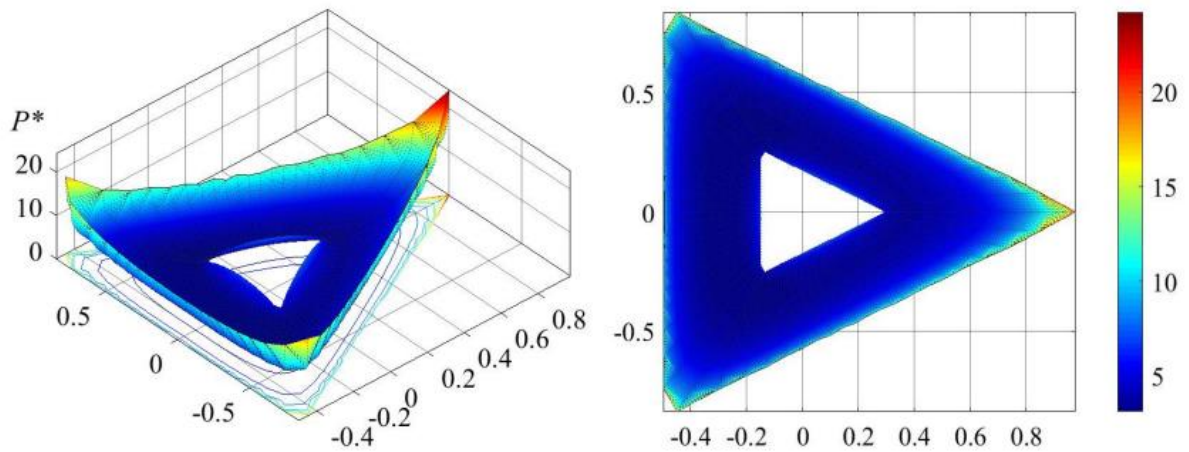


Рис.2.4 Розподіл нормального тиску під штампом за формою поперечного перерізу близької до трикутного кільця $\alpha = 0$, $a/b = 0.3$

2.4.2 Взаємодія штампу з основою у формі кільця обмеженого лініями близькими до багатокутників з пружним півпростором

Представимо рівняння границь контактної області Ω у вигляді, де функцію $f_i(\theta)$, $i = 1, 2, 3$ можна представити наприклад, при $\varepsilon = 0.1406$ як:

$$f_1(\theta) = -2.6295 + 0.039 \cos 2\theta,$$

$$f_2(\theta) = 0.5584 \cos \theta + 8.9052 \cos 3\theta + 0.4949 \cos 4\theta$$

$$f_3(\theta) = 6.0921 \cos 5\theta + 24.5156 \cos 6\theta + 3.2815 \cos 7\theta.$$

Тут $\varepsilon = \sqrt{1 - h_1^2 / h^2}$, де $h = 1.5$ - висота трикутника, а $h_1 = 1.4851$ - її допустиме відхилення для усунення гострих кутів. Значення ε може бути обране з інтервалу $(0, 1)$. Аналогічно, взявши те саме ε , для стислості, обмежившись значенням $i = 1, 2$, функції мають вигляд, близький до квадратного:

$$f_1(\theta) = 0.8178 - \cos 4\theta,$$

$$f_2(\theta) = 1.2677 \cos 8\theta;$$

до правильного шестикутника

$$f_1(\theta) = -0.6504 + 0.3758 \cos 6\theta,$$

$$f_2(\theta) = 0.7410 \cos 12\theta;$$

до правильного восьмикутника

$$f_1(\theta) = -0.5626 + 0.1556 \cos 4\theta,$$

$$f_2(\theta) = 1.5092 \cos 8\theta.$$

Контактний тиск, зсув штампа та проекції вектора обертання обчислюються з обмеженням на ε^2 у перших трьох наближеннях. Аналогічно методам, запропонованим у роботах [121, 127, 128], запишемо вираз для визначення нормального тиску під трикутним штампом, коли $\frac{b}{a} = 2$, в точках (ρ, θ_*) , які виходять з початку променю та перетинають зовнішній та внутрішній контури контактної області в точках $(\rho_{\Gamma_2}, \theta_*)$ та $(\rho_{\Gamma_1}, \theta_*)$ відповідно, що визначається залежністю.

$$p(\rho, \theta) = P_0 + \varepsilon \cdot P_1 + \varepsilon^2 P_2,$$

де $\varepsilon = 0.1406$, $P_0 = \tilde{Q}\sigma_0$,

$$P_1 = \tilde{Q}[5.2589\sigma_0 + (0.0018\sigma_0 - 0.0652\sigma_1)\cos 2\theta_*], \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} P_2 = & \tilde{Q}[20.6182\sigma_0 + 0.0060\sigma_1 + (0.0014\sigma_0 - 0.5015\sigma_1)\cos 2\theta_* \\ & + (0.2403\sigma_0 + 1.6227\sigma_1 + 0.0851\sigma_2 - 3.1701\sigma_3) \cdot \cos 4\theta_* \\ & + (1.6296\sigma_0 + 0.4693\sigma_1)\rho_{\Gamma_1} / \rho \cos \theta_* \\ & + (5.1564\sigma_0 - 4.9808\sigma_1 + 2.3093\sigma_2)\rho_{\Gamma_1} / \rho \cos 3\theta_* \\ & + \frac{0.5584}{a+b} \left[\sigma_0' \left(\frac{\rho(a+b)}{\rho_{\Gamma_2}} - \frac{b\rho^2}{\rho_{\Gamma_2}} - a \right) - \frac{3b\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \sigma_0 \right] \cos \theta_* \\ & + \frac{8.9052\sigma_0'}{a+b} \left(\frac{\rho(a+b)}{\rho_{\Gamma_2}} - \frac{b\rho^2}{\rho_{\Gamma_2}} - a \right) \cos 3\theta_* \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\sigma_i = \frac{\pi\gamma}{2} \sum_{k,p=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \right)^{2k} \alpha_{pk}^{(i)} + \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho} \right)^{2k+3} \beta_{pk}^{(i)} \right] \left(\frac{a}{b} \right)^p,$$

$$\text{де } \gamma = \sum_{k,p=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^p \left(\frac{\alpha_{pk}^{(0)}}{2k+2} - \frac{\beta_{pk}^{(0)}}{2k+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+3} \right); \alpha_{pk}^{(n)}, \beta_{pk}^{(n)}.$$

Зберігаючи скінченну кількість членів, $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq p \leq m-1$ у ряді (1) - (4), суму відкинутих членів легко оцінити, обмеживши залишок ряду геометричною прогресією. Було встановлено, що сума відкинутих членів ряду не перевищує наступне значення:

$$|R_{mn}| \leq \frac{b}{b-a} \cdot \left\{ \frac{\rho_{\Gamma_2}^2}{\rho_{\Gamma_2}^2 - \rho^2} \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m + \left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}}\right)^{2n} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\rho_{\Gamma_1}^2}{(\rho^2 - \rho_{\Gamma_1}^2)} \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m + \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho}\right)^{2n} \right] \right\} \quad (2.50)$$

Залежність між навантаженням та відхиленням має вигляд:

$$\delta = (1-\nu) \cdot Q \cdot (1 + \varepsilon + 0.9818 \cdot \varepsilon^2) / (4b\gamma \cdot G). \quad (2.51)$$

Нерівність, що задовольняє залежність навантаження від переміщення, було знайдено в [3]. Ця нерівність виконується для довільної контактної області і може бути використана для перевірки отриманого розв'язку. У даному випадку отримана залежність (2.51) задовольняє цю нерівність при $b = 2a$

Для порівняння аналітичного розв'язку з чисельно-аналітичним, було введено коефіцієнт шорсткості пружного півпростору, який може бути розглянутий як регулюючий параметр [127, 128]. Основним інтегральним рівнянням для задачі вдавлювання штампа в пружний шорсткий півпростір без тертя є рівняння:

$$(1-\alpha) \cdot P(\rho, \theta) + \iint_{\Omega} \frac{P}{2\pi br} \cdot dS = \frac{\delta - \beta_2 \rho_0 \cos \theta_0 + \beta_1 \rho_0 \sin \theta_0}{2\pi b}, \quad (2.52)$$

$$\text{де } P(\rho, \theta) = (1-\nu^2) / (\pi E) \cdot p(\rho, \theta), \quad B_1 / (2\pi) = 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad [127],$$

$B_1 = B\pi E / ((1-\nu^2) \cdot b)$, B - це коефіцієнт, що характеризує деформаційні властивості поверхневої шорсткості пружного півпростору [59, 85], E - модуль пружності півпростору.

Вертикальні відхилення мікровиступів, що виникають внаслідок дії дотичної сили, можна відкинути [85]. Рівняння (2.44) є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду з слабкою особливістю [86]. Регуляризація рівняння (2.44), запропонована в [127], зводить розв'язок рівняння (2.44) до розв'язку рівняння другого роду (2.52). Таким чином, у цьому випадку регуляризація має сенс для врахування шорсткості еластичної напівплощини, і чим ближче значення коефіцієнта α до одиниці, тим гладшою вважається поверхня. Коли $\alpha < 1$, це рівняння може бути розв'язане методом послідовних наближень.

Числове дослідження може бути проведене застосовуючи представлені аналітичні та чисельно-аналітичні методи та використовуючи попередні розрахунки і результати робіт [121, 127, 128]. Різниця у результатах, отриманих аналітичними та чисельно-аналітичними методами, проявляється лише у четвертому знаку після десяткової коми при $\alpha = 0,99$ [20, 22, 125].

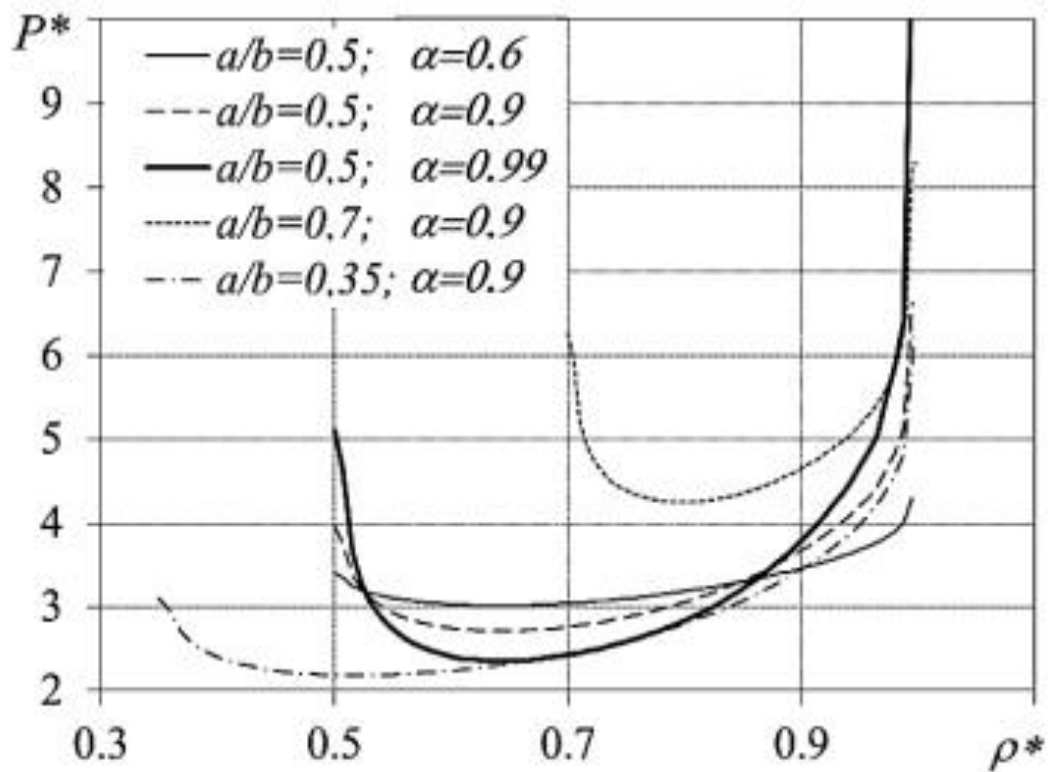


Рис. 2.5. Графіки розподілу тиску під двозв'язними шестикутними штампами в розділі $\theta = 0$ з різною шириною a/b та шорсткістю α .

На рис. 2.5 показані графіки розподілу нормального тиску $P^* = 2\pi b^2 p(\rho, \theta) / Q$ в розділі $\theta = 0$ під двозв'язним штампом, обмеженим в плані лініями, близькими до правильних шестикутників, залежно від впливу різних значень параметрів α та a/b . Зі збільшенням шорсткості розподіл тиску стає більш однорідним уздовж контактної області, тобто мінімальний тиск збільшується, а максимальний тиск зменшується на межах контактної області, що збігається з результатами в [127, 128]. Лінії, що відрізняються за значенням ширини штампа a/b , показують, що при зменшенні ширини тиск збільшується за рахунок зменшення контактної області.

Було розв'язано задачі для різних конфігурацій штампів. Отримано результати для розподілу нормальних напружень на пружному півпросторі під штампом :

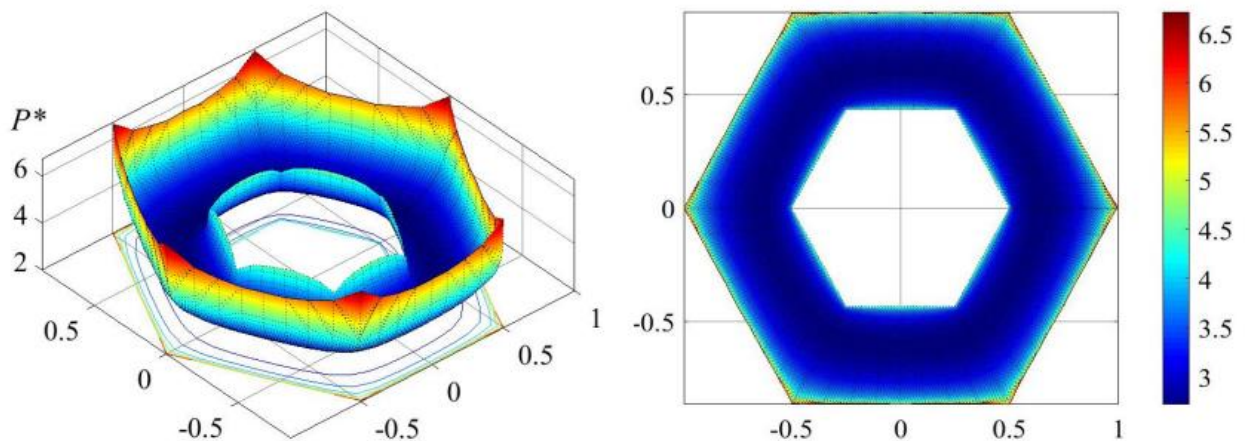


Рис. 2.6. Розподіл контактного тиску під штампом за формою поперечного перерізу близького до шестикутного кільця $-\alpha = 0.9$ і $a/b = 0.5$

Для ясності на рисунку 3 наведено поверхні безрозмірних значень контактного тиску та криві рівного тиску, що їм відповідають, для штампу із полігональною основою обмеженою схожими лініями, близькими до правильних восьмикутників (рис. 2.7 $-\alpha = 0.9$ і $a/b = 0.5$).

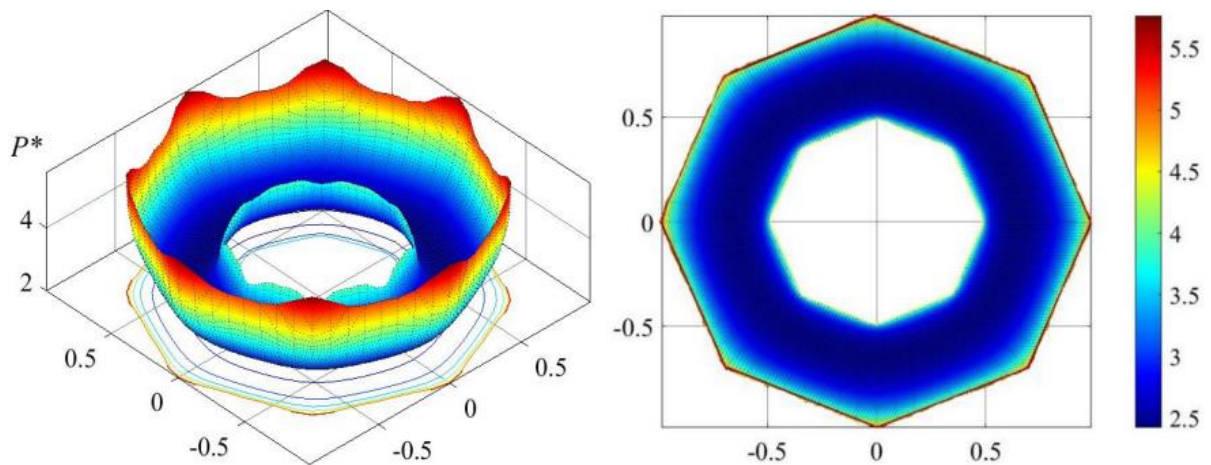


Рис. 2.7. Розподіл контактної тиску під штампом за формою поперечного перерізу близького до восьмикутного кільця $-\alpha = 0.9$ і $a/b = 0.5$

На рис. 2.8 показано розподіл тиску під штампом, контури якого не схожі – лінії, близькі до правильного восьмикутника зовні і квадрата всередині ($\alpha = 0.9$ і $a/b = 0.5$). Числовий аналіз, виконаний для різних контактних областей, дозволяє оцінити надійність розв'язку.

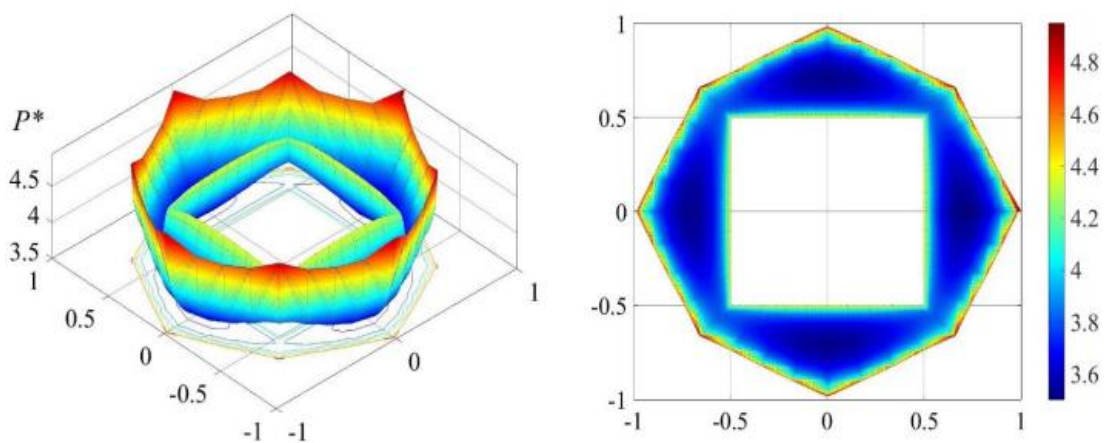


Рис. 2.8. Розподіл контактної тиску під штампом із зовнішніми лініями, схожими на правильний восьмикутник, та внутрішніми, схожими на квадрат ($\alpha = 0,9$ і $a/b = 0.5$).

Було проведено аналогію [33] між кривими рівного тиску та лініями рівня Прандтля під час скручування стержня відповідного перерізу. У всіх

розглянутих випадках значення рівного тиску відповідає вказаній аналогії: біля середньої частини кільця контактна область мало відрізняються від кола, і, рухаючись від них, набувають форми, схожої на межу контактної області, прямують та розтягуються до кутової точки. Біля межі контактної області лінії рівного тиску стають товщими. Саме на межі тиски приймають максимальні кінцеві значення через шорсткість, але тиск нескінченно зростає в разі абсолютно гладкого контакту. Лінії рівного тиску замкнуті біля точок з мінімальним тиском, які розташовані в ширших частинах штампа, у цьому випадку – між кутовими точками меж контактної області.

Оптимізація конструкції завжди є актуальною задачею. У полігональному випадку функція є негладкою, тому задача ускладнюється, і необхідно використовувати методи негладкої оптимізації [133].

2.5 Висновки до розділу

В другому розділі розглянуто задачу про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір абсолютно жорсткого плоского двозв'язного штампа. Для отримання аналітичного розв'язку, застосовано варіант метода збурень заснований на розкладанні за малим параметром потенціала простого шару, розподіленого по двозв'язній області. Таким чином відбулося зведення задачі про вдавлювання плоского штампу у формі некругового кільця до послідовності задач для штампа у формі кругового кільця. Це дозволило використати відоме рішення для кругового кільця.

Розв'язано задачі для штампів у формі кільця, границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників та штампу лінії контурів якого не є подібні.

Було розроблено спеціальне програмне забезпечення на мові програмування C++ для аналізу та візуалізації отриманих результатів. Обрана мова програмування завдяки своїй низькорівневості прискорила процес розрахунків. Розроблене програмне забезпечення є кросплатформенним та

може бути інтегровано в існуючі системи, що спрощує процес налагодження комунікації між різними програмними додатками. За рахунок своєї структурованості компоненти розробленого програмного забезпечення можуть бути повторно використані для проведення наступних досліджень з іншими вхідними параметрами.

Отримано числові та графічні результати. Зокрема, представлено графіки нормальних напружень для штампів різної конфігурації. На підставі аналізу цих результатів зроблено такі висновки:

1) результати, що були отримані за розрахунковими аналітичними формулами, показали зростання нормальних напружень до нескінченності, як з внутрішнього так і з зовнішнього контурів штампу;

2) було досліджено вплив ширини кільця штампу на розподіл нормальних напружень і заглиблення штампу; зменшення ширини призводило до збільшення заглиблення штампів та підвищення контактного тиску; знайдено зони з мінімальним тиском, які розташовані в найширших частинах штампів.

Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів з існуючими, який показав, що розв'язані числові задачі підтверджують правильність та ефективність запропонованого методу рішення.

Розділ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

3.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу аналогічну сформульованій у розділі 2, а саме про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою (рис. 2.1).

У силу цього для визначення заглиблення штампа і розподілу тиску під ним необхідно вирішувати систему чотирьох рівнянь (2.33) із чотирма невідомими: δ – поступальне вертикальне переміщення штампа, β_1, β_2 , – проекції вектора повороту штампа, $p(\rho, \theta)$ – функція, що характеризує розподіл тиску під штампом. Рівняння меж області контакту в полярній системі координат представимо у наступному вигляді (2.9).

Необхідно розглянути форми основ штампів у вигляді круга, кільця та кілець близьких до трикутника, квадрату, шестикутника. Для випадка, коли $a=0$, маємо однозв'язну область контакту. Вважаємо, що система штамп-пружний півпростір перебуває у складних природних умовах або в агресивному середовищі певний час, або експлуатується довгий час. У зв'язку з цим можуть відбутися пошкодження різного характеру. Тобто випадкові пошкодження, пошкодження типу зношення, або такі, що виникають за певним законом, наприклад, корозія. Тому необхідно побудувати скінченно-елементні моделі для штампів визначеної форми без пошкоджень, а також із пошкодженнями різних типів із різного степеня.

3.2 Чисельне моделювання контактних задач за допомогою програмного комплексу ANSYS

Для чисельного моделювання процесу контактної взаємодії абсолютно жорсткого плоского штампу з пружним півпростором було застосовано

метод скінчених елементів. Моделювання відбувалося за допомогою програмного комплексу ANSYS [56] (академічна версія). Система автоматизованого проектування включає Mechanical, CFD, Autodyn, SpaceClaim та DesignXplorer. Конфігурація робочої станції на якій відбувався процес моделювання Windows 10 Home (64-bit, Version 22H2, OS build 19045.4170), процесор AMD Ryzen 5 4500U with Radeon Graphics 2.38 GHz, та 16.0 GB оперативної пам'яті. Модуль Static Structural, системи ANSYS, надав доступ до проектування в рамках статичної та проведення скінченно-елементного аналізу.

На першому етапі відбувалося створення геометричної моделі. У Workbench для цього використовується модуль Geometry, який дозволяє викликати додаток Design Modeler. Геометричний процесор Design Modeler ґрунтується на ядрі Parasolid та має можливості щодо параметризації геометрії. Побудова геометричних моделей відбувається через послідовну реалізацію операцій, які виконують перетворення геометричних об'єктів. Побудова геометричної моделі в ANSYS відбувалась шляхом поєднання двох методів: використання готових примітивів та застосування булевих операцій до них або ієрархічного послідовного створення складових моделі, розпочинаючи з опорних точок, ліній, сплайнів та подальших об'єктів [12, 13, 15, 16, 19, 141].

На другому етапі проводилась просторова дискретизація досліджуваної області, яка відповідає початковій геометричній моделі, отриманій на попередньому етапі. Побудова обчислювальної сітки була виконана за допомогою модуля Meshing. Після заміни диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують поведінку суцільного середовища, їх дискретними аналогами, отримано нові параметри – часові та просторові кроки обчислювальної сітки. Побудова просторової сітки є одним із вагомих етапів у вирішенні задач створення комп'ютерних моделей за допомогою методів скінчених об'ємів і скінчених елементів (рис. 3.1). Адекватність побудованої обчислювальної сітки у більшості випадків є одним із ключових аспектів отримання надійних результатів чисельного розв'язку. Крім того,

розрахунок на сітці, яка недостатньо точно відповідає конкретній задачі, може призвести до зниження точності розв'язку, втрати збіжності, виникнення різних видів нестійкостей, тощо.

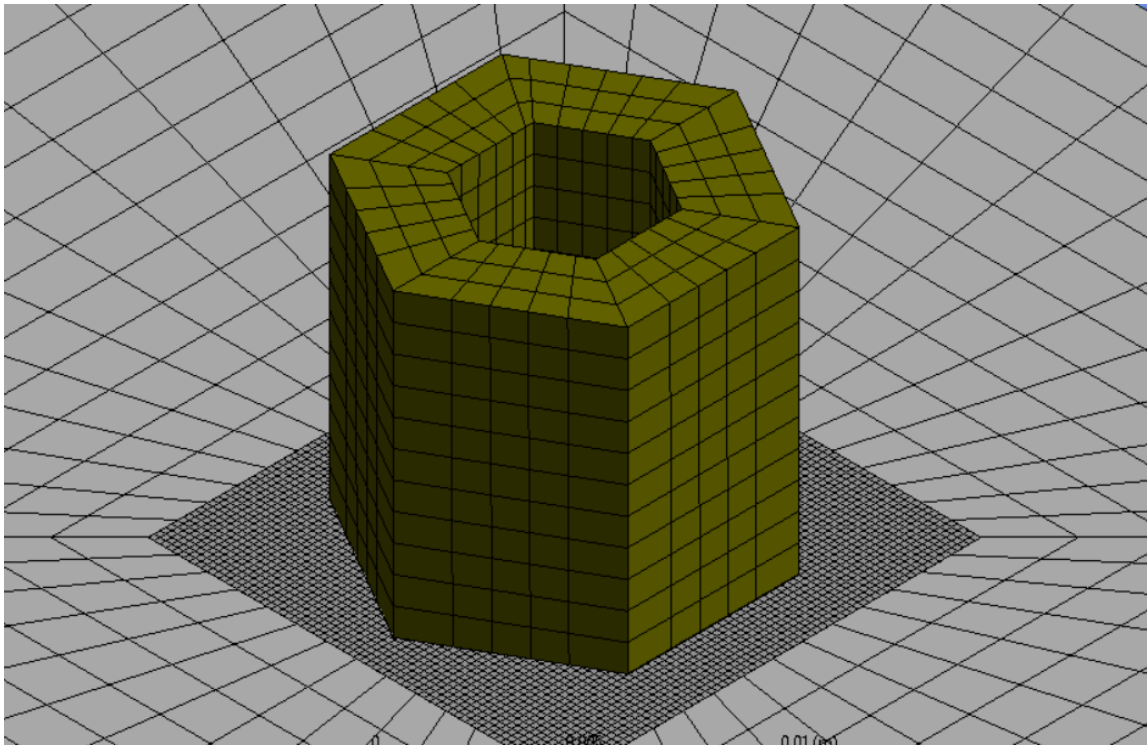


Рис. 3.1 Приклад скінченно-елементної сітки

Налаштування розмірів та щільності сіткових комірок, а також керування роздільною здатністю сітки як глобально так і локально було проведено за допомогою групи параметрів «Sizing». Для контролю кутів між нормальними проведеннями до ребер сусідніх елементів сітки, кількості елементів сітки в зазорах між двома геометричними елементами збірки та відношення розмірів сусідніх комірок було використано «Size Function» [16, 19, 20].

На практиці, усі конструкції мають нелінійні властивості, але іноді вплив нелінійностей є незначним. Наприклад, деформації конструкції є малими, то геометричні нелінійності можна ігнорувати. Коли матеріал працює в межах лінійної пружності, то матеріальні нелінійності можуть бути знехтувані. Але, якщо виявлено, що нелінійні ефекти суттєво впливають на поведінку системи і їх не можна ігнорувати, задачу слід розглядати в нелінійному контексті.

Контакт є однією з форм контактної нелінійності. Під час дослідження всі розглянуті контакти були такими, що належать класу жорсткі-пружні.

Тобто контактуючі тіла мали різну жорсткість (абсолютно жорсткий штамп та пружний півпростір)

У процесі імітації контактної взаємодії було використано спеціальні елементи, відомі як `CONTAxxx` та `TARGExxx`, які наносилися на відповідні поверхні моделі. Зазвичай, `CONTAxxx` застосовується для визначення типів контакту між поверхнями в складних обчислювальних моделях. "`CONTAxxx`" в контексті ANSYS може відноситися до різних типів елементів контакту, де "xxx" позначає конкретний тип або код елемента. В ANSYS існують різні види елементів контакту, такі як `CONTA171`, `CONTA174`, `CONTA178` і т. д., які використовуються для моделювання різних типів контактних взаємодій між об'єктами або частинами конструкцій. В свою чергу `TARGExxx` задає цільову поверхню контакту, а відповідні індекси вказують на тип цільової поверхні. Було застосовано різні комбінації `CONTAxxx` та `TARGExxx`.

Розмір проникнення розраховувався як відстань між вузлом контактного елемента та гранню допоміжного елемента. Тобто для випадків коли розміри контактних елементів були значно більшими за розміри допоміжних елементів, вузли допоміжної поверхні інколи здійснювали взаємопроникнення через грані контактної поверхні. Водночас, вузли контактної поверхні ніколи не проникали через грані допоміжної поверхні. Тому, розмір сітки в зоні контактної взаємодії підбирався дрібним по відношенню до об'єкта з контактною поверхнею, щоб було не порушено фізичного сенсу задачі.

Для жорстко-пружного контакту цільова поверхня була розташована на жорсткому тілі, а контактна поверхня – на пружному.

Для обчислення контактних сил були використані так звані «штрафні методи», які передбачають можливість невеликого перекриття контактних поверхонь на певну величину.

В пакеті Workbench Mechanical запропоновано різні методи розв'язання контактних задач. Для розв'язання поставлених задач було використано

метод штрафів (Pure Penalty), та розширений метод Лагранжа (Augmented Lagrange).

Методи штрафів та розширений метод Лагранжа ґрунтуються на залежності контактної сили від величини проникнення:

$$F_n = k_n \cdot x_p$$

Де k_n – жорсткість контакту (вздовж нормалі до поверхні); x_p – величина проникнення (вздовж нормалі до поверхні).

Основна різниця між методами Pure Penalty та Augmented Lagrange полягає в тому, що в останньому до сили контакту додається параметр λ , який зменшує чутливість до значення жорсткості контакту:

$$F_n = k_n \cdot x_p + \lambda$$

За замовчуванням використовувався метод штрафів як найбільш надійний з точки зору збіжності. Розширений метод Лагранжа використовувався з контактами типу Frictionless у задачах із значними деформаціями.

Для методу штрафів та розширеного методу Лагранжа існує можливість визначення точок інтегрування, що в деяких випадках сприяє поліпшенню збіжності, але водночас трошки збільшує час розрахунку.

3.3 Опис обраного скінченного елемента

Після проведення значної кількості чисельних експериментів з різними типами елементів для моделювання пружних тіл і враховуючи їхні переваги та обмеження, було обрано елемент SOLID186. Він задовольняє своїми властивостями і можливостями моделювання більш ніж інших скінченні елементи, такі як SOLID185 та SOLID187. Порівнюючи з SOLID185,

SOLID186 має більшу точність у моделюванні деформацій та великих напружень в складних геометричних структурах, так як SOLID186 дозволяє використовувати більшу кількість вузлів і, таким чином, точніше апроксимує форму тіла. У порівнянні з SOLID187, SOLID186 має більшу гнучкість у визначенні матеріальних властивостей, що дозволяє точніше моделювати реальні матеріали.

SOLID186 є тривимірним 20-вузловим твердим елементом, який проявляє квадратичну поведінку переміщення.

Елемент визначається 20 вузлами з трьома ступенями свободи на вузол: зсуви вузла в напрямку x_1 , x_2 та x_3 . Елемент підтримує пластичність, гіперпластичність, напруженість, великі вигини та великі деформації. Саме такі властивості скінченного елемента надають можливість застосовувати побудовані моделі для подальших досліджень процесів з виходом за межі пружних деформацій.

Геометрія, місцезнаходження вузлів та система координат елемента для цього елемента показані на рис. 3.2.

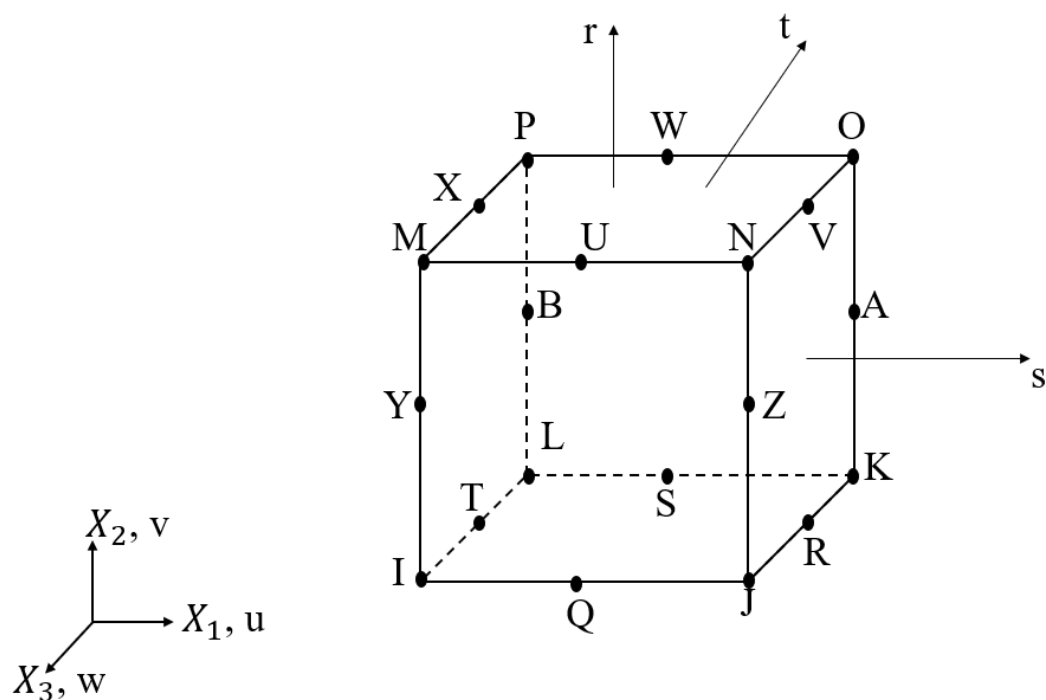


Рис. 3.2 Зовнішній вигляд елемента SOLID186

Дані функції форм застосовуються для твердих елементів з 20 вузлами, зокрема для SOLID186.

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{8}(u_I(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) + u_J(1+s)(1-t)(1-r)(s-t-r-2) \\
 & + u_K(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2) + u_L(1-s)(1+t)(1-r)(-s+t-r-2) \\
 & + u_M(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2) + u_N(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2) \\
 & + u_O(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2) + u_P(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2)) \\
 & + \frac{1}{4}(u_Q(1-s^2)(1-t)(1-r) + u_R(1+s)(1-t^2)(1-r) \\
 & + u_S(1-s^2)(1+t)(1-r) + u_T(1-s)(1-t^2)(1-r) \\
 & + u_U(1-s^2)(1-t)(1+r) + u_V(1+s)(1-t^2)(1+r) \\
 & + u_W(1-s^2)(1+t)(1+r) + u_X(1-s)(1-t^2)(1+r) \\
 & + u_Y(1-s)(1-t)(1-r^2) + u_Z(1+s)(1-t)(1-r^2) \\
 & + u_A(1+s)(1+t)(1-r^2) + u_B(1-s)(1+t)(1-r^2))
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{1}{8}(v_I(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) + v_J(1+s)(1-t)(1-r)(s-t-r-2) \\
 & + v_K(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2) + v_L(1-s)(1+t)(1-r)(-s+t-r-2) \\
 & + v_M(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2) + v_N(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2) \\
 & + v_O(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2) + v_P(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2)) \\
 & + \frac{1}{4}(v_Q(1-s^2)(1-t)(1-r) + v_R(1+s)(1-t^2)(1-r) \\
 & + v_S(1-s^2)(1+t)(1-r) + v_T(1-s)(1-t^2)(1-r) \\
 & + v_U(1-s^2)(1-t)(1+r) + v_V(1+s)(1-t^2)(1+r) \\
 & + v_W(1-s^2)(1+t)(1+r) + v_X(1-s)(1-t^2)(1+r) \\
 & + v_Y(1-s)(1-t)(1-r^2) + v_Z(1+s)(1-t)(1-r^2) \\
 & + v_A(1+s)(1+t)(1-r^2) + v_B(1-s)(1+t)(1-r^2))
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Де u – переміщення вздовж осі x_1 , v – переміщення вздовж осі x_2 , w – переміщення вздовж осі x_3 . Координати s , t і r нормалізуються, переходячи від -1,0 з одного боку елемента до +1,0 з іншого, і не обов'язково ортогональні одна одній. В загальному випадку осі x_1 , x_2 , x_3 мають однаковий напрям з осями s , t і r відповідно. М, Х, Р, W, О, V, N, U, А, К, R, J, Z, Q, I, Y, T, L, S, В – вузли скінченного елемента.

3.4 Опис розробленого програмного забезпечення на мові APDL

Для моделювання контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампу з пружним півпростором було розроблено програмне забезпечення на мові програмування APDL. Мова APDL є потужним інструментом для автоматизації процесів моделювання і розв'язання складних задач у середовищі ANSYS. Її застосування дозволило створити скрипти для визначення геометрії моделі, задання властивостей матеріалів, встановлення граничних умов, виконання розрахунків та аналізу результатів (рис. 3.3).

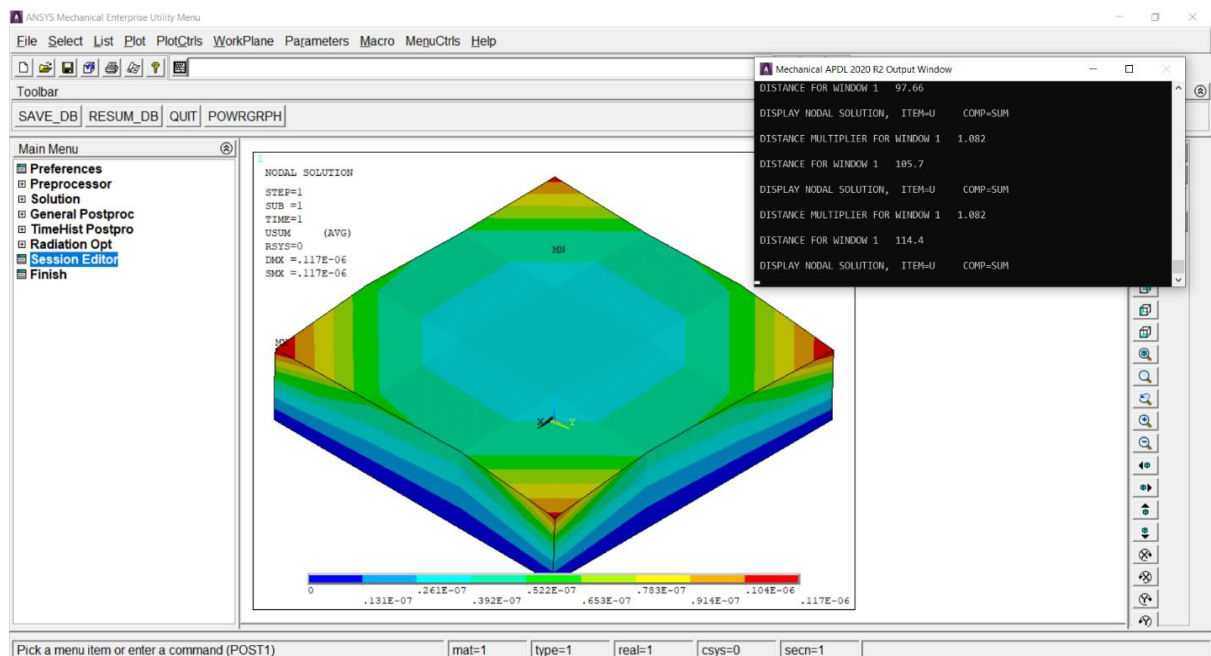


Рис. 3.3. Інтерфейс розробленого програмного забезпечення на мові APDL

Однією з переваг використання мови APDL є її гнучкість та можливість автоматизації. За допомогою графічного інтерфейсу ANSYS, а також скриптів APDL було створено складні моделі. Це дозволило швидко розробляти та модифікувати різні сценарії моделювання і проводити автоматичний аналіз різних варіантів постановок завдань.

Іншою важливою перевагою є інтеграція мови APDL з пакетом ANSYS. Оскільки APDL розроблена спеціально для взаємодії з ANSYS, через

неї було отримано доступ до багатьох особливих можливостей цього програмного забезпечення. Саме це дозволило використовувати розширені функції ANSYS безпосередньо у скриптах APDL для створення складних моделей та проведення розрахунків.

Перед виконанням основної частини скрипта запрограмовано процес налаштування середовища а саме: завершення попередньої роботи, очищення попередніх даних та відкриття нового режиму для підготовки комп'ютерної моделі. Далі відбувається створення блокової сітки на основі даних вказаних користувачем. Після цього проводиться процес ініціалізації властивостей матеріалів, тобто визначаються їх характеристики. Далі задаються умови навантаження. В окремому програмному блоці встановлюється кольорова палітра з використанням RGB для заданих індексів кольорів. Після задання всіх необхідних параметрів відбувається запит на розв'язання задачі. Отримані результати візуалізуються за допомогою спеціального середовища (рис. 3.3) для наочного представлення чисельних даних, завдяки якому результати розрахунків нормальних напружень і переміщень виводяться та будуються графіки.

3.5 Аналіз отриманих результатів та перевірка моделі на адекватність

Після завдання всіх необхідних параметрів та проведення процесу комп'ютерного моделювання, було проведено аналіз, використовуючи post processing отриманих результатів. Було досліджено напруження, що виникають в процесі пружної деформації півпростору під дією штамп. На рис. 3.4 наведено приклад скінченно-елементної сітки на поверхні пружного, деформованого півпростіру на який тисне абсолютно жорсткий, плоский, трикутний кільцевий в плані штамп, що має навантаження зосереджене у центрі тяжіння штамп, тобто центральне навантаження. Для отримання таких результатів в ANSYS було використано спеціальний модуль Linearized Stress.

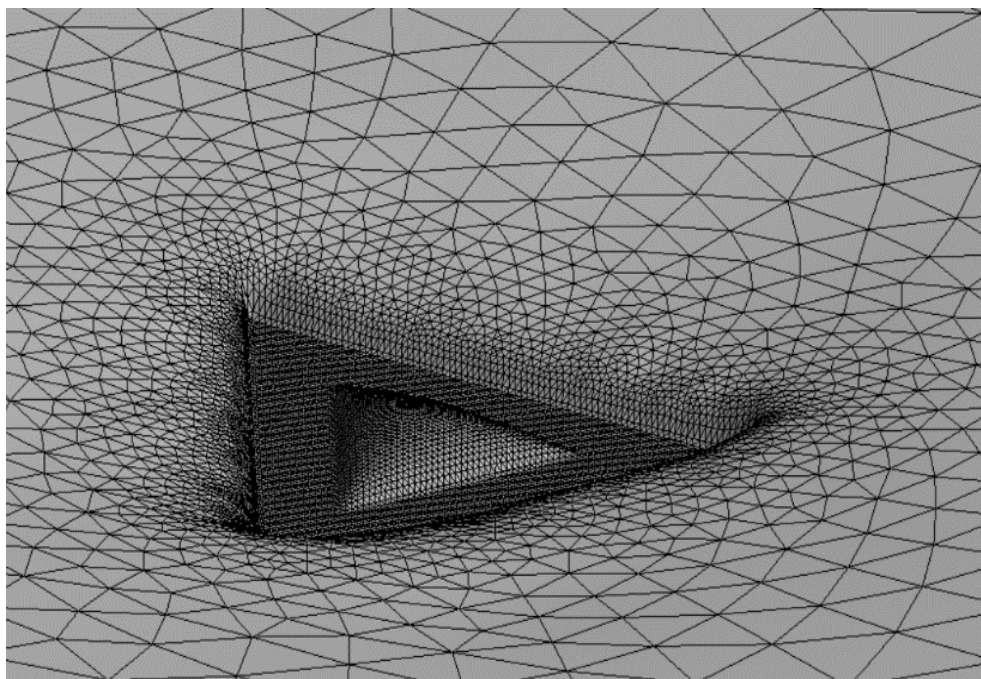


Рис. 3.4. Скінченно-елементна сітка на поверхні деформованого півпростору, область контакту

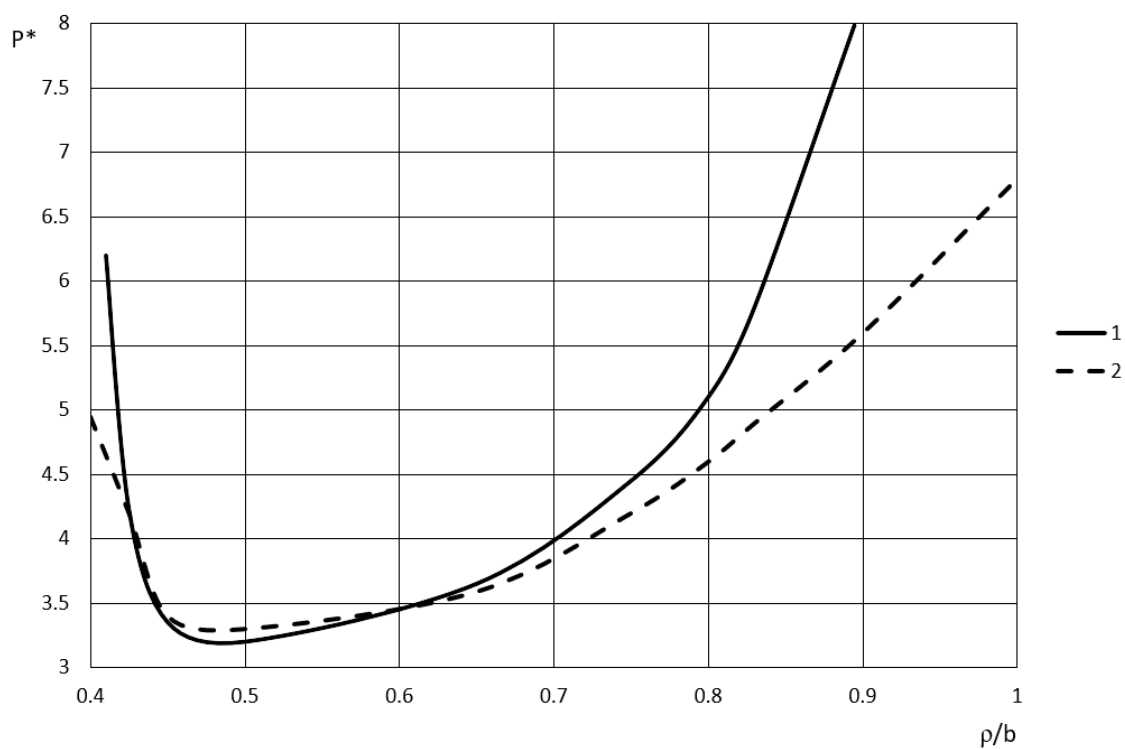


Рис. 3.5. Розподіл нормального тиску в перерізі $\theta=0$: 1- аналітичне рішення, 2 – чисельне рішення

На рис. 3.5. представлено графік розподілу нормального тиску під

кільцевим трикутним штампом для даних отриманих аналітичним шляхом для випадка, коли $a = 0.6b$ в точках (ρ, θ_*) променя, який виходить з початку координат та перетинає зовнішній і внутрішній контури області контакту в точках $(\rho_{\Gamma 1}, \theta_*)$ і $(\rho_{\Gamma 2}, \theta_*)$.

Результати дослідження показали що нормальні напруження отримані аналітичним шляхом на краях зони контакту значно вищі за чисельні та прямують до нескінченності. В зоні контакту в межах середньої частини кільця значення нормальних напружень майже близькі. На зовнішній границі контакту маємо значний розбіг в отриманих результатах, що можна було передбачити з причини існуючих різниць у підходах між аналітичним і чисельним розв'язанням такого класу задач. Також треба мати на увазі особливості, що мають місце при розрахунку напруг у кутових зонах контактуючих тіл. Відносна різниця у розрахунках нормального тиску у середній зоні кільця не перевищують 10%, та існують області де присутні майже повне співпадіння результатів. Також треба відзначити, що напруги ростуть швидше із зовнішньої сторони кільця. Зі зменшенням ширини кільця значно зростають напруги і з внутрішньої сторони. Результати чисельного розв'язку знаходяться в рамках допустимих відхилень.

Розподіл нормальних напружень в зоні контакту плоского абсолютно жорсткого однозв'язного штампу за формою поперечного перерізу подібного до шестикутника з пружним підпростором наведено на рис. 3.6. Задача є вісесиметричною. На штамп діє, що прикладене вертикально лінія дії якого проходить через центр тяжіння штампу. Нормальні напруження є найбільшими вздовж країв підшви штампу. Максимальні значення напружень виникають у кутових точках.

У центральній частині зони контакту, напруження досягають свого мінімуму, а саме у центрі тяжіння підшви штампу. Переміщення пружного півпростору під підшвою штампу є рівномірним.

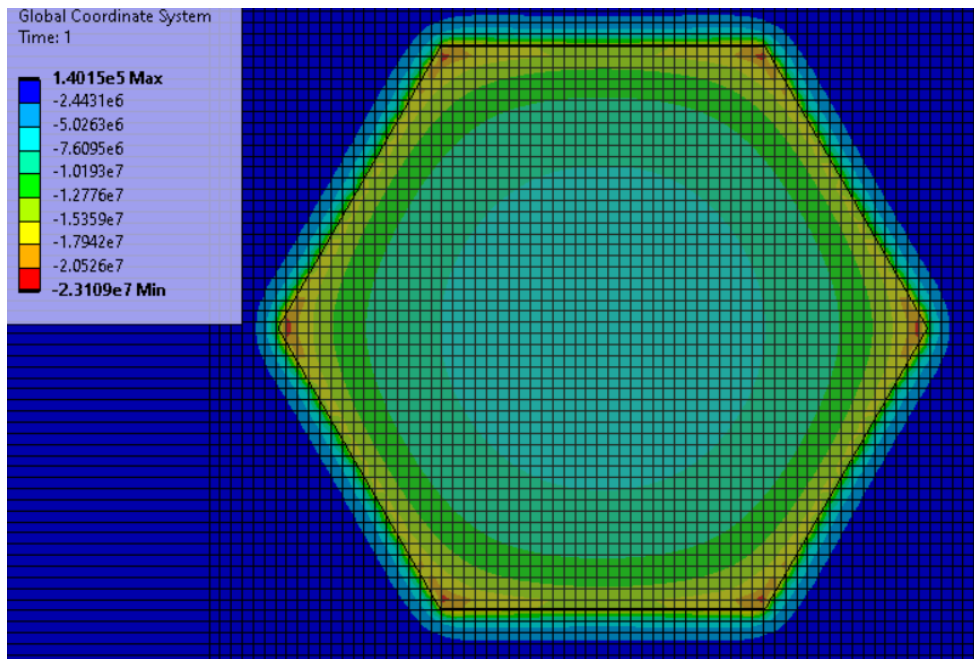


Рис. 3.6. Розподіл нормального тиску під штампом поперечний переріз якого близький до шестикутника

Розподіл нормальних напружень в зоні контакту плоского абсолютно жорсткого двозв'язного в плані штампу в формі близької до шестикутного кільця з пружним підпростором представлено на рис. 3.7, 3.8. Розподіл нормальних напружень під підшоною штампу досягає своїх максимумів на границях штампу, значно більший зі сторони зовнішньої границі штампу (що співпадає з характером поведінки напружень для аналітичного розв'язку, отриманого у другому розділі), але не прямує до нескінченності, що притаманно для результатів отриманих за допомогою метода скінченних елементів для моделі пружного півпростору. Максимальні значення напружень виникають у кутових точках. Переміщення пружного півпростору під підшоною штампу є рівномірним.

На рис. 3.8, *а - в* представлено розподіл нормального тиску під двозв'язними штампами з поперечним перерізом у формі близької до шестикутних кілець різної ширини. На рис. 3.8, *г* представлено розподіл нормального напруження під одозв'язним штампом з поперечним перерізом у формі шестикутника. На графіках надано розподіл нормального тиску у вздовж вісі Ox .

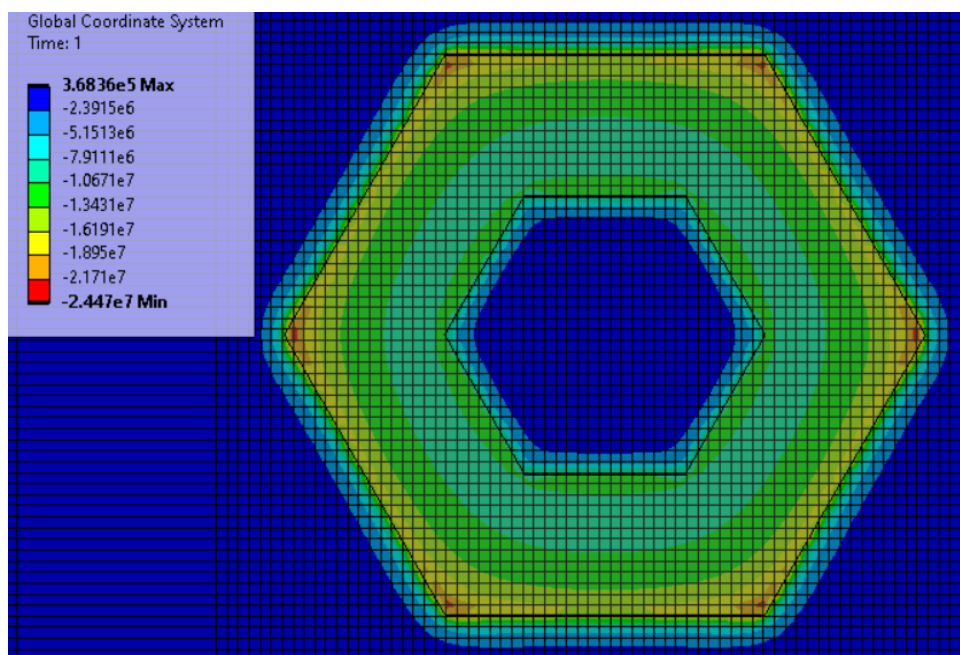


Рис. 3.7. Розподіл нормального тиску під штампом поперечний переріз якого близький до шестикутного кільця

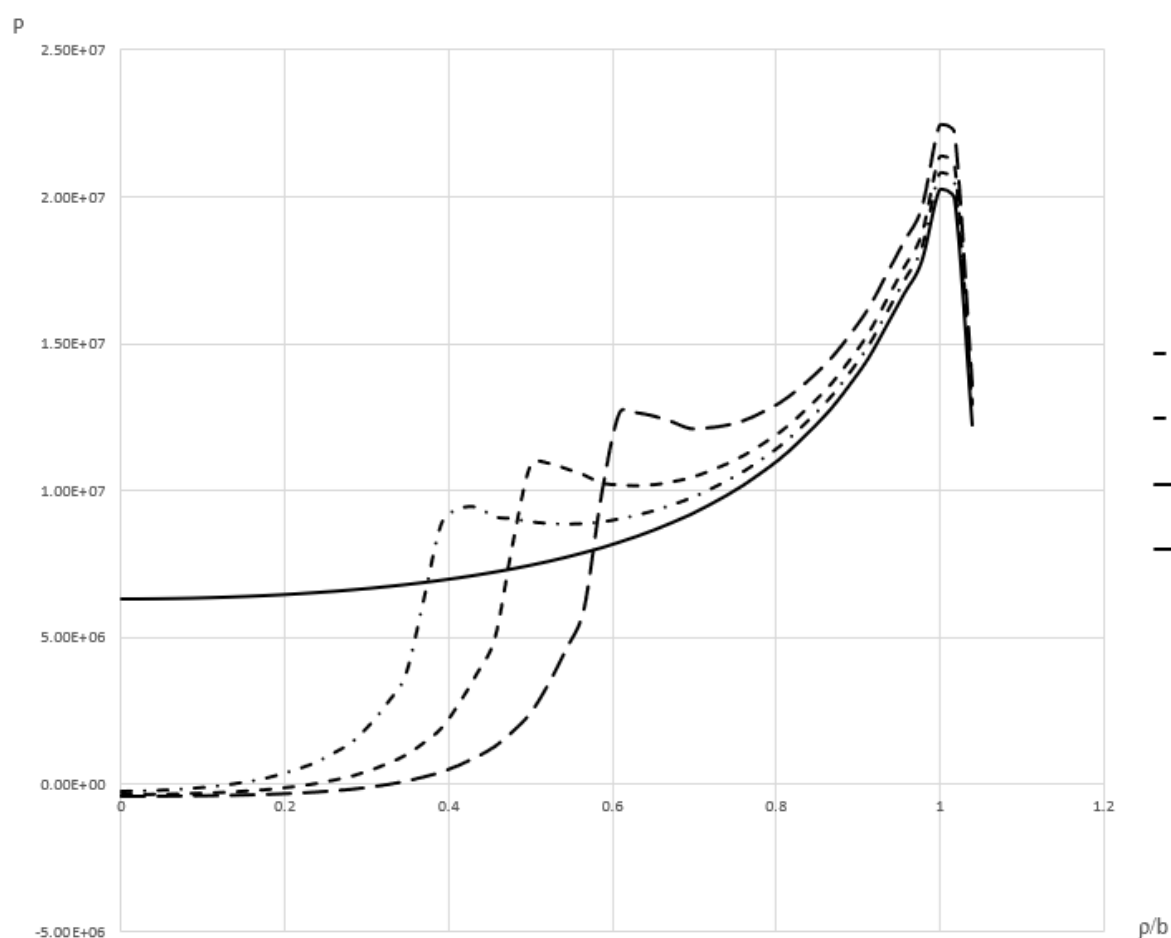


Рис. 3.8. Графік розподілу нормального тиску під штапом у формі поперечного перерізу близької до:

a – шестикутного кільця при $a/b = 0.4$; b – шестикутного кільця при $a/b = 0.5$; c – шестикутного кільця при $a/b = 0.6$; d – шестикутника $a/b = 0$

На рис. 3.8 представлено графіки розподілу нормального тиску під штапами з поперечним перерізом у формі близької до шестикутного кільця для випадків коли коефіцієнти подібності між внутрішнім і зовнішнім контурами дорівнюють 0.4; 0.5; 0.6. А також представлено графік для випадку розподілу нормальних напружень під однозв'язним шестикутним штапом. Можна побачити що значення напружень для більш вузьких штапів вищі порівняно з більш широкими штапами, та мають аналогічний загальний характер поведінки розподілу.

На рис. 3.9 представлено результати комп'ютерного моделювання взаємодії циліндричного плоского у плані штапа у формі круга з ізотропним пружним півпростором. На рис. 3.9, *a* представлено розподіл нормальних напружень для штапа у формі круга без пошкоджень. На рис. 3.9, *b–d* послідовно представлено розподіл нормальних напружень для пошкодження типу зношення. Пошкодження зношення відбувалося за наступним правилом: для центрального кута у 90° поступово з кроком 0.04 від величини радіуса круга видалялася частина поперечного перерізу круга (за допомогою сплайн функції). З рис. 3.9, *b* можна бачити, що зношення відбувалося з однієї сторони круга (центральный кут - 90°) на глибину 0.12 від величини радіусу. З рис. 3.9, *c* можна бачити, що зношення відбувалося з двох протилежних сторін круга ($90^\circ+90^\circ$) на глибину 0.12 від величини радіусу. З рис. 3.9, *d* можна бачити, що зношення відбувалося з трьох сторін круга (270°) на глибину 0.12 від величини радіусу. З рис. 3.9, *e* можна бачити, що зношення відбувалося з чотирьох сторін круга (360°) на глибину 0.12 від величини радіусу. На рис. 3.9, *e* представлено випадок точкового пошкодження типу тріщина, що проникає на глибину 0.2 від величини

радіуса штампа.

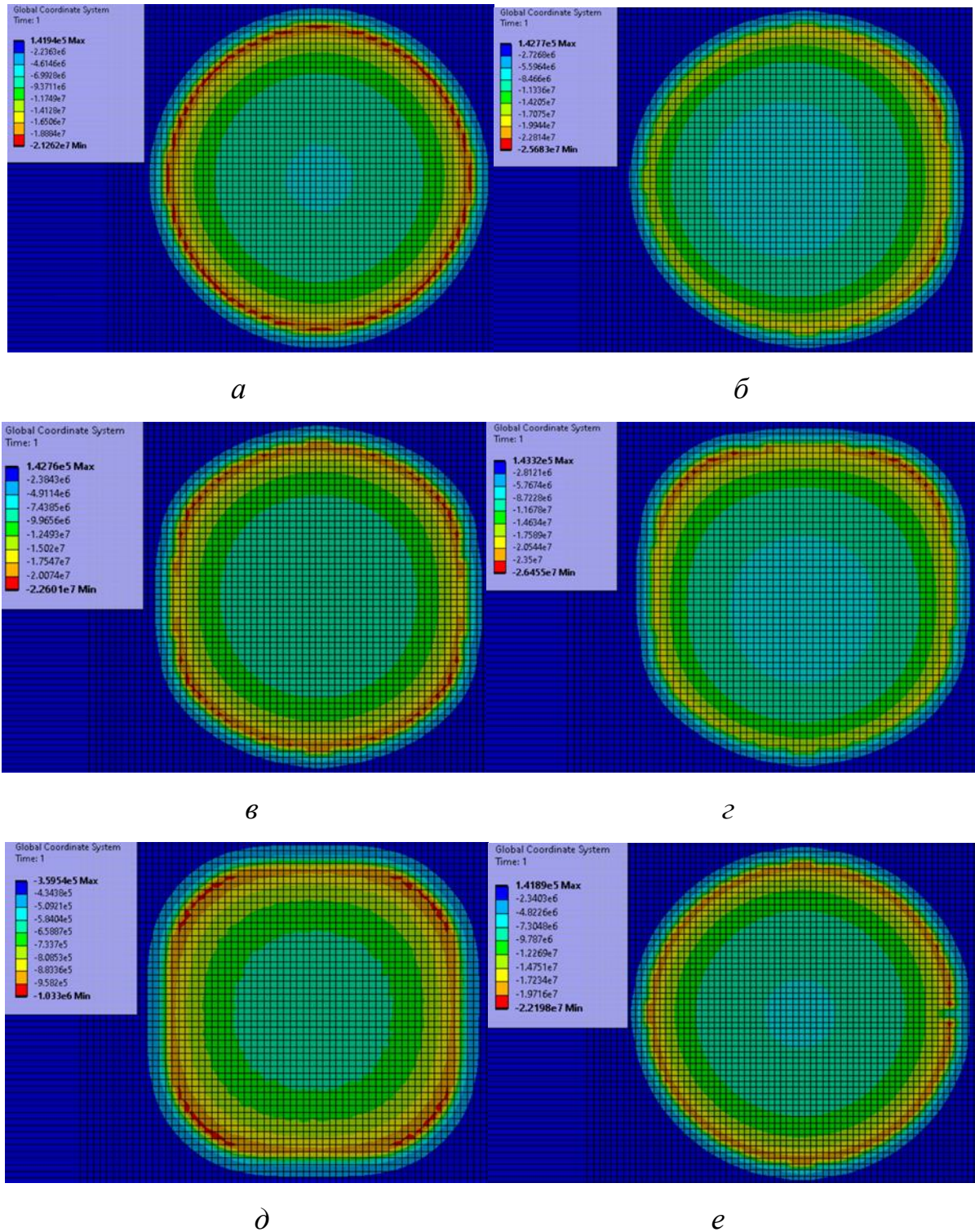
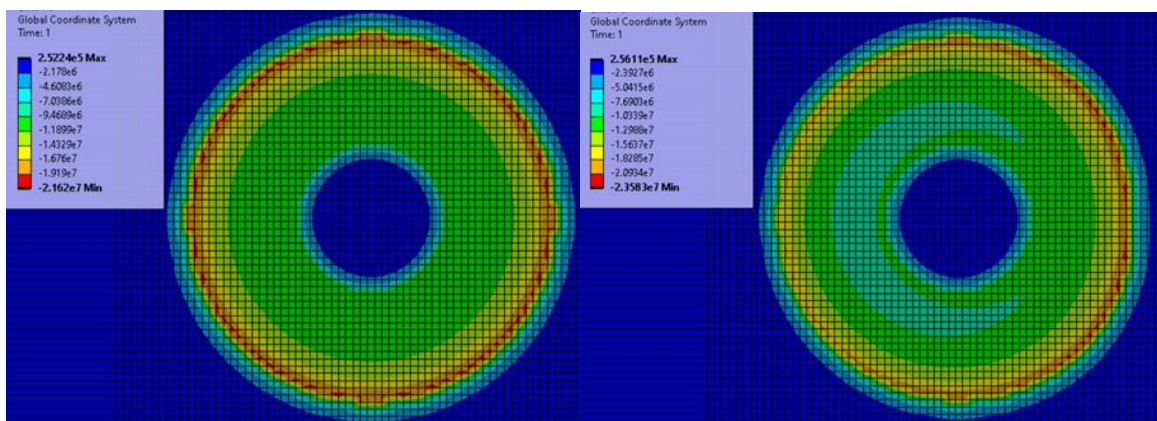


Рис.3.9. Розподіл нормальних напружень на півпросторі під круговим штампом: *a* – круг без пошкоджень; *б* – круг з пошкодженням краю штампу у межах центрального кута 90°; *в* – круг з пошкодженням краю штампу у межах двох вертикальних центральних кутів (90° + 90°); *г* – круг з пошкодженням краю штампу у межах трьох центральних кутів (90°

$+90^\circ+90^\circ$); δ – круг з пошкодженням краю штамп у межах чотирьох центральних кутів ($90^\circ+90^\circ+90^\circ+90^\circ$); e – круг з пошкодження типу тріщина, що проникає на глибину 0.2 від радіуса штамп

На рис. 3.10 у якості прикладів представлено результати комп'ютерного моделювання взаємодії циліндричного плоского у плані штамп у формі кільця з ізотропним пружним півпростором. На рис. 3.10, *a* представлено розподіл нормальних напружень для штамп у формі кільця без пошкоджень. На рис. 3.10, *б–e* послідовно представлено розподіл нормальних напружень для пошкодження типу зношення. Пошкодження зношення відбувалося за наступним правилом: для центрального кута у 60° поступово з кроком 0.0625 від величини ширини кільця видалялася частина поперечного перерізу (за допомогою сплайн функції). З рис. 3.10, *б* можна бачити, що зношення відбувалося з однієї сторони зовнішнього контуру кільця на глибину 0.125 від ширини кільця. На рис. 3.10, *в* продемонстровано, що зношення відбувалося з тієї ж сторони зовнішнього контуру кільця на глибину 0.1875 від ширини кільця. На рис. 3.10, *г* – зношення відбувалося з тієї ж сторони зовнішнього контуру кільця на глибину 0.25 від ширини кільця. На рис. 3.10, *д* – зношення відбувалося з тієї ж сторони зовнішнього контуру кільця на глибину 0.3125 від ширини кільця. На рис. 3.10, *е* – зношення відбувалося з тієї ж сторони зовнішнього контуру кільця на глибину 0.375 від ширини кільця.

*a**б*

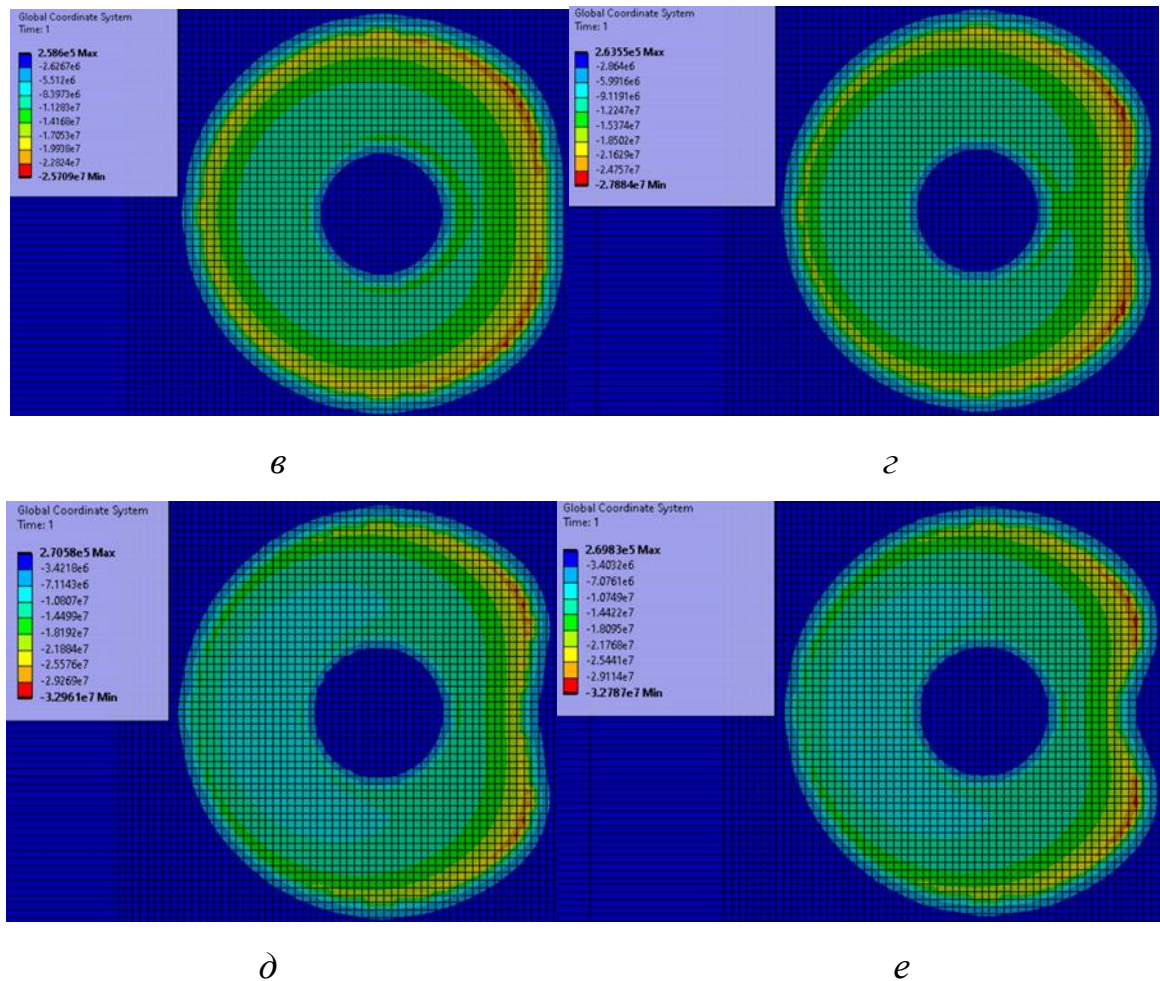


Рис. 3.10. Розподіл нормальних напружень на півпросторі під кільцевим штампом: *a* – кругове кільце без пошкоджень; *б* – кругове кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.125 від величини ширини кільця ; *в* – кругове кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.1875 від величини ширини кільця ; *г* – кругове кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.25 від величини ширини кільця ; *д* – кругове кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.3125 від величини ширини кільця ; *е* – кругове кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.375 від величини ширини кільця

На рис. 3.11 представлено результати комп'ютерного моделювання взаємодії циліндричного плоского у плані штамп у формі кільця близького до квадратного з ізотропним пружним півпростором. На рис. 3.11, *a* представлено розподіл нормальних напружень для штамп у формі квадратного кільця без пошкоджень. На рис. 3.11, *б–г* послідовно представлено розподіл нормальних напружень для пошкодження типу

зношення. Пошкодження зношення відбувалося за наступним правилом: для центрального кута у 60° поступово з кроком 0.05 від величини радіуса описаного кола (радіус описаного кола є бісектрисою центрального кута 60° для якого відбувається зношення) видалялася частина поперечного перерізу із зовнішньої сторони квадратного кільця, саме починаючи з кутової точки. З рис. 3.11, *б* можна бачити, що зношення відбувалося з одного кута зовнішнього контуру (центральный кут - 60°) на глибину 0.15 від величини радіуса описаного кола. На рис. 3.11, *в* – зношення відбувалося з цього ж кута зовнішнього контуру на глибину 0.25 від величини радіуса описаного кола. На рис. 3.11, *г* – зношення відбувалося з цього ж кута на глибину 0.4 від радіуса описаного кола.

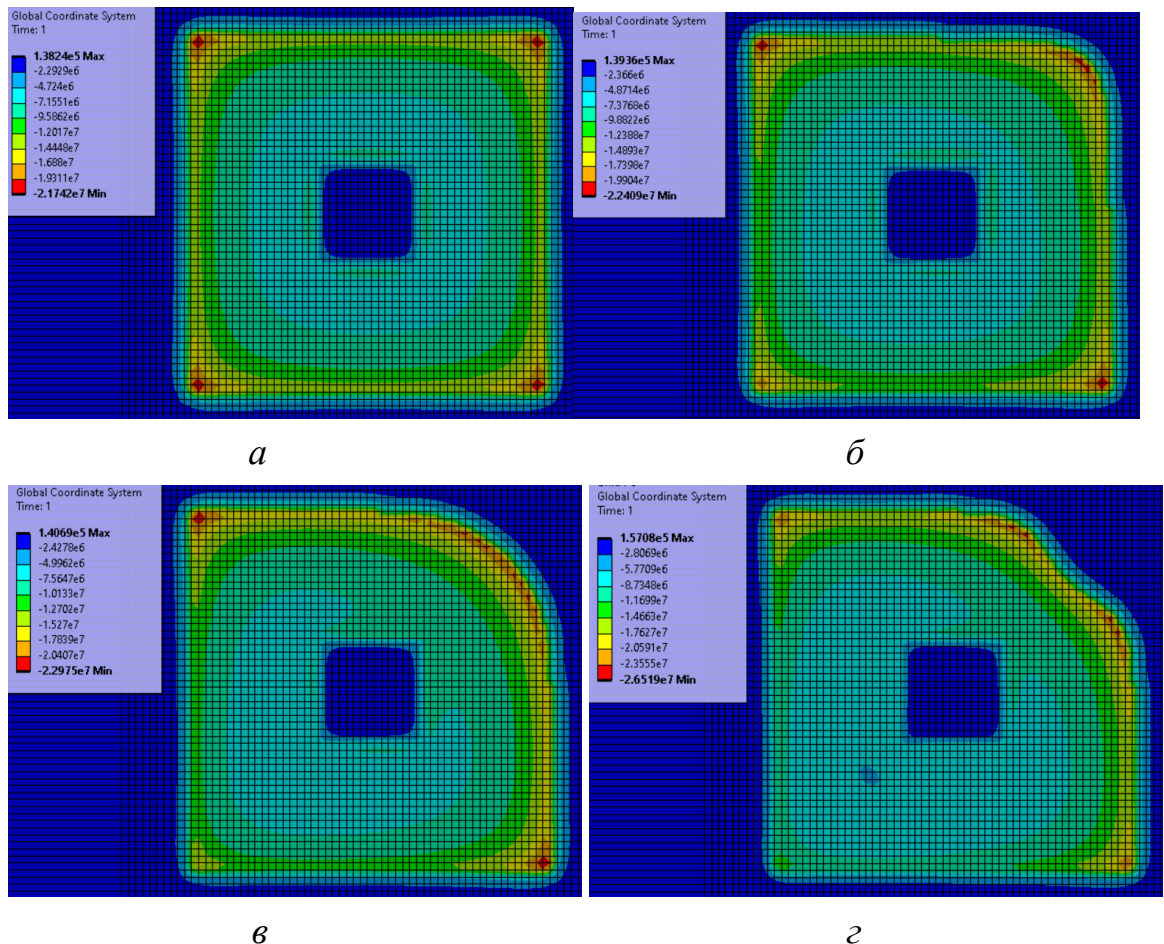


Рис. 3.11. Розподіл нормальних напружень на півпросторі під кільцевим штампом: *a* –квадратне кільце без пошкоджень; *б* – квадратне кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.15 від величини радіуса описаного кола; *в* –квадратне кільце з пошкодженням на куті 60° глибиною 0.25 від величини радіуса описаного кола; *г* – квадратне кільце з пошкодженням на

куті 60° глибиною 0.4 від величини радіуса описаного кола

На рис. 3.12 представлено результати комп'ютерного моделювання взаємодії циліндричного плоского у плані штампа у формі квадратного кільця з ізотропним пружним півпростором. На рис. 3.12, *а–г* представлено розподіл нормальних напружень для пошкодження типу зношення. Пошкодження відбувалося за наступним правилом: для центрального кута у 60° (радіус описаного кола є бісектрисою центрального кута 60° для якого відбувається зношення) поступово з кроком 0.05 від величини радіусу описаного кола видалялася частина поперечного перерізу штампа.

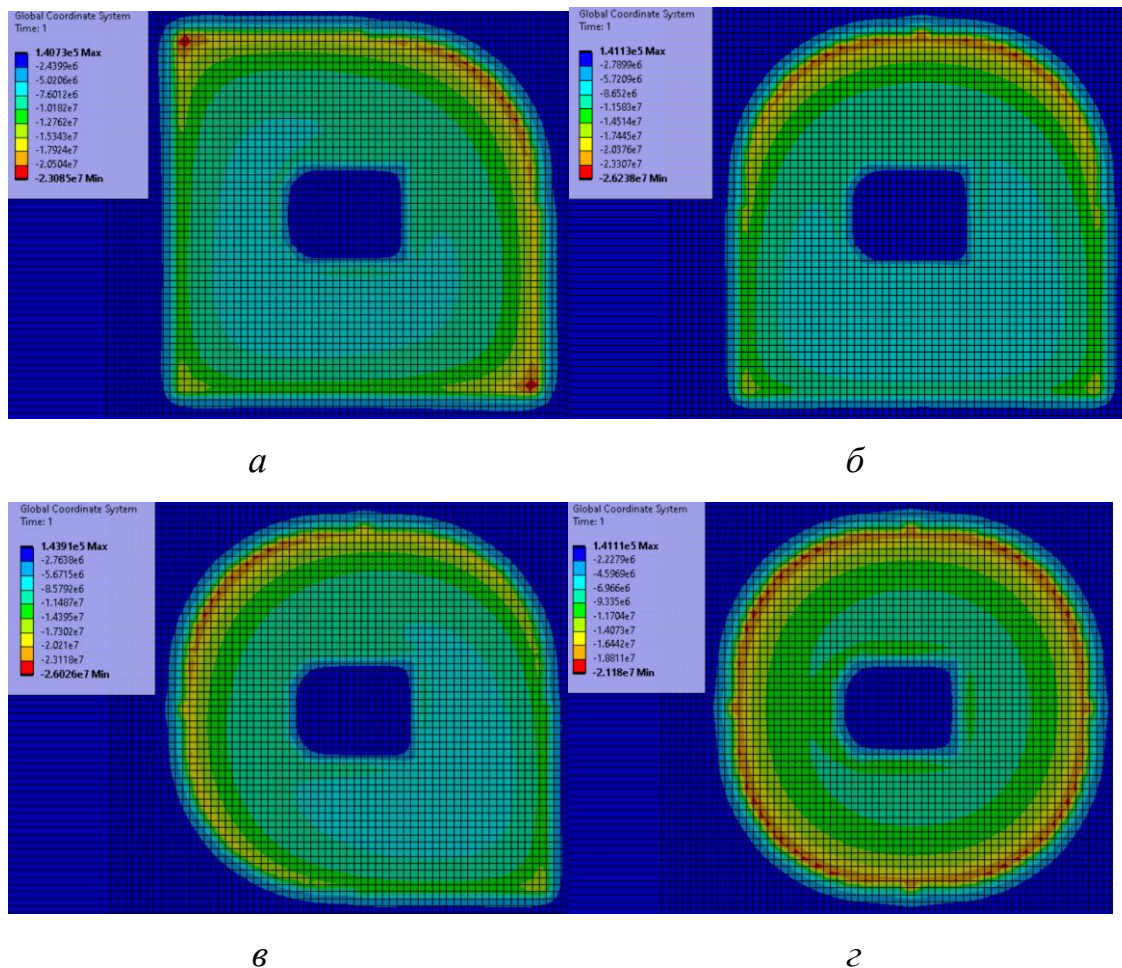


Рис. 3.12. Розподіл нормальних напружень на півпросторі під кільцевим штампом: *а* – квадратне кільце з пошкодженням зовнішнього кута 0.25 та внутрішньої сторони глибиною 0.1 від величини радіуса описаного кола; *б* – квадратне кільце з пошкодженням двох зовнішніх кутів 0.25 та внутрішньої сторони глибиною 0.1 від величини радіуса описаного кола; *в* – квадратне

кільце з пошкодженням трьох зовнішніх кутів 0.25 та внутрішньої сторони глибиною 0.1 від величини радіуса описаного кола; ε – квадратне кільце з пошкодженням чотирьох зовнішніх кутів 0.25 та внутрішньої сторони глибиною 0.1 від величини радіуса описаного кола

Пошкодження також було із однієї внутрішньої сторони квадратного кільця на глибину 0.1 від радіуса описаного кола на центральному куті 90° , промені якого проходили через вершини внутрішнього квадрату. На рис. 3.12, *a* – зношення відбувалося з одного кута зовнішнього контуру квадратного кільця на глибину 0.25 від радіуса описаного кола, та з однієї сторони внутрішнього кільця на глибину 0.1 від радіуса описаного кола. На рис. 3.12, *б* – з двох сусідніх кутів зовнішнього контуру кільця на глибину 0.25 від радіуса описаного кола і з внутрішнього контуру на глибину 0.1 – залишилося в тій же позиції. На рис. 3.12, *в* – з трьох кутів зовнішнього контуру кільця на глибину 0.25 від радіуса описаного кола, і з внутрішнього контуру на глибину 0.1 – залишилося в тій же позиції. На рис. 3.12, ε – з чотирьох кутів на глибину 0.25 радіуса описаного кола, і з внутрішнього контуру на глибину 0.1 – залишилося в тій же позиції.

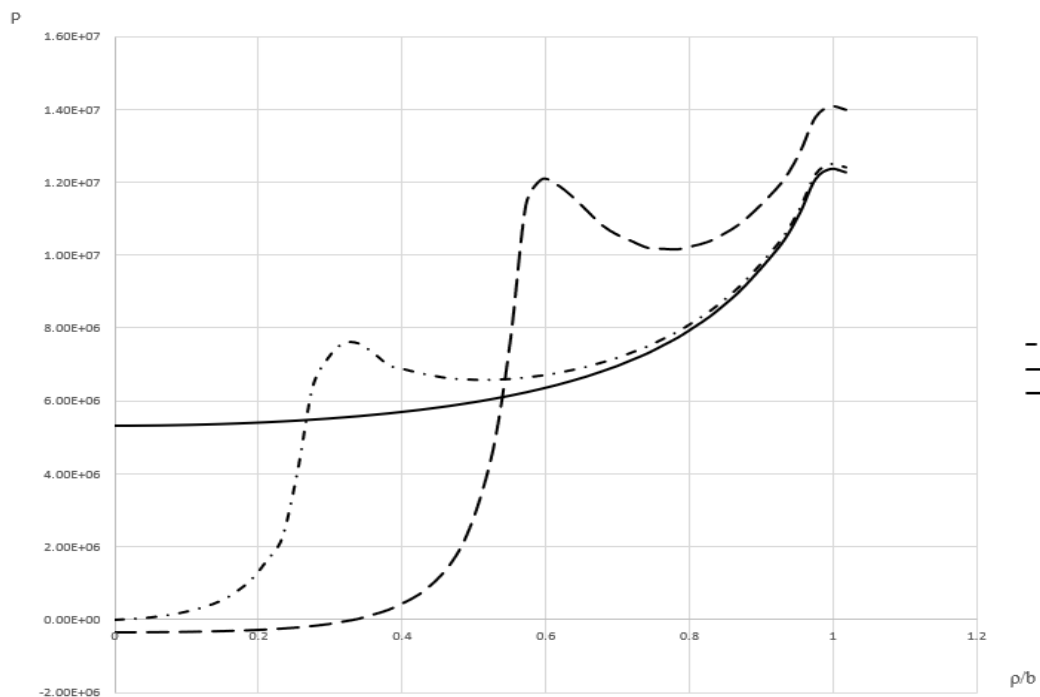


Рис. 3.13. Графік розподілу нормального тиску під штампом у формі поперечного перерізу близької до:

a –квадратного кільця при $a/b = 0.3$; b –квадратного кільця при $a/b = 0.6$;
 c –квадрата $a/b = 0$

На рис. 3.13, a , b представлено графіки розподілу нормального тиску під штампами з поперечним перерізом у формі близької до квадратного кільця для випадків коли коефіцієнти подібності між внутрішнім і зовнішнім контурами дорівнюють 0.3; 0.6. А також представлено графік для випадку розподілу нормальних напружень під однозв'язним квадратним штампом. Можна побачити що значення напружень для більш вузьких штампів вищі порівняно з більш широкими штампами, та мають аналогічний загальний характер поведінки розподілу. На графіках надано розподіл нормального тиску у вздовж вісі Ox .

Розглядалися пошкодження типу зношення, але існує підхід, що базується на існуючих корозійних моделях таких як модель Гутмана і модель Долинського. Ці моделі – це два різних підходи до математичного опису процесів корозії металів.

Модель Гутмана [89] базується на геометричних розгляданнях росту корозійного пошкодження. Вона описує процеси росту дефектів на металевій поверхні внаслідок корозії. У моделі Гутмана враховується вплив хімічних та фізичних характеристик середовища на швидкість корозії. Модель враховує ступінь пошкодження металевої поверхні на різних етапах корозії. Ця модель базується на рівнянні, яке враховує вплив концентрації кисню, температури та хімічного складу середовища на швидкість корозії.

Основне рівняння моделі Гутмана має вигляд:

$$\frac{dW}{dt} = V_0 \exp\left(\frac{v\sigma}{RT}\right),$$

де V_0 – швидкість корозії навантаженого матеріалу, v – мольний об'єм металу, σ – шарова частина тензору напружень, R – універсальна газова константа, T – температура в Кельвінах.

Це рівняння дозволяє прогнозувати швидкість корозії в залежності від параметрів середовища, таких як концентрація кисню та температура, а

також властивостей матеріалу, включаючи його хімічний склад та кінетичні параметри.

Модель Гутмана може використовуватися для оцінки стійкості сталей у різних середовищах та для прогнозування терміну служби металевих конструкцій під впливом корозії.

Модель Долинського [10] базується на принципах електрохімічної корозії та інтеракції між металом та середовищем. Модель описує кінетику хімічних реакцій, що відбуваються на металевій поверхні під час корозії. Модель Долинського може враховувати різні механізми корозії, такі як анодне, катодне та змішане використання електродів.

$$\frac{dW}{dt} = \varphi(t)(1 + k\sigma)$$

де $\varphi(t)$ – функція, що описує швидкість корозії навантаженого матеріалу, k – коефіцієнт корозії, який залежить від хімічного складу та властивостей матеріалу, σ – шарова частина тензору напружень.

Модель Долинського також може включати додаткові параметри, такі як концентрації реагентів, температура, рН середовища та інші фактори, які можуть впливати на швидкість корозії. Вона дозволяє прогнозувати швидкість корозії металу в різних умовах та середовищах на основі фізико-хімічних властивостей системи.

Отже, вони відрізняються підходами до опису процесів корозії, методами моделювання та фізичними аспектами, які вони враховують. Обидві моделі використовуються для аналізу та прогнозування корозійних процесів, але можуть мати різні області застосування в залежності від умов і об'єктів дослідження.

3.6 Висновки до розділу

Розглянуто задачу про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір абсолютно жорсткого, плоского циліндричного штамп, обмеженого гладкою поверхнею. Дослідження контактної взаємодії між

плоскими штампами з пружним півпростором проведено за допомогою програмного комплексу ANSYS.

Відповідно результатам отриманих за моделями, побудованими в другому розділі, маємо зростання нормальних напружень до нескінченності як з внутрішнього так і з зовнішнього контурів штампу. Аналіз числових результатів продемонстрував, що розподіл нормальних напружень під подошвою штампу досягає своїх максимумів на границях штампу, значно більший зі сторони зовнішньої границі штампу (що співпадає з характером поведінки напружень для аналітичного розв'язку, отриманого у другому розділі), але не прямує до нескінченності, що притаманно для результатів отриманих за допомогою метода скінченних елементів для моделі пружного півпростору.

За допомогою програмного комплексу ANSYS було проведено низку числових експериментів для групи моделей що враховували можливі пошкодження у разі перебування системи штамп-пружній півпростір в складних природних умовах або в агресивному середовищі. Таким чином, було сформовано масиви даних з метою подальшої передачі її у програмний інструмент CLIPS де в подальшому була сформована експертна система.

З метою корегування параметрів комп'ютерної моделі через функціонал, який відсутній в поточному інтерфейсі користувача програмного комплексу ANSYS було розроблено програмне забезпечення на специфічній пропрієтарній мові програмування для інженерних рішень (APDL). Розроблене програмне забезпечення надало можливість швидко створювати та аналізувати складні моделі, отримуючи доступ до всіх функцій ANSYS.

Порівняння отриманих числових результатів з результатами аналітичного розв'язку було проведено для оцінки точності та адекватності побудованих скінченно-елементних моделей. Порівняння показало узгодження між числовими та аналітичними значеннями, що свідчить про те, що запропоновані моделі адекватно описують фізичні процеси, які відбуваються у зоні контакту.

Розділ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФОРМИ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ШТАМПА

4.1 Постановка задачі

Ідентифікація форм площадок контакту тіл, що взаємодіють залишається актуальною проблемою. Ця проблематика має велике значення для багатьох галузей, включаючи машинобудування, медицину, робототехніку, геологію і багато інших. Саме такі дослідження стають все більш вагомими для вирішення практичних завдань та оптимізації процесів, що має суттєвий вплив на науковий та промисловий прогрес [88, 105]. Один з методів вирішення – розв'язання обернених контактних задач. Але ж такі задачі достатньо складні для розв'язання через те, що зазвичай інформація, доступна для аналізу, обмежена та неповна. Вирішення їх вимагає врахування багатьох факторів, таких як нелінійність взаємодії, обмеження вимірювань, тощо. Експертні системи стають ключовим інструментом для розв'язання цих складнощів завдяки своїм здібностям до навчання, аналізу великих обсягів інформації та розпізнавання складних залежностей [110].

Фундаментальні компоненти експертної системи включають базу знань, механізм логічного висновку та інтерфейс користувача. База знань містить експертизу та предметно-спеціальні знання, отримані від експертів-людей та інших джерел знань. Вона організований у формі правил, фактів, евристик або інших методів представлення знань.

Розглянемо задачу аналогічну сформульованій у розділі 2, а саме про вдавлення в ізотропний пружний півпростір жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою (рис. 2.1). У разі перебування системи штамп-пружний півпростір в складних природних умовах або в агресивному середовищі за певний час, відбуваються можливі випадкові пошкодження тобто, наприклад, ударні, вимивання потоками води, вітру або такі, що виникають за певним законом, наприклад, корозія. Тобто, за таких умов, з

часом, розміри зон контакту можуть змінюватися і стають невідомими. Після пошкоджень форми штамп, навантаження перестає бути центральним і з'являється необхідність врахування дотичних напружень. Експертна система побудована таким чином, що за необхідності враховуються і дотичні напруження. Необхідно на основі отриманих значень розподілу напружень близько до контуру штамп (інколи під штампом) розрахувати геометричні характеристики зміненого поперечного перерізу штамп.

4.2 Загальний підхід до розв'язання контактної задачі як оберненої

Постановці та методам розв'язання обернених контактних задач приділяється все більше уваги як в нашій країні, так і за кордоном. Про це свідчить постійне збільшення наукових публікацій за даною тематикою [34, 86, 106, 107, 131, 135]. Контроль стану технічних систем передбачає оцінку критичніших параметрів їх математичних моделей. Оскільки досить часто властивості багатьох об'єктів природи недоступні для безпосереднього вивчення, оцінка цих параметрів може бути проведена, наприклад, шляхом розв'язання обернених задач [11]. Це відноситься до їх визначення на підставі інших параметрів, які доступні для контролю, тобто вирішенні операторного рівняння загальної структури:

$$Au = f, \quad (4.1)$$

де A – деякий оператор, який перетворює оцінювані елементи u із множини U на елементи f із множини вимірювань F [131]. Припустимо, що математична модель оператора A відома. Розв'язання оберненої задачі в такому випадку може бути записане як:

$$u = A^{-1}f, \quad (4.2)$$

де A^{-1} – обернений оператор і він не є взагалі кажучи, неперервним.

Складнощі у вирішенні задачі в такій постановці пов'язані з тим, що в початковому вигляді вона може бути некоректно сформульованою, тобто не

задовольняти трьом вимогам Адамара до обернених задач – умовам розв'язуваності – для кожного елемента $u \in U$ існує розв'язок з простору F ; єдиності – рішення однозначно визначено; стійкості (неперервності) у просторах (U, F) . Тому потрібна регуляризація задачі, тобто переведення її в клас коректно поставлених, задовольняючи цим вимогам.

Як некоректно поставлену задачу ми будемо розглядати ту, що включає вирішення рівняння:

$$Az = u, \quad (4.3)$$

відносно z , де $u \in U$, $z \in Z$, U та F – метричні простори. Оператор A відображає F на U . Припускається, що є взагалі кажучи не неперервний обернений оператор A^{-1} .

Широко застосовуваним у обчислювальній практиці способом наближеного рішення такої задачі є метод підбора [131]. Тобто, для елементів u деякого вже створеного підкласа можливих рішень M ($M \subset F$) обчислюється оператор Az , тобто розв'язується пряма задача. У якості наближеного рішення береться такий елемент z_0 із множини M , на якому нев'язка $\rho_U(Az_0, u)$ досягає мінімуму:

$$\rho_U(Az_0, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u). \quad (4.4)$$

Практична мінімізація нев'язки $\rho_U(Az, u)$ виконується наближено. Тому актуальним є питання ефективності метода підбора. В результаті аналізу метода підбору, було встановлено загальнофункціональні вимоги, які обмежують клас можливих рішень M . Ці вимоги забезпечують стійкість методу підбору та $z_n \rightarrow z_T$, і вони виражаються у компактності множини M .

Загальним принципом розв'язання задачі регуляризації вважається формування та подальша мінімізація так званого цільового функціоналу, що дозволяє побудувати оператор M , який вже і виконує коректну функцію оберненого оператора A^{-1} . Отже, завдання знаходження наближеного

розв'язку рівняння (4.3), який буде стійким до змін правої частини, можна сформулювати наступним чином:

- а) визначення регуляризуючих операторів;
- б) встановлення параметра регуляризації α на основі додаткової інформації про задачу, наприклад, за величиною, якою визначається права частина u_δ .

Що, власне, і відтворюється у процесі реалізації метода регуляризації.

Загальноприйнятий метод вирішення некоректних задач – ітеративний метод послідовних наближень [131]. Він є достатньо універсальним. Але до його недоліків треба віднести таке – складність у реалізації, неможливість визначити заздалегідь кількість операцій, необхідність вибору метода наближень.

Наближені розв'язки (4.3) стійкі до малих змін вихідних даних можна також будувати методом ітерацій виду:

$$z_n = R(u, z_{n-1}, \dots, z_{n-k}), \quad k < n. \quad (4.5)$$

Для виконання умови стійкості до малих змін вихідних даних, номер ітерації z_n , яка приймається за наближене рішення, треба брати узгодженим з рівнянням похибки вихідних даних. Так якщо оператор A задано точно, а права частина u відома з похибкою δ , то треба брати n залежним від δ , $n = n(\delta)$. Тут параметром регуляризації є номер ітерації, тобто $\alpha = n$.

Цей метод надає цілий ряд складнощів, тому в даному конкретному випадку має місце використання іншого методу.

4.3 Ідентифікація форми поперечного перерізу штамп шляхом застосування оптимізаційного підходу

Розглянемо задачу аналогічну сформульованій у розділі 2, а саме про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою (рис. 2.1). Поверхня штампу, що

контактує з пружним середовищем описується рівнянням $x_3 = f(x_1, x_2)$, де $(x_1, x_2) \in \Omega_f$ [65 -67].

Для пошуку контактної тиску $p(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_f$, розглядаються дві крайові задачі теорії пружності для півпростору $x_3 \geq 0$.

Розв'язок крайової задачі *A* теорії пружності для півпростору $x_3 \geq 0$ з граничними умовами $\sigma_{x_1 x_3} = \sigma_{x_2 x_3} = 0$, $w = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega_f$, та $\sigma_{x_3 x_3} = \sigma_{x_1 x_3} = \sigma_{x_2 x_3} = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega_0$, існує і єдиний [67], розподіл тиску визначається, $p(x_1, x_2) = \sigma_{x_3 x_3}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega_f$ і може бути представлений у вигляді

$$p = p(f) = L_a f, \quad (4.6)$$

де $\sigma_{ij}, i, j = x_1, x_2, x_3$, - компоненти тензора напружень, w - компонента вектору переміщень, що нормальна до площини $x_1 x_2$, а L_a - лінійний оператор.

Розв'язок крайової задачі *B* для півпростору $x_3 \geq 0$ з граничними умовами $\sigma_{x_1 x_2} = \sigma_{x_2 x_3} = 0$, $\sigma_{x_3 x_3} = p(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_3) \in \Omega_0$ існує, єдиний і знаходиться в вигляді потенціалу простого шару. Розподіл нормальних прогинів $w(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ в області Ω_f надається виразом

$$f = f(p) = L_b p, \quad (4.7)$$

з лінійним оператором L_b .

При відомому розподілі тиску $p(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_f$, результуюча сила P і моменти M_{x_1} , M_{x_2} відносно осей x_1 і x_2 , що прикладені до штампу визначаються виразами [22, 67]

$$P = \int_{\Omega_f} p d\Omega_f, \quad M_{x_1} = \int_{\Omega_f} x_2 p d\Omega_f, \quad M_{x_2} = \int_{\Omega_f} x_1 p d\Omega_f. \quad (4.8)$$

Розглянемо функцію $p_g = p_g(x_1, x_2) \geq 0$, що описує деякий заданий розподіл тиску в області контакту Ω_f . В якості оптимізуючого функціоналу розглянемо інтеграл виду

$$J_f = J(p(f)) = \int_{\Omega_f} (p - p(f))^2 d\Omega_f \quad (4.9)$$

Функціонал (4.9) характеризує неузгодженість між розподілом тиску $p(x_1, x_2)$, що відповідає певній формі штаму $f(x_1, x_2)$, і цільовим розподілом тиску $p_g(x_1, x_2)$ [67].

Припускаючи, що величини зовнішніх впливів на штамп задані, сформулюємо наступну задачу оптимізації. Необхідно визначити функцію $f(x_1, x_2)$, що описує форму штамп і мінімізує функціонал неузгодженості

$$J_f = J(p(f)) \rightarrow \min_f \quad (4.10)$$

за умови виконання умов рівноваги

$$P(p(f)) = P^*, M_{x_1}(p(f)) = M_{x_1}^*, M_{x_2}(p(f)) = M_{x_2}^*, \quad (4.11)$$

та умови невід'ємності контактного тиску. Тут $P^* \geq 0$, $M_{x_1}^* \geq 0$, $M_{x_2}^* \geq 0$ - задані величини прикладених сил і моментів. Враховуючи операторне співвідношення (4.6), а також умови рівноваги (4.11) і додатність контактного тиску, введемо множину допустимих форм [65]:

$$\Lambda_f = \left\{ f : (L_a f)_{\Omega_f} \geq 0, \int_{\Omega_f} L_a f d\Omega_f = P^*, \right. \\ \left. \int_{\Omega_f} x_2 L_a f d\Omega_f = M_{x_1}^*, \int_{\Omega_f} x_1 L_a f d\Omega_f = M_{x_2}^* \right\}. \quad (4.12)$$

При цьому задача оптимізації, що формулюється, запишеться в вигляді

$$J_p^* = J(p_*) = \min_{f \in \Lambda_f} J(p(f)). \quad (4.13)$$

Оптимізаційна задача (4.12), (4.13) викликає відомі труднощі через необхідності розв'язання допоміжної задачі A для довільної функції f та

побудови оператора L_a . Тому представляє інтерес розробка іншого підходу, що не потребує використання залежності $p = L_a f$ [65 - 67]. З цією метою визначимо множину допустимих реалізацій контактного тиску

$$\Lambda_p = \left\{ p : (p)_{\Omega_f} \geq 0, \int_{\Omega_f} p d\Omega_f = P^*, \right. \\ \left. \int_{\Omega_f} x_2 p d\Omega_f = M_{x_1}^*, \int_{\Omega_f} x_1 p d\Omega_f = M_{x_2}^* \right\}. \quad (4.14)$$

і розглянемо наступну допоміжну задачу оптимізації:

$$J_p^* = J(p_*) = \min_{p \in \Lambda_p} J(p) = \\ = \min_{p \in \Lambda_p} \int_{\Omega_f} [p_g - p]^2 d\Omega_f. \quad (4.15)$$

Розв'язок задачі (4.15) та відшукування тиску $p_* = p_*(x_1, x_2)$ дає можливість визначити відповідну функцію форми як розв'язок крайової задачі B , тобто $f_0 = L_b p_*$. З урахуванням властивостей крайових задач A та B можна показати, що

$$\min_{f \in \Lambda_f} J(p(f)) = \min_{p \in \Lambda_p} J(p), \\ J_f^* = J_p^*, \quad (4.16)$$

і що

$$f_* = f_0 = L_b(p_*) \quad (4.17)$$

Отже сформульована задача оптимізації (4.12), (4.13) зводиться до двох ефективно вирішуваних задач. Оптимальна форма знаходиться в результаті послідовного вирішення задачі (4.14), (4.15) і задачі B .

Для пошуку оптимального розподілу тиску $p_*(x_1, x_2)$ на основі розв'язку задачі (4.14), (4.15) введемо в розгляд допоміжну змінну $\psi(x_1, x_2)$, що задовольняє співвідношення [67]

$$p(x_1, x_2) - \psi^2(x_1, x_2) = 0,$$

приведемо розширений функціонал Лагранжа J^L . Маємо

$$J^L = \int_{\Omega_f} \left\{ (p - p_g)^2 - \lambda p - \alpha x_1 p - \beta x_2 p - \chi (p - \psi^2) \right\} d\Omega_f, \quad (4.18)$$

де константи λ , α , β - множники Лагранжа, а $\chi(x_1, x_2)$ - функція Лагранжа. Умови екстремуму функціоналу (4.18) по змінним p і ψ записуються наступним чином:

$$p = p_g + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\alpha x_1 + \frac{1}{2}\beta x_2 + \frac{1}{2}\chi, \quad (4.19)$$

$$\psi\chi = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_f.$$

Вираз для p дає шуканий розподіл тиску, в який входять невідомі величини λ , α , β , χ .

Оптимальний розподіл тиску $p_*(x_1, x_2)$ отримується за допомогою виразу

$$p_*(x_1, x_2) = \max \{0, p^+(x_1, x_2)\}, \quad (4.20)$$

$$p^+(x_1, x_2) = p_g(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\alpha x_1 + \frac{1}{2}\beta x_2.$$

Обирався максимальне значення з двох чисел, що записані в фігурних дужках (4.20) при кожному фіксованому $(x_1, x_2) \in \Omega_f$. При значеннях параметрів задачі, коли задана сила P^* значно перевищує величини прикладених моментів $M_{x_1}^*$ і $M_{x_2}^*$, область $\Omega_f = \Omega_f^+$ і

$$p_* = p_g + \frac{1}{2}(\lambda + \alpha x_1 + \beta x_2). \quad (4.21)$$

Якщо область контакту має симетрію відносно осей Ox_1 і Ox_2 , то отримаємо

$$S_{x_1} = 0, \quad (4.22)$$

$$S_{x_2} = 0, \quad (4.23)$$

$$I_{x_1 x_2} = 0, \quad (4.24)$$

а для множників Лагранжа виявляться справедливими вирази

$$\lambda = \frac{2\tilde{P}}{S}, \quad \alpha = \frac{2\tilde{M}_{x_2}}{I_{x_2}}, \quad \beta = \frac{2\tilde{M}_{x_1}}{I_{x_1}}. \quad (4.25)$$

Якщо до того ж функція $p_g(x_1, x_2)$ має симетрію відносно осей Ox_1 і Ox_2 , тобто

$$\begin{aligned} p_g(x_1, x_2) &= p_g(-x_1, x_2), \\ p_g(x_1, x_2) &= p_g(x_1, -x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_f, \end{aligned} \quad (4.26)$$

то будуть виконуватися наступні рівності:

$$\begin{aligned} M_{x_2}^g &= 0, \quad M_{x_1}^g = 0, \\ \alpha &= \frac{2M_{x_2}^*}{I_{x_2}}, \quad \beta = \frac{2M_{x_1}^*}{I_{x_1}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В випадку коли в якості заданого розподілу тиску береться середній тиск, виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} p_g &= p_m = \frac{P^*}{S}, \\ P^g &= P^*, \quad \tilde{P} = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

отже будемо мати

$$\lambda = 0, \quad p_*(x_1, x_2) = \frac{P^*}{S} + \frac{1}{2}\alpha x_1 + \frac{1}{2}\beta x_2. \quad (4.29)$$

Перед тим як перейти до побудови оптимальних форм штампів, що відповідають знайденому оптимальному розподілу тиску, відмітимо, що розглянутий випадок повного контакту ($p_*(x_1, x_2) > 0$ в області Ω_f) реалізується при певних обмеженнях на параметри задачі [67].

Позначимо через (x_1^0, x_2^0) точку області Ω_f , для якої вираз $p^+(x_1, x_2)$ сягає мінімуму, тобто

$$(x_1^0, x_2^0) = \arg \min_{(x_1, x_2) \in \Omega_f} \left(p_g(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\alpha x_1 + \frac{1}{2}\beta x_2 \right). \quad (4.30)$$

Тоді в випадку симетрії області Ω_f і функції $p_g(x_1, x_2)$ відносно осей Ox_1 і Ox_2 будемо мати наступні умови, що забезпечують контакт в області Ω_f :

$$P^* > \int_{\Omega_f} p_g(x_1, x_2) d\Omega_f -$$

$$-S \left(p_g(x_1^0, x_2^0) + \frac{M_{x_2}^*}{I_{x_2}} x_1^0 + \frac{M_{x_1}^*}{I_{x_1}} x_2^0 \right). \quad (4.31)$$

В випадку прямокутної області

$$\Omega_f : -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b,$$

і $p_g = P^* / S$ для реалізації повного контакту, як це слідує з (4.21), (4.27)

– (4.29), необхідне виконання нерівності

$$P^* \geq \frac{3M_{x_1}^*}{ba} + \frac{3M_y^*}{a}.$$

Проведена тут побудова оптимального розподілу $p_*(x_1, x_2)$ ґрунтується на необхідних умовах екстремуму [65]. Перевірка достатніх умов мінімуму оптимізованого функціонала вимагає проведення додаткових оцінок, які тут не наведено. Розглянемо випадок, коли моменти, що прикладаються до штампа, дорівнюють нулю ($M_{x_1}^* = M_{x_2}^* = 0$) і $p_g = P^* / S$. У цьому випадку згідно з (4.21), (4.25) – (4.28) $J(p_*) = 0$. З огляду на те, що $J(p) \geq 0$ для всіх допустимих реалізацій тиску, отримаємо висновок, що $p_* = P^* / S$ реалізує мінімум оптимізованого функціоналу в розглянутому випадку.

Як відомо, при заданому в області Ω_f розподілу тиску $p(x_1, x_2)$, переміщення точок пружного півпростору $w(x_1, x_2, x_3)$ за напрямком осі Ox_3 знаходяться за допомогою потенціалу простого шару $w(x_1, x_2, x_3)$ і записуються у вигляді [66]

$$w(x_1, x_2, x_3) = \kappa w(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \chi \int_{\Omega_f} \frac{p(x'_1, x'_2) d\Omega'_f}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2}}, \quad (4.32)$$

де

$$\kappa = \frac{1 - \mu^2}{\pi E}, \quad d\Omega'_f = dx'_1 dx'_2, \quad (4.33)$$

штрихами відмічені величини, за якими проводиться інтегрування. Отже, отримана форма штампа, що відповідає знайденому оптимальному розподілу тиску $p_*(x'_1, x'_2)$, $(x'_1, x'_2) \in \Omega_f$, може бути представлена наступним чином [66]

$$\begin{aligned} f_*(x_1, x_2) &= \kappa \left[w(x_1, x_2, 0) \right]_{p=p_*} = \\ &= \kappa \int_{\Omega_f} \frac{p_*(x'_1, x'_2)}{\rho(x_1, x_2, x'_1, x'_2)} d\Omega'_f, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\rho(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}.$$

де $\rho(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ - відстань між точками (x_1, x_2) та (x'_1, x'_2) , що належать області Ω_f . Нехай ρ, θ - полярні координати з центром в точці спостереження $N(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega_f$, а функція $\rho = R(\theta)$ задає границю області Ω_f . При цьому координати зафіксованої точки $N(x_1, x_2)$ і точки (x'_1, x'_2) , що змінює положення в області Ω_f під час інтегрування будуть пов'язані співвідношеннями $x'_1 - x_1 = \rho \cos \theta$, $x'_2 - x_2 = \rho \sin \theta$. Введемо далі позначення $C = p + \frac{1}{2}\lambda$, $A = \frac{1}{2}\alpha$, $B = \frac{1}{2}\beta$.

Переходячи до полярних координат при інтегруванні в (4.34) будемо мати

$$\begin{aligned} f_*(x_1, x_2) &= \kappa \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R(\theta)} p_*(x_1 + \rho \cos \theta, x_2 + \rho \sin \theta) d\rho = \\ &= \kappa (C + Ax_1 + Bx_2) D_0(x_1, x_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \kappa A D_c(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \kappa B D_s(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Тут $R(\theta)$ - границя області, та

$$\begin{aligned}
D_0(x_1, x_2) &= \int_0^{2\pi} R d\theta, \\
D_c(x_1, x_2) &= \int_0^{2\pi} R^2 \cos \theta d\theta, \\
D_s(x_1, x_2) &= \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Зауважимо, що під час використання виразу (4.34) і виконанні інтегрування в рівності (4.35) враховували співвідношення $d\Omega'_f = \rho d\rho d\theta$ для елемента розглянутої області Ω_f . Таким чином, завдання відшукування оптимальної форми штампа, що взаємодіє без тертя з пружною основою, звелось до знаходження геометричних характеристик D_0 , D_c , D_s , які залежать від форми області контакту Ω_f [67].

4.4 Опис розробленого програмного забезпечення

Експертну систему було побудовано на базі існуючого програмного продукту CLIPS (C Language Integrated Production System) [76], який призначений для створення і застосування експертних систем та відкритий для загального використання. Він широко застосовується для розробки експертних систем та досліджень в галузі штучного інтелекту. Програмний продукт використовує правила, які описують логіку вирішення проблеми та факти, які представляють дані. Правила активуються на основі відповідності фактів у базі знань. Програмне забезпечення надає можливість розбивати на модулі бази знань, що значно спрощує розробку та майбутню підтримку складних систем. CLIPS має власну об'єктно-орієнтовану мову COOL, і можливість використовувати мову програмування C/C++ для реалізації систем різної складності. Для побудови експертної системи було створено додаток на мові COOL [11, 14, 17, 141].

Дані на основі яких заповнювалась база знань було експортовано з системи автоматизованого проектування ANSYS [22, 56] в якій заздалегідь

було проведено чисельні експерименти для різних форм однозв'язних та двозв'язних в плані штампів.

В процесі комп'ютерного моделювання в підсумку постпроцесінгу було отримано результати у вигляді масиву значень нормальних напружень. За допомогою інструменту probe [56] було виконано зчитування значень напружень з умовних датчиків, що розташовані на пружному півпросторі по контуру контакту штампу.

Після того, як числові дані про нормальне напруження було отримано з умовних датчиків, розроблене програмне забезпечення надає два варіанти подальшої обробки результатів. Автоматизований варіант передбачає обробку даних за допомогою програмного додатку, який реалізований на мові програмування C++ та використовує ANSYS API для отримання даних з датчиків і подальшої обробки. Автоматизований режим передбачає наступні функції роботи застосунку:

- виконання процесу експорту даних;
- проведення первинного аналізу результатів симуляції;
- забезпечення комунікації між програмним комплексом ANSYS та програмним продуктом CLIPS.

У випадку ручного варіанту, дані експортуються в файл Excel для подальшого аналізу та обробки за допомогою js-скрипту і формування файлів для бази знань.

Отримані дані форматуються у спеціальний вигляд, придатний для подальшої обробки експертною системою. Вони зберігаються у текстових JSON файлах. Цей формат було обрано у зв'язку з його простотою читання та написання, що робить його інтуїтивно зрозумілим. JSON також компактний, що дозволяє ефективно зберігати інформацію та економити місце в пам'яті. Важливою перевагою є підтримка JSON багатьма мовами програмування за допомогою різних бібліотек для парсингу і створення JSON-даних. Крім того, JSON є платформонезалежним і може використовуватись на будь-яких платформах, що дозволяє легко взаємодіяти з даними між різними

системами. Також JSON підтримує багаторівневі структури даних, що дозволяє створювати складні об'єкти та масиви. Після цього данні передаються до пакета CLIPS через відповідний засіб вводу інформації.

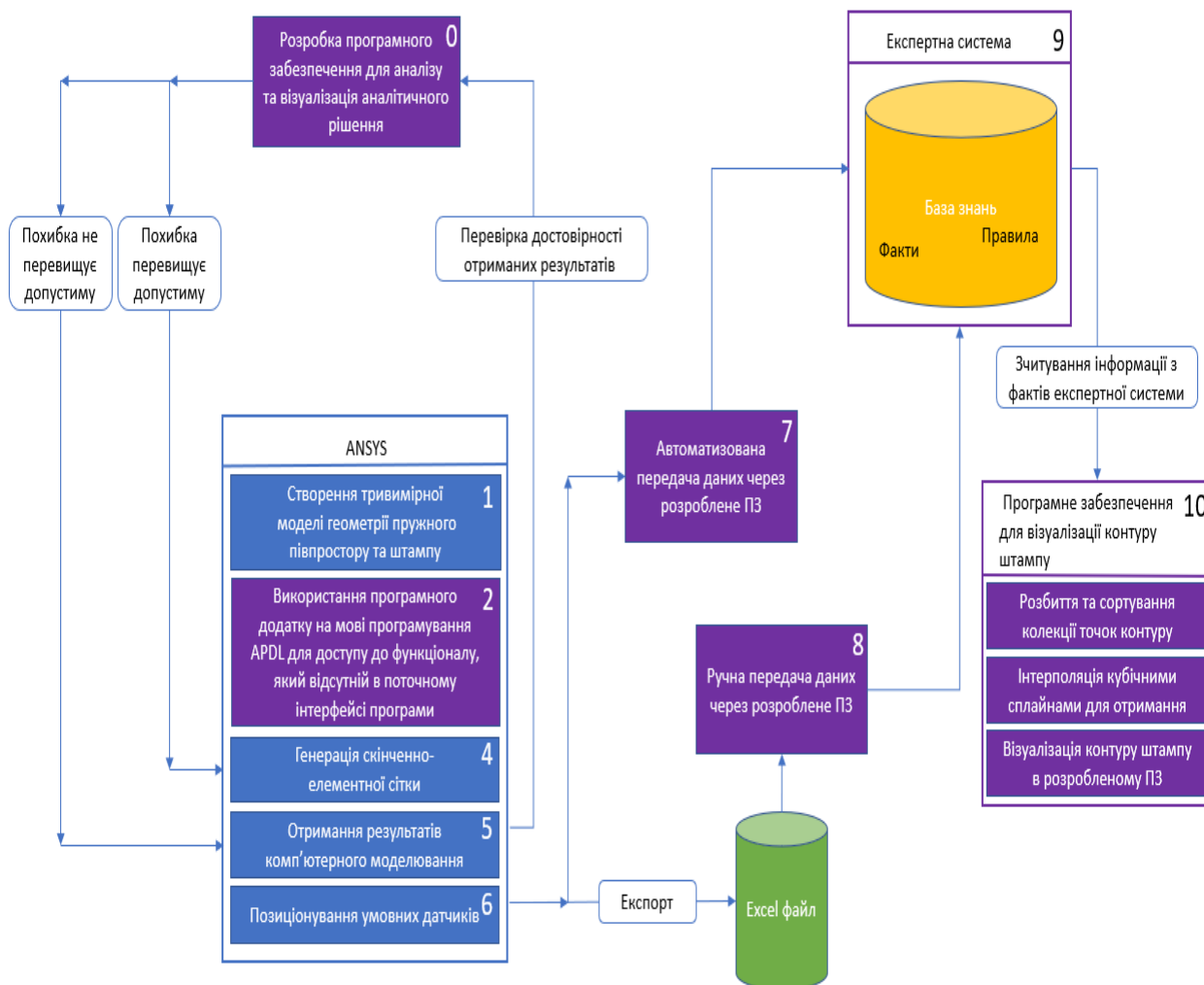


Рис. 4.1 Загальна схема будови комплексного підходу до розв'язання контактної задачі та задачі ідентифікації площадки контакту

На рис. 4.1. наведено загальну схему будови комплексного підходу до розв'язання задач створення та дослідження математичних та комп'ютерних моделей контактної взаємодії абсолютно жорстких циліндричних штампів із плоскою основою з пружним півпростором під дією стискаючої сили [17].

Для забезпечення зручності використання та інтеграції програмної системи CLIPS у розроблений авторами проект на мові програмування C++, було створено бібліотечні файли. Вихідний код (clips_core_source_641.zip,

написаний на мові C) системи CLIPS, для її інтеграції у авторський програмний додаток, було завантажено з офіційного сайту [76].

Розроблена експертна система, яка використовує правила і шаблони фактів для аналізу точок, визначення їх нормального напруження та класифікації контурів на основі цих даних.

Розроблено шаблон факту point, що представляє собою інформацію про точку із зазначеними координатами x і y , а також значенням нормального та дотичних напружень та переміщення. Координати точок, значення нормального та дотичних напружень і переміщення мають тип даних FLOAT.

Шаблон факту known-stress використовується для зберігання відомих значень напружень, переміщення та координат точки. У цьому шаблоні: stress – це відоме значення нормального напруження, x , y – це координати точки, де відоме значення нормального напруження було заміряне.

Шаблон contour представляє контур фігури із зазначеними координатами точок, які утворюють цей контур. У цьому шаблоні: points – це рядок з координатами точок, які утворюють контур. В даному випадку, цей слот буде заповнюватися рядком координат, наприклад, "(x_1 y_1) (x_2 y_2) (x_3 y_3)". Даний шаблон факту використовується для акумулювання результатів та виводу їх в якості результатів роботи експертної системи.

Розроблена експертна система має правило classify-contour, яке виконує класифікацію контуру фігури на основі порівняння нормальних напружень точок з відомими значеннями нормального напруження.

У цьому правилі присутня умова, яка збирає дані про кожну точку з нормальним напруженням, умова, яка витягує відомі значення нормального напруження разом з координатами, функція-тест, що порівнює значення нормального напруження точки з відомим значенням з певною допустимою похибкою, яку користувач може задати самостійно. За замовчуванням похибка складає 0.1. У разі виконання умови правила, виконується дія, яка створює новий факт типу contour, який містить координати відомої точки з відповідним нормальним напруженням:

IF A THEN C,

де:

$$A = |knownStress - stress| \leq \varepsilon,$$

C – додавання координат точок в результуючий факт points.

Наведено приклад сегмента програми для формування правила та фактів експертної системи на мові специфічній інтуїтивно зрозумілій мові COOL, яка є частиною CLIPS [25]. В прикладі надано фрагмент бази знань, що ілюструє наявність масивів нормальних напружень та координат точок контуру штампу:

```
(deftemplate point
  (slot x (type FLOAT))
  (slot y (type FLOAT))
  (slot stress (type FLOAT))
)
```

```
(deftemplate known-stress
  (slot stress (type FLOAT))
  (slot x (type FLOAT))
  (slot y (type FLOAT))
)
```

```
(deftemplate contour
  (slot points (type STRING) (default ""))
)
```

```
(defrule classify-contour
  (point (x ?x) (y ?y) (stress ?stress))
  (known-stress (stress ?known-stress) (x ?known-x) (y ?known-y))
  (test (<= (abs (- ?stress ?known-stress)) 0.1))
```

=>

```

(assert (contour (points (str-cat "(" ?known-x " " ?known-y "))))
)
(deffacts initial-known-stress
(known-stress (stress -14034000.0) (x -0.000718) (y -0.004951))
(known-stress (stress -18598000.0) (x -0.000125) (y -0.005012))
(known-stress (stress -17564000.0) (x -0.001298) (y -0.004838))
(known-stress (stress -17039000.0) (x -0.001892) (y -0.00465))
(known-stress (stress -14541000.0) (x -0.002472) (y -0.00436))
(known-stress (stress -14782000.0) (x -0.003051) (y -0.003969))
...
(known-stress (stress -15988000.0) (x -0.003601) (y -0.003477))
(known-stress (stress -16772000.0) (x -0.004079) (y -0.002898))
(known-stress (stress -16825000.0) (x -0.00447) (y -0.00226))
(known-stress (stress -17299000.0) (x -0.004702) (y -0.001681))
(known-stress (stress -17297000.0) (x -0.004876) (y -0.001102))
(known-stress (stress -13063000.0) (x -0.004977) (y -0.000522)).

```

Була організована база знань, як один із ключових компонентів експертної системи. Вона включила в себе інформацію про геометричні характеристики і властивості матеріалів штампів і півпростору, інформацію щодо напружено-деформівного стану системи штамп-пружний півпростір, а також набір правил і фактів. Побудована експертна система може проводити ідентифікацію поперечних перерізів штампів з плоскою підшоною, що тиснуть на пружний півпростір.

Отримання координат точок з списку фактів було реалізовано за допомогою регулярного виразу, який виокремлює лише необхідну інформацію, щодо координат точок тіл з відповідними величинами напружень, із загальної текстової відповіді експертної системи.

Для кожної окремої комп'ютерної моделі, розраховуються масиви даних – нормальні і дотичні напруження в певних точках для яких проводиться ідентифікація форми поперечного перерізу штампу відповідно до визначених у базі знань критеріїв.

Після отримання координат точок, проводиться процес генерації форми поперечного перерізу штампу за допомогою розробленого програмного забезпечення в OpenGL (Open Graphics Library – це специфікація програмного інтерфейсу для рендерингу 2D та 3D графіки).

Варто відмітити, що для коректності отриманих результатів координати точок було попередньо упорядковано у послідовність руху по контуру поперечного перерізу. Була розроблена спеціальна функція `calculateAngle`, що приймає на вхід у якості параметрів координати двох точок: центр кола і конкретну точку на контурі штамп. Вона створена, щоб обчислити кут між горизонтальною віссю та лінією, яка з'єднує центр кола і дану точку. Розроблена спеціальна функція `comparePoints` була використана для порівняння координат двох точок на контурі штамп за їхніми кутами відносно початку системи координат. Таким чином, критерієм упорядкування стає величина кута. Точки були відсортовані за порядком зростання кутів відносно початку системи координат для осі Ox , що призвело до позиціонування точок за годинниковою стрілкою навколо центра кола по контуру штамп.

В процесі візуалізації форми двозв'язного штамп початкова колекція точок була розбита на дві колекції для зовнішнього і для внутрішнього контурів відповідно. Для відтворення контуру штамп було використано кубічну сплайн-інтерполяцію. Кубічний сплайн було обрано через його властивості плавності та гнучкості, що дозволяють йому добре підходити для багатьох типів даних та задач.

Алгоритм розв'язання контактної задачі та ідентифікації форми поперечного перерізу штамп для системи абсолютно жорсткий штамп-

пружний півпростір може бути представлений такою послідовністю дій (рис. 4.2, 4.3) [141]:

Крок 0. Розробити програмне забезпечення (ПЗ) для аналізу і візуалізації аналітичного рішення про вдавлювання в пружний півпростір штампів різної форми близької до кільцевої, що було отримано раніше [126]. (Для кожної задачі аналітичний розв'язок отримується окремо).

Крок 1. Створити проект в ANSYS та модуль Static Structural. В підрозділі Geometry створити тривимірну модель геометрії півпростору та штампу.

Крок 2. Провести процес генерації та корегування скінченно-елементної сітки.

Крок 3. Якщо скінченно-елемента сітка відповідає умовам до якісного розбиття, а саме виконання необхідних умов, то переходимо до кроку 4, якщо ні, то повертаємося до кроку 2.

Крок 4. Проведення розрахунків процесу контактної взаємодії штампу та пружного півпростору шляхом комп'ютерного моделювання.

Крок 5. Перевірка достовірності отриманих даних шляхом проведення порівняння з результатами, що були отримані раніше на кроці 0. Якщо після оцінки результатів з'ясовується, що похибка перевищує допустиму, то необхідно повернутися до кроку 2, інакше – перейти на крок 6.

Крок 6. Розташування умовних датчиків по контуру контакту, для симуляції процесу зчитування інформації з натурних експериментів.

Крок 7. Зчитування інформації щодо напружено – деформівного стану (НДС) системи з умовних датчиків.

Крок 8. Даний крок забезпечує розгалуження для вибору варіанту передачі інформації. Передати інформацію щодо напружено – деформівного стану в базу знань експертної системи. Якщо користувачем обрано автоматизований варіант передачі даних до бази знань експертної системи, то перейти на крок 9, інакше – на крок 10.

Крок 9. Проведення обробки результатів розрахунків напружень за допомогою спеціально розробленого програмного додатку, який реалізований на мові програмування C++ та використовує ANSYS API для отримання даних з датчиків. Після виконання процедури виконуємо перехід на крок 11.

Крок 10. Дані експортуються в файл Excel для подальшого аналізу та обробки за допомогою js-скрипту і формування файлів для бази знань. Ручний варіант передачі даних було додано як альтернативу до автоматизованого варіанту, яка дозволяє вносити зміни до даних, або отримувати дані з зовнішніх джерел окрім проекту в ANSYS.

Крок 11. Обробка даних експертною системою. Розв'язання задачі нескінченновимірної оптимізації зводиться до скінченновимірної шляхом апроксимації вектор-функції $U(x)$ за допомогою метода скінченних елементів. Визначення результуючого вектору методом Ньютона. Збереження координат точок.

Крок 12. Сортування ідентифікованих точок по колу для спрощення процесу подальшої візуалізації.

Крок 13. За необхідністю розбиття початкової колекції точок на дві колекції для зовнішнього і для внутрішнього контурів відповідно.

Крок 14. Для кожної колекції провести кубічну сплайн – інтерполяцію.

Крок 15 Вивести значення ідентифікованих точок. Провести візуалізацію контуру штампу.

Крок 16. Кінець.

Наведена блок-схема (рис. 4.2, 4.3) демонструє узагальнюючий алгоритм розв'язання контактної задачі для системи абсолютно жорсткий штамп-пружний півпростір.

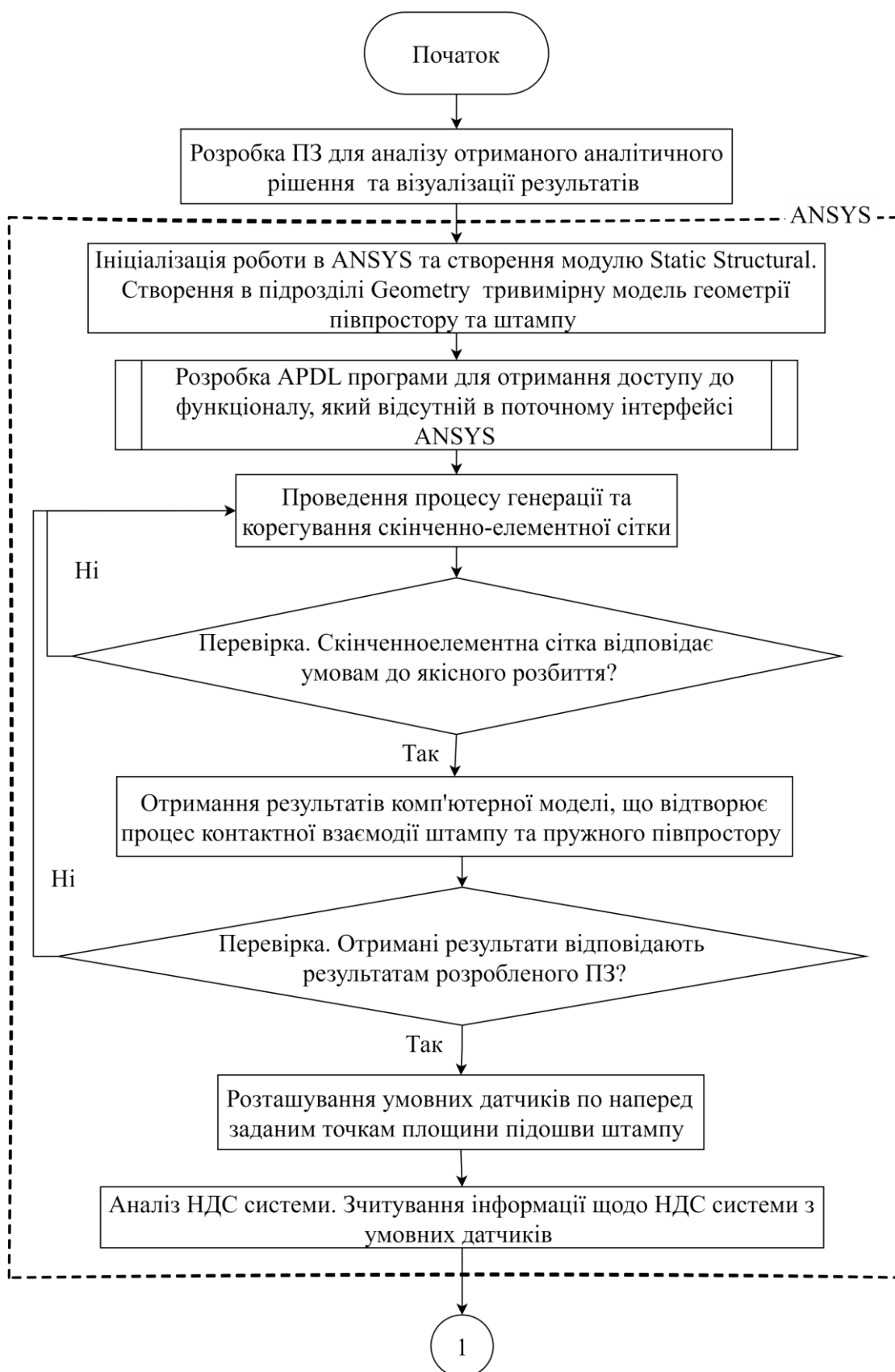


Рис. 4.2. Блок-схема алгоритму

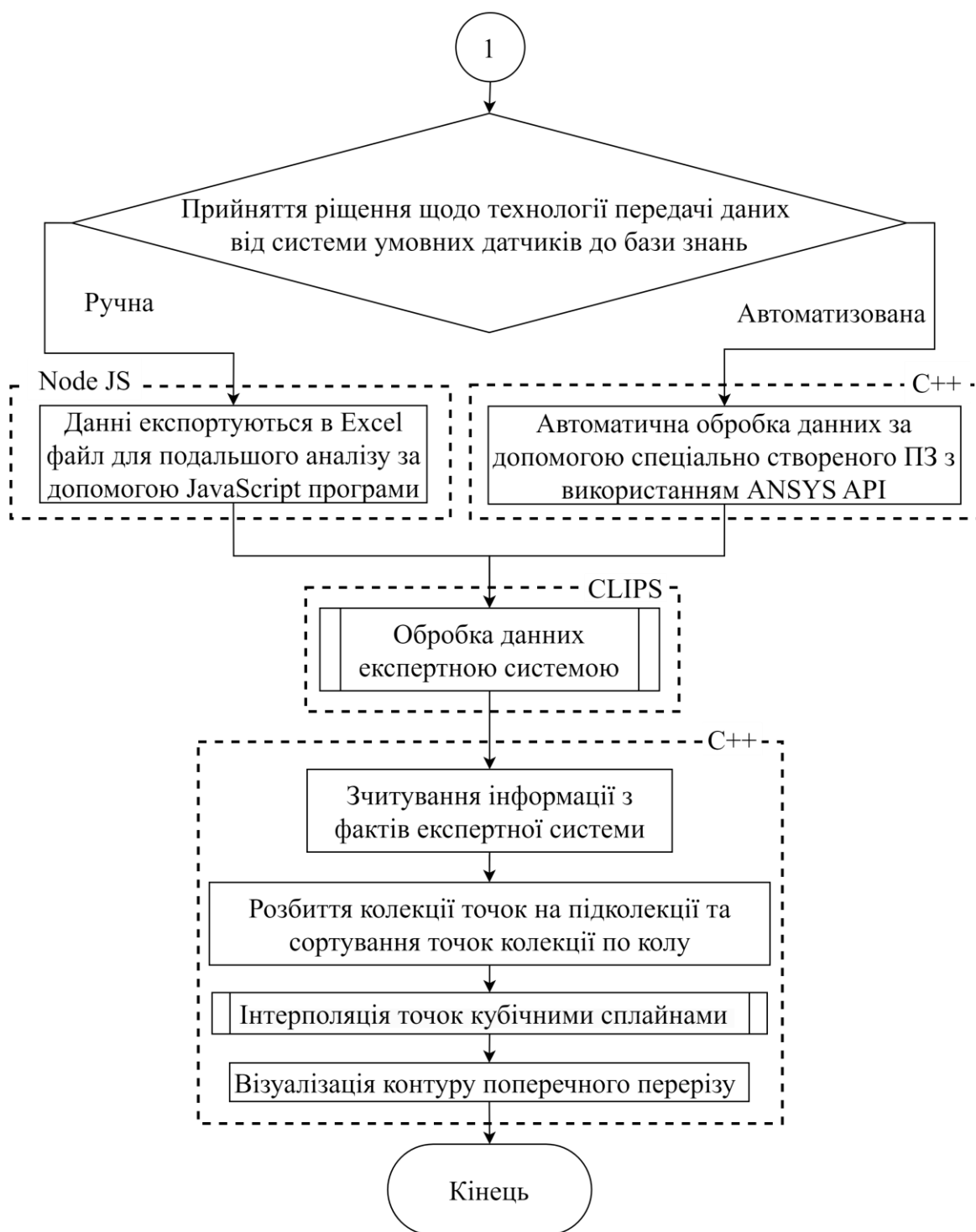


Рис. 4.3. Блок-схема алгоритму (продовження)

4.5 Аналіз отриманих результатів

Розглянемо приклад про вдавлення в пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого плоского штамп, поперечний переріз

якого займає однозв'язну кругову в плані область. На вхід було подано інформацію щодо нормальних напружень з умовних датчиків розташованих по периметру штамп (рис. 4.4). Діаметр штамп до пошкодження складав 40 мм. Матеріал штамп – сталь: $E = 200000 \text{ МПа}$ (модуль Юнга), $\mu = 0.3$ (коефіцієнт Пуассона), а для пружного півпростору – ізотропний матеріал з такими параметрами: $E = 180 \text{ МПа}$, $\mu = 0.2$. Умовні датчики були розташовані по всьому колу рівномірно [11, 12, 14].

Спочатку поперечний переріз основи штамп мав форму круга, а отже і умовні датчики розташовані відповідно початковій формі штамп. Під дією зовнішніх сил форма поперечного перерізу штамп була змінена, а отже відбулися зміни і в напруженнях які зчитували ці умовні датчики (рис. 4.5). Було проведено багато числових експериментів для різної кількості умовних датчиків та різних форм штампів після пошкодження.

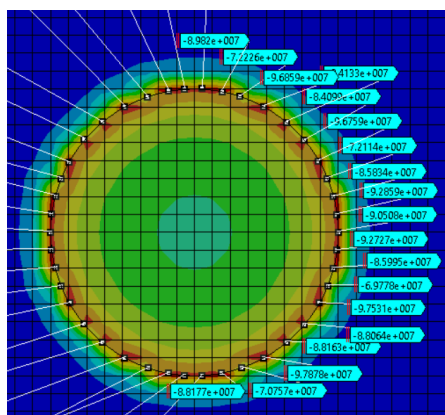


Рис. 4.4. Приклад зчитування нормальних напружень з умовних датчиків до пошкодження поверхні

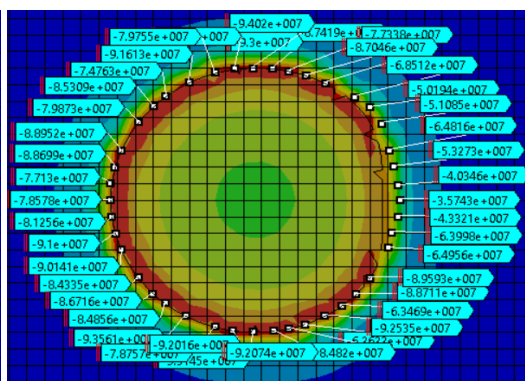


Рис. 4.5. Приклад зчитування нормальних напружень з умовних датчиків після пошкодження поперечної форми основи штамп

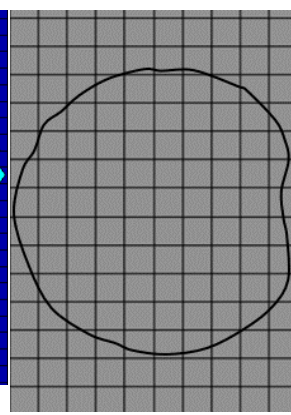


Рис. 4.6. Відновлена форма поперечного перерізу штамп

Так для представлених 42 умовних датчиків після 480 розрахунків для різних варіацій форм було отримано такий вигляд форми штамп який представлено на рис. 4.6 на основі даних зчитаних з умовних датчиків. Замкнуту криву, що представляє собою форму штамп, було побудовано за

допомогою сплайн-інтерполяції для отриманих точок контуру штампу. Взагалі для кожної пошкодженої форми було проведено від 300 до 500 чисельних експериментів.

Розглянемо приклад – задачу про тиснення в пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого плоского штампу, поперечний переріз якого має кільцеву в плані область. Аналітичний розв’язок було отримано і розраховано картину напружено-деформівного стану системи штамп-пружний півпростір [126]. Для тестової задачі розглядався кільцевий штамп.

Зовнішній діаметр штампу до пошкодження складав 100 мм, а внутрішній – 40 мм. Матеріал штампу – сталь: $E = 200000 \text{ МПа}$, $\mu = 0.3$, а для пружного півпростору – ізотропний матеріал з такими параметрами: $E = 180 \text{ МПа}$, $\mu = 0.2$. Умовні датчики були розташовані по всьому колу рівномірно.

Результати моделювання представлено на рис. 4.7 у випадку напружено-деформівного стану системи штамп – пружний півпростір для непошкодженої кільцевої форми штампа [14, 141].

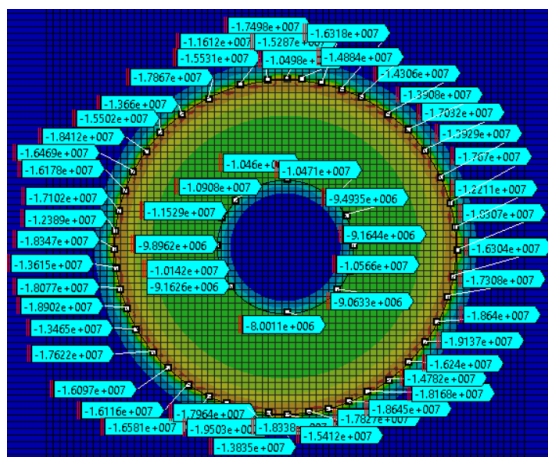


Рис. 4.7. Схема розташування умовних датчиків зчитування нормальних напружень до пошкоджень контуру штампу

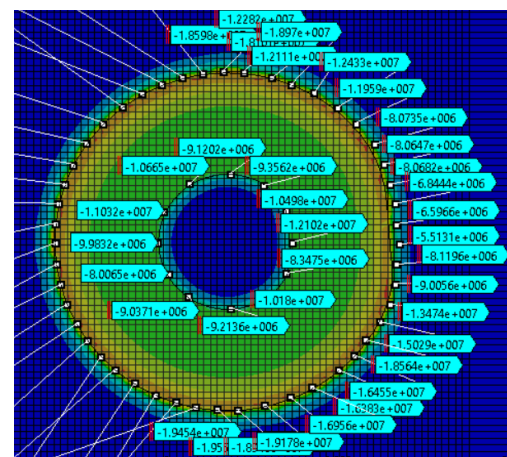


Рис. 4.8. Схема розташування умовних датчиків зчитування нормальних напружень після пошкоджень контуру штампу

Результати моделювання представлені на рис. 4.8 відображають ситуацію, коли відбулося пошкодження форми штампу шляхом зношення,

для випадка одностороннього пошкодження з однієї і тієї ж внутрішньої і з зовнішньої сторін кільця. Пошкодження типу зношення мало місце на центральному куті величиною 60° . Із зовнішньої сторони кільця глибина пошкодження була 0.08 від ширини кільця, а із внутрішньої сторони – 0.0625 від ширини кільця.

На вхід експертної системи було подано інформацію щодо нормальних напружень і переміщень з умовних датчиків розташованих по периметру штампку (рис. 4.8).

Для представлених 57 умовних датчиків після 450 розрахунків для різних схем пошкодження (рис. 4.8) було отримано наступний вигляд форми штампку на основі даних зчитаних з датчиків (рис. 4.9).

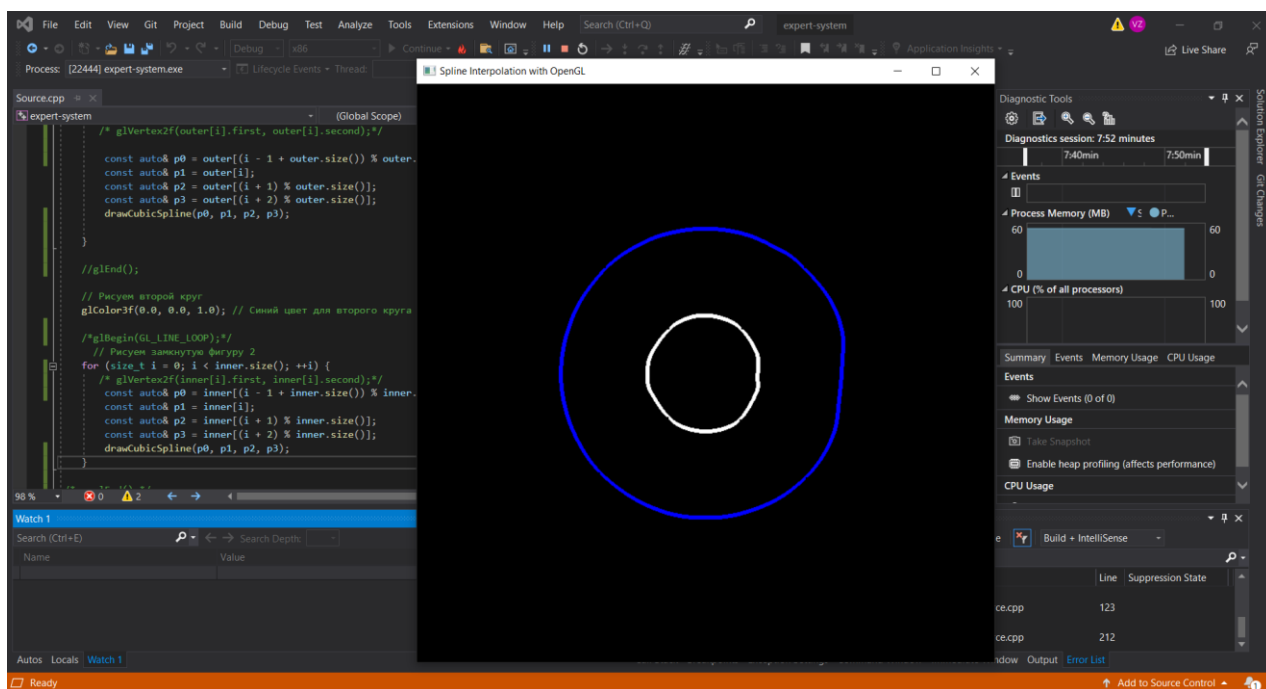


Рис. 4.9. Відновлений контур кільцевого штампку

Задовільні результати для відбудови зовнішнього контуру було отримано на глибині 4–6 % від товщини кільця. Треба визнати, що відтворення більш глибинних пошкоджень форми штампку потребує збільшення числа експериментальної бази. Також слід відмітити, що система більш точно встановлює форму зовнішнього контуру штампку, ніж

внутрішнього. Можна вважати, що це обумовлено, насамперед взаємодією напружень в внутрішній зоні кільця

При проведенні ряду чисельних експериментів було помічено, що коли деформація контуру відбувається випадковим чином і локально, то такі розрахунки дають достатньо хороші результати. Але як правило наведений підхід на даному етапі роботи експертної системи дає можливість враховувати малі пошкодження на контурі (не менше 1 % ширини кільця), та відтворювати такі як поодинокі глибокі тріщини (не більше 10 % ширини кільця).

4.6 Висновки до розділу

В четвертому розділі була розроблена експертна система для розв'язання контактних задач ідентифікації форми поперечного перерізу штамп, що надала можливість ідентифікувати форму штамп за наведеними показниками напружень та переміщень.

Для розробки коду експертної системи використовувалась мова COOL. Інтеграція COOL з CLIPS дозволила ефективно працювати з експертними правилами і фактами. Використання COOL забезпечило продуктивну і зручну розробку, що значно покращило процес обробки знань і прийняття рішень в розробленій експертній системі. Було створено підхід для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штамп із застосуванням сучасних математичних алгоритмів та інформаційних технологій, а саме, вперше розроблено узагальнюючий алгоритм у якому використовуються аналітичні підходи, програмні системи ANSYS, CLIPS, і використано розроблені власні програмні додатки, які поєднують всі етапи дослідження в один комплексний продукт.

Розв'язано контактну задачу для системи штамп – пружний півпростір та проведено визначення контуру пошкодженої форми штамп із застосуванням розробленого інструментарію. На основі цього виявлено, що

експертна система більш точно встановлює форму зовнішнього контуру штампу, ніж внутрішнього. Це обумовлено насамперед взаємовпливом точок всередині кільця штампу. Слід зауважити, що коли деформація контуру відбувається на невеликій ділянці (не більш ніж 5% від загальної довжини контуру) локально, то відновлення моделі більш точне. Так, стає можливим враховувати малі пошкодження на контурі, що складають менш ніж 1 % від ширини кільця, а також відтворювати поодинокі глибокі тріщини, що складають не більш ніж 10 % від ширини кільця.

Загалом, слід відмітити, що така інтеграція ANSYS Workbench та CLIPS відкриває широкі можливості для створення ефективних експертних систем в області інженерного аналізу та оптимізації. Ця комбінація дозволяє об'єднати потужність числових симуляцій та подальшого логічного виведення експертної системи для прийняття обґрунтованих інженерних рішень.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі були побудовані математичні та комп'ютерні моделі контактної взаємодії циліндричного абсолютно жорсткого плоского двозв'язного в плані штампа з ізотропним пружним півпростором. Було досліджено напружено-деформівний стан. Зокрема було отримано такі результати:

- Проведено аналіз публікацій, який показав, що розв'язання контактних задач механіки потребує побудови нових ефективних математичних і комп'ютерних моделей, розробки нових підходів та алгоритмів, щоб зменшити трудомісткість та ресурсоемність розв'язуваної задачі, що сприятиме подальшому практичному застосуванню результатів досліджень. Інтеграція різних методів і прийомів дозволяє удосконалити класичні підходи в області контактних задач механіки.
- Отримано аналітичні розв'язки для задачі про вдавлювання в однорідний та ізотропний пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого плоского двозв'язного штампа в формі близької до кільця (трикутного, шестикутного і восьмикутного, коли межі області контакту не є подібними). **Вперше** було розв'язано задачі для штампів у формі кільця, границі яких близькі до трикутників, шестикутників, восьмикутників у вигляді розкладання за новим малим параметром.
- Розроблено **нове** програмне забезпечення на мові C++ для аналізу і візуалізації аналітичного розв'язку про вдавлювання в ізотропний пружний півпростір циліндричного абсолютно жорсткого штампу поперечний переріз якого займає двозв'язну область. Наведено відповідні порівняльні результатами.
- Побудовано скінченно-елементні моделі процесу контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампу з пружним півпростором за допомогою програмного комплексу ANSYS. Проведено комп'ютерне моделювання

для розрахунку напружено-деформівного стану. Створено групи скінченно-елементних моделей для врахування можливих пошкоджень у разі перебування системи в складних природних умовах або в агресивному середовищі. Сформовано масив даних для подальшого застосування його у експертній системі.

- **Вперше** розроблено програмне забезпечення на специфічній пропрієтарній мові програмування для інженерних рішень (APDL) з метою корегування параметрів комп'ютерної моделі через функціонал, який відсутній в поточному інтерфейсі користувача програмного комплексу ANSYS. Розроблене програмне забезпечення надало можливість швидко створювати та аналізувати складні моделі, отримуючи доступ до всіх функцій ANSYS.
- Створено та протестовано експертну систему для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штампу, що діє на пружний півпростір. Для цього **вперше** було застосовано програмну систему CLIPS в поєднанні з програмним комплексом ANSYS. Для розробки коду експертної системи використовувалась мова COOL. Інтеграція COOL з CLIPS дозволила ефективно працювати з експертними правилами і фактами. Використання COOL забезпечило продуктивну і зручну розробку, що значно покращило процес обробки знань і прийняття рішень в створеній експертній системі.
- Створено підхід для розв'язання задачі ідентифікації форми поперечного перерізу штампу із застосуванням сучасних математичних алгоритмів та інформаційних технологій, а саме, **вперше** розроблено узагальнюючий алгоритм у якому використовуються аналітичні підходи, програмні системи ANSYS, CLIPS, і використано розроблені власні програмні додатки, які поєднують всі етапи дослідження в один комплексний продукт.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору Допов. Нац. акад. наук Укр. 2020. № 11. С. 24-30. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi.2020.11.024>.
2. Бабич, С. Ю., Ярецька, Н. О., Лазар, В. Ф., Щекань, Н. П. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. 41, 2. С. 91–102. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102).
3. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. *Изв. АН. Мех. тв. тела*. 1966. №4. С. 158-161.
4. Бородачев Н. М. Метод возмущения для смешанных пространственных задач теории упругости со сложной линией раздела краевых условий. *Прикл. мат. и механика*. 1988. Т.52, Вып.5. С. 628-634.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
6. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Львовский гос. ун-т, 1981. 135 с.
7. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. К.: Наукова думка. 1985. 280 с.
8. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости К.: Вища школа. 1982. 352 с.
9. Динник А.Н. Избранные труды. К.: Изд-во АН УССР. 1952. Т. I. 151 с.
10. Долинский В. М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному

- износу. *Динамика и прочность машин*. 1975. 21, С. 43–49.
11. Жушман В. В. Інтелектуальні системи для вирішення обернених контактних задач. *Збірник наукових праць «Питання прикладної математики і математичного моделювання»*. Дніпро, 2023. – Вип. 23.–С.64-71. <https://doi.org/10.15421/322307>
 12. Жушман В. В. Рендерінг процесів взаємодії складнопрофільних тіл. *Виклики та проблеми сучасної науки*. м. Дніпро, 2023. Т. 1. С. 474–476. URL: <https://fti.dp.ua/conf/2023/06047-2130/>.
 13. Жушман В. В. Сучасні методи розв’язання класичних задач механіки деформованого твердого тіла. *Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених*. м. Харків, 2021. С. 240-243.
 14. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Експертні системи для розв’язання обернених контактних задач статички. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023): Матеріали XXI міжнародна науково-практична конференція до 105-річчя Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 22-24 листопада 2023.*, м. Дніпро, 2023. С. 126-127. URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf>
 15. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Комп’ютерне моделювання взаємодії тіл складної форми з пружним півпростором. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2021): Матеріали XIX міжнародної науково-практичної конференції, 17-19 листопада 2021.*, м. Дніпро, 2021. С. 77. URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2021/12/mpzis-2021.pdf>
 16. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Комп’ютерне моделювання взаємодії тіл складної форми з пружним півпростором під дією позацентральної сили. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*

- (МПЗІС-2022): *Матеріали XX ювілейної міжнародної науково-практичної конференції, 23-25 листопада 2022., м. Дніпро, 2022. С. 87.*
 URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2022/12/MPZIS-2022-1.pdf>
17. Жушман В. В., Зайцева Т. А. Комплексний підхід до розв'язання задачі взаємодії абсолютно жорсткого двозв'язного штампу та пружного півпростору. *Регіональний міжвузівський збірник наукових праць «Системні технології»*. 2024. Vol. 2 № 151. Р. 133-143. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-2-151-2024-12>.
 18. Зайцева Т. А. Шишканова А. А. Решение задачи про цилиндрический штамп с двусвязным основанием, ограниченным линиями близкими к треугольникам. *Вестник ДНУ. Серия Механика*, 2005. –№ 10/2. С. 43 - 50.
 19. Зайцева Т. А., Жушман В. В. Застосування програмного комплексу ANSYS для моделювання контактної задачі механіки. *World science: problems, prospects and innovations. Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. Perfect Publishing. Toronto, Canada*. 2021. Р. 393-396. URL: <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2021/04/WORLD-SCIENCE-PROBLEMS-PROSPECTS-AND-INNOVATIONS-21-23.04.2021.pdf>
 20. Зайцева Т. А., Жушман В. В. Про побудову скінченно-елементної моделі взаємодії двозв'язного в плані штамп з пружним півпростором. *Збірник наукових праць «Питання прикладної математики і математичного моделювання»*. Дніпро. 2021. Вип. 21. С.78-86. DOI: <https://doi.org/10.15421/322108>
 21. Зайцева Т. А., Пожужева И.С. О влиянии технологических погрешностей при вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2003. Вип.5. С. 54–61.

22. Зайцева Т. А., Шишканова Г.А. Розв'язання просторових контактних задач для некласичних багатозв'язних областей. Дніпро: Вид-во ДНУ, 2011. 192 с.
23. Карпіловський В. С. Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. Київ: Софія А. 2022. 275 с. URL: <https://scadsoft.com/download/KVSBook2022.pdf>.
24. Клованич С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: Изд-во журнала «Світ геотехніки», 2009. 400 с.
25. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.: Гостехиздат. 1947.- 475с.
26. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
27. Максимук О. В. Сачук Ю. В. Особливості контактної взаємодії штампів канонічної форми із пружним півпростором. *Сучасні проблеми механіки і математики*. 2013. Т. 1. С. 72–73.
28. Мартиняк Р. М., Приходько О. В. Задача про вдавлювання близького до плоского штампу в пружний шорсткий півпростір. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2020. (31). С. 66–77.
29. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев: Вища школа. 1982. 480 с.
30. Михлин С. Г. Приложение интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: ОГИЗ. 1947. 304с.
31. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Науч. зап. ин. машиноведения и автоматики АН УССР. 1953. Т.2. Вып.1. С.55-61.
32. Моссаковский В. И., Губенко В. С. О давлении кольцевого штампа на упругое полупространство. Науч. зап. ДГУ. 1956. Т.45. С.171-175.
33. Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С. Контактные задачи математической теории упругости. К.: Наук. думка. 1985. 175 с.

- 34.Ободан Н. І., Зайцева Т.А., Фридман О.Д. Контактна задача для жорсткого штампа та пружного півпростору як обернена. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2017. 60, № 1. С. 149–156.
- 35.Острик В. І. Контактна механіка. К. : ВПЦ Київський університет. 2015. 560 с.
- 36.Пожуев В. И., Зайцева Т. А. О приближенном решении задачи вдавливания штампа внецентренной силой. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. №10/2. 2005. С. 193-200.
- 37.Пожуев В. И., Зайцева Т. А. Определение зоны устойчивости кольцевого штампа при действии внецентренной силы с использованием методов теории потенциала. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. Днепропетровск, 2003. Т. 7. С.104-111.
- 38.Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. К.: Наук. думка. 1990. 212 с.
- 39.Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. К: Наук. думка, 1977. 235 с.
- 40.Сачук Ю. В., Максимук О. В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник ТНТУ Тернопіль* : ТНТУ. 2015. Том 78. № 2. С. 70-80. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/tstub_2015_2_9.
- 41.Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат. 1948. 351с.
42. Ткачук Н. Н., Ткачук Н. А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Механіка та машинобудування*. 2011. № 2. С. 75–86.
- 43.Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. К.: Академперіодика, 2002. 342 с.

44. Улітко А. Ф., Моргунов М. О. Контакт жорсткого диску з тонкою пружною смугою при згині. Вісник Київського ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. наук. 2001. Вип. 4. С. 164-173.
45. Уфлянд Д. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1977. 220 с.
46. Шамровский А. Д., Богданова Е. Н. Решение контактных задач теории упругости с помощью дискретных моделей. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2013. № 1. С. 100–105.
47. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. ДАН СССР. 1940. Т. 28. Вып. 1 С. 25-28.
48. Шишканова Г.А. Розв'язання просторових контактних задач для невідомих двозв'язних областей контакту: дисертація на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец.01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» Донецький націон. ун-т. Донецьк. 2006. 204 с.
49. Шишканова С. Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой. *Прикл. механика*. 1990. Т.26. №5. С. 9-15
50. Штаерман И. Я. Об одном обобщении Герца. *ПММ*. 1941. 5. №3. С. 409-418.
51. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М. Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
52. Ярецька, Н. О. Тиск жорсткого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2017. 1. С. 374-380. URL: <http://journals of znu.zp.ua/index.php/comp-science/article/view/1295>.
53. Abambres M., Marcy M., Doz G. Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization. TechRxiv. Preprint. 2021. DOI: <https://doi.org/10.36227/techrxiv.12672194.v2>

54. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. Three-Dimensional Contact Problems. *Solide Mechanics and Applications*. 2001. Vol. 93. 428 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-010-9893-9>.
55. Al-Kannoon, M. A.-A., AL-Thabthawee, H. W. Investigation of flexural and shear failure modes of tapered castellated steel beams using expansion plates. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022. 4(7 (118)). P. 6–13. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.262558>
56. Ansys Free Student Software Downloads. URL: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products>.
57. Argatov I and Chai YS. Contact Geometry Adaptation in Fretting Wear: A Constructive Review. *Front. Mech. Eng.* 2020. 6. 51. DOI: <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00051>.
58. Argatov I. I., Nazarov S. A. The pressure of a narrow ring-shaped punch on an elastic half-space. *J. of Appl. Math. and Mech.* 1996. 60 (5). P. 799-812. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00100-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00100-1).
59. Argatov I. I., Young S. Ch. A note on optimal design of contact geometry in fretting wear. *Int. J. of Mech. and Materials in Design*. 2020. 16(2). P. 415-422 DOI: <https://doi.org/10.1007/s10999-019-09467-9>.
60. Argatov I., Butcher E. On the Iwan models for lap-type bolted joints. *Int. J. of Non-Linear Mech.* 2011. 46 (2). P. 347-356. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.09.018>.
61. Argatov I., Mishuris G. Contact mechanics of articular cartilage layers Springer-Verlag, New York, 2016.
62. Arslan O. Plane contact problem between a rigid punch and a bidirectional functionally graded medium. *European J. of Mech. - A/Solids*. 2020. 80, 103925. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103925>.
63. Babich S. Y., Guz A. N., Rudnitskii V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*. (2004). 40. P. 744–765. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000046219.34646.4e>

64. Babych, S. Y., Yarets'ka, N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses*. *International Applied Mechanics*. 2021. 57. P. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
65. Banichuk N. V., Ivanova S. Y. Determination of optimal shape of a moving punch with friction taken into account. *Mech. Solids*. 2012. 47. P. 591–597. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654412050135>.
66. Banichuk N. V., Ivanova S. Yu., Makeev E. V. Finding of Rigid Punch Shape and Optimal Contact Pressure Distribution. *Mech. Based Design of Structures and Machines*. 2010. 38(4). P. 417-429. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2010.483573>.
67. Banichuk N.V, Ivanova S.Yu. Optimal Structural Design: Contact Problems and High-Speed Penetration. Berlin, Boston: De Gruyter. 2017. P. 206. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110531183>.
68. Barber J. R. Contact Mechanics. Springer. New York. 2018.
69. Benedict R. L., Taylor J. E. Optimal design for elastic bodies in contact: *Optimization of Distributed Parameter Structures*. 1981. Volume II. Alphen aan den Rijn, edited by E. J. Haug and J.Cea Sijthoff and Nordhoff. Netherlands. P. 1553– 1559.
70. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: single asperity contact. *Appl. Mech. Review*. 1996. 49 (5). P. 275–298.
71. Bhushan B. Depth-sensing nanoindentation measurement techniques and applications. *Microsystem Technologies*. 2017. 23. 1595–1649.
72. Bolloju N. Schneider C., Sugumaran V. A knowledge-based system for improving the consistency between object models and use case narratives. *Expert Systems with Applications*. 2012. vol. 39. P. 9398-9410.
73. Bonari J., Marulli M. R., Hagmeyer N., Mayr M., Popp A., Paggi M. A multi-scale FEM-BEM formulation for contact mechanics between rough surfaces. *Computational Mechanics*. 2020. 65. P. 731–749. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-019-01791-3>.

74. Boussinesque J. Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Paris: Gauthier-Villars. 1885. 772 p.
75. Bucher F., Knothe K., Lünemshlob A. The normal contact of rough surfaces with discretization. *Archive of Appl. Mech.* 2004. 73 (8). P. 561-567. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-003-0307-4>.
76. CLIPS A Tool For Building Expert Systems. URL: <https://www.clipsrules.net>.
77. Chen, L., Li, C., Chen, Y. A Forgetting Memristive Spiking Neural Network for Pavlov Experiment. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2018. 28(06), 1850080. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127418500803>
78. Dorozhko, Y., Arsenieva, N., Sarkisian, H., Synovets, O. Визначення найбільш небезпечного розташування навантаження для асфальтобетонних шарів на жорсткій основі. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. 3(7 (99)). P. 36–43. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.166490>
79. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems Kluwer Academic Publishers. 2000. 322 p.
80. Fischer-Cripps A.C. Introduction to Contact Mechanics. Springer, New York, 2007. P.240. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68188-7>.
81. François D., Pineau A., Zaoui A. Mechanical Behaviour of Materials. Volume II: *Viscoplasticity, Damage, Fracture and Contact Mechanics*. Springer, Hermes, Paris, 1998. 410 p.
82. Galin L. A., Gladwell G. M. L. Contact Problems – the legacy of L.A. Galin. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2008. Vol. 155. Springer, 318. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9043-1>.
83. Gao X.-L., Mao J. C. L. Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. *Appl. Mech.* 2014. 81(4). P. 107–119. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4025140>.

84. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>.
85. Goryacheva I. G., Makhovskaya Yu. Yu. Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion. *Mech. of Solids*. 2017. 52 (4). P. 435-443. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417040100>.
86. Groetsch C. W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Pitman, Boston Mass. London, 1984.
87. Guk, N. A., Kozakova, N. L. Delamination of a Three-Layer Base Under the Action of Normal Loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. 254(1). P. 89–102. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05290-w>.
88. Guk, N. A., Obodan, N. I. An Algorithm for the Solution of the Inverse Problem of the Theory of Shells. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. 198(2). P. 192–203. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1783-5>.
89. Gutman, E. M. Mechanochemistry of Solid Surfaces. Singapore: World Scientific. 1994. 322 p.
90. Guz A. N., Zozulya, V. V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with crack. *International Applied Mechanics*. 2002. 38 (8). P. 895–932. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021266113662>.
91. Haslinger J., Neittaanmaki P. Finite Element Approximation for Optimal Shape Design. John Wiley & Sons. London. 1988.
92. Hertz H. Uber die Berihrung fester elastischer Korper (On contact problem of elastic solids). *J. Reine Angew. Math.* 92, Gesammelte Werke Leipzig. 1881. – Bd. 1. – P. 156 -171.
93. Hills D. A., Nowell D. Mechanics of Fretting Fatigue. Springer Science & Business Media, 1994. 246 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8281-0>.
94. Johnson, K. L, Contact mechanics. Cambridge University Press. 1985.

95. Kiseleva E. M., Koriashkina L. S., Us S. A. Optimal Set Partitioning Theory In Pattern Recognition. *Analysis And Identification Problems [in rus]*. Dnipro: NGU. 2015. 270 p.
96. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Hart L. L. Application of optimal set partitioning theory to solving problems of artificial intelligence and pattern recognition. *System Research and Information Technologies*, 2021, 2021(4), P. 91–101. DOI: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.07>.
97. Kiseleva, E. M., Hart, L. L., Prytomanova, O. M., Baleiko, N. V.: Fuzzy Problems of Optimal Set Partitioning: Theoretical Foundations, Algorithms, Applications. Lyra, Dnipro. 2020. 400 p.
98. Kress, R. Tikhonov Regularization. In: Linear Integral Equations. *Applied Mathematical Sciences*. 1989. Vol 82. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-97146-4_16.
99. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Krysko V. A. On the contact interaction between two rectangular plates. *Nonlinear Dynamics*. 2016. 85. P. 2729–2748.
100. Li, B., Li P., Zhou R., Feng X., Zhou, K. Contact mechanics in tribological and contact damage-related problems: A review. *Tribology International*. 2022. Volume 171, 107534 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107534>.
101. Liu, W.K., Li, S., Park, H.S. Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2022. 29, P. 4431–4453. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9>.
102. Loboda V. V., Shevelova N. V., Khodanen T. V., Lapusta Y. N. An interaction of electrically conductive and electrically permeable collinear cracks in the interface of piezoelectric materials. *Archive of Applied Mechanics*. 2022. 92. P. 1465–1480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02123-3>.

103. Logg A. Automating the Finite Element Method. *Arch Computat Methods Eng.* 2007.14. P. 93–138. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-007-9003-9>
104. Myshkin, N. K., Goryacheva, I. G., Grigoriev, A. Ya., I. N. Kavaliova I. N., Makhovskaya, Yu. Yu. Contact Interaction in Precision Tribosystems. *J. Frict. Wear.* 2020. 41. P. 191–197. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068366620030113>.
105. Obodan N. I. Guk N. A. Inverse problems in the theory of thin shells. Lap Lambert Academic Publishing. 2012. 252 p.
106. Obodan, N. I., Guk, N. A., Kozakova, N. L. Identification of the additional exposure zone for ensuring a complete contact of the two-layered system. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2017. 5(7(89)). P. 23–29. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.109674>.
107. Obodan N. I., Zaitseva T. A., Fridman O. D. Contact Problem for a Rigid Punch and an Elastic Half Space as an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. 240 p. 184–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04346-2>.
108. Páczelt I., Mróz Z. Optimized punch contact action related to control of local structure displacement. *Struct. Multidisc. Optim.* 2019. 60. P. 1921–1936. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02300-z>.
109. Pfeiffer F., Bremer H. The Art of Modeling Mechanical Systems. CISM International Centre for Mechanical Sciences. 2017. 392 p.
110. Poole D.L., Mackworth A.K. Artificial Intelligence. Cambridge University Press. 2010. 662 p.
111. Popov V. L., Heß M., Willert E. Handbook of Contact Mechanics. Exact Solutions of Axisymmetric Contact Problems, Springer-Verlag, New York, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58709-6>.
112. Popov V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Springer-Verlag. 2010. 362 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-10803-7>.

113. Prado Leite L.F., de Melo R.S., da Rocha F.C. Analytical expressions for the singularities treatment in the three-dimensional elastostatic Boundary Element Method, *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. 7(2). P. 739–751. DOI: <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35017.2539>.
114. Rabunal J. R., Dorado J. Artificial Neural Networks in Real-Life Applications. Idea Group Publishing. 2006. 375 p.
115. Roitman A. B., Shishkanova S. F. The solution of the annular punch problem with the aid of recursion relations. *Soviet Applied Mechanics*. 1973. 9 (7). P. 725–729. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00882996>.
116. Roitman A. B., Shishkanova S. F. Pressing of a bevel annular punch into an elastic half-space. *Soviet Applied Mechanics*. 1980. 16(4). P. 293–298. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00884245>.
117. Russell S. J., Norving P. Artificial Intelligence: A Modern Approach Pearson Education, Inc. 2003. 177 p.
118. Segerlind, L. J. Applied Finite Element Analysis. 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., New York. 1984. 427p.
119. Shi Z. Advanced Artificial Intelligence. World Scientific. 2011. 613 p.
120. Shevchuk V., Yasinskyi A. Inverse problems of thermoelasticity for frictionally interacting layers. 21 Int. Congress of Theoretical and Applied Mechanics: Proc. (August 15-21, 2004, Warsaw). Warsaw (Poland): IUTAM, IPPT PAN, 2004. 222 p.
121. Shibua T. Some elastic contact problems of an elliptical punch // Bull. ISME. 1977. Vol. 20, № 146. P. 903-908.
122. Shishkanova S. F. Stress state of an elastic half-space weakened by a plane crack which is close to being annular. *Soviet Applied Mechanics*. 1990. 26 (5). P. 430-435. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00887257>.
123. Shor N. Z. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin 1985. 162 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-82118-9>.

124. Shyshkanova G. A. About stability of first kind equation solving. IEEE First International Conference on System and Intelligent Computing. 2018. Kyiv. P. 1-5. DOI: <https://doi.org/10.1109/SAIC.2018.8516805>.
125. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Zhushman V. V., Levchenko N. M., Korotunova O. V. Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. 2609 (1), 012001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001>
126. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. 7. P. 352–357. URL: www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/englishedition/MMI_2015_7/055Shyshkanova-352-357.pdf
127. Shyshkanova G. Solution of the integral equations in the three-dimensional nonsymmetrical contact problems with the friction taken into account. *TWMS J. of Pure and Appl. Math.* 2011. 2 (1). P. 134-145.
128. Shyshkanova G., Zaytseva T., Frydman O. Stress and elastic displacement in doubly-connected rectangular contact areas of machine pieces. *Metallurgical and mining industry*. 2016. 4. P. 77-81.
129. Shyshkanova, G. A., Walther, A. Simple layer potential expansion for optimization of contact interaction taking into account friction and adhesion. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. 2675, 012033. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2675/1/012033>.
130. Sofonea M. *Mathematical Models in Contact Mechanics*. Cambridge University Press, New York. 2012. 295 p.
131. Tikhonov A. N., Arsenin V.Ya. *Methods for solving ill-posed problems*. M.: Nauka. 1979. 286 p.
132. Tkachuk, M. M., Grabovskiy, A., Tkachuk A., M., Hrechka, I., Ishchenko, O., Domina, N. Investigation of multiple contact interaction of

- elements of shearing dies. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. 4(7 (100), P. 6–15. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.174086>.
133. Walther A., Weiß O., Griewank A., Schmidt S. Nonsmooth optimization by successive abs-linearization in function spaces. *Applicable Analysis*. 2022. 101(1). P. 225-240.
 134. Wang F., Wei H. Virtual element method for simplified friction problem. *Applied Mathematics Letters*. 2018. 85. P. 125-131. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.06.002>.
 135. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, Berlin, 2006. 521 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>.
 136. Yarets'ka, N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. Vol 191. Springer, Cham. 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29.
 137. Yaretskaya N. F. Contact problem for the rigid ring stamp and the half-space with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.* 2018. 54. P. 539–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>.
 138. Yastrebov V. A. Numerical Methods in Contact Mechanics. ISTE, London, 2013. 295 p.
 139. Yilmaz K. B., Comez I., Yildirim B., Güler M. A., El-Borgi S. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. 141, P. 127-142. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.041>.
 140. Zare, I., Allen M. S. Adapting a contact-mechanics algorithm to predict damping in bolted joints using quasi-static modal analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. 189, 105982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105982>.

141. Zaytseva T. Zhushman V. Construction of mathematical and computer models for calculating contact characteristics of interaction between a rigid punch and an elastic half-space. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. 2 (7 (128)). P 67–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.302792>.
142. Zhou Yi, Lin Q, Hong J and Yang N. Combined interface shape and material stiffness optimization for uniform distribution of contact stress. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2023. 51 (2), P. 1001–1015. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1860086>.
143. Zhushman V., Zaytseva T., Hurko O. The latest information technologies for modeling problems of mechanics of deformed solid
Сучасні науково-технічні дослідження у контексті мовного простору (англійською мовою): матеріали X Регіон. наук.-практ. конф. молодих науковців та студентів, 13 травня 2021р. м. Дніпро, 2021. С. 171-173.
144. Zadeh L. From computing with numbers to computing with words - From manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2002. Vol. 12. №3. P. 307-324.