

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СЕМЕНЧА ОЛЕКСІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННИХ
СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ
ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ**

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О. О. Семенча

Науковий керівник:

Гарт Етері Лаврентіївна,

доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2024

АНОТАЦІЯ

Семенча О. О. Напружено-деформований стан тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з отворами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2024.

Задачі визначення напружено-деформованого стану твердих тіл з неоднорідностями різного роду (отворами, тріщинами, порожнинами тощо) є складовими широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла. Наявність таких неоднорідностей має суттєвий вплив на деформування твердого тіла. Вони є локальними концентраторами напружень, які за певних навантажень або умов експлуатації можуть призвести до появи пластичних деформацій, що, в свою чергу, сприяють початку руйнівних процесів у конструкції. Це обумовлює важливість досліджень напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл, пошук раціональних параметрів зниження локальної концентрації напружень навколо отворів, що є складною задачею і потребує застосування ефективних числових методів.

У дисертаційній роботі виконане числове моделювання та аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних та зрізаних конічних оболонок з круговими та прямокутними отворами зі стрічковими включеннями, матеріал яких має властивості, що відрізняються від базового матеріалу оболонок. Досліджено вплив зміни модуля пружності включення та його геометричних параметрів на напружено-деформований стан оболонок в околі отворів при варіюванні матеріалу включень та їх ширини. Вважалося, що включення однорідні, знаходяться у площині оболонки, між матрицею і включеннями задано умови жорсткого зчеплення. Виконано порівняльний аналіз отриманих результатів для оболонок обох форм – циліндричних і

конічних з круговими та квадратними отворами. Здійснено аналіз зміни характеру розподілу напружень в околі отворів за наявності включень навколо них та впливу матеріалу включення на величину коефіцієнта концентрації напружень, надано рекомендації щодо застосування включень в тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонках з різними отворами, що дозволяє впливати на їх напружено-деформований стан з метою підвищення міцності елементів конструкцій, зокрема, авіаційної, ракетно-космічної техніки та ін.

У першому розділі дисертації проведено огляд проблематики розрахунку зниження концентрації параметрів напружено-деформованого стану структурно неоднорідних оболонкових елементів тонкостінних конструкцій, зокрема циліндричних і конічних оболонок. Виконано аналіз праць з визначення напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій з отворами і включеннями. Здійснено аналіз існуючих підходів щодо проблеми зниження концентрації напружень навколо отворів та огляд праць з методів розв'язування задач визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з отворами.

У другому розділі розглянуто застосування методу скінченних елементів до визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок. Наведено основні співвідношення методу скінченних елементів, рівняння рівноваги для тонкостінних циліндричних і конічних оболонок. Сформульовано варіаційну постановку задач визначення напружено-деформованого стану тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок.

У третьому розділі запропоновано математичні розрахункові моделі для визначення напружено-деформованого стану пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з неоднорідностями у вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії. Наведено розроблену методику

визначення параметрів напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл з різними отворами і включеннями навколо них при пружному деформуванні на основі використання методу скінченних елементів.

З використанням запропонованої методики проведено дослідження з визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з круговим отвором. Здійснено порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану вказаних оболонок з відповідними аналітичними розв'язками для окремих випадів. Проведено комп'ютерне моделювання і числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на концентрацію напружень в оболонках з круговим отвором (розглянуті оболонки з «малим» круговим отвором). Встановлено та обґрунтовано раціональні параметри кільцевих включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень навколо локальних концентраторів напружень в оболонках обох видів.

У четвертому розділі проведено дослідження напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з прямокутним отвором. Виконано порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану вказаних оболонок з відомими розв'язками для окремих випадків. Проведено числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на концентрацію напружень в оболонках з прямокутним отвором (розглянуті оболонки з «малим» квадратним отвором). Визначено компоненти напружено-деформованого стану та коефіцієнт концентрації напружень для обох видів оболонок з квадратними отворами і включеннями навколо них при варіюванні механічних і геометричних параметрів включень. Встановлено та обґрунтовано раціональні параметри стрічкових включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень навколо локальних концентраторів

напружень в оболонках обох видів. Виявлено механічні ефекти щодо зміни локації концентрації напружень в залежності від виду отворів і сполучення параметрів включень.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в розробці математичних розрахункових моделей для визначення напружено-деформованого стану пластинчато-оболонкових елементів конструкцій в вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії. Розроблено методику визначення параметрів напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл з різними отворами і включеннями навколо них при пружному деформуванні на основі використання методу скінченних елементів.

Встановлено та обґрунтовано раціональні параметри включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень в оболонках навколо локальних концентраторів напружень. Виявлено механічні ефекти щодо зміни локації концентрації напружень в залежності від виду отворів і сполучення параметрів включень. Знайдено закономірності зміни розподілу напружень і деформацій в оболонці з різними отворами в залежності від їх розташування, виду і властивостей включень. Завдяки аналізу зміни характеру розподілу напружень в околі отворів за наявності включень та впливу матеріалу включення на величину коефіцієнта концентрації напружень для обох видів оболонок вироблено рекомендації щодо застосування включень в тонкостінних структурно неоднорідних оболонках з різними отворами, що дозволяє впливати на їх напружено-деформований стан з метою підвищення міцності елементів конструкцій.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблені розрахункові моделі і методика знаходження раціональних з точки зору зменшення коефіцієнта концентрації напружень механічних і геометричних параметрів включень в оболонкових елементах конструкцій з круговими і прямокутними отворами можуть служити науково-методичною

основою для перспективних розробок в механіці деформованого твердого тіла, надають змогу проводити дослідження актуальних задач механіки, які виникають в інженерній практиці при розрахунках міцності неоднорідних конструкцій з різноманітними концентраторами напружень. Одержані результати розв'язаних задач для структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонкових елементів конструкцій можуть безпосередньо використовуватися при прогнозуванні безпечної роботи відповідних конструкцій в машинобудуванні, енергетиці, будівництві, аерокосмічній техніці тощо.

Запропонована методика щодо зменшення концентрації напружень навколо отворів може бути застосована у науково-дослідних і проєктно-конструкторських організаціях при проєктуванні, розрахунку і оцінці міцності елементів конструкцій нової техніки, зокрема, ракетно-космічної.

Ключові слова: напружено-деформований стан, тонкостінні конструкції, циліндричні оболонки, конічні оболонки, круговий отвір, квадратний отвір, біматеріал, кільцеве включення, стрічкове включення, коефіцієнт концентрації напружень, раціональні параметри, міцність, метод скінченних елементів.

ABSTRACT

Semencha O. O. Stress-strain state of thin-walled structurally inhomogeneous cylindrical and conical shells with holes. – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

Dissertation for obtaining the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics. – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2024.

The problems of determining the stress-strain state of solid bodies with inhomogeneities of various kinds (holes, cracks, cavities, etc.) are components of a wide class of problems of the mechanics of a deformable solid body. The presence of such inhomogeneities has a significant effect on the deformation of a solid body. They are local stress concentrators, which under certain loads or operating conditions can lead to the appearance of plastic deformations, which, in turn, contribute to the onset of destructive processes in the structure. This determines the importance of studies of the stress-strain state of structurally heterogeneous bodies, the search for rational parameters for reducing the local stress concentration around holes, which is a difficult task and requires the use of effective numerical methods.

Numerical modeling and analysis of the stress-strain state of thin-walled cylindrical and truncated conical shells with circular and rectangular holes with ribbon inclusions, the material of which has properties different from the base material of the shells, was performed in the dissertation work. The effect of changing the elastic modulus of the inclusion and its geometric parameters on the stress-strain state of the shells around the holes was investigated when the material of the inclusions and their width were varied. It was assumed that the inclusions are homogeneous, located in the plane of the shell, and the conditions of rigid adhesion were set between the matrix and the inclusions. A comparative analysis of the obtained results was performed for shells of both shapes - cylindrical and conical with circular and square holes. An analysis of the change in the nature of the stress distribution around the holes in the presence of inclusions around them and the influence of the inclusion material on the value of the stress concentration coefficient

was carried out, recommendations were given for the use of inclusions in thin-walled structurally heterogeneous cylindrical and conical shells with different holes, which allows influencing their stress-strain state in order to increase the strength of structural elements, in particular, aviation, rocket and space technology, etc.

In the first chapter of the dissertation, an overview of the problems of calculating the concentration reduction of the parameters of the stress-strain state of structurally heterogeneous shell elements of thin-walled structures, cylindrical and conical shells, was reviewed. An analysis of works on determining the stress-strain state of shell structures with holes and inclusions was performed. An analysis of existing approaches to the problem of reducing the stress concentration around holes and a review of works on methods of solving the problems of determining the stress-strain state of structurally heterogeneous cylindrical and conical shells with holes was carried out.

In the second chapter, the application of the finite element method to the determination of the stress-strain state of structurally heterogeneous cylindrical and conical shells is considered. The main relations of the finite element method, equilibrium equations for thin-walled cylindrical and conical shells are presented. A variational statement of the problems of determining the stress-strain state of thin-walled structurally heterogeneous cylindrical and conical shells is formulated.

In the third chapter, mathematical calculation models are proposed for determining the stress-strain state of plate-shell elements of structures with inhomogeneities in the form of holes and inclusions, taking into account the specifics of their geometry. The developed methodology for determining the parameters of the stress-strain state of structurally heterogeneous bodies with various holes and inclusions around them during elastic deformation based on the use of the finite element method is given. Using the proposed methodology, a study was conducted to determine the stress-strain state of structurally heterogeneous cylindrical and conical shells with a circular hole. A comparative analysis of the results of the numerical calculation of the stress-strain state of the indicated shells with the corresponding analytical solutions for individual cases was carried out. Computer modeling and numerical analysis of the influence of mechanical and

geometric parameters of ring inclusions on the stress concentration in shells with a circular opening (considered shells with a "small" circular hole) were carried out. The rational parameters of the ring inclusions, which make it possible to reduce the stress concentration around the local stress concentrators in the shells of both types, have been established and substantiated.

In the fourth chapter, the stress-strain state of structurally heterogeneous cylindrical and conical shells with a rectangular opening is studied. A comparative analysis of the results of the numerical calculation of the stress-strain state of the specified shells with known solutions for individual cases was performed. A numerical analysis of the influence of the mechanical and geometric parameters of strip inclusions on the stress concentration in shells with a rectangular opening (considered shells with a "small" square hole) was carried out. The components of the stress-strain state and the stress concentration coefficient were determined for both types of shells with square holes and inclusions around them when the mechanical and geometric parameters of the inclusions varied. The rational parameters of strip inclusions, which make it possible to reduce the stress concentration around local stress concentrators in the shells of both types, have been established and substantiated. The mechanical effects regarding the change in the location of the stress concentration depending on the type of holes and the combination of the parameters of the inclusions were revealed.

The scientific novelty of the obtained results lies in the development of mathematical calculation models for determining the stress-strain state of plate-shell elements of structures in the form of holes and inclusions, considering the specifics of their geometry. A technique for determining the parameters of the stress-deformed state of structurally heterogeneous bodies with various holes and inclusions around them during elastic deformation based on the use of the finite element method has been developed.

The rational parameters of the inclusions, which make it possible to reduce the stress concentration in the shells around the local stress concentrators, have been established and substantiated. The mechanical effects regarding the change in the

location of the stress concentration depending on the type of holes and the combination of the parameters of the inclusions were revealed. Patterns of changes in the distribution of stresses and deformations in the shell with different openings were found, depending on their location, type, and properties of inclusions. Thanks to the analysis of the change in the nature of the stress distribution around the holes in the presence of inclusions and the influence of the inclusion material on the value of the stress concentration coefficient for both types of shells, recommendations have been made for the use of inclusions in thin-walled structurally heterogeneous shells with different holes, which allows influencing their stress-strain state in order to increase the strength of structural elements.

The practical significance of the obtained results is that the developed calculation models and the method of finding rational from the point of view of reducing the stress concentration coefficient of mechanical and geometric parameters of inclusions in shell elements of structures with circular and rectangular holes can serve as a scientific and methodological basis for promising developments in the mechanics of deformed solids bodies, make it possible to carry out research on actual problems of mechanics that arise in engineering practice when calculating the strength of heterogeneous structures with various stress concentrators. The obtained results of the solved problems for structurally heterogeneous cylindrical and conical shell elements of structures can be directly used in predicting the safe operation of the corresponding structures in mechanical engineering, energy, construction, aerospace engineering, etc.

The proposed technique for reducing stress concentration around holes can be applied in research and design organizations when designing, calculating and evaluating the strength of structural elements of new technology, in particular, rocket and space technology.

Keywords: stress-strain state, thin-walled structures, cylindrical shells, conical shells, circular hole, square hole, bimaterial, ring inclusion, tape inclusion, stress concentration factor, rational parameters, strength, finite element method.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 43–54. <https://doi.org/10.15421/4221004> (фахове видання, категорія Б).

2. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числовий аналіз напружено-деформованого стану пружних циліндричних і конічних оболонок з круговими та прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2023. – Вип. 36. – С. 25–39. <https://doi.org/10.15421/4223103> (фахове видання, категорія Б).

3. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Комп'ютерне моделювання впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних та конічних оболонках з круговими отворами // Технічна механіка. – 2023. – № 4. – С. 60–75. <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.060> (фахове видання, категорія Б).

4. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числовий аналіз впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних і конічних оболонках з прямокутними отворами // Технічна механіка. – 2024. – № 1. – С. 66–82. <https://doi.org/10.15407/itm2024.01.066> (фахове видання, категорія Б).

Матеріали конференцій

1. Гарт Е. Л., Петров І. І., Семенча О. О., Терьохін Б. І. Числовий аналіз взаємного впливу двох кругових та видовжених еліптичних отворів пружної пластини в залежності від заданих граничних умов // Математичні проблеми технічної механіки – 2018: Матеріали Міжнародної наукової

конференції (16–19 квітня 2018 р.). – Кам’янське, Дніпро: Дніпровський держ. техн. ун-т, 2018. – С. 39.

2. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Вплив форми, розмірів та розташування деконцентраторів напружень на напружено-деформований стан пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами // Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019: Матеріали Міжнародної наукової конференції (15–18 квітня 2019 р.). – Дніпро, Кам’янське: Дніпровський держ. техн. ун-т, 2019. – С. 43–44.

3. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Комп’ютерне моделювання напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором // Results of modern scientific research and development: Proceedings of VIII International Scientific and Practical Conference (October 17–19, 2021). – Madrid, Spain. – P. 179–186. <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2021/10/RESULTS-OF-MODERN-SCIENTIFIC-RESEARCH-AND-DEVELOPMENT-17-19.10.21.pdf>

4. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і конічних оболонок з круговими отворами // Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2022: Матеріали Міжнародної наукової конференції (12–14 грудня, 2022, Київ, Україна). – Т. 2. – Київ, 2022. – С. 30–32.

https://drive.google.com/file/d/1GnZe_jMADlC0j9BbVa6tyAbTAZwaN1oI/view

5. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Скінченноеlementний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями // Сучасні проблеми механіки та математики – 2023: зб. наук. праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – С. 271–272.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_20.pdf

Тези доповідей

6. Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І. Influence of inclusions around a rectangular hole on the stress concentration factor in a trapezoidal plate // EJONS: Book of Abstract of the 13th International Conference on Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences (October 26-27, 2021). – Cappadocia, Turkey. – P. 154–155. https://ad6a8388-4205-4213-85bd-af6ef6e6fa58.filesusr.com/ugd/614b1f_bef6925b211f4ec38036433972f07d3d.pdf

Навчальні посібники

1. Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І. Посібник до вивчення дисципліни «Прикладні обчислювальні технології» // Дніпро: Ліра, 2023. – 92 с. (Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, протокол № 3 від 21 листопада 2023 року).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	16
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ПРОБЛЕМАТИКИ РОЗРАХУНКУ І ЗНИЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ	22
1.1 Огляд праць з визначення напружено-деформованого стану оболонкових елементів тонкостінних конструкцій з отворами і включеннями.....	22
1.1.1 Аналіз існуючих підходів щодо проблеми зниження концентрації напружень навколо отворів.....	26
1.2 Огляд праць з методів розв’язування задач визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з отворами.....	27
Висновки до розділу 1.....	31
РОЗДІЛ 2 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК	32
2.1 Основні співвідношення методу скінченних елементів.....	32
2.2 Рівняння рівноваги для тонкостінних циліндричних і конічних оболонок.....	42
2.3 Варіаційна постановка задач визначення напружено- деформованого стану тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок.....	48
Висновки до розділу 2.....	50
РОЗДІЛ 3 ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З КРУГОВИМ ОТВОРОМ.....	51

3.1 Порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану тонких однорідних циліндричних і конічних оболонок з круговим отвором з відповідними аналітичними розв'язками.....	52
3.1.1 Оболонки з малим круговим отвором.....	53
3.2 Числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на концентрацію напружень в тонких неоднорідних оболонках з круговим отвором.....	59
3.2.1 Оболонки з малим круговим отвором і кільцевим включенням.....	60
Висновки до розділу 3.....	74
РОЗДІЛ 4 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ.....	76
4.1 Порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану тонких однорідних циліндричних і конічних оболонок з квадратним отвором з відомими розв'язками.....	76
4.1.1 Оболонки з малим квадратним отвором.....	77
4.2 Числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких неоднорідних оболонках з квадратним отвором.....	79
4.2.1 Оболонки з малим квадратним отвором і стрічковим включенням	80
Висновки до розділу 4.....	105
ВИСНОВКИ.....	106
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	108
Додаток А Список публікацій автора за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....	124
Додаток Б Розподіл полів інтенсивності напружень в оболонках.....	127

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Тонкостінні конструкції, елементами яких є пластини і оболонки, мають широкий спектр застосування у різноманітних галузях техніки, а саме, судно-, машино- та ракетобудуванні, авіації, енергетиці, будівництві та ін. Процеси деформування та руйнування залежать від багатьох факторів, головним з яких є рівень напружень в компонентах матеріала конструкції. На практиці найбільш часто застосовують оболонки з вирізами різних форм та розмірів, а також з включеннями різної жорсткості, що призводить до локальної концентрації параметрів напружено-деформованого стану (НДС). Урахування впливу вказаних неоднорідностей є дуже важливим з точки зору прогнозу надійності і довговічності конструкції. Наявність локальних концентраторів напружень може несприятливо впливати на процес експлуатації конструкції і призвести до її передчасного виходу з ладу. У більшості випадків оболонки, що використовують в реальних конструкціях, мають прості геометричні форми поверхонь (оболонки обертання). Складні конструкції є зазвичай комбінацією простих форм оболонок. Зокрема, циліндричні і конічні оболонки знайшли широке розповсюдження, у тому числі, в ракетно-космічній галузі як частини ступенів ракет-носіїв, силових конструкцій космічних апаратів та адаптерів корисного навантаження, що слугують для зв'язку космічного апарату із засобами виведення та ін. Дослідження впливу локальних концентраторів на НДС оболонки і способи зниження концентрації напружень в тонкостінних оболонках обертання (циліндричних і конічних) є актуальним завданням механіки деформівного твердого тіла.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота тісно пов'язана з науковими дослідженнями, що проводились у проблемній науково-дослідній лабораторії міцності і надійності конструкцій кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки

механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетної теми 1-657-21 «Розробка методів прогнозування несучої здатності елементів конструкцій ракетної техніки без використання руйнуючих випробувань і вибір їх раціональних параметрів», номер державної реєстрації № 0121U109768 (2021–2023 рр., керівник НДР заслужений діяч науки і техніки України, д-р техн. наук., проф. А.П. Дзюба).

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи є* встановлення раціональних параметрів підкріплювальних елементів тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з різними отворами (круговими, прямокутними), що дають змогу зменшити концентрацію напружень навколо них, за допомогою числового дослідження впливу виду, розмірів та механічних властивостей підкріплювальних елементів (включень) на напружено-деформований стан оболонки.

Для досягнення мети дослідження необхідно вирішити такі *завдання*:

- 1) визначити компоненти НДС та коефіцієнт концентрації напружень (ККН) тонкостінних структурно неоднорідних конічних оболонок з різними отворами;
- 2) дослідити вплив виду, розмірів та механічних властивостей включень (підкріплюючих елементів) на НДС циліндричних і конічних оболонок з отворами;
- 3) установити раціональні параметри підкріплень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень в оболонці навколо отворів;
- 4) з'ясувати закономірності зміни розподілу напружень і деформацій в оболонці з різними отворами в залежності від їх форми, розмірів і механічних властивостей включень;
- 5) обґрунтувати раціональність знайдених параметрів з точки зору зменшення величини ККН, розробити рекомендації щодо застосування включень в циліндричних і конічних структурно неоднорідних оболонках з

різними отворами, що дозволяє впливати на НДС з метою підвищення міцності елементів конструкцій.

Об'єкт дослідження. Напружено-деформований стан тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з різними отворами (кругові, прямокутні), що знаходяться під дією зовнішнього механічного навантаження.

Предмет дослідження. Концентрація напружень в околі отворів тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з різними отворами з урахуванням впливу виду, розмірів і механічних властивостей матеріалу підкріплювальних елементів (включень).

Методи дослідження. У роботі застосовано варіаційні принципи і методи механіки деформівного твердого тіла для побудови математичних моделей досліджуваних об'єктів. Для знаходження числових розв'язків задач пружного деформування оболонкових елементів конструкцій з отворами і включеннями застосовано метод скінченних елементів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому:

- розроблено математичні розрахункові моделі для визначення НДС пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з неоднорідностями у вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії;
- розроблено методику визначення параметрів НДС структурно неоднорідних тіл з різними отворами і включеннями навколо них при пружному деформуванні на основі використання методу скінченних елементів;
- здійснено порівняльний аналіз результатів комп'ютерного моделювання поведінки пластинчато-оболонкових елементів конструкцій (циліндричної і конічної форми) за наявності різних отворів (кругових, квадратних) і включень (кільцевих, стрічкових) з урахуванням механічних властивостей матеріалу і специфіки їх геометрії;

- визначено компоненти НДС та ККН тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з різними отворами і включеннями навколо них при варіюванні механічних і геометричних параметрів включень з вивченням впливу включень на величину ККН;
- встановлено та обґрунтовано раціональні параметри підкріплень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень в оболонках навколо локальних концентраторів напружень; виявлено механічні ефекти щодо зміни локації концентрації напружень в залежності від виду отворів і сполучення параметрів включень;
- встановлено закономірності зміни розподілу напружень і деформацій в оболонці з різними отворами в залежності від їх розташування, виду і властивостей включень;
- здійснено аналіз зміни характеру розподілу напружень в околі отворів за наявності включень та впливу матеріалу включення на величину ККН, розроблено рекомендації щодо застосування включень в тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонках з різними отворами, що дозволяє впливати на їх НДС з метою підвищення міцності елементів конструкцій.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується використанням загальновизнаних положень, співвідношень та методів механіки деформованого твердого тіла; строгістю і коректністю математичних постановок задач у межах теорії пружності, теорії пластин і оболонок; використанням апробованих обчислювальних схем числових методів; апробацією розробленої методики на тестових задачах та узгодженістю одержаних розв'язків із відомими в літературі; відповідністю одержаних результатів фізичній суті процесів і явищ, що вивчаються.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Розроблені в дисертаційній роботі нові розрахункові моделі і методика знаходження раціональних з точки зору зменшення ККН механічних і

геометричних параметрів включень в оболонкових елементах конструкцій (циліндричних і конічних) з круговими і прямокутними отворами мають як теоретичне, так і практичне значення. Вони можуть служити науково-методичною основою для перспективних розробок в механіці деформованого твердого тіла, надають змогу проводити дослідження актуальних задач механіки, які виникають в інженерній практиці при розрахунках міцності неоднорідних конструкцій з різноманітними концентраторами напружень. Одержані результати розв'язаних задач для структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонкових елементів конструкцій можуть безпосередньо використовуватися при прогнозуванні безпечної роботи відповідних конструкцій в машинобудуванні, енергетиці, будівництві, аерокосмічній техніці тощо.

Одержані автором результати впроваджено у навчальний процес Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара МОН України як методична розробка (Посібник до вивчення дисципліни «Прикладні обчислювальні технології» / Гарт Е.Л., Семенча О.О., Терьохін Б.І. – Дніпро: Ліра, 2023. – 92 с.) [35], що використовується при підготовці магістрів за спеціальністю 113 Прикладна математика, освітньо-професійна програма «Комп'ютерна механіка» (рекомендовано вченою радою механіко-математичного факультету 21 листопада 2023 р., протокол № 3).

Запропонована методика стосовно зменшення концентрації напружень навколо отворів може бути застосована у науково-дослідних і проектно-конструкторських організаціях при проектуванні, розрахунку і оцінці міцності елементів конструкцій нової техніки.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації опубліковано у 10 наукових працях, з них: 4 статті [28, 30, 31, 32] у наукових фахових виданнях України категорії Б, 6 матеріалів міжнародних наукових конференцій і тез доповідей [27, 29, 7, 33, 34, 36], 1 навчальний посібник [35].

Усі основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. В працях, написаних у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у запропонованій методиці, алгоритмі та числової реалізації, безпосередній участі у виконанні всіх етапів робіт: комп'ютерне моделювання, проведення обчислювальних експериментів, інтерпретація результатів, обговорення і формулювання висновків.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2021–2024 років, а також на міжнародних наукових конференціях:

- «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, Дніпро, 2018, 2019),
- VIII International Scientific and Practical Conference «Results of modern scientific research and development» (Madrid, Spain, 2021),
- 13th International Conference on Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences «EJONS» (Cappadocia, Turkey, 2021),
- «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК2022» (Київ, Україна, 2022),
- «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, Україна, 2023).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, що містять 42 рисунки та 21 таблицю, висновків, списку використаних джерел із 165 найменувань на 16 сторінках і двох додатків на 27 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 150 сторінок, обсяг основного тексту 110 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ПРОБЛЕМАТИКИ РОЗРАХУНКУ І ЗНИЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ

Проведено огляд проблематики розрахунку зниження концентрації параметрів напружено-деформованого стану структурно неоднорідних оболонкових елементів тонкостінних конструкцій, зокрема циліндричних і конічних оболонок. Виконано аналіз праць з визначення напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій з отворами і включеннями. Здійснено аналіз існуючих підходів щодо проблеми зниження концентрації напружень навколо отворів та огляд праць з методів розв'язування задач визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з отворами.

1.1. Огляд праць з визначення напружено-деформованого стану оболонкових елементів тонкостінних конструкцій з отворами і включеннями

Визначенню та аналізу НДС тонкостінних оболонок присвячена велика кількість робіт. Значний внесок в розвиток аналітичних, числових та експериментальних методів розрахунку НДС неоднорідних тіл, зокрема пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами, включеннями і тріщинами, належить В. Л. Бідерману [10], Д. В. Вайнбергу [14], Е. Л. Гарт [22–26, 51, 52, 136, 138–143, 1439–152], Р. В. Гольдштейну [39], Е. І. Григолюку [41], Я. М. Григоренку [42, 43, 44], Д. В. Грилицькому [45], В. Т. Грінченку [46], В. С. Гудрамовичу [47–53, 136, 139–143, 147–152], О. М. Гузю [54–58], А. П. Дзюбі [59, 60], Б. Я. Кантору [64], В. Г. Карнаухову [65], Г. С. Кіту [67, 68], О. С. Космодаміанському [69], В. Д. Кубен-

ку [70], В. М. Кукуджанову [72], Р. М. Кушніру [73], В. В. Лободі [154], А. І. Лур'є [77], В. І. Моссаковському [87–89], М. І. Мусхелішвілі [90], З. Т. Назарчуку [91], В. В. Новожилову [92], В. А. Осадчуку [93], В. В. Панасюку [95], Я. С. Підстригачу [98, 101], В. І. Пожуєву [102], В. П. Пошивалову [103], О. О. Рассказову [106], Г. М. Савіну [110, 111], М. П. Савруку [112], П. О. Стеблянку [117, 118], С. П. Тимошенку [120], Т. В. Ходанен [154], І. С. Чернишенку [124], В. П. Шевченку [125], М. Darvizeh [132], X. Han [137], L. Hua [146], T. Mura [156], M. Murthy [157], E. Ventsel [161] та ін.

Так, в [154] застосовано аналітичний підхід до вивчення взаємодії електропровідних та електропроникних колінеарних тріщин уздовж межі розподілу двох п'єзоелектричних матеріалів під дією антиплоского механічного навантаження та площинного електричного поля. Автори цієї роботи припустили, що електричне поле паралельне берегам тріщин, а поляризація матеріалів співнаправлена з фронтами тріщин. Використовуючи представлення всіх необхідних електромеханічних величин через секційну аналітичну вектор-функцію, сформулювали комбіновану крайову задачу Діріхле – Рімана. Отримано аналітичні розв'язки поставленої задачі для будь-яких відстаней між тріщинами, довжин і зовнішніх навантажень; наведено аналітичні вирази для напруги зсуву, електричного поля та коефіцієнтів їх напруженості, а також для механічних та електричних стрибків зміщення; знайдено швидкості виділення енергії для всіх вершин тріщин і продемонстровано їх зміну залежно від зовнішнього навантаження та відстані між тріщинами.

У [59] застосовано експериментальний підхід до моделювання процесу утворення тріщини в зразках із оптично активного матеріалу на контурі кругового отвору пластини із полікарбонату з використанням включень з матеріалу, виготовленого на основі епоксидної смоли. Автори проводили дослідження шляхом спільного використання поляризаційно-оптичного методу та методу каустик. Ними було досліджено крихке і пластичне

руйнування зразків в результаті появи і розвитку тріщини та отримані залежності J -інтегралу від величини навантаження зразка на згинання.

У [103] розглянуті підходи до вирішення задач надійності об'єктів ракетно-космічної техніки. Автори показали, що при проєктування таких об'єктів необхідно враховувати експлуатаційні навантаження на основі встановлених норм міцності, інших проєктних норм, що реалізуються спільно з правилами їхнього приймання, правилами експлуатації, нагляду, технічного обслуговування, відновлення. Проєктні дослідження надійності об'єктів ракетно-космічної техніки повинні бути спрямовані на забезпечення заданих показників надійності в умовах наявних обмежень. В цій роботі розглянута процедура вибору показників надійності об'єкта ракетно-космічної техніки і його складових частин. Показано, що для обґрунтування числових значень показників надійності можуть використовуватися два підходи:

- забезпечити певний мінімальний рівень;
- забезпечити максимально можливий рівень показників надійності об'єкта ракетно-космічної техніки при дотриманні заданих або об'єктивно існуючих обмежень на витрати (вартість, масу, об'єм, тощо) при одночасному дотриманні умови, що необхідний рівень надійності буде не нижче, ніж у аналога.

Охарактеризовано підходи до забезпечення надійності об'єктів ракетно-космічної техніки на етапі проєктування, які включають:

- послідовність вирішення задач забезпечення і контролю надійності таких об'єктів на етапі проєктування;
- склад робіт з нормування надійності на етапі проєктування;
- вибір номенклатури показників.

Робота [118] присвячена дослідженню поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів (матеріали, що при високій температурі накопичують деформацію певної величини при навантаженні, а потім повертаються у

вихідне положення після розвантаження через петлю гістерезису) при великих деформаціях. Проведено експериментальне обґрунтування варіанту феноменологічної моделі поведінки матеріалу з пам'яттю форми, розроблено новий варіант скінченно-різницевого методу підвищеної точності, за допомогою якого запропоновано розв'язувати задачі нового класу двовимірних нестационарних задач теорії термопружної пластичності для матеріалів з пам'яттю форми, коли невідомі величини визначаються у вигляді двовимірних напружених сплайнів.

В [162] проведено дослідження пластинчатого елемента конструкції з включенням. Проаналізовано вигин тонкої нескінченної пластини з лінійною тріщиною та жорстким включенням довільної форми. Особливу увагу приділено розподілу напружень вздовж лінії тріщини. Розв'язок представлено в інтегральній формі. Числові результати одержані для пластини з квадратним жорстким включенням та лінійною тріщиною.

В [51] проаналізовано вплив орієнтації підкріпленого отвору відносно напрямку дії навантаження у прямокутній пластині. Встановлено, що завдяки варіюванню орієнтації отвору відносно напрямку дії навантаження, а також при використанні включень з іншого матеріалу можна значно зменшити напруження у пластині в місцях їх концентрації. Крім того, встановлено, що при зменшенні кута повороту отвору відносно напрямку дії навантаження максимальні напруження зменшуються. Робота [52] присвячена дослідженню НДС пружної неоднорідної пластини при варіюванні фізико-механічних характеристик включень, що моделюють локальні підкріплення для різних кутів орієнтації включень відносно один одного та для випадку відсутності включення. Встановлено, що при зменшенні відносної жорсткості включень спостерігається зменшення напружень в околі включення, а при збільшенні жорсткості ККН збільшується, що може призвести до появи пластичних деформацій конструкції та початку руйнування.

У циклі праць [22–26, 138–143, 150–152] на основі теоретично обґрунтованої методики застосування проекційно-ітераційних модифікацій

варіаційно-сіткових методів скінченних елементів і локальних варіацій в поєднанні із методами пружних розв'язків розв'язано низку практично важливих задач пружно-пластичного деформування пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами і включеннями різної геометрії, розташуванням і кількості. Для обґрунтування числової методики застосовано апарат функціонального аналізу. Числова реалізація цієї методики показала її високу обчислювальну ефективність та дала змогу розв'язати низку нових практично важливих задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема, за допомогою комп'ютерного моделювання поведінки плоского структурно неоднорідного середовища з порами та включеннями при варіюванні їх форми, розмірів, розташування та кількості.

В рамках сучасних досліджень щодо підвищення міцності і надійності конструкцій нової техніки особливу увагу приділяють аналізу НДС пластинчато-оболонкових елементів тонкостінних конструкцій із композитних матеріалів. Так, в [145] на основі комп'ютерного моделювання проведено скінченноелементний аналіз НДС тонких пластин і циліндричних оболонок з круговим отвором за наявності навколо нього кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). Такий підхід є інноваційним з точки зору зміцнення та покращення механічних властивостей конструкцій. Показано, що використання радіально-неоднорідного включення із ФГМ з раціонально підібраними механічними та геометричними характеристиками дає змогу досягти ефекту значного зниження концентрації напружень.

1.1.1. Аналіз існуючих підходів щодо проблеми зниження концентрації напружень навколо отворів

Для зниження концентрації напружень в околі отворів існують різні підходи та методи [18, 26, 45, 52, 54–58, 67, 69, 98, 101, 110, 119, 120, 125, 130, 132, 133, 136, 143, 162].

Деякі з них включають:

- *закруглення країв отворів*: додавання радіусів або округлень до країв отворів може значно зменшити концентрацію напружень, що сприяє зниженню ризику пошкодження матеріалу [56, 69, 110];
- *використання включень*: встановлення заглушок або вставок в отвори може розподілити напруження по ширшій області, знижуючи його концентрацію [26, 52, 136, 143, 162];
- *зміна геометрії отворів*: вплив на форму, розмір або розташування отворів може також вплинути на розподіл напружень навколо них [56, 110, 119, 130, 133];
- *використання композитних матеріалів*: використання композитних матеріалів з різними механічними властивостями може допомогти розподілити напруження більш рівномірно, зменшуючи концентрацію в окремих областях [18, 58, 125, 145];
- *вплив на процеси теплової обробки*: зміни в технології теплової обробки можуть також вплинути на мікроструктуру матеріалу і, отже, на його механічні властивості, включаючи розподіл напружень [45, 67, 68];

Ці підходи можуть застосовуватися окремо або в поєднанні один з одним залежно від конкретних умов застосування та вимог щодо механічних властивостей системи.

1.2. Огляд праць з методів розв’язування задач визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з отворами

Для оцінки міцності конструкцій необхідно враховувати їх параметри НДС. Цьому аспекту присвячено значну кількість досліджень, що використовують аналітичні [1, 14, 56, 98, 110, 120, 122, 132], числові [2, 7, 13, 93, 119, 117, 137, 155, 161] та експериментальні методи [38, 60, 103].

У [132] представлено аналітичний розрахунок загальної динамічної реакції тонких ортотропних циліндричних оболонок, який порівняно з теоретичними та експериментальними даними. У [2] розглянуто чисельно-аналітичний підхід до аналізу двовимірних задач статички нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини. У [122] за допомогою методу заданих форм досліджено коливання обтічників ракетносіїв у надзвуковому газовому потоці, які змодельовані тонкими конічними оболонками, підсиленими внутрішніми кільцями. У [146] використовується метод узагальнених диференціальних квадратур для аналізу частотних характеристик тонких зрізаних багатошарових конічних оболонок обертання.

Робота [13] присвячена числовому аналізу власних коливань вертикально і горизонтально орієнтованих циліндричних оболонок при різному рівні заповнення рідиною та різних варіантах граничних умов, що задаються на торцях пружної конструкції. У [137] застосовано числовий метод для аналізу нестационарних хвиль, що виникають від ударних точкових навантажень, у циліндричних оболонках із функціонально-градієнтного матеріалу. У [38] представлені результати експериментальних досліджень стійкості циліндричних оболонок з одним та двома отворами кругової або квадратної форми.

Вивченню НДС оболонок обертання з використанням аналітичних методів присвячено велику кількість досліджень, які охоплюють різноманітні задачі. Однак не завжди можна аналітично розв'язати певну задачу, тому у більшості випадків застосовують числові методи. Розвиток сучасної обчислювальної техніки прискорює розробку нових більш ефективних методів дослідження оболонкових конструкцій, що мають широке коло застосування, ніж аналітичні методи розрахунків окремих видів оболонок. Тому для розв'язання задач вказаного класу набули широке застосування більш універсальні числові методи розрахунку.

Так, в [7] подано на сучасному рівні автоматизації обчислювальних процесів метод аналізу нелінійного деформування, втрати стійкості та

критичної поведінки неоднорідних оболонок, представлений у вигляді програмного комплексу, який забезпечує інтелектуалізацію обчислювальних операцій, генерацію розрахункових схем, автоматизоване виконання алгоритмів, обробку, аналіз та візуалізацію результатів.

Тонкостінні конструкції у вигляді пластин і оболонок зустрічаються в багатьох галузях техніки і промисловості, таких як громадянська, авіаційна, морська, хімічна, інженерна справа та ін. Широке використання пластинчатих і оболонкових конструкцій пов'язано з їх внутрішніми властивостями. При відповідній конструкції навіть дуже тонкі пластини та оболонки здатні витримувати великі навантаження. Зокрема, вони використовуються в конструкціях аерокосмічної промисловості, автомобілебудування та ін., для яких важливим є мала вага.

Теоретичні дослідження і практика експлуатації, зокрема, літальних апаратів та інших машин, показують, що в місцях різких змін форми деталей (наприклад, наявність отворів, виточок, різкі переходи від одного діаметра до іншого, гострі внутрішні кути і т. п.) виникають підвищені напруження, які значно знижують довговічність деталей. Явище концентрації напружень є чинником початку руйнівних процесів і впливає на міцність конструкції у цілому. Проблема пошуку шляхів зниження напружень в місцях їх локальної концентрації є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла.

Врахування такого роду конструктивних або технологічних неоднорідностей пластинчато-оболонкових елементів конструкцій призводить до підвищення складності математичної моделі задачі. Зазвичай знаходження точного розв'язку отриманої крайової задачі в аналітичному вигляді можливо лише в деяких окремих випадках навантаження тіл та при окремих умовах їх закріплення [14, 56, 110].

Тому при дослідженні НДС конструкцій з різними неоднорідностями (отворами, включеннями тощо) найбільш поширеними є числові методи механіки, які, на відміну від аналітичних, є досить універсальними для розв'язування широкого класу задач [26, 37, 47, 138–145].

Так, у [161] представлені принципи теорії тонких пластин і оболонок, особливу увагу приділено новим аналітичним і числовим методам розв'язання лінійних і нелінійних задач для пластин і оболонок, новим теоріям для проектування і аналізу тонкостінних пластинчато-оболонкових структур, числовим розв'язкам реальних задач механіки, а також моделям пластин і оболонок для інженерних застосувань.

На сьогодні до найбільш ефективних числових методів механіки відносять метод скінченних елементів (МСЕ) [164]. Ідея цього методу ґрунтується на побудові й подальшому розв'язуванні системи алгебричних рівнянь великого порядку. Переваги методу полягають у зручності формування рівнянь і можливості представлення зовсім нерегулярних границь складних конструкцій та умов навантаження.

Розвитку МСЕ присвячено багато робіт, у тому числі [129, 131, 134, 155, 164]. Зокрема, в [155] представлений вдосконалений МСЕ, який використовується при проектуванні конструкцій. Авторами проведено систематичний виклад матеріалу з МСЕ-досліджень. Детально обговорюються оригінальні теоретичні досягнення, у тому числі метод узагальненого конформного елемента, і їх застосування в області структурної інженерії та обчислювальної механіки. Наведені стратегії, що дозволяють уникнути деякі труднощі, які існують в традиційному МСЕ.

Ця дисертаційна робота присвячена проблемі пошуку шляхів зниження напружень в місцях їх локальної концентрації в структурно неоднорідних оболонкових елементах конструкцій (циліндричні, конічні оболонки) за допомогою застосування МСЕ. Урахування впливу різноманітних неоднорідностей є дуже важливим з точки зору прогнозу надійності і довговічності конструкції. Дослідження впливу локальних концентраторів на НДС оболонки і способи зниження концентрації напружень в тонкостінних оболонках обертання (циліндричних і конічних) є актуальним завданням механіки деформівного твердого тіла.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі проведено огляд проблематики розрахунку і зниження параметрів концентрації НДС пластинчато-оболонкових елементів конструкцій. Проведено аналіз існуючих підходів щодо проблеми зниження концентрації напружень навколо отворів.

Проведено огляд праць з визначення НДС оболонкових елементів тонкостінних конструкцій з отворами і включеннями, а також методів розв'язування задач визначення НДС. Означено невирішені питання.

Урахування впливу різних неоднорідностей (отвори, виточки, тріщини тощо) є дуже важливим з точки зору прогнозу надійності і довговічності тонкостінних конструкцій. Наявність локальних концентраторів напружень може несприятливо впливати на процес експлуатації конструкції і призвести до її передчасного виходу з ладу. Складні конструкції є зазвичай комбінацією простих форм оболонок. Зокрема, циліндричні і конічні оболонки знайшли широке розповсюдження, у тому числі, в ракетно-космічній галузі як частини ступенів ракет-носіїв, силових конструкцій космічних апаратів та адаптерів корисного навантаження, що слугують для зв'язку космічного апарату із засобами виведення та ін. Дослідження впливу локальних концентраторів на НДС оболонки і способи зниження концентрації напружень в тонкостінних оболонках обертання є актуальним завданням механіки деформівного твердого тіла.

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ

Розглянуто застосування методу скінченних елементів до визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок. Наведено основні співвідношення методу скінченних елементів, рівняння рівноваги для тонкостінних циліндричних і конічних оболонок. Сформульовано варіаційну постановку задач визначення напружено-деформованого стану тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок.

2.1 Основні співвідношення методу скінченних елементів

Одним із найбільш поширених універсальних методів аналізу прикладних задач механіки деформованого тіла є МСЕ [7, 21, 94, 108, 109, 115, 116, 129, 131, 134, 155, 164]. Згідно цього методу потрібно будувати й розв'язувати систему алгебричних рівнянь. Переваги методу над іншими числовими методами полягають у зручності формування рівнянь і можливості представлення зовсім нерегулярних і складних конструкцій і умов навантаження. Завдяки цьому методу можна відображати реальні аспекти, що виникають у прикладних задачах проєктування, при використанні в багатьох аналітичних задачах – розрахунку конструкцій, теплопередачі, течії рідин, розповсюдження електромагнітних хвиль та ін. Виникнення МСЕ, як методу числового розв'язування диференціальних рівнянь, що зустрічаються в механіці, фізиці і техніці, пов'язане з вирішенням завдань літакобудування та ракетобудування. Далі було опубліковано багато статей і книг, присвячених цьому методу і його різноманітним модифікаціям.

Розглянемо застосування МСЕ на прикладі розв'язання плоскої задачі теорії пружності для пластини, що навантажена у її площині [164].

Відповідно методу Рітца, переміщення u та v задаються у вигляді сум:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{ui}(x, y); \quad v = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{vi}(x, y), \quad (2.1)$$

де α_i – узагальнені переміщення, що підлягають визначенню; f_i – базисні функції, якими задаємося в межах площини пластини.

Коефіцієнти α_i знаходяться з рівнянь:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = S_i + Q_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

що виражають умови рівноваги у вигляді рівності нулю сумарної узагальненої сили, що відповідає кожному узагальненому переміщенню α_i .

У лінійно-деформованій системі вектор узагальнених сил пружності S виражається через узагальнені переміщення α за допомогою матриці M :

$$S = M\alpha, \quad (2.3)$$

де

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

є матрицею жорсткості, яка відповідає вектору узагальнених переміщень $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$.

У розгорнутій формі рівняння (2.2) мають вигляд:

$$\begin{cases} m_{11}\alpha_1 + m_{12}\alpha_2 + \dots + m_{1n}\alpha_n + Q_{1P} = 0 \\ m_{21}\alpha_1 + m_{22}\alpha_2 + \dots + m_{2n}\alpha_n + Q_{2P} = 0 \\ \dots \\ m_{n1}\alpha_1 + m_{n2}\alpha_2 + \dots + m_{nn}\alpha_n + Q_{nP} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

або матричного запису

$$M\alpha + Q_p = 0, \quad (2.6)$$

де Q_p – вектор узагальнених зовнішніх сил P .

З розв'язування цих рівнянь й визначаються шукані узагальнені переміщення α_i .

Розіб'ємо пластину сіткою на окремі елементи скінченних розмірів, як показано на рис. 2.1. Поле переміщень u і v будемо задавати окремо в межах кожного скінченного елемента. В якості узагальнених переміщень візьмемо переміщення вузлових точок елемента, яке прийнято замість α_i позначати Z_i .

Поле переміщень елемента виразимо через вузлові переміщення в локальній системі координат x', y' , зв'язаною з елементом:

$$u = \sum_{i=1}^{i=8} Z_i N_{ui}; \quad v = \sum_{i=1}^{i=8} Z_i N_{vi}, \quad (2.7)$$

де $N_{ui} = N_{ui}(x', y')$ і $N_{vi} = N_{vi}(x', y')$ – базисні функції, що задані в межах скінченного елемента. Вони побудовані так, щоб у відповідних вузлових точках набували значення, що дорівнює одиниці, а у інших вузлах обертались у нуль. В (2.7) множники Z_i мають зміст амплітудного значення для відповідного доданку.

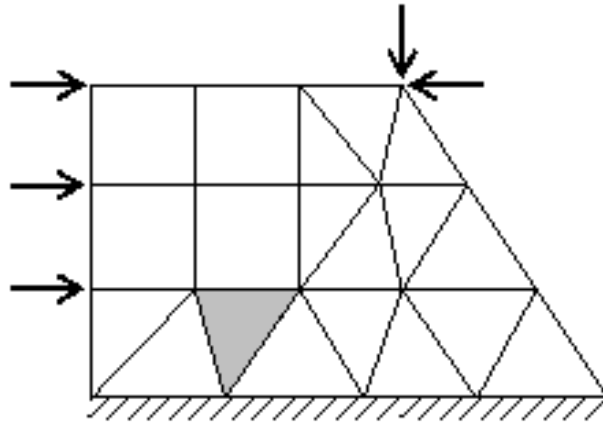


Рис. 2.1 – Схема розбиття області на скінченні елементи

Скінченні елементи можуть бути побудовані різноманітної форми, для різноманітних видів деформації (плоска задача, згин пластини, деформація елемента оболонки, стержня та інші). Кожен з елементів характеризується його матрицею жорсткості. Якщо вони побудовані, то МСЕ дозволяє по цій схемі створювати різні композиції з різноманітних скінченних елементів. Причому означення деформованого стану такої композиції зводиться до складення та розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь високого порядку відносно вузлових значень невідомих функцій. У наш час існують автоматизовані комплекси програм [3], які дозволяють розраховувати за допомогою МСЕ дуже складні конструкції з числом невідомих переміщень, яке складає тисячі або десятки тисяч одиниць.

При дослідженні НДС об'ємних тіл за допомогою МСЕ застосовуються об'ємні тривимірні елементи [164]. При розрахунку тонкостінних пластинчато-оболонкових елементів конструкцій використовують плоскі (оболонкові елементи). У разі пластин часто застосовують трикутні шестивузлові лагранжеві елементи з трьома вузлами по кутам та трьома вузлами посередині сторін з двома степенями свободи в кожному вузлі ($u(x, y)$, $v(x, y)$). У разі оболонок часто застосовують аналогічні трикутні шестивузлові лагранжеві елементи з трьома степенями свободи в кожному вузлі ($u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$).

Спочатку розглянемо для пластин трикутний шестивузловий лагранжевий скінченний елемент з трьома вузлами по кутам (i, j, k) та трьома вузлами посередині сторін (l, m, n) з двома степенями свободи в кожному вузлі ($u(x, y), v(x, y)$) (рис. 2.2) [94].

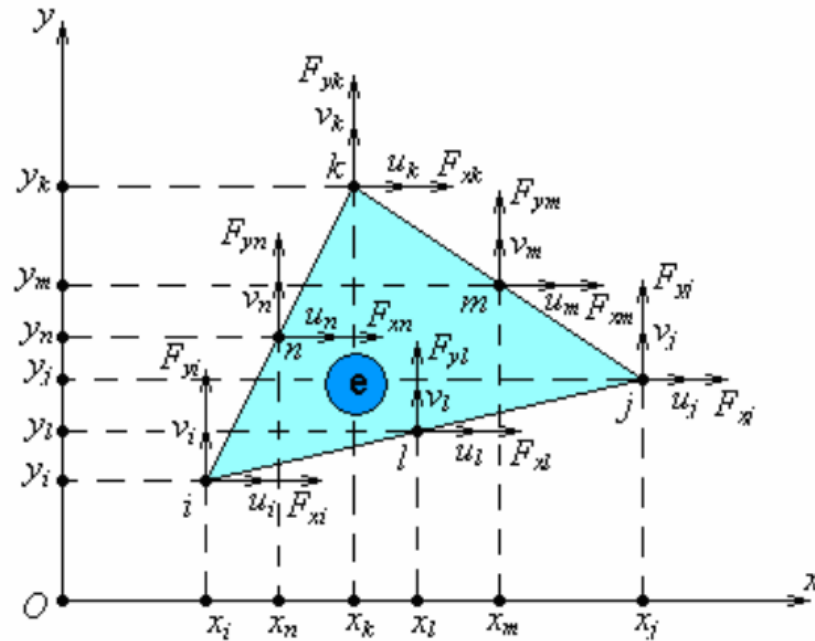


Рис. 2.2 – Трикутний шестивузловий скінченний елемент

Поле переміщень в межах скінченного елемента можна апроксимувати повним квадратичним поліномом:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2; \quad (2.8)$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2.$$

Невідомі параметри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ і $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ у виразах (2.8) знайдемо з умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_i, y_i) = u_i; \\ u(x_j, y_j) = u_j; \\ \dots \\ u(x_n, y_n) = u_n; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x_i, y_i) = v_i; \\ v(x_j, y_j) = v_j; \\ \dots \\ v(x_n, y_n) = v_n; \end{array} \right. \quad (2.9)$$

або з урахуванням квадратичного поліному:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 = u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 x_j^2 + \alpha_5 x_j y_j + \alpha_6 y_j^2 = u_j; \\ \dots \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 y_n + \alpha_4 x_n^2 + \alpha_5 x_n y_n + \alpha_6 y_n^2 = u_n; \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i^2 + \beta_5 x_i y_i + \beta_6 y_i^2 = v_i; \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j + \beta_4 x_j^2 + \beta_5 x_j y_j + \beta_6 y_j^2 = v_j; \\ \dots \\ \beta_1 + \beta_2 x_n + \beta_3 y_n + \beta_4 x_n^2 + \beta_5 x_n y_n + \beta_6 y_n^2 = v_n. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

В матричному вигляді останні вирази (2.10) і (2.11) запишемо так:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \dots \\ v_n \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Визначаючи невідомі параметри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ і $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ з цих виразів та підставляючи їх до виразів $u(x, y), v(x, y)$ (2.8), отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, y) = & (a_i + b_i x + c_i y + p_i x^2 + q_i xy + r_i y^2)u_i + \\ & + (a_j + b_j x + c_j y + p_j x^2 + q_j xy + r_j y^2)u_j + \dots \\ & \dots + (a_n + b_n x + c_n y + p_n x^2 + q_n xy + r_n y^2)u_n; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) = & (a_i + b_i x + c_i y + p_i x^2 + q_i xy + r_i y^2)v_i + \\ & + (a_j + b_j x + c_j y + p_j x^2 + q_j xy + r_j y^2)v_j + \dots \\ & \dots + (a_n + b_n x + c_n y + p_n x^2 + q_n xy + r_n y^2)v_n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

де $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6$ – функції форми елемента (рис. 2.3), які визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = M_{1,1} + M_{2,1}x + M_{3,1}y + M_{4,1}x^2 + M_{5,1}xy + M_{6,1}y^2; \\ \Phi_2(x, y) = M_{1,2} + M_{2,2}x + M_{3,2}y + M_{4,2}x^2 + M_{5,2}xy + M_{6,2}y^2; \\ \dots \\ \Phi_6(x, y) = M_{1,6} + M_{2,6}x + M_{3,6}y + M_{4,6}x^2 + M_{5,6}xy + M_{6,6}y^2. \end{cases} \quad (2.17)$$

Тут $M_{p,q}$ ($p, q = 1, 2, \dots, 6$) – елементи матриці

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.18)$$

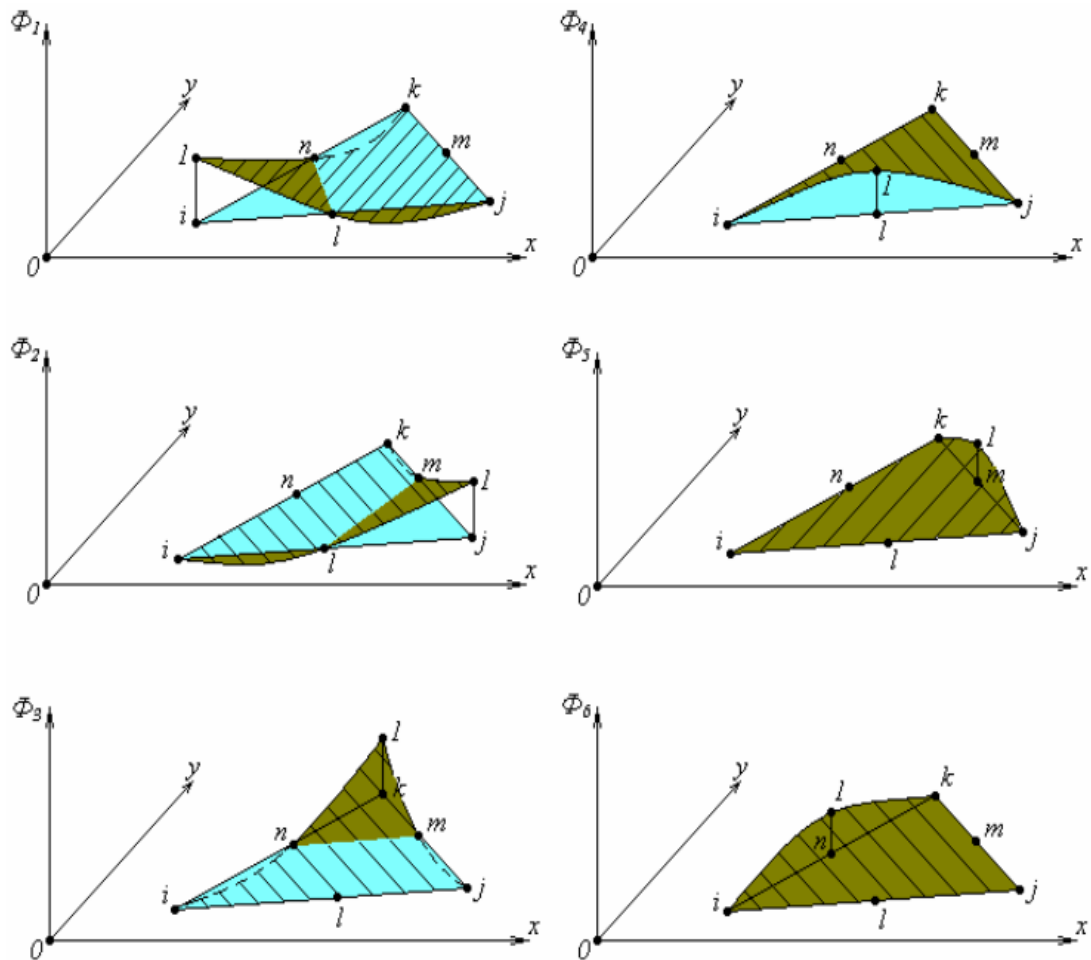


Рис. 2.3 – Функції форми трикутного шестивузлового скінченного елемента

Матриця Коші B у даному випадку приймає вигляд:

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & \Phi_6 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & \Phi_6 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Компоненти матриці Коші (2.19) є функціями координат x, y . У даному випадку деформації всередині шестивузлового трикутного елемента апроксимуються лінійною залежністю.

Внутрішня енергія деформації елемента U визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} U &= \iiint_{\Omega} U_{y\vartheta} d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (A\varepsilon)^T \varepsilon d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon d\Omega = \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (Bu)^T A (Bu) d\Omega = u^T \left(\iiint_{\Omega} \frac{1}{2} B^T A B d\Omega \right) u = \frac{1}{2} h u^T \left(\iint_S B^T A B dS \right) u. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тут $U_{y\vartheta}$ – питома енергія деформації; h, S, Ω , – товщина, площа та об'єм скінченного елемента відповідно; A – матриця закону Гука.

Робота зовнішніх сил V по відповідним вузловим переміщенням дорівнює:

$$V = h u^T F, \quad (2.21)$$

де F – вектор вузлових сил,

$$F = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ \dots \\ F_{xn} \\ F_{yn} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

В рамках лінійної теорії пружності (теорема Клапейрона) [10] внутрішня енергія деформації дорівнює половині роботи зовнішніх сил по відповідним переміщенням $U = \frac{1}{2}V$, отже

$$\frac{1}{2}hu^T \left(\iint_S B^T AB dS \right) u = \frac{1}{2}hu^T F, \quad (2.23)$$

що дорівнює $Ku = F$, де K – матриця жорсткості скінченного елемента [164]

$$K = \iint_S B^T AB dS. \quad (2.24)$$

У разі тонкостінних оболонок використовують аналогічні наведеним вище формули для трикутних шестивузлових лагранжових скінченних елементів з тією різницею, що в кожному вузлі введено три степені свободи $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$. У цьому випадку співвідношення (2.16) набуває вигляду

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & \Phi_3 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & \Phi_5 & 0 & 0 & \Phi_6 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & \Phi_3 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & \Phi_5 & 0 & 0 & \Phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & \Phi_3 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & \Phi_5 & 0 & 0 & \Phi_6 \end{bmatrix} \begin{cases} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{cases}. \quad (2.25)$$

2.2 Рівняння рівноваги для тонкостінних циліндричних і конічних оболонок

Вираз повної потенціальної енергії деформації тонкостінної оболонки згідно геометрично лінійної теорії тонких оболонок представляє собою функціонал від функцій u , v , w та їх похідних [1]:

$$\mathcal{E} = \iint_S F(u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, w, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}) dx dy,$$

де S – поверхня оболонки; $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Оскільки, вираз повної потенціальної енергії записано для оболонки, яка знаходиться в рівновазі, то сума робіт всіх сил буде дорівнювати нулю:

$$\delta \mathcal{E} = \left(\iint_S \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y + \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta w_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \delta w_{xy} \right) dx dy = 0.$$

Нехай $a - b$, $c - d$ – границі області інтегрування. Проінтегрувавши та склавши кожний член останнього виразу, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v = 0 \quad \text{при } x=a, x=b \\ \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w = 0 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v = 0 \quad \text{при } y=c, y=d. \\ \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Тут (2.26) – рівняння рівноваги оболонки, а (2.27), (2.28) – крайові умови.

Рівняння (2.27), (2.28) представляють собою добуток силового фактору на відповідні йому переміщення, тому на контурі повинен бути нульовим силовий фактор або відповідні йому переміщення. Значення частинних похідних від підінтегральної функції F мають вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -q_x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] = N_x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = N_{xy},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -q_y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_y} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = N_{xy},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_y} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] = N_y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_1^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) s \right] = M_x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right] = M_y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} = 2(1-\nu) \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2M_{xy},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial w} = & \frac{Eh}{(1-\nu^2)R_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \\
& + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R_2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \\
& + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R_1^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_1^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right] + \\
& + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R_2^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right] - q_z = \\
= & \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} + \frac{M_x}{R_1^2} + \frac{M_y}{R_2^2} - q_z.
\end{aligned}$$

Тут E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; h – товщина оболонки; R_1, R_2 – головні кривини оболонки; $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ – внутрішні силові фактори (повздовжні сили, згинальні моменти відповідно); q_x, q_y, q_z – компоненти поверхневого навантаження.

Наведемо крайові умови і рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \delta u = 0 \\ N_{xy} \delta v = 0 \\ M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w = 0 \end{array} \right. \quad \text{при } x=a, x=b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_y \delta v = 0 \\ N_{xy} \delta u = 0 \\ M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w = 0 \end{array} \right. \quad \text{при } y=c, y=d$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{R_1} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{R_2} \right) = - \frac{(1-\nu^2)q_x}{Eh} \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{R_2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{R_1} \right) = - \frac{(1-\nu^2)q_y}{Eh} \\ & D \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{w}{R_1^2} + \nu \frac{w}{R_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{w}{R_2^2} + \nu \frac{w}{R_1^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_1^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right] + \frac{1}{R_2^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\ & + C \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] \right\} = q_z \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

де $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ - жорсткість оболонки на розтяг; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість оболонки.

З цих рівнянь можна отримати рівняння плоскої задачі теорії пружності при $w = 0$. Якщо компоненти поверхневого навантаження q_x , q_y відсутні та радіуси кривизни оболонки не залежать від x та y , то наведені три рівняння (2.29) допускають значні спрощення. Введемо в розгляд функцію напружень φ :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] = \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2}; \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}; \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Якщо підставити вирази (2.30) у попередню систему рівнянь (2.29), то перші два будуть задовільні, а останнє рівняння прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\nu}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^2 R_2^2} + \frac{1}{R_2^4} \right) w \right] = q_z. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Відкинемо останні три члени виразу в силу їх малості, тоді матимемо

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q_z. \quad (2.32)$$

Рівняння, що зв'язує функції φ і w , можна отримати з (2.30) шляхом виключення з них переміщень u і v :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Eh \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.33)$$

Запишемо (2.32), (2.33) в символній формі:

$$\nabla_k^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w = q_z \quad (2.34)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = Eh \nabla_k^2 \varphi$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_k^2 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

З рівнянь (2.34) від першого віднімемо друге і отримаємо вирішальне рівняння восьмого порядку:

$$Eh\nabla_k^2\nabla_k^2w=D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2w=\nabla^2\nabla^2q_z.$$

Крайові умови для мембранних зусиль і дотичних переміщень приймуть вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\delta u=0 \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\delta v=0 \end{cases} \quad \text{при } x=a, x=b$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\delta v=0 \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\delta u=0 \end{cases} \quad \text{при } y=c, y=d.$$

Рівняння (2.29), (2.33) разом з відповідними крайовими умовами дозволяють розв'язати велике коло практично важливих задач міцності та стійкості оболонок. Однак ці рівняння допускають точний аналітичний розв'язок лише в окремих випадках крайових умов, у межах гіпотез прикладної теорії оболонок, тому в більшості випадків вони можуть бути розв'язані наближеними числовими методами.

2.3 Варіаційна постановка задач визначення напружено-деформованого стану тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок

Для тонкостінної *циліндричної оболонки* задача визначення НДС у варіаційній постановці відповідає задачі мінімізації функціонала потенціальної енергії деформації системи на множині кінематично допустимих переміщень [1]:

$$\begin{aligned}
I[u, v, w] = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{E h}{(1-v^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 + 2v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{E h^3}{12(1-v^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right) + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy,
\end{aligned} \quad (2.35)$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox , Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; R – радіус оболонки; E , ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки Ω ; γ – границя області Ω , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y), p_z(x, y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягу $p_x(x, y) = p_z(x, y) = 0$, $p_y(x, y) = p = const$.

Для тонкостінної зрізаної конічної оболонки вихідна задача визначення НДС у варіаційній постановці відповідає задачі мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [18]:

$$\begin{aligned}
I[u, v, w] = & \frac{E h}{2(1-v^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L (S_1 + S_2)^2 - 2(1-v) \left(S_1 S_2 - \frac{1}{4} T_1^2 \right) \times \left[R - \left(\frac{H}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi + \\
& + \frac{E h^3}{24(1-v^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-v) (K_1 K_2 - T_2^2) \right] \times \left[R - \left(\frac{H}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi -
\end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{E h}{2(1-v^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_1} (S_1 + S_2)^2 - 2(1-v) \left(S_1 S_2 - \frac{1}{4} T_1^2 \right) \times \left[R_1 - \left(\frac{H_1}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi - \\
& - \frac{E h^3}{24(1-v^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_1} \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-v) (K_1 K_2 - T_2^2) \right] \times \left[R_1 - \left(\frac{H_1}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi - \\
& - \int_{\gamma_1} (p_{1x} u + p_{1y} v + p_{1z} w) d\gamma - \int_{\gamma_2} (p_{2x} u + p_{2y} v + p_{2z} w) d\gamma,
\end{aligned}$$

де h – товщина оболонки; E , ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу конічної оболонки; R , R_1 – радіуси нижньої і верхньої основ оболонки; L , L_1 – довжини твірних відповідних конічних оболонок ($L = H / \cos \alpha$, $L_1 = H_1 / \cos \alpha$); γ_1 , γ_2 – границі, вздовж яких прикладене

зовнішнє навантаження інтенсивності $P_1(x, y) = (p_{1x}(x, y), p_{1y}(x, y), p_{1z}(x, y))^T$, $P_2(x, y) = (p_{2x}(x, y), p_{2y}(x, y), p_{2z}(x, y))^T$ на верхньому та нижньому торцях зрізаної оболонки відповідно; α – кут між твірною лінією та віссю конуса; s, φ – координатні лінії (рис. 2.4);

$$K_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad K_2 = \left(\frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{\partial w}{s \partial s} \right), \quad (2.37)$$

$$S_1 = -\frac{\partial u}{\partial s}, \quad S_2 = \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{tg} \alpha + w \right), \quad (2.38)$$

$$T_1 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha}, \quad T_2 = \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{\partial w}{s \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} \right]. \quad (2.39)$$

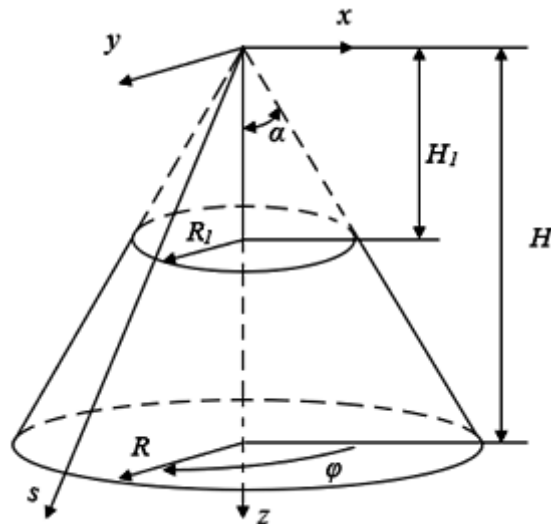


Рис. 2.4 – Схема конічної оболонки

Радіуси кривини вздовж координатних ліній:

$$R_\varphi = \frac{R}{\cos \alpha} - \left(\frac{H}{\cos \alpha} - s \right) \operatorname{tg} \alpha, \quad R_s = \infty.$$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто застосування МСЕ до визначення НДС тонкостінних циліндричних і конічних оболонок. Наведено основні співвідношення МСЕ, рівняння рівноваги для тонкостінних оболонок та варіаційна постановка задач визначення НДС для циліндричних і конічних оболонок.

РОЗДІЛ 3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Розділ присвячено комп'ютерному моделюванню та скінченноелементному аналізу напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і зрізаних конічних оболонок з круговими отворами за наявності навколо них кільцевих включень із матеріалу, властивості якого відрізняються від основного матеріалу оболонок.

Запропоновано математичні розрахункові моделі для визначення напружено-деформованого стану пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з неоднорідностями у вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії. Наведено розроблену методику визначення параметрів напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл з різними отворами і включеннями навколо них при пружному деформуванні на основі використання методу скінченних елементів.

З використанням запропонованої методики проведено дослідження з визначення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з круговим отвором. Здійснено порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану вказаних оболонок з відповідними аналітичними розв'язками для окремих випадів. Проведено комп'ютерне моделювання і числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на концентрацію напружень в оболонках з круговим отвором (розглянуті оболонки з «малим» круговим отвором). Встановлено та обґрунтовано раціональні параметри кільцевих включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень навколо локальних концентраторів напружень в оболонках обох видів.

3.1 Порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану тонких однорідних циліндричних і конічних оболонок з круговим отвором з відповідними аналітичними розв'язками

Розглянуто НДС тонких пружних однорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонок товщини h , висоти H з двома однаковими діаметрально протилежними круговими отворами радіусу r_0 , розташованими посередині оболонок (рис. 3.1). Радіуси верхньої і нижньої основ конічних оболонок – r_1 , r_2 відповідно. Радіус основ циліндричних оболонок – r_2 . Циліндричні оболонки знаходяться під дією одновісних рівномірних розтягувальних зусиль P_2 (рис. 3.1, а), зрізані конічні – під дією одновісних рівномірних розтягувальних врівноважувальних зусиль P_1 і P_2 (рис. 3.1, б).

Проведено порівняльний аналіз результатів числового розрахунку НДС обох видів оболонок з круговим отвором з відповідними аналітичними розв'язками [56].

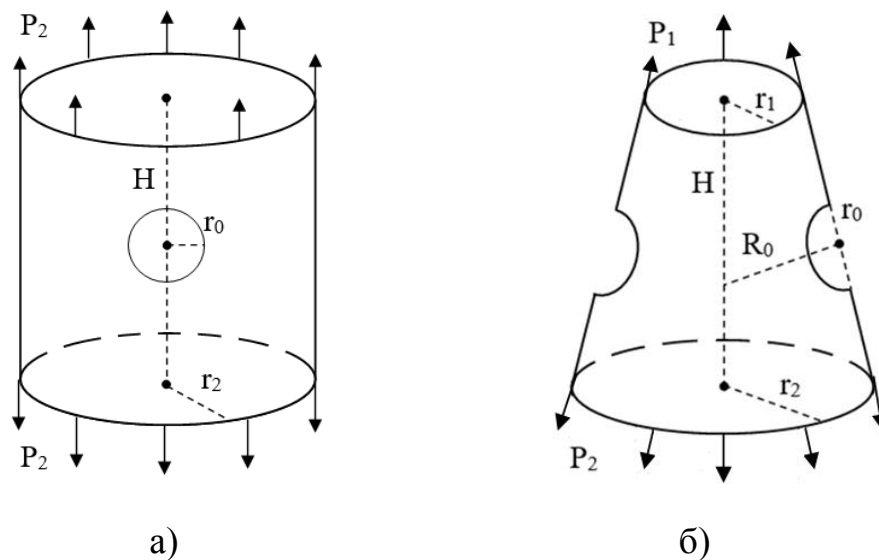


Рис 3.1 – Оболонки з круговими отворами:

а) циліндрична; б) зрізана конічна

Обчислення виконано за допомогою МСЕ для оболонок з такими розмірами [28, 119]: $r_1/h=55,56$; $r_2/h=73,704$; $H/h=148,67$; радіус отворів для циліндричної оболонки: $r_0/h=4,3$; 12,9; для конічної оболонки: $r_0/h=4,05$; 12,15. Матеріал оболонок – сталь (модуль пружності $E = 210 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$; границя текучості $\sigma_T=620,42 \text{ МПа}$; границя міцності $\sigma_s=723,8 \text{ МПа}$). Осьові рівномірно розподілені розтягувальні зусилля інтенсивності $\bar{P}_2 = 10$, $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 r_2/r_1$ ($P_k/h = \bar{P}_k \text{ МПа}$, $k = 1,2$).

При розрахунках застосовано лагранжеві трикутні шестивузлові скінченні елементи з трьома степенями свободи у кожному вузлі (u , v , w). В місцях концентрації напружень (навколо отвору) використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подібнення 10.

Приклади побудови сітки наведено на рис. 3.2.

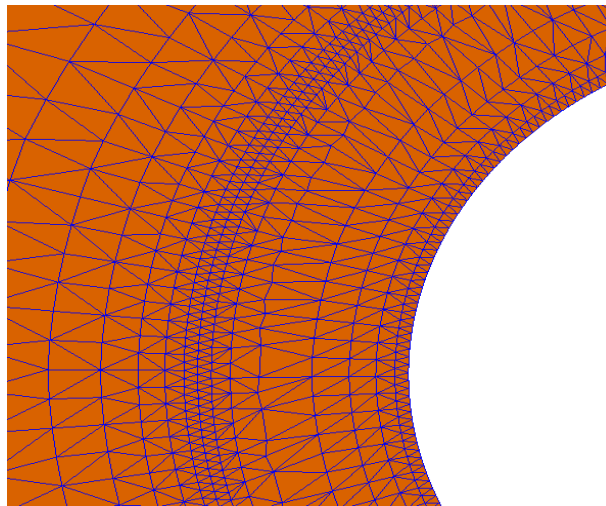


Рис. 3.2 – Адаптивна сітка в околі кругового отвору при $h_{\text{вкл}}=r_0/2$

3.1.1 Оболонки з малим круговим отвором

Відповідно до [56] отвір будемо вважати *малим*, якщо виконується співвідношення: $0 < \frac{r_0}{\sqrt{R_0 h}} < 1$, де R_0 – радіус кривини координатної лінії оболонки (рис. 3.1, б). Для циліндричної оболонки $R_0 = r_2$, для конічної $R_0 = \frac{2r_1 + \sqrt{L^2 + H^2}}{2\cos\alpha}$, $\alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{H}{L}\right) \frac{180^\circ}{\pi}$, $L = \sqrt{H^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

Результати порівняльного аналізу отриманих коефіцієнтів концентрації напружень (ККН) для оболонок з малими круговими отворами з відповідними аналітичними розв'язками [56] наведено у табл. 3.1. Величина ККН розраховується за формулою $k = \sigma_{\max} / \sigma_0$, де σ_{\max} – максимальне напруження в області концентратора; σ_0 – номінальне напруження (розраховане без врахування ефекту концентрації) [120].

Таблиця 3.1 – Порівняльна таблиця ККН для циліндричної і конічної оболонок з малими круговими отворами

Оболонка	Аналітичне значення ККН	Числове значення ККН	δ , %
Циліндрична	3,214	3,250	+1,12
Конічна	3,278	3,298	+0,61

Тут δ – відхилення числового значення ККН, знайденого за допомогою МСЕ, від аналітичного. Для циліндричної і конічної оболонок $\sigma_0 = 10$ МПа і 11,4 МПа відповідно.

З табл. 3.1 випливає, що знайдені числові розв'язки добре узгоджуються з аналітичними (відхилення в межах 1–2%).

На рис. 3.3, рис. 3.4 подано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній і зрізаній конічній оболонках з малими круговими отворами відповідно. Концентрація напружень спостерігається біля країв отворів по боках.

На рис. 3.5 наведено графічне зображення розподілу інтенсивності напружень σ_i уздовж контуру отвору в циліндричній (лінія 1) і конічній (лінія 2) оболонках з круговими отворами. По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань вздовж контуру отвору $0 \leq l \leq 1$ ($l = r / (2\pi r_0)$, r – довільна точка контуру отвору, $r \in [0, 2\pi r_0]$). Наочно видно, що для конічної оболонки концентрація напружень навколо отворів виявляється дещо більшою ніж для циліндричної (на ~1%).

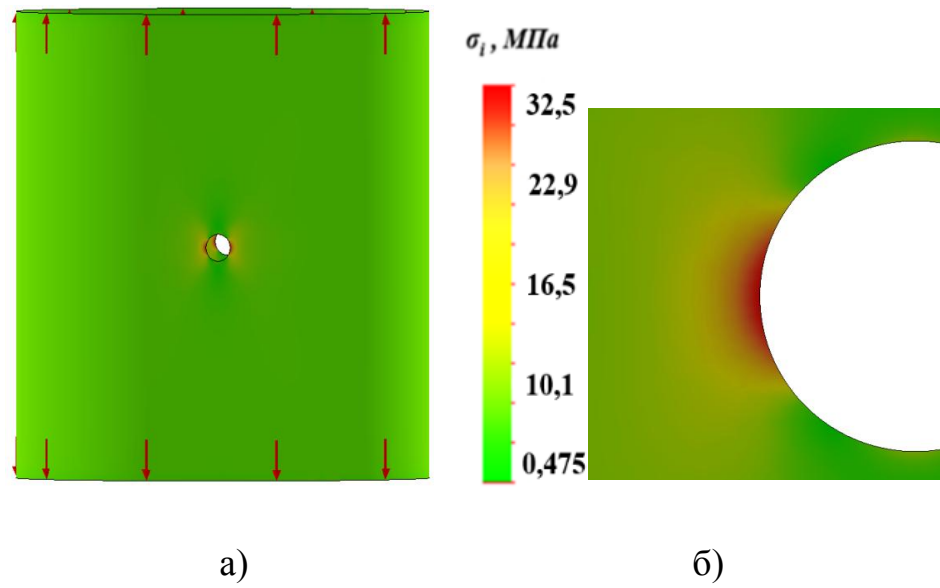


Рис. 3.3 – Розподіл інтенсивності напружень:
 а) в циліндричній оболонці з малими круговими отворами;
 б) в околі отвору

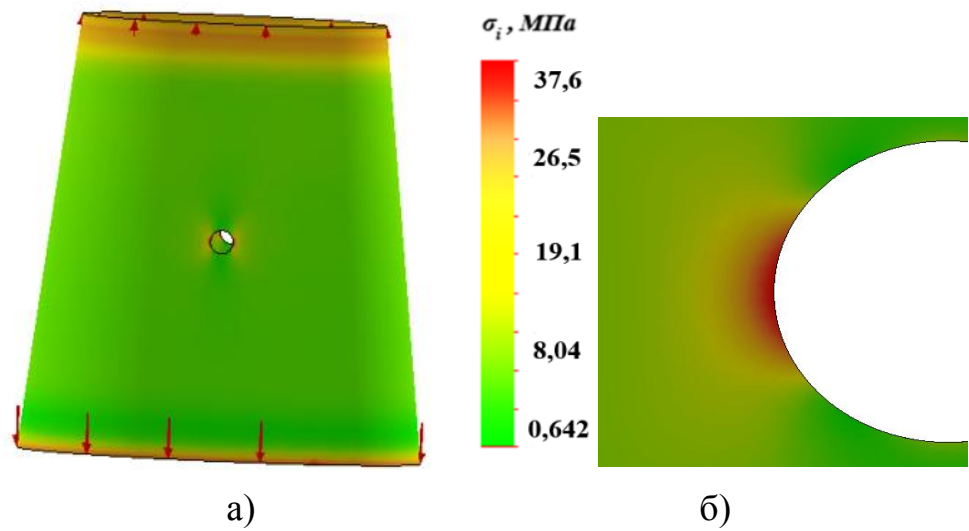


Рис. 3.4 – Розподіл інтенсивності напружень:
 а) в конічній оболонці з малими круговими отворами;
 б) в околі отвору

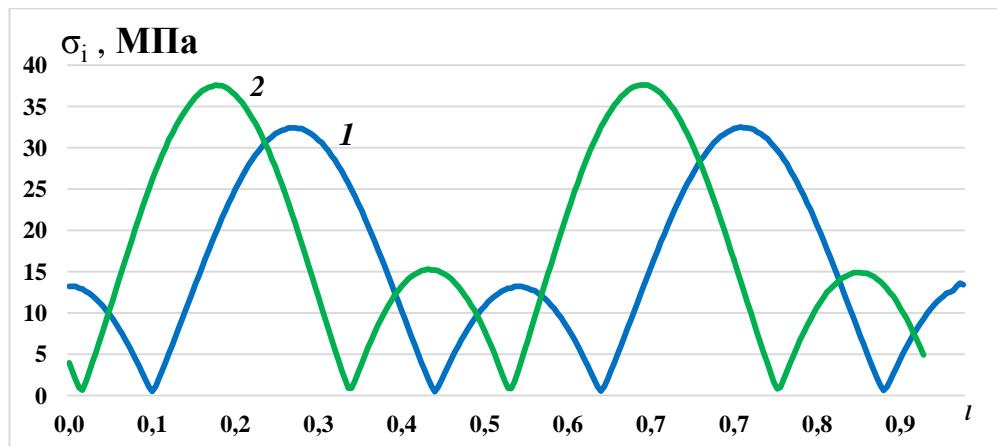


Рис. 3.5 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж контуру отвору в циліндричній (лінія 1) і конічній (лінія 2) оболонках з круговими отворами

Запропоновано математичні розрахункові моделі для визначення НДС оболонок з неоднорідностями у вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії.

Циліндрична оболонка. Функціонал повної потенціальної енергії деформації системи за наявності в оболонці включень має вигляд:

$$\begin{aligned}
 I[u, v, w] = & \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \frac{E_j h}{(1-\nu_j^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 + 2\nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1-\nu_j}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \frac{E_j h^3}{12(1-\nu_j^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\nu_j \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} \right) + 2(1-\nu_j) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy,
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ – проєкції вектора переміщень на осі Ox , Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; R – радіус оболонки; E_j , ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки Ω_1 (матриці) ($j=1$) і включення Ω_j ($j = \overline{2, n+1}$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Omega_j$ – область

визначення змінних x та y ; γ – границя області Ω , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y), p_z(x, y))^T$ (рис. 3.1, а). У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x, y) = p_z(x, y) = 0$, $p_y(x, y) = p = \text{const}$.

Зрізана конічна оболонка. Функціонал повної потенціальної енергії деформації системи за наявності в оболонці включень має вигляд:

$$\begin{aligned}
 I[u, v, w] = & \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \frac{E_j h}{2(1-\nu_j^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L (S_1 + S_2)^2 - 2(1-\nu_j) \left(S_1 S_2 - \frac{1}{4} T_1^2 \right) \times \left[R_2 - \left(\frac{H}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi + \right. \\
 & \left. + \frac{E_j h^3}{24(1-\nu_j^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu_j) (K_1 K_2 - T_2^2) \right] \times \left[R_2 - \left(\frac{H}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi \right\} - \\
 & - \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \frac{E_j h}{2(1-\nu_j^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_1} (S_1 + S_2)^2 - 2(1-\nu_j) \left(S_1 S_2 - \frac{1}{4} T_1^2 \right) \times \left[R_1 - \left(\frac{H_1}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi + \right. \\
 & \left. + \frac{E_j h^3}{24(1-\nu_j^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_1} \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu_j) (K_1 K_2 - T_2^2) \right] \times \left[R_1 - \left(\frac{H_1}{\cos \alpha} - s \right) \sin \alpha \right] ds d\varphi \right\} - \\
 & - \int_{\gamma_1} (p_{1x} u + p_{1y} v + p_{1z} w) d\gamma - \int_{\gamma_2} (p_{2x} u + p_{2y} v + p_{2z} w) d\gamma,
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

де h – товщина оболонки; E_j, ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала зрізаної конічної оболонки Ω_1 (матриці) ($j=1$) і включення Ω_j ($j=\overline{2, n+1}$, n – кількість включень); R_1, R_2 – радіуси верхньої і нижньої основ оболонки (рис. 3.1, б); L, L_1 – довжини твірних конічних оболонок ($L = H / \cos \alpha, L_1 = H_1 / \cos \alpha$); γ_1, γ_2 – границі, вздовж яких прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P_1(x, y) = (p_{1x}(x, y), p_{1y}(x, y), p_{1z}(x, y))^T$, $P_2(x, y) = (p_{2x}(x, y), p_{2y}(x, y), p_{2z}(x, y))^T$ на верхньому та нижньому торцях оболонки відповідно; K_i, S_i, T_i ($i=1, 2$) обчислюються за формулами (2.37)–(2.38); α – кут між твірною лінією та віссю конуса; s, φ – координатні лінії (рис. 2.4).

Запропоновано методику визначення параметрів НДС структурно неоднорідних оболонок з різними отворами (круговими, квадратними) і включеннями (кільцевими, стрічковими) навколо них з іншого матеріалу при пружному деформуванні на основі використання МСЕ.

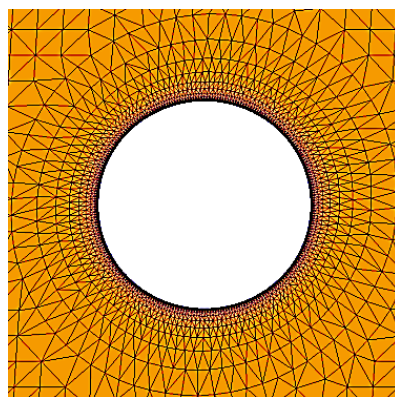
Алгоритм.

Крок 1. Побудова геометричної моделі оболонки (циліндричної, конічної) за допомогою комп'ютерного моделювання з урахуванням виду отвору (круговий, квадратний).

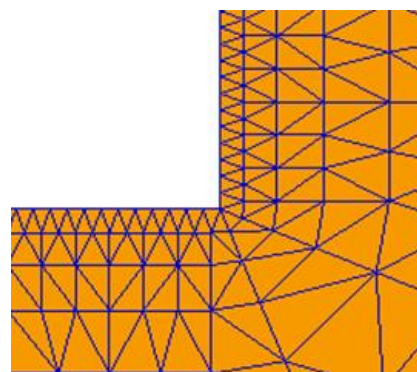
Крок 2. Побудова геометричної моделі включення (кільцевого, стрічкового) за допомогою комп'ютерного моделювання з урахуванням його геометричних і механічних властивостей.

Крок 3. Побудова основної скінченноелементної сітки із ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня з трьома степенями свободи в кожному вузлі.

Крок 4. Побудова адаптивної сітки в околі отворів (кругового (а), квадратного (б)). Згущення сітки відносно основної в 8–10 разів.



а)



б)

Крок 5. Отримання числового розв'язку задачі за допомогою МСЕ.

Крок 6. Перевірка практичної збіжності МСЕ при подрібненні вихідної сітки на ~30–40%;

Крок 7. Якщо різниця отриманих результатів на двох сусідніх сітках задовольняє задану точність обчислень, то вважаємо, що розв'язок отримано. Інакше перехід на *крок 3* при подібненні вихідної сітки.

3.2 Числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на концентрацію напружень в тонких неоднорідних оболонках з круговим отвором

Проведено числовий аналіз НДС циліндричних і зрізаних конічних оболонок з круговими отворами та стрічковими включеннями із матеріалу, властивості якого відрізняються від основного матеріалу оболонок. Досліджено вплив зміни величини модуля пружності включення та його ширини на концентрацію параметрів НДС оболонок в околі отворів. Розглянуто декілька варіантів матеріалу включення та його ширини. Вважалося, що кільцеве включення із однорідного матеріалу, розташоване у площині оболонки; на границі між матрицею і включенням задано умови жорсткого зчеплення. Матеріал включення має інші, ніж основний матеріал оболонки, властивості ($E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$; $E_0 / 2$; $2E_0 / 5$; $E_0 / 3$, де E_0 – модуль пружності оболонки, $E_{\text{вкл}}$ – модуль пружності включення). Зокрема, при $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$, механічні властивості матеріала включення аналогічні алюмінію. Зауважимо, що вибір матеріалу включень носить умовний характер. Ширина включень $h_{\text{вкл}}$ варіюється ($h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$; $0,25r_0$; $0,125r_0$).

Дослідження проведено у припущенні, що на межі між матрицею і включенням існує уявний перехідний шар, у якому механічні властивості матеріалів усереднені.

Для зручності аналізу введемо умовну величину як «відносна жорсткість включень» за формулою: $k = E_{\text{вкл}} / E_0$, де E_0 – модуль пружності

матриці (оболонки), $E_{вкл}$ – модуль пружності включення. Будемо вважати, що включення «м'яке», якщо $k < 1$, та «жорстке», якщо $k > 1$.

Метою дослідження є знаходження раціональних параметрів включень (властивостей матеріалу та ширини включення) для оболонок з точки зору зменшення величини ККН.

При розрахунках застосовано лагранжеві трикутні шестивузлові скінченні елементи з трьома степенями свободи у кожному вузлі. В місцях концентрації напружень (навколо отвору і на межі поєднання матриці і включення використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подібнення 10).

Приклади побудови сітки наведено на рис. 3.2.

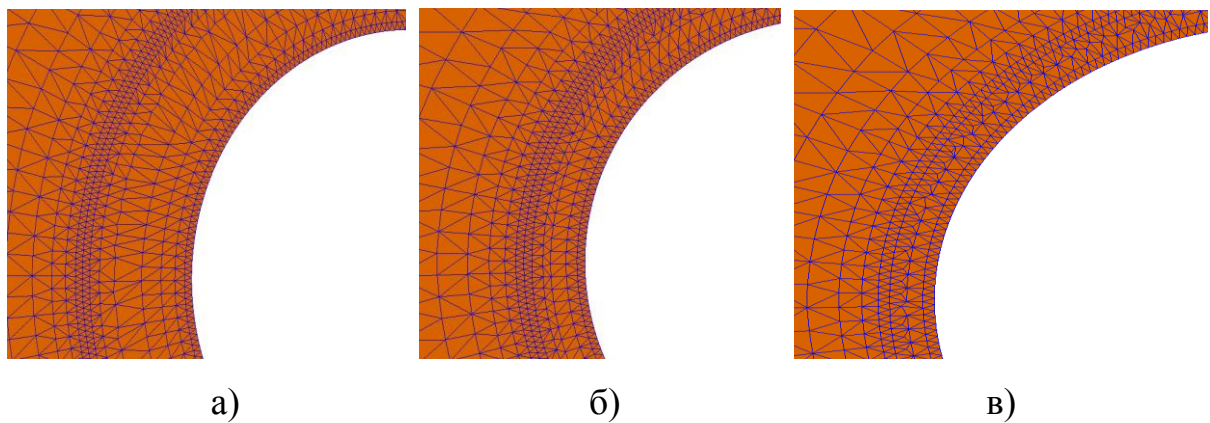


Рис. 3.6 – Адаптивна сітка в околі кругового отвору оболонки при $h_{вкл} = 0,5r_0; 0,25r_0; 0,125r_0$ відповідно (а)–(в)

3.2.1 Оболонки з малим круговим отвором і кільцевим включенням

Результати проведених обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для циліндричної оболонки з малими круговими отворами у разі $r_0/\sqrt{R_0 h} = 0,5$ та кільцевим включенням ширини $h_{вкл} = 0,5r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 3.2.

Із табл. 3.2 видно, що наявність кільцевого включення з більш м'якого матеріалу, ніж матеріал оболонки, дає змогу зменшити величину ККН навколо отвору на $\sim 22\%–35\%$. Тут найкращім із розглянутих варіантів при

$h_{вкл} = 0,5r_0$ з точки зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0 ($k = 0,5$), при цьому ККН=2,13, але концентрація напружень спостерігається не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів.

**Таблиця 3.2 – Коефіцієнт концентрації напружень
в циліндричній оболонці в залежності від величини
модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0,5r_0$**

$E_{вкл}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	2,53	-22,2
$E_0 / 2$	2,13	-34,5
$2E_0 / 5$	2,31	-28,9
$E_0 / 3$	2,45	-24,6

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення (ККН= 3,25).

На рис. 3.7, а – рис. 3.7, г проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого кругового отвору ($r_0/\sqrt{R_0h} = 0,5$) у разі «м'якого» включення ширини $h_{вкл} = 0,5r_0$ при величині модуля пружності $E_{вкл} = 2E_0 / 3$ (рис. 3.7, а, б) та при $E_{вкл} = E_0 / 3$ (рис. 3.7, в, г).

Отже, при вказаній фіксованій ширині включення в залежності від величини його модуля пружності спостерігається перерозподіл напружень. Має місце «механічний ефект» зміни зони локації концентрації напружень. У разі $E_{вкл} = 2E_0 / 3$ концентрація напружень спостерігається навколо отвору (ККН=2,53), при зменшенні модуля пружності в два рази від попереднього випадку ($E_{вкл} = E_0 / 3$) її локація переміщується до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки (на стик оболонки із включенням), при цьому ККН=2,45. Такий же ефект має місце при $E_{вкл} = E_0 / 2$; $2E_0 / 5$, але він менш виражений.

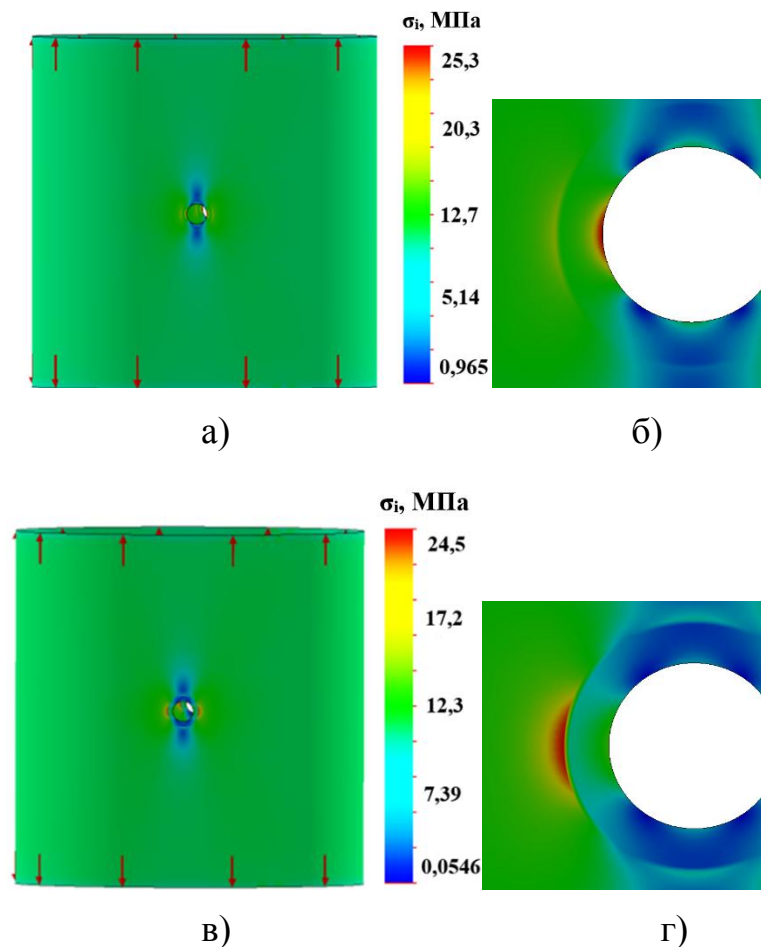


Рис. 3.7 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі «м'якого» включення $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ при $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (в), (г)

На рис. 3.8 наведено графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням у разі $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності ($E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3; E_0 / 2; 2E_0 / 5; E_0 / 3$). По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \leq l \leq 1$ по розгортці контурів отвору і кільцевого включення. Чим «м'якше» матеріал включення, тим більше величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки.

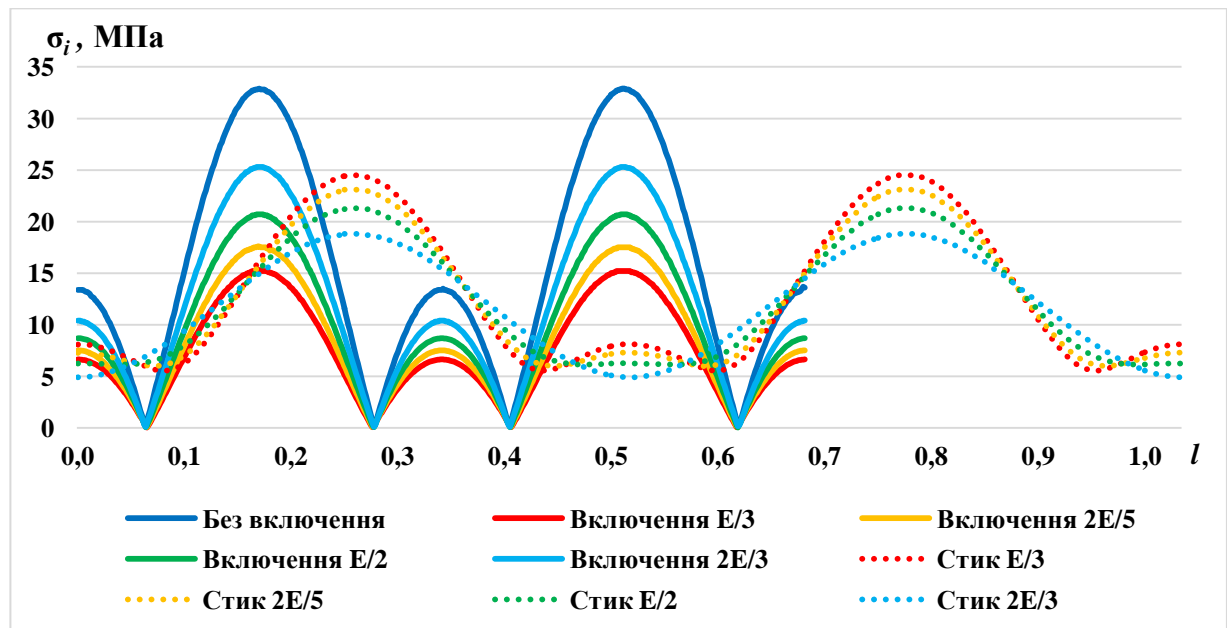


Рис. 3.8 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

У табл. 3.3 та табл. 3.4 наведено результати розрахунку ККН, отриманих в ході проведених обчислювальних експериментів для циліндричної оболонки з малими круговими отворами ($r_0/\sqrt{R_0h} = 0,5$) та кільцевими включеннями ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ та $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності відповідно.

Таблиця 3.3 – Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	2,45	-24,6
$E_0 / 2$	2,41	-25,9
$2E_0 / 5$	2,54	-21,9
$E_0 / 3$	2,64	-18,8

Також, як і у попередньому випадку, спостерігається тенденція перерозподілу максимальних напружень навколо отвору і зменшення величини ККН при зменшенні величини модуля пружності до $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$, а потім має місце зростання величини ККН. Але у порівнянні із випадком оболонки без включень за рахунок використання «м'яких» включень навколо отворів вдається зменшити ККН на $\sim 19\% - 26\%$. Тут, у разі $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$, найкращім із розглянутих варіантів $E_{\text{вкл}}$ з точки зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0 , при цьому ККН=2,41, але концентрація напружень тут зосереджена на стику оболонки із включенням.

Із розглянутих варіантів «жорсткості» включень тільки у разі $2E_0 / 3$ та $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ концентрація напружень залишається в околі отвору, при цьому ККН=2,45 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 25\%$.

На рис. 3.9, а – рис. 3.9, з проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого кругового отвору $r_0 / \sqrt{R_0 h} = 0,5$ у разі «м'якого» включення з модулем пружності $2E_0 / 3$, ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ (рис. 3.9, а, б) та $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ (рис. 3.9, в, з). Отже, при вказаній фіксованій величині модуля пружності включення в залежності від його ширини спостерігається перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення: у разі $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ величина ККН= 2,45 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ величина ККН=2,55 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням).

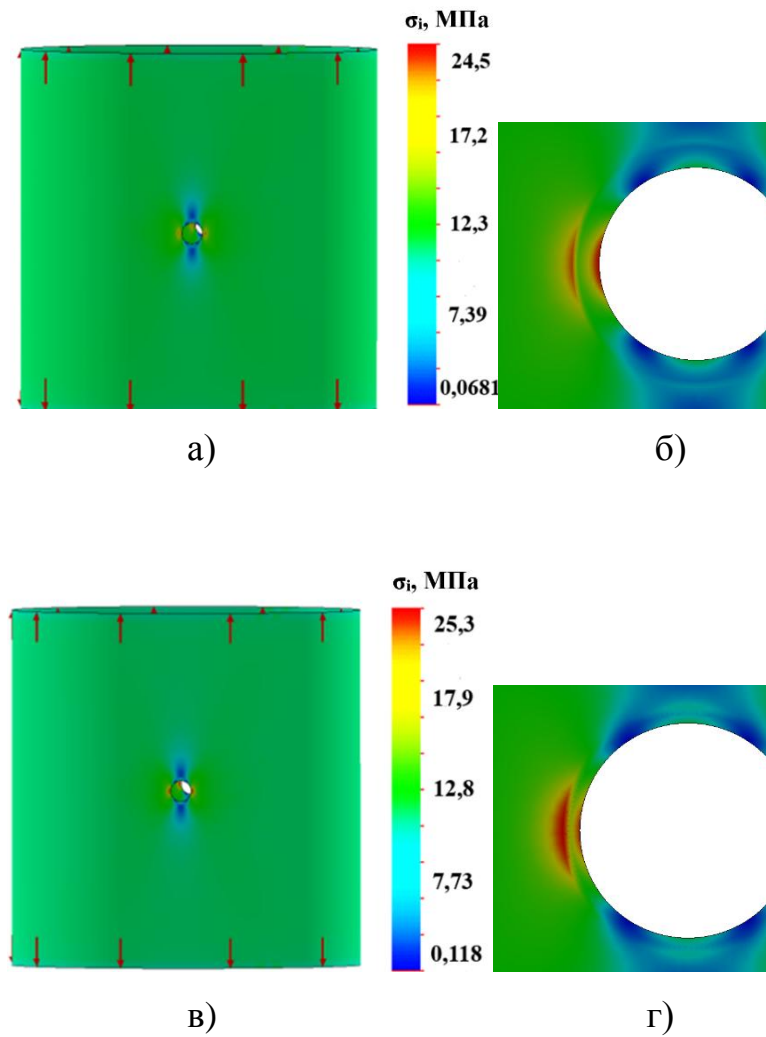


Рис. 3.9 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м'якого включення $2E_0 / 3$ при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ (а), (б) та при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ (в), (г)

На рис. 3.10 та рис. 3.11 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням для різних варіантів величини його модуля пружності.

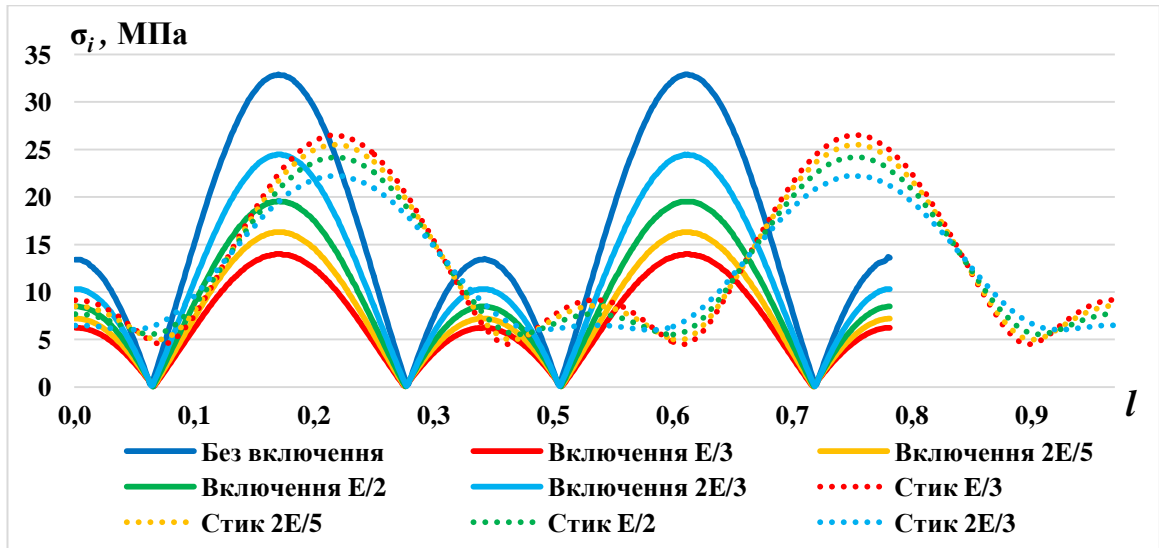


Рис. 3.10 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

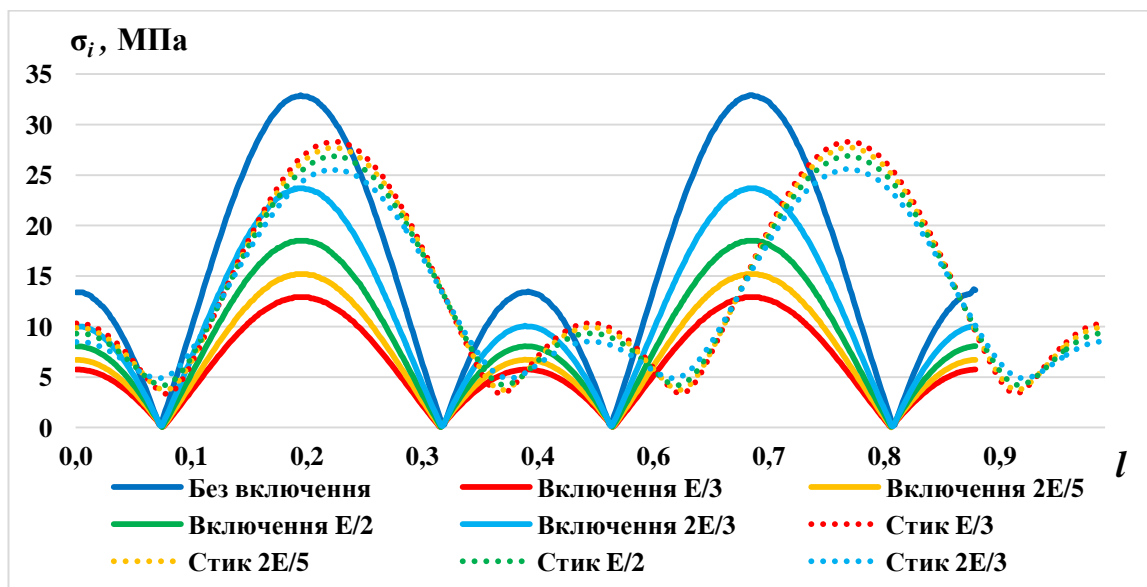


Рис. 3.11 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Аналіз отриманих результатів показує, що чим «м'якше» матеріал включення, тим більше величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки. Чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення.

Таблиця 3.4 – Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	$\delta, \%$
$2E_0 / 3$	2,55	-21,5
$E_0 / 2$	2,68	-17,5
$2E_0 / 5$	2,76	-15,1
$E_0 / 3$	2,82	-13,2

Тут у порівнянні із випадком оболонки без включень вдається зменшити ККН на $\sim 13\%–22\%$ за рахунок використання м'яких тонких включень навколо отворів. Але у даному випадку концентрація напружень змінює локацію і зосереджена безпосередньо у зоні стику оболонки із включенням. У разі $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ найкращім із розглянутих варіантів величини модуля пружності з точки зору зменшення ККН виявляється включення з $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$, при цьому ККН=2,55 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 22\%$.

Отже, у разі тонких включень має місце «механічний ефект» зміни зони локації концентрації напружень від контуру отвору до зони з'єднання оболонки із включенням для усіх розглянутих випадків величини модуля пружності. При цьому зменшення величини модуля пружності призводить до зростання ККН на стику матеріалів (від 2,55 до 2,82).

Порівнюючи отримані результати для циліндричної оболонки с круговими отворами маємо, що завдяки включенням з «м'якого» матеріалу вдається зменшити величину ККН на $\sim 13\%–35\%$. Найбільш задовільні результати одержуємо при ширині включення $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ та модулі пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$. За усіх інших випадках ми маємо зміщення зони локації концентрації напружень до стику оболонки із включенням

Аналогічні числові дослідження здійснено для *зрізаних конічних оболонок* з малими круговими отворами. Результати проведених обчислювальних експериментів у разі $r_0/\sqrt{R_0h} = 0,5$ за наявності в оболонці кільцевого включення ширини $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0; 0,25r_0; 0,125r_0$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 3.5 – табл. 3.7 відповідно.

Таблиця 3.5 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	$\delta, \%$
$2E_0 / 3$	2,55	-22,7
$E_0 / 2$	2,15	-34,8
$2E_0 / 5$	2,32	-29,6
$E_0 / 3$	2,47	-25,1

На рис. 3.12, *а* – рис. 3.12, *г* зображено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого кругового отвору $r_0/\sqrt{R_0h} = 0,5$ у разі «м'якого» кільцевого включення ширини $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (рис. 3.12, *а, б*) та $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (рис. 3.12, *в, г*).

На рис. 3.13 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням ширини $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

За характером розподілу інтенсивності напружень для даних параметрів оболонки і включення результати є аналогічними результатам для циліндричної оболонки. Також, випадок $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ є найзадовільнішим не тільки з точки зору зменшення величини ККН (на $\sim 23\%$) у порівнянні з оболонкою без включень, а й з точки зору збереження локації зони концентрації напружень навколо отвору.

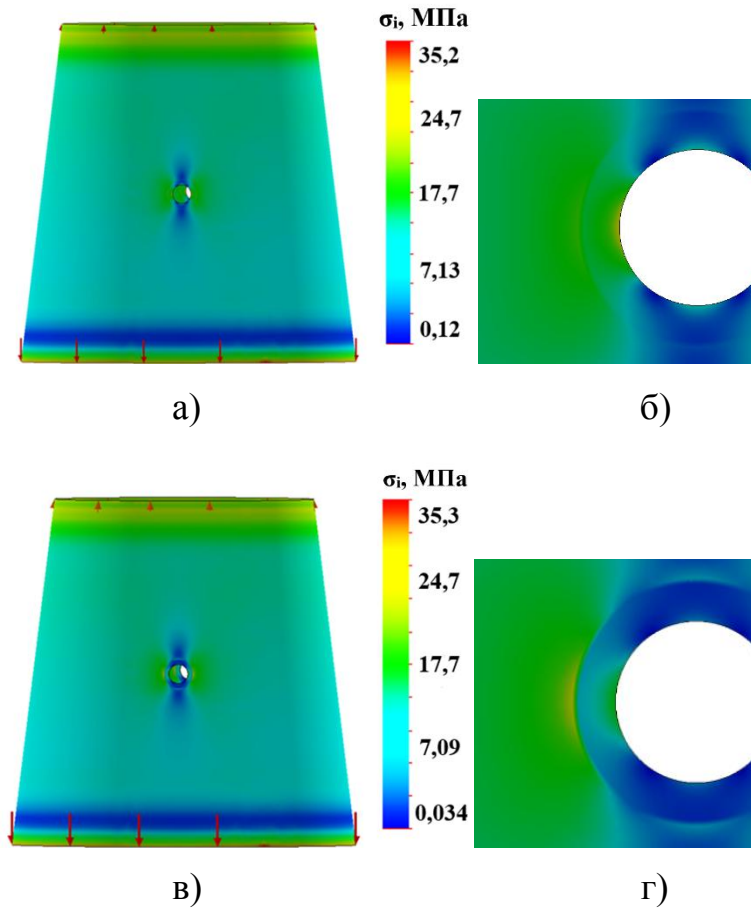


Рис. 3.12– Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м'якого включення $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ при $E_{\text{вкл}} = 2E_0/3$ (а), (б) та при $E_{\text{вкл}} = E_0/3$ (в), (г)

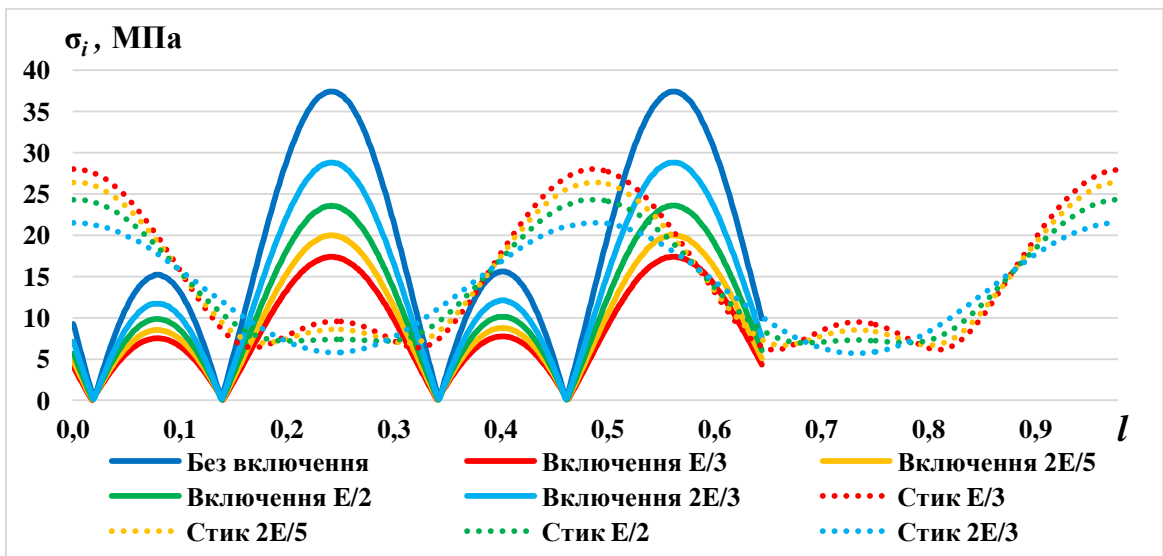


Рис. 3.13 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

На рис. 3.14, *a* – рис. 3.14, *г* проілюстровано розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого кругового отвору у разі «м'якого» включення з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$, ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ (рис. 3.14, *a, б*) та $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ (рис. 3.14, *в, г*). Так саме, як і у випадку циліндричних оболонок, спостерігається перерозподіл напружень і зміна зони локації концентрації напружень та тенденція їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення: у разі $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ величина ККН= 2,47 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ величина ККН=2,56 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням).

Таблиця 3.6 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	2,47	-25,1
$E_0 / 2$	2,43	-26,3
$2E_0 / 5$	2,56	-22,3
$E_0 / 3$	2,66	-19,3

На рис. 3.15 та рис. 3.16 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ та $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

У випадку $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ вдається досягнути зменшення ККН на ~19%–26%, у разі $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ відбувається зменшення ККН на ~14%–22%, при цьому зона концентрації напружень зміщується від контура отвору на стик між оболонкою і включенням у разі $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2; 2E_0 / 5; E_0 / 3$.

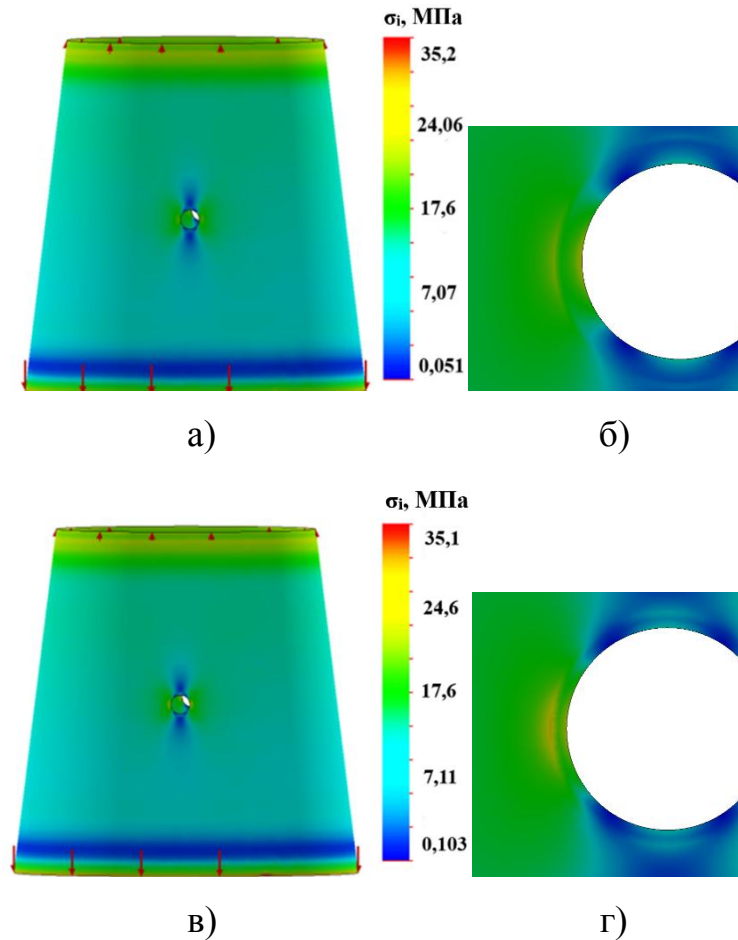


Рис. 3.14 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі кругового отвору (б), (г) у разі м'якого включення $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ (а), (б) та при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ (в), (г)

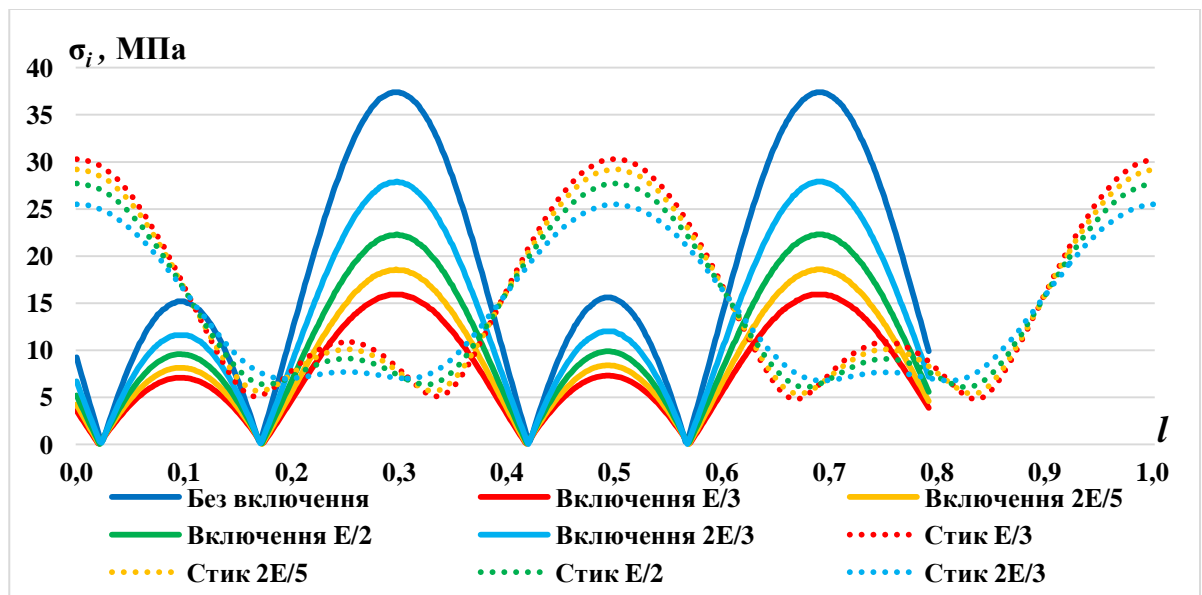


Рис. 3.15 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

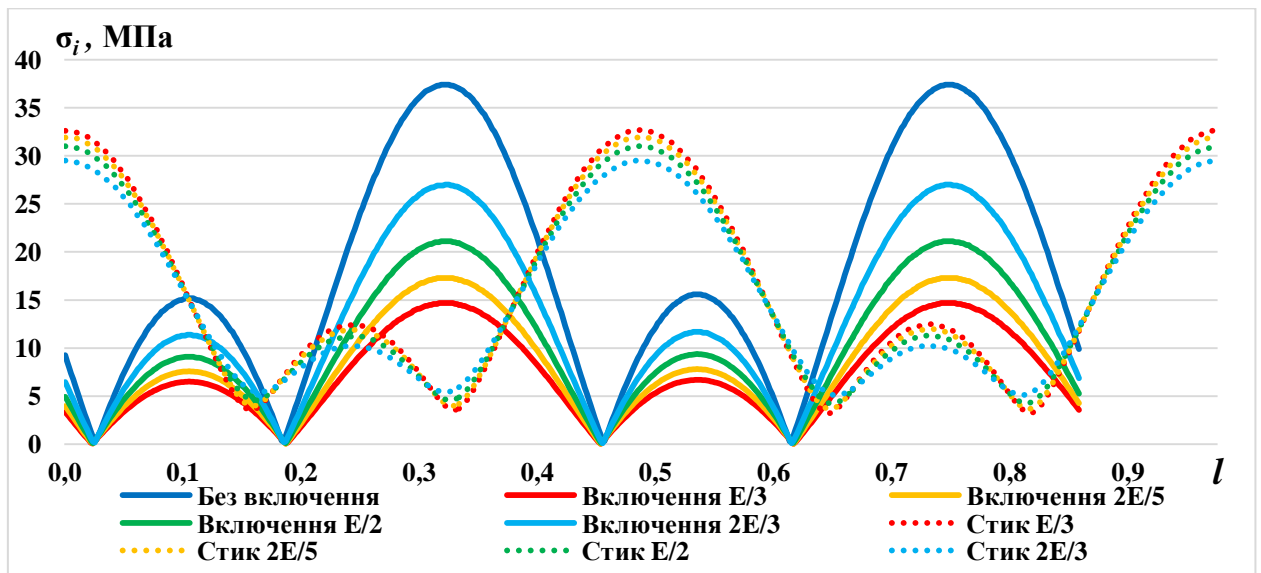


Рис. 3.16 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в кінцевій оболонці навколо кругового отвору і вздовж стику оболонки із включенням при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Таблиця 3.7 – Коефіцієнт концентрації напружень в кінцевій оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	2,56	-22,3
$E_0 / 2$	2,69	-18,4
$2E_0 / 5$	2,78	-15,7
$E_0 / 3$	2,83	-14,2

При розрахунках НДС і визначення ККН для зрізаної кінцевої оболонки з круговими отворами, виявляється, що проблема зменшення концентрації напружень навколо отвору не є єдиною проблемою для такого роду оболонок. В силу їх геометрії з'являється так званий ефект «кінцевості», що, у свою чергу, потребує окремого врахування виникнення критичних напружень на її торцях. Зниження концентрації напружень в околі отвору кінцевої оболонки є можливим за рахунок використання кільцевих включень з певними механічними і геометричними параметрами.

«Небезпечні» зони в околі торців потребують додаткової уваги та проведення додаткових досліджень.

У табл. 3.8 наведено результати порівняльного аналізу розрахунку ККН, отриманих в ході проведених обчислювальних експериментів для циліндричних і конічних оболонок з малими круговими отворами та кільцевими включеннями різної ширини $h_{\text{вкл}} = r_0 / 2; r_0 / 4; r_0 / 8$ в залежності від зміни величини модуля пружності.

Таблиця 3.8 – Порівняльна таблиця ККН в циліндричній та конічній оболонках в залежності від величини модуля пружності та ширини включення

Оболонка	Модуль пружності включення, $E_{\text{вкл}}$	ККН		
		Ширина включення, $r_0 / 2$	Ширина включення, $r_0 / 4$	Ширина включення, $r_0 / 8$
Циліндрична	$2E_0 / 3$	2,53	2,45	2,55
	$E_0 / 2$	2,13	2,41	2,68
	$2E_0 / 5$	2,31	2,54	2,76
	$E_0 / 3$	2,45	2,64	2,82
Конічна	$2E_0 / 3$	2,55	2,47	2,56
	$E_0 / 2$	2,15	2,43	2,69
	$2E_0 / 5$	2,32	2,56	2,78
	$E_0 / 3$	2,47	2,66	2,83

Як видно з табл. 3.8, для обох типів оболонок найкращий результат з точки зору зменшення величини ККН є такі параметри включення: $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$ та $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$. При цьому величина зменшення ККН у порівнянні з ККН для відповідної оболонки без включення складає на ~35 %. Тут слід мати на увазі, що за даних параметрів включення зона концентрації напружень знаходиться не в околі отворів, а на межі поділу матеріалів оболонки і включення. При $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ та $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ величину ККН

вдається зменшити для обох типів оболонок на $\sim 23\%$, при цьому зона концентрації напружень залишається в околі отворів з певним перерозподілом в бік межі між оболонкою і включенням.

Аналіз отриманих результатів для обох типів оболонок свідчить про те, що чим «м'якше» матеріал включення, тим більшою є величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки. Чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення.

Висновки до розділу 3

В результаті проведеного комп'ютерного моделювання і числового дослідження концентрації напружень навколо отворів в тонкостінних структурно неоднорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонках з круговими «малими» отворами:

- здійснено порівняльний аналіз ККН, отриманих на основі МСЕ і за допомогою аналітичного методу в разі однорідних оболонок [56]. При цьому результати розрахунків добре узгоджуються з аналітичними розв'язками (відхилення $\sim 1\text{--}3\%$);

- досліджено вплив механічних і геометричних параметрів кільцевих включень на величину ККН в обох видах оболонок з «малими» круговими отворами, отримано певні раціональні конфігурації параметрів включень, які дають змогу знизити ККН на $\sim 13\text{--}35\%$.

- встановлено, що в залежності від сполучень механічних і геометричних параметрів, можна спостерігати *механічний ефект*: відбувається зміна зони локації концентрації напружень і перерозподіл максимальних напружень від контуру отвору у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення;

- для конічних оболонок, в силу їх геометричних особливостей, спостерігається ефект «конічності», врахування якого потребує проведення додаткових досліджень.

Отже, раціональними параметрами включень у випадку *циліндричних оболонок з круговим отвором* можна вважати такі: *геометричні* (ширина включення) – $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$, *механічні* (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона) – $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$; $\nu = 0,3$. Це дозволило зменшити ККН на ~22%. У випадку *конічних оболонок з круговим отвором* такі самі параметри включення є раціональними, що призвело до зменшення ККН на ~23%. Слід зазначити, що за вказаних параметрів включень зміни локації зони концентрації напружень не відбувається, вона залишається біля контуру отвору. Найкращій результат з точки зору зменшення ККН (на ~35%) для обох типів оболонок отримаємо за таких параметрів включень: *геометричні* (ширина включення) – $h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$ *механічні* (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона) – $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$; $\nu = 0,3$. Але при цьому має місце «механічний ефект» зміни зони локації концентрації напружень від контуру отвору до зони з'єднання оболонки із включенням.

РОЗДІЛ 4

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ

Розділ присвячено числовому моделюванню та аналізу напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і зрізаних конічних оболонок з прямокутними отворами й стрічковими включеннями навколо них.

Виконано порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану вказаних оболонок з відомими розв'язками для окремих випадків. Проведено числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на концентрацію напружень в оболонках. Встановлено та обґрунтовано раціональні параметри включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень навколо локальних концентраторів напружень в оболонках обох видів. Виявлено механічні ефекти щодо зміни локації концентрації напружень в залежності від виду отворів і сполучення параметрів включень.

4.1. Порівняльний аналіз результатів числового розрахунку напружено-деформованого стану тонких однорідних циліндричних і конічних оболонок з прямокутним отвором з відомими розв'язками

Аналогічно, як і для оболонок з круговими отворами, було проведено порівняльний аналіз НДС тонких пружних однорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонок товщини h , висоти H з двома однаковими діаметрально протилежними квадратними отворами $a \times a$ ($a = 2r_0$, де r_0 – радіус вписаного кола), розташованими посередині оболонок (рис. 4.1).

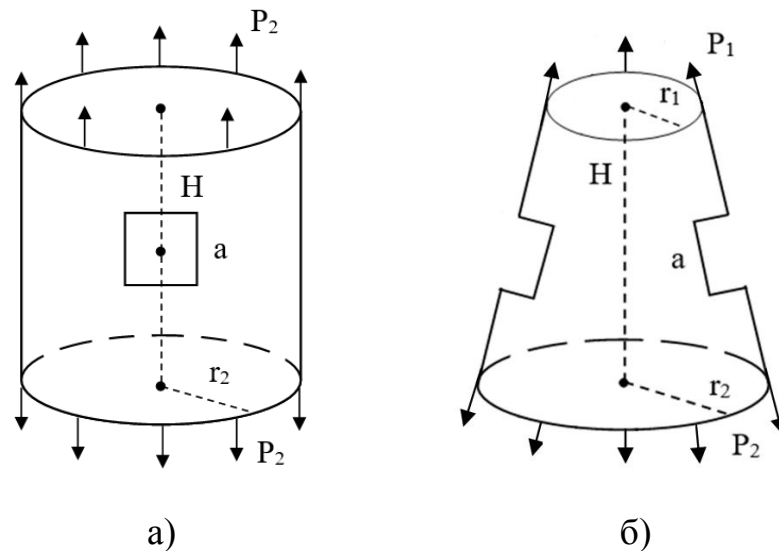


Рис 4.1 – Оболонки з квадратними отворами:

а) циліндрична; б) конічна

4.1.1 Оболонки з малим квадратним отвором

У табл. 4.1 подано результати порівняльного аналізу отриманих ККН для оболонок з малими квадратними отворами з відповідними аналітичними розв'язками [56].

Таблиця 4.1 – Порівняльна таблиця ККН для циліндричної і конічної оболонок з малими квадратними отворами

Оболонка	Аналітичне значення ККН	Числове значення ККН	δ , %
Циліндрична	5,25	5,29	+0,76
Конічна	5,40	5,42	+0,41

Тут δ – відхилення числового значення ККН, знайденого за допомогою МСЕ, від аналітичного; величини номінальних напружень для обох типів оболонок наведено у попередньому розділі.

З табл. 4.1 випливає, що знайдені числові розв'язки добре узгоджуються з аналітичними (відхилення менше 1%).

На рис. 4.2 подано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній і зрізаній конічній оболонках з малими квадратними отворами відповідно. Концентрація напружень має місце біля кутів отворів. Для зрізаної конічної оболонки максимальні напруження спостерігаються біля верхніх кутів отвору в силу геометрії моделі.

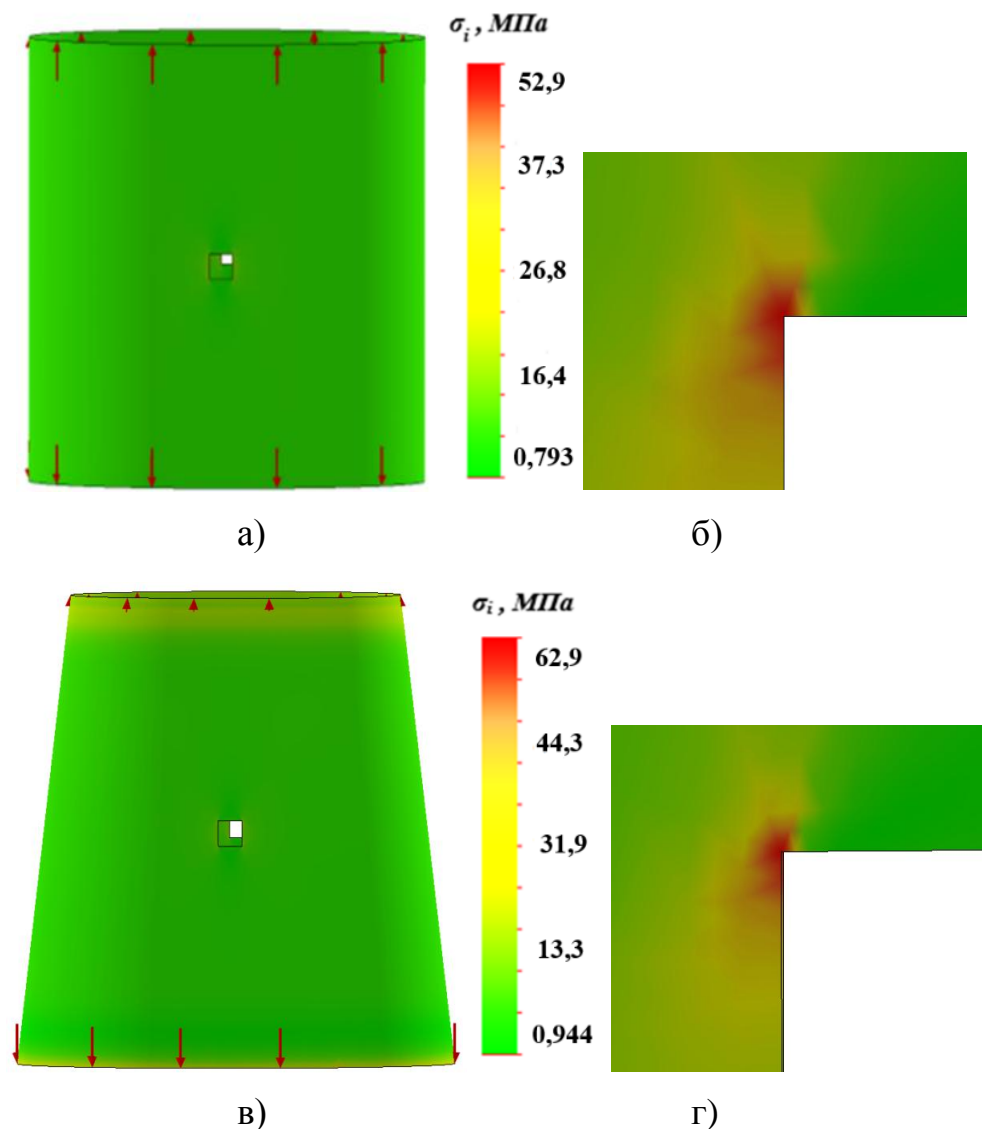


Рис. 4.2 – Розподіл інтенсивності напружень: а) в циліндричній оболонці з малими квадратними отворами; б) в околі отвору; в) в конічній оболонці з малими квадратними отворами; г) в околі отвору

На рис. 4.3 наведено графічне зображення розподілу інтенсивності напружень σ_i уздовж контуру отвору в циліндричній (лінія 1) і конічній (лінія 2) оболонках з малими квадратними отворами.

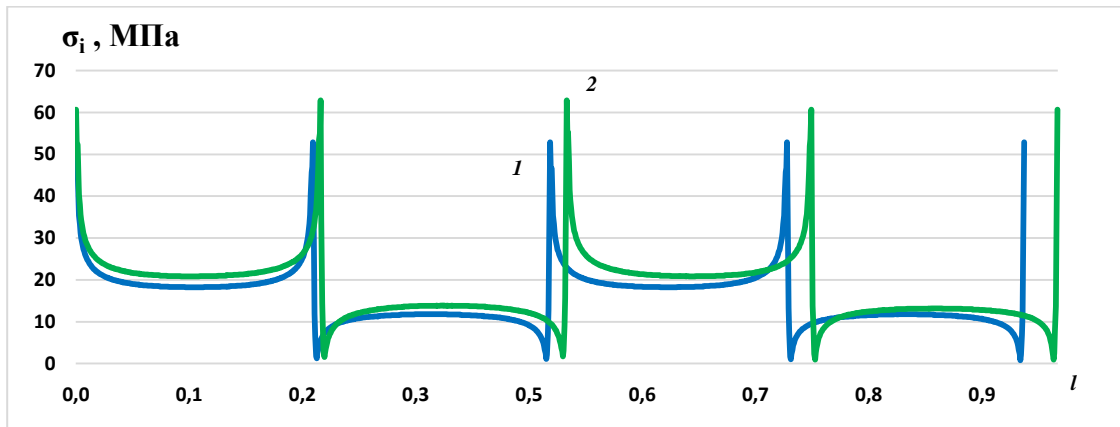


Рис. 4.3 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж контуру отвору в циліндричній (лінія 1) і конічній (лінія 2) оболонках з квадратними отворами

Аналіз отриманих числових розв'язків для однорідних оболонок з квадратними отворами свідчить про добру узгодженість з даними, відомими в літературі [56] (відхилення менше 1%).

4.2. Числовий аналіз впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких неоднорідних оболонках з квадратним отвором

Розглянуто НДС тонкостінних пружних однорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонок з двома однаковими діаметрально протилежними «малими» квадратними отворами зі стрічковими включеннями. Вважається, що стрічкове включення навколо отворів розташоване у площині оболонки. Матеріал включення має інші, ніж основний матеріал оболонки, властивості ($E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$; $E_0 / 2$; $2E_0 / 5$; $E_0 / 3$,

де E_0 – модуль пружності оболонки, $E_{вкл}$ – модуль пружності включення).
Ширина включень $h_{вкл}$ варіюється ($h_{вкл} = 0,25a; 0,125a; 0,0625a$).

Також, як і раніше, у випадку оболонок з круговим отвором, будемо вважати, що виконано усі зроблені припущення стосовно умов на межі поєднання матеріалів матриці і включення.

Мета дослідження полягає у знаходженні раціональних параметрів включень для оболонок з точки зору зменшення величини ККН.

При розрахунках застосовано лагранжеві трикутні шестивузлові скінченні елементи з трьома степенями свободи у кожному вузлі. В місцях концентрації напружень (навколо отвору і на межі поєднання матриці і включення) використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подібнення 10).

Приклади побудови сітки наведено на рис. 4.4.

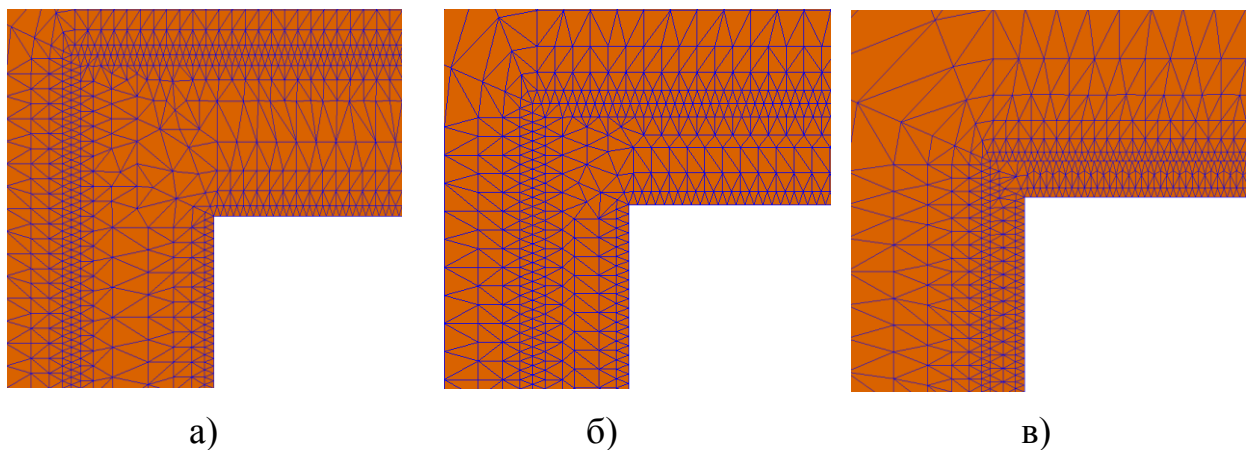


Рис. 4.4 – Адаптивна сітка в околі квадратного отвору
циліндричної оболонки при $h_{вкл} = 0,25a; 0,125a; 0,0625a$ відповідно (а)–(в)

4.2.1 Оболонки з малим квадратним отвором і стрічковим включенням

Результати проведених обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для циліндричної оболонки з малими квадратними отворами у разі $a/2\sqrt{R_0 h} = 0,5$ та стрічковим включенням ширини $h_{вкл} = 0,25a$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці з квадратним отвором в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0,25a$

$E_{вкл}$	ККН	$\delta, \%$
$2E_0 / 3$	4,32	-18,3
$E_0 / 2$	3,52	-33,5
$2E_0 / 5$	2,99	-43,5
$E_0 / 3$	2,61	-49,1

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення (ККН=5,29 [32]).

Із табл. 4.2 випливає, що наявність стрічкового включення з більш «м'якого» матеріалу, ніж матеріал оболонки, дає змогу зменшити величину ККН навколо квадратного отвору на $\sim 18\%–49\%$. Тут найкращім із розглянутих варіантів при $h_{вкл} = 0,25a$ з точки зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в три рази менше ніж E_0 ($E_{вкл} = E_0 / 3$). При цьому ККН=2,61, і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 49\%$. Концентрація напружень спостерігається навколо кутів отвору.

У разі оболонки з відповідним круговим отвором ($r_0 = a / 2$) і $h_{вкл} = 0,25a$ величину ККН дається зменшити на $\sim 22\%–35\%$. При цьому найкращім із розглянутих варіантів виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0 ($E_{вкл} = E_0 / 2$). У даному випадку ККН=2,13, величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 35\%$. Концентрація напружень має місце не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів [28].

На рис. 4.5, а – рис. 4.5, з наведено приклад розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого квадратного отвору

($a/(2\sqrt{R_0 h})=0,5$) у разі «м'якого» включення ширини $h_{вкл}=0,25a$ при величині модуля пружності $E_{вкл}=2E_0/3$ (рис. 4.4, а, б) та при $E_{вкл}=E_0/3$ (рис. 4.5, в, г). При фіксованій ширині включення спостерігається перерозподіл напружень в залежності від його модуля пружності.

Аналіз рис. 4.5 показує, що у випадку $E_{вкл}=2E_0/3$ концентрація напружень спостерігається біля кутових точок отвору (ККН=4,32), при зменшенні модуля пружності в два рази $E_{вкл}=E_0/3$ спостерігається перерозподіл напружень у напрямку з'єднання матеріалів включення і оболонки (на стик оболонки з включенням), при цьому ККН=2,61. Вказаний ефект є менш вираженим у порівнянні з відповідною оболонкою з малим круговим отвором [28].

Розподіл інтенсивності напружень у циліндричній оболонці по розгортці контура квадратного отвору і вздовж стику матеріалів оболонки і включення проілюстровано на рис. 4.6 для включення ширини $h_{вкл}=0,25a$ і різних варіантів величини його модуля пружності ($E_{вкл}=2E_0/3; E_0/2; 2E_0/5; E_0/3$). По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \leq l \leq 1$ по розгортці контурів отвору (суцільні лінії) і стрічкового включення (пунктирні лінії). Спостерігається механічний ефект: чим «м'якше» матеріал включення, тим менша величина ККН. На межі з'єднання матеріалів оболонки і включення має місце незначне зростання напружень, але стрибків напружень не відбувається.

У табл. 4.3 та табл. 4.4 наведено результати числового розрахунку ККН для циліндричної оболонки з малими квадратними отворами ($a/(2\sqrt{R_0 h})=0,5$) та тонкими стрічковими включеннями ширини $h_{вкл}=0,125a$ та $h_{вкл}=0,0625a$ в залежності від зміни величини модуля пружності відповідно.

Аналогічно попередньому випадку тут також спостерігається тенденція зменшення ККН при зменшенні величини модуля пружності. У порівнянні з

випадком оболонки без включень за рахунок використання «м'яких» включень навколо отворів вдається зменшити ККН на $\sim (20 - 52) \%$. При ширині включення $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ найкращім з точки зору зменшення ККН із розглянутих варіантів механічних властивостей включення тут також виявляється випадок включення $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$, при цьому $\text{ККН} = 2,52$ і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 52 \%$.

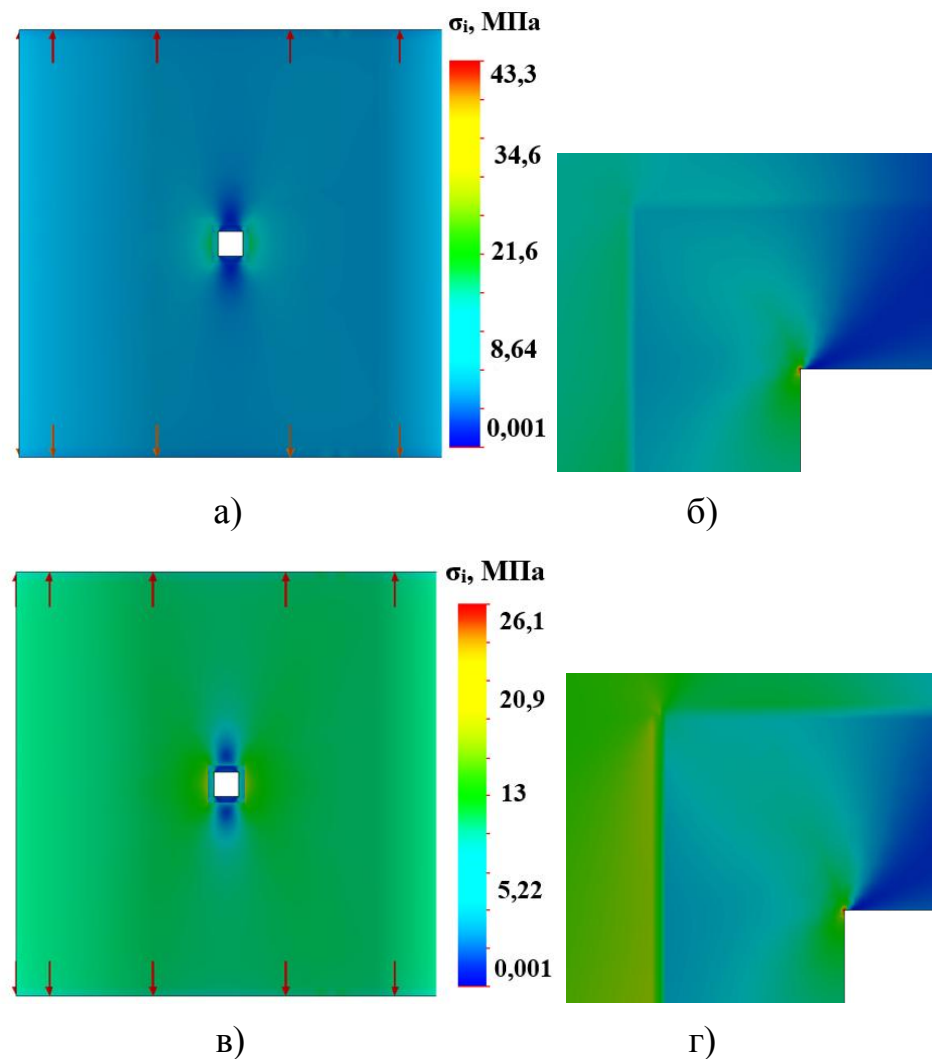


Рис. 4.5 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м'якого» включення $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ при $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (в), (г)

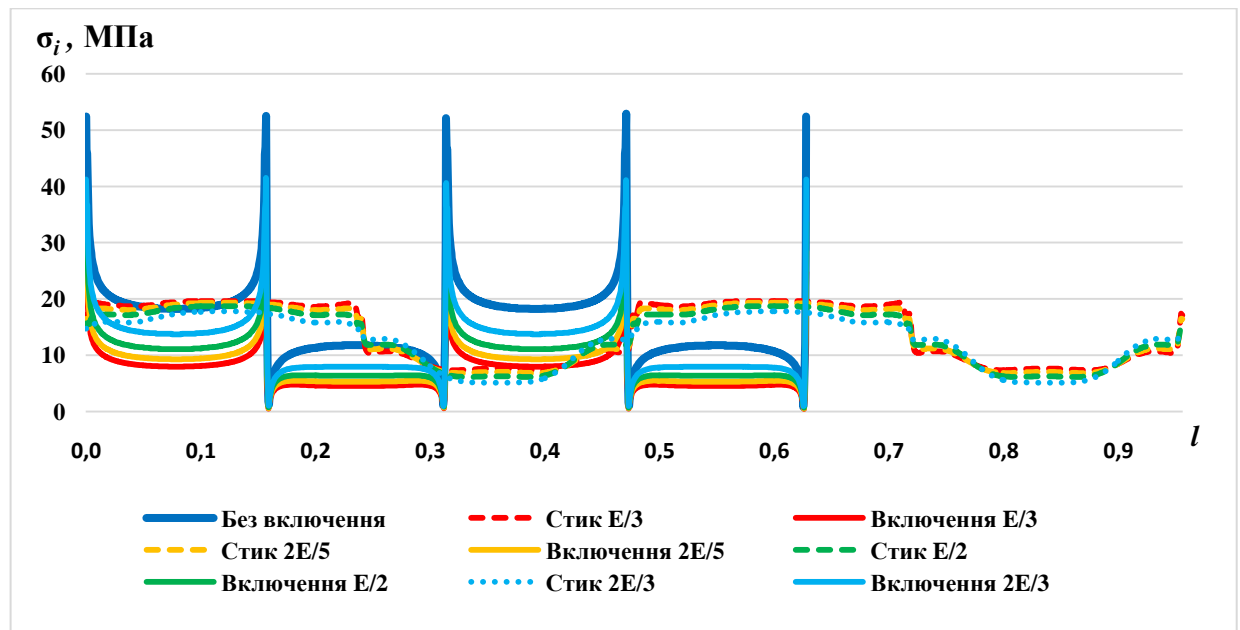


Рис. 4.6 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки і з включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Таблиця 4.3 – Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	4,25	-19,7
$E_0 / 2$	3,44	-34,9
$2E_0 / 5$	2,9	-45,2
$E_0 / 3$	2,52	-52,4

У випадку оболонки з відповідним круговим отвором ($r_0 = a/2$) і $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ величину ККН дається зменшити на $\sim (19 - 26)$ %. При цьому найкращим із розглянутих варіантів, як і у випадку більш широкого кільцевого включення ($h_{\text{вкл}} = 0,25a$), виявляється включення з модулем

пружності, що в два рази менше ніж E_0 ($E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$). Тут маємо ККН=2,41, величина його відхилення від відповідного значення ККН для оболонки без включення складає $\sim 26\%$. Концентрація напружень має місце не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів [28].

На рис. 4.7, а – рис. 4.7, з подано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого квадратного отвору ($a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5$) у разі «м'якого» включення з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$, ширини $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ (рис. 4.7, а, б) та $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ (рис. 4.7, в, з).

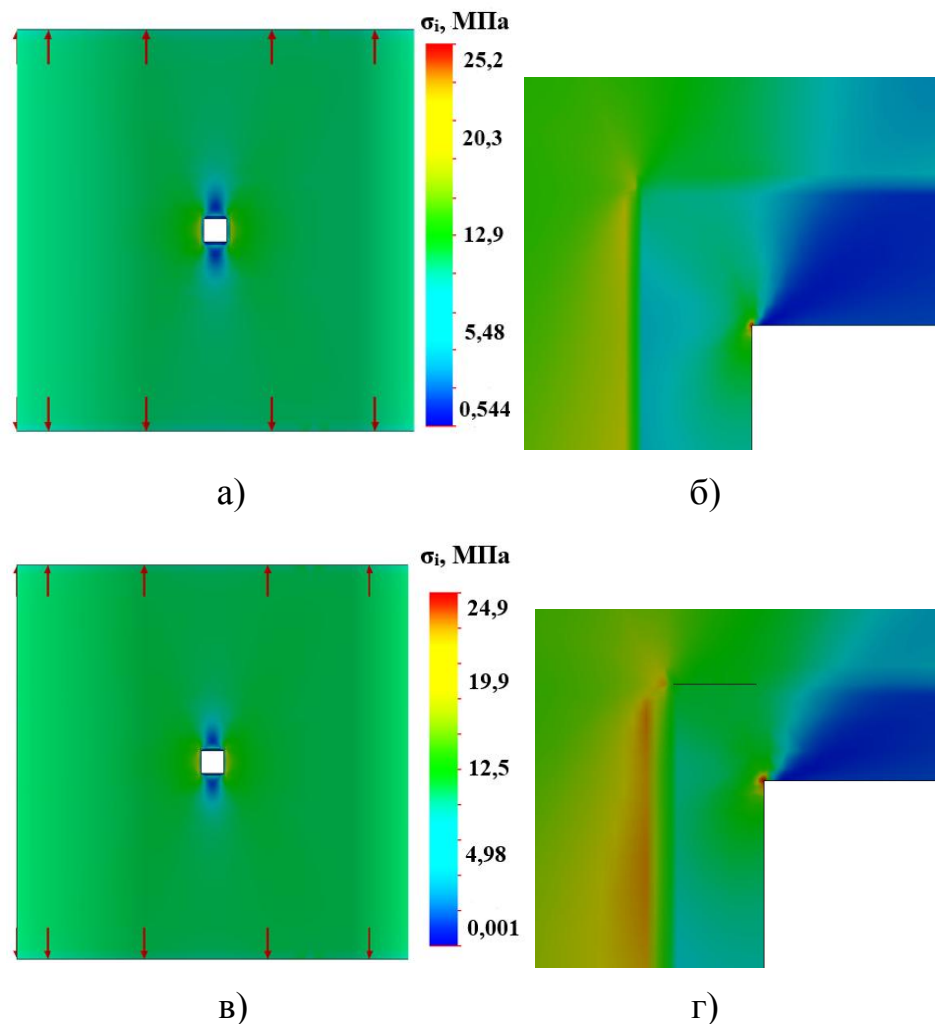


Рис. 4.7 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м'якого» включення $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ (а), (б) та при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ (в), (г)

Аналіз рис. 4.7 показує, що при вказаній фіксованій величині модуля пружності включення (що в 3 рази менше величини E_0 основного матеріалу оболонки) спостерігається перерозподіл напружень в напрямку межі з'єднання матеріалів оболонки і включення в залежності від його ширини: при зменшенні ширини включення від $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ до $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ напруження на стику матеріалів по боках отвору зростають, але стрибків не спостерігається і концентрація напружень залишається в околі кутових точок отвору, при цьому величина ККН змінюється від 2,52 до 2,49 відповідно.

На рис. 4.8 та рис. 4.9 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень по розгортці контуру квадратного отвору і вздовж стику оболонки із включенням для різних варіантів величини його модуля пружності.

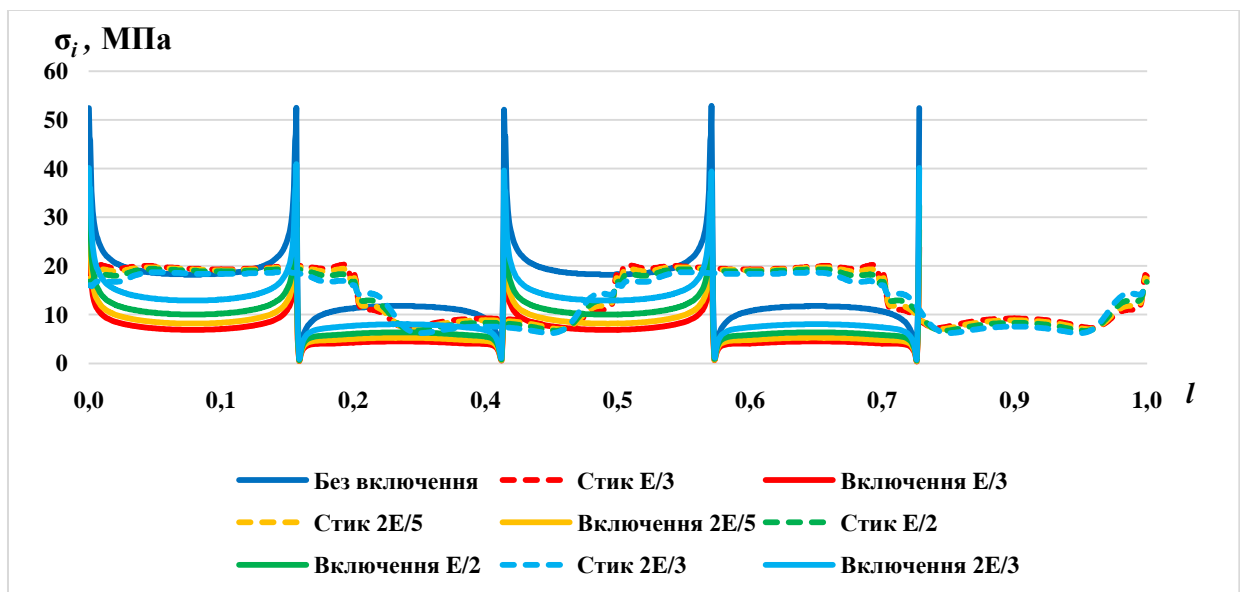


Рис. 4.8 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

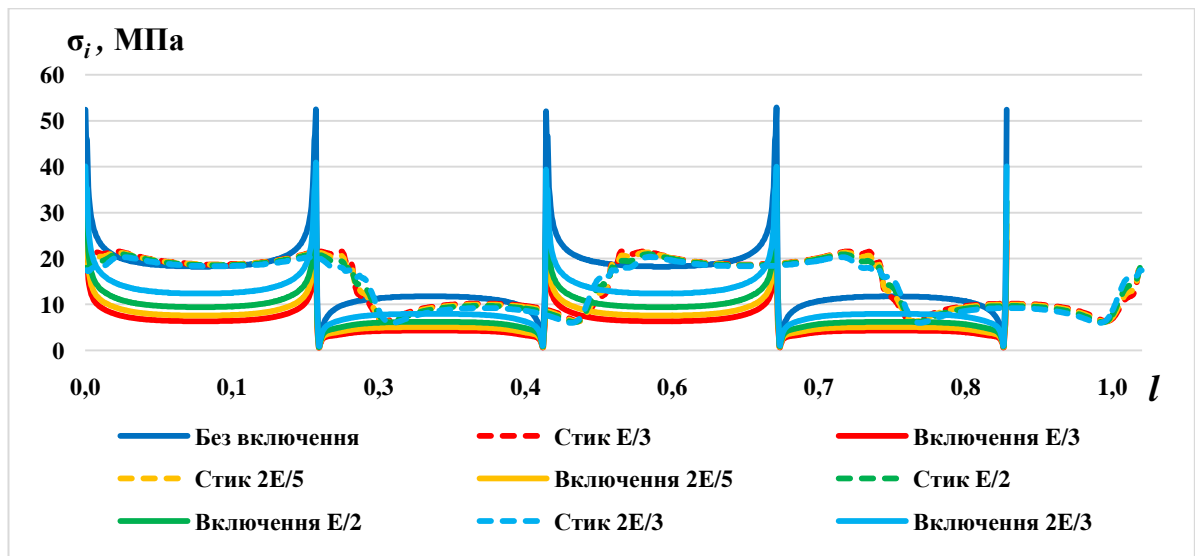


Рис. 4.9 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Аналіз одержаних результатів показує, що чим «м'якше» матеріал стрічкового включення навколо квадратного отвору, тим менша величина ККН. На відміну від випадку відповідного кругового отвору в циліндричній оболонці (див. розділ 3) тут немає вираженого ефекту перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення з матеріалом оболонки (рис. 4.6, рис. 4.8, рис. 4.9). У разі кругового отвору маємо: чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення [28].

Слід зауважити, що за наявності в оболонці квадратного отвору (зі стороною $a = 2r_0$, де r_0 – радіус вписаного кола) максимальні значення відносної інтенсивності напружень на стику матеріалів оболонки і включення ($k^c = \sigma_{i,\max}^c / P_2$, де $\sigma_{i,\max}^c$ – максимальне значення інтенсивності напружень на межі з'єднання матеріалів оболонки і включення; P_2 – величина прикладеного навантаження розтягу циліндричної оболонки) для усіх розглянутих варіантів ширини включення і його модуля пружності є меншими, ніж ККН, а саме:

- для $h_{\text{вкл}} = \frac{a}{4}$: при $E_{\text{вкл}} = 2E/3$ $k^c = 1,60$; $E_{\text{вкл}} = E/2$ $k^c = 1,70$;
 $E_{\text{вкл}} = 2E/5$ $k^c = 1,80$; $E_{\text{вкл}} = E/3$ $k^c = 1,90$;
- для $h_{\text{вкл}} = \frac{a}{8}$: при $E_{\text{вкл}} = 2E/3$ $k^c = 1,70$; $E_{\text{вкл}} = E/2$ $k^c = 1,80$;
 $E_{\text{вкл}} = 2E/5$ $k^c = 1,90$; $E_{\text{вкл}} = E/3$ $k^c = 1,93$;
- для $h_{\text{вкл}} = \frac{a}{16}$: при $E_{\text{вкл}} = 2E/3$ $k^c = 1,80$; $E_{\text{вкл}} = E/2$ $k^c = 1,90$;
 $E_{\text{вкл}} = 2E/5$ $k^c = 1,91$; $E_{\text{вкл}} = E/3$ $k^c = 1,94$.

Отже, концентрація напружень залишається поблизу кутових точок квадратного отвору.

Таблиця 4.4 – Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	4,21	-20,4
$E_0 / 2$	3,40	-35,7
$2E_0 / 5$	2,87	-45,7
$E_0 / 3$	2,49	-52,9

Тут у порівнянні з випадком оболонки без включень вдається зменшити ККН на $\sim (20 - 53)$ % за рахунок використання навколо отворів «м'яких» тонких включень ширини $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$. При цьому на відміну від випадку відповідної оболонки з круговим отвором має місце така закономірність у разі фіксованої ширині включення: чим «м'якше» включення, тим менше величина ККН. У разі оболонки з круговим отвором і $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ вдається зменшити ККН на $\sim (13 - 22)$ %, при цьому найкращий результат показує включення з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (ККН=2,55).

Таким чином, порівняння одержаних результатів для циліндричної оболонки з квадратними отворами для усіх розглянутих варіантів ширини включення ($h_{\text{вкл}} = 0,25a; 0,125a; 0,0625a$) та його модуля пружності ($E_{\text{вкл}} = 2E_0/3; E_0/2; 2E_0/5; E_0/3$) показує, що завдяки стрічковим включенням з «м'якого» матеріалу вдається зменшити величину ККН на $\sim (20 - 53) \%$. Найкращім виявляється випадок включення з параметрами $E_{\text{вкл}} = E_0/3$, $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ (при цьому ККН=2,49 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 53 \%$).

У разі оболонки з відповідним круговим отвором найбільш задовільні результати одержуємо для кільцевого включення з параметрами $E_{\text{вкл}} = E_0/2$, $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ (при цьому ККН=2,13 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає $\sim 35 \%$). За усіх інших випадках має місце перерозподіл напружень із зсувом зони локації концентрації напружень до стику оболонки із кільцевим включенням. Для оболонки з квадратним отвором цей ефект не спостерігається.

Отже, у разі використання тонких стрічкових включень навколо квадратного отвору на відміну від випадку відповідних кільцевих включень навколо кругового отвору не спостерігається вираженого «механічного ефекту» зміни зони локації концентрації напружень від контуру отвору до зони з'єднання оболонки із включенням для усіх розглянутих варіантів варіювання величини модуля пружності.

Аналогічні числові дослідження здійснено для *зрізаних конічних оболонок* з малими квадратними отворами. Результати проведених обчислювальних експериментів у разі $(a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5)$ за наявності в оболонці стрічкового включення ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25a; 0,125a; 0,0625a$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 4.5 – табл. 4.7 відповідно.

Аналіз табл. 4.5 показує, що за фіксованої ширини включення $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ величина ККН значно зменшується (майже в 1,7 разів) при зменшенні величини модуля пружності від $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ до $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (від 4,36 до 2,63).

Таблиця 4.5 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,25a$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	4,36	-19,6
$E_0 / 2$	3,56	-34,3
$2E_0 / 5$	3,02	-44,3
$E_0 / 3$	2,63	-51,5

На рис. 4.10, а – рис. 4.10, г зображено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого квадратного отвору $a / (2\sqrt{R_0 h}) = 0,5$ у разі «м'якого» стрічкового включення ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (рис. 4.10, а, б) та $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (рис. 4.10, в, г).

На рис. 4.11 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо квадратного отвору і вздовж стику оболонки з включенням ширини $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

За характером розподілу інтенсивності напружень для даних параметрів оболонки і включення результати є аналогічними результатам для циліндричної оболонки, за винятком того, що величина напружень у верхніх кутах отвору декілька більша на $\sim (2 - 3) \%$, ніж у нижніх в силу геометрії оболонки. Також випадок $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ є найкращим з точки зору зменшення величини ККН (на $\sim 52 \%$) у порівнянні з оболонкою без включень.

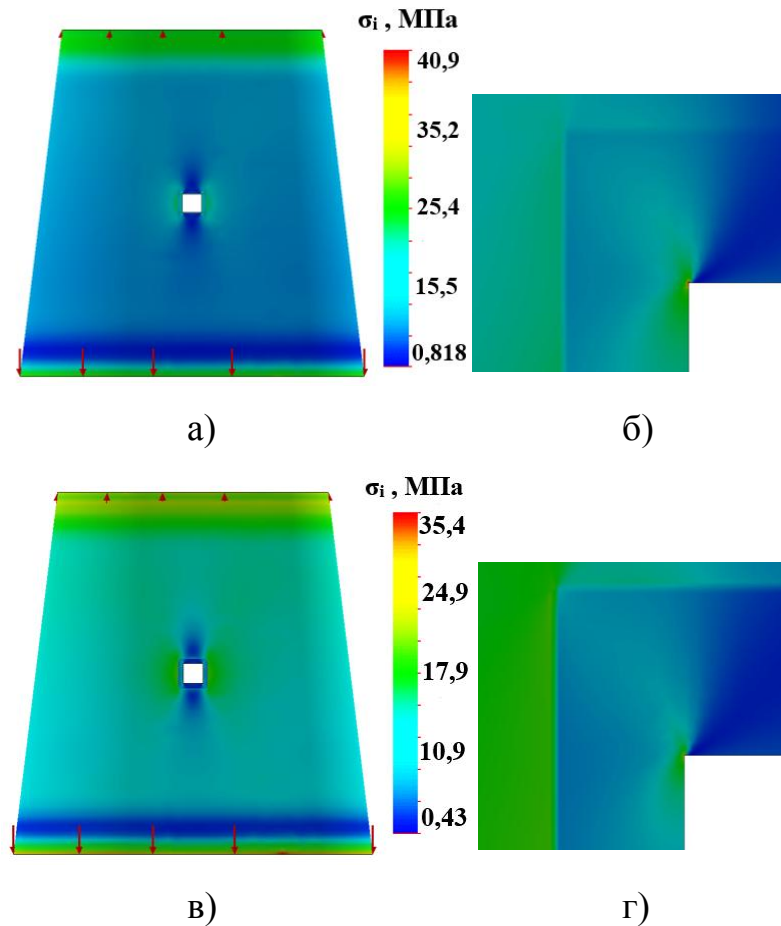


Рис. 4.10 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м'якого» включення $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ при $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ (в), (г)

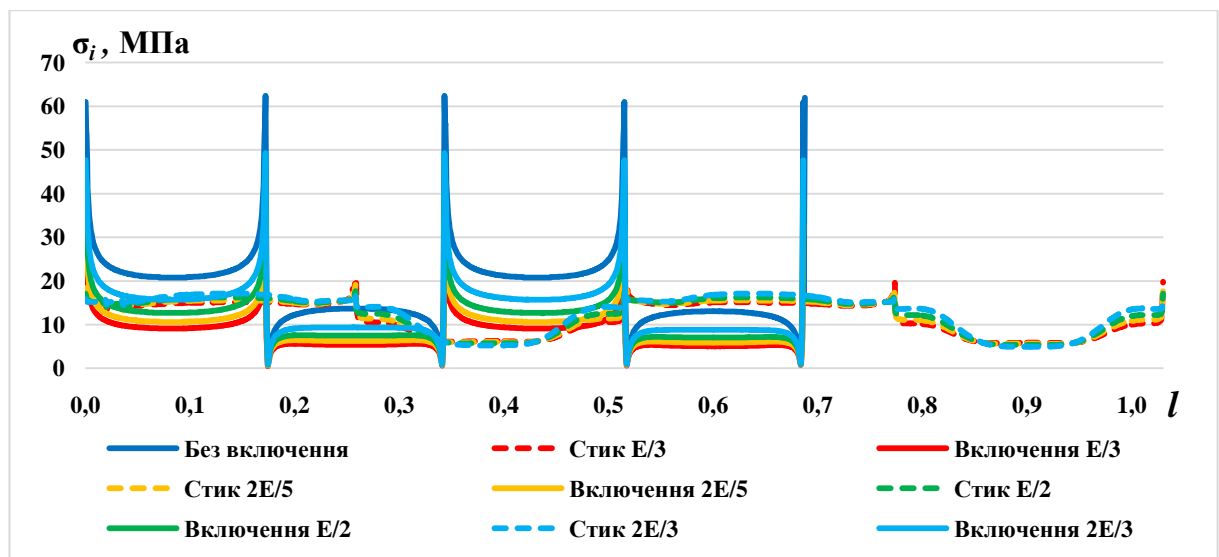


Рис. 4.11 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,25a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

На рис. 4.12, *а* – рис. 4.12, *з* наведено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці й в околі її малого квадратного отвору у разі «м'якого» включення з модулем пружності $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$, ширини $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ (рис. 4.12, *а*, *б*) та $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ (рис. 4.12, *в*, *з*). Так саме, як і у випадку циліндричних оболонок з квадратним отвором, спостерігається концентрація напружень поблизу кутів отвору та зменшення величини ККН у порівнянні з оболонкою без включень на $\sim (17 - 54) \%$ (табл. 4.6, табл. 4.7). У разі $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ величина ККН=4,35 (табл. 4.6), у разі $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ ККН=4,23 (табл. 4.7). Тут більш тонке включення призводить до кращого результату з точки зору зменшення ККН.

У випадку відповідної оболонки з круговим отвором і кільцевим включенням спостерігається перерозподіл напружень і зміна зони локації концентрації напружень та тенденція їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення. Так, зокрема, при $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$ у разі $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ величина ККН= 2,45 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ величина ККН=2,54 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням) [28].

Таблиця 4.6 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	$\delta, \%$
$2E_0 / 3$	4,35	-17,0
$E_0 / 2$	3,52	-35,1
$2E_0 / 5$	2,97	-45,2
$E_0 / 3$	2,59	-52,2

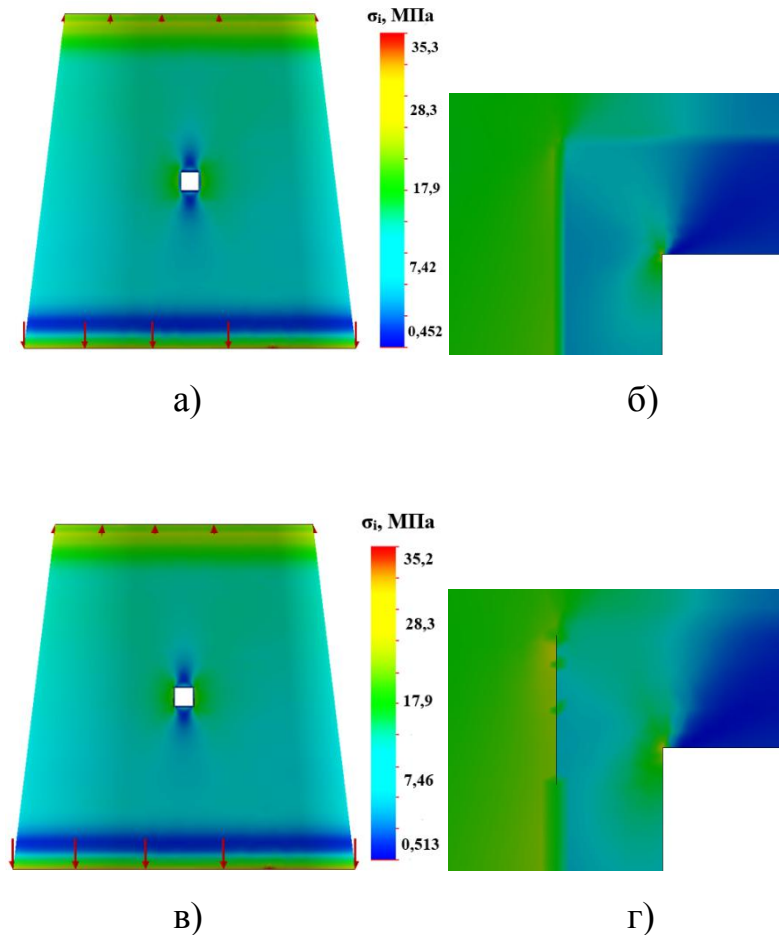


Рис. 4.12 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м'якого» включення $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ (а), (б) та при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ (в), (г)

На рис. 4.13 та рис. 4.14 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень по розгортці контуру квадратного отвору і вздовж стику оболонки з включенням ширини $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ та $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

У даному випадку вдається досягнути зменшення ККН на $\sim (22 - 54) \%$ (табл. 4.7), зона концентрації напружень при цьому спостерігається поблизу верхніх кутів отвору. На відміну від відповідної оболонки з круговим отвором [28], в якій зона концентрації напружень зміщується від контуру отвору на стик між оболонкою і включенням у разі $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2; 2E_0 / 5; E_0 / 3$, тут зміни зони локації концентрації напружень не відбувається.

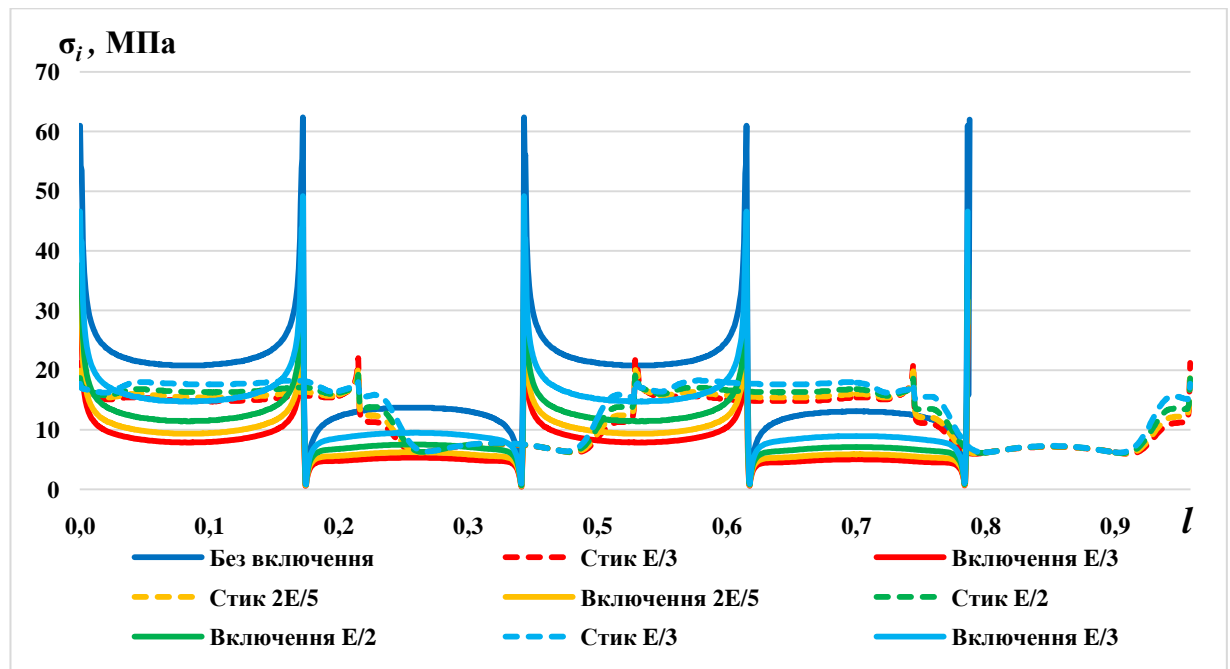


Рис. 4.13 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,125a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Таблиця 4.7 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$

$E_{\text{вкл}}$	ККН	δ , %
$2E_0 / 3$	4,23	-21,9
$E_0 / 2$	3,42	-36,9
$2E_0 / 5$	2,89	-47,6
$E_0 / 3$	2,51	-53,7

У табл. 4.8 наведено результати порівняльного аналізу числового розрахунку ККН для циліндричних і зрізаних конічних оболонок з малими квадратними отворами та стрічковими включеннями різної ширини $h_{\text{вкл}} = a / 4, a / 8, a / 16$ в залежності від зміни величини модуля пружності.

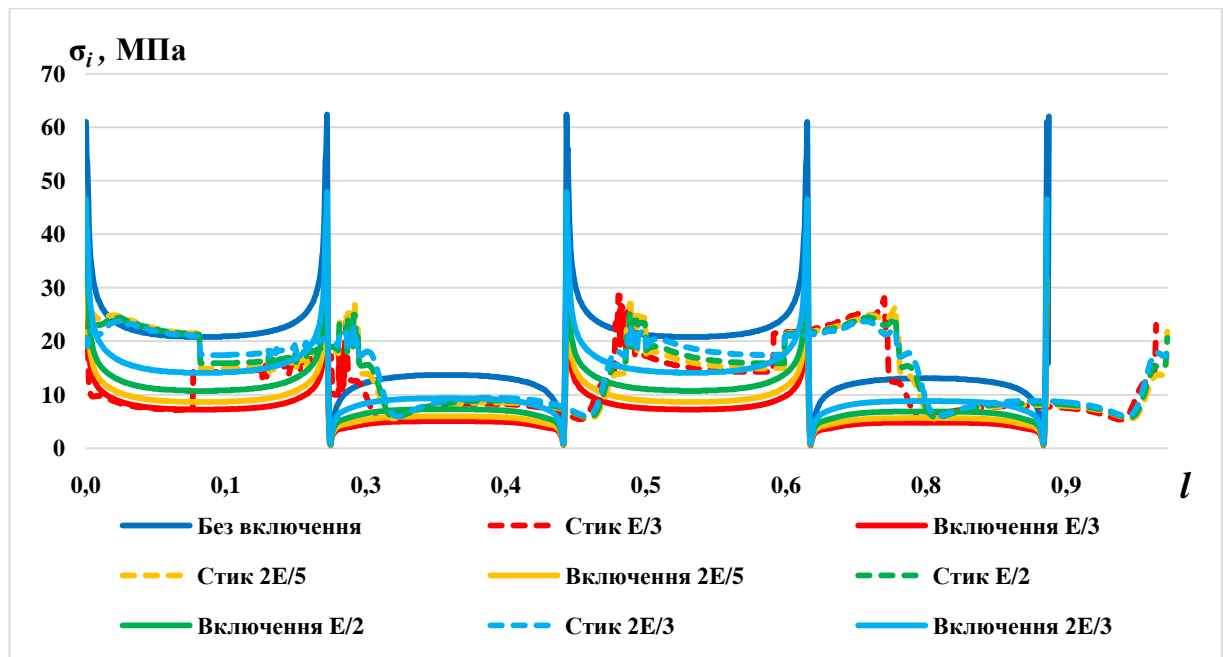


Рис. 4.14 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в кінцевій оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{вкл}} = 0,0625a$ для різних варіантів $E_{\text{вкл}}$

Таблиця 4.8 – Порівняльна таблиця ККН для циліндричних і кінцевих оболонок в залежності від величини модуля пружності та ширини включення

Оболонка	Модуль пружності включення, $E_{\text{вкл}}$	ККН		
		Ширина включення, $a/4$	Ширина включення, $a/8$	Ширина включення, $a/16$
Циліндрична	$2E_0/3$	4,32	4,25	4,21
	$E_0/2$	3,52	3,44	3,40
	$2E_0/5$	2,99	2,90	2,87
	$E_0/3$	2,61	2,52	2,49
Кінцева	$2E_0/3$	4,36	4,35	4,23
	$E_0/2$	3,56	3,52	3,42
	$2E_0/5$	3,02	2,97	2,89
	$E_0/3$	2,63	2,59	2,51

Аналіз даних табл. 4.8 показує, що для обох типів оболонок найкращій результат з точки зору зменшення величини ККН одержано за таких параметрів включення: $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$ та $h_{\text{вкл}} = a / 16$. При цьому зменшення величини ККН у порівнянні з ККН для відповідної оболонки без включення складає на $\sim 54 \%$. Зона концентрації напружень знаходиться в околі кутових точок отвору.

У разі відповідних оболонок з круговим отвором найкращій результат дають такі параметри включення: $E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$ та $h_{\text{вкл}} = r_0 / 2$. При цьому величину ККН вдається зменшити для обох типів оболонок на $\sim 35 \%$, зона концентрації напружень залишається в околі отвору з певним перерозподілом в бік межі між оболонкою і включенням [28].

Аналіз одержаних результатів для обох типів оболонок з квадратними отворами показує, що чим «м'якше» матеріал включення і чим менше його ширина, тим меншою є величина ККН.

При розрахунках НДС і визначенні ККН для конічних оболонок з квадратними отворами, так само, як і з круговими, виявляється, що проблема зниження концентрації напружень навколо отвору не є єдиною проблемою для таких оболонок. Завдяки їх геометрії виникає так званий ефект «конічності», який потребує окремого врахування для визначення критичних напружень на торцях. Використання навколо отворів включень з відповідними механічними і геометричними параметрами дає змогу зменшити напруження в зоні локальних концентраторів. Зони поблизу торців, де спостерігається ефект «конічності», потребують окремої уваги та проведення додаткових досліджень. Щоб уникнути або пом'якшити цей ефект, можна розглянути, наприклад, такі підходи:

- *оптимізація геометрії оболонки*: модифікація форми оболонки, зменшення кута нахилу конусу та ін.;
- *оптимізація розмірів та розташування отворів*: врахування специфіки розмірів, форми та розташування отворів;
- *використання додаткових підкріплень або матеріалів*: застосування додаткових елементів конструкції або використання матеріалів з покращеними механічними властивостями у зоні «конічності»;

- *вдосконалення методів аналізу*: покращення числових методів аналізу для більш точного моделювання поведінки конічних оболонок, враховуючи їхні геометричні особливості та зменшуючи вплив ефекту «конічності» на розподіл напружень.

З метою верифікації результатів розрахунків і знаходження раціональних параметрів скінченноелементної сітки у випадку зрізаної конічної оболонки з прямокутним отвором додатково було проведено числовий розрахунок НДС пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором, розташованим на деякій відстані від її основ. Досліджено вплив геометричних і механічних параметрів оточуючого отвір стрічкового включення на концентрацію напружень в пластині. Здійснено порівняльний аналіз результатів у разі зміщення отвору відносно основи, зміни жорсткості матеріала включення та його ширини. Проаналізовано умови зниження концентрації напружень навколо отвору [31].

Розглядається НДС тонкої пружної ізотропної кусково-однорідної трапецієвидної пластини (рис. 4.15) товщини h , висоти H ($H=AD$), з довжинами верхньої і нижньої основ r_1 , r_2 відповідно, з прямокутним отвором розмірами $a \times b$ ($BC=a$), розташованим: 1) посередині пластини ($AB=CD$); 2) біля верхньої основи, на відстані $1,5a$ відносно центру пластини вгору ($AB<CD$); 3) біля нижньої основи, на відстані $1,5a$ відносно центру пластини вниз ($AB>CD$). Навколо отвору розташоване стрічкове включення ширини t із іншого матеріалу, ніж матеріал пластини. Пластина знаходиться під дією одновісних розтягувальних врівноважувальних зусиль P_1 і P_2 .

Вважаємо, що на границі матриці і включення задано умови жорсткого зчеплення, включення знаходиться у площині пластини і має з нею однакову товщину. Як і раніше, включення будемо вважати «жорстким», якщо величина $k = E_{\text{вкл}}/E_{\text{пл}} > 1$, і «м'яким», якщо $k < 1$. Тут $E_{\text{вкл}}$ – модуль пружності включення, $E_{\text{пл}}$ – модуль пружності пластини.

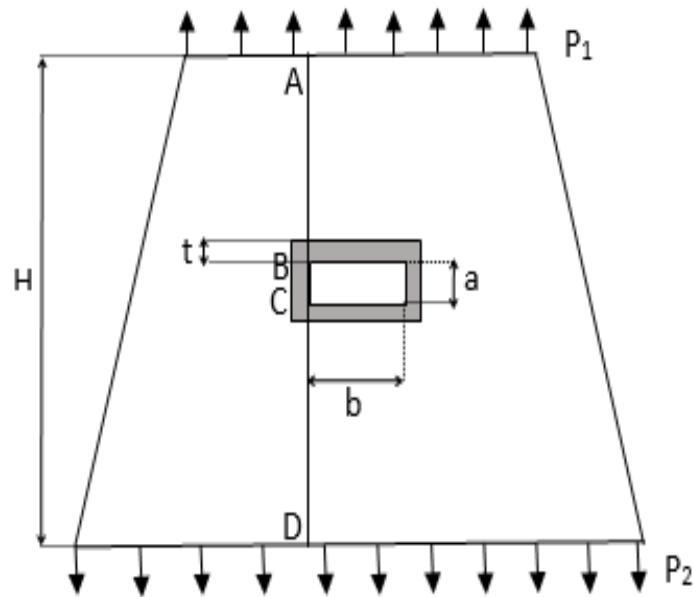


Рис. 4.15 – Трапецієвидна пластина з прямокутним отвором і стрічковим включенням

Розрахунки проведено для пластини з такими розмірами: $r_1/h=111,12$; $r_2/h=147,4$; $H/h=148,67$; $a/h=11,1$; $b/h=14,81$, де $h=1$ мм. Для визначеності обрано такі матеріали: 1) для пластини – сталь (модуль пружності $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,28$; границя текучості $\sigma_T=620,42$ МПа; границя міцності $\sigma_B=723,8$ МПа); 2) для включення: а) алюміній ($E=70$ ГПа, $\nu=0,33$; $\sigma_T=27,57$ МПа; $\sigma_B=68,9$ МПа); б) молибден ($E=320$ ГПа, $\nu=0,38$; $\sigma_T=325$ МПа; $\sigma_B=500$ МПа). Ширина стрічкового включення t варіювалась: а) $5h$; б) $2,5h$. Осьове розтягувальне навантаження: $P_1(x,y) = (p_{1x}(x,y), p_{1y}(x,y))^T$, $P_2(x,y) = (p_{2x}(x,y), p_{2y}(x,y))^T$, де $p_{kx}/h = 0,1\tilde{p}_{kx}$ МПа, $k=1, 2$; $\tilde{p}_{2x} = 1000$; $\tilde{p}_{1x} = \tilde{p}_{2x}r_2/r_1$; $p_{ky}(x,y)=0$ [30]. Вибір матеріалів носить умовний характер.

Значення ККН та відповідні деформації для випадку пластини без включення наведено у табл. 4.9. В розрахунках номінальне напруження дорівнює $0,105$ МПа.

Таблиця 4.9 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з отвором без включення

Розташування отвору	σ_i^{max} , МПа	ε_i^{max} , 10^{-6}	ККН
1 (AB=CD)	0,78	2,248	7,4
2 (AB<CD)	0,82	2,444	7,8
3 (AB>CD)	0,74	2,086	7,0

Характер зміни концентрації напружень уздовж перерізу AD в пластині з отвором без включення в залежності від розташування отвору показано на рис. 4.16.

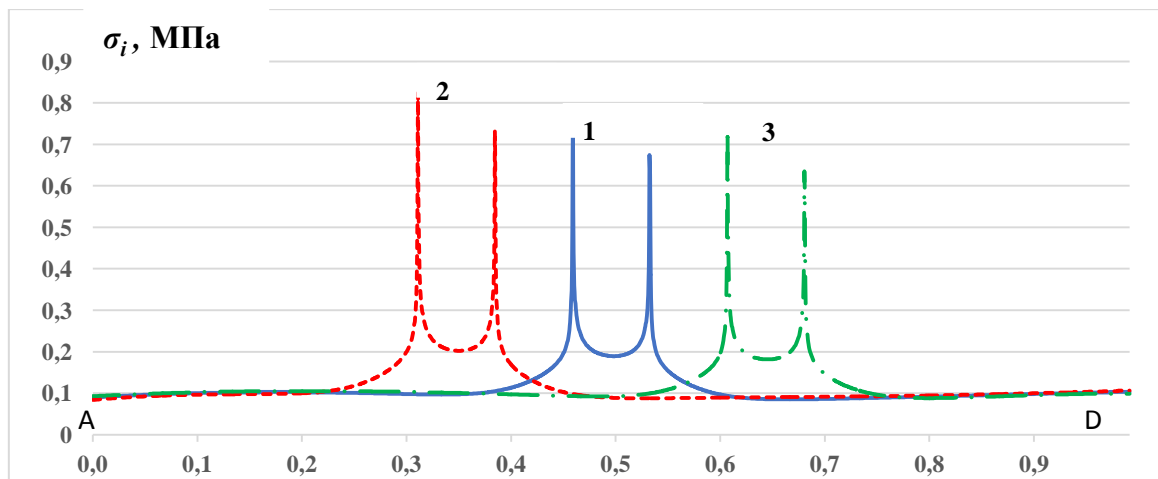


Рис. 4.16 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж перерізу AD в пластині з отвором без включення:
1 – $AB=CD$; 2 – $AB<CD$; 3 – $AB>CD$

Тут і далі на рисунках по осі абсцис відкладено нормалізовану відстань $0 \leq l \leq 1$ уздовж перерізу AD пластини: $l = x/H$, $x \in [0, H]$, де H – висота трапецієвидної пластини. Дані наведені для трьох варіантів розташування отворів: 1 – посередині трапеції ($AB=CD$), суцільна лінія; 2 – біля верхньої основи ($AB<CD$, $AB/h=46,585$), штрихова лінія; 3 – біля нижньої основи ($AB>CD$, $AB/h=90,985$), штрих-пунктирна лінія.

Рис. 4.17 демонструє характер зміни концентрації напружень уздовж перерізу AD в пластині з отвором і «м'яким» включенням ширини $5h$ в залежно-

сті від розташування отвору. Відповідні значення ККН і максимальні значення інтенсивності деформацій в пластині для цього випадку наведено у табл. 4.10.

Таблиця 4.10 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з отвором і «м'яким» включенням ширини $5h$

Розташування отвору	σ_i^{max} , МПа	ε_i^{max} , 10^{-6}	ККН	δ , %
1 (AB=CD)	0,39	3,285	3,7	-50,0
2 (AB<CD)	0,44	3,936	4,2	-46,5
3 (AB>CD)	0,36	3,322	3,4	-51,0

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для пластини без включення.

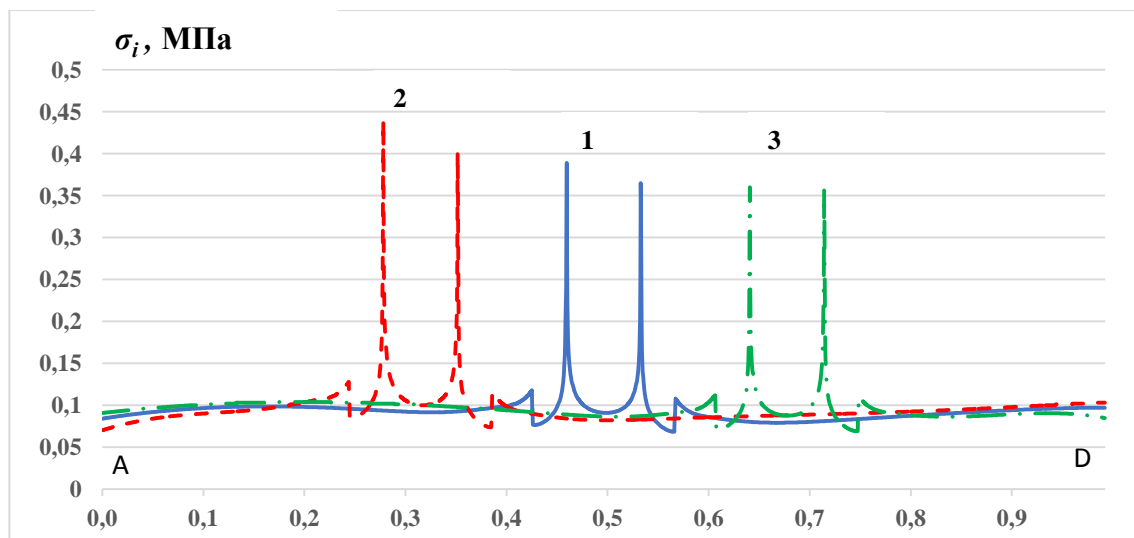


Рис. 4.17 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж перерізу AD в пластині з отвором і м'яким включенням ширини $5h$:

1 – AB=CD; 2 – AB<CD; 3 – AB>CD

У разі «м'якого» включення ширини $2,5h$ характер зміни концентрації напружень уздовж перерізу AD в пластині в залежності від розташування отвору проілюстровано на рис. 4.18. Відповідні ККН і максимальні значення інтенсивності деформацій в пластині для цього випадку подано у табл. 4.11.

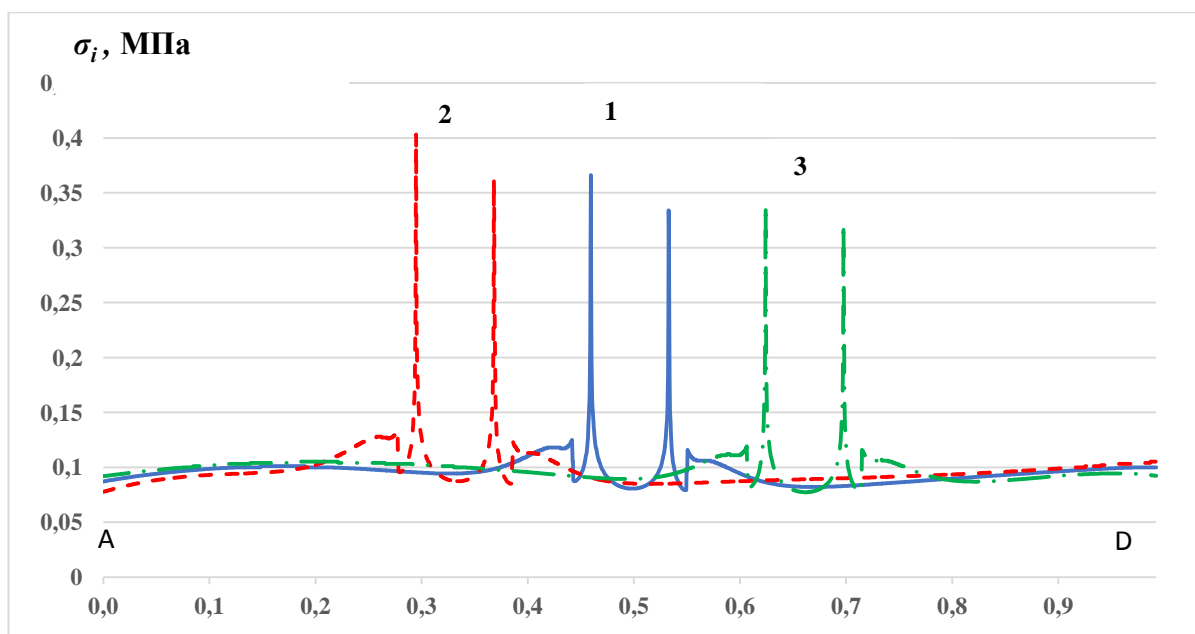


Рис. 4.18 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж перерізу AD в пластині з отвором і «м'яким» включенням ширини $2,5h$:
1 – $AB=CD$; 2 – $AB<CD$; 3 – $AB>CD$

Таблиця 4.11 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з отвором і «м'яким» включенням ширини $2,5h$

Розташування отвору	σ_i^{max} , МПа	ε_i^{max} , 10^{-6}	ККН	δ , %
1 (AB=CD)	0,37	3,217	3,5	-53,0
2 (AB<CD)	0,40	3,549	3,8	-51,0
3 (AB>CD)	0,34	2,988	3,2	-54,0

На рис. 4.19 і рис. 4.20 показано характер зміни концентрації напружень уздовж перерізу AD в пластині з отвором і «жорстким» включенням ширини $5h$ і $2,5h$ відповідно в залежності від розташування отвору. Відповідні ККН і максимальні значення інтенсивності деформацій в пластині для цих випадків наведено у табл. 4.12 і табл. 4.13.

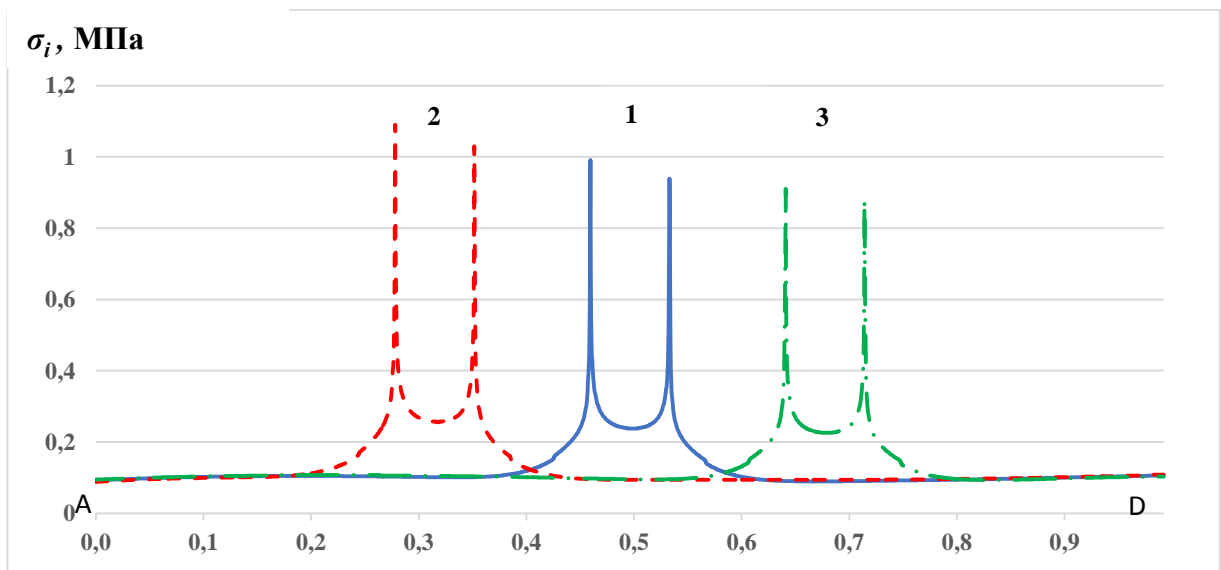


Рис. 4.19 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж перерізу AD в пластині з отвором і жорстким включенням ширини $5h$:
 1 – $AB=CD$; 2 – $AB<CD$; 3 – $AB>CD$

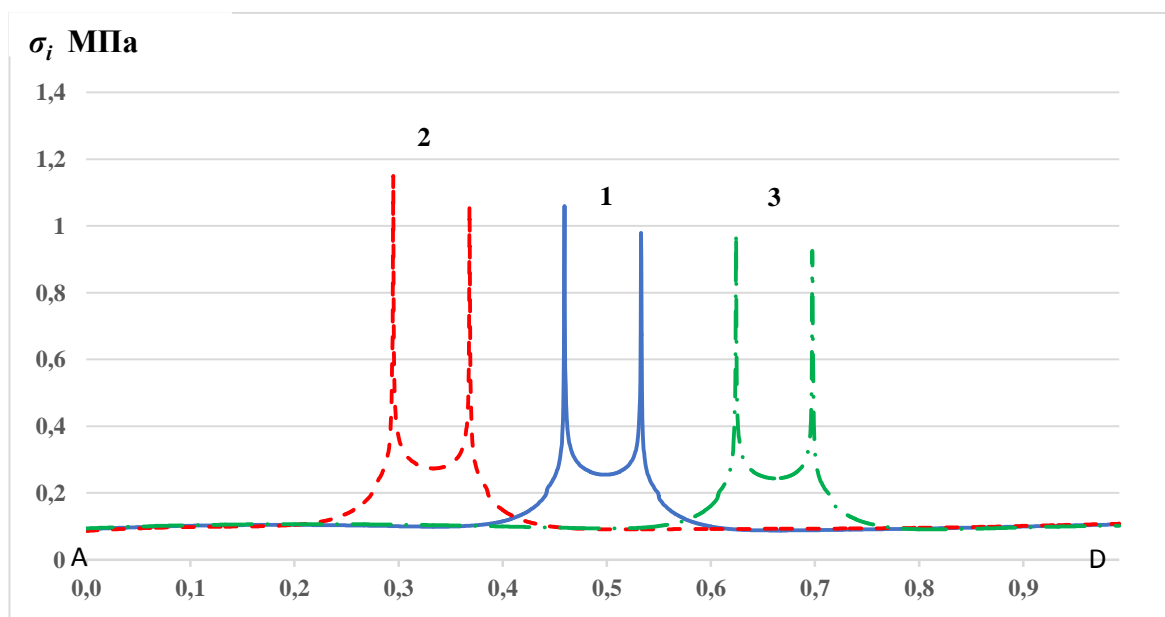


Рис. 4.20 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i уздовж перерізу AD в пластині з отвором і жорстким включенням ширини $2,5h$:
 1 – $AB=CD$; 2 – $AB<CD$; 3 – $AB>CD$

Таблиця 4.12 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з отвором і «жорстким» включенням ширини $5h$

Розташування отвору	σ_i^{max} , МПа	ε_i^{max} , 10^{-6}	ККН	δ , %
1 (AB=CD)	0,99	1,994	9,4	+27,4
2 (AB<CD)	1,09	2,185	10,4	+32,4
3 (AB>CD)	0,91	1,834	8,7	+23,7

Таблиця 4.13 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з отвором і «жорстким» включенням ширини $2,5h$

Розташування отвору	σ_i^{max} , МПа	ε_i^{max} , 10^{-6}	ККН	δ , %
1 (AB=CD)	1,06	2,078	10,1	+36,4
2 (AB<CD)	1,15	2,262	10,9	+39,7
3 (AB>CD)	0,98	1,928	9,3	+33,4

Таким чином, аналіз наведених у таблицях даних свідчить, що наявність «жорсткого» включення призводить до зростання величини ККН більш ніж на $\sim 33\%$, а «м'якого» дає змогу її зменшити майже на $\sim 50\%$.

Картини розподілу інтенсивності напружень і деформацій в пластині з центрально розташованим отвором і «м'яким» включенням ширини $2,5h$ подано на рис. 4.21.

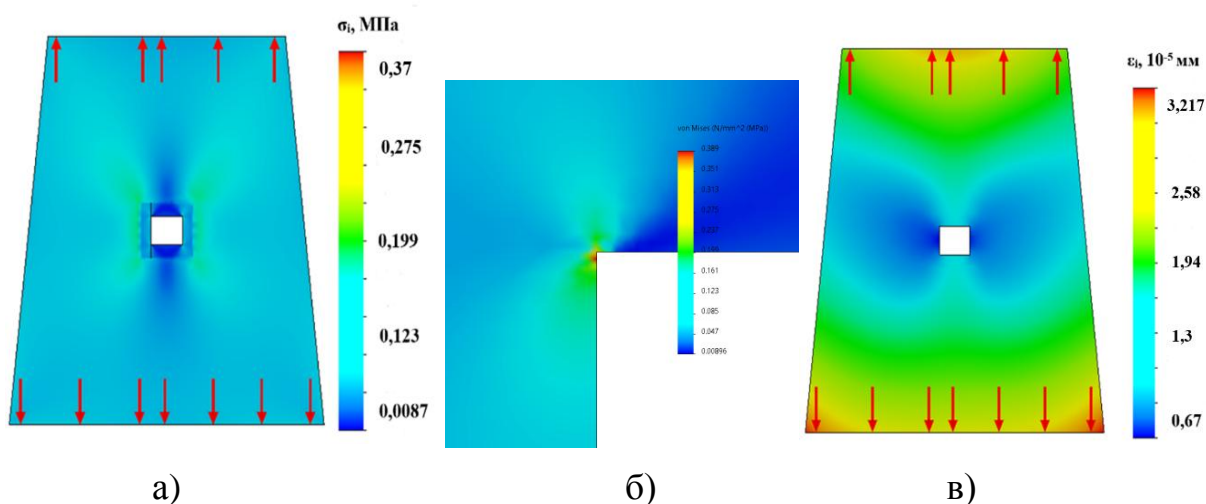


Рис. 4.21 – Компоненти НДС трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і «м'яким» включенням ширини $2,5h$:
 а) інтенсивність напружень; б) інтенсивність напружень в околі отвору;
 в) інтенсивність деформацій

Отже, проведений скінченноелементний аналіз концентрації напружень в тонкій ізотропній трапецієвидній пластині з прямокутним отвором і оточуючим його стрічковим включенням з іншого матеріалу показав, що за наявності включення із більш м'якого матеріалу вдається зменшити ККН в ~ 2 рази у порівнянні з пластиною без включення. У цьому випадку має місце механічний ефект: відбувається стрибкоподібний перерозподіл напружень в зоні переходу від матриці до «м'якого» включення (рис. 4.16, рис. 4.17). У разі «жорсткого» включення перерозподіл напружень у цій зоні відбувається плавно, без стрибків. На величину максимальних напружень в пластині також впливає місце розташування отвору: спостерігається зростання ККН при наближенні отвору до верхньої основи трапеції і зменшення – при його наближенні до нижньої.

Встановлені в ході обчислювальних експериментів параметри адаптивної скінченноелементної сітки застосовано при розв'язанні відповідної задачі для зрізаної конічної оболонки з отвором.

Висновки до розділу 4

У результаті числового дослідження, проведеного за допомогою МСЕ стосовно впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на ККН в тонких циліндричних і конічних оболонках з малими квадратними отворами, одержано певні сполучення раціональних параметрів включень, що дають змогу зменшити величину ККН на $\sim 54\%$. На відміну від відповідних оболонок з круговими отворами, де в залежності від величини механічних і геометричних параметрів має місце механічний ефект, пов'язаний зі зміною локації зони концентрації напружень і значним перерозподілом максимальних напружень від контуру отвору у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення, у разі наявності квадратних отворів, цей ефект не спостерігається. Концентрація напружень залишається в околі кутових точок отвору, перерозподіл напружень в зоні концентрації у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення є незначним.

Отже, раціональними параметрами включень за розглянутих варіантів їх сполучень у випадку *циліндричних і конічних оболонок з квадратним отвором* можна вважати такі: *геометричні* (ширина включення) – $h_{\text{вкл}} = a / 16$ (a – довжина сторони квадратного отвору), *механічні* (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона) – $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$; $\nu = 0,3$. Це дозволило для обох типів оболонок зменшити ККН на $\sim 54\%$. Зона концентрації напружень знаходиться в околі кутових точок отвору.

У додатку Б наведено, як додаткову ілюстрацію проведених розрахунків НДС оболонок, картини розподілу інтенсивності напружень у циліндричних і зрізних конічних оболонках з круговим і квадратним отворами для випадку «м'яких» включень ($k < 1$) різної ширини і механічних властивостей.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного комп'ютерного моделювання і числового дослідження концентрації напружень навколо отворів в тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і зрізаних конічних оболонках з різними отворами (круговими, квадратними) з метою встановлення раціональних параметрів підкріплювальних елементів отворів, що дають змогу зменшити концентрацію напружень навколо них, одержано такі наукові результати:

- розроблено математичні розрахункові моделі для визначення НДС пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з неоднорідностями у вигляді отворів і включень з урахуванням специфіки їх геометрії;
- розроблено методику визначення параметрів НДС структурно неоднорідних тіл з різними отворами і включеннями навколо них при пружному деформуванні на основі використання методу скінченних елементів;
- здійснено порівняльний аналіз результатів комп'ютерного моделювання поведінки пластинчато-оболонкових елементів конструкцій (циліндричної і конічної форми) за наявності різних отворів (кругових, квадратних) і включень (кільцевих, стрічкових) з урахуванням механічних властивостей матеріалу і специфіки їх геометрії;
- визначено компоненти НДС та коефіцієнт концентрації напружень тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонок з різними отворами і включеннями навколо них при варіюванні механічних і геометричних параметрів включень з вивченням впливу включень на величину коефіцієнта концентрації напружень;
- встановлено та обґрунтовано раціональні параметри включень, що надають змогу зменшити концентрацію напружень в оболонках навколо отворів; виявлено *механічні ефекти* щодо зміни локації зони концентрації

напружень в залежності від виду отворів і сполучення параметрів включень, а саме:

- для оболонок з круговими отворами за певних сполучень механічних і геометричних параметрів включень відбувається зміна зони локації концентрації напружень і значний перерозподіл максимальних напружень від контуру отвору у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення;

- для оболонок з квадратними отворами наявність включень навколо отвору не призводить до вказаного ефекту. Концентрація напружень зберігається в околі кутових точок отвору, перерозподіл напружень в зоні концентрації у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення є незначним;

- для обох типів оболонок наявність «жорстких» включень призводить до збільшення величини коефіцієнта концентрації напружень, наявність «м'яких» включень, навпаки, до її зменшення: чим «м'якше» матеріал включення, тим більшою є величина перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з'єднання включення із матеріалом оболонки. Чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення у разі наявності кругового отвору;

- встановлено закономірності зміни розподілу напружень і деформацій в оболонках з різними отворами в залежності від їх конфігурації, виду, розмірів і властивостей матеріалу включень;

- здійснено аналіз зміни характеру розподілу напружень в околі отворів за наявності включень та впливу матеріалу включення на величину коефіцієнта концентрації напружень, розроблено рекомендації щодо застосування включень в тонкостінних структурно неоднорідних циліндричних і конічних оболонках з різними отворами, що дозволяє впливати на їх НДС з метою підвищення міцності елементів конструкцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Авдонин А. С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М., 1969. – 402 с.
2. *Авраменко О. О.* Аналіз напружено-деформованого стану нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини під дією нерівномірного навантаження // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя. – 2011. – Вип. 2. – С. 103–107.
3. *Алямовский А. А.* SolidWorks // COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.
4. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
5. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с.
6. *Араманович И. Г.* О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. // Доклады АН СССР. – 1995. – Т. 104, № 3. – С. 638–642.
7. *Баженов В. А., Цихановський В. К., Кислоокій В. М.* Метод скінчених елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К: КНУБА, 2000. – 387 с.
8. *Балабух Л. И., Алфутков Н. А., Усюкин В. И. и др.* Строительная механика ракет. – М.: Высш. школа, 1984. – 391 с.
9. *Беляев В. А., Журавлев Ю. А., Ильясов Р. И.* Исследование влияния “непроклеев” на концентрацию напряжений в клеевых соединениях // Концентрация напряжений в элементах авиационных двигателей. – 1979. – № 1. – С. 51–56.
10. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
11. *Биргер И. А.* Стержни, пластинки, оболочки. – М.: Физматлит, 1992. – 392 с.

12. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – Т. 1. – 532 с.
13. *Бочкарев С. А., Матвеев В. П.* Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – № 3. – С. 25–33.
14. *Вайнберг Д. В.* Концентрация напряжений в пластинках около отверстий. – К.: Техніка, 1969. – 220 с.
15. *Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д.* Расчет пластин. – К.: Будівельник, 1970. – 436 с.
16. *Варвак П. М., Базун И. М., Городецкий А. С. и др.* Метод конечных элементов. – К.: Вища шк., 1981. – 176 с.
17. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
18. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М., 1988. – 272 с.
19. *Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Севрюков В. И., Янютин Е. Г.* Скоростное деформирование элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1989. – 190 с.
20. *Галимов К. З., Паймушин В. Н.* Теория оболочек сложной геометрии (геометрические вопросы теории оболочек). – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 164 с.
21. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
22. *Гарт Е. Л.* Застосування проекційно-ітераційної модифікації методу скінченних елементів до дослідження пружного багатоплощадного тіла // Вісн. Львівського ун-ту. Сер.: Прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 75–81.
23. *Гарт Е. Л.* Основи варіаційного числення. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2009. – 176 с.

24. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56–61.

25. Гарт Э. Л., Борисовская И. В. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 2. – С. 44–51.

26. Гарт Е. Л., Гудрамович В. С., Марченко О. А. Вплив кільцевого включення на напружено-деформований стан сферичної оболонки з круговим отвором при дії рівномірного внутрішнього тиску // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2019. – Вип. 29. – С. 53–64.

27. Гарт Е. Л., Петров І. І., Семенча О. О., Терьохін Б. І. Числовий аналіз взаємного впливу двох кругових та видовжених еліптичних отворів пружної пластини в залежності від заданих граничних умов // Математичні проблеми технічної механіки – 2018: Матеріали Міжнародної наукової конференції (16–19 квітня 2018 р.). – Кам'янське, Дніпро: Дніпровський держ. техн. ун-т, 2018. – С. 39.

28. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Комп'ютерне моделювання впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних та конічних оболонках з круговими отворами // Технічна механіка. – 2023. – №4. – С. 60–75.

29. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і конічних оболонок з круговими отворами // Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2022: Матеріали Міжнародної наукової конференції (12–14 грудня, 2022, Київ, Україна). – Т. 2. – Київ, 2022. – С. 30–32.

7. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Скінченноеlementный аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями // Сучасні проблеми механіки та

математики – 2023: зб. наук. праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – С. 271–272.

30. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецевидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 43–54.

31. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Числовий аналіз впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних і конічних оболонках з прямокутними отворами // Технічна механіка. – 2024. – № 1. – С. 66–82.

32. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Числовий аналіз напружено-деформованого стану пружних циліндричних і конічних оболонок з круговими та прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2023. – Вип. 36. – С. 25–39.

33. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Вплив форми, розмірів та розташування деконцентраторів напружень на напружено-деформований стан пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами // Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019: Матеріали Міжнародної наукової конференції (15–18 квітня 2019 р.). – Дніпро, Кам'янське : Дніпровський держ. техн. ун-т, 2019. – С. 43–44.

34. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану пружної трапецевидної пластини з прямокутним отвором // Results of modern scientific research and development: Proceedings of VIII International Scientific and Practical Conference (October 17–19, 2021). – Madrid, Spain. – P. 179–186.

35. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Посібник до вивчення дисципліни «Прикладні обчислювальні технології» // Дніпро: Ліра, 2023. – 92 с.

36. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Influence of inclusions around a rectangular hole on the stress concentration factor in a trapezoidal plate // EJONS: Book of Abstract of the 13th International Conference on Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences (October 26-27, 2021). – Cappadocia, Turkey. – P. 154–155.

37. *Гарт Е. Л., Терьохін Б. І.* Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2019. – Вип. 30. – С. 19–32.

38. *Голда Ю. Л., Преображенский И. Н., Штукарев В. С.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 1. – С. 27–32.

39. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1989. – 222 с.

40. *Горишков А. Г., Пожуев В. И.* Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. – М.: Изд-во МАИ, 2012. – 136 с.

41. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.

42. *Григоренко Я. М., Будаков В. Д., Григоренко О. Я.* Розв'язування задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.

43. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей К. : Аккадемпериодика, 2006. 472 с.

44. *Григоренко Я. М., Мольченко Л. В.* Теорія пластин та оболонок. К., 1993. 232 с.

45. *Грилицкий Д. В., Попович Б. И.* Смешанная граничная задача термоупругости для анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1971. – Вып.3. – С. 45–50.

46. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шultzга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т5. Электроупругость; отв. ред. А. Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
47. *Гудрамович В. С.* Влияние отверстий на предельное состояние элементов тонкостенных металлических оболочечно-пластинчатых конструкций // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2014. – Вип. 18, т. 2. – С. 47–65.
48. *Гудрамович В. С., Дзюба А. П., Селиванов Ю. М.* Методы голографической интерферометрии в механике неоднородных тонкостенных конструкций. – Днепропетровск: Лира, 2017. – 286 с.
49. *Гудрамович В. С., Дисковский И. А., Макеев Е. М.* Тонкостенные элементы зеркальных антенн. – К.: Наук. думка, 1986. – 152 с.
50. *Гудрамович В. С., Деменков А. Ф.* Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 176 с.
51. *Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Панченко С. В.* Напружено-деформований стан пластин з підкріпленнями прямокутними отворами різної орієнтації відносно напрямку дії зусилля розтягу // Технічна механіка. – 2018. – №4. – С. 82–89.
52. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А.* Численное моделирование поведения упругих конструкций с локальными подкрепляющими элементами // Космическая техника. Ракетное вооружение : науч.-техн. сб. / КБ "Південне" ім. М. К. Янгеля", держ. п-во. Днепр: [б. и.], 2019. – Вип. 2 (118). – С. 25–34
53. *Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М.* Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів : монографія. Львів: Простір-М, 2017. 492 с.
54. *Гузь А. Н., Луговой П. З., Шultzга Н. А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями. – К.: Наук. думка, 1976. – 164 с.
55. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища школа, 1989. – 352 с.

56. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др.* Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
57. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. – К.: Наук. думка, 1970. – 324 с.
58. *Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др.* Концентрация напряжений. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с. Механика композитов: В 12-ти т.: Т. 7.
59. *Дзюба А. П., Пацюк А. Г.* Експериментальне моделювання процесу виникнення тріщини на контурі отвору з включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2021. Вип. 33. – С. 55–65.
60. *Дзюба А. П., Прокопало Є. Ф., Дзюба П. А.* Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – 224 с.
61. *Ерофеев В. П., Тюпышев Ю. А., Тимофеев Б. Т., Воронин А. Я.* О механическом поведении косой мягкой прослойки при растяжении (сжатии) в условиях запрещения поперечных смещений соединяемых ею твердых элементов // Вопр. свароч. пр-ва. – Челябинск, 1983. – С. 29–33.
62. *Євтушенко О. О., Опанасович В. К., Сорокатию Ю. І.* Аналіз умов на торцях тонкого пружного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1991. – Т. 27, № 2. – С. 85–90.
63. *Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 438 с.
64. *Кантор Б. Я., Катаржнов С. И.* Вариационно-сегментный метод в нелинейной теории оболочек. – К.: Наук. думка, 1982. – 136 с.
65. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
66. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.

67. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 282 с.
68. *Кит Г. С., Кривицун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
69. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и уступами. – К.: Вища школа, 1975. – 228 с.
70. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – К.: Наук. думка, 1979. – 184 с.
71. *Кузьменко В. И., Балакин В. Ф.* Решение на ЭВМ задач пластического деформирования: Справочник. – К.: Техника, 1990. – 136 с.
72. *Кукуджанов В. Н.* Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 2008. – 212 с.
73. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 264 с.
74. *Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Ин Юре, 2003. – 540 с.
75. *Левин В. М.* Железобетонные башенные сооружения. Исследования, расчет. – Макеевка: ДонГАСА, 1999. – 230 с.
76. *Леонов М. Я.* Механика деформаций и разрушения. – Фрунзе: Илим, 1981. – 246 с.
77. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. – М.: Гостехиздат, 1947. – 252 с.
78. *Львов Г. И.* Осесимметричные контактные задачи упругопластического деформирования оболочек вращения // Динамика и прочность машин. – 1980. – Вып. 31. – С. 82–99.
79. *Ляшенко Б. А., Кузема Ю. А., Дигам М. С.* Упрочнение поверхности металлов покрытиями дискретной структуры с повышенной адгезионной

и когезионной стойкостью. – К.: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 1984. – 58 с.

80. *Мавлютов Р. Р.* Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. – М.: Наука, 1981. – 140 с.

81. *Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Назаров Б. А.* Об изменении потенциальной энергии деформации при вариации области вблизи углового концентратора напряжений. – Л.: ЛФИМаш, 1989. – 28 с.

82. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленьк В. М.* Нагрівання напівпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 34–40.

83. *Милейковский И. Е., Трушин С. И.* Расчет тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1989 – 200 с.

84. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. – М. Наука, 1966. – 432 с.

85. *Мовчан Н. В., Назаров С. А.* Асимптотическое поведение напряженно-деформированного состояния вблизи острых включений // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 1. – С. 48–51.

86. *Можаровський М. С.* Теорія пружності, пластичності і повзучості. – К.: Вища школа, 2002. – 308 с.

87. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М.* Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.

88. *Моссаковський В. І., Кваши О. М.* Концентрація та розрахунок люків, які не викликають напружень в сферичних оболонках // Прикл. механіка. – 1954. – Т. 5, № 4. – С. 372–378.

89. *Моссаковский В. И., Никитин П. И. и др.* Прочность ракетных конструкций. – М.: Высш. школа, 1990. – 359.

90. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

91. *Назарчук З. Т., Скальський В. Р.* Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: наук.-техн. посіб.: у 3 т. Т. 1. Теоретичні основи методу акустичної емісії; НАН України, Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка. – К.: Наук. думка, 2009. – 287 с.
92. *Новожилов В. В.* Вопросы механики сплошной среды. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
93. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
94. *Павленко І.В.* Метод скінченних елементів в задачах опору матеріалів і лінійної теорії пружності. – Суми: Вид-во СумДУ, 2006. – 147с.
95. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. В.* Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие в 4-х т. / Т. 1 : Основы механики разрушения материалов. – К. : Наук. думка, 1988. – 486 с.
96. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
97. *Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К. и др.* Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с.
98. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
99. *Победра Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
100. *Подгайский М. С.* Термическое армирование проката // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1992. – № 10. – С. 20–23.
101. *Подстригач Я. С.* Напряжения около двух неравных круговых отверстий в плоском поле // Научн. зап. Ин-та машин и автомат. АН УССР. – 1955. – Т. 4, № 3. – С. 217–219.
102. *Пожуєв В. І., Пожуєв А. В.* Нестационарні процеси в пластинках і оболонках, які взаємодіють з тривимірними пружними середовищами. – Запоріжжя: Кругозір, 2015. – 228 с.

103. *Пошивалов В. П., Данієв Ю. Ф.* Надійність і безпека стартових комплексів ракет-носіїв // Технічна механіка. – 2023. – № 2. – С. 13–20.
104. *Преображенский И. Н., Цурпал И. А.* Вырезы в несущих конструкциях. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.
105. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
106. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с.
107. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
108. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
109. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
110. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
111. *Савин Г. Н., Тульчий В. И.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. – К.: Наукова думка, 1971. – 268 с.
112. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
113. *Сало В. А.* Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ ХПИ. – 2003. – 216 с.
114. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
115. *Сахаров А. С., Кислокий В. Н., Кирический В. В., Альтенбах М.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
116. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
117. *Стеблянко П. А.* Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – К.: Наук. думка, 1998. – 304 с.

118. *Стеблянюк П.О., Петров О.П.* Нелінійна модель поведінки псевдо-пружно-пластичних сплавів // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2023. – Вип. 36. – С. 127–141.

119. *Сторожук Є. А., Максимюк В.А., Чернищенко І.С.* Концентрація напружень в області прямокутного отвору на бічній поверхні нелінійно-пружної ортотропної конічної оболонки // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2019. – № 11. – С. 41–48.

120. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

121. *Тихонов В. А.* Расчет напряжений возле включений некруговой формы // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1974. – Вып. 185. – С. 66–72.

122. *Чернобрышко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. В. и др.* Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке // Технічна механіка. – 2015. – №1. – С. 15–29.

123. *Черных К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. – М.: Наука, 1996. – 288 с.

124. *Чернышенко И. С.* Нелинейные задачи для сферической оболочки с подкрепленным отверстием // Прикл. механика. – 1968. – Т. 4, № 5. – С. 152–155.

125. *Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А.* Механика композитов: в 12 т. Т 7. Концентрация напряжений / Под общ. ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами). – К.: АСК, 1998. – С. 212–249.

126. *Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В.* Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 3. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с.

127. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Изд-во Львовск. ун-та, 1960. – 248 с.

128. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations. – New York: Springer, 2012. – 345 p.
129. *Boffi D., Brezzi F., Fortin M.* Mixed finite element methods and applications. – New York: Springer, 2013. – 692 p.
130. *Chen Y. Z., Chen R. S.* Interaction between curved crack and elastic inclusion in an infinite plate // *Archive of Appl. Mechanics*. – 1997. – Vol. 67, No. 8. – P. 566–575.
131. *Chen Z. X.* Finite element methods and their applications. – New York: Springer, 2005. – 424 p.
132. *Darvizeh M., Haftchenari H., Darvize A., Ansari R., Sharma C. B.* The effect of boundary conditions on the dynamic stability of orthotropic cylinders using a modified exact analysis // *Composite Structures*. – 2006. – Vol. 74. – P. 495–502.
133. *Duong C. N., Yu J.* Analysis of a plate containing a polygon-shaped inclusion with a uniform eigencurvature // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 70, No. 3. – P. 404–407.
134. *Eslami M. R.* Finite element methods in mechanics. – New York: Springer, 2014. – 372 p.
135. *Gong S. X., Meguid S. A.* On the elastic fields of an elliptical inhomogeneity under plane deformation // *Math. and Phys. Sciences*. – 1993. – Vol. 443, No. 1919. – P. 457–471.
136. *Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // *Materials Science*. – 2017. – Vol. 52, iss. 6. – P. 768–774.
137. *Han X., Xu D., Liu G. R.* Transient responses in a functionally graded cylindrical shell to a point load // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 251, Iss. 5. – P. 783–805.
138. *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // *J. Math. Sci.* – 2010. – Vol. 167, Iss. 1. – P. 76–88.

139. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Application of the projection-iterative scheme of the method of local variations to solving stability problems for thin walled shell structures under localized actions // *Strength of Materials*. – 2018. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 852–858.

140. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // *J. Math. Sci.* – 2021. – Vol. 254, No. 1. – P. 21–38.

141. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // *Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 108. – P. 77–86.

142. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // *J. Appl. Math. Mech.* – 2016. – Vol. 80, Iss. 2. – P. 156–163.

143. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2014. – Vol. 203, No. 1. – P. 55–69.

144. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion // *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. – 2021. – Vol. 29, Iss. 1. – P. 42–53.

145. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material // *Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 63–80.

146. *Hua L., Lam K. Y.* Orthotropic influence on frequency characteristics of a rotating composite laminated conical shell by the generalized differential quadrature method // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – P. 3995–4015.

147. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // *Int. Appl. Mechanics*. – 2006. – Vol. 43, No. 12. – P. 1323–1355.

148. *Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Yu. F., Hart E. L.* Development of the Normative Framework Methodology for Justifying the Residual Resource of Starting Buildings' Constructions of Space Launch Vehicles // *Strength of Materials*. – 2019. – Vol. 51, Iss. 3. – P. 1–8.

149. *Hudramovich V. S.* Numerical simulation of nonlinear contact interaction between shell – structures and supports (stamps) of different types // *Progress and Trends in rheology* / Ed. I. Emry, Darmstadt. – Springer, 1998. – P. 351–352.

150. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // *Strength of Materials*. – 2013. – Vol. 45, No. 1. – P. 1–9.

151. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Marchenko O. A.* Reinforcing Inclusion Effect on the Stress Concentration within the Spherical Shell Having an Elliptical Opening Under Uniform Internal Pressure // *Strength of Materials*. – 2020. – Vol. 52, No. 6. – P. 832–842.

152. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Ryabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2013. – Vol. 78, № 1. – P. 181–197.

153. *Kushnir R., Yasinskyy A., Tokovyy Yu., Hart E.* Inverse thermoelastic analysis of a bi-material cylinder with interfacial friction // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, No. 2657. – P. 1–12.

154. *Loboda V., Shevelova N., Khodanen T., Lapusta Y.* An interaction of electrically conductive and electrically permeable collinear cracks in the interface

of piezoelectric materials // *Archive of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 92 (5). – P. 1465–1480.

155. *Long Y.-Q., Cen S., Long Z.-F.* Advanced finite element method in structural engineering. – New York: Springer, 2009. – 706 p.

156. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1982. – 494 p.

157. *Murthy M. V. V.* Stress around an elliptic hole in a cylindrical shell // *Trans. ASME*. – Ser. E. – 1969. – Vol. 36, No. 1. – P. 39–46.

158. *Olevsky E. A.* Theory of sintering: from discrete to continuum // *Materials Sci. and Engineering*. – 1998. – Vol. R23. – P. 41–100.

159. *Patton E. M., Santare M. H.* The effect of a rigid elliptical inclusion on a straight crack // *Int. J. of Fracture*. – 1990. – Vol. 46, No. 1. – P. 71–79.

160. *Ting T. C. T.* Green's functions for an anisotropic elliptic inclusion under antiplane deformations // *In Anisotropy, Inhomogeneity & Nonlinearity in Solid Mechanics*. – 1995. – P. 321–326.

161. *Ventsel E., Krauthammer Th.* Thin plates and shells. Theory, analysis, and applications. – New York – Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001. – 658 p.

162. *Wang X.-F., Hasebe N.* Bending of a thin plate containing a rigid inclusion and a crack // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2000. – Vol. 24. – P. 145–153.

163. *Wu C. H., Chen C. H.* A crack in a confocal elliptic inhomogeneity embedded in an infinite medium // *J. of Appl. Mechanics*. – 1990. – Vol. 57. – P. 91–96.

164. *Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. – New York: Elsevier, 2005. – 632 p.

Додаток А

Список публікацій автора за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 43–54. <https://doi.org/10.15421/4221004>

2. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числовий аналіз напружено-деформованого стану пружних циліндричних і конічних оболонок з круговими та прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2023. – Вип. 36. – С. 25–39. <https://doi.org/10.15421/4223103>

3. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Комп'ютерне моделювання впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних та конічних оболонках з круговими отворами // Технічна механіка. – 2023. – № 4. – С. 60–75. <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.060>

4. Гарт Е. Л., Семенча О. О. Числовий аналіз впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних і конічних оболонках з прямокутними отворами // Технічна механіка. – 2024. – № 1. – С. 66–82. <https://doi.org/10.15407/itm2024.01.066>

Матеріали конференцій

1. Гарт Е. Л., Петров І. І., Семенча О. О., Терьохін Б. І. Числовий аналіз взаємного впливу двох кругових та видовжених еліптичних отворів пружної пластини в залежності від заданих граничних умов // Математичні

проблеми технічної механіки – 2018: Матеріали Міжнародної наукової конференції (16–19 квітня 2018 р.). – Кам’янське, Дніпро: Дніпровський держ. техн. ун-т, 2018. – С. 39.

2. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Вплив форми, розмірів та розташування деконцентраторів напружень на напружено-деформований стан пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з отворами // Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019: Матеріали Міжнародної наукової конференції (15–18 квітня 2019 р.). – Дніпро, Кам’янське : Дніпровський держ. техн. ун-т, 2019. – С. 43–44.

3. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Комп’ютерне моделювання напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором // Results of modern scientific research and development: Proceedings of VIII International Scientific and Practical Conference (October 17–19, 2021). – Madrid, Spain. – P. 179–186. <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2021/10/RESULTS-OF-MODERN-SCIENTIFIC-RESEARCH-AND-DEVELOPMENT-17-19.10.21.pdf>

4. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і конічних оболонок з круговими отворами // Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2022: Матеріали Міжнародної наукової конференції (12–14 грудня, 2022, Київ, Україна). – Т. 2. – Київ, 2022. – С. 30–32. https://drive.google.com/file/d/1GnZe_jMADI_cOj9BbVa6tyAbTAZwaN1oI/view

5. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями // Сучасні проблеми механіки та математики – 2023: зб. наук. праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – С. 271–272. http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/mm07_20.pdf

Тези доповідей

1. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Influence of inclusions around a rectangular hole on the stress concentration factor in a trapezoidal plate // EJONS: Book of Abstract of the 13th International Conference on Mathematics, Engineering, Natural and Medical Sciences (October 26-27, 2021). – Cappadocia, Turkey. – P. 154–155. https://ad6a8388-4205-4213-85bd-af6ef6e6fa58.filesusr.com/ugd/614b1f_bef6925b211f4ec38036433972f07d3d.pdf

Навчальні посібники

1. *Гарт Е. Л., Семенча О. О., Терьохін Б. І.* Посібник до вивчення дисципліни «Прикладні обчислювальні технології» // Дніпро: Ліра, 2023. – 92 с. (Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, протокол № 3 від 21 листопада 2023 року).

Додаток Б

Розподіл полів інтенсивності напружень в оболонках

Циліндричні оболонки з круговим отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$$

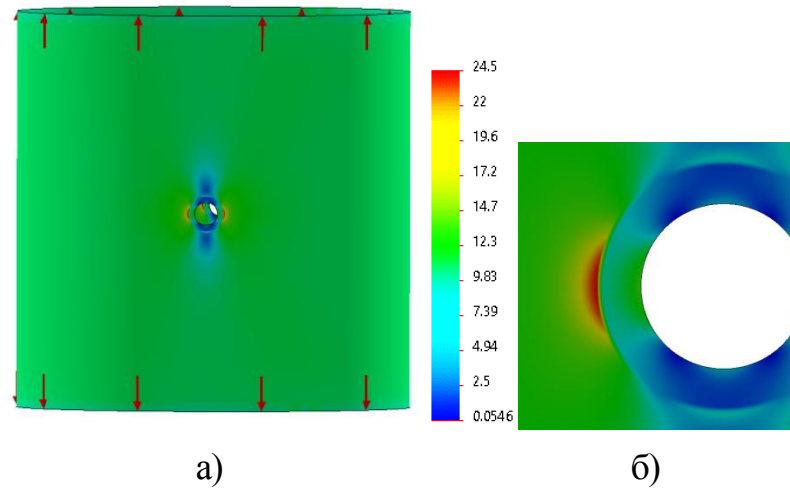


Рис. Б.1 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

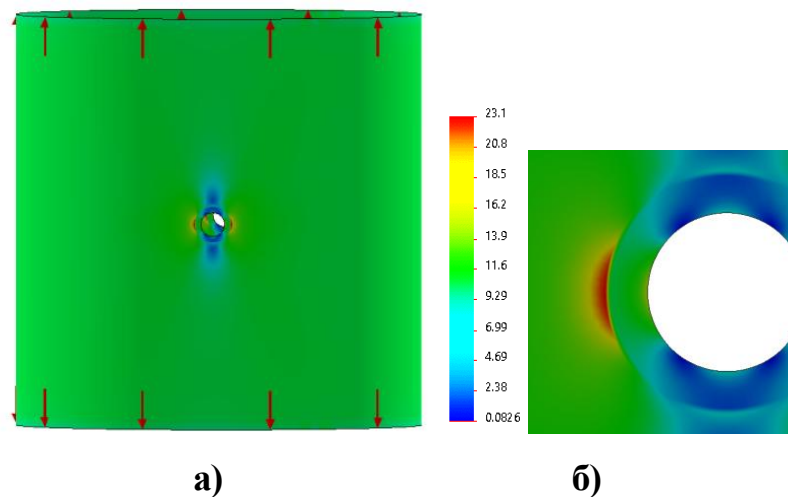


Рис. Б.2 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

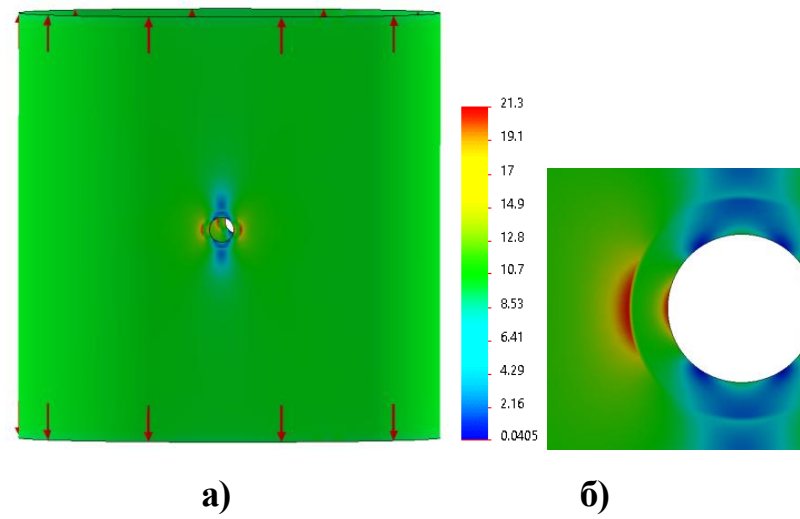


Рис. Б.3 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

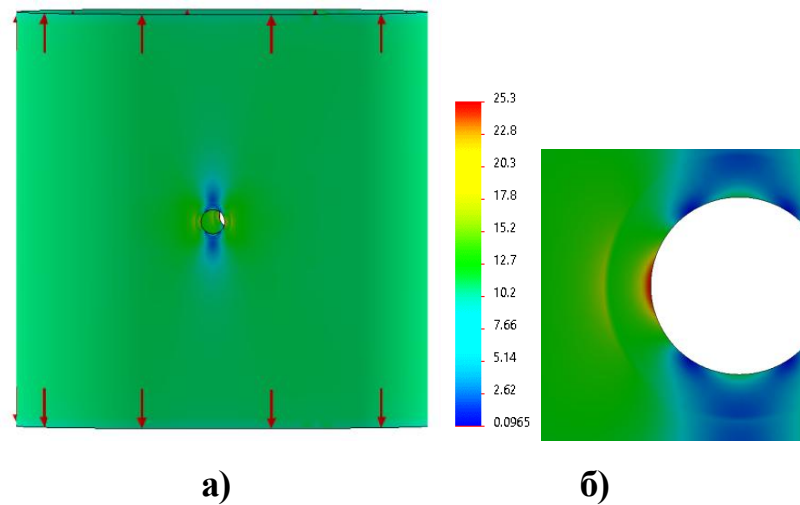


Рис. Б.4 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Циліндричні оболонки з круговим отвором :

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$$

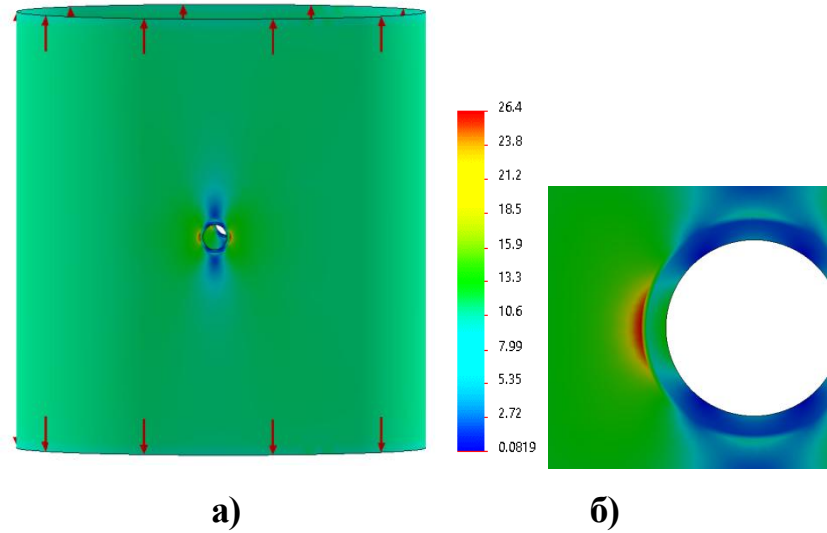


Рис. Б.5 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

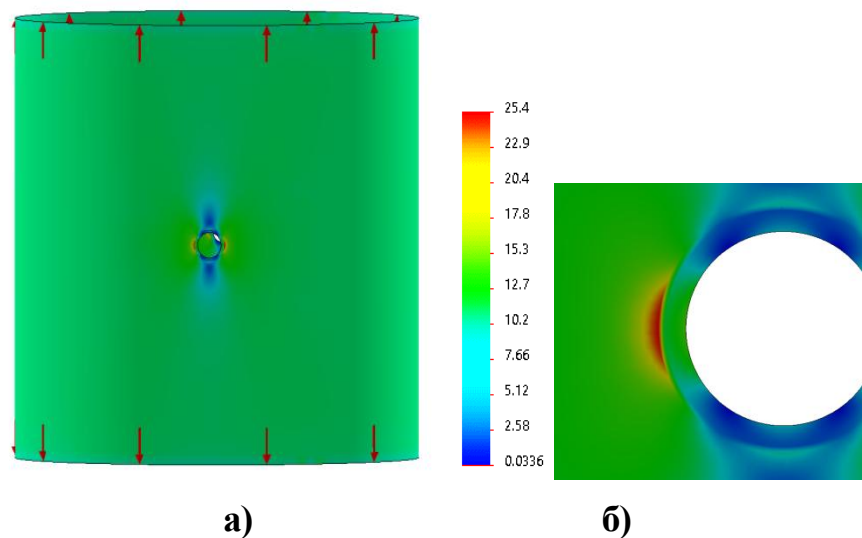


Рис. Б.6 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

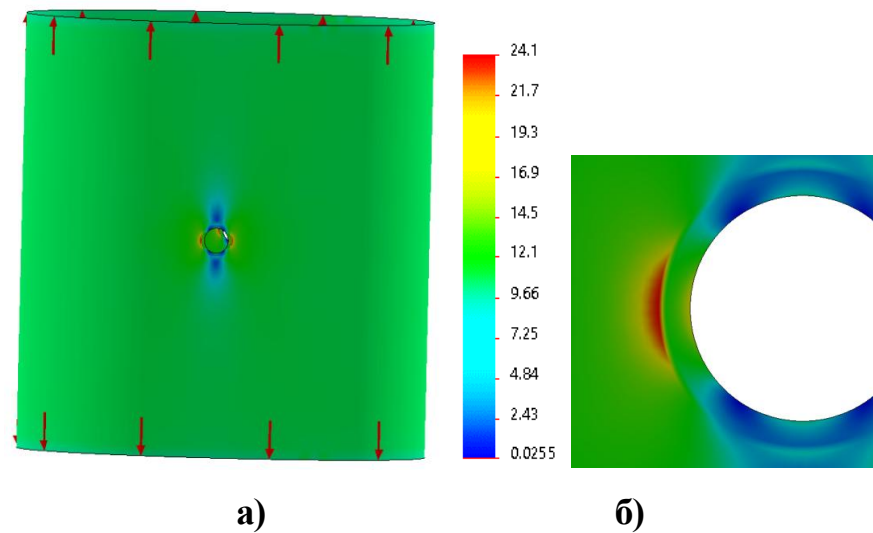


Рис. Б.7 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

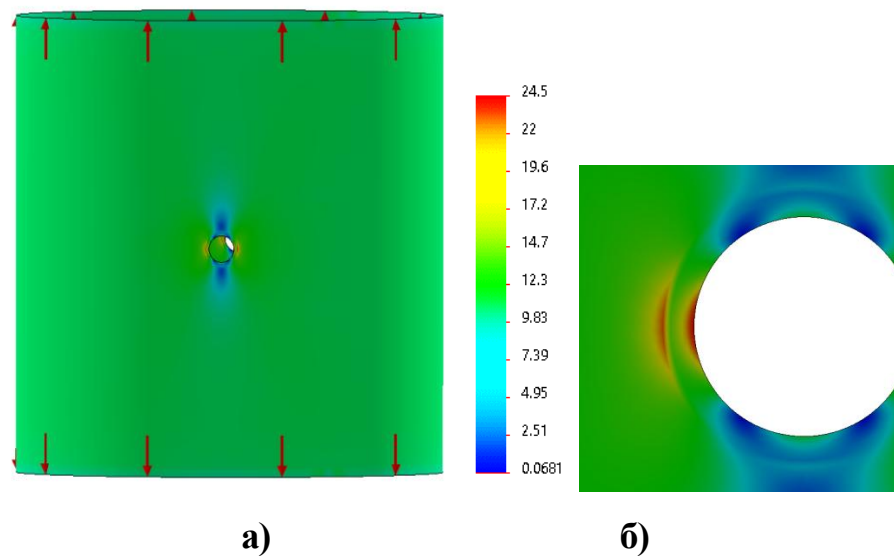


Рис. Б.8 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Циліндричні оболонки з круговим отвором :

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$$

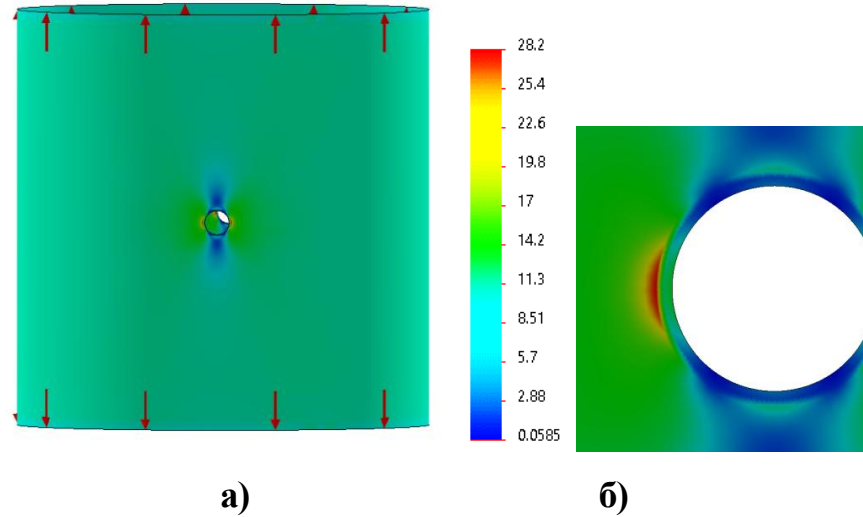


Рис. Б.9 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

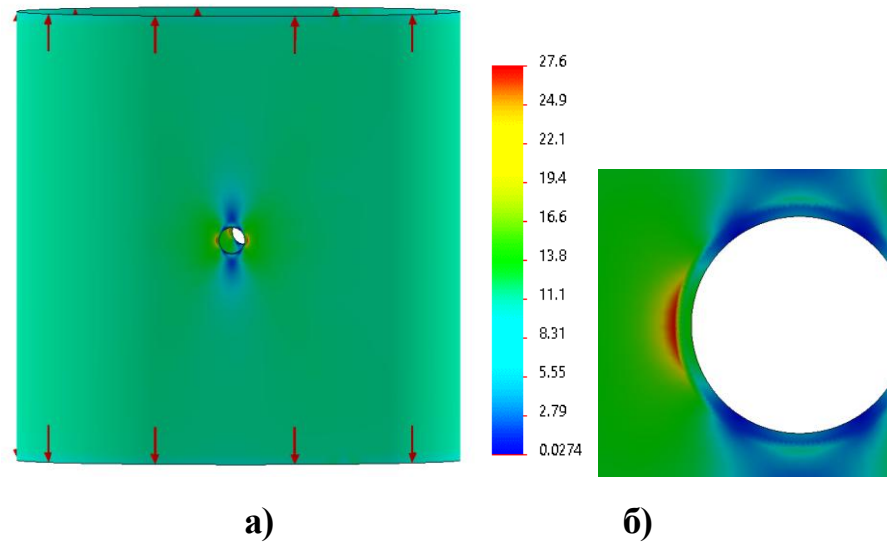


Рис. Б.10 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

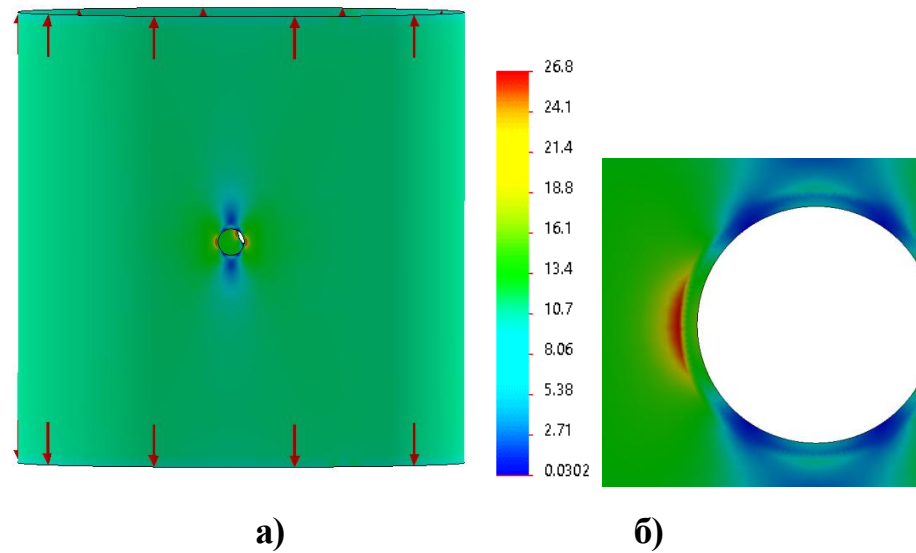


Рис. Б.10 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

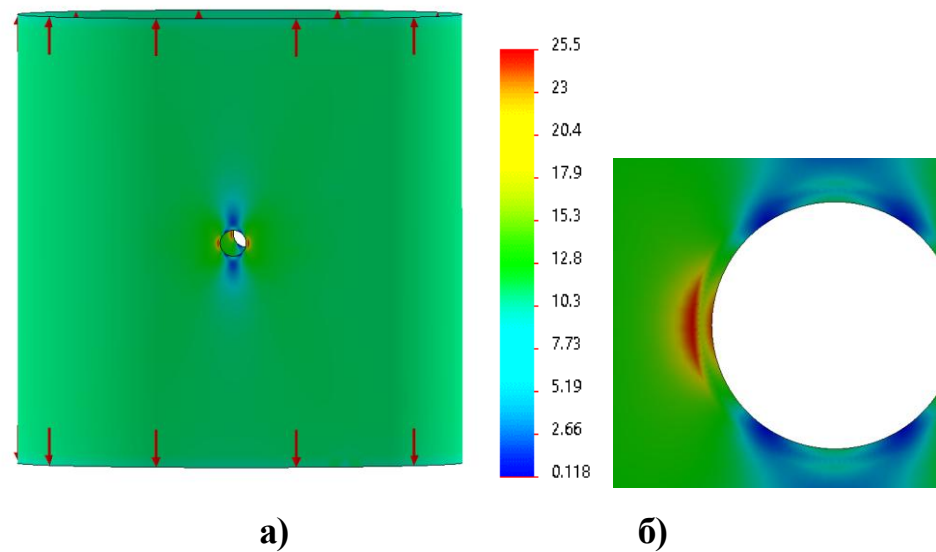


Рис. Б.11 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Конічні оболонки з круговим отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$$

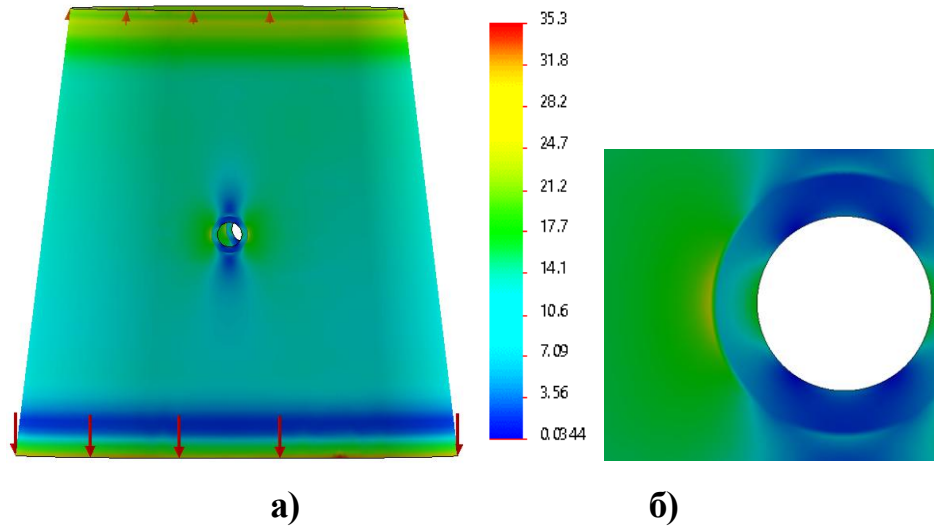


Рис. Б.12 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

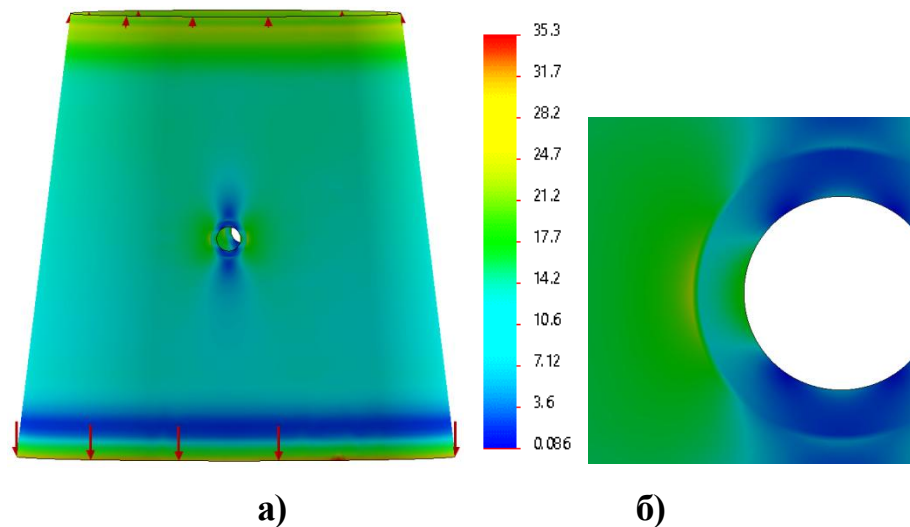


Рис. Б.13 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

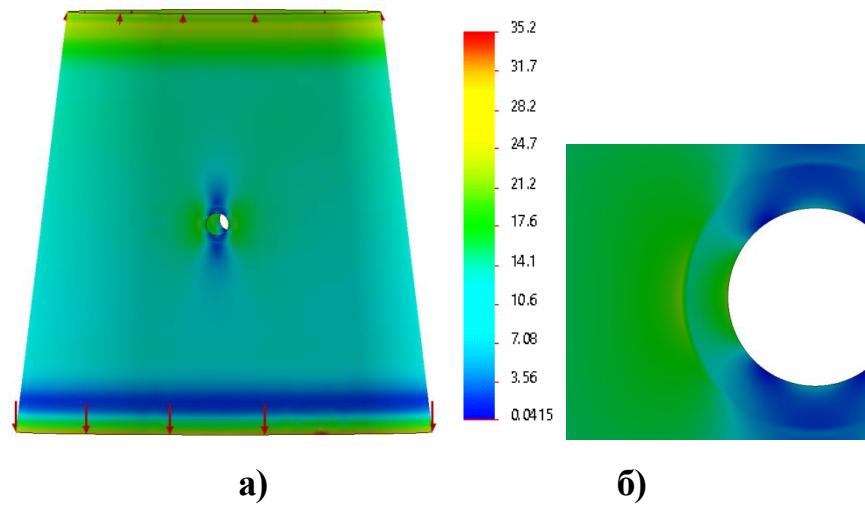


Рис. Б.14 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

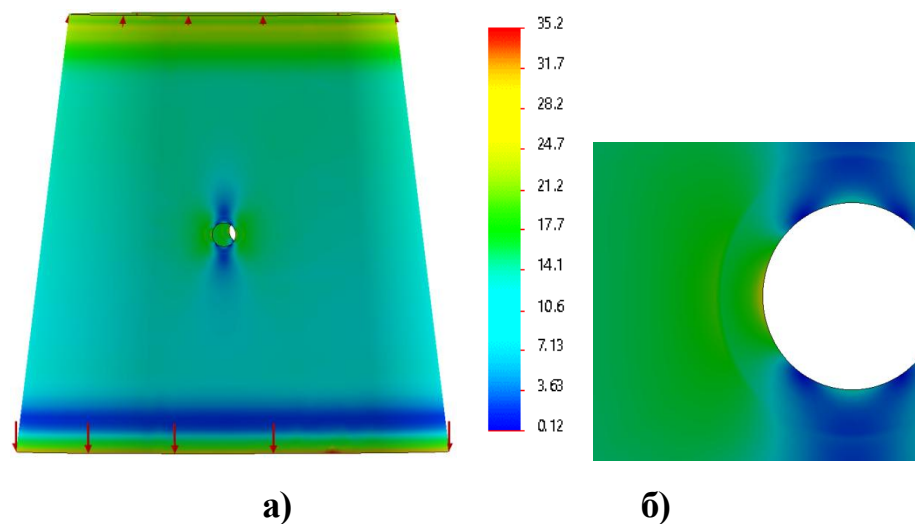


Рис. Б.15 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Конічні оболонки з круговим отвором:

$$h_{вкл} = 0,25r_0$$

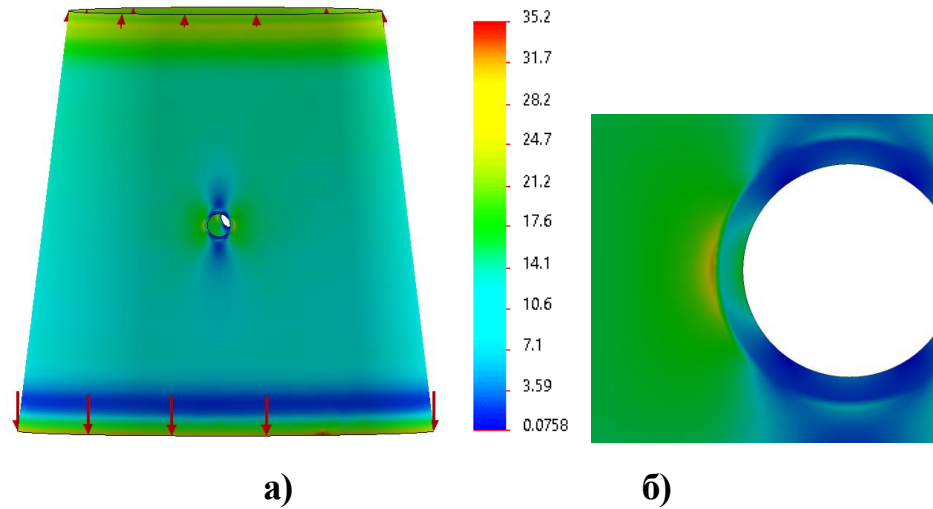


Рис. Б.16 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{вкл} = 0,25r_0 \text{ при } E_{вкл} = E_0 / 3$$

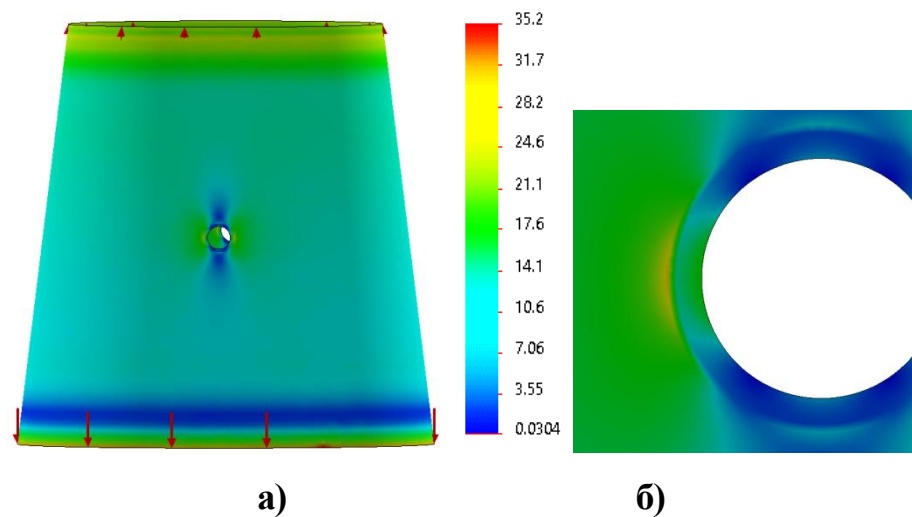


Рис. Б.17 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{вкл} = 0,25r_0 \text{ при } E_{вкл} = 2E_0 / 5$$

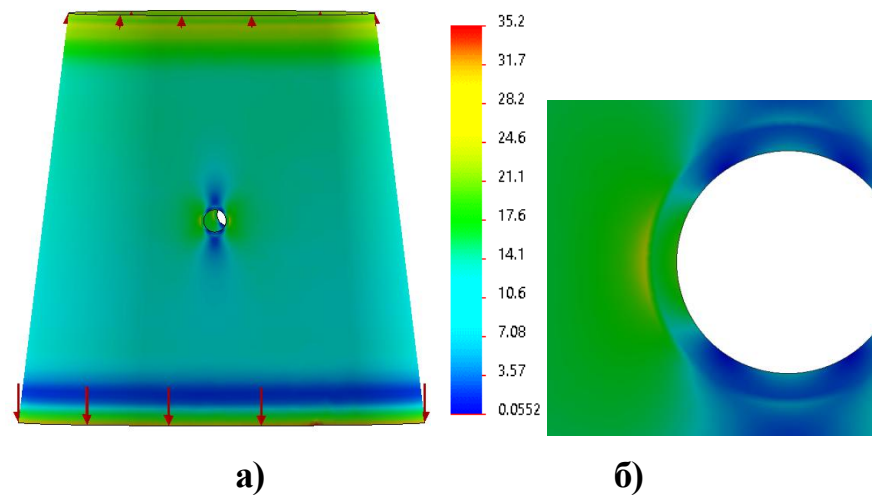


Рис. Б.18 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

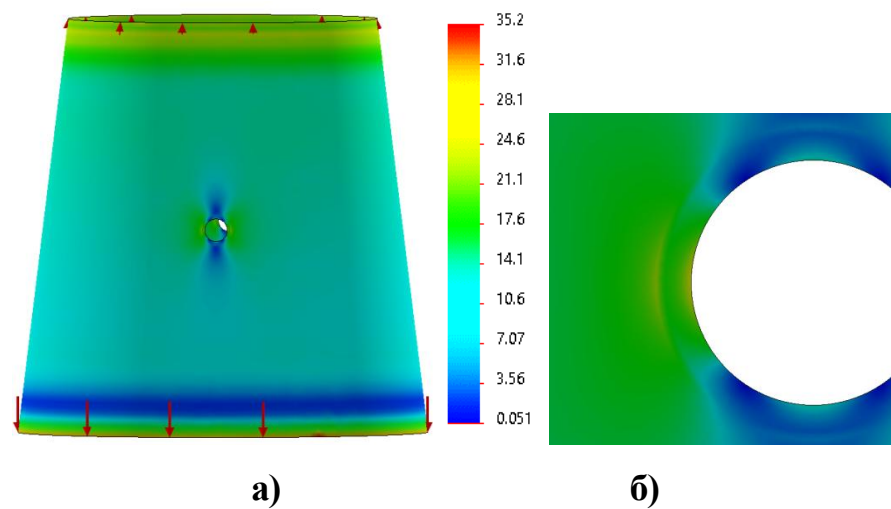


Рис. Б.19 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Конічні оболонки з круговим отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$$

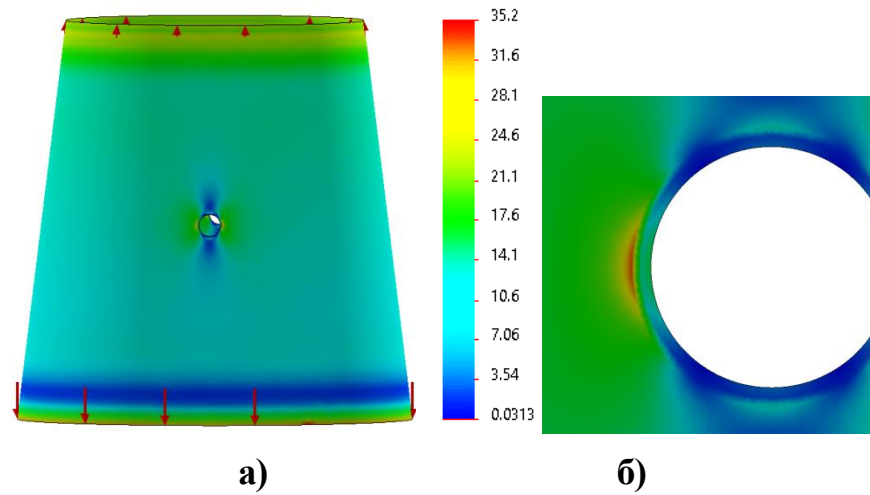


Рис. Б.20 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

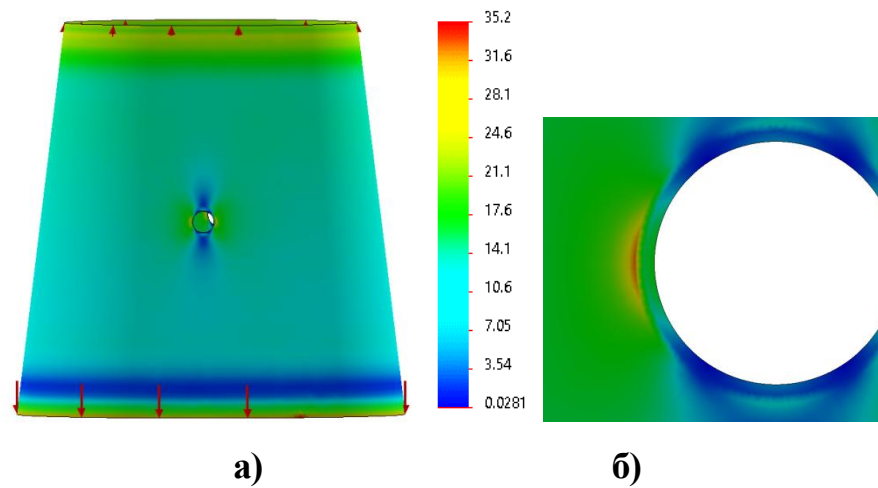


Рис. Б.21 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

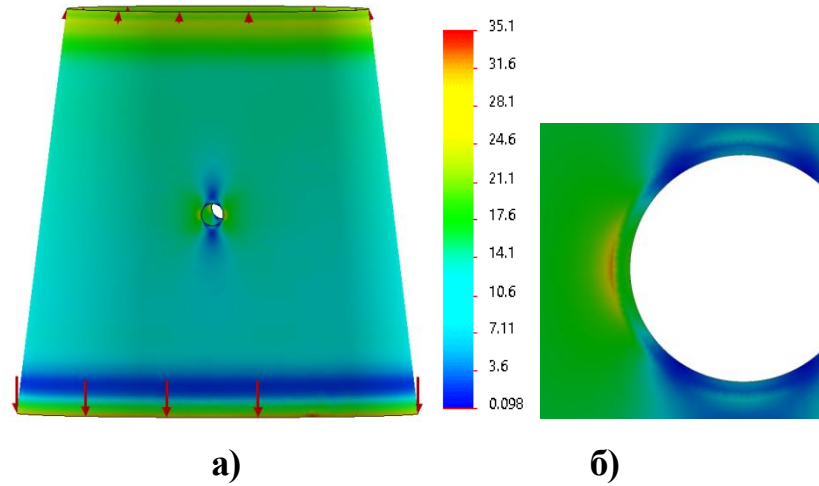


Рис. Б.22 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

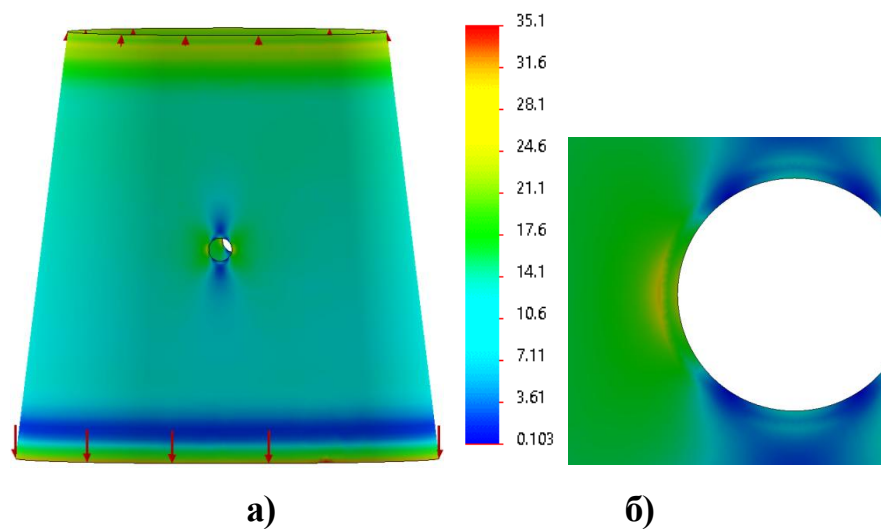


Рис. Б.23 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі кругового отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Циліндричні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$$

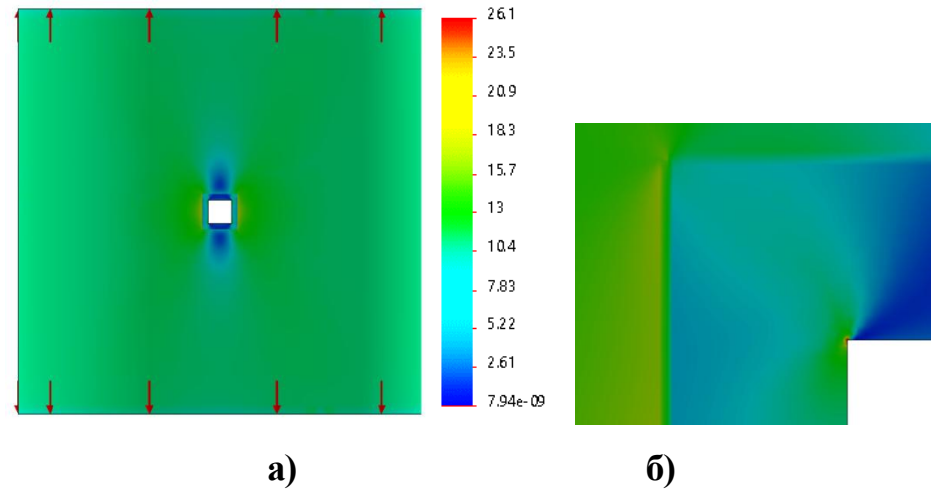


Рис. Б.24 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

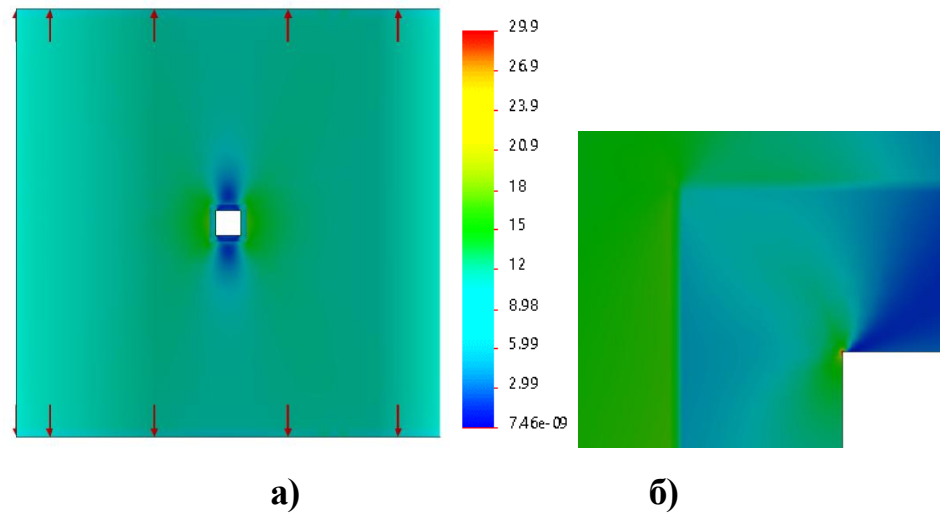


Рис. Б.25 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

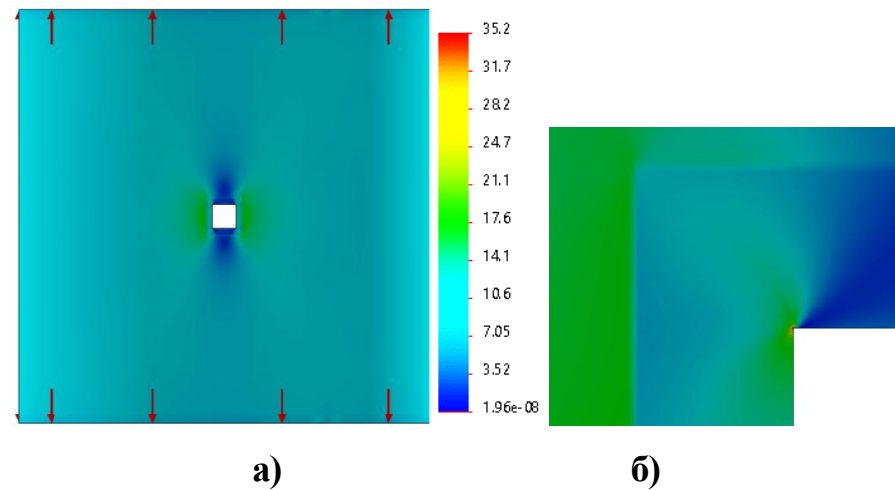


Рис. Б.26 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

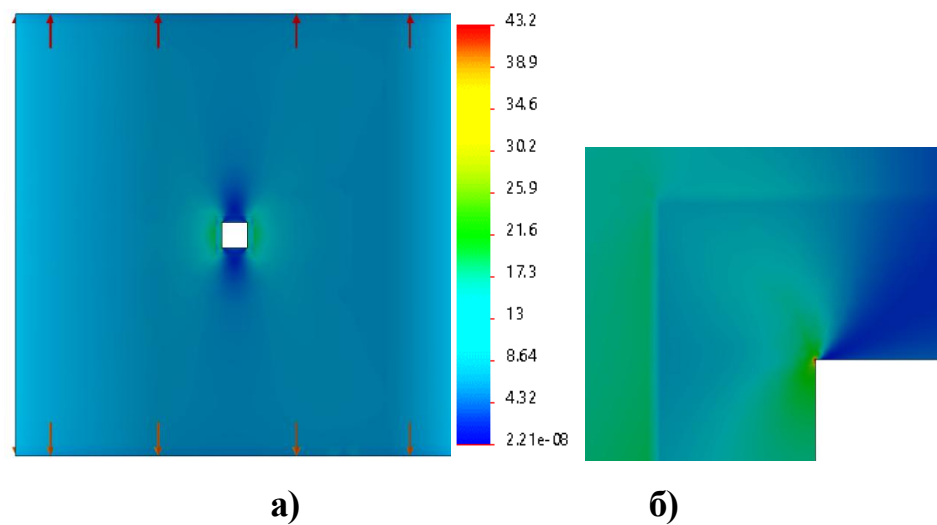


Рис. Б.27 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Циліндричні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$$

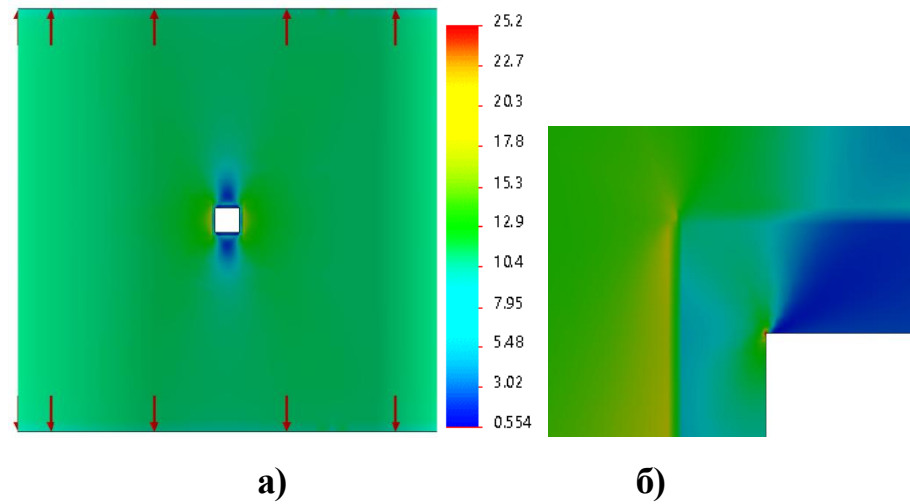


Рис. Б.28 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

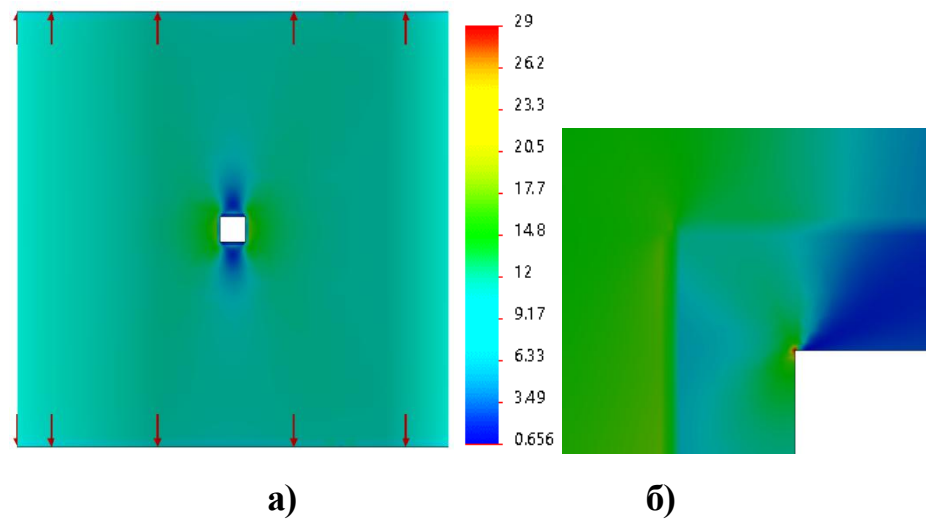


Рис. Б.29 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

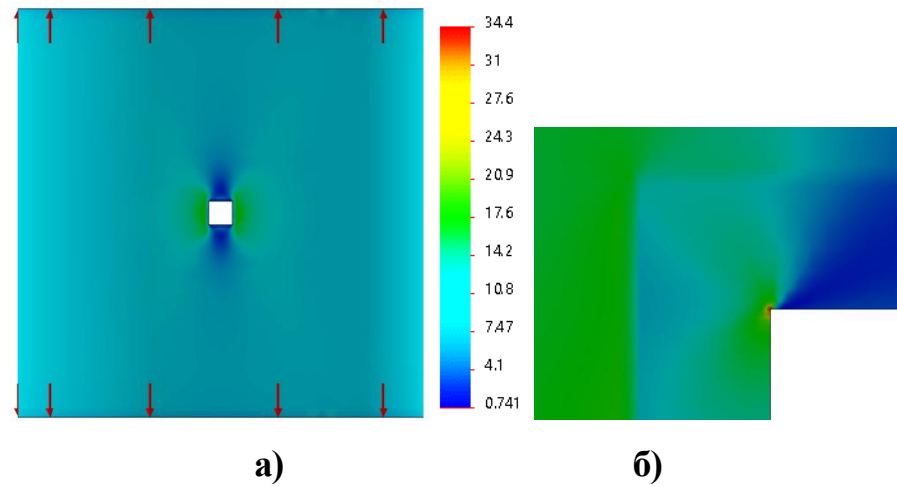


Рис. Б.30 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

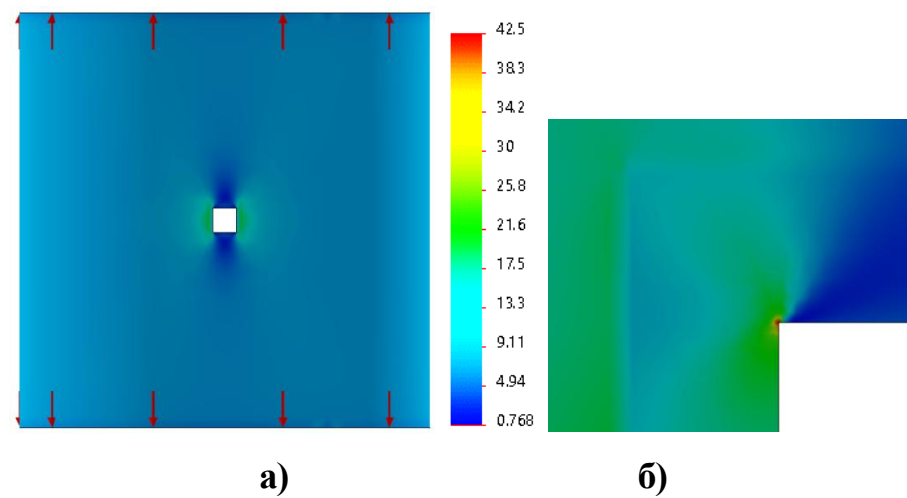


Рис. Б.31 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Циліндричні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$$

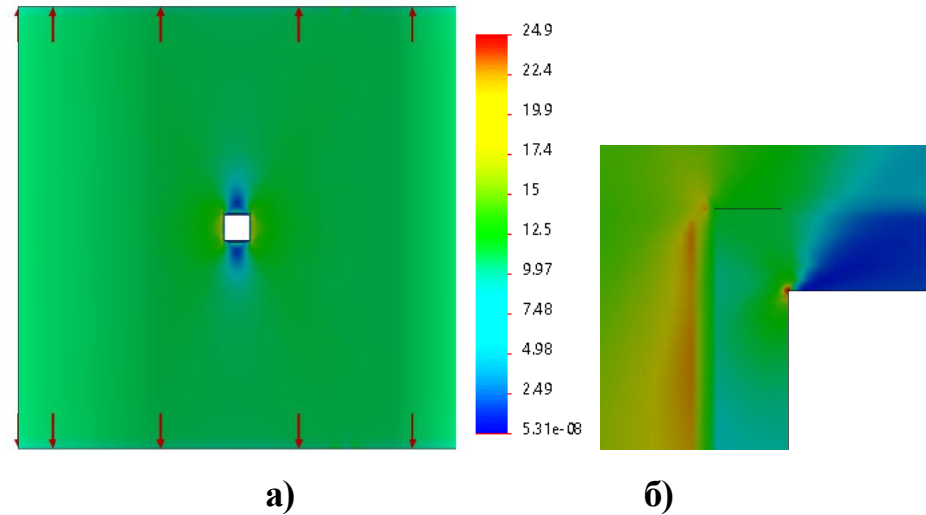


Рис. Б.32 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

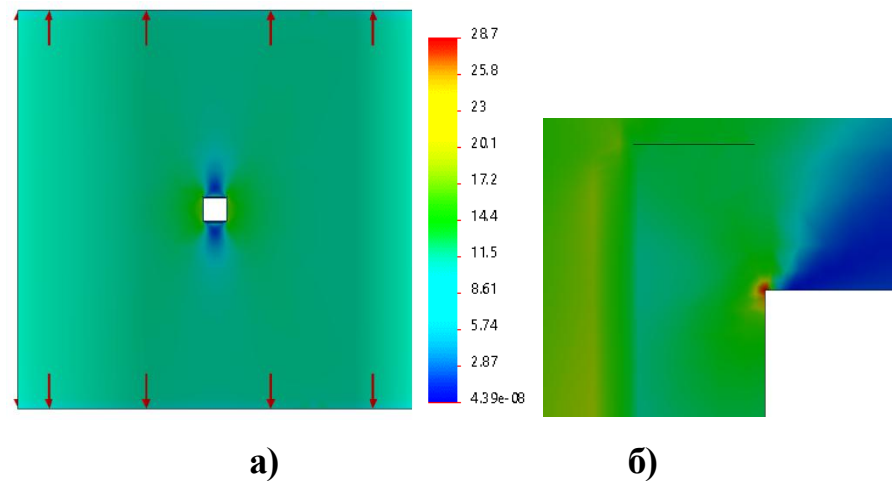


Рис. Б.33 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

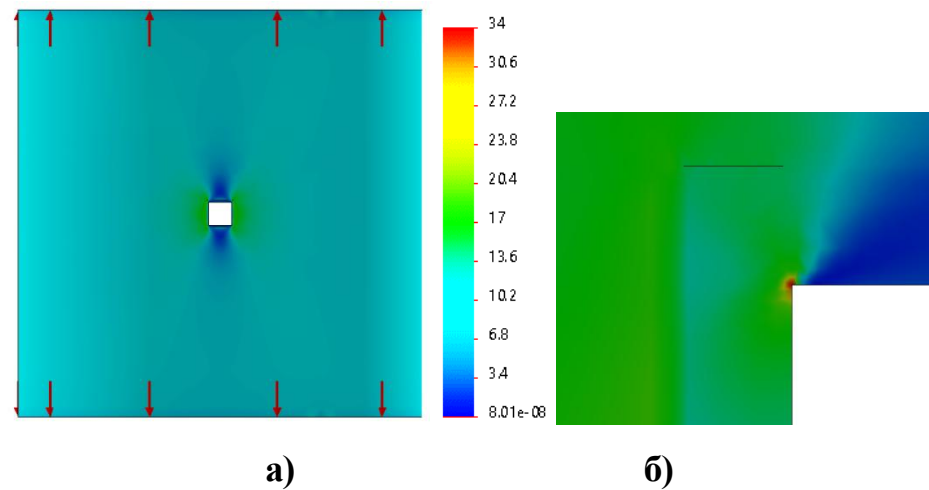


Рис. Б.34 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

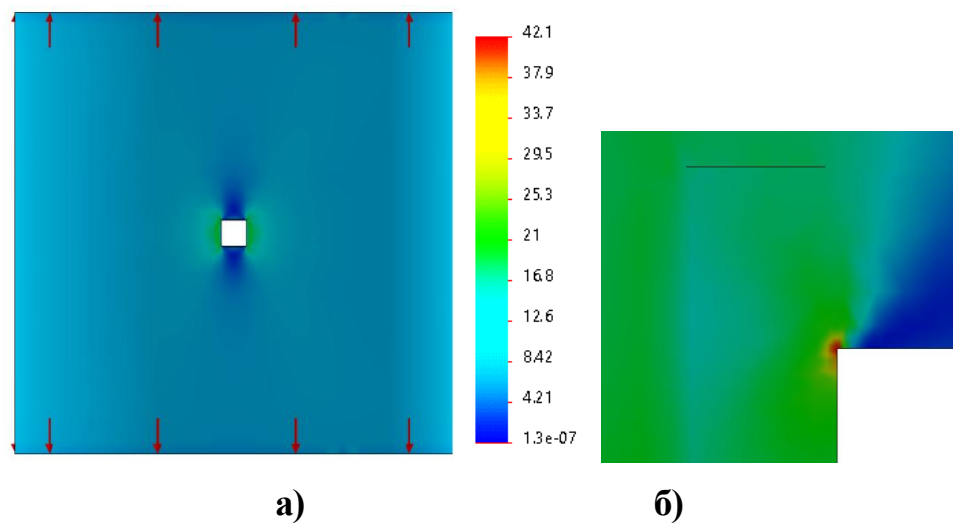


Рис. Б.35 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Конічні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0$$

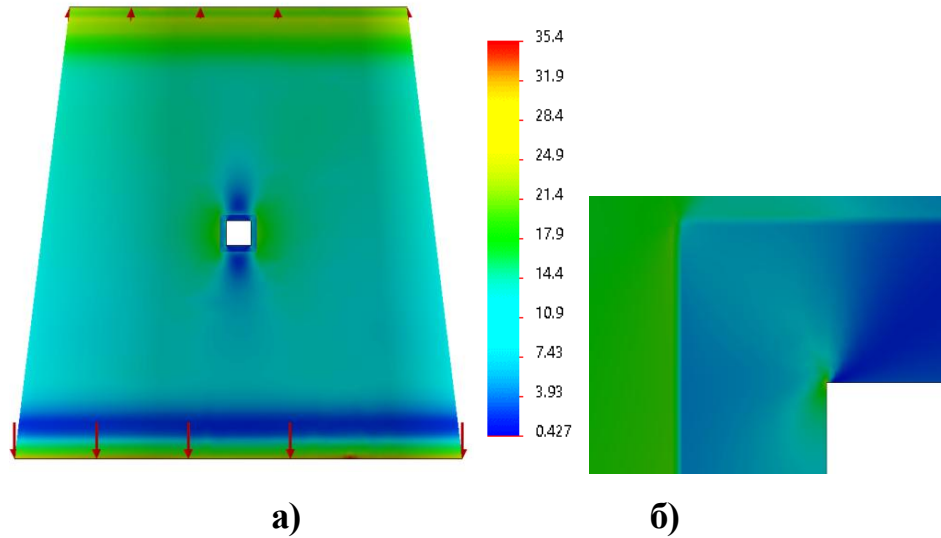


Рис. Б.36 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

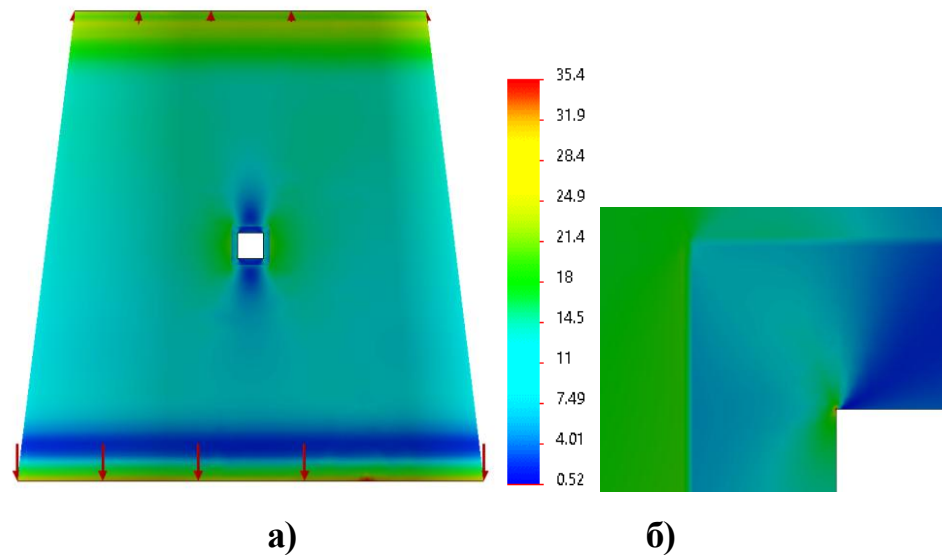


Рис. Б.37 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

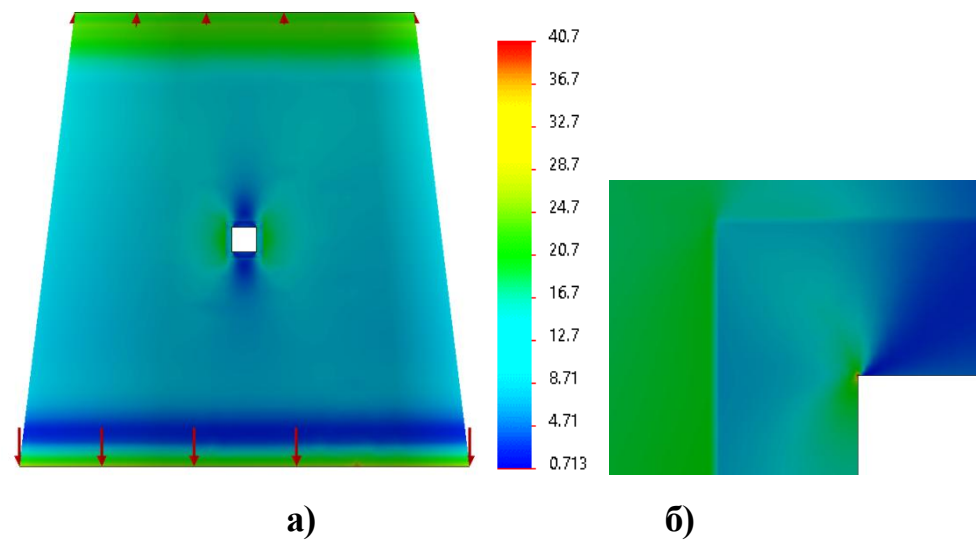


Рис. Б.38 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2 \text{ (а), (б)}$$

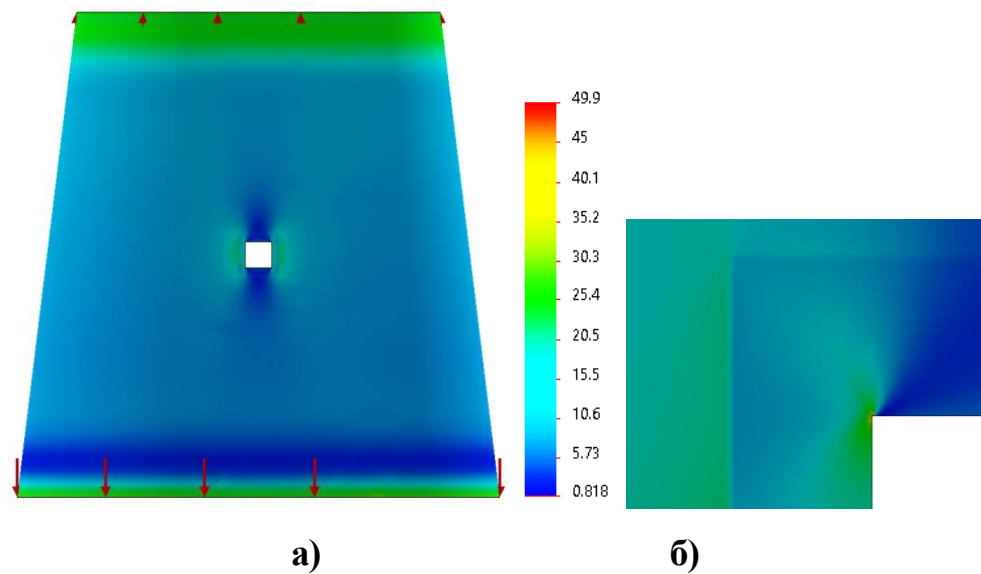


Рис. Б.39 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,5r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$

Конічні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$$

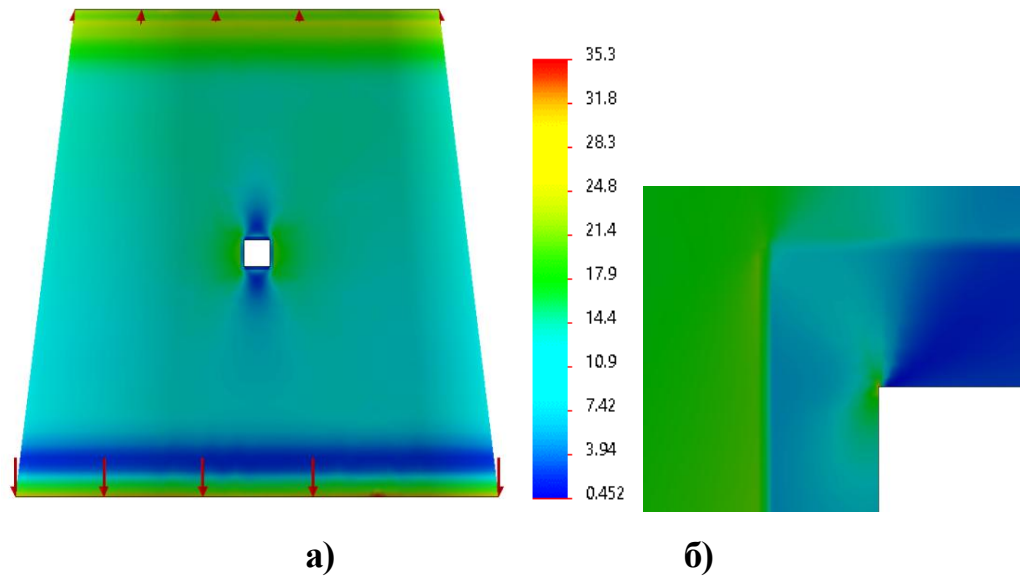


Рис. Б.40 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення $h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$

при $E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$

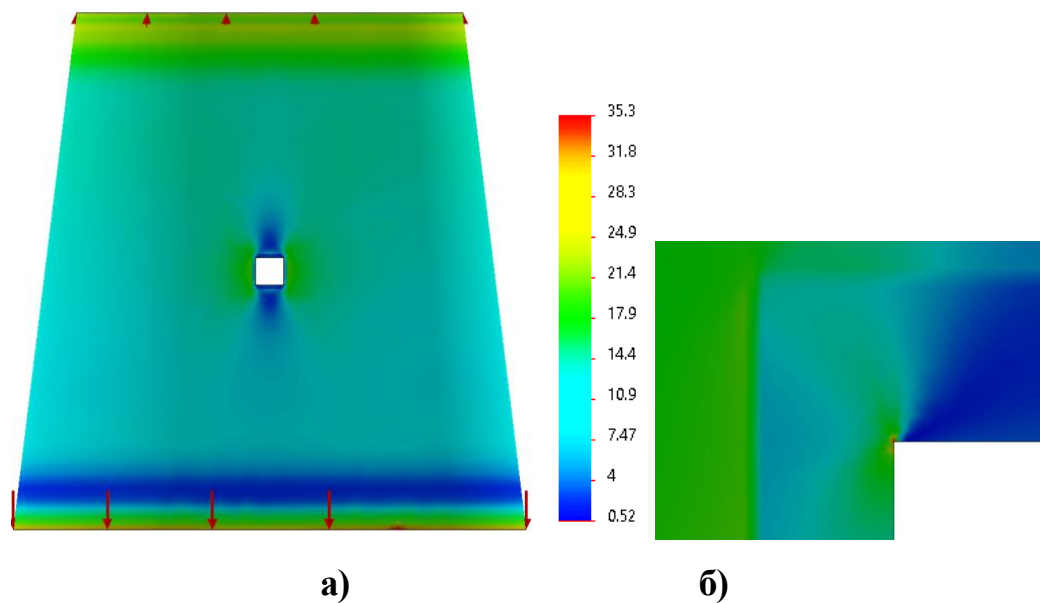


Рис. Б.41 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$h_{\text{вкл}} = 0,25r_0$ при $E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$

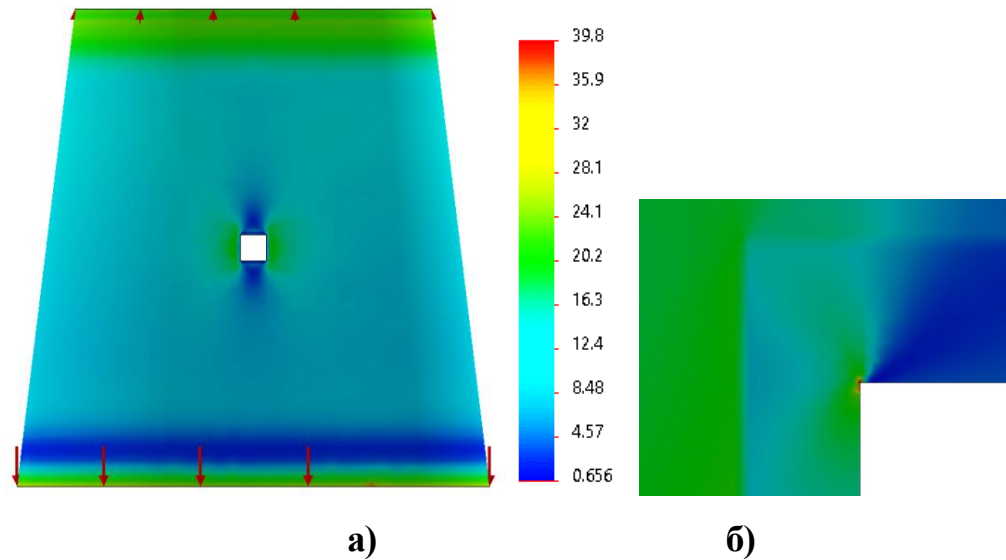


Рис. Б.42 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення $h_{вкл} = 0,25r_0$
при $E_{вкл} = E_0 / 2$

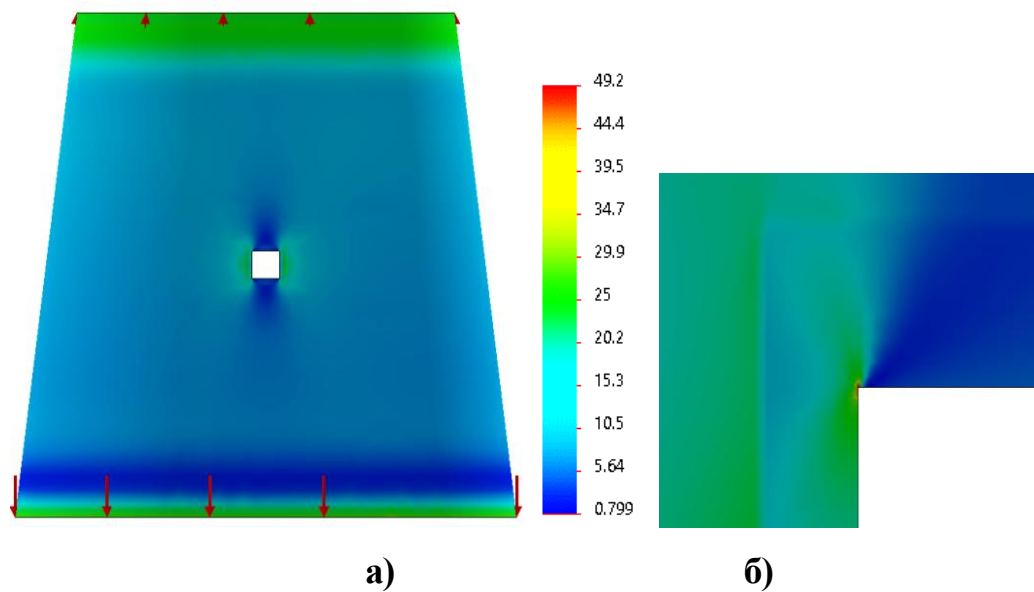


Рис. Б.43 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення $h_{вкл} = 0,25r_0$
при $E_{вкл} = 2E_0 / 3$

Конічні оболонки з квадратним отвором:

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0$$

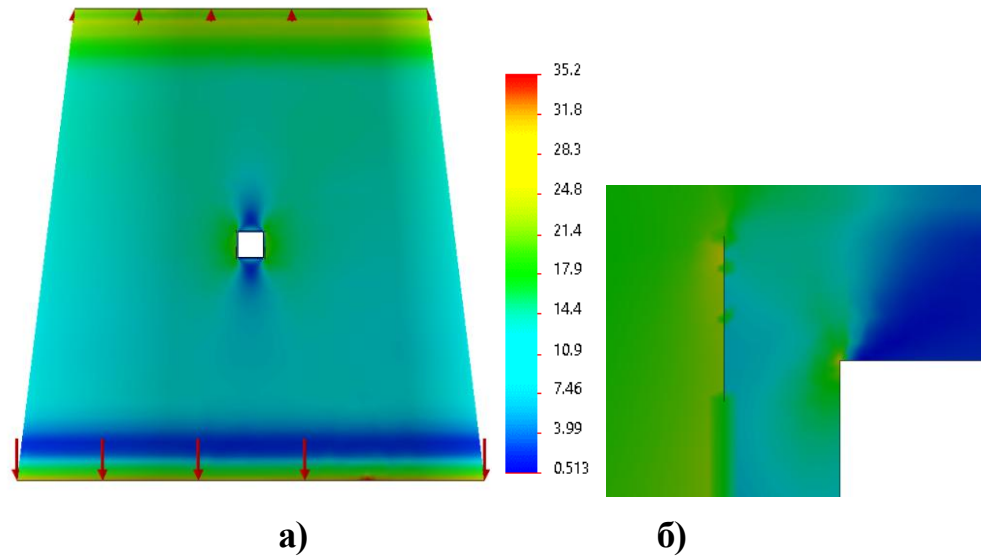


Рис. Б.44 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 3$$

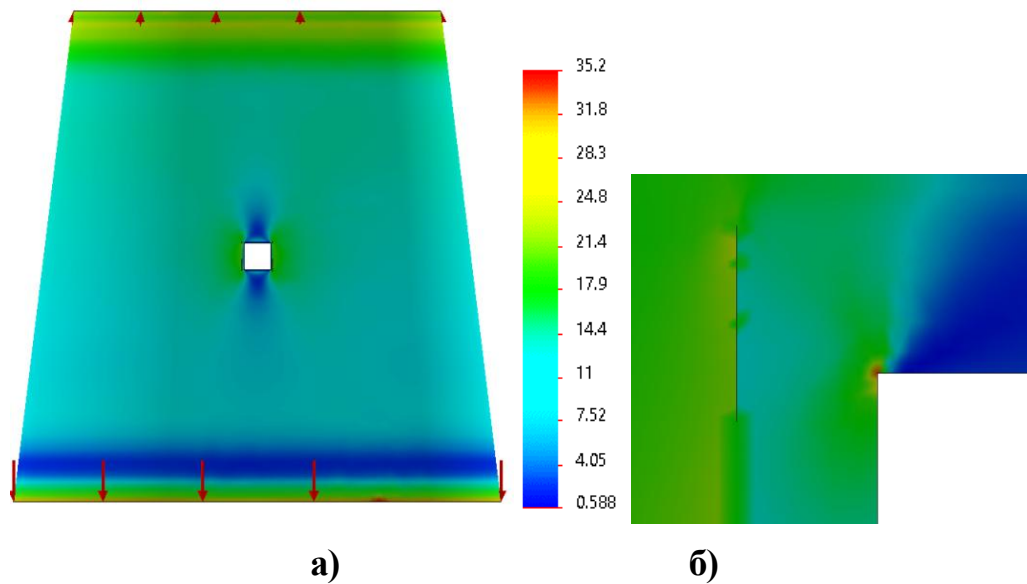


Рис. Б.45 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 5$$

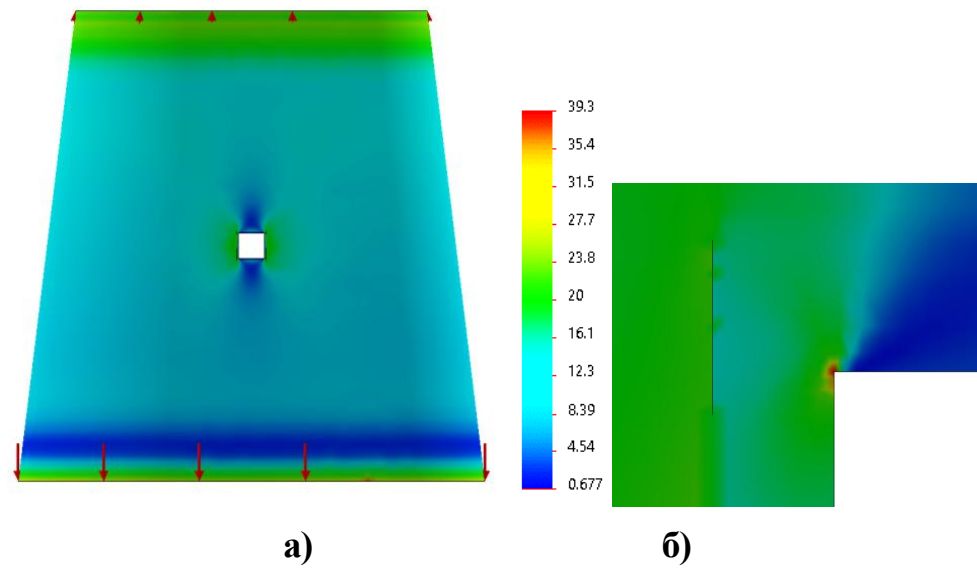


Рис. Б.46 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = E_0 / 2$$

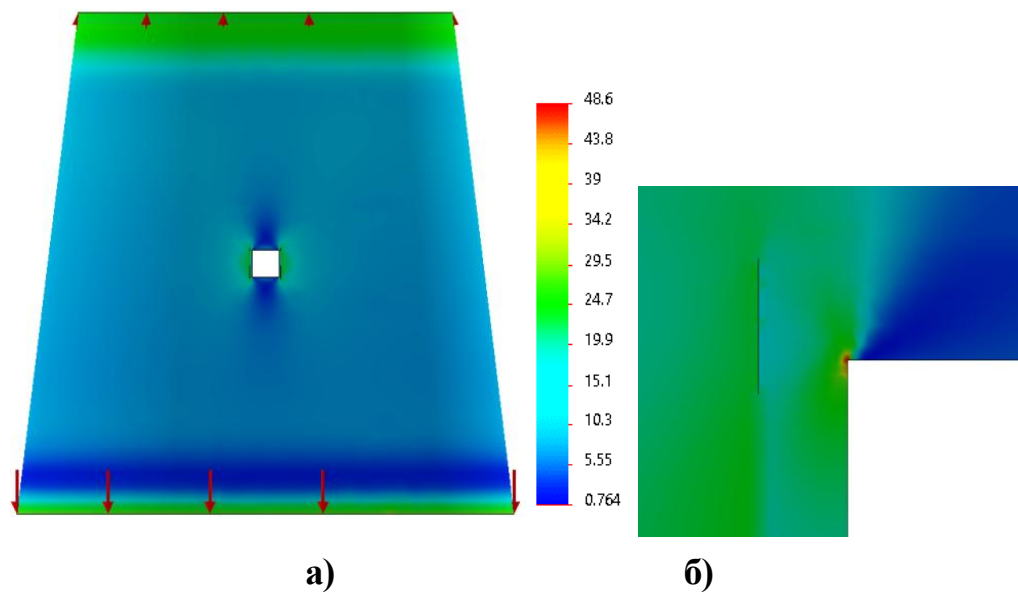


Рис. Б.47 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці
(а) і в околі квадратного отвору (б) у разі м'якого включення

$$h_{\text{вкл}} = 0,125r_0 \text{ при } E_{\text{вкл}} = 2E_0 / 3$$