

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДУБРОВСЬКИЙ ІВАН ДМИТРОВИЧ

УДК 629.7.036+519.6

ДИСЕРТАЦІЯ

**Розробка економічної методики проєктування надзвукової частини
камери рідинного ракетного двигуна методами обчислювального
моделювання**

134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання чужих ідей,
результатів і текстів мають посилання на відповідне джерело

_____ І. Д. Дубровський

Науковий керівник:
Бучарський Валерій Леонідович
кандидат технічних наук, доцент

Дніпро – 2024

АНОТАЦІЯ

Дубровський І. Д. Розробка економічної методики проєктування надзвукової частини камери рідинного ракетного двигуна методами обчислювального моделювання. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2024.

Важливою частиною камери кожного рідинного ракетного двигуна (РРД) є надзвукове сопло. Від ефективності його роботи залежить якість перетворення потенціальної енергії продуктів згоряння в кінетичну, що напряму впливає на створення тяги двигуном. Класичні профільовані сопла на сьогодні вичерпали можливості геометричної оптимізації свого контуру та досягли границі ефективності у своєму застосуванні. Крім цього, їхнє використання в умовах значної зміни висоти польоту ракети-носія призводить до суттєвих втрат ефективності, оскільки більшу частину польоту вони працюють у нерозрахунковому режимі. Для подолання цього недоліка можуть бути використані сопла нової форми, які підлаштовуються під умови навколишнього середовища. Основні їхні переваги полягають у відсутності рухомих частин у конструкції та можливості автоматичної зміни режиму роботи в залежності від висоти польоту. З цих причин на сьогодні актуальним питанням є проєктування сопел нової форми, зокрема, багатосекційних, найпростішим прикладом із яких є сопло з подвійним розширенням.

На сьогодні існує обмежена кількість методик проєктування контурів таких сопел. Їхніми основними недоліками є складність отримання контуру сопла, що забезпечуватиме максимальну тягу, неможливість здійснювати розрахунки при наявності конструктивних обмежень на геометричні

характеристики сопла та відсутність ефективних способів розрахунку. У результаті це призводить до зменшення ефективності роботи спроектованих сопел, зниженню універсальності методики проектування та збільшенню часу на проектування. Тому пріоритетною стає задача створення швидкого з точки зору розрахунків методу проектування ефективних надзвукових багатосекційних сопел.

У першому розділі проведено аналіз існуючих методик проектування надзвукових сопел рідинних ракетних двигунів. В ході дослідження були розглянути метод характеристик, та методики, що використовують розв'язки варіаційної задачі і задачі оптимізації. В результаті було зроблено висновок, що на сьогодні відсутня методика проектування, який дозволяє отримати контур багатосекційного сопла максимальної тяги при заданих конструктивних обмеженнях.

Оскільки основним етапом алгоритму проектування сопла максимальної тяги, який визначає швидкість процесу, є чисельне моделювання, то в дослідженні також було проаналізовано способи підвищення його ефективності. Розглянуто можливі варіанти сіток, що використовуються для дискретизації розрахункової області при моделюванні газодинамічних процесів в рідинних ракетних двигунах. Обрано варіант, який забезпечуватиме найбільшу ефективність чисельного моделювання – декартові ортогональні сітки. Розглянуто проблеми, які виникають при використанні декартових ортогональних сіток при криволінійній геометрії конструкції, що досліджується. Розглянуто існуючі методи розв'язку цих проблем та надані аргументи про необхідність розробки більш ефективного методу інтегрування скінчених об'ємів на границі розрахункової області.

Другий розділ присвячений розробці ефективної обчислювальної моделі, яка може бути використана для чисельного моделювання процесу течії продуктів згоряння всередині камери рідинного ракетного двигуна.

Дослідження було виконано у припущенні осьової симетрії течії продуктів згоряння та відсутності суттєвого впливу в'язкості та хімічних

реакцій на їхню течію. Згідно з ним та з метою зниження обчислювальної складаності для опису газодинамічних процесів у камері використовувалася модель нев'язкого ідеального стисливого газу постійного хімічного складу. Вона складалася з системи нестационарних рівнянь Ейлера, яка замикається рівнянням стану Менделєєва-Клапейрона. При розрахунках використовувалась інтегральна форма для елементарного об'єму в циліндричній системі координат для випадку осьової симетрії.

З метою досягнення найбільшої ефективності розв'язок системи рівнянь здійснювався на декартових ортогональних сітках при використанні явного методу скінченних об'ємів для інтегрування системи рівнянь. Для постановки граничних умов на криволінійній границі області був запропонований метод розширених об'ємів. Це дозволило зберегти можливості ефективного застосування декартової ортогональної системи контрольних об'ємів для чисельного моделювання процесів течії газу у камері РРД.

Для верифікації запропонованої обчислювальної моделі було розв'язано три задачі: одновимірна задача нормального відбиття ударної хвилі, та двовимірні задачі подвійного відбиття Маха й моделювання течії газу у камері рідинного ракетного двигуна. Результати розв'язку одновимірної задачі порівнювались із теоретичним розв'язком, першої двовимірної задачі – із класичним розв'язком, другої – із розв'язком, отриманим за допомогою Ansys Fluent R2 2023. Розрахований за дискретними аналогами норм L_1 та L_2 модуль відносного відхилення результатів для кожної задачі не перевищив 5%, що дозволяє стверджувати о коректності отриманих за допомогою запропонованої обчислювальної моделі даних.

У **третьому розділі** була запропонована методика профілювання надзвукового контуру багатосекційного сопла, що буде генерувати максимальну тягу при заданих конструктивних обмеженнях. Її ідея полягає в апроксимації контуру кожної секції сопла степеневими поліномами та визначенні значень їхніх коефіцієнтів шляхом ітеративного розв'язання багатовимірної задачі мінімізації. У якості цільової функції при розв'язку

задачі оптимізації було обрано вираз для модуля осьової складової сили тяги зі зворотним знаком при заданих значеннях атмосферного тиску і радіусу на зрізі сопла. Значення цільової функції отримувались в результаті чисельного моделювання, яке виконувалось з використанням запропонованої у розділі 2 обчислювальної моделі. Це дозволило збільшити швидкість виконання розрахунку, знизити його чутливість до початкових та граничних умов та здійснювати рішення незалежно від режиму течії продуктів згоряння. Для визначення оптимальних значень набору параметрів, що визначали шуканий контур, використовувались методи покоординатного спуску та золотого перерізу. Задача проектування вважалась розв'язаною, коли модуль максимального відхилення у контурах сопла, отриманих на двох послідовних ітераціях, не перевищував 0.001.

За допомогою запропонованого методу з використанням поліномів 2, 3 та 4 степенів були отримані контури оптимальних сопел, які були співставленні з контурами, отриманими за загальноприйнятим методом Рао. Усі контури були спроектовані для одного двигуна-прототипу – РД-107. Це дозволило ввести додаткові конструктивні обмеження у вигляді системи рівнянь-зв'язку, таким чином спростивши задачу. Обчислене в ході порівняння максимальне значення модуля відносного відхилення між отриманими контурами не перевищило 3 %, що дозволяє стверджувати про коректність отриманих результатів. Наявність розбіжності пояснюється відмінністю у методі чисельного моделювання, що використовувався. На відміну від розповсюдженого у подібних задачах проектування контуру методу характеристик у роботі застосовувався метод скінченних об'ємів типу Годунова відповідно до обраної обчислювальної моделі.

У четвертому розділі за допомогою методики проектування, запропонованої в розділі 3, було отримане багатосекційне надзвукове сопло максимальної тяги для рідинного ракетного двигуна першого ступеня ракети-носія. Для цього була виконана постановка та розв'язання відповідної задачі оптимізації з урахуванням особливостей шуканого контуру та

конструктивного обмеження у вигляді фіксованої довжини сопла. Кожна його секція була апроксимована параболою, коефіцієнти яких разом із довжинами секцій утворювали вектор параметрів, що оптимізувалися. Шляхом аналізу траєкторії польоту першого ступеня ракети-носія були обрані розрахункові тиски на виході з кожної секції. З їх допомогою та із застосуванням співвідношень ізоентропійної течії було отримано перше наближення контуру сопла. В результаті розв'язку задачі оптимізації був спроектований контур багатосекційного сопла, який забезпечував максимальну тягу. Оцінка ефективності його роботи була виконана шляхом розрахунку середнього за траєкторією питомого імпульсу і порівняння цього значення із тим, що було отримане при використанні стандартного сопла. Застосування сопла з подвійним розширенням дозволило підвищити середній за траєкторією питомих імпульс на 1.6%.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- шляхом побудови у локальній системі координат, пов'язаній із криволінійною границею області, нового розширеного об'єму з розміром не менше звичайного скінченного об'єму вперше доведено можливість без зменшення стійкості розрахунку точно враховувати криволінійну границю розрахункової області при використанні декартових сіток;

- вперше отримано узагальнену формулу для розрахунку осової складової сили тяги, яка містить безрозмірні коефіцієнти у кількості секцій сопла в інтегралі тяги, що дозволяє здійснювати розрахунки для багатосекційного сопла в залежності від кількості секцій, працюючих на розрахунковому режимі;

- з використанням розробленої методики, яка ґрунтується на розв'язанні задачі оптимізації та використанні методів обчислювального моделювання, з урахуванням траєкторії польоту ракети-носія вперше спроектовано контур багатосекційного сопла, яке забезпечує максимальну тягу при заданих конструктивних обмеженнях, що дозволило збільшити середній за траєкторією питомих імпульс рідинного ракетного двигуна.

Практичне значення одержаних результатів полягає у наступному:

- розроблено обчислювальну модель двовимірних внутрішніх течій продуктів згоряння у соплах рідинних ракетних двигунів, яка може використовуватися для розрахунку довільних внутрішніх течій нев'язкого стисливого газу постійного хімічного складу;
- використання розробленої обчислювальної моделі, яка базується на застосуванні декартових сіток та методу розширених об'ємів для постановки граничних умов на криволінійній границі розрахункової області, дозволяє здійснювати чисельне моделювання двовимірної течії нев'язкого стисливого газу швидше, аніж існуючі моделі, які реалізовано в комерційних пакетах програм;
- застосування розроблених моделей, методів та алгоритмів дозволяє автоматизувати процес побудови оптимального контуру багатосекційного сопла.

Основні результати роботи опубліковані у 10 наукових працях: 5 статей у наукових фахових виданнях України, дві з них опубліковані у виданні категорії А, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus та відноситься до третього квартилю Q3, усі інші – у виданнях категорії Б; 1 тези доповіді у збірнику всеукраїнської наукової конференції та 4 тези доповідей у збірниках міжнародних наукових конференцій.

Ключові слова: рідинний ракетний двигун, надзвукове сопло, оптимізація контуру сопл, обчислювальне моделювання, метод скінченних об'ємів, метод розширених об'ємів.

ABSTRACT

Dubrovskiy I. D. Development of an efficient method for designing the supersonic part of a liquid-propellant rocket engine chamber using numerical modeling methods. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

PhD thesis in the area of knowledge 134 Aviation and rocket and space technology. – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2024.

A supersonic nozzle is an important part of the chamber of every liquid-propellant rocket engine. The efficiency of its work depends on the quality of conversion of potential energy of combustion products into kinetic energy, which directly affects the creation of thrust by the engine. Today, classic bell-shaped nozzles have reached their limits of geometric optimization of their contour and efficiency in their application. In addition, their use in conditions of a significant change in the altitude of the launch vehicle leads to significant losses of efficiency, since they operate in a non-operating mode for most of the flight. To overcome this drawback, nozzles of a new shape can be used, which are adjusted to environmental conditions. Their main advantages are the absence of moving parts in the structure and the possibility of automatically changing the operating mode depending on the flight altitude. For these reasons, designing nozzles of a new shape, in particular, multi-section nozzles, the simplest example of which is a dual-bell nozzle, is an urgent issue today.

Today, there is a limited number of methods for designing the contours of such nozzles. Their main disadvantages are the difficulty of obtaining the contour of the nozzle, which will provide maximum thrust, the impossibility of making calculations in the presence of the restrictions on the geometric characteristics of the nozzle, and the lack of effective methods of calculation. As a result, this leads to a decrease in the efficiency of the designed nozzles, a decrease in the versatility of the design method, and an increase in the design time. Therefore, the task of creating a

efficient, from the point of view of calculations, method of designing effective supersonic multi-section nozzles becomes a priority.

In the first chapter, an analysis of the existing methods of designing supersonic nozzles of liquid rocket engines was carried out. In the course of the study, the method of characteristics and methods using solutions of variational problems and optimization problems were considered. As a result, it was concluded that today there is no design technique that allows obtaining the contour of a multi-section nozzle of maximum thrust under the specified design limitations.

Since the main stage of the maximum thrust nozzle design algorithm, which determines the speed of the process, is numerical modeling, the research also analyzed ways to increase its efficiency. Considered are possible variants of grids used for discretization of the computational domain when modeling gas-dynamic processes in liquid rocket engines. The option that will ensure the greatest efficiency of numerical modeling is chosen - Cartesian orthogonal grids. The problems that arise when using Cartesian orthogonal grids for the curvilinear geometry of the structure under investigation are considered. Existing methods of solving these problems are considered and arguments are given about the need to develop a more effective method of integrating finite volumes at the boundary of the calculation domain.

The second chapter is devoted to the development of an effective computational model that can be used for numerical simulation of the process of the flow of combustion products inside the chamber of a liquid rocket engine.

The study was performed assuming axial symmetry of the flow of combustion products and the absence of a significant influence of viscosity and chemical reactions on their flow. According to it and in order to reduce computational complexity, a model of an inviscid ideal compressible gas of constant chemical composition was used to describe the gas-dynamic processes in the chamber. It consisted of a system of unsteady Euler equations closed by the Mendelev-Clapeyron equation of state. The calculations used the integral form for the

elementary volume in the cylindrical coordinate system for the case of axial symmetry.

In order to achieve the greatest efficiency, the solution of the system of equations was carried out on Cartesian orthogonal grids using the explicit method of finite volumes for the integration of the system of equations. The method of extended cells was proposed to set the boundary conditions on the curvilinear boundary of the region. This made it possible to preserve the possibilities of effective use of the Cartesian orthogonal system of control volumes for the numerical modeling of gas flow processes in the liquid-propellant engine chamber.

To verify the proposed computational model, three problems were solved: the one-dimensional problem of normal shock wave reflection, and the two-dimensional problems of Mach double reflection and gas flow modeling in the chamber of a liquid-propellant rocket engine. The results of solving the one-dimensional problem were compared with the theoretical solution, the first two-dimensional problem – with the classical solution, the second – with the solution obtained using Ansys Fluent R2 2023. The calculated deviation for each problem did not exceed 5%, which allows us to assert the correctness of the data obtained with the proposed computational model.

In the third section, a technique for profiling the supersonic contour of a multi-section nozzle was proposed. Its idea is to approximate the contour of each section of the nozzle by power polynomials and determine the values of their coefficients by iteratively solving a multidimensional minimization problem. The expression for the module of the axial component of the thrust force with the opposite sign at the specified values of atmospheric pressure and radius at the nozzle section was chosen as the objective function for solving the optimization problem. The values of the objective function were obtained as a result of numerical simulation, which was performed using the computational model proposed in Section 2. This made it possible to increase the speed of the calculation, reduce its sensitivity to initial and boundary conditions, and make decisions regardless of the flow regime of combustion products. To determine the optimal values of a set of parameters that

determined the desired contour, the methods of coordinate descent and the golden section were used. The design problem was considered solved when the modulus of the maximum deviation in the nozzle contours, obtained in two consecutive iterations, did not exceed 0.001.

Using the proposed method using polynomials of degrees 2, 3, and 4, the contours of optimal nozzles were obtained, which were compared with the contours obtained by the generally accepted Rao method. All circuits were designed for one prototype engine - RD-107. This made it possible to introduce additional constructive constraints in the form of a system of coupling equations, thus simplifying the problem. The maximum value of the modulus of relative deviation between the obtained contours calculated during the comparison did not exceed 3%, which allows us to assert the correctness of the obtained results. The discrepancy is explained by the difference in the numerical modeling method used. In contrast to the characteristics method common in similar problems of contour design, the finite volume method of the Godunov type was used in the work in accordance with the selected computational model.

In the fourth chapter, using the design methodology proposed in chapter 3, a multi-section supersonic nozzle of maximum thrust for a liquid rocket engine of the first stage of a launch vehicle was obtained. For this purpose, the relevant optimization problem was formulated and solved, taking into account the features of the desired contour and the design limitation in the form of a fixed length of the nozzle. Each of its sections was approximated by a parabola, the coefficients of which, together with the lengths of the sections, formed a vector of optimized parameters. By analyzing the flight path of the first stage of the launch vehicle, the estimated pressures at the exit from each section were selected. With their help and using isentropic flow ratios, a first approximation of the nozzle contour was obtained. As a result of solving the optimization problem, a contour of a multi-section nozzle was designed, which provided maximum thrust. The evaluation of the efficiency of its work was performed by calculating the average along the trajectory of the specific impulse and comparing this value with what was obtained when using

a standard nozzle. The use of a dual-bell nozzle made it possible to increase the average specific impulse along the trajectory by 1.6%.

The scientific novelty of the obtained results is as follows:

- by constructing in the local coordinate system associated with the curvilinear border of the area, a new extended volume with a size not less than the usual finite volume, it was proved for the first time that it is possible to accurately take into account the curvilinear border of the calculation area when using Cartesian grids without reducing the stability of the calculation;

- for the first time, a generalized formula was obtained for calculating the axial component of the thrust force, which contains dimensionless coefficients in the number of sections of the nozzle in the integral of the thrust, which allows calculations for a multi-section nozzle depending on the number of sections working in the operating mode;

- using the developed methodology, which is based on the solution of the optimization problem and the use of computational modeling methods, taking into account the flight trajectory of the launch vehicle, the contour of a multi-section nozzle was designed for the first time, which provides maximum thrust under the given design limitations, which allowed to increase the average specific impulse along the trajectory liquid rocket engine.

The practical significance of the obtained results is as follows:

- a computational model of two-dimensional internal flows of combustion products in the nozzles of liquid rocket engines was developed, which can be used to calculate arbitrary internal flows of an inviscid compressible gas of constant chemical composition;

- the use of the developed computational model, which is based on the application of Cartesian grids and the method of extended cells for setting boundary conditions on the curvilinear border of the calculation area, allows numerical simulation of the two-dimensional flow of an inviscid compressible gas faster than existing models that are implemented in commercial packages programs;

– the use of developed models, methods and algorithms allows automating the process of building the optimal contour of a multi-section nozzle.

The main results of the work were published in 10 scientific works: 5 articles in scientific specialized publications of Ukraine, two of them were published in the publication of category A, which is included in the international scientific and metric database Scopus and belongs to the third quartile Q3, all others - in publications of category B; 1 abstract of the report in the collection of the all-Ukrainian scientific conference and 4 abstracts of the reports in the collections of the international scientific conferences.

Keywords: liquid-propellant rocket engine, supersonic nozzle, nozzle contour optimization, computational modeling, finite volume method, extended cells method.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Дубровский И. Д., Бучарский В. Л. Метод постановки граничных условий при численном решении задач газодинамики в областях сложной формы. *System Design and Analysis of Aerospace Technique Characteristics*. 2022. Т. 27, № 2. С. 27–34. URL: <https://doi.org/10.15421/471920>
2. Dubrovskiy I., Bucharskyi V. The application of the extended cells method to simulate the flow of combustion gases in the lpre chamber. *Journal of Rocket-Space Technology*. 2023. Vol. 31, no. 4. P. 32–39. URL: <https://doi.org/10.15421/452305>
3. Дубровський І. Д. Результати проектування надзвукового сопла з подвійним розширенням для рідинного ракетного двигуна першого ступеня методами обчислювального аналізу. *Aerospace Technic and Technology*. 2023. № 6. С. 14–21. URL: <https://doi.org/10.32620/aktt.2023.6.02>

Статті, які входять до міжнародних наукометричних баз даних

4. Dubrovskiy I., Bucharskyi, V. Development of a method of extended cells for the formulation of boundary conditions in numerical integration of gas dynamics equations in the domains of a curvilinear shape. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5, no. 7(107). P. 74–82. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.213795>.
5. Dubrovskiy I., Bucharskyi V. Devising a method to design supersonic nozzles of rocket engines by using numerical analysis methods. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 6, no. 1(126). P. 61–67. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.290583>

Тези доповідей

1. Дубровский И. Д., Бучарский В. Л. Метод постановки граничных условий при численном решении задач газодинамики в областях сложной формы. *XXI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»*: Збірник тез., м. Дніпро, 10–12 квітня 2019 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2019. С. 130.
2. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Моделирование процессов в камере ракетного двигателя на жидком топливе в невязкой постановке. *6-а Міжнародна науково-практична конференція «International forum: Problems and scientific solutions»*, м. Мельбурн, 6–8 листопада 2020 р. / CSIRO Publishing House. Мельбурн, 2020. С. 708–712.
3. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Вплив граничних умов на виході з розрахункової області на результати чисельного моделювання течії продуктів згоряння у камері РРД. *XXIV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»*: Збірка тез., м. Дніпро, 25–27 травня 2022 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2022. С. 98.
4. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Використання методу розширених об'ємів для чисельного моделювання надзвукової течії газу в областях з різною геометрією. *XXV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»*: Збірник тез., м. Дніпро, 12–14 квітня 2023 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2023. С. 144–145.
5. Dubrovskiy I., Bucharskyi V. Statement of the problem of designing a liquid rocket engine dual bell nozzle of the maximum thrust using the direct method of the calculus of variations. *Challenges and issues of modern science: All-Ukrainian Scientific and Practical Conference materials*. Dnipro, 31 May 2023 / Oles Honchar Dnipro National University. Dnipro, 2023. P. 22–28.

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СУЧАСНИХ МЕТОДИК ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ СОПЕЛ РРД.....	23
1.1 Огляд існуючих методик проєктування надзвукової частини контуру камери РРД	23
1.1.1 Вихідні положення при проєктуванні надзвукового сопла.....	23
1.1.2 Класичні методи.....	25
1.1.3 Методики, що використовують розв'язок оптимізаційної задачі	29
1.1.4 Сучасні методи.....	30
1.1.5 Методи проєктування багатосекційних сопел.....	31
1.2 Методи чисельного моделювання течії нев'язкого газу	32
1.2.1 Дискретизація розрахункової області.....	33
1.2.2 Проблеми декартових сіток при криволінійній геометрії	36
1.2.3 Методи рішення проблеми дробових об'ємів.....	37
1.3 Постановка задачі дослідження.....	42
Висновки до розділу 1	43
РОЗДІЛ 2 ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕЧІЇ НЕВ'ЯЗКОГО СТИСЛИВОГО ГАЗУ У СОПЛАХ РРД.....	44
2.1 Метод скінченних об'ємів.....	44
2.1.1 Математична модель потоку продуктів згоряння	44
2.1.2 Чисельний розв'язок рівнянь математичної моделі.....	48
2.2 Метод розширених об'ємів постановки граничних умов.....	54
2.2.1 Одновимірний випадок	54
2.2.2 Двовимірний випадок.....	56
2.3 Верифікація обчислювальної моделі	62
2.3.1 Одновимірний випадок	62
2.3.2 Двовимірний випадок.....	66
Висновки до розділу 2	76
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИКА ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ СОПЕЛ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ	79
3.1 Постановка задачі оптимізації.....	79

3.1.1 Залежність осьової складової тяги від форми контуру для багатосекційного сопла	79
3.1.2 Цільова функції та параметри, що оптимізуються, для багатосекційного сопла	82
3.2 Алгоритм розв'язку задачі проєктування контуру багатосекційного сопла	87
3.3 Верифікація методу проєктування	89
3.3.1 Розв'язок задачі проєктування	89
3.3.2 Порівняння результатів	92
Висновки до розділу 3	94
РОЗДІЛ 4 ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВОГО БАГАТОСЕКЦІЙНОГО СОПЛА ДЛЯ ДВИГУНА ПЕРШОГО СТУПЕНЯ РАКЕТИ-НОСІЯ	96
4.1 Постановка задачі оптимізації контуру сопла	96
4.2 Розв'язок задачі проєктування.....	99
4.3 Оцінка ефективності багатосекційного сопла	104
Висновки до розділу 4	107
ВИСНОВКИ.....	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	110

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Велика кількість державних та приватних компаній і значна конкуренція – характерні риси сучасного ринку пускових послуг. Для досягнення успіху на ньому необхідно раніше за всіх запропонувати і реалізувати спосіб доставки корисного вантажу на орбіту Землі при умові забезпечення мінімальної вартості процесу. Для цього потрібна максимальна ефективність роботи кожної компоненти ракети-носія та мінімальний час, витрачений на її проєктування. Враховуючи, що рідинний ракетний двигун (РРД) є однією із найбільш складних компонент ракет, дослідження, спрямовані на підвищення ефективності роботи його конструкції та прискорення способів її проєктування, виходять на перший план.

Важливою частиною камери кожного ракетного двигуна є надзвукове сопло. Від ефективності його роботи залежить якість перетворення потенціальної енергії продуктів згоряння в кінетичну, що напряму впливає на створення тяги двигуном. Класичні профільовані сопла на сьогодні вичерпали можливості геометричної оптимізації свого контуру та досягли границі ефективності у своєму застосуванні. Крім цього, їхнє використання в умовах значної зміни висоти польоту ракети-носія призводить до суттєвих втрат ефективності, оскільки більшу частину польоту вони працюють у нерозрахунковому режимі. Для подолання цього недоліка можуть бути використані сопла нової форми, які підлаштовуються під умови навколишнього середовища. Основні їхні переваги полягають у відсутності рухомих частин у конструкції та можливості автоматичної зміни режиму роботи в залежності від висоти польоту. З цих причин на сьогодні актуальним питанням є проєктування сопел нової форми, зокрема, сопел з подвійним розширенням.

На сьогодні існує обмежена кількість методик проєктування контурів таких сопел. Їхніми основними недоліками є складність отримання контуру

сопла, що забезпечуватиме максимальну тягу, неможливість здійснювати розрахунки при наявності конструктивних обмежень на геометричні характеристики сопла та відсутність ефективних способів розрахунку. У результаті це призводить до зменшення ефективності роботи спроектованих сопел, зниженню універсальності методики проєктування та збільшенню часу на проєктування.

Таким чином, від властивостей методики проєктування залежить ефективність конструкції та, як наслідок, конкурентоспроможність виробника на ринку. Тому розглянуті в дисертаційній роботі питання є актуальними і своєчасними.

Мета і задачі дослідження.

Мета роботи полягає у створенні ефективної методики проєктування багатосекційного надзвукового сопла рідинного ракетного двигуна, яке забезпечуватиме максимальну тягу при заданих конструктивних обмеженнях, із використанням методів обчислювального моделювання.

Для досягнення мети у роботі було поставлено і виконано наступні задачі:

- проаналізувати існуючі методики проєктування сопел рідинних ракетних двигунів та методи моделювання газодинамічних процесів всередині них;
- розробити ефективну обчислювальну модель для розрахунку параметрів газодинамічних потоків в камері рідинного ракетного двигуна;
- розробити метод постановки граничних умов для інтегрування скінченних об'ємів на границі розрахункової області при застосуванні декартових сіток;
- розробити методику проєктування надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги із використанням розробленої обчислювальної моделі та можливістю врахування конструктивних обмежень, накладених на геометричні параметри сопла;

– спроектувати контур багатосекційного сопла за допомогою розробленої методики та порівняти його ефективність із стандартним соплом.

Об'єкт дослідження – газодинамічні процеси в надзвукових соплах рідинних ракетних двигунів.

Предмет дослідження – геометричні та енергетичні характеристики надзвукових сопел рідинних ракетних двигунів.

Методи дослідження:

- критичний аналіз існуючих досліджень;
- методи чисельного моделювання газодинамічних процесів у рідинних ракетних двигунах;
- чисельні методи розв'язання багатовимірних задач оптимізації;
- методи теорії подібності та розмірності для забезпечення масштабованості отриманих результатів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

– шляхом побудови у локальній системі координат, пов'язаній із криволінійною границею області, нового розширеного об'єму з розміром не менше звичайного скінченного об'єму вперше доведено можливість без зменшення стійкості розрахунку точно враховувати криволінійну границю розрахункової області при використанні декартових сіток;

– вперше отримано узагальнену формулу для розрахунку осьової складової сили тяги, яка містить безрозмірні коефіцієнти у кількості секцій сопла в інтегралі тяги, що дозволяє здійснювати розрахунки для багатосекційного сопла в залежності від кількості секцій, працюючих на розрахунковому режимі;

– з використанням розробленої методики, яка ґрунтується на розв'язанні задачі оптимізації та використанні методів обчислювального моделювання, з урахуванням траєкторії польоту ракети-носія вперше спроектовано контур багатосекційного сопла, яке забезпечує максимальну тягу при заданих конструктивних обмеженнях, що дозволило збільшити середній за траєкторією питомий імпульс рідинного ракетного двигуна.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується їхнім узгодженням із відомими та доступними результатами, які були отримані за допомогою існуючих та перевірених методів розрахунку.

Практичне значення одержаних результатів полягає у наступному:

- розроблено обчислювальну модель двовимірних внутрішніх течій продуктів згоряння у соплах рідинних ракетних двигунів, яка може використовуватися для розрахунку довільних внутрішніх течій невязкого стисливого газу постійного хімічного складу;
- використання розробленої обчислювальної моделі, яка базується на застосуванні декартових сіток та методу розширених об'ємів для постановки граничних умов на криволінійній границі розрахункової області, дозволяє здійснювати чисельне моделювання двовимірної течії невязкого стисливого газу швидше, аніж існуючі моделі, які реалізовано в комерційних пакетах програм;
- застосування розроблених моделей, методів та алгоритмів дозволяє автоматизувати процес побудови оптимального контуру багатосекційного сопла.

Особистий внесок здобувача полягає у наступному:

- проведенні критичного аналізу сучасних методик проєктування контурів сопел рідинних ракетних двигунів та методів обчислювальної газової динаміки, що використовуються для моделювання процесів у камері рідинних ракетних двигунів;
- розробці двовимірного концепту постановки граничних умов методом розширеного об'єму;
- розробці обчислювальної моделі для моделювання газодинамічних процесів у камері рідинних ракетних двигунів та алгоритмізації її в середовищі Qt;
- розробці методики проєктування надзвукових сопел максимальної тяги та алгоритмізації її в середовищі Qt;

– верифікації моделей та методик і обробці результатів чисельних розрахунків.

Постановка задач дослідження, узагальнення та обговорення отриманих результатів, розробка концепції ефективного методу постановки граничних умов на криволінійній границі розрахункової області виконувалась спільно із науковим керівником, доц., к.т.н. Бучарським В. Л.

Публікації.

За темою дисертації опубліковано 5 статей, одна з них немає співавторів [58]. Усі статті входять до переліку наукових фахових видань України. Дві з них опубліковані у виданні категорії А, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus [39, 53] та відноситься до третього квартилю Q3.

Апробація результатів дисертації.

Доповіді з основними результатами дисертаційної роботи були розглянуті на 6-й Міжнародній науково-практичній конференції «International forum: Problems and scientific solutions» (Мельбурн, 2020), XXI, XXIV та XXV Міжнародній науково-практичній конференції «Людина і Космос» (Дніпро, 2019, 2022, 2023) та I Всеукраїнській конференції «Виклики та проблеми сучасної науки» (Дніпро, 2023).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у рамках держбюджетної теми «Дослідження процесів у двигунних та енергетичних установках космічної техніки та енергетичних системах господарчого призначення на базі нетрадиційних джерел енергії», номер держреєстрації 0119U101165, ФТФ-26-19, 2019–2021.

Структура та обсяг дисертації.

Робота представлена на 117 сторінках, містить 40 рисунків та 17 таблиць, складається зі вступу, чотирьох основних розділів, висновку та списку використаних джерел, що містить 83 найменування.

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СУЧАСНИХ МЕТОДИК ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ СОПЕЛ РРД

1.1 Огляд існуючих методик проєктування надзвукової частини контуру камери РРД

1.1.1 Вихідні положення при проєктуванні надзвукового сопла

Ідеальним профільованим соплом називається сопло з ізоентропічною течією і однорідним потоком продуктів згоряння на зрізі сопла, паралельним його осі.

Задача профілювання контуру надзвукового сопла полягає в побудові такого контуру, при якому газ розганяється до заданої швидкості без утворення стрибків ущільнення, а рух потоку спрямовується або під певним заданим ним кутом або паралельно осі сопла. В такому випадку контур сопла відповідає певній лінії току у потоці продуктів згоряння [1].

По довжині поздовжнього перерізу ідеального сопла можна виділити наступні основні ділянки, які характеризують процеси, що протікають у соплі (рис. 1.1).

I. Область, що знаходиться ліворуч від поверхні АОА', - це область дозвукової течії газу. В ній відбувається розгін дозвукового потоку газу до критичної швидкості.

II. Поверхня АОА' – поверхня, де швидкість руху газу досягає швидкості звуку в кожній точці. У загальному випадку її форма може бути як пласкою, так і опуклою. Вона визначається контуром дозвукової частини сопла.

III. Область $AA_nO_nA'_nA'$ – область розширення. У цій області відбувається прискорення газу. На ділянці AA_n виникає бескінечна кількість слабких хвиль розрідження $A_1C'_1, A_2C'_2, \dots A_nC'_n$, які є характеристиками потоку. При переході крізь ці хвилі відбувається зменшення тиску та розгін

надзвукового потоку. Кут нахилу вектору швидкості біля стінки відносно осі сопла неперервно збільшується і досягає максимуму в точці A_n .

IV. Області $A_n O_n C_n$ та $A'_n O_n C'_n$ – області вирівнювання потоку. У них відбувається подальший розгін газу та вирівнювання напрямку його руху. Контур має проектуватися таким чином, щоб в точках $C_1, C_2, \dots C_n$ не відбувалося відбиття волн розрідження $A_1'C_1, A_2'C_2, \dots A_n'C_n$. Для цього необхідно, щоб напрямком стінки збігався з напрямком швидкості потоку. Кут нахилу вектору швидкості та відповідно контуру сопла відносно його осі від точки A_n до точки C_n неперервно зменшується до заданого значення.

V. Область $C_n O_n C'_n$ – область однорідного потоку газу. Для ідеального сопла швидкість течії потоку продуктів згоряння паралельна його осі.

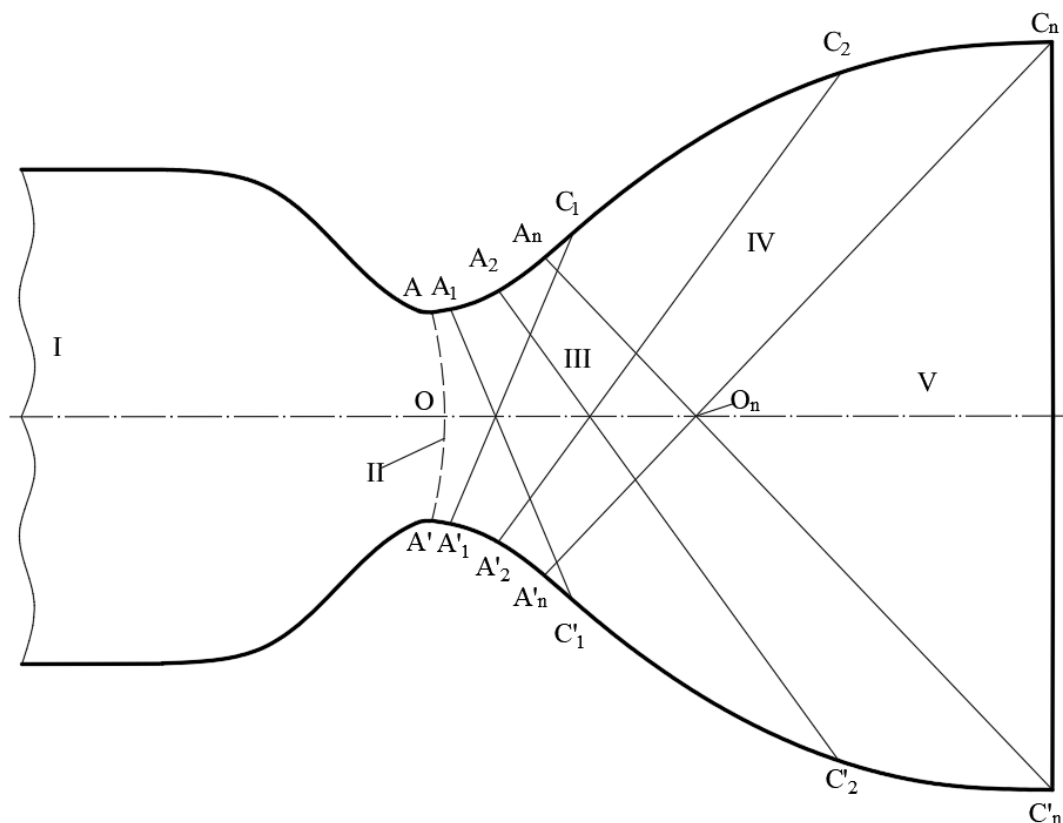


Рисунок 1.1 – Схематичне зображення картини характеристик в ідеальному соплі

З метою зменшення маси і габаритів в ракетних двигунах використовують екстремальні сопла або сопла з кутовим входом (рис. 1.2).

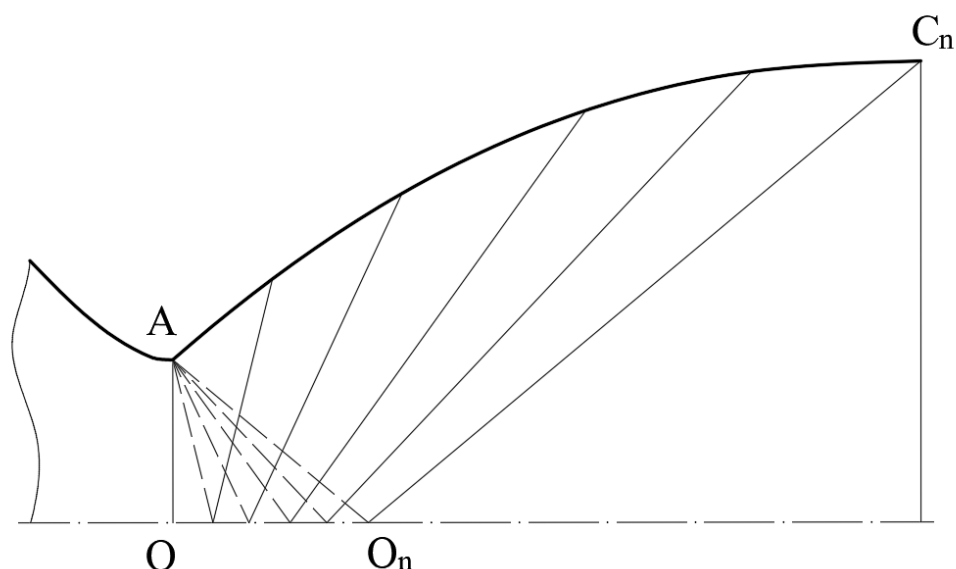


Рисунок 1.2 – Схематичне зображення картини характеристик у соплі з кутовою точкою

Їхній контур можна отримати, якщо при профілюванні сопла використовувати граничну лінію току. Тоді ділянка AA_n з рис. 1.1 виродиться в точку і область IV починатиметься від критичного перерізу сопла, де буде розташований злам контуру, в якому відбуватиметься розширення та розворот потоку до максимального кута [1, 2].

1.1.2 Класичні методи

1.1.2.1 Метод характеристик

Найбільш розповсюдженим методом отримання контуру надзвукового сопла, який використовується у багатьох методиках проєктування, є метод характеристик [1–3]. Він заснований на властивості гіперболічності рівнянь газової динаміки, які описують нев'язку надзвукову стаціонарну ізоентропійну безвихрову течію продуктів згоряння.

У такому потоці існують спеціальні криві, які називаються характеристиками. Уздовж них система диференціальних рівнянь в часткових

похідних, яка описує течію газу, вироджуються у систему звичайних диференціальних рівнянь. Для характеристик потоку з осьовою симетрією, схематично зображених на рис 1.3, вона складається із рівнянь характеристик (1.1) та рівнянь сумісності (1.3), (1.4):

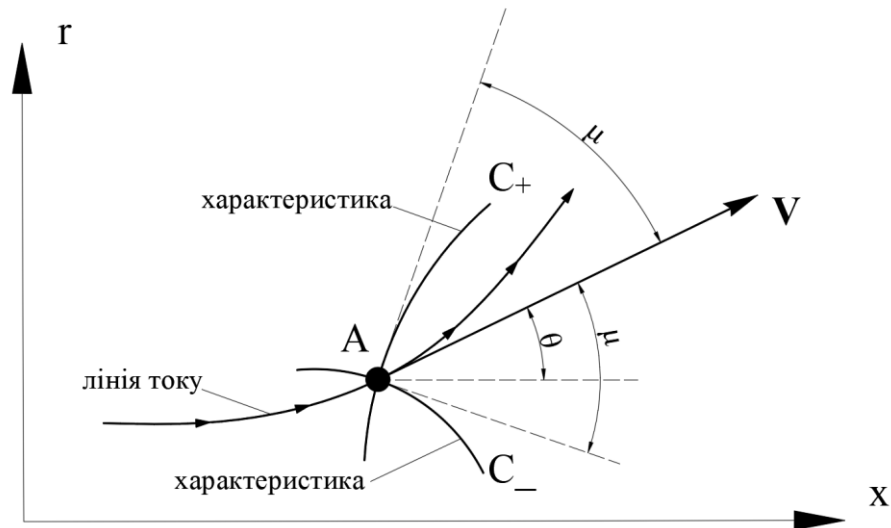


Рисунок 1.3 – Схематичне зображення двох кривих-характеристик

$$\frac{dr}{dx} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (1.1)$$

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \quad (1.2)$$

де r – вертикальна координата;
 x – горизонтальна координата;
 θ – кут повороту потоку;
 μ – кут Маха;
 M – число Маха.

Уздовж C_- характеристики:

$$d(\theta + \nu(M)) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} - \operatorname{ctg} \theta} \frac{dr}{r} \quad (1.3)$$

Уздовж C^+ характеристики:

$$d(\theta - v(M)) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} + \operatorname{ctg} \theta} \frac{dr}{r} \quad (1.4)$$

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \quad (1.5)$$

де v – функція Прандтля-Майєра [4];

γ – показник адіабати процесу.

Для реалізації методу характеристик необхідно мати криву у надзвуковому потоці, уздовж якої відомий розподіл фізичних параметрів. Тоді побудова сітки характеристик може бути виконана маршовим способом вниз за потоком, починаючи з кривої початкових даних. Розрахунок здійснюватиметься, доки не буде отримане задані величина та напрям швидкості на виході з сопла.

Початкова характеристика може бути визначена двома способами:

- 1) шляхом використання результатів інших розрахунків;
- 2) завдяки припущенню про її пласку форму.

Обидва способи мають недоліки. Перший вимагає проведення додаткових розрахунків іншими методами, що негативно позначається на швидкості та складності алгоритму проектування. Використання другого способу призводить до зменшення точності результатів поблизу критичного перерізу, тому що дійсні значення параметрів потоку відрізнятимуться від тих, що були отримані через застосування припущення.

Таким чином, можна виділити декілька недоліків методу характеристик при застосуванні його для проектування надзвукового сопла рідинного ракетного двигуна:

- суттєва залежність від кривої початкових даних;
- складність виконання розрахунків при наявності поверхнею розриву параметрів потоку в розрахунковій області;

- відсутність можливості проєктувати контур сопла з метою максимізації певних характеристик його роботи;
- відсутність можливості вводити конструктивні обмеження на геометричні характеристики сопла.

Необхідно зазначити, що класичний метод характеристик може бути застосований для профілювання сопел з декількома наздуковими секціями. У такому параметри на початковій характеристиці наступної секції визначаються за параметрами на виході із попередньої.

1.1.2.2 Метод Rao

Заснований на методі характеристик метод Rao [5] дозволяє його покращити, позбувшись останніх двох недоліків. Це досягається за рахунок зведення задачі профілювання контуру сопла до розв'язку варіаційної задачі. В ній необхідно максимізувати інтеграл (1.6) за контрольною поверхнею при заданих обмеженнях постійної масової витрати крізь кожний переріз сопла (1.8) та фіксованої довжини контуру (1.9).

$$I = \int f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 dy \rightarrow \max \quad (1.6)$$

$$f_1 = p - p_a + \rho V^2 \frac{\sin(\phi - \theta) \cos \theta}{\sin \phi} y \quad (1.7)$$

$$f_2 = \rho V \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} y \quad (1.8)$$

$$f_3 = \operatorname{ctg} \phi \quad (1.9)$$

де y – вертикальна координата;

λ_2, λ_3 – множники Лагранжа, які відповідають обмеженням (1.8) та (1.9) відповідно.

p, ρ, V – статичний тиск, густина та швидкість потоку продуктів згоряння;
 p_a – статичний тиск навколишнього середовища;
 θ – кут швидкості потоку відносно осі сопла;
 ϕ – кут нахилу контрольної поверхні до осі сопла.

Для визначення контрольної поверхні та контуру сопла використовуються метод характеристик та співвідношення, отримані шляхом визначення першої варіації [6] інтеграла (1.6).

У зв'язку із застосуванням методу характеристик метод Рао також суттєво залежить від початкових даних та не може бути використаний при наявності поверхонь розриву параметрів потоку в розрахунковій області. Крім цього, значним його недоліком є необхідність у суттєвій зміні математичної моделі (1.6)-(1.9) при введенні інших конструктивних обмежень або проектуванні інших типів сопл.

1.1.3 Методики, що використовують розв'язок оптимізаційної задачі

Для подолання останнього недоліку в роботі [7] було запропоновано замість варіаційної задачі розв'язувати задачу оптимізації. Для цього контур сопла був замінений параболою, коефіцієнти якої складали вектор невідомих параметрів. У якості цільової функції використовувалась формула тяги як суми сил тиску та потоку імпульсу через критичний переріз та інтеграла сил тиску уздовж стінки сопла. Її розрахунок виконувався шляхом чисельного моделювання за допомогою модифікованого метода характеристик.

Основною особливістю такого підходу є підвищені вимоги до ефективності методу чисельного моделювання, оскільки його треба здійснювати на кожному кроці ітеративного процесу розв'язку оптимізаційної задачі для отримання значення цільової функції.

Також, крім недоліків притаманних використанню метода характеристик, розглянутий спосіб у його первісному вигляді не може бути використаний для проектування сопл, які складаються із декількох секцій.

1.1.4 Сучасні методи

У роботах [8, 9] показані результати використання дуг кіл для профілювання контуру сопла максимальної тяги. Розглянутий метод ґрунтується на геометричному підході і не враховує справжньої картини течії продуктів згоряння всередині сопла. Причиною цього принципова відсутність в алгоритмі методу процесу чисельного моделювання течії продуктів згоряння. Також результати методу погіршуються зі зменшенням ступеня розширення двигунів, що проєктуються, тому його застосування повинно бути обмежене профілюванням сопел, що працюють у безповітряному просторі. Варіантом подолання цих труднощів може бути застосування більш комплексного підходу, що враховуватиме розподіл усіх фізичних параметрів уздовж камери. Саме це використано у роботі [10], де для профілювання оптимальних сопел застосовувався метод характеристик разом із розв'язком задачі оптимізації вільної форми. Замість методу характеристик у дослідженні [11] використовувався програмний пакет сімейства Rocflam [12]. Це дозволило зробити розрахунки більш стійкими та проводити їх незалежно від картини течії продуктів згоряння у соплі. Але залишилось невирішеним питання пов'язане з ефективністю розрахунків. Причиною цього є використання у пакеті Rocflam структурованих криволінійних неортогональних сіток, що значною мірою ускладнюють розв'язок рівнянь, які описують течію продуктів згоряння.

Альтернативний підхід до профілювання сопел максимальної тяги у застосуванні до гіперзвукових двигунів запропонований у роботах [13, 14]. В них як початкова точка відліку використовується точка всередині сопла, де повинні бути задані число Маха, кут потоку і відносна масова витрата. Кожен з цих параметрів має різний вплив на результуючий контур, тому виникають об'єктивні труднощі, пов'язані із необхідністю визначення їхніх коректних значень перед початком проєктування контуру сопла.

Не дивлячись на те що усі розглянуті дослідження належать авторам іноземного походження, необхідно зазначити вагомий вклад вітчизняних дослідників, зокрема, дніпровської школи ракетобудування Пріснякова В. Ф., Махіна В. А. [15], Коваленко Н. Д., Стрельникова Г. О. [16–18], здійснених у напрямку динаміки та розробки способів керування газовими потоками у рідинних ракетних двигунах та, зокрема, їх соплах.

1.1.5 Методи проєктування багатосекційних сопел

Сопло з подвійним розширенням є найпростішим прикладом багатосекційних сопел. Типовий контур такого сопла складається з двох різних секцій, які з'єднанні між собою у точці зламу [19]. Кожна з них профілюється на певне значення атмосферного тиску з метою збереження ефективності роботи при зміні висоти польоту, тому застосування подібних сопел дозволяє збільшити ефективність роботи ракетного двигуна. Так у [20] було встановлено, що сопло з подвійним розширенням дозволяє на 12% збільшити масу корисного вантажу у порівнянні зі звичайним соплом з тією ж величиною геометричного ступеня розширення.

Для профілювання сопел з подвійним розширенням у більшості випадків використовують метод характеристик [21], або апроксимують секції контуру декількома степеневими поліномами [22], виходячи з певних рекомендацій. Крім цього, існують певні спроби модифікації цих методів. Так у дослідженні [23] автори фокусувалися на максимізації тяги сопла, а у роботі [24] сопло проєктувалося з конструктивним обмеженням по його повній довжині. Проте на сьогодні відсутні комплексні методи, які б дозволили спроектувати контур сопла з подвійним розширенням, який при певних конструктивних обмеженнях генеруватиме максимальну тягу.

1.2 Методи чисельного моделювання течії нев'язкого газу

Зі зробленого огляду існуючих методів видно, що розв'язок задачі проєктування сопла максимальної тяги при наявності певних конструктивних обмежень потребує застосування методів чисельного моделювання для визначення параметрів течії продуктів згоряння. Від їх ефективності залежить швидкість розв'язку задачі. Під ефективністю або економічністю методу у подальшому тексті мається на увазі термін *computational efficiency*, який у західній літературі [25, 26] використовують для характеристики чисельних методів з точки зору використання обчислювальних ресурсів та швидкості здійснення розрахунків.

Для чисельного моделювання течії нев'язкого газу зазвичай використовують методи характеристик, скінченних різниць [27] та скінченних об'ємів [28]. Два останні методи на сьогодні широко використовуються як у світі, так і у вітчизняному науковому просторі для розв'язку широкого спектру задач газової динаміки: у якості прикладу можна навести роботи відомого вітчизняного дослідника Приходько О. А. та його співавторів [29–31]. Проте у дисертаційній роботі використовувався лише метод скінченних об'ємів, оскільки його головною перевагою є природне виконання інтегральних законів збереження, закладене при отриманні його розрахункових співвідношень. На відміну від значень в точках сітки, як у методах характеристик та скінченних різниць, метод скінченних об'ємів оперує середніми по її об'ємам значеннями. Це дозволяє задовольнити законам збереження як локально – для кожного об'єму, так і глобально – для всієї розрахунковій області. Тому метод скінченних об'ємів краще відображає сутність процесів газової динаміки, зокрема, тих, що відбуваються в камері рідинних ракетних двигунів.

Одним з основних етапів чисельного моделювання методом скінченних об'ємів є інтегрування системи рівнянь газової динаміки в об'ємах сітки. Це може бути здійснене явним і неявним чином [28]. З метою збереження

обчислювальної ефективності процесу моделювання у роботі розглядалися лише явні методи, оскільки на відміну від неявних вони не потребують застосування ітераційних методів для розв'язку системи алгебраїчних рівнянь на кожному кроці за часом. Крім того, явні методи більш відповідні до розв'язку системи рівнянь невязкого газу, оскільки вони є рівняннями гіперболічного типу [32].

1.2.1 Дискретизація розрахункової області

У загальному випадку сітки, що використовуються для дискретизації розрахункової області разом із методом скінченних об'ємів, можна поділити на дві великі групи: неструктуровані (рис. 1.4а) та структуровані (рис. 1.4б) [28].

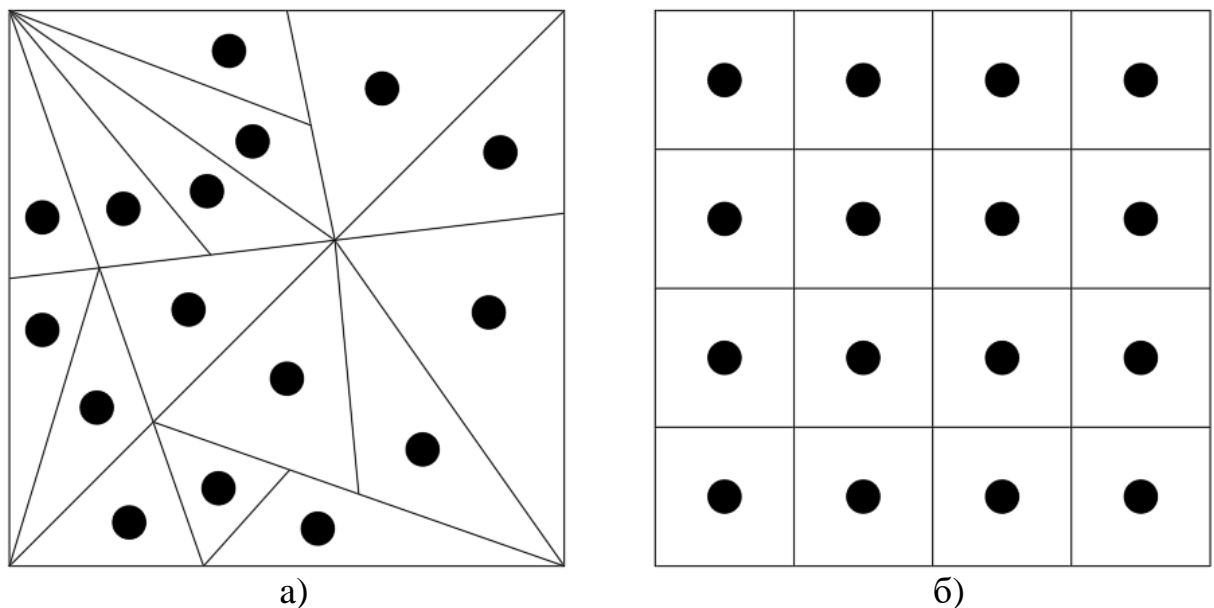


Рисунок 1.4 – Структуровані (а) та неструктуровані (б) сітки

Найбільш суттєвою перевагою сіток першої групи є можливість їхнього застосування для геометрії будь-якої конфігурації. Це досягається за рахунок змінної кількості сусідніх об'ємів для кожного окремого об'єму, їхньої

довільної геометрії часто із непаралельними осям глобальної системи координат сторонами. З іншого боку, це призводить до появи наступних недоліків:

- підвищена складність розрахунків потоків через границі скінченних об'ємів внаслідок не співпадіння границь з координатними напрямками;
- низька ефективність алгоритму розрахунків через необхідність здійснення геометричних перетворень для кожного об'єму сітки на кожній його ітерації;
- підвищена складність використання алгоритмів високого порядку точності;
- необхідність збереження додаткової інформації щодо з'єднань між об'ємами сітки;
- зниження точності розрахунків через можливість наявності значно деформованих за формою об'ємів.

Усіх цих недоліків можна уникнути, якщо використовувати структуровані сітки. У порівнянні із неструктурованими вони дозволяють підвищити точність та швидкість розрахунків. На рис 1.5 зображена геометрія області, для якої на рис. 1.6 показані можливі варіанти структурованих сіток.

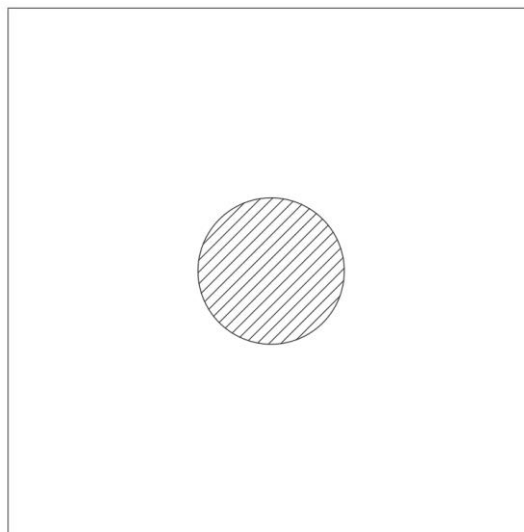


Рисунок 1.5 – Приклад розрахункової області

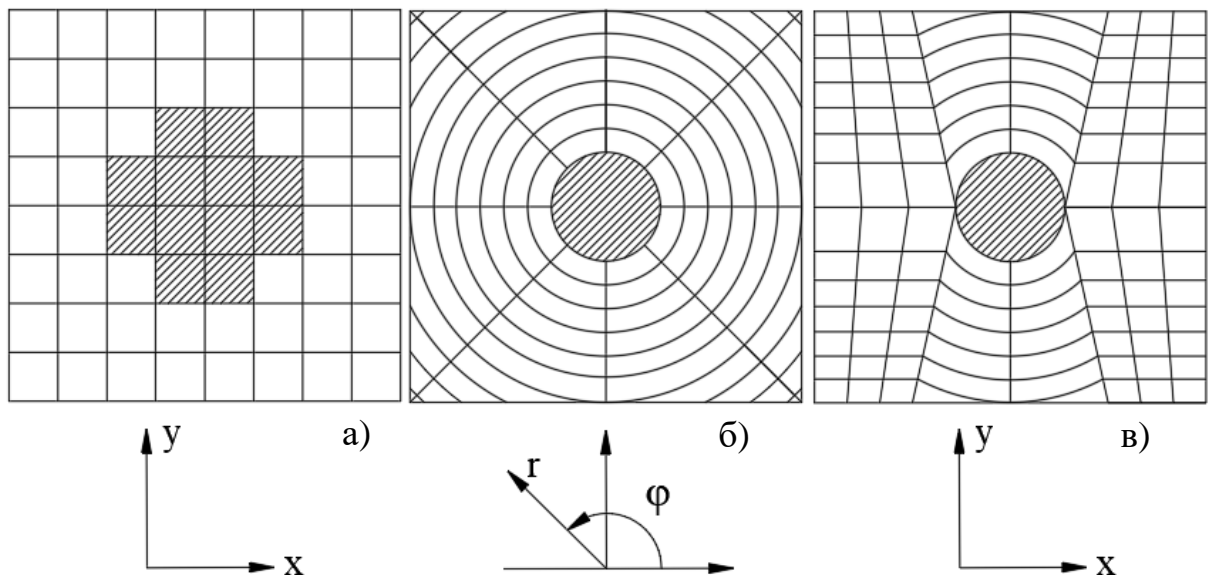


Рисунок 1.6 – Види структурованих сіток: а) декартова ортогональна; б) криволінійна ортогональна; в) декартова неортогональна.

Можна виділити три підходи для здійснення чисельного моделювання процесів течії продуктів згоряння у ракетних двигунах за допомогою таких сіток [28, 33]. Усі вони пов'язані між собою тим, що дають можливість використовувати структуровані сітки для чисельного інтегрування рівнянь газової динаміки у розрахунковій області складної форми, до якої відноситься контур камери двигуна:

- 1) використання криволінійних сіток у криволінійній системі координат (рис. 1.6б);
- 2) використання неортогональних сіток у декартовій системі координат (рис. 1.6в);
- 3) використання декартових сіток (рис. 1.6а) разом із спеціальними співвідношеннями.

Недоліком першого підходу є необхідність геометричних перетворень системи рівнянь газової динаміки у кожному елементарному об'ємі для переходу в іншу криволінійну систему координат. Недоліком другого – необхідність в геометричних перетвореннях при чисельному інтегруванні рівнянь в усіх елементарних об'ємах через непаралельність їхніх граней осям

декартової системи координат. Обидва недоліки значно знижують швидкість розрахунків, що в кінцевому результаті призводить до підвищення часу проєктування оптимального контуру сопла камери ракетного двигуна. Тому з точки зору обчислювальної ефективності застосування декартових сіток є найкращим вибором, особливо якщо границі розрахункової області паралельні осям координат. У цьому випадку повністю відсутня необхідність у здійсненні додаткових геометричних перетворень, що суттєво відображається на збільшенні швидкості розрахунків. Використання декартових сіток у сучасних програмних пакетах обмежується саме випадками з простою геометрією, де границі області співпадають з напрямками осей координат, оскільки в іншому випадку границя області не буде точно апроксимована (рис. 1.6а).

1.2.2 Проблеми декартових сіток при криволінійній геометрії

У разі моделювання процесів у розрахунковій області з такою криволінійною геометрією, як у камери ракетного двигуна, використання декартових сіток може привести до певних проблем, пов'язаних з появою дробових об'ємів [34]. На рис. 1.7 вони заштриховані, а зеленим кольором позначена їхня частина, що знаходиться в розрахунковій області. З рис. 1.7 видно, що дробові об'єми – це об'єми, через які проходить лінія границі розрахункової області і поділяє їх на дві частини: одна знаходиться всередині стінки, а інша – в газовій області. Наявність дробових об'ємів у більшості випадків призводить до двох проблем:

- 1) поява дуже малих за розміром частин скінченних об'ємів, які знаходяться в розрахунковій області. Унаслідок застосування явних методів інтегрування зменшення об'єму негативне вплине на швидкість розрахунку у зв'язку з умовою стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві [28];

- 2) складність у коректному врахуванні впливу границь області через погану їхню апроксимацію (рис. 1.7). У математичному сенсі це полягатиме у нетривіальності задачі постановки граничних умов на стінці камери.

Вирішити ці проблеми можна шляхом застосування спеціальних методів у дробових скінченних об'ємах, кількість яких значно менша порівняно до сукупного числа скінченних об'ємів, на які розбивається розрахункова область. Тому певне ускладнення алгоритму розрахунку лише у дробових об'ємах не призведе до глобального зниження швидкості розрахунків.

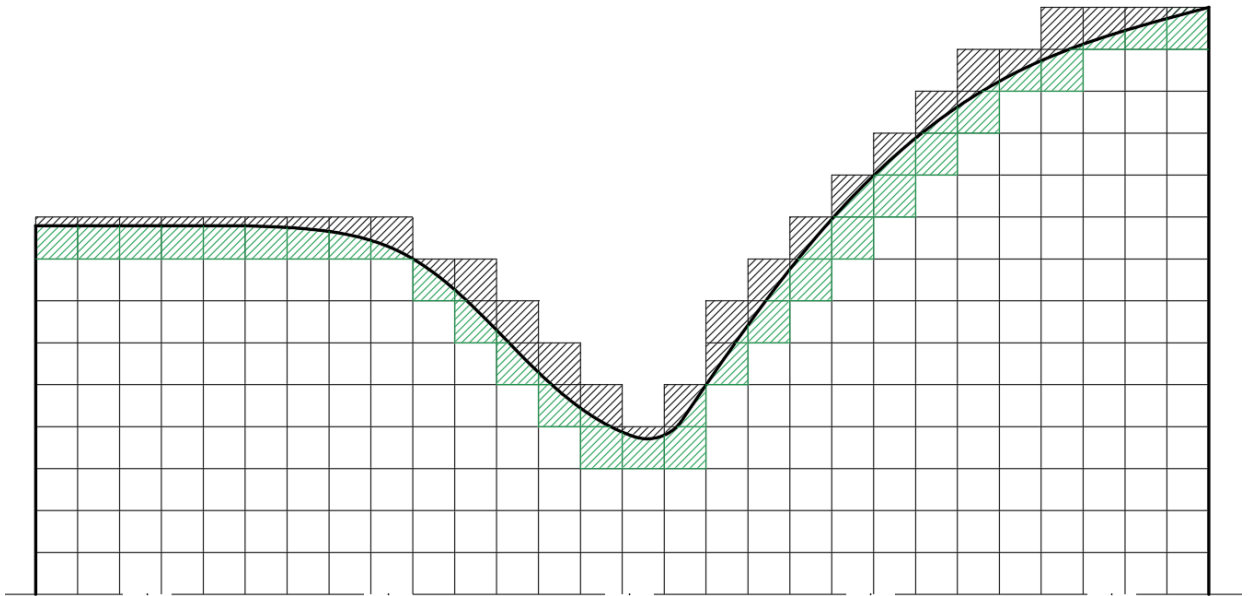


Рисунок 1.7 – Приклад апроксимації декартовою сіткою контуру камери рідинного ракетного двигуна

Звідси можна зробити висновок, що застосування явних методів інтегрування рівнянь газової динаміки на декартових ортогональних сітках дозволить здійснювати чисельне моделювання найбільш ефективним чином при умові рішення двох вищеописаних проблем. Розглянемо існуючі методи їхнього розв'язку.

1.2.3 Методи рішення проблеми дробових об'ємів

Метод злиття об'ємів [35]. Основна ідея методу – формування одного великого скінченного об'єму, шляхом злиття частини дробового об'єму, що

знаходиться в газовій області, з сусіднім скінченним об'ємом. На рис. 1.8а показана декартова сітка до злиття двох об'ємів, на рис. 1.8б – після нього.

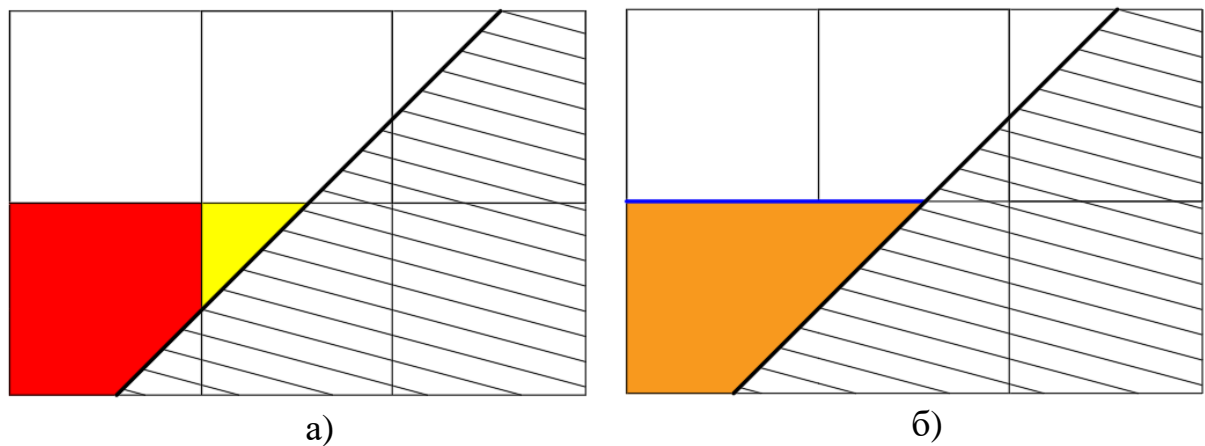


Рисунок 1.8 – Приклад злиття об'ємів: а) об'єми до злиття; б) об'єми після злиття

Користуючись рис. 1.8, можна виділити 4 недоліка методу:

- неможливість створення універсального алгоритму побудови сітки через складність визначення, з яким регулярним сусіднім скінченним об'ємом здійснювати злиття газової частини дробового об'єму;
- зниження точності розрахунків біля стінки через збільшення розміру скінченних об'ємів унаслідок їхнього злиття;
- складність застосування методів високого порядку точності через наявність злитих скінченних об'ємів довільної форми;
- складність алгоритму розрахунку потоків через сторони утвореного великого об'єму. По-перше, при розрахунку потоку через сторону, що лежить на стінці, необхідно використовувати додаткові геометричні перетворення, тому що вона у більшості випадків не буде паралельна осям глобальної декартової системи координат. По-друге, величину потоку через сторону, яка виділена синім кольором на рис. 1.8б, необхідно коректно розподілити між двома сторонами сусідніх скінченних об'ємів.

Ці недоліки значно знижують швидкість методу злиття об'ємів, тому його не можна використовувати при проектуванні оптимального контуру надзвукової частини камери.

H-box метод [36, 37]. Недоліки методу злиття об'ємів відсутні у «h-box»-методі. У ньому пропонується для інтегрування дробового скінченного об'єму побудувати на кожній з його граней кілька додаткових «h-об'ємів» і з їхньою допомогою визначити потоки через сторони дробового об'єму. На рис. 1.9 зображені чотири зелені «h-об'єми» для однієї сторони дробового об'єму у двовимірному випадку. Кожна пара «h-об'ємів» побудована відповідно до напрямку локальних осей координат: паралельно стінці (рис. 1.9.а) та перпендикулярно їй (рис. 1.9б).

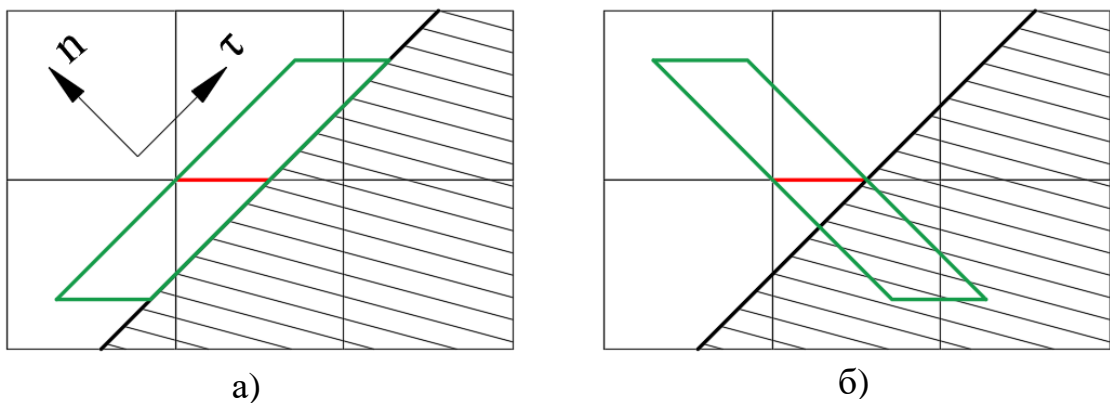


Рисунок 1.9 – «H-об'єми», побудовані для однієї сторони дробового об'єму:

а) паралельно стінці; б) перпендикулярно стінці

Стійкість рішення зберігається завдяки скороченню різниці потоків, розрахованих з допомогою «h-об'ємів» на кожній із сторін дробового об'єму. Недоліком «h-box»-методу є підвищена складність розрахунку потоків через одну грань дробового скінченного об'єму. Для цього у двовимірному випадку необхідно виконати наступні кроки:

- 1) ввести нову систему координат;
- 2) побудувати у ній чотири «h-об'єми» та знайти параметри потоку в кожному з них;

- 3) розв'язати дві задачі Рімана вздовж напрямів нової системи координат та обчислити потік через одну грань;
- 4) перейти до глобальної системи координат.

Реалізація такого алгоритму на кожному кроці за часом є ресурсномістким завданням навіть при використанні схем першого порядку точності.

Метод перерозподілу потоків [38]. Ідея методу перерозподілу потоків полягає у тому, що сумарна величина потоку крізь сторони дробового об'єму, зменшується до величини, обернено пропорційній розміру газової частини дробового об'єму. При цьому її залишок рівномірно розподіляється між усіма сусідніми об'ємами. Недоліками такого підходу є складність визначення, до яких сусідів і у якій кількості правильно розподілити залишок сумарного потоку, а також неможливість підвищення порядку точності.

Метод перерозподілу станів [39]. Метод перерозподілу станів частково включає в себе ідеї методів злиття об'ємів і перерозподілу потоків. На етапі створення сітки для кожного дробового об'єму створюється шаблон таким чином, щоб сумарний розмір його об'ємів був не менше половини розміру регулярного об'єму. Шаблон включає в себе як основний дробовий об'єм, так і сусідні регулярні та дробові. Потім для кожного з членів одного шаблону підраховується кількість його входжень до інших шаблонів. Ця інформація використовуватиметься кожного разу на етапі пост-обробки після чисельного інтегрування. На її основі розраховуватиметься середньозважений стан у дробовому об'ємі. Крім цього, для регулярних об'ємів, які входять до декількох шаблонів, також виконуватиметься перерахування стану.

Можна виділити наступні недоліки такого підходу:

- необхідність у додаткових співвідношеннях для визначення, які сусідні об'єми мають входити до шаблону;
- модифікація стану регулярних об'ємів, якщо вони входять до декількох шаблонів одночасно;

- при використанні шаблонів, що складаються із великої кількості об'ємів, можливе зменшення точності розрахунку;
- наявність етапу пост-обробки на кожному кроці розрахунку, що додає складності у загальний алгоритм методу скінченних об'ємів.

Методи занурених границь [40, 41]. Вплив границь розрахункової області на течію газу в методах цієї групи враховується неявно – шляхом модифікації вихідної системи диференціальних рівнянь. У загальному випадку в рівняння руху вводиться додаткова функція у вигляді джерельного члена, яка моделює ефект границі області. В залежності від її вигляду методи поділяються на неперервні та дискретні. У першому випадку джерельний член вводиться до всього рівняння руху, яке дійсне на всій розрахунковій області. Для цього випадку характерне зниження точності розрахунку через згладжування джерельного члена у всій області, необхідність розв'язку рівнянь всередині стінки, складність підбору функції для джерельного члена.

У другому випадку рівняння руху спочатку переводиться у дискретну форму на декартовій сітці. Потім з метою корегування значень швидкості на границі тіла у нього вводиться дискретна функція, яка приймає ненульові значення лише в дробових об'ємах. Її значення отримуються шляхом інтерполяції швидкості потоку всередину стінки таким чином, щоб на стінці задовольнялися необхідні граничні умови, наприклад, умова відсутності ковзання. Недоліками такого підходу є:

- нетривіальність підбору методу інтерполяції, від якого залежить не тільки ефективність розрахунків, а й консервативність розв'язку та коректність результатів;
- залежність розрахунку впливу границі розрахункової області від її дискретизації;
- необхідність застосування додаткових співвідношень для збереження консервативності біля стінки.

З проведеного огляду видно, що кожен з цих методів має свої недоліки, які не дозволяють використовувати декартові сітки з будь-якою геометрією

розрахункової області однаково ефективно та з достатньою точністю. Як наслідок, щоб виконання процесу проєктування оптимального контуру надзвукової частини камери рідинного ракетного двигуна здійснювалось з максимальною ефективністю, необхідно розробити альтернативний спосіб подолання проблеми дробових об'ємів. Таким чином, актуальною є задача розробки ефективного метода інтегрування рівнянь газової динаміки всередині дробових об'ємів при застосуванні декартових сіток на криволінійній розрахунковій області.

1.3 Постановка задачі дослідження

У результаті проведеного аналізу літературних даних можна зробити висновок, що сучасні методики проєктування сопел максимальної тяги мають свої обмеження, що негативно позначаються на їхній швидкодії або універсальності. Тому доцільним є проведення дослідження у напрямку розробки ефективнішої методики проєктування надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги.

Отже, мета роботи полягає у розробці методики проєктування, яка дозволить отримати контур надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги при врахуванні конструктивних обмежень та використовуватиме ефективну обчислювальну модель нев'язкої течії продуктів згоряння.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні задачі:

- проаналізувати існуючі методики проєктування сопел рідинних ракетних двигунів та методи моделювання газодинамічних процесів всередині них;
- розробити ефективну обчислювальну модель для розрахунку параметрів газодинамічних потоків в камері рідинного ракетного двигуна;

- розробити метод постановки граничних умов для інтегрування скінченних об'ємів на границі розрахункової області при застосуванні декартових сіток;
- розробити методику проєктування надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги із використанням розробленої обчислювальної моделі та можливістю врахування конструктивних обмежень, накладених на геометричні параметри сопла;
- спроектувати контур багатосекційного сопла за допомогою розробленої методики та порівняти його ефективність із стандартним соплом.

Висновки до розділу 1

1. За результатами аналізу існуючих методик проєктування надзвукових сопел показана актуальність створення нової методики, яка дозволить отримати контур сопла, що відрізнятиметься від класичного, зокрема такого, що складається із декількох секцій, забезпечує максимальну тягу і задовольняє накладеним конструктивним обмеженням.
2. Проаналізовано можливості підвищення ефективності методів чисельного моделювання газодинамічних процесів у камері рідинного ракетного двигуна як основного фактору, що впливає на швидкість процесу проєктування.
3. Визначено основні напрямки дослідження, які полягають у розробці ефективної обчислювальної моделі для розрахунку нев'язких потоків продуктів згоряння та нового методу проєктування багатосекційних надзвукових сопел.

РОЗДІЛ 2 ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕЧІЇ НЕВ'ЯЗКОГО СТИСЛИВОГО ГАЗУ У СОПЛАХ РРД

2.1 Метод скінченних об'ємів

2.1.1 Математична модель потоку продуктів згоряння

Задачі чисельного моделювання течії продуктів згоряння в камері РРД, що були розв'язані в контексті проектування її надзвукової частини, належать до класу внутрішніх задач газової динаміки [3, 42]. На рис. 2.1 показана схема розрахункової області, що використовувалася при розрахунках [43].

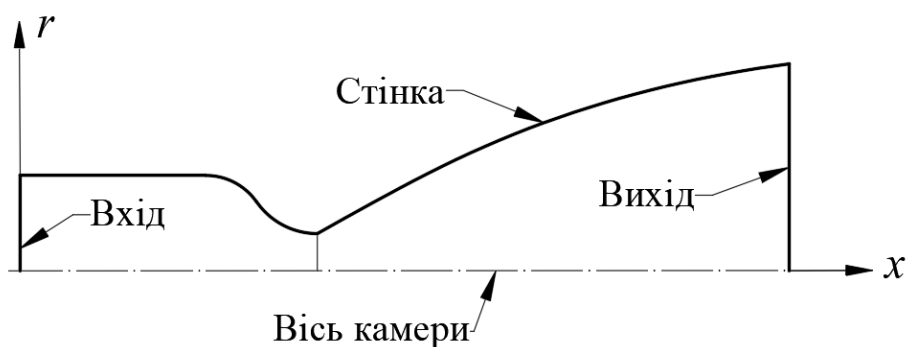


Рисунок 2.1 – Схема розрахункової області

Для опису течії продуктів згоряння всередині розрахункової області використовувалася математична модель невязкого ідеального стисливого газу постійного хімічного складу із наступних міркувань:

- врахування в'язких членів у системі рівнянь значно уповільнює процес розв'язку;
- проектування сопел рідинних ракетних двигунів зазвичай проводять саме у невязкій постановці [1, 2].

Обрана модель складається з системи нестационарних рівнянь Ейлера, яка замикається рівнянням стану Менделєєва-Клапейрона [44]. Рівняння системи (2.1), що використовувались при розрахунках, записані в інтегральній

формі для елементарного об'єму в циліндричній системі координат для випадку осьової симетрії.

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{U} dV + \oint_A (\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\mathbf{U})) dA = \mathbf{S},$$

$$\mathbf{U} = (r\rho, r\rho u, r\rho v, r\rho E)^T,$$

$$\mathbf{F} = (r\rho u, r(\rho u^2 + p), r\rho v u, r(\rho E + p)u)^T,$$

$$\mathbf{G} = (r\rho v, r\rho u v, r(\rho v^2 + p), r(\rho E + p)v)^T,$$

$$\mathbf{S} = (0, 0, p, 0)^T,$$

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$$p = (k - 1)e\rho, \tag{2.1}$$

де t – час;

V – елементарний об'єм;

\mathbf{U} – вектор змінних;

A – площа бічної поверхні елементарного об'єму;

\mathbf{F} – вектор потоків в осьовому напрямку;

\mathbf{G} – вектор потоків в радіальному напрямку;

\mathbf{S} – джерельний член;

r – радіус;

ρ – густина;

p – статичний тиск;

u – швидкість в осьовому напрямку;
 v – швидкість в радіальному напрямку;
 E – повна питома енергія;
 e – питома внутрішня енергія;
 k – показник адіабати.

Система (2.1) доповнювалася граничними умовами для кожної з границь розрахункової області з рис. 2.1.

Вхід. Для розрахунку параметрів на вході використовувались співвідношення (2.2) з фіксованими значеннями повного тиску та густини, та екстрапольованими з розрахункової області компонентами вектора швидкості. У системі (2.2) індекс 0 позначає параметр нерухомого потоку, індекс v – параметр, що розраховується на вході в камеру, індекс p – параметр, отриманий з розрахункової області.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = s_v = \frac{p_0}{\rho_0^k} \\ h_0 = h_v = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \\ u_v = u_p \\ v_v = v_p \\ \rho_v = \left(\frac{k-1}{k} \left(h_v - \frac{u_v^2 + v_v^2}{2} \right) \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ p_v = s_v \rho_v^k \end{array} \right. , \quad (2.2)$$

де s – ентропія;

p – статичний тиск;

ρ – густина;

h – питома ентальпія;

k – показник адіабати;

u – швидкість в осьовому напрямку;

v – швидкість в радіальному напрямку

Вихід. На вихідній границі параметри потоку залежали від локального числа Маха M_p , розрахованого по перпендикулярному до границі компоненту швидкості, та фіксованого значення статичного тиску навколишнього середовища p_n (2.3). У системі (2.3) індекс N позначає параметр, що розраховується на виході з камери, індекс p – параметр, отриманий з розрахункової області, n – параметр при статичному тиску навколишнього середовища.

$$M_p = \frac{u_p}{a_p} = \frac{u_p}{\sqrt{k \frac{p_p}{\rho_p}}}$$

$$\begin{cases} U_N = U_p, & M_p \geq 1 \\ U_N = (r\rho_n, r\rho_n u_p, r\rho_n v_p, r\rho_n E_p)^T, & M_p < 1 \end{cases}$$

$$\rho_n = \frac{p_n}{(k-1)e_p}, \quad (2.3)$$

де s – ентропія;

p – статичний тиск;

ρ – густина;

H – ентальпія;

k – показник адіабати;

u – швидкість в осьовому напрямку;

v – швидкість в радіальному напрямку.

Вісь камери. Параметри потоку на осі камери розраховувались із умови проковзування (2.4).

$$\begin{cases} \frac{dV_\tau}{d\tau} = 0 \\ V_n = 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

де V_τ – швидкість у дотичному до стінки напрямку;

τ – дотичний до стінки напрямок;

V_n – швидкість у нормальному до стінки напрямку;

n – нормальний до стінки напрямок.

Стінка. У зв'язку з припущенням про нев'язкий потік продуктів згоряння параметри газу на стінці отримувались із умови проковзування (2.4) аналогічно параметрам на осі [45, 46].

2.1.2 Чисельний розв'язок рівнянь математичної моделі

Для чисельного розв'язку рівнянь математичної моделі область течії розбивалася на скінченні об'єми тороїдальної форми з прямокутним поперечним перерізом. У площині ($z0R$) вони мають вигляд ортогональної прямолінійної сітки, лінії якої не співпадають з границями розрахункової області рис. 2.2. На рис. 2.2 чорною штриховкою виділені частини дробових об'ємів, які знаходяться всередині стінки, а зеленою – всередині області течії газу.

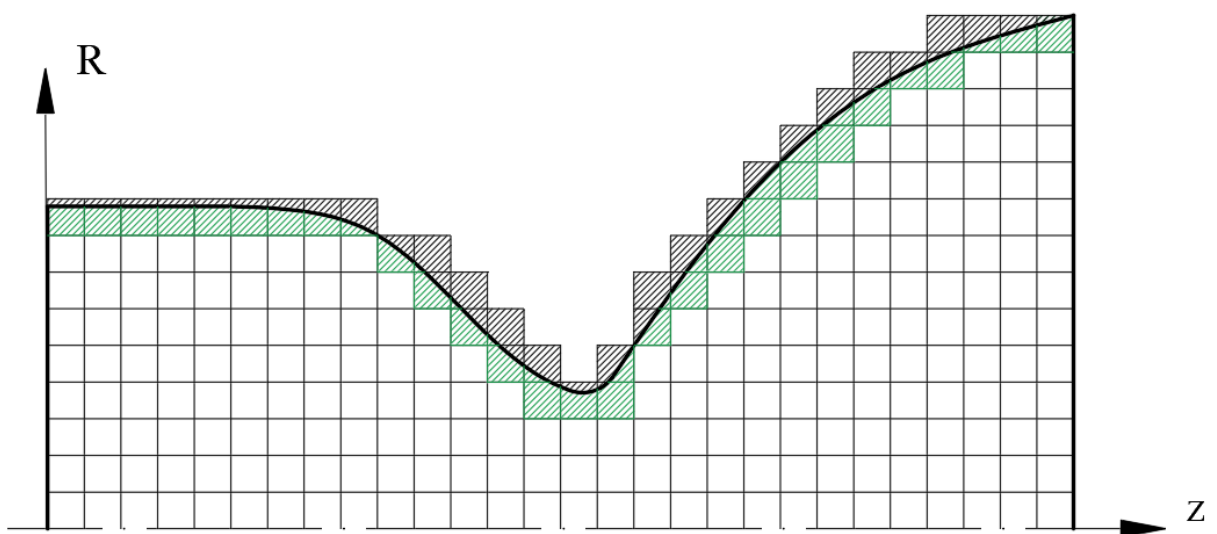


Рисунок 2.2 – Сітка в площині $z0R$

Чисельний розв'язок системи рівнянь (2.1) виконувався явним методом скінченних об'ємів типу Годунова [28, 45]. Він передбачає здійснення трьох послідовних етапів:

- 1) реконструкції параметрів потоку на границях скінченних об'ємів;
- 2) наближеного розв'язку задачі Рімана [47] на границях двох сусідніх скінченних об'ємів;
- 3) інтегрування рівнянь газової динаміки за часом.

Для чисельного розв'язку системи рівнянь (2.1) явним методом Годунова вона була записана у напівдискретному вигляді (2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{U}}{dt} = L(\hat{U}) \\ \hat{U} = \frac{1}{\Delta V} \int_V U dV \\ L(\hat{U}) = -\frac{1}{\Delta V} \left((F^R(U^R) - F^L(U^L))A_R + (G^T(U^T) - G^B(U^B))A_z - \hat{S} \right) \end{array} \right. , (2.5)$$

де \hat{U} – значення вектору змінних, середнє по скінченному об'єму;

$L(\hat{U})$ – оператор правої частини, що включає в себе реконструйовані значення вектора змінних на кожній грані об'єму;

ΔV – розмір скінченного об'єму;

F^R, F^L, G^T, G^B – чисельний потік через праву, ліву, верхню, та нижню грані скінченного об'єму відповідно;

U^R, U^L, U^T, U^B – реконструйовані значення вектору змінних на правій, лівій, верхній, та нижній грані скінченного об'єму відповідно;

A_R, A_z – площі скінченних об'ємів у вертикальному та горизонтальному напрямках відповідно;

\hat{S} – середнє за об'ємом значення джерельного члена.

Реконструкція параметрів потоку на гранях регулярних скінченних об'ємів здійснювалась за допомогою WENO [48] алгоритма третього порядку точності окремо для кожного компонента вектору змінних. Нижче показані

формули для виконання реконструкції у горизонтальному напрямку на лівій L та на правій грані R для q -го компоненту вектору змінних у скінченному об'ємі з індексом i уздовж горизонтальній осі.

$$q_i^L = \sum_{m=1}^3 \omega_m^L q_{i,m}^L,$$

$$\omega_m^L = \frac{\alpha_m^L}{\sum_{r=1}^3 \alpha_r^L},$$

$$\alpha_1^L = \alpha_1 \left(\frac{1}{10} \right), \quad \alpha_2^L = \alpha_2 \left(\frac{3}{5} \right), \quad \alpha_3^L = \alpha_3 \left(\frac{3}{10} \right),$$

$$q_{i,1}^L = P_3(\hat{q}_i, \hat{q}_{i+1}, \hat{q}_{i+2}), \quad q_{i,2}^L = P_2(\hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i, \hat{q}_{i+1}),$$

$$q_{i,3}^L = P_1(\hat{q}_{i-2}, \hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i),$$

$$q_i^R = \sum_{m=1}^3 \omega_m^R q_{i,m}^R,$$

$$\omega_m^R = \frac{\alpha_m^R}{\sum_{r=1}^3 \alpha_r^R},$$

$$\alpha_1^R = \alpha_1 \left(\frac{3}{10} \right), \quad \alpha_2^R = \alpha_2 \left(\frac{3}{5} \right), \quad \alpha_3^R = \alpha_3 \left(\frac{1}{10} \right),$$

$$q_{i,1}^R = P_1(\hat{q}_{i+2}, \hat{q}_{i+1}, \hat{q}_i), \quad q_{i,2}^R = P_2(\hat{q}_{i+1}, \hat{q}_i, \hat{q}_{i-1}),$$

$$q_{i,3}^R = P_3(\hat{q}_i, \hat{q}_{i-1}, \hat{q}_{i-2}),$$

$$\alpha_r(d_k) = \frac{d_k}{(10^{-7} + \beta_r)^2},$$

$$P_1(\hat{q}^+, \hat{q}, \hat{q}^-) = \frac{1}{3} \hat{q}^- + \frac{5}{6} \hat{q} - \frac{1}{6} \hat{q}^+,$$

$$P_2(\hat{q}^+, \hat{q}, \hat{q}^-) = -\frac{1}{6} \hat{q}^- + \frac{5}{6} \hat{q} + \frac{1}{3} \hat{q}^+,$$

$$P_3(\hat{q}^+, \hat{q}, \hat{q}^-) = \frac{1}{3} \hat{q}^- - \frac{7}{6} \hat{q} + \frac{11}{6} \hat{q}^+,$$

$$\beta(\hat{q}^+, \hat{q}, \hat{q}^-) = 2|\hat{q}^+ - 2\hat{q} + \hat{q}^-| + \frac{|\hat{q}^+ - \hat{q}^-|}{2},$$

$$\beta_1 = \beta(\hat{q}_i, \hat{q}_{i+1}, \hat{q}_{i+2}), \quad \beta_2 = \beta(\hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i, \hat{q}_{i+1}), \quad \beta_3 = \beta(\hat{q}_{i-2}, \hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i),$$

де q_i^L, q_i^R – реконструйоване значення компоненти вектору змінних на відповідно лівій та правій грані скінченного об'єму з горизонтальним індексом i ;

\hat{q}_k – значення компоненти вектору змінних, середнє по скінченному об'єму з індексом k .

Для здійснення реконструкції у вертикальному напрямку за формулами лівої сторони L розраховувалась нижня В, а за формулами правої R – верхня Т. Крім того, замість індексу у горизонтальному напрямку – i , використовувався індекс у вертикальному – j .

Реконструкція параметрів потоку на гранях скінченного об'єму на одній ітерації за часом вважалась виконаною, коли для всіх 4-х компонентів кожного вектору змінних на відповідних гранях скінченного об'єму були отримані реконструйовані значення.

Задача Рімана для визначення потоків через кожен з чотирьох граней скінченного об'єму розв'язувалась за допомогою співвідношень Лакса-Фрідрікса [47] (2.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{U}) &= \{r\rho u, r(\rho u^2 + p), r\rho v u, r u(\rho E + p)\}^T, \\ \mathbf{V}(\mathbf{U}) &= \{r\rho v, r\rho u v, r(\rho v^2 + p), r v(\rho E + p)\}^T, \\ \mathbf{F}_{i,j}^L &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}(\mathbf{U}_{i,j}^L) + \mathbf{H}(\mathbf{U}_{i-1,j}^R) - \lambda_z (\mathbf{U}_{i,j}^L - \mathbf{U}_{i-1,j}^R) \right), \\ \mathbf{F}_{i,j}^R &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}(\mathbf{U}_{i+1,j}^L) + \mathbf{H}(\mathbf{U}_{i,j}^R) - \lambda_z (\mathbf{U}_{i+1,j}^L - \mathbf{U}_{i,j}^R) \right), \\ \mathbf{G}_{i,j}^T &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{V}(\mathbf{U}_{i,j+1}^B) + \mathbf{V}(\mathbf{U}_{i,j}^T) - \lambda_R (\mathbf{U}_{i,j+1}^B - \mathbf{U}_{i,j}^T) \right), \\ \mathbf{G}_{i,j}^B &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{V}(\mathbf{U}_{i,j}^B) + \mathbf{V}(\mathbf{U}_{i,j-1}^T) - \lambda_R (\mathbf{U}_{i,j}^B - \mathbf{U}_{i,j-1}^T) \right), \\ \lambda_z &= \max(|u_{ij}| + c_{ij}), \\ \lambda_R &= \max(|v_{ij}| + c_{ij}), \end{aligned}$$

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}, \quad (2.6)$$

де $\mathbf{H}(\mathbf{U})$, $\mathbf{V}(\mathbf{U})$ – оператори потоків уздовж горизонтальній та вертикальній осей відповідно; i, j – індекси скінченних об'ємів сітки в горизонтальному та вертикальному напрямках;

$\mathbf{F}_{i,j}^L, \mathbf{F}_{i,j}^R, \mathbf{G}_{i,j}^T, \mathbf{G}_{i,j}^B$ – вектори потоків через ліву, праву, верхню та нижню грані скінченного об'єму з індексами i, j ;

λ_z, λ_R – максимальні швидкості розповсюдження збурень в потоці газу у горизонтальному та вертикальному напрямку відповідно;

$\mathbf{U}_{l,m}^K$ – реконструйоване значення вектора змінних на K -тій грані об'єма з індексами l, m ;

c – швидкість звуку.

Для чисельного інтегрування (2.5) використовувався Strong Stability Preserving (SSP) явний метод метод Рунге-Кутти третього порядку точності [49, 50] (2.7). У роботі [51] було припущено, а у [52] доведено, що обраний метод є оптимальним з точки зору допустимої величини числа Куранта та обчислювальної складності правої частини.

$$\begin{cases} \frac{\hat{\mathbf{U}}^1 - \hat{\mathbf{U}}^n}{\Delta t} = L(\hat{\mathbf{U}}^n) \\ \frac{\hat{\mathbf{U}}^2 - \hat{\mathbf{U}}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} \left(L(\hat{\mathbf{U}}^n) + L(\hat{\mathbf{U}}^1) \right) \\ \frac{\hat{\mathbf{U}}^{n+1} - \hat{\mathbf{U}}^n}{\Delta t} = \frac{1}{6} \left(L(\hat{\mathbf{U}}^n) + 4 L(\hat{\mathbf{U}}^2) + L(\hat{\mathbf{U}}^1) \right) \end{cases}, \quad (2.7)$$

де $\hat{\mathbf{U}}^n$ – середнє по об'єму відоме значення вектору змінних на n -му кроці за часом;

$\hat{\mathbf{U}}^1, \hat{\mathbf{U}}^2$ – проміжні значення вектору змінних на першому та другому підкроці метода Рунге-Кутти;

Δt – крок за часом;

\hat{U}^{n+1} – невідоме значення вектору змінних на $n+1$ -му кроці за часом.

Крок за часом, що використовувався під час інтегрування розраховувався із умови Куранта для двовимірного випадку [3] (2.8):

$$\Delta t = \frac{C_{max}}{\left(\frac{\lambda_z}{\Delta z} + \frac{\lambda_R}{\Delta R}\right)}, \quad (2.8)$$

де Δt – крок за часом;

C_{max} – заданий коефіцієнт Куранта, що менше одиниці;

λ_z, λ_R – модулі максимальних швидкостей розповсюдження збурень у потоці газу у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно;

$\Delta z, \Delta R$ – кроки сітки у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно.

Використання методів високого порядку точності обумовлене тим, що такі методи дозволяють досягнути більшої точності розв'язку на меншій за кількістю скінченних об'ємів сітки і за менший час у порівнянні із методами першого та другого порядку точності [53, 54].

Чисельна постановка граничних умов у випадку, коли границі розрахункової області співпадали з границями скінченних об'ємів, виконувалась за допомогою фіктивних об'ємів, які розташовувались ззовні розрахункової області впритул до границі. Параметри всередині них задавались таким чином, щоб на стороні сусідніх з ними регулярних скінченних об'ємів виконувались граничні умови у математичній постановці. Натомість, коли границі області та скінченних об'ємів не співпадали (в нашому випадку це бічна стінка РРД), використовувався метод розширених об'ємів.

2.2 Метод розширених об'ємів постановки граничних умов

Метод розширених об'ємів [55–57] був розроблений з метою збереження можливості ефективного застосування декартової ортогональної системи контрольних об'ємів для чисельного моделювання процесів течії газу у камері РРД. Використання методу розширених об'ємів при чисельному інтегруванні рівнянь газової динаміки у граничних зі стінкою дробових об'ємах дозволяє зберегти стійкість чисельного розв'язку на тому ж рівні, що і всередині розрахунковій області. Це досягалось за рахунок використання замість дробового об'єму нового розширеного, який мав задовольняти наступним трьом вимогам:

- 1) повністю включати в себе газову частину дробового об'єму;
- 2) мати довжини граней не менше, ніж у регулярного об'єму, який розташований всередині розрахункової області;
- 3) одна з його сторін мала лежати на стінці.

Крім цього, його побудова здійснювалась у системі координат, що пов'язана зі стінкою.

Виконання вимог 1 та 2 при побудові розширеного об'єму дозволило уникнути втрати стійкості розв'язку при використанні кроку за часом тієї величини, як у регулярних об'ємах, для явного численного інтегрування. Це пов'язано з тим, що такий об'єм не менше звичайного об'єму та повністю розташовується в газовій області на відміну від дробового об'єму, частина якого знаходиться всередині стінки. Виконання третьої вимоги дозволило спростити постановку граничних умов на стінці.

2.2.1 Одновимірний випадок

Для дослідження властивостей запропонованого методу постановки граничних умов було розглянуто одновимірний випадок. На рис. 2.3а показана ділянка одновимірної розрахункової області, вкрита сіткою із N скінченних

об'ємів таким чином, щоб останній скінченний об'єм з індексом N виявився дробовим – частково знаходився всередині стінки. Суцільною зеленою лінією на рис. 2.3а виділений розширений об'єм з індексом N' , побудований згідно з вимогами 1–3 для дробового об'єму N .

В одновимірному випадку напрям локальної системи координат стінки співпадає з глобальним напрямом x , тому на рис. 2.3 він не вказаний.

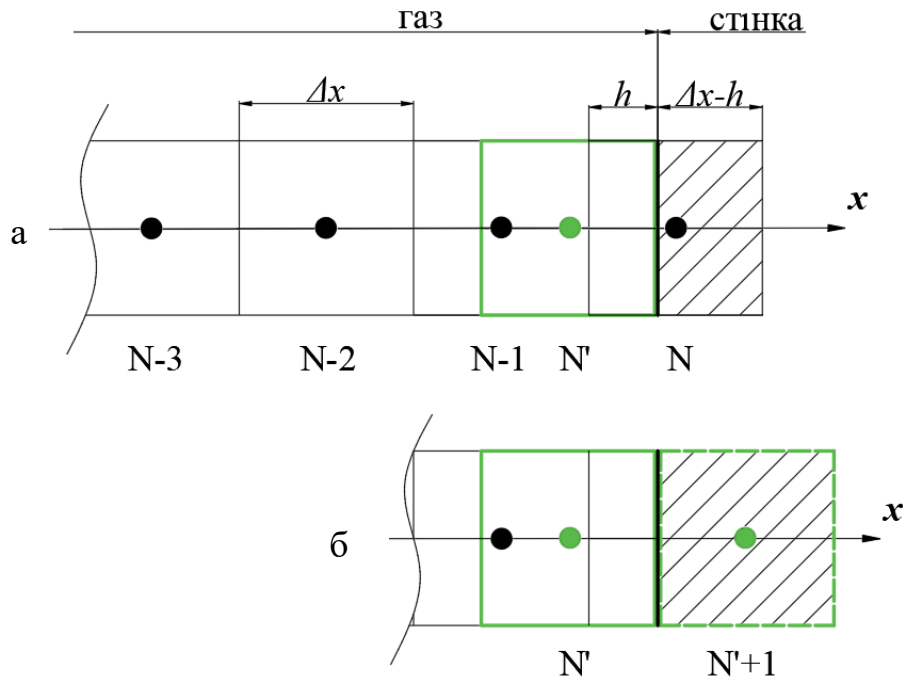


Рисунок 2.3 – Декартова сітка в одновимірному випадку: а) розширений об'єм; б) розширений та фіктивний об'єми

Стан всередині розширеного об'єму визначався як середньозважена сума станів скінченних об'ємів (2.9), які він включає в себе. До розширеного об'єму з рис. 2.3 входять газові частини двох об'ємів: дробового та сусіднього з ним регулярного. Розмір першої дорівнює h , другої – $\Delta x - h$.

$$U_{N'} = \frac{h}{\Delta x} U_N + \frac{\Delta x - h}{\Delta x} U_{N-1}. \quad (2.9)$$

Особливістю визначення стану у розширеному об'ємі за формулою (2.9) є те, що при $h \rightarrow 0$ стан у розширеному об'ємі наближатиметься до стану у регулярному об'ємі, а при $h = 0$ дорівнюватиме йому. Така ситуація може виникнути лише тоді, коли дробові об'єми відсутні, тобто коли границі розрахункової області збігаються з границями регулярних скінченних об'ємів. У такому випадку метод розширених об'ємів природньо зводиться до методу скінченних об'ємів.

Для чисельної постановки граничних умов на стороні розширеного об'єму, яка розташована на стінці, використовувалася концепція фіктивних об'ємів. Так на рис. 2.3б штриховою зеленою лінією показано фіктивний об'єм з індексом $N'+1$, побудований для розширеного. Стан у ньому визначався таким чином, щоб на стороні розширеного об'єму виконувались граничні умови на стінці.

2.2.2 Двовимірний випадок

При розв'язку задачі проєктування надзвукового сопла максимальної тяги використовувалася двовимірна сітка. На рис. 2.4 показана певна її ділянка з розширеним об'ємом та відповідними йому фіктивним й дробовим об'ємами. З рисунку видно, що розширений об'єм повністю включає в себе газову частину дробового об'єму, має довжини граней не менше звичайного об'єму та одна з його сторін лежить на стінці.

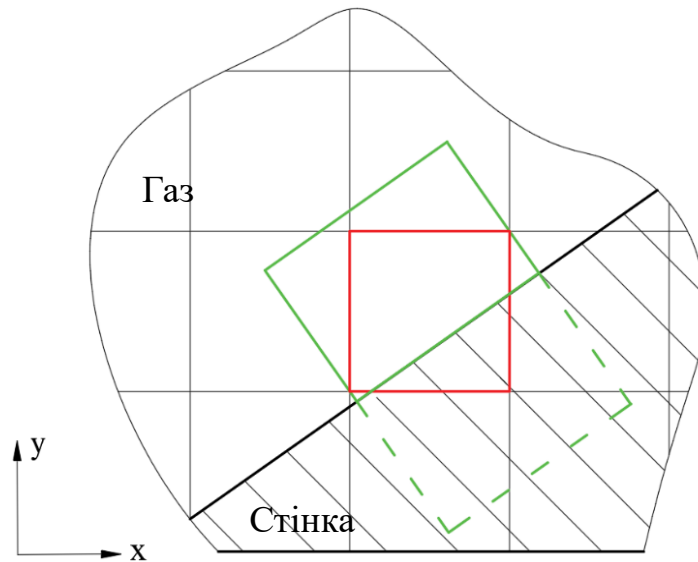


Рисунок 2.4 – Розширений (суцільний зелений), дробовий (червоний) та фіктивний (штриховий зелений) об’єми у двовимірному випадку

Інтегрування рівнянь газової динаміки в розширеному об’ємі виконувалося згідно з явним методом скінченних об’ємів типу Годунова.

Перед етапом реконструкції середнє по розширеному об’єму значення вектору змінних визначалося за формулою (2.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_p = \sum_{i=0}^k \alpha_i \hat{U}_i \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1, \text{ де } \alpha_i = \frac{V'_i}{V_p} \end{array} \right., \quad (2.10)$$

де \hat{U}_p – значення вектору змінних, середнє по розширеному об’єму;

α_i – вага тієї частини i -го звичайного об’єму, яка входить до розширеного;

\hat{U}_i – значення вектору змінних, середнє по регулярному скінченному об’єму з індексом i , що входить до розширеного;

V'_i – розмір частини регулярного об’єму, яка входить до розширеного;

V_p – розмір розширеного об’єму.

Так, розширений об'єм з рис. 2.4 складається з шести частин звичайних об'ємів. Вони зображені на рис. 2.5 різними кольорами та порядковими номерами від 1 до 6.

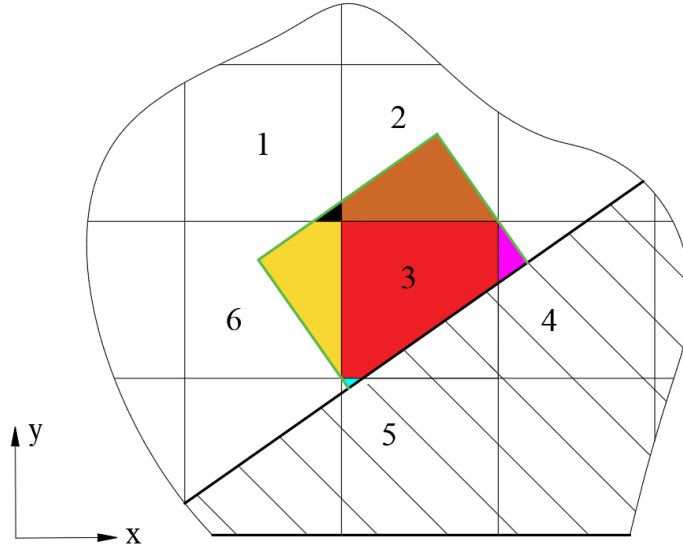


Рисунок 2.5 – Частини звичайних об'ємів, що входять до розширеного

Формула (2.10) для нього матиме вигляд (2.11):

$$\hat{U}_p = \frac{V'_6}{V_p} \hat{U}_6 + \frac{V'_1}{V_p} \hat{U}_1 + \frac{V'_2}{V_p} \hat{U}_2 + \frac{V'_3}{V_p} \hat{U}_3 + \frac{V'_4}{V_p} \hat{U}_4 + \frac{V'_5}{V_p} \hat{U}_5. \quad (2.11)$$

Реконструйовані значення вектору змінних на гранях розширеного об'єму отримувалось за допомогою реконструкції першого порядку точності (2.12).

$$U_p^L = U_p^R = U_p^T = U_p^B = \hat{U}_p, \quad (2.12)$$

де \hat{U}_p – середнє по розширеному об'єму значення вектору змінних;
 $U_p^L, U_p^R, U_p^T, U_p^B$ – значення векторів змінних на відповідно лівій, правій,
 верхній та нижній гранях розширеного об'єму.

Для визначення стану ззовні розширеного об'єму на кожній із його чотирьох сторін будувався фіктивний об'єм у локальній системі координат стінки. На рис. 2.6 зображені фіктивні об'єми, кожен з яких позначений літерою від A до D та виділений штриховою лінією.

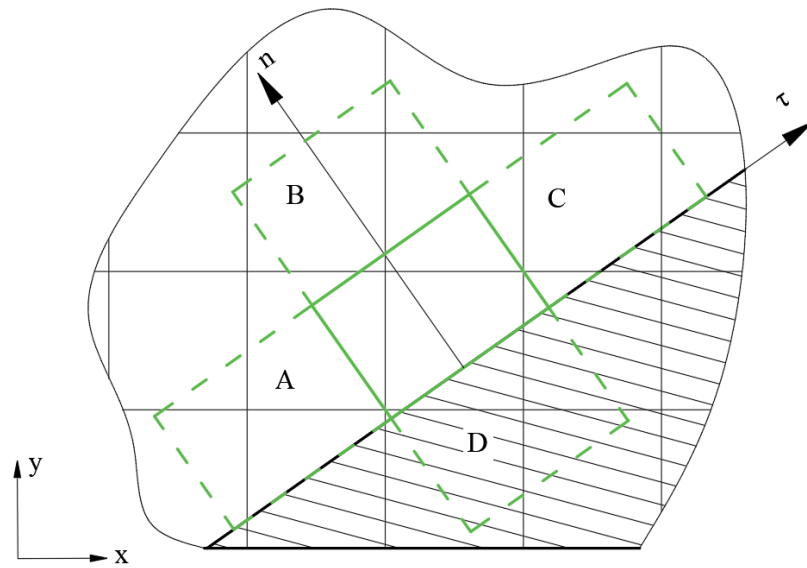


Рисунок 2.6 – Фіктивні об'єми, побудовані на сторонах розширеного

Розрахунок потоків через грані розширеного об'єму здійснювався за допомогою тих самих формул, що і для регулярних об'ємів (2.13). Проте для розв'язку задачі Рімана необхідно було визначати вектор змінних у фіктивних об'ємах.

$$F_p^L = \frac{1}{2} \left(H(U_p^L) + H(\hat{U}_A) - \lambda_x (U_p^L - \hat{U}_A) \right),$$

$$F_p^R = \frac{1}{2} \left(H(\hat{U}_C) + H(U_p^R) - \lambda_x (\hat{U}_C - U_p^R) \right),$$

$$G_p^T = \frac{1}{2} \left(V(\hat{U}_B) + V(U_p^T) - \lambda_y (\hat{U}_B - U_p^T) \right),$$

$$\mathbf{G}_p^B = \frac{1}{2} \left(\mathbf{V}(\mathbf{U}_p^B) + \mathbf{V}(\hat{\mathbf{U}}_D) - \lambda_y (\mathbf{U}_p^B - \hat{\mathbf{U}}_D) \right), \quad (2.13)$$

де $\mathbf{F}_p^L, \mathbf{F}_p^R, \mathbf{G}_p^T, \mathbf{G}_p^B$ – вектори потоків через ліву, праву, верхню та нижню грані розширеного об’єма;

$\mathbf{U}_p^L, \mathbf{U}_p^R, \mathbf{U}_p^T, \mathbf{U}_p^B$ – реконструйовані значення вектора змінних на лівій, правій, верхній, нижній грані розширеного об’єма;

$\hat{\mathbf{U}}_A, \hat{\mathbf{U}}_B, \hat{\mathbf{U}}_C, \hat{\mathbf{U}}_D$ – значення векторів змінних, середні по фіктивним об’ємам, що побудовані відповідно на лівій, верхній, правій та нижній грані розширеного об’єму.

Для визначення станів у фіктивних об’ємах, що знаходились у газовій частині розрахунковій області, на рис. 2.6 вони позначені буквами А, В, С, використовувалась співвідношення (2.14):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{U}}_Y = \sum_{k=0}^m \beta_{Yk} \hat{\mathbf{U}}_k \\ \sum_{k=0}^m \beta_{Yk} = 1, \text{ де } \beta_{Yk} = \frac{l_{Yk}}{l_Y} \end{cases}, \quad (2.14)$$

де $\hat{\mathbf{U}}_Y$ – середнє значення вектору змінних у Y фіктивному об’ємі;

m – кількість звичайних скінченних об’ємів, які перетинає сторона розширеного об’єму, на якій побудований фіктивний об’єм Y ;

β_{Yk} – відносна вага частини сторони розширеного об’єму, яка лежить всередині k -го регулярного об’єму;

$\hat{\mathbf{U}}_k$ – стан всередині k -го регулярного об’єму;

l_{Yk} – довжина частини сторони розширеного об’єму, яка знаходиться всередині i -го звичайного об’єму;

l_Y – повна довжина сторони розширеного об’єму, на якій побудований фіктивний об’єм Y .

Так для визначення середнього значення вектору змінних у фіктивному об’ємі B згідно з нумерацією скінченних об’ємів на рис. 2.5 формула (2.14) матиме вигляд (2.15):

$$\begin{cases} \hat{U}_B = \frac{l_{B6}}{l_B} \hat{U}_6 + \frac{l_{B1}}{l_B} \hat{U}_1 + \frac{l_{B2}}{l_B} \hat{U}_2, \\ l_B = l_{B6} + l_{B1} + l_{B2} \end{cases}, \quad (2.15)$$

де \hat{U}_B – середнє значення вектору змінних у фіктивному об’ємі B ;

l_{B6}, l_{B1}, l_{B2} – довжини частин сторони розширеного об’єму, які лежать у регулярних об’ємах з номерами 6, 1, 2;

$\hat{U}_6, \hat{U}_1, \hat{U}_2$ – середні значення вектору змінних у регулярних об’ємах з номерами 6, 1, 2 з рис. 2.5;

l_B – повна довжина сторони розширеного об’єму, на якій побудований фіктивний об’єм B .

Для визначення стану у фіктивному об’ємі, який позначений літерою D та знаходиться всередині стінки, використовувались інші співвідношення (2.16), через те що на стінці повинні виконуватись граничні умови проковзування та непроникності.

$$\hat{U}_D = (r\rho_p, r\rho_p u_D, r\rho_p v_D, r\rho_p E_p)^T. \quad (2.16)$$

У формулі (2.16) усі параметри фіктивного об’єму, крім компонент швидкості u_D, v_D , дорівнюють параметрам із розширеного. Компоненти швидкості визначались за співвідношеннями (2.17), які є наслідком із граничних умов на стінці для нев’язкого газу: відсутність перпендикулярного потоку через стінку та відсутність зміни дотичного до ній потоку.

$$\begin{Bmatrix} u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = A^{-1} W A \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix},$$

$$W = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$A = \begin{Bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

де A – матриця переходу до локальної системи координат, яка пов'язана зі стінкою;

A^{-1} – обернена до A матриця;

W – матриця зміни знаку перпендикулярного до стінки компоненту швидкості;

ϕ – кут, що утворює сегмент стінки, на якому побудований розширений об'єм, з горизонтальною віссю глобальної системи координат.

Чисельне інтегрування (2.5) у розширеному об'ємі здійснювалось за допомогою явного методу Рунге-Кутти третього порядку точності (2.6). Після кожного підкроку алгоритму отримане оновлене середнє значення вектора змінних у розширеному об'ємі записувалось у дробовий об'єм, для якого розширений був побудований.

2.3 Верифікація обчислювальної моделі

2.3.1 Одновимірний випадок

Для верифікації запропонованої обчислювальної моделі у одновимірному випадку у безрозмірному вигляді була розв'язана задача нормального відбиття ударної хвилі від плоскої стінки, повернутої на певний кут від горизонтальної осі [55].

Розв'язок відшукувався для області з рис. 2.7, заповненої газом, параметри якого наведені у табл. 2.1.

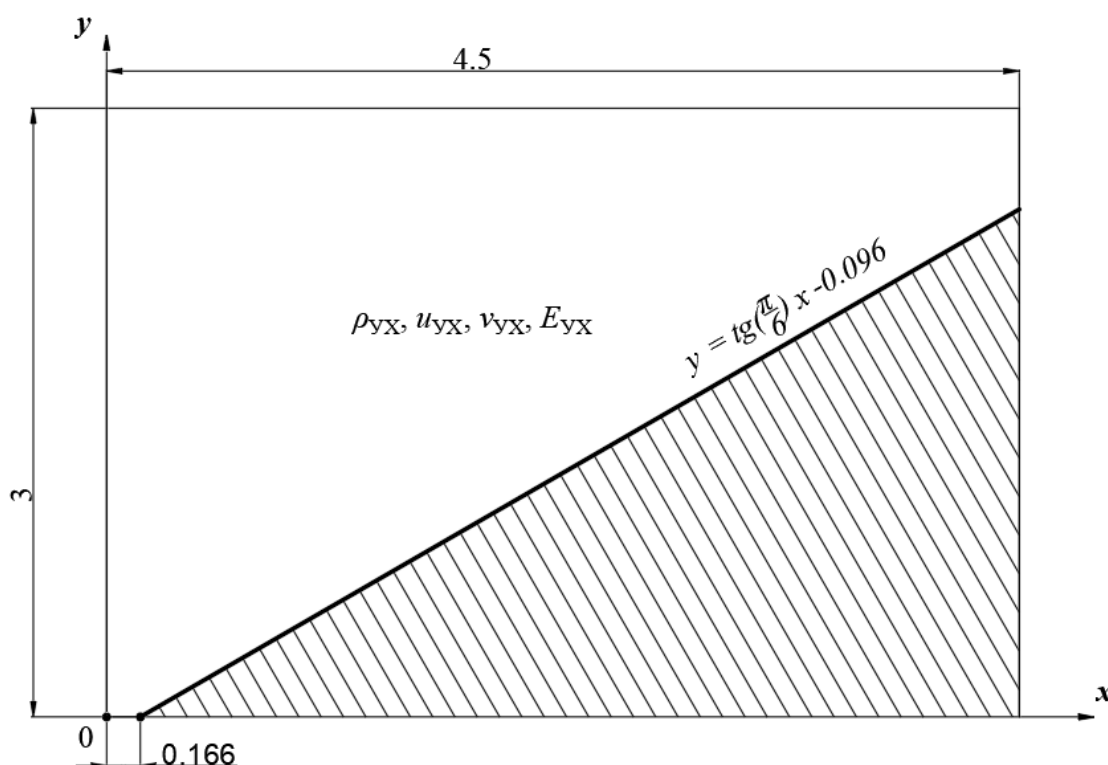


Рисунок 2.7 – Схема розрахункової області при розв'язку задачі нормального відбиття ударної хвилі

Ця задача є одномірною в декартовій системі координат, пов'язаної з твердою стінкою. Це дозволило знайти точне рішення обраної задачі, використовуючи одновимірну теорію ударних хвиль [58] та здійснити ще один чисельний розв'язок, проте у класичній одновимірній постановці задачі – тверда стінка співпадає із границею скінченного об'єму.

Таблиця 2.1 – Параметри ударної хвилі

ρ_{yx}	u_{yx}	v_{yx}	E_{yx}
8	7.14	4.13	70.45

Розрахунки проводились на декартових регулярних сітках з кількістю скінченних об'ємів 40, 80, 160 та 320 уздовж кожної із координатних

напрямків відповідно до розмірності поставленої задачі. Розрахунок здійснювався до значення часу 0.3.

Для зведення результатів чисельного рішення, у якому використовувалась запропонована обчислювальна модель, до одновимірного випадку в середині розрахункової області було виділено нормальний по відношенню до стінки квадрат зі стороною, що дорівнює 1.5 одиницям, основа якого лежала на стінці. Далі в цьому квадраті поля густини та повної енергії осереднювалися вздовж дотичного до стінки напрямку таким чином, щоб в результаті отримати їхню залежність від відстані по нормалі до стінки.

Після цього значення, отримані у класичній постановці та при застосуванні запропонованої обчислювальної моделі, порівнювались із теоретичним значенням шляхом розрахунку модуля відносного відхилення (2.18) по густині і повній енергії. На рис. 2.8, 2.9 представлені залежності значень відносної похибки густини і повної енергії газу, оцінені в нормах L_1 (2.19), L_2 (2.20) [59], від кількості об'ємів сітки.

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_e - \varphi_n|}{\max|\varphi_e|}, \quad (2.18)$$

$$\|\Delta\varphi\|_{L_1} = \frac{1}{\Omega} \sum_i V_i \cdot \Delta\varphi_i, \quad (2.19)$$

$$\|\Delta\varphi\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{\Omega} \sum_i V_i \Delta\varphi_i^2}, \quad (2.20)$$

де $\Delta\varphi$ – модуль відносного відхилення, розрахований за фізичним φ ;

φ_e – значення еталонного фізичного параметру, отриманого перевіреними методами;

φ_n – значення фізичного параметру, що перевіряється.

Ω – характеристичний розмір розрахункової області;

V – розмір i -го скінченного об'єму.

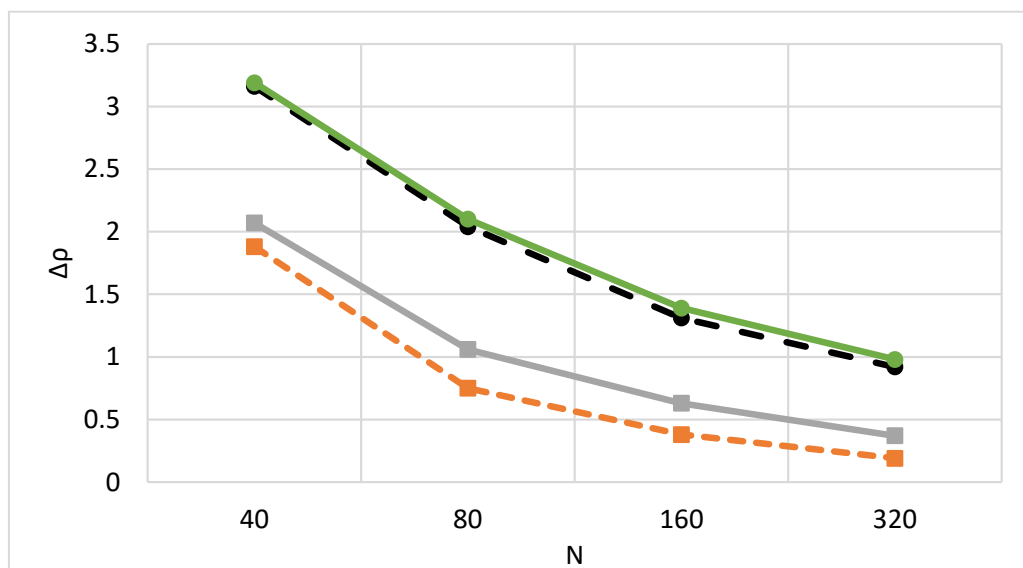


Рисунок 2.8 – Залежність модуля відносного відхилення густини від кількості об'ємів сітки:

■ – запропонована обчислювальна модель; ● – класичний розв'язок.

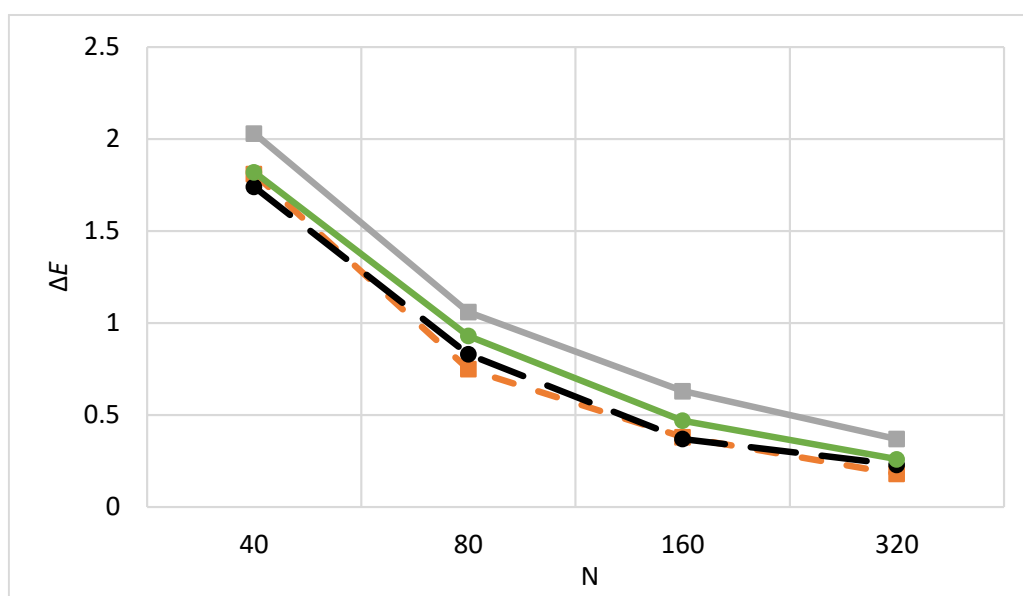


Рисунок 2.9 – Залежність модуля відносного відхилення повної енергії від кількості об'ємів сітки:

■ – запропонована обчислювальна модель; ● – класичний розв'язок.

Із графіків видно, що величини похибок класичного розв'язку та отриманого із застосуванням запропонованої обчислювальної моделі близькі за величиною, а відхилення від теоретичного розрахунку складає менше 3.5%.

2.3.2 Двовимірний випадок

Для верифікації запропонованої обчислювальної моделі у двовимірному випадку була розв’язана задача подвійного відбиття Маха [60] та здійснено чисельне моделювання течії продуктів згоряння у камері рідинного ракетного двигуна [61, 62]. Для цього у інтегрованому середовищі розробки Qt Community Edition на мові C++ була написана відповідна програма.

Верифікація отриманих результатів здійснювалася шляхом порівняння з класичним розв’язком першої задачі та з розв’язком, отриманим за допомогою програмного пакету Ansys Fluent 2023 R2 Student Version.

2.3.2.1 Подвійне відбиття Маха

Задача подвійного відбиття Маха була розв’язана у безрозмірній формі у двох варіантах: перший – класична постановка, другий, альтернативний – для розв’язку з постановкою граничних умов методом розширених об’ємів. Обидва варіанти відрізнялися лише геометрією розрахункової області. Параметри ударної хвилі та незбуреного газу в обох випадках приймалися однаковими. Під час розв’язку цієї задачі використовувалась система рівнянь газової динаміки (2.1), записана у плоскому випадку у декартовій системі координат ($r = 1, \mathbf{S} = (0, 0, 0, 0)^T$).

Розрахункова область. На рис. 2.10–2.11 представлені обидва варіанти постановки задачі. У табл. 2.2–2.3 наведені безрозмірні числові значення геометричних та фізичних параметрів задачі відповідно. Індекс УХ позначає ударну хвилю, індекс 0 – незбурений газ. Параметри ρ , u , v , E позначають густину, швидкість вздовж горизонтальної осі, швидкість вздовж вертикальної осі, питому повну енергію відповідно. Вектор швидкості ударної хвилі позначений $\vec{V}_{УХ}$. Рівняння $y = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)x - b$ задає положення стінки в альтернативній постановці задачі.

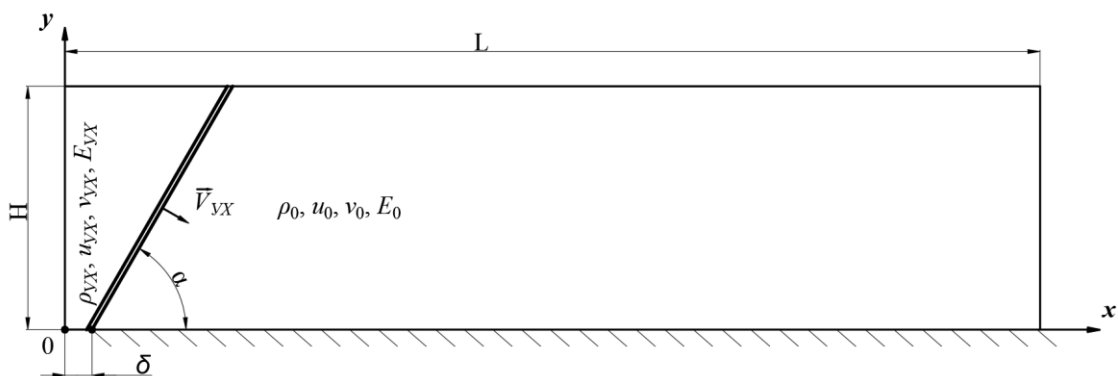


Рисунок 2.10 – Схема розрахункової області в класичній постановці

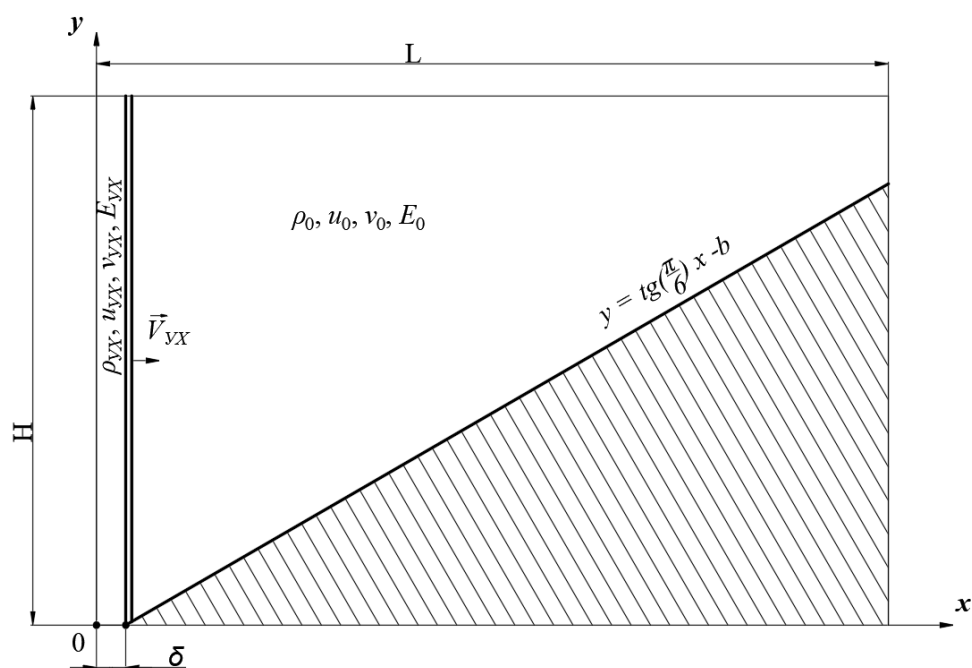


Рисунок 2.11 – Схема розрахункової області в альтернативній постановці

Таблиця 2.2 – Геометричні параметри задачі

Параметр	Значення	
	Класична постановка	Альтернативна постановка
H	1.0	1.8
L	4.0	3.2
α	60°	—
b	—	-0.22
δ	0.1667	

Граничні умови. На вході в розрахункову область фіксувалися значення тиску та густини за ударною хвилею, на виході – нульові градієнти за всіма

фізичними параметрами нормалі до границі. На стінці встановлювалися граничні умови проковзування.

Для розв'язку задачі обидва варіанти розрахункової області покривалися однаковою декартовою сіткою з кроками по вертикальній (у) та горизонтальній (х) координатах у 0.0025 одиниць. Лінії сітки не збігалися із твердою стінкою в альтернативній постановці задачі.

Таблиця 2.3 – Фізичні параметри задачі

Параметр	Значення	
	Ударна хвиля	Незбурений газ
ρ	8.0	1.4
u	8.25	0
v	0	0
p	116.5	1
Число Маха	10	—
Показник адіабати	1.4	

Результати. Розрахунки здійснювалися до значення часу $t = 0.2$. У ході рішення у безрозмірному вигляді були отримані поля фізичних параметрів, ізолінії яких зображені на рис. 2.12 для класичної постановки задачі та на рис. 2.13 – для альтернативної.

Порівняння результатів, отриманих у ході рішення задачі в обох постановках, здійснювалось за допомогою розрахунку модуля відносного відхилення (2.17) для кожного із основних фізичних параметрів потоку газу.

Для його розрахунку результати, отримані методом розширених об'ємів, співставлялися з класичними результатами шляхом повороту навколо точки $(0, \delta)$ за часовою стрілкою на кут, який стінка утворює з горизонтальною віссю.

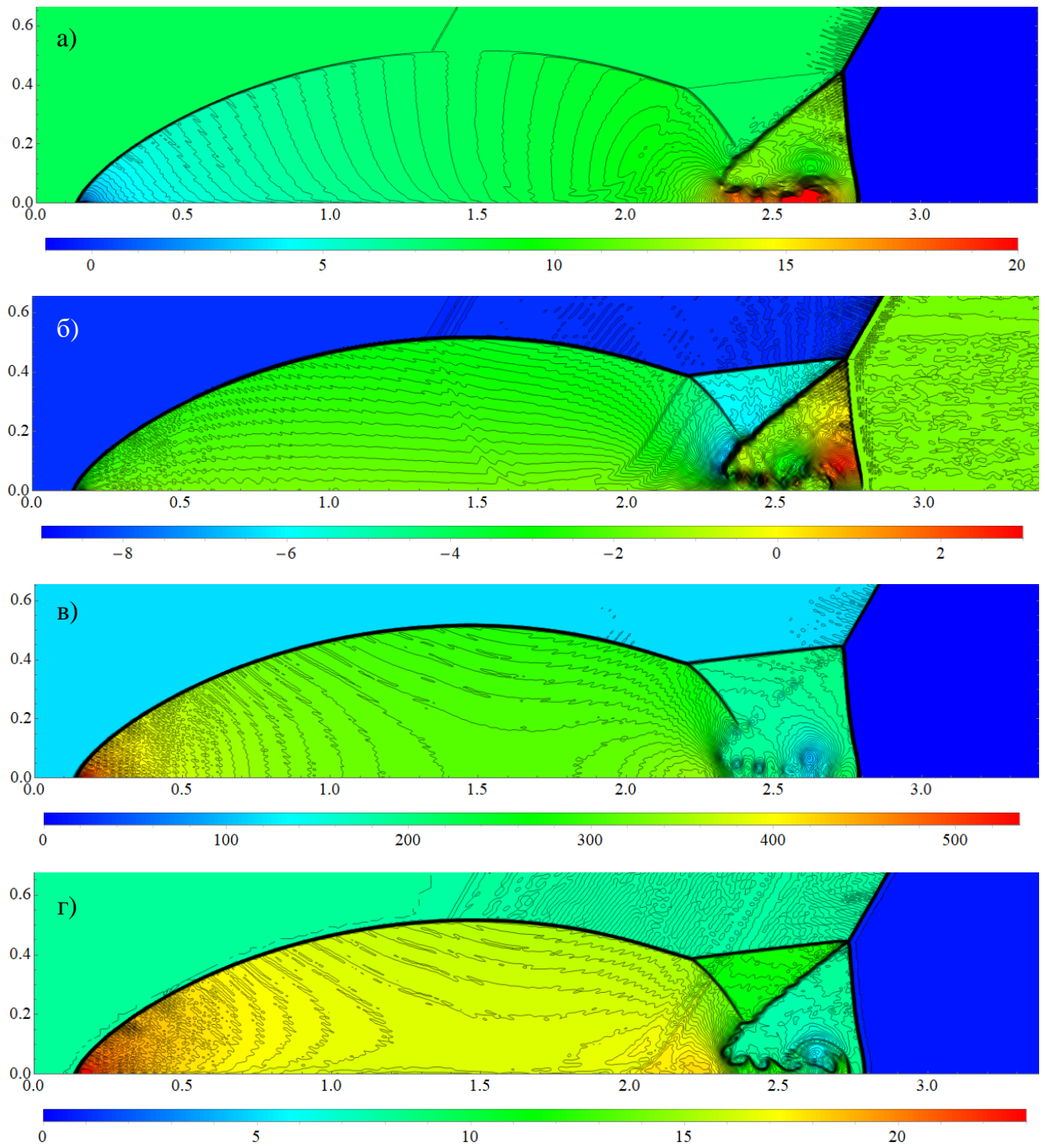


Рисунок 2.12 – Ізолінії горизонтальної (а) й вертикальної (б) швидкостей, статичного тиску (в) та густини (г)

Відхилення оцінювались в дискретних нормах L_1 , L_2 (2.19), (2.20). Отримані значення занесено до табл. 2.4. Як видно, відхилення не перевищує 0.55% у випадку оцінки похибки в L_1 та 3.5% у випадку L_2 .

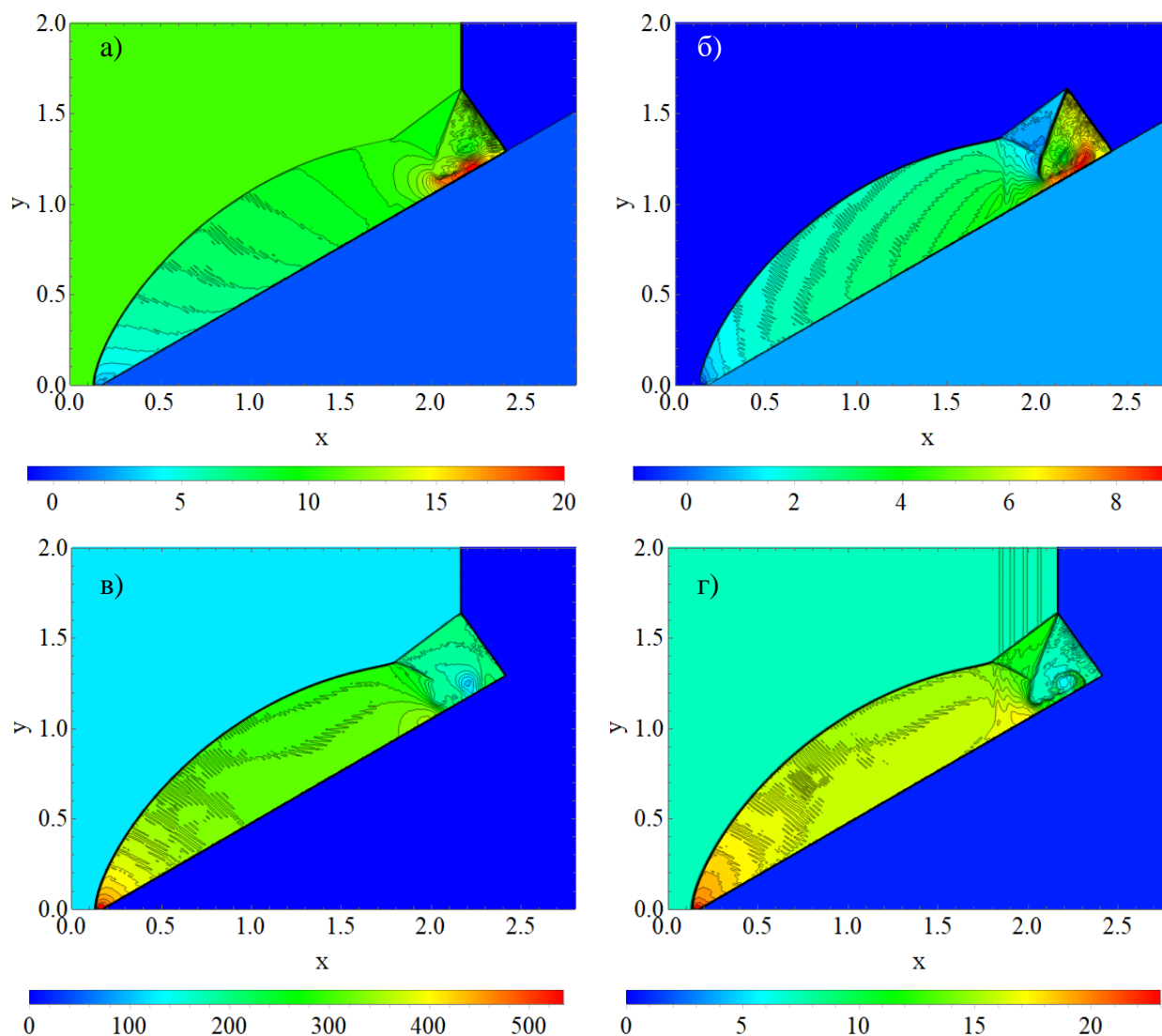


Рисунок 2.13 – Ізолінії горизонтальної (а) й вертикальної (б) швидкостей, статичного тиску (в) та густини (г)

На рис. 2.14 зображені ізолінії модулів відносного відхилення полів статичного тиску, густини та модуля вектора швидкості. Білим кольором виділено місця, де відхилення перевищує величину 0.05.

Таблиця 2.4 – Оцінка значень відносного відхилення в нормах L_1 , L_2

Параметр	L_1	L_2
Статичний тиск	0.00499	0.02423
Густина	0.00548	0.02306
Модуль швидкості	0.00469	0.03362

З рис. 2.14 видно, що результати відрізняються лише на поверхнях розриву параметрів, де параметри течії визначаються не фізикою процесу, а чисельним методом, що використовувався для розрахунків. Геометрія збуреної області однакова в класичній та альтернативній постановці задачі, а невелика розбіжність параметрів знаходиться у межі похибки обох методів.

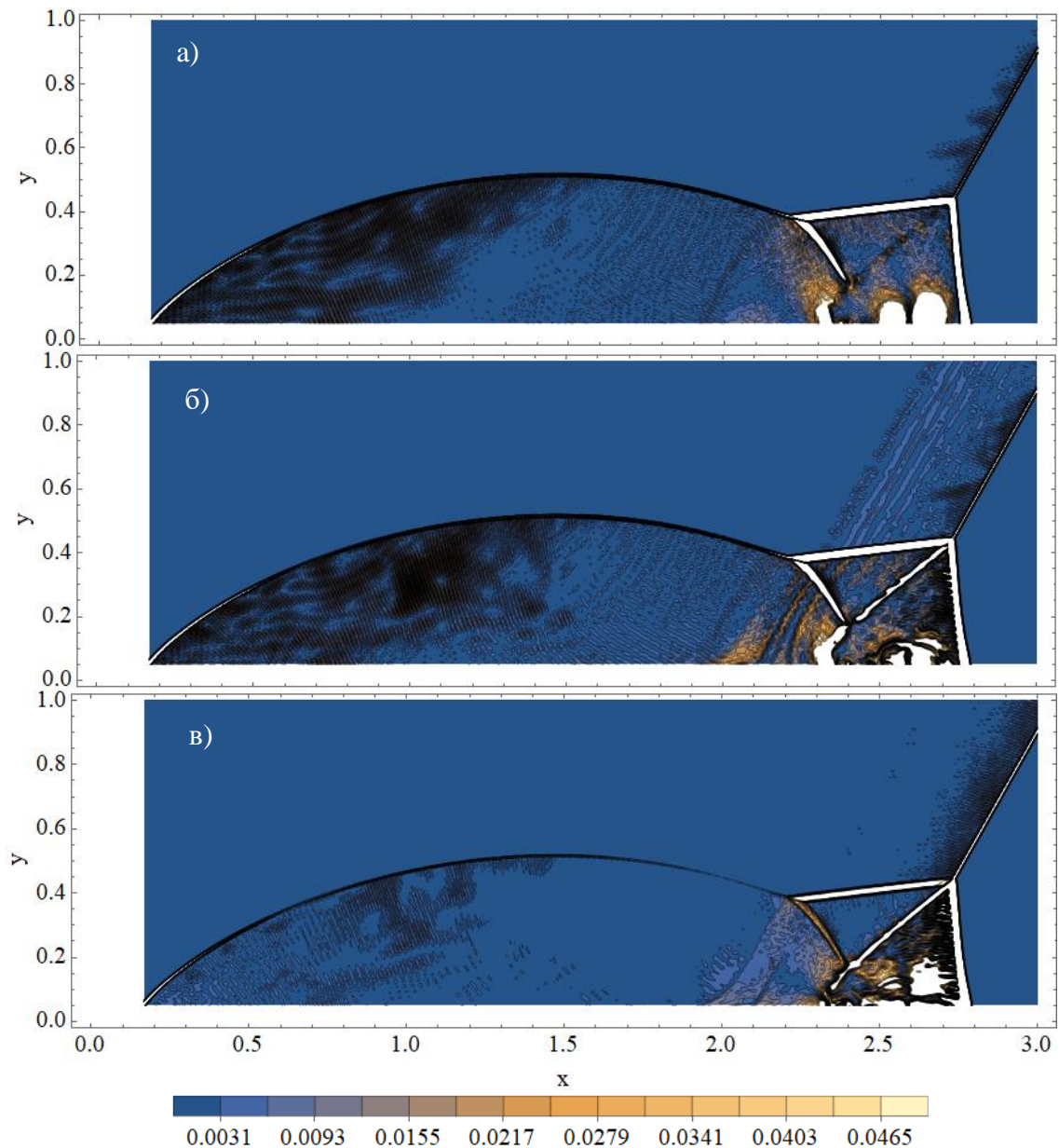


Рисунок 2.14 – Контурні лінії відносного відхилення: а) статичного тиску;
б) густини; в) модуля швидкості

2.3.2.2 Моделювання течії продуктів згоряння у камері ракетного двигуна

Розрахункова область. На рис. 2.15 представлена схема камери рідинного ракетного двигуна, для якої проводилося чисельне моделювання. У табл. 2.5 є числові значення її основних розмірів.

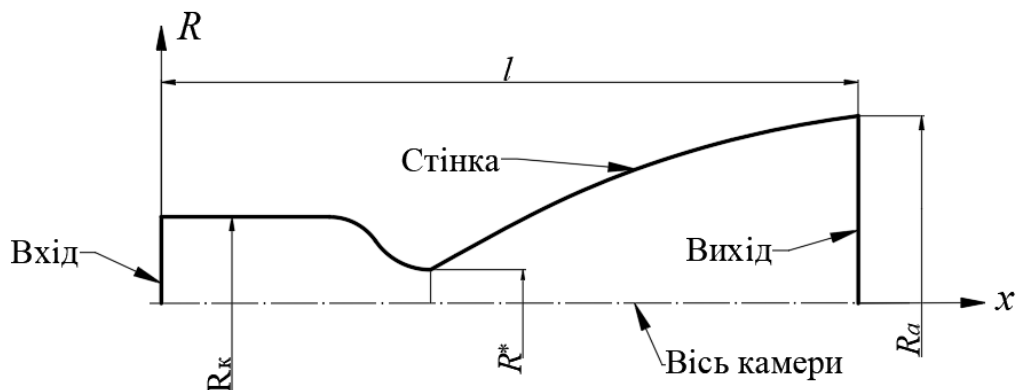


Рисунок 2.15 – Схема камери двигуна

Таблиця 2.5 – Геометричні розміри камери

Параметр	Значення, [м]
R_k	0.220
R^*	0.085
R_a	0.370
l	0.2380

Для розв’язку задачі методом розширених об’ємів розрахункова область покривалася прямокутною декартовою сіткою з кроками по вертикальній (R) та горизонтальній (z) координатах 2.32 та 2.38 мм відповідно. Лінії сітки не збігалися із твердою стінкою при розрахунку із застосуванням методу розширених об’ємів.

Граничні умови. На вході в камеру двигуна фіксувалися значення повного тиску та густини, на виході – нульові градієнти за всіма фізичними параметрами нормалі до границі. На осі та на стінці встановлювалися граничні умови проковзування.

У табл. 2.6 представлені числові значення параметрів продуктів згоряння камері згоряння, які використовувались в процесі розрахунків.

Таблиця 2.6 – Параметри продуктів згоряння

Параметр	Значення	Розмірність
Повний тиск	5.85	МПа
Густина	4.48	кг/м ³
Питома газова стала	359.51	Дж/(кг К)
Показник адіабати	1.21	–

Результати. Розрахунки здійснювалися до встановлення процесів у камері. У ході рішення були отримані поля фізичних параметрів, ізолінії яких зображені на рис. 2.16–2.19 у розмірній формі. З рис. 2.17 видно, що у потоці явно присутні зони розвороту й розширення потоку, вирівнювання та рівномірної течії продуктів згоряння. Це свідчить про фізичність результатів, отриманих обома способами.

Для верифікації значень, отриманих за допомогою методу розширених об'ємів на декартовій сітці, та сама задача була розв'язана за допомогою засобів Ansys Fluent 2023 R2 Student Version. У цьому варіанті розрахункова область покривалася неструктурованою сіткою, що збігалася з її межами. Кількість об'ємів сітки в обох випадках була однаковою.

Для реконструкції параметрів потоку в Ansys Fluent на гранях скінченних об'ємів використовувався алгоритм MUSCL [47] третього порядку точності, для розв'язку задачі Рімана – метод Рое [47], для інтегрування – явний метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності [28].

Порівняння результатів здійснювалося шляхом обчислення відносного модуля відхилення у відповідних точках розрахункової області для полів статичного тиску, густини і компонент вектора швидкості. Потім відхилення оцінювались в дискретних нормах L_1 , L_2 (2.18)–(2.20). Отримані значення занесено до табл. 2.7.

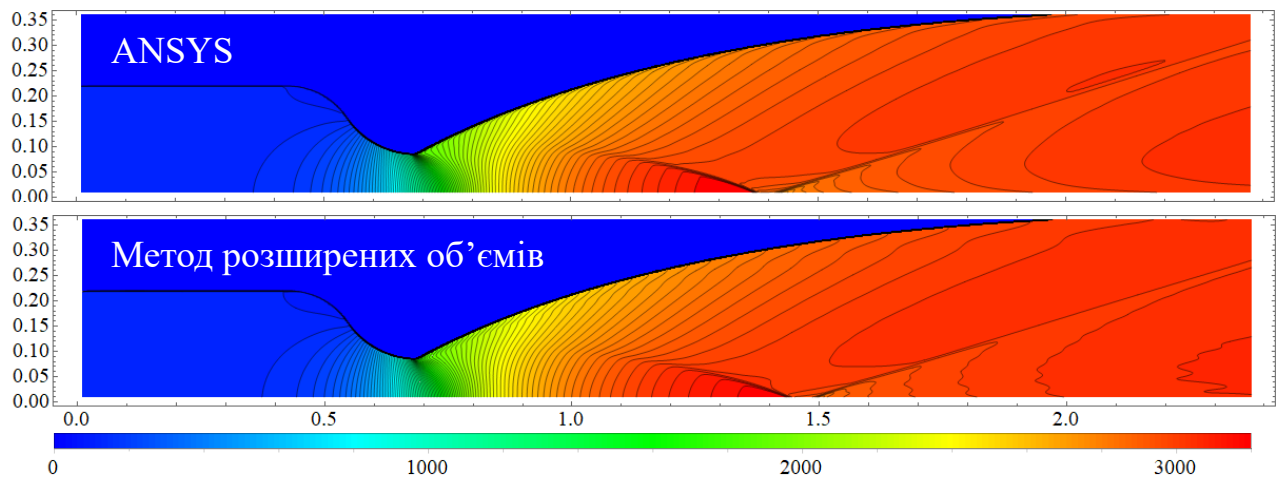


Рисунок 2.16 – Контурні лінії осьової швидкості, м/с

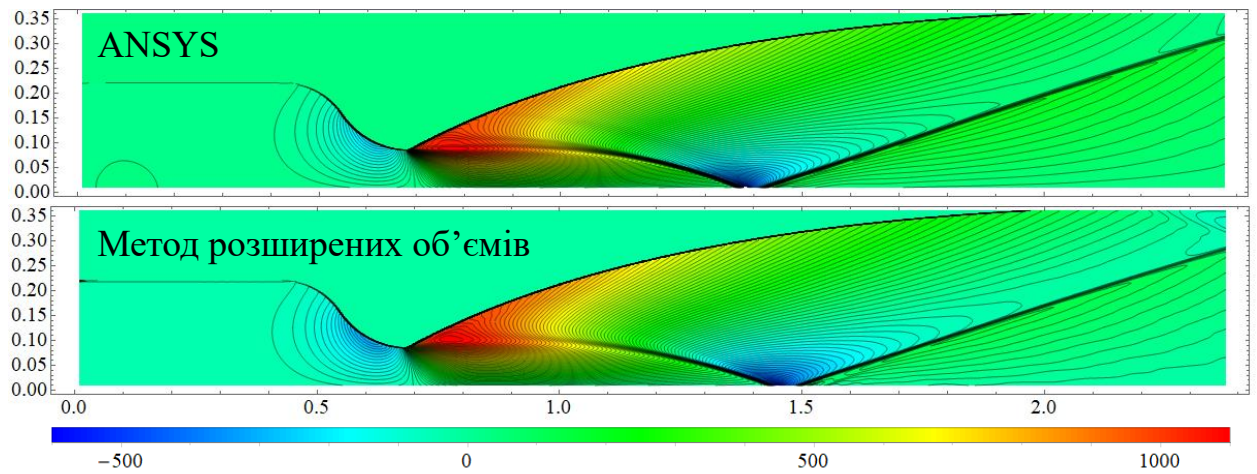


Рисунок 2.17 – Контурні лінії радіальної швидкості, м/с

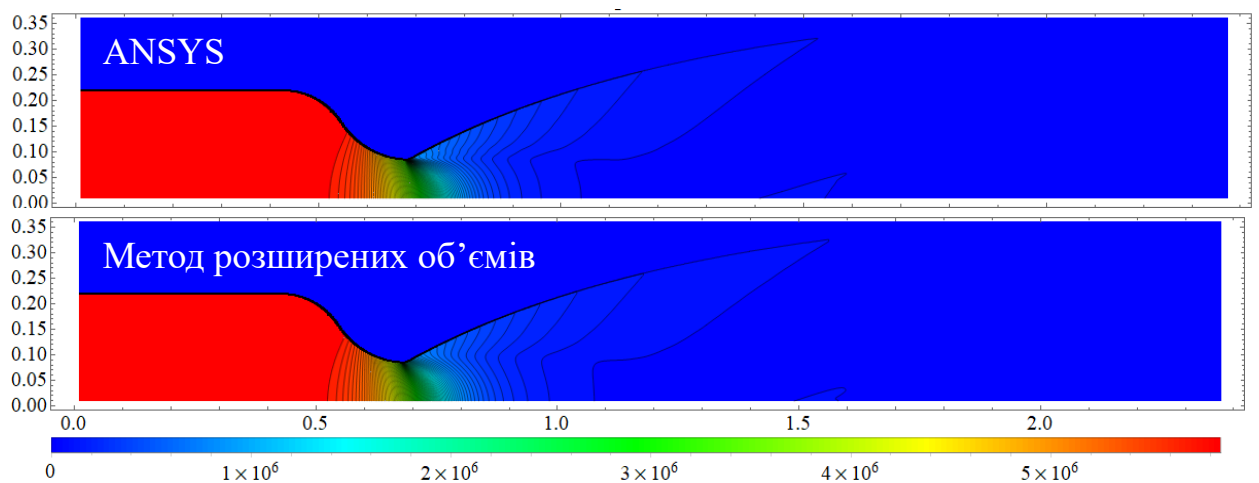


Рисунок 2.18 – Контурні лінії статичного тиску, Па

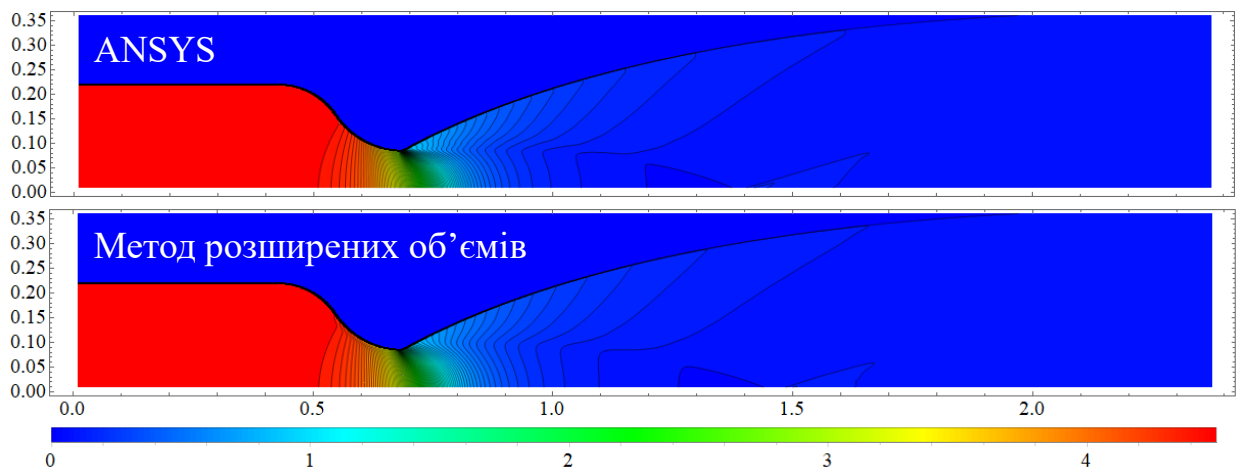


Рисунок 2.19 – Контурні лінії густини, кг/м^3

Таблиця 2.7 – Оцінка значень відносного відхилення в нормах L_1 , L_2

Параметр	L_1	L_2
Статичний тиск	0.00059	0.00238
Густина	0.00086	0.00278
Осьова швидкість	0.00243	0.00423
Радіальна швидкість	0.01700	0.04263

На рис. 2.20 зображені ізолінії модулів відносного відхилення полів статичного тиску, густини та компонент вектора швидкості. Білим кольором виділено місця, де відхилення перевищує величину 0.05.

З табл. 2.7 та рис. 2.20 видно, що результати, отримані методом розширених об'ємів, добре узгоджуються з результатами, отриманими засобами Ansys Fluent. Найбільші відхилення виникають лініях розриву похідних точного рішення, у яких чисельне рішення визначається не фізикою процесу течії, а властивостями чисельного методу. У приграничних областях розбіжності рішення мінімальні.

Обидва розрахунки проводилися в однопоточному режимі роботи програми на однаковій за кількістю елементів сітці, що дало можливість порівняти тривалість розрахунків. Сумарний час розв'язку за допомогою методу розширених об'ємів виявився у 2.2 рази менший, ніж при використанні Ansys Fluent в вищезгаданій постановці.

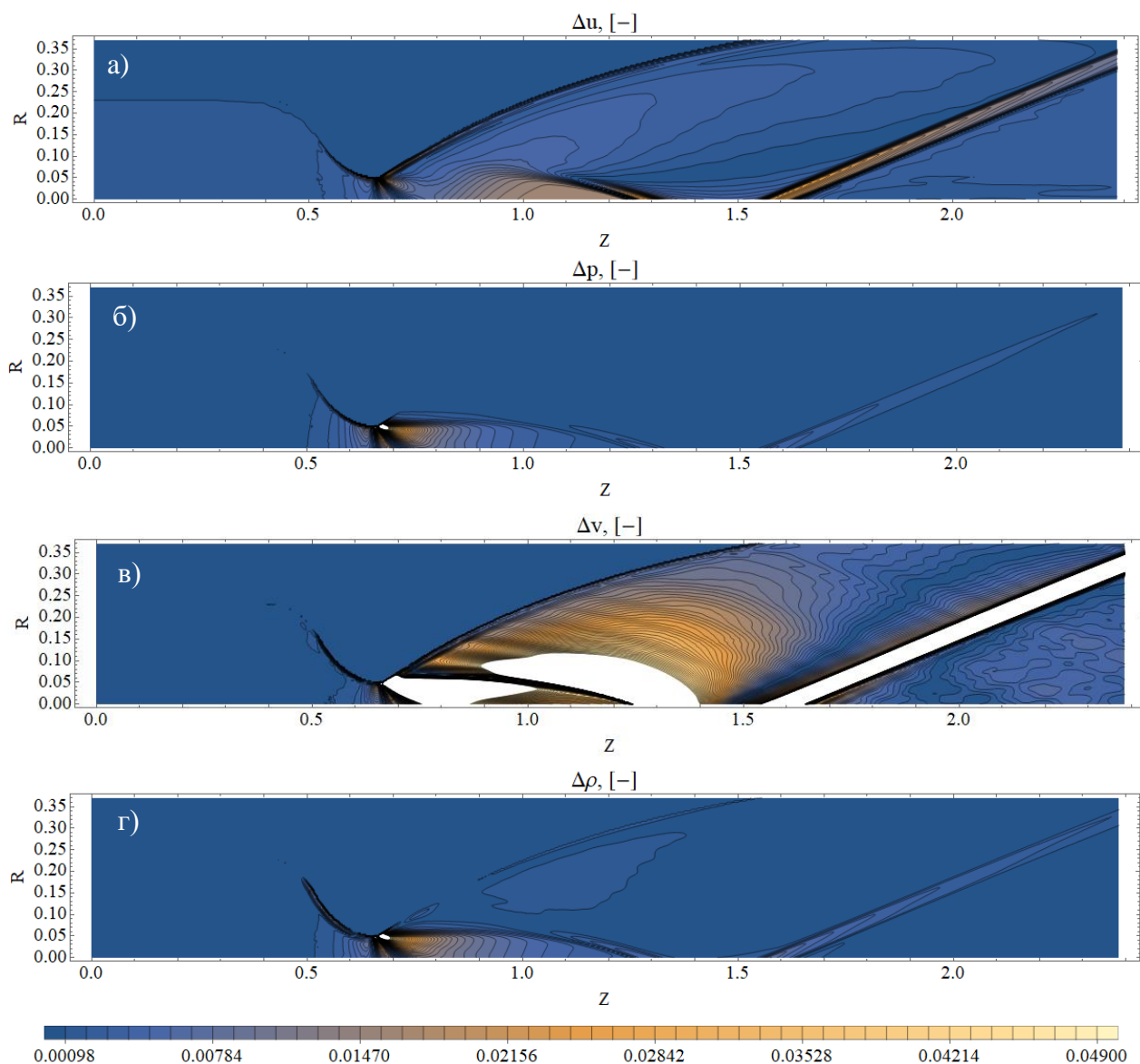


Рисунок 2.20 – Контурні лінії відносного відхилення для фізичних параметрів: а) осьова швидкість; б) статичний тиск; в) радіальна швидкість; г) густина;

Висновки до розділу 2

1. Запропоновано ефективну обчислювальну модель течії продуктів згоряння в камері РРД, яка використовує явний метод скінченних об'ємів в декартовій ортогональній системі скінченних об'ємів для розв'язку як стаціонарної, так і нестаціонарної системи рівнянь Ейлера.

2. Запропоновано метод розширених об'ємів постановки граничних умов, який дозволяє ефективно застосовувати декартові сітки для чисельного моделювання процесів газової динаміки в областях з криволінійною геометрією. Метод розширених об'ємів узагальнює метод скінченних об'ємів на випадок наявності дробових об'ємів у сітці.

Він має декілька переваг над існуючими методами:

- сумісність з методом скінченних об'ємів;
- відсутність необхідності зменшення кроку за часом при інтегруванні при інтегруванні рівнянь в розширеному об'ємі;
- простий алгоритм генерації сітки для визначення параметрів всередині розширених об'ємів;
- кількість необхідних розрахунків у методі розширених об'ємів значно менше, ніж у існуючих методів – до 4 разів у двовірному випадку у порівнянні з «h-box» методом;
- розрахунки виконуються у 2.2 рази швидше, ніж у Ansys Fluent при використанні неструктурованої сітки;
- підвищення порядку точності може бути досягнуто збільшенням кількості фіктивних об'ємів, побудованих на сторонах розширеного об'єму.

3. За допомогою розробленої обчислювальної моделі проведено розв'язки одновимірної задачі нормального відбиття ударної хвилі від плоскої стінки та двовимірних задач відбиття подвійної хвилі Маха та моделювання процесу течії продуктів згоряння в камері рідинного ракетного двигуна. Для цього була написана відповідна програма у середовищі розробки Qt Community Edition на мові C++. Верифікація одновимірної задачі була здійснена шляхом порівняння із теоретичним розрахунком, першої двовимірної – із загальновідомим розв'язком, другої двовимірної – з розв'язком, отриманим за допомогою програмного пакету Ansys Fluent 2023 R2 Student Version. Аналіз отриманих результатів дозволяє стверджувати про якісну та кількісну (розраховане відхилення склало менше 5% у кожній задачі) відповідність результатів процесам, що моделюються, та підтверджує більшу

ефективність запропонованих алгоритмів у порівнянні з Ansys Fluent 2023 R2 Student Version.

РОЗДІЛ 3 МЕТОДИКА ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ СОПЕЛ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

3.1 Постановка задачі оптимізації

3.1.1 Залежність осьової складової тяги від форми контуру для багатосекційного сопла

Тяга сопла – рівнодіюча газодинамічних сил, які діють на внутрішні поверхні камери при русі потоку продуктів згоряння, та сил тиску навколишнього середовища, які діють на її зовнішні поверхні, за виключенням сил аеродинамічного опору.

При виведенні рівняння тяги використовувалось припущення про одномірність руху продуктів згоряння та постійність їхнього хімічного складу. Крім цього, процеси тертя та теплообміну між газом та стінками камери не були враховані.

За визначенням тяга довільного сопла з осьовою симетрією є рівнодіючою сил тиску, прикладених до його бокової поверхні [1, 2].

$$\vec{P} = \int_F (p - p_e(h(t))) \vec{dF}, \quad (3.1)$$

де P – тяга;

F – бічна поверхня сопла;

p – тиск продуктів згоряння всередині сопла;

p_e – атмосферний тиск на заданій висоті;

h – висота на рівнем моря у момент часу t при польоті ракети;

\vec{dF} – елементарна орієнтована площадка контуру.

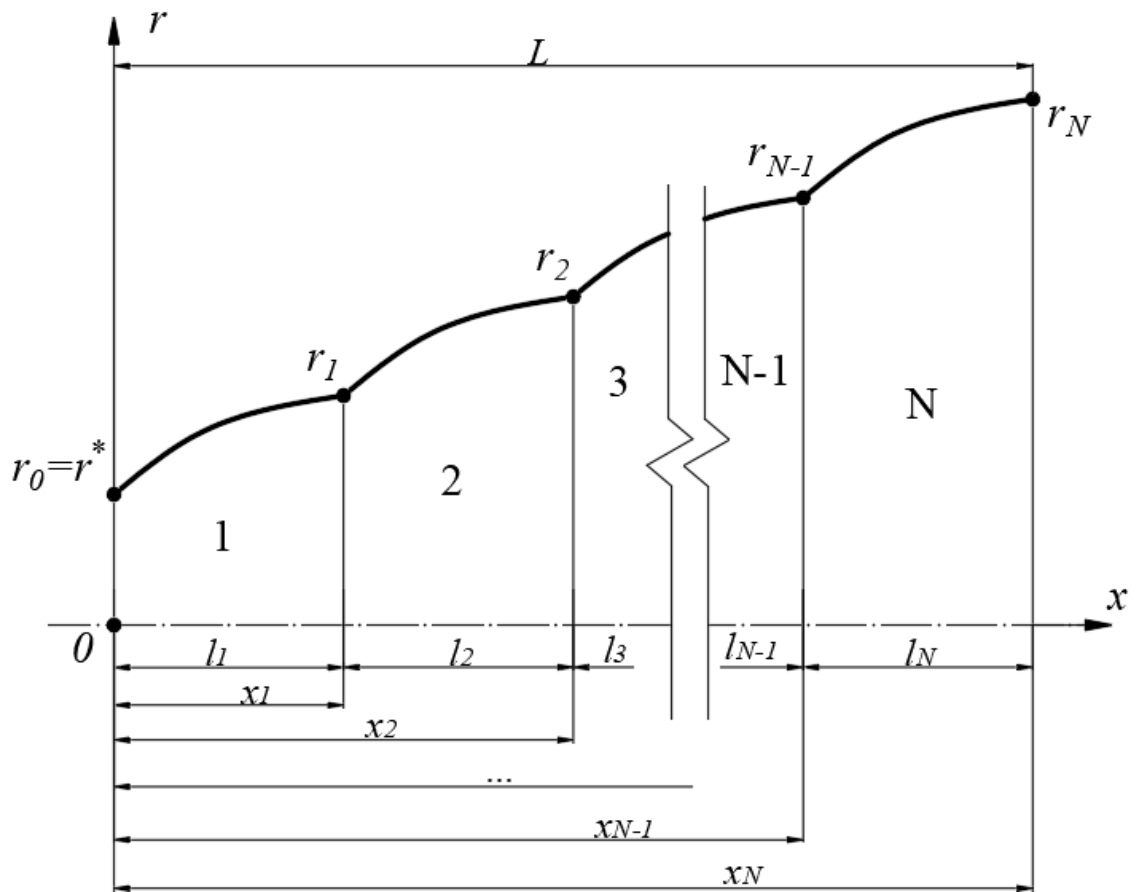


Рисунок 3.1 – Схема багатосекційного сопла

На рис. 3.2 зображена елементарна кільцева ділянка контуру довільного сопла з осовою симетрією, розташована на відстані r від осі симетрії, з шириною dx та висотою dr [63].

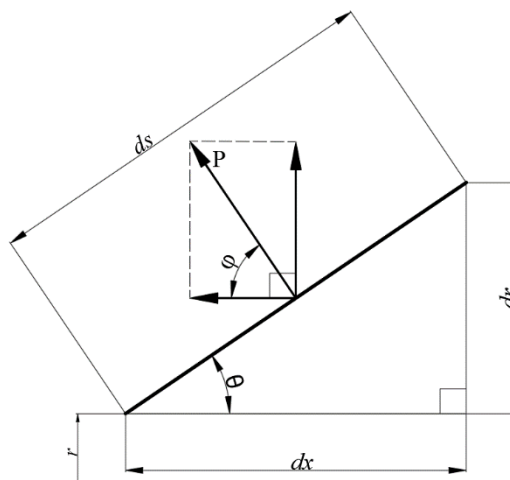


Рисунок 3.2 – Елементарна ділянка сопла

Відповідно до рис. 3.2 площа бокової поверхні сопла дорівнює $dF = 2\pi r ds$. За допомогою цього виразу інтеграл (3.1) був перетворений наступним чином:

$$\vec{P} = \int_F (p - p_e(h(t))) \vec{dF} = 2\pi \int_s (p - p_e(h(t))) r \vec{ds}. \quad (3.2)$$

Через осьову симетрію камери усі радіальні складові тяги взаємозрівноважуються, тому далі враховувалась тільки її осьова складова. Згідно з рис. 3.2 $\cos \varphi = \cos(90 - \theta) = \sin \theta = dr/ds$, тому вона дорівнює:

$$P = 2\pi \int_s (p - p_e(h(t))) r \cos \varphi ds = 2\pi \int_{r_0}^{r_N} (p - p_e(h(t))) r dr, \quad (3.3)$$

де r_1 – радіус сопла в критичному перерізі;

r_2 – радіус сопла на зрізі;

r – контур сопла.

У роботі використовувався вираз залежності тяги від тиску продуктів згоряння, форми контуру та тиску навколишнього середовища для багатосекційного сопла (рис 3.1), яке складається з N секцій. Кожна з секцій була спроектована на певне значення тиску продуктів згоряння, яке дорівнює атмосферному тиску на певній висоті польоту. Завдяки цьому таке сопло автоматично підлаштовується під зміну параметрів навколишнього середовища та у будь-який момент часу працює на розрахунковому режимі, забезпечуючи максимальну тягу [1, 2, 64]. Іншими словами, у сопла з N секціями є N розрахункових режимів роботи.

Щоб позбутися залежності від висоти польоту та часу у (3.3), було введено N безрозмірних коефіцієнтів α . Кожен з них дорівнює 1 на розрахунковому режимі роботи секції з номером m , та 0 в усіх інших випадках. З їх допомогою вираз (3.3) був спрощений:

$$P = 2\pi \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} (p - \alpha_i p_{e_i}) r dr \sum_{j=i}^N \alpha_j, \quad (3.4)$$

Так для трьохсекційного сопла $N = 3$ вираз (3.4) має вигляд:

$$P = 2\pi \left((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \int_{r_0}^{r_1} (p - \alpha_1 p_{e_1}) r dr + (\alpha_2 + \alpha_3) \int_{r_1}^{r_2} (p - \alpha_2 p_{e_2}) r dr + \right. \\ \left. + \alpha_3 \int_{r_2}^{r_3} (p - \alpha_3 p_{e_3}) r dr \right). \quad (3.5)$$

Вираз (3.4) представляє собою залежність осьової складової тяги від контуру сопла та тисків продуктів згоряння й навколишнього середовища. Він був використаний у подальших розрахунках.

3.1.2 Цільова функції та параметри, що оптимізуються, для багатосекційного сопла

Основним критерієм ефективності рідинного ракетного двигуна прийнято вважати питомий імпульс (3.6). При заданій величині тяги його підвищення дозволяє збільшити масу корисного вантажу або зменшити витрату палива [1, 2].

$$I_{\Pi} = \frac{P}{\dot{m}}, \quad (3.6)$$

де I_{Π} – питомий імпульс;

P – тяга;

\dot{m} – масова витрата компонентів палива через критичний переріз сопла.

Оскільки в роботі розглядається задача проєктування саме надзвукової частини сопла, тобто при відомій геометрії дозвукової частини камери, масова витрата через сопло є постійною величиною. У такому випадку в якості критерія оптимальності може бути обраний модуль осьової складової тяги сопла. Тоді для отримання контуру надзвукової частини багатосекційного сопла з рис. 3.2 необхідно розв'язати задачу мінімізації для цільової функції виду (3.7):

$$f(\mathbf{X}) = -P(r(x)) \rightarrow \min, \quad (3.7)$$

де f – цільова функція;

\mathbf{X} – вектор параметрів, що оптимізуються;

P – модуль осьової складової тяги;

$r(x)$ – точний контур, що шукається;

x – координата уздовж осі сопла.

Для подальших розрахунків точний контур сопла $r(x)$ був замінений на ламану криву R , кожна частина якої представляла собою поліном ступеня n та апроксимувала окрему секцію сопла.

$$r(x) \approx R(N, x) = \begin{cases} R_1(\{a_{1i}, i = \overline{0 \dots n}\}, l_1, x), & x \in [0, x_1] \\ R_2(\{a_{2i}, i = \overline{0 \dots n}\}, l_2, x), & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ R_N(\{a_{Ni}, i = \overline{0 \dots n}\}, l_N, x), & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}, \quad (3.8)$$

де $R(N, x)$ – ламана крива, що апроксимує контур;

N – кількість секцій сопла;

R_k – поліном, що апроксимує секцію k ;

a_{kj} – коефіцієнти полінома, який апроксимує секцію з індексом k ;

n – степінь поліному;

l_k – довжина секції з індексом k ;

x_k – координата зрізу секції;

L – повна довжина сопла.

Вибір степеневих поліномів для апроксимації контуру обумовлений наступними причинами:

- степеневі поліноми не вимагають трудомістких обчислень;
- їх легко досліджувати за допомогою методів математичного аналізу [65].

Після підстановки (3.8) у (3.9) цільова функція матиме вигляд (3.8):

$$f(\mathbf{X}) = -P(R(N, x)). \quad (3.9)$$

Коефіцієнти поліномів разом із довжинами секцій у (3.8) є параметрами, що оптимізуються. Записані у вектор (3.10) вони мають вигляд:

$$\mathbf{X} = (\{l_k, \{a_{ki}, i = \overline{0 \dots n}\}, k = \overline{1 \dots N}\}). \quad (3.10)$$

Кількість невідомих у (3.10) була знижена завдяки умові неперервності контуру в точках зламу та відомому радіусу критичного перерізу сопла. Це дозволило ввести рівняння-зв'язку (3.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1(0) = r^* \\ R_1(x_1) = R_2(x_1) \\ R_2(x_2) = R_3(x_2) \\ \dots \\ R_{N-1}(x_{N-1}) = R_N(x_{N-1}) \end{array} \right. . \quad (3.11)$$

За допомогою (3.11) були визначені перші коефіцієнти кожного з апроксимуючих поліномів. Після цього вектор змінних прийняв вигляд:

$$\mathbf{X} = (\{l_k, \{a_{ki}, i = \overline{1 \dots n}\}, k = \overline{1 \dots N}\}). \quad (3.12)$$

При розв'язку задач проєктування на вектор невідомих (3.12) можуть бути накладені певні конструктивні обмеження, які виражені у додаткових рівняннях зв'язку (3.13 – 3.15) та нерівностях (3.16).

Фіксований радіус секції:

$$R_k(x) = r, \quad (3.13)$$

де R_k – поліном, що апроксимує секцію з індексом k ;

x – точка на осі сопла, у якій задано радіус;

r – значення радіусу.

Фіксований кут нахилу контуру до осі сопла:

$$\frac{dR_k(x)}{dx} = \tan \theta, \quad (3.14)$$

де R_k – поліном, що апроксимує секцію з індексом k ;

x – точка на осі сопла, у якій задано кут нахилу контуру;

θ – значення кута нахилу.

Фіксована повна довжина контуру:

$$L = \sum_{k=1}^N l_k, \quad (3.15)$$

де L – задана повна довжина контуру;

l_i – довжина секції контуру з індексом k .

Нерівності-обмеження:

$$\begin{cases} v_{min}^1 \leq v^1 \leq v_{max}^1 \\ v_{min}^2 \leq v^2 \leq v_{max}^2, \\ \vdots \\ v_{min}^M \leq v^M \leq v_{max}^M \end{cases}, \quad (3.16)$$

де v^p – конструктивний параметр з індексом p , на який накладено обмеження;

v_{min}^p, v_{max}^p – мінімальне та максимальне значення параметра з індексом p .

Для коефіцієнтів полінома з вектору невідомих (3.12) складно задати область допустимих значень через відсутність явного фізичного змісту в них. Саме тому у роботі частина коефіцієнтів визначалась опосередковано – через геометричні характеристики контуру. У якості них в залежності від кількості невідомих коефіцієнтів та рівнянь-зв'язку могли використовуватися радіуси та кути нахилу контуру до осі сопла на вході і виході з кожної його секції. Це здійснювалось за допомогою співвідношень (3.17):

$$\begin{cases} \frac{dR_k^{in(out)}}{dx} = \tan \theta_k^{in(out)} \\ R_k^{in(out)} = r_k^{in(out)} \end{cases}, \quad (3.17)$$

де $R_k^{in(out)}$ – значення поліному, що апроксимує секцію сопла з індексом k , на її вході (in) або виході (out);

$\theta_k^{in(out)}$ – значення куту нахилу контуру до осі сопла на вході (in) або виході (out) з секції з індексом k ;

$r_k^{in(out)}$ – значення радіусу на вході (in) або виході (out) з секції з індексом k .

Таким чином, для отримання контуру багатосекційного сопла необхідно було з урахуванням рівнянь-зв'язків (3.11), конструктивних обмежень (3.13) – (3.16) та співвідношень (3.17) визначити оптимальні значення невідомих параметрів (3.12), за яких цільова функція (3.9) досягає мінімуму.

3.2 Алгоритм розв'язку задачі проектування контуру багатосекційного сопла

Розв'язок задачі проектування контуру надзвукового багатосекційного сопла є ітеративним процесом, який складається із наступних кроків:

- 1) отримання першого наближення шуканого контуру шляхом розрахунку значень набору параметрів, які його визначають;
- 2) здійснення чисельного моделювання газодинамічних процесів всередині отриманого контуру камери двигуна з метою визначення нового значення цільової функції;
- 3) застосування методів розв'язку багатовимірних задач оптимізації з метою розрахунку наступних значень набору параметрів, що визначають контур, на основі отриманої в ході моделювання величини цільової функції;
- 4) побудова нового контуру;
- 5) перевірка критерія завершення розв'язку. Якщо він не виконується, то повернення до пункту 2.

У якості першого наближення контуру кожної з секцій сопла незалежно від ступеня поліному апроксимації використовувався конус. Його геометричні характеристики визначалися з вихідних умов задачі. У разі наявності двигуна-прототипу довжина та вихідний радіус контуру обирались згідно з ним. Якщо двигун-прототип був відсутній, то довжина конусу визначалась за формулою (3.21) у припущенні про повний кут розкриття конусу 30 градусів [1, 2]:

$$l = \frac{r_{out} - r_{in}}{\tan 15^\circ}, \quad (3.18)$$

де l – довжина конусу;

r_{out} – радіус виходу;

r_{in} – радіус входу.

Для визначення значення вихідного радіусу необхідно було обрати тиск розрахункового режиму роботи секції сопла в ході аналізу її умов роботи.

Після цього із застосуванням співвідношень ізоентропійної течії [58] можна було розрахувати значення радіусу (3.19) – (3.21).

$$r_{out} = \sqrt{\frac{F_{out}}{\pi}}, \quad (3.19)$$

$$\frac{F_{out}}{F^*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{out}^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M_{out}}, \quad (3.20)$$

$$\frac{p_{out}}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{out}^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}, \quad (3.21)$$

де r_{out} – радіус виходу;

F_{out} – площа виходу;

F_{out} – площа виходу;

F^* – площа критичного перерізу;

k – показник адіабати процесу;

M_{out} – значення числа Маха на виході;

p_{out} – статичний тиск на виході;

p_0 – повний тиск в камері згоряння.

Для визначення числа Маха на виході за співвідношенням (3.21) при відомих тисках у камері згоряння та на зрізі сопла застосовувався метод Ньютона [66].

Чисельне моделювання є найбільш часвитратним кроком розв'язку. З метою мінімізування часу розрахунків для здійснення нього необхідно було використовувати ефективні методи. Тому в роботі для цього застосовувалась обчислювальна модель, результати розробки якої наведено в розділі 2.

Алгоритм покоординатного спуску [67] використовувався для визначення оптимальних значень для набору параметрів, що визначають контур. Згідно з алгоритмом на кожній його ітерації з цього набору

визначалася координатна змінна. Потім при фіксуванні інших координат виконувалася оптимізація цільової функції за гіперплощиною, що відповідає обраній змінній, за допомогою будь-якого методу лінійного пошуку. У роботі для цього використовувався метод золотого перерізу [68]. Перехід від однієї координатної змінної до іншої відбувався тоді, коли модуль відхилення значень цільової функції, отриманих на двох послідовних ітераціях, не перевищував 0.001.

Задача проєктування вважалась розв'язаною, коли модуль максимального відхилення у контурах сопла, отриманих на двох послідовних ітераціях, не перевищував 0.001.

Схожий підхід використовувався у роботах [69, 70]. Проте у першій роботі проєктувався контур односекційного сопла, у другій – замість степеневих поліномів використовувались поліноми Чебишева [71] та спрощений вираз для розрахунку середньої тяги двосекційного сопла [72].

3.3 Верифікація методу проєктування

У роботі за допомогою розглянутого методу було спрофільовано кілька односекційних сопел ($N = 1$) з використанням поліномів 2, 3 та 4 степенів [73]. Верифікація результатів виконувалася шляхом їхнього порівняння з соплами, побудованими методом Рао [5].

3.3.1 Розв'язок задачі проєктування

У задачі, що розв'язувалася, контур сопла проєктувався для одного двигуна-прототипу – РД-107 [74] з відомою геометрією [75], яка знаходиться у загальному доступі. Тому перше наближення шуканого контуру було побудоване у вигляді конуса із вихідним радіусом та довжиною, як у сопла РД-107. Це також дозволило зафіксувати значення радіусу та кута нахилу

контур до осі сопла на виході з нього шляхом додавання рівнянь-зв'язку виду (3.13), (3.14):

$$\begin{cases} \frac{dR(L)}{dx} = \theta_a, \\ R(L) = r_a \end{cases} \quad (3.22)$$

де R – поліном, що апроксимує контур;

θ_a – заданий кут нахилу контуру до осі сопла на зрізі сопла;

r_a – заданий радіус зрізу сопла.

З урахуванням (3.22) вектор невідомих параметрів (3.12) у випадку односекційного сопла прийняв вигляд (3.23):

$$\mathbf{X} = (l_1, \{a_{1i}, i = \overline{3 \dots n}\}). \quad (3.23)$$

У табл. 3.1 показані невідомі та оптимізовані параметри задачі, що розв'язувалась, з урахуванням співвідношень (3.17), рівнянь зв'язків (3.22) та залежно від обраного полінома. З таблиці видно, що застосування (3.17) дало можливість замість коефіцієнта a_3 при розв'язку задачі використовувати кут нахилу контуру сопла у критичному перерізі, який має більш змістовну область допустимих значень.

Таблиця 3.1 – Параметри задачі

Поліном	Невідомі параметри	Параметри, що оптимізувалися
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	l	θ^*
$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	a_3, l	θ^*, l
$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	a_4, a_3, l	θ^*, l, a_4

Для розв'язку на параметри, що оптимізувалися, були накладені конструктивні обмеження, виражені у вигляді системи нерівностей виду (3.16). У табл. 3.2 наведено числові значення нижньої та верхньої меж

областей допустимих значень оптимізованих параметрів у безрозмірній формі. Вони вибиралися виходячи з конструктивних міркувань та специфіки умов роботи двигуна.

Таблиця 3.2 – Граничні значення параметрів, що оптимізувалися

Оптимізований параметр	Нижня межа	Верхня межа
θ^*	0.26	0.96
l	7	13
a	-0.0001	0.00005

При чисельному моделюванні використовувалась розрахункова область, схематично зображена на рис. 3.3.

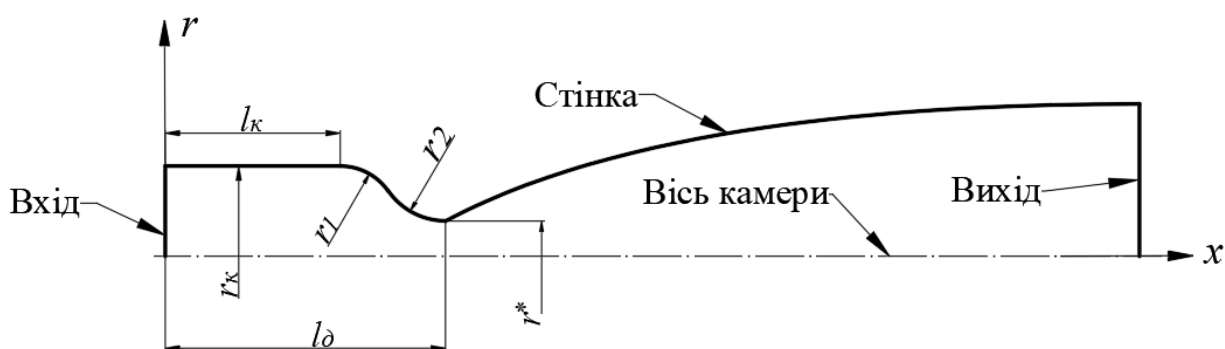


Рисунок 3.3 – Схема розрахункової області

В табл. 3.3 наведені геометричні розміри її дозвукової частини.

Таблиця 3.3 – Геометричні розміри дозвукової частини камери

Параметр	r_k	r_l	r_2	r^*	l_k	l_0
Значення, [мм]	215	150	165	83	435	723

Для розв'язку задачі методом розширених об'ємів розрахункова область покривалася прямокутною декартовою сіткою в площині $(r\theta x)$ з кроками по обох координатах 4.5 мм. Лінії сітки не збігалися із твердою стінкою – контуром камери.

При моделюванні використовувались значення параметрів продуктів згоряння, які наведено у табл. 3.4

Таблиця 3.4 – Параметри продуктів згоряння

Параметр	Значення	Розмірність
Повний тиск	5.85	МПа
Густина	4.48	кг/см ³
Питома газова стала	359.51	Дж/(кг К)
Показник адіабати	1.21	–

3.3.2 Порівняння результатів

При розв'язку задач використовувалася безрозмірна форма представлення параметрів з метою забезпечення масштабованості отриманих результатів.

Результати профілювання сопел обома методами та їх відносне відхилення один від одного, розраховане за (3.24), зображені на рис. 3.4. У табл. 3.5 у відсотках представлено максимальне значення модуля відносного відхилення залежно від ступеня полінома.

$$\Delta y(x) = \frac{|y(x) - y_R(x)|}{\max |y_R(x)|}, \quad (3.24)$$

де Δy – залежність модулю відносного відхилення точок контуру, отриманого запропонованим методом, від контуру, отриманого методом Rao, від координати уздовж горизонтальної осі сопла;

$y(x)$ – контур, отриманий запропонованим методом;

$y_R(x)$ – контур, отриманий методом Rao.

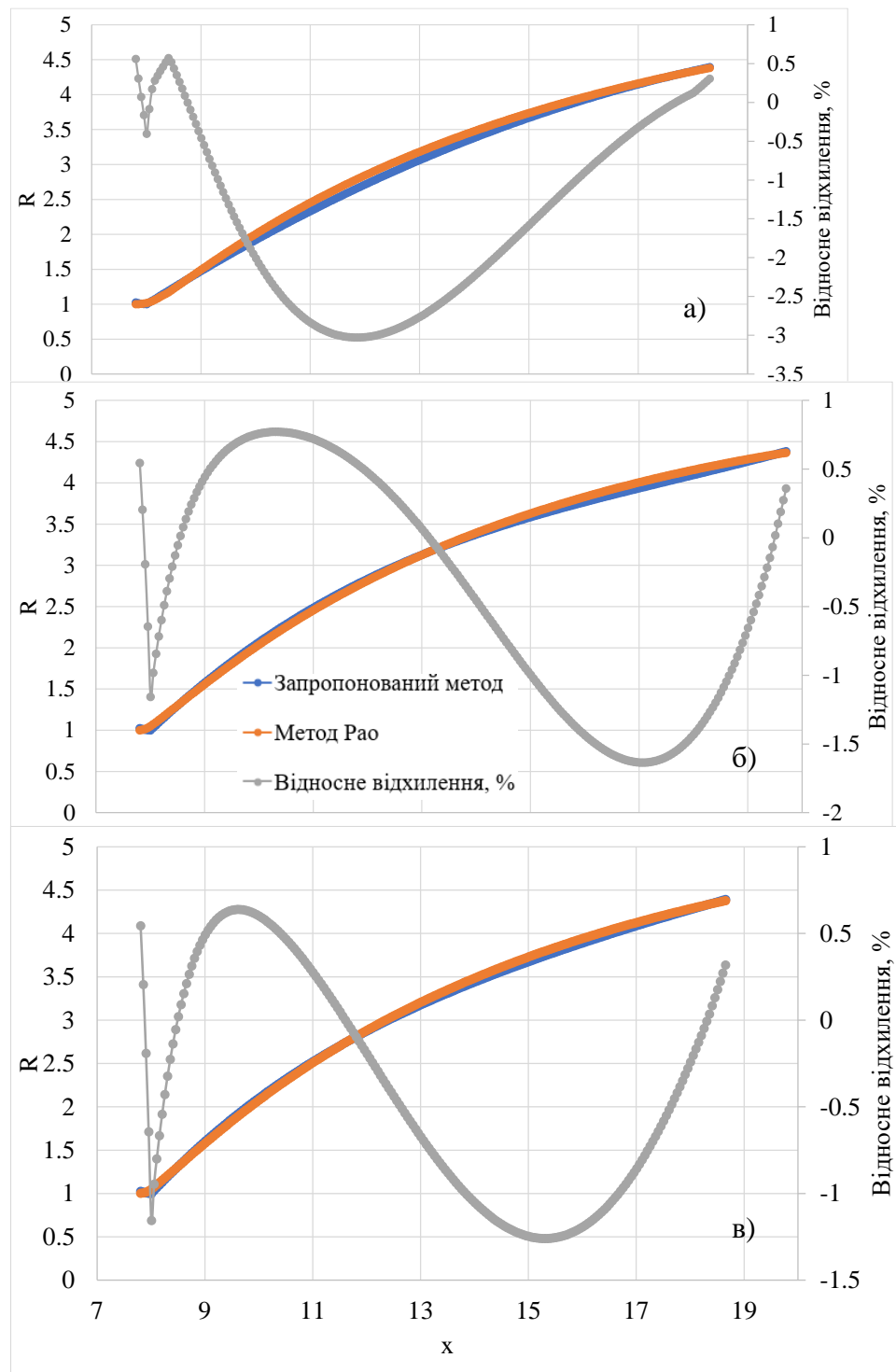


Рисунок 3.4 – Результати профілювання із використанням поліномів:

а) 2-й степінь; б) 3-й степінь; в) 4-й степінь

Таблиця 3.5 – Максимальне значення модуля відносного відхилення в залежності від степеня поліному

Степінь поліному	Максимальний модуль відносного відхилення, %
2	3.03
3	1.64
4	1.26

З рис. 3.4 та табл. 3.5 видно, що відхилення результатів запропонованого методу від загальноприйнятого не перевищує 3 % при використанні полінома з найменшим показником степені. При цьому застосування полінома 3-го степеня дозволяє суттєво знизити розбіжність – у 1.85 разів. Таким чином, з табл. 3.5 можна зробити висновок, що використання полінома 3-го ступеня є найкращим вибором з точки зору величини відхилення від загальноприйнятого методу при помірній складності обчислень. А подальше збільшення ступеня полінома призведе до зростання складності завдання на порядок при незначному підвищенні точності розв’язку задачі проєктування.

Висновки до розділу 3

1. Запропоновано нову методику проєктування надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги, що ґрунтується на розв’язку задачі оптимізації контуру сопла з використанням ефективних методів чисельного моделювання високого порядку точності. Характерні риси запропонованої методики полягають у наступному:

- методика дозволяє отримати контур багатосекційного сопла, що забезпечує максимальну тягу;
- величина тяги розраховується в результаті чисельного моделювання двовимірної течії продуктів згоряння всередині сопла;
- використання чисельного моделювання двовимірної течії продуктів згоряння всередині сопла дозволяє отримати поле розподілу фізичних параметрів потоку;

– використання методу скінченних об'ємів для моделювання течії продуктів згоряння у камері двигуна, що дозволяє знизити чутливість розрахунку до початкових та граничних умов порівняно з методом характеристик та здійснювати рішення навіть у разі наявності у розрахунковій області ударних хвиль;

– використання методу розширених об'ємів для інтегрування скінченних об'ємів на границі розрахункової області, що дозволило уникнути проблеми дробових об'ємів на границях розрахункової області при збереженні переваг використання ортогональних прямокутних сіток. Як наслідок, був зменшений час кожного окремого моделювання течії продуктів згоряння та знижений загальний час розв'язання задачі;

– методика дозволяє здійснювати проєктування при наявності конструктивних обмежень;

– реалізація алгоритму методики у вигляді програмного забезпечення дозволяє автоматизувати процес проєктування оптимальних багатосекційних сопел.

2. Наведено рекомендації щодо вибору ступеня полінома для апроксимації контуру сопла з метою отримання високої точності при збереженні прийнятної складності розрахунків.

3. Проведено верифікацію запропонованого методу шляхом порівняння спроектованих з його допомогою сопел із соплами, побудованими на підставі методу Rao. Результати добре узгоджуються між собою – похибка не перевищує 3%, а її величина визначається різними підходами в моделюванні течії продуктів згоряння в камері. Це дозволяє стверджувати про можливість використання розглянутої методики для проєктування надзвукового контуру сопла максимальної тяги рідинного ракетного двигуна.

РОЗДІЛ 4 ПРОЄКТУВАННЯ НАДЗВУКОВОГО БАГАТОСЕКЦІЙНОГО СОПЛА ДЛЯ ДВИГУНА ПЕРШОГО СТУПЕНЯ РАКЕТИ-НОСІЯ

4.1 Постановка задачі оптимізації контуру сопла

На рис. 4.1 зображена схема найпростішого надзвукового багатосекційного сопла – сопла з подвійним розширенням. Типовий контур такого сопла складається з двох різних секцій, які з'єднанні між собою у точці зламу [15]. Кожна з них профілюється на певне значення атмосферного тиску з метою збереження ефективності роботи при зміні висоти польоту, тому застосування подібних сопел дозволяє збільшити ефективність роботи ракетного двигуна [16, 76, 77]. Саме таке сопло було спрофільовано у розділі для двигуна першого ступеня ракети-носія, оскільки в такому випадку задача оптимізації, що має бути розв'язана, є найпростішою.

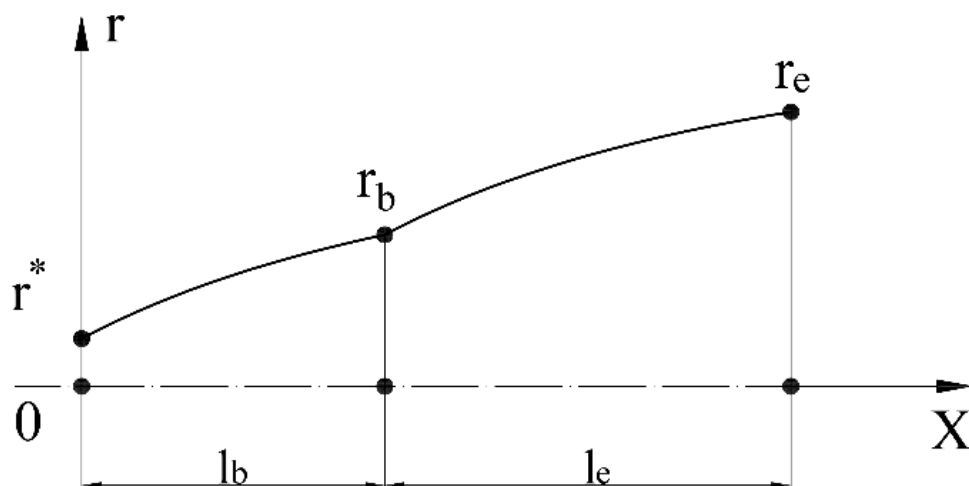


Рисунок 4.1 – схема сопла з подвійним розширенням

Для апроксимації контуру кожної секції сопла було використано поліноми другого ступеня з метою зменшення кількості невідомих задачі. Тому згідно з рис. 4.1 співвідношення (3.8) було перетворено наступним чином:

$$R(2, x) = \begin{cases} R_1(a_{10}, a_{11}, a_{12}, l_b, x), & x \in [0, l_b] \\ R_2(a_{20}, a_{21}, a_{22}, l_e, x), & x \in [l_b, l_b + l_e] \end{cases} \quad (4.1)$$

де $R(2, x)$ – ламана крива, що апроксимує контур;

R_1 та R_2 – параболи, що апроксимують першу та другу секцію відповідно;

a_{ki} – коефіцієнт з індексом i параболи, що апроксимує секцію з індексом k ;

l_b, l_e – довжини першої та другої секції сопла відповідно;

x – координата вздовж осі сопла.

У якості цільової функції було застосовувалась формула (3.7) при $N = 2$:

$$f(\mathbf{X}) = -P(R(2, x)).$$

Для розрахунку модуля осьової складової тяги використовувався вираз (3.4) для сопла з рис. 4.1, яке складається із двох секцій:

$$P = 2\pi \left((\alpha_1 + \alpha_2) \int_{r^*}^{r_1} (p - \alpha_1 p_{e_1}) r dr + \alpha_2 \int_{r_1}^{r_2} (p - \alpha_2 p_{e_2}) r dr \right), \quad (4.2)$$

де $R(2, x)$ – ламана крива, що апроксимує контур;

R_1 та R_2 – параболи, що апроксимують першу та другу секцію відповідно;

α_i – безрозмірний коефіцієнт;

r^*, r_b, r_e – радіуси критичного перерізу, виходу з першої та другої секцій відповідно;

x – координата вздовж осі сопла.

Вектор невідомих параметрів задачі з урахуванням апроксимуючих поліномів мав наступний вигляд:

$$\mathbf{X} = (a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, l_b, l_e). \quad (4.3)$$

З метою подальшої оцінки доцільності використання сопла з подвійним розширенням у рідинному ракетному двигуні першого ступеня на шуканий контур було накладено конструктивне обмеження у вигляді фіксованої довжини виду (3.15):

$$L = l_e + l_b. \quad (4.4)$$

Це дозволило порівняти ефективність застосування багатосекційного сопла із класичним, односекційним, соплом двигуна.

Врахування відомого контуру дозвукової частини камери, умови рівності радіусів обох частин контуру в точці зламу (3.11) й фіксованої повної довжини (4.4) дозволило ввести три рівняння зв'язків:

$$\begin{cases} R_1|_{x=0} = r^*, \\ R_1|_{x=l_b} = R_2|_{x=l_b}, \\ L = l_b + l_e, \end{cases} \quad (4.5)$$

Після розв'язання (4.5) відносно перших коефіцієнтів обох поліномів a_{10} , a_{20} , й довжини другої частини l_e та підстановки результату у вектор (4.3), кількість невідомих параметрів у ньому була зменшена:

$$\mathbf{X} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, l_b). \quad (4.6)$$

З метою надання геометричного змісту і спрощення розв'язку до (4.6) були застосовані співвідношення (3.17).

$$\begin{cases} \left. \frac{dR_1}{dx} \right|_{x=0} = \tan \theta_b \\ R_1|_{x=l_b} = r_b, \\ \left. \frac{dR_2}{dx} \right|_{x=l_b} = \tan \theta_e, \\ R_2|_{x=l_b+l_e} = r_e, \end{cases} \quad (4.7)$$

де θ_b , θ_e – кути нахилу дотичної до контуру до осі сопла на вході в першу та другу секцію відповідно.

Після цього вектор (4.5) набув остаточного вигляду:

$$X = (\theta_b, r_b, l_b, \theta_e, r_e). \quad (4.8)$$

При цьому на значення параметрів вектору були накладені конструктивні обмеження, наведені у табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Граничні значення параметрів, що оптимізувалися

Оптимізований параметр	Нижня межа	Верхня межа	Розмірність
θ_b	15	60	°
r_b	2	5	—
l_b	0.1 L	0.9 L	—
θ_b	15	60	°
r_b	4	8	—

4.2 Розв'язок задачі проєктування

У роботі було спроектовано найпростіше багатосекційне сопло – сопло з подвійним розширенням [78] – для рідинного ракетного двигуна РД-107 [74, 75] першого ступеня ракети-носія, характеристики якого загальновідомі. На рис. 4.2 зображений графік зміни висоти над рівнем моря при польоті першого ступеню ракети-носія [79]. Відомо, що сопло забезпечує максимальну тягу, коли працює на розрахунковому режимі, тобто коли тиск на зрізі сопла дорівнює тиску навколишнього середовища. З тієї причини що сопло з

складається із двох частин, для кожної з них було обране окреме розрахункове значення тиску. При цьому це було зроблено таким чином, щоб протягом польоту і зміни тиску навколишнього середовища сопло якнайдовше працювало у режимах, близьких до розрахункових, забезпечуючи тягу близьку до максимальної.

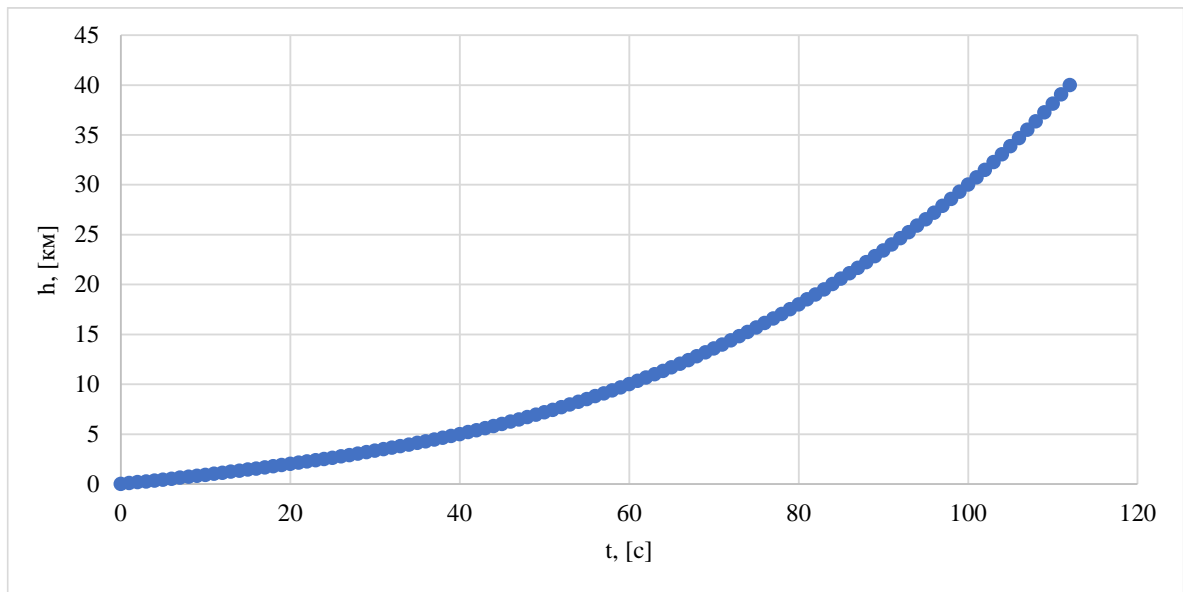


Рисунок 4.2 – Зміна висоти над рівнем моря під час польоту

Для визначення тисків на зрізі кожної частини було побудовано залежність зміни тиску навколишнього середовища відповідно до зміни висоти польоту (рис. 4.3). Вона була отримана шляхом застосування співвідношень стандартної атмосфери (4.9) – (4.11) [80, 81] до значень зміни висоти ракети-носія над рівнем моря під час польоту (рис. 2).

Для $h < 11000$:

$$p = 101.29 \left(\frac{15.04 - 0.00649 h + 273.1}{288.08} \right)^{5.256}. \quad (4.9)$$

Для $11000 \leq h < 25000$:

$$p = 22.65 e^{1.73 - 0.000157 h}. \quad (4.10)$$

Для $h \geq 25000$:

$$p = 2.488 \left(\frac{-131.21 + 0.00299 h + 273.1}{216.6} \right)^{-11.388}, \quad (4.11)$$

де p – статичний тиск навколишнього середовища, [кПа];

h – висота над рівнем моря, [м].

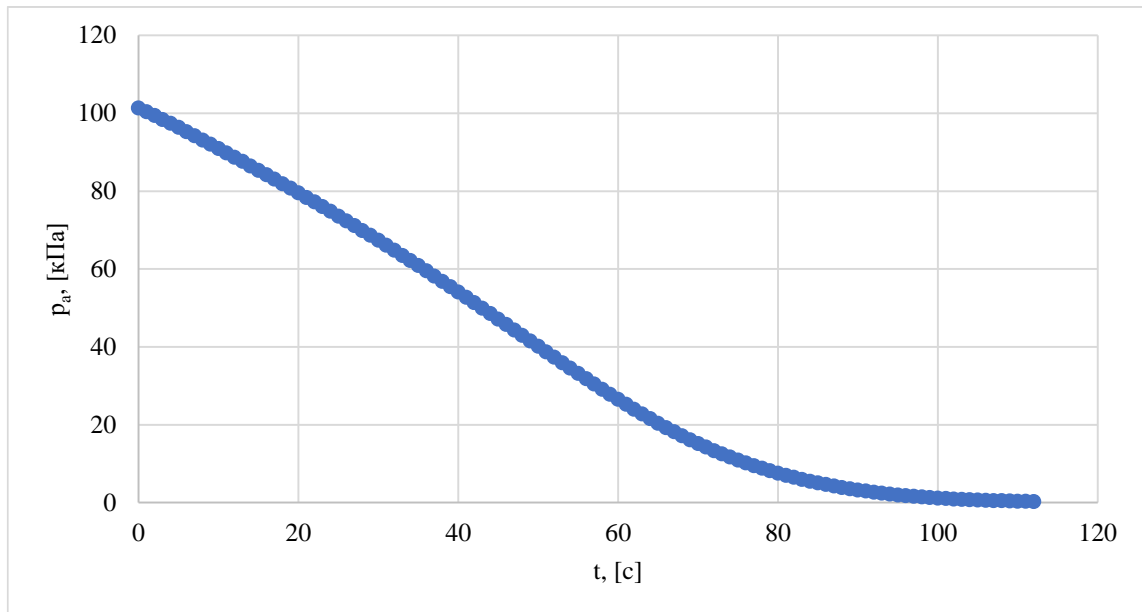


Рисунок – 4.3. Зміна атмосферного тиску під час польоту

Згідно з рис. 4.3 час роботи двигуна був розділений на два рівних проміжки: 0–60 с. та 60–112 с. Для кожного з них був визначений середній інтегральний тиск навколишнього середовища [82] (4.12):

$$\hat{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(h(t)) dt, \quad (4.12)$$

де \hat{p} – середній на часовому проміжку тиск навколишнього середовища;

t_1, t_2 – початок та кінець часового проміжку, на якому розраховувався середній тиск;

$p(h(t))$ – залежність тиску навколишнього середовища від висоти польоту h та часу t , розрахована за (4.9)–(4.11).

В результаті застосування формули (4.12) були отримані два значення статичного тиску: 68700 Па та 9200 Па. З їх допомогою та з використанням формул (3.21)–(3.23) було отримано перші наближення радіусів на виході з обох секцій.

Початкові значення довжин обох секцій дорівнювали половині повної довжини сопла: $l_b = l_e = 0.5 L$.

Таким чином, визначення довжин та радіусів на виході дозволило побудувати перше наближення контуру сопла з подвійним розширенням, кожна з секцій якого мала форму конуса.

Розв’язок оптимізаційної задачі виконувався згідно з кроками, описаними в підрозділі 3.2. Визначення осьової складової сили тяги РД проводилось за результатами чисельного моделювання газодинамічних процесів всередині контуру камери РРД по обчислювальній моделі, яку наведено в розділі 2. Моделювання здійснювалось для розрахункової області, схематично зображеної на рис. 4.4, для якої в табл. 4.2 наведені геометричні розміри дозвукової частини камери.

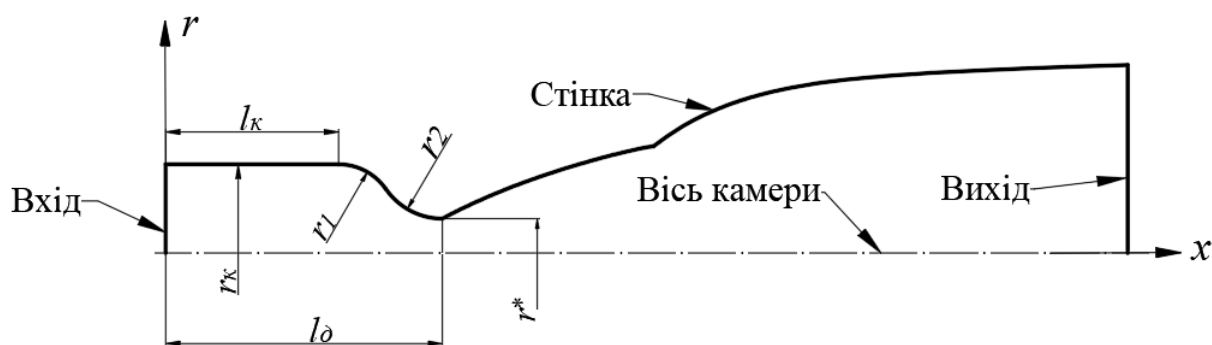


Рисунок 4.4 – Схема розрахункової області для камери з соплом з подвійним розширенням

Таблиця 4.2 – Геометричні розміри дозвукової частини камери

Параметр	r_k	r_l	r_2	r^*	l_k	l_d
Значення, [мм]	215	150	165	83	435	723

Для розв'язку задачі методом розширених об'ємів розрахункова область покривалася прямокутною декартовою сіткою в площині ($r\theta x$) з кроками по обох координатах 2.4 мм. Лінії сітки не збігалися із твердою стінкою – контуром камери.

Параметри потоку продуктів згоряння наведені у табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Параметри продуктів згоряння

Параметр	Значення	Розмірність
Повний тиск	5.85	МПа
Густина	4.48	кг/см ³
Питома газова стала	359.51	Дж/(кг К)
Показник адіабати	1.21	–

У результаті розв'язку задачі оптимізації був спрофільований контур сопла з подвійним розширенням. Він зображений на рис. 4.5 разом із контуром базового сопла двигуна РД107.

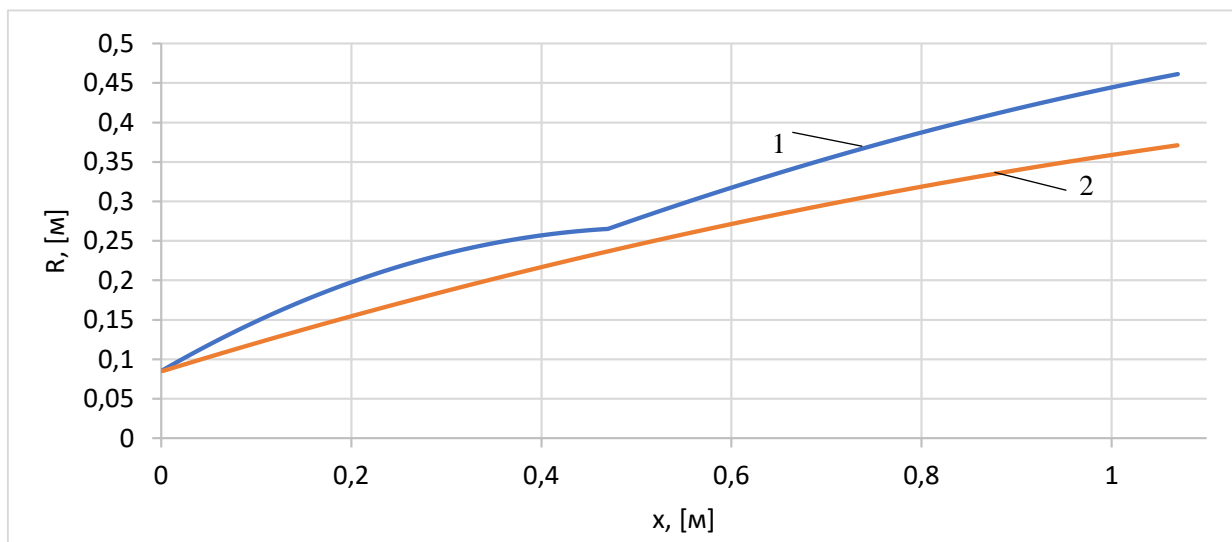


Рисунок 4.5 – Порівняння контурів сопел:

1 – сопло з подвійним розширенням; 2 – стандартне сопло двигуна РД107

На рис. 4.6 у безрозмірній формі зображені ізолінії поля осьової швидкості на двох розрахункових режимах роботи багатосекційного сопла.

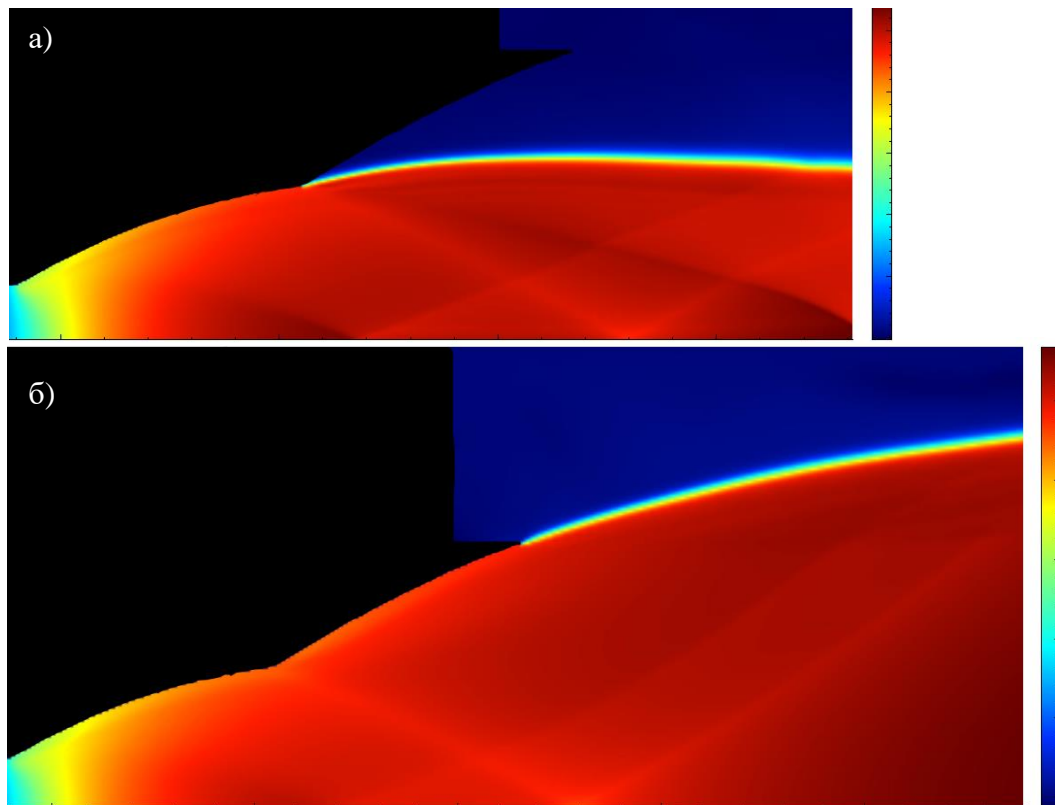


Рисунок 4.6 – Ізолінії поля осьової швидкості багатосекційного сопла:
а) перший режим; б) другий режим

Перший режим – на низькій висоті з великим тиском навколишнього середовища, другий режим – на значній висоті з малим тиском навколишнього середовища.

4.3 Оцінка ефективності багатосекційного сопла

З метою порівняння ефективності роботи двигуна з багатосекційним соплом та двигуна з класичним, односекційним, соплом був проведений розрахунок зміни тяги під час польоту при використанні обох типів сопл. Для цього траєкторія польоту була розбита на 10 рівних проміжків за часом. Для кожного з них за формулою (4.12) було розраховане значення тиску навколишнього середовища і проведене чисельне моделювання з метою визначення величини тяги камери. Отримані значення занесені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Зміна тяги уздовж траєкторії двигуна із базовим соплом і багатосекційним

№	Час проміжку, с		Тиск навколишнього середовища, [кПа]	Тяга камери, [кН]	
	Початок	Кінець		Базове сопло	Багатосекційне сопло
1	0.00	12.44	94.99	213.94	215.04
2	12.44	24.89	81.09	217.08	218.42
3	24.89	37.33	65.88	221.03	222.33
4	37.33	49.78	49.15	226.32	227.15
5	49.78	62.22	31.90	233.42	233.82
6	62.22	74.67	16.94	239.88	240.10
7	74.67	87.11	7.27	244.06	251.51
8	87.11	99.56	2.46	246.14	254.73
9	99.56	112.00	0.66	246.92	255.93
10	112.00	124.40	0.14	247.14	256.22

На рис. 4.7 зображено результати розрахунку тяги двигуна уздовж траєкторії при використанні обох типів сопл.

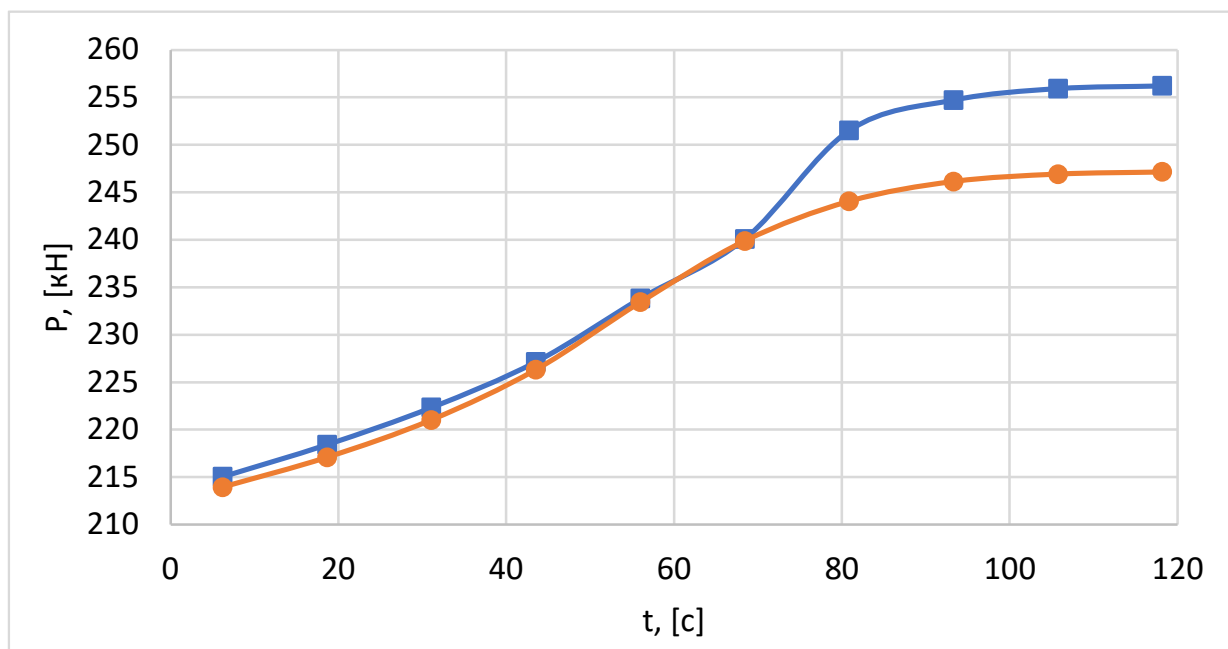


Рисунок 4.7 – Порівняння результатів розрахунку тяги двигуна уздовж траєкторії:

- – значення, отримані при застосуванні багатосекційного сопла;
- – значення, отримані при застосуванні класичного сопла.

Кількісне порівняння ефективності роботи двигуна з обома типами сопел було виконано шляхом розрахунку середнього питомого імпульсу [83] уздовж всієї траєкторії за формулою (4.13).

$$\begin{cases} I_n = \frac{\int P dt}{\int \dot{m} dt} \\ P = P_{cc} + P_n, \\ P_{cc} = \rho^* w^{*2} \end{cases} \quad (4.13)$$

де I_n – середній за траєкторією питомий імпульс;

P – повна тяга камери;

\dot{m} – масова витрата через критичний переріз сопла;

P_{cc} – тяга дозвукової частини камери;

P_n – тяга сопла, що розраховувалась за формулою (3.5);

ρ^* – густина потоку продуктів згоряння в критичному перерізі камери;

w^* – швидкість потоку продуктів згоряння в критичному перерізі камери.

Отримані значення середнього питомого імпульсу занесені в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Середній питомий імпульс за траєкторією

Тип сопла	Середній питомий імпульс, [м/с]
Багатосекційне	3184
Класичне	3133

З табл. 4.5 видно, що застосування багатосекційного сопла, яке спопільовано за новою методикою, збільшує питомий імпульс РРД на 51 м/с (5.1 с.), що складає 1.6%. Такі значення є прийнятні в теперішній час в практиці ракетобудування.

Висновки до розділу 4

У розділі для рідинного ракетного двигуна першого ступеня було спроектовано найпростіше багатосекційне сопло – сопло з подвійним розширенням – що забезпечує максимальну тягу.

1. Проведено аналіз траєкторії польоту першого ступеня. Він дозволив отримати значення тисків на зрізі кожної секції сопла таким чином, щоб двигун працював якнайдовше у режимі близькому до розрахункового.

2. Виконані постановка та розв’язання задачі оптимізації контуру надзвукового сопла. Для цього обидві його секції були апроксимовані параболою, коефіцієнти яких разом із довжинами секцій утворювали вектор параметрів, що оптимізувалися. У якості цільової функції для розв’язку задачі мінімізації використовувався вираз для осьової складової тяги з протилежним знаком.

3. Виконана оцінка ефективності роботи спроектованого багатосекційного сопла. Розраховане значення середнього за траєкторією питомого імпульсу при його застосуванні виявилось вищим на 1.6%, ніж при використанні класичного односекційного сопла. Це зумовлено більш адаптованим профілем багатосекційного сопла до зміни тиску навколишнього середовища за рахунок використання методики проєктування, яку було представлено в розділі 3 дисертаційної роботи.

ВИСНОВКИ

Наприкінці, можна зробити наступні висновки:

1. Проведено аналіз існуючих методів проєктування надзвукових сопел РРД. Результати аналізу показали, що на сьогодні відсутній метод проєктування, який дозволяє отримати контур багатосекційного сопла максимальної тяги при заданих конструктивних обмеженнях.
2. Проаналізовано можливості підвищення ефективності методів чисельного моделювання газодинамічних процесів у камері РРД як основного фактору, що впливає на швидкість процесу проєктування.
3. Запропоновано і верифіковано ефективну обчислювальну модель течії продуктів згоряння в камері РРД, яка ґрунтується на використанні явного методу скінченних об'ємів в декартовій ортогональній системі скінченних об'ємів для розв'язку системи рівнянь Ейлера.
4. Вперше запропоновано метод розширених об'ємів постановки граничних умов, який дозволяє ефективно застосовувати декартові сітки для чисельного моделювання процесів газової динаміки в областях з криволінійною геометрією.
5. Запропоновано і верифіковано нову методику проєктування надзвукового багатосекційного сопла максимальної тяги. Вона ґрунтується на розв'язку задачі оптимізації з використанням ефективних методів чисельного моделювання високого порядку точності і дозволяє здійснювати розрахунки незалежно від типу сопла та при наявності конструктивних обмежень.
6. За допомогою розробленої методики для двигуна першого ступеня ракети-носія спроектовано контур найпростішого багатосекційного сопла – сопла з подвійним розширенням – що забезпечує максимальну тягу. Для цього була проаналізована траєкторія польоту ракети-носія, здійснені постановка та розв'язання задачі оптимізації для двосекційного сопла відповідно до розробленої методики. Застосування отриманого контуру дозволило збільшити середній за траєкторією питомий імпульс на 1.6% у порівнянні із

стандартнім соплом. Це зумовлено більш адаптованим профілем багатосекційного сопла до зміни тиску навколишнього середовища.

Загалом, можна зазначити, що усі задачі, які було поставлено в дисертаційній роботі, виконано, а поставлена мета досягнута. Звичайно, отримані результати не вичерпують задачу профілювання надзвукових сопел РРД. Подальший розвиток методів та методик, запропонованих в роботі, може полягати у розвитку методу розширених об'ємів постановки граничних умов на тривимірний випадок, використання іншої системи базових функцій для завдання профіля сопла, застосування уточнюючих процедур при вирішенні задачі мінімізації - все це може бути предметом подальших досліджень автора.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Газовая динамика сопел. Москва : Наука, 1990. 368 с.
2. Biblarz O., Sutton G. P. Rocket propulsion elements. 9th ed. Hoboken : Wiley & Sons, Incorporated, 2016. 800 p.
3. Anderson J. D. Modern compressible flow: With historical perspective. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 2002. 784 p.
4. Zucker R. D., Biblarz O. Fundamentals of gas dynamics. 3rd ed. Hoboken : Wiley & Sons, Incorporated, 2019. 560 p.
5. Rao G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. *Journal of Jet Propulsion*. 1958. Vol. 28, no. 6. P. 377–382. URL: <https://doi.org/10.2514/8.7324>.
6. Weinstock R. Calculus of variations, with applications in physics and engineering. New York : McGraw-Hill, 1952. 326 p.
7. Allman J. G., Hoffman J. D. Design of maximum thrust nozzle contours by direct optimization methods. *AIAA Journal*. 1981. Vol. 19, no. 6. P. 750–751. URL: <https://doi.org/10.2514/3.50999>.
8. Schomberg K., Olsen J., Neely A., Doig G. Design of an arc-based thrust-optimized nozzle contour. *Progress in propulsion physics*. 2019. Vol. 11. P. 517–528. URL: <https://doi.org/10.1051/eucass/201911517>.
9. Schomberg K., Olsen J., Doig G. Design of high-area-ratio nozzle contours using circular arcs. *Journal of Propulsion and Power*. 2016. Vol. 32, no. 1. P. 188–195. URL: <https://doi.org/10.2514/1.b35640>.
10. Fernandes T., Souza A., Afonso F. A shape design optimization methodology based on the method of characteristics for rocket nozzles. *CEAS Space Journal*. 2023. Vol. 15. P. 867–879. URL: <https://doi.org/10.1007/s12567-023-00511-1>.
11. Frey M., Makowka K., Aichner T. The TICTOP nozzle: A new nozzle contouring concept. *CEAS Space Journal*. 2017. Vol. 9. P. 175–181. URL: <https://doi.org/10.1007/s12567-016-0139-z>.

12. Riedmann H., Kniesner B., Frey M., Munz C. D. Modeling of combustion and flow in a single element GH₂/GO₂ combustor. *CEAS Space Journal*. 2014. Vol. 6. P. 47–59. URL: <https://doi.org/10.1007/s12567-013-0056-3>.
13. Yu K., Chen Y., Huang S., Lv Z., Xu J. Optimization and analysis of inverse design method of maximum thrust scramjet nozzles. *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 105. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105948>.
14. Yu K., Chen Y., Huang S., Xu J. Inverse design method on scramjet nozzles based on maximum thrust theory. *Acta Astronautica*. 2020. Vol. 166. P. 162–171. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.10.024>.
15. Махин В. А., Присняков В. Ф., Белик Н. П. Динамика жидкостных ракетных двигателей / под ред. В. А. Махина. Москва : Машиностроение, 1969. 384 с.
16. Yhnatev A. D., Kovalenko N. D., Kovalenko T. A., Pryadko N. S., Syrotkina N. P., Strelnikov G. A., Tokareva E. L. Gas flow control in a rocket engine. *Technical Mechanics*. 2018. Vol. 3. P. 59–68. URL: <https://doi.org/10.15407/itm2018.03.059>.
17. Ihnatyev O., Strelnikov G., Tokareva O. Моделирование интерцепторного регулирования направления вектора тяги ракетного двигателя. *System Technologies*. 2020. Т. 2, № 127. С. 117–125. URL: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-2-127-2020-09>.
18. Коваленко Н. Д., Стрельников Г. А., Золотько А. Е. Газодинамические аспекты и разработки сопел двигателей ступеней ракет с высокой плотностью компоновки. *Техническая механика*. 2011. № 3. С. 36–53.
19. Nürnberger-Génin C., Stark R. Experimental study on flow transition in dual bell nozzles. *Journal of Propulsion and Power*. 2010. Vol. 26, no. 3. P. 497–502. URL: <https://doi.org/10.2514/1.47282>.
20. Horn M., Fisher S. Dual-bell altitude compensating nozzles. *University Park: Pennsylvania State University*. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19940018584>.

21. Génin C., Schneider D., Stark R. Dual-Bell nozzle design. *Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design*. Cham, 2020. P. 395–406. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-53847-7_25.
22. Akib Y. M., Kabir A., Hasan M. Characteristics analysis of dual bell nozzle using computational fluid dynamics. *International Journal of Engineering Materials and Manufacture*. 2019. Vol. 4, no. 1. P. 15–21. URL: <https://doi.org/10.26776/ijemm.04.01.2019.02>.
23. Zebbiche T. Supersonic dual bell axisymmetric minimum length nozzle conception for high propulsion thrust. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2019. Vol. 20. P. 673–687. URL: <https://doi.org/10.1007/s42405-019-00164-7>.
24. Kbab H., Haif S., Abada O. Design process and flow field analysis of a double divergent supersonic nozzle: Enhancing efficiency and performance. *International Conference on Pioneer and Innovative Studies*. 2023. Vol. 1. P. 328–333. URL: <https://doi.org/10.59287/icpis.851>.
25. Glaister P. An efficient numerical scheme for the Euler equations. *Computers & Mathematics With Applications*. 1994. Vol. 27, no. 8. P. 91–100. URL: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(94\)90069-8](https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)90069-8).
26. Vevek U. S., Zang B., New T. H. An efficient hybrid method for solving euler equations. *Journal of Scientific Computing*. 2019. Vol. 81, no. 2. P. 732–762. URL: <https://doi.org/10.1007/s10915-019-01033-x>.
27. Chiang S. T., Hoffmann K. A. Computational fluid dynamics: Volume 1. 4th ed. Wichita : Engineering Education System, 2000. 486 p.
28. Ferziger J. H., Perić M., Street R. L. Computational methods for fluid dynamics. 4th ed. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2020. 596 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99693-6>.
29. Алексеенко С. В., Приходько А. А. Численное моделирование обтекания цилиндра и профиля. Обзор моделей и результаты расчетов. *Ученые записки ЦАГИ*. 2013. Т. 44, № 6. С. 25-57.

30. Приходько А. А., Рогоза Е. Б. Численное моделирование сверхзвукового обтекания цилиндра. *Вісник Харківського національного університету*. 2012. № 1015. С. 283–291.
31. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. Киев : Наукова думка, 2003. 379 с.
32. Hoffman J. D., Frankel S. Numerical methods for engineers and scientists. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2001. 840 p. DOI: URL: <https://doi.org/10.1201/9781315274508>.
33. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The finite volume method in computational fluid dynamics. Cham : Springer International Publishing, 2016. 791 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6>.
34. Berger M. Cut cells. *Handbook of numerical analysis. Vol. 18.* / Amsterdam : Elsevier, 2017. P. 1–22. URL: <https://doi.org/10.1016/bs.hna.2016.10.008>.
35. Bennett W. P., Nikiforakis N., Klein R. A moving boundary flux stabilization method for Cartesian cut-cell grids using directional operator splitting. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 368. P. 333–358. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.04.048>.
36. Berger M. J., LeVeque R. J. Stable boundary conditions for Cartesian grid calculations. *Computing Systems in Engineering*. 1990. Vol. 1, no. 2–4. P. 305–311. URL: [https://doi.org/10.1016/0956-0521\(90\)90016-e](https://doi.org/10.1016/0956-0521(90)90016-e).
37. Berger M., Helzel C. A simplified h-box method for embedded boundary grids. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2012. Vol. 34, no. 2. P. A861–A888. URL: <https://doi.org/10.1137/110829398>.
38. Colella P., Graves D. T., Keen B. J., Modiano D. A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 211, no. 1. P. 347–366. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.05.026>.

39. Berger M., Giuliani A. A state redistribution algorithm for finite volume schemes on cut cell meshes. *Journal of Computational Physics*. 2020. Vol. 428, no. 1. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109820>.
40. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 37, no. 1. P. 239–261. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.
41. Sadrehanghighi I. Case Studies of Immersed Boundary Method (IBM) on Cartesian Mesh. Solaize : CFD Numerics, 2022. 70 p. URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17797.63204/1>.
42. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, volume 1: Fundamentals of numerical discretization. 2nd ed. Hoboken : Wiley & Sons, Incorporated, 2007. 696 p.
43. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Моделирование процессов в камере ракетного двигателя на жидком топливе в невязкой постановке. 6-а Міжнародна науково-практична конференція «*International forum: Problems and scientific solutions*», м. Мельбурн, 6–8 листопада 2020 р. / CSIRO Publishing House. Мельбурн, 2020. С. 708–712.
44. Chorin A. J., Marsden J. E. Mathematical introduction to fluid mechanics. 3rd ed. London : Springer, 2013. 179 p.
45. Versteeg H. K., Malalasekera W. Introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method. 2nd ed. Harlow : Pearson Education Limited, 2007. 517 p.
46. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Вплив граничних умов на виході з розрахункової області на результати чисельного моделювання течії продуктів згоряння у камері РРД. XXIV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «*Людина і Космос*»: Збірка тез., м. Дніпро, 25–27 травня 2022 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2022. С. 98.
47. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. 3rd ed. Berlin : Springer, 2009. 738 p.

48. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *Lecture notes in mathematics*. Berlin, 1998. P. 325–432. URL: <https://doi.org/10.1007/bfb0096355>.
49. Drikakis D., Rider W. High-Resolution methods for incompressible and low-speed flows. Berlin : Springer, 2006. 618 p.
50. Spiteri R. J., Ruuth S. J. A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002. Vol. 40, no. 22. P. 469–491. URL: <https://doi.org/10.1137/s0036142901389025>.
51. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 1988. Vol. 77, no. 2. P. 439–471. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5).
52. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*. 1998. Vol. 67, no. 221. P. 73–85. URL: <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-98-00913-2>.
53. Bucharskyi V., Zhang L.-H., Wan Y.-L. Improvement in time efficiency in numerical simulation for solid propellant rocket motors (SPRM). *Tuijin Jishu/Journal of Propulsion Technology*. 2018. Vol. 39, no. 1. P. 92–99. URL: <https://doi.org/10.13675/j.cnki.tjjs.2018.01.010>.
54. Бучарський В. Л. Two-step finite difference schemes of the method of the joint approximation for solving the quasi-linear one-dimensional hyperbolic equations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2013. Vol. 2, no. 4(62). P. 34–38. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2013.12368>.
55. Dubrovskiy I., Bucharskyi, V. Development of a method of extended cells for the formulation of boundary conditions in numerical integration of gas dynamics equations in the domains of a curvilinear shape. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5, no. 7(107). P. 74–82. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.213795>.
56. Дубровский И. Д., Бучарский В. Л. Метод постановки граничных условий при численном решении задач газодинамики в областях сложной

форми. *XXI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»*: Збірник тез., м. Дніпро, 10–12 квітня 2019 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2019. С. 130.

57. Дубровский И. Д., Бучарский В. Л. Метод постановки граничных условий при численном решении задач газодинамики в областях сложной формы. *System Design and Analysis of Aerospace Technique Characteristics*. 2022. Т. 27, № 2. С. 27–34. URL: <https://doi.org/10.15421/471920>.

58. Anderson J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. 5th ed. New York : McGraw-Hill, 2011. 1131 p.

59. Belitskii G. R., Lyubich Y. I. *Matrix Norms and their Applications*. Basel : Birkhäuser Basel, 1988. 210 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7400-7>.

60. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 1984. Vol. 54, no. 1. P. 115–173. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6).

61. Дубровський І. Д., Бучарський В. Л. Використання методу розширених об'ємів для чисельного моделювання надзвукової течії газу в областях з різною геометрією. *XXV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»*: Збірник тез., м. Дніпро, 12–14 квітня 2023 р. / Нац. центр аерокосмічної освіти молоді ім. О. М. Макарова. Дніпро, 2023. С. 144–145.

62. Dubrovskiy I., Bucharskiy V. The application of the extended cells method to simulate the flow of combustion gases in the lpre chamber. *Journal of Rocket-Space Technology*. 2023. Vol. 31, no. 4. P. 32–39. URL: <https://doi.org/10.15421/452305>.

63. Huang B., Xu J., Yu K. Maximum-Thrust Nozzle Based on Height Constraints. *Aerospace*. 2023. Vol. 10, no. 12. P. 976–998. URL: <https://doi.org/10.3390/aerospace10120976>.

64. Dubrovskiy I., Bucharskiy V. Statement of the problem of designing a liquid rocket engine dual bell nozzle of the maximum thrust using the direct method

of the calculus of variations. *Challenges and issues of modern science: All-Ukrainian Scientific and Practical Conference materials*. Dnipro, 31 May 2023 / Oles Honchar Dnipro National University. Dnipro, 2023. P. 22–28.

65. Barbeau E. J. Polynomials (problem books in mathematics). Berlin : Springer, 2003. 455 p.

66. Numerical Analysis - Theory and Application / ed. by J. Awrejcewicz. Rijeka : InTech, 2011. 648 p.

67. Wright J. S. Coordinate descent algorithms. *Mathematical Programming*. 2015. Vol. 151, no. 1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10107-015-0892-3>.

68. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. Practical Optimization. San Diego : Academic Press, 1981. 401 p.

69. Aukin M. K., Tagirov R. K. Determination of the optimal contour of a supersonic jet engine outlet by the direct method. *Fluid Dynamics*. 1998. Vol. 33, no. 1. P. 140–146. URL: <https://doi.org/10.1007/bf02698172>.

70. Butov V. G., Vasenin I. M., Shelukha A. I. Application of the methods of nonlinear programming to the solution of variational gas dynamics problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1977. Vol. 41, no. 1. P. 52–57. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90087-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90087-9).

71. Функции математической физики / Ж. Кампе де Ферье и др. Москва : Физматлит, 1963. 102 с.

72. Kraiko A. N., Tilliaeva N. I. Solution of the variational problem of constructing the contour of a compound nozzle. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1971. Vol. 35, no. 4. P. 569–582. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90051-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90051-7).

73. Dubrovskiy I., Bucharskyi V. Devising a method to design supersonic nozzles of rocket engines by using numerical analysis methods. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 6, no. 1(126). P. 61–67. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.290583>.

74. RD-107. *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
URL: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=RD-107&oldid=1158746718>.
75. Альбом конструкций ЖРД: Часть III / под ред. В. П. Глушко.
Москва : Военное издательство министерства обороны СССР, 1969. 205 с.
76. Frey M., Hagemann G. Critical assessment of dual-bell nozzles. *Journal of Propulsion and Power*. 1999. Vol. 15, no. 1. P. 137–143.
URL: <https://doi.org/10.2514/2.5402>.
77. Nürnberger-Génin C., Stark R. Experimental Study of Dual Bell Nozzles. *2ND EUROPEAN CONFERENCE FOR AEROSPACE SCIENCES (EUCASS): conference papers*, Brussels, 01–06 June 2007 / Institute of Space Propulsion. Brussels, 2007. URL: <https://elib.dlr.de/63529/>.
78. Дубровський І. Д. Результати проектування надзвукового сопла з подвійним розширенням для рідинного ракетного двигуна першого ступеня методами обчислювального аналізу. *Aerospace Technic and Technology*. 2023. № 6. С. 14–21. URL: <https://doi.org/10.32620/aktt.2023.6.02>.
79. Perez E. Soyuz CSG User's Manual. URL: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/09/Soyuz-Users-Manual-March-2012.pdf>.
80. Earth atmosphere model – metric units. NASA. URL: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>.
81. Davies M. Standard handbook for aeronautical and astronautical engineers. New York : McGraw-Hill Professional, 2002. 1360 p.
82. Comenetz M. Calculus: The Elements. Singapore : World Scientific Publishing Company, 2002. 540 p.
83. Mishra D. P. Fundamentals of rocket propulsion. Boca Raton : CRC Press, 2017. 482 p. URL: <https://doi.org/10.1201/9781315175997>.