

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШЕВЕЛЬОВА НАТАЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН
НА МЕЖІ ПОДІЛУ П'ЄЗОАКТИВНИХ МАТЕРІАЛІВ
ІЗ РІЗНИМИ ЕЛЕКТРИЧНИМИ УМОВАМИ НА ЇХНІХ БЕРЕГАХ

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Н.В Шевельова

Науковий керівник:

Ходанен Тетяна Володимирівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент

АНОТАЦІЯ

Шевельова Н.В. Взаємодія колінеарних тріщин на межі поділу п'єзоактивних матеріалів із різними електричними умовами на їхніх берегах – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2024.

П'єзоелектричні та п'єзоелектромагнітні матеріали часто використовуються як функціональні елементи сенсорів, п'єзорезонаторів, п'єзоелектричних трансформаторів, п'єзоелектричних і п'єзомагнітних актуаторів та інших високотехнологічних виробів. Однак наявні мікродофекти, зокрема тріщини на межі поділу матеріалів, можуть значно знизити їхню міцність. В останні десятиліття одержано важливі результати стосовно дослідження міжфазних тріщин в п'єзоактивних матеріалах, але низка питань залишається вивченою недостатньо. Аналізу деяких з цих питань якраз і присвячено дану дисертаційну роботу.

У вступі обґрунтований вибір теми дослідження, сформульована мета і завдання дослідження, наукова новизна одержаних результатів, проведено аналіз публікацій за проблематикою дисертації та визначено внесок досліджень інших авторів у розвиток цього напрямку.

У розділі I розглянуто взаємодію електропровідної та електропроникної колінеарних тріщин уздовж межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля. Тріщини можуть мати довільну довжину та відстань між ними. Вважалося, що електричне поле паралельне берегам тріщин, а поляризація матеріалів паралельна фронтам тріщин. Використовуючи представлення всіх потрібних електромеханічних величин через кусково-аналітичну вектор-функцію, сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана. Додаткові умови

для цієї задачі записано на основі умов на нескінченності, однозначності переміщень для обох тріщин і теореми Гауса для електропровідної тріщини.

Наведено аналітичний розв'язок цієї задачі в замкненій формі для довільних довжин тріщин і відстаней між ними та будь-яких зовнішніх електромеханічних навантажень. Представлено аналітичні вирази для напруження зсуву, електричного поля та їхніх коефіцієнтів інтенсивності, а також для стрибків механічного та електричного переміщень. Особливу увагу приділено швидкості звільнення енергії (ШЗЕ). З використанням асимптотичних виразів напружень та електричного поля, механічних та електричних переміщень у вершинах тріщин записано аналітичні вирази для ШЗЕ для електропровідної та електропроникної тріщин. Для часткового випадку значної відстані між тріщинами проведено порівняння числового значення розкриття тріщини з відомим результатом, отриманим іншим методом, і продемонстровано їхню хорошу узгодженість.

У **розділі II** розглянуто задачу про взаємодію двох штампів з плоскими підшвами, що вдавлюються у пружну ізотропну півплощину. Вважається, що один штамп жорстко зчеплений із півплощиною, а другий знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Дана задача, хоча й суттєво відрізняється своєю фізичною постановкою від розглянутої у першому розділі, проте її розв'язання здійснюється математичними методами, подібними до тих, які застосовані для задачі про електропроникну і електропровідну колінеарні тріщини на межі поділу різних матеріалів. Отже, окрім конкретної наукової мети даного розділу – розв'язання задачі, важливою є мета методологічна, а саме: підкреслити можливість зведення фізично різних задач до близьких математичних моделей і їхнє розв'язання подібними між собою математичними методами.

За методикою, аналогічною використаній у попередній задачі, сформульовано задачу лінійного спряження, яка складається із комбінації рівнянь Діріхле і Рімана, записаних на відповідних ділянках границі півплощини. Розв'язок задачі представлено з використанням двох канонічних

розв'язків, що враховують поведінку функцій напружень і стрибків переміщень при підході до кутових точок штампів. Отриманий розв'язок дозволив представити всі потрібні фактори на границі півплощини в досить простому аналітичному вигляді. Зокрема, одержано формули, що дають можливість знайти осадку кожного штампу та форму вільної границі півплощини після деформації. Записано також формули, що визначають розподіл напружень під штампами.

Розділ III присвячено вивченню електромагнітомеханічного стану двох спаяних між собою п'єзоелектромагнітних півпросторів з двома тріщинами на межі поділу матеріалів під дією антиплоского механічного навантаження та електричного і магнітного полів в площині, ортогональній фронтам тріщини. Вважається, що одна з тріщин є електромагнітопроникною, а інша електромагнітопровідною. Це означає, що перша не перешкоджає проходженню через неї електричного та магнітного полів, а для другої компоненти полів на берегах тріщини дорівнюють нулю.

Із використанням представлень механічних, електричних та магнітних факторів через функції комплексної змінної отримано вирази для цих величин через функції, аналітичні у всій комплексній площині, ортогональній фронтам тріщин, які мають стрибки при переході через тріщини. За допомогою цих представлень проблему зведено до задач лінійного спряження для кусково-аналітичних функцій, для яких отримано точні аналітичні розв'язки. На їхній основі знайдено аналітичні вирази для напружень, електричного та магнітного полів на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також розкриття тріщин і стрибки електричного і магнітного зміщень при переході через тріщини. Для біматеріалу, складеного із різних п'єзоелектромагнітних матеріалів, конкретних значень довжин тріщин, відстаней між ними та зовнішнього механічного, електричного і магнітного навантажень наведено чисельну ілюстрацію одержаних результатів. Зокрема, для різних значень магнітного поля представлено графіки зміни зсувного напруження на межі поділу матеріалів між тріщинами та розкриття електромагнітопровідної тріщини.

Показано, що зовнішній магнітний потік суттєво впливає на механічні поля в околі електромагнітопровідної тріщини, а для електромагнітопроникної тріщини цей вплив є незначним.

Розділ IV присвячено дослідженню системи тріщин між двома п'єзоелектромагнітними півпросторами. Тріщини можуть мати довільну довжину і розташування, а їхня кількість може бути довільною. Приймається, що береги тріщин є електро- і магнітопроникними, а на нескінченності може бути задано змішане механічне навантаження та електричне і магнітне поля, які не змінюються по координаті, паралельній фронтам тріщин. Це означає, що має місце плоска деформація у площині, ортогональній фронтам тріщин.

Із використанням визначальних рівнянь для п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних матеріалів побудовано представлення електромагнітомеханічних величин через кусково-аналітичну вектор-функцію. За допомогою цих представлень сформульовано задачу лінійного спряження, яку розв'язано аналітично. З використанням одержаного розв'язку записано в замкненому вигляді всі потрібні для подальшого аналізу механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів. Оскільки отриманий розв'язок має осциляційну сингулярність у вершинах тріщин, то швидкість звільнення енергії є найбільш важливим параметром для визначення можливості розвитку тріщини в цьому випадку. Записано аналітичні вирази для ШЗЕ у всіх вершинах тріщин із використанням асимптотичних представлень усіх полів в околі вершин тріщин та інтегрального методу віртуального закриття тріщини.

Чисельні результати представлені у вигляді графіків і таблиць для різних навантажень, розташування тріщин та їхніх довжин. Особливу увагу приділено випадкам суттєвого зближення окремих тріщин. У таких випадках спостерігається значне зростання швидкостей звільнення енергії, особливо для вершин, що розташовані найближче одна від одної.

У **розділі V** розглядається біматеріальний простір, що складається з двох напівнескінченних магнітоелектропружних просторів зі скінченним набором

тріщин уздовж межі поділу матеріалу. Тріщини можуть мати довільну довжину і розташування, а їхні береги покриті електродами, що мають різний сумарний електричний заряд і нульову сумарну магнітну індукцію. Біматеріальне тіло навантажується віддаленим змішаним механічним навантаженням, електричним та магнітним полями, які не змінюються по координаті, паралельній фронтам тріщин. Це означає, що має місце плоска деформація у площині, ортогональній фронтам тріщин.

Із використанням представлень електромагнітомеханічних величин через кусково-аналітичні функції сформульовано задачу лінійного спряження Рімана-Гільберта, яку розв'язано аналітично. З умов на нескінченності, однозначності переміщень та значень заданого сумарного електричного заряду та магнітної індукції для кожної тріщини побудовано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно довільних констант), розмірність якої дорівнює числу тріщин. Цю систему розв'язано методом Гауса. В результаті всі необхідні механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж інтерфейсу представлено в замкненому вигляді.

Показано, що всі поля мають осциляційну сингулярність у вершинах тріщин. Це означає, що поняття коефіцієнта інтенсивності напружень не є зручним для опису процесу руйнування. Тому більшу увагу було приділено визначенню швидкості звільнення енергії. Для цього отримано асимптотичні представлення механічних, електричних і магнітних полів у вершинах тріщин і застосовано метод віртуального закриття тріщини. В результаті одержано формули для ШЗЕ у правій і лівій вершинах будь-якої тріщини.

Отримані аналітичні формули візуалізовано через графіки стрибків переміщення берегів тріщини, напружень, електричних і магнітних полів уздовж межі поділу магнітоелектропружних матеріалів. Швидкості звільнення енергії також наведено у табличній формі для різних вершин тріщин, навантаження, довжин тріщини та їхнього розташування.

Наприкінці роботи сформульовано основні **висновки** відповідно до мети і завдань дослідження та описано низку ефектів, виявлених під час проведення чисельного аналізу результатів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому: вперше запропоновано та реалізовано методику дослідження двох колінеарних тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля при умові, що одна з тріщин є електропровідною, а інша електропроникною. Вперше розв'язано антиплоску задачу для п'єзоелектромагнітного біматеріалу з двома тріщинами на межі поділу різнорідних компонент при різних електричних та магнітних умовах на берегах різних тріщин. Розглянуто нову плоску задачу для довільної системи колінеарних електро- та магнітопроникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами під дією змішаного механічного навантаження. Розроблено та реалізовано аналітичний підхід до дослідження скінченної множини тріщин на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів при умові, що береги тріщин покриті механічно м'якими електродами із заданим електричним зарядом і нульовою магнітною індукцією.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що співвідношення для параметрів руйнування, які отримано у вигляді аналітичних формул, дозволяють оцінити вплив зовнішніх факторів на можливість розвитку тріщини, та на основі цих оцінок запропонувати шляхи підвищення тріщиностійкості композитних конструкцій, виготовлених з п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних матеріалів.

Ключові слова: тріщина, композит, п'єзоелектричний біматеріал, п'єзоелектромагнітний біматеріал, пошкодження, антиплоска задача, плоска задача, задача лінійного спряження, штамп, коефіцієнт інтенсивності напружень, стрибки переміщень, електричні і магнітні зміщення, розкриття тріщини, швидкість звільнення енергії.

ANNOTATION

N. V. Shevelova. Interaction of collinear cracks at the separation boundary of piezoactive materials with different electrical conditions on their faces. - Qualifying scientific work on manuscript rights

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on a specialty 113 Applied mathematics – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2024.

Piezoelectric and piezoelectromagnetic materials are often used as functional elements of sensors, piezoresonators, piezoelectric transformers, piezoelectric and piezoelectric actuators, and other high-tech products. However, existing microdefects, in particular cracks at the interface of materials, can significantly reduce their strength. In recent decades, important results have been obtained regarding the study of interfacial cracks in piezoactive materials, but a number of problems remain insufficiently studied. Analysis of some of these problems is the purpose of this dissertation.

In the Introduction the choice of the research topic, the goal and task of the research, the scientific novelty of the obtained results are justified; the analysis of publications on the dissertation subject are carried out and the contribution of other authors to the development of this direction are defined.

Chapter I deals with the interaction of electrically conductive and electrosclally permeable collinear cracks along the interface of two piezoelectric materials under the action of an anti-plane mechanical load and a plane electric field. Cracks can have arbitrary length and distance between them. It is assumed that the electric field is parallel to the crack faces, and the polarization of the materials is codirected with the crack fronts. Using the presentation of all necessary electromechanical quantities through a piecewise analytic vector function, the combined Dirichlet-Riemann boundary value problem is formulated. Additional conditions for this problem are formulated on the basis of conditions at infinity, the uniqueness of displacements for both cracks, and the Gauss theorem for an electrically conductive crack.

An analytical solution of this problem is given in a closed form for any distances between cracks, any of their lengths, and any external loads of the above type. Analytical expressions for shear stress, electric field and their intensity factors, as well as for jumps of mechanical and electrical displacements are presented. Special attention is paid to the energy release rate (ERR) consideration. Using asymptotic expressions of stresses and electric field, mechanical and electrical displacements at the crack tips, analytical expressions of the ERR for electrically conductive and electrically permeable cracks were found. For the partial case of a significant distance between the cracks, a comparison of the obtained crack opening with the known result found by another method was made and their good agreement was demonstrated.

Chapter II deals with the problem of the interaction of two stamps with flat bottoms pressed into an elastic isotropic half-plane. It is assumed that one stamp is rigidly attached to the half-plane, and the second one is in smooth contact with it. Although this problem is significantly different in its physical formulation from the one considered in the first chapter, its solution is carried out by mathematical methods similar to those used for the problem of electrically permeable and electrically conductive collinear cracks at the interface of different materials. So, in addition to the specific scientific goal of this section - solving the problem, the methodological goal is important, namely: to emphasize the possibility of reducing physically different problems to similar mathematical models and their solution by similar mathematical methods.

According to a method similar to that used in the previous problem, the problem of linear relationship is formulated, which consists of a combination of Dirichlet and Riemann equations written on the corresponding sections of the boundary of the half-plane. The solution of the problem is presented using two canonical solutions that take into account the behavior of stress functions and displacement jumps when approaching the corner points of the stamp. The obtained solution made it possible to present all the necessary factors on the boundary of the half-plane in a fairly simple analytical form. In particular, the obtained formulas

make it possible to find the depression of each stamp and the shape of the free boundary of the half-plane after deformation. The formulas determining the stress distribution under the stamps are also found.

Chapter III is devoted to the consideration of the deformation of two adhered piezoelectric half-spaces with two cracks at the material interface under the action of anti-plane mechanical loading and electric and magnetic fields in the plane orthogonal to the crack fronts. It is assumed that one of the cracks is electromagnetically conductive, and the other is electromagnetically permeable. This means that the first one does not prevent electric and magnetic fields from passing through it, and for the second one these fields at the faces of the crack are zero.

With the use of representations of mechanical, electrical, and magnetic factors through functions of a complex variable, expressions for these quantities were obtained via functions analytic in the entire complex plane, orthogonal to the crack fronts, which have jumps when passing through the cracks. With the help of these representations, the problem is reduced to linear relationship problems for piecewise analytical functions, for which exact analytical solutions are obtained. On their basis, analytical expressions for stresses, electric and magnetic fields at the interface of materials outside the cracks, as well as the opening of cracks and jumps of electric and magnetic displacements when passing through the cracks were found. A numerical illustration of the obtained results is provided for a bimaterial composed of different piezoelectric materials, certain values of crack lengths, distances between them, and external mechanical, electrical, and magnetic loads. In particular, for different values of the magnetic field, the graphs of the shear stress variation at the materials interface between cracks and the opening of an electromagnetically conductive crack are presented. It is shown that the external magnetic flux significantly affects the mechanical fields in the vicinity of an electromagnetically conductive crack, while this effect is insignificant for an electromagnetically permeable crack.

Chapter IV is devoted to the study of the crack system between two piezoelectric half-spaces. Cracks can have an arbitrary length and location, and their number can be arbitrary. It is assumed that the faces of the cracks are electrically and magnetically permeable, and a mixed mechanical load and electric and magnetic fields, which do not vary along the coordinate co-directed with the crack fronts, can be prescribed at infinity. This means that the plane deformation occurs in the plane orthogonal to the crack fronts.

With the use of constitutive equations for piezoelectric and piezoelectromagnetic materials, the representations of electro-magneto-mechanical quantities via a piecewise analytical vector function are constructed. With the help of these representations, the problem of linear relationship is formulated and solved analytically. Using the obtained solution all necessary mechanical, electrical and magnetic components along the material interface are found in a closed form. Since the resulting solution has an oscillating singularity at the crack tips, the energy release rate is the most important parameter for determining the possibility of crack development in this case. It was found analytically for all crack tips using asymptotic representations of all fields at the crack tips and the integral method of virtual crack closure.

Numerical results are presented in the graph and table form for different loads, cracks locations and their lengths. Special attention is paid to cases of significant convergence of individual cracks. In such cases, a significant increase of the energy release rates is observed, especially for the tips located closest to each other.

Chapter V considers a bimaterial space consisting of two semi-infinite magneto-electroelastic spaces with a finite set of cracks along the material interface. Cracks can have arbitrary length and location, and their faces are covered with electrodes having different total electric charge and zero total magnetic induction. The bimaterial is loaded by a remote mixed mechanical load, electric and magnetic fields that do not change along the coordinate co-directed with the crack fronts. This means that plane deformation in the plane orthogonal to the crack fronts takes place.

Using representations of electro-magneto-mechanical quantities through piecewise analytical functions, the Riemann-Hilbert problem of linear relationship is formulated and solved analytically. Arbitrary constants are found from the conditions at infinity, the uniqueness of displacements, and the given total electric charge and magnetic induction for each crack. They give a system of linear algebraic equations whose dimension is equal to the number of cracks. This system is solved by the Gaussian method. As a result, all necessary mechanical, electrical and magnetic components along the interface are presented in a closed form.

It is shown that all fields have an oscillating singularity at the tips of the cracks. This means that the concept of the stress intensity factor is not convenient for describing the fracture process. Therefore, much attention was paid to determining the ERR. For this purpose, asymptotic representations of mechanical, electric and magnetic fields at the tips of cracks were obtained and the method of virtual crack closure was applied. As a result, formulas for ERR on the right and left tips of any crack were obtained

By visualizing the obtained analytical formulas, the graphs of the crack faces displacement jumps, stresses, electric and magnetic fields along the interface of magneto-electroelastic materials are given. Energy release rates are also tabulated for different crack tips, loads, crack lengths and locations.

At the end of the work, the main conclusions are formulated in accordance with the purpose and tasks of the research and a number of effects revealed during the numerical analysis of the results are described.

The scientific novelty of the obtained results is as follows: A method of investigating two collinear cracks between two piezoelectric materials under the action of an anti-plane mechanical load and a plane electric field is proposed and implemented, provided that one of the cracks is electrically conductive, and the other is electrically permeable. The anti-plane problem for a piezoelectric bimaterial with two cracks at the interface of dissimilar components under different electrical and magnetic conditions on the faces of different cracks was investigated. A new plane problem for an arbitrary system of collinear electrically-magnetically permeable

cracks between two piezo-electromagnetic materials under the action of a mixed mechanical load is considered. An analytical approach for studying of a finite set of cracks at the interface of piezoelectric materials has been developed and implemented under the condition that the faces of the cracks are covered with mechanically soft electrodes with a given electric charge and zero magnetic induction.

The practical significance of the obtained results is primarily connected with the fact that the exact analytical solutions obtained in the work can be used as a reference in the development and testing of numerical methods for solving similar problems for finite sized bodies.

The practical significance of the obtained results is that the relationship for the fracture parameters, which are obtained in the form of analytical formulas, allow to assess the influence of external factors on the possibility of crack development and thereby contribute to increasing the crack resistance of composite structures made of piezoelectric and piezoelectromagnetic materials.

Keywords: crack, composite, piezoelectric bimaterial, piezoelectric bimaterial, damage, anti-plane problem, plane problem, problem of linear relationship, stamp, stress intensity factor, displacement jumps, electric and magnetic displacements, crack opening, energy release rate.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Взаємодія двох штампів із різними умовами контакту на границі ізотропної півплощини. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2021. №1. С. 81-89. DOI: <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-10>.
2. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Взаємодія міжфазних тріщин з різними електричними та магнітними умовами на їх берегах у п'єзоелектромагнітному композиті. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій*. 2022. Вип. 34. Т. 1. С. 59-70. DOI: <https://doi.org/10.15421/4222110>.

Стаття у науковому фаховому виданні України, яке входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus

3. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2023. №2. С. 164–167. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.29>.

Статті у періодичних наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science Core Collection

1. Loboda V., Shevelova N., Khodanen T., Lapusta Y. An interaction of electrically conductive and electrically permeable collinear cracks in the interface of piezoelectric materials. *Archive of Applied Mechanics*. 2022. Vol. 92. P. 1465–1480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02123-3>.
2. Shevelova N., Khodanen T., Chapelle F., Lapusta Y., Loboda V. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelectroelastic

bimaterial. *Acta Mechanica*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.

Тези доповідей

1. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Зчеплений та гладкий штампи на границі пружної ізотропної півплощини. *Математичні проблеми технічної механіки-2021* : матеріали міжнародної наукової конференції, 13-16 квітня 2021 р. Дніпро, Кам'янське, 2021. С. 38. URL: https://www.dstu.dp.ua/uni/downloads/maket_zbirnik_mater_conf_mptm2021.pdf.
2. Shevelova N. V., Khodanen T. V. Piezoelectric bimaterial with electrically conductive and electrically permeable collinear cracks at the interface. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем* : тези доповідей XX міжнародної науково-практичної конференції, 23-25 листопада 2022 р., Дніпро: ДНУ, 2022. С. 226. URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2022/12/MPZIS-2022-1.pdf>.
3. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами. *Сучасні проблеми механіки* : Матеріали VII міжнародної наукової конференції, 28-29 серпня 2023 р., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, Україна. С. 64. URL: http://lcwf.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2023_UKR.pdf.
4. Shevelova N. V., Khodanen T. V. An interaction of the interfacial cracks system in piezoelectromagnetic biomaterial. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем* : Тези доповідей XXI міжнародної науково-практичної конференції. – Дніпро: ДНУ, 2023. – С. 44. URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf>.

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ I. ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТА ЕЛЕКТРОПРОНИКНИХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН НА МЕЖІ ПОДІЛУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ	33
1.1 Постановка задачі.....	33
1.2 Задача лінійного спряження.....	35
1.3 Визначення електромеханічних величин на різних частинах межі поділу матеріалів	38
1.4 Коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкості звільнення енергії	40
1.5 Аналіз чисельних результатів	44
1.6 Висновки до розділу I.....	53
РОЗДІЛ II. ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ШТАМПІВ З РІЗНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ НА ГРАНИЦІ ІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ.....	55
2.1 Постановка задачі.....	55
2.2. Комбінована крайова задача Діріхле-Рімана	56
2.3 Поведінка механічних факторів на границі півплощини.....	59
2.4 Аналіз чисельних результатів	61
2.5 Висновки до розділу II.....	63
РОЗДІЛ III. ВЗАЄМОДІЯ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН З РІЗНИМИ ЕЛЕКТРИЧНИМИ ТА МАГНІТНИМИ УМОВАМИ НА ЇХ БЕРЕГАХ У П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ КОМПОЗИТІ.....	65
3.1 Основні формули для п'єзоелектромагнітного матеріалу для антиплоского випадку.....	65
3.2 Постановка задачі та основні формули для біматеріального тіла з електромагнітопровідною та електрично та магнітопроникною міжфазними тріщинами	66
3.3 Формулювання та розв'язання задач лінійного спряження	73

3.4. Визначення механічних напружень, електричного та магнітного полів на різних ділянках межі поділу матеріалів.....	75
3.5. Аналіз чисельних результатів.....	77
3.6 Висновки до розділу III	80
РОЗДІЛ IV. СИСТЕМА КОЛІНЕАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНО ТА МАГНІТНО ПРОНИКНИХ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНИМИ МАТЕРІАЛАМИ	81
4.1 Основні формули для п'єзоелектромагнітного матеріалу для плоского випадку	81
4.2 Електрично і магнітно проникні тріщини	84
4.3 Система колінеарних тріщин на межі поділу матеріалів.....	86
4.4 Аналіз чисельних результатів	90
4.5 Висновки до розділу IV	93
РОЗДІЛ V. СИСТЕМА КОЛІНЕАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНО ПРОВІДНИХ ЗАРЯДЖЕНИХ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН В МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОМУ БІМАТЕРІАЛІ	95
5.1 Формулювання проблеми.....	95
5.2 Побудова та розв'язання задачі лінійного спряження.....	97
5.3 Визначення електромагнітомеханічних компонент на різних частинах межі поділу матеріалів.....	102
5.4 Асимптотична поведінка електромагнітомеханічних компонент на різних частинах межі поділу матеріалів	106
5.5 Швидкість звільнення енергії	107
5.6 Аналіз чисельних результатів	110
5.7 Висновки до розділу V	119
ВИСНОВКИ.....	121
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	124

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В останні десятиліття п'єзоелектричні та п'єзоелектромагнітні матеріали набувають все ширшого застосування в інженерній практиці. Зокрема, ці матеріали використовуються у виробництві п'єзорезонаторів, п'єзоелектричних трансформаторів, п'єзоелектричних та п'єзомагнітних актуаторів та інших високотехнологічних виробів. Але п'єзоактивні матеріали є схильними до крихкого руйнування, спричиненого тріщинами та іншими дефектами їхньої структури. Більше того, вказані високотехнологічні вироби є, як правило, багатокомпонентними, що містять складові, виготовлені з різних п'єзоактивних і п'єзопасивних елементів. Але в області міжкомпонентних з'єднань досить часто наявні тріщини та інші дефекти, які суттєво знижують міцність конструкцій.

Проблемі дослідження тріщин між різними п'єзоелектричними та п'єзоелектромагнітними матеріалами (міжфазних тріщин) присвячено значну кількість досліджень українських та закордонних авторів. Розглянемо найбільш важливі з них.

Внутрішні та міжфазні тріщини в ізотропних та анізотропних матеріалах

Швидкий розвиток техніки та різних галузей будівництва зумовлює створення та використання нових композиційних матеріалів із різноманітними властивостями. При цьому очевидними постають проблеми міцності і тріщиностійкості виготовлених із цих матеріалів конструкцій. Отже, виникає потреба у розробці спеціальних методик, які б враховували неоднорідність та стрибкоподібну зміну фізичних характеристик в композиті. Як доводить практика, міжфазні тріщини, які виникають та зростають на межі поділу (інтерфейсі) складових частин композиту, є найбільш вірогідною причиною руйнування. Подібно до випадку тріщини в однорідному матеріалі, для міжфазної тріщини основними параметрами, що характеризують руйнування,

є коефіцієнти інтенсивності напружень і швидкість звільнення енергії, обчислення яких і становить основну задачу дослідження.

За останні десятиліття розроблено певну кількість методів постановки і розв’язання граничних задач для міжфазної тріщини, які більшою або меншою мірою спираються на методики для тріщин в однорідних матеріалах, викладені в монографіях О. М. Гузя [6, 7], А. О. Камінського [9, 10], Г. С. Кіта і М. В. Хая [11], Г. С. Кіта і О. В. Побережного [12], В. В. Панасюка [22], В. В. Панасюка, М. П. Саврука і О. П. Дацишин [23], Г. М. Савіна [26], М. П. Саврука [27] та інших.

Уперше задача для тріщини, що розташована на межі поділу двох різнорідних пружних ізотропних матеріалів, розв’язана в роботі М. L. Williams [105]. В результаті було встановлено, що біля вершин тріщини має місце осциляційна особливість напружень, тобто виникає фізично неможливе явище – взаємопроникнення двох матеріалів. Далі в роботах Д. В. Гриліцького [3], Д. В. Гриліцького і Б. І. Поповича [4], В. І. Моссаковського і М. Т. Рибки [16], Г. Т. Сулима і Д. В. Гриліцького [28], Г. П. Черепанова [30, 31], А. Н. England [40], F. Erdogan [41], V. Loboda [69] та інших в рамках цієї моделі було розв’язано низку задач при різних граничних умовах на берегах тріщини і на нескінченості. Тріщину в анізотропному біматеріальному просторі досліджено в роботах С. Hwo [62], М. Kattis [63], D. Clements [39]. В роботах Т. Ting [101, 102] проаналізовано степінь осциляції в полях напружень і переміщень у випадку тріщини між різнорідними анізотропними матеріалами, показано, що індекс осциляції залишається незмінним при незмінній відносній орієнтації головних напрямків анізотропії.

Антиплоскі задачі для тріщин у п’єзоелектричних матеріалах та задачі для штампів

П’єзоелектричні матеріали широко використовуються в електромеханічних датчиках, перетворювачах і приводах завдяки властивій їм зв’язаності механічних та електричних полів. У таких пристроях інтерфейси

між окремими компонентами можуть бути суттєво послаблені через появу та зростання міжфазних тріщин. Ці тріщини можуть значно знизити міцність і функціональність п'єзоелектричних компонентів, і, отже, ці питання складають дуже важливу область дослідження. У деяких випадках напружено-деформований стан, що виникає в п'єзоелектричних композитах, можна добре змодельовати антиплоскою деформацією.

Антиплоскі проблеми для однієї електрично проникної, непроникної або частково проникної міжфазної тріщини розглядались у роботах L. A. Fil'shtinskii та M. L. Fil'shtinskii [48], F. Narita та Y. Shindo [78], A. Soh та ін. [93], J. Kwon та K. Lee [64], X. Li та G. Tang [66] та в інших роботах. Електропровідну тріщину під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля вперше досліджено у [113, 114] для випадку рухомої та криволінійної нерухомої міжфазної тріщини відповідно. У цих дослідженнях було виявлено, що осциляційна сингулярність виникає біля вершин тріщини у випадку умов електропровідності на її берегах. Шлях усунення зазначеної сингулярності запропоновано в роботі O. Onopriienko, V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta [81], а змішані провідно-проникні електричні умови на берегах тріщини розглянуто в статті Y. Lapusta, O. Onopriienko, V. Loboda [68].

Проблема дослідження системи неперіодичних тріщин на межі поділу п'єзоелектричних матеріалів є більш складною і менш вивченою, ніж випадок однієї тріщини. Такі тріщини досліджували в антиплоскому випадку Y. Sun [99] для моделі електрично проникної тріщини, F. Feng та ін. [43], S. Choi та I. Chung [37], S. Choi та J. Shin [38] для електрично непроникної тріщини, а також B. Wang та Y. Sun [112] для тріщини з обмеженою електричною проникністю. В роботі Z. Zhou та ін. [117] було розглянуто дві колінеарні міжфазні тріщини в магнітоелектропружному композиті під впливом антиплоского напруження зсуву. Антиплоску тріщину в півпросторі для одновимірного п'єзоелектричного квазікрystalа було розглянуто G. Tupholme [103], а взаємодію електрично проникних колінеарних міжфазних тріщин між

різнорідними одновимірними гексагональними п'єзоелектричними квазікристалами було досліджено в недавній статті К. Ну та ін. [61].

Варто зазначити, що зазначені вище роботи було присвячено системам міжфазних тріщин лише з однаковими електричними умовами для різних тріщин. Однак практичні застосування композитів вимагають розгляду задач для кількох колінеарних міжфазних тріщин із різними умовами на берегах різних тріщин. Зокрема така ситуація може мати місце для межі поділу, яка має одну тріщину, покриту електродами, та іншу тріщину, вільну від електродів. Цей випадок потрібно моделювати окремо розташованими електропровідними та електропроникними міжфазними тріщинами. Взаємодія ж міжфазних тріщин у п'єзоелектричному біматеріалі з різними електричними умовами на берегах різних тріщин ще не розглядалася взагалі, принаймні аналітично. Це можна пояснити складністю як математичної моделі, що має місце в даному випадку, так і її аналізу. Але в даній роботі вдалося подолати вказані труднощі, і в першому розділі розглянути взаємодію міжфазних тріщин у п'єзоелектричному біматеріалі з різними електричними умовами на берегах різних тріщин.

Розроблений в розділі I математичний апарат у розділі II застосовано до задачі про систему штампів з різними умовами їхньої взаємодії з пружною основою. Цікавою є та обставина, що такі фізично різні задачі описуються дуже близькими математичними моделями, і їх розв'язання проводиться подібними між собою математичними методами. Отже, така аналогія має не лише наукове, але й методологічне значення.

Задачам про дію штампів на пружні тіла протягом останніх десятиліть приділяють багато уваги у зв'язку з їхньою практичною важливістю. Результати таких досліджень наведено в багатьох публікаціях і, зокрема, в монографіях та підручниках К. Джонсона [8], Д. В. Грілицького [5], В. І. Острика [19]. В них детально розглянуто гладкі і зчеплені штампи, а також більш складні випадки контакту при наявності областей зчеплення і проковзування в області контакту [2, 17, 20, 21].

Слід зазначити, що поодинокі штампи вивчено досить добре, але проблема стає значно складнішою при дії на границю пружного тіла декількох штампів, особливо для випадків різних граничних умов в контактних зонах різних штампів. Якраз такий випадок і розглянуто у даній роботі, а саме, вивчено особливості деформування пружної півплощини під дією двох штампів при умові, що один з них жорстко зчеплений із півплощиною, а під подошвою іншого штампу тертя відсутнє.

Плоскі задачі для тріщин у п'єзоелектричних матеріалах

Плоскі задачі для міжфазної тріщини в п'єзоелектричних матеріалах викликають особливу увагу дослідників через те, що такі матеріали у пристроях зазвичай використовуються у композиціях з іншими п'єзоактивними або п'єзопасивними матеріалами, наприклад, із ізотропними електродами. Визначальну роль для вивчення міжфазних тріщин у п'єзоелектричних матеріалах та композиціях цих матеріалів з п'єзопасивними компонентами зіграли роботи Б. А. Кудрявцева, В. З. Партона і В. І. Ракітіна [13] та В. З. Партона і Б. А. Кудрявцева [24], в яких було розглянуто електрично проникну тріщину між п'єзоелектричним матеріалом і провідником, яка навантажена внутрішнім тиском, а також робота Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett і J. R. Willis [100], у якій тріщина вважалась електрично ізольованою. Для таких електричних умов було виявлено новий тип степеневі особливості в її вершинах, відмінної від кореневої і від кореневої з осциляцією.

Відзначені вище дослідження міжфазних тріщин у п'єзоелектричних матеріалах проводилися в рамках класичної моделі. Контактна модель для тріщини між п'єзоелектричними матеріалами була застосована Q.-H. Qin і Y.-W. Mai [86] в припущенні електричної ізоляції контактної зони і K. P. Herrmann і V. V. Loboda [51] та K. P. Herrmann, V. V. Loboda і V. B. Govorukha [57] для електрично проникних і електрично непроникних моделей тріщин, відповідно. Суттєвого розвитку дослідження цих проблем

набуло в роботах V. Govorukha, M. Kamlah [52], K. P. Herrmann, V. V. Loboda [58], K. P. Herrmann, V. V. Loboda, I. V. Kharun [59], в яких розглянуто модель тріщини зі скінченною електричною проникністю, а також враховано температурний вплив на параметри руйнування.

При розгляді граничних задач електропружності для тіл із тріщинами, які в недеформованому стані асоціюються з математичними розрізами, принципове значення має питання формулювання граничних умов на поверхні тріщини. Коректні постановки механічних та електричних граничних умов для п'єзокерамічних тіл із тріщинами обговорено в статтях І. Б. Половинкіної та А. Ф. Улітка [25], А. Ф. Улітка [29], Л. П. Біцадзе [1], R. M. McMeeking [72], B. L. Wang та Y. W. Mai [109]. В них зазначено, що механічні граничні умови формулюються так само, як і в теорії пружності. Форма ж електричних умов залежить від способу підведення електричної енергії до п'єзoeлемента, а також від середовища, з яким межує тіло. Вперше ці умови було сформульовано в роботах В. Т. Грінченка, А. Ф. Улітка та М. О. Шульги [15], Б. О. Кудрявцева та В. І. Ракітіна [14], в яких розглянуто модель електропроникної тріщини, що передбачає неперервність стрибка електричного потенціалу на її берегах. Згодом, враховуючи, що діелектрична проникність повітря, яке найчастіше заповнює тріщину, на декілька порядків менша, ніж п'єзокераміки, в роботах Y. E. Pak [82, 83], H. Sosa [94, 95], Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett та J. R. Willis [100], S. Park та C. T. Sun [84, 85] було запропоновано модель тріщини, в якій бралися умови електричної ізоляції на її берегах. Електропроникна та електроізолювана тріщина є найбільш поширеним у літературі варіантом електричних граничних умов. Проте ці умови можуть розглядатися як граничні випадки узагальненого варіанта електричних граничних умов для частково електропроникної тріщини, в яких враховано електричну проникність середовища, що заповнює тріщину. Аналітичне та числове дослідження частково електропроникної тріщини проводилося в роботах В. З. Партон та Б. О. Кудрявцева [24], Т. Н. Нао та Z. Y. Shen [55], O. Gruebner, M. Kamlah та D. Munz [53] та ін.

Тріщини в магнітоелектропружних матеріалах

Волокнисті та шаруваті композити, виготовлені з магнітоелектропружних матеріалів, виявляють магнітоелектричний ефект, якого немає в однофазних п'єзоелектричних або п'єзوماгнітних матеріалах. Вони знаходять все більш широке застосування в техніці. З іншого боку, магнітоелектропружні матеріали дуже схильні до руйнування через свою крихкість. Через різні причини в магнітоелектропружних матеріалах присутні тріщини або дефекти, і біля їхніх вершин виникає концентрація магнітоелектропружного поля, що може спричинити розвиток тріщин і, зрештою, призвести до руйнування.

Дослідженням тріщин у магнітоелектропружних матеріалах приділено значну кількість публікацій. Так, аналіз еліптичного отвору або тріщини в магнітоелектропружному твердому тілі під дією навантаження на нескінченності було проведено С. F. Gao, Н. Kessler, Н. Balke [49]. Розв'язок для частково проникної тріщини або двох колінеарних частково проникних тріщин у п'єзоелектричних/п'єзوماгнітних матеріалах, що піддаються рівномірному розтягувальному навантаженню, отримано в роботі Z. G. Zhou, P. W. Zhang, L. Z. Wu [118].

Застосування різних типів електромагнітних граничних умов на берегах тріщини для аналізу особливостей руйнування магнітоелектропружних матеріалів обговорено В.-L. Wang, Y.-W. Mai [110]. Періодичну систему колінеарних електромагнітопроникних тріщини в нескінченних магнітоелектропружних тілах досліджено С. Fan, Y. Zhou, Н. Wang, M. Zhao [42]. Випадок частково проникних тріщин для тієї ж задачі було досліджено О. Viun, F. Labesse-Jied, R. Moutou-Pitti, V. Loboda, Y. Lapusta [105], а додаткове врахування електрично та магнітно індукованих напружень Максвелла було здійснено в роботі О. Viun, V. Loboda, Y. Lapusta [107]. Вплив неідеальної поверхні поділу анізотропних термомагнітоелектропружних

біматеріальних твердих тіл на взаємодію тонких деформівних включень досліджено в роботі Н. Sulym, А. Vasylyshyn, І. Pasternak [98].

Тріщини між двома різними магнітоелектропружними матеріалами є більш небезпечними, ніж внутрішні тріщини, тому їх дослідженню було приділено істотну увагу. Проблему електропроникної міжфазної тріщини в магнітоелектропружному тілі, навантаженому віддаленими рівномірними навантаженнями, узагальненою лінійною силою та/або узагальненою лінійною дислокацією, досліджено в роботі С. F. Gao, Р. Tong, Т. Y. Zhang [50], а рівномірний тепловий потік враховано в роботі С. F. Gao, N. Noda [51]. Проблему міжфазної тріщини для різнорідних п'єзоелектромагнітопружних анізотропних біматеріалів при плоскій деформації досліджено в роботі R. Li, G. A. Kardomateas [67] з урахуванням електричного та магнітного полів всередині міжфазної тріщини. Сингулярні характеристики полів напружень, електричного переміщення та магнітної індукції поблизу вершини непроникних міжфазних тріщин у двовимірних магнітоелектропружних біматеріалах досліджено в [42] з використанням узагальненого формалізму Стро. У роботі К. Р. Herrmann, V. V. Loboda, Т. V. Khodanen [60] досліджено міжфазну тріщину із зоною контакту у правій вершині тріщини між двома п'єзоелектричними/п'єзوماгнітними півпросторами під дією віддаленого механічного навантаження, магнітного та електричного потоків. Розглянуто випадки електромагнітнопроникних граничних умов, а також електропроникних та магнітонепроникних.

Магнітоелектрично проникну міжфазну тріщину із зоною контакту між двома напівнескінченними магнітоелектропружними площинами під дією теплового потоку та віддалених магнітних електричних та механічних навантажень розглянуто в роботі Р. Ma, W. Feng, R. K. L. Su [73]. У роботі Р. Ma, W. J. Feng, R. K. L. Su [74] проаналізовано модель зони контакту для тріщини між двома різнорідними магнітоелектропружними матеріалами під дією віддалених механічних, електричних і магнітних навантажень у припущенні, що відкрита частина тріщини є електронепроникною та

магнітопроникною. Магнітонепроникну та електропроникну міжфазну тріщину із зоною контакту в магнітоелектропружному біматеріалі при дії зосереджених магнітоелектромеханічних навантажень на берегах тріщини досліджено в роботі W. J. Feng, P. Ma, E. N. Pan, J. X. Liu [46]. Електронепроникну та магнітопроникну міжфазну тріщину із зоною контакту в магнітоелектропружних біматеріалах під впливом теплового потоку та магнітоелектромеханічних навантажень досліджено в роботі W. J. Feng, P. Ma, R. K. L. Su [47], а в роботі P. Ma, W. J. Feng, R. K. L. Su [75] розроблено модель зони передруйнування електронепроникної та магнітопроникної міжфазної тріщини між двома різнорідними магнітоелектропружними матеріалами. Електропровідну міжфазну тріщину із контактною зоною в магнітоелектропружному біматеріалі досліджено в роботі P. Ma, R. K. L. Su, W. J. Feng [76].

Модель зони передруйнування для тріщини з обмеженою електричною та магнітною проникностями в адгезійному тонкому прошарку між двома електромагнітопружними півпросторами розглянуто в роботі O. Viun, Y. Lapusta, V. Loboda [106]. Електрично та магнітно заряджену міжфазну тріщину в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі досліджено в роботі A. A. Grynevych, V. V. Loboda [54] в припущенні, що поверхні тріщини покриті електродами.

В останні роки найбільш активно вивчено тріщини в п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних матеріалах у випадку плоскої задачі. Але відомо, що електричне або магнітне поле в деякій площині викликає антиплоску деформацію для п'єзоматеріалів з певними напрямками поляризації. З цієї причини дослідження такого роду деформацій, зокрема для тріщин типу III, є більш важливим для згаданих матеріалів, ніж для електрично та магнітно пасивних.

Проблему тріщини типу III для різнорідних п'єзоелектромагнітопружних біматеріальних середовищ було досліджено для моделей непроникних і проникних тріщин в роботі R. Li, G. A. Kardomateas

[67] з урахуванням електромагнітного поля всередині тріщини. Розв'язок антиплоскої задачі у замкненому вигляді для тріщини між двома різнорідними магнітоелектропружними матеріалами під дією механічних, електричних і магнітних полів було отримано в роботах B. L. Wang, Y. W. Mai [109, 111] для двох граничних випадків електроізолюваної та електропроникної тріщин. Антиплоску деформацію п'єзомагнітного/п'єзоелектричного композиту з двома тріщинами під дією магнітних або електричних полів вивчено в роботі Z. G. Zhou, J. Z. Wang, L. Z. Wu [119], а задачу для такого композиту в плоскому випадку при наявності тріщини із зоною контакту розв'язано в роботі K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen [60]. У той же час, авторці не відомі результати дослідження взаємодії двох тріщин у п'єзоелектромагнітному матеріалі при різних електричних та магнітних умовах на берегах різних тріщин. Якраз таку проблему і вивчено в розділі III даної дисертаційної роботи.

Поодинокі міжфазні тріщини в магнітоелектропружних тілах розглядалися в роботах O. Onopriienko, V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta [80], R. K. L. Su, W. J. Feng [97], B. L. Wang, Y. W. Mai [111] для антиплоского випадку. Подібні проблеми для двох міжфазних тріщин досліджено в роботах P. R. Verma [104], Z. G. Zhou, B. Wang, Y. G. Sun [117], Z. G. Zhou, J. Z. Wang, L. Z. Wu [119], а періодичний набір міжфазних тріщин типу III під дією магнітного або електричного поля в багат шаровому п'єзомагнітному/п'єзоелектричному композиті розглянуто в роботі Y. Wan, Y. Yue, Z. Zhong [108].

Проблему, що стосується систем міжфазних тріщин у магнітоелектропружних матеріалах дотепер вивчено недостатньо. Лише плоску задачу для магнітоелектропружного багат шарового композиту з міжфазними тріщинами при магнітоелектромеханічних навантаженнях досліджено в [44] для магнітно та електрично непроникної моделі берегів тріщини. Крім того, системи тріщин на дугоподібній межі поділу в магнітоелектропружному композиті проаналізовано в роботі F. X. Feng,

К. Y. Lee, Y. D. Li [45] для антиплоскої деформації. Отже, розглянута в даній роботі проблема довільної кількості як електропроникних, так і електропровідних колінеарних міжфазних тріщин довільної довжини та розташування в магнітоелектропружному біматеріалі до цього часу не була досліджена.

Отже, із наведеного огляду витікає, що наразі відсутні результати досліджень п'єзоактивних композитів з колінеарними міжфазними тріщинами при різних електричних умовах на берегах різних тріщин. Крім того, недостатньо дослідженими залишаються проблеми визначення параметрів руйнування п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних біматеріальних з'єднань при наявності на межах поділу різнорідних компонент систем тріщин, що мають різну довжину та довільне розташування. Дослідженню саме цих актуальних проблем і присвячено дану роботу.

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є розвиток аналітичних методів розв'язання плоских та антиплоских задач для п'єзоактивних біматеріальних тіл з колінеарними міжфазними тріщинами при різних електричних та магнітних умовах на їхніх берегах, а також аналіз електромагнітомеханічного стану п'єзоелектромагнітних біматеріальних тіл з довільними системами тріщин на межах поділу різнорідних компонент.

Досягнення поставленої мети потребує вирішення таких *завдань*:

- отримати аналітичні представлення механічних, електричних та магнітних компонент через кусково-аналітичні функції для п'єзоактивних матеріалів у плоскому та антиплоскому випадках;
- сформулювати за допомогою цих представлень задачі лінійного спряження і побудувати їхні аналітичні розв'язки для конкретних типів навантажень, наборів тріщин та умов на їхніх берегах;
- визначити аналітично механічні напруження на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також стрибки переміщень, електричного та магнітного потенціалів в області тріщин;

- отримати аналітичні формули для визначення швидкості звільнення енергії при розвитку тріщин та проаналізувати залежності цих параметрів від зовнішнього навантаження, довжин тріщин, їхнього розташування та характеристик матеріалів.

Об'єкт дослідження – процеси деформування та руйнування п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних біматеріальних з'єднань із системами тріщин на межах поділу різнорідних компонент.

Предмет дослідження – критичні параметри для систем міжфазних тріщин у п'єзоактивних композитах при різних електричних та магнітних умовах на берегах тріщин.

Методи дослідження. Для побудови і аналізу математичних моделей біматеріальних тіл з колінеарними міжфазними тріщинами використано аналітичні методики лінійної теорії пружності, механіки руйнування, теорії функцій комплексної змінної, зокрема, задачі лінійного спряження.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому:

1. Вперше запропоновано та реалізовано методику дослідження двох колінеарних тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля при умові, що одна з тріщин є електропровідною, а інша електропроникною. Шляхом зведення проблеми до комбінованої крайової задачі Дірихле-Рімана та її розв'язання отримано аналітичні вирази для електромеханічних факторів на межі поділу матеріалів, зокрема, швидкості звільнення енергії.
2. Уперше розв'язано антиплоску задачу для п'єзоелектромагнітного біматеріалу з двома тріщинами на межі поділу різнорідних компонент при різних електричних та магнітних умовах на берегах різних тріщин. Отримано аналітичні вирази для напружень, електричного та магнітного полів на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також розкриття тріщин та стрибки електричного і магнітного зміщень при переході через тріщини.

3. Сформульовано та розв'язано нову плоску задачу для довільної системи колінеарних електро- та магнітопроникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами під дією змішаного механічного навантаження. Для довільної кількості тріщин різної довжини та розташування визначено механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів, а також швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин.
4. Розроблено та реалізовано новий аналітичний підхід до дослідження скінченної множини тріщин на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів при умові, що береги тріщин покриті механічно м'якими електродами із заданим електричним зарядом і нульовою магнітною індукцією. Проаналізовано вплив довжин та взаємного розташування тріщин, а також механічних, електричних та магнітних полів на глобальні та локальні параметри руйнування окремих тріщин.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується коректним застосуванням математичного апарату й апробованих рівнянь лінійних теорій пружності, електропружності, магнітоелектропружності і точних методів теорії функцій комплексної змінної; зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із вже відомими розв'язками інших авторів; відповідністю результатів розв'язання нових задач фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості їхнього використання для дослідження механічних, електричних і магнітних полів у п'єзоактивних біматеріалах із пошкодженнями типу міжфазних тріщин, а самі біматеріали внаслідок численних корисних властивостей мають значні перспективи застосування у різних галузях мікроелектроніки, робототехніки, біотехнологій, енергетики тощо. Співвідношення для визначення параметрів руйнування, що отримані у вигляді аналітичних формул, дозволяють оцінити вплив зовнішніх факторів на можливість розвитку пошкоджень та вказати шляхи підвищення тріщиностійкості композитних конструкцій, виготовлених

з п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних матеріалів. Точні аналітичні розв'язки, отримані в роботі, можуть служити еталонними при розробці й апробації чисельних методів розв'язання задач указанного класу для тіл кінцевих розмірів.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 5 статей. Три з них опубліковані у виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus [36, 71, 90]. Три статті – у виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України категорії Б [36, 32, 34]. Основні результати дисертації отримано автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику Т. В. Ходанен. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [32, 34, 36] – побудова аналітичних розв'язків, їхня чисельна реалізація, ілюстрація одержаних результатів; [71] – розв'язок задачі лінійного спряження, знаходження інваріантного інтегралу, чисельна реалізація результатів; [90] – розв'язок задач лінійного спряження, чисельна реалізація результатів, порівняння результатів розрахунків для часткового випадку з відомими.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2021-2024 років, а також на міжнародних конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки», 13-16 квітня 2021 р., Дніпро, Кам'янське.
2. XX міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем», 23-25 листопада 2022 р. Дніпро : Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.
3. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», 28-29 серпня 2023 р., Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

4. XXI міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем», 22-24 листопада 2023 р., Дніпро : Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження за темою дисертації здійснювалися також в науково-дослідній лабораторії механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетної теми 1-655-21 «Моделі та методи визначення параметрів руйнування п'єзоактивних та п'єзопасивних композитів з дефектами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0121U109767, 2021–2023 рр.

Структура та обсяг дисертації. Робота містить вступ, огляд літератури, 5 розділів, висновки та список використаних джерел, що містить 119 найменувань на 13 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 136 сторінок, обсяг основного тексту – 122 сторінки. Робота містить 26 рисунків та 11 таблиць.

РОЗДІЛ I. ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТА ЕЛЕКТРОПРОНИКНИХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН НА МЕЖІ ПОДІЛУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

1.1 Постановка задачі

Розглянемо дві тріщини $c \leq x_1 \leq a$ та $b \leq x_1 \leq d$ уздовж межі поділу $x_2 = 0$ двох п'єзoeлектричних напівнескінченних просторів з поляризацією у напрямку x_3 . На нескінченності прикладено рівномірно розподілене антиплоске механічне навантаження σ_{23}^∞ та електричне поле E_1^∞ в площині (x_1, x_2) , які не залежать від координати x_3 (рис. 1.1). Припускаємо, що тріщина $x_1 \in [c, a]$ є електропровідною, а тріщина $x_1 \in [b, d]$ є електропроникною.

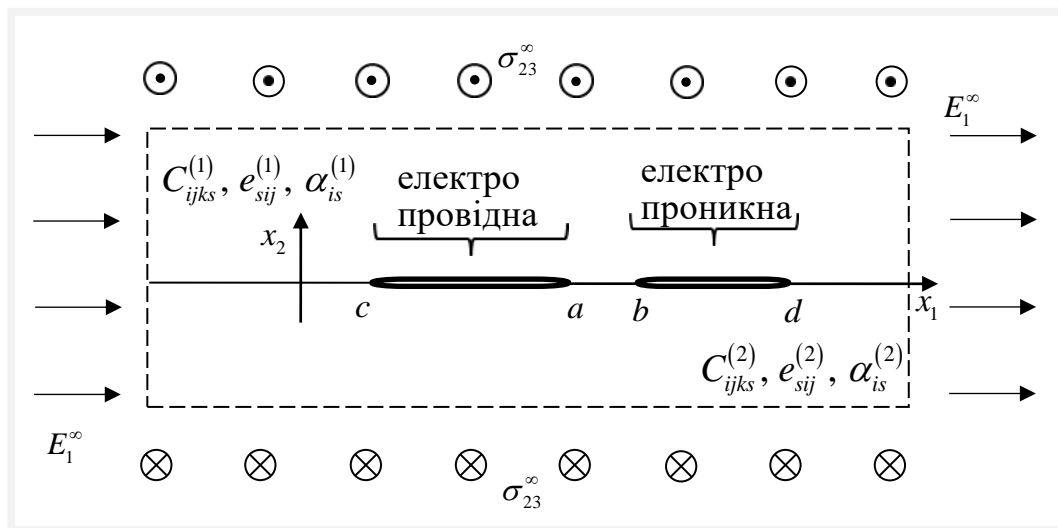


Рис. 1.1. Тріщини $c \leq x_1 \leq a$ та $b \leq x_1 \leq d$ уздовж межі поділу $x_2 = 0$
двох п'єзoeлектричних матеріалів

Припускаючи відсутність напружень на поверхнях тріщин і умови неперервності на іншій частині межі поділу біматеріалу, граничні умови на різних частинах межі поділу можна записати у вигляді:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{23}^{(2)}(x_1, 0) = 0, \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (1.1)$$

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{23}^{(2)}(x_1, 0) = 0, \quad \langle D_2(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle E_1(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (1.2)$$

$$\langle \sigma_{23}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle D_2(x_1, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle u'_3(x_1, 0) \rangle = 0, \langle E_1(x_1, 0) \rangle = 0 \text{ для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \quad (1.3)$$

де $\sigma_{23}^{(m)}$, u_3 є компонентами тензора напружень і вектора переміщень; $D_2^{(m)}$, $E_1^{(m)}$ є складовими електричної індукції та електричного поля.

Припускаємо, що $c < a < b < d$, а $\langle f \rangle$ означає стрибок функції f через інтерфейс (межу поділу матеріалів); верхній індекс (1) відповідає верхньому матеріалу, а верхній індекс (2) – нижньому матеріалу.

Якщо прикладене антиплоске механічне та плоске електричне поле, то справедливі такі співвідношення:

$$u_1^{(m)} = u_2^{(m)} = 0, u_3^{(m)} = u_3^{(m)}(x_1, x_2), \varphi^{(m)} = \varphi^{(m)}(x_1, x_2).$$

Із використанням двоіндексних позначень для пружних, п'єзоелектричних сталих та діелектричних проникностей визначальні співвідношення для верхнього та нижнього матеріалів можна представити у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i}^{(m)} \\ D_i^{(m)} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^{(m)} \begin{Bmatrix} u_{3,i}^{(m)} \\ \varphi_i^{(m)} \end{Bmatrix},$$

$$\text{де } i=1,2, \quad m=1,2, \quad \mathbf{R}^{(m)} = \begin{bmatrix} c_{44}^{(m)} & e_{15}^{(m)} \\ e_{15}^{(m)} & -\alpha_{11}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad c_{44}^{(m)}, \quad e_{15}^{(m)} \text{ є пружними і}$$

п'єзоелектричними сталими, і $\alpha_{11}^{(m)}$ є діелектричними проникностями [24].

Для розв'язання сформульованої задачі скористаємось наступними представленнями електромеханічних величин через функцію $F_1(z)$, яка є аналітичною в кожній півплощині [79]:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = t_1 [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)], \quad (1.4)$$

$$\langle D_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u'_3(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (1.5)$$

$$\text{де } m_1 = -\sqrt{-\frac{s_{11}s_{12}}{s_{21}s_{22}}}, \quad s_1 = -m_1, \quad t_1 = s_{12} - m_1 s_{22}, \quad \gamma_1 = (s_{12} + m_1 s_{22}) / t_1; \quad F_1^\pm(x_1) \text{ означає}$$

граничне значення функції $F_1(z)$ при $x_2 \rightarrow 0$ зверху або знизу осі x_1 ,

відповідно; штрих у формулі (1.5) означає диференціювання за x_1 ; величини s_{kl} ($k, l = 1, 2$) – дійсні коефіцієнти матриці

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} is_{11} & s_{12} \\ s_{21} & is_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

які можна визначити формулою

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{A}^{(1)} \left(\mathbf{B}^{(1)} \right)^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \left(\bar{\mathbf{B}}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (1.7)$$

де

$$\mathbf{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_{21}^{(m)} & Q_{22}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(m)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(m)} & Q_{12}^{(m)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(m)} = i\mathbf{R}^{(m)}.$$

Варто зазначити, що при формулюванні рівнянь (1.4), (1.5) забезпечено виконання співвідношення

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1, 0), \quad (1.8)$$

де $\mathbf{P}^{(m)} = \left[\sigma_{23}^{(m)}, E_1^{(m)} \right]^T$.

1.2 Задача лінійного спряження

Виконання граничних умов (1.3) з використанням (1.5) і (1.8) забезпечує аналітичність функції $F_1(z)$ вздовж межі поділу матеріалів поза тріщинами. Врахування граничних умов (1.1) і (1.2) за допомогою представлень (1.4) і (1.5) призводить до таких рівнянь:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < a, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{Re} F_1^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } b < x_1 < d. \quad (1.10)$$

Вводячи далі заміну

$$F_1(z) = i\Phi_1(z), \quad (1.11)$$

систему (1.9), (1.10) можна переписати у вигляді:

$$\Phi_1^+(x_1) + \gamma_1 \Phi_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < a, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{Im} \Phi_1^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } b < x_1 < d. \quad (1.13)$$

Враховуючи те, що функція $\Phi_1(z)$ є аналітичною за межами відрізків $[c, a]$ та $[b, d]$, і використовуючи задані значення напружень і електричних полів на нескінченності, отримуємо з (1.4), (1.5) наступну умову для функції $\Phi_1(z)$ на нескінченності:

$$\Phi_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{E}_1 - i\tilde{\sigma}_{23}, \quad (1.14)$$

де

$$\tilde{E}_1 = -\frac{m_1 E_1^\infty}{r_1}, \quad \tilde{\sigma}_{23} = \frac{\sigma_{23}^\infty}{r_1}, \quad r_1 = t_1(1 + \gamma_1). \quad (1.15)$$

Рівняння (1.12) і (1.13) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана. Така задача була розв'язана при аналізі жорсткого штампа в роботі [77]. Для випадку взаємодії тріщини та електрода розв'язок подібної задачі наведено в роботі [88]. З використанням цього розв'язку для задачі, що розглядається, можна записати:

$$\Phi_1(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z). \quad (1.16)$$

Подання для функцій $P(z)$, $Q(z)$, $X_1(z)$ та $X_2(z)$ у формулі (1.16) можна представити у вигляді:

$$P(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3, \quad Q(z) = D_1 z + D_2, \\ X_1(z) = \frac{ie^{i\chi(z)}}{\Pi_1(z)}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\chi(z)}}{\Pi_2(z)}, \quad (1.17)$$

де

$$\chi(z) = 2\varepsilon \ln \left[\sqrt{\frac{z-c}{z-a}} \frac{\sqrt{(d-a)(z-b)} + \sqrt{(b-a)(z-d)}}{\sqrt{(d-c)(z-b)} + \sqrt{(b-c)(z-d)}} \right], \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1, \\ \Pi_1(z) = \sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)}, \quad \Pi_2(z) = \sqrt{(z-c)(z-a)}. \quad (1.18)$$

Довільні коефіцієнти C_1 , C_2 , C_3 , D_1 , D_2 у формулах (1.17) визначатимемо з умов на нескінченності (1.14), умов однозначності переміщень для обох тріщин і теореми Гауса для електропровідної тріщини. А саме, враховуючи поведінку функції $\Phi_1(z)$ на нескінченності:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) = & ie^{i\beta_0} \left(C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + \\ & + e^{i\beta_0} \left(D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right),\end{aligned}$$

вимагаючи рівності коефіцієнтів перед z^0 і z^{-1} у цьому виразі коефіцієнтам у правій частині (1.14) і нулю, відповідно, отримаємо систему двох комплексних лінійних алгебраїчних рівнянь, яка дає такий розв'язок:

$$C_1 = -\tilde{\sigma}_{23} \cos \beta_0 - \tilde{E}_1 \sin \beta_0, \quad D_1 = \tilde{E}_1 \cos \beta_0 - \tilde{\sigma}_{23} \sin \beta_0, \quad (1.19)$$

$$C_2 = -C_1 \frac{a+b+c+d}{2} - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - D_1 \frac{a+c}{2}. \quad (1.20)$$

Відповідно до [58] отримані формули забезпечують виконання рівняння (1.14) і такого рівняння:

$$\int_c^a [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] dx_1 + \int_b^d [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] dx_1 = 0. \quad (1.21)$$

Для повного виконання всіх необхідних умов потрібно також вимагати:

$$\int_b^d [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] dx_1 = 0. \quad (1.22)$$

Використовуючи представлення для $X_1(z)$ та $X_2(z)$ на проміжку $[b, d]$, рівняння (1.22) можна записати у вигляді:

$$\int_b^d \left[\frac{(C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3) ch[2\chi_0(x_1)]}{\Pi_1(x_1)} + \frac{(D_1 x_1 + D_2) sh[2\chi_0(x_1)]}{\Pi_2(x_1)} \right] dx_1 = 0, \quad (1.23)$$

де

$$\chi_0(x_1) = \varepsilon \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(b-c)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-c)(x_1-b)}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-a)(x_1-b)}} \right).$$

Із попереднього рівняння отримаємо:

$$C_3 = -(C_1 H_2 + C_2 H_1 + D_1 L_1 + D_2 L_0) / H_0,$$

де

$$H_k = \int_b^d \frac{x_1^k ch[2\chi_0(x_1)] dx_1}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$L_m = \int_b^d \frac{x_1^m sh[2\chi_0(x_1)]}{\Pi_2(x_1)} dx_1, \quad m = 0, 1. \quad (1.24)$$

1.3 Визначення електромеханічних величин на різних частинах межі поділу матеріалів

Підставляючи отриманий розв'язок (1.16) у формули (1.11), (1.4) та враховуючи, що $\Phi_1^+(x_1) = \Phi_1^-(x_1) = \Phi_1(x_1)$ для $x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}$, приходимо до представлення:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = it_1(1 + \gamma_1)\Phi_1(x_1) \quad \text{для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}. \quad (1.25)$$

Визначаючи далі $\Phi_1(x_1)$ для різних частин інтерфейсу поза межами тріщин, отримаємо такі представлення для напруження та електричного поля:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) e^{i\chi(x_1)} \left(\frac{-P(x_1)}{\Pi_1(x_1)} + \right. \\ \left. + \operatorname{sign}\left(x_1 - \frac{c+d}{2}\right) \frac{iQ(x_1)}{\Pi_2(x_1)} \right) \quad \text{для } x_1 > d \cup x_1 < c, \quad (1.25)$$

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) e^{i\chi_{ab}(x_1)} \times \\ \times \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(b - x_1)(d - x_1)}} + \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \right] \quad \text{для } x_1 \in [a, b], \quad (1.26)$$

де $\Pi_1(x_1)$ та $\Pi_2(x_1)$ визначаються формулами (1.18),

$$\chi_{ab}(x_1) = 2\varepsilon \ln \left[\sqrt{\frac{x_1 - c}{x_1 - a}} \frac{\sqrt{(d - a)(b - x_1)} + \sqrt{(b - a)(d - x_1)}}{\sqrt{(d - c)(b - x_1)} + \sqrt{(b - c)(d - x_1)}} \right].$$

Розглянемо далі поведінку електромеханічних величин в областях тріщин. Підставляючи представлення (1.11) у (1.5), отримуємо:

$$\langle D_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u_3'(x_1, 0) \rangle = i(\Phi_1^+(x_1) - \Phi_1^-(x_1)) \text{ для } x_1 \in \{[c, a] \cup [b, d]\} \quad (1.27)$$

Використовуючи далі розв'язок (1.16) для електропровідної тріщини, отримуємо формулу:

$$\langle D_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u_3'(x_1, 0) \rangle = 2\sqrt{\alpha} e^{i\chi^*(x_1)} \times \\ \times \left(\frac{-i \cdot P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)(b - x_1)(d - x_1)}} + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)}} \right) \text{ для } x_1 \in [c, a], \quad (1.28)$$

де

$$\chi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \left[\sqrt{\frac{x_1 - c}{a - x_1}} \frac{\sqrt{(d - a)(b - x_1)} + \sqrt{(b - a)(d - x_1)}}{\sqrt{(d - c)(b - x_1)} + \sqrt{(b - c)(d - x_1)}} \right].$$

Беручи до уваги далі те, що $\langle D_2(x_1, 0) \rangle = 0$ для $x_1 \in [b, d]$, формула (1.27) для цього проміжку набуває такого вигляду:

$$\langle u_3'(x_1, 0) \rangle = \frac{1}{s_1} \left[\frac{P(x_1)(e^{2\chi_0(x_1)} + e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}} + Q(x_1) \frac{(e^{2\chi_0(x_1)} - e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \right] \quad (1.29)$$

Стрибок переміщення можна знайти за такою формулою:

$$\langle u_3(x_1, 0) \rangle = \int_c^{x_1} \langle u_3'(t, 0) \rangle dt \text{ для } x_1 \in [c, a] \quad (1.30)$$

і за аналогічною формулою для $x_1 \in [b, d]$.

Поведінка електричного поля вздовж електропроникної тріщини впливає з формул (1.4), (1.11), (1.16) і може бути проаналізована за допомогою формули:

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{t_1}{m_1} \left[\frac{P(x_1)(e^{2\chi_0(x_1)} - \gamma_1 e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}} + \right. \\ \left. + \frac{Q(x_1)(e^{2\chi_0(x_1)} + \gamma_1 e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \right] \text{ для } x_1 \in [b, d]. \quad (1.31)$$

1.4 Коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкості звільнення енергії

Аналіз формул (1.25) і (1.26) показує, що отриманий розв'язок має осциляційну кореневу особливість у вершинах провідної тріщини та звичайну кореневу особливість у вершинах проникної тріщини. Задля чіткості опису цієї особливості розглянемо поведінку електромеханічних величин у вершинах тріщин.

Враховуючи формулу (1.26), отримуємо для $x_1 \rightarrow c - 0$:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow c-0} = \frac{t_1(1 + \gamma_1)}{\sqrt{c - x_1}} (c - x_1)^{i\varepsilon} \Theta_c(c, a, b, d, \varepsilon), \quad (1.32)$$

де

$$\Theta_c(c, a, b, d, \varepsilon) = \left(\frac{\sqrt{(d-a)(b-c)} + \sqrt{(b-a)(d-c)}}{2\sqrt{(d-c)(b-c)(a-c)}} \right)^{2i\varepsilon} \times \\ \times \left(\frac{-P(c)}{\sqrt{(a-c)(b-c)(d-c)}} - \frac{iQ(c)}{\sqrt{(a-c)}} \right).$$

Аналізуючи формулу (1.26) для $x_1 \rightarrow a + 0$, маємо:

$$\left\{ \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right\} \Big|_{x_1 \rightarrow a+0} = \frac{t_1(1 + \gamma_1)}{\sqrt{x_1 - a}} (x_1 - a)^{-i\varepsilon} \Theta_a(c, a, b, d, \varepsilon), \quad (1.33)$$

де

$$\Theta_a(c, a, b, d, \varepsilon) = \left(\frac{2\sqrt{(d-a)(b-a)(a-c)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \times \\ \times \left[\frac{P(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} + \frac{iQ(a)}{\sqrt{(a-c)}} \right].$$

Останні формули підтверджують згадану осциляційну сингулярність у вершинах тріщини c та a .

Введемо такі комплексні коефіцієнти інтенсивності:

$$K_3^c - im_1 K_E^c = \lim_{x_1 \rightarrow c-0} \sqrt{2\pi(c - x_1)} (c - x_1)^{-i\varepsilon} \left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right), \quad (1.34)$$

$$K_3^a - im_1 K_E^a = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} (x_1 - a)^{i\varepsilon} \left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right), \quad (1.35)$$

отримаємо

$$K_3^c - im_1 K_E^c = \sqrt{2\pi} t_1 (1 + \gamma_1) \Theta_c(c, a, b, d, \varepsilon), \quad (1.36)$$

$$K_3^a - im_1 K_E^a = \sqrt{2\pi} t_1 (1 + \gamma_1) \Theta_a(c, a, b, d, \varepsilon). \quad (1.37)$$

Аналіз тієї ж формули (1.26) для $x_1 \rightarrow b - 0$ дає:

$$\left\{ \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right\} \Big|_{x_1 \rightarrow b-0} = \frac{t_1 (1 + \gamma_1)}{\sqrt{(b-c)(b-a)}} \left[\frac{P(b)}{\sqrt{(b-x_1)(d-b)}} + iQ(b) \right].$$

Остання формула демонструє кореневу сингулярність в точці b .

Коефіцієнти інтенсивності в точці b вводимо так:

$$K_3^b - im_1 K_E^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} \left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right)$$

і приходимо до наступних формул:

$$K_3^b = \frac{\sqrt{2\pi} (1 + \gamma_1) t_1 P(b)}{\sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}}, \quad K_E^b = 0 \quad \text{для } x_1 \rightarrow b - 0. \quad (1.38)$$

Беручи до уваги те, що $\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = 0$ для проміжку $[b, d]$, вводимо такі коефіцієнти інтенсивності електричного поля у його крайніх точках:

$$K_E^{b+} = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} E_1^{(1)}(x_1, 0), \quad K_E^{d-} = \lim_{x_1 \rightarrow d-0} \sqrt{2\pi(d - x_1)} E_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Використовуючи формулу (1.31), отримуємо:

$$K_E^{b+} = -\frac{t_1 \sqrt{2\pi} P(b) (1 - \gamma_1)}{m_1 \sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}}, \quad K_E^{d-} = -\frac{t_1 \sqrt{2\pi} P(d) (1 - \gamma_1)}{m_1 \sqrt{(d-c)(d-a)(d-b)}}. \quad (1.39)$$

Представляємо також коефіцієнти інтенсивності у правому околі точки d :

$$K_3^d - im_1 K_E^d = \lim_{x_1 \rightarrow d+0} \sqrt{2\pi(x_1 - d)} \left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) \right),$$

і, використовуючи (1.25), приходимо до формул:

$$K_3^d = -\frac{t_1 \sqrt{2\pi} P(d)(1+\gamma_1)}{\sqrt{(d-c)(d-a)(d-b)}}, \quad K_E^d = 0. \quad (1.40)$$

Визначимо тепер швидкості звільнення енергії. Використовуючи [24] і враховуючи нульовий електричний потенціал на берегах електропровідної тріщини, значення ШЗЕ у вершині тріщини c можна записати як

$$G_c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_c^{c+\Delta l} \left[\sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle u_3(x_1, 0) \rangle - \varphi^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle D_2(x_1, 0) \rangle \right] dx_1 \right\}. \quad (1.41)$$

Проінтегрувавши за частинами другий доданок підінтегрального виразу, отримаємо таке представлення:

$$G_c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_c^{c+\Delta l} \left[\sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle u_3(x_1, 0) \rangle - E_1^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle \right] dx_1 \right\}, \quad (1.42)$$

де

$$\langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle = \int \langle D_2(x_1, 0) \rangle dx_1.$$

Беручи до уваги те, що $s_1 = -m_1$, справедлива така рівність:

$$\begin{aligned} & \sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle u_3(x_1, 0) \rangle - E_1^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle = \\ & = -\frac{1}{m_1} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) + im_1 E_1^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \right) \left(\langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u_3(x_1, 0) \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Далі використовуємо рівняння, спряжене до представлення (1.32), знаходимо:

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle + is_1 \langle u_3(x_1, 0) \rangle \right\} \Big|_{x_1 \rightarrow c+0} = 2\sqrt{\alpha} \frac{(x_1 - c)^{0,5+i\varepsilon}}{(0,5+i\varepsilon)} \times \\ & \times \left(\frac{\sqrt{(d-a)(b-c)} + \sqrt{(b-a)(d-c)}}{2\sqrt{(d-c)(b-c)(a-c)}} \right)^{2i\varepsilon} \times \\ & \times \left(\frac{-iP(c)}{\sqrt{(a-c)(b-c)(d-c)}} + \frac{Q(c)}{\sqrt{(a-c)}} \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Підставляючи ці вирази до (1.43), а потім до (1.42), маємо:

$$G_c = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_c^{c+\Delta l} \frac{2t_1(1+\gamma_1)\sqrt{\alpha}}{m_1(a-c)} \operatorname{Im} \left\{ \frac{i}{(0,5+i\cdot\varepsilon)} \left(\frac{c-x_1+\Delta l}{x_1-c} \right)^{-0,5-i\cdot\varepsilon} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{P^2(c)}{(b-c)(d-c)} + Q^2(c) \right) \right\} dx_1 \right\}.$$

З урахуванням значення інтеграла:

$$\int_c^{c+\Delta l} \left(\frac{c-x_1+\Delta l}{x_1-c} \right)^{-0,5-i\cdot\varepsilon} dx_1 = \Delta l \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+2i\varepsilon}{ch(\pi\varepsilon)}$$

та рівності $ch(\pi\varepsilon) = \sqrt{\alpha}$, остаточно отримаємо:

$$G_c = -\frac{\pi(1+\gamma_1)t_1}{m_1(a-c)} \left(\frac{P^2(c)}{(b-c)(d-c)} + Q^2(c) \right). \quad (1.45)$$

Аналогічно, ШЗЕ у правій вершині електропровідної тріщини можна записати у формі:

$$G_a = -\frac{\pi(1+\gamma_1)t_1}{m_1(a-c)} \left(\frac{P^2(a)}{(b-a)(d-a)} + Q^2(a) \right). \quad (1.46)$$

Для оцінки ШЗЕ у вершині b правої тріщини можна використати формулу (1.41) із заміною символу b на c . Але у цьому випадку два останні доданки дорівнюють нулю через електричну проникність. Це дає:

$$G_b = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle u_3(x_1, 0) \rangle dx_1. \quad (1.47)$$

Використовуючи асимптотичні вирази для $\sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0)$ та $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ в точці b і обчислюючи інтеграл, отримуємо:

$$G_b = -\frac{\pi t_1(1+\gamma_1)P^2(b)}{m_1(b-c)(b-a)(d-b)}. \quad (1.48)$$

Подібним чином впливає:

$$G_d = \frac{-t_1\pi(1+\gamma_1)P^2(d)}{m_1(d-c)(d-a)(d-b)}. \quad (1.49)$$

1.5 Аналіз чисельних результатів

Чисельний аналіз було проведено для композиту, що складається з п'єзoeлектричних матеріалів PZT-5H та BaTiO₃, які мають такі п'єзoeлектричні константи [114]:

$$c_{44}^{(1)} = 35,3 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad e_{15}^{(1)} = 17 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \quad \alpha_{11}^{(1)} = 15,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}},$$

$$c_{44}^{(2)} = 43 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad e_{15}^{(2)} = 11,6 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \quad \alpha_{11}^{(2)} = 11,2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}.$$

За формулами (1.28), (1.30) побудовано графіки ковзання лівої тріщини (стрибка переміщення) для $\sigma_{23}^\infty = 10 \text{ МПа}$, $E_1^\infty = 0$, $c = -10 \text{ мм}$, $a = 10 \text{ мм}$, $d - b = 20 \text{ мм}$ і різних положеннях правої тріщини (рис. 1.2). Положення правої тріщини задавалося значеннями $b = 1000 \text{ мм}$ (крива I), $b = 15 \text{ мм}$ (II), $b = 11 \text{ мм}$ (III).

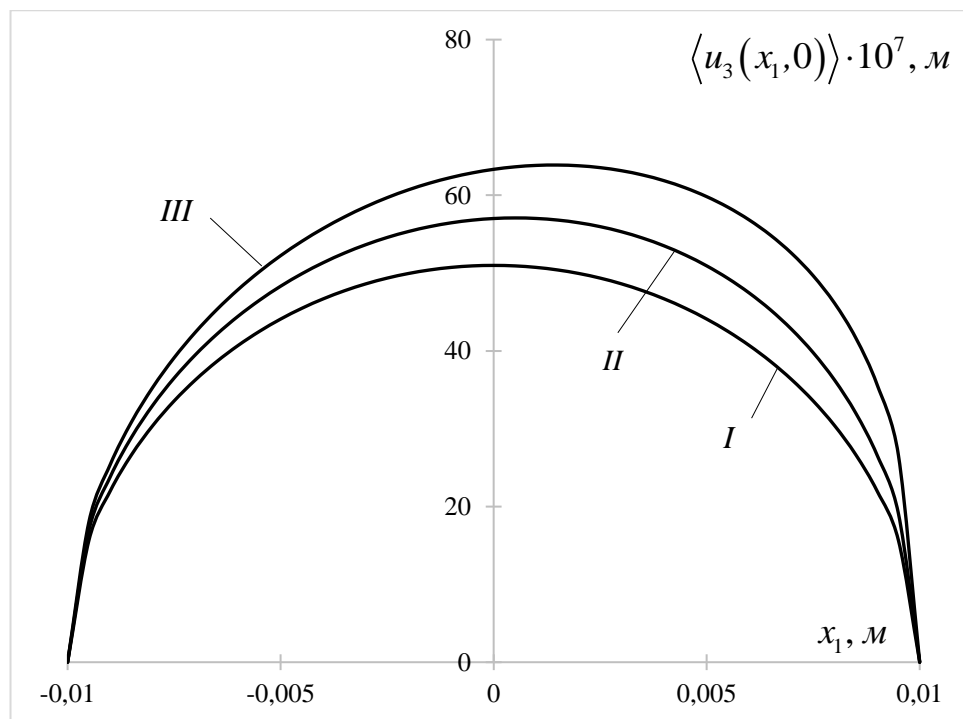


Рис. 1.2. Залежність стрибка переміщень електропровідної тріщини при $\sigma_{23}^\infty = 10 \text{ МПа}$, $E_1^\infty = 0$ від різних положень електропроникної тріщини

Слід зазначити, що крива I відповідає випадку, коли взаємодія тріщин практично відсутня. Крім того, зазначимо, що графіки ковзання правої

тріщини близькі до дзеркального відображення кривих на рис. 1.2 відносно середини відрізка $[a, b]$.

За тими ж формулами (1.28), (1.30) побудовано графіки ковзання лівої тріщини для $c = -10 \text{ мм}$, $a = 10 \text{ мм}$, $b = 15 \text{ мм}$, $d = 35 \text{ мм}$ при різних напруженостях зовнішнього електричного поля, які показано на рис. 1.3. Криві *I-III* побудовано при $\sigma_{23}^{\infty} = 10 \text{ МПа}$ та $E_1^{\infty} = 0$ (лінія *I*), $E_1^{\infty} = 10^6 \text{ В/м}$ (лінія *II*) та $E_1^{\infty} = 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ (лінія *III*). Криву *IV* отримано при $\sigma_{23}^{\infty} = 5 \text{ МПа}$ та $E_1^{\infty} = 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. Слід зазначити, що стрибок переміщення правої тріщини майже не залежить від електричного поля. Це можна пояснити електропроникністю цієї тріщини та її нечутливістю до електричного поля. Лише незначні зміни величин стрибка переміщень правої тріщини пояснюються реакцією лівої тріщини на зміну електричного поля.

Слід також зазначити, що для розглянутого композиту біматеріальний параметр ε , який відіграє важливу роль у формулах (1.28), (1.32), (1.33) є досить малим і дорівнює 0,04878. Цей параметр визначає інтенсивність осциляції, і через його малість зони осциляції зазвичай дуже короткі, і в більшості випадків вони не помітні на графіках. Тільки для дуже сильного зсувного поля, деякі з цих зон стають помітними. Така ситуація ілюструється лінією *IV* на рис. 1.3, на якій сильне зсувне поле ініціюється відносно великим електричним полем і утворює помітну зону осциляції біля лівої вершини тріщини.

Відповідні стрибки електричного зміщення $\langle D_2(x_1, 0) \rangle$, що визначаються за формулою (1.28), вздовж лівої (електропровідної) тріщини показано на рис. 1.4. Для наочності локальні околиці середини тріщини збільшено та подано окремою виноскою.

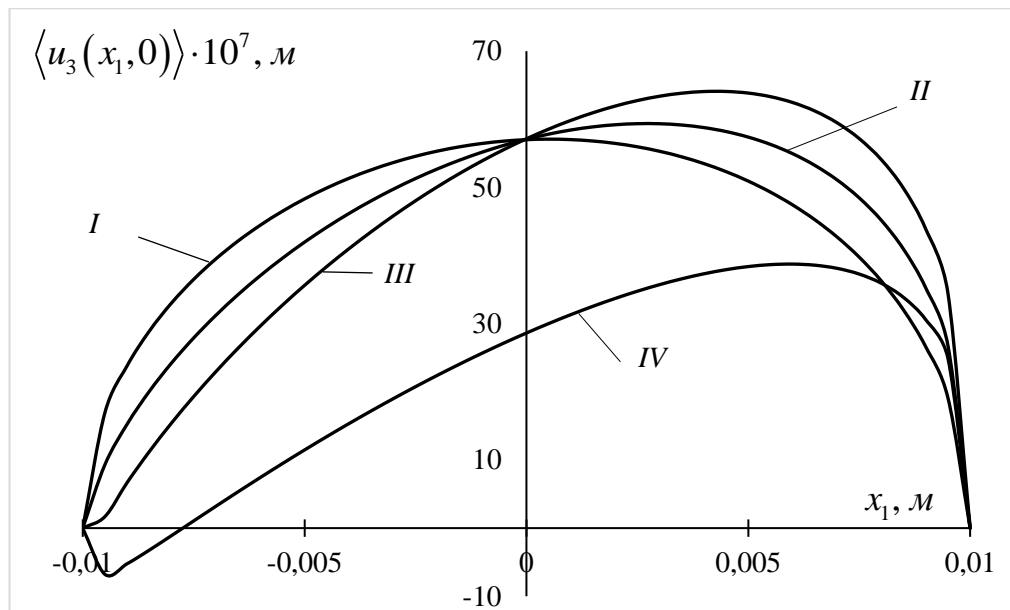


Рис. 1.3. Ковзання лівої тріщини для різних значень напруженості зовнішнього електричного поля

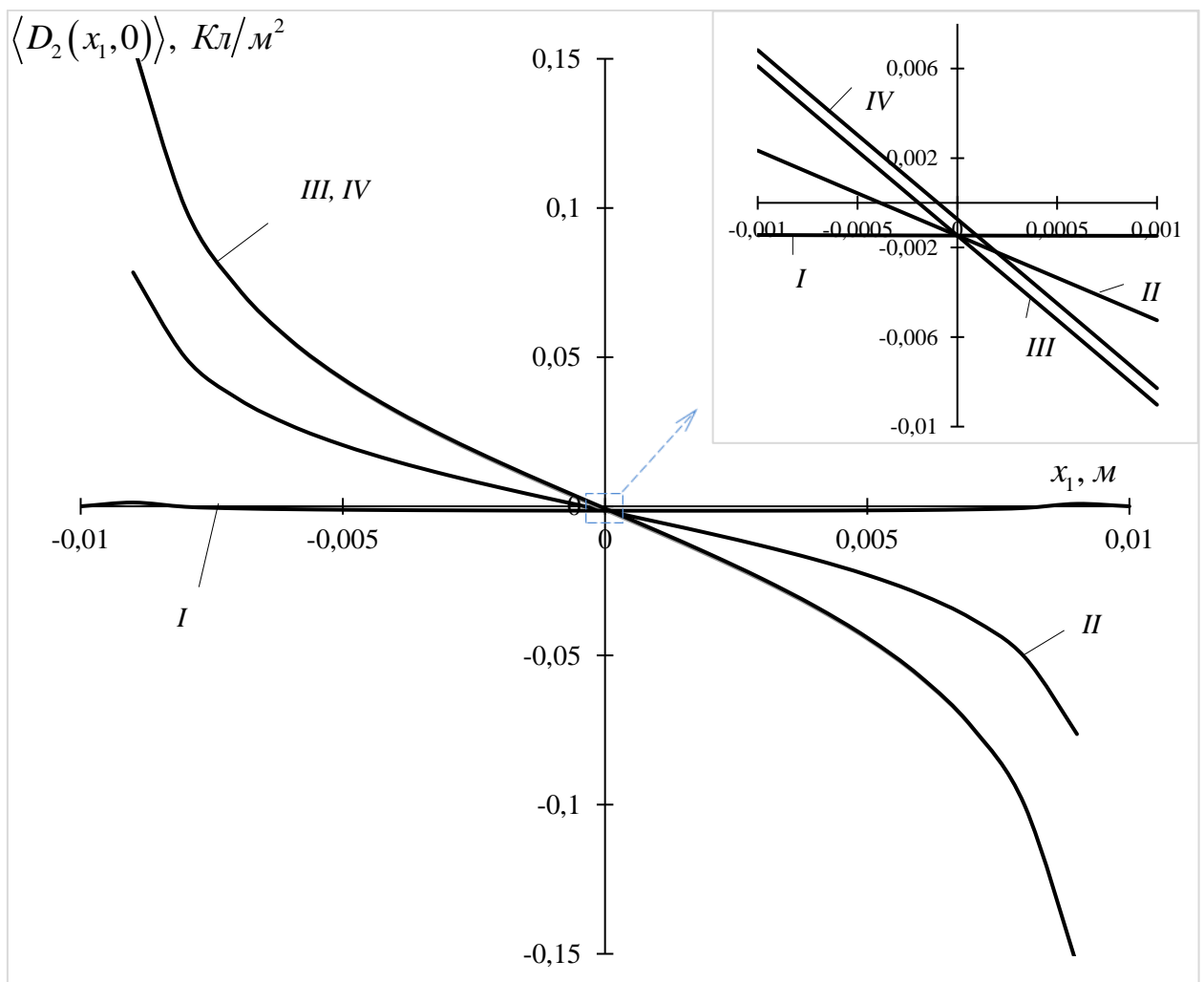


Рис. 1.4. Стрибки електричного зміщення $\langle D_2(x_1, 0) \rangle$ вздовж електропровідної тріщини за такого ж навантаження, як на рис. 1.3

Слід зазначити, що $\langle D_2(x_1, 0) \rangle$ дуже мале і симетричне відносно середини тріщини за відсутності електричного поля. Прикладання ж електричного поля призводить до порушення цієї симетрії та поведінки, близької до антисиметричної відносно середини тріщини.

Графіки напруження $\sigma_{23}(x_1, 0) = \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{23}^{(2)}(x_1, 0)$ на інтервалі між тріщинами, які побудовано за формулою (1.26) для $\sigma_{23}^\infty = 10 \text{ МПа}$, наведено на рис. 1.5 для таких же положень тріщин, як і на рис. 1.3, і різних напруженостей зовнішнього електричного поля. Крива *I* відповідає $E_1^\infty = 0$, *II* – $E_1^\infty = 2 \times 10^6 \text{ В/м}$ та крива *III* – $E_1^\infty = 4 \times 10^6 \text{ В/м}$.

Для таких же геометричних характеристик тріщин і навантажень графіки напруження $\sigma_{23}(x_1, 0)$ на продовженні правої тріщини (формула (1.25)) наведено на рис. 1.6.

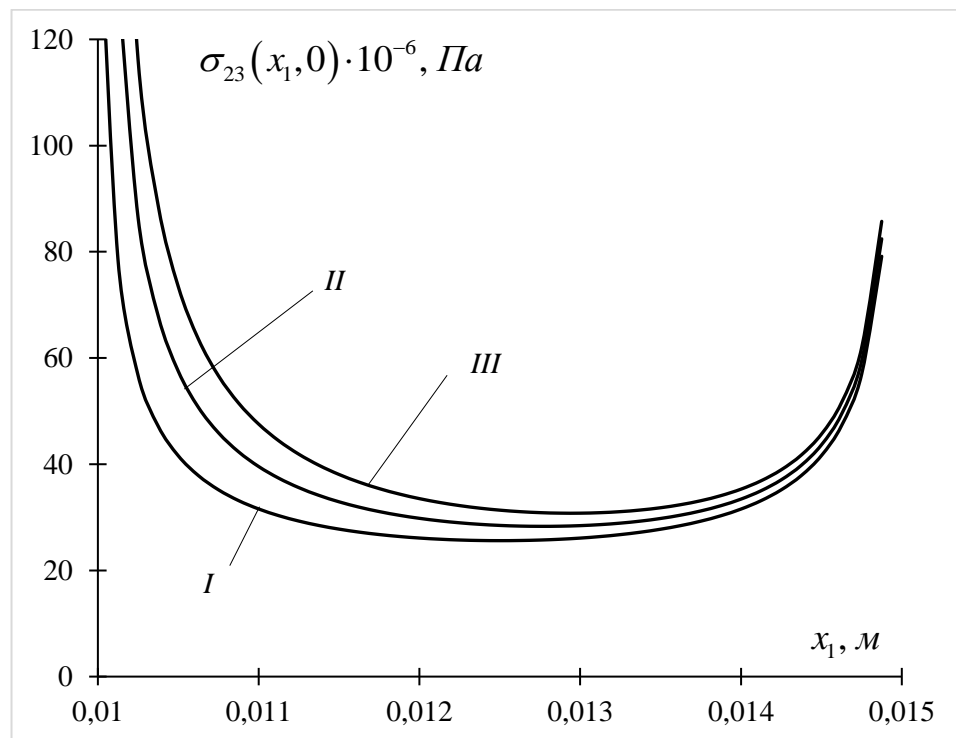


Рис. 1.5 Залежність напруження $\sigma_{23}(x_1, 0)$ в проміжку між тріщинами від напруженості зовнішнього електричного поля

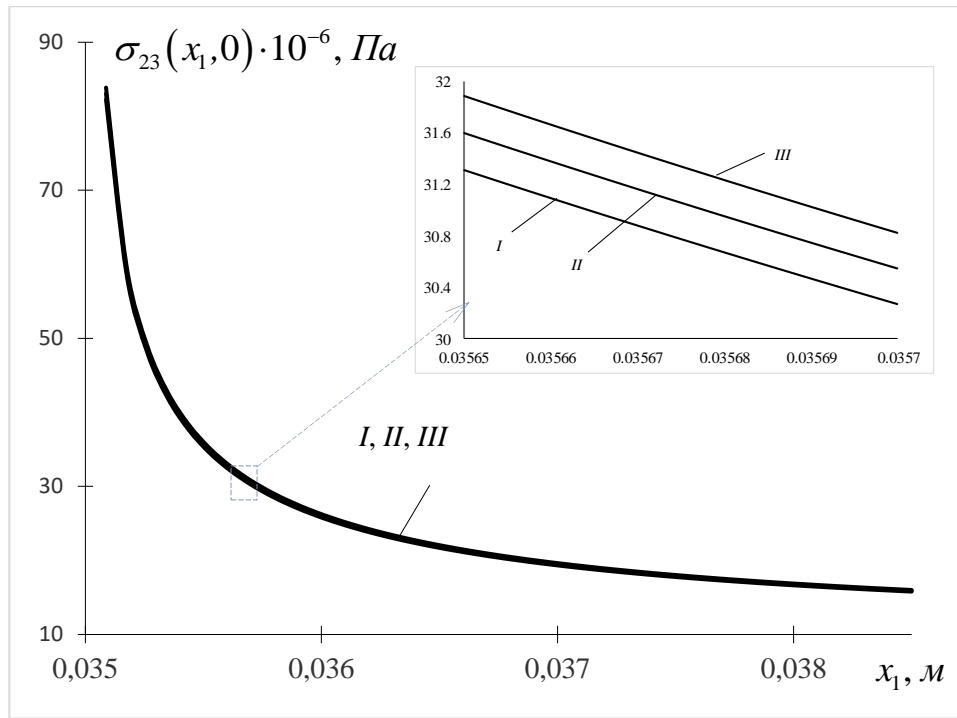


Рис. 1.6. Залежність напруження $\sigma_{23}(x_1, 0)$ на продовженні правої тріщини від напруженості зовнішнього електричного поля

Видно, що залежність механічного напруження від електричного поля найбільш істотно проявляється в околі лівої (електродованої) тріщини. З віддаленням від неї цей ефект зменшується і праворуч від електропроникної тріщини практично зникає (рис. 1.6). На цьому рисунку різниця в результатах стає помітною лише при відображенні збільшеної локальної зони в деякій довільній частині розглянутої області.

Зміну електричного поля $E_1(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0)$ на різних частинах інтерфейсу показано на рисунках 1.7 і 1.8 для $\sigma_{23}^\infty = 10 \text{ МПа}$, $c = -10 \text{ мм}$, $a = 10 \text{ мм}$, $b = 15 \text{ мм}$, $d = 35 \text{ мм}$ й різної напруженості зовнішнього електричного поля. На рис. 1.7 крива I відповідає $E_1^\infty = 0$, II – $E_1^\infty = -5000 \text{ В/м}$ та III – $E_1^\infty = 10000 \text{ В/м}$. На рис. 1.8 криві I, II, III побудовано для $E_1^\infty = 0, -2 \times 10^4, -4 \times 10^4 \text{ В/м}$, відповідно. Отримані графіки підтверджують висновки, що випливають із формул (1.25), (1.26) і (1.31), а саме, що $E_1(x_1, 0)$ є сингулярним у правому околі електропровідної тріщини,

скінченним зліва від електропроникної тріщини і сингулярним при наближенні зсередини до обох вершин цієї тріщини.

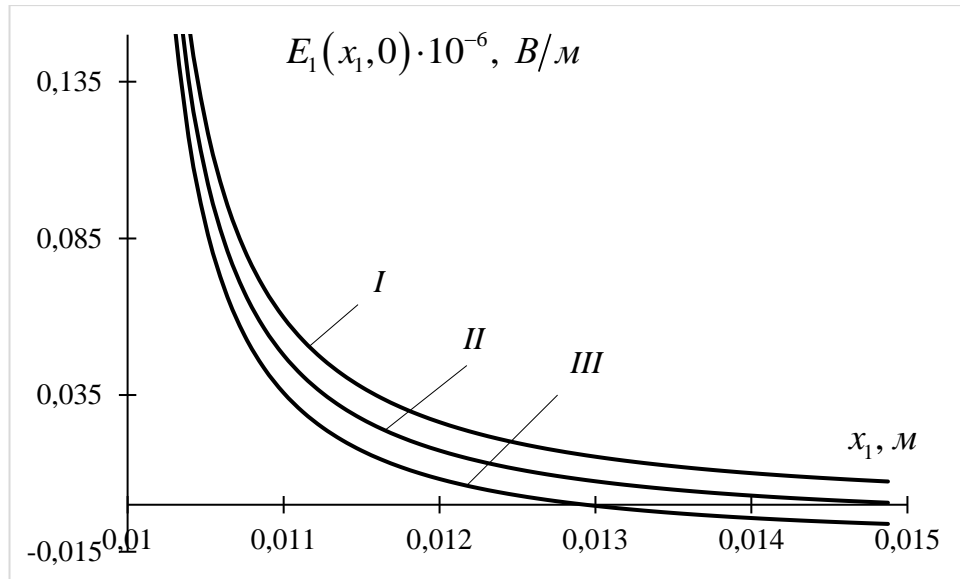


Рис. 1.7. Зміна електричного поля $E_1(x_1, 0)$ між тріщинами для різної напруженості зовнішнього електричного поля

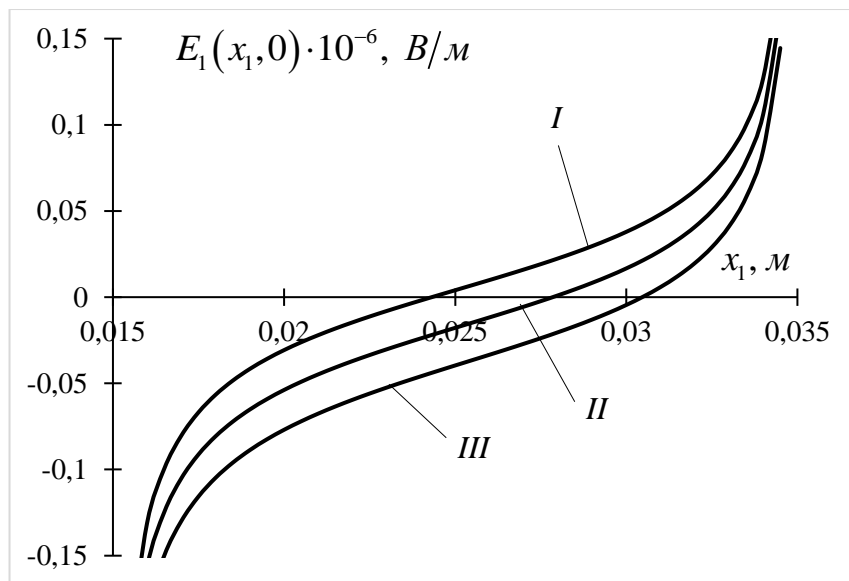


Рис. 1.8 Зміна електричного поля $E_1(x_1, 0)$ уздовж електропроникної тріщини

Значення ШЗЕ для всіх вершин тріщин, які отримано при $\sigma_{23}^{\infty} = 10 \text{ МПа}$, $a - c = d - b = 0,02 \text{ м}$, різних відстанях між вершинами тріщин a та b і різних напруженостях електричного поля, розраховано за формулами (1.46), (1.47), (1.49), (1.50) та представлено у таблицях 1.1-1.3.

Таблиця 1.1. Значення ШЗЕ [$H/м$] у вершинах тріщин для $\sigma_{23}^{\infty}=10МПа$,
 $c = -10мм$, $a = 10мм$, $b = 1000мм$, $d = 1020мм$ і різної напруженості
електричного поля E_1^{∞} [$B/м$]

E_1^{∞}	0	$\pm 10^4$	$\pm 10^5$	$\pm 2 \times 10^5$	$\pm 4 \times 10^5$
G_c	39,9581	39,9872	42,8716	51,6122	86,5746
G_a	39,9582	39,9873	42,8717	51,6123	86,5747
G_b	39,5815	39,5815	39,5815	39,5815	39,5815
G_d	39,5814	39,5814	39,5814	39,5814	39,5814

Таблиця 1.2. Значення ШЗЕ [$H/м$] у вершинах тріщин при невеликій відстані
між тріщинами ($b - a = 5мм$) і різних значеннях E_1^{∞} [$B/м$]

E_1^{∞}	-4×10^5	-2×10^5	0	2×10^5	4×10^5
G_c	93,685	58,5351	46,6942	58,1623	92,9394
G_a	108,099	72,5648	60,3416	71,4293	105,828
G_b	60,9167	60,4405	59,9661	59,4936	59,023
G_d	46,503	46,4108	46,3186	46,2266	46,1346

Таблиця 1.3. Значення ШЗЕ [$H/м$] у вершинах тріщин для надзвичайно малої
відстані між тріщинами ($b - a = 1мм$) і різних значеннях E_1^{∞} [$B/м$]

E_1^{∞}	-4×10^5	-2×10^5	0	2×10^5	4×10^5
G_c	100,68	65,1461	52,9278	64,0247	98,4367
G_a	183,447	144,399	128,718	136,405	167,458
G_b	135,81	132,055	128,353	124,703	121,106
G_d	53,0421	52,8018	52,5621	52,3229	52,0842

З цих таблиць видно, що:

- 1) для відстані між тріщинами, що значно перевищує їхню довжину (табл. 1.1), значення ШЗЕ для обох вершин кожної тріщини однакові та добре узгоджуються з результатами, отриманими для одиночних тріщин. Електричне поле суттєво впливає на ШЗЕ електропровідної тріщини і не змінює цих значень для електропроникної тріщини;
- 2) при зменшенні відстані між тріщинами спостерігається зростання значень ШЗЕ в усіх їхніх вершинах (табл. 1.2, 1.3). У цьому випадку, G_a та G_b збільшуються швидше, ніж G_c та G_d для всіх значень електричного поля. Така поведінка добре узгоджується з поведінкою коефіцієнта інтенсивності напружень, отриманого в [88] для двох електрично проникних тріщин між різнорідними одновимірними п'єзоелектричними квазікрystalами;
- 3) прикладення електричного поля до близько розташованих тріщин (стовпці 1, 2, 4, 5 табл. 1.2 і 1.3) ініціює значне зростання ШЗЕ біля вершин електрично провідної тріщини. Напрямок електричного поля не дуже істотно, але все ж впливає на значення ШЗЕ: значення G_b змінюється набагато менше, ніж G_c та G_a , а G_d залишається практично незмінним при зміні зовнішнього електричного поля.

Для перевірки отриманих результатів і підтвердження їхньої достовірності було проведено порівняння часткового випадку отриманого розв'язку з іншим відомим розв'язком. Для цього було використано формулу (84) статті [114]. Зокрема, результати розрахунку $\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0)$ та $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ за формулами (1.26), (1.29), (1.30), відповідно, порівнювалися з результатами, отриманими за відповідними формулами (96) та (99) із роботи [114] для режиму надзвичайно низької швидкості ($V \approx 0$). Виявилося, що для дуже великої відстані між тріщинами отримані результати з високою точністю узгоджуються зі згаданим результатом [114] для всіх контрольованих значень аргументів. Зокрема, лінія I рис. 1.2 майже повністю співпадає з аналогічною

лінією, отриманою за формулою (99) роботи [114]. Наприклад, значення $\langle u_3(0,0) \rangle$ дорівнює $50,987 \times 10^{-7} \text{ м}$ і $50,985 \times 10^{-7} \text{ м}$, відповідно. Невелику різницю в результатах можна пояснити наявністю другої тріщини в нашому випадку. Однак очевидно, що її вплив на електропровідну тріщину надзвичайно малий, оскільки відстань між тріщинами в 50 разів перевищує їхню довжину.

Для підтвердження справедливості формули (1.45), що отримана аналітично з використанням асимптотичних формул для електромеханічних факторів біля вершини тріщини, інтеграли

$$\tilde{G}_c = \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_c^{c+\Delta l} \left[\sigma_{23}^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle u_3(x_1, 0) \rangle - E_1^{(1)}(x_1 - \Delta l, 0) \langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle \right] dx_1 \right\}, \quad (1.51)$$

які складають основну частину формули (1.42), визначено чисельно для різних значень Δl .

Для цього розрахунку було використано формули (1.32) та (1.44) і ті ж матеріали, що й раніше, та $\sigma_{23}^\infty = 10 \text{ МПа}$, $E_1^\infty = -10^5 \text{ В/м}$, $c = -0,01 \text{ м}$, $a = 0,01 \text{ м}$, $b = 0,05 \text{ м}$, $d = 0,07 \text{ м}$. Результати наведено в табл. 1.4.

Таблиця 1.4 Залежність ШЗЕ \tilde{G}_c [Н/м] від $\Delta l / (a - c)$

$\Delta l / (a - c)$	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
\tilde{G}_c	43,876	43,876	43,878	43,892	44,040

Зазначимо, що G_c , отримане за формулою (1.45), дорівнює 43,876.

Розглянутий приклад підтверджує справедливість формул (1.42) і (1.45) для розрахунку ШЗЕ у вершині тріщини c . Звичайно, числова оцінка (1.42) була використана лише для ілюстрації та вимагала досить громіздкого аналізу, що додатково підкреслює важливість дуже простої аналітичної формули (1.45). Варто також зазначити, що інтеграл (1.51) без другого доданку в підінтегральній функції, що відображає вплив електричних складових, дає

результати, які суттєво відрізняються від результатів у таблиці 1.1, і не демонструють інваріантності щодо Δl .

1.6 Висновки до розділу I

Розглянуто задачу про електропровідну та електропроникну тріщини, які розташовані вздовж межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів. Поляризація матеріалів паралельна фронту тріщини, прикладене антиплоске механічне навантаження та електричне поле в площині, ортогональній фронтам тріщин.

Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана (1.9), (1.10) щодо функції, яка є аналітичною у всій площині, що розрізана уздовж тріщини. Наведено аналітичний розв'язок цієї проблеми. Це дозволило отримати відносно прості вирази для зсувного напруження та електричного поля на різних зчеплених ділянках межі поділу матеріалів. Також визначено коефіцієнти інтенсивності цих компонент у вершинах тріщин. Наведено механічні та електричні стрибки переміщень вздовж тріщин та розглянуто їхню поведінку у вершинах тріщин. Особливу увагу приділено аналізу швидкості звільнення енергії. З використанням асимптотичних виразів напружень та електричного поля, механічних та електричних переміщень у вершинах тріщин записано аналітичні вирази (1.46), (1.47), (1.49), (1.50) для ШЗЕ для електропровідної та електропроникної тріщини відповідно.

Результати чисельного аналізу продемонстрували залежності стрибків механічних та електричних переміщень берегів тріщини, а також напруження та електричного поля вздовж відповідних ділянок межі поділу матеріалів від різних відстаней між тріщинами при різних інтенсивностях механічного та електричного навантажень. Відповідні залежності для ШЗЕ продемонстровано в таблицях 1.1-1.3. З цих даних можна зробити такі основні висновки:

- 1) за великої відстані між тріщинами електричне поле істотно впливає на ШЗЕ електропровідної тріщини і не змінює цих значень для електропроникної;
- 2) зменшення відстані між тріщинами призводить до інтенсивного зростання значень ШЗЕ на найближчих вершинах різних тріщин і більш помірному зростанню ШЗЕ на їхніх віддалених вершинах;
- 3) у випадку близько розташованих тріщин прикладання зовнішнього електричного поля призводить до активного зростання значень ШЗЕ у вершинах електропровідної тріщини, що ініціює повільне зростання значень ШЗЕ у вершинах електропроникної тріщини.

РОЗДІЛ II. ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ШТАМПІВ З РІЗНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ НА ГРАНИЦІ ІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо два штампи $a \leq x \leq b$ і $c \leq x \leq d$, які діють на границю $y = 0$ ізотропної півплощини $y \leq 0$ (рис. 2.1) під дією сил P_1 та P_2 . Будемо вважати, що штамп, підосва якого розташована на проміжку $x \in [a, b]$, є зчепленим з півплощиною, а штамп $x \in [c, d]$ є таким, що проковзує. Вважаємо також, що обидва штампи можуть переміщуватися лише вертикально. Півплощина характеризується коефіцієнтом Пуассона ν та модулем зсуву μ , коефіцієнтом $\kappa = 3 - 4\nu$.

Будемо вважати, що підосви штампів є плоскими. Тоді граничні умови на різних частинах границі півплощини мають вигляд:

$$u(x, 0) = r_0, \quad v(x, 0) = r_1 \quad \text{для } x \in [a, b], \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = r_2 \quad \text{для } x \in [c, d], \quad (2.2)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \notin \{[a, b] \cup [c, d]\}, \quad (2.3)$$

де $a < b < c < d$.

Тут r_0, r_1, r_2 – дійсні сталі, які підлягають визначенню.

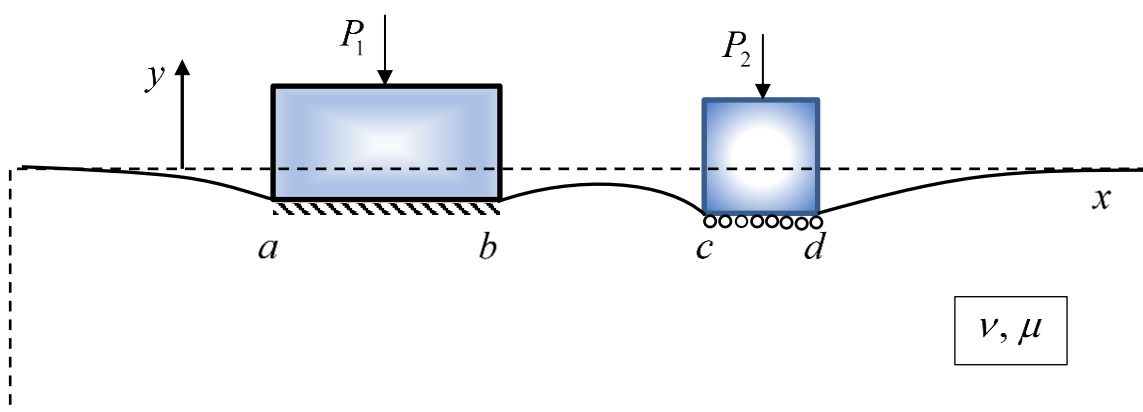


Рис. 2.1. Штампи $a \leq x \leq b$ і $c \leq x \leq d$ на межі $y = 0$ ізотропної півплощини

2.2. Комбінована крайова задача Діріхле-Рімана

Розв'язок задачі будемо шукати у формі, запропонованій у роботі Мусхелішвілі [18]:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2.4)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2.5)$$

де функція $\Phi(z)$ є аналітичною в площині комплексної змінної $z = x + iy$ з розрізами вздовж $[a, b]$ та $[c, d]$ і має в вузлових точках не більш ніж інтегровані особливості. Вважаючи, що напруження і обертання на нескінченості відсутні, маємо [18]:

$$\Phi(z) = i\frac{P_1 + P_2}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

Рівняння (2.4), (2.5) при $y \rightarrow -0$ набувають вигляду:

$$\sigma_y^- - i\tau_{xy}^- = \Phi^-(x) - \Phi^+(x), \quad (2.7)$$

$$2\mu(u' + iv')^- = \kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x). \quad (2.8)$$

Із рівнянь (2.3) і (2.7) випливає, що функція $\Phi(z)$ не має стрибків при переході через частини границі півплощини поза штампами. В той же час, задоволення граничним умовам (2.1) і (2.2) за допомогою (2.7) і (2.8) призводить до рівнянь:

$$\Phi^+(x) + \kappa\Phi^-(x) = 0 \quad \text{для } a \leq x \leq b, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)] = 0 \quad \text{для } c \leq x \leq d. \quad (2.10)$$

Останні два рівняння можна записати у вигляді:

$$\operatorname{Im}\Phi^\pm(x) = 0 \quad \text{для } c \leq x \leq d. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.9), (2.11) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана відносно функції $\Phi(z)$. Ці рівняння співпадають (з точністю до позначень) з рівняннями (1.12), (1.13) розділу I, тому для запису розв'язку задачі (2.9), (2.11) використаємо отримані в попередньому розділі результати.

Але, враховуючи відмінності, що будуть мати місце при врахуванні умов рівноваги штампів, та задля зручності, наведемо повний розв'язок цієї задачі у вигляді:

$$\Phi(z) = R_1(z)X_1(z) + R_2(z)X_2(z), \quad (2.12)$$

де

$$R_1(z) = C_1z^2 + C_2z + C_3, \quad R_2(z) = D_1z + D_2, \quad (2.13)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \quad (2.14)$$

$$\varphi(z) = 2\gamma \ln \left[\sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(z-c)} + \sqrt{(c-b)(z-d)}}{\sqrt{(d-a)(z-c)} + \sqrt{(c-a)(z-d)}} \right], \quad \gamma = \frac{\ln(\kappa)}{2\pi}. \quad (2.15)$$

При цьому $X_1(z)$ має кореневі особливості при $z=c$ та $z=d$, а $X_2(z)$ обмежена і відмінна від нуля в точках $z=c$ та $z=d$.

При $z \rightarrow \infty$ з (2.14) і (2.15) отримаємо:

$$\varphi(z) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.16)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\beta_0}}{z^2} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right), \quad (2.17)$$

$$X_2(z) = \frac{e^{i\beta_0}}{z} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad (2.18)$$

де

$$\beta_0 = 2\gamma \ln \left[\frac{\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}}{\sqrt{d-a} + \sqrt{c-a}} \right], \quad \beta_1 = \gamma \left[\sqrt{(c-a)(d-a)} - \sqrt{(c-b)(d-b)} \right].$$

Невідомі коефіцієнти C_1 , C_2 , C_3 , D_1 , D_2 можна знайти з умов на нескінченності та умов рівноваги штампів. Враховуючи, що при $z \rightarrow \infty$ мають місце співвідношення (2.17), (2.18), отримаємо такий вираз для $\Phi(z)$ на нескінченності:

$$\begin{aligned}\Phi(z) = & ie^{i\beta_0} \left(C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + \\ & + e^{i\beta_0} \left(D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Прирівнюючи вирази при z^0 та z^{-1} до відповідних складових правої частини (2.6), приходимо до такої системи двох лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів C_1, C_2, D_1, D_2 :

$$\begin{cases} ie^{i\beta_0} C_1 + e^{i\beta_0} D_1 = 0, \\ ie^{i\beta_0} \left[C_2 + C_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left[D_2 + D_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] = i \frac{P_1 + P_2}{2\pi}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Із цієї системи отримуємо:

$$C_1 = D_1 = 0, \quad C_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \cos \beta_0, \quad D_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \sin \beta_0. \quad (2.21)$$

Із умови рівноваги штампа, що проковзує, маємо:

$$\int_c^d \sigma_y dx = P_2. \quad (2.22)$$

За формулою (2.7) на $[c, d]$ маємо:

$$\sigma_y(x, 0) = \operatorname{Re} [\Phi^-(x) - \Phi^+(x)],$$

але, з урахуванням першого рівняння (2.10), можемо записати:

$$\sigma_y(x, 0) = \Phi^-(x) - \Phi^+(x). \quad (2.23)$$

Використовуючи далі представлення (2.12), отримуємо:

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = \\ = -R_1(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - R_2(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-c)(x-a)}},\end{aligned} \quad (2.24)$$

де

$$\varphi_0(x) = \gamma \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-a)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(x-c)}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-b)(x-c)}} \right). \quad (2.25)$$

Комбінуючи (2.23), (2.24) і підставляючи в (2.22), отримуємо:

$$\int_c^d \left\{ \frac{(C_1 x^2 + C_2 x + C_3)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} + \frac{(D_1 x + D_2)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\} dx = -P_2. \quad (2.26)$$

Невідомий коефіцієнт C_3 може бути представлений у вигляді:

$$C_3 = -(Y_2 + C_1 I_2 + C_2 I_1 + D_1 J_1 + D_2 J_0) / I_0, \quad (2.27)$$

де інтеграли

$$I_k = \int_c^d \frac{x^k (e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}}, \quad k=0,1,2,$$

$$J_m = \int_c^d \frac{x^m (e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \quad m=0,1$$

можна легко знайти чисельно.

2.3 Поведінка механічних факторів на границі півплощини

Розглянемо поведінку механічних факторів на ділянках під штампами та на вільних ділянках границі півплощини.

На основі формули (2.8) для $x \notin \{[a,b] \cup [c,d]\}$ одержуємо таку формулу для похідних від переміщень:

$$2\mu(u'(x,0) + iv'(x,0)) = (1 + \kappa)\Phi^-(x).$$

Обчислюючи на основі формули (2.12) вирази для $\Phi^-(x)$ на різних ділянках вільної поверхні границі півплощини, одержуємо для $x > d \cup x < a$:

$$u'(x,0) + iv'(x,0) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left\{ P(x) \frac{ie^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} \{\pm\} Q(z) \frac{e^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\}. \quad (2.28)$$

При цьому знак «+» у внутрішніх дужках $\{\}$ береться для $x > d$, а «-» для $x < a$.

Для проміжку $b < x < c$:

$$\begin{aligned} & 2\mu(u'(x,0) + iv'(x,0)) = \\ & = (\kappa + 1) \left[\frac{e^{i\varphi_{bc}(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left(\frac{-iP(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + Q(x) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

де

$$\varphi_{bc}(x) = 2\gamma \ln \left[\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (2.30)$$

Нормальне і тангенціальне переміщення на різних ділянках границі отримано шляхом інтегрування формул (2.28) та (2.29).

Для обчислення напружень під зчепленим штампом на ділянці $[a, b]$ використовуємо формулу (2.7), а також враховуємо, що

$$\Phi^-(x) = \kappa^{-1} \Phi^+(x) \text{ для } a \leq x \leq b.$$

У результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} & \sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0) = \\ & = \frac{2\sqrt{\alpha}e^{i\varphi^*(x)}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\frac{P(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + iQ(x) \right) \text{ для } a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де

$$\varphi^*(x) = 2\gamma \ln \left[\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \frac{\sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (2.32)$$

На ділянці контакту $[c, d]$ штампу, що проковзує, враховуємо, що $\tau_{xy}(x,0) = 0$. Тоді для нормального напруження для $x \in [c, d]$ отримуємо:

$$\sigma_y(x,0) = \frac{-P(x)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - \frac{Q(x)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}. \quad (2.33)$$

2.4 Аналіз чисельних результатів

Числові результати отримано для $\mu = 8 \times 10^{10}$ Па, $\nu = 0,3$ та при різних значеннях ширини штампів, відстаней між ними та величин зовнішнього навантаження.

На рис. 2.2 показано залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини, які обчислено при $P_1 = -10^6$ Н/м, $P_2 = 10^6$ Н/м. Лінія I відповідає випадку двох однакових штампів $a = -0,005$ м, $b = 0,015$ м, $c = 0,03$ м, $d = 0,05$ м, лінія II – $a = -0,01$ м, $b = 0,01$ м, $c = 0,025$ м, $d = 0,055$ м (правий штамп є ширшим), лінія III – $a = -0,01$ м, $b = 0,04$ м, $c = 0,055$ м, $d = 0,075$ м (лівий штамп є ширшим). Наведено тільки переміщення в околі штампів. На ділянках же, віддалених від точок a ліворуч і d праворуч, зображені криві рівномірно продовжуються і сходяться до нульових значень по осі ординат.

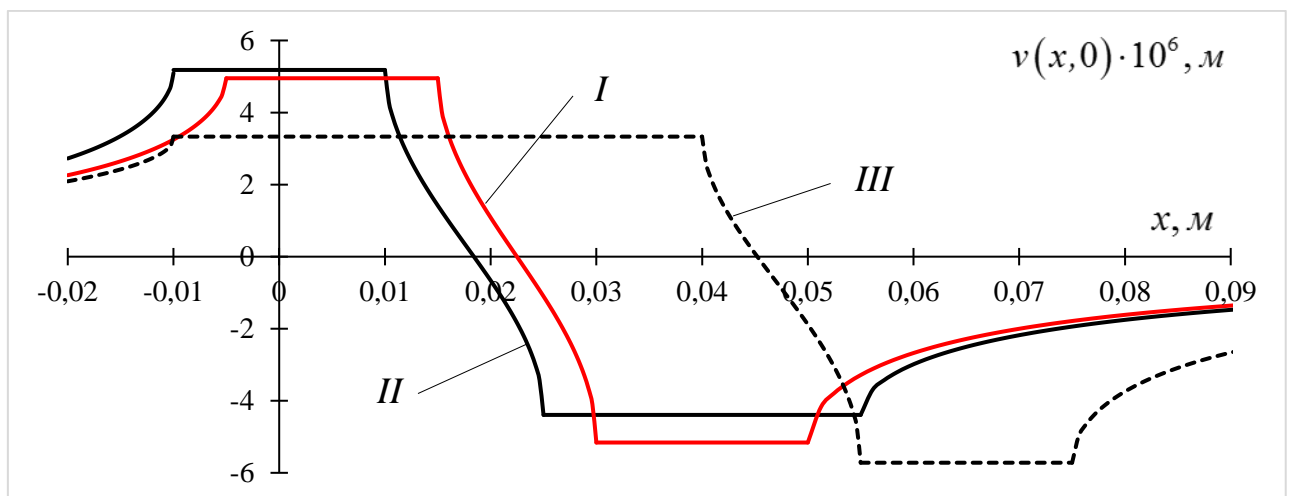


Рис. 2.2. Залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини

На рис. 2.3 для тих же геометричних і силових параметрів, що на рис. 2.2, наведено графіки нормальних напружень під штампами. Видно, що зі збільшенням ширини штампів інтенсивність напружень зменшується.

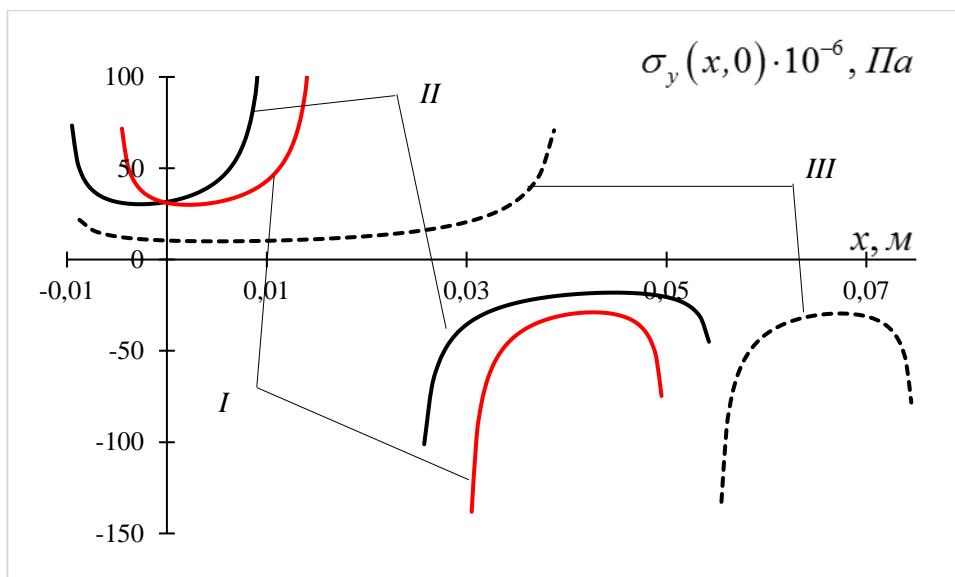


Рис. 2.3. Нормальні напруження під штампами

На рис. 2.4 наведено графіки дотичних напружень під першим штампом. Видно, що дотичне напруження залишається сингулярним при підході до границь області контакту, але його величина зменшується порівняно з нормальним напруженням.

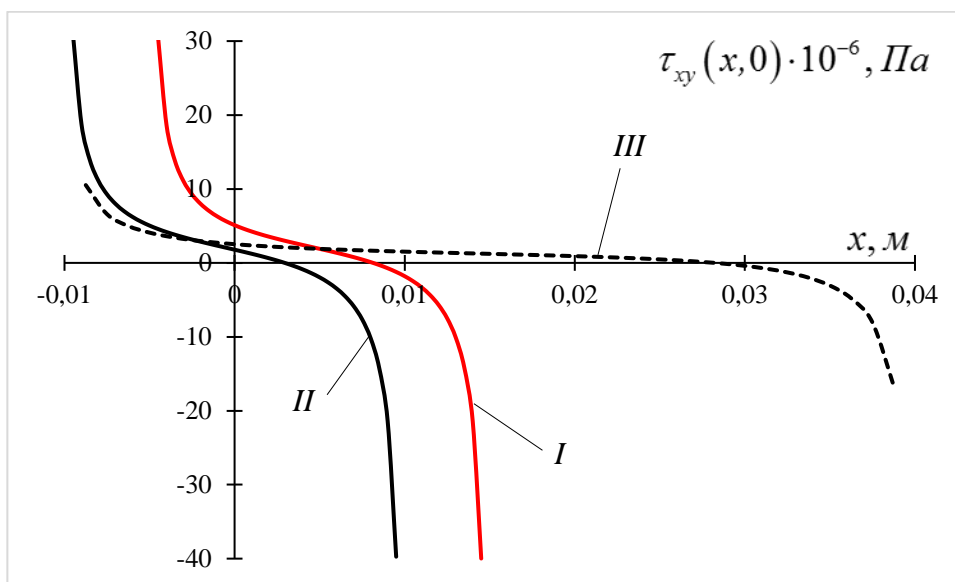


Рис. 2.4. Дотичні напруження під першим штампом

Розглянемо тепер залежність переміщень штампів від зусиль, які до них прикладено. Нехай геометричні характеристики штампів є фіксованими:

$a = -0,01 \text{ м}$, $b = 0,01 \text{ м}$, $c = 0,025 \text{ м}$, $d = 0,045 \text{ м}$ (правий штамп є ширшим), відстань між штампами ($c - b$) також є фіксованою.

На рис. 2.5 показано залежність вертикальних переміщень для трьох варіантів зовнішніх сил, прикладених до штампів. Лінія *I* відповідає випадку $P_1 = -10^6 \text{ Н/м}$, $P_2 = 10^6 \text{ Н/м}$, лінія *II* – $P_1 = P_2 = 0,25 \times 10^6 \text{ Н/м}$, лінія *III* – $P_1 = 0,5 \times 10^6 \text{ Н/м}$, $P_2 = 10^5 \text{ Н/м}$.

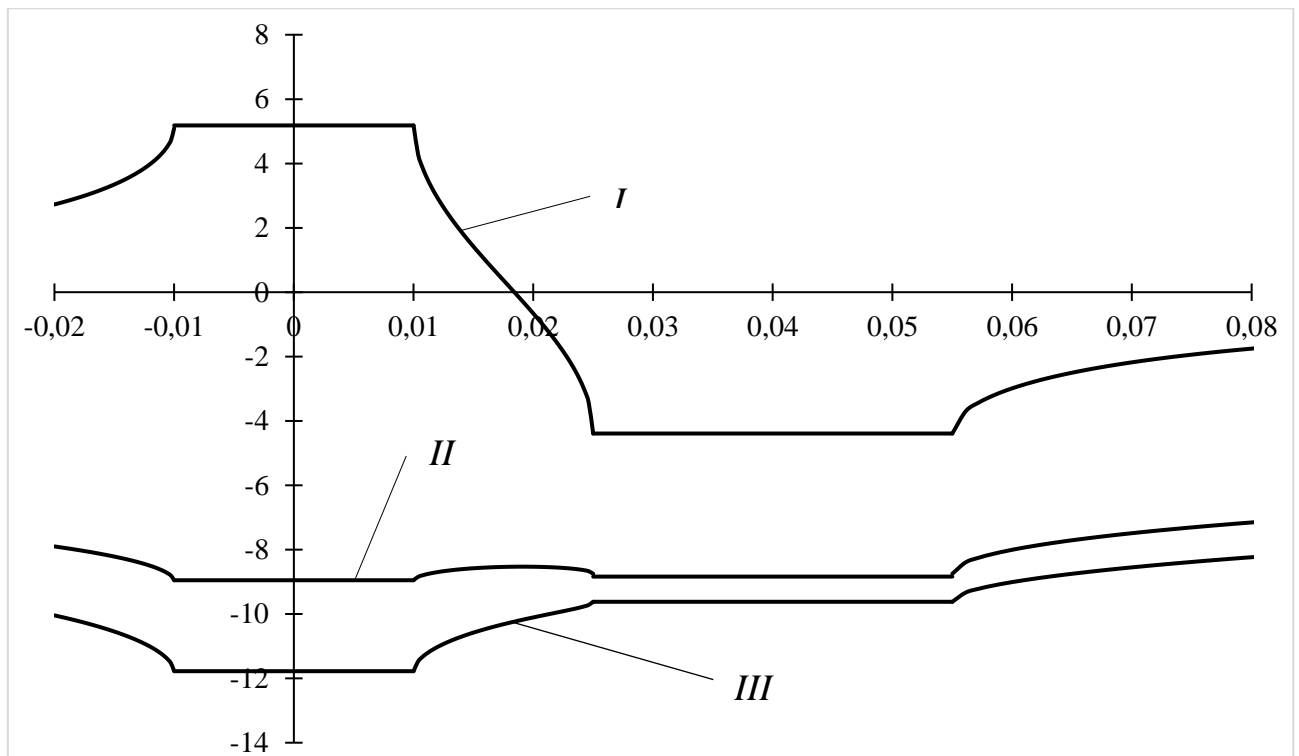


Рис. 2.5. Залежність вертикальних переміщень від прикладених до штампів зусиль

2.5 Висновки до розділу II

Розглянуто взаємодію двох штампів на границі пружної ізотропної півплощини під дією заданої системи сил. Вважається, що штампи мають плоскі основи, причому один з них жорстко зчеплений із півплощиною, а інший знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використано представлення напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції. Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана з

відповідними умовами для невідомої функції на нескінченості. На основі аналітичного розв'язку цієї задачі визначено похідні від переміщень границі півплощини та напруження під штампами в досить простому аналітичному вигляді. Показано, що розв'язок біля кутових точок жорстко зчепленого штампа має осциляційну кореневу особливість, а біля кутових точок гладкого штампу – звичайну кореневу.

Одержано числові результати, які проілюстровано графічно. Зокрема, представлено графіки переміщень границі півплощини та проілюстровано варіацію напружень під штампами. На підставі аналізу цих результатів можна зробити такі висновки:

1) зона повного затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину;

2) нормальне напруження під жорстко зчепленим штампом є значно більшим, ніж дотичне, а осадка штампу зменшується зі збільшенням його ширини;

3) фізично різні задачі (про колінеарні міжфазні тріщини з різними електричними умовами на їхніх берегах і про взаємодію зчепленого з основою і ковзного штампу) мають подібні математичні моделі, а також методики розв'язання, засновані на використанні подібного математичного апарату.

РОЗДІЛ III. ВЗАЄМОДІЯ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН З РІЗНИМИ ЕЛЕКТРИЧНИМИ ТА МАГНІТНИМИ УМОВАМИ НА ЇХ БЕРЕГАХ У П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ КОМПОЗИТІ

3.1 Основні формули для п'єзоелектромагнітного матеріалу для антиплоского випадку

Визначальні співвідношення для п'єзоелектромагнітного матеріалу мають вигляд [92]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s, \\ D_i &= e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s, \\ B_i &= h_{iks} \varepsilon_{ks} + d_{is} E_s + \gamma_{is} H_s,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій, D_i , B_i – складові електричної та магнітної індукції, E_i , H_i – напруженості електричного та магнітного полів, c_{ijks} – пружні, e_{iks} – п'єзоелектричні, h_{iks} – п'єзوماгнітні, d_{is} – електромагнітні константи, α_{is} , γ_{is} – електрична та магнітна проникності.

Рівняння рівноваги за відсутності масових сил та вільних зарядів такі:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0.\tag{3.2}$$

Вирази для деформацій, електричного та магнітного полів мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i},\tag{3.3}$$

де u_i – компоненти вектора переміщення, φ , ψ – електричний та магнітний потенціали, а символ коми в нижньому індексі означає диференціювання за відповідною координатою.

В антиплоскому випадку маємо:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2), \quad \psi = \psi(x_1, x_2).$$

Тоді визначальні співвідношення набувають вигляду:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i} \\ D_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,i} \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{Bmatrix},$$

де

$$i = 1, 2; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{15} & -d_{11} & -\gamma_{11} \end{bmatrix}.$$

Вводячи вектори

$$\mathbf{u} = [u_3, \varphi, \psi]^T, \mathbf{t} = [\sigma_{32}, D_2, B_2]^T, \quad (3.4)$$

можна записати

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\mathbf{u}_{,2}. \quad (3.5)$$

Оскільки функції u_3 , φ та ψ гармонійні, то з урахуванням (3.5) справедливі наступні представлення:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}(z) + \bar{\mathbf{\Phi}}(\bar{z}), \mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{\Phi}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{\Phi}}'(\bar{z}), \quad (3.6)$$

де $\mathbf{\Phi}(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$ – довільна аналітична вектор-функція комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$, $\mathbf{B} = i\mathbf{R}$, а штрихи означають похідні по x_1 .

3.2 Постановка задачі та основні формули для біматеріального тіла з електромагнітопровідною та електрично та магнітопроникною міжфазними тріщинами

Розглянемо дві тріщини $c \leq x_1 \leq a$ і $b \leq x_1 \leq d$ вздовж межі поділу п'єзоелектромагнітних півпросторів, поляризованих у напрямку осі x_3 . На нескінченності прикладене рівномірно розподілене антиплоске механічне навантаження σ_{23}^∞ , а також електричне поле напруженістю E_1^∞ і магнітне поле напруженістю H_1^∞ в площині (x_1, x_2) , які не залежать від координати x_3 (рис. 3.1). Припустимо, що тріщина $x_1 \in [c, a]$ є електромагнітопровідною, тоді як тріщина $x_1 \in [b, d]$ – електрично та магнітопроникною. Отже вважаємо, що

береги тріщини $[c, a]$ покриті електродами, які, крім того, підтримують постійний розподіл магнітного поля. Це означає, що умови для цього розрізу можна записати у формі:

$$\sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0, E_1^{(1)} = E_1^{(2)} = 0, H_1^{(1)} = H_1^{(2)} = 0 \text{ для } c < x_1 < a. \quad (3.7)$$

Умови на берегах електрично та магнітопроникної тріщини такі:

$$\sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0, \langle D_2 \rangle = 0, \langle B_2 \rangle = 0, \langle E_1 \rangle = 0, \langle H_1 \rangle = 0 \text{ для } b < x_1 < d. \quad (3.8)$$

Описані вище пошкодження можуть виникнути через розшарування багатошарового електрода, розташованого на інтервалі $[c, a]$, який виготовлений з феромагнітного матеріалу, разом з додатковим розшаруванням неелектродованої частини $[b, d]$ інтерфейсу.

Також вважається, що на нескінченності діє вектор електромагніто механічного навантаження $\mathbf{P}^\infty = [\sigma_{32}^\infty, E_1^\infty, H_1^\infty]^T$.

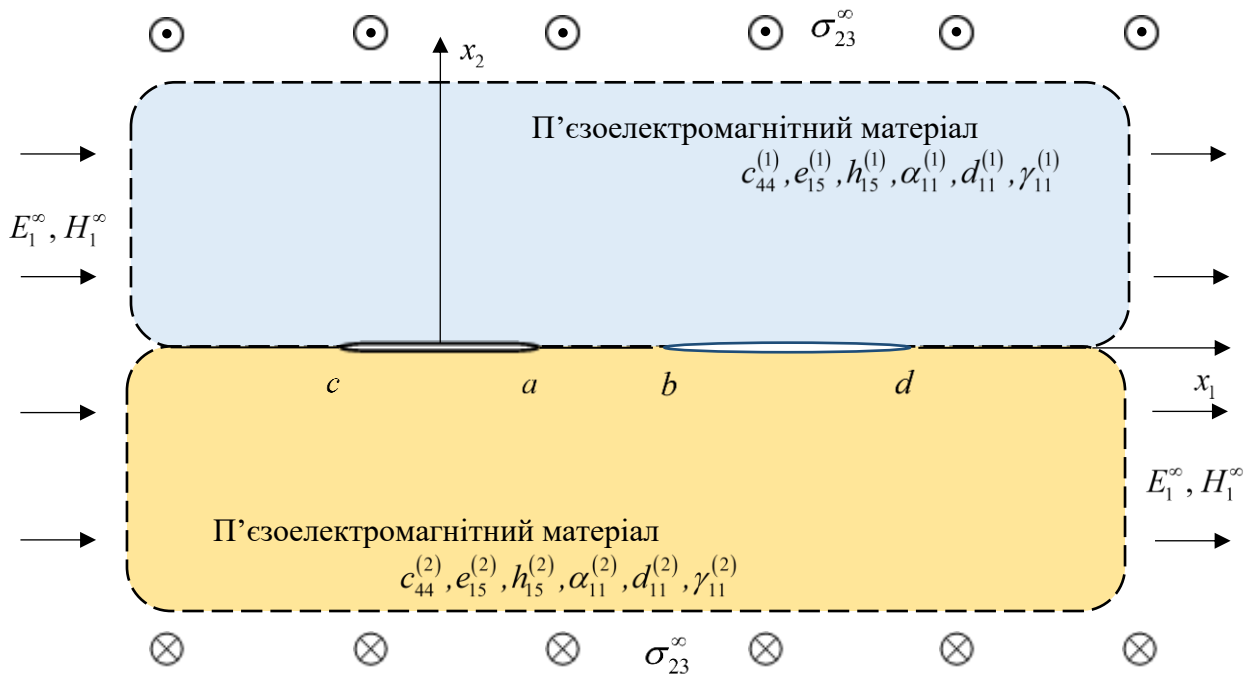


Рис. 3.1 – Тріщини $c \leq x_1 \leq a$ та $b \leq x_1 \leq d$ вздовж інтерфейсу $x_2 = 0$ двох п'єзоелектромагнітних матеріалів

Вводячи вектори

$$\mathbf{v}' = [u_3', D_2, B_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, \varphi', \psi']^T, \quad (3.9)$$

на основі (3.6) маємо:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (3.11)$$

де матриці \mathbf{M} і \mathbf{N} мають структуру:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для випадку біматеріального з'єднання співвідношення (3.10), (3.11) можна записати у вигляді:

$$\mathbf{v}'^{(k)} = \mathbf{M}^{(k)}\Phi'^{(k)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(k)}\bar{\Phi}'^{(k)}(\bar{z}), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{N}^{(k)}\Phi'^{(k)}(z) + \bar{\mathbf{N}}^{(k)}\bar{\Phi}'^{(k)}(\bar{z}), \quad (3.13)$$

де $k = 1$ для області 1 і $k = 2$ для області 2; $\mathbf{M}^{(k)}$ та $\mathbf{N}^{(k)}$ – це матриці \mathbf{M} та \mathbf{N} для областей 1 і 2 відповідно; $\Phi^{(k)}(z)$ – довільні вектор-функції, аналітичні в областях 1 і 2 відповідно.

Потрібно, щоб рівність $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$ виконувалась на всій осі x_1 . Тоді з (3.10) маємо:

$$\begin{aligned} & N^{(1)}\Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) = \\ & = N^{(2)}\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{N}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тут використано позначення $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$, що означає граничне значення функції $F(z)$ при $x_2 \rightarrow 0$ зверху або знизу відповідно.

Рівняння (3.14) можна записати так:

$$\begin{aligned} & B^{(1)}\Phi'^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{B}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0) = \\ & = B^{(2)}\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{B}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0). \end{aligned}$$

Ліву і праву частини останнього рівняння можна розглядати як граничні значення функцій

$$\begin{aligned} N^{(1)}\Phi'^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(z) \\ N^{(2)}\Phi'^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(z), \end{aligned} \quad (3.15)$$

які є аналітичними у верхній і нижній півплощинах, відповідно. Але це означає, що існує функція $\Pi(z)$, яка дорівнює згаданим функціям у кожній півплощині та є аналітичною у всій площині.

Припускаючи, що $\Pi(z)\big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, на основі теореми Ліувілля знаходимо, що кожна з функцій (3.15) дорівнює 0 для кожного z з відповідної півплощини. Отже, отримуємо:

$$\bar{\Phi}'^{(2)}(z) = \left(\bar{N}^{(2)}\right)^{-1} N^{(1)}\Phi'^{(1)}(z) \text{ для } x_2 > 0, \quad (3.16)$$

$$\bar{\Phi}'^{(1)}(z) = \left(\bar{N}^{(1)}\right)^{-1} N^{(2)}\Phi'^{(2)}(z) \text{ для } x_2 < 0. \quad (3.17)$$

Далі знаходимо стрибок векторної функції:

$$\langle \nu'(x_1) \rangle = \nu'^{(1)}(x_1 + i0) - \nu'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (3.18)$$

при переході через інтерфейс.

Використовуючи формулу (3.12), записуємо:

$$\nu'^{(k)}(x_1 \pm i0) = M^{(k)}\Phi'^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{M}^{(k)}\bar{\Phi}'^{(k)}(x_1 \mp i0),$$

і підставляючи в (3.18), отримуємо:

$$\begin{aligned} \langle \nu'(x_1) \rangle = M^{(1)}\Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{M}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) - \\ - M^{(2)}\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{M}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0). \end{aligned}$$

Визначаючи далі

$$\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) = \left(N^{(2)}\right)^{-1} \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0)$$

з (3.17), і підставляючи цей вираз разом з (3.16) при $x_2 \rightarrow +0$ в останню формулу, одержуємо:

$$\langle \nu'(x_1) \rangle = D\Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{D}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (3.19)$$

де

$$D = M^{(1)} - \bar{M}^{(2)} \left(\bar{N}^{(2)} \right)^{-1} N^{(1)}.$$

Вводимо нову векторну функцію таким чином:

$$W(z) = \begin{cases} D\Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{D}\bar{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

тоді формулу (3.19) можна записати так:

$$\langle \nu'(x_1) \rangle = W^+(x_1) - W^-(x_1). \quad (3.21)$$

Із співвідношення (3.13) маємо:

$$P^{(1)}(x_1, 0) = N^{(1)}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (3.22)$$

Враховуючи, що на основі (3.20)

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) = D^{-1}W(x_1 + i0), \quad \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = -(\bar{D}^{-1})^{-1}W(x_1 - i0),$$

і підставляючи ці співвідношення в (3.22), одержуємо:

$$P^{(1)}(x_1, 0) = SW^+(x_1) - \bar{S}W^-(x_1), \quad (3.23)$$

де $S = N^{(1)}D^{-1}$.

Із останніх співвідношень випливає, що

$$S = \left[M^{(1)} \left(N^{(1)} \right)^{-1} - \bar{M}^{(2)} \left(\bar{N}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1}.$$

Представлення (3.21) та (3.23) можна використовувати для розв'язування антиплоских задач для біматеріальних тіл з міжфазними тріщинами.

Далі трансформуємо ці представлення до форми, яка буде зручнішою для розв'язання сформульованої задачі.

Розглянемо матрицю $L = [L_1, L_2, L_3]$ і добуток

$$LP^{(1)}(x_1, 0) = LSW^+(x_1) - L\bar{S}W^-(x_1). \quad (3.24)$$

Позначаючи $Y = [Y_1, Y_2, Y_3] = LS$, вводимо функцію:

$$F(z) = YW(z). \quad (3.25)$$

Припустимо, що $L\bar{S} = -\gamma LS$, транспонуємо останнє рівняння для зручності. Одержуємо:

$$(\gamma \mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) \mathbf{L}^T = 0. \quad (3.26)$$

Це задача пошуку власного значення γ і власного вектору \mathbf{L}^T . Власні значення є коренями рівняння

$$\det(\gamma \mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0, \quad (3.27)$$

які позначимо через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Власні вектори $\mathbf{L}_j^T = [L_{j1}, L_{j2}, L_{j3}]^T$ ($j = 1, 2, 3$), які відповідають власним значенням γ_j знайдено з системи (3.23).

Позначаючи

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{L}_j \mathbf{S}, \quad (3.28)$$

отримуємо з (3.24):

$$\mathbf{L}_j \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{Y}_j \mathbf{W}^+(x_1) + \gamma_j \mathbf{Y}_j \mathbf{W}^-(x_1),$$

або, враховуючи (3.25), отримуємо:

$$\mathbf{L}_j \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (3.29)$$

де

$$F_j(z) = \mathbf{Y}_j \mathbf{W}(z). \quad (3.30)$$

Враховуючи що $F^+(x_1) = F^-(x_1) = F(x_1)$ для $x_1 \notin (c, a) \cup (b, d)$, отримуємо з (3.29) таку умову на нескінченності:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + \gamma_j} (L_{j1} \sigma_{32}^\infty + L_{j2} E_1^\infty + L_{j3} H_1^\infty). \quad (3.31)$$

Слід зазначити, що для розглянутого класу п'єзоелектромагнітних матеріалів матриця \mathbf{S} має таку структуру:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} i s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & i s_{22} & i s_{23} \\ s_{31} & i s_{32} & i s_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

де всі s_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) є дійсними.

У цьому випадку власні значення системи (3.26) такі:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \frac{\delta + 1}{\delta - 1}, \gamma_3 = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}, \quad (3.33)$$

де

$$\delta = \sqrt{t_2 / t_1}, \quad t_1 = s_{21}s_{32}s_{13} + s_{12}s_{23}s_{31} - s_{31}s_{22}s_{13} - s_{12}s_{21}s_{33}, \quad t_2 = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}s_{11}.$$

Власні вектори, що відповідають цим власним значенням, можна визначити із системи (3.26) і представити у вигляді:

$$L_1 = [0, 1, \omega_{13}], \quad L_2 = [1, i\omega_{22}, i\omega_{23}], \quad L_3 = [1, i\omega_{32}, i\omega_{33}], \quad (3.34)$$

де

$$\omega_{13} = -\frac{s_{21}}{s_{31}}, \quad \omega_{22} = \frac{\omega}{D_0}(s_{12}s_{33} - s_{13}s_{32}),$$

$$\omega_{23} = \frac{\omega}{D_0}(s_{22}s_{13} - s_{23}s_{12}), \quad \omega_{32} = -\omega_{22},$$

$$\omega_{33} = -\omega_{23}, \quad \omega = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}, \quad D_0 = s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}.$$

З урахуванням представлення (3.34) співвідношення (3.29) для $j = 1, 2$ можна записати у формі:

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) + \omega_{13}H_1^{(1)}(x_1, 0) = F_1^+(x_1) + F_1^-(x_1), \quad (3.35)$$

$$\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0) + i\omega_{22}E_1^{(1)}(x_1, 0) + i\omega_{23}H_1^{(1)}(x_1, 0) = F_2^+(x_1) + \gamma_2 F_2^-(x_1). \quad (3.36)$$

Із рівнянь (3.9), (3.21) і (3.30) отримуємо:

$$Y_{j1}\langle u_3'(x_1, 0) \rangle + Y_{j2}\langle D_2(x_1, 0) \rangle + Y_{j3}\langle B_2(x_1, 0) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \quad (3.37)$$

Із аналізу (3.32) і (3.34) випливає, що для розглянутого класу матеріалів $Y_{11} = 0$, Y_{1k} , Y_{j1} є чисто уявними, а всі інші Y_{jk} – дійсними. Тому, вводячи позначення $\eta_{1k} = -iY_{1k}$, $\eta_{j1} = -iY_{j1}$, $\eta_{jk} = Y_{jk}$ ($j, k = 2, 3$), рівняння (3.37) для $j = 1, 2$ можна записати у формі:

$$i\eta_{12}\langle D_2(x_1, 0) \rangle + i\eta_{13}\langle B_2(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (3.38)$$

$$i\eta_{21}\langle u_3'(x_1, 0) \rangle + \eta_{22}\langle D_2(x_1, 0) \rangle + \eta_{23}\langle B_2(x_1, 0) \rangle = F_2^+(x_1) - F_2^-(x_1). \quad (3.39)$$

Важливо, що всі ω_{ij} та η_{ij} в рівняннях (3.35), (3.36) і (3.38), (3.39) є дійсними.

3.3 Формулювання та розв'язання задач лінійного спряження

Для виконання граничної умови (3.7) з використанням (3.36) вимагаємо:

$$F_2^+(x_1) + \gamma_2 F_2^-(x_1) = 0 \text{ для } c < x_1 < a. \quad (3.40)$$

Рівняння (3.40) забезпечує виконання умов $\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0) = 0$ і $\omega_{22} E_1^{(1)}(x_1, 0) + \omega_{23} H_1^{(1)}(x_1, 0) = 0$ на (c, a) . Для виконання ж граничної умови (3.8) з використанням (3.36) і (3.37) одержуємо:

$$\operatorname{Re} [F_2^+(x_1) + \gamma_2 F_2^-(x_1)] = 0,$$

$$\operatorname{Re} [F_2^+(x_1) - F_2^-(x_1)] = 0 \text{ для } b < x_1 < d.$$

Останні рівняння можна записати у вигляді одного рівняння:

$$\operatorname{Re} F_2^\pm(x_1) = 0 \text{ для } b < x_1 < d. \quad (3.41)$$

Це рівняння забезпечує виконання умов:

$$\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0) = 0 \text{ і } \eta_{22} \langle D_2(x_1, 0) \rangle + \eta_{23} \langle B_2(x_1, 0) \rangle = 0 \text{ на } (b, d).$$

Для повного виконання всіх граничних умов (3.7) і (3.8) треба на основі (3.35) і (3.38) вимагати виконання ще таких рівностей:

$$F_1^+(x_1) + F_1^-(x_1) = 0 \text{ для } c < x_1 < a, \quad (3.42)$$

$$F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) = 0 \text{ для } b < x_1 < d.$$

Останнє рівняння разом зі сформульованими вище властивостями функції $F_1(z)$ забезпечує її аналітичність у всій комплексній площині за винятком інтервалу (c, a) інтерфейса. Умова на нескінченності для функції $F_1(z)$ витікає із (3.32) і має вигляд:

$$F_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0.5 (E_1^\infty + \omega_{13} H_1^\infty). \quad (3.43)$$

Рівняння (3.40), (3.41) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана.

Для розв'язання цієї задачі введемо таку заміну:

$$F_2(z) = i\Phi_2(z). \quad (3.44)$$

Тоді рівняння (3.40), (3.41) набувають вигляду:

$$\Phi_2^+(x_1) + \gamma_2 \Phi_2^-(x_1) = 0, \quad c < x_1 < a, \quad (3.45)$$

$$\operatorname{Im} \Phi_2^+(x_1) = 0, \quad b < x_1 < d. \quad (3.46)$$

На основі рівнянь (3.36) і (3.44) умову на нескінченності можна представити у вигляді:

$$\Phi_2(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{E}_2 + \tilde{H}_2 - i\tilde{\sigma}_{32}^{(2)}, \quad (3.47)$$

де

$$\tilde{E}_2 = \frac{\omega_{22}}{1 + \gamma_2} E_1^\infty, \quad \tilde{H}_2 = \frac{\omega_{23}}{1 + \gamma_2} H_1^\infty, \quad \tilde{\sigma}_{32}^{(2)} = \frac{\sigma_{32}^\infty}{1 + \gamma_2}.$$

Рівняння (3.45) і (3.46) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана, розв'язок якої наведено в розділі I. Тому наведемо тут лише основні складові отриманого розв'язку, а саме:

$$\Phi_2(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \quad (3.48)$$

де вирази для $P(z)$, $Q(z)$, $X_1(z)$ і $X_2(z)$ визначаються формулами (1.17)-(1.18).

Довільні коефіцієнти C_1 , C_2 , C_3 , D_1 , D_2 можна визначити аналогічно випадку, який розглянуто в розділі I, за формулами:

$$C_1 = -\tilde{\sigma}_{23}^{(2)} \cos \beta_0 - (\tilde{E}_2 + \tilde{H}_2) \sin \beta_0, \quad D_1 = (\tilde{E}_2 + \tilde{H}_2) \cos \beta_0 - \tilde{\sigma}_{23}^{(1)} \sin \beta_0, \quad (3.49)$$

$$C_2 = -C_1 \frac{a+b+c+d}{2} - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - D_1 \frac{a+c}{2}. \quad (3.50)$$

Довільний коефіцієнт C_3 визначається з умови:

$$\int_b^d [\Phi_2^+(x_1) - \Phi_2^-(x_1)] dx_1 = 0, \quad (3.51)$$

і виражається формулою (1.23), в якій коефіцієнти H_k і L_m мають вигляд (1.24).

Розв'язок рівняння (3.42) при умові на нескінченності (3.43) має вигляд [18]:

$$F_1(z) = (E_1^\infty + \omega_{13}H_1^\infty) \frac{z - (a+c)/2}{2\sqrt{(z-c)(z-a)}}. \quad (3.52)$$

3.4. Визначення механічних напружень, електричного та магнітного полів на різних ділянках межі поділу матеріалів

Підставляючи отриманий розв'язок (3.48) у представлення (3.44), (3.37) і беручи до уваги, що $\Phi_2^+(x_1) = \Phi_2^-(x_1) = \Phi_2(x_1)$ для $x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}$, приходимо до формули:

$$\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0) + i\omega_{22}E_1^{(1)}(x_1, 0) + i\omega_{23}H_1^{(1)}(x_1, 0) = i(1 + \gamma_2)\Phi_2(x_1) \quad (3.53)$$

для $x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}$.

Враховуючи властивості функції $F_1(x_1)$, з рівняння (3.35) отримуємо:

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) + \omega_{13}H_1^{(1)}(x_1, 0) = 2F_1(x_1) \text{ для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \quad (3.54)$$

де $F_1(x_1)$ визначається з формули (3.54).

Із одержаних рівнянь видно, що $\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0)$ визначається безпосередньо з рівняння (3.53), а $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ і $H_1^{(1)}(x_1, 0)$ – із системи, складеної з уявної частини (3.53) і рівняння (3.54).

У результаті формули для вказаних величин мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0) &= \operatorname{Re}\{i(1 + \gamma_2)\Phi_2(x_1)\}, \\ E_1^{(1)}(x_1, 0) &= [\omega_{13} \operatorname{Im}\{i(1 + \gamma_2)\Phi_2(x_1)\} - 2\omega_{23}F_1(x_1)] / \Delta_1, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) &= [-\operatorname{Im}\{i(1 + \gamma_2)\Phi_2(x_1)\} + 2\omega_{22}F_1(x_1)] / \Delta_1 \\ &\text{для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

де $\Delta_1 = \omega_{22}\omega_{13} - \omega_{23}$.

Аналогічним чином з рівнянь (3.38) та (3.39) одержуємо:

$$\begin{aligned}\langle u_3'(x_1, 0) \rangle &= \eta_{21}^{-1} \operatorname{Im} F_2^\Delta(x_1), \\ \langle D_2(x_1, 0) \rangle &= [\eta_{23} \operatorname{Im} F_1^\Delta(x_1) - \eta_{13} \operatorname{Re} F_2^\Delta(x_1)] / \Delta_2, \\ \langle B_2(x_1, 0) \rangle &= [-\eta_{22} \operatorname{Im} F_1^\Delta(x_1) + \eta_{12} \operatorname{Re} F_2^\Delta(x_1)] / \Delta_2\end{aligned}\quad (3.56)$$

де

$$F_k^\Delta(x_1) = F_k^+(x_1) - F_k^-(x_1) \quad (k=1,2), \quad \Delta_2 = \eta_{12}\eta_{23} - \eta_{22}\eta_{13},$$

причому функції $F_k^\Delta(x_1)$ обчислюються по-різному для проміжків $[c, a]$ і $[b, d]$.

Так, для проміжку $[c, a]$ на основі (3.40) і (3.42) маємо $F_2^-(x_1) = -\gamma_2^{-1} F_2^+(x_1)$ і $F_1^-(x_1) = -F_1^+(x_1)$, відповідно.

Тоді на проміжку $[c, a]$:

$$F_2^\Delta(x_1) = \frac{1 + \gamma_2}{\gamma_2} F_2^+(x_1), \quad F_1^\Delta(x_1) = 2F_1^+(x_1). \quad (3.57)$$

На основі результатів статті [56] маємо, що на проміжку $[b, d]$:

$$\begin{aligned}X_1^\pm(x_1) &= \frac{\pm e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}}, \\ X_2^\pm(x_1) &= \frac{e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Тоді на $[b, d]$:

$$\begin{aligned}F_1^\Delta(x_1) &= 0, \\ F_2^\Delta(x_1) &= i \left[\frac{P(x_1)(e^{2\chi_0(x_1)} + e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}} + \right. \\ &\quad \left. + Q(x_1) \frac{(e^{2\chi_0(x_1)} - e^{-2\chi_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \right],\end{aligned}\quad (3.59)$$

де

$$\chi_0(x_1) = 2\varepsilon \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-a)(x_1-b)}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(b-c)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-c)(x_1-b)}} \right).$$

Отже, механічні напруження, електричне та магнітне поля на частинах інтерфейсу між тріщинами можуть бути обчислені за формулами (3.55), а стрибки похідної від переміщень, електричного та магнітного зміщень – за формулами (3.56). При цьому функції $F_1^\Delta(x_1)$ і $F_2^\Delta(x_1)$ обчислюються за формулами (3.57) для проміжку $[c, a]$ і (3.59) – для проміжку $[b, d]$.

Розкриття тріщини на проміжку $x_1 \in [c, a]$ може бути визначено за формулою:

$$\langle u_3(x_1, 0) \rangle = \int_c^{x_1} \langle u_3'(t, 0) \rangle dt \text{ для } x_1 \in [c, a]. \quad (3.60)$$

3.5. Аналіз чисельних результатів

Матеріальні константи п'єзоелектромагнітного композитного матеріалу отримують з використанням такого правила змішування п'єзоелектричного матеріалу BaTiO_3 і п'єземагнітного матеріалу CoFeO_4 :

$$\Theta^C = \Theta^e V_f + \Theta^m (1 - V_f) \quad (3.61)$$

де Θ^C – матеріальні сталі п'єзоелектромагнітного матеріалу, а Θ^e та Θ^m позначають відповідні матеріальні константи п'єзоелектричного і п'єземагнітного матеріалів відповідно; V_f – об'ємна частка п'єзоелектричного матеріалу. Характеристики матеріалів BaTiO_3 і CoFeO_4 наведено в табл. 3.1.

Чисельний експеримент проводився для п'єзоелектромагнітного композитного біматеріалу із $V_f = 0,1$ для верхнього півпростору і $V_f = 0,7$ – для нижнього.

На рис. 3.2 показано залежність дотичного напруження $\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0)$ на проміжку $x_1 \in [a, b]$ від зміни магнітного поля на нескінченності для $\sigma_{23}^\infty = 10^7 \text{ Па}$, $H_1^\infty = 0$ (пунктирна лінія), $2 \cdot 10^4 \text{ А / м}$ (лінія I), $5 \cdot 10^4 \text{ А / м}$ (лінія

II), 10^5 A / м (лінія III). Видно, що магнітне поле більше впливає на характеристики напруження в околі електромагнітопровідної тріщини, а в околі електромагнітопроникної тріщини цей вплив майже невідчутний.

На рис. 3.3 наведено розкриття електромагнітопровідної тріщини $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ на проміжку $x_1 \in [c, a]$ в залежності від тих же значень магнітного поля, що і на рисунку 3.2.

Таблиця 3.1 – Матеріальні константи для BaTiO_3 і CoFe_2O_4 [60]

Константи матеріалів	BaTiO_3	CoFe_2O_4
$C_{11} \left[10^{10} \text{ H / м}^2 \right]$	16,6	28,6
$C_{13} \left[10^{10} \text{ H / м}^2 \right]$	7,8	17,0
$C_{33} \left[10^{10} \text{ H / м}^2 \right]$	16,2	26,95
$C_{44} \left[10^{10} \text{ H / м}^2 \right]$	4,3	4,53
$e_{15} \left[\text{ Кл / м}^2 \right]$	11,6	0
$e_{31} \left[\text{ Кл / м}^2 \right]$	-4,4	0
$e_{33} \left[\text{ Кл / м}^2 \right]$	18,6	0
$\alpha_{11} \left[10^{-10} \text{ кл / (В} \cdot \text{м)} \right]$	112	0,83
$\alpha_{33} \left[10^{-10} \text{ кл / (В} \cdot \text{м)} \right]$	126	0,93
$h_{15} \left[\text{ H / (А} \cdot \text{м)} \right]$	0	550
$h_{31} \left[\text{ H / (А} \cdot \text{м)} \right]$	0	580,3
$h_{33} \left[\text{ H / (А} \cdot \text{м)} \right]$	0	699,7
$\gamma_{11} \left[10^{-6} \text{ H} \cdot \text{с}^2 / (\text{ Кл}^2) \right]$	5	590
$\gamma_{33} \left[10^{-6} \text{ H} \cdot \text{с}^2 / (\text{ Кл}^2) \right]$	10	157

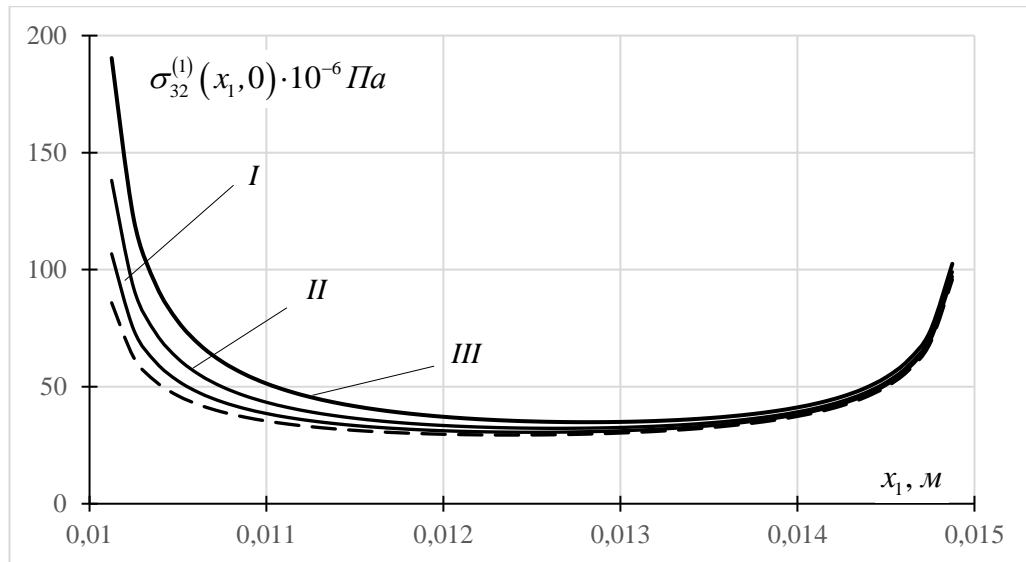


Рис. 3.2. Залежність дотичного напруження $\sigma_{32}^{(1)}(x_1, 0)$ на проміжку $x_1 \in [a, b]$ від зміни магнітного поля на нескінченності

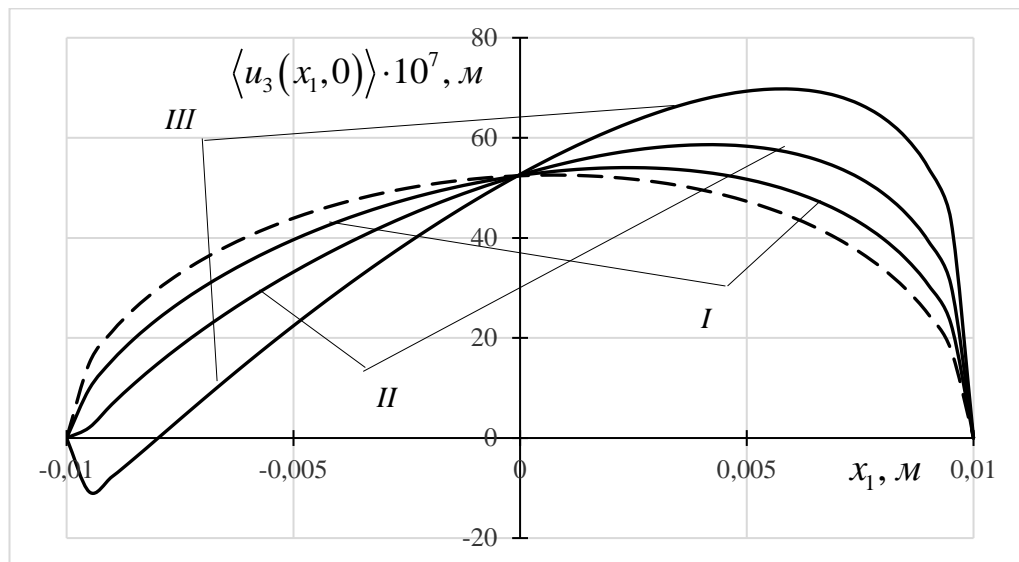


Рис. 3.3. Розкриття електромагнітопровідної тріщини $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ на проміжку $x_1 \in [c, a]$

З цих результатів випливає, що магнітний потік призводить до досить суттєвих змін у формі розкриття тріщини і навіть до взаємоперетину берегів в околі однієї з вершин. Але вказаний взаємоперетин берегів не означає фізично нереальне взаємопроникнення матеріалів, оскільки переміщення $u_3^{(1)}(x_1, 0)$ і $u_3^{(2)}(x_1, 0)$ зосереджені в паралельних площинах, які перпендикулярні площині (x_1, x_2) .

3.6 Висновки до розділу III

Розглянуто дві тріщини між п'єзоелектромагнітними півпросторами для випадку антиплоскої деформації. Вважається, що одна з тріщин є електромагнітопровідною, а інша електромагнітопроникною. На нескінченності прикладені рівномірно розподілене антиплоске зсувне механічне навантаження та плоскі електричне і магнітне поля. З використанням методу комплексних потенціалів проблему зведено до розв'язання комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана та задачі Гільберта для кусково-аналітичних функцій. Виписано точні аналітичні розв'язки цих задач, і на їхній основі отримано аналітичні вирази для напружень, електричного та магнітного полів на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також розкриття тріщин та стрибки електричного і магнітного зміщень при переході через тріщини.

Чисельну ілюстрацію отриманих результатів проведено для різних довжин тріщин, відстаней між ними та різних значень механічного, електричного та магнітного навантажень. Деякі з цих результатів представлено у вигляді графіків. З них витікає, що зовнішній магнітний потік суттєво впливає на механічні поля в околі електромагнітопровідної тріщини. Це проявляється в суттєвій зміні стрибків переміщень для цієї тріщини (рис. 3.3), а також в значному збільшенні напружень біля електромагнітопровідної тріщини (рис. 3.2). В той же час, вплив магнітного потоку на розкриття електромагнітопроникної тріщини, а також на напруження в її околі є незначним.

РОЗДІЛ IV. СИСТЕМА КОЛІНЕАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНО ТА МАГНІТНО ПРОНИКНИХ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

4.1 Основні формули для п'єзоелектромагнітного матеріалу для плоского випадку

Визначальні співвідношення для п'єзоелектромагнітного матеріалу, рівняння рівноваги і формули для визначення деформацій, електричного та магнітного полів описуються рівняннями (3.1)-(3.3).

Для найважливішого для практики трансверсально-ізотропного матеріалу в умовах плоскої деформації в площині (x_1, x_3) рівняння (3.1) можна подати у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & h_{31} \\ 0 & h_{33} \\ h_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{15} \\ h_{31} & h_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

У формулах (4.1-4.3) використано двохіндексний запис визначальних співвідношень, аналогічний застосованому в [15] для п'єзоелектричного матеріалу.

Введемо вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \psi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \quad (4.4)$$

Оскільки всі поля не залежать від координати x_2 , то розв'язок рівнянь (3.1-3.3) згідно з методом, запропонованим у [96] для анізотропного матеріалу, може бути представлено у вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{f}(z), \quad (4.5)$$

де $z = x_1 + p x_3$, вектор $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$ визначають із рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}] \mathbf{a} = 0, \quad (4.6)$$

а елементи матриць \mathbf{Q} , \mathbf{R} та \mathbf{T} розмірності 5×5 визначають як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} & h_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} & h_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} & h_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{111} & h_{121} & h_{131} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} & h_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} & h_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} & h_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} & -d_{12} \\ h_{112} & h_{122} & h_{132} & -d_{12} & -\mu_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} & h_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} & h_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} & h_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} & -d_{22} \\ h_{212} & h_{222} & h_{232} & -d_{22} & -\mu_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Ненульовий розв'язок системи (4.6) існує, якщо p являє собою корінь рівняння:

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}] = 0. \quad (4.8)$$

Оскільки рівняння (4.8) не має дійсних коренів [96], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через p_α , а відповідні власні вектори системи (4.6) через \mathbf{a}_α (нижній індекс α тут і далі набуває значень від 1 до 5). Загальний розв'язок рівнянь (3.1-3.3) може бути представлений у вигляді [100]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (4.9)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ – матриця, складена з власних векторів системи (4.6),

$\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)]^T$ – довільна аналітична вектор-функція, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$, а риска означає комплексно-спряжену величину.

Із використанням рівнянь (3.1) вектор \mathbf{t} , введений у формі (4.4), може бути представлений у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (4.10)$$

де матриця \mathbf{B} розмірності 5×5 визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R}^T + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha \text{ (підсумування за } \alpha \text{ не проводиться),}$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5(z_5)}{dz_5} \right]^T.$$

Припускаючи тепер, що розглядається плоска задача для біматеріального композиту з різнорідними складовими для $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, і проводячи аналіз, аналогічний викладеному у підрозділі 3.2, одержуємо такі представлення:

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (4.12)$$

де

$$\mathbf{W}(z) = [W_1(z), W_3(z), W_4(z), W_5(z)]^T,$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{B}}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{B}^{(1)},$$

$$\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0), \quad \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0),$$

верхні індекси (1) і (2) відповідають верхньому і нижньому матеріалам.

Вектори \mathbf{V} і \mathbf{t} у випадку плоскої деформації розглядаються без других компонент, а біматеріальна матриця \mathbf{G} має вигляд:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} & ig_{35} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} & ig_{45} \\ g_{51} & ig_{53} & ig_{54} & ig_{55} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

причому всі g_{ij} – дійсні.

4.2 Електрично і магнітно проникні тріщини

Припустимо тепер, що тріщини електрично і магнітно проникні, тобто

$$\langle \varphi \rangle = 0, \langle \psi \rangle = 0 \text{ для } x_1 \in (-\infty, +\infty), x_3 = 0.$$

Це означає, що:

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi'(x_1, 0) \rangle &= \langle V_4'(x_1) \rangle = W_4^+(x_1) - W_4^-(x_1) = 0, \\ \langle \psi'(x_1, 0) \rangle &= \langle V_5'(x_1) \rangle = W_5^+(x_1) - W_5^-(x_1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } x_1 \in (-\infty; \infty).$$

Отже, функції $W_4(z)$ і $W_5(z)$ аналітичні у всій площині:

$$W_4(z) = W_4^0 = \text{const}, W_5(z) = W_5^0 = \text{const}. \quad (4.14)$$

Оскільки для $x_1 \in L''$

$$L'' = (-\infty, \infty) \setminus L', L' = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$$

і справедлива рівність:

$$\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1),$$

то із співвідношення (4.11) для $x_1 \in L''$ отримуємо:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}}) \mathbf{W}(x_1). \quad (4.15)$$

Це означає, що

$$\mathbf{t}^\infty = \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow \infty} = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}}) \mathbf{W}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty}, \quad (4.16)$$

або

$$\mathbf{W}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{t}^\infty. \quad (4.17)$$

Отже,

$$W_4^0 = \left\{ (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{t}^\infty \right\}_4, W_5^0 = \left\{ (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{t}^\infty \right\}_5.$$

Враховуючи властивості матриці \mathbf{G} із (4.13), останні формули можна записати так:

$$W_4^0 = R_{21} \sigma^\infty + R_{22} D^\infty + R_{23} B^\infty, W_5^0 = R_{31} \sigma^\infty + R_{32} D^\infty + R_{33} B^\infty, \quad (4.18)$$

де R_{ij} є елементами матриці $\mathbf{R} = -i\mathbf{S}^{-1}$, причому

$$S = \begin{bmatrix} g_{33} & 2g_{34} & 2g_{35} \\ g_{43} & 2g_{44} & 2g_{45} \\ g_{53} & 2g_{54} & 2g_{55} \end{bmatrix}.$$

З урахуванням записаних виразів для $W_4(z)$ і $W_5(z)$, представлення (4.12) у розгорнутому вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) &= ig_{11}(W_1^+ + W_1^-) + g_{13}(W_3^+ - W_3^-), \\ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= g_{31}(W_1^+ - W_1^-) + ig_{33}(W_3^+ + W_3^-) + \sigma_0, \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) &= g_{41}(W_1^+ - W_1^-) + ig_{43}(W_3^+ + W_3^-) + d_0, \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) &= g_{51}(W_1^+ - W_1^-) + ig_{53}(W_3^+ + W_3^-) + b_0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 2i(g_{34}W_4^0 + g_{35}W_5^0), \\ d_0 &= 2i(g_{44}W_4^0 + g_{45}W_5^0), \\ b_0 &= 2i(g_{54}W_4^0 + g_{55}W_5^0). \end{aligned}$$

Із другого співвідношення (4.19) отримуємо:

$$W_3^+ + W_3^- = \frac{1}{ig_{33}} \left\{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - g_{31} \langle u_1'(x_1) \rangle - \sigma_0 \right\}. \quad (4.20)$$

При цьому враховано, що

$$W_1^+ - W_1^- = \langle u_1'(x_1) \rangle.$$

Підставляючи (4.20) у третє та четверте співвідношення (4.19), отримуємо вирази для електричної та магнітної індукцій у вигляді:

$$\begin{aligned} D_3^{(1)}(x_1, 0) &= \left(g_{41} - \frac{g_{43}g_{31}}{g_{33}} \right) \langle u_1'(x_1) \rangle + \\ &+ \frac{g_{43}}{g_{33}} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + d_0 - \frac{g_{43}}{g_{33}} \sigma_0, \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) &= \left(g_{51} - \frac{g_{53}g_{31}}{g_{33}} \right) \langle u_1'(x_1) \rangle + \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$+\frac{g_{53}}{g_{33}}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)+b_0-\frac{g_{53}}{g_{33}}\sigma_0. \quad (4.22)$$

Комбінуючи перше та друге співвідношення (4.19), а також окремі компоненти співвідношення (4.11), отримуємо:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)+im_j\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)=\mathcal{G}_j(F_j^+(x_1)+\gamma_j F_j^-(x_1))+\sigma_0, \quad (4.23)$$

$$\langle u'_1(x_1) \rangle + is_j \langle u'_3(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (4.24)$$

де

$$F_j(z) = W_1(z) + is_j W_3(z), \quad (j=1,3),$$

$$m_{1,3} = \mp \sqrt{-\frac{g_{31}g_{33}}{g_{11}g_{13}}}, \quad \gamma_j = -\frac{g_{31} + m_j g_{11}}{\mathcal{G}_j},$$

$$\mathcal{G}_j = g_{31} - m_j g_{11}, \quad s_j = \frac{g_{33} + m_j g_{13}}{\mathcal{G}_j}, \quad j=1,3. \quad (4.25)$$

Представлення (4.23), (4.24) справедливі для будь-якої точки електрично та магнітно проникного інтерфейсу, незалежно від інших умов, які на ньому задані. Розглянемо тепер конкретні умови на інтерфейсі.

4.3 Система колінеарних тріщин на межі поділу матеріалів

Будемо вважати, що на межі поділу матеріалів $x_3=0$ виникли n електро- та магніто-проникних тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$, які можуть мати довільну довжину і розташування (рис. 4.1). При цьому матеріали мають клас симетрії бтт і попередньо поляризовані в напрямку осі x_3 . Вважається, що береги тріщин вільні від механічних напружень.

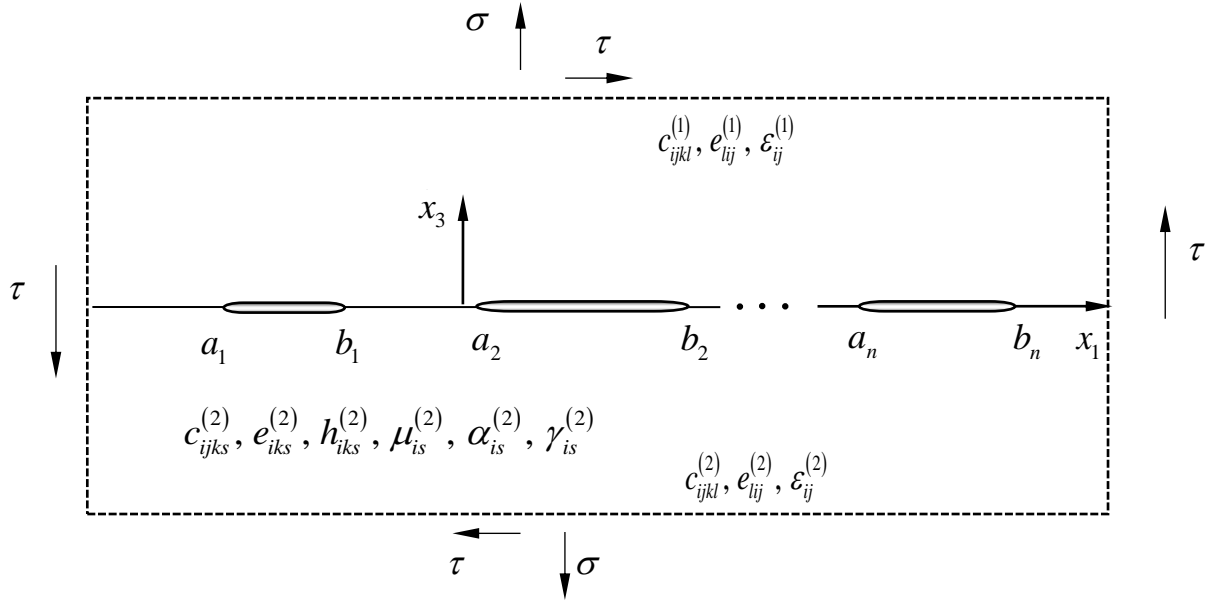


Рис. 4.1 Скінченна множина тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$ на межі $x_3 = 0$ між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами

Тоді умови на межі поділу матеріалів для поставленої задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) &= 0, \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) &= H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L', \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \quad \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0),$$

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0),$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad B_3^{(1)}(x_1, 0) = B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L'', \quad (4.27)$$

де $m=1,2$, $i=1,3$; $L' = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ сукупність областей тріщин і

$$L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'.$$

Введемо заміну:

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \frac{\sigma_0}{\vartheta_j(1 + \gamma_j)}. \quad (4.28)$$

Тоді представлення (4.23), (4.24) набувають вигляду:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \mathcal{G}_j \left(\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) \right), \quad (4.29)$$

$$\langle u'_1(x_1) \rangle + is_j \langle u'_3(x_1) \rangle = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1), \quad (4.30)$$

причому

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (4.31)$$

де $\tilde{\sigma}_j = \sigma^\infty / r_j$, $\tilde{\tau}_j = -m_j \tau^\infty / r_j$, $r_j = \mathcal{G}_j (1 + \gamma_j)$.

Використовуючи представлення (4.29) при $j=1$, з граничних умов (4.26) одержуємо

$$\Phi_1^+(x_1) + \gamma_1 \Phi_1^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in L', \quad (4.32)$$

На основі [18] розв'язок задачі лінійного спряження (4.32) можна подати у вигляді:

$$\Phi_1(z) = X(z) P_n(z), \quad (4.33)$$

де

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon_1} \cdot (z - b_k)^{-\frac{1}{2} - i\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}, \quad (4.34)$$

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n. \quad (4.35)$$

Коефіцієнти C_k ($k=0,1,\dots,n$) визначаються з умови (4.31) при $j=1$ та умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин. В результаті одержуємо:

$$C_0 = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1, \quad (4.36)$$

$$\int_{a_m}^{b_m} P_n(t) X(t) dt = 0, \quad m=1,2,\dots,n.$$

Останнє співвідношення призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{a}_{m\alpha} C_\alpha = \tilde{b}_m, \quad m=1,2,\dots,n. \quad (4.37)$$

У цій системі:

$$\hat{a}_{m\alpha} = I_{m,n-\alpha}, \quad \tilde{b}_m = -I_{mn} C_0; \quad m, \alpha=1,2,\dots,n, \quad (4.38)$$

$$I_{ms} = \int_{a_m}^{b_m} \frac{t^s}{\prod_{k=1}^n (t-a_k)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_1} \cdot (t-b_k)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_1}} dt, \quad m, s = 1, 2, \dots, n.$$

Точний аналітичний розв'язок систем (4.37) можна знайти для будь-якого значення n методом Гауса.

Із використанням отриманого розв'язку напруження поза тріщинами може бути визначено за формулою:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \mathcal{G}_1(1 + \gamma_1) \Phi_1(x_1), \quad (4.39)$$

а стрибки переміщень на тріщині – в результаті інтегрування формули:

$$\langle u'_1(x_1) \rangle + is_1 \langle u'_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \Phi_j^+(x_1). \quad (4.40)$$

Електричне та магнітне поля можуть бути визначені за формулами (4.21), (4.22).

Особливий інтерес представляють асимптотичні вирази для напружень та стрибків переміщень в околі вершин тріщин. На основі формул (4.39) і (4.40) ці вирази в околі правої вершини k -ї тріщини можна записати у вигляді:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = \bar{R}_k (x_1 - b_k)^{-0,5+i\varepsilon_1}, \quad (4.41)$$

де

$$\bar{R}_k = (1 + \gamma_1) \mathcal{G}_1 \bar{P}_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0,5-i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0,5-i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0,5+i\varepsilon_1},$$

$$\langle u_1(x_1) \rangle + is_1 \langle u_3(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = T_k (b_k - x_1)^{0,5-i\varepsilon_1}, \quad (4.42)$$

де

$$T_k = \frac{i(1 + \gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1}(0,5 - i\varepsilon_1)} P_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0,5+i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0,5+i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0,5-i\varepsilon_1}.$$

Беручи до уваги, що $\langle \varphi(x_1) \rangle = 0$ і $\langle \psi(x_1) \rangle = 0$ для $-\infty < x_1 < \infty$, ШЗЕ біля вершини тріщини b_k може бути визначена за формулою:

$$G_{b_k} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_k}^{b_k + \Delta l} \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle \right] dx_1. \quad (4.43)$$

Використаємо далі тотожність:

$$\begin{aligned} & \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle = \\ & = -m_1^{-1} \operatorname{Im} \left\{ \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \right] \times \left[\langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle + is_1 \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Підставляючи формули (4.41), (4.42) в (4.44), а потім в (4.43) і проводячи інтегрування, отримуємо:

$$G_{b_k} = -\frac{\pi}{4m_1} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - 2i\varepsilon_1}{ch(\pi\varepsilon_1)} \bar{R}_k S_k \right). \quad (4.45)$$

Аналогічним чином знайдено ШЗЕ і біля лівих вершин тріщин.

4.4 Аналіз чисельних результатів

Для числової ілюстрації розглянемо біматеріал, що складається з композиту $\text{BaTiO}_3\text{--CoFe}_2\text{O}_4$ з об'ємними частками BaTiO_3 $V_f = 0,5$ (верхній матеріал) і $V_f = 0,1$ (нижній). Характеристики цих матеріалів наведено в [92].

Результати для випадку трьох тріщин однакової довжини 20 мм, які мають координати лівих вершин $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 40$ мм (лінії I), $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (II), $a_1 = -32$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (III) показано на рис. 4.2. Зовнішнє механічне навантаження було обрано таким: $\sigma^\infty = 10^7$ Па, $\tau^\infty = 0$, а значення електричної та магнітної індукцій: $D_3^\infty = 0$, $B_3^\infty = 0$. З рис. 4.2 видно, що зближення тріщин призводить до суттєвого збільшення розкриття середньої тріщини, а також збільшення значень розкриття для тієї тріщини, що стає ближче до середньої.

У табл. 4.1 показано зміни швидкості звільнення енергії біля лівої $G_{a_2}(H/m)$ та правої $G_{b_2}(H/m)$ вершин середньої тріщини $a_2 = -10$ мм,

$b_2 = 10 \text{ мм}$ для фіксованого положення лівої тріщини $a_1 = -32 \text{ мм}$, $b_1 = -12 \text{ мм}$ та зміни положення правої тріщини.

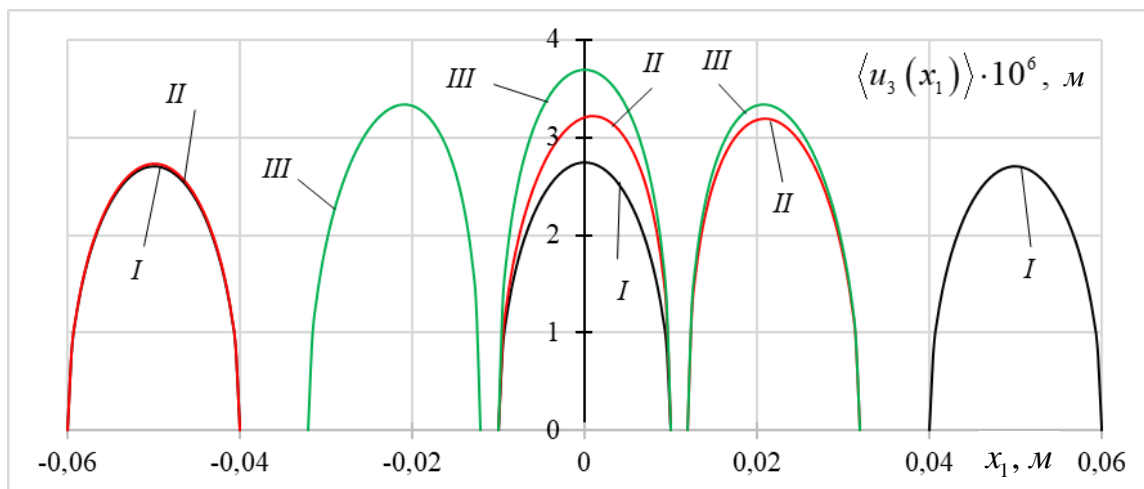


Рис. 4.2. Зміна розкриття тріщин при зміні відстаней між ними

Таблиця 4.1 – Зміни ШЗЕ [$H / \text{м}$] біля правої та лівої вершин середньої тріщини

Проміжок $[a_3, b_3], \text{ мм}$	[80,100]	[40,60]	[20,40]	[12,32]	[11,31]	[10,5, 30,5]
G_{b_2}	26,434	27,447	31,973	56,666	81,753	124,141
G_{a_2}	46,569	47,598	50,453	56,666	59,350	61,803

Із результатів, наведених в таблиці, видно, що зближення тріщин приводить до суттєвого росту ШЗЕ, особливо для найближче розташованих вершин.

На рис. 4.3 побудовано графіки залежності магнітної індукції $B_3^{(1)}(x_1, 0)$ вздовж лівої тріщини від магнітної індукції на нескінченності: $B_3^\infty = 0$ (лінія I), 10^{-4} Тл (лінія II), $5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ (лінія III), $-5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ (лінія IV) при $\sigma^\infty = 10^7 \text{ Па}$, $\tau^\infty = 0$, $D_3^\infty = 0$, $a_1 = -200 \text{ мм}$, $b_1 = -180 \text{ мм}$, $a_2 = -10 \text{ мм}$, $b_2 = 10 \text{ мм}$, $a_3 = 180 \text{ мм}$, $b_3 = 200 \text{ мм}$.

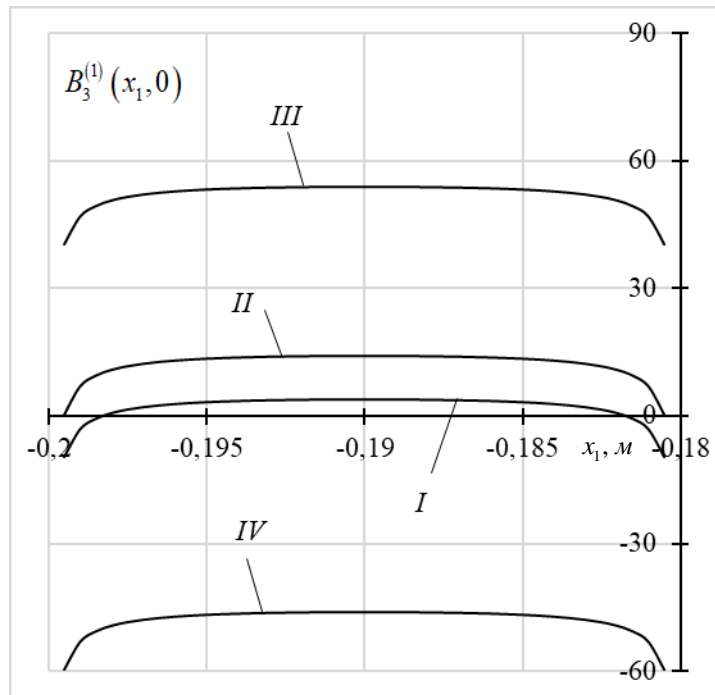


Рис. 4.3. Залежності магнітної індукції вздовж лівої тріщини від магнітної індукції на нескінченності

Видно, що магнітна індукція на тріщині близька до нуля при $B_3^\infty = 0$. В той же час, її значення суттєво залежать від ненульових величин B_3^∞ .

На рис. 4.4 побудовано графіки зміни як нормального напруження $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ на проміжках між першою-другою та другою-третьою тріщинами, так і нормоване розкриття середньої тріщини $\langle u_3(x_1) \rangle$. Положення середньої тріщини не змінювалось ($a_2 = -5$ мм, $b_2 = 5$ мм), розміри інших двох тріщин та відстані між середньою та першою і третьою варіювались. Значення електричної та магнітної індукції $D_3^\infty = 0$, $B_3^\infty = 0$, зовнішнє механічне навантаження $\sigma^\infty = 10^7$ Па, $\tau^\infty = 0$ (суцільні лінії), $\tau^\infty = 5 \cdot \sigma^\infty$ (пунктирні лінії). Лінії I, II відповідають $a_1 = -30$ мм, $b_1 = -10$ мм, $a_3 = 10$ мм, $b_3 = 20$ мм, а лінії III, IV відповідають $a_1 = -35$ мм, $b_1 = -15$ мм, $a_3 = 15$ мм, $b_3 = 20$ мм.

Із результатів рис. 4.4 витікає, що і нормальне напруження, і стрибок нормальних переміщень (розкриття тріщини) несуттєво залежать від зовнішнього дотичного напруження на нескінченності. На деяких ділянках

відмінність напружень, отриманих для різних значень дотичного напруження на нескінченності, навіть важко помітити.

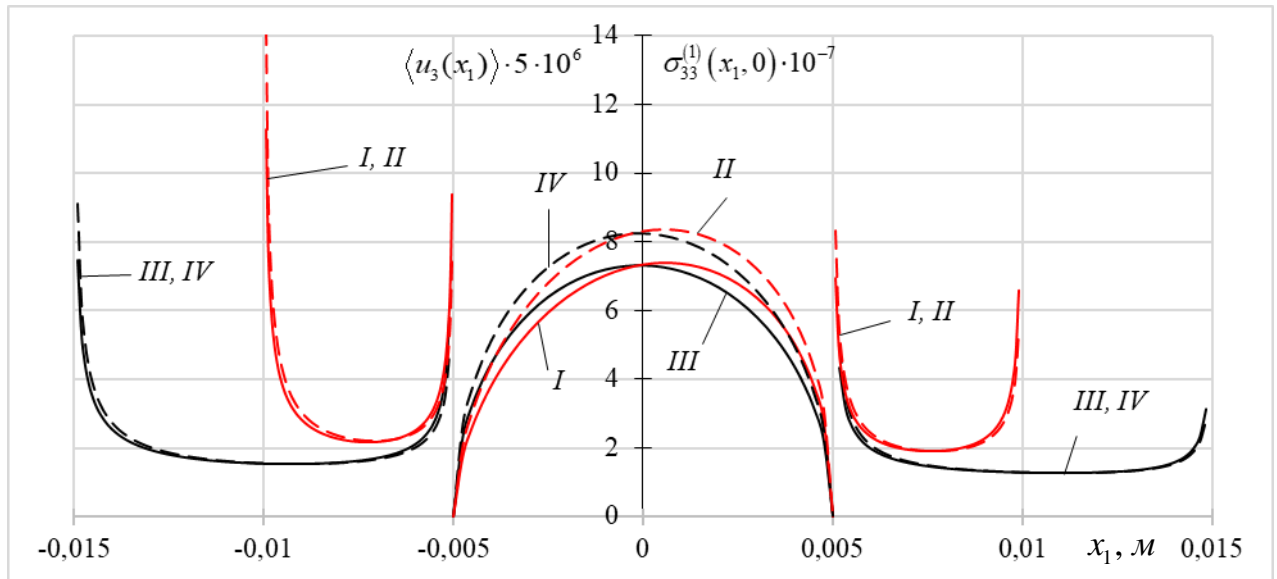


Рис. 4.4 Залежність нормального напруження $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ між тріщинами і розкриття середньої тріщини $\langle u_3(x_1) \rangle$ від різних значень τ^∞

4.5 Висновки до розділу IV

Проаналізовано плоску деформацію біматеріального простору, що складається з двох п'єзоелектромагнітних півпросторів зі скінченним набором електрично і магнітно проникних тріщин уздовж межі поділу матеріалів.

Із використанням представлень електромагнітомеханічних величин через кусково-аналітичну вектор-функцію сформульовано задачу лінійного спряження, яку розв'язано аналітично. У замкненому вигляді визначено всі потрібні механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів. Визначено асимптотичні представлення цих величин в околі вершин тріщин, а також швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин.

Проведено чисельну ілюстрацію одержаних аналітичних розв'язків. Встановлено, що:

- при зближенні тріщин спостерігається ріст як швидкості звільнення енергії, так і розкриття тріщини, причому ріст першого фактору є набагато інтенсивнішим, ніж другого;

- вплив зовнішнього дотичного напруження, прикладеного на нескінченності, на нормальне напруження і стрибок нормальних переміщень (розкриття тріщини) є незначним.

РОЗДІЛ V. СИСТЕМА КОЛІНЕАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНО ПРОВІДНИХ ЗАРЯДЖЕНИХ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН В МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

5.1 Формулювання проблеми

Розглянемо систему із n тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$, які мають довільну довжину та розташування на межі поділу між двома напівнескінченними магнітоелектропружними просторами $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$ (рис. 5.1). Тут $c_{ijks}^{(m)}$, $e_{iks}^{(m)}$, $h_{iks}^{(m)}$, $\mu_{is}^{(m)}$ – пружні, п'єзоелектричні, п'єзوماгнітні та електромагнітні константи відповідно, $\alpha_{is}^{(m)}$, $\gamma_{is}^{(m)}$ – діелектричні та магнітні проникності; індекси i , j , k , s змінюються у діапазоні $\{1, 2, 3\}$, а повторювані індекси означають підсумовування; $m=1$ для верхнього і $m=2$ для нижнього матеріалів, обидва матеріали мають клас симетрії $6mm$ з напрямком поляризації x_3 .

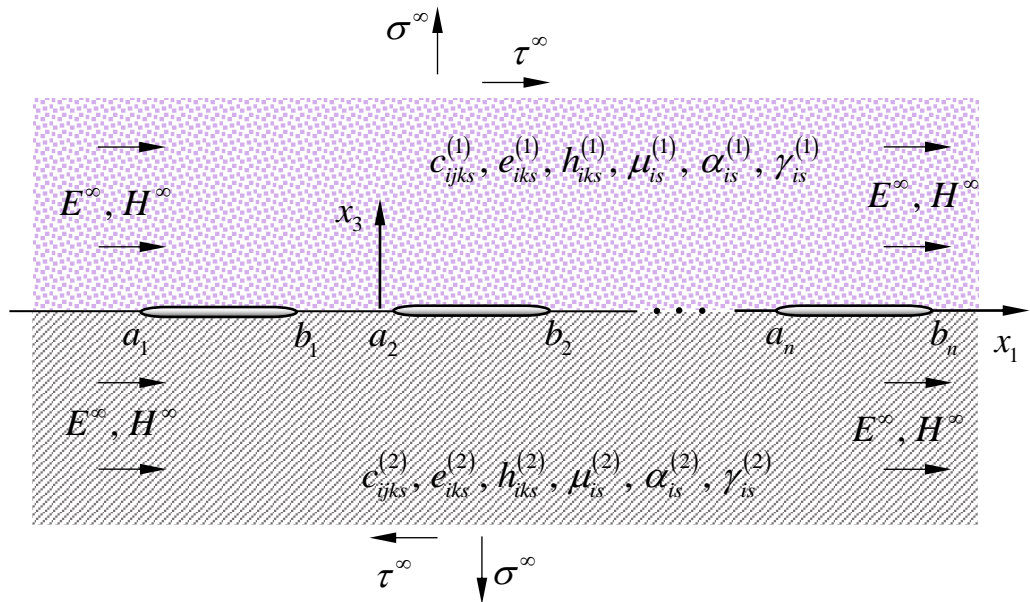


Рис. 5.1. Скінченний набір тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$ на інтерфейсі $x_3 = 0$ між двома магнітоелектропружними матеріалами

Позначимо через $L' = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ сукупність областей тріщин і

$$L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'.$$

Навантаження на нескінченності визначається як

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(m)} &= \sigma^\infty, \quad \sigma_{13}^{(m)} = \tau^\infty, \quad E_1^{(m)} = E^\infty, \quad H_1^{(m)} = H^\infty, \\ \sigma_{11}^{(m)} &= \sigma_{xxm}^\infty, \quad D_1^{(m)} = D_{xm}^\infty, \quad B_1^{(m)} = B_{xm}^\infty, \end{aligned} \quad (5.1)$$

($m=1$ позначає верхню область і $m=2$ – нижню).

Вважається, що $\sigma_{11}^{(m)}$, $D_1^{(m)}$ та $B_1^{(m)}$ – це навантаження, що створюють напруження та переміщення, які задовольняють умовам неперервності у віддаленій частині межі поділу матеріалів. Оскільки навантаження не залежить від координати x_2 , то має місце задача плоскої деформації в площині (x_1, x_3) . Вважаємо, що тріщини повністю відкриті, а їхні береги вільні від заданих механічних навантажень, електричних і магнітних полів:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) &= 0, \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) &= H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

де $m=1, 2$.

Крім того, вважається, що на k -й тріщині задано електричний заряд D_{0k} ($k=1, 2, \dots, n$). В окремому випадку заземленого електрода відповідне значення D_{0k} має бути прийнято рівним нулю.

Додатково до (5.2), решта умов на інтерфейсі набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) &= \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) &= H_1^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L'', \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} D_3^{(1)}(x_1, 0) &= D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad u_i'^{(1)}(x_1, 0) = u_i'^{(2)}(x_1, 0), \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) &= B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L'', \end{aligned} \quad (5.4)$$

де $i=1, 3$.

5.2 Побудова та розв'язання задачі лінійного спряження

Вводячи вектори \mathbf{L} та \mathbf{P} формулами

$$\mathbf{L} = [u'_1, u'_2, u'_3, D_3, B_3]^T, \mathbf{P} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1, H_1]^T, \quad (5.5)$$

на основі (4.9) та (4.10) аналогічно [54] будемо вирази:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (5.7)$$

де матриці \mathbf{M} та \mathbf{N} утворено з елементів матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} , які, у свою чергу, визначено формулами (4.9), (4.10):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ b_{4j} \\ b_{5j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ -a_{4j} \\ -a_{5j} \end{bmatrix}.$$

У результаті аналізу аналогічно до попереднього розділу отримуємо:

$$\langle \mathbf{L}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (5.9)$$

де

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)}(\bar{\mathbf{N}}^{(2)})^{-1}\mathbf{N}^{(1)}.$$

Оскільки ми розглядаємо задачу плоскої деформації, то компонента W_2 може бути вилучена із розгляду. З цієї причини в подальшому аналізі другі рядки та стовпці в розглянутих матрицях враховуватися не будуть.

Враховуючи, що $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$ для $x_1 \in L$, з рівнянь (5.9) та (5.1) для $x_1 \rightarrow \infty$ маємо:

$$\mathbf{P}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})\mathbf{W}^\infty, \quad (5.10)$$

де

$$\mathbf{P}^\infty = [\tau^\infty, \sigma^\infty, e^\infty, h^\infty] \text{ та } \mathbf{W}^\infty = \mathbf{W}(z) \text{ для } z \rightarrow \infty.$$

Із рівняння (5.10) отримуємо:

$$\mathbf{W}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})^{-1} \mathbf{P}^\infty.$$

Розглянемо довільну однорядкову матрицю $\mathbf{R} = [R_1, R_3, R_4, R_5]$.

Використовуючи (5.9), маємо:

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1). \quad (5.11)$$

Далі введемо функцію

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z), \quad (5.12)$$

де $\mathbf{T} = [T_1, T_3, T_4, T_5] = \mathbf{R}\mathbf{S}$.

Із урахуванням рівності $\mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} = -\gamma\mathbf{R}\mathbf{S}$ рівняння (5.11) може бути записано у вигляді:

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (5.13)$$

де γ та \mathbf{R}^T – власні значення та власні вектори системи:

$$(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T)\mathbf{R}^T = 0. \quad (5.14)$$

Для найбільш важливого п'єзоелектричного/п'єзوماгнітного матеріалу $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ матриця \mathbf{S} має таку структуру:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} is_{11} & s_{13} & is_{14} & is_{15} \\ s_{31} & is_{33} & s_{34} & s_{35} \\ is_{41} & s_{43} & is_{44} & is_{45} \\ is_{51} & s_{53} & is_{54} & is_{55} \end{bmatrix},$$

де всі s_{jk} - дійсні та $s_{31} = -s_{13}$, $s_{14} = -s_{41}$, $s_{43} = s_{34}$, $s_{51} = -s_{15}$, $s_{45} = s_{54}$, $s_{35} = s_{53}$.

У цьому випадку корені рівняння

$$\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$$

можуть бути представлені у вигляді:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad \gamma_5 = 1, \quad (5.15)$$

де

$$\delta^2 = \frac{-s_{51}t_1 + s_{53}t_3 - s_{54}t_5 + s_{55}t_7}{s_{51}t_2 + s_{54}t_4 - s_{55}t_6},$$

$$t_1 = s_{13}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{43} - s_{15}s_{34}s_{43} - s_{13}s_{35}s_{44}, \quad t_2 = -s_{15}s_{33}s_{44} + s_{14}s_{33}s_{45},$$

$$t_3 = s_{11}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{44} - s_{15}s_{34}s_{41} - s_{14}s_{31}s_{45} - s_{35}s_{44}s_{11},$$

$$t_4 = -s_{11}s_{33}s_{45} - s_{15}s_{33}s_{41}, \quad t_5 = s_{13}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{43} - s_{11}s_{35}s_{43} - s_{45}s_{13}s_{31},$$

$$t_6 = -s_{11}s_{33}s_{44} + s_{41}s_{33}s_{14}, \quad t_7 = s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}. \quad (5.16)$$

Власні вектори $\mathbf{R}_j^T = [R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}, R_{j5}]^T$, пов'язані з власними значеннями $\gamma_j (j=1,3,4,5)$, можуть бути визначені з системи (5.14). Аналіз показує, що для $\delta^2 > 0$ матриця \mathbf{R} , складена з власних векторів \mathbf{R}_j^T , має таку структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} & ir_{15} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} & ir_{35} \\ ir_{41} & 0 & i & 0 \\ ir_{51} & 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

де всі r_{jk} – дійсні та $r_{41} = -\frac{s_{43}}{s_{13}}$, $r_{51} = -\frac{s_{53}}{s_{13}}$, r_{11} , r_{14} , r_{15} та r_{31} , r_{34} , r_{35}

визначаються з системи (5.14) для γ_1 та γ_3 відповідно.

Числовий аналіз показує, що для п'єзоелектричного/п'єзوماгнітного матеріалу $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ справедлива нерівність $\delta^2 > 0$. Компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S}, \quad (5.18)$$

складені з однорядкових матриць $\mathbf{T}_j = [T_{j1}, T_{j3}, T_{j4}, T_{j5}] = \mathbf{R}_j\mathbf{S} \quad (j=1,3,4,5)$

для $\delta^2 > 0$, можуть бути представлені в формі:

$$T_{j1} = t_{j1}, \quad T_{j3} = it_{j3}, \quad T_{j4} = t_{j4}, \quad T_{j5} = t_{j5},$$

де всі $t_{jk} \quad (j,k=1,3,4,5)$ дійсні та $t_{43} = 0$, $t_{53} = 0$.

Використовуючи вирази (5.12) та (5.13), отримуємо:

$$\mathbf{R}_j\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (5.19)$$

де

$$F_j(z) = \mathbf{T}_j \mathbf{W}(z). \quad (5.20)$$

З останнього представлення слідує, що функції $F_j(z)$ мають такі ж властивості як і $\mathbf{W}(z)$. Зокрема, граничні умови (5.3), (5.4) показують, що вони аналітичні в усій площині окрім відрізків $x_1 \in L''$.

Отже, з (5.20) маємо:

$$F_j(z) = t_{j1}W_1(z) + it_{j3}W_3(z) + t_{j4}W_4(z) + t_{j5}W_5(z).$$

Враховуючи представлення (5.8), з останнього рівняння отримуємо:

$$t_{j1}\langle u'_1(x_1) \rangle + it_{j3}\langle u'_3(x_1) \rangle + t_{j4}\langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5}\langle B_3(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \quad (5.21)$$

Розкриваючи далі ліву частину (5.19) та враховуючи структуру матриці \mathbf{R} , отримуємо:

$$\begin{aligned} ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j5}H_1^{(1)}(x_1, 0) = \\ = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \end{aligned} \quad (5.22)$$

де r_{ij} та t_{ij} ($i, j = 1, 3, 4, 5$) – дійсні коефіцієнти матриць (5.17), (5.18), а γ_j – константи, що визначаються фізичними характеристиками матеріалів, $r_{13} = r_{33} = r_{44} = r_{55} = 1$ та $r_{43} = r_{45} = r_{53} = r_{54} = 0$.

Використовуючи граничні умови на нескінченності (5.1), а також (5.22), можна записати:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (5.23)$$

де

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}\sigma^\infty}{\mathcal{G}_j}, \quad \tilde{\tau}_j = -\frac{1}{\mathcal{G}_j}(r_{j1}\tau^\infty + r_{j4}E^\infty + r_{j5}H^\infty), \quad (j = 1, 3, 4, 5),$$

$$\mathcal{G}_k = 1 + \gamma_k, \quad (k = 1, 3), \quad \mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_5 = 2.$$

Задовольняючи граничні умови (5.2) і (5.5), з використанням рівнянь (5.22) отримуємо такі задачі лінійного спряження:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0, \quad \text{для } x_1 \in L'. \quad (5.24)$$

Тут і далі $j = 1, 3, 4, 5$.

Згідно з результатами роботи Мусхелішвілі [18] розв'язок рівняння (5.24) можна подати у вигляді:

$$F_j(z) = X_j(z)P_{nj}(z), \quad (5.25)$$

де

$$X_j(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon_j} \cdot (z - b_k)^{-\frac{1}{2} - i\varepsilon_j}, \quad \varepsilon_j = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}, \quad (5.26)$$

$$P_{nj}(z) = C_{0j}z^n + C_{1j}z^{n-1} + \dots + C_{nj}, \quad (5.27)$$

а C_{kj} ($k = 0, 1, \dots, n$) – довільні комплексні коефіцієнти.

Із рівняння (5.23) маємо:

$$C_{0j} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j. \quad (5.28)$$

Для визначення решти коефіцієнтів у (5.27) треба задовольнити умови однозначності переміщень:

$$\int_{a_k}^{b_k} \langle u'_1(x_1) \rangle dx_1 = 0, \quad \int_{a_k}^{b_k} \langle u'_3(x_1) \rangle dx_1 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.29)$$

та співвідношення для сумарних значень стрибків електричної та магнітної індукції:

$$\int_{a_k}^{b_k} \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 = D_{0k}, \quad \int_{a_k}^{b_k} \langle B_3(x_1) \rangle dx_1 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.30)$$

Виконуючи інтегрування (5.21) по кожній тріщині та враховуючи (5.29) і (5.30), приходимо до рівнянь:

$$\int_{a_k}^{b_k} \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\} dx_1 = t_{j4} D_{0k}, \quad j = 1, 3, 4, 5; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.31)$$

Із урахуванням (5.24) рівняння (5.31) можна записати у вигляді:

$$\frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \int_{a_k}^{b_k} F_j^+(x_1) dx_1 = t_{j4} D_{0k}, \quad j = 1, 3, 4, 5; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

або

$$\int_{a_m}^{b_m} P_{nj}(t) X_j(t) dt = \tilde{t}_{j4} D_{0m}, \quad m=1,2,\dots,n; \quad j=1,3,4,5, \quad (5.33)$$

де

$$\tilde{t}_{j4} = \frac{\gamma_j t_{j4}}{\gamma_j + 1}.$$

У розгорнутому вигляді рівняння (5.33) записується так:

$$\int_{a_m}^{b_m} \frac{C_{0j}t^n + C_{1j}t^{n-1} + \dots + C_{nj}}{\prod_{k=1}^n (t-a_k)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_j} \cdot (t-b_k)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_j}} dt = \tilde{t}_{j4} D_{0m}, \quad m=1,2,\dots,n; \quad j=1,3,4,5. \quad (5.34)$$

Далі позначаємо:

$$I_{msj} = \int_{a_m}^{b_m} \frac{t^s}{\prod_{k=1}^n (t-a_k)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_j} \cdot (t-b_k)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_j}} dt; \quad m,s=1,2,\dots,n; \quad j=1,3,4,5. \quad (5.35)$$

Тоді системи (5.34) можна представити у вигляді:

$$C_{1j}\hat{a}_{m1j} + \dots + C_{nj}\hat{a}_{mnj} = \hat{b}_{mj}, \quad (5.36)$$

де

$$\hat{a}_{m\alpha j} = I_{m,n-\alpha,j}, \quad \hat{b}_{mj} = -I_{mnj}C_{0j} + \tilde{t}_{j4}D_{0m}; \quad m,\alpha=1,2,\dots,n; \quad j=1,3,4,5. \quad (5.37)$$

Отже, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_{\alpha j}$:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{a}_{m\alpha j} C_{\alpha j} = \hat{b}_{mj}, \quad m=1,2,\dots,n; \quad j=1,3,4,5. \quad (5.38)$$

Точний аналітичний розв'язок цих систем може бути знайдено для будь-якого n за допомогою методів Гауса або Крамера.

5.3 Визначення електромагнітomeханічних компонент на різних частинах межі поділу матеріалів

Підставляючи (5.25) у спряжене рівняння (5.22) і враховуючи, що $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F_j(x_1)$ для $x_1 \in L''$, маємо:

$$r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) - i\left[r_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + r_{j4}E_1^{(1)}(x_1,0) + r_{j5}H_1^{(1)}(x_1,0)\right] = \Gamma_j(x_1), \quad (5.40)$$

де

$$\Gamma_j(x_1) = (1 + \gamma_j) \overline{F_j(x_1)}, \quad j = 1, 3, 4, 5. \quad (5.40)$$

Враховуючи, що $r_{13} = 1$, з рівняння (5.40) для $j = 1$ отримуємо:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \operatorname{Re}\{\Gamma_1(x_1)\}, \quad x_1 \in L''. \quad (5.41)$$

Щоб отримати вирази для $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), E_1^{(1)}(x_1, 0), H_1^{(1)}(x_1, 0)$ для $x_1 \in L''$ розглянемо систему, яка випливає з уявної частини (5.39):

$$r_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j4}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{j5}H_1^{(1)}(x_1, 0) = -\operatorname{Im}[\Gamma_j(x_1)]$$

для $j = 1, 4, 5$ та $x_1 \in L''$. (5.42)

Розв'язок системи (5.42) легко знайти за формулами Крамера у вигляді:

$$D_r = \det \begin{pmatrix} r_{11} & r_{14} & r_{15} \\ r_{41} & r_{44} & r_{45} \\ r_{51} & r_{54} & r_{55} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \det \begin{pmatrix} -\operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] & r_{14} & r_{15} \\ -\operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] & r_{44} & r_{45} \\ -\operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)] & r_{54} & r_{55} \end{pmatrix} / D_r,$$

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = \det \begin{pmatrix} r_{11} & -\operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] & r_{15} \\ r_{41} & -\operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] & r_{45} \\ r_{51} & -\operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)] & r_{55} \end{pmatrix} / D_r,$$

$$H_1^{(1)}(x_1, 0) = \det \begin{pmatrix} r_{11} & r_{14} & -\operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] \\ r_{41} & r_{44} & -\operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] \\ r_{51} & r_{54} & -\operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)] \end{pmatrix} / D_r. \quad (5.43)$$

Формули (5.43) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) &= \rho_{\sigma 1} \operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] + \rho_{\sigma 4} \operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] + \rho_{\sigma 5} \operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)], \\ E_1^{(1)}(x_1, 0) &= \rho_{E 1} \operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] + \rho_{E 4} \operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] + \rho_{E 5} \operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)], \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) &= \rho_{H 1} \operatorname{Im}[\Gamma_1(x_1)] + \rho_{H 4} \operatorname{Im}[\Gamma_4(x_1)] + \rho_{H 5} \operatorname{Im}[\Gamma_5(x_1)], \end{aligned} \quad (5.44)$$

де

$$\begin{aligned}\rho_{\sigma 1} &= (r_{54}r_{45} - r_{44}r_{55}) / D_r, \quad \rho_{\sigma 4} = (r_{14}r_{55} - r_{54}r_{15}) / D_r, \quad \rho_{\sigma 5} = (r_{44}r_{15} - r_{14}r_{45}) / D_r, \\ \rho_{E1} &= (r_{41}r_{55} - r_{51}r_{45}) / D_r, \quad \rho_{E4} = (r_{51}r_{15} - r_{11}r_{55}) / D_r, \quad \rho_{E5} = (r_{11}r_{45} - r_{41}r_{15}) / D_r, \\ \rho_{H1} &= (r_{51}r_{44} - r_{41}r_{54}) / D_r, \quad \rho_{H4} = (r_{11}r_{54} - r_{51}r_{14}) / D_r, \quad \rho_{H5} = (r_{41}r_{14} - r_{11}r_{44}) / D_r.\end{aligned}$$

Вирази для $\varphi^{(1)}(x_1, 0)$ і $\psi^{(1)}(x_1, 0)$ можна знайти за формулами, аналогічними формулам для $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ і $H_1^{(1)}(x_1, 0)$, відповідно, замінивши у (5.44) $[-\hat{\Gamma}_j(x_1)]$ на $\Gamma_j(x_1)$ ($j=1, 4, 5$).

Підставляючи далі (5.25) у рівняння (5.21), і враховуючи, що $F_j^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_j} F_j^+(x_1)$ для $x_1 \in L'$, маємо:

$$t_{j1} \langle u'_1(x_1) \rangle + it_{j3} \langle u'_3(x_1) \rangle + t_{j4} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5} \langle B_3(x_1) \rangle = \theta_j(x_1) \text{ на } L', \quad (5.45)$$

де

$$\theta_j(x_1) = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} F_j^+(x_1).$$

Із рівняння (5.45) для $j=1$, витікає, що:

$$\langle u'_3(x_1) \rangle = \frac{1}{t_{13}} \text{Im}[\theta_1(x_1)] \text{ для } x_1 \in L'. \quad (5.46)$$

Розглядаючи далі дійсну частину рівняння (5.45), можна записати:

$$\begin{aligned}t_{j1} \langle u'_1(x_1) \rangle + t_{j4} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5} \langle B_3(x_1) \rangle &= \text{Re}[\theta_j(x_1)] \\ \text{для } j=1, 4, 5 \text{ та } x_1 \in L'.\end{aligned} \quad (5.47)$$

Останні співвідношення є системою трьох рівнянь відносно $\langle u'_1(x_1) \rangle, \langle D_3(x_1) \rangle, \langle B_3(x_1) \rangle$. Розв'язок цієї системи також було знайдено за формулами Крамера у вигляді:

$$\langle u'_1(x_1) \rangle = \det \begin{pmatrix} \text{Re}[\theta_1(x_1)] & t_{14} & t_{15} \\ \text{Re}[\theta_4(x_1)] & t_{44} & t_{45} \\ \text{Re}[\theta_5(x_1)] & t_{54} & t_{55} \end{pmatrix} / D_t,$$

$$\begin{aligned}\langle D_3(x_1) \rangle &= \det \begin{pmatrix} t_{11} & Re[\theta_1(x_1)] & t_{15} \\ t_{41} & Re[\theta_4(x_1)] & t_{45} \\ t_{51} & Re[\theta_5(x_1)] & t_{55} \end{pmatrix} / D_t, \\ \langle B_3(x_1) \rangle &= \det \begin{pmatrix} t_{11} & t_{14} & Re[\theta_1(x_1)] \\ t_{41} & t_{44} & Re[\theta_4(x_1)] \\ t_{51} & t_{54} & Re[\theta_5(x_1)] \end{pmatrix} / D_t,\end{aligned}\quad (5.48)$$

де

$$D_t = \det \begin{pmatrix} t_{11} & t_{14} & t_{15} \\ t_{41} & t_{44} & t_{45} \\ t_{51} & t_{54} & t_{55} \end{pmatrix}.$$

Вирази для $\langle u_1(x_1) \rangle$, $\langle \hat{D}_3(x_1) \rangle$ і $\langle \hat{B}_3(x_1) \rangle$ можна знайти за формулами (5.48) для $\langle u'_1(x_1) \rangle$, $\langle D_3(x_1) \rangle$, $\langle B_3(x_1) \rangle$, відповідно, замінивши $\hat{\theta}_j(x_1)$ на $\theta_j(x_1)$ ($j=1,4,5$) у цих формулах. Для цього випадку згадані формули можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}\langle u_1(x_1) \rangle &= \eta_{u1} Re[\hat{\theta}_1(x_1)] + \eta_{u4} Re[\hat{\theta}_4(x_1)] + \eta_{u5} Re[\hat{\theta}_5(x_1)], \\ \langle \hat{D}_3(x_1) \rangle &= \eta_{D1} Re[\hat{\theta}_1(x_1)] + \eta_{D4} Re[\hat{\theta}_4(x_1)] + \eta_{D5} Re[\hat{\theta}_5(x_1)], \\ \langle \hat{B}_3(x_1) \rangle &= \eta_{B1} Re[\hat{\theta}_1(x_1)] + \eta_{B4} Re[\hat{\theta}_4(x_1)] + \eta_{B5} Re[\hat{\theta}_5(x_1)],\end{aligned}\quad (5.49)$$

де

$$\begin{aligned}\eta_{u1} &= (t_{44}t_{55} - t_{54}t_{45}) / D_t, \quad \eta_{u4} = (t_{54}t_{15} - t_{14}t_{55}) / D_t, \\ \eta_{u5} &= (t_{14}t_{45} - t_{44}t_{15}) / D_t, \quad \eta_{D1} = (t_{51}t_{45} - t_{41}t_{55}) / D_t, \\ \eta_{D4} &= (t_{11}t_{55} - t_{51}t_{15}) / D_t, \quad \eta_{D5} = (t_{41}t_{15} - t_{11}t_{45}) / D_t, \\ \eta_{B1} &= (t_{41}t_{54} - t_{51}t_{44}) / D_t, \quad \eta_{B4} = (t_{51}t_{14} - t_{11}t_{54}) / D_t, \\ \eta_{B5} &= (t_{11}t_{44} - t_{41}t_{14}) / D_t.\end{aligned}\quad (5.50)$$

5.4 Асимптотична поведінка електромагнітомеханічних компонент на різних частинах межі поділу матеріалів

У багатьох випадках знання асимптотичних виразів для електричних, механічних та магнітних компонентів є важливим. Відповідно до формул (5.40) і (5.25), (5.326) асимптотичні представлення для $\Gamma_j(x_1)$ при $x_1 \rightarrow b_k + 0$ можуть бути записані у вигляді:

$$\Gamma_1(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = \bar{R}_{1k} (x_1 - b_k)^{-0,5+i\varepsilon_1}, \quad (5.51)$$

де

$$\bar{R}_{1k} = (1 + \gamma_1) \bar{P}_{n1}(b_k) (b_k - a_k)^{-0,5-i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0,5-i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0,5+i\varepsilon_1}, \quad (5.52)$$

та

$$\Gamma_s(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = \bar{R}_{sk} / \sqrt{x_1 - b_k}, \quad s = 4, 5, \quad (5.53)$$

де

$$\bar{R}_{sk} = 2\bar{P}_{ns}(b_k) \frac{1}{\sqrt{b_k - a_k}} \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{\sqrt{(b_k - a_j)(b_k - b_j)}} \quad (5.54)$$

є чисто уявними.

Для визначення $\varphi^{(1)}(x_1, 0)$ і $\psi^{(1)}(x_1, 0)$ обчислимо інтеграли від функцій (5.51) і (5.53). Позначимо їх таким чином:

$$\hat{\Gamma}_j(x_1) = \int \Gamma_j(x_1) dx_1 \quad (j = 1, 4, 5). \quad (5.55)$$

Тоді ці вирази матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} &= \frac{\bar{R}_{1k}}{0,5 + i\varepsilon_1} (x_1 - b_k)^{0,5+i\varepsilon_1}, \\ \hat{\Gamma}_s(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} &= 2\bar{R}_{sk} \sqrt{x_1 - b_k}, \quad s = 4, 5. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Відповідно до формул (5.25), (5.26) і (5.45) асимптотичні представлення для $\theta_j(x_1)$ при $x_1 \rightarrow b_k - 0$ можна подати як

$$\theta_1(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = L_{1k} (b_k - x_1)^{-0,5-i\varepsilon_1}, \quad (5.57)$$

де

$$L_{1k} = -\frac{i(1+\gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1}} P_{n1}(b_k)(b_k - a_k)^{-0,5+i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0,5+i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0,5-i\varepsilon_1} \quad (5.58)$$

та

$$\theta_s(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = L_{sk} / \sqrt{b_k - x_1}, \quad s = 4, 5, \quad (5.59)$$

де

$$L_{sk} = -2iP_{ns}(b_k) \frac{1}{\sqrt{b_k - a_k}} \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{\sqrt{(b_k - a_j)(b_k - b_j)}}, \quad (s = 4, 5). \quad (5.60)$$

Величини L_{sk} є чисто уявними.

Для визначення $\langle u_1(x_1) \rangle$ і $\langle u_3(x_1) \rangle$ потрібно обчислити інтеграли від функцій (5.57) і (5.59). Позначимо їх у такий спосіб:

$$\hat{\theta}_j(x_1) = \int \theta_j(x_1) dx_1 \quad (j = 1, 4, 5). \quad (5.61)$$

Тоді, проводячи інтегрування, одержуємо:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} &= \frac{L_{1k}}{i\varepsilon_1 - 0,5} (b_k - x_1)^{0,5-i\varepsilon_1}, \\ \hat{\theta}_s(x_1)|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} &= -2L_{sk} \sqrt{b_k - x_1}, \quad s = 4, 5. \end{aligned} \quad (5.62)$$

5.5 Швидкість звільнення енергії

Відповідно до інтегралу віртуального закриття тріщини [87] швидкість звільнення енергії у вершині тріщини b_k можна представити у формі:

$$\begin{aligned} G_{b_k} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_{b_k}^{b_k + \Delta l} \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - \varphi^{(1)}(x_1, 0) \langle D_3(x_1 - \Delta l, 0) \rangle - \psi^{(1)}(x_1, 0) \langle B_3(x_1 - \Delta l, 0) \rangle \right] dx_1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Застосувавши інтегрування частинами до останніх двох доданків в підінтегральному виразі, отримуємо формулу:

$$G_{b_k} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \tilde{G}_{b_k}(\Delta l), \quad (5.64)$$

де

$$\tilde{G}_{b_k}(\Delta l) = \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_k}^{b_k + \Delta l} g(x_1, \Delta l) dx_1, \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} g(x_1, \Delta l) = & \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle - \\ & - E_1^{(1)}(x_1, 0) \langle \hat{D}_3(x_1 - \Delta l) \rangle - H_1^{(1)}(x_1, 0) \langle \hat{B}_3(x_1 - \Delta l) \rangle, \quad (5.66) \\ \langle \hat{D}_3(x_1, 0) \rangle = & \int \langle D_3(x_1, 0) \rangle dx_1, \quad \langle \hat{B}_3(x_1, 0) \rangle = \int \langle B_3(x_1, 0) \rangle dx_1. \end{aligned}$$

Далі використовуємо формулу (5.41) і розв'язок системи (5.42), заданий формулами (5.44). Підставляючи в ці формули асимптотичні представлення (5.51) і (5.53), приходимо до таких формул:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = & \frac{1}{\sqrt{x_1 - b_k}} \left[q_{1k} \cos \varphi_{1k}(x_1) - q_{2k} \sin \varphi_{1k}(x_1) \right], \\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = & \rho_{\sigma 1} \Lambda_k(x_1) + \rho_{\sigma 45} / \sqrt{x_1 - b_k}, \\ E_1^{(1)}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = & \rho_{E1} \Lambda_k(x_1) + \rho_{E45} / \sqrt{x_1 - b_k}, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = & \rho_{H1} \Lambda_k(x_1) + \rho_{H45} / \sqrt{x_1 - b_k}, \quad (5.67) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda_k(x_1) = & \frac{1}{\sqrt{x_1 - b_k}} \left[q_{2k} \cos \varphi_{1k}(x_1) + q_{1k} \sin \varphi_{1k}(x_1) \right], \\ q_{1k} = & \operatorname{Re}(\bar{R}_{1k}), \quad q_{2k} = \operatorname{Im}(\bar{R}_{1k}), \quad \varphi_{1k}(x_1) = \varepsilon_1 \ln(x_1 - b_k), \\ \rho_{\sigma 45} = & \rho_{\sigma 4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}) + \rho_{\sigma 5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}), \quad \rho_{E45} = \rho_{E4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}) + \rho_{E5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}), \\ \rho_{H45} = & \rho_{H4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}) + \rho_{H5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}). \end{aligned}$$

Подібним чином використаємо формулу (5.46) і розв'язок системи (5.47), заданий формулами (5.49). Підставляючи в ці формули асимптотичні представлення (5.62), приходимо до таких формул:

$$\begin{aligned} \langle u_3(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = & \sqrt{b_k - x_1} \left[p_{2k} \cos \varphi_{2k}(x_1) - p_{1k} \sin \varphi_{2k}(x_1) \right] / t_{13}, \\ \langle u_1(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = & \eta_{u1} \Theta_k(x_1) + \eta_{u45} \sqrt{b_k - x_1}, \\ \langle \hat{D}_3(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = & \eta_{D1} \Theta_k(x_1) + \eta_{D45} \sqrt{b_k - x_1}, \end{aligned}$$

$$\langle \hat{B}_3(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = \eta_{B1} \Theta_k(x_1) + \eta_{B45} \sqrt{b_k - x_1}, \quad (5.68)$$

де

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \operatorname{Re}[L_{1k} / (i\varepsilon_1 - 0,5)], \quad p_{2k} = \operatorname{Im}[L_{1k} / (i\varepsilon_1 - 0,5)], \\ \varphi_{2k}(x_1) &= \varepsilon_1 \ln(b_k - x_1), \quad \eta_{u45} = -2[\eta_{u4} \operatorname{Re}(L_{4k}) + \eta_{u5} \operatorname{Re}(L_{5k})], \\ \eta_{D45} &= -2[\eta_{D4} \operatorname{Re}(L_{4k}) + \eta_{D5} \operatorname{Re}(L_{5k})], \quad \eta_{B45} = -2[\eta_{B4} \operatorname{Re}(L_{4k}) + \eta_{B5} \operatorname{Re}(L_{5k})]. \end{aligned}$$

Представлення для $\rho_{\sigma j}$, ρ_{Ej} , ρ_{Hj} , η_{uj} , η_{Dj} та η_{Bj} при $j=1,4,5$ наведені раніше формулами (5.44) та (5.50).

Підставляючи формули (5.67) і (5.68) у (5.64)-(5.66) та виконуючи інтегрування, приходимо до такої формули:

$$G_{b_k} = \frac{\pi}{8} (t_{13}^{-1} + h_3) \frac{h_{1k} + 2\varepsilon_1 h_{2k}}{ch(\pi\varepsilon_1)} + \frac{\pi}{4} h_{4k}, \quad (5.69)$$

де

$$\begin{aligned} h_{1k} &= q_{1k} p_{2k} + q_{2k} p_{1k}, \quad h_{2k} = q_{2k} p_{2k} - q_{1k} p_{1k}, \quad h_3 = \rho_{\sigma 1} \eta_{u1} - \rho_{E1} \eta_{D1} - \rho_{H1} \eta_{B1}, \\ h_{4k} &= \rho_{\sigma 45} \eta_{u45} - \rho_{E45} \eta_{D45} - \rho_{H45} \eta_{B45}. \end{aligned}$$

Аналогічно ШЗЕ в лівій вершині k -ої тріщини можна представити у формі:

$$G_{a_k} = \frac{\pi}{8} (t_{13}^{-1} + h_3) \frac{h_{1k}^a + 2\varepsilon_1 h_{2k}^a}{ch(\pi\varepsilon_1)} + \frac{\pi}{4} h_{4k}^a. \quad (5.70)$$

Вирази для h_{1k}^a , h_{2k}^a та h_{4k}^a з формули (5.70) мають вигляд:

$$\begin{aligned} h_{1k}^a &= q_{1k}^a p_{2k}^a + q_{2k}^a p_{1k}^a, \quad h_{2k}^a = q_{2k}^a p_{2k}^a - q_{1k}^a p_{1k}^a, \\ h_{4k}^a &= \rho_{\sigma 45}^a \eta_{u45}^a - \rho_{E45}^a \eta_{D45}^a - \rho_{H45}^a \eta_{B45}^a, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} q_{1k}^a &= \operatorname{Re}(\bar{R}_{1k}^a), \quad q_{2k}^a = -\operatorname{Im}(\bar{R}_{1k}^a), \quad p_{1k}^a = \operatorname{Re}[L_{1k}^a / (i\varepsilon_1 + 0,5)], \\ p_{2k}^a &= -\operatorname{Im}[L_{1k}^a / (i\varepsilon_1 + 0,5)], \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{1k}^a = (-1)^n (1 + \gamma_1) \bar{P}_{n1}(a_k) (b_k - a_k)^{-0,5+i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (a_j - a_k)^{-0,5-i\varepsilon_1} (b_j - a_k)^{-0,5+i\varepsilon_1},$$

$$L_{1k}^a = -\frac{(1+\gamma_1)}{\gamma_1} P_{n1}(a_k)(a_k - b_k)^{-0,5-i\varepsilon_1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (a_k - a_j)^{-0,5+i\varepsilon_1} (a_k - b_j)^{-0,5-i\varepsilon_1},$$

$$\rho_{\sigma 45}^a = \rho_{\sigma 4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}^a) + \rho_{\sigma 5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}^a), \quad \rho_{E 45}^a = \rho_{E 4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}^a) + \rho_{E 5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}^a),$$

$$\rho_{H 45}^a = \rho_{H 4} \operatorname{Im}(\bar{R}_{4k}^a) + \rho_{H 5} \operatorname{Im}(\bar{R}_{5k}^a), \quad \eta_{u 45}^a = -2 \left[\eta_{u 4} \operatorname{Re}(L_{4k}^a) + \eta_{u 5} \operatorname{Re}(L_{5k}^a) \right],$$

$$\eta_{D 45}^a = -2 \left[\eta_{D 4} \operatorname{Re}(L_{4k}^a) + \eta_{D 5} \operatorname{Re}(L_{5k}^a) \right], \quad \eta_{B 45}^a = -2 \left[\eta_{B 4} \operatorname{Re}(L_{4k}^a) + \eta_{B 5} \operatorname{Re}(L_{5k}^a) \right],$$

$$L_{sk}^a = -2P_{ns}(a_k) \frac{1}{\sqrt{a_k - b_k}} \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{\sqrt{(a_k - a_j)(a_k - b_j)}}, \quad (s = 4, 5).$$

5.6 Аналіз чисельних результатів

Для числової ілюстрації розглянемо біматеріал, що складається з композиту $\text{BaTiO}_3\text{--CoFe}_2\text{O}_4$ з об'ємними частками BaTiO_3 $V_f = 0,5$ (верхня півплощина) та $V_f = 0,1$ (нижня). Характеристики цих матеріалів наведено в табл. 5.1.

Для подання результатів в унормованому вигляді введемо такі безрозмірні величини:

$$\hat{a}_i = \frac{a_i}{l}, \quad \hat{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \hat{u}_3(x_1) = \langle u_3(x_1) \rangle / l, \quad \hat{\sigma}_{33}(x_1) = \frac{\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)}{\sigma^\infty},$$

$$\hat{D}_{02} = \frac{D_{02} c_{11}^0}{\sigma^\infty D_{02}^0}, \quad \hat{H}^\infty = \frac{H^\infty c_{11}^0}{\sigma^\infty H_0^\infty},$$

де

$$l = (b_2 - a_2) / 2, \quad c_{11}^0 = 274 \text{ ГПа},$$

$$D_{02}^0 = 5 \times 10^{-4} \text{ Кл / м}, \quad H_0^\infty = 10^5 \text{ А / м}.$$

У всіх подальших розрахунках було обрано значення $\sigma^\infty = 10 \text{ МПа}$ і $b_2 = -a_2 = 0,01 \text{ м}$.

Таблиця 5.1 – Ефективні властивості композиту BaTiO₃-CoFe₂O₄ для різних об'ємних часток BaTiO₃ [92]

Фізичні величини	$V_f = 0,1$	$V_f = 0,5$
c_{11} (ГПа)	274	226
c_{33} (ГПа)	161	124
c_{13} (ГПа)	259	216
c_{44} (ГПа)	45	44
e_{31} (Кл / м ²)	-4,4	-2,2
e_{15} (Кл / м ²)	1,86	9,3
e_{33} (Кл / м ²)	1,16	5,8
α_{11} ($\times 10^{-10}$ Кл ² / Нм ²)	11,9	56,4
α_{33} ($\times 10^{-10}$ Кл ² / Нм ²)	13,4	63,5
h_{31} (Н / Ам)	522,3	290,2
h_{33} (Н / Ам)	629,7	350,0
h_{15} (Н / Ам)	495,0	275,0
μ_{11} (10^{-6} Н · с ² / (Кл ²))	531,5	297,0
μ_{33} (10^{-6} Н · с ² / (Кл ²))	142,3	83,5

Результати для випадку трьох тріщин, що мають нормовані координати вершин $\hat{a}_1 = -4$, $\hat{b}_1 = -2$, $\hat{a}_2 = -1$, $\hat{b}_2 = 1$, $\hat{a}_3 = 1.2$, $\hat{b}_3 = 3.2$ показано на рис. 5.2.

Зовнішнє зсувне напруження було вибрано рівним $\tau^\infty = 0$, електричний і магнітний потоки $E^\infty = 0$, $H^\infty = 0$. Електричний заряд лівої та правої тріщин відсутній ($D_{01} = 0$, $D_{03} = 0$), а для середньої тріщини заряду надавали різні значення.

Суцільні лінії ілюструють нормалізовані розкриття тріщин $\hat{u}_3(x_1)$, а пунктирні лінії показують варіації нормованого нормального напруження $\hat{\sigma}_{33}(x_1, 0)$ на межі поділу матеріалів поза тріщинами. Лінії *I*, *III* відповідають $D_{02} = 0$, а лінії *II*, *IV* побудовано для $\hat{D}_{02} = 2.74 \times 10^4$. З рис. 5.2 видно, що зближення тріщин призводить до незначного збільшення їхнього розкриття. Електричний заряд, прикладений до середньої тріщини, суттєво впливає на відкриття цієї тріщини та має дуже незначний вплив на розкриття інших тріщин, а також на нормальне напруження поза тріщинами.

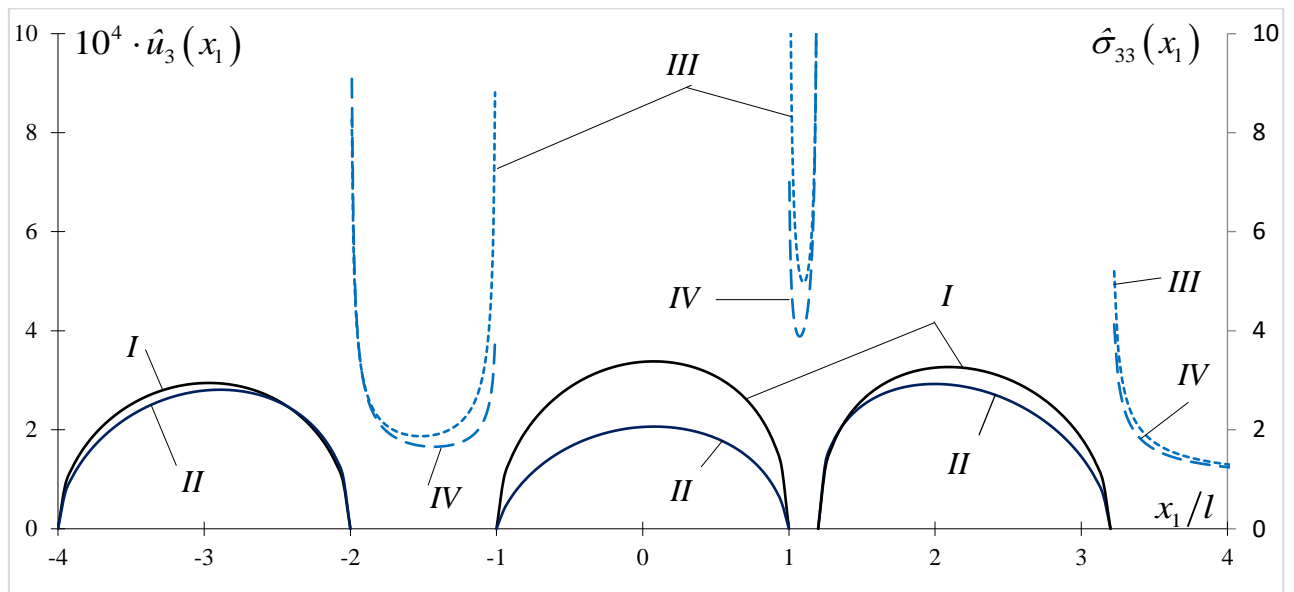


Рис. 5.2. Зміна розкриттів тріщин (суцільні лінії)
та нормального напруження поза тріщинами (пунктирні лінії)
для різних значень нормованого сумарного електричного заряду \hat{D}_{02}

Вплив магнітного потоку, а також сумарного електричного заряду проілюстровано на рис. 5.3 при розташуванні тріщин, а також значень механічних і електричних навантажень на нескінченності таких же, як на рис. 5.2, при $D_{01} = 0$, $D_{03} = 0$.

Лінію *I* побудовано для $H^\infty = 0$, $D_{02} = 0$, *II* – для $H^\infty = 0$, $\hat{D}_{02} = 1.96 \times 10^4$, *III* – для $\hat{H}^\infty = 1.37 \times 10^5$, $D_{02} = 0$ і *IV* – для $\hat{H}^\infty = 1.37 \times 10^5$, $\hat{D}_{02} = 1.96 \times 10^4$. З цих графіків видно, що магнітний потік впливає на розкриття тріщини, але

цей вплив стає помітним лише за досить великого його значення. Сумарний електричний заряд середньої тріщини відчутно впливає на її розкриття і дуже незначно на розкриття лівої та правої тріщин.

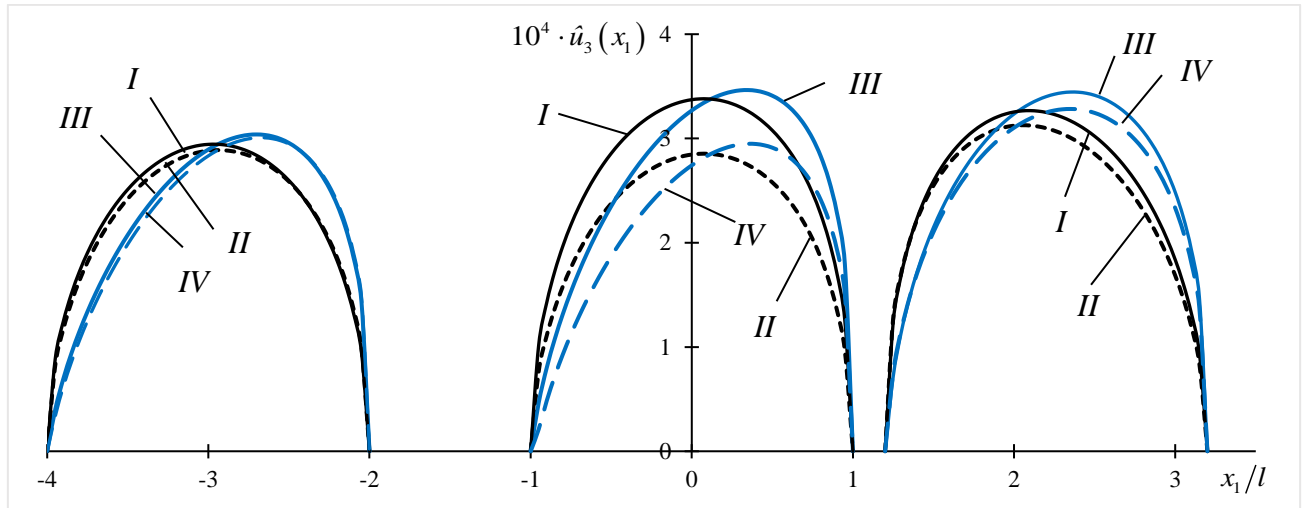


Рис. 5.3. Вплив магнітного потоку та сумарного електричного заряду на розкриття тріщин для випадку трьох тріщин

Варіацію нормованого магнітного потоку $\hat{H}_1(x_1) = H_1^{(1)}(x_1, 0)c_{11}^0 / (\sigma^\infty H_0^\infty)$ на інтервалі (\hat{b}_2, \hat{a}_3) для системи трьох тріщин з $\hat{a}_1 = -4$, $\hat{b}_1 = -2$, $\hat{a}_2 = -1$, $\hat{b}_2 = 1$, $\hat{a}_3 = 2$, $\hat{b}_3 = 4$, $\tau^\infty = E^\infty = 0$, $D_{01} = 0$, $D_{02} = 0$, $D_{03} = 0$ і різних H^∞ показано на рис. 5.4. Лінії I, II, III, IV та V побудовано для $\hat{H}^\infty = 0$; $2,74 \times 10^3$; $6,85 \times 10^3$; $1,37 \times 10^4$; $2,74 \times 10^4$, відповідно. З рис. 5.4 видно, що магнітний потік на межі поділу матеріалів для лише механічного навантаження дуже малий, але його значення зростає відповідно до прикладеного зовнішнього магнітного навантаження.

Зміну нормованого електричного потоку $\hat{E}_1(x_1) = E_1^{(1)}(x_1, 0)c_{11}^0 / (\sigma^\infty E_0)$ ($E_0 = 10^5 \text{ V/m}$) між середньою та правою тріщинами для тих самих місць розташування тріщин, як на рис. 5.4, $\tau^\infty = E^\infty = 0$, $D_{01} = 0$, $D_{02} = 0$, $D_{03} = 0$ та $\hat{H}^\infty = 0$ (лінія I), $1,37 \times 10^4$ (II) і $2,74 \times 10^4$ (III) представлено на рис. 5.5.

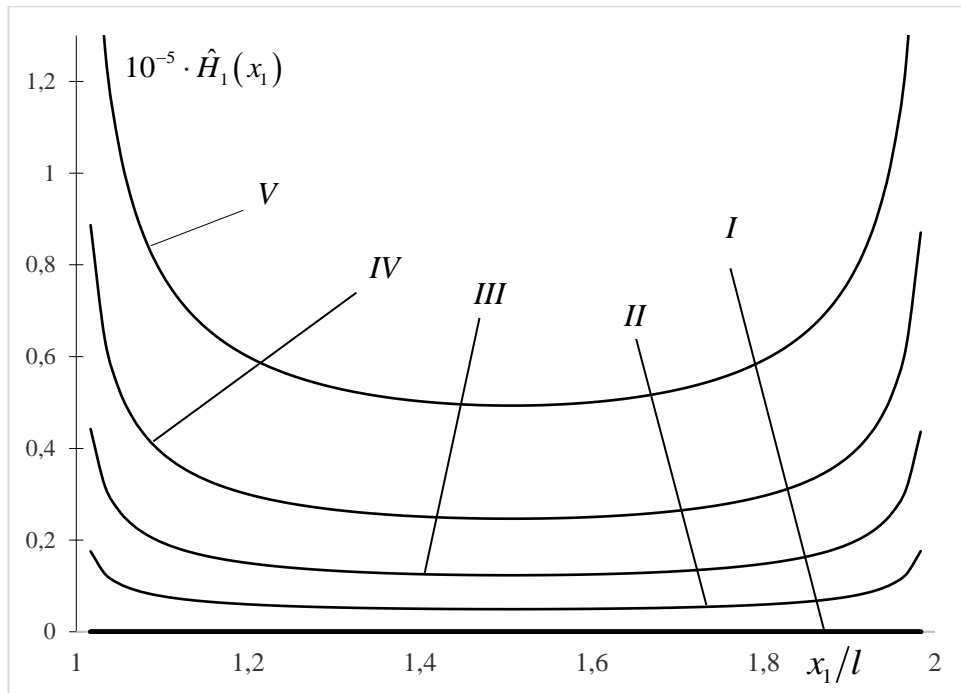


Рис. 5.4. Зміна нормованого магнітного потоку вздовж межі поділу матеріалів між середньою та правою тріщинами для $\tau^\infty = E^\infty = 0$ і різних значень H^∞

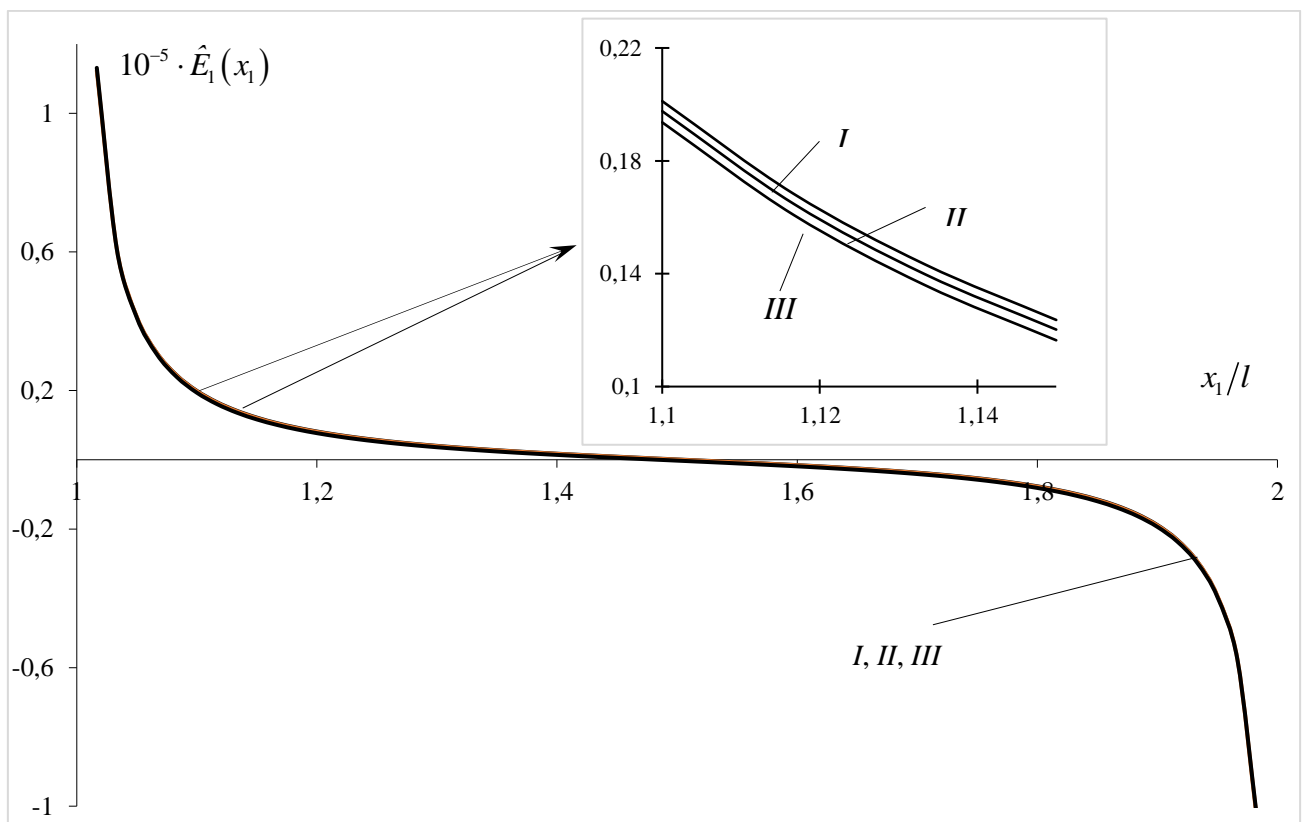


Рис. 5.5. Зміна нормованого електричного потоку в тій же області і при тих же зовнішніх впливах, що і на рис. 5.4

Як видно, вплив магнітного потоку на електричний потік досить малий, і на основній частині рис. 5.5 він майже непомітний. Лише масштабування певної частини графіка дозволяло продемонструвати різницю між кривими, отриманими для різних H^∞ .

Зміну ШЗЕ відносно розташування тріщин на межі поділу матеріалів з $V_f = 0,5$ (верхній) і $V_f = 0,1$ (нижній), значень механічного, електричного та магнітного навантажень показано в таблицях 5.1-5.4. Особливу увагу приділено аналізу впливу магнітного потоку та електричного заряду тріщин.

У табл. 5.1 зміну нормалізованих значень ШЗЕ $\hat{G}_{2a} = 10^5 G_{2a} / (\sigma^\infty l)$ та $\hat{G}_{2b} = 10^5 G_{2b} / (\sigma^\infty l)$ середньої тріщини $\hat{a}_2 = -1$, $\hat{b}_2 = 1$ продемонстровано для $\tau^\infty = E^\infty = H^\infty = 0$ і нульового електричного заряду на всіх тріщинах.

Таблиця 5.1. Порівняння нормованих ШЗЕ тріщини в магнітоелектропружному та п'єзоелектричному біматеріалах для $D_{0k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$)

Розташування тріщин		$\hat{a}_3 = 8$, $\hat{b}_3 = 10$	$\hat{a}_3 = 4$ $\hat{b}_3 = 6$	$\hat{a}_3 = 2$, $\hat{b}_3 = 4$	$\hat{a}_3 = 1.2$, $\hat{b}_3 = 3.2$	$\hat{a}_3 = 1.02$, $\hat{b}_3 = 3.02$
\hat{G}_{2b}	$\hat{H}^\infty = 0$	21,364	22,226	26,085	46,914	190,16
		21,399	22,262	26,127	46,989	190,47
	$\hat{H}^\infty = 1,37 \times 10^3$	24,877	25,880	30,370	54,613	221,40
\hat{G}_{2a}	$\hat{H}^\infty = 0$	21,364	21,887	23,369	26,605	30,723
		21,399	21,922	23,407	26,648	30,773
	$\hat{H}^\infty = 1,37 \times 10^3$	24,877	25,485	27,209	30,976	35,770

Положення лівої тріщини $\hat{a}_1 = -10$, $\hat{b}_1 = -8$ фіксоване, а права тріщина (\hat{a}_3, \hat{b}_3) змінює своє розташування. Верхні лінії кожної комірки відносяться до згаданого вище магнітоелектропружного матеріалу. Для порівняння ШЗЕ для п'єзоелектричного біматеріалу з такими ж пружними, п'єзоелектричними та

діелектричними сталими, як у біматеріала з $V_f = 0,5 / V_f = 0,1$, для $H^\infty = 0$, отримані відповідно до методики, викладеної в роботі [70], наведено в нижніх рядках.

Результати, подібні до табл. 5.1, але для електрично зарядженої середньої тріщини, наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2. Порівняння нормованої ШЗЕ для тріщини в магнітоелектропружному та п'єзоелектричному біматеріалах для $\hat{D}_{02} = 1,10 \times 10^4$ та $\hat{D}_{0k} = 0$ ($k = 1, 3$)

Розташування тріщин		$\hat{a}_3 = 8,$ $\hat{b}_3 = 10$	$\hat{a}_3 = 4$ $\hat{b}_3 = 6$	$\hat{a}_3 = 2,$ $\hat{b}_3 = 4$	$\hat{a}_3 = 1,2,$ $\hat{b}_3 = 3,2$	$\hat{a}_3 = 1,02,$ $\hat{b}_3 = 3,02$
\hat{G}_{2b}	$\hat{H}^\infty = 0$	57,632	58,758	64,864	103,62	386,95
		57,659	58,787	64,899	103,68	387,22
	$\hat{H}^\infty = 1,37 \times 10^3$	61,145	62,411	69,148	111,31	418,19
\hat{G}_{2a}	$\hat{H}^\infty = 0$	57,632	57,874	58,120	57,753	57,158
		57,659	57,903	58,151	57,790	57,203
	$\hat{H}^\infty = 1,37 \times 10^3$	61,145	61,473	61,961	62,125	62,206

Із результатів цих таблиць випливає, що:

- як сумарний електричний заряд середньої тріщини, так і зовнішнє магнітне поле помітно впливають на швидкість звільнення енергії в обох вершинах тріщини;
- зближення середньої та правої тріщин призводить до істотного зростання ШЗЕ, особливо для сусідніх вершин тріщин;
- результати, отримані для магнітоелектропружних і відповідних п'єзоелектричних матеріалів, майже збігаються для $H^\infty = 0$.

Спеціальний аналіз впливу магнітного потоку на ШЗЕ середньої тріщини з тим же розташуванням, що й для табл. 5.1 та $\hat{a}_1 = -10$, $\hat{b}_1 = -8$,

$\hat{a}_3 = 1,5$, $\hat{b}_3 = 3,5$ проілюстровано в табл. 5.3. Було обрано $\tau^\infty = E^\infty = D_{0k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$) і обиралися різні значення магнітного потоку. З цієї таблиці видно, що при великих значеннях електричного потоку ШЗЕ зростає майже пропорційно його квадрату. Крім того, спостерігається, що коефіцієнт G_{2b} / G_{2a} залишається майже незмінним для різних величин H^∞ .

Таблиця 5.3. Зміна нормованої ШЗЕ середньої тріщини для різних значень магнітного потоку

\hat{H}^∞	0	$1,37 \times 10^3$	$2,74 \times 10^3$	$6,85 \times 10^3$	$1,37 \times 10^4$	$2,74 \times 10^4$
\hat{G}_{2b}	31,845	37,074	52,759	162,55	554,679	2123,1
\hat{G}_{2a}	24,696	28,754	40,927	126,14	430,48	1647,84

Зміну ШЗЕ всіх тріщин для такого ж їх розташування, що і в табл. 5.3, але для $\tau^\infty = E^\infty = H^\infty = D_{01} = D_{03} = 0$, наведено в табл. 5.4 для різних значень \hat{D}_{02} .

Таблиця 5.4. Зміна нормованих ШЗЕ у вершинах всіх тріщин для різних значень сумарного електричного заряду середньої тріщини

\hat{D}_{02}	0	$5,48 \times 10^3$	$1,10 \times 10^4$	$1,64 \times 10^4$	$2,19 \times 10^4$	$2,74 \times 10^4$
\hat{G}_{1a}	21,260	21,330	21,624	22,140	22,880	23,843
\hat{G}_{1b}	21,361	21,450	21,818	22,465	23,390	24,595
\hat{G}_{2a}	24,696	31,860	58,047	103,26	167,49	250,74
\hat{G}_{2b}	31,845	41,032	75,099	134,05	217,871	326,57
\hat{G}_{3a}	31,788	34,751	46,544	67,168	96,623	134,91
\hat{G}_{3b}	24,539	25,459	29,298	36,056	45,731	58,325

Видно, що \hat{D}_{02} несуттєво впливає на ШЗЕ у вершинах лівої тріщини, оскільки ця тріщина розташована на великій відстані від середньої тріщини. Цей вплив набагато більший у вершинах правої тріщини, оскільки вона розташована ближче до середньої тріщини. Найбільш відчутний вплив спостерігається у вершинах середньої тріщини, оскільки зміна електричного заряду безпосередньо пов'язана з цією тріщиною.

Вплив розташування тріщин на їхнє розкриття та ШЗЕ продемонстровано на рис. 5.6 і в табл. 5.5. На початку вважаємо, що розташування тріщин симетричне, а потім праву тріщину наближаємо до центральної. Приймається, що $\tau^\infty = E^\infty = H^\infty = D_{02} = 0$ і $\hat{D}_{01} = \hat{D}_{03} = 5,48 \times 10^3$. Ліва і середня тріщини мають фіксоване розташування $\hat{a}_1 = -5$, $\hat{b}_1 = -3$, $\hat{a}_2 = -1$, $\hat{b}_2 = 1$, а права тріщина має нормовану довжину 2. Лінії I на рис. 5.6 відповідають симетричному випадку з $\hat{a}_3 = 3$, лінії II зображено для $\hat{a}_3 = 2$, а лінії III – для $\hat{a}_3 = 1.1$.

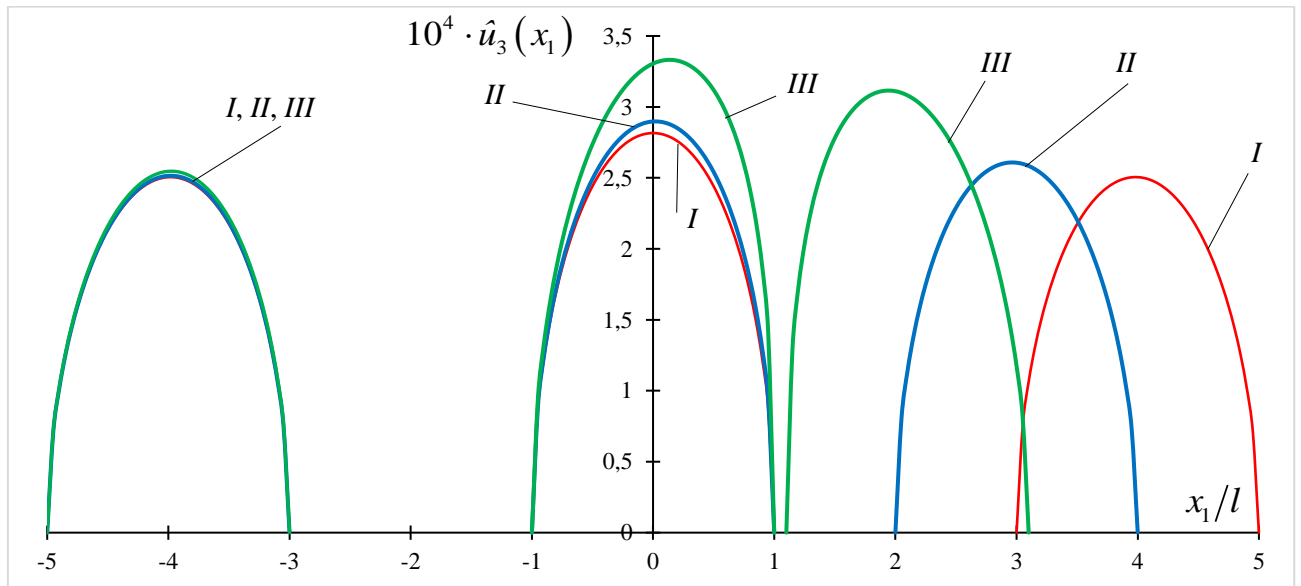


Рис. 5.6. Зміни розкриття тріщин, які зумовлені наближенням правої тріщини до центральної

Значення ШЗЕ центральної тріщини, що відповідають випадкам, відображеним на рис. 5.6, наведено в перших двох рядках табл. 5.5. В останніх

рядках цієї таблиці наведено розкриття тріщини в середніх точках лівої ($\hat{u}_{3m}^{(1)}$), центральної ($\hat{u}_{3m}^{(2)}$) і правої ($\hat{u}_{3m}^{(3)}$) тріщин.

Таблиця 5.5. Зміна нормованих ШЗЕ у вершинах центральної тріщини та розкриттів тріщин у їхніх середніх точках для різних відстаней між центральною та правою тріщинами

\hat{a}_3	3	2	1,1
\hat{G}_{2b}	23,673	27,227	72,553
\hat{G}_{2a}	23,673	25,268	29,037
$\hat{u}_{3m}^{(1)}$	2,505	2,515	2,546
$\hat{u}_{3m}^{(2)}$	2,816	2,897	3,305
$\hat{u}_{3m}^{(3)}$	2,505	2,607	3,081

З отриманих результатів видно, що розкриття лівої та правої тріщин для симетричного випадку однакові, але їхні значення менші, ніж значення для центральної тріщини через наявність електричних зарядів. Наближення правої тріщини до середньої призводить до помірного зростання їх розкриттів і значного збільшення ШЗЕ, особливо для найближчих між собою вершин тріщин.

5.7 Висновки до розділу V

Розглянуто скінченну систему тріщин між різномірними магнітоелектропружними матеріалами під дією механічного навантаження розтягу та зсуву, електричного та магнітного полів, паралельних берегам тріщини. Система тріщин не є періодичною, тобто тріщини можуть мати довільну довжину та відстань між центрами. Матеріали поляризовані в напрямку, перпендикулярному берегам тріщин. Вважається, що берега тріщини покриті механічно м'якими електродами із сегнетоелектричного

матеріалу із заданим електричним зарядом і нульовою магнітною індукцією, а всі електромеханічні поля незалежні від координати, паралельної фронту тріщини.

Використовуючи представлення механічних, електричних і магнітних компонентів через кусково-аналітичні функції, сформульовано та розв'язано задачу лінійного спряження Рімана-Гільберта. Всі необхідні механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж інтерфейсу представлено в аналітичному вигляді. Показано, що всі поля мають осциляційну сингулярність у вершинах тріщин. Отримано асимптотичні представлення механічних, електричних і магнітних полів у вершинах тріщин, для знаходження ШЗЕ використано інтеграл віртуального закриття тріщин.

Шляхом чисельної реалізації та візуалізації отриманих аналітичних формул побудовано графіки і одержано таблиці результатів, які дозволяють зробити такі висновки:

- хороша узгодженість результатів, отриманих для магнітоелектропружного та п'єзоелектричного біматеріалів, що мають однакові пружну, п'єзоелектричну та діелектричну проникності, спостерігається при нульовому зовнішньому магнітному полі, але збільшення цього поля призводить до порушення цієї узгодженості;
- зменшення відстані між тріщинами призводить до дуже інтенсивного зростання ШЗЕ для сусідніх вершин тріщин і до більш помірного росту розкриття тріщин;
- зміна зовнішнього магнітного поля викликає аналогічну зміну магнітного поля на зчеплених ділянках межі розділу матеріалів, однак вплив цієї зміни на механічні та електричні компоненти є дуже малим;
- сумарний електричний заряд середньої тріщини істотно впливає на ШЗЕ у вершинах цієї тріщини, однак інтенсивність його впливу на ШЗЕ сусідніх тріщин є значно меншою.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розвинуто аналітичні методи розв'язання плоских та антиплоских задач для п'єзоактивних біматеріальних тіл з колінеарними міжфазними тріщинами при різних електричних та магнітних умовах на їхніх берегах, проаналізовано електромагнітомеханічний стан п'єзоелектромагнітних біматеріальних тіл з довільними системами тріщин на межах поділу різнорідних компонент. Зокрема, отримано такі результати:

- 1) вивчено електромеханічний стан п'єзоелектричного біматеріального тіла з двома двома колінеарними тріщинами під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля, прикладених на нескінченності, при умові, що одна з тріщин є електропровідною, а інша електропроникною. Проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої представлено аналітичний розв'язок. На основі цього розв'язку отримано аналітичні вирази для зсувного напруження та електричного поля на зчеплених ділянках межі поділу матеріалів, стрибки механічних переміщень та електричних зміщень вздовж тріщин, а також ШЗЕ;
- 2) проаналізовано взаємодію двох штампів з плоскими підшвами на границі пружної ізотропної півплощини, один з яких жорстко зчеплений із півплощиною, а інший знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. З використанням комплексних потенціалів сформульовано математичну модель, яка аналогічна рівнянням розділу I, що описує взаємодію тріщин. Використовуючи розв'язок цих рівнянь, проаналізовано напруження під штампами та їхні вертикальні переміщення;
- 3) розв'язано антиплоску задачу для п'єзоелектромагнітного біматеріалу з двома тріщинами на межі поділу різнорідних компонент при різних електричних та магнітних умовах на берегах різних тріщин. Проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана та задачі Гільберта для кусково-аналітичних функцій. З використанням розв'язків

цих задач отримано аналітичні вирази для напружень, електричного та магнітного полів на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також розкриття тріщин та стрибки електричного і магнітного зміщень при переході через тріщини;

- 4) розглянуто плоску задачу для довільної кількості колінеарних електро- та магнітопроникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами під дією віддаленого поля напружень. Сформульовано задачу лінійного спряження, розв'язок якої представлено в аналітичній формі для будь-якої неперіодичної системи тріщин. На основі цього розв'язку визначено всі потрібні для подальшого аналізу механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів, а також швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин;
- 5) розроблено та реалізовано аналітичний підхід до дослідження скінченної множини електрично заряджених тріщин на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів при умові, що береги тріщин покриті механічно м'якими електродами. З використанням комплексних потенціалів проблему зведено до задачі Рімана-Гільберта, яку розв'язано аналітично. Отримано повні та асимптотичні представлення механічних, електричних і магнітних факторів на межі поділу матеріалів, а також ШЗЕ при розвитку тріщин.

Аналіз результатів проведених числових досліджень із застосуванням розроблених моделей дав можливість виявити і сформулювати нові ефекти та закономірності, серед яких найбільш вагомими є:

- у випадку антиплоскої задачі за великої відстані між електропроникною і електропровідною тріщинами електричне поле істотно впливає на ШЗЕ електропровідної тріщини і не змінює цих значень для електропроникної; при зближенні ж тріщин ШЗЕ зростає, причому її інтенсивний ріст у вершинах електропровідної тріщини ініціює також слабке зростання значень ШЗЕ у вершинах електропроникної тріщини;

- стосовно взаємодії двох штампів виявлено, що зона повного затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину, нормальне напруження під жорстко зчепленим штампом є значно більшим, ніж дотичне, а осадка штампу зменшується зі збільшенням його ширини;
- при розгляді електромагнітопровідної та електромагнітопроникної тріщин між п'єзоелектромагнітними півпросторами для випадку антиплоскої деформації виявлено, що зовнішній магнітний потік суттєво впливає на механічні поля в околі електромагнітопровідної тріщини, а для електромагнітопроникної тріщини цей вплив є незначним;
- у випадку плоскої задачі для довільної системи електромагнітопроникних міжфазних тріщин у п'єзоелектромагнітному біматеріалі встановлено, що при зближенні тріщин ріст швидкості звільнення енергії є набагато інтенсивнішим ніж розкриття тріщин, а магнітна індукція на тріщині несуттєво залежить від прикладеного механічного навантаження і різко змінюється при появі зовнішнього магнітного поля;
- для системи електродованих тріщин на межі поділу магнітоелектропружних матеріалів виявлено, що у випадку трьох тріщин, середня з яких є електрично зарядженою, зміна зовнішнього магнітного поля викликає аналогічну зміну магнітного поля на зчеплених ділянках межі поділу матеріалів, однак вплив цієї зміни на механічні та електричні компоненти є дуже малим; сумарний електричний заряд середньої тріщини істотно впливає на ШЗЕ цієї тріщини, однак інтенсивність його впливу на ШЗЕ сусідніх тріщин є значно меншою; зменшення відстані між тріщинами призводить до дуже інтенсивного зростання ШЗЕ для сусідніх вершин тріщин і до більш помірного росту розкриття тріщин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бицадзе Л. П. Основные граничные условия задачи электроупругости для трансверсально-изотропного полупространства. *Тр. института прикл. математики*. Тбил. ун-т, 1985. № 16. С. 34–55.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М. : Гостехиздат, 1953. 264 с.
3. Грилицкий Д. В. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезами. *Прикладная механика*. 1966. Т. 2. № 5. С. 12–18.
4. Грилицкий Д. В., Попович Б. И. Основные граничные задачи термоупругости для кусочно-однородной изотропной пластины с разрезами. *Изв. АН СССР. Сер.: Механика твердого тела*. 1970. № 4. С. 151–158.
5. Грилицький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології. К. : Львівський державний університет ім. І. Франка, 1996. 204 с.
6. Гузь А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. К. : Наукова думка, 1989. 632 с.
7. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. *Неклассические проблемы механики разрушения*: В 4 т. Т. 2. К. : Наукова думка, 1991. 288 с.
8. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
9. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. К. : Наукова думка, 1982. 158 с.
10. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. *Неклассические проблемы механики разрушения*: В 4 т. Том 3. К. : Наукова думка, 1992. 247 с.
11. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. К. : Наукова думка, 1989. 282 с.
12. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. К. : Наукова думка, 1992. 216 с.

13. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником. *Прикладная математика и механика*. 1975. Т. 39, № 1. С. 149–159.
14. Кудрявцев Б. А., Ракитин В. И. Трещина Гриффитса в пьезоэлектрической среде. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1979. № 1. С. 125–132.
15. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Под. ред. Гузя А. Н. К. : Наук. думка, 1989. Т. 5. 280 с.
16. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела. *Прикладная математика и механика*. 1964. № 6. С. 1061–1069.
17. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г., Моссаковская Л. В. Дальнейшее развитие задачи Галина о трении и сцеплении. *Докл. АН УССР*. 1983. 271, № 1. С. 60–64.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
19. Острик В. І. Контактна механіка. К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. 560 с.
20. Острик В. И. Контактное взаимодействие штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления. *Теор. и прикл. механика*. 2004. 39. С. 94–101.
21. Павленко А. В., Кагадий Т. С. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией. *Методи розв'язування прикладних задач механіки*. Дніпропетровськ. 2012. С. 320–327.
22. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К. : Наукова думка, 1968. 248 с.

23. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наукова думка, 1976. 456 с.
24. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
25. Половинкина И. Б., Улитко А. Ф. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*: Респ. межвед. научно-техн. сб. Харьков: Вища школа, 1978. Вып. 18. С. 10–17.
26. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
27. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К.: Наукова думка, 1981. 324 с.
28. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1972. Т. 8, № 11. С. 58–65.
29. Улитко А. Ф. О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости. *Современные проблемы механики и авиации*. 1982. С. 290–300.
30. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
31. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
32. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Взаємодія двох штампів із різними умовами контакту на границі ізотропної півплощини. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2021. Вип. 1. С. 81-89. DOI: <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-10>.
33. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Зчеплений та гладкий штамп на границі пружної ізотропної півплощини. *Математичні проблеми технічної механіки-2021*: матеріали Міжнар. наук. конф., 13-16 квітня 2021 р. Дніпро, Кам'янське, 2021. – С. 38-39.

34. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Взаємодія міжфазних тріщин з різними електричними та магнітними умовами на їх берегах у п'єзоелектромагнітному композиті. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій*. 2022. Вип. 34. Т. 1. С. 59-70. DOI: <https://doi.org/10.15421/4222110>.
35. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами. *Сучасні проблеми механіки: Матеріали VII міжнародної наукової конференції, 28-29 серпня 2023 р., Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, Україна, 2023*. С. 64.
36. Шевельова Н. В., Ходанен Т. В. Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки*. 2023. Вип. 2. С. 164-167.
37. Choi S. R., Chung I. Analysis of three collinear antiplane interfacial cracks in dissimilar piezoelectric materials under non-self equilibrated electromechanical loadings on a center crack. *J Mech Sci Technol*. 2013. Vol. 27. P. 3097-3101. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-013-0828-x>.
38. Choi S. R., Shin J. K. Three collinear antiplane interfacial cracks in dissimilar piezoelectric materials. *Int J Fract*. 2013. Vol. 179. P. 237-244. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9789-9>.
39. Clements D. L. A crack between dissimilar anisotropic media. *Int. J. Engen. Sci*. 1971. Vol. 9. P. 257–265.
40. England A. N. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1965. Vol. 32. P. 400–402.
41. Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1963. Vol. 30. P. 232–236.
42. Fan C., Zhou Y., Wang H., Zhao M. Singular behaviors of interfacial cracks in 2D magnetoelectroelastic bimaterials. *Acta Mech. Solida Sinica*. 2009. Vol. 22. P. 232-239.

43. Feng F. X., Lee K. Y., Li Y. D. Multiple cracks on the interface between a piezoelectric layer and an orthotropic substrate. *Acta Mech.* 2011. Vol. 221. P. 297-308. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0506-y>.
44. Feng W. J., Su R. K. L., Liu J. X., Li Y. S. Fracture analysis of bounded magneto-electro-elastic layers with interfacial cracks under magneto-electromechanical loads: plane problem. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 2010. Vol. 21. P. 581-594.
45. Feng F. X., Lee K. Y., Li Y. D. Multiple cracks on the arc-shaped interface in a semi-cylindrical magneto-electro-elastic composite with an orthotropic substrate. *Eng. Fract. Mech.* 2011. Vol. 78, P. 2029-2041.
46. Feng W. J., Ma P., Pan E. N., Liu J. X. A magnetically impermeable and electrically permeable interface crack with a contact zone in a magneto-electro-elastic bimaterial under concentrated magneto-electromechanical loads on the crack faces. *Sci. China Ser. G.* 2011. Vol. 54, P. 1666-1679.
47. Feng W. J., Ma P., Su R. K. L. An electrically impermeable and magnetically permeable interface crack with a contact zone in magneto-electro-elastic bimaterials under a thermal flux and magneto-electromechanical loads. *Int. J. Solids Structures.* 2012. Vol. 49, P. 3472-3483.
48. Fil'shtinskii L. A., Fil'shtinskii M. L. Anti-plane deformation of a composite piezoceramic space with interphase crack. *Int Appl Mech.* 1997. Vol. 33. P. 655–659. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02700683>.
49. Gao C. F., Kessler H., Balke H. Crack problems in magneto-electro-elastic solids. Part I: Exact solution of a crack. *Int. J. Eng. Sci.* 2003. Vol. 41 (9). P. 969–981.
50. Gao C. F., Tong P., Zhang T. Y. Interfacial crack problems in magneto-electro-elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* 2003. Vol. 41. P. 2105-2121.
51. Gao C. F., Noda N. Thermal-induced interfacial cracking of magneto-electro-elastic materials. *Int. J. Eng. Sci.* 2004. Vol. 42, P. 1347-1360.

52. Govorukha V., Kamlah M. On contact zone models for an electrically limited permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial. *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 164. P. 133–146.
53. Gruebner O., Kamlah M., Munz D. Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium. *Eng. Fract. Mech.* 2003. Vol. 70. P. 1399–1413.
54. Grynevych A. A., Loboda V. V. An electroded electrically and magnetically charged interface crack in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial. *Acta Mech.* 2016. Vol. 227, P. 2861–2879.
55. Hao T. H., Shen Z. Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Fract. Mech.* 1994. Vol. 47. P. 793–802.
56. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models. *Archive of Applied Mechanics*. 2000. Vol. 70. P. 127–143.
57. Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial. *International Journal of Fracture*. 2001. Vol. 111. P. 203–227.
58. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture mechanical assessment of interface cracks with contact zones in piezoelectric bimaterials under thermoelectromechanical loadings. I. Electrically permeable interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. P. 4191–4217.
59. Herrmann K. P., Loboda V. V., Kharun I. V. Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2004. Vol. 42. P. 335–348.
60. Herrmann K. P., Loboda V. V., Khodanen T. V. An interface crack with contact zones in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial. *Archive of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 80 (6). P. 651–670.
61. Hu K. Q., Gao C.-F., Zhong Z., Chen Z. T. Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric

quasicrystals. *ZAMM*. 2021. e202000360. DOI:
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000360>.

62. Hwo C. Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks. *Eng. Fracture Mech.* 1993. Vol. 45. P. 89–97.
63. Kattis M. A. Nonplanar interfacial cracks in anisotropic bimaterials. *Int. J. of Fracture*. 1999. Vol. 98. P. 313–327.
64. Kwon J. H , Lee K. Y. Interface crack between piezoelectric and elastic strips. *Arch Appl Mech.* 2000. Vol. 70. P. 707–714. DOI: <https://doi.org/10.1007/s004190000119>.
65. Li J. Y. Magneto-electroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials. *Int. J. Eng. Sci.* 2000. Vol. 38. P. 1993–2011.
66. Li X. F., Tang G. J. Antiplane interface crack between two bonded dissimilar piezoelectric layers. *Eur J Mech A/Solids*. 2003. Vol. 22. P. 231–242. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(03\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(03)00028-7).
67. Li R., Kardomateas G. A. The mixed mode I and II interface crack in piezoelectromagneto-elastic anisotropic bimaterials. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 614–627.
68. Lapusta Y., Onopriienko O., Loboda V. An interface crack with partially electrically conductive crack faces under antiplane mechanical and in-plane electric loadings. *Mech Res Commun*. 2017. Vol. 81. P. 38–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.02.004>.
69. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks. *Engineering Fracture Mechanics*. 1993. Vol. 44. № 4. P. 573–580.
70. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. A set of electrically conducting collinear cracks between two dissimilar piezoelectric materials // *International Journal of Engineering Science*, 1781, August 2022, 103725. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103725>.
71. Loboda V., Shevelova N., Khodaneni T., Lapusta Y. An interaction of electrically conductive and electrically permeable collinear cracks in the

- interface of piezoelectric materials. *Archive of Applied Mechanics*. 2022. Vol. 92. P. 1465–1480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02123-3>.
72. McMeeking R. M. Towards a fracture mechanics for brittle piezoelectric and dielectric materials. *Int. J. Fract.* 2001. Vol. 108. P. 25–41.
 73. Ma P., Feng W., Su R. K. L. Fracture assessment of an interface crack between two dissimilar magnetoelastoelectric materials under heat flow and magnetoelastomechanical loadings. *Acta Mech. Solida Sinica*. 2011. Vol. 24. P. 429-438.
 74. Ma P., Feng W. J., Su R. K. L. An electrically impermeable and magnetically permeable interface crack with a contact zone in a magnetoelastoelectric bimaterial under uniform magnetoelastomechanical loads. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2012. Vol. 32, P. 41-51.
 75. Ma P., Feng W. J., Su R. K. L. Pre-fracture zone model on electrically impermeable and magnetically permeable interface crack between two dissimilar magnetoelastoelectric materials. *Eng. Fract. Mech.* 2013. Vol. 102, P. 310-323.
 76. Ma P., Su R. K. L., Feng W. J. Fracture analysis of an electrically conductive interface crack with a contact zone in a magnetoelastoelectric bimaterial system. *Int. J. Solids Struct.* 2015. Vol. 53, P. 48–57.
 77. Nakhmein E. L., Nuller B. M. Contact between an elastic half-plane and a partly separated stamp. *J. Appl. Math. and Mech.* 1986. Vol. 50(4). P. 507-515. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(86\)90017-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90017-1).
 78. Narita F., Shindo Y. The interface crack problem for bonded piezoelectric and orthotropic layers under antiplane shear loading. *Int J Fract.* 1999. Vol. 98. P. 87–101. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1018755614151>.
 79. Onoprienko O., Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. Interaction of a conductive crack and of an electrode at a piezoelectric bimaterial interface. *C R Mecanique* 2018. Vol. 346. P. 449–459. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.04.001>.

80. Onopriienko O., Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An interface crack with mixed electro-magnetic conditions at it faces in a piezoelectric / piezomagnetic bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018. Vol. 12 (4). P. 301–310.
81. Onopriienko O., Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech*. 2019. e201800230. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201800230>.
82. Pak Y. E. Crack extension force in a piezoelectric material. *Trans. ASME. J. Appl. Mech*. 1990. Vol. 57. P. 647–653.
83. Pak Y. E. Force on a piezoelectric screw dislocation. *Trans. ASME. J. Appl. Mech*. 1990. Vol. 57. P. 863–869.
84. Park S., Sun C. T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc*. 1995. Vol. 78, N 6. P. 1475–1480.
85. Park S. B., Sun C. T. Effect of electric fields on fracture of piezoelectric ceramics. *Int. J. Fract*. 1995. Vol. 70. P. 203–206.
86. Qin Q.-H., Mai Y.-W. A closed crack tip model for interface cracks in thermopiezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36. P. 2463-2479.
87. Rybicki E. F., Kanninen M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Eng. Fract. Mech*. 1977. Vol. 9, P. 931–938.
88. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Appl Math Modelling*. 2020. Vol. 87. P. 287–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.003>.
89. Shevelova N. V., Khodanenko T. V. Piezoelectric bimaterial with electrically conductive and electrically permeable collinear cracks at the interface. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XX міжнародної науково-практичної конференції*. 23-25

листопада 2022 р., Дніпро: ДНУ, 2022. С. 226.
URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2022/12/MPZIS-2022-1.pdf>.

90. Shevelova N., Khodanenko T., Chapelle F., Lapusta Y., Loboda V. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelectroelastic bimaterial. *Acta Mech.* 2023. Vol. 234. P. 4899–4915. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
91. Shevelova N. V., Khodanenko T. V. An interaction of the interfacial cracks system in piezoelectromagnetic bimaterial. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XXI міжнародної науково-практичної конференції, 22-24 листопада 2023 р., Дніпро: ДНУ, 2023. С. 44.* URL: <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf>.
92. Sih G. C., Song Z. F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2003. Vol. 39. P. 209–227.
93. Soh A. K., Fang D. N., Lee K. L. Analysis of a bi-piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti-plane shear and in-plane electric loading. *Eur J Mech A/Solids*. 2000. Vol. 19. P. 961–77. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)01107-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)01107-4).
94. Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defects. *Int. J. Solids Structures*. 1991. Vol. 28. P. 491–505.
95. Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int. J. Solids Structures*. 1992. Vol. 29. P. 2613–2622.
96. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical Magazine*. 1958. Vol. 7. P. 625–646.
97. Su R. K. L., Feng W. J. Fracture behavior of a bonded magneto-electro-elastic rectangular plate with an interface crack. *Arch. Appl. Mech.* 2008. Vol. 78. P. 343–362.
98. Sulym H., Vasylyshyn A., Pasternak I. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagneto-electroelastic bimaterial solids on interaction of thin

- deformable inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2022. Vol. 3. P. 242–249.
99. Sun Y. G. Multi-interface cracks in a piezoelectric layer bonded to two half-piezoelectric spaces under anti-plane shear loading. *Mech Res Comm*. 2003. Vol. 30. P. 443-454. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(03\)00038-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(03)00038-7).
 100. Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1992. Vol. 40. P. 739–765.
 101. Ting T. C. T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites. *Int. J. Solids Structures*. 1986. Vol. 22. P. 965–983.
 102. Ting T. C. T. Interface cracks in anisotropic bimaterial. *J. Mech. Phys. Solids*. 1990. Vol. 38. P. 505–513.
 103. Tupholme G. E. A non-uniformly loaded anti-plane crack embedded in a half-space of a one-dimensional piezoelectric quasicrystal. *Meccanica*. 2018. Vol. 53. P. 973–983. DOI: <https://doi.org/10.1007/S11012-017-0759-1>.
 104. Verma P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29, P. 1529-1542.
 105. Viun O., Labesse-Jied F., Moutou-Pitti R., Loboda V., Lapusta Y. Periodic limited permeable cracks in magneto-electro-elastic media. *Acta Mech*. 2015. Vol. 226, P. 2225–2233.
 106. Viun O., Lapusta Y., Loboda V. Pre-fracture zones modelling for a limited permeable crack in an interlayer between magneto-electro-elastic materials. *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39, P. 6669–6684.
 107. Viun O., Loboda V., Lapusta Y. Electrically and magnetically induced Maxwell stresses in a magneto-electro-elastic medium with periodic limited permeable cracks. *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86, P. 2009–2020.

108. Wan Y., Yue Y., Zhong Z. Multilayered piezomagnetic/piezoelectric composite with periodic interface cracks under magnetic or electric field. *Eng. Fract. Mech.* 2012. Vol. 84, P. 132-145.
109. Wang B. L., Mai Y. W. On the electrical boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics. *Int. J. Eng. Science.* 2003. Vol. 41. P. 633–652.
110. Wang B.-L., Mai Y.-W. Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelectroelastic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44, P. 387–398.
111. Wang B. L., Mai Y. W. An Exact analysis for mode III cracks between two dissimilar magneto-electro-elastic layers. *Mech. Composite Materials.* 2008. Vol. 44, P. 533–548.
112. Wang B. L., Sun Y. G. Out-of-plane interface cracks in dissimilar piezoelectric materials. *Arch Appl Mech.* 2004. Vol. 74. P. 2-15. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02637205>.
113. Wang X., Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int J Solids Struct.* 2002. Vol. 39. P. 5895–5911. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00474-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00474-2).
114. Wang X., Zhong Z., Wu F. L. A moving conducting crack at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. *Int J Solids Struct.* 2003. Vol. 40. P. 2381–2399. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00060-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00060-X).
115. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America.* 1959. Vol. 49. P. 199–204.
116. Zhou Z. G., Chen Y., Wang B. The behavior of two parallel interface cracks in magneto-electro-elastic materials under an anti-plane shear stress loading. *Composite Structures.* 2007. Vol. 77. P. 97–103. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.056>.
117. Zhou Z. G., Wang B., Sun Y. G. Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites. *Int J Eng Science.* 2004. Vol. 42. P. 1155–1167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.01.005>.

118. Zhou Z. G., Zhang P. W., Wu L. Z. Solutions to a limited-permeable crack or two limited-permeable collinear cracks in piezoelectric/piezomagnetic materials. *Arch. Appl. Mech.* 2007. Vol. 77, P. 861–882.
119. Zhou Z. G., Wang J. Z., Wu L. Z. The behaviour of two parallel non-symmetric interface cracks in a magneto-electro-elastic material strip under an anti-plane shear stress loading. *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.* 2009. Vol. 29, P. 163–184.