

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Факультет фізики, електроніки та комп'ютерних систем  
Кафедра теоретичної фізики

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Мінаєв Павло Євгенійович**

УДК 530.145:539.12

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

# **ДИНАМІКА КВАРК-ГЛЮОННОЇ ПЛАЗМИ В ПРИСУТНОСТІ СИЛЬНИХ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У СТАНДАРТНІЙ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК**

104 Фізика та астрономія

Подається на здобуття наукового ступеня доктор філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Мінаєв П. Є.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Науковий керівник Скалозуб Володимир Васильович, доктор  
фізико-математичних наук, професор

Скалозуб В. В.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Дніпро – 2023 р.

## АНОТАЦІЯ

*Минаєв П.Є.* Динаміка кварк-глюонної плазми в присутності сильних магнітних полів у стандартній моделі елементарних частинок. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 – Фізика та астрономія. – 01.04.02 “Теоретична фізика” - Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2023.

**У дисертації вирішується важливе наукове завдання:** Обчислення напруженостей магнітних полів, що можуть народжуватися в кварк-глюонній плазмі під час фазового переходу деконфайнменту та у ранньому Всесвіті під час електрослабкого фазового переходу. Проведено обчислення та симуляції для обмеження параметричного простору двухдуплетної моделі для врахування сучасних теоретичних обмежень на параметри. Вказані обмеження варто в подальшому враховувати для пошуку параметрів для виконання умов Сахарова для пояснення баріонної асиметрії Всесвіту.

У **першому розділі** показано роль сильновзаємодіючої матерії на динаміку Всесвіту та роль магнітних полів у процесах великомасштабної структури. Формулюються актуальні питання теоретичного опису матерії за критичних умов. Розглядається формалізм фонового поля для опису процесів в присутності електромагнітного поля. Вводиться основний математичний апарат та методологія обчислень при скінченній температурі. Проводиться аналіз сучасної літератури стосовно обчислень ефективного потенціалу та параметрів кварк-глюонної плазми. Аналізуються результати отримані в рамках глюодинаміки та на градках.

У **другому розділі** детально досліджується створення в КГП полів  $B_3, B_8, H$  при температурах близьких до температури ФПД та оцінено напруженості згенерованих полів. Використовується формалізм уявного часу. Розраховується ефективний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  з ура-

хуванням глюонів і  $u$ -,  $d$ - і  $s$ -кварків при скінченній температурі. Ця конфігурація полів є стабільною завдяки внескам дейзі-діаграм, які компенсують уявну частину однопетльового ефективного потенціалу заряджених глюонів  $V^{(1)}(B_3, B_8, T)$ . Для оцінки напруженості поля використано асимптотичне високотемпературне розвинення, отримане методом перетворення Мелліна. Як наслідок цього дослідження ми спостерігаємо, що сильні хромомагнітні поля  $B_3, B_8$ , порядку  $\sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс генеруються для температури  $T \sim 160 - 220$  МеВ. Спонтанне намагнічення зникає при  $T \sim 110 - 120$  МеВ. Ця температура розглядається як температура деконфайнменту в присутності поля. Вона істотно нижча за оцінену без магнітних полів. Як випливає з отриманих результатів, в КГП сильні хромо(магнітні) поля порядку  $H_{3,8} \sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс повинні бути присутніми. Це впливає на всі процеси, що відбуваються, і може слугувати сигналами ФПД. Внаслідок намагнічування, зокрема, всі початкові стани заряджених частинок є дискретними по енергії. Це може змінити поперечний переріз конкретного процесу розсіювання і може бути виявлено в експериментах.

У **третьому розділі** розглядається вплив магнітних полів на процеси за температур, значно вищих за температуру деконфайнменту. Досліджується можливість генерації магнітних полів під час електрослабкого фазового переходу, який відбувся в ранньому Всесвіті за високої температури. До цього фазового переходу, коли Всесвіт був гарячим, частинки були безмасовими і симетрія відновлена. При охолодженні симетрія порушилась і через наявність ненульового скалярного конденсату калібрувальні  $Z$  та  $W^\pm$  бозони набули масу. Розраховано повний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  стандартної моделі з урахуванням внесків від дейзі-діаграм, показана можливість генерації магнітних та хромомагнітних полів за високої температури. Оцінено напруженість генерованих полів. Показано, що фазовий перехід у стандартній моделі не задовольняє критеріям Сахарова і тому модель потребує мо-

дифікацій. Сильні хромоманітні поля  $B_3, B_8$ , порядку  $\sim 10^{19}$  Тл і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{17}$  Тл генеруються для температури  $T \sim 100 - 500$  ГеВ. Симетрія відновлюється при  $T \sim 360$  ГеВ. Ця температура розглядається як температура фазового переходу за присутності поля. Вплив генерованих полів потрібно враховувати у всіх процесах, що відбувалися в гарячому Всесвіті на ранніх етапах його існування.

У **четвертому розділі** розглядається розширення стандартної моделі другим дуплетом скалярних полів. Утворена модель є сучасною теорією, в рамках якої відбувається багато досліджень. Зараз вивчення нейтрино, моделювання кандидатів на частинки темної матерії, пояснення існуючих неточностей СМ часто проводять у рамках 2HDM. Параметричний простір моделі є надзвичайно багатим, що дозволяє шукати області, де можна задовольнити умови Сахарова. Існує багато теоретичних обмежень, які вже відомі відносно скалярного потенціалу, врахування їх є обов'язковим при моделюванні. Комп'ютерними методами проведено моделювання вільних параметрів потенціалу та обчислені можливі маси нових частинок, за припущення слабкого порушення  $Z_2$ -симетрії та фіксованої маси найлегшого нейтрального бозона на рівні 125.09 ГеВ. Наведено значення мас всіх частинок та параметрів моделі в залежності один від одного. Показано дозволені області мас.

### **Наукова новизна одержаних в дисертації результатів:**

*Вперше:*

1. Досліджено можливість генерації магнітних та хромоманітних полів при фазовому переході деконфайнменту за рахунок кваркових петель. Показано можливість народження полів у всьому об'ємі плазми за високої температури.
2. Досліджено вплив магнітних полів на електрослабкий фазовий перехід на ранніх етапах еволюції Всесвіту. Показано неможливість фазового переходу першого роду у стандартній моделі в присутності полів.

3. Оцінено напруженості магнітних та хромоманітних полів, що генеруються у кварк-глюонній плазмі
4. Оцінено напруженості магнітних та хромоманітних полів, що генеруються при електрослабкому фазовому переході.

*Удосконалено та доповнено:*

1. Модифіковано та досліджено самоузгоджений ефективний потенціал усіх полів Стандартної моделі при високій температурі для подальшого використання при аналізі фазових переходів;
2. Проведено комп'ютерне моделювання параметричного простору дводуплетного розширення Стандартної моделі для подальшого вивчення фазових переходів в ній.

### **Наукове і практичне значення роботи. Використання результатів роботи.**

Результати, отримані в дисертаційній роботі, можуть бути використані для дослідження властивостей сильновзаємодіючої матерії, яка виникає в ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях, шляхом аналізу впливу зміни відповідних параметрів моделі на кінцеві спостережувані фізичні величини. Зокрема, врахування наявності магнітних полів в об'ємі плазми може змінювати кінцеві спостережувані стани. Такі дослідження можуть допомогти в розумінні впливу магнітних полів на фізичні процеси, які відбуваються в плазмі, і сприяти розвитку нашого розуміння властивостей сильновзаємодіючої матерії.

**Ключові слова дисертації:** кварк, глюон, кварк-глюона плазма, ядро-ядерні зіткнення, хромоманітне поле, магнітне поле, поляризація вакууму, квантова хромодинаміка, фазовий перехід деконфайнменту, електрослабкий фазовий перехід, Стандартна модель, дводуплетна модель, бозон Хіггса.

### **Список публікацій здобувача:**

*- в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

1. Minaiev P., Skalozub V. Magnetized quark-gluon plasma at the LHC // Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Fizyka. Radioelektronika. 2016. - V. 24, P. 25-30.
2. Minaiev P., Skalozub V. Magnetized Quark-Gluon Plasma at the LHC // Physics of Particles and Nuclei Letters. - 2018. - Vol. 15, No. 6, P. 568-575.
3. Minaiev P., Skalozub V. Spontaneous Magnetization of the Hot Quark-Gluon Plasma // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. - 2019. - V. 22, No. 3. - P. 233 - 241.
4. Minaiev P., Skalozub V. The electroweak phase transition in a spontaneously magnetized plasma // Ukrainian Journal of Physics. - 2019. - V. 64, No. 8. - P. 710-713.
5. Minaiev P. Spontaneous magnetization and electroweak phase transition in the scalar sector of 2HDM // Journal of Physics and Electronics - 2021. - V. 29, No 2, P. 3-7.

*- які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

1. International conference «New trends in High-Energy physics», 2019, Odessa, Ukraine.
2. XX International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2018, Dnipro, Ukraine.
3. XXI International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2019, Dnipro, Ukraine.
4. XXII International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2020, Dnipro, Ukraine.

5. XXIV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2022, Dnipro, Ukraine.
6. XXV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2023, Dnipro, Ukraine.
7. 19-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2019, Odesa, Ukraine.
8. 20-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2020, Odesa, Ukraine.
9. 21-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2021, Odesa, Ukraine.
10. Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем (MEICS-2020), 2020, Dnipro, Ukraine.
11. Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем (MEICS-2021), 2021, Dnipro, Ukraine.
12. Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем (MEICS-2022), 2022, Dnipro, Ukraine.
13. French-CERN-Ukrainian school of High Energy physics, Dnipro, Ukraine, 2020
14. X Young Scientists Conference “Problems of theoretical Physics”, Kyiv, Ukraine, 2019
15. Семінар, присвячений пам’яті Петра Івановича Фоміна "Квантова теорія та космологія 2022, Харків, Україна

**Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи кафедри теоретичної фізики «Нові стани**

матерії та ефективні взаємодії в експериментах на Великому гадронному колайдері» (2019-2021 рр., № держреєстрації 0119U100767).



## SUMMARY

**Minaiev P.** Dynamics of quark-gluon plasma in strong magnetic fields in the Standard model and beyond. – Qualified scientific work on the rights of the manuscript.

Ph.D. thesis for the scientific degree of Philosophy Doctor in the specialty 104 – "Physics and astronomy"– 01.04.02 "Theoretical physics". – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2023.

**The dissertation solves important scientific tasks:** Calculation of the strength of generated magnetic fields that can occur in the quark-gluon plasma during deconfinement phase transition and during the electroweak transition in Hot Universe. Constraints on the parametric space of the Two Higgs doublet model to satisfy Sakhorov's conditions for the baryon asymmetry of the Universe.

In the **first section** the role of strongly interacting matter in the dynamics of the Universe and the role of magnetic fields in the processes of large-scale structure are shown. The current questions of the theoretical description of matter under critical conditions are formulated. The formalism of the background field for describing processes in the presence of an electromagnetic field is considered. The main mathematical apparatus and methodology of calculations at finite temperatures are introduced. An analysis of the current literature regarding the calculations of the effective potential and parameters of quark-gluon plasma is carried out. The results obtained within the framework of gluodynamics and on lattices are analyzed.

In the **second section** the creation of  $B_3, B_8, H$  fields in the QGP at temperatures close to the DPT temperature is investigated in detail, and the field strengths are estimated. The formalism of imaginary time is used. The effective one-loop potential  $V(B_3, B_8, H, T)$  is calculated taking into account gluons and  $u$ –,  $d$ –, and  $s$ –quarks at a finite temperature. This field configuration is stable due to the contributions of the daisy diagrams, which compensate for the imagi-

nary part of the one-loop effective potential of the charged gluons  $V^{(1)}(B_3, B_8, T)$ . The asymptotic high-temperature expression obtained by Mellin's transformation to estimate the field strength. As a result of this research, we observe that the strong chromomagnetic fields  $B_3, B_8$ , are of the order of  $\sim 10^{18} - 10^{19}$  G and the ordinary magnetic field  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  G are generated for the temperature  $T \sim 160 - 220$  MeV. Spontaneous magnetization disappears at  $T \sim 110 - 120$  MeV. This temperature is considered as the deconfinement temperature in the presence of a field. It is significantly lower than the one estimated without a magnetic field. As it follows from the obtained results, the QGP has strong chromo(magnetic) fields of the order of  $H_{3,8} \sim 10^{18} - 10^{19}$  G and  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  G must be present. This affects all the processes taking place and can serve as DPT signals. As a result of magnetization, in particular, all initial states of charged particles have discrete energy. This can change the cross-section of a particular process and can be detected in experiments.

In the **third section** the influence of magnetic fields on processes at temperatures significantly higher than the temperature of deconfinement is considered. The possibility of generating magnetic fields during the electroweak phase transition, which occurred in the early Universe at high temperatures, is investigated. Prior to this phase transition, when the Universe was hot, particles were massless and symmetry was restored. As the Universe cooled, the symmetry was broken, and due to the presence of a nonzero scalar condensate, the gauge bosons  $Z$  and  $W^\pm$  acquired mass. The complete one-loop potential  $V(B_3, B_8, H, T)$  of the Standard Model is calculated, taking into account the contributions from daisy diagrams. The possibility of generating magnetic and chromomagnetic fields at high temperatures is shown. The strength of the generated fields is estimated. It is shown that the phase transition in the Standard Model does not satisfy the Sakharov conditions and as a result, the model requires modifications. Strong chromomagnetic fields  $B_3, B_8$ , on the order of  $\sim 10^{19}$  T and an ordinary magnetic field  $H \sim 10^{17}$  T are generated at temperatures  $T \sim 100 - 500$  GeV. Symmetry

is restored at  $T \sim 360$  GeV, which is considered the temperature of the phase transition in the presence of the field. The influence of the generated fields needs to be taken into account in all processes that occurred in the hot Universe during its early stages of existence.

In the **fourth section** the extension of the Standard Model by a second scalar field doublet is considered. The resulting model is a modern theoretical framework that has been subject to extensive research. Currently, the study of neutrinos, modeling candidates for dark matter particles, and explaining existing discrepancies in the Standard Model are often conducted within the framework of the 2HDM. The parametric space of the model is extremely rich, allowing the search of regions where Sakharov's conditions can be satisfied. There are many theoretical constraints already known for the scalar potential, and their inclusion is necessary in the modeling process. Using computer methods, the free parameters of the potential have been simulated, and the possible masses of new particles have been calculated, assuming a weak violation of the  $Z_2$  symmetry and a fixed mass of the lightest neutral boson at approximately 125.09 GeV. The values of the masses of all particles and parameters of the model are provided, showing their interdependencies. Regions of allowed masses are demonstrated.

#### **Scientific novelty of the results obtained in the dissertation:**

*New results:*

1. The possibility of generating magnetic and chromomagnetic fields during the deconfinement phase transition through quark loops has been researched. The possibility of generating fields throughout all the volume of plasma at high temperatures has been demonstrated.
2. The influence of magnetic fields on the electroweak phase transition in the early stages of the Universe's evolution has been researched. The impossibility of a first-order phase transition in the presence of fields within the Standard Model has been shown.

3. The strengths of the magnetic and chromomagnetic fields generated in the quark-gluon plasma have been estimated.
4. The strengths of the magnetic and chromomagnetic fields generated during the electroweak phase transition have been estimated.

*Modified results:*

1. The self-consistent effective potential of all fields in the Standard Model has been modified and calculated at high temperatures for further analysis of phase transitions.
2. Computer modeling of the parametric space of the two-doublet model has been performed for further research of phase transitions within the model.

**Scientific and practical significance of the work. Application of the results of the investigations.** The results obtained in the dissertation work can be used to research the properties of strongly interacting matter produced in nucleus-nucleus and proton-proton collisions by analyzing the influence of varying the corresponding model parameters on the final observed physical quantities. In particular, taking into account the presence of magnetic fields in the plasma volume can modify the final observable states. Such research can help us to understand the impact of magnetic fields on the physical processes occurring in the plasma and contribute to the development of our understanding of the properties of strongly interacting matter.

**Key words of the dissertation:** quark, gluon, quark-gluon plasma, chromomagnetic field, magnetic field, vacuum polarization, quantum chromodynamics, deconfinement phase transition, electroweak phase transition, Standard model, two Higgs doubled model, Higgs boson.

**List of applicant's publications:**

- *in which the main scientific results of the dissertation are published:*

1. Minaiev P., Skalozub V. Magnetized quark-gluon plasma at the LHC // Dnipropetrovs'koho universytetu Fizuka. Radioelektronika. 2016. - V. 24, P. 25.
2. Minaiev P., Skalozub V. Magnetized Quark-Gluon Plasma at the LHC // Physics of Particles and Nuclei Letters. - 2018. - Vol. 15, No. 6, P. 568-575.
3. Minaiev P., Skalozub V. Spontaneous Magnetization of the Hot Quark-Gluon Plasma // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. - 2019. - V. 22, No. 3. - P. 233 - 241.
4. Minaiev P., Skalozub V. The electroweak phase transition in a spontaneously magnetized plasma // Ukrainian Journal of Physics. - 2019. - V. 64, No. 8. - P. 710-713.
5. Minaiev P. Spontaneous magnetization and electroweak phase transition in the scalar sector of 2HDM // Journal of Physics and Electronics - 2021. - V. 29, No 2.

- *which confirms the approval of the materials of the dissertation:*

1. International conference «New trends in High-Energy physics», 2019, Odesa, Ukraine.
2. XX International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2018, Dnipro, Ukraine.
3. XXI International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2019, Dnipro, Ukraine.
4. XXII International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2020, Dnipro, Ukraine.
5. XXIV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2022, Dnipro, Ukraine.

6. XXV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2023, Dnipro, Ukraine.
7. 19-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2019, Odesa, Ukraine.
8. 20-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2020, Odesa, Ukraine.
9. 21-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, 2021, Odesa, Ukraine.
10. Promising trends of modern electronics, informational and computer systems (MEICS-2020), 2020, Dnipro, Ukraine.
11. Promising trends of modern electronics, informational and computer systems (MEICS-2021), 2021, Dnipro, Ukraine.
12. Promising trends of modern electronics, informational and computer systems (MEICS-2022), 2022, Dnipro, Ukraine.
13. French-CERN-Ukrainian school of High Energy physics, Dnipro, Ukraine, 2020
14. X Young Scientists Conference “Problems of theoretical Physics”, Kyiv, Ukraine, 2019
15. The seminar dedicated to the memory of Petro Fomin ‘Quantum Field Theory and Cosmology’, 2022, Kharkiv, Ukraine.

**The thesis was performed within the framework of the state budget research work of the Department of Theoretical Physics «New states of matter and effective interactions in experiments on the Large Hadron Collider» (2019-2021, № 0119U100767).**

# Зміст

<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>ВСТУП . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ФОРМАЛІЗМ ФОНОВОГО ПОЛЯ ПРИ СКІНЧЕ-</b>	
<b>НІЙ ТЕМЕРАТУРІ . . . . .</b>	<b>27</b>
1.1 Зовнішнє електромагнітне поле в теоріях зі спонтанним пору-	
шенням симетрії . . . . .	28
1.2 Формалізм для обчислення ефективного потенціалу. . . . .	30
1.3 Нормалізація ефективного потенціалу . . . . .	34
<b>РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРИ ФАЗО-</b>	
<b>ВОМУ ПЕРЕХОДІ ДЕКОНФАЙНМЕНТУ . . . . .</b>	<b>35</b>
2.1 Спектр кварків у зовнішніх полях. Внесок кваркових полів до	
однопетльового потенціалу . . . . .	38
2.2 Внесок глюонних полів в однопетльовий потенціал . . . . .	40
2.3 Внесок від дейзі-діаграм у потенціал . . . . .	43
2.4 Перетворення Мелліна. Асимптотичне розвинення ефективного	
потенціалу . . . . .	45
2.4.1 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(n\omega)$ . . . . .	45
2.4.2 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 K_2(n\omega)$ . . . . .	47
2.4.3 Асимптотична поведінка сум . . . . .	49
2.5 Асимптотичне розвинення кваркового потенціалу . . . . .	50
2.5.1 Потенціал $V^0$ . . . . .	51
2.5.2 Потенціал $V^T$ . . . . .	52
2.6 Напруженості полів, згенерованих у КГП . . . . .	53
2.7 Висновки . . . . .	55

## РОЗДІЛ 3. ГЕНЕРАЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРИ ЕЛЕКТРО- СЛАБКОМУ ФАЗОВОМУ ПЕРЕХОДІ . . . . . 58

3.1	Стандартна модель елементарних частинок при скінченній тем- пературі . . . . .	59
3.2	Внесок кваркових полів в ефективний потенціал . . . . .	63
3.2.1	Асимптотичні перетворення потенціалу $V_q^0$ . . . . .	66
3.2.2	Асимптотичні перетворення потенціалу $V_q^T$ . . . . .	66
3.3	Розрахунок сум за допомогою перетворення Мелліна . . . . .	67
3.3.1	Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(n\omega)}{n}$ . . . . .	68
3.3.2	Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_2(n\omega)}{n^2}$ . . . . .	70
3.3.3	Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\omega)}{n^2}$ . . . . .	71
3.3.4	Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(n\omega)}{n}$ . . . . .	72
3.3.5	Асимптотична поведінка обчислених сум . . . . .	73
3.4	Фазовий перехід у скалярній теорії . . . . .	76
3.5	Ефективний потенціал у Стандартній моделі за присутності ма- гнітних полів . . . . .	82
3.5.1	Внесок скалярного поля . . . . .	82
3.5.2	Внески $W^\pm$ -, $Z$ - бозонних полів . . . . .	83
3.5.3	Внесок лептонних полів . . . . .	85
3.5.4	Внесок глюонних полів . . . . .	86
3.5.5	Внесок кваркових полів . . . . .	86
3.6	Фазовий перехід у Стандартної моделі за присутності магні- тних полів . . . . .	87
3.7	Висновки . . . . .	92

## РОЗДІЛ 4. ПАРАМЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР ДВОДУПЛЕТНОЇ МОДЕЛІ . . . . . 95

4.1	Потенціал моделі . . . . .	96
-----	----------------------------	----



4.2	Юкавівська взаємодія в 2HDM . . . . .	102
4.3	Умови нормування потенціалу . . . . .	103
4.4	Симуляції точок параметричного простору . . . . .	103
4.5	Ілюстрація результатів . . . . .	105
4.6	Висновки . . . . .	112
<b>ВИСНОВКИ . . . . .</b>		<b>113</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . .</b>		<b>116</b>
<b>ДОДАТКИ . . . . .</b>		<b>124</b>
	Додаток А . . . . .	124
	Додаток Б . . . . .	127

## Перелік умовних позначень

- ЦЕРН - Європейська організація з ядерних досліджень (Швейцарія - Франція).
- LHC (англ. Large Hadron Collider) - Великий гадронний колайдер (ЦЕРН, Швейцарія - Франція).
- RHIC (англ. The Relativistic Heavy Ion Collider) - Релятивістський колайдер важких іонів (Брукхейвенська національна лабораторія, США).
- SPS (англ. Super Proton Synchrotron) - Суперпротонний синхротрон (ЦЕРН, Швейцарія - Франція).
- СМ - стандартна модель елементарних частинок.
- 2HDM (англ. Two Higgs Doublet Model) - дводуплетна модель елементарних частинок.
- ЕР (англ. Effective Potential) - ефективний потенціал.
- КХД - квантова хромодинаміка.
- КГП - кварк-глюонна плазма.
- ФПД - фазовий перехід деконфайнменту.
- ЕСФП - електрослабкий фазовий перехід.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Динаміка Всесвіту на ранніх етапах його існування викликає багато питань та є сучасним напрямком досліджень у фізиці високих енергій. Ранній Всесвіт був гарячою системою, яка з часом розширювалась та охолоджувалася. В процесі охолодження відбулася ціла низка фазових переходів, результатом яких став сучасний Всесвіт та його сучасна структура.

До основних фазових переходів слід віднести електрослабкий фазовий перехід та фазовий перехід деконфайнменту.

Електрослабкий фазовий перехід відбувся за надзвичайно високих температур. Внаслідок спонтанного порушення симетрії та утворення конденсату скалярного поля калібрувальні  $Z$  та  $W$  бозони, лептони та кварки набули маси.

Механізм набуття маси частинок за рахунок взаємодії зі скалярним конденсатом – механізм Хіггса, є частиною сучасної теорії фундаментальних взаємодій. Стандартна модель елементарних частинок Вайнберга-Салама-Глешоу була побудована наприкінці 60-х років ХХ сторіччя і експериментально підтверджена великою кількістю експериментів. Зокрема у 2012 році в експериментах на Великому Гадронному Колайдері була експериментально відкрита частинка – бозон Хіггса, за теоретичне передбачення та подальше відкриття якої було присуджено Нобелівську премію 2013 року.

Фазовий перехід деконфайнменту відбувся значно пізніше за більш низьких температур. Кварки, які до цього були вільними, через явище асимптотичної свободи, стали утримуватися у кольорово нейтральних зв'язаних станах, які називаються адронами та поділяються на дві групи — баріони та мезони. Найбільш відомими серед баріонів є протони та нейтрони — основні складові атомних ядер, а серед мезонів — піони — найлегші адрони, які у великих кількостях утворюються у високоенергетичних процесах у космосі та на при-

скорювачах. На сьогодні відомо близько 400 стійких адронів та їх збуджених станів (резонансів), які перелічені у таблицях Particle Data Group. Існують переконливі аргументи, як теоретичні, так і експериментальні, на користь того, що при високих густинах енергії сильновзаємодійна матерія повинна перейти в стан деконфайнменту та знову існувати у вигляді взаємодіючих кварків та глюонів — кварк-глюонної плазми (КГП).

Фазова структура сильновзаємодійної матерії, наприклад, її різні фази та критичні точки, є сьогодні найбільш фундаментальною темою фізики високих енергій. Великі експериментальні та теоретичні зусилля присвячені пошуку нових форм сильновзаємодійної матерії. У лабораторних експериментах можна дослідити різні області фазового переходу шляхом дослідження ядро-ядерних зіткнень. Чимало даних із ядро-ядерних зіткнень було отримано з експериментів на Суперпротонному синхротроні (SPS) і Великому адронному колайдері (LHC) у Європейському центрі з ядерних досліджень (CERN), а також на Релятивістському колайдері важких іонів (RHIC) в Брукгейвенській національній лабораторії (BNL). Ці експерименти на прискорювачах сьогодні є найпотужнішими експериментальними програмами в історії людства. Нові вимірювання дадуть відповідь на одне з основних питань — де знаходиться критична точка сильновзаємодійної матерії на фазовій діаграмі температура — баріонний хімічний потенціал.

Вплив магнітних полів на динаміку багатьох систем описано в великій кількості наукових праць. В теоретичних роботах показано можливість народження магнітних полів різної природи за рахунок різних механізмів. Врахування цих полів надзвичайно важливе для експериментальних досліджень на сучасних прискорювачах, а також, для теоретичних досліджень різних фізичних процесів. Оскільки кварки є зарядженими частинками, то вплив магнітних полів на фазовий перехід деконфайнменту повинен існувати. Проте досі це є відкритим питанням сучасної теорії. Можливі нові явища у кварк-глюонній плазмі в цих критичних умовах, зокрема спонтанна гене-

рація магнітних та хромагнітних полів. Народжені поля змінюють енергію системи й вносять корективи значення критичної температури переходу.

Електрослабкий фазовий перехід в рамках Стандартної моделі має низку відкритих питань, зокрема, виконання критеріїв Сахарова для утворення баріонної асиметрії, що спостерігається у Всесвіті. Вплив сильних магнітних полів на цей фазовий перехід в рамках Стандартної моделі, а також розширеної дводуплетної моделі може закрити це протиріччя та визначити простір значень параметрів моделі, які повинні експериментально реалізуватися в експериментах на прискорювачах. Вивченню цих питань присвячена дисертаційна робота.

**Вищезазначене підтверджує актуальність вибору теми дисертації та завдань, що в ній вирішуються.**

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної дослідної роботи кафедри теоретичної фізики «Нові стани матерії та ефективні взаємодії в експериментах на Великому гадронному колайдері» (2019-2021 рр., № держреєстрації 0119U100767).

**Мета і завдання дослідження.**

**Метою дослідження** є моделювання та прогнозування напруженостей магнітних та хромагнітних полів, що можуть народжуватися в системах взаємодіючих полів при високій температурі в різних моделях взаємодії елементарних частинок. Зокрема, у ранньому Всесвіті та на сучасних прискорювачах елементарних частинок.

*Об'єкт дослідження* – системи взаємодіючих полів при високій температурі. Кванти полів, що є відповідно елементарними частинками, які взаємодіють при високій температурі.

*Предмет дослідження* – самоузгоджений ефективний потенціал системи взаємодіючих полів при високій температурі, його поведінка за різних температур та магнітних полів. Вплив магнітних полів на мінімум ефектив-

ного потенціалу.

Для досягнення мети дисертації були сформульовані такі **завдання дослідження**:

1. Модифікація та обчислення самопогодженого ефективного потенціалу усіх полів Стандартної моделі при високій температурі для подальшого використання при аналізі фазових переходів;
2. Оцінка напруженостей магнітних та хромоманітних полів у кварк-глюонній плазмі;
3. Дослідження можливості генерації магнітних полів при фазовому переході деконфайнменту;
4. Дослідження впливу магнітних полів на фазові переходи на ранніх етапах еволюції Всесвіту.
5. Комп'ютерне моделювання параметричного простору дводуплетного розширення стандартної моделі для подальшого вивчення фазових переходів в ній.

**Методи дослідження.** Для дослідження можливості спонтанної генерації магнітних полів використані методи квантової хромодинаміки та температурної теорії поля. Метод ефективного потенціалу використовується для моделювання та чисельного прогнозування напруженостей магнітних полів при високій температурі. Для моделювання параметричного простору дводуплетної моделі використано комп'ютеризовані методи Монте-Карло та існуючі методи Стандартної моделі елементарних частинок. Зокрема, вирази для ефективного потенціалу при скінченній температурі отримано методами сумування Мацубарівських хвильових функцій та застосуванні формалізму Швінгера [42].

**Наукова новизна отриманих результатів.**

В дисертаційній роботі отримано такі оригінальні результати:

1. Модифіковано та обчислено самоузгоджений ефективний потенціал усіх полів Стандартної моделі при високій температурі для подальшого використання при аналізі фазових переходів.
2. Досліджено можливість генерації магнітних полів при фазовому переході деконфайнменту. Показано можливість народження полів у всьому об'ємі плазми за високої температури.
3. Оцінено напруженості магнітних та хромагнітних полів, що генеруються у кварк-глюонній плазмі.
4. Досліджено вплив магнітних полів на електрослабкий фазовий перехід на ранніх етапах еволюції Всесвіту. Показано неможливість фазового переходу першого роду у стандартній моделі.
5. Проведено комп'ютерне моделювання параметричного простору дводуплетного розширення Стандартної моделі для подальшого вивчення фазових переходів в ній.
6. Згенеровано та запрограмовано алгоритми генерації точок параметричного простору, а саме маси, кеплінги, кути змішування.

**Практичне значення отриманих результатів. Використання результатів роботи.**

Результати, отримані в дисертаційній роботі, можуть бути використані для дослідження властивостей сильновзаємодіючої матерії, що народжується у ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях, шляхом аналізу впливу магнітних полів на спостережувані величини та на кінцеві фізичні стани. Врахування внесків генерованих полів на спектри елементарних частинок, утворених у плазмі.

**Особистий внесок здобувача.**

Основна робота полягала у теоретичній побудові методами квантової теорії поля ефективного потенціалу системи. Обчислення та комп'ютерне моделювання поставлених задач. Для отримання внесків від кваркових полів в однопетльовий ефективний потенціал було розв'язано рівняння Дірака в присутності магнітних та хромоманітних полів. Як результат, отримано спектр енергії кварків. Проведено сумування, регуляризація отриманих виразів та обчислення необхідних інтегралів.

Проведено аналіз літературних джерел для побудови повного самопогодженого однопетльового потенціалу Стандартної моделі в присутності магнітних та хромоманітних полів за скінченної температури. Комп'ютерними методами розраховано умови мінімуму потенціалу, побудовано відповідні графіки та обчислено величини, які були необхідні. Аналіз отриманих математичних функцій чисельно був проведений за допомогою пакету Wolfram Mathematica.

Використано метод перетворення Мелліна для побудови високотемпературних та низькотемпературних асимптотик, а саме обчислено суми функцій Макдональда та Бесселя. Коректність асимптотик перевірялася чисельними методами. Результируючі вирази використовувались для обчислення повного потенціалу.

Проведено аналіз літературних джерел для роботи з дводуплетним розширенням Стандартної моделі. Написано необхідні програми для генерації точок параметричного простору даної моделі методами Монте-Карло, а саме мовою програмування Python 3 згенеровано відповідний код. Проведені відповідні обчислення мас та кутів змішування.

Оформлено та підготовлено публікації та доповіді на міжнародних і Всеукраїнських конференціях.

**Апробація результатів дисертації.** Результати висвітлені у дисертації доповідалися на міжнародних наукових конференціях.

**Результати роботи доповідалися:**



1. International conference «New trends in High-Energy physics», May, 2019, Odesa, Ukraine.
2. XXI International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2019, Dnipro, Ukraine.
3. XXII International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2020, Dnipro, Ukraine.
4. XXIV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2022, Dnipro, Ukraine.
5. XXV International Youth Scientific and Practical Conference “Human and Space”, 2023, Dnipro, Ukraine.
6. 19-th Odessa International Astronomical Gamow Conference-school, August, 2019, Odessa, Ukraine.
7. 19-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, August, 2020, Odessa, Ukraine.
8. 19-th Odesa International Astronomical Gamow Conference-school, August, 2021, Odesa, Ukraine.
9. Семінар присвячений пам’яті Петра Івановича Фоміна "Квантова теорія поля та космологія липень, 2022, Харків, Україна
10. VII Всеукраїнська науково-практична конференція «Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем» MEICS-2022, 23-25 листопада 2022 р., м. Дніпро, Україна
11. VI Всеукраїнська науково-практична конференція «Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем» MEICS-2021 24-26 листопада 2021 р., м. Дніпро, Україна

12. V Всеукраїнська науково-практична конференція «Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп'ютерних систем» MEICS-2020 25-27 листопада 2020 р., Дніпро, Україна

### **Опубліковані роботи:**

1. Minaiev P., Skalozub V. Magnetized quark-gluon plasma at the LHC // Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Fizuka. Radioelektronika. 2016. - V. 24, P. 25.
2. Minaiev P., Skalozub V. On magnetization of quark-gluon plasma at the LHC experiment energies // Physics of Particles and Nuclei Letters. -2018. - Vol. 15, No. 6, P. 568-575.
3. Minaiev P., Skalozub V. Spontaneous Magnetization of the Hot Quark-Gluon Plasma // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. - 2019. - V. 22, No. 3. - P. 233 - 241.
4. Minaiev P., Skalozub V. The Electroweak phase transition in a spontaneously magnetized plasma // Ukrainian Journal of Physics. - 2019. - V. 64, No. 8. - P. 710-713.
5. Minaiev P. Spontaneous magnetization and electroweak phase transition in the scalar sector of 2HDM // Journal of Physics and Electronics - 2021. - V. 29, No 2.

**Структура дисертації та об'єм дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, що відповідають логічно завершеним етапам досліджень, висновків та бібліографії, яка містить 81 посилання. Дисертація включає 17 рисунків та 5 таблиць. Загальний обсяг роботи становить 128 сторінок друкованого тексту.

# 1 ФОРМАЛІЗМ ФОНОВОГО ПОЛЯ ПРИ СКІНЧЕННІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

Дослідження неабелевих калібрувальних полів при високій температурі є однією з найактуальніших тем в фізиці високих енергій. Вони надають можливість розглядати різні проблеми космології, електрослабкого фазового переходу, утворення магнітних полів у ранньому Всесвіті, кварк-глюонної плазми та інших пов'язаних питань. Калібрувальні поля описують властивості фундаментальних сил природи - об'єднаних електромагнітних і слабких, сильних та, як вважається, нових сил, що виходять за межі Стандартної моделі елементарних частинок.

Найважливішою властивістю неабелевих калібрувальних полів є асимптотична свобода, яка проявляється, зокрема, у послабленні ефективних зв'язків при високій температурі, високій енергії, сильних зовнішніх полях, густині тощо. Цей тип поведінки відкриває можливість застосування аналітичних методів розрахунків за малими збуреннями. Інший важливий аспект взаємодії полів - це поведінка при низькій температурі (та малих значеннях інших фізичних параметрів). З загальних принципів теорії поля випливає, що асимптотична свобода при високій температурі неминуче корелює з нестійкістю вакууму при низьких температурах.

Те ж саме також стосується інфрачервоного регіону інших зовнішніх умов. І навпаки, теорія, яка не є асимптотично вільною при високій температурі (або великих значеннях інших динамічних змінних), стійка при малих значеннях цих змінних. Такий тип кореляції призводить до важливого явища, властивого некомутативним калібрувальним теоріям - створення класичних макроскопічних полів-конденсатів, які усувають нестійкість та формують фонові вакуумні стани.

## 1.1 Зовнішнє електромагнітне поле в теоріях зі спонтанним порушенням симетрії

У квантовій електродинаміці (КЕД) зовнішнє електромагнітне поле  $F_{\mu\nu}$  може бути введене шляхом розкладання електромагнітного потенціалу на квантовану частину  $A_\mu^R$  та класичну частину  $\bar{A}_\mu$ :  $A_\mu = A_\mu^R + \bar{A}_\mu$ . Лагранжіан залишається інваріантним відносно геометричних перетворень

$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha^0$ , які здійснюються завдяки зовнішньому полю:

$$\begin{aligned} A_\mu^R &\rightarrow A_\mu^{R'} = A_\mu^R; \\ \bar{A}_\mu &\rightarrow \bar{A}'_\mu = \bar{A}_\mu + \partial_\mu \alpha^0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

У неабельових теоріях ситуація є складнішою, оскільки електромагнітне поле відокремлюється від мультиплету полів  $V_\mu^a$ , які разом зазнають групового  $SU(2)$  перетворення, і при квантуванні необхідно зафіксувати калібрування для  $W_\mu^\pm$ .

Ми розглядаємо найзагальніше лінійне R-калібрування  $R_\xi$ ,

$$\partial_\mu W^{\pm\mu} \mp i \frac{M}{\xi} \phi^\pm = C^\pm(x), \quad (1.2)$$

де  $\xi$  - параметр. Умови (1.2) повністю знімають відхилення для розбитих підгруп, описаних параметрами  $\alpha^+$  і  $\alpha^-$ , і це дозволяє квантувати теорію. Формально все це зводиться до додавання до бозонного лагранжіана  $\mathcal{L}_b$  двох доданків:

$$\mathcal{L}_g = -\xi \left| \partial_\mu W^{+\mu} - i \frac{M}{\xi} \phi^+ \right|^2;$$

$$\mathcal{L}_{F.P.} = \bar{\eta}^0 \eta^0 + \bar{\eta}^+ \eta^+ + \frac{M^2}{\xi} \bar{\eta}^+ \eta^+ + \frac{eM}{\xi} \Phi \bar{\eta}^+ \eta^+ - \frac{eM}{\xi} \bar{\eta}^+ \phi^+ \eta^0 + \quad (1.3)$$

$$+ie\bar{\eta}^+(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu)\eta^+ - ie\bar{\eta}^+(\partial_\mu W^{+\mu} + W_\mu^+ \partial^\mu)\eta^0 +$$

$$+ie\bar{\eta}^0(\partial_\mu W^{+\mu} + W_\mu^+ \partial^\mu)\eta^- + h.c.;$$

де  $\eta^+$  та  $\eta^0$  - скалярні ферміївські поля привидів Фаддеева-Попова. Перший доданок у (1.3) виникає, якщо зафіксовано калібрування електромагнітного поля,  $\partial_u A^u = C^0(x)$ .

Якщо ми тепер розкладемо  $A_\mu = A_\mu^R + \bar{A}_\mu$ , то  $\mathcal{L}_b + \mathcal{L}_g$ , а також  $\mathcal{L}_{F.P.}$ , не будуть інваріантними відносно перетворень (1.1). Це ускладнює інтерпретацію  $\bar{A}_\mu$  як потенціалу зовнішнього електромагнітного поля. При вивченні процесів, обумовлених взаємодією з  $A_\mu$ , необхідно використовувати складну систему рівнянь Ворда для повного набору полів, що відповідають як непорушеним, так і порушеним підгрупам, що більшості випадків є практично нерозв'язними. У зв'язку з цим, і також через те, що ефективний потенціал залежить від  $\xi$  (див. нижче), перші дослідження в неабельових теоріях зі спонтанним порушенням симетрії та включенням зовнішнього поля були проведені в калібруванні U, в якому є лише фізичні поля і лише  $U(1)$ -симетрія фотона зберігається. Отже, зовнішнє поле може бути введене у цьому випадку, так само як і в КЕД. Проте у U-калібруванні є недолік те, що функції Гріна в ній є неренормованими, ренормованою є лише матриця S. Це призводить до ускладнень у обчисленнях.

Квантування теорій з довільною локальною симетрією шляхом введення класичних полів, які задовольняють певним рівнянням руху, було реалізовано Девіттом [1], і його метод широко використовується в безмасових неабельових теоріях. Основною перевагою цього методу, методу фонового поля, є можливість збереження інваріантності відносно калібрувального перетворення зовнішнього поля за накладених умов калібрування. Ми будемо використовувати метод фонового поля для квантування теорії зі спонтанним

порушенням симетрії. Замість (1.9) ми накладатимемо умову, коваріантну відносно  $A_\mu$ :

$$\partial_\mu W^{\pm\mu} \pm ie\bar{A}_\mu W^{\pm\mu} \mp i\frac{M}{\xi}\phi^\pm = C^\pm(x) \quad (1.4)$$

і це вирішує проблему введення електромагнітного поля в калібруванні R.

## 1.2 Формалізм для обчислення ефективного потенціалу.

Для вивчення вакууму використовується ефективний потенціал. Проблема його обчислення в разі довільно змінного електромагнітного поля є надзвичайно складною і досі не вирішеною. Лише для постійного та однорідного електромагнітного поля,  $F_{\mu\nu} = const$ , відомий пропагатор W-бозона, і можливо отримати ефективний потенціал  $V(F, \Phi_c)$  у замкнутому вигляді. З фізичної точки зору, обмеження постійного поля не так важливо для вивчення поведінки симетрії. З загальних міркувань зрозуміло, що поля, які нас цікавлять, мають бути сильними, щоб створити достатньо сильну поляризацію вакууму, яка визначить властивості ефективного потенціалу. У випадку сильних полів результати для поляризації вакууму, отримані в постійному полі, залишаються вірними для полів, які швидко змінюються від точки до точки. Умова застосовності наближення постійного поля для вивчення неоднорідних полів,  $\frac{(\nabla F)^2}{F} \ll \frac{eF}{M^2}$ , показує, що це абсолютно підходить для задач, які ми розглядаємо, і може відповідати широкому спектру реальних фізичних умов, що створюються полем.

Фізичний зміст ефективного потенціалу полягає в тому, що він визначає густину енергії класичного поля для фіксованого значення цього поля. Уточнімо це твердження більш формально. Ми записуємо дію для лагранжіана в присутності зовнішніх джерел:

$$S[J_\mu, J] = \int \mathcal{L}_{eff}(A, \Phi) + J_m u A^\mu + J \Phi d^4x \quad (1.5)$$

та функціонал

$$\exp W[J_\mu; J] = \int DW_\mu^\pm DA_\mu D\Phi D_\phi^\pm D\eta^0 D\eta^\pm \exp[S(J_m u, J, V_\mu^\alpha, \chi^\alpha)] \quad (1.6)$$

Інтегрування в правій частині (1.4) проводиться за всіма полям, включаючи привиди. Виконуючи перетворення Лежандра, ми вводимо ефективну дію

$$\Gamma(\bar{F}, \Phi_c) = W[J_\mu, J] - \int d^4x (J_\mu A^\mu + J \Phi). \quad (1.7)$$

Класичні поля

$$\bar{A}_\mu = \delta W / \delta J_m u; \quad \Phi_c = \delta W / \delta J \quad (1.8)$$

визначаються як середні значення квантованих полів:

$$\bar{A}_\mu = \langle A_\mu \rangle_0, \quad \Phi_c = \langle \Phi \rangle_0 \quad (1.9)$$

Ефективна дія може бути розвинена за степенями зовнішнього імпульсу поля. У координатному представленні,

$$\Gamma(\bar{F}, \Phi_c) = \int d^4x [-V(\bar{F}, \Phi_c) + \frac{1}{2} Z(\bar{F}, \Phi_c(x)) (\partial_\mu \Phi_c(x))^2] \quad (1.10)$$

Перший член у розкладі (1.8) є ефективним потенціалом. Це звичайна функція від  $\Phi_c$  та  $\bar{F}$ . Поява спонтанного порушення симетрії виражається у наявності ненульового вакуумного значення скалярного поля, яке визначається з рівняння.

$$\frac{\delta\Gamma(\bar{F}, \Phi_c)}{\delta\Phi_c} = 0 \quad (1.11)$$

Аналогічне рівняння має місце для електромагнітного поля за наявності класичного джерела.

$$\frac{\delta\Gamma(\bar{F}, \Phi_c)}{\delta A^\mu} = -J_\mu \quad (1.12)$$

де  $J_\mu$  має бути виражено через  $A_\mu$  та  $\Phi_c$  за допомогою (1.6). Вибравши джерело  $J_\mu$ , можна створити будь-яке зовнішнє поле  $F_{\mu\nu}$ . Якщо нас цікавить інший феномен, спонтанне утворення електромагнітного поля в наявності скалярного поля, ми повинні, навпаки, встановити  $J_\mu = 0$  у рівнянні (1.10), а у правому боці (1.9) вказати джерело  $J$ , яке підтримує  $\Phi_c$  будь-якого значення.

Ми також зазначаємо, що стателе електромагнітне поле задовольняє рівняння Максвелла без джерел. Тому таке поле може бути формально введене безпосередньо у рівнянні (1.9), в якому  $A_\mu$  є вільним параметром. Ми обираємо потенціал зовнішнього поля у такій формі:

$$A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu \quad (1.13)$$

яка враховує той факт, що відповідна підгрупа не порушена. Для сталих полів  $F$  та  $\Phi_c$ , рівняння (1.9) перетворюється з функціонального рівняння в рівняння для екстремуму функції  $V(\bar{F}, \Phi_c)$ .

$$\frac{\partial V(\bar{F}, \Phi_c)}{\partial \Phi_c} = 0 \quad (1.14)$$

Вираз для  $V(\bar{F}, \Phi_c)$  дуже складний; його можна обчислити лише у розвиненні по петлях з усіма можливими кількостями зовнішніх електромагнітних та скалярних полів:

$$V(\bar{F}, \Phi_c) = \sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}(\bar{F}, \Phi_c). \quad (1.15)$$



Нижче ми обговоримо результати дослідження ефективного потенціалу в однопетльовому наближенні, для чого необхідно зберігати в розкладі члени з  $n = 0$  та  $1$ :

$$V(\bar{F}, \Phi_c) = V^{(0)}(\Phi_c) + V^{(0)}(\bar{F}) + V^{(1)}(\bar{F}, \Phi_c). \quad (1.16)$$

Тут  $V^{(0)}(\Phi_c)$  є потенціалом у деревинній апроксимації, визначеним відповідно до потенціалу взаємодії (зокрема  $\lambda\phi^4$ ),  $V^{(0)}(\bar{F})$  - це енергія класичного максвеллівського поля, а  $V^{(1)}(\bar{F}, \Phi_c)$  - однопетльова поправка. Потенціал  $V(\bar{F}, \Phi_c)$  може бути обчислений за допомогою функцій Гріна  $G_{AB}(\bar{F}, \Phi_c)$  для квантованих полів. Вони також потрібні для обчислення зміни маси W-бозона в магнітному полі через радіаційні корекції. Уточнимо, що літери AB у  $G_{AB}$  позначають відповідні комбінації полів  $W^\pm, A^R, \Phi, \phi^\pm, \eta^\pm, \eta^0$ . Як відомо, [2]:

$$\int d^4x V^{(1)}(\bar{F}, \Phi_c) = -\frac{i}{2} \text{ln det } G_{AB} \quad (1.17)$$

Враховуючи що  $\text{ln det } G_{AB} = \text{Tr ln } G_{AB}$ , де трейс означає сумування за усіма парами полів та інтегрування по координатах  $x_\mu$ . Ми отримуємо

$$V^{(1)}(\bar{F}, \Phi_c) = -\frac{i}{2} \sum_{(A,B)} \langle x | \text{ln } G_{AB}(\bar{F}, \Phi_c) | x \rangle \quad (1.18)$$

Функція Гріна  $G_{AB}(\bar{F}, \Phi_c)$  визначається через оператор  $G_{AB}$  наступним чином:

$$G_{AB}(x, y) = \langle x | G_{AB} | y \rangle = G_{AB} \delta(x - y) \text{ та обчислюється}$$

$$G_{AB}^{-1}(x, y) = -\frac{\delta^2 S}{\delta A(x) \delta B(y)} \quad (1.19)$$

яка може бути обернена за допомогою умов причинності. Отже,  $V^{(0)}(\Phi_c)$  знаходиться з діагональних елементів матриці  $\text{ln } G_{AB}$ .

### 1.3 Нормалізація ефективного потенціалу

Ми записуємо пропагатори у представленні дійсного часу  $s$ :

$$G_{ab} = -i \int \exp(-is(G^{-1})_{ab}) ds.$$

Далі перетворимо слід відповідно до [2]:

$$-\frac{i}{2} \text{Tr} \ln G_{AB} = \frac{i}{2} \int \frac{ds}{s} \text{Tr} \exp(-is G_{AB}^{-1})$$

Перетворення для електромагнітного поля детально наведені у [3]. На отриманий таким чином потенціал необхідно накласти нормувальні умови, які приводять його до класичного вигляду за умови відсутності полів:

$$\frac{\partial V(\bar{F}, \Phi_c)}{\partial V^{(0)}(\bar{F})} \Big|_{\bar{F}=0, \Phi=\Phi_c} = 1; \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial V(\bar{F}, \Phi_c)}{\partial \Phi_c} \Big|_{\bar{F}=0, \Phi=\Phi_c} = 0; \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 V(\bar{F}, \Phi_c)}{\partial \Phi^2} \Big|_{\bar{F}=0, \Phi=\Phi_c} = 2|m_\chi^2|, \quad (1.22)$$

де  $V^{(0)} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2)$  і це відповідає ренормалізації в положенні мінімуму деревинного потенціалу. У випадку динамічного порушення симетрії, умова (1.20) зберігається, тоді як інші дві замінюються однією умовою.

$$\frac{\partial^2 V(\bar{F}, \Phi_c)}{(\partial \Phi^2)^2} \Big|_{\bar{F}=0, \Phi=\Phi_c} = \frac{\lambda}{4}, \quad (1.23)$$

Для того, щоб додавання однопетльового доданку не змінювало поведінку при відсутності полів необхідно додати умову:

$$\frac{\partial V^{(1)}(\bar{F}, \Phi_c)}{\partial \Phi_c} \Big|_{\bar{F}=0, \Phi=\Phi_c} = 0. \quad (1.24)$$

## 2 ГЕНЕРАЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРИ ФАЗОВОМУ ПЕРЕХОДІ ДЕКОНФАЙНМЕНТУ

Однією з тематик сучасної фізики високих енергій є вивчення властивостей матерії у ранньому Всесвіті. Так, сучасні експериментальні дослідження на прискорювачах вже досягають енергій в 13 TeV. При цих надзвичайно високих енергіях своє підтвердження знаходять основні теорії фізики елементарних частинок. Експерименти на Великому гадронному колайдері (ВГК) показують, як вражаючий збіг експериментальних даних зі Стандартною моделлю (СМ) Вайнберга-Салама-Глешоу, так і прояви нової фізики. Однак декілька принципових питань не мають відповіді в її рамках або суперечать сучасним експериментальним даним.

Одним із таких питань є експериментальне спостереження асимптотичної свободи сильної взаємодії і, як результат, народження кварк-глюонної плазми.

Протягом останніх десятиліть експерименти з зіткненням важких іонів невпинно розвиваються. Починавши з розсіянь пучків ядер з енергією декілька MeV на нуклон на фіксованій мішені, що проводились у малих лабораторіях університетів, зараз ми маємо великі міжнародні проєкти. У багатьох сучасних експериментах прискорюються як ядра-снаряди (projectile) так і ядра-мішені (target), а відповідні енергії можуть досягати величин  $\sqrt{sNN} = 0.2 - 5.44$  TeV. Матерія, що утворюється внаслідок зіткнення за таких енергій, має густину в сотні разів більшу за ядерну в нормальних умовах. Вважається, що за таких фізичних умов кварки і глюони – елементарні частинки квантової хромодинаміки (КХД), яка відповідає за сильну взаємодію у Стандартній моделі, – знаходяться у фазі деконфайнменту, тобто перестають бути пов'язаними в гадрони і можуть вільно переміщуватися на відстані, більші за типові розміри нуклонів.

Кварк-глюонна плазма(КГП) є станом матерії, в якому елементарні частинки, що утворюють гадрони, звільняються від сильного тяжіння один до одного при надзвичайно високих густинах енергії. В звичайній матерії кварки зв'язані в гадрони (зокрема, в протони і нейтрони). Експериментально не вдається отримати кварки у вільному стані. Це явище називається конфайнментом. В експериментах спостерігаються сполучення кварків парами (мезони), трійками (баріони) та ін. Проте, існують вагомі аргументи на користь існування кварків. В КГП конфайнмент відсутній. Проблема конфайнменту кварків є однією з головних невирішених проблем теоретичної та експериментальної фізики елементарних частинок. Для пошуку КГП проводяться експерименти за високих енергій у ЦЕРНі на ВГК та інших сучасних колайдерах.

Дослідження фізики в КГП ведуться різними способами, зокрема, теоретичними. Будується багато моделей, в рамках яких повинні мати місце нові явища та ефекти. Так, відомі гідродинамічні моделі КГП [4], [5], [6], [7], [8] та моделі, де кварки утворюють газ, моделі, які розглядають лише вплив глюонів за високої енергії - глюодинаміка.

Одним із таких підходів є підхід в рамках температурної теорії поля [9], [10], [11], [12].

Температура фазового переходу деконфайнменту (ФПД) оцінюється порядком  $T_d \sim 180 - 200$  MeV. Проте, однією з відмінних властивостей неабельових калібрувальних полів при високій температурі є спонтанна вакуумна намагніченість. Вона тісно пов'язана з асимптотичною свободою. Насправді, асимптотична свобода при високій температурі завжди супроводжується стабільними фоновими температуро-залежними хромомагнітними та магнітними полями [13]. Явище намагніченості детально досліджено в глюодинаміці  $SU(3)$  [14] та суперсиметричній теорії [15], [16] аналітичними методами та в глюодинаміці  $SU(2)$  [17], [18] моделюванням за методом Монте-Карло на ґратці. У всіх цих випадках виявлено спонтанне виникнення магнітних полів. Чи

може наявність спонтанно народжених полів впливати на температуру фазового переходу?

Варто зазначити, що випадок експериментів на ВГК вимагає особливого розгляду. Це через набагато нижчу температуру  $T_d$  порівняно з температурою електрослабкого фазового переходу (ЕСФП)  $T_{EW} \sim 100$  ГеВ. Для температур  $T_d < T < T_{ew}$  поле скалярного конденсату, що присутнє в цьому інтервалі температур, генерує маси частинок, екранує магнітне поле  $H$ , яке генерується при високих температурах за рахунок петлі  $W$ -бозонів. У той же час кольорові магнітні поля  $B_3, B_8$  залишаються неекранованими [19], [81]. В рамках цього сценарію виникає питання: чи існує механізм генерації магнітного поля  $H$  між критичними температурами  $T_d$  і  $T_{ew}$ ?

В рамках підходів температурної теорії поля досліджено вплив магнітних полів на температуру деконфайнменту та народження хромоманітних полів в цьому середовищі. Показано народження цих хромоманітних абельових полів на ґратках. Авторами [20] показано, що повинні народжуватись не тільки хромоманітні поля, а й звичайні магнітні поля. Такі поля народжуються через взаємодію з кварками, які мають як кольоровий, так і електричний заряди. Отримані поля є температурно-залежними, та наявні в кварк-глюонній плазмі за температур, більших за температуру фазового переходу деконфайнменту.

У цьому розділі детально досліджується утворення в КГП полів  $B_3, B_8, H$  при температурах, близьких до температури ФПД та оцінюються напруженості полів. Використовується формалізм уявного часу. Розраховується ефективний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  з урахуванням глюонів і  $u$ -,  $d$ - і  $s$ -кварків при скінченній температурі. Ця конфігурація полів є стабільною завдяки внескам дейзі-діаграм, які компенсують уявну частину однопетльового ефективного потенціалу заряджених глюонів  $V^{(1)}(B_3, B_8, T)$ . Для оцінки напруженості поля використано асимптотичне високотемпературне розвинення, отримане за рахунок перетворення Мелліна. Як наслідок цьо-

го дослідження, ми спостерігаємо, що сильні хромагнітні поля  $B_3, B_8$  порядку  $\sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс генеруються для температури  $T \sim 160 - 220$  МеВ. Спонтанне намагнічення зникає при  $T \sim 110 - 120$  МеВ. Ця температура розглядається як температура деконфайнменту в присутності поля. Вона істотно нижча за оцінену температуру без магнітних полів.

## 2.1 Спектр кварків у зовнішніх полях. Внесок кваркових полів до однопетльового потенціалу

Розглядається ситуація, коли температура КГП не набагато вище  $T_d$ . При цьому, згідно з [14], кольорові магнітні поля  $B_3$  і  $B_8$  спонтанно утворюються в глюонному секторі КХД, через відновлення кольорової симетрії. Зазначимо, для температур в інтервалі  $T_d < T < T_{ew}$  електрослабка симетрія порушується і  $SU(2)$  складова звичайного магнітного поля екранується конденсатом скалярного поля. При температурах  $T > T_{ew}$  також відбувається генерація магнітного поля [19]. В рамках цієї картини, ми обчислюємо однопетльовий кварковий ефективний потенціал  $V_q^{(1)}(B_3, B_8, H, T)$  на фоні всіх трьох полів.

Відповідно до робіт [14], [20], [21] представляємо  $SU(3)_c$  глюонне поле у формі

$$A_\mu^a = B_\mu^a + Q_\mu^a, \quad (2.1)$$

де  $B_\mu^a$  фонове класичне поле і  $Q_\mu^a$  представляє квантові глюони. Ми вибираємо потенціал зовнішнього поля в формі  $B_\mu^a = \delta^{a3} B_{3\mu} + \delta^{a8} B_{8\mu}$ , де  $B_{3\mu} = H_3 \delta_{\mu 2} x_1$  і  $B_{8\mu} = H_8 \delta_{\mu 2} x_1$  описують постійні хромагнітні поля спрямовані вздовж третьої осі в евклідовому просторі та  $a = 3$  і  $a = 8$  у кольоровому  $SU(3)_c$  просторі відповідно. Тензор поля має компоненти:  $F_{\mu\nu}^{ext\ a} = \delta^{a3} F_{3\mu\nu} + \delta^{a8} F_{8\mu\nu}$ ,  $F_{c12} = -F_{c21} = H_c, c = 3, 8$ . Направляємо звичайне магнітне поле також

уздовж третьої осі та обираємо його потенціал у формі:  $A_\mu^{ext} = H\delta_{\mu 2}x_1$ .

Обчислюємо спектр кварків за наявності всіх цих полів [20], [21]. Відповідне рівняння Дірака має вигляд:

$$(i\gamma_\mu D_\mu + m_f)\psi^a = 0, \quad (2.2)$$

де  $\psi^a$  - хвильова функція кварка,  $a$  - кольоровий індекс,  $m_f$  маса кварка. Коваріантна похідна описує взаємодії із зовнішніми магнітними полями  $H$  і  $H_3, H_8$ :

$$D_\mu = \partial_\mu + iq_f|e|A_\mu^{ext} + ig(T^3B_\mu^3 + T^8B_\mu^8), \quad (2.3)$$

де  $T^3 = \frac{\lambda^3}{2}, T^8 = \frac{\lambda^8}{2}$  є генераторами групи  $SU(3)$ ,  $\lambda^{3,8}$  є матрицями Гелл-Мана. Завдяки вибору потенціалів, можемо представити кварковий спектр як суму внесків таких комбінацій зовнішніх полів:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f^1 &= q_f|e|H + g\left(\frac{H_3}{2} + \frac{H_8}{2\sqrt{3}}\right), \\ \mathcal{H}_f^2 &= q_f|e|H + g\left(\frac{H_8}{2\sqrt{3}} - \frac{H_3}{2}\right), \\ \mathcal{H}_f^3 &= q_f|e|H - g\frac{H_8}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тут  $q_f|e|$  — електричний заряд кварка. Спектр енергій кожного флейвору задається відомим виразом (див., наприклад, [22])

$$\epsilon_{i,n,\rho,f}^2 = m_f^2 + p_z^2 + (2n+1)\mathcal{H}_f^i - \rho\mathcal{H}_f^i, \quad (2.5)$$

де  $p_z$  — імпульс уздовж напрямку поля,  $\rho = \pm 1$ .

Енергія вакууму визначається як сума мод, що мають від'ємну енергію. При скінченній температурі в формалізмі уявного часу для ферміонів, вона зводиться до сумування дискретного спектра непарних членів з уявною

енергією  $p_4 = \frac{(2l+1)\pi}{\beta}$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$  — обернена температура [23], [24]. У результаті маємо такий вираз для ефективного потенціалу кварків [13]:

$$V_q^{(1)}(T, H_i) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{f=1}^6 \sum_{i=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \times \int_0^{\infty} \frac{d s}{s^3} \exp(-m_f^2 s - \frac{\beta^2 l^2}{4s}) [\mathcal{H}_f^i s \coth(\mathcal{H}_f^i s) - 1]. \quad (2.6)$$

Він буде використаний як внесок кваркових полів у ефективний потенціал. Доданок з  $l = 0$  є енергію вакууму  $V_q^{(1)}(H_i)$ . Він не залежить від температури та потребує додаткового ренормування. Температурна частина буде обчислена із застосуванням асимптотичних методів та перетворень Мелліна.

## 2.2 Внесок глюонних полів в однопетльовий потенціал

У цьому розділі коротко опишемо внески глюонів до однопетльового ефективного потенціалу. Детальні розрахунки проведені в [14]. Лагранжіан  $SU(3)_c$  глюодинаміки є добре відомим:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + L_{gf} + L_{gh}, \quad (2.7)$$

де  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  — тензор напруженості поля,  $f^{abc}$  — структурні константи групи,  $a = 1, 2, \dots, 8$ . У фактичних розрахунках ми використовуємо потенціал поля, як у (2.1). Метрика обирається евклідовою для введення формалізму уявного часу. Фіксації калібрування в (2.2) є:

$$L_{gf} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu Q_\mu^a + gf^{abc} B_\mu^b Q_\nu^c)^2, \quad (2.8)$$

і  $L_{gh}$  представляє лагранжіан поля привидів. Компоненти  $Q_\mu^a$  з  $a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$  відповідають кольорово зарядженим глюонам. У розрахунках зручно вико-



ристовувати «заряджений базис» глюонів:

$$\begin{aligned}
W_{1\mu}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{\mu}^1 \pm iQ_{\mu}^2), \\
W_{2\mu}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{\mu}^4 \pm iQ_{\mu}^5), \\
W_{3\mu}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{\mu}^6 \pm iQ_{\mu}^7).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

У термінах цих полів спектр заряджених глюонів має вигляд спектру безмасової зарядженої частинки зі спіном 1 та гіромагнітним відношенням  $\gamma = 2$ . Тобто ми повинні у (2.1) покласти  $m = 0$  і  $\rho = \pm 2$  для глюонів і  $\rho = 0$  для привидів. А у  $\mathcal{H}^i$  (2.1) ми повинні покласти  $H = 0$  і використовувати комбінації нейтральних компонент  $H_3$  і  $H_8$ .

Детальний розрахунок однопетльового ефективного потенціалу для  $SU(2)$  виконано в [13], [25]. Це відповідає кожній підгрупі  $SU(2)$  групи  $SU(3)_c$ . Ці підгрупи пов'язані з компонентами  $W_{r\mu}^{\pm}$ ,  $r = 1, 2, 3$  базису (2.2) і відповідної комбінації  $H_3$  і  $H_8$  (детальніше див. [14]):

$$\begin{aligned}
B_{r=1,\mu} &= B_{\mu}^3, \\
B_{r=2,\mu} &= \sqrt{\frac{3}{2}}B_{\mu}^8 + \frac{1}{2}B_{\mu}^3, \\
B_{r=3,\mu} &= \sqrt{\frac{3}{2}}B_{\mu}^8 - \frac{1}{2}B_{\mu}^3.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Саме ці поля вводять коваріантні похідні, пов'язані з  $SU(2)$  підгрупами,  $D_{\mu}^r = \partial_{\mu} + igB_{\mu}^r$ .

Однопетльовий глюонний внесок в ефективний потенціал, представлений у формі, подібній до (2.1), читається:

$$V_g^{(1)}(T, H_r) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-i\mu^2 s} \times$$

$$\exp(il^2\beta^2/4s) \left[ \frac{gH_r \cos(2gH_r s)}{\sin(gH_r s)} - \frac{1}{s} \right], \quad (2.11)$$

де  $\mu^2 - i\epsilon, \epsilon \rightarrow 0$  — параметр, що грає роль точки нормалізації поля. Це корисно для аналітичного продовження слабких полів  $gH_r \leq \mu^2$  до полів  $gH_r \geq \mu^2$ , для яких розраховується уявна частина ефективного потенціалу. Внесок з  $l = 0$  відповідає нульовій температурі, а інші доданки описують статистичну частину.

Далі ми будемо розглядати глюонний внесок у асимптотиці високих температур  $T \gg (gH_r)^{1/2} \geq \mu$ , що достатньо для нашої задачі. Розрахунки  $V_g^{(1)}(T, H_r)$  для цього випадку виконано за допомогою перетворень Мелліна. Розвинення глюонного внеску (2.2) представлено в [14]:

$$V_g^{as}(T, H_3, H_8) = \frac{H_3^2}{2} + \frac{11}{32} \frac{g^2}{\pi^2} H_3^2 \log\left[\frac{T}{\mu}\right] - (gH_3)^{3/2} \frac{T}{3\pi} + \frac{H_8^2}{2} + \frac{11}{16} \frac{g^2}{\pi^2} H_8^2 \log\left[\frac{T}{\mu}\right] - (\lambda_+^{3/2} + |\lambda_-|^{3/2}) \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4} (gH_8)^{3/2} \frac{T}{3\pi} \quad (2.12)$$

$$-i \left[ (gH_3)^{3/2} + (\lambda_+^{3/2} + |\lambda_-|^{3/2}) \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4} (gH_8)^{3/2} \right] \frac{T}{2\pi} + O(g^2 H_{3,8}^2),$$

де класичні внески від  $H_3$  і  $H_8$  були додані,  $\lambda_{\pm} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{H_3}{H_8}$  і  $\mu$  є точкою нормування. Цей вираз містить уявну частину, пов'язану з нижнім станом глюонного спектру  $\epsilon_{n=0, \rho=2}^2 = p_z^2 - gH_r$ . Відповідний доданок точно знищується відповідним членом, що походить від внеску дейзі-діаграм для заряджених глюонів [14], [25]. Отримане скорочення є основною причиною використання цього наближення в подальшому аналізі. Такий потенціал є дійсним і достатнім у даному наближенні.

## 2.3 Внесок від дейзі-діаграм у потенціал

Як відомо, [26], при скінченній температурі разом з однопетльовим ефективним потенціалом необхідно враховувати внески від так званих дейзі-діаграм, які враховують кореляції на великі відстані. Графічно - це серія однопетльових глюонних діаграм з нескінченною кількістю внесків у поляризаційний тензор, взятий при нульовому зовнішньому імпульсі,  $\Pi(T, g, H_3, H_8)$ . Внески мають порядок  $\sim g^{3/2}$  по константі зв'язку і тому повинні бути включені в ефективний потенціал після однопетльового внеску. Двопетльові внески мають порядок  $\sim g^2$  і тому ними було знехтувано в (2.2) та подальшому аналізі.

Розрахунки внесків дейзі-діаграм, отриманих від заряджених глюонів, описані в [14], [25]. У відповідності до (2.2) частина, що відповідає за нестабільні моди, записується у вигляді:

$$, V_{unst.}^{daisy} = \frac{T}{2\pi} \sum_{r=1}^3 (gH_r) [\Pi^r(H_r, T) - gH_r]^{1/2} \quad (2.13)$$

$$+ i \left[ (gH_3)^{3/2} + (\lambda_+^{3/2} + |\lambda_-|^{3/2}) \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4} (gH_8)^{3/2} \right] \frac{T}{2\pi}.$$

Тут  $\Pi^r(H_r, T)$  позначає однопетльовий тензор поляризації кольорових заряджених глюонів, усереднених за основним (нестабільним) станом на класичному рівні спектру, взятого при  $p_3 = 0 : |n = 0, \rho = 2\rangle$ . Як ми бачимо, уявна частина в (2.2) точно знищується внеском з (2.3). Таким чином, ефективний потенціал  $V_g^{(1)as} + V_{unst.}^{daisy}$  є дійсним, якщо  $[\Pi^r(H_r, T) - gH_r] > 0$ .

Детальні розрахунки тензора поляризації заряджених глюонів були проведені в [14] (див. також огляд [19]). Найважливішим для нас є температурна та польова залежності:  $\Pi^r(H, T) \sim g^2 \sqrt{gHT}$ . Отже, після знищення уявної частини ефективний потенціал має порядок  $\sim g^2 g^{1/4}$ . Це менше, ніж точність, збережена в (2.2). Ми можемо зробити висновок, що роль внесків від дейзі-

діаграм полягає в стабілізації ефективного потенціалу в обраному наближенні по константі зв'язку  $g$ . Всі інші внески можна відкинути в обраному наближенні. Що стосується внесків дейзі-діаграм нейтрального калібрувального поля, вони мають порядок  $\sim g^{5/2}$ , і також можуть бути відкинуті [14]. Таким чином, послідовний ефективний потенціал для глюонів, включаючи однопетльовий внесок плюс дейзі-діаграми, є дійсним.

Для проведення числових розрахунків буде використано безрозмірні змінні для ефективного потенціалу, температури та полів. Вважаючи масу протона  $m_p = 938,3 \text{ MeV}$  введемо безрозмірні змінні:

$$, V_{q,g}^0 = \frac{V_{q,g}^{(0)}}{m_p^4}, \quad V_{q,g}^T = \frac{V_{q,g}^{(T)}}{m_p^4}, \quad \mu_f = \frac{m_f}{m_p}, \quad (2.14)$$

$$h_{f,a} = \frac{\mathcal{H}_f^a}{m_p^2}, \quad \beta_p = m_p \beta; \quad \omega_f = \mu_f \beta_p.$$

Для розрахунків взято три флейвори(сорт) кварків з масами й електричними зарядами:

$$\begin{aligned} m_u &= 336 \text{ MeV}, \quad q_u = \frac{2}{3}|e|, \\ m_d &= 340 \text{ MeV}, \quad q_d = -\frac{1}{3}|e|, \\ m_s &= 486 \text{ MeV}, \quad q_s = -\frac{1}{3}|e|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

і значення констант зв'язку  $\alpha_s = 1$ ,  $\alpha_e = \frac{1}{137}$ ,  $g = \sqrt{4\pi}$ ,  $|e| = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$ . Безрозмірна напруженість поля:  $x = \frac{|e|H}{m_p^2}$ ,  $x_3 = \frac{gH_3}{m_p^2}$ ,  $x_8 = \frac{gH_8}{m_p^2}$ . Комбінації полів у (2.1) і (2.2) повинні бути виражені у відповідних змінних.

Далі ми представляємо розрахунки, виконані для різних температур, та асимптотичне розвинення потенціалу (2.1) для внеску кваркового сектора.

## 2.4 Перетворення Мелліна. Асимптотичне розвинення ефективного потенціалу

За означенням перетворення Мелліна функції  $f(x)$  має вигляд:

$$M[f(x)](s) = \phi(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx.$$

Зворотнє перетворення Мелліна функції  $\phi(x)$  має вигляд:

$$M^{-1}[\phi(s)](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds.$$

Зокрема, для функцій Макдональда перетворення Мелліна має вигляд:

$$M[K_{\nu}(nx)](s) = n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right),$$

де  $Res > |Re\nu|$ ,  $Ren > 0$ .

Перетворення Мелліна дозволяє зручним чином проводити сумування складних рядів, членами яких є комбінації функцій Макдональда. Особливості застосування перетворення можна побачити в [10], [27], [28]. Основна ідея полягає в перетворенні початкового ряду в ряд Тейлора в околі точки нуль, який зручно застосовувати для дослідження асимптотичної поведінки функції при малих значеннях аргументу.

### 2.4.1 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(n\omega)$

Нехай,  $S_0(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(n\omega)$ . Зробимо пряме та зворотнє перетворення Мелліна для кожного доданку  $K_0(n\omega)$  в  $S_0(\omega)$ :

$$S_0(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(n\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) ds.$$

Змінимо порядок інтегрування та сумування та використаємо означення дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ , отримаємо :

$$S_0(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} (2^{1-s} - 1) \zeta(s) 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) ds.$$

Замкнемо контур в лівій півплощині та нехай  $c < 1$ :

$$S_0(\omega) = \sum_{Res} \omega^{-s} (2^{1-s} - 1) \zeta(s) 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Ми бачимо, що функція має особливі точки в  $s = -2k$ ,  $k$  - невід'ємне ціле число і  $s = 1$ . Але  $s = 1$  знаходиться поза контуром інтегрування.

1)  $s = 0$  подвійний полюс з лишком:

$$R_0 = \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right), \quad \text{де } \gamma - \text{константа Ейлера};$$

2)  $s = -2n$  прості полюси з лишками:

$$R_{-2n} = \frac{(2^{2n+1} - 1) \omega^{2n} \zeta'(-2n)}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Користуючись рівністю:

$$\zeta'(-2m) = (-1)^m \frac{\pi}{(2\pi)^{2m+1}} \Gamma(2m+1) \zeta(2m+1),$$

знайдемо радіус збіжності на основі ознаки Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{-2n-2}}{R_{-2n}} < 1 \implies \omega \in (-\pi; \pi) / \{0\}.$$

Остаточно, ми маємо при  $\omega \rightarrow 0$ :

$$S_0^{High}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n+1} - 1)\omega^{2n}\zeta'(-2n)}{2^{2n}(n!)^2}, \quad \text{для } \omega \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}.$$

#### 2.4.2 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 K_2(n\omega)$

Нехай,  $S_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 K_2(n\omega)$ . Зробимо пряме та обернене перетворення Мелліна для кожного доданку  $K_2(n\omega)$  в  $S_2(\omega)$ .

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 K_2(n\omega) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) ds. \end{aligned}$$

Змінимо порядок сумування та інтегрування і використаємо визначення дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ , ми отримуємо :

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\omega n)^2 \omega^{-s} n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2-s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) (2^{3-s} - 1) \zeta(s-2) ds; \end{aligned}$$

Якщо  $s' = s - 2$ , то  $c \rightarrow 0 < c' < 1$ :

$$S_2(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s'} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s'}{2} + 2\right) (2^{1-s'} - 1) \zeta(s') ds'.$$

Якщо  $\omega = 0$  то  $S_2(\omega)$  невизначена, інакше замкнемо контур в лівій напівплощині та врахуємо, що  $c' < 1$ :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s'} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s'}{2} + 2\right) (2^{1-s'} - 1) \zeta(s') ds' = \\ &= \sum_{res} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s'} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s'}{2} + 2\right) (2^{1-s'} - 1) \zeta(s'). \end{aligned}$$

Ми бачимо, що функція має особливі точки  $s' = -2k$ ,  $k$  - невід'ємне ціле або  $s' = 1$ . Але  $s' = 1$  знаходиться поза контуром інтегрування.

1)  $s = 0$  простий полюс з лишком:

$$R_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s' \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s'} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s'}{2} + 2\right) (2^{1-s'} - 1) \zeta(s') \right] = -1;$$

$s = -2$  усувна критична точка, тому:

$$R_{-2} = 0;$$

$s = -2n$ , де  $n > 1$ , прості полюси з лишками:

$$\begin{aligned} R_{-2n} &= \lim_{s \rightarrow -2n} \left[ (s' + 2n) \left(\frac{2}{\omega}\right)^{s'} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s'}{2} + 2\right) (2^{1-s'} - 1) \zeta(s') \right] = \\ &= \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2n} (2^{2n+1} - 1) \frac{4}{n!(n-2)!} \zeta'(-2n). \end{aligned}$$

Використаємо тотожність:

$$\zeta'(-2m) = (-1)^m \frac{\pi}{(2\pi)^{2m+1}} \Gamma(2m+1) \zeta(2m+1).$$



Знайдемо радіус збіжності, використовуючи ознаку Д'Аламбера:

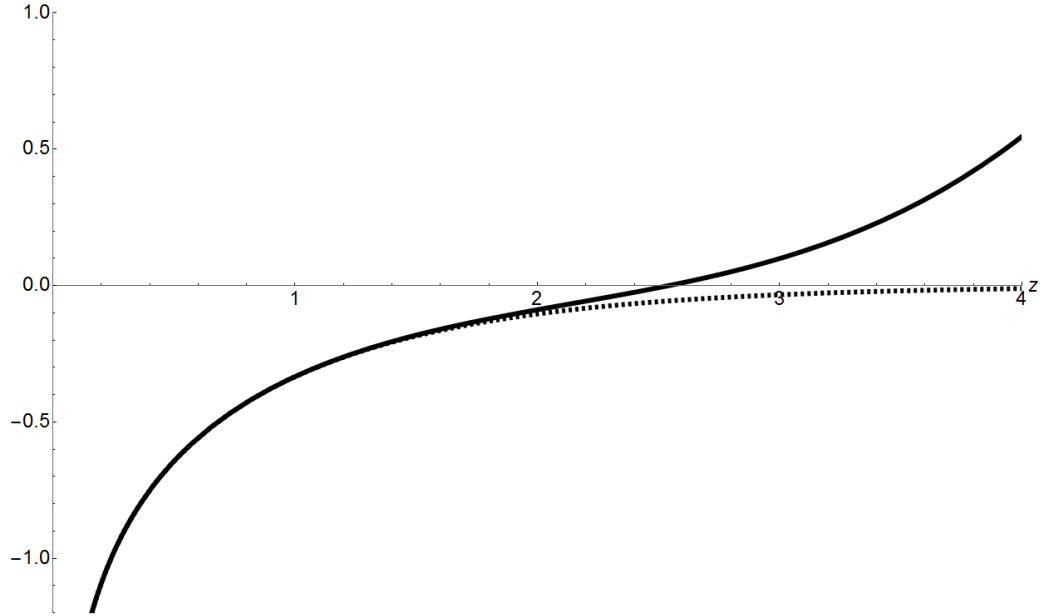
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{-2n-2}}{R_{-2n}} < 1 \implies \omega \in (-\pi; \pi).$$

Остаточно ми маємо при  $\omega \rightarrow 0$

$$S_2^{High}(\omega) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2n} (2^{2n+1} - 1) \frac{4}{n!(n-2)!} \zeta'(-2n), \quad \text{де } \omega \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}.$$

### 2.4.3 Асимптотична поведінка сум

Проілюструємо отримані результати графічно.



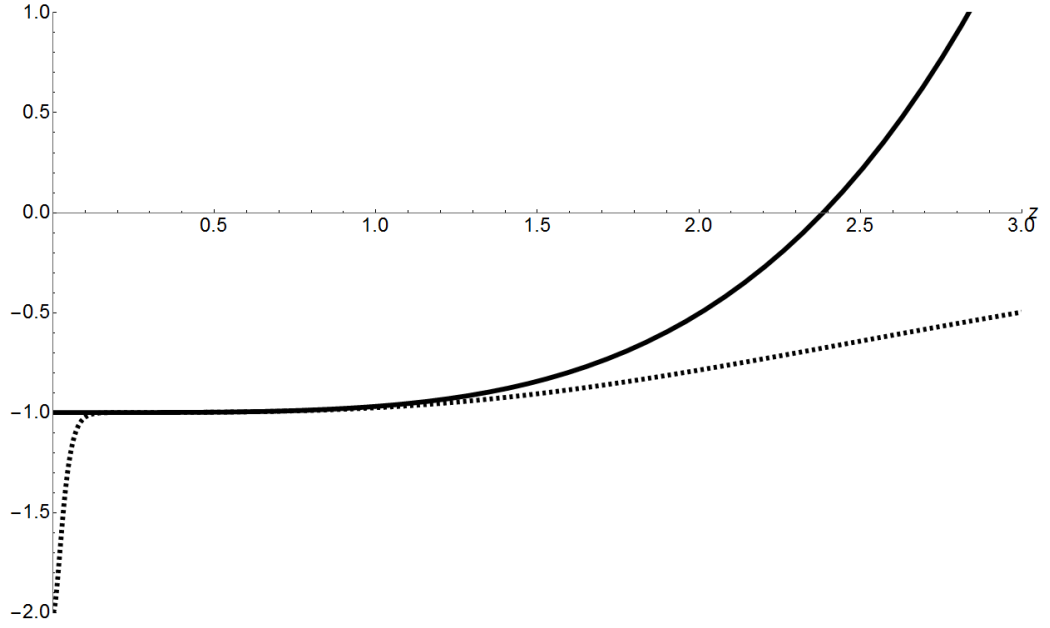
**Рис. 1:** Порівняння отриманих асимптотик для  $S_0^{High}(z)$  (при побудові розрахунків проведено при  $n = 30$ ).

На Рис.1 зображено графіки функції  $S_0^{High}(z)$  (суцільна лінія) та початкової функції  $S_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0(zn)$  (пунктирна лінія).

На Рис.2 зображено графіки функції  $S_2^{High}(z)$  (суцільна лінія) та початкової функції  $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (zn)^2 K_0(zn)$  (пунктирна лінія).

Зазначимо, що розбіжність на Рис. 8 в околі точки  $z = 0$  викликана чисельними похибками і при збільшенні  $n$  зменшується.

Оскільки  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 K_2(z) = 2$  то:



**Рис. 2:** Порівняння отриманих асимптотик для  $S_2^{High}(z)$  (при побудові розрахунків проведено при  $n = 30$ ).

$$\lim_{z \rightarrow 0} S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow 0} (-1)^n n^2 z^2 K_2(zn) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = -1.$$

Аналізуючи наведені ілюстрації та чисельні розрахунки, можна побачити, що асимптотичні формули надзвичайно точно збігаються з початковими функціями в інтервалі чисел від 0 до  $\sim 2 - 3$ . Для обчислень ефективного потенціалу при температурах  $\sim 200\text{MeV}$  значення параметр  $\beta m_{quark}$  є меншим за 3. Отже, використання отриманих асимптотик для поставленої задачі є виправданим та повністю вмотивованим.

## 2.5 Асимптотичне розвинення кваркового потенціалу

Застосуємо отримані вирази для аналізу кваркового внеску в однопетльовий потенціал (2.1):

$$V_q^{(1)}(T, H_i) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{f=1}^6 \sum_{i=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \times \int_0^{\infty} \frac{d s}{s^3} \exp(-m_f^2 s - \frac{\beta^2 l^2}{4s}) [\mathcal{H}_f^i s \coth(\mathcal{H}_f^i s) - 1].$$

Сумування по  $l$  можна переписати таким чином:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l.$$

Зазначимо, що мода при  $l = 0$  відповідає вакуумній енергії  $V^{(0)}$ . Тому потенціал  $V$  має вигляд  $V_q^{(1)}(T, H_i) = V^{(0)}(H_i) + V^{(T)}(T, H_i)$ , де

$$V^{(0)} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m_f^2 s} (s \mathcal{H}_f^a \coth(s \mathcal{H}_f^a) - 1), \quad (2.16)$$

$$V^{(T)} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m_f^2 s - \frac{\beta^2 l^2}{4s}} (s \mathcal{H}_f^a \coth(s \mathcal{H}_f^a) - 1),$$

Важливим є те, що у вакуумній енергії  $V$  виконано віднімання для регуляризації при  $\mathcal{H}_f^a = 0$ . Температурна частина потенціалу є скінченною і не потребує регуляризації, але вакуумна частина  $V^{(0)}$  потребує. Регуляризіція робиться додатковим відніманням члена, пропорційного квадрату поля, який враховується в спостережуваному полі  $H$  і співпадає з відомим потенціалом Гейзенберга-Ейлера (див. [29], [30]).

### 2.5.1 Потенціал $V^0$

Після регуляризації та переходу до нових позначень  $V^0$  має вигляд:

$$V^0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-\mu_f^2 s} (h_{f,a} s \coth(h_{f,a} s) - 1 - \frac{1}{3} h_{f,a}^2 s^2).$$

Зняти інтегрування по  $s$  можна за допомогою розвинення в ряд. В результаті маємо остаточні вирази для  $V^0$ :

$$V^0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ -2(h_f^a)^2 \left( 2\ln\Gamma_1\left(\frac{\mu_f^2}{2h_f^a}\right) + \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} \ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + 2\zeta'(-1) \right) + \right.$$

$$+\frac{1}{3}(h_f^a)^2 - \frac{1}{4}\mu_f^4 + \frac{(h_f^a)^2}{3}\ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + \frac{1}{2}\mu_f^4\ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a}\Bigg]. \quad (2.17)$$

Важливим є те, що вираз (2.5.1) отримано явним інтегруванням і використанням властивостей гамма-функції Ейлера.

### 2.5.2 Потенціал $V^T$

Після переходу до нових позначень:

$$V^T = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-\mu_f^2 s - \frac{\beta_p^2 l^2}{4s}} (h_{f,a} s \coth(h_{f,a} s) - 1).$$

Зняти інтегрування по  $s$  можна за допомогою співвідношення для К-функції Макдональда :

$$\int_0^{\infty} ds s^{n-1} e^{-as - \frac{b}{s}} = 2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} K_n(2\sqrt{ab}).$$

Для цього проведемо розвинення гіперболічного котангенса в ряд в околі точки  $s = 0$ :

$$\frac{h_{f,a} s \coth(h_{f,a} s) - 1}{s^3} = \frac{h_{f,a}^2}{3s} - \frac{1}{45} s h_{f,a}^4 + \frac{2}{945} s^3 h_{f,a}^6 + O(s^5).$$

Обмежимося лише першими двома доданками та зробимо заміну  $t = \frac{s}{\beta_p^2}$ :

$$\begin{aligned} V^T &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} ds e^{-\mu_f^2 s - \frac{\beta_p^2 l^2}{4s}} \left( \frac{h_{f,a}^2}{3s} - \frac{1}{45} s h_{f,a}^4 \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} \beta_p^2 dt e^{-(\mu_f \beta_p)^2 t - \frac{l^2}{4t}} \left( \frac{h_{f,a}^2}{3\beta_p^2 t} - \frac{1}{45} t \beta_p^2 h_{f,a}^4 \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{f,a} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left[ \frac{h_{f,a}^2}{3} \int_0^{\infty} dt t^{-1} e^{-(\mu_f \beta_p)^2 t - \frac{l^2}{4t}} - \frac{h_{f,a}^4}{45} \int_0^{\infty} dt t^{2-1} e^{-(\mu_f \beta_p)^2 t - \frac{l^2}{4t}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left[ \frac{2}{3} h_{f,a}^2 K_0(\mu_f \beta_p l) - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} m_f^2 \beta_p^2 l^2 K_2(m_f \beta_p l) \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{2}{3} h_{f,a}^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l K_0(\mu_f \beta_p l) - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l m_f^2 \beta_p^2 l^2 K_2(m_f \beta_p l) \right].
\end{aligned}$$

Сумування по  $l$  для високих температур проведемо за допомогою перетворення Мелліна. Остаточно отримуємо вираз:

$$\begin{aligned}
V_{Inf}^T = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{2}{3} h_{f,a}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega_f}{\pi}\right) \right) + \frac{7\zeta'(-2)}{4} \omega_f^2 + \frac{31\zeta'(-4)}{64} \omega_f^4 \right] - \right. \\
\left. - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} \left[ -1 + \frac{31\zeta'(-4)}{8} \omega_f^4 \right] \right]. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Отримані асимптотичні вирази (2.5.1) і (2.5.2) для внеску кварка певного флейвору в повний потенціал необхідно просумувати по всіма видами кварків. Ці вирази будуть використані для комп'ютерного обчислення та подальшої мінімізації енергії системи.

## 2.6 Напруженості полів, згенерованих у КГП

Загальний ефективний потенціал, використаний у нашому дослідженні, складається з однопетльового кваркового внеску (2.1), включаючи безтемпературний член  $V_q^0$  з  $l = 0$ , статистична частина  $V_q^T$  з  $l \neq 0$  і внески глюонів (2.2), (2.3), що представлені вище. Остаточні вирази мають вигляд:

$$\begin{aligned}
V_q^0 = \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x_3^2}{2g^2} + \frac{x_8^2}{2g^2} \\
+ \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{3} h_{f,a}^2 - 2h_{f,a}^2 \left( 2\Gamma_1\left(\frac{\mu_f^2}{2h_{f,a}}\right) + \frac{\mu_f^2}{2h_{f,a}} \ln \frac{\mu_f^2}{2h_{f,a}} + 2\zeta'(-1) \right) \right] \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} h_{f,a}^2 \ln \frac{\mu_f^2}{2h_{f,a}} + \frac{1}{2} \mu_f^4 \ln \frac{\mu_f^2}{2h_{f,a}} - \frac{1}{4} \mu_f^4 \Big]$$

та

$$V_q^{T,as} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{2}{3} h_{f,a}^2 \times \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega_f}{\pi}\right) \right) + \frac{7\zeta'(-2)}{4} \omega_f^2 + \frac{31\zeta'(-4)}{64} \omega_f^4 \right] \right. \\ \left. - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} \left[ -1 + \frac{31\zeta'(-4)}{8} \omega_f^4 \right] \right], \quad (2.20)$$

де,  $\Gamma_1(x)$  узагальнена гамма-функція,  $\zeta(x)$  -  $\zeta$ -функція.

Отримані вирази плюс (2.2) і (2.3) будуть використані для обчислення напруженості магнітного поля. Це робиться шляхом чисельного розв'язання стаціонарних рівнянь:

$$\frac{\partial V(H, H_3, H_8, T)}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial V(H, H_3, H_8, T)}{\partial H_{3,8}} = 0, \quad (2.21)$$

при низці фіксованих температур. Отримуємо  $x_{min}^i(T)$ . Якщо для певного набору  $x_{min}^i(T)$  загальний ефективний потенціал є від'ємним, ми повинні зробити висновок про те, що поля виникають спонтанно. Результати розрахунків наведено в табл. 1.

T, MeV	$x_8$	$x_3$	$x \cdot 10^{-3}$	$V$	$H_8 10^{19} \text{Гс}$	$H_3 10^{18} \text{Гс}$	$H 10^{17} \text{Гс}$
120	0.463	0.076	-0.051	-0.0024	0.589	0.969	-0.076
140	0.783	0.132	0.040	-0.0063	0.996	1.674	0.060
160	0.901	0.152	0.249	-0.0110	1.145	1.933	0.370
180	0.999	0.169	0.476	-0.0167	1.270	2.146	0.709
200	1.092	0.185	0.728	-0.0235	1.388	2.349	1.083
220	1.182	0.200	1.005	-0.0314	1.503	2.544	1.496

**Табл. 1:** Значення напруженості спонтанно згенерованого поля при вибраних температурах плазми.

У таблиці 1 у першому стовпчику наведено температуру. Наступні стовпці показують значення напруженості безрозмірного поля, та поведінку безрозмірного ефективного потенціалу. Напруженість поля в гаусах показана в

останніх трьох стовпчиках. Виявлено від’ємні значення ефективного потенціалу для напруженості стаціонарного поля. Це означає, що магнітне поле  $H$  повинно бути згенероване разом із хромоманітними полями  $H_3, H_8$  після ФПД в КГП. Якщо температура нижче 110 - 120 MeV, значення ефективного потенціалу близьке до нуля. Отже, у високотемпературному наближенні, ми очікуємо, що фонові поля зникнуть і відбудеться конфайнмент. З таблиці 1 бачимо, що напруженість магнітного поля на два порядки менше напруженості хромоманітних полів і дорівнює  $\sim 10^{16}$  Гс для температур експериментів на ВГК.

## 2.7 Висновки

У наших розрахунках ми застосували наближення для ефективного потенціалу, що враховує одну петлю плюс ланцюжок дейзі-діаграми. Вони містять члени порядку  $\sim g^2$  і  $\sim g^3$  і роблять потенціал дійсним та узгодженим через знищення уявних членів в (2.2), (2.3). Наближення є достатнім та загально прийнятим для опису фазових переходів при високій температурі, тому що для нього ми можемо знехтувати внесками від двох петель порядку  $\sim g^4$ . Це просте наближення зручне ще й тому, що зберігає магнітне поле у однопетльовому наближенні (2.1), (2.2). Таким чином, індуковані в плазмі поля належним чином описані.

Найцікавішими спостереженнями вищезгаданого дослідження є два результати. По-перше, зі зниженням температури магнітні поля послаблюються та зникають. По-друге, значення ефективного потенціалу у мінімумі, будучи негативним, зростає і прямує до нуля. Починаючи зі значення  $V_{min} \sim -0,02$  при  $T = 200$  MeV до  $-0,002$  при  $T = 120$  MeV, тобто збільшується на один порядок. Така поведінка означає, що магнітні поля знижують температуру ФПД  $T_d$ . Відповідно, спонтанно намагнічена при скінченній температурі КГП має існувати при істотно нижчій температурі порівняно з безпольовим випадком. Наскільки відомо, цей факт не було зазначено в літературі раніше.

Отримані нами результати цікаво корелюють з дослідженнями КХД вакууму у магнітних полях при нульовій температурі [31], [32] та скінченній температурі [33], [34]. Ці дослідження також варто враховувати через наявність сильних магнітних полів при зіткненнях важких іонів або у нейтронних зірках. Для нашої задачі найважливішим висновком є те, що зовнішні магнітні поля знижують  $T_d$ . Окрім того, в [31] було помічено, що звичайні і хромоманітні поля переважно орієнтовані паралельно одне одному. Саме така конфігурація полів була обрана в даній роботі. Таким чином, обидва результати нульової та високої температури показують зменшення  $T_d$ . У цьому відношенні не має значення, наскільки сильні магнітні поля були згенеровані. Зниження  $T_d$  спостерігалось і зовнішніми хромоманітними полями також, спочатку в [35], [36]. Зокрема, в [35] це було виявлено в розрахунках на ґратках, де показано, що температура  $T_d$  може навіть бути зменшена до нуля для достатньо сильного хромоманітного поля. Останні дослідження та результати також можна знайти в [37], [38], [39].

Виявлено подібну тенденцію для звичайного і для хромоманітного полів, спонтанно згенерованих в КГП. Ми можемо зробити висновок, що ФПД має відбуватися при температурах  $\sim 110 - 120$  MeV. Для цих температур мінімальне значення ефективного потенціалу дуже близьке до нуля. У використаному підході це означає екранування магнітного поля та конфайнмент кольору.

До інших подібностей ми маємо істотні відмінності зовнішніх (незалежних від температури і створених струмами) і спонтанно народжених полів (без джерела). Дійсно, як ми вже зазначали, асимптотична свобода при високій температурі має супроводжуватися залежними від температури фоновими магнітними полями [13]. Скринінг їх відображає знищення режиму асимптотичної свободи та обмеження кольору при низьких температурах. Спонтанно генеровані поля залежать від температури та є невід'ємними складовими КГП і сигналами ФПД. Як результат - деконфайнмент завжди супро-



воджується макроскопічними хромо(магнітними) полями.

Була застосована апроксимація для ефективного потенціалу з урахуванням однопетльового внеску плюс дейзі-діаграми. Цей потенціал є дійсним до членів  $\sim O(g^3)$  по константі зв'язку.

Отримані результати опубліковано в [21], де пояснюється роль кваркової петлі. Вплив кольорових магнітних полів  $H_3(T)$  і  $H_8(T)$  оцінюється лише за ефективним потенціалом кваркових полів. У [20] наведено розрахунки потенціалу з урахуванням всіх сильнодіючих частинок.

Як впливає з отриманих результатів, в КГП сильні хромо(магнітні) поля порядку  $H_{3,8} \sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс повинні бути присутніми. Це впливає на всі процеси, що відбуваються в плазмі, і може слугувати сигналами ФПД. Внаслідок намагнічування, зокрема, всі початкові стани заряджених частинок є дискретними по енергії. Це може змінити поперечний переріз конкретного процесу і може бути виявлено при аналізі експериментальних даних.

Зазначені поля повинні існувати й для більш високих температур, коли кольорові степені вільності є відкритими, зокрема для температур поблизу Електрослабкого фазового переходу. Вплив на який відповідних полів викликає науковий інтерес.

### 3 ГЕНЕРАЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ПРИ ЕЛЕКТРОСЛАБКОМУ ФАЗОВОМУ ПЕРЕХОДІ

Результати, отримані у попередньому розділі, дають можливість враховувати внески магнітних полів при температурах, близьких до фазового переходу деконфайнменту. Розглянутий метод показує важливість ферміонних петель у ефективному потенціалі. Проте спонтанно народжені магнітні та хромомагнітні поля повинні існувати і для температур, вищих за температуру деконфайнменту. Наступним кроком досліджень є врахування впливу магнітних полів для більш високих температур. Для електрослабкого фазового переходу відомим результатом є те, що критична температура становить  $\sim 100\text{Гев}$ . Питання впливу магнітних полів на цей фазовий перехід є актуальним, відповідь на нього тісно пов'язана з питаннями бареогенезису.

У цьому розділі детально досліджується утворення полів  $B_3, B_8, H$  при температурах, близьких до температури ЕСФП, та оцінка напруженості полів. Використовується формалізм уявного часу. Розраховується ефективний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  з урахуванням глюонів, всіх поколінь кварків, та всіх частинок електрослабкого сектору СМ при скінченній температурі. Ця конфігурація полів стабільна завдяки внескам дейзі-діаграм, які компенсують уявну частину однопетльового ефективного потенціалу заряджених глюонів  $V^{(1)}(B_3, B_8, T)$  та W-бозонів. Для оцінки напруженості поля використано асимптотичне високотемпературне розвинення, отримане за рахунок перетворення Мелліна. Як наслідок цього дослідження, ми спостерігаємо, що сильні хромомагнітні поля  $B_3, B_8$ , порядку  $\sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс генеруються для температури  $T \sim 100\text{Гев}$ . Фазовий перехід у Стандартній моделі є переходом другого роду, що не задовольняє критерії Сахарова.

### 3.1 Стандартна модель елементарних частинок при скінченній температурі

Стандартна модель елементарних частинок є теорією, що описує фундаментальні частинки та їх взаємодії. Виходить з припущення, що всі видимі частинки складаються з менших фундаментальних частинок, відомих як кварки та лептони. Кварки складають баріони (протони, нейтрони та інші), а лептони включають електрони та нейтрино. Глюони є носіями сильної взаємодії, яка забезпечує зв'язок між кварками. Фотони відповідають за електромагнітну взаємодію, а векторні бозони  $W$  і  $Z$  - за слабку взаємодію. Теорія успішно описує багато експериментальних даних із прискорювачів елементарних частинок, і її прогнози підтверджуються космологічними спостереженнями. Однак, вона не включає гравітацію і не пояснює темну матерію та темну енергію, що становлять значну частину Всесвіту.

У СМ електрослабкий сектор базується на принципі локальної калібрувальної симетрії, яка описується групою  $SU(2) \times U(1)$ . Група  $SU(2)$  відповідає за слабку взаємодію, а група  $U(1)$  відповідає за електромагнітну взаємодію. Механізм Хіггса є ключовою складовою Стандартної моделі елементарних частинок і пояснює, як частинки набувають масу. Цей механізм був запропонований як узагальнення значної кількості робіт (Кіббл, Голдстоун, Хіггс та інших) і став відомим як механізм Хіггса. Суть цього механізму полягає в тому, що калібрувальні бозони, а саме векторні бозони  $W^+$ ,  $W^-$  та  $Z^0$ , набувають маси завдяки взаємодії з скалярним полем Хіггса, через явище спонтанного порушення симетрії. Фотон же, який є носієм електромагнітної взаємодії, залишається безмасовим векторним бозоном.

За основу механізму Хіггса береться скалярне поле, яке є особливим квантовим полем, що пронизує всю просторово-часову область. Це поле взаємодіє з іншими частинками, надаючи їм масу. Принциповою частиною механізму Хіггса є потенціал скалярного сектора, який описує енергію поля Хіггса.

У вакуумному стані це поле знаходиться в найнижчій точці потенціалу, де симетрія порушена. Фазовий перехід, під час якого частинки набули маси, називається електрослабким фазовим переходом. Вивчення цього фазового переходу та його параметрів є одним із актуальних питань СМ. Це порушення симетрії відбулося у Всесвіті на ранніх етапах його існування. До фазового переходу частинки були без маси, а скалярний конденсат був відсутній; при пониженні температури симетрія порушується, скалярний конденсат поля є ненульовим та при взаємодії з ним інші частинки стають масивними. Цей фазовий перехід тісно пов'язаний з питанням баріонної асиметрії Всесвіту.

В рамках Стандартної моделі кількість частинок дорівнює кількості античастинок для кожної спостережуваної реакції розпаду, проте спостереження у видимій області Всесвіту показують наявну асиметрію і домінування матерії над антиматерією. Це питання виникло до побудови СМ, і в 1967 А.Д. Сахаров [40] висунув декілька критеріїв, які повинні виконуватись, щоб отримати вказану асиметрію - умов баріогенезису А.Д. Сахарова. Сучасною мовою їх можна сформулювати так:

- 1) Баріонне квантове число не зберігається;
- 2) Порушення С- та CP-симетрії;
- 3) Відхилення від термодинамічної рівноваги.

В електрослабкій теорії відхилення від термодинамічної рівноваги може бути отримано через електрослабкий фазовий перехід. Дослідження показують, що цього можна досягти, якщо він буде строго першого роду. Тип цього переходу залежить від маси бозона Хіггса, проте зі сучасних експериментальних даних за умови, що маса частинки встановить 125 GeV, у Стандартній моделі цей фазовий перехід є переходом другого роду.

Дослідження систем з порушенням симетрії показують, що на тип переходу може істотно впливати наявність магнітних полів. Тому виникає питання впливу магнітних та хромагнітних полів, що народжуються в КГП та існують там при високих температурах, на електрослабкий фазовий перехід.

В роботі обчислено ефективний потенціал для даного переходу в СМ та досліджено вплив полів на тип переходу. Обчислено температуру переходу в рамках розглянутої моделі та напруженості магнітних та хромоманітних полів для розглянутого інтервалу температур.

Дослідження фундаментальних взаємодій при скінченній температурі та в магнітних полях необхідно проводити в рамках температурної теорії поля. Розглянемо лагранжіан бозонного сектора Стандартної моделі:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) + \frac{m^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad (3.1)$$

де використані стандартні позначення:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ D_\mu &= \partial_\mu + \frac{1}{2}igA_\mu^a\tau^a + \frac{1}{2}ig'B_\mu. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вакуумне середнє скалярного поля  $\Phi$  має вигляд:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_c \end{pmatrix}.$$

Поля  $Z$ -,  $W^\pm$ - бозонів та фотонів представляються стандартним способом [78]:

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \pm iA_\mu^2), \\ Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu), \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + g'B_\mu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для розгляду спонтанного намагнічування вакууму та його впливу для ЕСФП необхідно обчислити ефективний потенціал при наявності постійних магнітних(хромомангнітних) полів  $H^3 = H_3\delta^{a3}$  та  $H^8 = H_8\delta^{a8}$ , які є розв'язками рівнянь Янга-Міллса без джерел,  $H = const$ . Відповідно до [20], [41] ефективний потенціал має вигляд:

$$V(H, T, \phi_c) = \frac{H_8^2}{2} + \frac{H_3^2}{2} + \frac{H^2}{2} + V^{(0)}(\phi_c) + V^{(1)}(H, T, \phi_c) + V^{(Ring)}(H, T, \phi_c).$$

Для розрахунку однопетльової поправки до ефективного потенціалу  $V^{(1)}(H, T, \phi_c)$  в зовнішніх магнітних полях будемо використовувати s-представлення функції Гріна:

$$G^{ab} = -i \int \exp(-is(G^{-1})^{ab}) ds.$$

Для того, щоб ввести температуру в формалізм квантової теорії поля базовим є зв'язок мацубарівських функцій Гріна з функціями Гріна при нульовій температурі [11]:

$$G_k^{ab}(x, x'; T) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{(n+[x])\sigma_k} G_k^{ab}(x - [x]\beta u, x' - n\beta u), \quad (3.4)$$

де  $G_k^{ab}$  - відповідна функція Гріна при нульовій температурі.  $T \neq 0, \beta = 1/T$ ,  $u = (0, 0, 0, 1)$ , а через  $[x]$  позначено цілу частину  $x_4/\beta$ ,  $\sigma_k = 1$  для фізичних ферміонів і  $\sigma_k = 0$  для бозонів та полів-привидів.

Отримана функція Гріна (3.1) є матричним елементом оператора  $G_k$ , обчисленого в стані  $|x', a\rangle$  при  $T = 0$ , та усередненого за всіма станами з  $T \neq 0$ . Отримані функціонали  $U^0$  і  $U^T$  є різними, проте при  $T \rightarrow 0$  вони прямують один до одного.

Загальний формалізм для обчислення ефективного потенціалу задається співвідношенням:

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2}TrlnG^{ab}, \quad (3.5)$$

де  $G^{ab}$  - є пропагатором усіх розглянутих квантованих полів  $W^\pm, \phi, \dots$  в зовнішньому магнітному полі  $H$ . В  $s$ -представленні обчислення може бути здійснено через формалізм Швінгера [42]:

$$TrlnG^{ab} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} tr \exp(-isG_{ab}^{-1}).$$

Внески при  $n = 0$  в рівняннях (3.4) і (3.5) дають безтемпературні внески у функцію Гріна й ефективний потенціал, відповідно. Однак ці внески мають розбіжності і потребують регуляризації. Щоб зробити відповідні віднімання та зафіксувати відповідні регуляризації застосуємо умови нормування при  $H = 0, T = 0$ :

$$\frac{\partial^2 V(\phi, H)}{\partial H^2} \Big|_{H=0, \phi=\phi_c} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial V(\phi, H)}{\partial \phi} \Big|_{H=0, \phi=\phi_c} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V(\phi, H)}{\partial \phi^2} \Big|_{H=0, \phi=\phi_c} = |m^2|,$$

де  $V(\phi, H) = V^{(0)} + V^{(1)} + \dots$  ефективний потенціал, розвинений у ряд за кількістю петель, а  $\phi_c$  - вакуумне значення скалярного конденсату в основному безпетльовому наближенні.

## 3.2 Внесок кваркових полів в ефективний потенціал

Розгляд внесків від сильнодіючих полів СМ проводиться ідентично до розгляду в Розділі 1 в пунктах 1.1-1.3 та 1.5. Проте, необхідно враховувати внески всіх поколінь кварків.

Обрано зовнішні постійні хромагнітні поля  $B_3$  і  $B_8$  з напруженостями  $H_3$  і  $H_8$  уздовж третьої осі в евклідовому просторі. Магнітне поле  $H$  спря-

мовано також уздовж третьої осі. Цей вибір є виправданим, враховуючи результати [43], де показано колінеарність хромомангнітних полів. Потенціали відповідних полів обрано у вигляді:

$$\begin{aligned} B_\mu^a &= H_3 x_1 \delta^{a3} \delta_\mu^2 + H_8 x_1 \delta^{a8} \delta_\mu^2; \\ A_\mu &= H x_1 \delta_{\mu 2}. \end{aligned}$$

Для обраних полів запишемо рівняння Дірака:

$$(i\gamma_\mu D_\mu + m_f)\psi = 0, \quad (3.6)$$

де  $m_f$  – маса відповідного типу кварка.

Коваріантна похідна при взаємодії з переліченими полями має вигляд:

$$D_\mu = \partial_\mu + iq_f A_\mu + ig T^a B_\mu^a, \quad (3.7)$$

де  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$  – генератори групи SU(3),  $\lambda^a$  відповідні матриці Гелл-Мана,  $q_f$  – електричний заряд розглянутого кварка.

Розв'язавши рівняння Дірака (3.6), при взаємодії (3.7) отримуємо спектр енергії кварків (див. пункт 2.1):

$$(\varepsilon^2)_{nf\sigma}^a = m_f^2 + (p_3^2)_f + (2n + 1)\mathcal{H}_f^a + \sigma\mathcal{H}_f^a,$$

де  $p_3$  – імпульс вздовж поля,  $\sigma = \pm 1$  – спіновий індекс та використано такі позначення:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_f^1 = q_f H + g(\frac{H_3}{2} + \frac{H_8}{2\sqrt{3}}); \\ \mathcal{H}_f^2 = q_f H + g(\frac{H_8}{2\sqrt{3}} - \frac{H_3}{2}); \\ \mathcal{H}_f^3 = q_f H - g\frac{H_8}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Для отримання внеску кварків в ефективний потенціал Стандартної моделі необхідно для знайденого спектра енергії [10], [44] записати відомий



вираз для енергії поляризації вакууму при скінченній температурі:

$$V_{quark} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m_f^2 s - \frac{\beta^2 l^2}{4s}} (s\mathcal{H}_f^a \coth(s\mathcal{H}_f^a) - 1),$$

де  $\beta = \frac{1}{T}$ .

Сумування по  $l$  можна переписати як

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l.$$

Зазначимо, що мода при  $l = 0$  відповідає вакуумній енергії  $V^{(0)}$ . Тому потенціал має вигляд  $V_{quark} = V_q^{(0)} + V_q^{(T)}$ , де

$$V_q^{(0)} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m_f^2 s} (s\mathcal{H}_f^a \coth(s\mathcal{H}_f^a) - 1),$$

$$V_q^{(T)} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m_f^2 s - \frac{\beta^2 l^2}{4s}} (s\mathcal{H}_f^a \coth(s\mathcal{H}_f^a) - 1),$$

Важливим є те, що у вакуумній енергії  $V_{quark}$  виконано віднімання для регуляризації при  $\mathcal{H}_f^a = 0$ . Температурна частина потенціалу є скінченою і не потребує регуляризації, але вакуумна частина  $V_q^{(0)}$  - потребує. Регуляризація робиться додатковим відніманням члена, пропорційного квадрату поля, який враховується в спостережуваному полі  $H$  і співпадає з відомим потенціалом Гейзенберга-Ейлера (див. [29], [30])

Для зручності будемо працювати з величинами, обезрозміреними масою  $W$ -бозона  $M_W$ . Тому запроваджуємо позначення:

$$V_q^0 = \frac{V_q^{(0)} e^2}{M_W^4}; \quad V_q^T = \frac{V_q^{(T)} e^2}{M_W^4}; \quad \mu_f = \frac{m_f}{M_W}; \quad h_{f,a} = \frac{e\mathcal{H}_f^a}{M_W^2}; \quad \beta_p = M_W \beta$$

### 3.2.1 Асимптотичні перетворення потенціалу $V_q^0$

Після регуляризації та переходу до нових позначень  $V^0$  має вигляд:

$$V_q^0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mu_f^2 s} (h_{f,a} s \coth(h_{f,a} s) - 1 - \frac{1}{3} h_{f,a}^2 s^2).$$

Провести інтегрування по  $s$  можна за допомогою розвинення в ряд, і в результаті маємо остаточні вирази для  $V_q^0$ :

$$V_q^0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ -2(h_f^a)^2 \left( 2\ln\Gamma_1\left(\frac{\mu_f^2}{2h_f^a}\right) + \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} \ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + 2\zeta'(-1) \right) + \frac{1}{3}(h_f^a)^2 - \frac{1}{4}\mu_f^4 + \frac{(h_f^a)^2}{3} \ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + \frac{1}{2}\mu_f^4 \ln\frac{\mu_f^2}{2h_f^a} \right].$$

Важливим є те, що вираз отримано явним інтегруванням і використанням властивостей гамма-функції Ейлера.

### 3.2.2 Асимптотичні перетворення потенціалу $V_q^T$

Після переходу до нових позначень:

$$V_q^T = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \sum_{l=1}^\infty (-1)^l \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mu_f^2 s - \frac{\beta_p^2 l^2}{4s}} (h_{f,a} s \coth(h_{f,a} s) - 1),$$

Провести інтегрування по  $s$  можна, використовуючи співвідношення для К-функції Макдональда:

$$\int_0^\infty ds s^{n-1} e^{-as - \frac{b}{s}} = 2 \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{n}{2}} K_n(2\sqrt{ab})$$

Сумування по  $l$  для високих температур виконуємо за допомогою пере-

творення Мелліна. Остаточно отримуємо вирази

$$V_q^T = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{2}{3} h_{f,a}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega_f}{\pi}\right) \right) + \frac{7\zeta'(-2)}{4} \omega_f^2 + \frac{31\zeta'(-4)}{64} \omega_f^4 \right] - \right. \\ \left. - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} \left[ -1 + \frac{31\zeta'(-4)}{8} \omega_f^4 \right] \right]; \quad (3.8)$$

Отримані асимптотичні вирази для внеску кварка певного флейвору в повний потенціал необхідно просумувати за всіма видам кварків. Ці вирази будуть використані для комп'ютерного обчислення та подальшої мінімізації енергії системи.

### 3.3 Розрахунок сум за допомогою перетворення Мелліна

За означенням перетворення Мелліна функції  $f(x)$  має вигляд:

$$M[f(x)](s) = \phi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Зворотнє перетворення Мелліна функції  $\phi(x)$  має вигляд:

$$M^{-1}[\phi(s)](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds.$$

Зокрема, для функцій Макдональда( $K_\nu(t)$ ), Неймана( $Y_\nu(t)$ ) та Беселя( $J_\nu(t)$ ) перетворення Мелліна має вигляд:

$$M[K_\nu(nx)](s) = n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right),$$

де  $Res > |Re\nu|$ ,  $Ren > 0$ .

$$M[Y_\nu(nx)](s) = -\frac{n^{-s}2^{s-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu}{2}\right)\cos\left[\frac{\pi}{2}(s - \nu)\right],$$

де  $|Re\nu| < Res < \frac{3}{2}$ ,  $n > 0$ .

$$M[J_\nu(nx)](s) = n^{-s}2^{s-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{s}{2} + 1\right)},$$

де  $-Re\nu < Res < \frac{3}{2}$ ,  $n > 0$ .

Перетворення Мелліна дозволяє зручним чином проводити сумування складних рядів, членами яких є комбінації функцій Макдональда. Особливості застосування перетворення можна побачити в [10], [27], [28]. Основна ідея полягає в перетворенні початкового ряду в ряд Тейлора в околі точки нуль, який зручно застосовувати для дослідження асимптотичної поведінки функції при малих значеннях аргументу.

### 3.3.1 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(n\omega)}{n}$

Нехай  $SY_1(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(n\omega)}{n}$ . Зробимо пряме та зворотнє перетворення Мелліна для кожного доданку  $Y_1(n\omega)$  в  $SY_1(\omega)$ :

$$\begin{aligned} SY_1(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(n\omega)}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{-2^{s-1}n^{-s}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s - 1)\right) ds \end{aligned}$$

Змінимо порядок сумування та інтегрування і використаємо визначення

дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ , ми отримуємо :

$$\begin{aligned}
SY_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-s} \frac{-2^{s-1} n^{-s}}{n\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s+1)} ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+1) ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} 2^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+1) ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+1) ds.
\end{aligned}$$

Замкнемо контур і лівій напівплощині та врахуємо  $c < 1$ :

$$\begin{aligned}
SY_1(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+1) ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{res} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+1).
\end{aligned}$$

Остаточно ми отримуємо:

$$SY_1(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi^2}{3\omega} + \frac{\omega}{2} (-1 + 2\gamma - 2\ln \frac{4\pi}{\omega}) - \frac{\omega^3}{4} \zeta'(-2) \right).$$

### 3.3.2 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_2(n\omega)}{n^2}$

Нехай  $SY_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_2(n\omega)}{n^2}$ . Зробимо пряме та зворотнє перетворення Мелліна для кожного доданку  $Y_2(n\omega)$  in  $SY_2(\omega)$ :

$$\begin{aligned} SY_2(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_2(n\omega)}{n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{-2^{s-1} n^{-s}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-2)\right) ds. \end{aligned}$$

Змінимо порядок сумування та інтегрування і використаємо визначення дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ , ми отримуємо :

$$\begin{aligned} SY_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-s} \frac{-2^{s-1} n^{-s}}{n^2 \pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-2)\right) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-2)\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s+2)} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+2) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} 2^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+2) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+2) ds. \end{aligned}$$

Замкнемо контур у лівій напівплощині та врахуємо  $c < 1$ :

$$\begin{aligned} SY_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+2) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{res} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s+2). \end{aligned}$$

Остаточно ми отримуємо:

$$SY_2(\omega) = -\frac{2\pi^3}{45\omega^2} - \frac{\pi}{6} + \omega^2 \frac{3 - 4\gamma + 4\ln\frac{4\pi}{\omega}}{32\pi}.$$

### 3.3.3 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\omega)}{n^2}$

Нехай  $SK_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\omega)}{n^2}$ . Зробимо пряме та зворотнє перетворення Мелліна для кожного доданку  $K_2(n\omega)$  in  $SK_2(\omega)$ .

$$SK_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\omega)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) ds$$

Змінимо порядок сумування та інтегрування і використаємо визначення Дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ , ми отримуємо :

$$\begin{aligned} SY_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-2} n^{-s}}{n^2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s+2)} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^s}{4} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s+2) ds. \end{aligned}$$

Замкнемо контур в лівій півплощині та врахуємо  $c < 1$ :

$$\begin{aligned} SK_2(\omega) &= \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s+2) ds = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{res} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s+2). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} SK_2(\omega) &= \frac{\pi^4}{45z^2} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi}{6} + \\ &+ \frac{z^2}{64} \left( -3 + 4\gamma - 4\ln 2 - 4\ln(2\pi) - 4\ln\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{96} z^4 \zeta'(-2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3.4 Сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(n\omega)}{n}$

Нехай  $SK_1(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(n\omega)}{n}$ . Зробимо пряме та зворотнє перетворення Мелліна для кожного доданку  $K_1(n\omega)$  in  $SK_1(\omega)$ :

$$SK_1(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(n\omega)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} n^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) ds$$

Змінимо порядок сумування та інтегрування і використаємо визначення дзета-функції Рімана:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ , ми отримуємо :

$$\begin{aligned} SK_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-s} \frac{2^{s-2} n^{-s}}{n} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^s}{4} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s+1)} ds = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-s} \frac{2^s}{4} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \zeta(s+1) ds$$

замкнемо контур у лівій напівплощині та врахуємо  $c < 1$ :

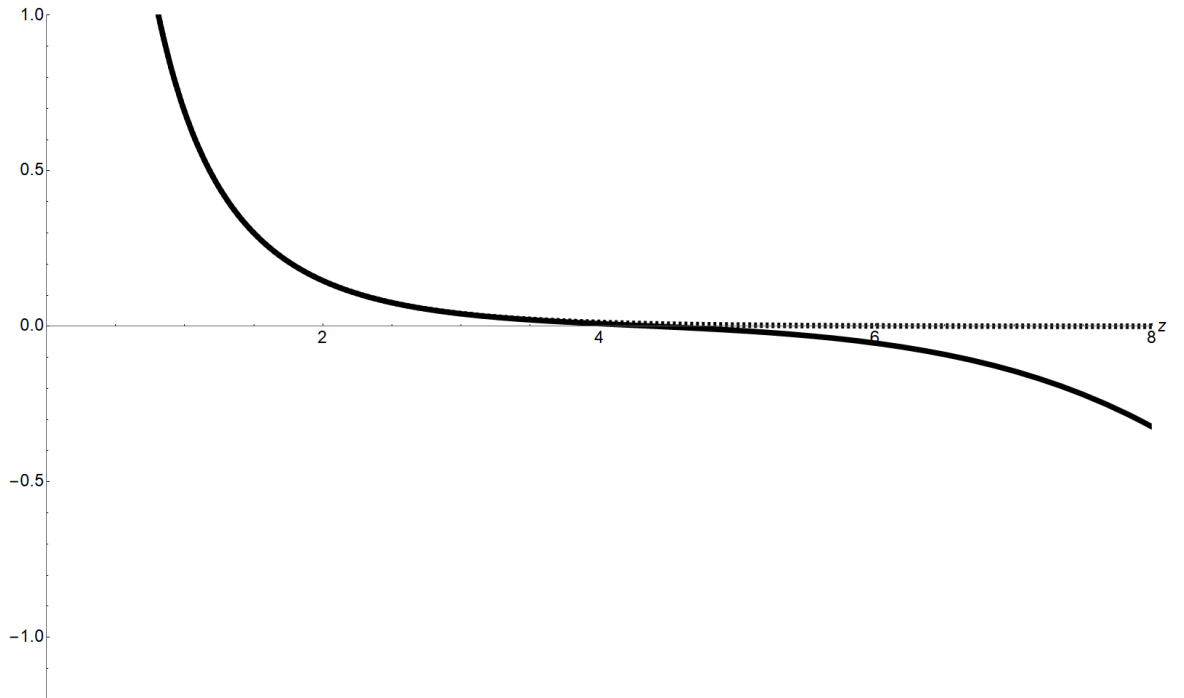
$$\begin{aligned} SK_1(\omega) &= \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \zeta(s+1) ds = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{res} \left(\frac{2}{\omega}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \zeta(s+1) \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$SY_1(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi^2}{3\omega} + \frac{\omega}{2} (-1 + 2\gamma - 2\ln \frac{4\pi}{\omega}) - \frac{\omega^3}{4} \zeta'(-2) \right) \quad (3.10)$$

### 3.3.5 Асимптотична поведінка обчислених сум

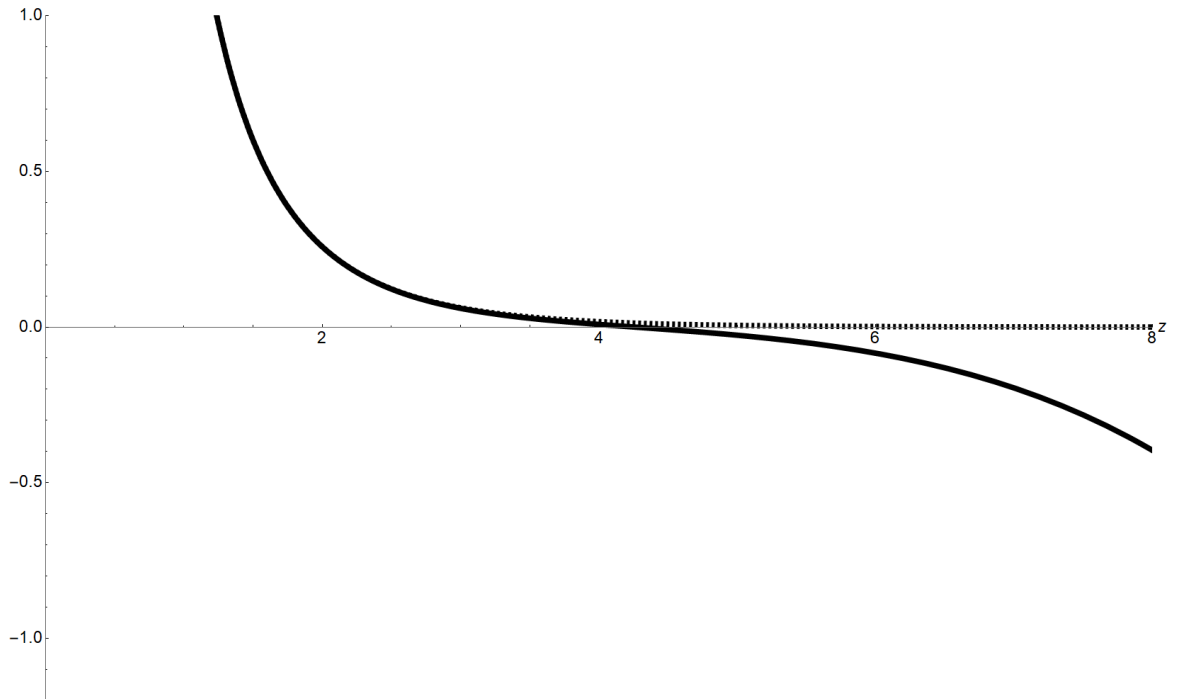
Проілюструємо отримані результати графічно:



**Рис. 3:** Порівняння отриманих асимптотик для  $SK_1^{High}(z)$  (розрахунок проведено при  $n = 64$ ).

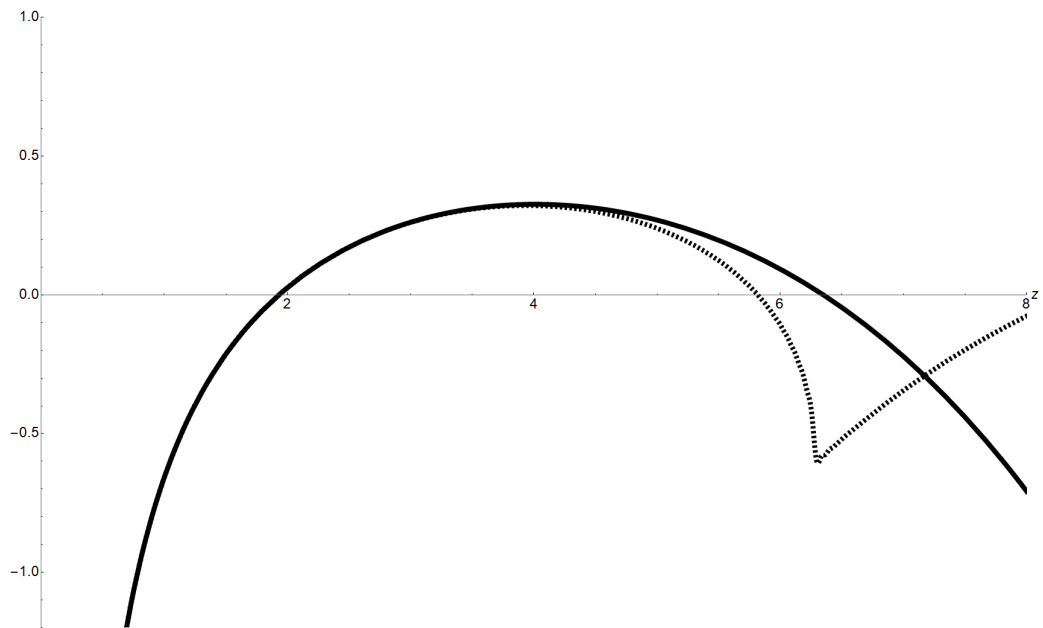
На Рис. 3 зображено графіки функції  $SK_1^{High}(z)$  (суцільна лінія) та по-

чаткової функції  $SK_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(nz)}{n}$  (пунктирна лінія).



**Рис. 4:** Порівняння отриманих асимптотик для  $SK_2^{High}(z)$  (розрахунок проведено при  $n = 64$ ).

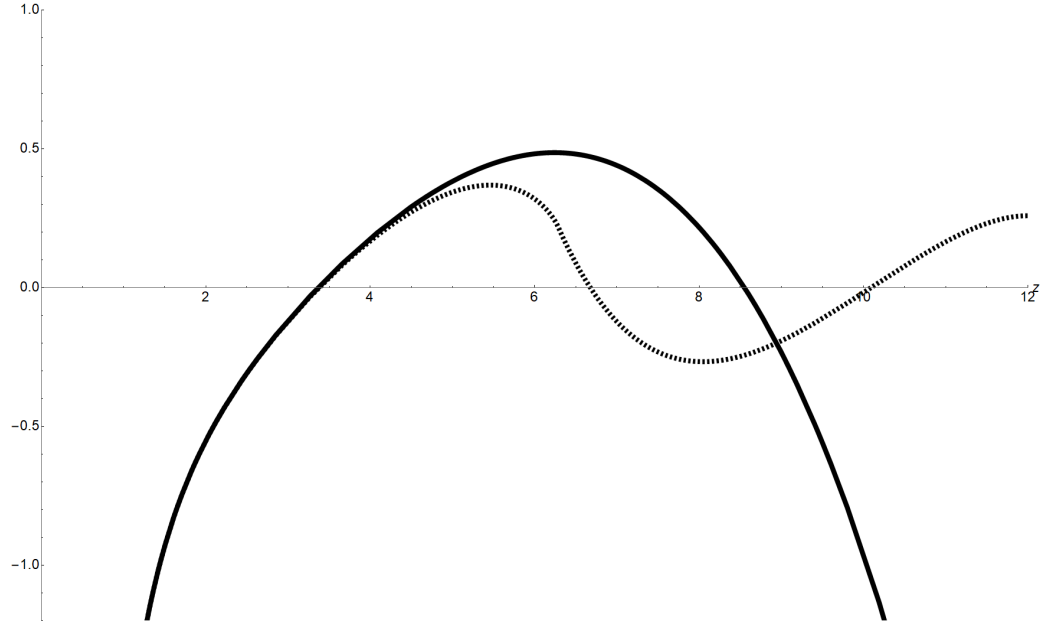
На Рис. 4 зображено графіки функції  $SK_2^{High}(z)$  (суцільна лінія) та початкової функції  $SK_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(nx)}{n^2}$  (пунктирна лінія).



**Рис. 5:** Порівняння отриманих асимптотик для  $SY_1^{High}(z)$  (розрахунок проведено при  $n = 64$ ).

На Рис. 5 зображено графіки функції  $SY_1^{High}(z)$  (суцільна лінія) та по-

чаткової функції  $SY_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(nz)}{n}$  (пунктирна лінія).



**Рис. 6:** Порівняння отриманих асимптотик для  $SY_2^{High}(z)$  (розрахунок проведено при  $n = 64$ ).

На Рис. 6 зображено графіки функції  $SY_2^{High}(z)$  (суцільна лінія) та початкової функції  $SY_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_2(nz)}{n^2}$  (пунктирна лінія).

Аналізуючи наведені ілюстрації та чисельні розрахунки, можна побачити, що асимптотичні формули надзвичайно точно співпадають з початковими функціями в інтервалі чисел від 0 до  $\sim 2 - 4$ . Для обчислень ефективного потенціалу при температурах  $\sim 100\text{GeV}$  значення параметра  $\beta m_{boson}$  або  $\beta m_{fermion}$  є значно меншим за 1, або  $\sim 1.5$  для важких частинок. Отже, використання отриманих асимптотик для поставленої задачі є виправданим та повністю вмотивованим.

### 3.4 Фазовий перехід у скалярній теорії

Особливе місце в Стандартній моделі займають скалярні поля. Існування їх у природі та важливу роль у еволюції Всесвіту теоретично показано та закладено в основу стандартної моделі. Перші результати експериментів щодо існування бозона Хіггса були отримані у 1990х. Проте необхідний набір експериментальних даних завершився пізніше. Експериментальне відкриття скалярної частинки масою близько 125 ГеВ було зроблено у ЦЕРНі у 2012 році. А у 2013 році Франсуа Англеру та Пітеру Хіггсу була присуджена Нобелівська премія з фізики «за теоретичне відкриття механізму, який допомагає нам розуміти походження маси субатомних частинок й існування якого було доведено виявленням передбаченої елементарної частинки в експериментах ATLAS і CMS на Великому адронному колайдері в ЦЕРН».

Саме тому актуальним питанням вивчення ЕСФП є дослідження в рамках скалярної теорії  $\lambda\phi^4$  та можливості відновлення симетрії при високій температурі в ній. Вперше можливість відновлення порушеної симетрії за підвищення температури було досліджено Лінде та Кіржніцем [45] та пізніше Керрінгтон [46]. Важливим параметром цієї теорії є маса бозона Хіггса. Обчислимо ефективний потенціал скалярної теорії за відсутності магнітних полів та визначимо залежність типу фазового переходу від маси скалярного поля.

Базовим є скалярний потенціал:

$$V^{(0)}(\phi_c) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4.$$

Для обчислення в безрозмірних змінних введемо позначення:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi_c}{\delta(0)}, \quad V^0 = \frac{V^{(0)}e^2}{M_W^4}, \quad B = \frac{M_W}{T}; \\ M_W &= \frac{g}{2}\delta(0), \quad e = g \sin \Theta_W, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\mu = \delta(0)\sqrt{\lambda}, \quad \delta(0) = \frac{2M_W \sin \Theta_W}{e}, \quad \lambda = \frac{m_H^2}{2\delta(0)^2}.$$

Ми будемо користуватися стандартними позначеннями Стандартної моделі:  $M_W$  - маса W-бозона,  $\delta(0)$  - вакуумне середнє,  $e$  - елементарний заряд,  $g$  - електро-слабка константа змішування,  $\Theta_W$  - кут Вайнберга,  $m_H$  - маса бозона Хіггса,  $\phi_c$  - значення скалярного конденсату,  $\lambda$  - параметр моделі,  $\alpha$  - постійна тонкої структури.

$$\begin{aligned} V^0 &= \frac{V^{(0)}e^2}{M_W^4} = -\frac{\mu^2}{M_W^2}\phi^2 \frac{e^2}{2M_W^2}\delta(0)^2 + \frac{\phi^4}{2} \frac{e^2\lambda\delta(0)^4}{2M_W^4} = \\ &= -\frac{\mu^2}{M_W^2}\phi^2 \frac{2g^2 \sin^2 \Theta_W}{g^2\delta(0)^2}\delta(0)^2 + \frac{\phi^4}{2} \frac{16g^2 \sin^2 \Theta_W \lambda\delta(0)^4}{2g^4\delta(0)^4} = \\ &= -2\frac{\mu^2}{M_W^2}\phi^2 \sin^2 \Theta_W + \frac{\phi^4}{2} \frac{8 \sin^2 \Theta_W \lambda}{g^2} = -\frac{m_H^2}{M_W^2}\phi^2 \sin^2 \Theta_W + \frac{\phi^4}{2} \frac{8 \sin^2 \Theta_W \frac{m_H^2}{2\delta(0)^2}}{g^2} = \\ &= -\frac{m_H^2}{M_W^2}\phi^2 \sin^2 \Theta_W + \frac{\phi^4}{2} \frac{4 \sin^2 \Theta_W \frac{m_H^2 g^2}{4M_W^2}}{g^2} = \frac{m_H^2}{M_W^2} \sin^2 \Theta_W (-\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}). \end{aligned}$$

Остаточно скалярний потенціал у безрозмірній формі має вигляд:

$$V^0(\phi) = \frac{m_H^2}{M_W^2} \sin^2 \Theta_W (-\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}).$$

Для вивчення фазового переходу необхідно розглянути температурний потенціал. Потрібно розрахувати однопетльові внески до скалярного потенціалу та рінгові діаграми, що за скінченної температури мають ненульовий внесок. Скориставшись результатами [47], можна записати відповідні члени:

$$\begin{aligned} V_{T=0}^1(\phi) &= \frac{3\alpha}{4\pi} (1 + \frac{1}{2 \cos^4 \Theta_W}) (\frac{1}{2}\phi^4 \ln \phi^2 - \frac{3}{4}\phi^4 + \phi^2) + \\ &+ \frac{\alpha m_H^4}{32\pi M_W^4} \left( (\frac{9}{2}\phi^4 - \frac{3}{4}\phi^2 + \frac{1}{2}) \ln |\frac{3\phi^2 - 1}{2}| - \frac{27}{4}\phi^4 + \frac{21}{2}\phi^2 \right); \end{aligned}$$

$$V_T^1(\phi, B) = -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{m_H^2}{M_W^2} \frac{3\phi^2 - 1}{2B^2} \Theta(3\phi^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2 \left( n \frac{B}{\cos \Theta_W} \frac{m_H}{M_W} \sqrt{\frac{|3\phi^2 - 1|}{2}} \right) +$$

$$+ \alpha \frac{m_H^2}{M_W^2} \frac{1 - 3\phi^2}{2B^2} \Theta(1 - 3\phi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Y_2 \left( n \frac{B}{\cos \Theta_W} \frac{m_H}{M_W} \sqrt{\frac{|1 - 3\phi^2|}{2}} \right),$$

де через  $K_2(x)$  та  $Y_2(x)$  позначені функції Макдональда та Якобі другого роду, відповідно, а через  $\Theta(x)$  -  $\Theta$ -функцію Хевісайда.

Остаточно повний температурний потенціал у скалярній теорії має вигляд:

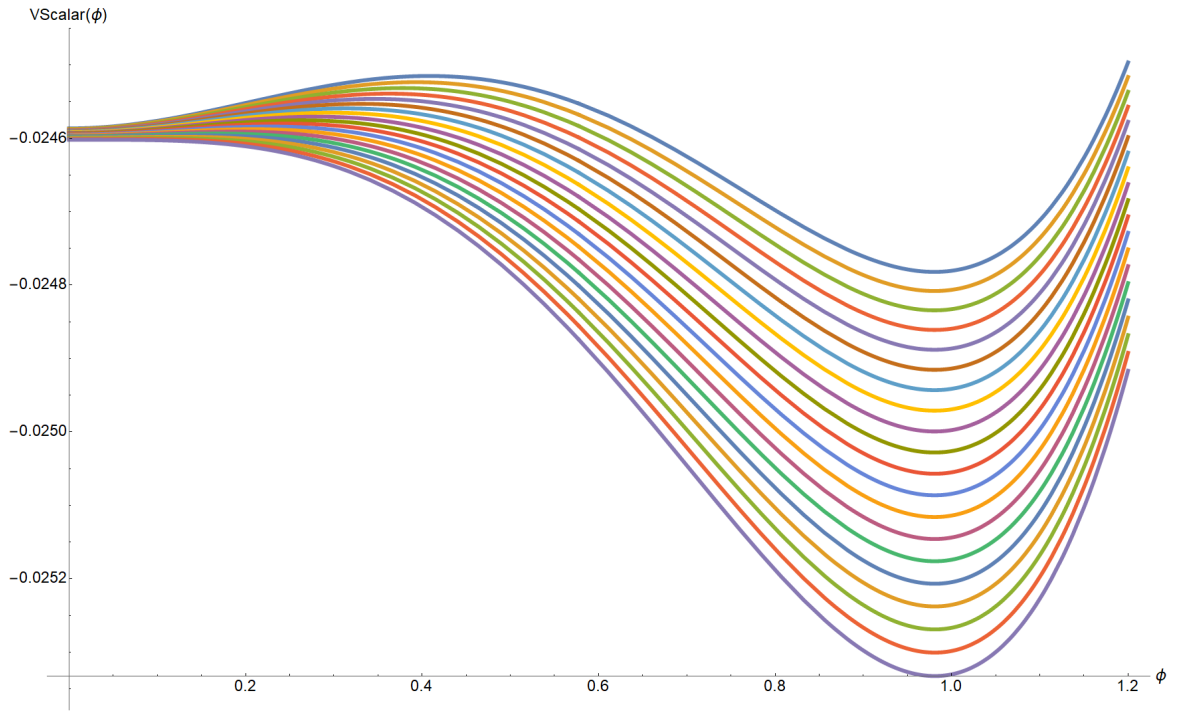
$$V_{Scalar}(\phi, B) = V^0(\phi) + V_{T=0}^1(\phi) + V_T^1(\phi, B).$$

Для зняття сум використаємо перетворення Мелліна, отриманий вираз дає асимптотичну поведінку потенціалу для високих температур, що відповідає уявленням про ЕСФП.

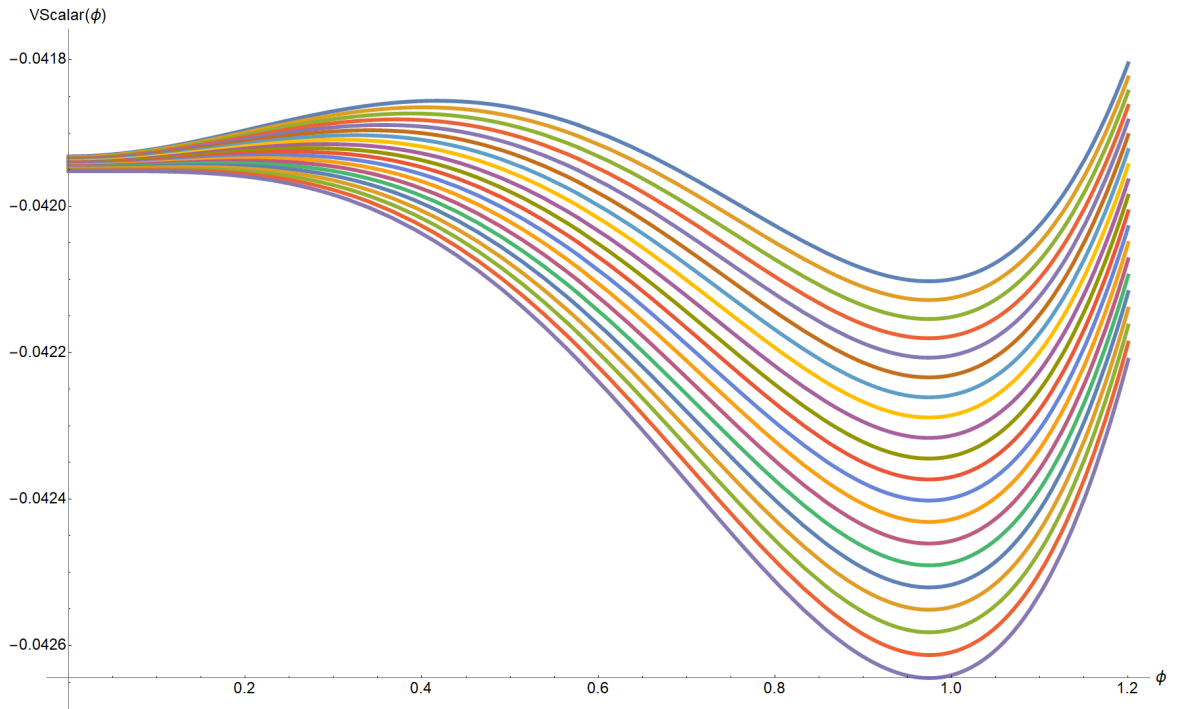
Для нас актуальними є питання:

- 1) Для яких мас бозона Хіггса має місце фазовий перехід першого роду, а для яких другого?
- 2) Який тип фазового переходу має місце для значення маси бозона Хіггса отриманому в 2012 році в ЦЕРНі?
- 3) За якої температури відбувається ЕСФП в скалярній теорії?

Для відповіді на поставлені питання, чисельними методами знайдемо залежність потенціалу від скалярного поля. Для обчислень використовується пакет Wolfram Mathematica 12.1. Побудуємо залежність ефективного потенціалу від скалярного поля для фіксованої температури за різних мас бозона Хіггса.



**Рис. 7:** Поведінка ефективного потенціалу для різних мас бозона Хіггса від 7.9 до 9.8 GeV за температури  $T = 100.481$  GeV.



**Рис. 8:** Поведінка ефективного потенціалу для різних мас бозона Хіггса 7.9 до 9.8 GeV за температури  $T = 114.836$  GeV.

На Рис. 7 та Рис. 8 проілюстровано поведінку ефективного потенціалу для різних мас бозона Хіггса. Для мас, менших за 9.7 GeV, залежність енергії

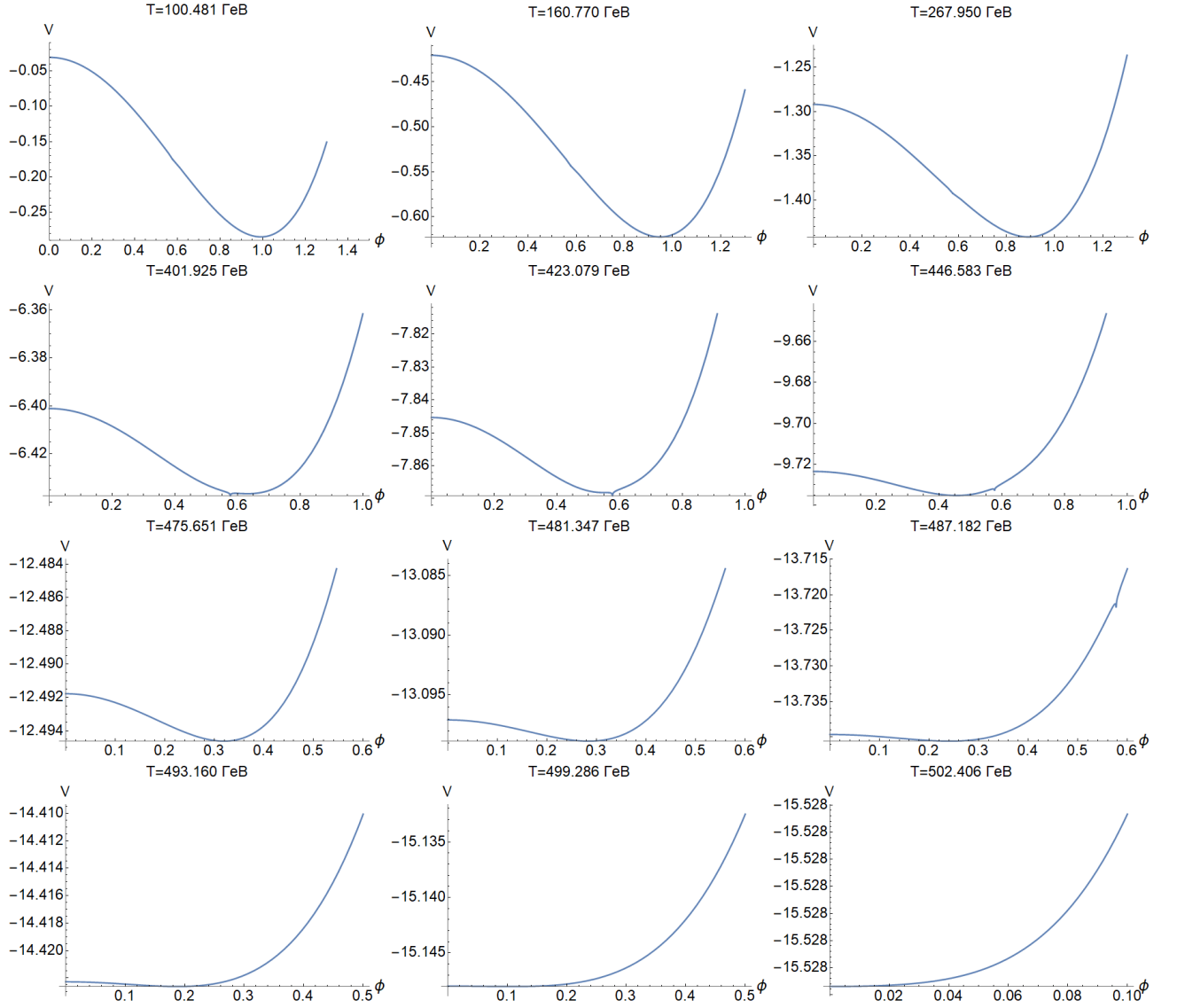
від поля має два локальні мінімуми – в точках нуль та  $\phi \sim 0.96$ , та один локальний максимум – при  $\phi \sim 0.4$ , що свідчить про перехід першого роду.

За збільшення маси локальний максимум зміщується до нуля, і при масі більшій за 9.7 GeV залежність потенціалу від поля має локальний максимум в точці 0 та локальний мінімум при  $\phi \sim 0.96$  - що свідчить про фазовий перехід другого роду. Підвищення температури збільшує глибину мінімуму, проте за достатньо високої температури симетрія відновлюється, та ненульовий мінімум зникає. Від'ємність потенціалу в точці мінімуму свідчить про наявність конденсату скалярного поля.

Отже, в скалярній теорії для мас бозона Хіггса більших за 9.7 GeV має місце фазовий перехід другого роду. Зокрема, для експериментально отриманої маси  $m_H = 125.26$  GeV має місце перехід другого роду, що не задовольняє критерії Сахарова.

За фіксованої маси скалярної частинки збільшення температури призводить до того, що локальний мінімум починає зміщуватись в бік нуля, та симетрія відновлюється. Для знаходження температури фазового переходу необхідно знайти значення температури, за якого локальний мінімум відповідає нульовому полю.





**Рис. 9:** Поведінка ефективного потенціалу для різних температур:  $T = 100$  GeV до  $T = 500$  GeV.

На Рис. 9 наведено графіки залежності енергії від поля для різних температур за маси бозона Хіггса  $125.26 \text{ GeV}$ . За температури меншої за  $T_c = 502 \text{ GeV}$ , маємо ненульовий локальний мінімум, а отже порушену симетрію, а для більших температур симетрія відновлюється. Отже, температура ЕСФП в скалярній теорії становить  $\sim 502 \text{ GeV}$ . Дані обчислення збігаються з результатом [48], що лише підтверджує коректність використання високотемпературних асимптотик для даних процесів.

### 3.5 Ефективний потенціал у Стандартній моделі за присутності магнітних полів

У попередньому розділі було оцінено температуру та можливість фазового переходу першого роду за наявності лише скалярного поля. Проведемо подібні розрахунки за наявності магнітних та хромоманітних полів. В цьому випадку необхідно врахувати внески калібрувальних бозонів та ферміонів в потенціал.

Для нас актуальними є питання:

- 1) Чи має місце фазовий перехід першого роду в Стандартній моделі?
  - 2) Який тип фазового переходу має місце для значення маси бозона Хіггса отриманому в 2012 році в ЦЕРНі?
  - 3) За якої температури відбувається ЕСФП в скалярній теорії?
- Розрахунки проведемо з використанням параметризації (3.4).

#### 3.5.1 Внесок скалярного поля

Запишемо внесок скалярного поля в повний потенціал за наявності магнітного поля.

$$V_{Scalar}(\phi, B) = V^0(\phi) + V_{T=0}^1(\phi) + V_T^1(\phi, B).$$

Використовуючи результати [47], можна записати кожен доданок: без петльовий внесок -

$$V^0(\phi) = \frac{m_H^2}{M_W^2} \sin^2 \Theta_W (-\phi^2 + \frac{\phi^4}{2});$$

однопетльовий внесок скалярного поля при нульовій температурі -

$$V_{T=0}^1(\phi) = \frac{3\alpha}{4\pi} (1 + \frac{1}{2 \cos^4 \Theta_W}) (\frac{1}{2} \phi^4 \ln \phi^2 - \frac{3}{4} \phi^4 + \phi^2) +$$

$$+\frac{\alpha m_H^4}{32\pi M_W^4} \left( \left( \frac{9}{2}\phi^4 - \frac{3}{4}\phi^2 + \frac{1}{2} \right) \ln \left| \frac{3\phi^2 - 1}{2} \right| - \frac{27}{4}\phi^4 + \frac{21}{2}\phi^2 \right);$$

однопетльовий внесок скалярного поля при скінченній температурі -

$$V_T^1(\phi, B) = -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{m_H^2}{M_W^2} \frac{3\phi^2 - 1}{2B^2} \Theta(3\phi^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2 \left( n \frac{B}{\cos \Theta_W} \frac{m_H}{M_W} \sqrt{\frac{|3\phi^2 - 1|}{2}} \right) +$$

$$+\alpha \frac{m_H^2}{M_W^2} \frac{1 - 3\phi^2}{2B^2} \Theta(1 - 3\phi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Y_2 \left( n \frac{B}{\cos \Theta_W} \frac{m_H}{M_W} \sqrt{\frac{|1 - 3\phi^2|}{2}} \right),$$

де через  $K_2(x)$  та  $Y_2(x)$  позначені функції Макдональда та Якобі другого роду, відповідно, а через  $\Theta(x)$  -  $\Theta$ -функцію Хевісайда.

Зазначимо, що відповідні вирази ідентичні до виразів скалярної теорії, бо скаляри не взаємодіють з магнітним полем на однопетльовому рівні.

Сумування за температурними модами було проведено за допомогою перетворення Мелліна.

Отримані внески будуть враховані при комп'ютерному моделюванні і знаходженні значень, що відповідають мінімуму ефективного потенціалу.

### 3.5.2 Внески $W^\pm$ -, $Z$ - бозонних полів

Внески заряджених частинок до ефективного потенціалу мають залежність від магнітного поля, адже ці поля взаємодіють між собою. Внесок нейтрального  $Z$  бозона не має особливостей на відміну від внеску  $W$ , бо в спектрі останнього наявна тахіонна мода, що викликає нестабільність у сильних полях. Температурний внесок  $W$  запишемо відразу в високотемпературній асимптотиці. Уявна, нестабільна частина потенціалу тотожно компенсується внесками рінгових діаграм, тому запишемо результат без цього внеску.

$$V_{W,Z}(\phi, h, B) = V_{Z,W,T=0}^1(\phi, h) + V_{W,T}^1(\phi, h, B) + V_{Z,T}^1(\phi, B).$$

Використовуючи результати [47], можна записати кожен доданок:  
однопетльовий внесок Z - , W - бозонів при нульовій температурі -

$$V_{Z,W,T=0}^1(\phi) = \frac{3\alpha}{4\pi} \left( h^2 \text{Log}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\phi^2}{2h^2}\right) + h^2 \zeta'(-1) + \frac{1}{16}\phi^4 - \frac{1}{8}\phi^4 \ln \frac{\phi^2}{2h^2} + \frac{1}{24}h^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{24}h^2 \ln(2h) \right) + \frac{\alpha}{2\pi} \left( (h^2 + h\phi^2) \ln(h + \phi^2) + (h^2 - h\phi^2) \ln|h - \phi^2| - 2h^2 \right)$$

де через  $\gamma$  позначено константу Ейлера - Маскероні, а через  $\text{Log}\Gamma(x)$  - функцію:

$$\text{Log}\Gamma(x) = \int_0^x \ln\Gamma(y) dy + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x \ln(2\pi);$$

однопетльовий внесок Z- та W-бозонів при скінченній температурі -

$$V_{W,T}^1(\phi, h, B) = -\frac{\alpha h}{2\pi} \left[ (h + \phi^2) \ln(h + \phi^2) - (\phi^2 - h) \ln|\phi^2 - h| + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{B} \sqrt{h + \phi^2} + 8\gamma h - 2h \right] - \\ - \frac{3\alpha}{\pi} \left[ -\frac{\pi^2 \phi^2}{3B^2} + \frac{1}{12}h^2 \left( \ln \frac{4\pi}{B\sqrt{h + \phi^2}} - \gamma \right) + \frac{2\pi}{3B} (h + \phi^2)^{3/2} - \frac{\pi h}{B} \sqrt{h + \phi^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}\phi^4 \ln \left( \frac{4\pi}{B\sqrt{h + \phi^2}} - \gamma \right) + \frac{h^2}{16} - \frac{h\phi^2}{8} - \frac{3\phi^4}{16} \right] \quad (3.12)$$

$$V_{Z,T}^1(\phi, B) = -\frac{6\alpha\phi^2}{\pi B^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2\left(\frac{nB\phi}{\cos \Theta_W}\right),$$

де через  $K_2(x)$  позначені функції Макдональда другого роду.

Сумування за температурними модами було проведено за допомогою перетворення Мелліна.

Отримані внески будуть враховані при комп'ютерному моделюванні і знаходженні значень, що відповідають мінімуму ефективного потенціалу.

### 3.5.3 Внесок лептонних полів

Зазначимо, що в Стандартній моделі наявні три покоління лептонів, внески кожного покоління необхідно врахувати адитивно. Лептони взаємодіють із магнітним полем. Користуючись результатами [47], запишемо у високотемпературній асимптотиці:

$$V_{Leptons}(\phi, h, B) = V_{Leptons, T=0}(\phi, h) + V_{Leptons, T}(\phi, h, B); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} V_{Leptons, T=0}(\phi, h) &= \frac{\alpha}{4\pi M_W^4} \left( \frac{3\phi^4}{2} - 2\phi^2 - \phi^4 \ln \phi^2 \right) \sum_f m_f^4 - \\ &\quad - \frac{\alpha h^2}{6\pi} \sum_f q_f^2 \ln \frac{2|q_f| h M_W^2}{m_f^2} - \\ &\quad - \frac{\alpha}{\pi} \sum_f \left[ 2q_f^2 h^2 \text{Log} \Gamma \frac{m_f^2 \phi^2}{2M_W^2 |q_f| h} + q_f^2 h^2 (2\zeta'(-1) - \frac{1}{6}) + \frac{1}{8} \frac{m_f^4}{M_W^4} \phi^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{4} \frac{m_f^4}{M_W^4} \phi^4 - \frac{1}{2} \frac{m_f^2}{M_W^2} |q_f| h \phi^2 \right) \ln \frac{2|q_f| M_W^2 h}{m_f^2 \phi^2} \right]; \\ V_{Leptons, T}(\phi, h, B) &= -\frac{\alpha}{\pi} \sum_f \left[ \frac{1}{6} q_f^2 h^2 \left( \ln \frac{\pi}{4\pi\alpha + \frac{m_f^2}{M_W^2} \phi^2 B^2} - 2\gamma \right) - \frac{\pi^2}{3} \frac{m_f^2 \phi^2}{M_W^2 B^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_f^4 \phi^4}{4M_W^4} \left( \frac{3}{4} - 2\gamma + \ln \frac{\pi}{4\pi\alpha + \frac{m_f^2}{M_W^2} \phi^2 B^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сумування за температурними модами було проведено за допомогою перетворення Мелліна.

Отримані внески будуть враховані при комп'ютерному моделюванні і знаходженні значень, що відповідають мінімуму ефективного потенціалу.

### 3.5.4 Внесок глюонних полів

Глюони є калібрувальними бозонами, відповідальними за сильну взаємодію. Оскільки для опису останньої в Стандартній моделі використовується група  $SU(3)$ , то відповідних бозонів 8. Проте через те, що лише восьма та третя матриці Гелл-Мана комутують одна з одною, лише внески восьмого та третього хромоманітних полів ураховано в ефективному потенціалі. Зазначимо, що глюони є безмасовими, а також електронейтральними, тому не взаємодіють зі скалярним та магнітним полями.

Використовуючи результати [49], в безрозмірених змінних (3.11) внесок глюонних полів можна записати:

$$V_{Gluons}(h_3, h_8, B) = -\frac{1}{3\pi B} \left( (g_s h_3)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left( \left| -\frac{g_s h_3}{\sqrt{6}} + g_s h_8 \right|^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{g_s h_3}{\sqrt{6}} + g_s h_8 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right).$$

У формулі використано константу зв'язку сильного сектора Стандартної моделі  $g_s$ . Значення відповідної константи прямує до нуля при підвищенні температури – в цьому полягає явище асимптотичної свободи. Також, відповідні поля у безрозмірному вигляді записуються  $h = \frac{H e}{M_W^2}$ .

### 3.5.5 Внесок кваркових полів

Внесок кваркових полів є найбільш цікавим для наших обчислень, адже саме внесок кварків включає в себе всі розглянуті поля - хромоманітні  $H_3$ ,  $H_8$ , магнітне  $H$  та скалярне  $\phi$ . В розділі 1 показано обчислення однопетльового внеску кваркових полів при скінченній температурі

$$V_{Quark}(\phi, h, h_3, h_8, B) = V^0(\phi, h, h_3, h_8) + V_{Inf}^T(\phi, h, h_3, h_8, B).$$

Випишемо ці внески. Але зазначимо, що надалі масу кварків необхідно буду параметризувати через значення скалярного конденсату поля Хіггса:

$$\begin{aligned}
V^0 &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ -2(h_f^a)^2 \left( 2\ln\Gamma_1\left(\frac{\mu_f^2}{2h_f^a}\right) + \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} \ln \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + 2\zeta'(-1) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3}(h_f^a)^2 - \frac{1}{4}\mu_f^4 + \frac{(h_f^a)^2}{3} \ln \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} + \frac{1}{2}\mu_f^4 \ln \frac{\mu_f^2}{2h_f^a} \right] \\
V_{Inf}^T &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{2}{3}h_{f,a}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln\left(\frac{\omega_f}{\pi}\right) \right) + \frac{7\zeta'(-2)}{4}\omega_f^2 + \frac{31\zeta'(-4)}{64}\omega_f^4 \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h_{f,a}^4}{90\mu_f^4} \left[ -1 + \frac{31\zeta'(-4)}{8}\omega_f^4 \right] \right];
\end{aligned}$$

Зазначимо, що необхідно враховувати температурну масу ферміонів. У внеску лептонів це вже враховано в розрахунках [47], для кваркових мас необхідно розраховувати масу таким чином:

$$\mu_f^2 = \frac{m_f^2 \phi^2 + \frac{q^2 e^2 M_W^2}{B^2}}{\frac{M_W^2}{e}}.$$

Сумування за температурними модами було проведено за допомогою перетворення Мелліна.

Отримані внески будуть враховані при комп'ютерному моделюванні і знаходженні значень, що відповідають мінімуму ефективного потенціалу.

### 3.6 Фазовий перехід у Стандартній моделі за присутності магнітних полів

Остаточно повний температурний потенціал у Стандартній моделі має вигляд:

$$\begin{aligned}
V_{SM}(\phi, h, h_3, h_8, B) &= \frac{h^2}{2} + \frac{h_3^2}{2} + \frac{h_8^2}{2} + V^0(\phi) + \\
&+ V_{SM,T=0}^1(\phi, h, h_3, h_8) + V_{SM,T}^1(\phi, h, h_3, h_8, B).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Причому однопетльовий внесок складається з внесків  $V_{Gluons}(h_3, h_8, B)$ ,  $V_{Quark}(\phi, h, h_3, h_8, B)$ ,  $V_{W,Z}(\phi, h, B)$ ,  $V_{Scalar}(\phi, B)$ ,  $V_{Leptons}(\phi, h, B)$

Цікавим є дослідження саме реальних полів фундаментальних частинок. Тому для розрахунків було взято сучасні параметри Стандартної моделі, отримані на Великому Гадронному колайдері та інших експериментах з фізики високих енергій:

Маси кварків, калібрувальних бозонів та лептонів

$$\begin{array}{l|l} M_u = 2.3MeV, & Q_u = \frac{2}{3}|e| \\ M_d = 4.8MeV, & Q_d = -\frac{1}{3}|e| \\ M_s = 95MeV, & Q_s = -\frac{1}{3}|e| \\ M_c = 1275MeV, & Q_c = \frac{2}{3}|e| \\ M_b = 4.180GeV, & Q_b = -\frac{1}{3}|e| \\ M_t = 174.34GeV, & Q_t = \frac{2}{3}|e| \end{array} \left| \begin{array}{l} M_W = 80.385GeV, \quad Q_W = \pm|e|, \\ M_Z = 91.188GeV, \quad Q_Z = 0, \\ M_H = 125,26eV, \quad Q_H = 0. \\ M_e = 0.5MeV, \quad Q_e = -|e|, \\ M_\mu = 105.66MeV, \quad Q_\mu = -|e|, \\ M_\tau = 1776.8MeV, \quad Q_\tau = -|e|. \end{array} \right.$$

На Рис. 10 показано залежність ефективного потенціалу для різних температур при значеннях полів, які загально мінімізують енергію. Наведемо зміну поведінки ефективного потенціалу для різних температур. Можна побачити, що для нижчих температур наявний не нульовий мінімум - що свідчить про порушеність симетрії. При підвищенні температури симетрія відновлюється, що і варто було очікувати. На Рис. 10 наведено графіки залежності енергії від поля для різних температур за маси бозона Хіггса 125.26GeV. За температури меншої за  $T_c = 361GeV$ , маємо ненульовий локальний мінімум, а отже порушену симетрію, а для більших температур симетрія відновлюється. Отже, температура ЕСФП в Стандартній моделі становить  $\sim 360GeV$ .

Проте, за типом фазового переходу, електрослабкий фазовий перехід є переходом другого роду: відсутній локальний максимум, що свідчив про перегріту конфігурацію, а тому про перехід першого роду. Це явно показує, що критерії Сахарова не виконуються.



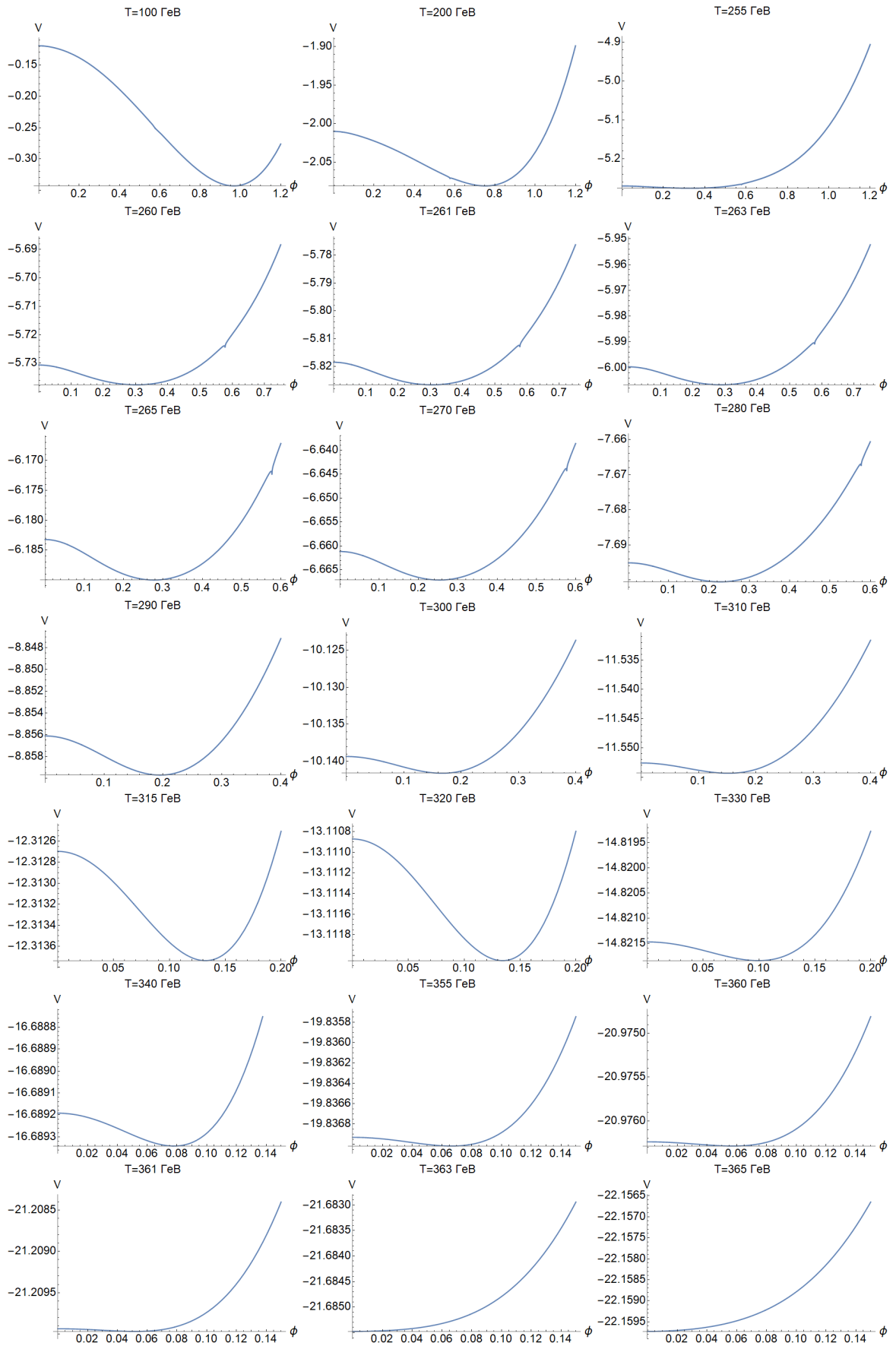


Рис. 10: Поведінка ефективного потенціалу для різних температур:  $T = 100$  GeV до  $T = 370$  GeV.

Наведемо значення спонтанно народжених полів при температурах, близьких до критичної. Таблиця 2 та Таблиця 3 показують значення напруженостей полів та значення скалярного конденсату.

T, GeV	$h_8$	$h_3$	$h$	$\phi$	$V$
100	0.09	0.012	0.0004	0.97	-0.34
200	0.29	0.055	0.0018	0.75	-2.09
255	0.394	0.078	0.0027	0.33	-5.276
260	0.45	0.085	0.003	0.31	-5.738
265	0.48	0.088	0.0032	0.26	-6.19
270	0.5	0.0.09	0.0034	0.25	-6.667
280	0.55	0.092	0.0036	0.22	-7.695
290	0.58	0.095	0.0038	0.19	-8.597
300	0.61	0.11	0.0043	0.17	-10.1415
310	0.65	0.14	0.0045	0.15	-11.554
315	0.67	0.148	0.0047	0.14	-12.3145
320	0.69	0.155	0.0049	0.13	-13.112
330	0.72	0.161	0.0052	0.13	-14.822
340	0.753	0.182	0.00585	0.13	-16.686
350	0.85	0.195	0.0061	0.12	-18.728
360	0.871	0.19991	0.00613	0.057	-20.9764

**Табл. 2:** Чисельні результати згенерованих полів для різних значень температур в безрозмірних змінних.

$T, \text{ GeV}$	$H_8 10^{19} \text{ Тл}$	$H_3 10^{19} \text{ Тл}$	$H 10^{17} \text{ Тл}$	$\phi$	$V$
100	1.092	0.131	0.436	0.97	-0.34
200	3.17	0.601	1.97	0.75	-2.09
255	4.30	0.852	2.95	0.33	-5.276
260	4.91	0.928	3.28	0.31	-5.738
265	5.24	0.961	3.49	0.26	-6.19
270	5.46	0.983	3.71	0.25	-6.667
280	6.01	1.00	3.93	0.22	-7.695
290	6.33	1.04	4.15	0.19	-8.597
300	6.66	1.20	4.70	0.17	-10.1415
310	7.10	1.53	4.91	0.15	-11.554
315	7.32	1.62	5.13	0.14	-12.3145
320	7.54	1.69	5.35	0.13	-13.112
330	7.86	1.76	5.68	0.13	-14.822
340	8.22	1.99	6.39	0.13	-16.686
350	9.28	2.13	6.66	0.12	-18.728
360	9.51	2.18	6.69	0.057	-20.9764

**Табл. 3:** Чисельні результати згенерованих полів для різних значень температур в розмірних змінних.

Наведені значення напруженостей є ненульовими. Це показує, що наявність полів є вигідною за температур, близьких до критичних. Ми отримали, що напруженість хромомагнітних полів  $H_3 \sim 10^{19}$  Тл та  $H_8 \sim 10^{19}$  Тл, а значення  $H \sim 10^{17}$  Тл. Ці значення є більшими за значення, отриман у [20]. Це не дивно, бо в зазначеній роботі було розглянуто температури значно нижче і лише внески КХД.

Значення скалярного поля є близьким до 1 при низьких температурах і близьким до 0 при підвищенні температури. Це дуже цікавий результат, адже нормування відбувалося безпечетельним наближенням, а значення мас бралися ті, які зараз спостерігаються в експериментах. Ми маємо, що сучасне значення мас елементарних частинок як раз відповідають масам, що мінімізують потенціал системи.

### 3.7 Висновки

У роботі було досліджено вплив магнітних і хромомагнітних полів на електрослабкий фазовий перехід. У Стандартній моделі повинні спонтанно народжуватись стабільні конфігурації магнітних і хромомагнітних полів. Зазначені поля виникають через великий гіромагнітний момент глюонів та  $W$ -бозонів, і, як наслідок, взаємодію хромомагнітних полів із кварками, що спричиняє виникнення магнітного поля [20], [41]. У роботі розраховано ефективний потенціал для всіх частинок Стандартної моделі, який враховує однопетльові та рінгові діаграми.

Відомо, що при температурах  $T > T_d$  в КГП повинні існувати макроскопічні хромомагнітні  $B_3$ ,  $B_8$  поля, а також звичайне магнітне поле  $H$ . Проте механізми народження цих полів різні. Хромомагнітні поля генеруються при високій температурі в  $SU(3)_c$  секторі Стандартної моделі у зв'язку з глюонною поляризацією вакууму. Вони існують у просторі, поки наявний деконфайнмент кольору. Формально такі поля є розв'язками рівнянь поля без джерел.  $SU(2)$  компоненти звичайного магнітного поля також спонтанно народжуються при температурах  $T$  більше, ніж температура  $T_{EW}$  електро-слабкого фазового переходу, через  $W$ -бозонну поляризацію вакууму. Але магнітне поле екранується скалярним полем конденсату, що з'являється після цього фазового переходу.

Зі зниженням температури в інтервалі  $T_d < T \ll T_{EW}$ , коли кольорові магнітні поля присутні, поле  $H$  має інший механізм генерації. Він активується поляризацією вакууму кваркових полів, як це було показано вище. Через нелінійності поляризації хромомагнітні поля  $B_3$ ,  $B_8$  стають джерелами народження  $H$ . Всі ці поля займають макроскопічні об'єми КГП. Одним із наслідків намагніченості є дискретний спектр енергій кольорово- і/або електрично-заряджених частинок, як показано для кварків. Насправді, це помітні особливості КГП, адже при низьких температурах після утворення макроскопічних

магнітних полів залишаються тільки поля, створювані зарядженими струмами. В результаті розрахунків можна зробити висновок, що при енергіях ВГК КГП повинна бути намагніченою. Це може слугувати ознакою наявності фазового переходу деконфайменту.

Зазначені поля повинні існувати і при температурах, близьких до критичної температури  $T_{EW}$ . Їх наявність потрібно враховувати при моделюванні процесів у цій області температур. У роботі було обчислено повний потенціал системи взаємодіючих полів і вплив внесків, пов'язаних із магнітними полями, на фазовий перехід. У рамках досліджень повний потенціал розглядався як функція всіх розглянутих полів. Комп'ютерними методами знаходилися значення напруженостей за яких потенціал досягав мінімального значення. За принципом Гамільтона фізично реалізуються конфігурації, що відповідають мінімуму. Показано, що намагніченість є енергетично вигідним станом КГП при заданих температурах. Також присутній ненульовий скалярний конденсат при температурах нижче критичної.

У скалярному секторі Стандартної моделі фазовий перехід може бути першого роду лише для малих значень маси бозона Хіггса, а для реальних значень - другого.

Дослідження електрослабкого фазового переходу в Стандартній моделі має певні труднощі. В роботі показано, що в рамках Стандартної моделі фазовий перехід повинен бути другого роду. Проте це не узгоджується з критеріями А.Д. Сахарова і, як наслідок, не пояснює баріонну асиметрію в спостережуваному Всесвіті. Отже, наявність магнітних полів не змінює тип переходу.

В однодуплетній Стандартній моделі можливість фазового переходу першого роду взагалі є малоюмовірною. Цікавим є постановка подібних питань в дводуплетній Стандартній моделі, де за відсутності поля ці вимоги задовольняються [50].

Наведені значення напруженостей полів є ненульовими. Це показує, що

наявність полів є вигідною за температур, близьких до критичної. Ми отримали, що напруженості хромагнітних полів мають порядок  $H_3 \sim 10^{19}$  Тл та  $H_8 \sim 10^{19}$  Тл, а значення  $H \sim 10^{17}$  Тл. Ці значення є більшими за значення отриманими в [20] на 4 порядки, що є очікуваним, враховуючи, що температури для обчислень теж на 3-4 порядки вищі. В роботі [20] було розглянуто значно нижчі температури - близькі до температури деконфайнменту  $\sim 150\text{MeV}$  та враховувались лише внески КХД.

Температура фазового переходу в скалярній теорії становить близько 500 GeV, а в Стандартній моделі близько 350 GeV.

Варто зазначити, що значення нормованого безрозмірного скалярного поля є близьким до 1 при низьких температурах, і до 0 - при температурах близьких до критичних. Це дуже цікавий результат, адже нормування відбувалося деревинним наближенням. Значення мас для обчислень потенціалу обиралися такими, що відповідають сучасним експериментам. Отже, виявляється, що сучасні значення мас елементарних частинок як раз дорівнюють масам, що відповідають масам у мінімумі потенціалу. Це свідчить про те, що обране наближення є самоузгодженим.

Урахування спонтанного намагнічування кваркової матерії за високих температур є необхідним при вивченні фізики процесів у ранньому Всесвіті.

## 4 ПАРАМЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР ДВОДУПЛЕТНОЇ МОДЕЛІ

Результати, отримані у попередньому розділі показують, що Стандартна модель елементарних частинок не може задовольнити умови баріогенезису Сахарова. Необхідне розширення або модифікація моделі, щоб вона як задовольняла сучасні експериментальні результати, так і робила очікувані передбачення фізики раннього Всесвіту (зокрема баріогенезис).

Відомо багато можливостей розширення Стандартної моделі. Це розширення ферміонного та бозонного секторів, додання окремих елементарних частинок, зокрема,  $Z'$ -бозона, нових поколінь кварків і лептонів, додання частинок, що відповідають темній матерії та гравітаційній взаємодії. Також відомі розширення скалярного сектора, зокрема, розглядаються додаткові скалярні поля або дуплети полів. Такі розширення є фізично обгрунтованими, адже скалярні поля можуть бути як зарядженими, так і електронейтральними й за багатьох умов є гарними кандидатами для частинок темної матерії або для частинок, взаємодія з якими досі є невідомою.

Головною мотивацією до розгляду саме дводуплетної моделі є [50], де автори знаходять параметричний простір, у якому можна задовольнити умови Сахарова. Результати отримані для моделей з  $Z_2$  симетрією без урахування магнетизації плазми при високій температурі. Розгляд більш загальних 2HDM потенціалів на сьогодні є більш актуальним та відкритим.

Інша мотивація для дводуплетної моделі походить від аксіонних моделей [51]. Песей і Квінн [52] зазначали, що можливий член, що порушує CP, у лагранжіані КХД, який є феноменологічним і, як відомо, дуже малий, можна повернути, якщо лагранжіан містить глобальну  $U(1)$  симетрія. Однією з можливостей надати цю симетрію є наявність двох дублетів Хіггсів.

Розширення теорії обов'язково призводить до розширення параметричного простору моделі, а саме до збільшення кількості вільних параметрів,

які можуть бути взяті лише з експериментів. Якщо розглядати Стандартну модель, то вільними параметрами є маси частинок, а також константи зв'язку всіх частинок між собою. При додаванні нової частинки або можливості нової взаємодії розширюється і відповідний простір параметрів. Нас цікавить розширення Стандартної моделі таким чином, щоб задовольнити критерій Сахарова. А конкретніше, знайти параметри розширеної моделі, в якій можливий електрослабкий фазовий перехід першого роду при високій температурі.

У даному розділі ми проводимо огляд дводуплетної моделі (2HDM). При дослідженні цієї моделі опишемо надзвичайно багатий параметричний простір, порівняємо отримані результати з деякими відомими результатами симуляції. Продемонструємо застосування комп'ютерних симуляцій з метою отримання точок параметричного простору, для яких у подальшому можна перевіряти виконання критеріїв Сахарова або взагалі розглядати нову фізику в рамках цієї моделі.

## 4.1 Потенціал моделі

Загалом, вакуумна структура 2HDM дуже багата. Найбільш загальний скалярний потенціал містить 14 параметрів і може мати як порушення CP симетрії так і збереження CP.

$$\begin{aligned}
 V = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - \left( m_{12}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + h.c \right) + \frac{\lambda_1}{2} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 \\
 & + \lambda_3 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) + \\
 & + \left[ \frac{\lambda_5}{2} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \lambda_6 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_7 \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) + h.c \right]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



Параметри  $m_{11}, m_{22}, \lambda_1 - \lambda_4$  є дійсними, а  $\lambda_5 - \lambda_7, m_{12}$  - можуть бути комплексними.

Проте не всі значення параметрів потенціалу 2HDM забезпечують наявність стійкого мінімуму, якщо тільки можна бути впевненим, що потенціал обмежений знизу. Ця основна вимога дозволяє накладати обмеження на члени четвертого степеня. Покращені, більш жорсткі, з використанням групи ренормалізації, обмеження приводять до суворих обмежень на маси фізичних скалярних частинок. Ми обговоримо структуру вакууму потенціалу, наведемо загальні формули для мас скалярів, представимо обмеження на квартові зв'язки, отримані з вимоги обмеження потенціалу знизу, і обговоримо симетрії скалярного потенціалу та їх розширення на сектор Юкави.

Використовуючи цей потенціал, треба бути обережним у обмеженні параметрів. Однак більшість феноменологічних досліджень 2HDM роблять кілька спрощуючих припущень. Зазвичай припускають, що СР зберігається в Хіггс секторі (тільки тоді можна розрізняти скаляри та псевдоскаляри), що СР не порушується спонтанно, і що дискретні симетрії усувають усі члени з непарними степенями одного з дуплетів. Квадратичні коефіцієнти, включаючи член, який м'яко порушує дискретні симетрії, ми будемо зберігати. Розглянемо найбільш загальний вигляд потенціалу скалярного сектора 2HDM для двох дуплетів полів  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  із слабо порушеною  $Z_2$ -симетрією :

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_i + \rho_i(x) + i\eta_i(x)) \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

із гіпер зарядом  $Y = +1$  та невід'ємними параметрами  $v_1$  та  $v_2$  невід'ємні,  $v_1^2 + v_2^2 = v^2 = 4m_W^2/g^2 = (246\text{Гев})^2$  :

$$V = m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - m_{12}^2 (\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2$$

$$+ \lambda_3 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) + \frac{\lambda_5}{2} \left( \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right)^2 \right), \quad (4.3)$$

де всі параметри будуть вважатися дійсними.

Варто зазначити, що під  $Z_2$ -симетрією маємо на увазі інваріантність зазначеного потенціалу до перетворень:  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$  або  $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1, \Phi_2 \rightarrow \Phi_2$ . Легко бачити, що лише доданок пропорційний  $m_{12}^2$  змінює знак при таких перетвореннях, чим порушує цю симетрію.

Також підкреслимо, що  $V$  інваріантний відносно фазових перетворень загальної  $U(1)$ -симетрії:  $\Phi_1 \rightarrow e^{i\alpha}\Phi_1, \Phi_2 \rightarrow e^{i\alpha}\Phi_2$

Цікавим є те, що доданок, пропорційний  $\lambda_5$ , забезпечує порушення  $T$ -симетрії [53]. Головні результати з вивчення процесів у зазначеній моделі отримано багатьма вченими, зокрема, в роботах Бранко, Гінзбурга та інших. У загальному випадку потенціал моделі повинен включати два дуплети скалярних полів, і це призводить до можливості запису в потенціалі щонайменше п'яти вільних параметрів біля членів четвертого степеня, а також до появи трьох додаткових скалярних частинок, опис взаємодії яких викликає великий інтерес. Сучасні дослідження на Великому Гадронному Календарі завжди проводять тестування та пошук взаємодії з зарядженими скалярами та можливо іншими нейтральними важкими частинками

Будемо вважати, що параметри моделі обрані так, що мінімум потенціалу досягається для дуплетів вигляду:

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}; \quad \langle \Phi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

Знайдемо умови мінімуму потенціалу:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} \right|_{\Phi_1 = \langle \Phi_1 \rangle} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} \right|_{\Phi_2 = \langle \Phi_2 \rangle} = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \Phi_1} &= m_{11}^2 \Phi_1^\dagger - m_{12}^2 \Phi_2^\dagger + \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) \Phi_1^\dagger + \lambda_3 (\Phi_2^\dagger \Phi_2) \Phi_1^\dagger + \\
&\quad + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) \Phi_2^\dagger + \lambda_5 (\Phi_2^\dagger \Phi_1) \Phi_2^\dagger \\
\frac{\partial V}{\partial \Phi_2} &= m_{22}^2 \Phi_2^\dagger - m_{12}^2 \Phi_1^\dagger + \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2) \Phi_2^\dagger + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) \Phi_2^\dagger + \\
&\quad + \lambda_4 (\Phi_2^\dagger \Phi_1) \Phi_1^\dagger + \lambda_5 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) \Phi_1^\dagger
\end{aligned}$$

Порахуємо окремо важливі доданки для підстановки (4.4) до (4.5):

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_1 \rangle^\dagger \langle \Phi_1 \rangle &= \frac{1}{2} v_1^2 \\
\langle \Phi_2 \rangle^\dagger \langle \Phi_2 \rangle &= \frac{1}{2} v_2^2 \\
\langle \Phi_1 \rangle^\dagger \langle \Phi_2 \rangle &= \frac{1}{2} v_1 v_2 \\
\langle \Phi_2 \rangle^\dagger \langle \Phi_1 \rangle &= \frac{1}{2} v_1 v_2
\end{aligned}$$

Відмітимо, що оскільки рівноважні значення в дуплетах мають нульову першу компоненту, то, відповідно, можна відразу записати два скалярні рівняння:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} &= 2m_{11}^2 v_1 - 2m_{12}^2 v_2 + \lambda_1 v_1^2 v_1 + \lambda_3 v_2^2 v_1 + \lambda_4 v_1 v_2 v_2 + \lambda_5 v_1 v_2 v_2 \\
0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} &= 2m_{22}^2 v_2 - 2m_{12}^2 v_1 + \lambda_2 v_2^2 v_2 + \lambda_3 v_1^2 v_2 + \lambda_4 v_1 v_2 v_1 + \lambda_5 v_1 v_2 v_1
\end{aligned}$$

Зазвичай розглянутий потенціал аналізують у термінах частинок. Поля у (4.2) можна представити у вигляді: двох масивних СР-парних  $(h, H)$ , одного масивного СР-непарного  $A$ , пари масивних заряджених  $H^\pm$  та двох голдстоунських  $(G^0, G^\pm)$ . Зазначені поля пов'язані рівняннями:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix},$$

де введено дуже важливі кути змішування  $\alpha$  та  $\beta$ :

$$tg\beta = \frac{v_2}{v_1}; \quad tg2\alpha = \frac{2(m_{12}^2 + \lambda_{345}v_1v_2)}{m_{12}^2(\frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2}) + \lambda_1v_1^2 - \lambda_2v_2^2}, \quad (4.7)$$

$$M^2 = \frac{m_1^2}{\sin\beta\cos\beta}, \quad \lambda_{345} = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$$

Маси частинок можуть бути виражені через параметри потенціалу:

$$\begin{aligned} m_H^2 &= M^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \left( \lambda_1 \cos^2\alpha \cos^2\beta + \lambda_2 \sin^2\alpha \sin^2\beta + \frac{\lambda_{345}}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \right) v^2 \\ m_h^2 &= M^2 \cos^2(\alpha - \beta) + \left( \lambda_1 \sin^2\alpha \cos^2\beta + \lambda_2 \cos^2\alpha \sin^2\beta - \frac{\lambda_{345}}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \right) v^2 \\ m_A^2 &= M^2 - \lambda_5 v^2 \\ m_{H^\pm}^2 &= M^2 - \frac{\lambda_4 + \lambda_5}{2} v^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Нас цікавить звуження параметричного простору, а саме обмеження на значення параметрів. Тому необхідно додати умови стабільності та унітарності на потенціал:

Стабільність скалярного потенціалу забезпечується вимогою його обмеженості знизу, що досягається виконанням системи нерівностей [54]:

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

$$\lambda_3 > -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 - |\lambda_5| > -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.9)$$

Коефіцієнти мають задовольняти умови мінімуму (4.5):

$$0 = 2m_{11}^2 v_1 - 2m_{12}^2 v_2 + \lambda_1 v_1^2 v_1 + \lambda_3 v_2^2 v_1 + \lambda_4 v_1 v_2 v_2 + \lambda_5 v_1 v_2 v_2 \quad (4.10)$$

$$0 = 2m_{22}^2 v_2 - 2m_{12}^2 v_1 + \lambda_2 v_2^2 v_2 + \lambda_3 v_1^2 v_2 + \lambda_4 v_1 v_2 v_1 + \lambda_5 v_1 v_2 v_1$$

умови глобального мінімуму [55]:

$$m_{12}^2 \left( m_{11}^2 - m_{22}^2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) \left( tg\beta - \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) > 0 \quad (4.11)$$

умови пертурбативності [56]:

$$|\lambda_i| < 4\pi \quad (4.12)$$

Унітарність скалярних амплітуд розсіювання S-хвиль призводить до нерівностей [57], [58]:

$$|a_{\pm}|, |b_{\pm}|, |c_{\pm}|, |f_{\pm}|, |e_{1,2}|, |f_1|, |p_1| < 8\pi \quad (4.13)$$

$$a_{\pm} = \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{\frac{9}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)^2}$$

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_4^2}$$

$$c_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_5^2}$$

$$f_+ = \lambda_3 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5$$

$$f_- = \lambda_3 + \lambda_5$$

$$e_1 = \lambda_3 + 2\lambda_4 - 3\lambda_5$$

$$e_2 = \lambda_3 - \lambda_5$$

$$p_1 = \lambda_3 - \lambda_4$$

$$f_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \quad (4.14)$$

Перелічені теоретичні обмеження достатньо сильно обмежують параметричний простір моделі. Проте варто зазначити, що іноді обмеження йде від параметризації моделі масами частинок за наступними формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m_H^2 \cos^2 \alpha + m_h^2 \sin^2 \alpha - m_{12}^2 \operatorname{tg} \beta}{v^2 \cos^2 \beta} \\ \lambda_2 &= \frac{m_H^2 \sin^2 \alpha + m_h^2 \cos^2 \alpha - m_{12}^2 \operatorname{ctg} \beta}{v^2 \sin^2 \beta} \\ \lambda_3 &= \frac{(m_H^2 - m_h^2) \cos \alpha \sin \alpha - m_{12}^2 + 2m_{H^\pm}^2 \cos \beta \sin \beta}{v^2 \sin \beta \cos \beta} \\ \lambda_4 &= \frac{(m_A^2 - 2m_{H^\pm}^2) \cos \beta \sin \beta + m_{12}^2}{v^2 \sin \beta \cos \beta} \\ \lambda_5 &= \frac{m_{12}^2 - m_A^2 \cos \beta \sin \beta}{v^2 \sin \beta \cos \beta} \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 4.2 Юкавівська взаємодія в 2HDM

Що стосується юкавівського сектора моделі, симетрія  $Z_2$  накладена для запобігання появи процесів, які змінюють флейвор на рівні дерева шляхом примусового з'єднання кожного типу правого ферміона з одним дуплетом Хіггса. Тоді можливі чотири варіанти, які називаються типами I, II, X і Z [59]. Записуючи лагранжіан Юкави у вигляді:

$$\begin{aligned} L_Y &= -\frac{\sqrt{2}}{v} H^+ \left\{ \bar{u} [\zeta^d V_{CVM} m_d P_R - \zeta^u m_u V_{CKM} P_L] d + \zeta^l \bar{\nu} m_l P_R l \right\} \\ &\quad - \frac{1}{v} \sum_{f, \phi_i^0 \in \{h, H, A\}} \varepsilon_{\phi_i^0}^f \phi_i^0 [\bar{f} m_f P_R f] + h.c. \end{aligned} \quad (4.16)$$

де певний вибір параметрів  $\zeta^f$  відповідає вищезгаданим типам 2HDM, що наведено в таблиці. У виразі (4.16)  $u, d$  і  $l$  позначають up-, down-кварки і лептони

відповідно, а  $f$  - загальний ферміон.  $V_{CKM}$  - це матриця Кабібо-Кобаяши-Маскави. Лептонним змішуванням нехтують, а  $P_{L;R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}$ . Кеплінги  $\varepsilon_{\phi_i^0}^f$  пов'язані з  $\zeta^f$ :

$$\varepsilon_h^f = \sin(\beta - \alpha) + \cos(\beta - \alpha)\zeta^f$$

$$\varepsilon_H^f = \cos(\beta - \alpha) - \sin(\beta - \alpha)\zeta^f$$

$$\varepsilon_A^u = -i\zeta^u, \quad \varepsilon_A^{d,l} = i\zeta^{d,l}. \quad (4.17)$$

Модель	$\zeta^d$	$\zeta^u$	$\zeta^l$
Тип I	$ctg\beta$	$ctg\beta$	$ctg\beta$
Тип II	$-tg\beta$	$ctg\beta$	$-tg\beta$
Тип X (лептоний)	$ctg\beta$	$ctg\beta$	$-tg\beta$
Тип Z (обернений)	$-tg\beta$	$ctg\beta$	$ctg\beta$

**Табл. 4:** Кеплінги для різних 2HDM.

### 4.3 Умови нормування потенціалу

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\phi, H)}{\partial H^2} \Big|_{H=0, T=0, \phi_i=v_i} &= \frac{1}{2}; \\ \frac{\partial V(\phi, H)}{\partial \phi} \Big|_{H=0, T=0, \phi_i=v_i} &= 0; \\ \frac{\partial^2 V(\phi, H)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{H=0, T=0, \phi_i=v_i} &= \frac{\partial^2 V_{Higgs}(\phi, H)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{H=0, T=0, \phi_i=v_i}, \end{aligned}$$

### 4.4 Симуляції точок параметричного простору

У цьому розділі ми хочемо пояснити алгоритм генерації параметрів і чітко показати основні результати симуляцій. Для чисельного моделювання нам потрібно зафіксувати значення параметрів  $\lambda_i$  та  $m_{11}, m_{12}, m_{22}$ . Якщо у

нас є ці параметри, ми можемо обчислити маси частинок. У результаті ми знаходимо  $V$  як функцію  $v_1, v_2, T, H$  для EWPT.

Як правильно зафіксувати всі параметри моделі? Ми пропонуємо такий спосіб. У моделюванні ми випадковим чином генеруємо  $\lambda_1 - \lambda_5$ , використовуючи умову унітарності та стабільності, і значення  $tg\beta < 100$ .

Для кожної комбінації  $\{\lambda_i, tan\beta\}$  ми чисельно розв'язуємо рівняння за умови з  $v_{SM} = v_1^2 + v_2^2 = 246,22\text{GeV}$  і  $m_h = 125\text{GeV}$ . У результаті ми маємо значення  $m_{12}$  і  $\alpha$ .

Наступним кроком буде обчислення  $m_{11}$  та  $m_{22}$  за відповідними формулами.

Після вказаних кроків ми отримуємо точку в параметричному просторі для h2HDM  $\{\lambda_i, m_{11}, m_{12}, m_{22}, \alpha, tg\beta\}$ . Для наступних обчислень ми опускаємо точки з  $m_{12}^2 > 10$ , оскільки нас цікавить слабе порушення симетрії  $Z_2$ .

Зауважимо, що отримана точка в параметричному просторі задовольняє такі умови:

1. Модель має сучасне експериментальне значення вакуумного середнього  $v_{SM}$ .
2. Модель має сучасне експериментальне значення  $m_h$ .
3. Модель задовільняє основні нерівності взяті з теоретичних обмежень.

Ми хочемо побачити поведінку цієї моделі поблизу критичної температури EWPT, нам потрібно зробити параметри  $v_1$  і  $v_2$  вільними та незалежними. При високій температурі вони повинні наближатися до нуля, щоб мінімізувати потенціал, і відповідно відновити симетрію  $SU(2) \times U(1)$ , а частинки "зробити" безмасовими.



## 4.5 Ілюстрація результатів

Симуляція за описаною схемою була зроблена методами мови програмування Python 3 та середовища Wolfram Mathematica 12. Деякий основний код програм наведено в Додатку А, а результати можна проілюструвати графічно.

Для первинної симуляції генерувалося довільним чином  $10^9$  наборів  $\lambda_{3,4,5}$ . Далі перевірялася частина теоретичних умов. Якщо перевірка задовольнялася, то генерувалися  $\lambda_{1,2}$ . Перевірялася решта умов. Якщо перевірка проходила успішно, то для кожного набору  $\lambda_i$  генерувалося по 5 значень  $\tan\beta$ . У результаті утворювалось близько  $\sim 10^9$  точок параметричного простору, для яких можна рахувати маси частинок. Цікавим є розглянути залежності одних параметрів від інших. Зазначимо, що запусків симуляцій проводилось багато, для різних діапазонів  $\tan\beta$ .

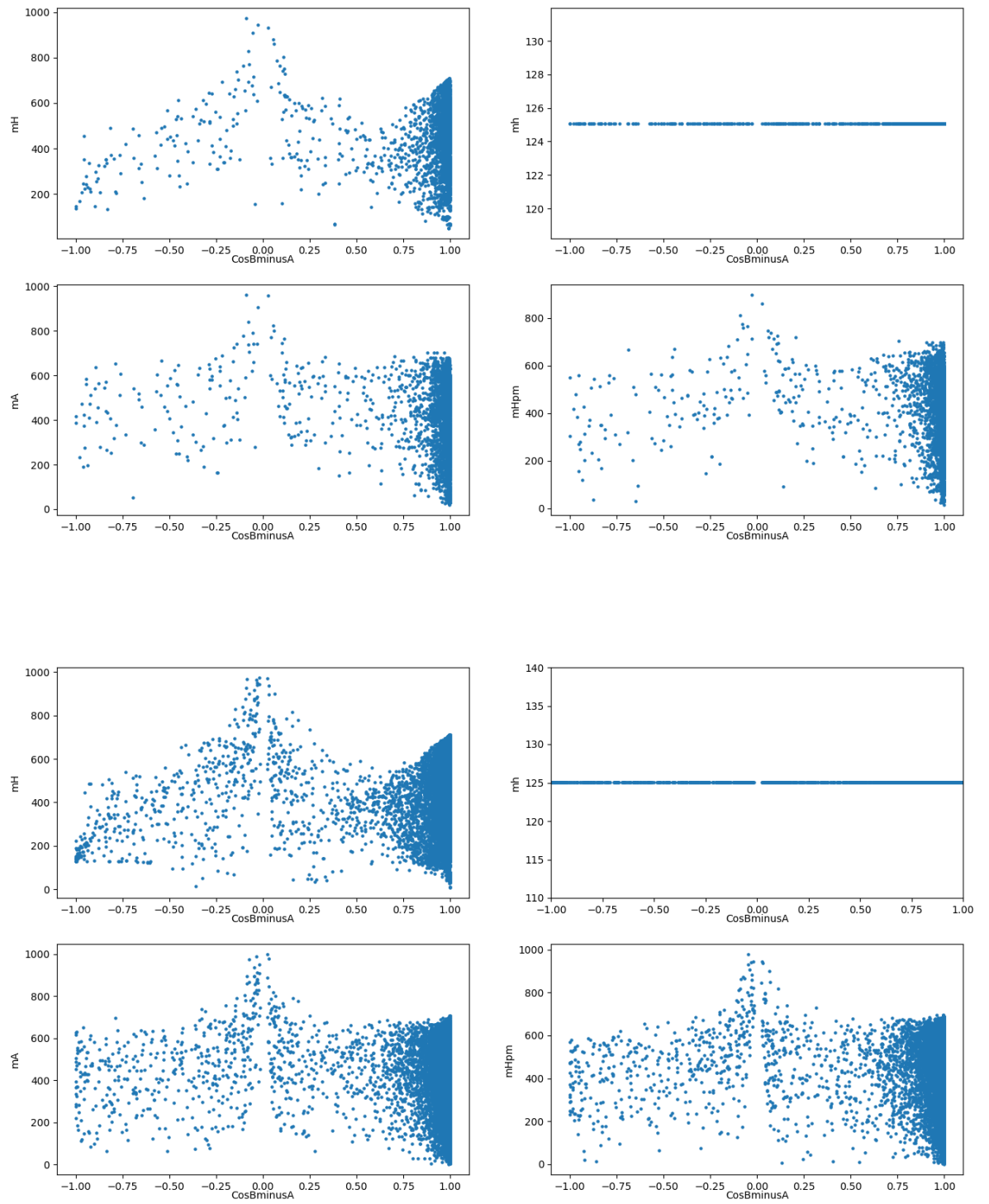


Рис. 11: Залежність мас частинок від  $\cos(\beta - \alpha)$ .

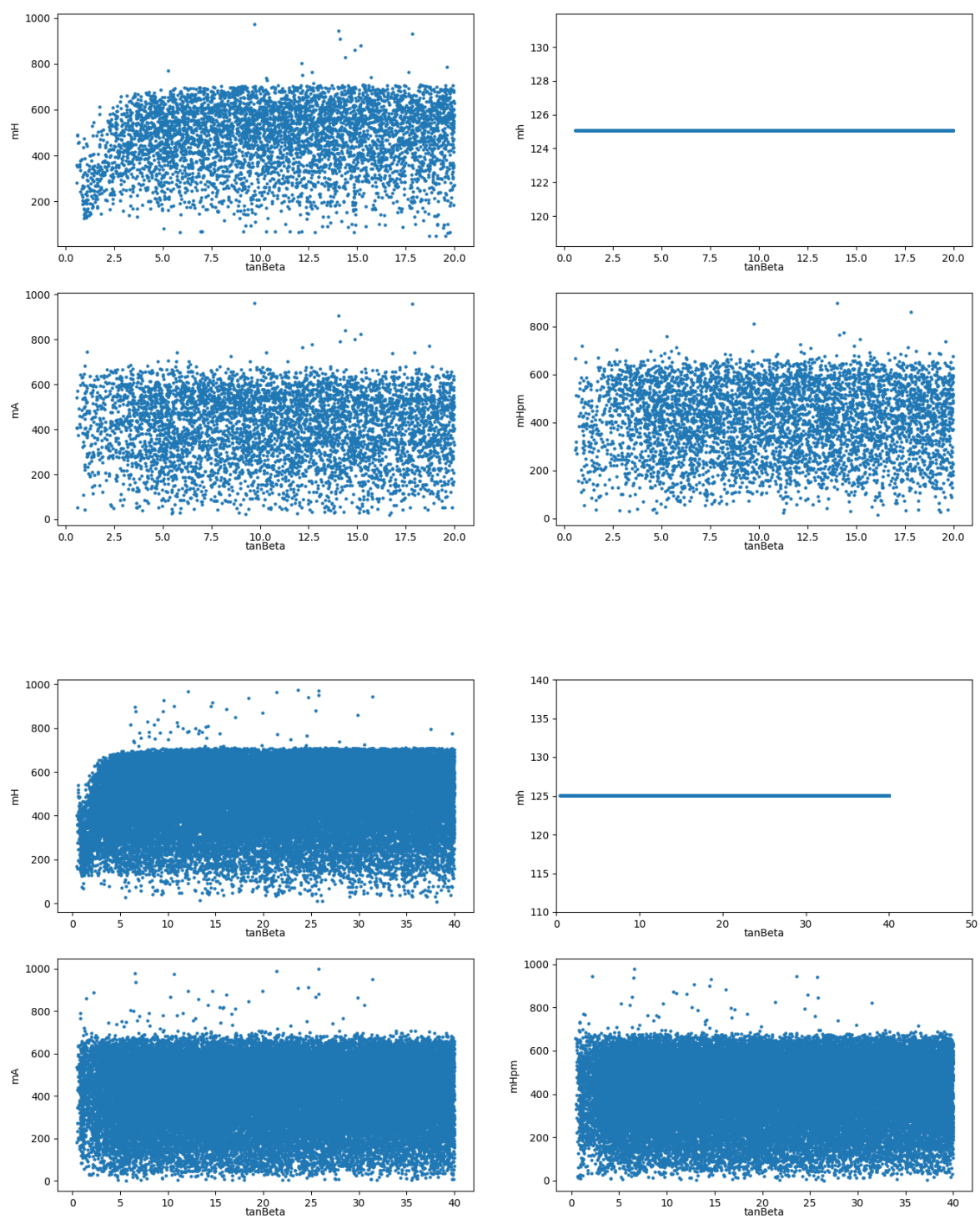
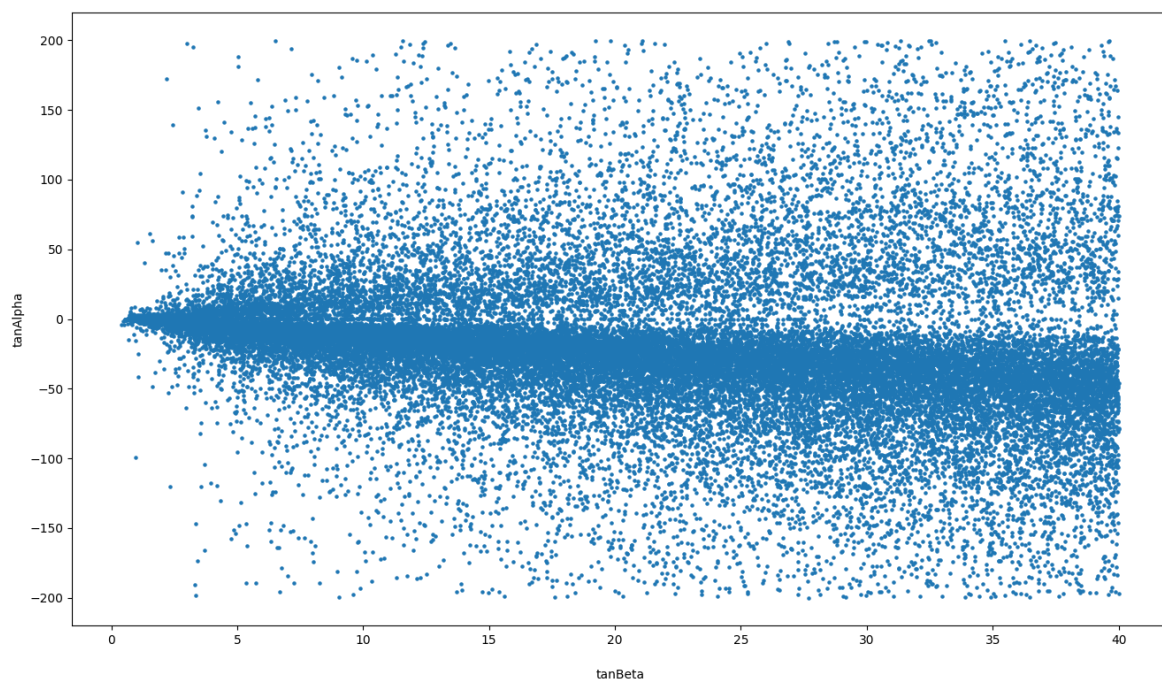
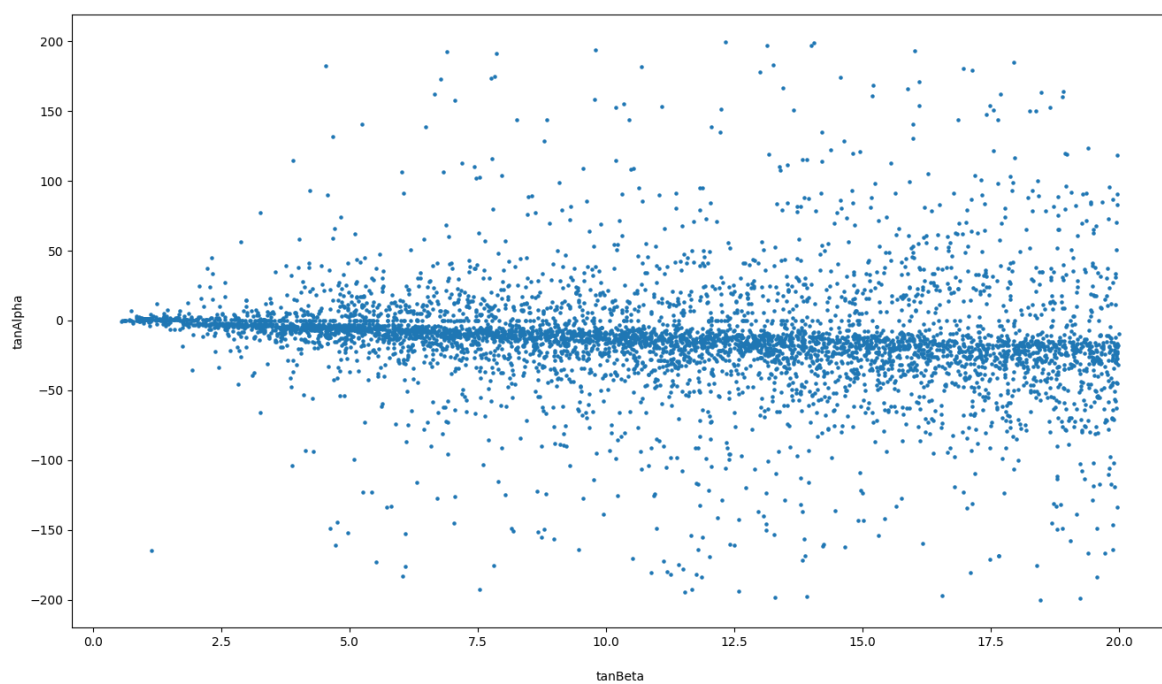
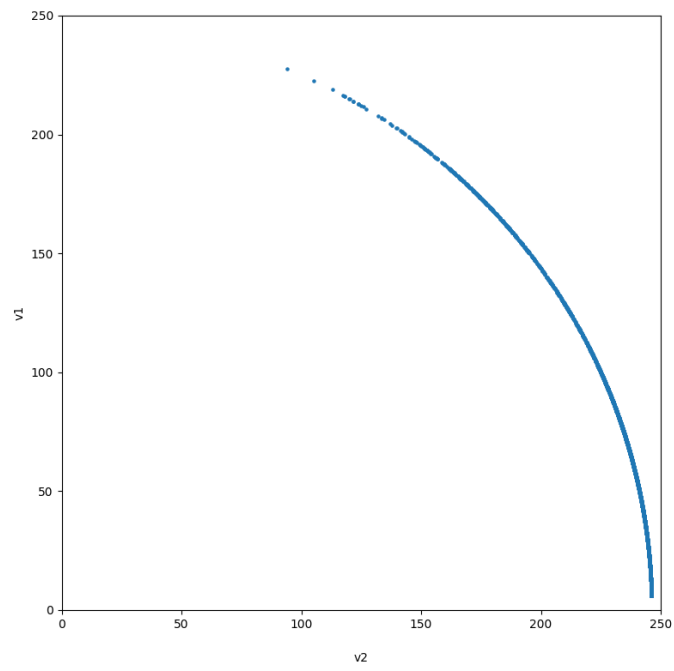


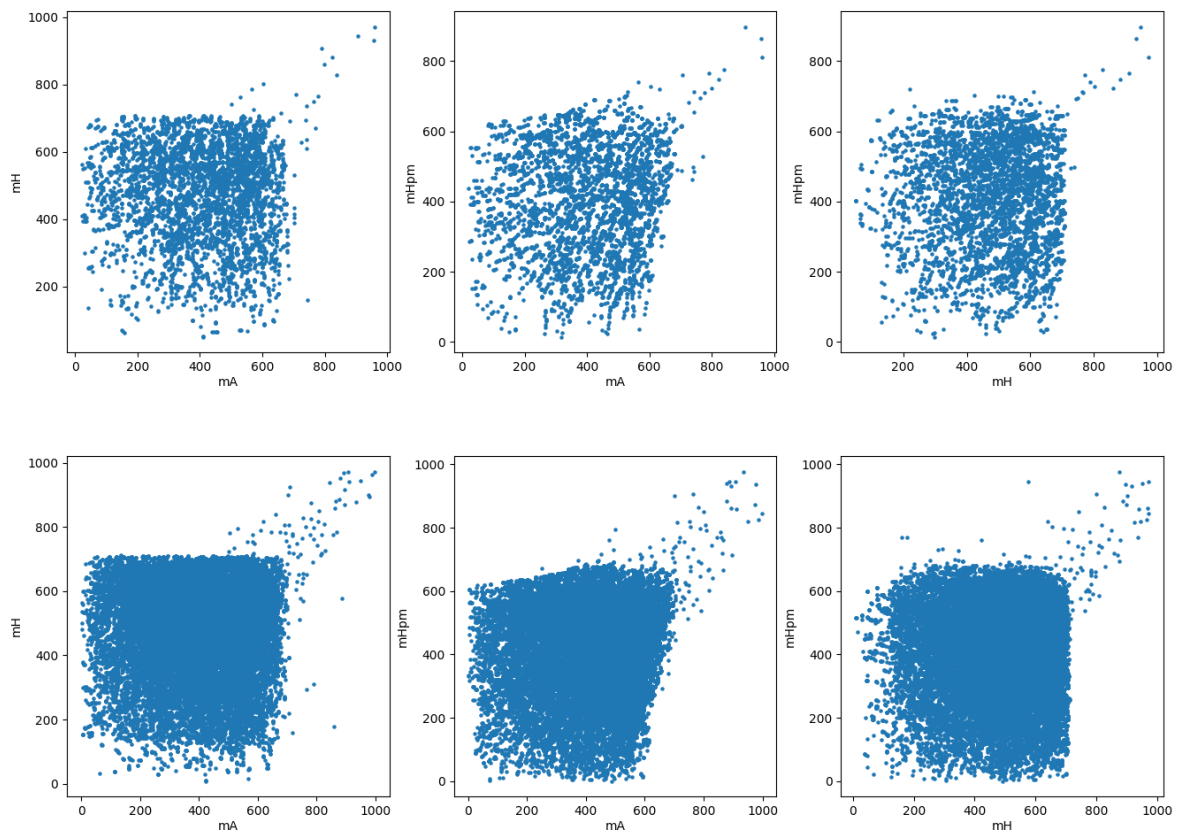
Рис. 12: Залежність мас частинок від  $tg\beta$ .



**Рис. 13:** Залежність  $tg\alpha$  від  $tg\beta$ .



**Рис. 14:** Залежність  $v_1$  від  $v_2$ .



**Рис. 15:** Залежність мас частинок одна від одної.

Продемонструємо конкретні значення та вигляд потенціалу однієї з симуляцій.

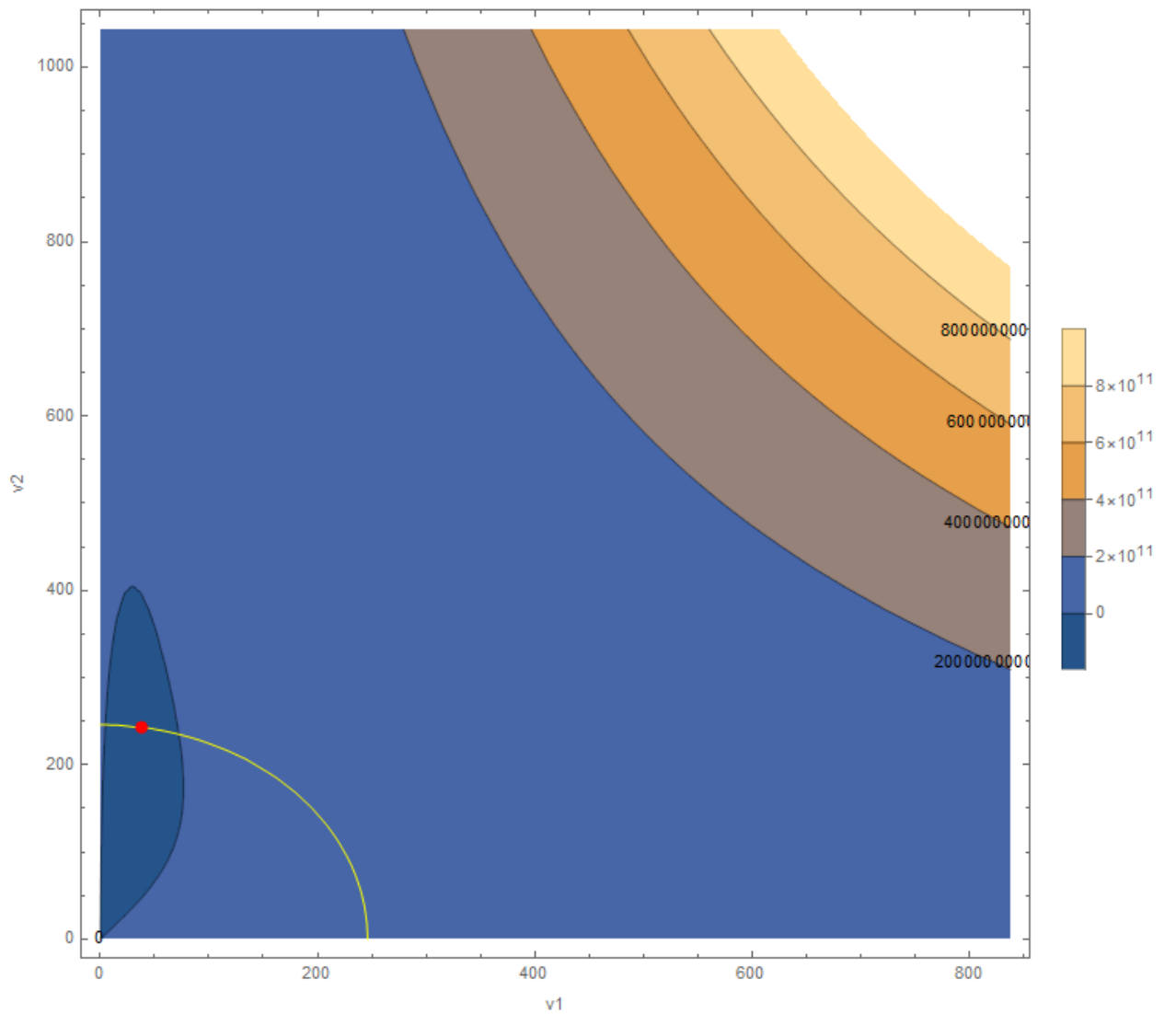
$v_1$	37.985
$v_2$	243.272
$v_{SM}$	246.22
$\tan\alpha$	0.0450661
$\tan\beta$	6.40443

$\lambda_1$	0.0878829
$\lambda_2$	0.100667
$\lambda_3$	7.03056
$\lambda_4$	1.8583
$\lambda_5$	0.445202

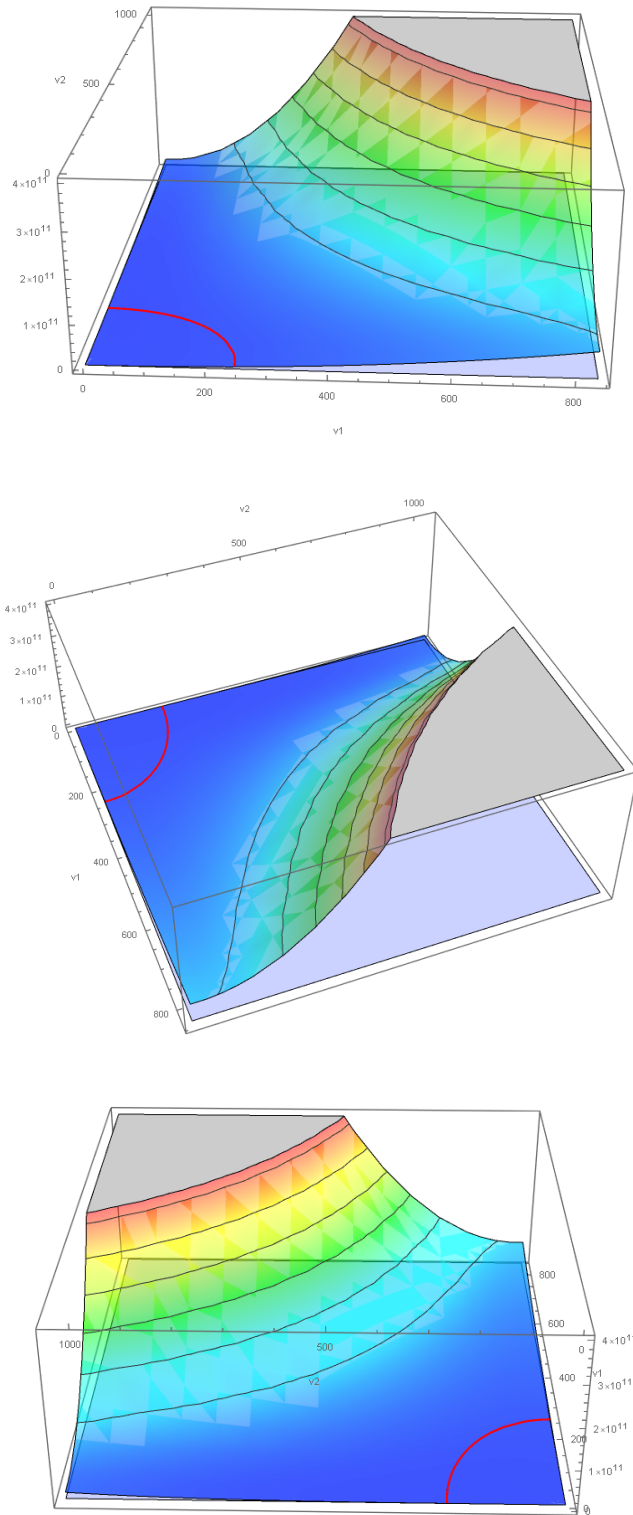
$m_{12}^2$	67477.3
$m_{11}^2$	155888
$m_{22}^2$	823.344

$m_h$	125.09
$m_H$	663.992
$m_{H^\pm}$	610.627
$m_A$	644.748

**Табл. 5:** Результат Симуляції



**Рис. 16:** 2D залежність скалярного потенціалу від  $v_1$  та  $v_2$ .



**Рис. 17:** 3D залежність скалярного потенціалу від  $v_1$  та  $v_2$ .

На рисунках 11-15 точками показано значення симульованих параметрів один від одного. Зазначимо, що наведено результати двох запусків симуляцій верхні графіки -  $\tan\beta < 100$ , нижні  $\tan\beta < 40$ . Якщо в певній області графіка немає точок значить в результаті симуляції не було таких результа-

тів при яких маса чи інший параметр набував вказаного значення. Легко побачити, що певні області майже повністю заповнені точками, отже вказане значення реалізується при великій кількості значень інших параметрів. Так, наприклад, можна побачити з рисунку 11, що великі маси  $m_H > 800\text{GeV}$  можливі лише при малому значенні  $\cos(\beta - \alpha)$ . Маса  $m_h = 125\text{GeV}$  для всіх симуляцій. Рисунок 14 ілюструє, що при всіх симуляціях  $v_1^2 + v_2^2 = v_{SM}^2$ .

На рисунках 16-17 показано вигляд потенціалу (4.3) за фіксованих значень параметрів наведених у таблиці 5. Жовтим та червоним колами показано  $v_1^2 + v_2^2 = v_{SM}^2$ . Точкою на рис. 16 показано точку мінімуму, що відповідає значенням  $v_1$  та  $v_2$ . Значення у мінімумі - від'ємне.

Багато інформації можна визначити з наведених рисунків, що можуть бути використані при подальших дослідженнях дводуплетної моделі.

## 4.6 Висновки

Обговорюється поведінка EWPT за присутності магнітних полів. Виконання умов Сахарова в 2HDM залишається відкритим. Отримано алгоритми моделювання точок у параметричному просторі. Проведено обчислення та симуляції для обмеження параметричного простору двухдуплетної моделі для врахування сучасних теоретичних обмежень на параметри. Вказані обмеження варто в подальшому враховувати для пошуку параметрів для виконання умов Сахарова для пояснення баріонної асиметрії Всесвіту. Якщо точки з фазовим переходом першого роду будуть знайдені, то вони є кандидатами на моделі для пояснення спостережуваної асиметрії матерії та антиматерії нашого Всесвіту. Цей пошук проводиться шляхом вивчення мінімуму потенціалу теорії як функції температури та напруженості магнітного поля для багатьох різних параметрів моделей. Вказана методологія та частина результатів є важливим етапом в побудові фізики поза Стандартною моделлю, для пояснення Всесвіту.



# ВИСНОВКИ

1. Досліджується створення в КГП полів  $B_3, B_8, H$  при температурах близьких до температури ФПД та оцінено напруженості полів. Використовується формалізм уявного часу. Розраховується ефективний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  з урахуванням глюонів і  $u$ -,  $d$ - і  $s$ -кварків при скінченній температурі. Ця конфігурація поля стабільна завдяки внескам дейзі-діаграм, які компенсують уявну частину однопетльового ефективного потенціалу заряджених глюонів  $V^{(1)}(B_3, B_8, T)$ . Для оцінки напруженості поля використане асимптотичне високотемпературне розвинення, отримане за рахунок перетворення Мелліна. Як наслідок цього дослідження ми спостерігаємо, що сильні хромомагнітні поля  $B_3, B_8$ , порядку  $\sim 10^{18} - 10^{19}$  Г і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс генеруються для температури  $T \sim 160 - 220$  МеВ. Спонтанне намагнічення зникає при  $T \sim 110 - 120$  МеВ. Ця температура розглядається як температура деконфайнменту в присутності поля. Вона істотно нижча за оцінену без магнітного поля. Як впливає з отриманих результатів, в КГП сильні хромо(магнітні) поля порядку  $H_{3,8} \sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс і  $H \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс повинні бути присутніми. Це впливає на всі процеси, що відбуваються, і може слугувати сигналами ФПД. Внаслідок намагнічування, зокрема, всі початкові стани заряджених частинок є дискретними по енергії. Це може змінити поперечний переріз конкретного процесу і може бути виявлено в експериментах.
2. Розглядається вплив магнітних полів на процеси за температур значно вищих за температуру деконфайнменту. Досліджується можливість генерації магнітних полів під час електрослабкого фазового переходу який відбувся в ранньому Всесвіті за високої температури. До цього фазового переходу коли Всесвіт був гарячим частинки були безмасовими і симетрія відновлена. При охолодженні симетрія порушила-

ся і через наявність ненульового скалярного конденсату калібрувальний бозони набули масу. Розраховано повний однопетльовий потенціал  $V(B_3, B_8, H, T)$  стандартної моделі з врахуванням внесків від дейзідіаграм, показана можливість генерації магнітних та хромоманітних полів за високої температури. Оцінена напруженість генералізованих полів. Показано, що фазовий перехід у стандартній моделі не задовольняє критеріям Сахарова і тому модель потребує модифікацій. Сильні хромоманітні поля  $B_3, B_8$ , порядку  $\sim 10^{19}$  Тл і звичайне магнітне поле  $H \sim 10^{17}$  Тл генеруються для температури  $T \sim 100 - 500$  ГеВ. Симетрія відновлюється при  $T \sim 360$  ГеВ. Ця температура розглядається як температура фазового переходу в присутності поля. Вплив генерованих полів потрібно враховувати у всіх процесах, що відбувалися в гарячому Всесвіті на ранніх етапах його існування.

3. Розглядається розширення стандартної моделі другим дуплетом скалярних полів. Утворена модель є сучасною теоретичною теорією в рамках якої відбувається багато досліджень. Зараз вивчення нейтрино, моделювання кандидатів на частинки темної матерії, пояснення існуючих неточностей СМ часто проводять в рамках 2HDM. Параметричний простір моделі є надзвичайно багатим, що дозволяє шукати області, де можна задовольнити умови Сахарова. Існує багато теоретичних обмежень, які вже відомі відносно скалярного потенціалу, врахування їх є обов'язковим при моделюванні. Комп'ютерними методами проведено моделювання вільних параметрів потенціалу та пораховані можливі маси нових частинок, у припущенні слабкого порушення  $Z_2$ -симетрії та фіксованій масі найлегшого нейтрального бозона на рівні 125.09 ГеВ. Наведено значення мас всіх частинок та параметрів моделі в залежності один від одного. Показано дозволені області мас.

4. Розроблено програмні та теоретичні засоби для роботи з параметри-

чним простором дводуплетної моделі для подальших досліджень поза Стандартною моделлю. Зокрема для звуження допустимих значень спостережуваних, що можуть бути виміряні у майбутніх експериментах на прискорювачах. Моделювання враховує сучасні значення маси найлегшого скалярного бозона на рівні 125 GeV. Розраховано маси інших скалярних частинок при генерації інших параметрів методами Монте-Карло. Обчислення параметрів кварк-глюонної плазми потребує широкіх обчислень в розширеній моделі та потребує продовження для подальшого звуження області параметричного простору. У вказаному, допустимому, параметричному просторі можна шукати області, що задовольняють умови баріогенезису Сахарова.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

## Література

- [1] B. S. DeWitt. Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. Phys. Rev., 162, 1195, 1967.
- [2] J. Honerkamp. The question of invariant renormalizability of the massless Yang-Mills theory in a manifest covariant approach Nucl. Phys. B48, 269, 1972.
- [3] V. Skalozub. Condensation of gauge fields at high temperature. Монографія, Lira Ltd, 2021.
- [4] Yu. Sinyukov, M. Adzhymambetov, V. Naboka, V. Shapoval. The prethermal stage of heavy-ion collision and the particle production, Acta Physica Polonica B. 11, 2018.
- [5] Yu. Sinyukov, M. Adzhymambetov, V. Naboka, V. Shapoval. The femptoscopy scales in Au+Au collisions at the top RHIC energy, Acta Physica Polonica B. 12, 2019.
- [6] Yu. Sinyukov, M. Adzhymambetov, V. Shapoval, V. Naboka. Femtoscopic structure of relativistic heavy ion collisions in the Integrated HydroKinetic Model, Physics of Particles and Nuclei 51, 2020.
- [7] M. Adzhymambetov, V. Shapoval, Yu. Sinyukov. Description of bulk observables in Au+Au collisions at top RHIC energy in the integrated hydrokinetic model, Nuclear Physics A 987, 2019.
- [8] Yu. Sinyukov, M. Adzhymambetov, V. Shapoval. Particle production in Xe+Xe collisions at the LHC within the Integrated Hydrokinetic Model, Particles 2020, 2020.

- [9] J.I. Kapusta. Finite Temperature Field Theory. *Cambridge University Press*, 1989.
- [10] Skalozub V. Effective coupling constant in gauge theories at high temperature. *Int. J. Mod. Phys. A*, Vol. 11, No. 32, 5643-5657, 1996.
- [11] Cabo A. "Proper Time" Method Calculations of the "One-Loop" Thermodynamical Potential for QED in External Electromagnetic Fields. *Fortschritte der Physik*, Vol. 29, 495-503, 1981.
- [12] Cabo A., Kalashnikov O., Shabad A. Finite temperature gluonic gas in a magnetic fields. *Nucl. Phys. B*, Vol.185, 473-484, 1980.
- [13] Skalozub V. Effective coupling constants in gauge theories at high temperature *Int. J. Mod. Phys. A*— 1996. — V. 11 — P. 5643.
- [14] Skalozub V.V., Strelchenko A.V. On the generation of Abelian magnetic fields in SU(3) gluodynamics at high temperature *Eur. Phys. J. C*— 2004. — V. 33 — P. 105.
- [15] Pollock M.D. Magnetic fields and vacuum polarization at the planck era *Int. J. Mod. Phys. D*— 2003. — V. 12 — P. 1289.
- [16] Demchik V.I., Skalozub V.V. The spontaneous generation of magnetic fields at high temperature in a supersymmetric theory *Eur. Phys. J. C*— 2003. — V. 27 — P. 601–607.
- [17] Demchik V., Skalozub V. The spontaneous creation of a chromomagnetic field and  $A_0$ -condensate at high temperature on a lattice *J. Phys. A*— 2008. — V. 41 — P. 16405.
- [18] S. Antropov, M. Bordag, V. Demchik and V. Skalozub. Long range chromomagnetic fields at high temperature *Intern. J. Mod. Phys. A*— 2011. — V. 26 — P. 4831-4843.

- [19] *Demchik V., Skalozub V.* Spontaneous magnetization of a vacuum in the hot Universe and intergalactic magnetic fields *Phys. Part. Nucl.*— 2015. — V. 46(1) — P. 1-23.
- [20] Skalozub V., Minaiev P. Magnetized quark-gluon plasma at the LHC. *Phys. Part. Nucl. Lett.*, Vol. 6, Num. 18, 2018.
- [21] *Skalozub V., Minaiev P.* On magnetization of quark-gluon plasma at the LHC experiment energies *Visnyk Dnipropetrovs'kogo univ. Fizuka. Radioelektronika*— 2016. — V. 24 — P. 25— [Arxiv:1612.00216, hep-ph].
- [22] *Akhiezer A.I., Berestetski V.B.* Квантовая электродинамика. — "Наука Moscow, 1969.
- [23] *Kalashnikov O. K.* QCD at Finite temperature *Fortsch. Phys/ Ed.*— 1984. — V. 32. 525. — P. 119.
- [24] *Satz H.* The Fireball Paradigm. — *Lecture Notes in Physics* vol. 841, Springer, 2012.
- [25] *Skalozub V., Bordag M.* Colour ferromagnetic vacuum state at finite temperature *Nucl. Phys. B*— 2000. — V. 576 — P. 430.
- [26] *Kapusta J. I.* Finite-temperature Field Theory. Cambridge University Press, 1989.
- [27] Абрамовиц М. Стиган И. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1979.
- [28] Howard E. Haber, H. Arthur Weldon. On the relativistic Bose-Einstein integrals. *J. Math. Phys.*, 23(10), 1982.
- [29] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. - 3-е изд. перераб. - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1969, 624 с.

- [30] Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. - М.: Изд-во МГУ, 1986. 260 с.
- [31] *Galilo B. V., Nedelko S. N.* Impact of strong electromagnetic field on the QCD effective potential for homogeneous Abelian gluon field configurations Phys. Rev. D — 2011. — V. 84 — P. 094017.
- [32] *Ozaki S.* QCD effective potential with strong  $U(1)_{em}$  magnetic fields Phys. Rev. D — 2014. — V. 89 — P. 054022.
- [33] *Agasian N.O., Fedorov S. M.* Quark–hadron phase transition in a magnetic field Phys. Lett. B — 2008. — V. 663 — P. 445.
- [34] *Orlovsky V. D., Simonov Yu. A.* The quark-hadron thermodynamics in magnetic field Phys. Rev. D — 2014. — V. 89 — P. 054012.
- [35] *Cea P., Cosmai L., D’Elia M.* The QCD Phase Diagram for External Magnetic Fields JHEP — 2007. — V. 0712 097.
- [36] *Bali G. S. et al.* The QCD Phase Diagram for External Magnetic Fields JHEP — 2012. — V. 1202 044 — P. 22.
- [37] *Bonati C., D’Elia M., Mariti M., Mesiti M., Negro F., Rucci A. and Sanfilippo F.* Magnetic field effects on the static quark potential at zero and finite temperature Phys. Rev. D — 2016. — V. 94 — P. 094007.
- [38] *D’Elia M., Meggiolaro E., Mesiti M. and Negro F.* Gauge-invariant field-strength correlators for QCD in a magnetic background Phys. Rev. D — 2016. — V. 93 — P. 054017.
- [39] *Bonati C., D’Elia M., Mariti M., Mesiti M., Negro F., and Sanfilippo F.* Anisotropy of the quark-antiquark potential in a magnetic field Phys. Rev. D — 2014. — V. 89 — P. 114502.

- [40] Sakharov A. Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe. *JETP Lett*, Vol. 5, Num. 32, 1967.
- [41] V. Skalozub, Minaiev P. On magnetization of quark-gluon plasma at the LHC experiment energies. *Visnik Dnìpropetrovs'kogo unìversitetu. Seriâ Fizika, radiòelektronika*. Issue 23(2). Vol. 24, p. 25-30 ,2016.
- [42] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. *Phys.Rev.*, Vol. 82, 664, 1951.
- [43] Bogdan V. Galilo, Sergei N. Nedelko Impact of the strong electromagnetic field on the QCD effective potential for homogeneous Abelian gluon field configurations. *Phys.Rev. D*, 84, 094017, 2011.
- [44] Per Elmfors. Thermal versus vacuum magnetization in QED. *Phys. Rev. D*, Vol. 51, Num. 10, 1995.
- [45] Kirzhnits D., Linde A. Macroscopic consequences of the Weinberg model. *Phys Lett B*, Vol. 42, P. 471-474, 1972.
- [46] Carrington M., Effective potential at finite temperature in the standard model. *Phys. Rev. D*, Vol. 45, Num. 8, 1992.
- [47] Skalozub V., Demchik V. Electroweak phase transition in strong magnetic fields in the standard model of elementary particles., *arXiv:hep-th/9912071v1*, 1999.
- [48] Guang-jiong Ni, Su-qing Chen. Effective Potential of  $\lambda\phi_{1+3}^4$  at Zero and Finite Temperature. *Acta Phys. Sin. (Overseas Edn)* Vol. 7, Num. 6, 1998.
- [49] Skalozub V.V., Strelchenko A.V. On the generation of Abelian magnetic fields in  $SU(3)$  gluodynamics at high temperature. *Eur. Phys. J. C*, 33: 105-112, 2004.



- [50] Kozushko A., Skalozub V. The parametric space of the two-Higgs-doublet model and Sakharov's Baryogenesis conditions. *Ukr. J. Phys*, Vol.56,No. 5, 2011.
- [51] J. E. Kim, Light pseudoscalars, particle physics and cosmology. Phys. Report. 150, 1, 1987.
- [52] R. D. Peccei and H. R. Quinn. Conservation in the Presence of Pseudoparticles. Phys. Rev. Lett. 38 1440. 1977.
- [53] Lee T.D., A Theory of spontaneous T Violation. *Phys. Rev. D*, Vol. 8, Num. 4, 1973.
- [54] J. F. Gunion and H. E. Haber, Phys. Rev. D 67, 075019 (2003) [hep-ph/0207010].
- [55] A. Barroso, P. M. Ferreira, I. P. Ivanov and R. Santos, JHEP 1306, 045 (2013).
- [56] Erratum to: The muon magnetic moment in the 2HDM: complete two-loop result Adriano Cherchiglia, Patrick Kneschke, Dominik Stockinger and Hyejung Stockinger-Kim Journal of High Energy Physics volume 2021, Article number: 242 (2021).
- [57] S. Kanemura, T. Kubota and E. Takasugi, Phys. Lett. B 313, 155 (1993).
- [58] B. Swiezewska, Phys. Rev. D 88, no. 5, 055027 (2013) Erratum: [Phys. Rev. D 88, no. 11, 119903 (2013)].
- [59] Branco G.C., Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models. *Phys. Reports. D*, Vol. 516, iss. 1-2, P 1-102 ,2012.
- [60] *Bali G. S. et al.* The QCD transition in external magnetic fields *PoS, ConfinementX:197*, 2012.

- [61] *Greensite J.* An Introduction to the Confinement Problem. — Lecture Notes in Physics vol. 821, Springer, 2011.
- [62] *Levkova L., DeTar C.* Quark-Gluon Plasma in an External Magnetic Field *Phys. Rev. Lett.*— 2014. — V. 112(1) — P. 012002.
- [63] *Szabo K.* QCD at non-zero temperature and external magnetic fields *PoS* , LATTICE2013— 2014. — V. 014.
- [64] *Bali G. S., Bruckmann F., Endrödi G., Schäfer A.* Magnetization and pressures at nonzero magnetic fields in QCD *PoS* , LATTICE2013— 2014. — V. 182.
- [65] *Grasso D., Rubinstein H. R.* Magnetic Fields in the Early Universe *Phys. Rept*— 2001. — V. 348 — P. 163–266.
- [66] *Elizalde E., Skalozub V.* Spontaneous magnetization of the vacuum and the strength of the magnetic field in the hot Universe *Eur. Phys. J. C*— 2012. — V. 72 — P. 1968.
- [67] *H. E. Haber, H. A. Weldon.* On the relativistic Bose–Einstein integrals *J. Math. Phys.*— 1982. — V. 23 — P. 1852.
- [68] *Starinets A.O., Vshivtsev A. S., Zhukovsky V. Ch.* Colour ferromagnetic state in SU(2) gauge theory at finite temperature *Phys. Lett. B*— 1994. — V. 322 — P. 40.
- [69] *Becirevic D.,* Seeking the CP-odd Higgs via  $h \rightarrow \eta_{c,b} l^+ l^-$ . *Phys. Rev. D*, Vol. 97, 015008, 2018.
- [70] *Koichi Hattori, Daisuke Satow.* Gluon Spectrum in Quark-Gluon Plasma under Strong Magnetic Fields. *Phys.Rev. D*, 97, 014023, 2018.
- [71] *Skalozub V., Bordag M.* Ring Diagrams and electroweak phase transition in a magnetic field. *Int. J. Mod. Phys. A*, Vol. 15, No. 3, 349-361, 2000.

- [72] Skalozub V. Bordag M. Colour ferromagnetic vacuum state at finite temperature. *Nucl. Phys. B*, 576, 430-444, 2000.
- [73] Скалозуб В.В., Гулов О.В., Класична електродинаміка. Навч.посібник. - К.: Вища освіта, 2011, 208 с.
- [74] Давыдов А.С., Квантовая механика. - 2-е изд. перераб. - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1973, 704 с.
- [75] Дирак П.А., Принципы квантовой механики. Пер. с англ. - 2-е изд. перераб. и доп. - М: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1979.
- [76] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990, 346 с.
- [77] Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985, 382 с.
- [78] Michael E. Peskin, D.V. Schroeder. An introduction to quantum field theory. - Perseus books Publishing, L.L.C. 1995, 842.
- [79] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1973, 296с.
- [80] O. K. Kalashnikov "W-Boson mass operator in an external magnetic field at high temperatures"*Fortschr. Phys.* 32, 325 (1984).
- [81] V.I. Demchik, V.V. Skalozub "The spontaneous generation of magnetic and chromomagnetic fields at high temperature in the standard model". *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, V. 25, pp 291–296 (2002).

# ДОДАТКИ

## Додаток А

### Програмний код мовою програмування Python 3

```
6 # Unitarity test for Lambdas
7
8 1 usage
9 def aplus (Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4): return 3/2 * (Lambda1 + Lambda2) + math.sqrt(9/4 * ((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + ((2 * Lambda3 + Lambda4) ** 2))
10 1 usage
11 def aminus (Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4): return 3/2 * (Lambda1 + Lambda2) - math.sqrt(9/4 * ((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + ((2 * Lambda3 + Lambda4) ** 2))
12 1 usage
13 def bplus (Lambda1, Lambda2, Lambda4): return 1/2 * (Lambda1 + Lambda2) + 1/2 * math.sqrt(((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + 4 * (Lambda4 ** 2))
14 1 usage
15 def bminus (Lambda1, Lambda2, Lambda4): return 1/2 * (Lambda1 + Lambda2) - 1/2 * math.sqrt(((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + 4 * (Lambda4 ** 2))
16 1 usage
17 def cplus(Lambda1, Lambda2, Lambda5): return 1/2 * (Lambda1 + Lambda2) + 1/2 * math.sqrt(((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + 4 * (Lambda5 ** 2))
18 1 usage
19 def cminus (Lambda1, Lambda2, Lambda5): return 1/2 * (Lambda1 + Lambda2) - 1/2 * math.sqrt(((Lambda1 - Lambda2) ** 2) + 4 * (Lambda5 ** 2))
20 1 usage
21 def e1 (Lambda3, Lambda4, Lambda5): return Lambda3 + 2 * Lambda4 - 3 * Lambda5
22 1 usage
23 def e2 (Lambda3, Lambda5): return Lambda3 - Lambda5
24 1 usage
25 def fplus (Lambda3, Lambda4, Lambda5): return Lambda3 + 2 * Lambda4 + 3 * Lambda5
26 1 usage
27 def fminus (Lambda3, Lambda5): return Lambda3 + Lambda5
28 1 usage
29 def f1 (Lambda3, Lambda4): return Lambda3 + Lambda4
30 1 usage
31 def p1 (Lambda3, Lambda4): return Lambda3 - Lambda4
```

Рис. 18: Функцію для амплітуди S-хвиль.

```
# Generating Lambdas which satisfied Unitarity test and 1 Part of Stability test and generate TanBeta

for i in range(0, MaxN):
    Lambda3 = round(random.uniform(- MaxLambda345, MaxLambda345), formatting)
    Lambda4 = round(random.uniform(- MaxLambda345, MaxLambda345), formatting)
    Lambda5 = round(random.uniform(- MaxLambda345, MaxLambda345), formatting)
    if i % 100000 == 0: print(i)
    if abs(p1(Lambda3, Lambda4)) < 8 * math.pi and abs(f1(Lambda3, Lambda4)) < 8 * math.pi:
        if abs(fminus(Lambda3, Lambda5)) < 8 * math.pi and abs(e2(Lambda3, Lambda5)) < 8 * math.pi:
            if abs(fplus(Lambda3, Lambda4, Lambda5)) < 8 * math.pi and abs(e1(Lambda3, Lambda4, Lambda5)) < 8 * math.pi:
                Lambda1 = round(random.uniform(0, MaxLambda12), formatting)
                Lambda2 = round(random.uniform(0, MaxLambda12), formatting)
                if Lambda2 != 0:
                    if Lambda3 > - math.sqrt(Lambda1 * Lambda2) and Lambda3 + Lambda4 - abs(Lambda5) > - math.sqrt(Lambda1 * Lambda2):
                        if abs(aplus(Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4)) < 8 * math.pi and abs(aminus(Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4)) < 8 * math.pi:
                            if abs(bplus(Lambda1, Lambda2, Lambda4)) < 8 * math.pi and abs(bminus(Lambda1, Lambda2, Lambda4)) < 8 * math.pi:
                                if abs(cplus(Lambda1, Lambda2, Lambda5)) < 8 * math.pi and abs(cminus(Lambda1, Lambda2, Lambda5)) < 8 * math.pi:
                                    number_of_unic_ponits += 1
                                    for k in range(0, 5): # Here we for every set (Lambda_j) generate independently 5 TanBeta
                                        fLambda1.write(str(Lambda1) + '\n')
                                        fLambda2.write(str(Lambda2) + '\n')
                                        fLambda3.write(str(Lambda3) + '\n')
                                        fLambda4.write(str(Lambda4) + '\n')
                                        fLambda5.write(str(Lambda5) + '\n')
                                        tanBeta = round(random.uniform(0, MaxTanBeta), formatting)
                                        Beta = round(math.atan(tanBeta), formatting + 2)
                                        ftanBeta.write(str(tanBeta) + '\n')
                                        fBeta.write(str(Beta) + '\n')
                                    number_of_points += 1
```

Рис. 19: Алгоритм генерації деяких параметрів.

```

22      # Number of iteration
23      MaxN = 10**9
24      MaxTanBeta = 40
25      MaxLambda12 = 4 * math.pi
26      MaxLambda345 = 4 * math.pi

```

Рис. 20: Обмеження симуляції.

## Основні функції для обчислення мас

```

VSM = 240.22

8 usages
def v1(tanBeta): return VSM / math.sqrt((1 + tanBeta**2))

7 usages
def v2(tanBeta): return v1(tanBeta) * tanBeta

4 usages
def m12sqr(m12sqr, tanBeta, Lambda1, Lambda3, Lambda4, Lambda5):
    return (1 / v1(tanBeta)) * (m12sqr * v2(tanBeta) - (Lambda3 + Lambda4 + Lambda5) * v1(tanBeta) * v2(tanBeta) + v2(tanBeta) / 2
        - Lambda1 + v1(tanBeta) ** 3 / 2)

3 usages
def m22sqr(m12sqr, tanBeta, Lambda2, Lambda3, Lambda4, Lambda5):
    return (1 / v2(tanBeta)) * (m12sqr * v1(tanBeta) - (Lambda3 + Lambda4 + Lambda5) * v1(tanBeta) * v1(tanBeta) + v2(tanBeta) / 2
        - Lambda2 + v2(tanBeta) ** 3 / 2)

2 usages
def mSqr(m12sqr, tanBeta, Alpha, Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4, Lambda5):
    CosAlpha = math.cos(Alpha)
    SinAlpha = math.sin(Alpha)
    CosBeta = math.cos(math.atan(tanBeta))
    SinBeta = math.sin(math.atan(tanBeta))
    MSqr = m12sqr / (CosBeta * SinBeta)
    return MSqr * ((CosAlpha * CosBeta + SinAlpha * SinBeta) ** 2) + (VSM ** 2) * (Lambda1 * (SinAlpha ** 2) * (CosBeta ** 2) + Lambda2 * (CosAlpha ** 2) * (SinBeta ** 2) +
        - 2 * (Lambda3 + Lambda4 + Lambda5) * SinAlpha * CosAlpha * SinBeta * CosBeta)

2 usages
def mSqr(m12sqr, tanBeta, Alpha, Lambda1, Lambda2, Lambda3, Lambda4, Lambda5):
    CosAlpha = math.cos(Alpha)
    SinAlpha = math.sin(Alpha)
    CosBeta = math.cos(math.atan(tanBeta))
    SinBeta = math.sin(math.atan(tanBeta))
    MSqr = m12sqr / (CosBeta * SinBeta)
    return MSqr * ((SinAlpha * CosBeta + CosAlpha * SinBeta) ** 2) + (VSM ** 2) * (Lambda1 * (CosAlpha ** 2) * (SinBeta ** 2) + Lambda2 * (SinAlpha ** 2) * (CosBeta ** 2) +
        - 2 * (Lambda3 + Lambda4 + Lambda5) * SinAlpha * CosAlpha * SinBeta * CosBeta)

2 usages
def mASqr(m12sqr, tanBeta, Lambda5):
    CosBeta = math.cos(math.atan(tanBeta))
    SinBeta = math.sin(math.atan(tanBeta))
    MSqr = m12sqr / (CosBeta * SinBeta)
    return MSqr - Lambda5 * (VSM ** 2)

2 usages
def mHpmSqr(m12sqr, tanBeta, Lambda4, Lambda5):
    CosBeta = math.cos(math.atan(tanBeta))
    SinBeta = math.sin(math.atan(tanBeta))
    MSqr = m12sqr / (CosBeta * SinBeta)
    return MSqr - (VSM ** 2) * (Lambda4 + Lambda5) / 2

```

Рис. 21: Функції обчислення мас.

## Остаточне обчислення мас

```
for i in range(0, len(Lambda1)):
    j+=1
    if 0 < mASqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda5[i]) < cut_parameter**2 \
        and 0 < mHSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Alpha[i], Lambda1[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]) < cut_parameter ** 2 \
        and 0 < mHpmSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda4[i], Lambda5[i]) < cut_parameter ** 2 \
        and m12sqr[i] * (m11sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda1[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]) - m22sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i])) \
            * math.sqrt(Lambda1[i] / Lambda2[i])) * (tanBeta[i] - math.sqrt(math.sqrt(Lambda1[i] / Lambda2[i]))) > 0 \
        and -200 < math.tan(Alpha[i]) < 200 \
        and mHSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Alpha[i], Lambda1[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]) > 125^2:
        fmh.write(str(round(math.sqrt(mhSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Alpha[i], Lambda1[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i])),5)) + '\n')
        fmH.write(str(round(math.sqrt(mhSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Alpha[i], Lambda1[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i])),formatting)) + '\n')
        fmA.write(str(round(math.sqrt(mASqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda5[i])),formatting)) + '\n')
        fmHpm.write(str(round(math.sqrt(mHpmSqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda4[i], Lambda5[i])),formatting)) + '\n')

        ftanBeta.write(str(tanBeta[i]) + '\n')
        fBeta.write(str(round(math.atan(tanBeta[i]), formatting)) + '\n')

        fv1.write(str(v1(tanBeta[i])) + '\n')
        fv2.write(str(v2(tanBeta[i])) + '\n')

        fLambda1.write(str(Lambda1[i]) + '\n')
        fLambda2.write(str(Lambda2[i]) + '\n')
        fLambda3.write(str(Lambda3[i]) + '\n')
        fLambda4.write(str(Lambda4[i]) + '\n')
        fLambda5.write(str(Lambda5[i]) + '\n')

        fm12sqr.write(str(m12sqr[i]) + '\n')
        fAlpha.write(str(Alpha[i]) + '\n')
        ftanAlpha.write(str(round(math.tan(Alpha[i]), formatting)) + '\n')
        fCosBetaminusAlpha.write(str(round(math.cos(math.atan(tanBeta[i]) - Alpha[i]), formatting)) + '\n')
        # print("Positive = ", i, "m12=", m12sqr[i], \
        #       "m11=", m11sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda1[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]), \
        #       "m22=", m22sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]), \
        #       "str=", str(round(m22sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]), formatting)))
        fm11sqr.write(str(round(m11sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda1[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]), formatting)) + '\n')
        fm22sqr.write(str(round(m22sqr(m12sqr[i], tanBeta[i], Lambda2[i], Lambda3[i], Lambda4[i], Lambda5[i]), formatting)) + '\n')
    j1 += 1
```

Рис. 22: Симуляція мас.

## Додаток Б

### Система одиниць $\hbar = c = k_B = 1$

Система у який за означенням обрано  $\hbar = c = k_B = 1$  широко використовується в теоретичній фізиці, зокрема в фізиці елементарних частинок та високих енергій. Знайдемо коефіцієнти переходу з цієї системи в систему СІ.

Фундаментальні константи в системі СІ:

$c = 299792458$	м/с	—	Швидкість світла в вакуумі
$\hbar = 1,054571800(13) \times 10^{-34}$	Дж $\times$ с	—	Стала Планка(поділена на $2\pi$ )
$k_B = 1,38064852(79) \times 10^{-23}$	Дж/К	—	Стала Больцмана
$e = 1,6021766208(98) \times 10^{-19}$	Кл	—	елементарний заряд
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	Гн/м	—	магнітна проникність вакууму

Оскільки в розглянутій системі фізичні величини є або безрозмірними або мають розмірність [еВ] в деякому ступені, то будемо поряд з розмірністю писати назву фізичної величини. В системі СІ одиниці будемо писати окремо, а під позначенням фундаментальних констант будемо розуміти їх числові значення.

#### 1. Швидкість

За означення: 1 швидкості =  $c$  м/с.

#### 2. Енергія

За означенням: 1 еВ енергії =  $1eK_{\text{л}} \times B = e$  Дж.

1 еВ енергії =  $e$  Дж.

#### 3. Час

За означенням:  $\hbar$  Дж  $\times$  с = 1 еВ енергії  $\times eB^{-1}$  часу. Тому:

1  $eB^{-1}$  часу =  $\hbar/e$  с.

#### 4. Довжина

За означенням:  $c \text{ м/с} = 1 \frac{1 \text{ еВ}^{-1} \text{ довжини}}{1 \text{ еВ}^{-1} \text{ часу}}$ . Тому:

$$1 \text{ еВ}^{-1} \text{ довжини} = c\hbar/e \text{ м.}$$

#### 5. Маса

Скористаємось формулою Ейнштейна зв'язку енергії та маси:  $E = mc^2$ .

Маємо:

$$1 \text{ еВ енергії} = (1 \text{ еВ маси}) \times (1 \text{ швидкості})^2.$$

$$1 \text{ еВ маси} = e/c^2 \text{ кг}.$$

#### 6. Густина енергії

Як відомо  $L = E/V$ , тому  $1 \text{ еВ}^4 \text{ густ. енергії} = \frac{1 \text{ еВ енергії}}{(1 \text{ еВ}^{-1} \text{ довжини})^3}$ .

$$1 \text{ еВ}^4 \text{ густ. енергії} = e^4/(c^3\hbar^3) \text{ Дж/м}^3.$$

#### 7. Індукція магнітного поля

Як відомо в системі СІ густина енергії магнітного поля має наступний вираз:  $L = B^2/(2\mu_0)$ , а в розглянутій системі  $L = B_1^2/2$ . Знайдемо яке поле утворює густину енергії в  $1 \text{ еВ}^4 \text{ густ. енергії}$  :

$$B_1 = \sqrt{2} \times 1 \text{ еВ}^2 \text{ індукції.}$$

Знайдемо яке поле утворює густину енергії в  $e^4/(c^3\hbar^3) \text{ Дж/м}^3$ :

$$B = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu_0 e^4}{c^3 \hbar^3}} \text{ Тл.}$$

Оскільки фізично ці поля однакові то:

$$1 \text{ еВ}^2 \text{ індукції} = \sqrt{\frac{\mu_0 e^4}{c^3 \hbar^3}} \text{ Тл.}$$