

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**БІЛИЙ ДМИТРО ВОЛОДИМИРОВИЧ**

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**Внутрішні та міжфазні тріщини  
в п'єзoeлектричних квазікристалах**

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ Д.В Білий

Науковий керівник:  
**Лобода Володимир Васильович**  
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2023

## АНОТАЦІЯ

*Білий Д.В.* Внутрішні та міжфазні тріщини в п'єзоелектричних квазікристалах – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2023.

Композитні матеріали та матеріали з ускладненими фізичними властивостями все більше використовуються в різних галузях виробництва. Зокрема, все ширшого застосування знаходять композити, виготовлені із п'єзоелектричних та квазікристалічних матеріалів і навіть із матеріалів, що мають одночасно і п'єзокристалічні, і п'єзоелектричні властивості. Якими б різними властивостями не володіли квазікристали, вони не захищені від дефектів, що можуть мати місце при їх виробництві, або ж внутрішніх руйнувань, тріщин і т.д., що можуть виникати при їх експлуатації. У дисертаційній роботі розглядаються методи дослідження тріщини у вказаних матеріалах з особливим акцентом на міжфазні тріщини, що можуть виникати між двома різними матеріалами.

У **першому розділі** описано структуру квазікристалів та наведено їхню класифікацію. Наведено математичні моделі, що описують напружено-деформівний стан квазікристалів з особливим акцентом на випадок одновимірних квазікристалічних тіл. Проведено аналіз доступних джерел за темою дисертації та визначено внесок авторів в дослідження композитних тіл з ускладненими фізичними властивостями за наявності дефектів їхньої структури.

У **другому розділі** розглянуто антиплоску задачу для одновимірного біматеріального п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. Представлено визначальні співвідношення для антиплоского випадку одновимірних п'єзоелектричних квазікристалів з урахуванням їх фононних та фазонних властивостей. Побудовано представлення компонент електропружно-деформівного стану через кусково-аналітичні функції, на основі яких

сформульовано задачу лінійного спряження для випадку електропровідної тріщини. Виписано точний аналітичний розв'язок цієї задачі, для якого проілюстровано вплив зовнішнього механічного фонон навантаження і різних величин електричного поля на фононні і фазонні напруження та зсувне відкриття тріщини. Проаналізовано, наскільки суттєво електричне поле впливає на напружений стан квазікристалічних композитів з міжфазними тріщинами.

Також представлено розв'язок задачі про антиплоске навантаження для одновимірного п'єзоелектричного біматеріального квазікристала з тріщиною під впливом як механічного навантаження і електричного поля, прикладених на нескінченності, так і електричного заряду, розподіленого вздовж берегів тріщини. Застосовано описаний вище аналітичний підхід, який дозволив отримати точний розв'язок і у цьому більш складному випадку. В результаті чисельної реалізації вказаного розв'язку графічно зображено розподіли фонон та фазон напружень та відкриття тріщини при різних значеннях заряду на її берегах. Проведено аналіз впливу величини цього заряду на вказані характеристики фізичних полів.

У **третьому розділі** розглянуто плоску задачу для одновимірного біматеріального п'єзоелектричного квазікристала з тунельною тріщиною на межі поділу матеріалів. Отримано матрично-векторні представлення для фононних і фазонних напружень і електричного зміщення, а також для похідних від стрибків фононних і фазонних зміщень та електричних потенціалів через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині за винятком області тріщини. За допомогою цих представлень сформульовано задачу лінійного спряження Рімана-Гільберта для випадку електрично непроникної тріщини, яку розв'язано аналітично. Деяке перетворення вказаних матрично-векторних представлень дозволило сформулювати аналогічну задачу лінійного спряження і для моделі електрично проникної тріщини, яка є більш адекватною до дійсності. Розв'язок цієї задачі також подано аналітично. Для обох видів електричних граничних умов на берегах

тріщини наведено прості аналітичні вирази для фононних і фазонних стрибків зміщень вздовж області тріщини, а також фононних і фазонних напружень вздовж зв'язаних частин поверхні поділу матеріалів. Отримано також коефіцієнти інтенсивності фононних і фазонних напружень біля вершин тріщини.

Чисельну реалізацію одержаних результатів проведено для біматеріала, скомпонованого з конкретної комбінації п'єзоелектричних квазікристалів під дією віддалених фононних і фазонних напружень та електричного поля. Отримані результати для фононних і фазонних компонент вздовж межі поділу матеріалів представлено у вигляді графіків, а коефіцієнти інтенсивності напружень представлено в табличному вигляді. Зроблено важливі висновки стосовно залежностей фононних та фазонних полів від зовнішнього механічного навантаження та електричного поля.

**Четвертий розділ** присвячений дослідженню тріщини, що рухається усталено з дозвуковою швидкістю в ортотропному матеріалі під дією зосереджених сил, прикладених до берегів тріщини. Шляхом заміни координат, виключення швидкості руху тріщини із системи рівнянь її руху та використання методу комплексних потенціалів проблему зведено до неоднорідної задачі лінійного спряження. Права частина одержаного рівняння визначається зовнішнім зосередженим навантаженням. Знайдено аналітичний розв'язок вказаної задачі, на основі якого отримано вирази для напружень в околі фронту тріщини та переміщень її берегів. Показано, що напруження мають кореневу особливість у вершині тріщини незалежно від швидкості її руху.

Чисельну реалізацію отриманого аналітичного розв'язку проведено для ортотропного вуглепластика за різної інтенсивності зовнішнього навантаження та різних дозвукових швидкостях руху тріщини. Отримано графіки нормального напруження перед фронтом тріщини. Показано, що напруження необмежено зростають при наближенні до вершини тріщини.

Продemonстровано також ріст розкриття тріщини при збільшенні швидкості її руху.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в такому: розв'язано нову задачу для тунельної електрично провідної тріщини вздовж межі поділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією віддалених рівномірно розподілених антиплоских фононних та фазонних зсувних напружень та електричного поля в площині, перпендикулярній фронту тріщини; досліджено антиплоску задачу для електропровідної міжфазної тріщини у п'єзоелектричному квазікристалі, який знаходиться під впливом як фононного механічного навантаження та електричного поля, так і електричного заряду, розподіленого безпосередньо вздовж берегів тріщини; вперше аналітично розв'язано плоску задачу для електрично проникної тріщини на межі поділу двох напівнескінчених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією віддалених рівномірно розподілених фононних та фазонного напружень, а також електричного зміщення; проаналізовано плоску задачу теорії пружності для п'єзоелектричного квазікристала з тріщиною, береги якої ортогональні квазі-періодичному напрямку розміщення атомів кристалічної решітки, а також для випадку електрично ізольованих берегів тріщини; досліджено тріщину, що рухається усталено з дозвуковою швидкістю в ортотропному матеріалі під дією зосереджених сил, прикладених до її берегів.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у можливості використання отриманих точних аналітичних розв'язків як еталонних при проведенні експериментальних досліджень чи розробці та апробації чисельних методів для тіл кінцевих розмірів за проблематикою даної роботи.

**Ключові слова:** тріщина між двома матеріалами, задача лінійного спряження, п'єзоелектричний квазікристал, рухома тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

## ANNOTATION

*Bilyi D.V.* Internal and interface cracks in piezoelectric quasicrystals – Qualification research paper with manuscript rights.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics - Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2023.

Composite materials and materials with complicated physical properties are increasingly used in various industries. In particular, composites made of piezoelectric and quasi-crystalline materials and even of materials that have both piezoelectric and quasi-crystalline properties are increasingly being used. Whatever different properties quasi-crystals possess, they are not protected from defects that may occur during their production, or internal destruction, cracks, etc., that may occur during their operation. The dissertation examines the methods of crack research in the mentioned materials with a special emphasis on interphase cracks that can occur between two different materials

**The first chapter** describes the structure of quasicrystals and their classification. Mathematical models describing the stress-strain state of quasicrystals with special emphasis on the case of one-dimensional quasicrystalline bodies are presented. An analysis of the available sources on the topic of the dissertation was carried out and the contribution of the authors to the research on composite bodies with complicated physical properties in the presence of defects of their structure was determined.

In the **second chapter**, the antiplanar problem for a one-dimensional bimaterial piezoelectric quasicrystal with an interfacial crack is considered. Determining relations for the antiplanar case of one-dimensional piezoelectric quasicrystals are presented, taking into account their phonon and phason properties. Representations of the components of the electro-elastic-deformation state through piecewise analytical functions are constructed, on the basis of which the problem of linear relationship for the case of an electrically conductive crack is formulated. The exact analytical solution of this problem is given. On the basis of this solution, a numerical illustration of the effect of external mechanical phonon load and different

magnitudes of the electric field on the phonon and phason stresses and the shear opening of the crack was carried out. It was analyzed, how significantly the electric field affects the stress state of quasi-crystalline composites with interfacial cracks.

The solution of the antiplane problem for a one-dimensional piezoelectric bimaterial quasicrystal with a crack under the influence of both a mechanical load and an electric field applied at infinity, and an electric charge distributed along the edges of the crack is also presented. The analytical approach described above was applied. It allowed to obtain an exact solution even in this more complicated case. As a result of the numerical implementation of the specified solution, phonon and phason stress distributions and crack opening along the crack region at different values of its charge are graphically depicted. An analysis of the effect of this charge on the specified characteristics of physical fields was carried out.

In the **third chapter**, a planar problem for a one-dimensional bimaterial piezoelectric quasicrystal with a tunnel crack at the material interface is considered. We obtained matrix-vector representations for phonon and phason stresses and electric displacement, as well as for jump derivatives of phonon and phason displacements and electric potentials through a vector function holomorphic in the entire complex plane, except of the crack region. With the help of these representations, the Riemann-Hilbert linear conjugation problem is formulated for the case of an electrically impermeable crack, which is solved analytically. Some transformation of the indicated matrix-vector representations made it possible to formulate a similar problem of linear conjugation for the model of an electrically permeable crack, which is more adequate to reality. The solution to this problem is also presented analytically. Simple analytical expressions for phonon and phason displacement jumps along the crack region, as well as phonon and phason stresses along the bonded parts of the material interface are given for both types of electrical boundary conditions at the crack faces. Intensity coefficients of phonon and phason stresses near the crack tips were also obtained.

Numerical implementation of the obtained results was carried out for a bimaterial composed of a specific combination of piezoelectric quasicrystals under

the action of distant phonon and phason stresses and an electric field. The obtained results for the phonon and phason components along the material interface are presented in the form of graphs, and the stress intensity coefficients are presented in tabular form. Important conclusions were made regarding the dependence of phonon and phason fields on external mechanical load and electric field.

The **fourth chapter** is devoted to the study of a crack moving steadily at subsonic speed in an orthotropic material under the action of concentrated forces applied to the crack edges. By replacing the coordinates, excluding the speed of the crack from the system of equations motion and using the method of complex potentials, the problem is reduced to a non-homogeneous problem of linear conjugation. The right-hand side of the resulting equation is determined by the external concentrated load. An analytical solution to the specified problem was obtained, based on which the expressions for stresses around the crack front and displacements of its faces were obtained. It is shown that the stresses have a root singularity at the tip of the crack regardless of the speed of its movement.

The numerical implementation of the obtained analytical solution was carried out for orthotropic carbon fiber at different intensities of the external load and at different subsonic velocities of the crack movement. Graphs of the normal stress ahead of the crack front are obtained. It is shown that the stresses increase indefinitely when approaching the tip of the crack. The growth of the crack opening with increasing speed of its movement was also demonstrated.

**The scientific novelty of the obtained results** is as follows: a new problem was solved for a tunnel electrically conductive crack along the interface of two coupled one-dimensional piezoelectric quasi-crystalline half-spaces under the action of distant uniformly distributed anti-plane phonon and phason shear stresses and an electric field in a plane perpendicular to the crack front; the anti-plane problem for an electrically conductive interfacial crack in a piezoelectric quasicrystal, which is under the influence of both the phonon mechanical load and the electric field, and the electric charge distributed directly along the crack edges, is investigated; the planar problem for an electrically permeable crack at the interface of two semi-



infinite one-dimensional piezoelectric quasi-crystalline half-spaces under the action of distant uniformly distributed phonon and phason stresses and electric displacement was analytically solved for the first time; analytical analysis of the plane problem of the theory of elasticity for a piezoelectric quasicrystal with a crack, the edges of which are orthogonal to the quasi-periodic direction of the arrangement of the atoms of the crystal lattice, was also carried out for the case of electrically insulated faces of the crack; a crack moving steadily at subsonic speed in an orthotropic material under the action of concentrated forces applied to its faces was investigated.

**The practical significance of the obtained results** comprizes in the accuracy of the obtained analytical solutions, which allows you to use them as a reference for conducting experimental studies or for developing and testing the numerical methods for similar problems of finite sized bodies.

**Key words:** crack between two materials, linear conjugation problem, quasicrystals, piezoelectric, moving crack, stress intensity factor.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

### *Статті у наукових фахових виданнях України:*

1. Білий Д. В. Аналітичний підхід до аналізу тріщини в 1d п'єзоелектричному квазікристалі. / Д. В. Білий, В. В. Лобода, О. В. Комаров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – № 31. – С. 5–18. URL: <https://doi.org/10.15421/4220001>.
2. Білий Д. В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. / Д. В. Білий, О. В. Комаров, В. В. Лобода // Computer Science and Applied Mathematics. – 2021. – № 1. – С. 5–14. URL: <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-01>.
3. Білий Д. В., Лобода В. В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду. / Д. В. Білий, В. В. Лобода // Механіка та математичні методи. – 2022. – Том 4. Вип. 1. – С. 32–44. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-1-32-44>.
4. Білий Д. В., Комаров О. В. Дослідження рухомої тріщини в анізотропному матеріалі. / Д. В. Білий, О. В. Комаров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2022. – Т. 1. № 34. – С. 5–15. URL: <https://doi.org/10.15421/4222101>.

### *Статті у наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних*

1. Loboda V. An analytical approach to the analysis of an electrically permeable interface crack in a 1D piezoelectric quasicrystal / V. Loboda, O. Komarov, D. Bilyi, Y. Lapusta et al. // Acta Mechanica. – 2020. – Vol. 231(8). – С. 3419–3433. URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02721-8> (Scopus).

### *Тези доповідей*

1. Комаров О. В. Міжфазна тріщина в біматеріальному п'єзоелектричному квазікристалічному просторі. / О. В. Комаров, Д. В. Білий, В. В. Лобода // Тези доповідей другої міжнародної наук.-техн. конф. пам'яті

- академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження) – Дніпро, 10-12 жовтня 2019. – С. 99.
2. Білий Д. В. Дослідження антиплоскої деформації складеного одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. / Д. В. Білий, О. В. Комаров, В. В. Лобода // Матеріали міжнародної наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки» – Дніпро-Кам'янське, 13-16 квітня 2021 р. – С. 41.
  3. Білий Д. В. Одномірний п'єзоелектричний квазікристал з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду та антиплоского навантаження. / Д. В. Білий // Тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» – Дніпро, 23-25 лист. 2022 р. – С. 28.

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП.....</b>	<b>14</b>
<b>РОЗДІЛ I. КВАЗІКРИСТАЛИ ТА ЇХНЯ КЛАСИФІКАЦІЯ. ТРІЩИНИ В КВАЗІКРИСТАЛАХ .....</b>	<b>19</b>
1.1 Відкриття квазікристалів.....	19
1.2 Будова і симетрія квазікристалів.....	22
1.3 Одно-, дво- і тривимірні квазікристали .....	25
1.4 Фізичні основи пружності квазікристалів .....	26
1.5. Теорія пружності одновимірних квазікристалів і її часткові випадки .....	26
1.5.1 Пружність одновимірних гексагональних квазікристалів ..	27
1.5.2 Декомпозиція задачі у плоску та антиплоску проблеми .....	30
1.6 Огляд літератури стосовно дослідження квазікристалів з тріщинами .....	33
1.6.1 Внутрішні та міжфазні тріщини в ізотропних матеріалах ..	33
1.6.2 Тріщини в квазікристалах (КК) .....	34
1.7 Огляд літератури стосовно рухомої тріщини .....	37
1.8. Висновки до першого розділу .....	39
<b>РОЗДІЛ II. АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ .....</b>	<b>40</b>
2.1. Основні співвідношення для міжфазної тріщини .....	40
2.2. Електропровідна тріщина .....	50
2.3. Чисельна ілюстрація отриманих аналітичних розв'язків .....	52
2.4. Електрично заряджені береги тріщини.....	54
2.5. Чисельні результати стосовно впливу електричного заряду на тріщині .....	58
2.6. Висновки до другого розділу.....	60

<b>РОЗДІЛ III. ПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ БІМАТЕРІАЛЬНОГО ОДНОВИМІРНОГО КВАЗІКРИСТАЛА ІЗ ТРИЩИНОЮ НА МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ .....</b>	<b>62</b>
3.1. Основні рівняння для 1D п'єзоелектричних квазікристалів у плоскому випадку .....	62
3.2 Розв'язок для композитного матеріалу, складеного з двох 1D гексагональних квазікристалів зі змішаними граничними умовами на межі поділу матеріалів .....	64
3.3. Електрично непроникна тріщина в 1D гексагональному п'єзоелектричному квазікристалі.....	68
3.4. Чисельні результати та їх обговорення .....	71
3.5. Електрично проникна тріщина між двома різними 1D гексагональними п'єзоелектричними квазікристалами.....	73
3.6. Визначення фононних та фазонних стрибків переміщень та напружень .....	78
3.7. Чисельний розв'язок для біматеріалу з тріщиною .....	81
3.8. Висновки до третього розділу .....	86
<b>РОЗДІЛ IV. ДОСЛІДЖЕННЯ РУХОМОЇ ТРІЩИНИ В АНІЗОТРОПНОМУ МАТЕРІАЛІ .....</b>	<b>88</b>
4.1. Постановка задачі для рухомої тріщини .....	88
4.2. Аналітичний розв'язок задачі для рухомої тріщини .....	89
4.3. Чисельний розв'язок та аналіз результатів .....	95
4.4. Висновки до IV розділу .....	97
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>99</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>101</b>

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Кожен новий вид матеріалів або матеріальних з'єднань може бути використаний в різних пристроях або інструментах. Але для впевненості в можливості такого використання необхідно якомога краще дослідити властивості вказаних матеріалів. Прикладом нових сучасних матеріалів є квазікристали, які були відкриті лише в другій половині минулого століття, але вже ввійшли в широке використання як у високотехнологічних вимірювальних приладах, так і в побутових виробках. Квазікристали, як і інші матеріали, мають різні дефекти, найчастіше мікротріщини, що виникають при їх виготовленні чи експлуатації. Останнім часом все більше застосування на практиці знаходять квазікристали з ускладненими властивостями, зокрема п'єзоелектричними, що дозволяє використовувати їх у вимірювальних електронних пристроях. Але наявність вищевказаних дефектів знижує надійність їх функціонування і може привести до катастрофічних наслідків. На жаль, аналітичних результатів стосовно дослідження п'єзоелектричних квазікристалів з дефектами порівняно небагато. Особливо це стосується таких біматеріалів з тріщинами на межі поділу різнорідних компонент, що пояснюється складністю математичних моделей вказаних задач. Таким чином, вибрана тема роботи, що полягає у дослідженні біматеріальних квазікристалічних тіл з п'єзоелектричною складовою і можливими міжматеріальними дефектами, є актуальною і являє практичний інтерес.

**Мета та завдання дослідження.** *Мета роботи* полягає в дослідженні тріщини між двома різнорідними п'єзоелектричними квазікристалами під впливом плоского та антиплоского навантаження механічного та електричного типу, а також рухомої тріщини в анізотропному матеріалі.

Досягнення поставленої мети потребує вирішення таких *завдань*:

- представлення фононних, фазонних та електричних характеристик для біматеріального тіла через кусково-аналітичні

функції для плоского та антиплоского видів зовнішнього навантаження;

- з використанням одержаних представлень сформулювати та аналітично розв'язати задачі лінійного спряження, що мають місце при плоскій та антиплоскій постановці задач для біматеріального тіла з тріщинами на межі поділу матеріалів;
- одержати аналітичні вирази для фононних, фазонних та електричних компонент в біматеріальному тілі під дією механічного навантаження та електричного поля. Визначити коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного поля;
- для анізотропного тіла з рухомою тріщиною під дією віддаленого стаціонарного навантаження побудувати аналітичний розв'язок задачі та дослідити залежності механічних факторів від зовнішнього навантаження та швидкості руху фронту тріщини;

*Об'єкт дослідження* – напружено-деформований стан п'єзоелектричних квазікристалів з тріщинами на межі поділу матеріалів.

*Предмет дослідження* – плоскі та антиплоскі задачі для міжфазних тріщин у квазікристалах із п'єзоелектричною складовою.

*Методи дослідження.* Для побудови й аналізу математичних моделей використовується лінійна теорія пружності квазікристалічних середовищ, методи механіки руйнування, теорія функцій комплексної змінної.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в тому, що:

1. Розглянуто нову задачу для тунельної електрично провідної тріщини вздовж межі поділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією віддалених рівномірно розподілених антиплоских фононних та фазонних зсувних напружень та електричного поля в площині, перпендикулярній фронту тріщини. Встановлено, що фононні та фазонні напруження мають в цьому випадку осциляційну кореневу сингулярність біля вершин тріщини,

причому ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини як у плоскому випадку.

2. Досліджено електропровідну міжфазну тріщину у п'єзоелектричному квазікристалі, який знаходиться під впливом як фононного механічного навантаження та електричного поля, так і електричного заряду, розподіленого безпосередньо вздовж берегів тріщини. Вважається, що зовнішні впливи спричиняють антиплоску деформацію композиту. Вперше встановлено, що електричний заряд не змінює характер особливостей фізичних полів в околі тріщини, але суттєво впливає на їхні кількісні характеристики.
3. Вперше аналітично розв'язано плоску задачу для електрично проникної тріщини на межі поділу двох напівнескінчених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією віддалених рівномірно розподілених фононних нормальних та зсувних напружень, а також фазового напруження та електричного зміщення. Встановлено особливості фононних і фазонних полів у вершинах тріщини, а складові цих полів отримано у вигляді простих аналітичних виразів.
4. Аналітичний розв'язок плоскої задачі теорії пружності для п'єзоелектричного квазікристала з тріщиною, береги якої ортогональні квазі-періодичному напрямку розміщення атомів кристалічної решітки, отримано також для випадку електрично ізольованих берегів тріщини.
5. Досліджено тріщину, що рухається усталено з дозвуковою швидкістю в ортотропному матеріалі під дією сосереджених сил, прикладених до берегів тріщини. Одержано аналітичний розв'язок задачі та встановлено особливості напружень в точках фронту тріщини.

*Обґрунтованість і достовірність* одержаних результатів забезпечується строгістю та коректністю постановок задач, використанням апробованих математичних моделей і точних методів теорії функцій комплексної змінної, а в часткових випадках їхнім порівнянням із результатами відомих точних



аналітичних розв'язків та висновками, що витікають із простих фізичних міркувань.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в тому, що вони дозволяють досліджувати фононні, фазонні та електричні поля в п'єзоелектричних квазікристалічних біматеріалах з міжфазними тріщинами. Ці результати дають можливість спростити розробку програмних комплексів для комп'ютерного моделювання процесів руйнування квазікристалічних композитів із п'єзоелектричною складовою. Одержані аналітичні розв'язки можна використовувати як еталонні при розробці й апробації наближених чисельних методів розв'язання задач зазначеного класу для тіл кінцевих розмірів.

**Публікації та особистий внесок здобувача.** За темою дисертації опубліковано 5 статей. Одна з них опублікована у виданні, що входить до наукометричної бази Scopus [79]. 4 статті входять до переліку наукових фахових видань України [3, 4, 5, 7]. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику В. В. Лободі. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [4-7, 79] – участь у розв'язанні задач лінійного спряження, чисельна реалізація результатів, ілюстрація результатів розрахунків; [3] – розробка і реалізація алгоритму розв'язку задачі, написання програми та обробка чисельних результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2019-2022 років, а також на міжнародних конференціях [2, 6, 18]:

1. Друга міжнародна науково-технічна конференція пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). - Дніпро: 2019.

2. Математичні проблеми технічної механіки – Дніпро. Кам'янське: 2021.
3. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем – Дніпро. – 2022.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження за темою дисертації здійснювалися також в науково-дослідній лабораторії механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетних тем 1-335-18 «Розрахункові моделі п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних композитів з тріщинами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0118U003302, 2018–2020 рр. та 1-655-21 «Моделі та методи визначення параметрів руйнування п'єзоактивних та п'єзопасивних композитів з дефектами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0121U109767, 2021–2023 рр.

**Структура та обсяг дисертації.** Робота містить вступ, огляд літератури, 4 розділи, висновки та список використаних джерел, що містить 120 найменувань на 13 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 112 сторінок, обсяг основного тексту – 102 сторінки. Робота містить 30 рисунків та 4 таблиці.

## **РОЗДІЛ І. КВАЗІКРИСТАЛИ ТА ЇХНЯ КЛАСИФІКАЦІЯ.**

### **ТРІЩИНИ В КВАЗІКРИСТАЛАХ**

Дослідження квазікристалів у 1982 році стали драматичною подією і є важливим відкриттям в історії розвитку фізики. Це породило велику увагу дослідників до незвичайних властивостей нової структури твердого тіла. Завдяки термодинамічній стійкості, на сьогоднішній день виробляється все більше квазікристалів, які стають новим важливим конструкційним матеріалом. Для розуміння пружних властивостей квазікристалів та впливу дефектів на їхній пружно-деформівний стан (ПДС), що є основним напрямком досліджень в даній роботі, розглянемо коротко структурні особливості та фізичні властивості квазікристалів.

#### **1.1 Відкриття квазікристалів**

Перші дослідження квазікристалів були зроблені в квітні 1982 р., коли Д. Шехтман працював у Бюро стандартів у США як запрошений вчений. Методами електронної мікроскопії він спостерігав, що швидкоохолоджуваний сплав Al-Mn проявляє п'ятикратну орієнтаційну симетрію дифракційними візерунками з яскравими дифракційними плямами і різкими відображеннями Бреґга, як показано на рис. 1.1 [48]. Оскільки п'ятикратна орієнтаційна симетрія суперечить основному закону симетрії кристалів, цей результат не був зрозумілим протягом перших двох років з моменту відкриття. Відомий кристалограф І. Блех дав йому потужну підтримку, пояснивши, що це може бути ікосаедричне скло. Вони написали спільну статтю, що стосувалась цих експериментальних результатів, і подали для публікації, але стаття була повторно відхилена. Порадившись з кристалографом-математиком Д. Гратіасом у Національному центрі наукових досліджень у Франції, група подала статті до Physical Review Letters (PRL) у жовтні 1984 року, більш ніж через два роки після початкового експерименту Д. Шехтмана. Статті були опубліковані через кілька тижнів (див [85], [86]).

Через чотири тижні Levine and Steinhardt [65] опублікували свою роботу у журналі *Physical Review Letters*, в якій вводилося поняття впорядкованої структури з квазіперіодичністю, і назвали новий сплав «квазікристалічним». В ньому теоретична (обчислена) дифракційна картина добре узгоджувалася з експериментальним спостереженням. Незабаром після цього інші групи вчених, наприклад, Ye et al. [102], Zhang et al. [115] та ін. також виявили подібну структуру п'ятикратної симетрії ікосаедричного квазікристала в сплавах Ni-V і Ni-Ti.

Ікосаедричний квазікристал є прикладом з тривимірних квазікристалів, в яких атомне розташування квазіперіодичне у трьох напрямках. Іншим тривимірним квазікристалом є кубічний квазікристал, що спостерігався Feng et al. [54] пізніше.

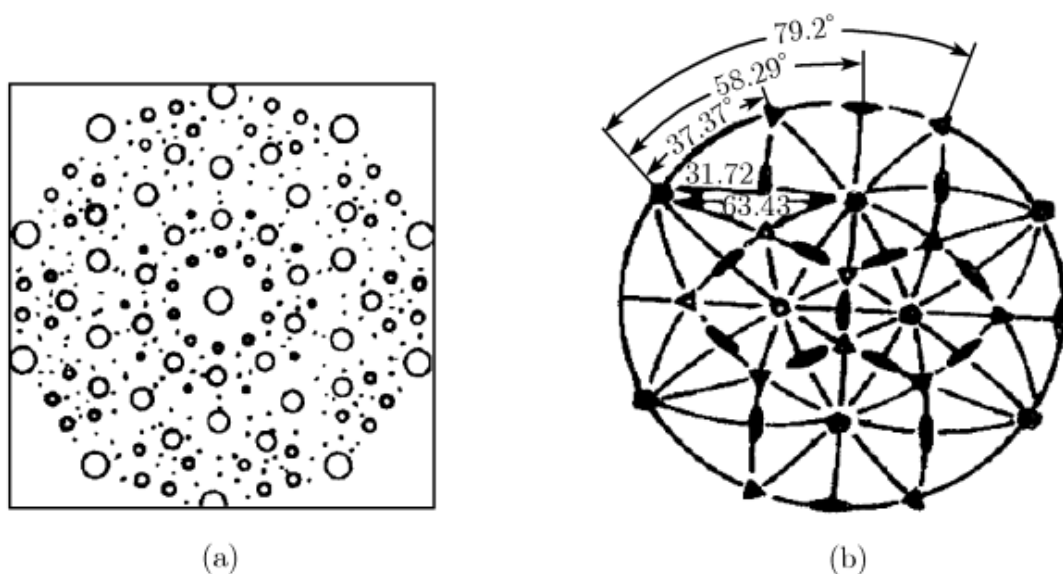


Рис. 1.1 Візерунок дифракції ікосаедричного квазікристала: (а) п'ятикратна симетрія, (б) стереографічна структура квазікристала

У подальшому були виявлені двовимірні квазікристали. В них атомне розташування є квазіперіодичним по двох напрямках і періодичним по третьому напрямку. На сьогоднішній день спостерігаються п'яти-, восьми-, десяти- і дванадцятикратними напрямками осей симетрії двовимірних

квазікристалів. Таким чином, було відкрито чотири види двовимірних квазікристалів з п'яти-, восьми-, десяти- і дванадцятикратними симетріями обертання, які також називають п'ятикутними, восьмикутними, десятикутними і додекагональними квазікристалами, відповідно (див. Bendersky [37], Chatopadihyay et al. [38], Fung et al. [55], Urban et al. [96], Wang et al. [105], Li and Guo [68]).

Існує ще один клас квазікристалів. Це так звані одновимірні квазікристали, в яких атомне розташування квазіперіодичне по одній осі, і періодичне в площині, перпендикулярній цій осі (див. Merdin et al.[80], Hu et al. [62], Feng et al. [53], Terauchi et al. [93], Chen et al. [40], і Yang et al.[100]).

Відкриття цього нового матеріалу з дальнім порядком і некристалографічною симетрією змінило традиційну концепцію класифікації твердих тіл на нову, що поділяє їх на два класи: кристалічні і некристалічні. Це суттєвим чином вплинуло на традиційну кристалографію [8] та внесло нові фізичне уявлення про структуру і симетрію матерії [22].

Виявлена незвичайна структура квазікристалів обумовлює низку властивостей, відмінних від властивостей кристалів, що привернули увагу дослідників у різних галузях знань, таких як фізика, кристалографія, хімія, тощо.

За десять років до відкриття квазікристалів Пенроуз висунув математичну модель, яка згодом отримала назву «мозаїка (плитка) Пенроуза» [57]. В ній плитка без перекриттів або розривів у двох різних ромбоєдрах може призвести до квазіперіодичної структури. Після відкриття квазікристалів плитка Пенроуза стала геометричним інструментом нової твердої структури. Як приклад, мозаїка Пенроуза для

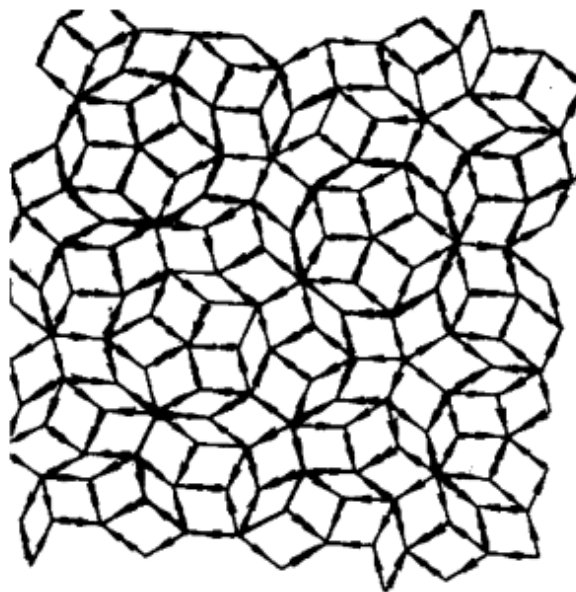


Рис. 1.2 Мозаїка Пенроуза

опису двовимірної п'ятикратної симетрії показана на рис. 1.2 [48]. В ній локальні структури плитки схожі між собою. Це називається локальним ізоморфізмом. Квазіперіодична симетрія та локальний ізоморфізм мозаїки Пенроуза мають велике значення для опису нової твердої структури — квазікристалів.

Квазікристали з їхньою термодинамічною стійкістю стають новим класом функціональних і конструкційних матеріалів, які мають безліч потенційних інженерних застосувань. Вони спонукають проводити активні дослідження фізико-механічних властивостей цього матеріалу.

Пружність і дефекти є важливими напрямками досліджень механічної поведінки квазікристалів, зокрема двовимірного квазікристала з п'ятикратною симетрією, зображеного на рис. 1.2 у вигляді мозаїки Пенроуза.

## **1.2 Будова і симетрія квазікристалів**

Квазікристали відрізняються від періодичних кристалів. При певній симетрії вони є одним з різновидів аперіодичних кристалів. Незвичайні характеристики квазікристалів походять від їх особливої атомної будови. Характер цієї структури досліджується за дифракційними закономірностями. Саме завдяки цим дифракційним закономірностям були виявлені відмінності між квазікристалами та кристалами.

Для опису властивостей симетрії квазікристалів необхідно ввести більш високовимірні (чотири-, або п'яти- або шестивимірні) простори. Ця ідея ідентична ідеї теорії груп, тобто, квазіперіодична структура періодична в більш високовимірному просторі (чотири-, або п'яти- або шестивимірному просторі). Квазікристали в реальному тривимірному просторі (фізичному просторі) можна розглядати як проєкцію періодичної решітки у просторі вищої розмірності (математичному просторі).

У загальному випадку у проєкційному способі Евклідовий простір розмірності  $n$  (позначається як  $E^n$ ), в якому атомна структура має

трансляційний порядок, властивий «правильній» кристалічній решітці, проєктують на Евклідовий простір  $E^m$  меншої розмірності  $m$  ( $m < n$ ).

Для проєктування в просторі  $E^n$  будується так звана «труба», в яку вміщується  $n$ -вимірний багатокутник (гіперкуб), що характеризує структуру кристала в  $n$ -вимірному просторі. На рис. 1.3 наведено варіант, коли  $n = 2$  і  $m = 1$ , тобто структура у двовимірному просторі проєктується на одновимірний. В одновимірному просторі (пряма, позначена як  $E_{||}^1$ ) з'являється ряд точок – проєкцій вузлів ґратки у двовимірному просторі. Якщо  $tg\varphi$  на рис. 5 є ірраціональним числом, то виникає аперіодична структура в одновимірному просторі, тобто одновимірний квазікристал (КК). Крім проєктування на так званий паралельний простір (пряма  $E_{||}^1$ ), проводиться проєктування і на ортогональний простір (пряма  $E_{\perp}^1$  на рис. 1.3).

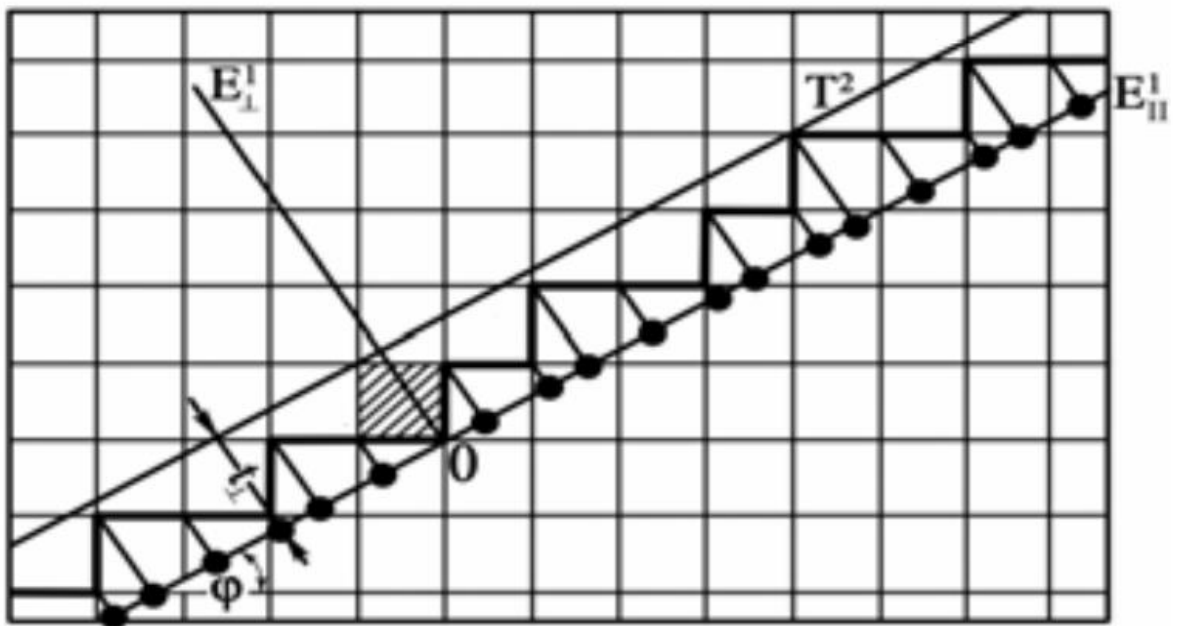


Рис. 1.3 Проєкція квадратних ґратки із  $E^2$  в  $E_{||}^1$ :  $T^2$  – «труба» в  $E^2$ ;  $t_{\perp}$  – розмір «труби» у просторі  $E_{\perp}^1$  [8].

Деякі інші пояснення подібного проєктування наведено на Рис. 1.4.

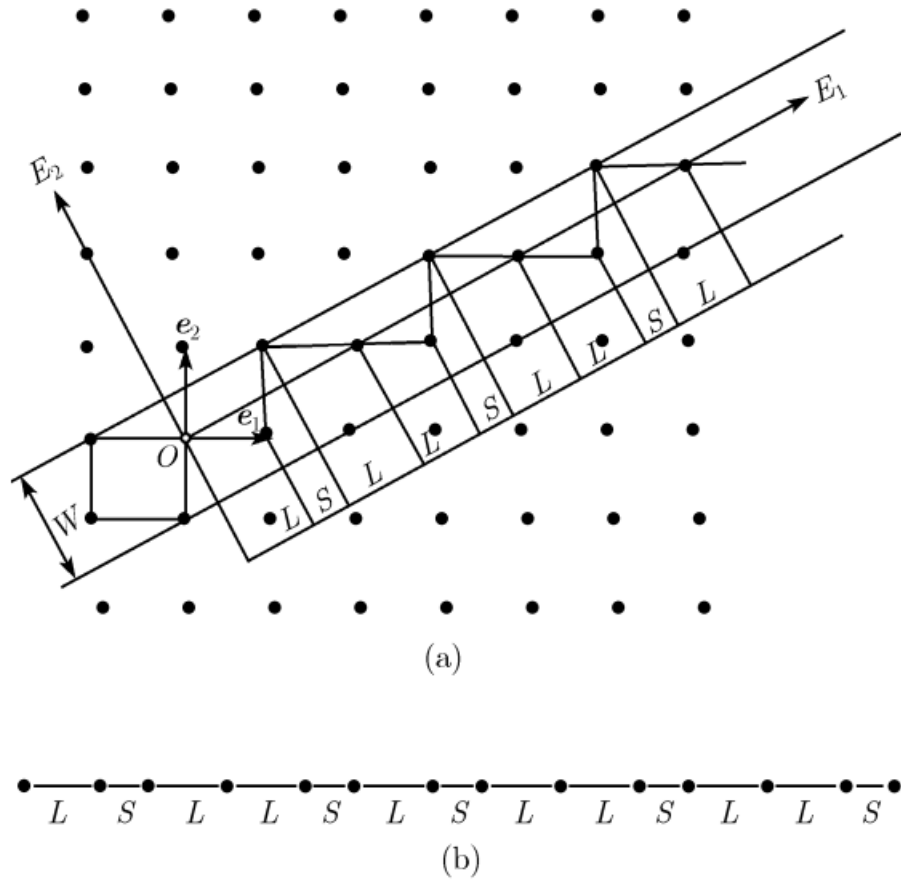


Рис. 1.4 Геометричне зображення одновимірної квазіперіодичної структури:  
 (а) проєкція двовимірного кристала може генерувати одновимірну  
 квазіперіодичну структуру, (б) послідовність Фібоначчі

Проекція періодичної решітки в чотири-, п'яти- і шестивимірному просторі на фізичний простір породжує одно-, дво- і тривимірні квазікристали відповідно. Шестивимірний простір позначається  $E^6$ , який складається з двох підпросторів, один є фізичним простором, який називається паралельним простором і позначається  $E_{\parallel}^3$ , інший є взаємодоповнюючим простором, який також називається вертикальним простором і позначається  $E_{\perp}^3$ , так що

$$E^6 = E_{\parallel}^3 \oplus E_{\perp}^3, \quad (1.1)$$

де  $\oplus$  позначає пряму суму.

Для одно-, дво- і тривимірних квазікристалів число базових векторів дорівнює  $N = 4, 5, 6$ , відповідно; розмірність реалістичного виміру матеріалу



(у фізичному просторі) дорівнює  $d = 3$ , тому  $N > d$ , це відрізняється від подібної характеристики у кристалів.

Метод теорії груп є найбільш придатним для опису симетрії квазікристалів.

Одновимірні квазікристали мають 31 точкову групу, що складається з 6 квазікристалічних систем і 10 класів Лауе. В них всі точкові групи є кристалографічними групами точок, наведеними в таблиці 1.1.

**Таблиця 1.1.** Системи, класи Лауе і точкові групи одновимірних квазікристалів

Система	Клас Лауе	Точкова група
Триклінна	1	$1, \bar{1}$
Моноклінна	2	$2, m_h, 2 / m_h$
	3	$2_h, m, 2_h / m$
Орторомбічна	4	$2_h 2_h 2_h, mm2, 2_h mm_h, mmm_h$
Тетрагональна	5	$4, \bar{4}, 4 / m_h$
		$4_2 2_h, 4mm, 4 / m_h, 4 / m_h mm$
Ромбоедрична	7	$3, \bar{3}$
	8	$3_2, 3m, \bar{3}m$
Гексагональна	9	$6, \bar{6}, 6 / m_h$
	10	$6_2 2_h, 6mm, \bar{6}m 2_h, 6 / m_h mm$

Двовимірні квазікристали мають 57 точкових груп.

### 1.3 Одно-, дво- і тривимірні квазікристали

Потрібно ще раз згадати інформацію про одно-, дво- і тривимірні квазікристали. Одновимірні квазікристали – це ті, в яких розташування атомів є квазіперіодичним в одному напрямку і періодичним в інших двох напрямках. Двовимірні квазікристали належать до тих, у яких розташування атома є

квазіперіодичним у двох напрямках і періодичним в іншому. Тривимірні квазікрystalи побудовані таким чином, що розташування представляє квазіперіодичність у всіх трьох напрямках.

На сьогоднішній день описано біля 200 квазікрystalів, серед яких близько 100 є ікосаедричними і близько 70 десятикутними квазікрystalами відповідно, тому ці два класи квазікрystalічних систем є найбільш важливими.

#### **1.4 Фізичні основи пружності квазікрystalів**

Узагальнена теорія пружності КК та сучасний рівень їх досліджень наведені, наприклад, у [63, 51, 42, 48].

У квазікрystalі є два поля зміщення  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{w}$ : перше подібне до такого в кристалах, назване як фононне поле, друге – поле зміщення, назване як фазонне поле. Сумарне поле зміщення в квазікрystalі виражається так:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{\parallel} \oplus \mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{w}, \quad (1.2)$$

де  $\oplus$  позначає пряму суму;  $\mathbf{u}$  знаходиться у фізичному просторі, або паралельному просторі  $E_{\parallel}^3$ ;  $\mathbf{w}$  знаходиться в просторі доповнення, або перпендикулярному просторі, який є внутрішнім простором.

Крім того, два вектори зміщення залежать від вектора  $\mathbf{r}^{\parallel}$  координат у фізичному просторі,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}^{\parallel}), \mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r}^{\parallel}) \quad (1.3)$$

Для простоти верхній індекс у  $\mathbf{r}^{\parallel}$  буде в подальшому видалений.

#### **1.5. Теорія пружності одновимірних квазікрystalів**

##### **і її часткові випадки**

Як зазначено вище, існують одно-, дво- і тривимірні квазікрystalи. Кожен з цих класів можна додатково розділити на підкласи в залежності від

властивостей симетрії. У класі одновимірних квазікристалів [57] розташування атомів є квазіперіодичним в одному напрямку (скажімо,  $x_3$ -напрямку) і є періодичним в площині, перпендикулярній цьому напрямку (площині  $x_1, x_2$ ). Хоча квазікристал називається одновимірним, його структура є тривимірною; він являє собою тривимірне тіло. Одновимірні квазікристали можна розглядати як проєкцію кристалів періодичних у чотиривимірному просторі на фізичний простір. Існує 4 ненульових переміщення,  $u_1, u_2, u_3$  і  $w_3$  ( $w_1 = w_2 = 0$ ). У цьому сенсі пружність одновимірних квазікристалів є чотиривимірною проблемою.

### 1.5.1 Пружність одновимірних гексагональних квазікристалів

Як вказувалося раніше, для одновимірних квазікристалів існують фононні зміщення  $u_1, u_2, u_3$  і фазонне зміщення  $w_3$  (при  $w_1 = w_2 = 0$ ). Відповідні деформації визначаються так:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right),$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), w_{13} = \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, w_{32} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2}, w_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \quad (1.5)$$

а інші  $w_{ij} = 0$ . Формули (1.4) і (1.5) зберігаються для всіх одновимірних квазікристалів. У цьому розділі ми обговорюємо лише одновимірні гексагональні квазікристали.

Нехай деформації, задані (1.4) і (1.5), є компонентами вектора:

$$[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}, w_{33}, w_{31}, w_{32}]. \quad (1.6)$$

Відповідний вектор напруження є:

$$[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}, H_{33}, H_{31}, H_{32}]. \quad (1.7)$$

Матриця пружних констант має вигляд:

$$[CKR] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

де використовується скорочений запис для тензора фонових напружень, тобто має місце наступна заміна індексів  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23 \rightarrow 4$ ,  $31 \rightarrow 5$ ,  $12 \rightarrow 6$  і  $C_{ijkl}$  позначається відповідно як  $C_{pq}$ . Причому

$$C_{11} = C_{1111} = C_{2222}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{33} = C_{3333}, \quad C_{44} = C_{2323} = C_{3131},$$

$$C_{13} = C_{1133} = C_{2233}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}.$$

Таким чином, існує п'ять незалежних фонових пружних констант. Крім того є дві незалежні фазонні пружні константи  $K_1 = K_{3333}$ ,  $K_2 = K_{3131} = K_{3232}$ , а також три пружних константи зв'язку фонових і фазонних полів  $R_1 = R_{1133} = R_{2233}$ ,  $R_2 = R_{3333}$ ,  $R_3 = R_{2332} = R_{3131}$ .

Відповідні співвідношення між напруженнями і деформаціями мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + R_2 w_{33}, \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_3 w_{32}, \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\ H_{33} = R_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + R_2\varepsilon_{33} + K_1 w_{33}, \\ H_{31} = 2R_3\varepsilon_{31} + K_2 w_{31}, \\ H_{32} = 2R_3\varepsilon_{23} + K_2 w_{32}, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

а інші  $H_{ij} = 0$ .

Рівняння рівноваги наступні:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{33}}{\partial x_3} = 0, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Вищенаведені співвідношення отримані в роботі Wang et al. [107].

Задача пружної рівноваги одновимірних гексагональних квазікристалів складніша, ніж тривимірна задача класичної теорії пружності. В ній присутні 4 зміщення, 9 деформацій і 9 напружень, які сумарно складають 22 компоненти поля. Відповідних рівнянь для цих компонент також 22. Вони складаються з 4 рівнянь рівноваги, 9 геометричних рівнянь деформації-переміщення і 9 співвідношень між напруженнями і деформаціями (визначальні рівняння). Далі розглянемо часткові випадки сформульованої задачі.

### 1.5.2 Декомпозиція задачі у плоску та антиплоску проблеми

Якщо деформація не залежить від  $x_3$ , тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad (1.10)$$

то

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0. \quad (1.11)$$

Отже

$$\varepsilon_{33} = w_{33} = 0, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_3} = 0. \quad (1.13)$$

Узагальнений закон Гука спрощується як:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} = 2C_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_3 w_{32}, \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\ H_{33} = R_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ H_{31} = 2R_3\varepsilon_{31} + K_2 w_{31}, \\ H_{32} = 2R_3\varepsilon_{23} + K_2 w_{32}. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

За відсутності масових сил рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0. \quad (1.16)$$

Рівняння (1.11), (1.12), (1.14)~(1.16) визначають дві незв'язані задачі [47]. Перша з них – це:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Це класична плоска задача теорії пружності звичайних гексагональних кристалів. Друга –

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{23} &= \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_3 w_{32}, \\ \sigma_{31} &= \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\ H_{31} &= 2R_3\varepsilon_{31} + K_2 w_{31}, \\ H_{32} &= 2R_3\varepsilon_{23} + K_2 w_{32}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} &= 0, \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \varepsilon_{13}, \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \varepsilon_{23}, \\ w_{31} &= \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, w_{32} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2}, \end{aligned} \right. \quad (1.18)$$

являє собою зв'язану фонон-фазонну пружну задачу, що включає тільки переміщення  $u_3$  і  $w_3$ . Це є антиплоска задача теорії пружності для квазікристала.

Якщо припустити, що деформація не залежить від осі  $x_2$ , тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = 0, \quad (1.19)$$

то

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0. \quad (1.20)$$

Отже

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = w_{22} = 0, \quad \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \\ w_{13} &= \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \quad w_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Відповідні співвідношення між напруженнями і деформаціями набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{33}\varepsilon_{33} + R_2 w_{33}, \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\ H_{33} = R_1\varepsilon_{11} + R_2\varepsilon_{33} + K_1 w_{33}, \\ H_{31} = 2R_3\varepsilon_{31} + K_2 w_{31}, \end{cases} \quad (1.22)$$

а інші  $H_{ij} = 0$ .

Рівняння рівноваги мають вигляд:



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{33}}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

Рівняння (1.21), (1.22), (1.23) являють собою плоску задачу теорії пружності для квазікристала у площині  $(x_1, x_3)$ .

## **1.6 Огляд літератури стосовно дослідження квазікристалів з тріщинами**

### **1.6.1 Внутрішні та міжфазні тріщини в ізотропних матеріалах**

Під час виготовлення конструкцій, механізмів та деталей мають місце різного роду дефекти: порожнини, отвори, включення, мікротріщини. В процесі експлуатації під дією механічних зусиль ці дефекти можуть розвиватися та утворювати тріщини, які, в більшості випадків, є основною причиною передчасного руйнування конструкцій. Визначення граничного навантаження для більш точного прогнозування терміну експлуатації таких матеріалів було головною передумовою до розвитку різних методів розв'язання задач з тріщинами. Основи механіки руйнування викладені у відомих монографіях О. Є. Андрейківа [1], О. М. Гузя [12, 13], А. О. Камінського [14, 15], Г. С. Кіта і М. В. Хая [16, 16], Г. С. Кіта і О. В. Побережного [17], В. В. Панасюка [23], В. В. Панасюка, М. П. Саврука і О. П. Дацишин [24], В. З. Партона і Є. М. Морозова [25], Г. М. Савіна [26], М. П. Саврука [27], Л. Й. Слепяна [29], Г. П. Черепанова [31, 32] та інших.

Технічний прогрес приводить до необхідності розробки нових конструктивних матеріалів, які б дозволяли реалізувати нові потреби в будівництві, машино- і приладобудуванні та в інших галузях виробництва. В теперішній час широке застосування отримали композитні матеріали. Комбінування матеріалів з різними властивостями дозволяє отримати

композит з необхідними властивостями з погляду міцності та тріщиностійкості. В більшості випадків руйнування композитних матеріалів супроводжується виникненням тріщини на межі поділу матеріалів (міжфазної тріщини) та її подальшим розповсюдженням до повного руйнування.

Уперше задача для тріщини, що розташована на межі поділу двох різнорідних пружних ізотропних матеріалів, розв'язана в роботі М. Л. Williams [112]. В результаті було встановлено, що біля вершин тріщини має місце осциляційна особливість напружень, тобто виникає фізично неможливе явище – взаємопроникнення двох матеріалів. У подальшому міжфазна тріщина для ізотропного пружного біматеріалу в рамках класичної та контактної моделей розглядалася в роботах Д. В. Гриліцького [10], Д. В. Гриліцького і Б. І. Поповича [11], В. І. Моссаковського і М. Т. Рибки [20], Г. Т. Сулима і Д. В. Гриліцького [30], Г. П. Черепанова [33], А. Н. England [43], F. Erdogan [45], V. Loboda [78] та інших.

### **1.6.2 Тріщини в квазікристалах**

Як показали експерименти, КК досить крихкі, тому такі дефекти, як дислокації та тріщини, дуже небезпечні для їх міцності. Проблема тріщин в однорідних квазікристалах приділено належну увагу в літературі. В роботах Fan et al. [49, 52] і Li et al. [74] досліджували рухому гвинтову дислокацію та пряму дислокацію в одновимірних (1D) гексагональних КК. Gao et al. [56] розглянули задачу про кубічні квазікристалічні середовища з еліптичним отвором або тріщиною. В роботі Enrico et al. [44] досліджено лінійну задачу про тріщину в декагональних двовимірних квазікристалах методом Stroh [91]. Взаємодію напівбезмежної тріщини з прямою дислокацією в декагональному квазікристалі проаналізовано в [109]. В роботі [73] досліджено взаємодію гвинтової дислокації з еліптичним отвором в ікосаедричних квазікристалах. Liu et al. [77] з використанням теорії аналітичних функцій дослідили взаємодію дислокацій з тріщинами в одновимірних гексагональних КК. Одновимірний гексагональний квазікристал з плоскою тріщиною в

нескінченному середовищі досліджено в [67]. Інваріантні інтеграли були виведені в [90] для проблем тріщин у квазікристалах з нестационарними умовами, а метод прогнозування траєкторії тріщини при змішаному навантаженні в 1D квазікристалах був розроблений в [106]. Ефект пластичності для напівнескінченної тріщини Дагдейла в нескінченному просторі із одновимірною гексагональною квазікристалом досліджено в [69]. Тривимірний точний аналіз пружного поля в нескінченному середовищі для двовимірної гексагональної квазікристалом з плоскою тріщиною виконано в [108].

Термопружне поле в нескінченному одновимірному гексагональному квазікристалічному просторі з круглою тріщиною під впливом антисиметричних однорідних теплових потоків розглядалося в [70], а у роботі [75] досліджено термопружне поле в нескінченному просторі двовимірної гексагональної квазікристалом з круговою плоскою тріщиною. Фундаментальні розв'язки для круглих і напівнескінчених плоских тріщин у нескінченному просторі одновимірної гексагональної квазікристалом при термічному навантаженні були отримані в [66], а також термопружні функції Гріна для нескінченного біматеріалу, що складається з одновимірних гексагональних квазікристалів, були знайдені в [72]. Фундаментальні розв'язки для тривимірних тріщин в одновимірних гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах знайдено в [76]. Тріщини зсуву, що рухаються в одновимірних гексагональних квазікристалічних матеріалах, досліджено в [94]. Проблема розкриття та закриття тріщин у п'ятикутному та декагональному квазікристалі розглядалася в [41].

Багато квазікристалічних матеріалів мають п'єзоелектричні властивості. Завдяки п'єзоелектричному ефекту КК можна використовувати як датчики та виконавчі механізми в розумних структурах. Теоретичні основи п'єзоелектрики в квазікристалах розглянуто в [34, 82]. Еліптичну порожнину та круглий отвір із прямолінійною тріщиною в одновимірних гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах досліджено у [104] та [97], відповідно.

Функції Гріна для одновимірного квазікристалічного біматеріалу з п'єзоелектричним ефектом досліджено в [116]. Набір 3D загальних розв'язків статичних задач для одновимірних гексагональних п'єзоелектричних квазікристалів отримано в [71] з використанням функцій зміщення. Тривимірні тріщини в одновимірних гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах досліджено в [50]. Дві колінеарні електропроникні антиплоскі тріщини однакової довжини, що лежать в серединній площині одновимірної гексагональної п'єзоелектричної квазікристалічної стрічки, досліджено в [119], а дві асиметричні обмежені проникні тріщини, що виходять з еліптичного отвору в одновимірних гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах, розглядалися в [101]. Діелектрична тріщина кругової форми в квазікристалічній пластині такої ж форми розглянута в [120].

Тріщини в однорідних КК з п'єзоелектричним ефектом розглядалися також в антиплоскому випадку. Нерівномірно навантажена антиплоска тріщина в одновимірному п'єзоелектричному квазікристалічному півпросторі, була досліджена в [95], а дві колінеарні електрично проникні антиплоскі тріщини однакової довжини, що лежать в середній площині одновимірної гексагональної п'єзоелектричної квазікристалічної стрічки досліджено в [119]. Задача антиплоского зсуву двох симетричних тріщин, що відходять від еліптичного отвору в одновимірних гексагональних п'єзоелектричних КК, була досліджена в [98].

Тріщини на межі поділу різнорідних КК вивчені значно менше. Стосовно цієї проблеми можна відзначити, що в [117, 118] аналітично-числовим методом досліджено електронепроникну міжфазну тріщину довільної форми в одновимірному гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. Міжфазні тріщини типу III між звичайними пружними матеріалами та квазікристалами розглядалися в [89] без урахування п'єзоефекту. Тріщина між різнорідними одновимірними гексагональними п'єзоелектричними квазікристалами з електропроникними та непроникними

умовами на її берегах за умов антиплоского зсуву та плоского електричного навантаження досліджувалась у [61].

Сучасні актуатори та інші електронні пристрої часто виготовляються з використанням тонкоплівкових електродів або провідних шарів, які можуть посилювати прикладені електричні поля поблизу них. Такі електроди зазвичай виготовляються з металевого порошку, провідних полімерів тощо і не змінюють механічних властивостей матриць [84]. Згадані електричні поля можуть індукувати несумісне поле деформації, що може призвести до розшарування електродів і появи тріщин на провідних поверхнях, які називаються електрично провідними.

Електрично провідна тріщина під дією антиплоского механічного навантаження та плоского електричного поля вперше була розглянута в роботах [110, 111]. В цих роботах була виявлена осциляційна сингулярність у вершинах тріщини. Спосіб усунення цієї сингулярності для електропровідної тріщини в антиплоскому випадку був запропонований в [81], а взаємодія тунельної провідної тріщини та віддаленого смужкового електрода, розташованого на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів під дією антиплоских зсувних та плоских електричних навантажень досліджена в [88]. Однак, наскільки відомо автору, раніше ніколи не розглядалася електропровідна міжфазна тріщина між двома п'єзоелектричними КК. Саме така задача для випадку антиплоского механічного та плоского електричного навантаження є одним із завдань даної дисертаційної роботи.

## **1.7 Огляд літератури стосовно рухомої тріщини**

Проблема руху тріщини в середовищах зі складними фізико-механічними властивостями привернула значну увагу в науковій літературі. Перший розв'язок динамічної стаціонарної задачі про тріщину було надано Yoffe [103], який розглядав тріщину кінцевої довжини, що рухається з постійною швидкістю в нескінченному ізотропному твердому тілі. Дослідження розвитку міжфазної тріщини вздовж межі поділу двох

ізотропних тіл було розпочато в роботі [9] і продовжено в роботах [113], [35] та інших. У цих роботах розглядалися різні навантаження та різні швидкості тріщин по відношенню до швидкості хвилі Релея. Формалізм Лехнітського [19] - Eshelby et al. [46] - Stroh [91] був застосований Wu [114] і Yang et al. [99] для дослідження тріщини на межі поділу, що рухається в анізотропному біматеріалі уздовж прямої межі поділу.

Рухома напівнескінченна міжфазна тріщина в ізотропному біматеріалі при зосередженому навантаженні на його гранях була проаналізована Симонов [28] з урахуванням контакту берегів тріщини у передній вершині тріщини. Рухома тріщина скінченної та напівнескінченної довжини між двома ортотропними матеріалами з урахуванням контакту поверхонь тріщини на передній вершині тріщини була досліджена Herrmann et al. [59]. Тертя в зоні контакту берегів тріщини, що рухається з дозвуковою швидкістю вздовж межі поділу пружної та жорсткої півплощин, враховано в роботі Антипова [36].

Результати, що стосуються поширення тріщини вздовж межі поділу між двома п'єзоелектричними матеріалами або між п'єзоелектричним і п'єзопасивним матеріалом, отримали набагато менше уваги в літературі. На цю тему можна згадати, наприклад, статті Chen et al. [39] і Wang et al. [111]. У цих роботах досліджувалася антиплоска задача для тріщини Гріффіта, що рухається вздовж межі поділу п'єзоелектричного біматеріалу. Крім того, в рамках моделі відкритої тріщини Shen et al. [87] розглянули величину сингулярностей полей напружень в плоскій задачі для електрично проникної тріщини, що проходить між двома п'єзоелектричними матеріалами. Herrmann et al. [60] досліджували рух тріщини кінцевої довжини із дозвуковою швидкістю по межі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів. Основну увагу було приділено моделі контактної зони та використано різні типи (проникні та непроникні) електричних граничних умов.

### **1.8. Висновки до першого розділу**

Висвітлено процес відкриття квазікристалів та поглиблення знань про цей вид структури твердого тіла. Проілюстровано структуру квазікристалів та наведено їхню класифікацію. Наведено математичні моделі, що описують напружено-деформівний стан квазікристалів, зокрема для випадку одновимірних квазікристалічних тіл.

Проведено огляд літератури стосовно досліджень тіл з тріщинами, в тому числі міжфазними. Особливу увагу приділено результатам, що стосуються тріщин у квазікристалічних тілах, зокрема тріщин на межі поділу двох різнорідних квазікристалів.

## РОЗДІЛ II. АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

**2.1. Основні співвідношення для міжфазної тріщини.** Розглянемо тунельну тріщину шириною  $(c, b)$  на межі поділу двох одновимірних п'єзoeлектричних квазікристалів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  (рис. 2.1). Атоми розміщені періодично в площині  $x_1 - x_2$ , та квазіперіодично по осі  $x_3$ , яка співпадає з напрямом поляризації матеріалів. Півпростори навантажені на нескінченості зсувними фоном  $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$ , та фазон  $H_{23}^\infty = \tau_2$  напруженнями та електричним полем  $E^\infty$ .

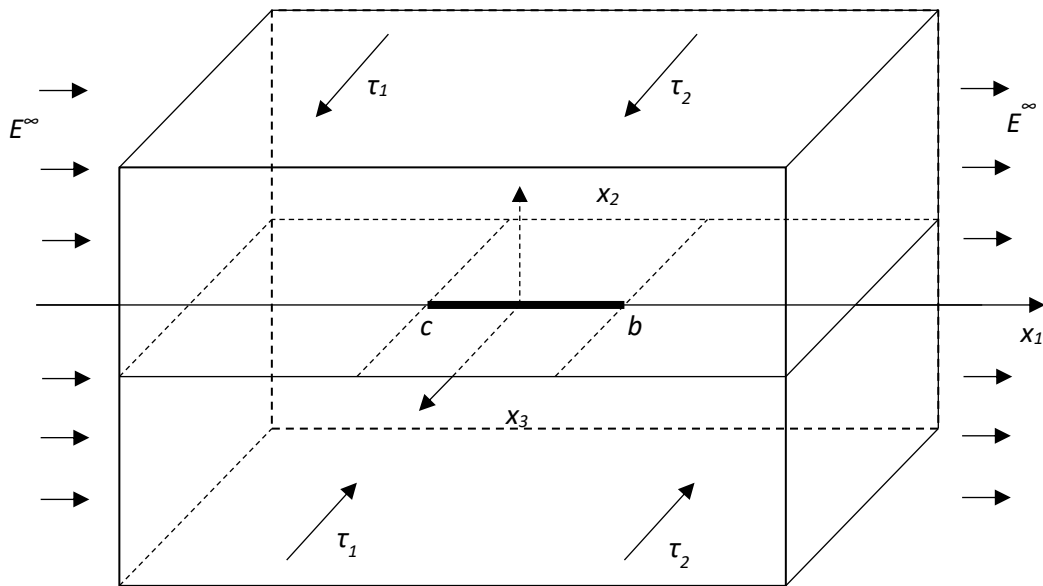


Рис.2.1. Схематичне зображення тунельної тріщини між двома одновимірними квазікристалами під дією зсувних напружень та електричного поля

При такому навантаженні в тілі реалізується антипловська деформація. Тоді визначальні співвідношення для кожної з підобластей мають вигляд [61] (див. також (1.18))



$$\begin{Bmatrix} \sigma_{j3} \\ H_{j3} \\ D_j \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,j} \\ w_{3,j} \\ \varphi_{,j} \end{Bmatrix} \quad (j=1,2), \quad (2.1)$$

де

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -\tilde{e}_{15} \\ e_{15} & \tilde{e}_{15} & \xi_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$j = (x_1, x_2)$ , а  $i = 1, 2$  - для верхнього і нижнього матеріалів відповідно;  $\sigma_{3i}$  - компоненти фононного напруження;  $H_{3i}$  - компоненти фазонного напруження;  $C_{44}, K_2$  - пружні константи у фононних і фазонних полях, відповідно;  $R_3$  - пружна константа зв'язку фононних і фазонних полів;  $e_{15}, \tilde{e}_{15}$  - п'єзоелектричні сталі;  $\xi_{11}$  - діелектрична проникність.

Механічні та електростатичні рівняння рівноваги для антиплоского випадку мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad (2.3)$$

а зв'язок між електричним полем і потенціалом  $\varphi$  визначається так:

$$E_1 = -\varphi_{,1}, \quad E_2 = -\varphi_{,2}. \quad (2.4)$$

Комбінуючи (2.1), (2.2), (2.3) та умови зв'язку (2.4), можемо записати:

$$\begin{cases} C_{44} \nabla^2 u_3 + R_3 \nabla^2 w_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0, \\ R_3 \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \tilde{e}_{15} \varphi = 0, \\ e_{15} \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \xi_{11} \varphi = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ .

Введемо вектори:

$$\mathbf{u} = [u_3, w_3, \varphi]^T, \mathbf{t}_j = [\sigma_{3j}, H_{3j}, D_j]^T. \quad (2.6)$$

Тоді рівняння (2.1) можна записати у формі:

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{R}\mathbf{u}_{,j} \quad (j=1,2). \quad (2.7)$$

З рівнянь (2.5) слідує, що функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$  задовольняють рівняння  $\Delta u_3 = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta w_3 = 0$ , відповідно, тобто вони являються гармонічними. Тому представимо вектор  $\mathbf{u}$ , компонентами якого є функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$ , як дійсну частину деякої аналітичної вектор-функції:

$$\mathbf{u} = 2\operatorname{Re}\Phi(z) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) \quad (2 \text{ вводиться для зручності}), \quad (2.8)$$

де  $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$  є довільною аналітичною функцією комплексної змінної  $z = x_1 + ix_2$ .

Підставляючи (2.8) в (2.7), отримаємо:

$$t_1 = -i\mathbf{B}\Phi'(z) + i\bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad t_2 = \mathbf{B}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (2.9)$$

де  $\mathbf{B} = i\mathbf{R}$ .

Для розв'язку задачі, поставленої в даному розділі, введемо також нові вектори:

$$\mathbf{v}' = [u'_3, w'_3, D_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, H_{32}, \varphi']^T. \quad (2.10)$$

На основі раніше отриманих представлень (2.8) та (2.9) ці нові вектори можемо записати в наступній формі:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (2.12)$$

де  $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ ,  $\mathbf{N} = [N_{ij}]_{i,j=1,2,3}$  і  $M_{11} = M_{22} = 1$ ,  
 $M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = 0$ ,  $M_{3j} = B_{3j}$ ,  $N_{ij} = B_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ ),  $N_{33} = 1$ ,  
 $N_{31} = N_{32} = 0$ .

Це значить що матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  будуть мати таку структуру:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Припустимо, що область, яка розглядається, скомпонована з двох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$ . Тоді представлення (2.11) та (2.12) можуть бути записані для обох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  у формі:

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)} \boldsymbol{\Phi}^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(m)}(\bar{z}), \quad \mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{N}^{(m)} \boldsymbol{\Phi}^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{N}}^{(m)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(m)}(\bar{z}), \quad (2.14)$$

де  $m=1$  відноситься до верхньої частини композиту та  $m=2$  – до нижньої;  $\mathbf{M}^{(m)}, \mathbf{N}^{(m)}$  – матриці, аналогічні  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ , для півпросторів 1 та 2;  $\boldsymbol{\Phi}^{(m)}(z)$  – довільні вектор-функції, аналітичні в півпросторах 1 та 2, відповідно.

Будемо вимагати далі виконання рівності  $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$  на усій межі поділу матеріалів. Тоді, на основі формули (2.14) маємо:

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}^{(1)} \boldsymbol{\Phi}^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}(x_1 - i0) = \\ & = \mathbf{N}^{(2)} \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{\mathbf{N}}^{(2)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(2)}(x_1 + i0) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тут використано позначення  $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$ , що означає граничне значення функції  $F(z)$  при  $x_2 \rightarrow 0$  з наближенням зверху чи знизу, відповідно.

Рівняння (2.15) можна записати в наступній формі:

$$\mathbf{N}^{(1)} \boldsymbol{\Phi}^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{\mathbf{N}}^{(2)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(2)}(x_1 + i0) = \mathbf{N}^{(2)} \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Будемо вважати, що права та ліва частина останньої рівності являє собою граничні значення функцій:

$$N^{(1)}\Phi'^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(z) \text{ для } x_2 > 0 \quad (2.16)$$

та

$$N^{(2)}\Phi'^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(z) \text{ для } x_2 < 0, \quad (2.17)$$

які аналітичні в верхній та нижній півплощинах, відповідно. Але це означає існування функції  $\Pi(z)$ , яка є аналітичною у всій площині і дорівнює функціям (2.16), (2.17) для кожної півплощини.

Припустимо, що  $\Pi(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , тоді на основі теореми Ліувілля знайдемо, що кожна з функцій (2.16), (2.17) рівна 0 для будь якого  $z$  в кожній з півплощин. Отже отримуємо:

$$\bar{\Phi}'^{(2)}(z) = \left(\bar{N}^{(2)}\right)^{-1} N^{(1)}\Phi'^{(1)}(z) \text{ для } x_2 > 0, \quad (2.18)$$

$$\bar{\Phi}'^{(1)}(z) = \left(\bar{N}^{(1)}\right)^{-1} N^{(2)}\Phi'^{(2)}(z) \text{ для } x_2 < 0. \quad (2.19)$$

Далі знайдемо стрибок наступної вектор-функції при переході через інтерфейс:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 + i0) - \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (2.20)$$

Знаходячи з першої формули (2.14)

$$\mathbf{v}'^{(k)}(x_1 \pm i0) = \mathbf{M}^{(k)}\Phi'^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(k)}\bar{\Phi}'^{(k)}(x_1 \mp i0)$$

і підставляючи в (2.20), маємо:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle &= \mathbf{M}^{(1)}\Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(1)}\bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) - \\ &\mathbf{M}^{(2)}\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\mathbf{M}}^{(2)}\bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Визначаючи з рівняння (2.19)

$$\Phi'^{(2)}(x_1 - i0) = \left(N^{(2)}\right)^{-1} \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0)$$

і підставляючи цей вираз разом з (2.18), при  $x_2 \rightarrow +0$ , в (21), визначимо стрибок у формі:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{D} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (2.22)$$

$$\text{де } \mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\bar{N}^{(2)}\right)^{-1} N^{(1)}.$$

Вводячи нову вектор-функцію:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \Phi'^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}'^{(1)}(z), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

рівняння (2.22) можна записати у вигляді:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1). \quad (2.24)$$

Із другого співвідношення (2.4) будемо мати наступне рівняння:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = N^{(1)} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0). \quad (2.25)$$

Взявши до уваги, що на основі (2.23)

$$\begin{aligned} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0), \\ \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) &= -\left(\bar{\mathbf{D}}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0), \end{aligned}$$

і підставляючи ці співвідношення в (2.25), отримуємо

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S} \mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (2.26)$$

де  $\mathbf{S} = N^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$ . З останнього співвідношення отримуємо

$$\mathbf{S} = \left[ \mathbf{M}^{(1)} \left(N^{(1)}\right)^{-1} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\bar{N}^{(2)}\right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (2.27)$$

Таким чином, отримані наступні важливі рівняння:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S} \mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (2.29)$$

де  $\mathbf{W}(z)$  – довільна вектор-функція, аналітична в кожній з півплощин.

Чисельний аналіз показує, що матриця  $\mathbf{S}$  має таку структуру:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & is_{12} & s_{13} \\ is_{21} & is_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & is_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

де всі  $s_{ij}$  є дійсними.

Аналогічно [58] введемо однорядкову матрицю  $\mathbf{R} = [R_1, R_2, R_3]$  і помножимо на неї (2.29). Після цього отримаємо:

$$\mathbf{R} \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{W}^-(x_1). \quad (2.31)$$

Введемо нову матрицю  $\mathbf{T}$  таким чином:

$$\mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{R} \bar{\mathbf{S}} = -\gamma \mathbf{T}, \quad (2.32)$$

де  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]$  – однорядкова матриця.

Підставивши нові презентації (2.32) в (2.31), отримаємо:

$$\mathbf{R} \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{T} \mathbf{W}^+(x_1) + \gamma \mathbf{T} \mathbf{W}^-(x_1) \quad (2.33)$$

Введемо нову довільну функцію вигляду:

$$F(z) = \mathbf{T} \mathbf{W}(z). \quad (2.34)$$

Тоді рівняння (2.33) можна записати так:

$$\mathbf{R} \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (2.35)$$

На основі рівнянь (2.32) маємо:

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS} = -\gamma^{-1}\mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{S} + \gamma^{-1}\bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}(\gamma\mathbf{S} + \bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}.$$

Транспонуючи ліву і праву частину останнього рівняння, отримаємо

Із записаного рівняння видно, що  $\gamma$  і  $\mathbf{R}^T = \mathbf{0}$  є власним значенням та власним вектором системи (2.36), відповідно. Тож для подальшого аналізу потрібно їх визначити.

Рівняння вигляду  $\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$  можна записати в розгорнутому вигляді як:

$$\det \begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо:

$$\begin{aligned} & i^3(\gamma-1)^3(s_{11}s_{22}s_{33} - s_{12}s_{21}s_{33}) + \\ & + i(\gamma-1)(\gamma+1)^2(s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}) = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо такі три корені:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_2 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_3 = 1, \quad (2.38)$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}}{s_{33}(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})}. \quad (2.39)$$

Для знаходження ж власних векторів, згідно з (2.36), маємо:

$$\begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

Використавши раніше визначене  $\gamma = \gamma_1$ , можна записати (2.40) у вигляді:

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1 - 1)s_{11} & i(\gamma_1 - 1)s_{21} & (\gamma_1 + 1)s_{31} \\ i(\gamma_1 - 1)s_{12} & i(\gamma_1 - 1)s_{22} & (\gamma_1 + 1)s_{32} \\ (\gamma_1 + 1)s_{13} & (\gamma_1 + 1)s_{23} & i(\gamma_1 - 1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.41)$$

Позначимо одну з компонент власного вектора як  $R_2 = 1$  та розглянемо I і II рівняння (2.41). Отримаємо:

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1 - 1)s_{11} & (\gamma_1 + 1)s_{31} \\ i(\gamma_1 - 1)s_{12} & (\gamma_1 + 1)s_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -i(\gamma_1 - 1)s_{21} \\ -i(\gamma_1 - 1)s_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

З цієї системи рівнянь одержуємо:

$$R_1 = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}, \quad R_3 = i\delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D},$$

$$\text{де } D = s_{11}s_{32} - s_{12}s_{31}, \quad \delta = \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1}.$$

Аналогічно взявши з (2.38) значення  $\gamma = \gamma_3 = 1$  і підставивши в (2.40), отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{31} \\ 0 & 0 & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0.$$

Звідси слідує, що  $R_3 = 0$ , а вибравши  $R_2 = 1$ , визначимо значення  $R_1 = -s_{23} / s_{13}$ .

Для зручного представлення отриманих результатів, введемо наступні позначення:  $r_{11} = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}$ ,  $r_{13} = \delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D}$ ,  $r_{31} = -s_{23} / s_{13}$ , після чого можна записати матрицю  $\mathbf{R}$ , скомпоновану з власних векторів, у вигляді:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 1 & ir_{13} \\ -r_{11} & 1 & -ir_{13} \\ r_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$



Враховуючи, що  $\mathbf{T} = \mathbf{RS}$ , отримаємо наступне представлення:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} it_{11} & it_{12} & t_{13} \\ it_{21} & it_{22} & t_{23} \\ it_{31} & it_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Важливо зазначити, що всі елементи  $r_{ij}$  та  $t_{ij}$  в (2.43) та (2.44), відповідно, дійсні.

Підставляючи (2.43) в рівняння (2.35) і розкриваючи добуток матриць, отримуємо наступні представлення:

$$r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3) \quad (45)$$

де  $r_{33} = 0$ .

Враховуючи представлення (2.34), на його основі отримаємо:

$$F^+(x_1) - F^-(x_1) = \mathbf{T} \{ \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1) \},$$

а також враховуючи (2.15) і (2.44), останнє рівняння дає наступні рівності:

$$it_{j1} \langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2} \langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3} \langle D_2(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3) \quad (2.46)$$

при цьому  $t_{33} = 0$ .

**2.2. Електропровідна тріщина.** Рівняння (2.45) та (2.46) можуть бути використані для формулювання та знаходження розв'язку різних антиплоских задач для 1D п'єзоелектричних біматеріальних квазікристалічних композитів зі змішаними граничними умовами.

Розглянемо електропровідну тріщину  $c \leq x_1 \leq b$  на інтерфейсі  $x_2 = 0$  між двома півпросторами  $x_2 > 0$  і  $x_2 < 0$ , скомпонованими з 1D п'єзоелектричних квазікристалів, поляризованих в напрямку осі  $x_3$  (рис. 2.1). Півпростори піддаються рівномірно розподіленому зсувному фононному  $\sigma_{23}^\infty$  та фазонному

$H_{23}^{\infty}$  напруженням, а також електричному полю  $E_1^{\infty}$  на нескінченності. Сама ж тріщина вважається вільною від механічних навантажень. Такий тип зовнішніх полів навантажень призводять до антиплоского стану, а отже можна розглядати переріз у площині, ортогональній  $x_3$ .

Граничні умови в такій задачі можна сформулювати в вигляді:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \text{ для } c < x_1 < b, \quad (2.47)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle H_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad w'_3 = 0 \text{ для } x_1 \notin (c, b). \quad (2.48)$$

Умови (2.48) з використанням представлень (2.46) забезпечують неперервність функції  $F_1(z)$  на відрізках  $x_1 \notin (c, b)$  матеріального інтерфейсу, а умова (2.47) з використанням (2.45) веде до наступного рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \text{ для } c < x_1 < b. \quad (2.49)$$

Беручи до уваги, що для відрізка  $x_1 \notin (c, b)$  справедливі співвідношення  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ , на основі (2.45) одержуємо для  $x_1 \rightarrow \infty$ :

$$(1 + \gamma_j) F_j(x_1) = r_{j1} \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + i r_{j3} E_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Але враховуючи що функції  $F_j(z)$  аналітичні у всій площині за виключенням відрізка  $x_1 \in (c, b)$  та використовуючи умови на нескінченності, з останнього рівняння отримаємо:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i \tilde{\sigma}_j, \quad (2.50)$$

$$\text{де } \tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1} \sigma_{23}^{\infty} + H_{23}^{\infty}}{1 + \gamma_j}, \quad \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3} E^{\infty}}{1 + \gamma_j}, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Розв'язок рівняння (2.49) за умов на нескінченності (2.50) було знайдено з використанням [21] у формі:

$$F_j(z) = (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j}, \quad (2.51)$$

де  $\varepsilon_j = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_j$ ,  $l = b - c$ .

Фононні та фазонні напруження та електричне поле на інтерфейсі отримані з рівнянь (2.45), (2.51) в наступній формі:

$$\begin{aligned} & r_{j1} \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + i r_{j3} E_1^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = \left( r_{j1} \tau^\infty + H_{23}^\infty + i r_{j3} E^\infty \right) \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \left( \frac{x_1-c}{x_1-b} \right)^{i\varepsilon_j} \text{ для } x_1 > a. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Електричну індукцію та похідну від стрибка переміщення знайдено на основі формул (2.46), (2.51) у вигляді:

$$\begin{aligned} & i t_{j1} \langle u'_3(x_1) \rangle + i t_{j2} \langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3} \langle D_2(x_1) \rangle = \\ & = \frac{r_{j3} E^\infty - i r_{j1} \tau^\infty - i H_{23}^\infty}{\sqrt{\gamma_j}} \times \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \left( \frac{x_1-c}{b-x_1} \right)^{i\varepsilon_j} \text{ для } c < x_1 < a. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Інтегруючи останню рівність, отримуємо:

$$\begin{aligned} & i t_{j1} \langle u_3(x_1) \rangle + i t_{j2} \langle w_3(x_1) \rangle + t_{j3} \langle \hat{D}_2(x_1) \rangle = \\ & = \sqrt{(x_1-c)(b-x_1)} \left\{ \frac{i r_{j1} \tau^\infty + i H_{23}^\infty - r_{j3} E^\infty}{\sqrt{\gamma_j}} \left( \frac{x_1-c}{b-x_1} \right)^{i\varepsilon_j} \right\} \text{ для } c < x_1 < a, \end{aligned} \quad (2.54)$$

де  $\langle \hat{D}_2(x_1, 0) \rangle = \int \langle D_2(x_1, 0) \rangle dx_1$ .

Всі необхідні компоненти фононних та фазонних напружень та стрибків переміщення можуть бути отримані з рівнянь (2.52) та (2.54) при  $j = 1$  та  $j = 3$  відповідно. З одержаних результатів видно, що біля вершин тріщини виникає коренева осциляційна особливість. Важливо, що ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини, як в плоскому випадку [112]. До

того ж області осциляції є дуже малими, тому отримані розв'язки є прийнятними для практичного використання.

### 2.3 Чисельна ілюстрація отриманих аналітичних розв'язків

У даній частині розділу основну увагу буде приділено випадку електропровідних умов, які мають місце при наявності електродів на берегах тріщини. Використаємо для нижнього та верхнього матеріалів п'єзоелектричні квазікристали з такими характеристиками [71]:

$$c_{44}^{(1)} = 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(1)} = 17 \text{ К / м}^2, \quad K_2^{(1)} = 0.15 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(1)} = 1.765 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$\tilde{e}_{15}^{(1)} = 17 \text{ К / м}^2, \quad \xi_{11}^{(1)} = 15.1 \times 10^{-9} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \text{ для верхнього матеріалу}, \quad (2.55)$$

$$c_{44}^{(2)} = 5.0 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(2)} = -0.318 \text{ К / м}^2, \quad K_2^{(2)} = 0.3 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(2)} = 1.2 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$\tilde{e}_{15}^{(2)} = -0.16 \text{ К / м}^2, \quad \xi_{11}^{(2)} = 8.25 \times 10^{-12} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) - \text{для нижнього}. \quad (2.56)$$

Результати отримані для  $c = -0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,05 \text{ м}$ .

На рис. 2.2 показано фононне  $\langle u_3 \rangle$  (а) і фазонне  $\langle w_3 \rangle$  (б) розкриття тріщини, побудовані для різних значень електричного поля  $E_1^\infty$ , а саме  $E_1^\infty = 5000 \text{ В/м}$  (криві I),  $0$  (криві II),  $-5000 \text{ В/м}$  (криві III) при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 0$ , а на рис. 2.3 показано відповідні графіки цих же величин, побудовані при таких же значеннях електричного поля, що і на рис. 2.2, і  $\sigma_{23}^\infty = 0 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ . Як видно з цих рисунків, більший вплив на стрибки переміщення  $\langle u_3 \rangle$  та  $\langle w_3 \rangle$  чинить саме фазонне навантаження, а вплив електричного поля є досить суттєвим.

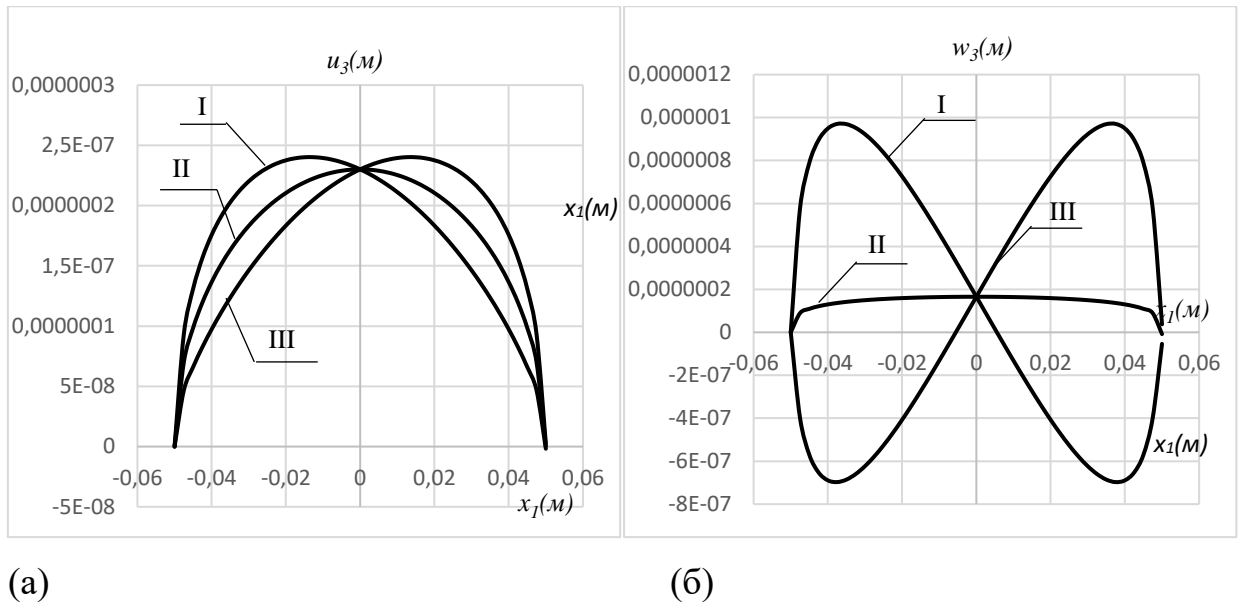


Рис. 2.2 Залежність стрибка переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5$  Па,  $H_{23}^\infty = 0$

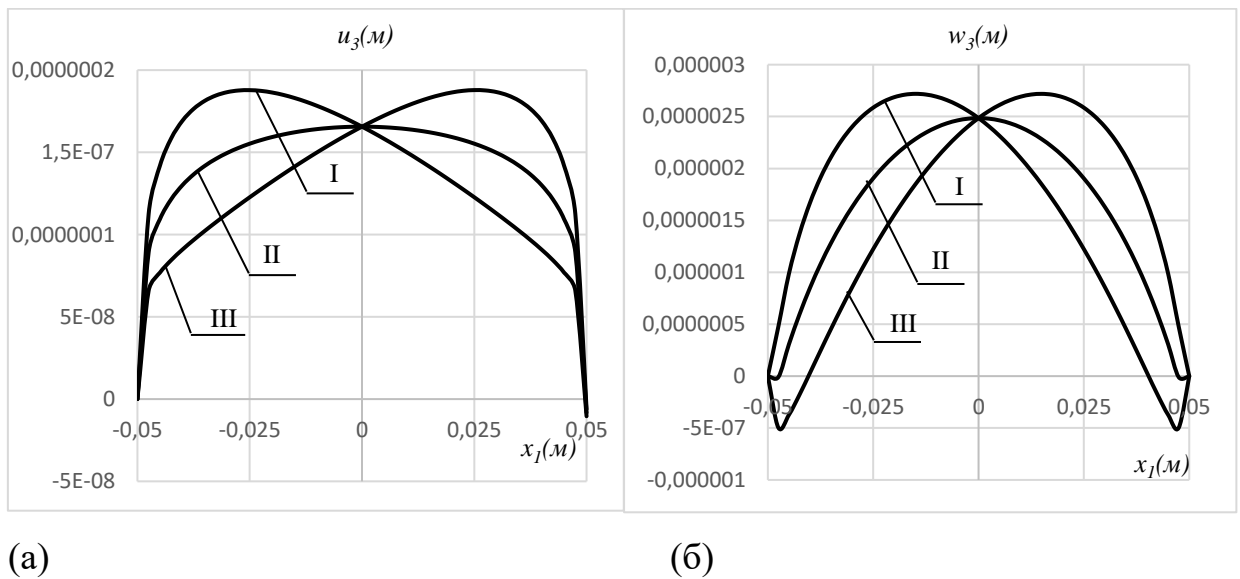


Рис. 2.3 Залежність стрибка переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 0$  Па,  $H_{23}^\infty = 10^5$  Па

Фононні напруження на правому продовженні тріщини, отримані при нульовому електричному полі і  $\sigma_{23}^\infty = 10^6$  Па (крива I),  $5 \times 10^5$  Па (II),  $10^5$  Па (III), наведені на рис. 2.4. Легко помітити, що при зміні навантаження на нескінченності змінюються і значення полів напружень на продовженні

тріщини. В той же час, вплив електричного поля, прикладеного на нескінченності, несуттєво впливає на фононні та фазонні напруження в околі тріщини.

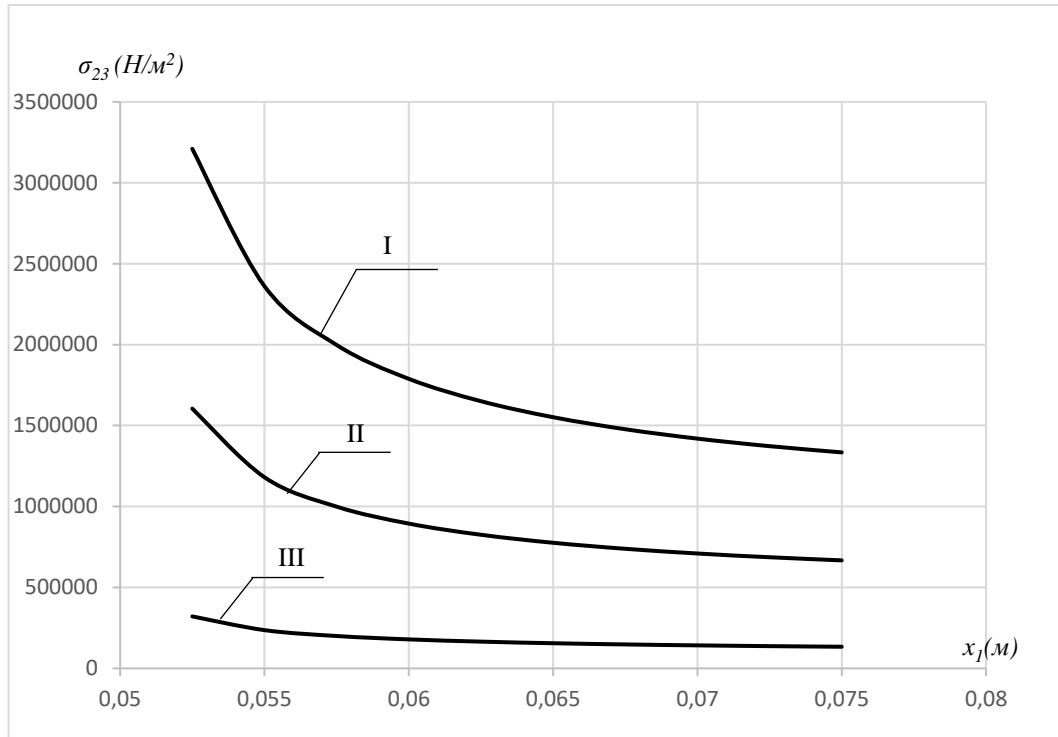


Рис. 2.4 Фононні напруження на продовженні тріщини при  $E_1^\infty = 0 \text{ В / м}$  і різних значеннях зовнішнього зсувного напруження  $\sigma_{23}^\infty$

**2.4. Електрично заряджені береги тріщини.** Розглянемо тріщину  $(c, a)$  в площині  $(x_1, x_3)$ . Вісь  $x_3$  співпадає з квазіперіодичним напрямом одномірних п'єзоелектричних квазікристалів. Вважається, що сумарний заряд тріщини дорівнює  $D_0$ . (електродні покриття тріщини підключені до електричного джерела інтенсивності  $D_0$ ). Біматеріал навантажений на нескінченності зсувними напруженнями  $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$ ,  $H_{23}^\infty = \tau_2$ . Тут  $\tau_1$  – фононне напруження  $\tau_2$  – фазонне напруження.

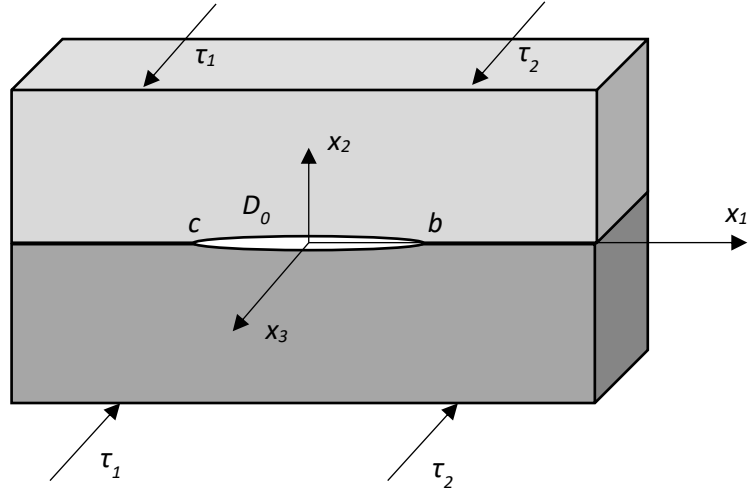


Рис. 2.5 Схематичне зображення тунельної тріщини між двома півпросторами з характеристиками одновірних п'єзоелектричних квазікристалів під дією зсувного навантаження

За представленими умовами навантаження в розглянутому тілі виникає антиплоска деформація. Визначальні співвідношення в такому випадку мають вигляд (2.1), (2.2).

Для задачі, проілюстрованій на рис. 2.5, граничні умови можна сформулювати у вигляді:

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \text{ для } c < x_1 < b, \quad (2.57)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \langle H_{23} \rangle = 0, \langle D_2 \rangle = 0, \langle u'_3 \rangle = 0, \langle E_1 \rangle = 0, w'_3 = 0 \text{ для } x_1 \notin (c, b), \quad (2.58)$$

а наявність сумарного електричного заряду величини  $D_0$  на тріщині приводить до наступного рівняння:

$$\int_c^b \langle D_2(x_1) \rangle dx_1 = D_0. \quad (2.59)$$

Граничні умови (2.58) з використанням представлень (2.46) забезпечують непереривність функцій  $F_j(z)$  на відрізках  $x_1 \notin (c, b)$  межі поділу матеріалів, а умова (2.57) з використанням (2.45) дає рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \text{ для } c < x_1 < b. \quad (2.60)$$

Умови на нескінченності для функцій  $F_j(z)$  витікають із (2.45) і мають вигляд:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \quad (2.61)$$

$$\text{де } \tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty}{1 + \gamma_j}, \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}E^\infty}{1 + \gamma_j}, \quad (j=1,2,3).$$

Враховуємо також, що повинна виконуватись умова, яка витікає із (2.46), а саме:

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = \int_c^b \{it_{11} \langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12} \langle w'_3(x_1) \rangle + t_{13} \langle D_2(x_1) \rangle\} dx_1. \quad (2.62)$$

В силу умов однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо:

$$\int_c^b \{it_{11} \langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12} \langle w'_3(x_1) \rangle\} dx_1 = 0. \quad (2.63)$$

Тоді з урахуванням умови (2.59) рівняння (2.62) приводить до наступної умови:

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = t_{13} D_0. \quad (2.64)$$

Розв'язок задачі (2.60), (2.61) та (2.64) будемо розшукувати у формі [21]:

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j} \quad (2.65)$$

де  $c_0, c_1$  — довільні константи.



При розкладенні на нескінченості функції  $F_j(z)$ , представленої формулою (2.65), маємо:

$$F_j(z) = c_{1j} + \left\{ c_{0j} + c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] \right\} \frac{1}{z} + O(z^{-2}). \quad (2.66)$$

З представлень (2.61) і (2.64) отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j \\ c_{0j} + c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] &= it_{13}D_0 / (2\pi). \end{aligned}$$

Будемо розглядати випадок коли  $D_0 \neq 0$  і враховуючи це можемо записати наступні вирази для констант:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \\ c_{0j} &= \frac{it_{13}D_0}{2\pi} - c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Підставляючи одержані вирази (2.67), в (2.66) одержуємо розв'язок у вигляді:

$$F_j(z) = \frac{\frac{it_{13}D_0}{2\pi} + (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \left[ z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l \right]}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j}. \quad (2.68)$$

Також для зручності можливий його запис в формі:

$$F_j(z) = \left\{ (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} + \frac{it_{13}D_0}{2\pi\sqrt{(z-c)(z-b)}} \right\} \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j}. \quad (2.69)$$

Як і у випадку відсутності електричного заряду на тріщині, розглянутому в попередніх розділах, можемо помітити осциляційну сингулярність напружень в безпосередній близькості до вершини тріщини.

Підставляючи вирази (2.69) в представлення (2.45) та (2.46), знаходимо фононні і фазонні напруження, а також стрибки переміщень і електричного потенціалу на тріщині.

**2.5. Чисельні результати стосовно впливу електричного заряду на тріщині.** Представлене вище розв'язки в частині 1.4 використаємо для дослідження впливу заряду  $D_0$  на тріщині на напруження в околі її вершини та стрибки переміщень її берегів. Дослідження будемо проводити на прикладі біматеріалу, скомпонованого з двох одномірних п'єзоелектричних квазікристалів (2.55) та (2.56) з різними характеристиками для нижнього та верхнього матеріалів.

Результати отримані для  $c = -0,05m$ ,  $b = 0,05m$  при статичному механічному навантаженні  $\sigma_{23}^\infty = 10^5 H / m^2$  і при змінній величині електричного заряду на тріщині. На всіх рисунках лінії I відповідають  $D_0 = 0$ , II -  $D_0 = 5 \cdot 10^{-5} Кл / м$ , III -  $D_0 = 1 \cdot 10^{-4} Кл / м$ .

На рис. 2.6(а) показана зміна фононного напруження  $\sigma_{23}$  в околі правої вершини тріщини. Прослідковується незначне зростання цього напруження зі зростанням величини електричного заряду. Має місце також зростання  $\sigma_{23}$  до нескінченості при наближенні до вершини тріщини.

На рис. 2.6 (б) наведено зміну фазонного напруження  $H_{23}$  при збільшенні заряду тріщини  $D_0$ . Як і в попередньому випадку, при наближенні до вершини тріщини значення напруження зростають до нескінченості і не можуть бути визначені в самій вершині тріщини (особливій точці). Також можна помітити, що за тих же значень електричного заряду, що і на рис 2.6(а), розбіжність у значеннях фазонного напруження для різних  $D_0$  практично непомітна.

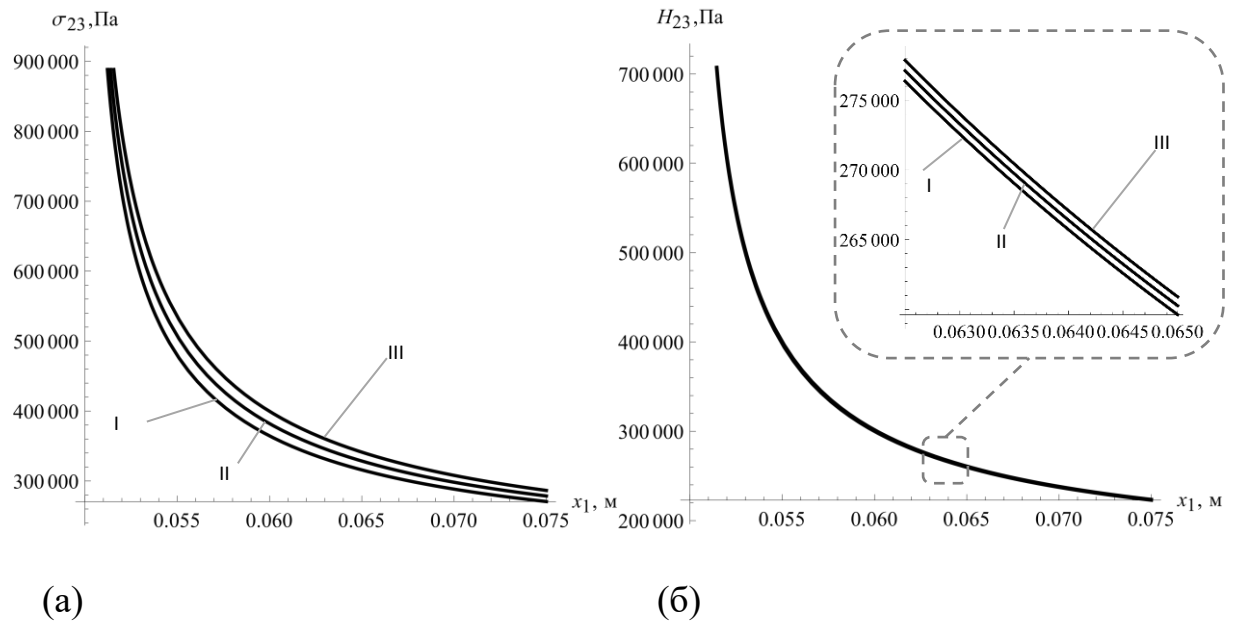


Рис. 2.6 Залежність фазонного (а) та (б) фононного напруження від відстані до вершини тріщини при прикладеному на нескінченості напруженні  $\sigma_{23}^{\infty}$  і різних значеннях електричного заряду  $D_0$

На рис. 2.7 наведені фононне та фазонне розкриття тріщини при різних значеннях електричного заряду  $D_0$ . Легко помітити що стрибок  $\langle u_3 \rangle$  несуттєво збільшується при збільшенні електричного заряду, а  $\langle w_3 \rangle$  навпаки зменшується для вказаних  $D_0$ .

Важливо відзначити також симетричність графіків відносно середини тріщини, що говорить про симетричність впливу як зовнішнього напруження, так і заряду на фонон і фазон розкриття тріщини.

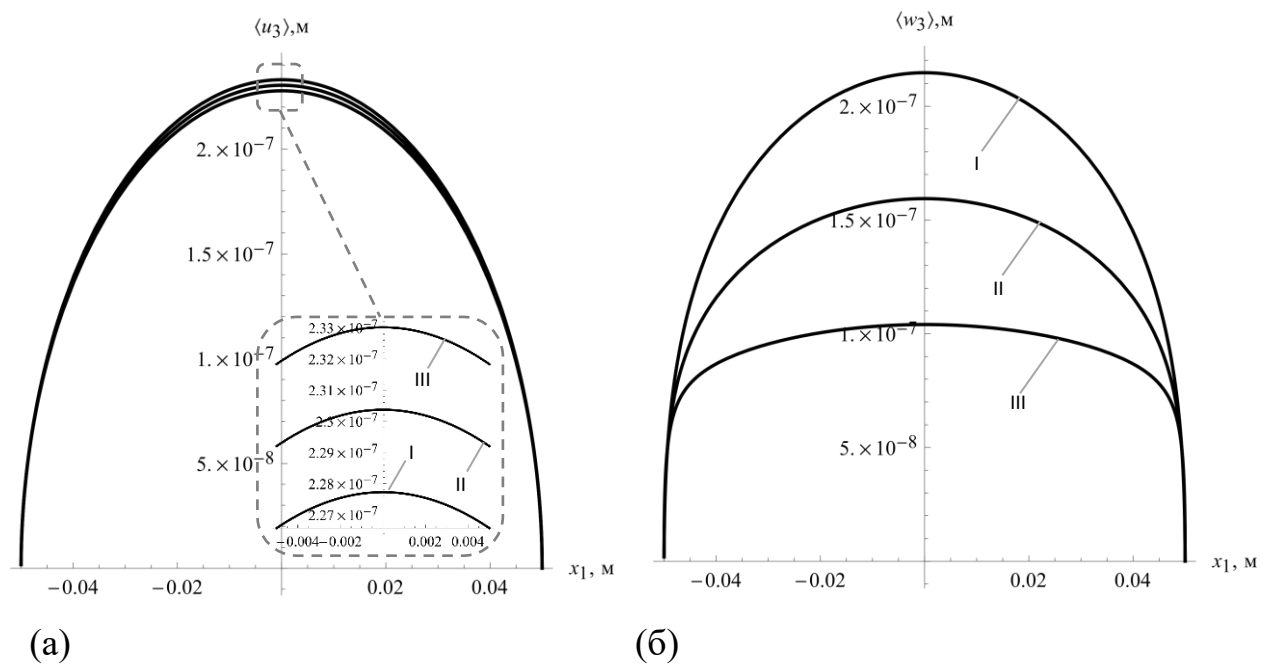


Рис. 2.7 Стрибок переміщень  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) при різних значеннях  $D_0$

**2.6. Висновки до другого розділу.** В розділі досліджено нову задачу для електропровідної тріщини вздовж межі розділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією антиплоского механічного навантаження і плоского електричного поля, перпендикулярного фронту тріщини. Також представлений розв'язок антиплоскої задачі для одновимірного п'єзоелектричного біматеріального квазікристала з тріщиною під впливом як механічного навантаження і електричного поля, прикладених на нескінченності, так і електричного заряду, розподіленого вздовж берегів тріщини. Виведено такий аналітичний алгоритм розв'язку:

- сформульовано представлення для напружень та електричного поля (2.45), а також для похідних від стрибка переміщень та електричного зміщення (2.46) через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, крім області тріщини;
- на основі представлень (2.45) та (2.46) отримано задачу лінійного спряження (2.60) з умовами на нескінченності (2.61) та умовами балансу заряду тріщини;

- побудовано аналітичний розв'язок задачі лінійного спряження (2.68) і на його основі знайдено всі необхідні електромеханічні компоненти на межі поділу матеріалів.

На базі отриманого розв'язку проведено чисельну ілюстрацію впливу зовнішнього механічного навантаження і різних величин електричного поля на фононні і фазонні напруження та відкриття тріщини. Це дозволило визначити вплив електричного поля на напружений стан квазікристалів.

Представлений розв'язок може мати практичне застосування для визначення можливості використання квазікристалів у галузі виробництва нових вимірювальних приладів з п'єзоелектричних і квазікристалічних матеріалів.

# РОЗДІЛ III. ПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ БІМАТЕРІАЛЬНОГО ОДНОВИМІРНОГО КВАЗІКРИСТАЛА ІЗ ТРИЩИНОЮ НА МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

## 3.1 Основні рівняння для 1D п'єзоелектричних квазікристалів у плоскому випадку

Для лінійної теорії пружності, визначальні співвідношення, рівняння рівноваги і геометричні рівняння 1D п'єзоелектричних КК без масових сил і вільних зарядів можуть бути виражені у такому вигляді [116] (див. також рівняння (1.8)):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s + R_{ij3s} W_{3s}, \\ D_i &= e_{iks} \varepsilon_{ks} + \xi_{is} E_s + \tilde{e}_{i3s} W_{3s}, \\ H_{3i} &= R_{ks3i} \varepsilon_{ks} - \tilde{e}_{s3i} E_s + K_{3i3s} W_{3s},\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad H_{3i,i} = 0.\tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad W_{3i} = W_{3,i}\tag{3.3}$$

де  $i, j, k, s=1, 2, 3$ , а позначення « $,$ » представляє похідну по просторових змінних;  $u_i$ ,  $W_3$  та  $\phi$  – фононні переміщення, фазонні переміщення та електричний потенціал відповідно, причому, атоми розміщені періодично в площині  $x_1 - x_2$ , та квазіперіодично по осі  $x_3$ ;  $\sigma_{ij}$  та  $\varepsilon_{ks}$  – фононні напруження та деформації, відповідно;  $H_{3i}$  та  $W_{3i}$  – фазонні напруження та переміщення;  $D_i$  та  $E_i$  – електричні переміщення та електричні поля, напрям поляризації співпадає з напрямком осі  $x_3$ ;  $c_{ijks}$  та  $K_{3j3s}$  – пружні константи у фононних і фазонних полях, відповідно;  $R_{ij3k}$  – пружні константи зв'язку фононних і фазонних полів;  $e_{jks}$  та  $\tilde{e}_{jks}$  являють собою п'єзоелектричні константи фононних і фазонних полів, відповідно;  $\xi_{is}$  – діелектричні проникності.

З (3.1), (3.2) та (3.3) отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} (c_{ijks}u_k + e_{sij}\varphi + R_{ij3s}W_3)_{,si} = 0, \\ (e_{iks}u_k - \xi_{is}\varphi + \tilde{e}_{i3s}W_3)_{,si} = 0, \\ (R_{ik3s}u_k + \tilde{e}_{i3s}\varphi + K_{3i3s}W_3)_{,si} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Далі вводимо такі вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, W_3\}^T, \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, H_{33}\}^T, \quad (3.5)$$

де тут і пізніше верхній індекс Т означає транспоновану матрицю.

Припускаючи, що всі поля є незалежними від координати  $x_2$ , розв'язок рівнянь (3.4) за методом, запропонованим в [92], можна представити у вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{f}(z), \quad (3.6)$$

де  $z = x_1 + p x_3$ , причому константу  $p$  і вектор  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$  можна знайти із співвідношень:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0. \quad (3.7)$$

Елементи матриці 5-го порядку  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{T}$  визначаються як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1jk1} & e_{1j1} & R_{1j31} \\ e_{1k1} & -\xi_{11} & \tilde{e}_{131} \\ R_{k131} & \tilde{e}_{131} & -K_{3131} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_{1jk2} & e_{2j1} & R_{j132} \\ e_{1k2} & -\xi_{12} & \tilde{e}_{132} \\ R_{k231} & \tilde{e}_{132} & K_{3132} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2jk2} & e_{2j2} & R_{j232} \\ e_{2k2} & -\xi_{22} & \tilde{e}_{232} \\ R_{k232} & \tilde{e}_{232} & K_{3232} \end{bmatrix}$$

Нетривіальний розв'язок рівнянь (3.7) існує, якщо  $p$  – корінь рівняння

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + p^2\mathbf{T}] = 0. \quad (3.8)$$

Оскільки рівняння (3.8) не має дійсних коренів [92], позначимо корені цього рівняння з додатними уявними частинами як  $p_\alpha$  та відповідні власні вектори рівняння (3.7) як  $\mathbf{a}_\alpha$  (індекс  $\alpha$  тут і далі набуває значень 1-5).

Найбільш загальний дійсний розв'язок рівнянь (3.4) можна представити як [92]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (3.9)$$

де  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$  – матриця, що складається з власних векторів,  $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)]^T$  – довільна векторна функція,  $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$  і риска зверху означає комплексне спряження.

Використовуючи рівняння (3.1), вектор  $\mathbf{t}$ , введений рівнянням (3.5), може бути представлений у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (3.10)$$

де матриця п'ятого порядку  $\mathbf{B}$  визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R}^T + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha \text{ (не проводиться сумування по індексу } \alpha) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[ \frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5(z_5)}{dz_5} \right]^T. \quad (3.12)$$

**3.2 Розв'язок для композитного матеріалу, складеного з двох 1D гексагональних КК зі змішаними граничними умовами на межі поділу матеріалів.** Розглянемо біматеріал, що складається з двох різних 1D п'єзоелектричних КК півпросторів  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$  з властивостями, визначеними рівняннями (3.1) для кожного матеріалу. Будемо вважати, що вектор  $\mathbf{t}$  є неперервним по всьому біматеріальному інтерфейсу, а частина  $L = \{(-\infty, c) \cup (b, \infty)\}$  інтерфейсу  $-\infty < x_1 < \infty, x_3 = 0$  механічно і електрично неперервна, тобто граничні умови на межі розділу  $x_3 = 0$  такі:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (3.13)$$



$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L. \quad (3.14)$$

У цьому випадку на основі формул (3.9), (3.10) розв'язки рівняння (3.4) можуть бути записані для кожної з областей у формі:

$$\mathbf{V}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{t}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{f}'^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}'^{(j)}(\bar{z}), \quad (3.16)$$

де  $j=1$  для  $x_3 > 0$  і  $j=2$  для  $x_3 < 0$ ; вектор функції  $\mathbf{f}^{(1)}(z)$  та  $\mathbf{f}^{(2)}(z)$  аналітичні у верхній ( $x_3 > 0$ ) та нижній ( $x_3 < 0$ ) областях, відповідно.

За допомогою рівняння (3.16) граничні умови (3.13) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty. \quad (3.17)$$

Ліва частина рівняння (3.17) є граничне значення аналітичної функції в області  $x_3 > 0$ , а права частини рівняння (3.17) – граничне значення іншої аналітичної функції в області  $x_3 < 0$ . Рівняння (3.17) означає, що обидві функції можуть бути аналітично продовжені у всій площині, тобто вони дорівнюють для  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$ , відповідно, функції  $\mathbf{M}(z)$ , аналітичній у всій площині. Беручи до уваги, що фонові та фазові напруження і електричне зміщення обмежені на нескінченності, з рівняння (16) отримуємо, що  $\mathbf{M}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \mathbf{M}^{(0)} = \text{const}$ . Але це також означає, що  $\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}^{(0)}$  справедливо для всієї площини. Таким чином, з рівнянь (16) слідує:

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(\bar{z}) = \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(\bar{z}) = \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0, \quad (3.19)$$

де  $\mathbf{M}^{(0)}$  є довільним постійним вектором. Припускаючи, що власні значення різні, і враховуючи, що матриці в рівнянні (3.19) є несингулярними [92], одержуємо:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Оскільки  $\mathbf{f}^{(1)}(z)$  та  $\mathbf{f}^{(2)}(z)$  є довільними функціями, можна вибрати  $\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{0}$ . Тоді з рівняння (20) отримаємо:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Розглянемо далі вектор похідних стрибків переміщень і електричного потенціалу при переході через інтерфейс матеріалу:

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0). \quad (3.22)$$

За допомогою рівнянь (3.15) і (3.21) його можна записати як

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{D} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1), \quad (3.23)$$

де  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)}$ .

Завдяки формулам (3.16) вектор  $\mathbf{t}^{(1)}$  на інтерфейсі матеріалу може бути записаний як

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \quad (3.24)$$

Введення вектор-функції  $\boldsymbol{\omega}(z)$  за формулою

$$\boldsymbol{\omega}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \mathbf{N}(z) & \text{для } x_3 > 0 \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{N}}(z) & \text{для } x_3 < 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

де  $\mathbf{N}(z) = [f_1'^{(1)}(z), f_2'^{(1)}(z), f_3'^{(1)}(z), f_4'^{(1)}(z), f_5'^{(1)}(z)]$ , призводить до таких виразів:

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \boldsymbol{\omega}^+(x_1) - \boldsymbol{\omega}^-(x_1), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \boldsymbol{\omega}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\omega}^-(x_1), \quad (3.27)$$

де  $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$  і  $\boldsymbol{\omega}^+(x_1) = \boldsymbol{\omega}(x_1 + i0)$ ,  $\boldsymbol{\omega}^-(x_1) = \boldsymbol{\omega}(x_1 - i0)$ .

Рівняння (3.26), (3.27) можна використовувати для аналізу композитів, складених з одновірних гексогональних п'єзоелектричних КК з довільною кількістю тріщин на межі поділу матеріалів. Ці рівняння включають як плоску, так і антиплоску складову.

Розглянемо далі плоску задачу в системі координат  $x_1 - x_3$ , припускаючи, що всі поля незалежні від координати  $x_2$ . Ми будемо використовувати позначення, при яких пара індексів трансформується в єдиний індекс відповідно до правила:  $\underline{11} \rightarrow 1$ ,  $\underline{22} \rightarrow 2$ ,  $\underline{33} \rightarrow 3$ ,  $\underline{23}$  та  $\underline{32} \rightarrow 4$ ,  $\underline{13}$  та  $\underline{31} \rightarrow 5$ ,  $\underline{12}$  та  $\underline{21} \rightarrow 6$ . Визначальні співвідношення для 1D гексогонального п'єзоелектричного КК в декартових координатах  $(x_1, x_2, x_3)$  мають вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ 0 & R_2 \\ R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 \\ 0 & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{31} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2R_3 \\ R_1 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

При цьому вважається, що  $(x_1, 0, x_2)$  збігається з площиною періодичності, а вісь  $x_3$  є квазі-періодичним напрямком. Рівняння рівноваги та геометричні рівняння у цьому випадку слідує з (3.2) та (3.3) відповідно. Слід зазначити, що для п'єзопасивного КК рівняння (3.28)-(3.30) узгоджуються із рівняннями (1.22).

Матриця  $\mathbf{G}$  з рівняння (3.27) без другого рядка і стовпчика має наступну структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} & ig_{35} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} & ig_{45} \\ g_{51} & ig_{53} & ig_{54} & ig_{55} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

де всі  $g_{ij}$  – дійсні і справедливі співвідношення  $g_{31} = -g_{13}$ ,  $g_{41} = -g_{14}$ ,  $g_{51} = -g_{15}$ ,  $g_{53} = g_{35}$ ,  $g_{43} = g_{34}$ ,  $g_{45} = g_{54}$ .

**3.3. Електрично непроникна тріщина в 1D гексагональному п'єзоелектричному КК.** Розглянемо тріщину  $-b \leq x_1 \leq b$ ,  $x_3 = 0$  в нескінченному 1D п'єзоелектричному КК просторі під дією фонових  $\sigma_{33} = \sigma^\infty$  і фазонних  $H_{33} = H_{33}^\infty$  напружень, а також електричних зміщень  $D_3 = D^\infty$  на нескінченності (рис 3.1). Вважається, що тріщина електрично непроникна, і всі поля не залежать від координати  $x_2$ .

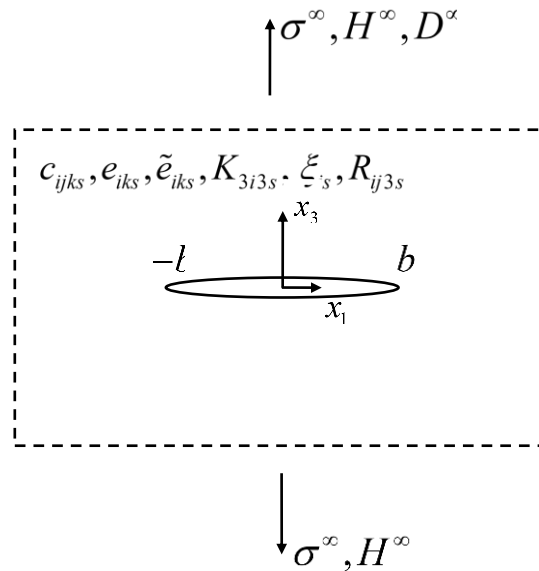


Рис. 3.1 Тріщина у п'єзоелектричному квазікристалі з електрично ізольованими берегами

У цьому випадку справедливі співвідношення (3.26), (3.27) і, крім того відсутні напруження зсуву  $\sigma_{13}$  та стрибок  $\langle u_1 \rangle$  зсувного переміщення уздовж всієї осі  $x_1$ . Це означає, що перші рівняння співвідношень (3.26), (3.27), а також перший рядок і стовпець матриці  $\mathbf{G}$  можна опустити. Тобто, замість матриці  $\mathbf{G}$  можна розглядати матрицю  $\mathbf{G}_0 = [G_{ij}]_{i,j=3,4,5}$ . Беручи до уваги, що у цьому випадку  $\bar{\mathbf{G}}_0 = -\mathbf{G}_0$  співвідношення (3.26), (3.27) можна представити у вигляді:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}_0 [\boldsymbol{\omega}^+(x_1) + \boldsymbol{\omega}^-(x_1)], \quad (3.32)$$

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \boldsymbol{\omega}^+(x_1) - \boldsymbol{\omega}^-(x_1), \quad (3.33)$$

де  $\mathbf{P}(x_1) = [\sigma_{33}(x_1, 0), D_3(x_1, 0), H_{33}(x_1, 0)]^T$ ,  $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{i,j=3,4,5}$  – матриця, що визначається характеристиками матеріалу,  $\boldsymbol{\omega}(z) = [\omega_3(z), \omega_4(z), \omega_5(z)]$  – вектор-функція, яка є аналітичною у всій площині з розрізом вздовж області тріщини,  $\mathbf{V}(x_1) = [u_3(x_1, 0), \phi(x_1, 0), W_3(x_1, 0)]^T$ .

Умови на осі  $x_1$  мають наступний вигляд:

$$\sigma_{33}^\pm = 0, \quad H_{33}^\pm = 0, \quad D_3^\pm = 0 \quad \text{для } b < x_1 < b, \quad (3.34)$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = 0, \langle H_{33} \rangle = 0, \langle u_3 \rangle = 0, \langle W_3 \rangle = 0, \langle \phi \rangle = 0, \langle D_3 \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (-b, b). \quad (3.35)$$

З урахуванням граничних умов (3.34), (3.35) за допомогою (3.32), (3.33) отримуємо таку векторну задачу лінійного спряження:

$$\boldsymbol{\omega}^+(x_1) + \boldsymbol{\omega}^-(x_1) = 0, \quad |x_1| \leq a, \quad (3.36)$$

З урахуванням (3.4) умови на нескінченності можуть бути записані у формі:

$$\boldsymbol{\omega}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0.5 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty, \quad (3.37)$$

$$\text{де } \mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, D^\infty, H_{33}^\infty]^T.$$

Умови однозначності фонон- та фазон-переміщень, а також електричного поля при обході контуру тріщини можуть бути записані у вигляді:

$$\int_{-b}^b [\boldsymbol{\omega}^+(x_1) - \boldsymbol{\omega}^-(x_1)] dx_1 = \mathbf{0}. \quad (3.38)$$

Згідно з [21] розв'язок задачі (3.36) за умов (3.37), (3.38) можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{\omega}(z) = 0.5 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - b^2}}. \quad (3.39)$$

Підставляючи (3.39) в (3.32), отримуємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{P}^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} \text{ для } x_1 > b. \quad (3.40)$$

З рівнянь (3.33) та (3.39) витікає:

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = i \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty \sqrt{b^2 - x_1^2} \text{ для } b < x_1 < b. \quad (3.41)$$

Інтегрування (3.41) приводить до наступного виразу:

$$\langle \mathbf{V}(x_1) \rangle = 4 \Lambda \mathbf{P}^\infty \sqrt{b^2 - x_1^2} \text{ для } b < x_1 < b, \quad (3.42)$$

$$\text{де } \Lambda = i \mathbf{G}_0^{-1} / 4.$$

Вектор коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в точці  $b$  визначається як:

$$\mathbf{K} = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0), \quad (3.43)$$

$$\text{де } \mathbf{K} = [K_1, K_4, K_5]^T$$

З використанням формули (3.40) отримуємо:

$$\mathbf{K} = \sqrt{\pi b} \mathbf{P}^\infty. \quad (3.44)$$

### 3.4. Чисельні результати та їх обговорення.

Розглянемо 1D п'єзоелектричний КК з наступними фізичними характеристиками [116]:

**Таблиця 3.1.** Фізичні характеристики одномірного квазікристала

Фононні пружні константи (ГПа)	$c_{11} = 150, c_{12} = 100, c_{13} = 90,$ $c_{33} = 130, c_{44} = 50$
Фазонні пружні константи (ГПа)	$K_1 = 0.18, K_2 = 0.3$
Константи зв'язку фононних і фазонних полів (ГПа)	$R_1 = -1.50, R_2 = 1.20, R_3 = 1.20$
П'єзоелектричні константи ( $Kл \times м^{-2}$ )	$e_{31} = \tilde{e}_{15} = -0.160, e_{33} = 0.347,$ $e_{15} = -0.138, \tilde{e}_{33} = 0.350$
Діелектричні константи ( $10^{-9} Кл^2 Н^{-1} м^{-2}$ )	$\xi_{11} = 0.0826, \xi_{33} = 0.0903$

Вважаємо, що тріщина має довжину  $10 мм$ ,  $H_{33}^\infty = 0$ ,  $D^\infty = 0$ , а значення  $\sigma^\infty$  варіюються. На Рис. 3.2 і 3.3 наведені графіки зміни фононного розкриття тріщини  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle [м]$  вздовж її довжини та нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0) [Па]$  на її продовженні для  $\sigma^\infty = 10 МПа$  (крива I),  $9 МПа$  (II) і  $8 МПа$  (III). Видно, що напруження різко зростають при наближенні до вершини тріщини. Це пояснюється тією обставиною, що вказані напруження мають кореневу особливість у вершинах тріщини.

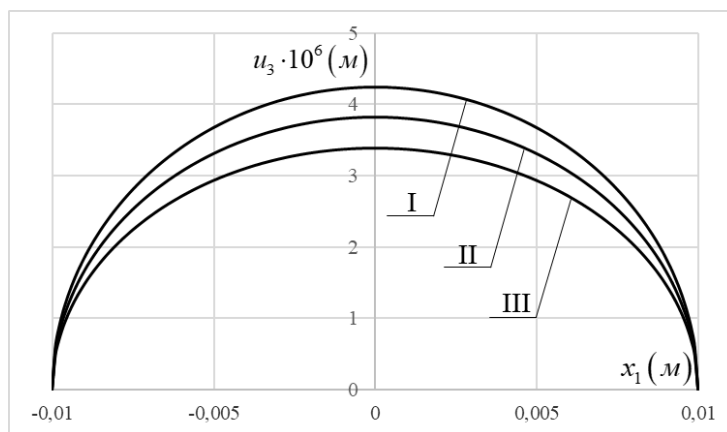


Рис. 3.2 Зміна фазонного розкриття тріщини  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$   
вздовж її довжини

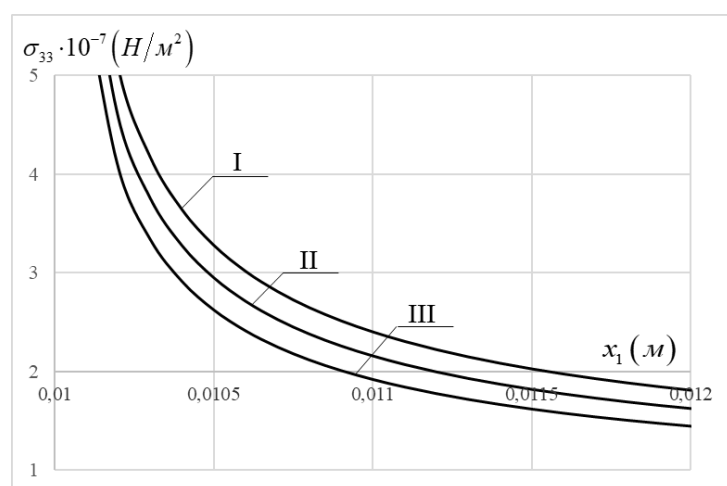


Рис. 3.3 Поведінка нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0)$  на продовженні  
тріщини при різних рівнях зовнішнього навантаження

На Рис. 3.4 і 3.5 для тріщини тієї ж довжини наведені графіки зміни фазонного розкриття тріщини  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle [m]$  вздовж її правої половини та фазонного напруження  $H_{33}(x_1, 0) [Pa]$  справа від вершини тріщини для  $\sigma^\infty = 0$ ,  $D^\infty = 0$  і  $H_{33}^\infty = 4 MPa$ , (крива I),  $3.6 MPa$  (II) і  $3.2 MPa$  (III). Видно, що поведінка фазонного розкриття тріщини подібна поведінці її фазонного розкриття, тільки амплітуди цих розкриттів є різними.



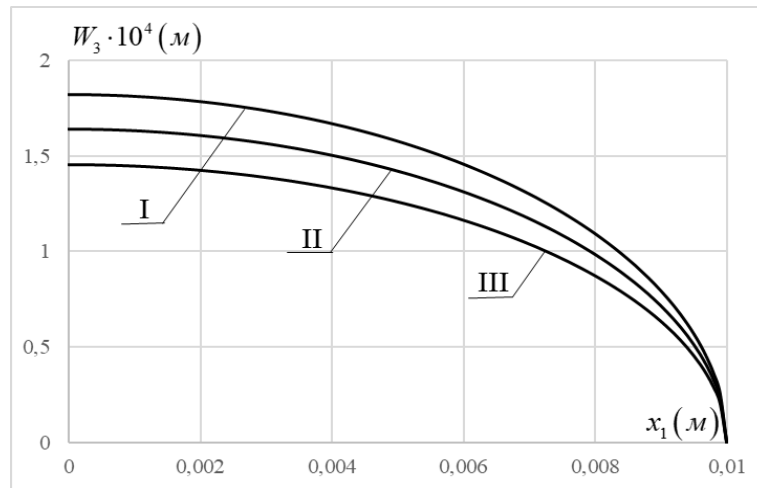


Рис. 3.4 Варіація фазонного розкриття тріщини  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$

вздовж її правої частини для різних значень  $H_{33}^\infty$

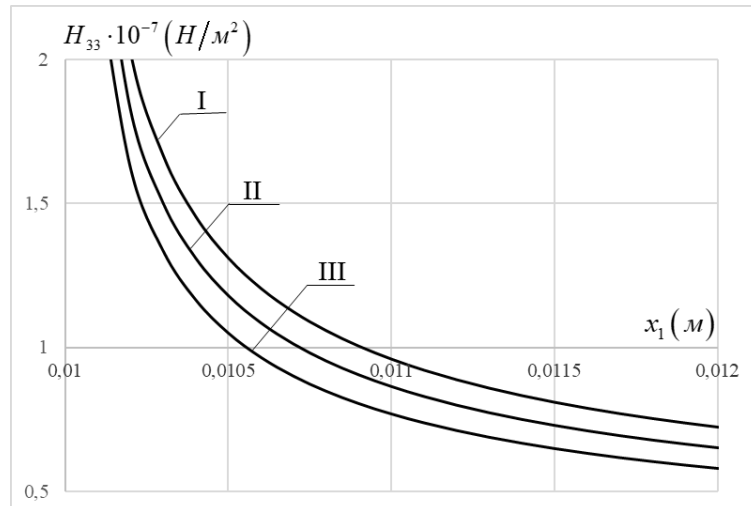


Рис. 3.5 Варіація фазонного напруження  $H_{33}(x_1, 0)$  на продовженні тріщини

### 3.5. Електрично проникна тріщина між двома різними 1D гексагональними п'єзоелектричними квазікрystalами.

Розглянемо плоску задачу для тріщини  $-b \leq x_1 \leq b$ ,  $x_3 = 0$  на інтерфейсі між двома напівнескінченими 1D п'єзоелектричними КК півпросторами (рис. 3.5). Вважається, що на нескінченності діють рівномірно розподілені фононні  $(\sigma^\infty, \tau^\infty)$  і фазонні  $H^\infty$  напруження, а також електричні зміщення

$D_3 = D^\infty$  (рис 1). Вважається, що тріщина електрично проникна і всі поля не залежать від координати  $x_2$ .

У цьому випадку справедливі співвідношення (3.26), (3.27), матриця  $\mathbf{G}$  в яких визначається з рівняння (3.9). Граничні умови на інтерфейсі в такому випадку записуються у наступній формі:

$$\sigma_{13}^\pm = 0, \sigma_{33}^\pm = 0, H_{33}^\pm = 0, \langle \varphi \rangle = 0, \langle D_3 \rangle = 0 \text{ для } -b < x_1 < b \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{13} \rangle = 0, \langle \sigma_{33} \rangle = 0, \langle H_{33} \rangle = 0, \langle u_1 \rangle = 0, \langle u_3 \rangle = 0, \langle W_3 \rangle = 0, \\ \langle \varphi \rangle = 0, \langle D_3 \rangle = 0 \text{ для } x_1 \notin (-b, b), \end{aligned} \quad (3.46)$$

де  $\langle f \rangle$  означає стрибок функції  $f$  через матеріальний інтерфейс.

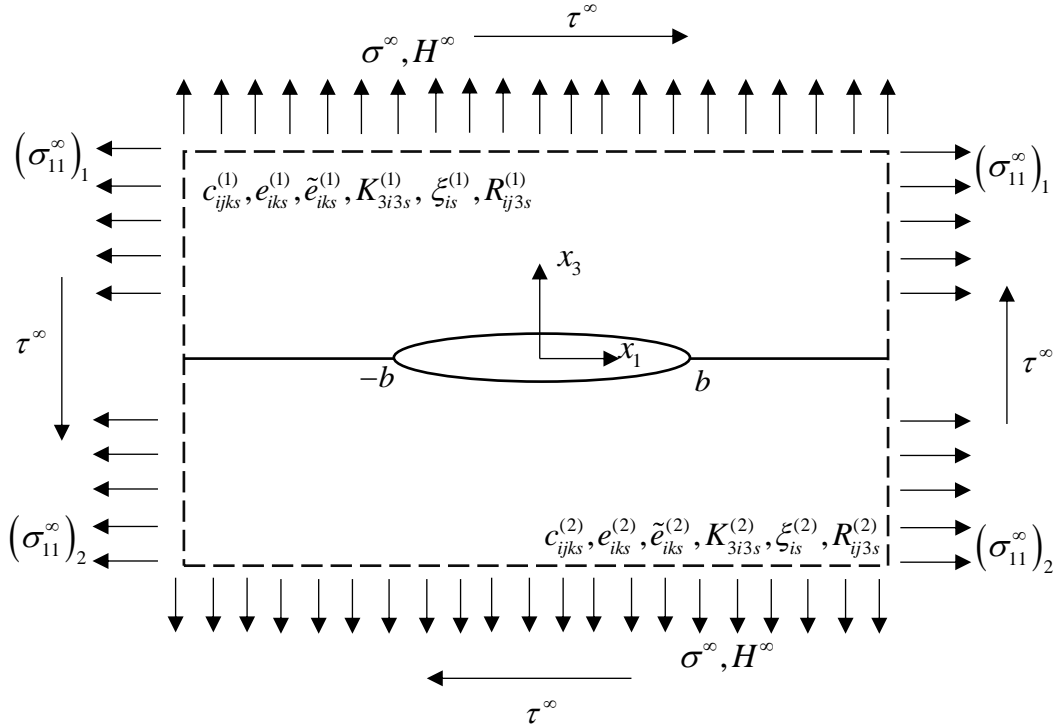


Рис 3.5 Тріщина між двома одномірними квазікрystalами з п'єзoeлектричним ефектом

З урахування останніх двох рівнянь (3.45) та (3.46) та приймаючи до уваги (3.26), маємо:

$$\langle \varphi' \rangle = \langle V_4'(x_1) \rangle = \omega_4^+(x_1) - \omega_4^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (-\infty; \infty)$$

Це дозволяє вважати, що функція  $\omega_4(z)$  аналітична у всій площині, отже

$$\omega_4(z) = \omega_4^0 = \text{const}.$$

Оскільки для  $x_1 \notin (-b, b)$ , маємо  $\omega^+(x_1) = \omega^-(x_1) = \omega(x_1)$ , то з рівності (3.27) витікає:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})\omega(x_1) \text{ для } x_1 \notin (-b, b). \quad (3.47)$$

Це означає, що

$$\mathbf{t}^\infty = \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow \infty} = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})\omega(x_1) \Big|_{z \rightarrow \infty} \quad (3.48)$$

де  $\mathbf{t}^\infty = \{\tau^\infty, \sigma^\infty, D^\infty, H^\infty\}$ .

З рівняння (3.48) можемо записати:

$$\omega(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{t}^\infty, \quad (3.49)$$

а отже

$$\omega_4^0 = \left\{ (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{t}^\infty \right\}_4$$

являє собою четверту компоненту вектора (3.49).

Введемо наступні вектори:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{33} \\ H_{31} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_5 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_5 \end{Bmatrix}, \text{ та матрицю } \boldsymbol{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} & \rho_{15} \\ \rho_{31} & \rho_{33} & \rho_{35} \\ \rho_{51} & \rho_{53} & \rho_{55} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

з компонентами  $e_1 = 0$ ,  $e_3 = 2G_{34}\omega_{40}$ ,  $e_5 = 2G_{54}\omega_{40}$ ,  $\Psi_i = \omega_i$ ,  $\rho_{ij} = G_{ij}$  ( $i, j = 1, 3, 5$ ) . Тепер представлення (3.27) без другої та четвертої компоненти може бути записане в формі

$$\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\Psi^+(x_1) - \bar{\mathbf{R}}\Psi^-(x_1). \quad (3.51)$$

Далі перетворення рівності (3.51) буде виконано аналогічно з випадком електромеханічного навантаження [58]. Вводячи однорядкову матрицю  $\mathbf{S} = [S_1, S_3, S_5]$ , розглядаючи результат множення векторів  $\mathbf{S}\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0)$  та використовуючи (3.27) та (3.51), отримуємо наступні співвідношення:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5}H_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Omega_j^+(x_1) + \gamma\Omega_j^-(x_1) + \eta_j, \quad (3.52)$$

$$n_{j1}\langle u'_1(x_1) \rangle + in_{j3}\langle u'_3(x_1) \rangle + in_{j5}\langle W'_3(x_1) \rangle = \Omega_j^+(x_1) - \Omega_j^-(x_1), \quad (3.53)$$

де

$$\Omega_j(z) = n_{j1}\Psi_1(z) + i\{n_{j3}\Psi_3(z) + n_{j5}\Psi_5(z)\}, \quad (3.54)$$

$\eta_j = \mathbf{S}_j \mathbf{e} = 2(G_{34} + m_{j3}G_{54})W_{40}$ ,  $m_{j5} = S_{j5}$ ,  $m_{j1} = -iS_{j1}$ ,  $n_{j1} = Y_{j1}$ ,  $n_{j3} = -iY_{j3}$ ,  $n_{j5} = -iY_{j5}$  та  $m_{jl}$ ,  $n_{il}$  ( $l = 1, 3, 5$ ) є дійсними,  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{p}$ . Тим більше,  $\gamma_j$  та  $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j5}]$  ( $j = 1, 3, 5$ ) є власними значення та власними векторами матриці  $(\gamma \mathbf{p}^T + \bar{\mathbf{p}}^T)$ .

Корені рівняння  $\det(\gamma \mathbf{p}^T + \bar{\mathbf{p}}^T) = 0$  можуть бути представлені у формі:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_5 = 1, \quad (3.55)$$

де

$$\delta^2 = \frac{g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{55} - 2g_{15} g_{13} g_{35}}{g_{11}(g_{33} g_{55} - g_{35}^2)}. \quad (3.56)$$

Показано, що умова  $\delta^2 > 0$  виконується для усіх проаналізованих біматеріальних КК, причому згадані вище коефіцієнти  $m_{jl}$ ,  $n_{il}$  дійсні.

Враховуючи, що для  $x_1 \notin (-b, b)$  справедливі співвідношення  $\Omega_j^+(x_1) = \Omega_j^-(x_1) = \Omega_j(x_1)$ , маємо:

$$(1 + \gamma_j) \Omega_j(x_1) = \mathbf{S}_j \mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \rightarrow \infty \quad (3.57)$$

Але врахувавши також, що функція  $\Omega_j(z)$  аналітична на всій площині крім  $-b < x_1 < b$   $x_2 = 0$ , та використовуючи представлення  $\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) = [\tau^\infty, \sigma^\infty, H^\infty]^T$  для  $x_1 \rightarrow \infty$ , одержуємо:

$$\Omega_j(z) = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}H^\infty - \eta_j) \text{ для } z \rightarrow \infty \quad (3.58)$$

Вводячи нову функцію:

$$\Theta_j(z) = \Omega_j(z) + (1 + \gamma_j)^{-1} \eta_j, \quad (3.59)$$

співвідношення (3.52), (3.53) та (3.58) можна записати в наступній формі:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5}H_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Theta_j^+(x_1) + \gamma_j\Theta_j^-(x_1), \quad (3.60)$$

$$n_{j1}\langle u_1'(x_1) \rangle + in_{j3}\langle u_3'(x_1) \rangle + in_{j5}\langle W_3'(x_1) \rangle = \Theta_j^+(x_1) - \Theta_j^-(x_1), \quad (3.61)$$

$$\Theta_j(z)|_{z \rightarrow \infty} = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}H^\infty - \eta_j). \quad (3.62)$$

Задовольняючи граничним умовам (3.45) на інтерфейсі і використовуючи (3.60), приходимо до задачі Рімана:

$$\Theta_j^+(x_1) + \gamma_j\Theta_j^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (-b, b) \quad (3.63)$$

разом із співвідношеннями на нескінченності (3.62).

Відповідно до в [21] розв'язок задачі (3.63) з умовою (3.62) отримуємо в формі:

$$\Theta_j(z) = X_j(z) (\sigma_j^* - i\tau_j^*) (z - 2ib\varepsilon_j),$$

$$\text{де } X_j(z) = (z+b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (z-b)^{-1/2+i\varepsilon_j}, \quad \sigma_j^* = \frac{1}{r_j} (\sigma^\infty + m_{j5} H^\infty), \quad \tau_j^* = -m_{j1} \tau^\infty / r_j,$$

$$r_j = (1 + \gamma_j), \quad \varepsilon_j = \ln \gamma_j / 2\pi, \quad j = 1, 3, 5.$$

### 3.6. Визначення фононних та фазонних стрибків переміщень та напружень.

Підставляючи (3.63) в співвідношення (3.61), отримаємо:

$$\begin{aligned} & n_{j1} \langle u'_1(x_1, 0) \rangle + i \{ n_{j3} \langle u'_3(x_1, 0) \rangle + n_{j5} \langle W'_3(x_1, 0) \rangle \} = \\ & = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (\sigma_j^* - i\tau_j^*) (x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (x_1 - b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (x_1 - 2ib\varepsilon_j) \quad (j = 1, 3, 5) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Проінтегрувавши рівняння (3.64), отримуємо формулу:

$$\begin{aligned} & n_{j1} \langle u_1(x_1, 0) \rangle + i \{ n_{j3} \langle u_3(x_1, 0) \rangle + n_{j5} \langle W_3(x_1, 0) \rangle \} = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (\sigma_j^* - i\tau_j^*) \times \\ & \times \left( \frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\varepsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} (x_1 - 2ib\varepsilon_j) \quad \text{для } x_1 \in (-b, b) \quad (j = 1, 3, 5) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Аналіз показує, що для розглянутого класу КК справедливі співвідношення:  $n_{51} = 0$ ,  $\varepsilon_5 = 0$ ,  $\gamma_5 = 1$ . Тоді з (3.65) можна вивести наступні співвідношення:

$$n_{13} \langle u_3(x_1, 0) \rangle + n_{15} \langle W_3(x_1, 0) \rangle = \text{Im} \left\{ \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (\sigma_1^* - i\tau_1^*) \left( \frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\varepsilon_1} \sqrt{x_1^2 - b^2} \right\}, \quad (3.66)$$

$$n_{53} \langle u_3(x_1, 0) \rangle + n_{55} \langle W_3(x_1, 0) \rangle = -2i (\sigma_5^* - i\tau_5^*) \sqrt{x_1^2 - b^2} \quad (3.67)$$

для  $x_1 \in (-b, b)$ .

Отримані співвідношення можна розглядати як систему лінійних алгебричних рівнянь відносно  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$  та  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$ , яка дає такий розв'язок:

$$\begin{aligned}\langle u_3(x_1, 0) \rangle &= \Delta^{-1} \{ n_{55} H_1(x_1) - n_{15} H_2(x_1) \}, \\ \langle W_3(x_1, 0) \rangle &= \Delta^{-1} \{ -n_{53} H_1(x_1) + n_{13} H_2(x_1) \},\end{aligned}\tag{3.68}$$

$$\text{де } H_1(x_1) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (\sigma_1^* \cos \alpha - \tau_1^* \sin \alpha) \sqrt{x_1^2 - b^2}, \quad H_2(x_1) = 2\sigma_5^* \sqrt{b^2 - x_1^2},$$

$$\alpha = \varepsilon_1 \ln \left( \frac{b + x_1}{b - x_1} \right), \quad \Delta = n_{13} n_{55} - n_{53} n_{15}.$$

За допомогою співвідношень (3.59) та (3.63) і з врахуванням властивостей матриці  $\mathbf{m}$  фонон-фазонні напруження для  $x_1 > b$  можемо записати в формі:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{15} H_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = (1 + \gamma_j) (\sigma_1^* - i\tau_1^*) (x_1 - 2ib\varepsilon_j) (x_1 + b)^{-1/2 + i\varepsilon_j} (x_1 - b)^{-1/2 + i\varepsilon_j} + m_{15} H^\infty\end{aligned}\tag{3.69}$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{55} H_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{2\sigma_5^* x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + m_{55} H^\infty.\tag{3.70}$$

Напруження зсуву  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  може бути знайдене безпосередньо з (3.69), а (3.70) та дійсна частина (3.69) складають систему двох лінійних алгебричних рівнянь відносно  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ ,  $H_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ , з якої ці функції можна легко знайти.

Коефіцієнти інтенсивності напружень в точці  $b$  визначимо у відповідності до [58]:

$$\begin{aligned}K_1 + m_{15} K_5 + im_{11} K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} (x_1 - b)^{i\varepsilon_1} \\ \times \left[ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{15} H_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \right]\end{aligned}\tag{3.71}$$

$$K_1 + m_{55} K_5 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \left[ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{55} H_{33}^{(1)}(x_1, 0) \right]\tag{3.72}$$

Використовуючи (3.69) та (3.70), для  $x_1 \rightarrow b + 0$  отримаємо:

$$K_1 + m_{15}K_5 - im_{11}K_2 = \sqrt{\frac{l\pi}{2}}(1 - 2i\varepsilon_1) \left[ \sigma^\infty + m_{15}H^\infty + im_{11}\tau^\infty \right] e^{i\psi} \quad (3.73)$$

$$K_1 + m_{55}K_5 = \sqrt{\frac{l\pi}{2}} \left[ \sigma^\infty + m_{55}H^\infty \right] \quad (3.74)$$

де  $\psi = \varepsilon \ln l$ ,  $a = \frac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}$  та  $l = 2b$  – довжина тріщини. З формул (3.73), (3.74)

можна легко вивести аналітичні вирази для  $K_1$ ,  $K_2$  та  $K_5$ .

У деяких випадках важливо знати розподіл фононних і фазонних компонент по всій біматеріальній області. Розглядаючи для досягнення цього результату співвідношенн (3.16) та (3.25), можемо записати:

$$\mathbf{t}^{(m)}(x_1, x_3) = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{B}^{(m)} \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\omega}(z) \right\}, (m = 1, 2), \quad (3.75)$$

$$\text{де } \mathbf{\Lambda} = \begin{cases} D^{-1} & \text{для } x_3 > 0 \\ -\bar{D}^{-1} & \text{для } x_3 < 0 \end{cases}$$

Використовуючи представлення (3.50) та (3.54), отримаємо:

$$\omega_i(z) = \sum_{j=1,3,5} \mathbf{k}_{ij} \Omega_j(z), (i = 1, 3, 5), \quad (3.76)$$

$$\text{де } \mathbf{k} = \mathbf{n}_0^{-1}, \mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{11} & in_{13} & in_{15} \\ n_{31} & in_{33} & in_{35} \\ n_{51} & in_{53} & in_{55} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи що  $\omega_4(z) = \omega_4^0$ , співвідношення (3.75) запишемо в розширеному вигляді:

$$t_i^{(m)}(x_1, x_3) = 2\text{Re} \left\{ \sum_{l=1,3,5} \left[ \Pi_{il}^{(m)} \Omega_l(z_l^{(m)}) \right] + \omega_4^0 \sum_{j=1,3,4,5} \left( \Lambda_{j4} B_{ij}^{(m)} \right) \right\}, (i = 1, 3, 5) \quad (3.77)$$



$$\text{де } \Pi_{il}^{(m)} = \sum_{j=1,3,4,5} B_{ij}^{(m)} \sum_{k=1,3,5} \Lambda_{jk} k_{kl}.$$

Необхідні для нас вирази для фононного та фазонного напруження можна отримати з формули (3.77) у будь-якій частині верхньої ( $m=1$ ) та нижньої ( $m=2$ ) півплощини.

### 3.7. Чисельний розв'язок для біматеріалу з тріщиною.

Для чисельної ілюстрації отриманих результатів розглянемо квазікристали для нижнього та верхнього півпростору з різними характеристиками [116], наведеними в таблиці 3.2.

**Таблиця 3.2.** Характеристики нижнього та верхнього матеріалів.

	Нижній матеріал	Верхній матеріал
Фононні пружні константи (ГПа)	$c_{11} = 234.33,$ $c_{12} = 57.41, c_{13} = 66.63,$ $c_{33} = 232.22,$ $c_{44} = 70.19$	$c_{11} = 150, c_{12} = 100,$ $c_{13} = 90,$ $c_{33} = 130, c_{44} = 50$
Фазонні пружні константи (ГПа)	$K_1 = 122, K_2 = 24$	$K_1 = 0.18, K_2 = 0.3$
Константи зв'язку фононних і фазонних полів (ГПа)	$R_1 = R_2 = R_3 = 0.8846$	$R_1 = -1.50, R_2 = 1.20,$ $R_3 = 1.20$
П'єзoeлектричні константи ( $Kл \times м^{-2}$ )	$e_{31} = -4.4, e_{33} = 18.6,$ $e_{15} = 11.6, \tilde{e}_{15} = 1.16,$ $\tilde{e}_{33} = 1.86$	$e_{31} = \tilde{e}_{15} = -0.160,$ $e_{33} = 0.347,$ $e_{15} = -0.138,$ $\tilde{e}_{33} = 0.350$
Діелектричні константи ( $10^{-9} Kл^2 H^{-1} м^{-2}$ )	$\xi_{11} = 5, \xi_{33} = 10$	$\xi_{11} = 0.0826,$ $\xi_{33} = 0.0903$

У таблиці 3.3 наведено значення КІН, отримані із співвідношень (3.73), (3.74) для різних варіантів зовнішнього фононного навантаження при  $H^\infty = 0$ ,  $b = 10\text{mm}$ . З другого і третього рядків цієї таблиці видно, що на відміну від тріщини в однорідному КК, кожен окремий ненульовий компонент зовнішнього впливу призводить до ненульових значень всіх КІН.

**Таблиця 3.3.** Значення для КІН  $K_1$ ,  $K_2$  та  $K_5$  для різних варіантів зовнішнього навантаження

	$K_1 [N / m^{3/2}]$	$K_2 [N / m^{3/2}]$	$K_5 [N / m^{3/2}]$
$\sigma^\infty = 10\text{MPa}, \tau^\infty = 0$	$1,77112 \cdot 10^6$	32760.8	-520.313
$\sigma^\infty = 0, \tau^\infty = 10\text{MPa}$	-160010.	$1,69521 \cdot 10^6$	-62910.1
$\sigma^\infty = 0.90344\text{MPa},$ $\tau^\infty = 10\text{MPa}$	$\approx 0$	$1,69817 \cdot 10^6$	-62436.8
$\sigma^\infty = 10\text{MPa},$ $\tau^\infty = -0.19325\text{MPa}$	$1,77421 \cdot 10^6$	$\approx 0$	685.37
$\sigma^\infty = 10\text{MPa},$ $\tau^\infty = -0.08270\text{MPa}$	$1,77244 \cdot 10^6$	18740	$\approx 0$

Через лінійність розглянутої задачі, КІН для інших значень  $\sigma^\infty$ ,  $\tau^\infty$  можуть бути отримані простими лінійними комбінаціями отриманих результатів. Окремі випадки таких комбінацій, що призводять до нульових коефіцієнтів інтенсивності напружень окремих компонентів поля, наведені в рядках 4-6 таблиці 3.3. З представлених результатів видно, що напруження зсуву має більш істотний вплив на коефіцієнт інтенсивності фазонних напружень, ніж нормальне напруження.

На рис. 3.6 представлені варіації нормального стрибка фононних переміщень  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$  берегів тріщини для  $\sigma^\infty = 10\text{MPa}$  і  $b = 10\text{mm}$ . Лінії I, II і III відповідають  $H^\infty$  рівним 2 МПа, 1 МПа та 0 МПа відповідно. З цього

рисунка видно, що прикладання додатного нормального фазонного напруження збільшує фоновне відкриття тріщини.

Аналогічні результати для стрибка фазонних переміщень  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$  при тому ж навантаженні і довжині тріщини, що і на рис. 3.6, наведені на рис. 3.7. Лініям I, II і III також відповідають значення навантаження  $H^\infty$  рівні 0 МПа, 1 МПа та 2 МПа. З представленого графіка видно, що додатне нормальне фоновне напруження викликає від'ємне значення стрибка фазоного переміщення (лінія I), а додаткове додатне фазонне напруження  $H^\infty$  коригує цей стрибок переміщень до позитивних значень.

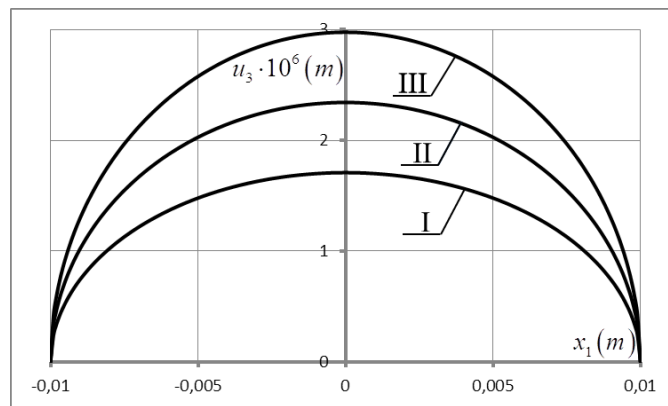


Рис 3.6 Варіації стрибків нормальних фоновних переміщень  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$

уздовж області тріщини для  $\sigma^\infty = 10 MPa$  та різних значень  $H^\infty$ .

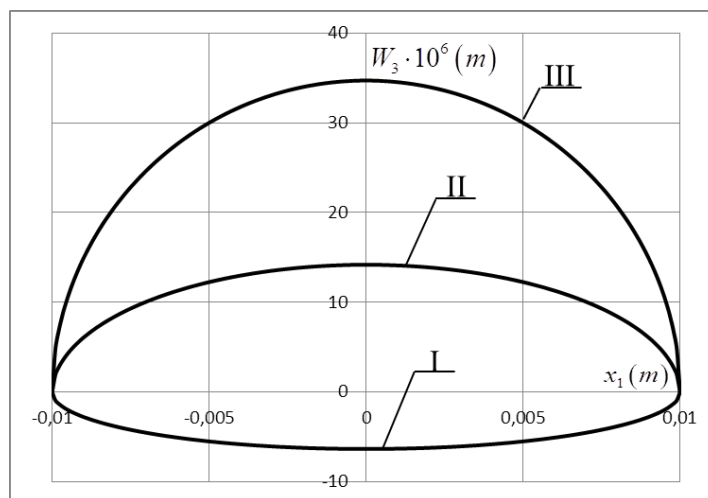


Рис 3.7 Стрибок фазонних переміщень  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$  для тієї ж тріщини і навантажень, що і на рис.3.6

Стрибок фазонних переміщень  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$  для  $\sigma^\infty = 10 \text{ МПа}$ ,  $b = 10 \text{ мм}$  і різних значень зсувних напружень  $\tau^\infty$  наведені на рис. 3.8. Лінії I, II і III відповідають  $\tau^\infty$  рівним  $0 \text{ МПа}$ ,  $5 \text{ МПа}$  та  $10 \text{ МПа}$  відповідно. З цього рисунка видно, що стрибок фазонних переміщень симетричний для  $\tau^\infty = 0$  (лінія I), але прикладення ненульового зсувного напруження того ж порядку, що і  $\sigma^\infty$  помірно впливає на цей стрибок переміщень, що призводить до втрати симетрії (лінії II і III).

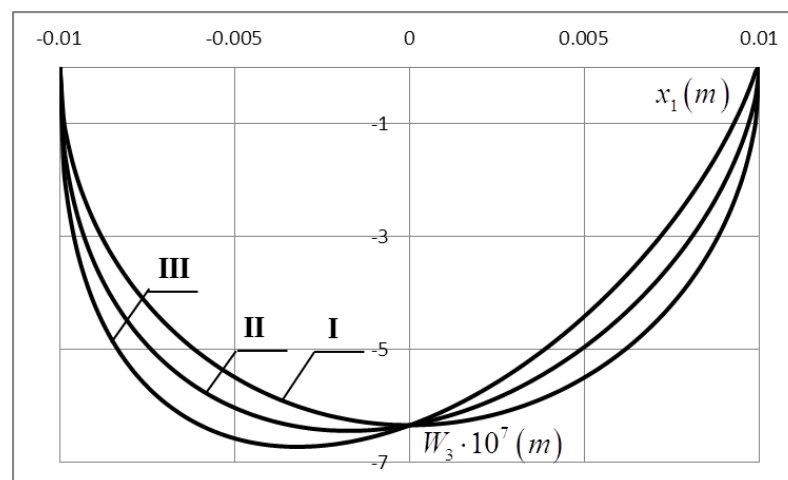


Рис. 3.8 Стрибок фазонних переміщень  $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$  для змішаного фонов навантаження

З формул (3.64) – (3.67) видно, що стрибки переміщень мають осциляційний характер. Це означає, що деякі зони взаємопроникнення берегів тріщини мають місце біля її вершини. Для  $\tau^\infty = 0$  ці зони вкрай малі, і вони непомітні на рисунку 3.6. Однак зі збільшенням абсолютних значень  $\tau^\infty$  одна з цих зон зростає, а інша зменшується. Ілюстрація більшої зони взаємопроникнення для нормального фонов переміщення наведена на рис. 3.9. Графіки побудовано для  $b = 0.1 \text{ м}$ ,  $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$  і  $\tau^\infty$  рівного  $0$  (лінія I),

$-40 \text{ MPa}$  (II),  $-70 \text{ MPa}$  (III) і  $-100 \text{ MPa}$  (IV). Легко бачити, що видимі зони взаємопроникнень берегів тріщин з'являються тільки для великих значень зсувного фонного навантаження. Тому в більшості випадків розглянута модель, навіть якщо вона не враховує контактні зони на берегах тріщин, може бути використана в сенсі, запропонованому в статті [83].

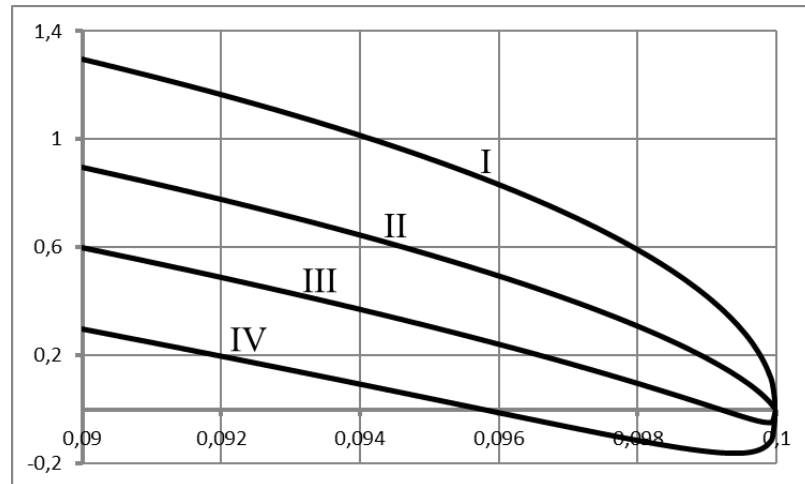


Рис 3.9 Стрибок фононних переміщень  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$  в околі правої вершини тріщини для відносно великого фонн зсувного поля

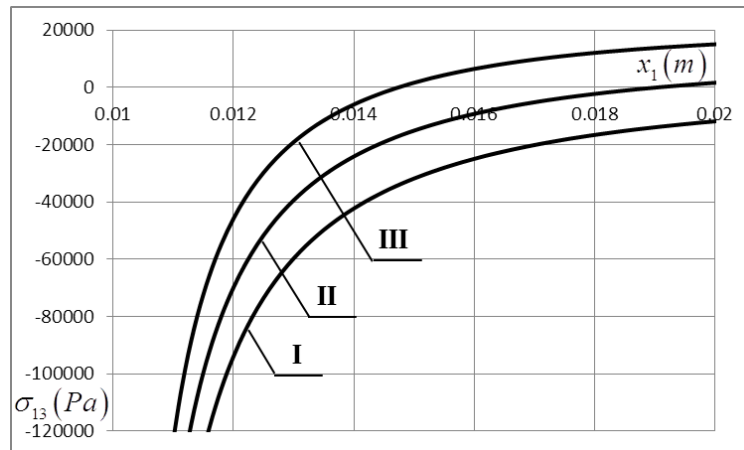


Рис. 3.10 Варіація фононного зсувного напруження  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  на продовженні правої вершини тріщини для  $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  і різних  $\tau^\infty$

На рис. 3.10 представлено варіацію зсувного фононного напруження  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  на продовження правої вершини тріщини для  $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$ ,

$b = 10\text{ mm}$  і різних  $\tau^\infty$ . Лінії I, II і III відповідають  $\tau^\infty$  рівним 0, 0.01 MPa і 0.02 MPa, відповідно. На цьому графіку видно, що відносно невеликі значення  $\tau^\infty$  по відношенню до  $\sigma^\infty$  мають досить значний вплив на зсувне напруження в околі вершини тріщини.

### 3.8. Висновки до третього розділу.

Розглянуто плоску задачу для тунельної електропроникної тріщини  $-b \leq x_1 \leq b$ ,  $x_3 = 0$  вздовж межі розділу між двома зв'язаними напівнескінченими просторами, виготовленими із одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних матеріалів. Вважається, що розташування атомів є періодичним у площині  $x_1, x_2$  та квазіперіодичним у  $x_3$ -напрямку і до того ж остання вісь представляє напрямок поляризації. На нескінченності можуть бути задані рівномірно розподілені фононні нормальні та зсувні напруження, а також фазонні напруження та електричні зміщення.

Отримані матрично-векторні представлення (3.26), (3.27) для фононних і фазонних напружень і електричного зміщення, а також для похідних від стрибків фононних і фазонних переміщень та електричних потенціалів через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, за винятком області тріщини. Виключаючи з цих співвідношень антиплоскі компоненти та враховуючи електричну проникність вздовж всієї межі розділу, ці представлення спрощено та представлено у формі (3.32), (3.33), а пізніше як (3.60), (3.61). Використовуючи ці співвідношення та задовольняючи умови на берегах тріщин, формулюється задача лінійного спряження Гільберта-Рімана (3.36) та (3.63) для електрично ізолюваної та електрично проникної тріщин, відповідно. Отримано точні розв'язки цих задач. Наведено прості аналітичні вирази для фононних і фазонних стрибків переміщень вздовж області тріщини, а також фононних і фазонних напружень вздовж зв'язаних частин поверхні розділу матеріалів, а також їх коефіцієнти інтенсивності.

Чисельний аналіз проведено для комбінації різних КК. Отримані результати для фононних і фазонних компонентів вздовж межі поділу представлені у вигляді таблиць і графіків, а також отримано аналітично та проілюстровано графічно їх поведінку поза межами поділу. З цих даних можна зробити наступні важливі висновки:

- на відміну від тріщини в однорідному КК матеріалі, кожна окрема ненульова фононна компонента навантаження створює ненульові значення всіх коефіцієнтів інтенсивності напружень для біматеріального випадку;

- кожна складова фононного напруження викликає фазонне напруження та стрибок переміщення, а вплив фононного напруження зсуву на коефіцієнт інтенсивності фазонного напруження більш чутливий, ніж вплив нормального.

Зауважимо, що навіть незважаючи на те, що в розглянутій моделі тріщини на межі розділу виникає осциляційна сингулярність, зона взаємопроникнення берегів тріщини надзвичайно мала для більшості навантажень. Ці зони стають більш помітними лише для дуже великого фононного поля зсуву.

Отримані такожі результати для часткового випадку дуже близьких фізичних характеристик нижньої та верхньої складових КК біматеріалу. Їх порівняння з результатами, отриманими для відповідного однорідного КК виявило хорошу узгодженість цих результатів.

## РОЗДІЛ IV. ДОСЛІДЖЕННЯ РУХОМОЇ ТРІЩИНИ В АНІЗОТРОПНОМУ МАТЕРІАЛІ

**4.1. Постановка задачі для рухомої тріщини.** В цьому розділі реалізуємо метод знаходження напружень безпосередньо перед фронтом тріщини скінченої довжини, яка рухається з усталеною швидкістю, меншою за критичну швидкість. Тріщина знаходиться в ортотропному просторі, під дією зосередженого навантаження прикладеного до її берегів, яке рухається разом з тріщиною (рис. 4.1). Пружні властивості простору визначаються елементами матриці коефіцієнтів жорсткості.

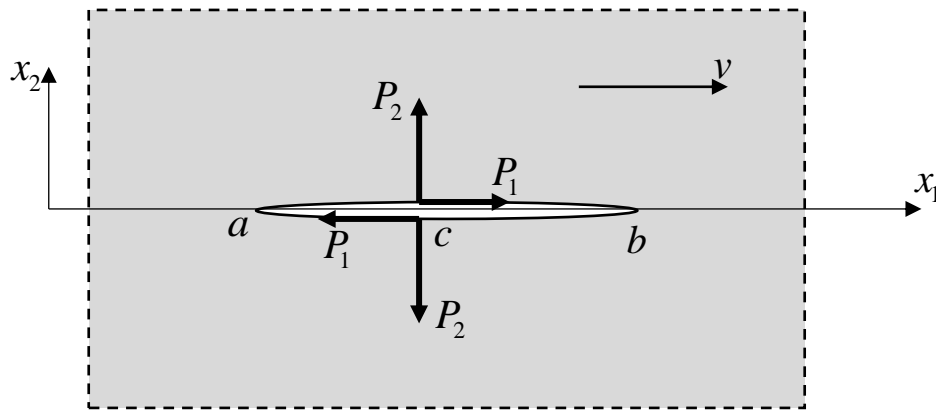


Рис. 4.1 Тріщина, що рухається в ортотропному матеріалі

Рівняння руху для ортотропного матеріалу в нерухомій системі координат  $(X_1, X_2, X_3)$ , згідно до [19] мають наступний вигляд:

$$C_{ijsl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial X_l \partial X_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j, s, l = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

де  $C_{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталих для анізотропного матеріалу, а  $\rho$  – густина матеріалу. Тут і в подальшому проводиться додавання по індексам, що повторюються.

Визначальні співвідношення для анізотропного матеріалу задаються узагальненим законом Гука:



$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial X_l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

та співвідношеннями Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Граничні умови на берегах тріщини:

$$\sigma_{2i} = -P_i \delta(X_1 - vt - c), \quad i = 1, 2, \quad x_1 \in (a, b) \quad (4.4)$$

де  $\delta(X_1 - vt - c)$  – дельта-функція Дірака.

**4.2. Аналітичний розв’язок задачі для рухомої тріщини.** Розглянемо тріщину в ортотропному просторі, що рухається усталено зі швидкістю  $v < v_c$ , де  $v_c$  – критична швидкість (Рис. 4.1). Рухома тріщина, що розглядається, є ідеалізацією моделі, запропонованою Іоффе [103]. Ця ідеалізація є доцільною при вивченні локальних особливостей напружено-деформівного стану біля вершини усталено рухомої тріщини, що детально показано в роботі [91].

Зробимо заміну координат  $x_1 = X_1 - vt$ ,  $x_2 = X_2$ . Тоді рівняння (3.1) набуває наступного вигляду:

$$c_{ijsl}(v) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_l \partial x_j} = 0, \quad i, j, s, l = 1, 2, \quad (4.5)$$

де  $c_{ijsl}(v) = C_{ijsl} - \rho v^2 \delta_{1j} \delta_{1l} \delta_{is}$ ,  $\delta_{mn}$  – символ Кронекера.

Вважаємо справедливими наступні рівності, які вірні як для заданого, так і для більшості інших типів навантаження:

$$\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^-, \quad \sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^-. \quad (4.6)$$

Тут знаки «+» та «-» означають верхній та нижній береги тріщини, відповідно.

При виконанні умови  $v < c_R$  для швидкості руху тріщини, рівняння (4.5) є системою однорідних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу, тому для її розв'язання можна застосувати підхід Ліхницького-Ешелбі-Строха узагальнених комплексних потенціалів [19, 91]. Припустимо, що поле переміщень не залежить від координати  $x_3$ . В розглядуваному випадку плоского напружено-деформівного стану, це припущення справедливе, і має місце залежність тільки від координат  $(x_1, x_2)$ . Представимо вказане поле переміщень через довільну функцію  $f(x_1, x_2)$  у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}f(x_1 + px_2), \quad (4.7)$$

де  $\mathbf{a}$  – довільний вектор,  $p_j$  – поки що невідомі постійні. Далі підставимо (4.7) в (4.5), звідки отримаємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора  $\mathbf{a}$ :

$$(c_{ilk1} + (c_{ilk2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2)a_k = 0. \quad (4.8)$$

Нетривіальний розв'язок цієї системи буде існувати тільки у випадку, коли визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулеві:

$$\det[c_{ilk1} + (c_{ilk2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2] = 0, \quad i, k = 1, 2. \quad (4.9)$$

Отриманий вираз представляє собою рівняння четвертого порядку відносно  $p$ , розв'язком якого, в загальному випадку, є дві пари комплексно спряжених коренів. Обравши два корені з додатною уявною частиною, запишемо загальний розв'язок системи (4.5) в наступному вигляді:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z_1, z_2) + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}(z_1, z_2), \quad (4.10)$$

де  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  – матриця власних векторів системи (9),  $\mathbf{f}(z) = (f_1(z_1), f_2(z_2))$  – вектор-функція узагальнених комплексних змінних  $z_i = x_1 + p_i x_2$  ( $i = 1, 2$ ).

Для знаходження напружень, що діють на площині інтерфейсу, введемо в розгляд вектор  $\mathbf{t} = (\sigma_{21}, \sigma_{22})$ , вираз для якого через похідну від функції  $f(z)$  отримаємо, підставивши (4.10) в (4.2).

$$\mathbf{t} = 2\text{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}'(z_1, z_2)], \quad (4.11)$$

де  $B_{ij} = (c_{i2j1} + p_k c_{i2j2})A_{jk}$ ,  $\mathbf{f}'(z_1, z_2) = (f'_1(z_1), f'_2(z_2))$   $i, j, k = 1, 2$ .

Зробивши заміну  $\mathbf{f}'(z_1, z_2) = \mathbf{F}(z_1, z_2)$ , запишемо вектор  $\mathbf{t}$  більш детально:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= 2\text{Re}[B_{11}F_1(z_1) + B_{12}F_2(z_2)], \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re}[B_{21}F_1(z_1) + B_{22}F_2(z_2)]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для ортотропного простору при заданій орієнтації напрямів пружної симетрії матриця  $\mathbf{B}$  матиме елементи тільки з дійсною частиною на головній діагоналі та елементи тільки з уявною частиною на антидіагоналі. Тому для зручності в подальшому аналітичному розрахунку запишемо її в наступному вигляді:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \text{Re}[B_{11}] & \text{Im}[B_{12}] \\ \text{Im}[B_{21}] & \text{Re}[B_{22}] \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

За допомогою матриці  $\mathbf{D}$  та алгебричних перетворень можна переписати вираз для напружень в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= D_{11}2\text{Re}[F_1(z_1)] - iD_{12}2\text{Im}[F_2(z_2)], \\ \sigma_{22} &= -D_{21}2\text{Im}[F_1(z_1)] + D_{22}2\text{Re}[F_2(z_2)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

де  $z_i = x_1 + p_i x_2$ ,  $F_1(z_1)$ ,  $F_2(z_2)$  – аналітичні функції комплексних аргументів. Розглянемо два випадки навантаження, а саме: при першому типі навантаження, коли діють розтягувальні сили на тріщину, потенціали будуть мати наступні властивості  $\text{Re}[F(x_1, -x_2)] = \text{Re}[F(x_1, x_2)]$  та  $\text{Im}[F(x_1, -x_2)] = -\text{Im}[F(x_1, x_2)]$ , та другий тип навантаження, коли на тріщину

діють дотичні навантаження, з симетрією вигляду  $\operatorname{Re}[F(x_1, -x_2)] = -\operatorname{Re}[F(x_1, x_2)]$  та  $\operatorname{Im}[F(x_1, -x_2)] = \operatorname{Im}[F(x_1, x_2)]$ . Такий тип симетрії потенціалів задовольняє наступним умовам:  $F(\bar{z}) = \pm \overline{F(z)}$  [6]. Дану властивість потенціалів використаємо, щоб записати напруження безпосередньо на тріщині в такій формі:

$$\begin{aligned}\sigma_{21} &= b_{11}[F_1^+(x_1, 0) + F_1^-(x_1, 0)] + ib_{12}[F_2^+(x_1, 0) - F_2^-(x_1, 0)], \\ \sigma_{22} &= ib_{21}[F_1^+(x_1, 0) - F_1^-(x_1, 0)] + b_{22}[F_2^+(x_1, 0) + F_2^-(x_1, 0)].\end{aligned}\quad (4.15)$$

Розглянемо перший тип навантаження. Для зручності введемо до розгляду потенціал  $\Phi(z) = -iF(z)$  і, підставляючи його у вираз для напружень (4.15), а одержаний вираз у граничні умови (4.4), отримаємо наступні рівняння на лінії тріщини:

$$\begin{aligned}b_{21}[\Phi_1^+(x_1, 0) + \Phi_1^-(x_1, 0)] + b_{22}[F_1^+(x_1, 0) - F_1^-(x_1, 0)] &= -P_2\delta(x_1 - c), \\ b_{11}[\Phi_1^+(x_1, 0) - \Phi_1^-(x_1, 0)] + b_{12}[F_1^+(x_1, 0) - F_1^-(x_1, 0)] &= 0, \quad x_1 \in (a, b).\end{aligned}\quad (4.16)$$

З врахованими в рівнянні (4.16) граничними умовами очевидна наступна залежність граничних значень потенціалів між собою:

$$b_{11}\Phi_1^+(x_1, 0) + b_{12}F_1^+(x_1, 0) = b_{11}\Phi_1^-(x_1, 0) + b_{12}F_1^-(x_1, 0). \quad (4.17)$$

Враховуючи отриману залежність потенціалів, відсутність напружень та переміщень на нескінченості, введемо потенціал наступного вигляду:

$$E(z) = b_{11}\Phi_1(z) - b_{12}F_1(z), \quad (4.18)$$

який буде дорівнювати нулеві у всій комплексній площині. З цієї умови встановлюємо відповідний зв'язок:

$$F_1(z) = \frac{b_{11}}{b_{12}}\Phi_1(z). \quad (4.19)$$

Підставляючи отриману залежність в умови (4.16), отримаємо задачу лінійного спряження відносно потенціалу  $\Phi_1(z)$ :

$$\Phi_1^+ + \Phi_1^- = -\frac{P_2}{T_1} \delta(x_1 - c), \quad T_1 = \left( b_{21} + \frac{b_{22}b_{11}}{b_{12}} \right), \quad x_1 \in (a, b).$$

Оскільки поставлену задачу можна розглядати як суперпозицію двох способів навантаження, проведемо представлення вище перетворення для випадку граничних умов у вигляді:

$$\begin{aligned} b_{21}[\Phi_1^+(x_1, 0) + \Phi_1^-(x_1, 0)] + b_{22}[F_1^+(x_1, 0) - F_1^-(x_1, 0)] &= 0, \quad x_1 \in (a, b), \\ b_{11}[\Phi_1^+(x_1, 0) - \Phi_1^-(x_1, 0)] + b_{12}[F_1^+(x_1, 0) - F_1^-(x_1, 0)] &= -P_2 \delta(x_1 - c). \end{aligned}$$

У результаті отримуємо для  $\Phi_2$  задачу лінійного спряження для другого випадку навантаження тріщини:

$$\Phi_2^+ + \Phi_2^- = -\frac{P_1}{T_2} \delta(x_1 - c), \quad T_2 = \left( b_{11} + \frac{b_{12}b_{21}}{b_{22}} \right), \quad x_1 \in (a, b). \quad (4.20)$$

Користуючись властивістю суперпозиції отриманих розв'язків, помножимо другу задачу лінійного спряження на  $i$  та додамо до першої задачі лінійного спряження. Отримаємо наступну задачу лінійного спряження для навантаження загального вигляду:

$$\phi^+(x_1) + \phi^-(x_1) = -\frac{P_2 \delta(x_1 - c) + iP_1 \delta(x_1 - c)}{(T_1 + iT_2)}. \quad (4.21)$$

де  $\phi^\pm(x_1, 0) = \Phi_1^\pm(x_1, 0) + i\Phi_2^\pm(x_1, 0)$ . Дійсна частина розв'язку цієї задачі лінійного спряження буде відповідати нормальному напруженню, а уявна частина – дотичному напруженню.

Для розв'язання задачі (4.21) скористуємося відомою методикою розв'язання подібних задач, викладеною Мусхелішвілі [21]. Розглянемо рівняння

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t), \quad (4.22)$$

де  $g$  – довільна комплексна постійна ( $g \neq 1$ ).

Згідно з [21] за відсутності навантаження на нескінченості, розв'язок рівняння (4.22) має вигляд:

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)}. \quad (4.23)$$

$$\text{де } X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\gamma} (z - b_j)^{\gamma-1}, \quad (4.24)$$

$\gamma = \alpha + i\beta$  – постійна.

Запишемо  $X_0(z), X_0^+(t)$ , використовуючи формулу (4.24) в загальному вигляді та враховуючи, що  $\gamma$  – комплексні числа. Отже, в нашому випадку отримаємо такий результат:

$$X_0(z) = (z - a)^{-\gamma} (z - b)^{\gamma-1}, \quad X_0^+(x_1) = -(x_1 - a)^{-\gamma} (b - x_1)^{\gamma-1} e^{i\pi\gamma}. \quad (4.25)$$

Підставляючи (4.25) в (4.23) визначимо функцію  $F(z)$ :

$$F(z) = \frac{(z - a)^{-\gamma} (z - b)^{\gamma-1}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(x_1)dx_1}{(x_1 - a)^{-\gamma} (b - x_1)^{\gamma-1} e^{i\pi\gamma} (x_1 - z)}, \quad (4.26)$$

$$\text{де } f(x_1) = \frac{P_1\delta(x_1 - c) + iP_2\delta(x_1 - c)}{T_1 + iT_2}, \quad \gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln g}{2\pi i}.$$

Аналогічно отримано розв'язок задачі лінійного спряження (4.21). З використанням [21] цей розв'язок можна записати у вигляді:

$$\phi(z) = -\frac{P_1 + iP_2}{2\pi i(T_1 + iT_2)e^{i\pi/2}(c - a)^{-1/2}(b - c)^{-1/2}} \frac{(z - a)^{-1/2}(z - b)^{-1/2}}{z - c} \quad (4.27)$$

Підставивши отриманий розв'язок для потенціалів в (4.19), а потім в (4.15), отримуємо вирази нормальних та дотичних напружень в околі вершини тріщини.

На основі отриманого розв'язку, підставивши розв'язок задачі лінійного спряження (4.22) у вираз для напружень (4.12), отримуємо такі вирази на лінії тріщини з правої від неї сторони ( $x > b$ ):

$$\begin{cases} \sigma_{22} = \text{Re} \left[ \frac{(x_1 - a)^{-\gamma} (x_1 - b)^{\gamma-1}}{x_1 - c} \frac{(P_1 + iP_2)(1 + \gamma)}{e^{i\pi\gamma} (c - a)^{-\gamma} (b - c)^{\gamma-1}} \right] \\ \sigma_{12} = \text{Im} \left[ \frac{(x_1 - a)^{-\gamma} (x_1 - b)^{\gamma-1}}{x_1 - c} \frac{(P_1 + iP_2)(1 + \gamma)}{e^{i\pi\gamma} (c - a)^{-\gamma} (b - c)^{\gamma-1}} \right] \end{cases} \quad (4.28)$$

де  $\gamma = 0.5$ .

Для знаходжень переміщень берегів тріщини використаємо розв'язок задачі лінійного спряження (4.22) та представлення переміщень (4.10) для визначення розкриття тріщини (переміщення по осі  $x_1$ ). В результаті отримаємо переміщення в такому вигляді:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \text{Re} \left[ \left( A_{11} - iA_{12} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right) \frac{P_1 \sqrt{(c-a)(b-c)}}{2\pi T_1} \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right] \\ u_2 &= 2 \text{Re} \left[ \left( A_{21} - iA_{22} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right) \frac{P_2 \sqrt{(c-a)(b-c)}}{2\pi T_2} \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

**4.3. Чисельний розв'язок та аналіз результатів.** На основі представленого вище розв'язку поставленої задачі побудовано алгоритм для знаходження напружень та виконана числова реалізація алгоритму, яку проведено на прикладі ортотропного матеріалу, а саме вуглепластика, технічні сталі якого представленні в таблиці 3.1. Розрахунки проводились для тріщини з  $a = 0$ ,  $b = 0.5 \text{ м}$  і  $c = 0.3 \text{ м}$ .

**Таблиця 4.1.** Технічні сталі вуглепластика.

Модулі Юнга, $10^9$ Па	Коефіцієнти Пуассона	Модуль зсуву, $10^9$ Па
$E_{11} = 6.91$	$\nu_{13} = 0.119$ $\nu_{31} = 0.315$	$G_{12} = 2.41$
$E_{22} = 8.51$	$\nu_{23} = 0.142$ $\nu_{32} = 0.307$	
$E_{33} = 18.4$	$\nu_{12} = 0.488$ $\nu_{21} = 0.622$	

З виразу (4.23), для ортотропного простору, можна побудувати графік залежності напружень перед фронтом тріщини від сили, прикладеної до її берегів. Ця залежність зображена на рис. 4.2. З аналітичного розв'язку помітно, що на лінії тріщини напруження не залежать від швидкості її руху. Для ортотропного простору це справедливо тільки тоді, коли осі пружної симетрії співпадають з осями координат. З графіка помітно що при приближенні до вершини тріщини, напруження прямують до нескінченності, оскільки це особлива точка.

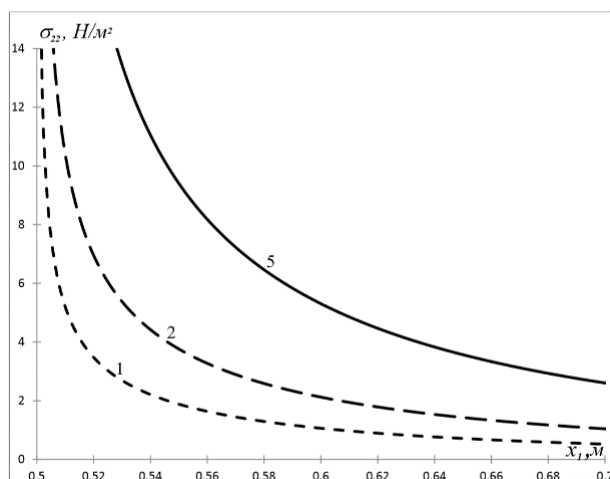


Рис. 4.2 Розподіл напруження  $\sigma_{22}$  перед фронтом тріщини в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження

$P_1 = 0$  і  $P_2 = 1 \text{ Н / м}$ ,  $2 \text{ Н / м}$  та  $5 \text{ Н / м}$ .

Також отриманий розв'язок дозволяє проаналізувати ступінь розкриття тріщини. Вираз (4.29) дозволяє побудувати залежність переміщень берегів



рухомої тріщини, на яку діє зосереджена розтягувальна сила, від швидкості руху тріщини.

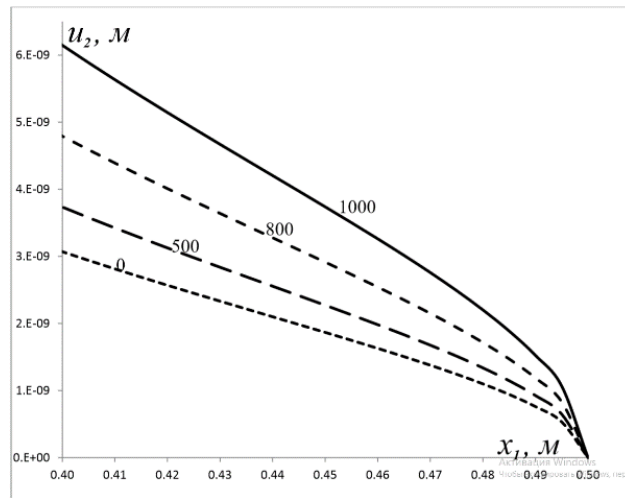


Рис. 4.3 Залежність розкриття тріщини перед правою вершиною тріщини в залежності від швидкості для тих же значень геометричних величин, що і на рис. 4.2 і  $P_2 = 1 \text{ Н / м}$ ,

На рис. 4.3, який побудований для матеріалів з характеристиками, наведеними в таблиці 4.1, зображена залежність розкриття тріщини від швидкості її руху. Як можна помітити, з ростом швидкості руху тріщини зростає і ступінь розкриття тріщини. Відповідно до аналітичного розв'язку в вершині тріщини переміщення дорівнюють нулю і зростають по мірі наближення до місця прикладення сили. Розкриття тріщини також залежить від навантаження прикладеного до її берегів. На рис. 4.3 це навантаження однакове для всіх швидкостей і дорівнює  $1 \text{ Н / м}$ . Але, як видно з аналітичного розв'язку для переміщень (4.29), чим більша сила, що прикладена до берегів, тим більше розкриття тріщини.

**4.4. Висновки до IV розділу.** В розділі представлено дослідження властивостей рухомої тріщини та впливу різних способів прикладання зовнішніх сил до берегів тріщини на розподіл напружень перед її фронтом та на поведінку тріщини при різних швидкостях руху фронту. Представлений в

розділі аналітичний розв’язок проблеми враховує повну анізотропію матеріалу, що дозволяє використовувати запропоновані методи для задач механіки руйнування складних та композитних матеріалів, які зараз широко використовуються в машинобудуванні та багатьох інших сферах виробництва.

Важливо, що знайдений розв’язок представлений у формі аналітичних виразів як для переміщень, так і для напружень в околі тріщини. Він може бути еталонним при використанні чисельних методів побудови розв’язку задачі.

За допомогою запропонованого аналітичного методу та його чисельної реалізації досліджено вплив пружних властивостей матеріалів на поведінку тріщини. Побудований ефективний алгоритм для розв’язку поставленої задачі та подібним їй. За допомогою цього алгоритму можна проаналізувати напружено-деформівний стан анізотропного простору в околі рухомої тріщини. Зокрема, проаналізований вплив швидкості, з якою рухається фронт тріщини, на її напружено-деформівний стан в ортотропному матеріалі, що є частковим випадком анізотропного, матеріалу.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано нові задачі для квазікристалічних композитів з п'єзоелектричною складовою та тріщинами на межі поділу матеріалів і отримано такі основні результати:

1. Досліджено нову задачу для електропровідної тріщини вздовж межі поділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією антиплоского механічного навантаження і плоского електричного поля, перпендикулярного фронту тріщини. Сформульовано та аналітично розв'язано задачу лінійного спряження, і на основі одержаного розв'язку знайдені всі необхідні фононні та фазонні компоненти електромеханічного поля на межі поділу матеріалів.

2. Представлено розв'язок задачі антиплоского навантаження для одновимірного п'єзоелектричного біматеріального квазікристалу з тріщиною під впливом як механічного навантаження і електричного поля прикладених на нескінченості, так і електричного заряду, розподіленого вздовж берегів тріщини. Проаналізовано вплив заряду на фононні та фазонні напруження та розкриття тріщини.

3. Розглянуто плоску задачу для тунельної електропроникної тріщини вздовж межі поділу двох напівнескінчених просторів, виготовлених із одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних матеріалів під дією віддаленого фононного навантаження. З використанням методу комплексних потенціалів сформульовано задачі лінійного спряження Рімана-Гільберта для електрично ізолюваної та електрично проникної тріщин. Отримано точні розв'язки цих задач, на основі яких одержано прості аналітичні вирази для фононних і фазонних стрибків переміщень вздовж тріщини, а також фононних і фазонних напружень вздовж зв'язаних частин поверхні поділу матеріалів та їхні коефіцієнти інтенсивності.

4. Чисельний аналіз плоскої задачі проведено для різних комбінацій п'єзоелектричних квазікристалічних матеріалів. Отримані результати для

фононних і фазонних компонент вздовж межі поділу представлено у вигляді таблиць і графіків. На основі цих даних виявлено нові ефекти та закономірності, серед яких найбільш вагомими є:

- на відміну від тріщини в однорідному КК матеріалі, кожна окрема ненульова фононна компонента навантаження створює ненульові значення всіх коефіцієнтів інтенсивності напружень для біматеріального випадку;

- кожна складова фононного напруження викликає фазонне напруження та стрибок переміщення, а вплив фононного напруження зсуву на коефіцієнт інтенсивності фазонного напруження більш чутливий, ніж вплив нормального;

- в розглянутій моделі тріщини на межі поділу виникає осциляційна сингулярність, але зона взаємопроникнення берегів тріщини є надзвичайно малою для більшості навантажень. Ці зони стають більш помітними лише для дуже великого фононного поля зсуву.

5. У випадку плоского навантаження отримано також результати для часткового випадку дуже близьких фізичних характеристик нижньої та верхньої складових квазікристалічного біматеріалу. Порівняння з результатами, отриманими для відповідного однорідного квазікристала виявило хорошу узгодженість цих результатів, що підтверджує їх достовірність.

6. Проведено аналіз тріщини, що рухається у анізотропному просторі з усталеною дозвуковою швидкістю. Побудовано аналітичний розв'язок цієї задачі та досліджено вплив пружних властивостей матеріалу та швидкості руху тріщини на напружено-деформівний стан в околі її фронту.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. / А. Е. Андрейкив. – К.: Наукова Думка, – 1982. – 345 с.
2. Білий Д. В. Одномірний п'єзоелектричний квазікристал з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду та антиплоского навантаження. / Д. В. Білий // Тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» – Дніпро, 23-25 лист. 2022 р. – С. 28.
3. Білий Д.В. Дослідження рухомої тріщини в анізотропному матеріалі / Д. В. Білий, О. В. Комаров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2022. – Вип. 34. – С. 5-15.
4. Білий Д.В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною / Д. В. Білий, О. В. Комаров, В. В. Лобода // Computer Science and Applied Mathematics. – 2021. – Вип. 1. – С. 5-14.
5. Білий Д.В. Аналітичний підхід до аналізу тріщини в 1d п'єзоелектричному квазікристалі. / Д. В. Білий, О. В. Комаров, В. В. Лобода // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – Вип. 31. – С. 5-18.
6. Білий Д. В. Дослідження антиплоскої деформації складеного одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. / Д. В. Білий, О. В. Комаров, В. В. Лобода // Матеріали міжнародної наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки» – Дніпро-Кам'янське, 13-16 квітня 2021 р. – С. 41.
7. Білий Д.В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду / Д. В. Білий, В. В. Лобода // Механіка та математичні методи. – 2022. – IV №1. – С. 32-44.

8. Васильев Д. В. Физическая кристаллография / Д. В. Васильев – СПб: СПбГТУ. – 1996. – 474 с.
9. Гольдштейн Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов. / Р. В. Гольдштейн // Механика твердого тела. – М. – 1966. – №5. – С. 93–102.
10. Грилицкий Д.В. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезами / Д. В. Грилицкий // Прикладная механика. – 1966. – 2, № 5. – С. 12–18.
11. Грилицкий Д.В. Основные граничные задачи термоупругости для кусочно-однородной изотропной пластины с разрезами / Д. В. Грилицкий, Б. И. Попович // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. – 1970. – № 4. – С. 151–158.
12. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь // Неклассические проблемы механики разрушения –К.: Наукова думка. – 1993. – В 4 т. Т. 4. – С. 236.
13. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями / А. Н. Гузь // Неклассические проблемы механики разрушения: – К.: Наукова думка. – 1991. – В 4 т. Т. 2. – 288 с.
14. Каминский А. А. Механика разрушения вязко-упругих тел. / А. А. Каминский – К.: Наукова Думка. – 1980. – 159 с.
15. Каминский А. А. Разрушение вязко-упругих тел с трещинами. / А. А. Каминский // Неклассические проблемы механики разрушения. – К.: Наукова думка. – 1990. – т. 1. – 312 с.
16. Кит Г.С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. / Г. С. Кит, М. В. Хай. – К.: Наукова Думка. – 1989. – 282 с.
17. Кит Г. С. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин / Г. С. Кит, О. В. Побережный. – К.: Наукова Думка. – 1992. – 216 с.
18. Комаров О. В. Міжфазна тріщина в біматеріальному п'єзоелектричному квазікристалічному просторі. / О. В. Комаров, Д. В. Білий, В. В. Лобода // Тези доповідей другої міжнародної наук.-техн. конф. пам'яті академіка

НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження) – Дніпро, 10-12 жовтня 2019. – С. 99.

19. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницький – М.: Наука. – 1977. – 416 с.
20. Моссаковский В. И. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела / В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка // Прикладная математика и механика. – 1964. – № 6. – С. 1061–1069.
21. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука. – 1966. – 707 с.
22. Мільман Ю. В. Квазікристали — нова атомна структура твердого тіла і матеріали з комплексом незвичайних властивостей / Ю. В. Мільман, М.О. Єфімов // Вісн. НАН України. — 2012. — № 1. — С. 41–48.
23. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. — К.: Наукова думка. – 1968. – 246 с.
24. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наукова думка. – 1976. – 456 с.
25. Партон В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М.: Наука. – 1985. – 503 с.
26. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наукова думка. – 1968. – 888 с.
27. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук – К.: Наукова думка. – 1981. – с. 324.
28. Симонов И. В. Динамика трещины отрыва–сдвига на границе раздела двух упругих материалов / И. В. Симонов // Докл. АН СССР. – 1983. – 271 №1. – С. 65–68.
29. Слепьян Л. И. Механика трещин / Л. И. Слепьян. – Л.: Судостроение. – 1990. – 296 с.
30. Сулим Г. Т. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами / Г. Т. Сулим,

- Д. В. Грилицкий // Физ.-хим. мех. Материалов. – 1972. – т. 8 № 11. – С. 58–65.
31. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов – М.: Наука. – 1983. – 296 с.
  32. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов – М.: Наука. – 1974. – 640 с.
  33. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами / Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.
  34. Altay G. On the fundamental equations of piezoelectricity of quasicrystal media. / G. Altay, M. C. Dömeçi // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – 49 (23-24). – С. 3255-3262.
  35. Atkinson C. Dynamic crack problems in dissimilar media. In Mechanics of Fracture. // C. Atkinson, G. C. Sih // Noordhoff International Publishing. – Leyden. – 1977. – С. 213–248.
  36. Antipov Y. A. Subsonic semi-infinite crack with a finite friction zone in a bimaterial / Y. A. Antipov, J. Mech // Physics Solids. – 2009. – 57. – С. 1934–1957.
  37. Bendersky L. Quasicrystal with one-dimensional translational symmetry and a tenfold rotation axis / L. Bendersky // Phys Rev Lett. – 1985. – 55(14). – С. 1461-1463.
  38. Chattopadhyay K. Vacancy ordered phases and onedimensional quasiperiodicity / K. Chattopadhyay, S. Lele, N. Thangarai et al. // Acta Metall. – 1987. – 35(3). – С. 727-733.
  39. Chen Z. T. A Griffith crack moving along the interface of two dissimilar piezoelectric materials / Z. T. Chen, B. L. Karihaloo, S. W. Yu // Int. J. Fracture – 1998. – 91. – С. 197–203.
  40. Chen K. J. Quasiperiodic a-Si: H/a-SiNx: H multilayer structures / K. J. Chen, G. M. Mao, D. Fend et al. // J Non-cryst Solids. – 1987. – 97(1). – С. 341-344.



41. Cheng H. Is the crack opened or closed in soft-matter pentagonal and decagonal quasicrystal / H. Cheng, T. Y. Fan, H. Y. Hu, Z. F. Sun // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2018. – 95. – C. 248-252.
42. Ding D. H. Generalized elasticity theory of quasicrystals / W. Yang, C. Z. Hu, R. Wang // Phys Rev B. – 1993. – 48. – C. 7003-7010.
43. England A. H. A crack between dissimilar media / A. H. England // J. Applied Mech. – 1965. – Vol. 32. – C. 400-402.
44. Enrico R. Stationary straight cracks in quasicrystals / R. Enrico, M. M. Paolo // International Journal of Fracture. – 2010. – 166 (1). – C. 105-120.
45. Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with crack / F. Erdogan // J. Applied Mech. – 1963. – Vol. 30. – C. 232–236.
46. Eshelby J. D. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley // Acta Metall. – 1953. – 1. – C. 251-259.
47. Fan T. Y. Mathematical theory of elasticity and defects of quasicrystals / T. Y. Fan // Advances in Mechanics. – 2000. – 30(2) – C. 161–174. (in Chinese).
48. Fan T. Y. Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications / T. Y. Fan // Beijing: Springer. – 2011. – 462 c.
49. Fan T. Y. A moving screw dislocation in a one-dimensional hexagonal quasicrystal / T. Y. Fan, X. F. Li, Y. F. Sun // Acta Physica Sinica (overseas Edition). – 2009. – 8(4) – C. 288-296.
50. Fan C. Y. Fundamental solutions and analysis of three-dimensional cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals / C. Y. Fan, Y. Li, G. T. Xu, M. H. Zhao // Mechanics Research Communications. – 2016. – 74. – C. 39–44.
51. Fan T. Y. Elasticity theory, fracture mechanics and some relevant thermal properties of quasicrystal materials / T. Y. Fan, Y.W. Mai // Appl Mech. – 2004. – Rev 57. – C. 325-344.

52. Fan T. Y. A moving screw dislocation in a one-dimensional hexagonal quasicrystals / T. Y. Fan, Y. F. Sun // *Acta Physica Sinica*. – 1999. – 8 (4). – C. 288-295.
53. Feng D. Research on quasiperiodic superlattice / D. Feng, A. Hu, K. J. Chen et al. // *Mater Sci Forum*. – 1987. – 22(24). – C. 489-498.
54. Feng Y. C. An incommensurate structure with cubic point group symmetry in rapidly solidified V-Vi-Si alloy / Y. C. Feng, G. Lu, R. I. Witters // *J Phys Condens Matter*. – 1989. – 1(23). – C. 3695-3700.
55. Fung K. K. Icosahedrally related decagonal quasicrystal in rapidly cooled Al-14-at. %-Fe alloy / K. K. Fung, C. Y. Yang, Y. Q. Zhou et al. // *Phys Rev Lett*. – 1986. – 56(19). – C. 2060–2063.
56. Gao Y. Plane problems of cubic quasicrystal media with an elliptic hole or a crack. / Y. Gao, A. Ricoeur, L. L. Zhang // *Physics Letters A*. – 2011. – 375 (28). – C. 2775-2781.
57. He L. X. One-dimensional quasicrystal in rapid solidified alloys / L. X. He, X. Z. Li, Z. Zhang et al. // *Phys Rev Lett*. – 1988. – 61(9). – C. 1116-1118.
58. Herrmann K. P. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, V. B. Govorukha // *Int. J. Fract.* – 2001. – 111. – C. 203-227.
59. Herrmann, K. P. Contact zone assessment for a fast growing interface crack in an anisotropic biomaterial/ K. P. Herrmann, V. V. Loboda, A. V. Komarov // *Archive of Applied Mechanics*. – 2004. – 74. – C. 118-129.
60. Herrmann, K.P. On a moving interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, A. V. Komarov // *Int. J. Solids and Structures*. – 2005. – 42. – C. 4555-4573.
61. Hu K. Q. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect / Q. K. Hu, H. Jin, Z. Yang, X. Chen // *Acta Mech*. – 2019. – 230. – C. 2455–2474.

62. Hu A. X-ray diffraction pattern of quasiperiodic (Fibonacci) Nb-Cu superlattices / A. Hu, C. Tien, X. Li et al // *Phys Lett A*. – 1986. – 119(6). – C. 313–314.
63. Hu C. Z. Symmetry groups, physical property tensors, elasticity and dislocations in quasicrystals. / C. Z. Hu, R. H. Wang, D. H. Ding // *Reports on Progress in Physics*. – 2000. – 63 (1). – C. 1-39.
64. Knysh P. An electrically charged crack in a piezoelectric material under remote electromechanical loading / P. Knysh, V. Loboda, F. Labesse-Jied Y. Lapusta // *Letters in Fracture and Micromechanics*. – 2012. – 175 (1). – C. 87-94.
65. Levine D. Quasicrystals: A new class of ordered structure / D. Levine, P. J. Steinhardt // *Phys Rev Lett*. – 1984. – 53(26). – C. 2477-2450.
66. Li X. Y. Fundamental solutions of penny-shaped and half-infinite plane cracks embedded in an infinite space of one-dimensional hexagonal quasicrystal under thermal loading / X. Y. Li // *Proceedings of the Royal Society A*. – 2013. – C. 469.
67. Li X. Y. Elastic field in an infinite medium of one-dimensional hexagonal quasicrystal with a planar crack / X. Y. Li // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – 51 (6). – C. 1442-1455. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.030.
68. Li X. Z. Decagonal quasicrystals with different periodicities along the tenfold axis in rapidly solidified Al-Ni alloys / Z. X. Li, K. H. Guo // *Phil Mag Lett*. – 1988. – 58(3). – C. 167–171.
69. Li P. Crack tip plasticity of a half-infinite Dugdale crack embedded in an infinite space of one-dimensional hexagonal quasicrystal / X. Li, G. Kang // *Mechanics Research Communications*. – 2015. – 70. – C. 72–78.
70. Li P. D. Axisymmetric thermo-elastic field in an infinite one-dimensional hexagonal quasi-crystal space containing a penny-shaped crack under anti-symmetric uniform heat fluxes / P. D. Li, X. Y. Li, G. Z. Kang // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2018. – 190. – C. 74–92.

71. Li X. Y. Three-dimensional fundamental solutions for one-dimensional hexagonal quasicrystal with piezoelectric effect/ X. Y. Li, P. D. Li, T. H. Wu, M. X. Shi, Z. W. Zhu // *Physics Letters A*. – 2014. – 378. – C. 826-834.
72. Li P. D. Thermo-elastic Green's functions for an infinite bi-material of one-dimensional hexagonal quasicrystals/ P. D. Li, X. Y. Li, R. F. Zheng // *Physics Letters A*. – 2013. – 377. – C. 637-642. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.12.039.
73. Li L. H. Interaction of a dislocation with an elliptical hole in icosahedral quasicrystals / L. H. Li, G. T. Liu // *Philosophical Magazine Letters*. – 2013. – 93 (3). – C. 142-151.
74. Li X. F. Elastic field of a straight dislocation in one dimensional hexagonal quasicrystals / X. F. Li, Y. F. Sun, T. Y. Fan // *Journal of Beijing Institute of Technology*. – 1999. – 212 (1). – C. 66-71.
75. Li X. Y. Three-dimensional fundamental thermo-elastic field in an infinite space of two-dimensional hexagonal quasi-crystal with a penny-shaped/half-infinite plane crack / X. Y. Li, Y. W. Wang, P. D. Li, G. Z. Kang, R. Müller // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2017. – 88. – C. 18-30.
76. Li Y. Fundamental solutions and analysis of three-dimensional cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals / Y. Li ; G. T. Xu, M. H. Zhao // *Mechanics Research Communications*. – 2016. – 74. – C. 39-44.
77. Liu G. T. On the interaction between dislocations and cracks in one dimensional hexagonal quasi-crystals / G. T. Liu, R. P. Guo, T. Y. Fan // *Chinese Physics B*. – 2003. – 12(10). – C. 1149-1155.
78. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks. / V. V. Loboda // *Eng. Fract. Mech.* – 1993. – 44. – C. 573-580.
79. Loboda V. An analytical approach to the analysis of an electrically permeable interface crack in a 1-D piezoelectric quasicrystal / V. Loboda, O. Komarov, D. Bilyi, Y. Lapusta // *Acta Mechanica*. – 2020. – 231(8). – C. 3419-3433.
80. Merdin R. Quasiperiodic GaAs-AlAs heterostructures / R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke et al. // *Phys Rev Lett*. – 1985. – 55(17). – C. 1768-1770

81. Onopriienko O. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings / O. Onopriienko, V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // *Z Angew Math Mech.* – 2019. – e201800230.
82. Rao K. R. M. Piezoelectricity in quasicrystals / P. H. Rao, B. S. K. Chaitanya // *Pramana-Journal of Physics.* – 2007. – 68 (3). – C. 481-487.
83. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks / J. R. Rice // *Journal of Applied Mechanics.* – 1988. – 55. – C. 98-103.
84. Ru C. Q. Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials / C. Q. Ru // *ASME J. Appl. Mech.* – 2000. – 67. – C. 255-261.
85. Shechtman D. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry / D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et al. // *Phys Rev Lett.* – 1984. – 53(20). – C. 1951-1953.
86. Shechtman, D. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry / D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn // *Physical Review Letters.* – 1984. – 53(20). – C. 1951-1953.
87. Shen S. Crack propagation along the interface of piezoelectric bimaterial / S. Shen, T. Nishioka, S. L. Hu // *Theor. Appl. Fracture Mech.* – 2000. – 34. – C. 185-203.
88. Sheveleva A. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials / A. Shebeleva, V. Loboda, Y. Lapusta // *Applied Math. Modeling.* – 2020. – 87. – C. 287-299.
89. Shi W. C. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals / W. C. Shi, H. H. Li, Q. H. Gao // *Key Eng. Mater.* – 2007. – 340-341. – C. 453-458.
90. Sladek J. Path-independent integral in fracture mechanics of quasicrystals / J. Sladek, V. Sladek, S. N. Atluri // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2015. – 140. – C. 61-71.
91. Stroh A. N. Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity /A. N. Stroh // *Phil. Mag.* – 1958. – 7. – C. 625-646.

92. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. – 1992. – 40. – C. 739-765.
93. Terauchi H. X-Ray diffraction patterns of configurational Fibonacci lattices / H. Terauchi, Y. Noda, K. Kamigami et al. // *J Phys Jpn.* – 1988. – 57(7). – C. 2416-2424.
94. Tupholme G. E. Row of shear cracks moving in one-dimensional hexagonal quasicrystal line materials / G. E. Tupholme // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2015. – 134. – C. 451-458.
95. Tupholme G. E. A non-uniformly loaded anti-plane crack embedded in a half-space of a one-dimensional piezoelectric quasicrystal / G. E. Tupholme // *Meccanica*. – 2018. – 53. – C. 973-983.
96. Urban K. Studies on aperiodic crystals in Al-Mn and Al-V alloys by means of transmission electron microscopy / K. Urban, J. Mayer, M. Rapp et al. // *Journal de Physique Colloque*. – 1986. – 47. – C. 465-475.
97. Yang J. Analytic solutions of problem about a circular hole with a straight crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effects / J. Yang, X. Li // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2016. – 82. – C. 17-24.
98. Yang J. The anti-plane shear problem of two symmetric cracks originating from an elliptical hole in 1D hexagonal piezoelectric QCs / J. Yang, X. Li // *Adv. Mater. Res.* – 2014. – 936. – C. 127-135.
99. Yang W. Mechanics of dynamic debonding / W. Yang, Z. Suo, C. F. Shih // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1991. – 433. – C. 679-697.
100. Yang W. G. Some new stable one-dimensional quasicrystals in Al<sub>65</sub>Cu<sub>20</sub>Fe<sub>10</sub>Mn<sub>5</sub> alloy / W. G. Yang, R. N. Wang, J. Gui // *Phil Mag Lett* – 1996. – 74(5). – C. 357-366.
101. Yang J. The fracture behavior of two asymmetrical limited permeable cracks emanating from an elliptical hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals

- with piezoelectric effect / J. Yang, Y. T. Zhou, H. L. Ma, S. H. Ding, X. Li // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – 108. – C. 175-185.
102. Ye H. Q. Five-fold symmetry in real and reciprocal space / H. Q. Ye, D. Wang, K. H. Kuo // Ultramicroscopy. – 1985. – 16(2). – C. 273-277.
  103. Yoffe E. The moving Griffith crack / E. Yoffe // Phil. Mag. – 1951. – 42. – C. 739-750.
  104. Yu J. Complex variable method for an anti-plane elliptical cavity of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals / J. Yu, J. H. Guo, Y. M. Xing // Chinese Journal of Aeronautics. – 2015. – 28(4). – C. 1287-1295.
  105. Wang N. Two-dimensional quasicrystal with eightfold rotational symmetry / N. Wang, H. Chen, K. H. Kuo // Phys Rev Lett. – 1987. – 59(9). – C. 1010-1013.
  106. Wang Z. Numerical crack path prediction under mixed-mode loading in 1D quasicrystals / Z. Wang, A. Ricoeur // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2017. – 90. – C. 122-132. DOI: 10.1016/j.tafmec.2017.03.013
  107. Wang R. H. Point and space groups and elastic behaviour of one-dimensional quasicrystals / R. H. Wang, W. G. Yang, C. Z. Hu et al. // J Phys Condens Matter. – 1997. – 9(11). – C. 2411-2422.
  108. Wang Y.W. Fundamental elastic field in an infinite medium of two-dimensional hexagonal quasicrystal with a planar crack: 3D exact analysis / Y. W. Wang, T. H. Wu, X. Y. Li, G. Z. Kang // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – 66. – C. 171-183.
  109. Wang X. Interaction between a semi-infinite crack and a straight dislocation in a decagonal quasicrystal / X. Wang, Z. Zhong // International Journal of Engineering Science. – 2004. – 42(5-6). – C. 521-538.
  110. Wang X. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix / X. Wang, Zhong Z. // Int. J. Solids Struct. – 2002. – 39. – C. 5895-5911.

111. Wang X. A moving conducting crack at the interface of two dissimilar piezoelectric materials / X. Wang, Z. Zhong, F. L. Wu // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – 40. – C. 2381-2399.
112. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams // *Bulletin of the Seismological Society of America.* – 1959. – Vol. 49. – C. 199-204.
113. Willis J. R. Fracture mechanics of interfacial cracks / J. R. Willis // *J. Mech. Physics Solids.* – 1971. – 19. – C. 353-368.
114. Wu K. C. Explicit crack tip fields of an extending interface crack in an anisotropic bimaterial / K. C. Wu // *Int. J. Solids Structures.* – 1991. – 27. – C. 455-466.
115. Zhang Z. A new icosahedral phase with  $m\bar{3}5$  symmetry / Z. Zhang, H. Q. Ye, K. H. Kuo // *Phil Mag A.* – 1985. – 52(6). – C. 49-52.
116. Zhang L. Green's functions of one-dimensional quasicrystal bi-material with piezoelectric effect / L. Zhang, D. Wu, W. Xu, L. Yang, A. Ricoeur, Z. Wang, Y. Gao // *Physics Letters A.* – 2016. – 380. – C. 3222-3228.
117. Zhao M. H. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution / M. H. Zhao, H. Y. Dang, C. Y. Fan, Z. T. Chen // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2017. – 179. – C. 59-78.
118. Zhao M. H. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method / M. H. Zhao, H. Y. Dang, C. Y. Fan, Z. T. Chen // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2017. – 180. – C. 268-281.
119. Zhou Y. B. Two collinear mode-III cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal strip / Y. B. Zhou, X. F. Li // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2018. – 189. – C. 133-147.
120. Zhou Y. B. Fracture analysis of an infinite 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal plate with a penny-shaped dielectric crack / Y. B. Zhou, X. F. Li // *European Journal of Mechanics A Solids.* – 2019. – 76. – C. 224-234.