МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

МИХАЇЛ ОЛЕКСАНДР ВІКТОРОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ П’ЄЗОПАСИВНИХ І П’ЄЗОАКТИВНИХ КОМПОЗИТНИХ ТІЛ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____О.В. Михаїл

Науковий керівник:

Лобода Володимир Васильович,

доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2022

АНОТАЦІЯ

Михаїл О.В. Особливості деформування п’єзопасивних і п’єзоактивних композитних тіл із тріщинами та кутовими точками . – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2022.

Елементи конструкцій, які виготовлені з композиційних матеріалів, знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Широке застосування таких матеріалів обумовлює можливість дії на них різних видів навантажень: механічних, електричних, теплових та ін. Але, як правило, руйнування таких матеріалів зумовлене наявністю дефектів, зокрема кутових точок і тріщин на межі поділу матеріалів, що мають різні властивості. У дисертаційній роботі розглядаються проблеми деформування композитних тіл з кутовими точками та тріщинами на межах поділу матеріалів та пропонуються нові розрахункові моделі для їх вирішення.

У **вступі та огляді літератури** проведено аналіз публікацій за проблематикою дисертації та визначено внесок досліджень інщих авторів до розвитку цього напрямку.

У **розділі 1** розглянуто тріщину між двома матеріалами в біматеріальному анізотропному просторі під розтягувально-зсувним навантаженням на нескінченності. З використанням комплексних потенціалів отримано точний аналітичний розв’язок задачі в рамках моделі відкритої тріщини, який має осциляційну особливость типу квадратного кореня у вершині тріщини. Запропонована нова модель, заснована на введенні зсувних зон передруйнування біля вершини тріщини, для усунення цих особливостей. У цьому випадку задача зводиться до неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої наведено аналітичний розв’язок. З умови

обмеженості дотичного напруження в кінці зони передруйнування одержано трансцендентне рівняння для визначення довжини вказаної зони.

У результаті такого моделювання напруження зсуву стає обмеженим у всій області, а нормальне напруження має лише особливість типу квадратного кореня у вершині тріщини, що дозволяє вводити коефіцієнт інтенсивності напруження загальноприйнятним способом. Залежності згаданого коефіцієнта інтенсивності напруження, довжини зони передруйнування, відкриття тріщини та напруження зсуву від прикладеного навантаження проілюстровані в табличній та графічних формах. Показано, що коефіцієнт інтенсивності нормального напруження суттєво залежить від прикладеного нормального напруження і несуттєво від зовнішнього зсувного напруження.

Розділ 2 присвячено дослідженню тріщини на межі розділу двох різнорідних напівнескінченних ізотропних просторів під дією віддалених нормальних та зсувних напружень. Використано представлення напружень та похідних від стрибків переміщень через кусково-аналітичні функції. У припущенні, що тріщина повністю відкрита, сформульовано задачу лінійного спряження та наведено її точний аналітичний розв'язок. Для усунення осциляційної особливості, яка притаманна цьому розв’язку, використано модель, засновану на введенні зсувних зон передруйнування біля вершин тріщини, що запропонована в попередньому розділі. Математична реалізація цієї моделі проводиться аналогічно попередньому розділу. При цьому знайдено довжину зони передруйнування і коефіцієнт інтенсивності нормального напруження у початковій вершині тріщини.

Крім того визначено локальну швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) у вершині тріщини, а також ШЗЕ вздовж зони передруйнування (глобальну). Їхнє сумарне значення, яке називається загальною ШЗЕ, порівняно зі ШЗЕ класичної моделі та встановлено їхню хорошу збіжність. Подібна задача для міжфазної тріщини в тілі кінцевих розмірів розглядалася методом скінченних елементів. Вважалося, що розмір тіла істотно більший за довжину тріщини. У цьому випадку розрахунки методом скінченних елементів величин локальної,

глобальної та загальної ШЗЕ демонструють хорошу узгодженість з аналітичними результатами, що дає можливість зробити висновок про адекватність розробленого підходу та достовірність отриманих як аналітичних, так і чисельних результатів.

У **розділі 3** розв’язано декілька задач, які присвячено проблемі дослідження впливу кутових точок на стику двох матеріалів на пружно-деформівний стан в околі цих точок. Зокрема, запропонована методика, визначення степені особливості напружень в околі кутових точок для біматеріальних тіл скінченних розмірів будь-якої геометричної форми. Вона заснована на використанні методу скінчених елементів та асимптотичної поведінки напружень біля кутових точок, що може бути встановлена з відомих розв’язків задачі для клину. Особливості цієї методики продемонстровані на прикладі задачі про контакт ізотопних прямокутників різної ширини, один з яких навантажений рівномірно розподіленим напруженням на торці. З використанням методу скінчених елементів знайдено розподіли напружень в зоні контакту і за рахунок суттєвого згущення сітки біля кутової точки, визначено степінь особливості напружень в цій точці. Для порівняння побудовано також чисельно-аналітичний розв’язок аналогічної задачі пружного контакту півполоси і полоси, виготовлених з різних матеріалів. За допомогою інтегральних перетворень Фур'є проблему зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв’язано методом механічних квадратур. Порівняння аналітично визначених степені особливості напружень та коефіцієнтів при цій особливості зі знайденими чисельно показало їхню хорошу узгодженість.

Для тріщини типу I в однорідному матеріалі розглянуто зони ослаблених міжчастинних зв’язків довільної довжини на продовженнях тріщини. Обчислено локальну та глобальну швидкості звільнення енергії. Для конкретного матеріалу та зовнішнього навантаження показано, що сума цих значень практично не змінюється і дорівнює ШЗЕ для тріщини Гріффітса. Розглянуто також тріщину зсуву, що виникає біля кутової точки області,

складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Введенно зони передруйнування (ослаблених міжчастинних зв’язків) на продовженні тріщини та знайдено локальну і глобальну складові швидкості звільнення енергії для різних значень зсувного напруження в цих зонах, величина якого визначається характеристиками адгезійного шару. Застосовано метод скінчених елементів. Показано, що комбінація складових ШЗЕ дозволяє без визначення довжини зони передруйнування знайти необхідний критичний параметр, який визначає можливість розвитку тріщини.

У **розділі 4** розглянуто електропровідну міжфазну тріщину в п'єзоелектричному біматеріалі, поляризованому в напрямку, паралельному берегам тріщини та ортогональному фронту тріщини. Біматеріал навантажений віддаленими нормальним та зсувним напруженнями та електричним полем, співнаправленим з напрямком поляризації матеріалу. Вважається, що всі поля не залежать від координати, співнаправленої з фронтом тріщини, тому розглядається задача плоскої деформації. Використано отримані раніше вирази електромеханічних факторів на межі поділу матеріалів через кусково-аналітичну вектор-функцію. Для вибраного напряму поляризації структура цих представлень суттєво відрізняється від розглянутого раніше напряму поляризації, ортогональному берегам тріщини. Вважаючи, що тріщина відкрита, та задовольняючи умови на межі поділу матеріалів, сформульовано проблему лінійного спряження, яку розв'язано точно. Отримано фізично нереальну осциляційну сингулярність біля вершини тріщини. Для її усунення на продовженні тріщини введено зону ковзання берегів тріщини. У цьому випадку виконання граничних умов приводить до комбінованої крайові задачі Діріхле-Рімана та задачі Гільберта. Отримано точний аналітичний розв’язок цих задач, який дозволив визначити електричні та механічні фактори на межі поділу матеріалів у простій аналітичній формі. Отримано трансцендентні рівняння для визначення довжини зони ковзання. Вказано також методику усунення осциляційної сингулярності біля вершини електропроникної тріщини для розглянутого напряму поляризації.

Для конкретних п’єзоелектричних матеріалів та різних механічних та електричних навантажень проведено чисельний аналіз отриманих результатів. У табличній та графічній формах представлені розкриття тріщини, напруження у зоні ковзання, коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного поля. Встановленоа істотну залежність вказаних величин як від механічного навантаження, так і від електричного поля. Вказано, що така залежність дає можливість знизити загрозу руйнування шляхом прикладання відповідного електричного поля.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому: розроблено нову методику усунення фізично нереальної осциляційної особливості для тріщини між двома ізотропними та/або ортотропними матеріалами, з’єднаними тонким адгезійним прошарком; запропоновано чисельно-аналітичний підхід до визначення степені особливості та коефіцієнтів при особливостях напружень в околі кутових точок біматеріальних тіл; започатковано модель для визначення параметрів руйнування тріщини зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру; запропоновано нову методику визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень для електропровідної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі при напрямку його поляризації, паралельному берегам тріщини.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що точні аналітичні розв’язки, отримані в роботі, можуть служити еталонними при розробці й апробації чисельних методів розв’язання задач указаного класу для тіл кінцевих розмірів.

Ключові слова: тріщина між двома матеріалами, кутова точка, зона передруйнування, задача лінійного спряження, коефіцієнт інтенсивності напружень, швидкість звільнення енергії.

ANNOTATION

Myhail O.V. On deformation peculiarities of piezo passive and piezo active composite bodies with cracks and corner points.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on a specialty 113 Applied mathematics – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2022.

Elements of structures, which are made of composite materials, are widely used in various fields of modern technology. Widespread use of such materials makes it possible to act on them different types of loads: mechanical, electrical, thermal, etc. But as a rule, the destruction of such materials occurs due to the presence of defects, in particular angular points and cracks at the interface of materials with different properties. In the dissertation work the problems of deformation of composite structures with angular points and cracks on the material interface are considered and new models for their solution are offered.

In the **Introduction and Review of the literature** the analysis of publications on the dissertation subject is carried out and the contribution of other authors' research to the development of this direction.

Section 1 considers the crack between two materials in a bimaterial anisotropic space under a tensile-shear load at infinity. Using complex potentials, an exact analytical solution of the problem is obtained within the framework of the open crack model, which has an oscillating square root singularity at the crack tips. A new model based on the introduction of shear pre-fracture zones at the crack tips is proposed to eliminate these singularities. In this case, the problem is reduced to an inhomogeneous combined Dirichlet-Riemann boundary value problem for which an analytical solution is given. Due to the limited tangential stress at the end of the pre-fracture zone, a transcendental equation is obtained to determine the length of the specified zone.

As a result of such modeling, the shear stress becomes limited in the whole region, and the normal stress has only a square root singularity at the crack tip, which allows you to enter the stress intensity factor in a conventional way. The

dependences of the mentioned stress intensity factor, the length of the pre-fracture zone, crack opening and shear stress on the applied load are illustrated in tabular and graphical forms. It is shown that the intensity factor of the normal stress significantly depends on the applied normal stress and insignificantly on the external shear stress.

Section 2 is devoted to the study of the crack at the interface of two heterogeneous semi-infinite isotropic spaces under the action of distant normal and shear stresses. Representations of stresses and derivatives of displacements jumps through piecewise analytical functions are used. Assuming that the crack is completely open, the problem of linear conjugation is formulated, and its exact analytical solution is given. To eliminate the oscillating singularity inherent in this solution, a model based on the introduction of shear pre-fracture zones near the crack tips, proposed in the previous section, is used. The mathematical implementation of this model is similar to the previous section. The length of the pre-fracture zone and the intensity factor of the normal stress at the initial crack tip are found.

In addition, a local energy release rate (ERR) at the tip of the crack, as well as ERR along the pre-fracture zone are found. Their total value, which is called the global or total ERR, is compared with the ERR of the classical model and their good agreement is established. A similar problem for an interface crack in a body of finite dimensions was considered by the finite element method. It was assumed that the size of the body was significantly larger than the length of the crack. In this case, finite element calculations of local and global ERRs show good consistency with analytical results, which allows us to conclude on the adequacy of the developed approach and the reliability of both analytical and numerical results.

Section 3 solves several problems devoted to the studying the influence of angular points at the junction of two materials on the stress-strain state in the vicinity of these points. In particular, a method of determining the power singularity of stress in the vicinity of angular points for bimaterial bodies of finite size and any geometric shape is suggested. It is based on the use of the finite element method and the asymptotic behavior of stresses at angular points, which can be established from known solutions of the problem for the wedge. The peculiarities of this technique

are demonstrated by the example of the problem of contact of isotopic rectangles of different widths, one of which is loaded with a uniformly distributed stress at the end face. Using the finite element method, the stress distributions in the contact zone were found, and due to the significant condensation of the grid near the corner point, the degree of stress singularity at this point was found. For comparison, a numerical-analytical solution of a similar problem of elastic contact of a half-strip and a strip made of different materials is also constructed. With the help of integral Fourier transforms, the problem is reduced to a system of singular integral equations, which is solved by the method of mechanical quadratures. Comparison of the analytically found power of stresses singularity and coefficients at this singularities with the numerically found showed their good agreement.

For a mode I crack in a homogeneous material, the zones of weakened interparticle bonds of arbitrary length on crack extensions are considered. Local and global energy release rates are calculated. For a specific material and external load, it is shown that the sum of these values does not change and is equal to the ERR of the Griffiths crack. The shear crack that occurs near the corner point of a bimaterial composed of two dissimilar rectangles of different sizes is also considered. The pre-fracture zone at the crack extension are introduced. The local and global components of the energy release rate are found for different values of shear stress in these zones, which value is determined by the characteristics of the adhesive layer. The finite element method is used. It is shown that the combination of ERR components allows to find the required critical parameter, which determines the possibility of crack development, without finding the length of the pre-fracture zone.

An electrically conductive interfacial crack in the piezoelectric bimaterial polarized in the direction parallel to the crack faces and orthogonal to the crack front is considered in **Section 4**. The bimaterial is loaded with distant normal and shear stresses and an electric field co-directed with the direction of polarization of the material. It is assumed that all fields do not depend on the coordinate co-directed with the crack front, therefore the plane strain problem is considered. The previously obtained expressions of electromechanical quantities at the interface through a

piecewise analytical vector function are used. For the chosen direction of polarization, the structure of these representations differs significantly from the previously considered direction of polarization, orthogonal to the crack faces. Assuming that the crack is open and satisfying the conditions at the interface of materials, the problem of linear conjugation is formulated and solved exactly. A physically unreal oscillating singularity at the crack tips is obtained. To eliminate it, a sliding zone is introduced on the crack continuation. In this case, the fulfillment of the boundary conditions leads to the combined Dirichlet-Riemann boundary value problem and the Hilbert problem. An exact analytical solution of these problems is obtained. This allowed to find electrical and mechanical factors at the material interface in a simple analytical form. Transcendental equations are obtained to determine the length of the slip zone. The method of elimination of the oscillatory singularity near the tip of the electrically permeable crack is also suggested for the considered direction of polarization.

Numerical analysis of the obtained results was performed for specific piezoelectric materials and various mechanical and electrical loads. The tabular and graphical forms present crack opening, stress in the slip zone, stress and electric field intensity factors. An essential dependence of the mentioned quantities both on a mechanical loading, and on an electric field is found out. It is indicated that such a dependence makes it possible to reduce the possibility of destruction by applying an appropriate electric field.

The scientific novelty of the obtained results is as follows: a new approach for eliminating a physically unrealistic oscillatory singularity for a crack between two isotropic and/or orthotropic materials connected by a thin adhesive layer has been developed; a numerical-analytical way to determining the degree of singularity and coefficients at singularities of stresses around the corner points of bimaterial bodies is proposed; a model for determination the fracture parameters of a shear crack that appears near the corner points of an area composed of two heterogeneous rectangles of different sizes was developed; a new technique for determination the

stress intensity factors of an electrically conductive interface crack in a piezoelectric bimaterial with its polarization direction parallel to the crack faces is proposed.

The practical significance of the obtained results is primarily connected with the fact that the exact analytical solutions obtained in the work can be used as a reference in the development and testing of numerical methods for solving similar problems for finite sized bodies.

Keywords: crack between two materials, angular point, pre-fracture zone, linear conjugation problem, stress intensity factor, energy release rate**.**

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Михаїл О. В., Лобода В. В. Про один спосіб аналізу напруженого стану композитів в околі кутових точок // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 2. – С. 99–108.
2. Mykhail O., Loboda V. Pre-fracture zone modeling for an interface crack in an isotropic bimaterial // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – 2020. – № 2. – С. 67-72.
3. Михаїл О. В., Лобода В. В. Про спосіб знаходження параметрів руйнування для тріщин між двома матеріалами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – Вип. 32. – С. 50-60.

Статті у наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних

1. Loboda V., Gergel I., Khodanen T., Mykhail O. A crack between orthotropic materials with a shear yield zone at the crack tip // Mathematical Problems in Engineering. –2019. – Volume 2019. – Article ID 9723089, 8 pages (SCOPUS). https://doi.org/10.1155/2019/9723089
2. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. Charpter «A sleeping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric bimaterial». In Mechanics and Physics of Structural Media. Elsevier, Academic press, 2022, pp. 253-269. (SCOPUS) doi.org/10.1016/B978-0-32-390543-5.00018-9

Тези доповідей

1. Міхаїл О. В., Лобода В. В. Чисельно-аналітичне дослідження особливостей НДС в околі ребра стику двох прямокутних паралелепіпедів // Математичні проблеми технічної механіки-2018.

Матеріали міжнародної наукової конференції. – Київ, Черкаси, Кам’янське. – 2018. – С. 61.

2. Левченко М., Михаїл О., Садова-Квітка М., Квітка І. Про особливості деформування поліетиленових оболонок // Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). Дніпро: 2019. – 2019. – С. 106-107.
3. Міхаїл О. В., Лобода В. В. Про визначення параметрів руйнування для тріщин на межі поділу матеріалів // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки-2021». – 2021. – С. 43-44.
4. Михаїл О., Шевельова А., Лобода В. Модель зони передруйнування для електропровідної тріщини у п’єзоелектричному біматеріалі // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки – Львів 2021». – 2021. – С. 33.
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.09.pdf

ЗМІСТ

ВСТУП 16

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ 21

РОЗДІЛ 1. ТРІЩИНА МІЖ ОРТОТРОПНИМИ МАТЕРІАЛАМИ ІЗ ЗСУВНОЮ ЗОНОЮ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ 28

1.1 Основні співвідношення для ортотропного матеріалу 28

1.2 Тріщина на межі поділу двох матеріалів 31

1.3 Постановка задачі та розробка моделі для міжфазної тріщини, вільної від осцилюючої особливості 33

1.4 Коефіцієнт інтенсивності напружень та довжина зони текучості 37

1.5 Числові результати та їх обговорення 39

1.6 Висновки до першого розділу 42

РОЗДІЛ 2. ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В ІЗОТРОПНОМУ БІМАТЕРІАЛІ 44

2.1 Формулювання основних співвідношень 44

2.2 Тріщина на межі поділу двох ізотропних матеріалів 46

2.3 Розробка моделі міжфазної тріщини, вільної від осциляції 48

2.4 Довжина зони передруйнуванням та швидкість звільнення енергії 50

2.5 Чисельний аналіз та обговорення результатів 53

2.6 Висновки до розділу 2 56

РОЗДІЛ 3. ПРО ОДИН СПОСІБ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТІВ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК 58

3.1 Постановка задачі та чисельний аналіз 58

3.2 Аналітичне дослідження проблеми та порівняння результатів 64

3.3 Спосіб знаходження параметрів руйнування для тріщин між двома матеріалами 70

3.4. Зсувна тріщина 75

3.5 Висновки до розділу 3 78

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЬ ЗОНИ ПРОКОВЗУВАННЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНО ПРОВІДНОЇ ТРІЩИНИ У П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ 80

4.1 Постановка задачі 80

4.2 Модель відкритої тріщини 82

4.3 Міжфазна тріщина із зонами ковзання біля її вершин 85
4.4 Довжина зони ковзання 91
4.5 Тріщина, вільна від електродів 92
4.6. Чисельні результати та їх обговорення 95
4.7 Висновки до розділу 4 99
ВИСНОВКИ 101
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 104

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В теперішній час відповідно до вимог, що висуваються для створення нових конструкцій, машин, приладів, деталей і механізмів, широке застосування в інженерній та будівельній практиці отримали композитні матеріали. В більшості випадків основною причиною передчасного руйнування конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, є кутові точки та тріщини на межі поділу матеріалів, що мають різні властивості (міжфазні тріщини). Значну кількість робіт присвячено дослідженню пружного ізотропного біматеріалу з міжфазною тріщиною в рамках моделі «відкритої» тріщини, яка призводить до осциляції напружень біля її вершин. Існуючі методи усунення такої осциляції не завжди є прийнятними для композитних з'єднань за допомогою тонких адгезійних шарів невисокої жорсткості. Тому потребують подальшої розробки методики врахування зон передруйнування для таких з'єднань в ізотропних, ортотропних та п'єзоелектричних біматеріалах. Недостатньо розвинутими є методики визначення степені особливості та полів напружень і деформацій в околі кутових точок, зокрема для біматеріальних тіл скінчених розмірів. Із наведених аргументів випливає, що розглянуті в дисертаційній роботі питання є актуальними і мають важливе практичне значення.

Мета і завдання дослідження. *Мета роботи* полягає в розвитку методів дослідження зон передруйнування тріщини в тонкому прошарку, що з'єднує два ізотропні, анізотропні або п'єзоелектричні матеріали, а також аналіз напружено-деформівного стану в околі кутових точок з'єднань з різних матеріалів у тілах скінченних розмірів.

Досягнення поставленої мети потребує вирішення таких *завдань*:

- побудувати зручні представлення компонент пружно-деформівного стану на межі поділу ізотропних, анізотропних та п'єзоелектричних матеріалів через кусково-аналітичні функції;

- з використанням цих представлень сформулювати та аналітично розв’язати задачі лінійного спряження, що відповідають різним моделям привершинних зон тріщин у таких матеріалах;
- визначити розподіли напружень, стрибків переміщень та електричного поля на межі поділу матеріалів. Виходячи з аналізу коефіцієнтів інтенсивності (КІ) цих факторів, задовольнити необхідним нерівностям і знайти довжини зон передруйнування;
- застосувати метод скінченних елементів (МСЕ) до розв’язку модельних задач для тіл скінченних розмірів, а також запропонувати чисельно-аналітичний спосіб знаходження степені особливості та коефіцієнта при особливості розв’язку в кутовій точці композитної області.

Об’єкт дослідження – напружено-деформований стан композитних матеріалів в околі тріщин та кутових точок.

Предмет дослідження – визначення параметрів руйнування для моделі зі зсувною зоною передруйнування на продовженні тріщини.

Методи дослідження. Для побудови й аналізу математичних моделей використовується лінійна теорія пружності, механіка руйнування, теорія функцій комплексної змінної, а для чисельного розв’язання – метод скінченних елементів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що:

1. Запропонована нова методика усунення фізично нереальної осциляційної особливості для тріщини між двома ізотропними та/або ортотропними матеріалами, з’єднаними тонким адгезійним прошарком. Ця методика заснована на введенні зсувних зон передруйнування в околі вершин тріщини і пропонує ефективний алгоритм визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень та швидкості звільнення енергії для міжфазних тріщини у вказаних біматеріалах.
2. Розроблено чисельно-аналітичний підхід до визначення степені особливості та коефіцієнтів при особливостях напружень в околі

кутових точок біматеріальних тіл. Він оснований на використанні методу скінченних елементів і може бути застосований до біматеріальних тіл скінченних розмірів будь-якої геометричної форми.

3. Запропонована модель для визначення параметрів руйнування тріщини зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Використано підхід, заснований на аналізі локальної та глобальної швидкостей звільнення енергії в околі вершини тріщини.
4. Започаткова нова методика знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень для електропровідної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі при напрямку його поляризації, паралельному берегам тріщини, під дією віддаленого механічного навантаження та електричного поля. Запропонована можливість зменшення вірогідності розвитку тріщини за рахунок відповідного підбору зовнішнього електричного поля.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується строгістю та коректністю постановок задач, використанням добре апробованих математичних моделей і точних методів теорії функцій комплексної змінної, а в часткових випадках їхнім порівнянням із результатами відомих точних аналітичних розв’язків. Також достовірність результатів підтверджується порівняльним аналізом визначених аналітично значень параметрів руйнування з результатами, отриманими за допомогою методу скінченних елементів.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що вони дозволяють досліджувати механічні та електричні поля в ізотропних, ортотропних та п’єзоелектричних біматеріалах із міжфазними тріщинами. Отримані в явному виді співвідношення для параметрів руйнування дозволяють оцінити вплив механічних напружень і електричного поля на віддалені від тріщини на можливість її розвитку і тим самим сприяти підвищенню тріщиностійкості композитних конструкцій, виготовлених з

п’єзоелектричних матеріалів. Точні аналітичні розв’язки, отримані в роботі, можуть служити еталонними при розробці й апробації чисельних методів розв’язання задач указаного класу для тіл кінцевих розмірів.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 4 статті. Одна з них опублікована у виданні, що входить до наукометричної бази Scopus [85]. 3 статті входять до переліку наукових фахових видань України [26-28]. Окрім цього опубліковано розділ у колективній монографії [87], яка також входить до Scopus. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику В. В. Лободі. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [26-28] – побудова аналітичних розв’язків, їхня чисельна ілюстрація, отримання розв’язків тестових задач методом скінченних елементів; [85, 87] – розв’язок задач лінійного спряження і чисельна реалізація результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2018-2021 років; а також на міжнародних конференціях:

1. Математичні проблеми технічної механіки. – Київ, Черкаси, Кам’янське. – 2018
2. Друга міжнародна науково-технічноа конференція пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). - Дніпро: 2019.
3. Математичні проблеми технічної механіки – Кам’янське. – 2021.
4. Сучасні проблеми термомеханіки – Львів. – 2021.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження

за темою дисертації здійснювалися також в науково-дослідній лабораторії механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетної теми 1-335-18 «Розрахункові моделі п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних композитів з тріщинами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0118U003302, 2018–2020 рр.

Структура та обсяг дисертації. Робота містить вступ, огляд літератури, 4 розділи, висновки та список використаних джерел, що містить 108 найменувань на 11 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 114 сторінок, обсяг основного тексту – 103 сторінки. Робота містить 21 рисунок та 9 таблиць.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Дисертаційна робота присвячена аналізу впливу кутових точок та тріщин на межі поділу ізотропних, ортотропних та п'єзоелектричних матеріалів на їхній напружено-деформівний стан.

Тріщини між двома матеріалами (міжфазні тріщини) в багатьох випадках є основною причиною руйнування композитних конструкцій. Тому дослідження міжфазних тріщин має першорядне значення для різних технічних пристроїв та якісного обслуговування складових елементів сучасної техніки, виготовлених із ізотропних, ортотропних та п'єзоелектричних композиційних матеріалів.

Міжфазні тріщини між ізотропними матеріалами є об'єктом вивчення багатьох дослідників в останні роки.

Уперше задачу для міжфазної тріщини з відкритими берегами сформулював та розв'язав M. L. Williams [107]. Він розглянув тріщину, яка розташована на межі поділу двох різнорідних ізотропних півплощин під дією рівномірно розподіленого навантаження на нескінченності. Було одержано точний аналітичний розв'язок поставленої задачі і показано, що напруження та переміщення в околі вершин тріщини мають осциляційні особливості, внаслідок чого виникає взаємопроникнення берегів тріщини в околі вершини. Далі в рамках цієї моделі в роботах Г. П. Черепанова [50], A. H. England [62], F. Erdogan [63], J. R. Rice та G. C. Sih [97] та інших було розв'язано ряд плоских задач теорії пружності з тріщинами при різних видах навантаження й отримано точні аналітичні розв'язки в замкненій формі.

В роботах Г. Т. Сулима та Д. В. Гриліцького [45], Г. Т. Сулима, Д. В. Гриліцького та І. П. Белокура [46] було розв'язано плоскі задачі для кусково-однорідних тіл з тріщинами методом сингулярних інтегральних рівнянь.

За допомогою методу комплексних потенціалів В. І. Моссаковський та М. Т. Рибка [31] одержали розв'язок для дископодібної тріщини між різнорідними ізотропними півпросторами в полі рівномірно розподіленого

осесиметричного розтягувального навантаження. Задачі для міжфазних тріщин в двошаровій сферичній оболонці розглядались в роботах С. О. Смирнова [41-43].

Динамічні задачі для тріщини на межі поділу матеріалів розглянуто в роботах О. М. Гузя, І. О. Гузя, В. О. Меньшикова, А. В. Меньшикова [5, 23, 24]. Досліджено розподіл параметрів напружено-деформованого стану й коефіцієнтів інтенсивності напружень залежно від частоти хвилі, властивостей матеріалів композита й форми тріщини.

Як відзначалося раніше, використання класичної моделі міжфазної тріщини призводить до появи осциляційних особливостей в околі вершин тріщини і, як наслідок, до фізично нереального взаємопроникнення матеріалів.

У роботі M. Comninou [57] запропоновано нову модель тріщини, в якій припускалося, що береги тріщини входять у гладкий контакт в околі її вершин. Було сформульовано також умови, які дають можливість однозначно визначити відносну довжину цієї зони контакту. Далі контактна модель міжфазної тріщини розглядалася в роботах M. Comninou [58], J. Dundurs та M. Comninou [60], L. Ni та S. Nemat-Nasser [90, 91] та інших, де поставлені задачі було зведено до сингулярних інтегральних рівнянь, які розв’язувалися чисельно.

Перші точні аналітичні розв’язки для тріщини з однією та двома зонами контакту одержано в роботах І. В. Симонова [40], J. Dundurs та A. K. Gautesen [61, 72], A. K. Gautesen [73], C. Atkinson [52] та ін. Показано, що нехтування меншою із зон контакту не призводить до суттєвих похибок у визначенні довжини іншої зони та відповідного коефіцієнта інтенсивності.

Міжфазні тріщини із зоною контакту, в якій наявне тертя, розглядалися в роботах А. Ф. Улітка [47], Ю. А. Антипова [1], В. І. Острика та А. Ф. Улітка [37], де поставлені задачі зведено до інтегральних рівнянь, для яких було знайдено асимптотичні розв’язки. Зони контакту для міжфазних тріщин у кусково-однорідній сферичній оболонці досліджувалися в роботі С. О. Смирнова [44].

У роботах В. В. Лободи [16], K. P. Herrmann та V. V. Loboda [76, 78] розв’язано задачі для міжфазної тріщини із зоною контакту при різних видах навантаження для ізотропних, анізотропних та п’єзоелектричних матеріалів. Було використано методи зведення сформульованих проблем до комбінованої крайової задачі Діріхле–Рімана, розв’язок якої побудовано за методикою роботи [36]. На його основі одержано аналітичні вирази для напружень вздовж лінії поділу матеріалів, вирази для стрибків переміщень берегів тріщини та рівняння для визначення довжини зони контакту.

Проблема тріщини на межі розділу між двома різними анізотропними матеріалами є набагато складнішою і, отже, менш вивченою, ніж для ізотропного випадку. Аналітичний аналіз цієї проблеми в рамках відкритої моделі тріщини був проведений Clements D. I. [56] і продовжений в роботах [103, 95, 108]. Осциляційна особливість була підтверджена у цих роботах для випадку анізотропного матеріалу. Врахування контакту берегів тріщини для анізотропних біматеріалів зроблено в роботах [105, 10] аналітично-числовим способом та в [75, 76] аналітично.

Міжфазні тріщини та пружні міжфазні дефекти в неоднорідному анізотропному середовищі досліджено в роботах Г. Я. Попова, А. Ф. Кривого, [10, 11], С. А. Назарова [35].

Зазвичай шар між різними матеріалами є м'якшим, ніж компоненти, які він зв’язує, тому біля вершин тріщини вздовж межі поділу розвиваються тонкі зони попереднього руйнування. Врахування таких зон проводилось в роботі А. О. Камінського [7] з використанням кулонівського закону сухого тертя та в роботах [8], [17] з використанням моделі Дагдейла [59] та шляхом застосування моделі М. Я. Леонова та В. В. Панасюка [15] для моделювання механічних полів у цих зонах. Однак, наскільки відомо автору, тонка зона передруйнування, заснована на теорії Треска-Сен-Венана, ніколи не використовувалася для тріщин між двома матеріалами ні в ортотропному, ні в ізотропному біматеріалі. Також відомо [40, 84], що напруження зсуву вздовж межі поділу є найнебезпечнішими біля вершини тріщини, розглянутої в

рамках моделі із зоною контакту. Тому розгляд зон передруйнування на основі граничного напруження зсуву є актуальним. Такий підхід щодо тріщини між двома анізотропними матеріалами був розроблений у роботі [85], однак аналізу швидкості звільнення енергії при розвитку тріщини в цій роботі не приділено належної уваги.

Проблема дослідження біматеріальних тіл, в зоні стику яких присутні кутові точки, є дуже важливою для практики, тому що кутові точки, як правило, є основною причиною руйнування конструкцій. Дослідженню пружно-деформівного стану в околі кутових точок присвячена велика кількість робіт, але піонерською в цьому напрямі є робота [55], в якій досліджено характер сингулярності напружень в околі біматеріального кута. Дуже розповсюдженими є кутові точки, які утворюються на стику двох прямокутників різної ширини або прямокутника чи півполоси з полосою. Такого роду задачі досліджувалися чисельно-аналітичним методом у роботах [18, 19, 88]. У цих роботах, як правило, одна із під областей є нескінченною по одній з координат або напівнескінченною. Якщо ж обидві підобласті, що контактують, є скінченними, то застосувати аналітичні методи для аналізу провести практично неможливо, і треба використовувати чисельні підходи.

П'єзоелектричні та п'єзоелектромагнітні матеріали широко використовуються в сучасній мікроелектроніці часто в поєднанні з іншими матеріалами для утворення композитів. Тріщини, особливо мікротріщини, можуть виникати на межі поділу окремих компонентів. Через невеликий розмір п'єзоелектричних компонентів мікротріщини можуть значно зменшити міцність таких конструкцій, тому їх вивчення важливе для практики.

Теорія п’єзоефекту була суттєво розвинута у наукових працях В. Л. Гінзбурга [4], А. В. Шубнікова [51], У. Мэзон [34] та ін. При розвитку математичних аспектів теорії вважалося, що п’єзокераміка є досить крихким матеріалом без помітно виражених пластичних властивостей, а її руйнування відбувається за малих деформацій. Це дало можливість, аналогічно до

класичної теорії пружності, з високим ступенем точності описати кінематику середовища за допомогою лінійного тензора деформацій.

Систематичне викладення питань механіки спряжених електропружних полів, пов'язаних з постановкою граничних задач електропружності та розробкою методів їх розв'язування, міститься в монографіях В. З. Партона та Б. О. Кудрявцева [39], В. Т. Грінченка, А. Ф. Улітка та М. О. Шульги [25], Д. І. Бардзокаса, О. І. Зобніна, М. О. Сеника та М. Л. Фільштинського [21, 22], С. О. Калоєрова, А. І. Баєвої та О. І. Бороненко [6] та ін.

Точні аналітичні розв'язки задач теорії електропружності для міжфазної тріщини вперше було отримано у роботах Б. О. Кудрявцева, В. З. Партона та В. І. Ракітіна [12, 13] та V. Z. Parton [94], де розглядалися тунельна та дископодібна тріщини на межі поділу п'єзокераміки та пружного ізотропного провідника. Було сформульовано умови, що визначають розвиток тріщини, визначено компоненти електромеханічного поля на межі поділу матеріалів і величину критичного навантаження, пов'язану з розвитком тріщини.

У роботах H. G. Beom [53], H. G. Beom та S. N. Atluri [54] у рамках класичної моделі розглядалися тріщини, розташовані між різнорідними п'єзокерамічними матеріалами. Дослідження проводилося методами теорії функцій комплексного змінного. Було одержано точні аналітичні розв'язки та знайдено основні параметри руйнування. T. C. Wang та X. L. Han [106] розв'язали подібну задачу методом сингулярних інтегральних рівнянь.

Розгляду періодичної системи тріщин, розташованих на лінії стику двох різнорідних п'єзоелектриків, присвячено роботи С. В. Козінова та В. В. Лободи [9], C. F. Gao, C. Häusler та H. Balke [71], C. F. Gao та M. Z. Wang [69]. Задачу зведено до однорідної періодичної крайової задачі Рімана, розв'язок якої отримано в аналітичному вигляді. У результаті числового аналізу одержаного розв'язку встановлено, що КІН зростають зі зменшенням відстані між тріщинами.

У роботах Л. А. Фільштинського і М. Л. Фільштинського [48, 49], C. F. Gao та M. Z. Wang [70] побудовано функцію Гріна граничної задачі

електропружності про плоску та антиплоску деформацію складеного п’єзокерамічного простору з міжфазною тріщиною. Одержано формули для коефіцієнтів інтенсивності механічних та електричних факторів в околі вершини тріщини.

Усі вищеописані дослідження використовували форму електричних умов, що відповідає електропроникній тріщині. Задача теорії електропружності для повністю відкритої електроізольованої тріщини, яка розташована між двома різнорідними п’єзоелектричними матеріалами, вперше була розглянута Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett та J. R. Willis [102]. Використовуючи підхід A. N. Stroh [101], отримано точний аналітичний розв’язок цієї задачі, введено в розгляд механічні та електричні коефіцієнти інтенсивності, проаналізовано можливі види степеневої особливості у функціях польових величин у разі плоскої та антиплоскої деформації.

Аналітичне дослідження електроізольованої тріщини, розташованої на межі поділу трансверсально-ізотропної п’єзокераміки з п’єзопасивним діелектриком або провідником, проведено В. Ф. Бакіровим [2], Z. C. Ou та Y. H. Chen [92, 93].

Дослідження тріщин на межі поділу п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних матеріалів були проведені в роботах Л. А. Фільштинського та його співавторів [65-67]. Зокрема, в цих роботах розглянуто плоскі та антиплоскі задачі для міжфазних тріщин для п’єзоелектричних біматеріалів, що зазнали кусково рівномірного механічного навантаження в поєднанні з електричним навантаженням на нескінченності, а також лінійного навантаження у довільній точці.

Як вище відзначалося, фізично нереальна осциляційна сингулярність виникає у вершині міжфазної тріщини в плоскому випадку [62, 63, 97]. Для міжфазної тріщини в п’єзоелектричному біматеріалі цю особливість виявили В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев [39]. Спосіб усунення цієї особливості був запропонований у роботі [57] для тріщини між двома ізотропними

матеріалами та узагальнений у [78, 79] для моделей еклектрично проникних та електрично ізольованих тріщин відповідно.

Сучасні актуатори та інші електронні пристрої часто виготовляються з використанням тонкоплівкових електродів, затиснутих між п'єзоелектричними шарами. Такі електроди зазвичай готують з металевого порошку, провідних полімерів тощо, і вони не змінюють механічних властивостей матриць [98]. Розшарування згаданих електродів призводить до появи електропровідних тріщин на межі розділу матеріалів. У плоскому випадку електрично провідні умови було розглянуто в роботах [54] та [86] для моделей тріщин «відкритого» та контактного типу, відповідно, для матеріалів, поляризованих у напрямку, ортогональному берегам тріщини.

Із наведеного огляду видно, що значну кількість робіт присвячено дослідженню пружного ізотропного біматеріалу з міжфазною тріщиною в рамках моделі «відкритої» тріщини, яка призводить до осциляції напружень біля її вершин. Існуючі методи усунення такої осциляції не завжди є прийнятними для композитних з’єднань за допомогою тонких адгезійних шарів невисокої жорсткості. Тому потребують подальшої розробки методики врахування зон передруйнування для таких з’єднань в ізотропних, ортотропних та п’єзоелектричних біматеріалах. Недостатньо розвинутими є методики визначення степені особливості та полів напружень і деформацій в околі кутових точок, особливо для біматеріальних тіл скінчених розмірів. Потребують подальшого розвитку методики усунення осциляційної особливості для електропровідної тріщини між п’єзоелектричними матеріалами при їх поляризації, паралельній берегам тріщини. Ці аргументи підтверджують, що розглянуті в дисертаційній роботі питання є важливими в теоретичному плані і мають вагоме практичне значення.

РОЗДІЛ 1. ТРІЩИНА МІЖ ОРТОТРОПНИМИ МАТЕРІАЛАМИ ІЗ ЗСУВНОЮ ЗОНОЮ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ

1.1 Основні співвідношення для ортотропного матеріалу

Визначальні рівняння та рівняння рівноваги для лінійного анізотропного матеріалу за відсутності масових сил у прямокутній системі координат x_i можуть бути представлені у формі [100]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{1.2}$$

де σ_{ij}, u_k є компонентами напруження та переміщення; C_{ijkl} – модулі пружності, для яких справедливо $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ і використовується угода Ейнштейна про підсумовування від 1 до 3 для латинських індексів.

Підставляючи (1.1) у (1.2), отримуємо такі рівняння Ламе:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = 0. \tag{1.3}$$

Припускаючи, що всі поля незалежні від координати x_3, розв'язок рівнянь (1.3) згідно із методикою, запропонованою в [64] та розвинотою в [56], можна представити у формі:

$$u_k = a_k f\left(x_1 + p x_2\right), \tag{1.4}$$

де f є довільною аналітичною функцією комплексної змінної $z = x_1 + p x_2$; p та a_1, a_2, a_3 є власним значенням та компонентами власного вектора такої системи

$$\left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}\right]\mathbf{a} = 0. \tag{1.5}$$

Елементи 3x3 матриць **Q**, **R** і **T** визначаються як

$$\mathbf{Q} = \left[Q_{ik}\right],\ \mathbf{R} = \left[R_{ik}\right],\ \mathbf{T} = \left[T_{ik}\right] \tag{1.6}$$

з $Q_{ik} = C_{i1k1}$, $R_{ik} = C_{i1k2}$, $T_{ik} = C_{i2k2}$, $\left(i, k = 1,2,3\right)$.

Тут і далі верхній індекс Т означає транспоновану матрицю.

Нетривіальний розв'язок рівнянь (1.5) існує, якщо p є коренем рівняння

$$det\left[\mathbf{Q}+p\left(\mathbf{R}+\mathbf{R}^{T}\right)+p^{2}\mathbf{T}\right]=0. \tag{1.7}$$

Оскільки рівняння (1.7) не має дійсних коренів [80], позначаємо корені цього рівняння з додатними уявними частинами як p_α, а пов'язані з ним власні вектори (1.5) як $\mathbf{a}_\alpha$ (нижній індекс α тут і далі приймає значення 1, 2, 3).

Найзагальніший дійсний розв'язок рівнянь (1.3) можна представити у вигляді [80]:

$$\mathbf{U}=\mathbf{A}\mathbf{f}\left(z\right)+\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}\left(\overline{z}\right), \tag{1.8}$$

де $\mathbf{U}=\left[u_1,u_2,u_3\right]^T$, $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]$ – матриця, що складається з власних векторів, $\mathbf{f}\left(z\right)=\left[f_1\left(z_1\right),f_2\left(z_2\right),f_3\left(z_3\right)\right]^T$, $z_\alpha=x_1+p_\alpha x_2$, а риска зверху означає комплексне спряження.

Введемо вектор

$$\mathbf{t}=\left[\sigma_{12},\sigma_{22},\sigma_{32}\right]^T. \tag{1.9}$$

Використовуючи рівняння (1.2), цей вектор можна представити у вигляді

$$\mathbf{t}=\mathbf{B}\mathbf{f}'\left(z\right)+\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'\left(\overline{z}\right), \tag{1.10}$$

де компоненти 3x3 матриці B визначаються як $B_{i\alpha}=\left(C_{i2k1}+p_\alpha C_{i2k2}\right)a_{k\alpha}$ (не підсумовується за індексом α).

Далі розглядається біматеріал, що складається з двох різних анізотропних напівскінченних просторів $x_2>0$ та $x_2<0$ з механічними властивостями, визначеними матрицями $C_{ijkl}^{(1)}$ та $C_{ijkl}^{(2)}$ відповідно. Припускаємо, що вектор **t** є неперервним по всьому біматеріальному інтерфейсу, а частини $L=\left\{\left(-\infty,c_1\right)\cup\left(b_1,c_2\right)\cup...\left(b_n,\infty\right)\right\}$ інтерфейсу $-\infty<x_1<\infty$, $x_2=0$ є кінематично зв'язаними, тобто граничні умови на інтерфейсі $x_2=0$ такі

$$\mathbf{t}^{(1)}\left(x_1,0\right)=\mathbf{t}^{(2)}\left(x_1,0\right) \text{ для } x_1\in\left(-\infty,\infty\right), \tag{1.11}$$

$$\mathbf{U}^{(1)}\left(x_1,0\right)=\mathbf{U}^{(2)}\left(x_1,0\right) \text{ для } x_1\in L. \tag{1.12}$$

Задовольняючи рівняння (1.11), використовуючи для кожного матеріалу представлення (1.8), (1.10) та застосовуючи метод, детально описаний у роботі [75], отримано такі вирази на інтерфейсі:

$$\left\langle \mathbf{U}'\left(x_1\right)\right\rangle = \mathbf{W}^{+}\left(x_1\right) - \mathbf{W}^{-}\left(x_1\right), \tag{1.13}$$

$$\mathbf{t}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \mathbf{G}\mathbf{W}^{+}\left(x_1\right) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^{-}\left(x_1\right), \tag{1.14}$$

де $\left\langle \mathbf{U}'\left(x_1\right)\right\rangle = \mathbf{U}'^{(1)}\left(x_1,0\right) - \mathbf{U}'^{(2)}\left(x_1,0\right)$ – стрибок функції $\mathbf{U}'\left(x_1\right)$ через межу поділу матеріалів, $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{L} = \mathbf{A}^{(2)}\left(\mathbf{B}^{(2)}\right)^{-1}$.

Слід зазначити, що вектор-функція $\mathbf{W}\left(z\right) = \left[W_1\left(z\right), W_2\left(z\right), W_3\left(z\right)\right]^T$ аналітична у всій площині з розрізом уздовж тріщини.

Співвідношення (1.13), (1.14) відіграють важливу роль для постановки різних задач лінійного спряження для анізотропних біматеріалів із розрізами на межах поділу матеріалів під дією механічних навантажень.

Основна увага далі буде приділена розгляду ортотропних матеріалів з віссю симетрії матеріалу, паралельною осі x_3 як найважливішого класу анізотропних матеріалів.

У цьому випадку матриця **G** має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\,g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & i\,g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & i\,g_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

де всі g_{ij} дійсні.

Зрозуміло, що плоска і антиплоска проблеми можуть бути роз'єднані. Через простоту розв'язання антиплоскої задачі наша увага буде зосереджена на плоскій задачі для компонент переміщення $\left(u_1, u_2\right)$.

У цьому випадку аналогічно прийнятим позначенням теорії пружності для анізотропного матеріалу [100] можна ввести такі співвідношення для коефіцієнтів пружності, пов'язані з площиною $\left(x_1, x_2\right)$:

$$C_{1111} = C_{11}, C_{1122} = C_{12}, C_{2222} = C_{22}, C_{1212} = C_{44}.$$

Рівняння (1.13), (1.14) можна представити у такій формі (детальніше див. [75]):

$$\sigma_{22}^{(1)}\left(x_1,0\right)+im_1\sigma_{12}^{(1)}\left(x_1,0\right)=q_1\left[\Omega_1^{+}\left(x_1\right)+\gamma_1\Omega_1^{-}\left(x_1\right)\right], \tag{1.16}$$

$$\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle+iS_1\left\langle u_2'\left(x_1\right)\right\rangle=\Omega_1^{+}\left(x_1\right)-\Omega_1^{-}\left(x_1\right), \tag{1.17}$$

де

$$\Omega_1\left(z\right)=W_1\left(z\right)+iS_1W_2\left(z\right), \tag{1.18}$$

$$\gamma_1=-\frac{g_{21}+m_1g_{11}}{q_1},\ S_1=\frac{g_{22}+m_1g_{12}}{g_{21}-m_1g_{11}},\ m_1=-\sqrt{-\frac{g_{21}g_{22}}{g_{11}g_{12}}},$$

$$q_1=g_{21}-m_1g_{11}. \tag{1.19}$$

Варто зазначити, що функція $\Omega_1\left(z\right)$ аналітична у всій площині з розрізом уздовж тріщини.

1.2 Тріщина на межі поділу двох матеріалів

Припустимо, що на межі поділу двох матеріалів виникла тріщина $\left[c,a\right]$. Півпростори піддаються рівномірно розподіленим нормальним σ_{22}^{∞} і зсувним σ_{12}^{∞} напруженням на нескінченності, які не залежать від координати x_3. Береги тріщини не завантажені. Цей вид зовнішніх полів ініціює стан плоскої деформації, тому можна розглядати лише поперечний переріз, ортогональний осі x_3 (рис. 1.1) і співвідношення (1.16), (1.17) з $n=1$ чинні. Спочатку не будемо зверти уваги на відрізок $\left(a,b\right)$ інтерфейсу, розгляд якого знадобиться пізніше.

Граничними умовами сформульованої задачі є такі:

$$\sigma_{21}^{(1)}=\sigma_{21}^{(2)}=0,\ \sigma_{22}^{(1)}=\sigma_{22}^{(2)}=0\ \text{для}\ c<x_1<a, \tag{1.20}$$

$$\left\langle\sigma_{21}\right\rangle=0,\ \left\langle\sigma_{22}\right\rangle=0,\ \left\langle u_1'\right\rangle=0,\ \left\langle u_2'\right\rangle=0\ \text{для}\ x_1\notin\left(c,a\right). \tag{1.21}$$

Задовольняючи умови (1.20) та (1.21) із застосуванням (1.16), (1.17), забезпечуємо неперервність функції $\Omega_1\left(z\right)$ на сегментах $x_1\notin\left(c,a\right)$ межі поділу матеріалів, а також приходимо до наступного рівняння

$$\Omega_1^+(x_1)+\gamma_1\Omega_1^-(x_1)=0 \text{ для } c<x_1<a. \tag{1.22}$$

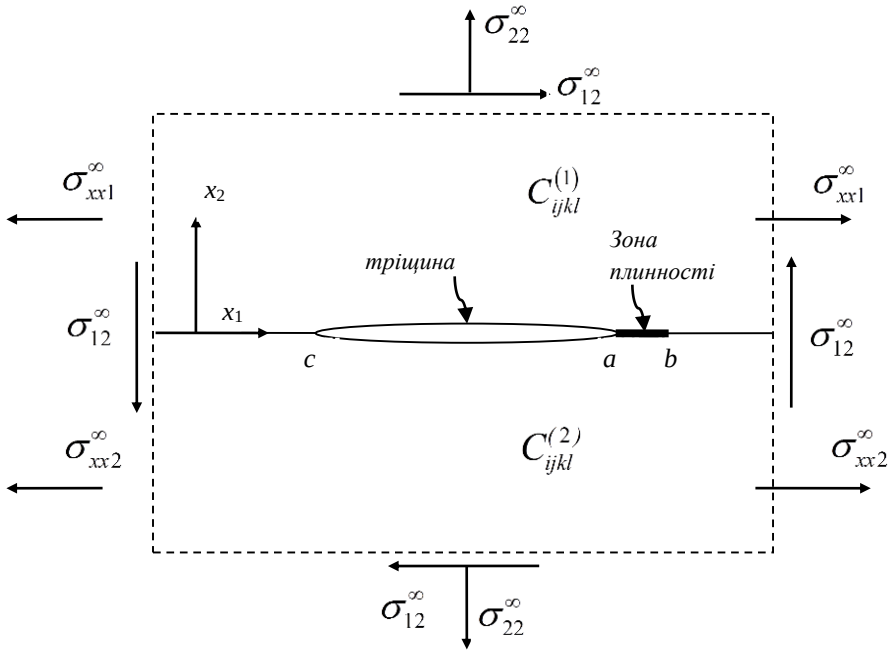


Рис. 1.1 Тріщина між двома анізотропними матеріалами із зоною плинності

Умова на нескінченності випливає з рівняння (1.16) і може бути записана у вигляді:

$$\Omega_1(z)\big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_{22}+im_1\tilde{\sigma}_{21}, \tag{1.23}$$

де $\tilde{\sigma}_{22}=\dfrac{\sigma_{22}^{\infty}}{r_1}$, $\tilde{\sigma}_{21}=\dfrac{\sigma_{21}^{\infty}}{r_1}$, $r_1=(1+\gamma_1)q_1$.

Розв'язок рівняння (1.22) за умови на нескінченності (1.23) отримано з використанням [32] у вигляді

$$\Omega_1(z)=(\tilde{\sigma}_{22}+im_1\tilde{\sigma}_{21})\frac{z-(a+c)/2-i\varepsilon l_0}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{i\varepsilon} \tag{1.24}$$

де $\varepsilon=\dfrac{1}{2\pi}\ln\gamma_1$, $l_0=a-c$.

Напруження на інтерфейсі знаходимо з (1.16), (1.24) таким чином

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)+im_1\sigma_{21}^{(1)}(x_1,0)^{i\varepsilon}=$$

$$=(\sigma_{22}^{\infty}+im_1\sigma_{21}^{\infty})\frac{x_1-(a+c)/2-i\varepsilon l_0}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\left(\frac{x_1-c}{x_1-a}\right) \text{ для } x_1>a. \tag{1.25}$$

Похідна стрибків переміщень знаходиться за допомогою формули (1.17) у вигляді:

$$\left\langle u_1'\left(x_1,0\right)\right\rangle + iS_1\left\langle u_2'\left(x_1,0\right)\right\rangle =$$

$$= -\frac{\left(\sigma_{22}^{\infty} i - m_1\sigma_{21}^{\infty}\right)}{q_1\sqrt{\gamma_1}}\frac{\left(x_1 - (a+c)/2 - i\varepsilon l_0\right)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}}\left(\frac{x_1-c}{a-x_1}\right)^{i\varepsilon} \text{ для } c < x_1 < a. \quad (1.26)$$

Після інтегрування останнього співвідношення, отримуємо

$$\left\langle u_1\left(x_1,0\right)\right\rangle + iS_1\left\langle u_2\left(x_1,0\right)\right\rangle =$$

$$= \sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}\left\{\frac{\left(\sigma_{22}^{\infty} i - m_1\sigma_{21}^{\infty}\right)}{q_1\sqrt{\gamma_1}}\left(\frac{x_1-c}{a-x_1}\right)^{i\varepsilon}\right\} \text{ для } c < x_1 < a. \quad (1.27)$$

1.3 Постановка задачі та розробка моделі для міжфазної тріщини, вільної від осцилюючої особливості

З рівнянь (1.25), (1.26) видно, що механічні напруження та похідна стрибків переміщення є сингулярними у вершинах тріщин. Крім того, ця особливість є осцилюючою.

Для усунення цієї осциляції були запропоновані різні моделі, наприклад [8, 57, 61]. У цій дисертації запропонована модель, заснована на введенні зон плинності зсувних напружень. Як буде показано пізніше, ці зони є або дуже короткими, або одна зона значно коротша, ніж інша, тому їх взаємним впливом можна знехтувати.

Враховуючи цю обставину, для простоти розглянемо лише довшу зону (a,b), припускаючи, що вона виникає біля правої вершини тріщини (рис. 1.1). Якщо довша зона виникає біля іншої вершини тріщини, то її можна врахувати простою перестановкою півпросторів.

Отже, граничні умови для розглянутої моделі можна записати так:

$$\sigma_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(2)} = 0,\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0 \text{ для } c < x_1 < a, \quad (1.28)$$

$$\sigma_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(2)} = \tau_S,\ \left\langle \sigma_{22} \right\rangle = 0,\ \left\langle u_2' \right\rangle = 0 \text{ для } a < x_1 < b, \quad (1.29)$$

$$\langle\sigma_{21}\rangle = 0,\ \langle\sigma_{22}\rangle = 0,\ \langle u_1'\rangle = 0,\ \langle u_2'\rangle = 0 \text{ для } x_1 \notin (c,b). \tag{1.30}$$

де τ_S – гранична межа напруження зсуву адгезійного шару.

Задовольняючи умови на інтерфейсі (1.28) та використовуючи (1.16), отримуємо рівняння (1.22). Крім того, перша і третя умови (1.29) призводять до рівнянь

$$Im\left[\Omega_1^+(x_1) + \gamma_1\Omega_1^-(x_1)\right] = -m_1\tau_s / q_1,\ \ Im\left[\Omega_1^+(x_1) - \Omega_1^-(x_1)\right] = 0$$

для $a < x_1 < b$.

Виконання граничних умов (1.30) забезпечує аналітичність функції $\Omega_1(z)$ поза межами інтервалу (c,b), а останні співвідношення ведуть до рівняння

$$Im\,\Omega_1^{\pm}(x_1) = \tau \text{ для } a < x_1 < b, \tag{1.31}$$

де $\tau = -m_1\tau_S / r_1$.

Рівняння (1.22) та (1.31) представляють собою неоднорідну комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана. Для цієї проблеми справедливі також умови на нескінченності (1.23).

Використовуючи результати роботи [36], загальний розв’язок однорідної задачі, що відповідає (1.22), (1.31), можна подати у вигляді

$$\Omega_{1h}(z) = P(z)E_1(z) + Q(z)E_2(z), \tag{1.32}$$

де

$$P(z) = C_1 z + C_2,\ Q(z) = D_1 z + D_2.$$

Функції

$$E_1(z) = ie^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)} \text{ та } E_2(z) = e^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)} \tag{1.33}$$

представляють канонічні розв’язки однорідної задачі (1.22), (1.31),

де

$$\varphi(z) = 2\varepsilon\, ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}},\ l = b-c,$$

та C_1, C_2, D_1, D_2 є довільними дійсними коефіцієнтами.

Конкретний розв’язок неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана для деяких правих частин рівнянь (1.22) та (1.31) було проаналізовано в роботі [78]. У випадку проблеми (1.22), (1.31) цей конкретний розв'язок можна знайти у формі:

$$\Omega_{1p}(z) = \Phi(z) E_1(z), \tag{1.34}$$

де $\Phi(z)$ є функцією, аналітичною у всій складеній площині з розрізом $[a,b]$ уздовж осі x_1.

Слід зазначити, що $\Omega_{1p}(z)$ задовольняє рівняння (1.31).

Підставлення (1.34) до (1.31) та врахування, що $Im\, E_1^{\pm}(x_1) = 0$ на (a,b) приводить до такого рівняння:

$$Im\, \Phi^{\pm}(x_1) = \psi^{\pm}(x_1) \text{ для } a < x_1 < b, \tag{1.35}$$

де $\psi(x_1) = \tau / E_1(x_1)$.

Розв’язок задачі Діріхле (1.35) має такий вигляд [3, формула (46.25)]:

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi} \int_a^b \frac{\psi^+(t) + \psi^-(t)}{Y^+(t)(t-z)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\psi^+(t) - \psi^-(t)}{t-z} dt, \tag{1.36}$$

де

$$Y(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \text{ і } 0 \le arg(z-a) \le 2\pi,\ 0 \le arg(z-b) \le 2\pi.$$

З використанням того, що

$$\psi^+(t) + \psi^-(t) = -2\tau \sqrt{(t-c)(b-t)}\, sinh\, \varphi_0(t),$$

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = 2\tau \sqrt{(t-c)(b-t)}\, cosh\, \varphi_0(t),$$

$$\varphi_0(x_1) = 2\varepsilon\, tan^{-1} \sqrt{\frac{(a-c)(b-x_1)}{(b-c)(x_1-a)}}$$

та $Y^+(t) = -i\sqrt{(t-a)(b-t)}$ на (a,b), формула (1.36) приймає вигляд:

$$\Phi(z) = \frac{\tau}{\pi} \left[-iY(z) L_1(z) + L_2(z) \right], \tag{1.37}$$

де

$$L_1(z)=\int_a^b\sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\,\frac{sinh\varphi_0(t)}{t-z}dt,\ L_2(z)=\int_a^b\sqrt{(t-c)(b-t)}\,\frac{cosh\varphi_0(t)}{t-z}dt.$$

Загальні розв'язки задачі (1.22), (1.31) можна знайти шляхом підсумовування розв’язків (1.32) та (1.34).

Довільні константи C_1, C_2, D_1, D_2 можна знайти з умови на нескінченності (1.23) разом із умовою однозначності переміщень, яку завдяки (1.17) можна записати у вигляді:

$$\int_c^b\left(\Omega_1^+(x_1)-\Omega_1^-(x_1)\right)dx_1=0.$$

Як було показано раніше, коефіцієнт при z^{-1} у виразі для $\Omega_1(z)$ на нескінченності має бути рівним нулю [78]. Враховуючи також, що

$$E_1(z)\Big|_{z\to\infty}=iz^{-2}e^{i\beta}\left(z+i\beta_1+\frac{c+b}{2}\right)+o\left(z^{-3}\right),$$

$$E_2(z)\Big|_{z\to\infty}=z^{-2}e^{i\beta}\left(z+i\beta_1+\frac{c+a}{2}\right)+o\left(z^{-3}\right),$$

$$\Phi(z)\big|_{z\to\infty}=-iR+o\left(z^{-1}\right),$$

$$R=\frac{\tau}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\,sinh\varphi_0(t)\,dt,$$

отримуємо такі вирази для невідомих коефіцієнтів:

$$C_1=-\tilde{\sigma}_{23}\sin\beta-\tilde{E}_1\cos\beta,\ D_1=\tilde{\sigma}_{23}\cos\beta-\tilde{E}_1\sin\beta,$$

$$C_2=-\frac{c+b}{2}C_1-\beta_1D_1,\ D_2=\beta_1C_1-\frac{c+a}{2}D_1-R,$$

де

$$\beta=\varepsilon\ln\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},\ \beta_1=\varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)},\ \lambda=\frac{b-a}{b-c}. \qquad (1.38)$$

За допомогою отриманих виразів загальний розв’язок неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана (1.22), (1.31) можна подати у вигляді:

$$\Omega_1(z)=\big(P(z)+\Phi(z)\big)E_1(z)+Q(z)E_2(z). \qquad (1.39)$$

З цього розв'язку можна знайти всі необхідні величини на межі поділу матеріалів.

1.4 Коефіцієнт інтенсивності напружень та довжина зони текучості

Відповідно до рівняння (1.16) поле напружень з правого боку від зони текучості може бути представлене у вигляді:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)+im_1\sigma_{21}^{(1)}(x_1,0)=r_1\left\{\big(P(x_1)+\Phi(x_1)\big)E_1(x_1)+Q(x_1)E_2(x_1)\right\}. \qquad (1.40)$$

Для довільного положення точки b, яка визначає довжину зони текучості, права частина (1.40) є сингулярною для $x_1\to b+0$ і крім того функція $P(b)+\Phi(b)$ – дійсна, а $E_1(x_1)\big|_{x_1\to b+0}=i/\sqrt{(b-c)(x_1-b)}$ є чисто уявнию.

Тому для будь-якого b нормальне напруження $\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)$ є скінченим для $x_1\to b+0$ в той час як $\sigma_{12}^{(1)}(x_1,0)$ є необмеженим. Для вилучення цієї особливості має бути справедливим рівняння

$$P(b)+\Phi(b)=0.$$

Після деякого перетворення це рівняння можна записати так

$$m_1\delta\cos\beta-\sin\beta-2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}\,(\cos\beta+m_1\delta\sin\beta)-$$

$$-\frac{2m_1}{\pi(b-c)}\frac{\tau_S}{\sigma_{22}^{\infty}}\int_a^b\sqrt{\frac{t-c}{b-t}}\cosh\varphi_0(t)\,dt=0. \qquad (1.41)$$

де $\delta=\sigma_{21}^{\infty}/\sigma_{22}^{\infty}$.

Це рівняння слід розв'язати відносно λ і після цього положення точки b можна знайти з рівняння. (1.38). Зазвичай рівняння (1.41) можна розв'язати чисельно, що дозволяє знайти найбільший корінь цього рівняння з інтервалу $(0,1)$, який ми позначаємо λ_0.

Нормальне напруження на інтервалі (a,b) згідно (1.16), (1.39) можна знайти у формі

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=q_1\left[\Omega_1^+(x_1)+\gamma_1\Omega_1^-(x_1)\right]-im_1\tau_S.$$

Підставляючи формулу (1.39), враховуючи, що [78]

$$E_1^{\pm}(x_1)=\frac{\pm e^{\pm\phi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}},\ E_2^{\pm}(x_1)=\frac{e^{\pm\phi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\ \text{для}\ x_1\in(a,b),$$

і використовуючи формули Племелі [32], отримуємо такий вираз

$$q_1^{-1}\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=P(x_1)\frac{e^{\varphi_0(x_1)}-\gamma_1e^{-\varphi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}+Q(x_1)\frac{e^{\varphi_0(x_1)}+\gamma_1e^{-\varphi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}+$$

$$+\frac{\tau}{\pi}\left\{-\sqrt{\frac{x_1-a}{x_1-c}}\left[e^{\varphi_0(x_1)}+\gamma_1e^{-\varphi_0(x_1)}\right]L_1(x_1)+\frac{e^{\varphi_0(x_1)}-\gamma_1e^{-\varphi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}L_2(x_1)\right\},\quad(1.42)$$

де інтеграли $L_1(x_1)$ і $L_2(x_1)$ слід розглядати в сенсі головного значення по Коші [3].

Далі розглянемо коефіцієнт інтенсивності нормального напруження (КІН) в точці a

$$K_1=\lim_{x_1\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0).\qquad(1.43)$$

Враховуючи, що $L_1(x_1)$ має особливість типу квадратного кореня для $x_1\to a+0$, а $L_2(x_1)$ має логарифмічну особливість у цій точці, ми отримуємо таку формулу

$$K_1=2q_1\sqrt{2\pi\gamma_1}\,\frac{Q(a)}{\sqrt{a-c}}.$$

Ця формула після деяких перетворень приймає вигляд

$$K_1=\frac{2q_1\sqrt{2\pi\gamma_1}}{\sqrt{a-c}}\left[\frac{l}{2}\sqrt{1-\lambda}\left(2\varepsilon C_1+\sqrt{1-\lambda}\,D_1\right)-R\right].\qquad(1.44)$$

Похідну від стрибка переміщень на інтервалі (c,a) (відкриття тріщини) можна знайти завдяки (1.17) у формі

$$S_1\left\langle u_2'(x_1,0)\right\rangle=Im\left[\Omega_1^+(x_1)-\Omega_1^-(x_1)\right].$$

Підставивши вираз (1.39), одержуємо

$$\left\langle u_2'(x_1,0)\right\rangle =$$

$$= \frac{\gamma_1+1}{S_1\sqrt{\gamma_1}}\left[\frac{P(x_1)+\Phi(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - i\frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{exp\left[i\varphi^*(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \text{ для } c<x_1<a, \quad (1.45)$$

де

$$\varphi^*(x_1) = 2\varepsilon ln\frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{l(a-x_1)}+\sqrt{(a-c)(b-x_1)}}.$$

Відкриття тріщини можна знайти за допомогою наступної формули

$$\left\langle u_2(x_1,0)\right\rangle = \int_c^{x_1}\left\langle u_2'(t,0)\right\rangle dt. \quad (1.46)$$

1.5 Числові результати та їх обговорення

Розрахунки проводилися для біматеріалу, що складається з ортотропного боро-епоксидного матеріалу (верхній) з $C_{11}^{(1)} = 26.9C_{66}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)} = 3.6C_{66}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)} = 3.15C_{66}^{(1)}$, $C_{66}^{(1)} = 4.78\times10^{10}\,Па$ та ізотропного (нижній), що має такі характеристики: $\mu^{(2)} = 0.478\times10^{10}\,Па$, $\nu^{(2)} = 0.345$. Було обрано $\tau_S = 10^7\,Па$, $c = -10мм$, $b = 10мм$ і розглядалися різні величини зовнішніх механічних навантажень.

У таблиці 1.1 довжини зони текучості та КІН K_1 представлено для $\sigma_{12}^{\infty} = 0$ і різних значень σ_{22}^{∞}. З цих результатів видно, що зростання σ_{22}^{∞} призводить до збільшення λ_0 і K_1. Такий висновок повністю узгоджується з висновком, який випливає з простих фізичних міркувань.

Залежність тих самих змінних, що і в Таблиці 1.1, від інтенсивності напружень зсуву на нескінченності наведено в Таблиці 1.2. Видно, що довжина зони текучості істотно зростає зі зростанням згаданого напруження, однак КІН змінюється несуттєво залежно від цього параметра. Також видно, що прикладене напруження зсуву несуттєво впливає на КІН нормального напруження.

Таблиця 1.1. Довжини зони текучості та КІН K_1 для $\sigma_{12}^{\infty}=0$ і різних значень σ_{22}^{∞}

$10^{-6}\sigma_{22}^{\infty}\left[Па\right]$	1	2	3	4	5
$100\lambda_0$	0.1318	0.3700	0.6581	0.9750	1.313
$10^{-5}K_1\left[Па/м^{3/2}\right]$	1.644	3.396	5.161	6.931	8.704

Таблиця 1.2. Довжина зони текучості та КІН K_1 для $\sigma_{22}^{\infty}=3\times10^6\ Pa$ і різних значень σ_{12}^{∞}

$10^{-6}\sigma_{22}^{\infty}\left[Па\right]$	0	1	2	3	4	5	6
$100\lambda_0$	0.6581	1.902	4.039	7.100	11.04	15.77	21.19
$10^{-5}K_1\left[Па/м^{3/2}\right]$	5.161	5.049	5.107	5.290	5.576	5.954	6.425

Відкриття тріщини $\left\langle u_2\left(x_1,0\right)\right\rangle$ для $c=-10мм$, $b=10мм$, $\sigma_{22}^{\infty}=3\times10^6\,Па$ представлено на рис. 1.2 для різних значень σ_{12}^{∞}. Лінії I, II, III та IV відповідають $\sigma_{12}^{\infty}=0$, $2\times10^6\,Па$, $4\times10^6\,Па$ та $6\times10^6\,Па$, відповідно. З цих результатів випливає, що розкриття тріщини майже симетричне для $\sigma_{12}^{\infty}=0$, оскільки довжина зони текучості в цьому випадку надзвичайно мала, і проблема майже симетрична. Однак, збільшення σ_{12}^{∞} призводить до деякого викривлення кривої та її відхилення від симетричного стану.

Варіацію напруження зсуву $\sigma_{21}^{(1)}\left(x_1,0\right)$ у правій частині зони текучості для $\sigma_{22}^{\infty}=3\times10^6\,Па$ за таких же геометричних характеристик тріщини і механічного навантаження та σ_{12}^{∞}=0 (лінія I), $2\times10^6\,Па$ (II), $4\times10^6\,Па$ (III) та $6\times10^6\,Па$ (IV) представлено на Рис. 1.3.

Значення b для ліній I, II, III і IV знайдено з використанням таблиці 1.1 і дорівнюють 10,13 *мм*, 10,84 *мм*, 12,48 *мм* і 15,38 *мм*, відповідно. Як видно, розглянута модель плинності усунула особливості напруження зсуву та осциляцію нормального напруження на правій вершині тріщини. Таким чином, розглянутий підхід дозволяє отримати поле напруження зсуву в точці b, позбавлене особливості, і перетворити осциляційну особливість нормального напруження на звичайну кореневу особливість в точці a. Остання обставина дає можливість ввести КІН нормального напруження у загальновживаній формі.

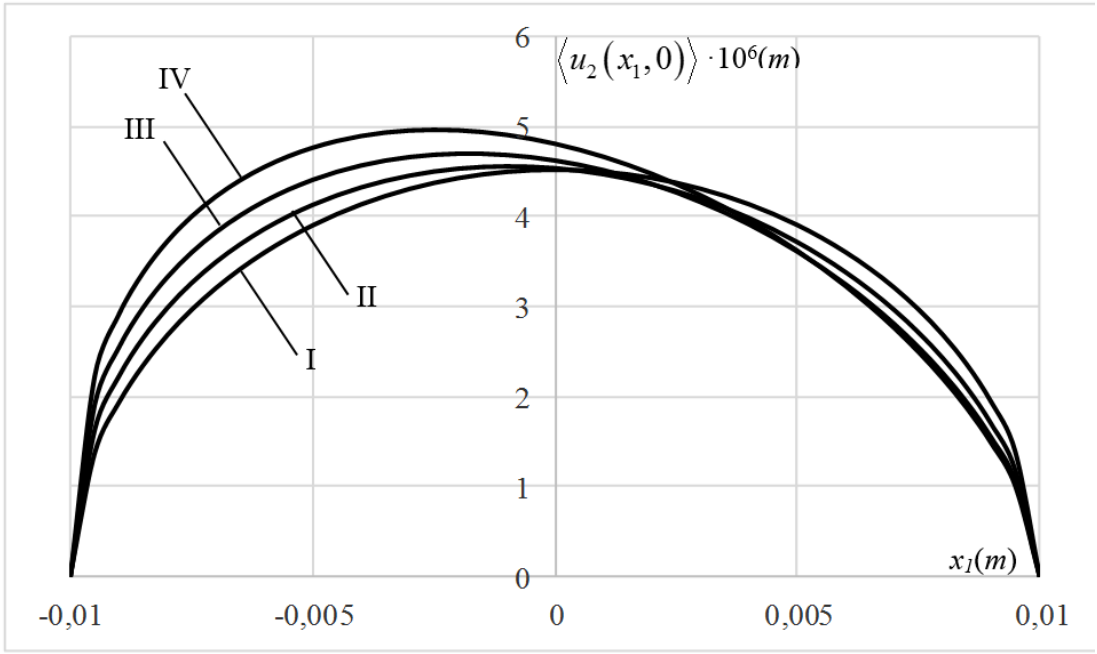


Рис. 1.2 Відкриття тріщини $10^6 \langle u_2(x_1,0)\rangle$ *м* для $\sigma_{22}^{\infty} = 3\times 10^6$ *Па* та різних значень σ_{12}^{∞}.

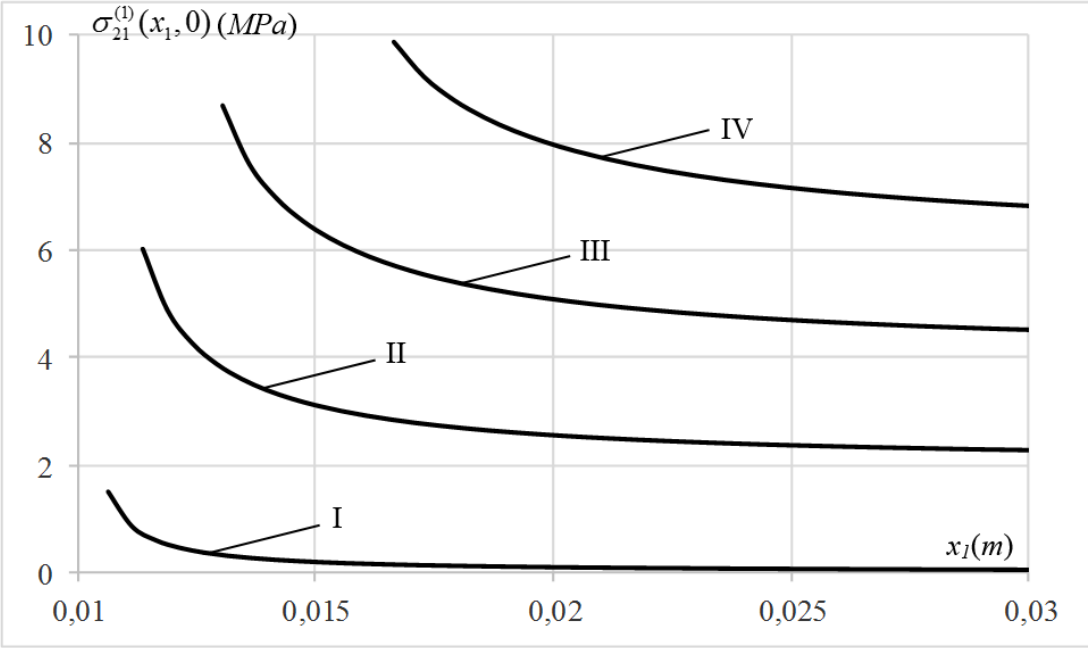


Рис.1.3 Зміна напруження зсуву $\sigma_{21}^{(1)}(x_1,0)\,МПа$ у правій частині зони текучості для $\sigma_{22}^{\infty}=3\times10^6\ Па$ і різних значень σ_{12}^{∞}.

1.6 Висновки до першого розділу

Розглянуто тріщину між двома матеріалами в біматеріальному анізотропному просторі під розтягувально-зсувним навантаженням на нескінченності. Припускаються умови плоскої деформації, а береги тріщини вважаються вільними від напружень. З використанням комплексних потенціалів отримано точний аналітичний розв’язок (1.24) сформульованої задачі. Напруження та похідні стрибків переміщення, отримані з цього розв’язку, мають осциляційні особливості типу квадратного кореня у вершинах тріщин. Запропоновано нову модель, засновану на введенні зсувних зон біля вершин тріщин, для усунення цих особливостей. Вказана модель використовується при припущенні, що міжфазний адгезивний шар м'якший, ніж матриці, що його оточують. Задачу зведено до неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана (1.22), (1.31) з умовами на нескінченності (1.23). Наведено точний аналітичний розв’язок цієї проблеми для випадку однієї зони текучості. Припущення щодо розгляду однієї зони текучості підтверджується тим, що інша зона надзвичайно коротка і не впливає на довшу

зону. Довжина зони текучості визначається з умови скінченності напруження зсуву на її кінці. Це дає трансцендентне рівняння (1.41) для визначення довжини зони текучості.

У результаті проведеного моделювання напруження зсуву стає обмеженим у всій області, а нормальне напруження має лише особливість типу квадратного кореня у вершинах тріщини. Це означає, що коефіцієнт інтенсивності напруження можна вводити і обчислювати традиційним способом. Залежності згаданого коефіцієнта інтенсивності напруження, довжини зони текучості, відкриття тріщини та напруження зсуву від прикладеного навантаження проілюстровано в табличній та графічній формах. Зокрема показано, що коефіцієнт інтенсивності нормального напруження істотно залежить від нормального напруження, що прикладається, і помірно від зовнішнього напруження зсуву. Варто особливо відзначити, що результати роботи отримано в простій аналітичній формі, зручній для інженерних застосувань.

РОЗДІЛ 2. ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В ІЗОТРОПНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

2.1 Формулювання основних співвідношень

Розглянемо біматеріал, що складається з двох різних ізотропних напівнескінченних просторів $x_2 > 0$ і $x_2 < 0$ з різними механічними характеристиками. Напруження σ_{ij} та переміщення u_i для двовимірної задачі теорії пружності можна представити у вигляді [32]:

$$\sigma_{22}^{(k)} - i\sigma_{12}^{(k)} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi_k'(z)} + \overline{\Psi_k(z)}, \tag{2.1а}$$

$$2\mu_k\left(u_1^{(k)} + i u_2^{(k)}\right) = \kappa_k\phi_k(z) - z\overline{\Phi_k(z)} - \overline{\psi_k(z)}, \tag{2.1б}$$

де $\Phi_k(z) = \phi_k'(z)$ і $\Psi_k(z) = \psi_k'(z)$ є аналітичними функціями комплексної змінної $z = x_1 + i x_2$ у відповідних півплощинах.

Крім того,

$$\kappa_k = \begin{cases} 3 - 4\nu_k & (\textit{для плоскої деформації}) \\ \dfrac{3-\nu_k}{1+\nu_k} & (\textit{для ПНС}) \end{cases}, \tag{2.2}$$

μ_k і ν_k – модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона відповідно. Риска позначає операцію спряження, а штрих – диференціювання щодо аргументу, $k = 1,2$ відносяться до верхньої та нижньої півплощин відповідно.

Вводячи такі аналітичні функції у відповідних півплощинах і враховуючи, що

$$\omega_k(z) = z\overline{\phi_k'}(z) + \overline{\psi}_k(z),$$

та замінюючи z на $\overline{z}$, отримуємо:

$$\overline{\psi}_k(\overline{z}) = \omega_k(\overline{z}) - \overline{z}\,\overline{\phi_k'(z)}, \tag{2.3а}$$

$$\overline{\psi_k'(z)} = \omega_k'(\overline{z}) - \overline{\phi_k'(z)} - \overline{z}\,\overline{\phi_k''(z)}. \tag{2.3b}$$

Підставивши (2.3) в (2.1) і позначивши $\omega_k'(z) = \Omega_k(z)$, приходимо до таких виразів:

$$\sigma_{22}^{(k)} - i\sigma_{12}^{(k)} = \Phi_k(z) + (z-\overline{z})\overline{\Phi_k'(z)} + \Omega_k(\overline{z}), \tag{2.4а}$$

$$2\mu_k\left(u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}\right) = \kappa_k\phi_k(z) + (\overline{z}-z)\overline{\Phi_k(z)} - \omega_k(\overline{z}). \tag{2.4б}$$

Задовольняючи умови неперервності

$$\sigma_{22}^{(1)} - i\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} - i\sigma_{12}^{(2)} \text{ для } x_1 \in (-\infty,\infty),$$

використовуючи вираз (2.4а), маємо:

$$\Phi_1^+(x_1) - \Omega_2^+(x_1) = \Phi_2^-(x_1) - \Omega_1^-(x_1) \text{ для } x_1 \in (-\infty,\infty). \tag{2.5}$$

Верхні індекси "+" і "–" позначають граничні значення аналітичних функцій для $x_2 \to +0$ і $x_2 \to -0$ відповідно.

Оскільки дві сторони (2.5) представляють граничні значення двох аналітичних функцій у відповідних півплощинах, то обидві функції можна аналітично продовжити на всю площину. Використовуючи умову обмеженості функцій на нескінченності, рівняння (2.5) дає

$$\begin{cases} \Phi_1(z) = \Omega_2(z), & x_2 > 0, \\ \Phi_2(z) = \Omega_1(z), & x_2 < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Вводячи нову функцію

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{\kappa_1}{2\mu_1}\Phi_1(z) + \dfrac{1}{2\mu_2}\Omega_2(z), & x_2 > 0, \\ \dfrac{\kappa_2}{2\mu_2}\Phi_2(z) + \dfrac{1}{2\mu_1}\Omega_1(z), & x_2 < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

за допомогою співвідношень (2.6) та (2.7), отримуємо такі рівняння:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1) = g\left\{F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1)\right\}, \tag{2.8}$$

$$\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + i\left\langle u_2'(x_1)\right\rangle = F^+(x_1) - F^-(x_1), \tag{2.9}$$

де

$$g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}, \quad \gamma = \frac{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}. \tag{2.10}$$

З рівняння (2.9) видно, що функція $F(z)$ аналітична у всій площині з розрізом уздовж $(-\infty,\infty)\setminus L$.

Вирази (2.6) та (2.14), (2.15) відіграють важливу роль у подальшому аналізі, і, крім того, вони можуть бути використані для розв'язування різних механічних задач для біматеріальної площини з розрізами вздовж межі поділу матеріалів.

2.2 Тріщина на межі поділу двох ізотропних матеріалів

Припустимо, що тріщина розташована на ділянці $[c,a]$ поділу матеріалу між двома напівнескінченними просторами. Півпростори навантажені рівномірно розподіленим нормальним напруженням σ_{22}^{∞} і напруженням зсуву σ_{12}^{∞} на нескінченності, які не залежать від координати x_3. Береги тріщини вільні від навантаження. Такі зовнішні напруження спричиняють плоский деформівний стан, отже, можна розглянути лише поперечний переріз, ортогональний до x_3 (рис. 2.1). На зону $[a,b]$ зараз не звертаємо уваги. Вона буде використана пізніше.

Граничні умови для сформульованої задачі такі:

$$\sigma_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(2)} = 0,\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0 \text{ для } c < x_1 < a,$$
$$\langle \sigma_{21} \rangle = 0,\ \langle \sigma_{22} \rangle = 0,\ \langle u_1' \rangle = 0,$$
$$\langle u_2' \rangle = 0 \text{ для } x_1 \notin (c,a). \qquad (2.11)$$

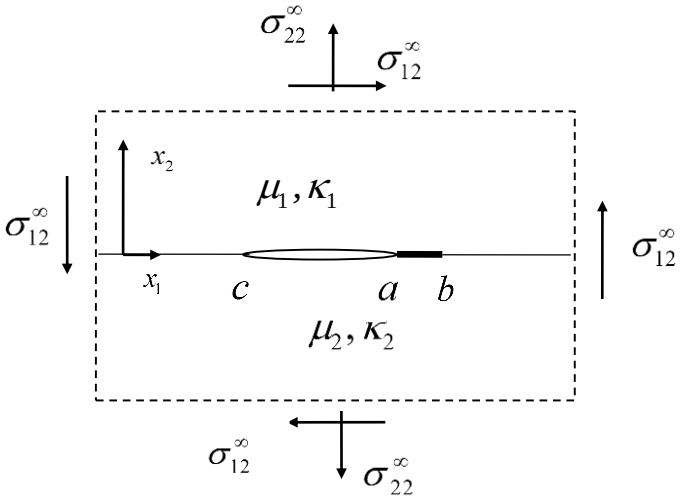


Рис. 2.1 Тріщина між двома ізотропними матеріалами

Розв'язок цієї задачі за умови на нескінченності

$$F_1(z)\big|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_{22} - i\tilde{\sigma}_{21}, \tag{2.12}$$

де

$$\tilde{\sigma}_{22} = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{r_1},\ \tilde{\sigma}_{21} = \frac{\sigma_{21}^{\infty}}{r_1},\ r_1 = (1+\gamma_1)g,$$

було отримано із використанням [32] у формі

$$F(z) = (\tilde{\sigma}_{22} - i\tilde{\sigma}_{21})\frac{z-(a+c)/2 - i\varepsilon l}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{i\varepsilon}, \tag{2.13}$$

де $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\ln\gamma_1,\ l = b-c.$

Напруження на межі поділу, отримані з (2.8), (2.13), мають вигляд:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0) - i\sigma_{21}^{(1)}(x_1,0) = (\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{21}^{\infty})\times$$

$$\frac{x_1-(a+c)/2 - i\varepsilon l}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\left(\frac{x_1-c}{x_1-a}\right)^{i\varepsilon} \text{ для } x_1 > a \tag{2.14}$$

а похідну стрибків переміщення визначено з формули (2.9) у формі:

$$\langle u_1'(x_1,0)\rangle + i\langle u_2'(x_1,0)\rangle =$$

$$= -\frac{(\sigma_{22}^{\infty} i + \sigma_{21}^{\infty})}{g\sqrt{\gamma_1}}\frac{(x_1-(a+c)/2 - i\varepsilon l)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}}\left(\frac{x_1-c}{a-x_1}\right)^{i\varepsilon} \text{ для } c < x_1 < a. \tag{2.15}$$

Інтегруючи останнє співвідношення, отримаємо:

$$\langle u_1(x_1,0)\rangle + i\langle u_2(x_1,0)\rangle =$$

$$= \sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}\left\{\frac{(\sigma_{22}^{\infty} i + \sigma_{21}^{\infty})}{g\sqrt{\gamma_1}}\left(\frac{x_1-c}{a-x_1}\right)^{i\varepsilon}\right\} \text{ для } c < x_1 < a. \tag{2.16}$$

Швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) можна знайти за допомогою формул (2.14), (2.16) і представити у формі [84]:

$$G_{osc} = \frac{q}{4}a\pi(1+4\varepsilon^2)(\sigma^2+\tau^2), \tag{2.17}$$

де

$$q = \frac{\left(\mu_1 + \mu_2\kappa_1\right)\left(\mu_2 + \mu_1\kappa_2\right)}{\mu_1\mu_2\left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_2\kappa_1 + \mu_1\kappa_2\right)}.$$

2.3 Розробка моделі міжфазної тріщини, вільної від осциляції

Із рівнянь (2.14), (2.15) випливає, що нормальні і зсувні напруження та обидва стрибки переміщення мають осциляційну сингулярність у вершинах тріщини. Щоб перетворити цю сингулярність на неосциляційну, аналогічно попередньому розділу введемо зони передруйнування з постійними напруженнями зсуву на продовженні тріщини. Оскільки ці зони або дуже короткі, або одна зона істотно коротша за іншу, розглянемо для простоти лише довшу зону, припускаючи, що вона виникає на правому кінці тріщини (рис. 2.1). Якщо довша зона виникає на іншому кінці тріщини, то слід зробити просту перестановку півпросторів.

Отже, граничні умови для розглянутої моделі такі:

$$\sigma_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(2)} = 0,\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0 \ \text{ для } c < x_1 < a, \tag{2.18}$$

$$\sigma_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(2)} = \tau_0,\ \left\langle \sigma_{22} \right\rangle = 0,\ \left\langle u_2' \right\rangle = 0 \ \text{ для } a < x_1 < b, \tag{2.19}$$

$$\left\langle \sigma_{21} \right\rangle = 0,\ \left\langle \sigma_{22} \right\rangle = 0,\ \left\langle u_1' \right\rangle = 0,\ \left\langle u_2' \right\rangle = 0 \ \text{ для } x_1 \notin (c,a). \tag{2.20}$$

де τ_0 є граничне напруження зсуву, яке виникає на продовженні тріщини в зоні передруйнування $[a,b]$.

Наприклад, це може бути напруження зсуву для більш м'якої матриці або для клейового прошарку.

Задовольняючи умови на інтерфейсі (2.18), за допомогою (2.7) отримуємо рівняння:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \ \text{ для } c < x_1 < a. \tag{2.21}$$

Крім того, умови (19) і (20) ведуть до рівнянь:

$$Im\left[F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)\right] = -\tau_s / g,$$

$$Im\left[F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\right] = 0 \ \text{ для } a < x_1 < b. \tag{2.22}$$

Виконання граничних умов (2.20) забезпечує аналітичність функції $F(z)$ ззовні від інтервалу (c,b), а співвідношення (2.22) ведуть до рівняння:

$$Im\, F_1^{\pm}(x_1) = \tau \text{ для } a < x_1 < b, \tag{2.23}$$

де

$$\tau = -\tau_0 / r_1,\ r_1 = (1+\gamma_1) g.$$

Рівняння (2.21) та (2.23) представляють неоднорідну комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана. Умови на нескінченності (2.12) є справедливими для цієї задачі.

З використанням [36] загальний розв'язок проблеми (2.21), (2.23) було представлено у вигляді:

$$F_1(z) = \big(P(z) + \Phi(z)\big) X_1(z) + Q(z) X_2(z), \tag{2.24}$$

де

$$P(z) = C_1 z + C_2,\ Q(z) = D_1 z + D_2,$$

$$X_1(z) = i e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)},$$

$$X_2(z) = e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)}$$

$$\chi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}},\ z = x_1 + i x_2,$$

$$\Phi(z) = \frac{\tau}{\pi}\big[-iY(z) L_1(z) + L_2(z)\big],$$

$$L_1(z) = \int_a^b \sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\, \frac{\sinh \chi_0(t)}{t-z} dt,$$

$$L_2(z) = \int_a^b (t-c)(b-t) \frac{\cosh \chi_0(t)}{t-z} dt,$$

$$C_1 = -\tilde{\sigma}_{23} \sin\beta - \tilde{E}_1 \cos\beta,\ D_1 = \tilde{\sigma}_{23} \cos\beta - \tilde{E}_1 \sin\beta,$$

$$C_2 = -\frac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1,\ D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2} D_1 + R,$$

$$R = \frac{\tau}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\, \sinh \varphi_0(t)\, dt,$$

$$\beta = \varepsilon \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},$$

$$\beta_1 = \varepsilon \sqrt{(a-c)(b-c)},\ \lambda = \frac{b-a}{b-c}. \qquad (2.25)$$

2.4 Довжина зони передруйнуванням та швидкість звільнення енергії

Відповідно до рівнянь (2.8), (2.24) поле напружень праворуч від зони передруйнування може бути представлене у вигляді:

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0) - i\sigma_{21}^{(1)}(x_1,0) = r_1 F_1\ (x_1) =$$

$$= r_1 \left\{ \left(P(x_1) + \Phi(x_1) \right) X_1(x_1) + Q(x_1) X_2(x_1) \right\} \qquad (2.26)$$

Для довільного положення точки b права частина (2.25) є сингулярною для $x_1 \to b+0$. Для усунення цієї особливості має виконуватися рівняння

$$P(b) + \Phi(b) = 0.$$

Після певного перетворення це рівняння можна записати у вигляді:

$$-\delta \cos\beta - \sin\beta - 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}\left(\cos\beta - \delta\sin\beta\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi(b-c)} \frac{\tau_0}{\sigma_{22}^{\infty}} \int_a^b \sqrt{\frac{t-c}{b-t}} \cosh\varphi_0(t)\, dt = 0, \qquad (2.27)$$

де $\delta = \sigma_{21}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty}$ і $l = b-c$.

Отримане рівняння слід розв'язувати відносно λ, і тоді точку b можна знайти з рівняння (2.25). Як правило, рівняння (2.27) можна розв’язати чисельно, що дозволяє знайти корінь цього рівняння, який позначимо λ_0.

Нормальне напруження на (a,b) згідно (2.8), (2.24) можна знайти у формі

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0) = t_1\left[F_1^{+}(x_1) + \gamma_1 F_1^{-}(x_1) \right] - iE_b.$$

Підставивши формулу (2.24), враховуючи, що [78]

$$X_1^{\pm}(x_1) = \frac{\pm e^{\pm\phi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}},$$

$$X_2^{\pm}(x_1)=\frac{e^{\pm\phi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\ \text{для}\ x_1\in(a,b),$$

та застосовуючи формули Племелі [32], приходимо до наступного виразу:

$$g^{-1}\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=P(x_1)\frac{e^{\chi_0(x_1)}-\gamma_1 e^{-\chi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}+$$

$$+Q(x_1)\frac{e^{\chi_0(x_1)}+\gamma_1 e^{-\chi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}+$$

$$+\frac{\tau}{\pi}\left\{-\sqrt{\frac{x_1-a}{x_1-c}}\left[e^{\chi_0(x_1)}+\gamma_1 e^{-\chi_0(x_1)}\right]L_1(x_1)+\frac{e^{\chi_0(x_1)}-\gamma_1 e^{-\chi_0(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}L_2(x_1)\right\},\quad(2.28)$$

де інтеграли $L_1(x_1)$ і $L_2(x_1)$ слід розглядати у сенсі головного значення по Коші [32].

Похідні від стрибка переміщення на інтервалі (c,a) можна знайти на основі (2.24) із використанням (2.9) у формі:

$$\langle u_2'(x_1,0)\rangle=Im\left[F_1^{+}(x_1)-F_1^{-}(x_1)\right].$$

Підставляючи вираз (2.24), отримуємо

$$\langle u_1'(x_1,0)\rangle+i\langle u_2'(x_1,0)\rangle=\frac{\gamma_1+1}{\sqrt{\gamma_1}}\left[\frac{P(x_1)+\Phi(x_1)}{\sqrt{b-x_1}}-\right.$$

$$\left.-i\frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{exp\left[i\varphi^{*}(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-c}}\ \text{для}\ c<x_1<a,\qquad(2.29)$$

де

$$\varphi^{*}(x_1)=2\varepsilon\, ln\frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{l(a-x_1)}+\sqrt{(a-c)(b-x_1)}},$$

і стрибок переміщення можна знайти як

$$\langle u_1(x_1,0)\rangle+i\langle u_2(x_1,0)\rangle=\int_c^x\left(\langle u_1'(t,0)\rangle+i\langle u_2'(t,0)\rangle\right)dt.\qquad(2.30)$$

Відповідно до [78] локальну ШЗЕ для точки a можна представити у формі:

$$G_a = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_a^{a+\Delta l} \sigma_{22}^{(1)}(x_1,0) \left\langle u_2(x_1 - \Delta l,0) \right\rangle dx_1 \right. \tag{2.31}$$

На основі формул (2.28), (2.29) в околі цієї точки справедливі наступні асимптотичні формули:

$$g^{-1}\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)\Big|_{x_1 \to a+0} = Q(a)\frac{e^{\chi_0(a)} + \gamma_1 e^{-\chi_0(a)}}{\sqrt{(a-c)(x_1-a)}},$$

$$\left\langle u_2'(x_1,0) \right\rangle\Big|_{x_1 \to a-0} = -\frac{2\sqrt{\alpha}Q(a)}{\sqrt{(a-c)(a-x_1)}}. \tag{2.32}$$

Подальше інтегрування в (2.31) із використанням значення інтегралу [99]

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^{0.5-i\varepsilon} d\tau = \frac{\pi}{2}\frac{1-2i\varepsilon}{\sqrt{\alpha}},$$

та з урахуванням $e^{\chi_0(a)} + \gamma_1 e^{-\chi_0(a)} = 2\sqrt{\gamma_1}$, веде до формули

$$G_a = \frac{\pi r_1 Q^2(a)}{a-c}. \tag{2.33}$$

Слідуючи підходу [68], розглянемо контур Γ, що охоплює відрізок (a,b). В цьому випадку

$$J_Y = \oint_\Gamma \left\{ W n_1 - \sigma_{ij} n_i u_{j,i} \right\} ds,$$

де W – питома енергія деформації.

Використовуючи властивості незалежності J_Y від шляху, ми наближаємо контур Γ до відрізку (a,b) межі поділу матеріалів. Беручи до уваги, що товщина цієї зони прямує до нуля, приходимо до формули:

$$J_Y = \tau_0 \left\langle u_1(a,0) \right\rangle, \tag{2.34}$$

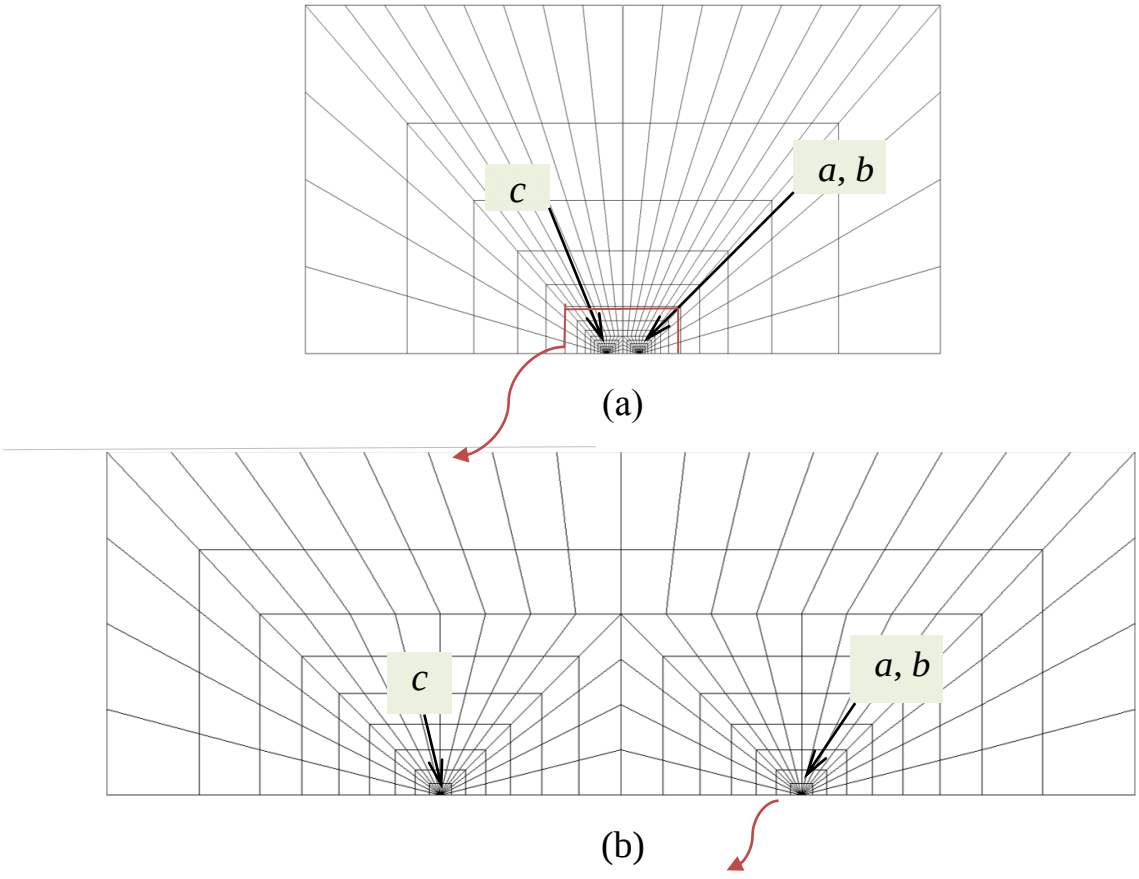
де $\left\langle u_1(a,0) \right\rangle$ – стрибок дотичного переміщення в точці a.

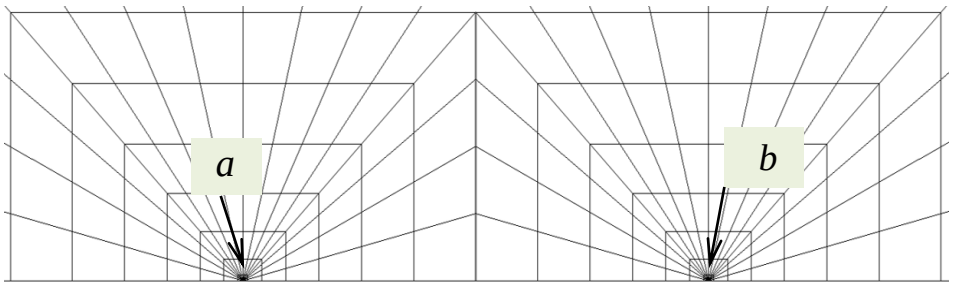
2.5 Чисельний аналіз та обговорення результатів

Чисельний аналіз був проведений для міжфазної тріщини з $c=-10\,мм$, $a=9.8\,мм$, $b=10\,мм$ і $E_1=3\times10^4\,H/мм^2$, $\nu_1=0.29$. Для розрахунків нижній півпростір вважали гіпотетичним матеріалом із характеристиками $E_2=3\times10^8\,H/мм^2$, $\nu_2=0.345$. Були обрані різні значення τ_0 та різні значення зовнішніх механічних навантажень. Результати розрахунків правої точки зони плинності b, $\langle u_1(a,0)\rangle$, значення ШЗЕ для моделі відкритої тріщини G_{osc}, значення G_a та загальна ШЗЕ

$$G=G_a+J_y \tag{2.35}$$

представлено в таблиці 2.1 для $\sigma_{22}^{\infty}=10\,H/мм^2$ і різних значеннях σ_{12}^{∞}.





(c)

Рис. 2.2 Глобальна сітка у всій області (a) та локальні сітки біля області тріщини (b) та біля правої вершини тріщини (c)

Із двох останніх стовпців таблиці 2.1 добре видно, що значення G, отримані для розробленої моделі, та ШЗЕ класичної (осциляційної) моделі добре узгоджуються, і їх різниці не перевищують 2%. Цікаво відзначити також, що вхідні дані J_y в G є досить чутливими для $\tau_0 \neq 0$.

Для перевірки обґрунтованості отриманих аналітичних формул та результатів було проведено моделювання методом кінцевих елементів із використанням студентської версії пакету ABAQUS. У цьому випадку нижній матеріал вважався абсолютно жорстким, а верхній – таким же, як і раніше. Більше того, розглядалася скінченна область із розмірами, набагато більшими за довжину тріщини. Отже, інтерфейс із зазначеними вище характеристиками розшаровувався вздовж фіксованої сторони прямокутника $-200\,мм \le x_1 \le 200\,мм$, $0 \le x_2 \le 200\,мм$. Скінченні елементи сітки з локальними зонами рафінованої сітки показані на рис. 2.2.

Результати розрахунків методом скінченних елементів для $\sigma_{22}^{\infty} = 10\,H/мм^2$, різних значень τ_0, а також для $\sigma_{12}^{\infty} = 0$ і $\sigma_{12}^{\infty} = -4\,N/mm^2$ наведені у таблицях 2.2 та 2.3 відповідно. У цій та наступних таблицях розмірність напружень є $H/мм^2$, довжини та переміщення – *мм*, ШЗЕ – *Н*/*мм*.

Таблиця 2.1 Значення геометричних параметрів та ШЗЕ для $\sigma_{22}^{\infty} = 10\, H / мм^2$ і різних значень σ_{12}^{∞} і τ_0

σ_{12}^{∞}	$-\tau_0$	$\langle u_1(a,0)\rangle \times 10^4$	b	$G_a \times 10^2$	$G \times 10^2$	$G_{osc} \times 10^2$
0	30,1	4.19	9.9997	3.26	4,52	4.54
-4	59,1	5,99	10.0011	1,78	5.32	5.22
-8	88,5	7,75	10.0001	0,738	7,59	7.45

Таблиця 2.2 Значення параметрів руйнування для $\sigma_{12}^{\infty} = 0$ і різних значень напруження зсуву в зоні передруйнування

$\tau_0 \left[H / мм^2 \right]$	$\langle u_1(a,0)\rangle \times 10^4$	$G_a \times 10^2$	$G_b \times 10^2$	$G \times 10^2$
0	6.46	3.92	0,675	4.59
20	4.91	3,52	0,081	4.58
25	4.46	3.42	0,0226	4.59
27	4.45	3.38	0,0094	4.60
29	4.30	3.35	0,00089	4.59
30.1	4.19	3.33	≈ 0	4.60

Таблиця 2.3 Значення параметрів руйнування для $\sigma_{12}^{\infty} = -4\, H / мм^2$ і різних значень зсувного напруження в зоні передруйнування

$\tau_0 \left[H / мм^2 \right]$	$\langle u_1(a,0)\rangle \times 10^4$	$G_a \times 10^2$	$G_b \times 10^2$	$G \times 10^2$
0	10.31	2.77	2,57	5.34
30	8.08	2.27	0,638	5.33
35	7.70	2.20	0,442	5.34
45	6,96	2.04	0,157	5.33
52	6.44	1.94	0,0437	5.33
59.1	5.91	1,84	≈ 0	5.33

У цих таблицях представлено ШЗЕ G_a і G_b в точках a і b, відповідно. Крім того, також наведено тангенціальний стрибок зміщення $\langle u_1(a,0)\rangle$, що дозволяє обчислити ШЗЕ J_Y за формулою (2.34).

Нарешті, також представлено значення ШЗЕ

$$G = G_a + G_b + J_y. \tag{2.36}$$

Слід зазначити, що для $\lambda = \lambda_0$, тобто для реальної довжини зони передруйнування формула (2.36) перетворюється на формулу (2.35).

Із таблиць 2.2 і 2.3 видно, що значення τ_0 суттєво впливає на величини G_a, G_b і $\langle u_1(a,0)\rangle$, тобто на J_Y. Однак загальна ШВЕ G залишається майже незмінною щодо значення τ_0 , яке діє в зоні передруйнування і відіграє роль максимально допустимого напруження для цієї зони.

Також результати в останніх рядках таблиць 2.2, 2.3 добре узгоджуються з відповідними аналітичними результатами, представленими в таблиці 2.1. Цей факт підтверджує правильність отриманих результатів.

2.6 Висновки до розділу 2

Досліджено тріщину на межі поділу двох різнорідних напівнескінченних просторів під дією поля нормальних та зсувних напружень. Використовуються представлення напружень та похідних від стрибків зміщення за допомогою кусково-аналітичної функції. На основі цих формул подано точний аналітичний розв'язок сформульованої задачі, що має осциляційну сингулярність. Для усунення цієї особливості запропоновано модель, засновану на введенні зсувних зон передруйнування біля вершин тріщини. Математична реалізація цієї моделі призводить до неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана (2.21), (2.23), яку було розв'язано аналітично. Довжина зони передруйнування визначається з умови обмеженості напруження зсуву в її граничній точці, що веде до трансцендентного рівняння (2.27). Визначено локальні швидкості звільнення енергії у вершині тріщини, а

також ШЗЕ вздовж зони передруйнування. Їх сумарне значення, яке називається глобальною або загальною ШЗЕ, порівняно зі ШЗЕ класичної моделі та виявлено їхню хорошу збіжність. Подібну проблему для міжфазної тріщини в тілі кінцевих розмірів розглянуто методом скінченних елементів із використанням студентської версії пакету ABAQUS. Вважалося, що розмір тіла істотно більший за довжину тріщини. У цьому випадку розрахунки методом скінченних елементів демонструють хорошу узгодженість з аналітичними результатами, що підтвержує правильність розробленого підходу та отриманого розв'язку.

РОЗДІЛ 3. ПРО ОДИН СПОСІБ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТІВ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК

3.1 Постановка задачі та чисельний аналіз

Розглядається плоска задача для біматеріального тіла, яке утворене в результаті зчеплення ізотропних прямокутника $|x_1| \le h$, $0 < x_2 < c$ (верхній) з механічними характеристиками E_1, ν_1 і прямокутника $|x_1| < d$, $-b < x_2 < 0$ (нижній) з механічними характеристиками E_2, ν_2 (рис. 3.1). Сторона $x_2 = -b$ нижнього прямокутника жорстко закріплена, а на сторону $x_2 = c$ верхнього діє рівномірно розподілене розтягувальне напруження інтенсивності P.

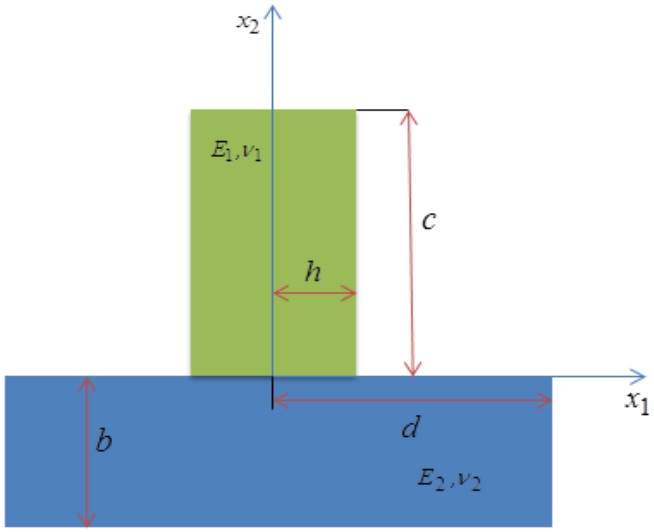


Рис. 3.1 Контакт двох прямокутників

Розв'язок задачі будувався методом скінченних елементів.

Вибиралися такі геометричні характеристики областей: $h = 15мм$, $c = 20мм$, $d = 30мм$, $b = 20мм$. З урахуванням симетрії відносно осі x_2, розбиття правої частини біматеріального тіла на скінченні елементи показано на рис. 3.2.

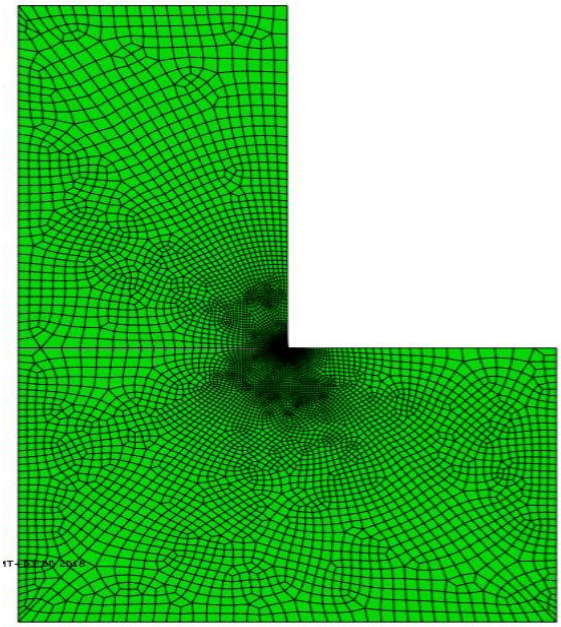


Рис. 3.2 . Сітка зі згущенням в околі кутової точки

Багатократне згущення сітки мало місце біля кутової точки, де напруження мають степеневу особливість [55]. Локальні фрагменти сітки в околі кутової точки наведено на рисунках 3.3 і 3.4.

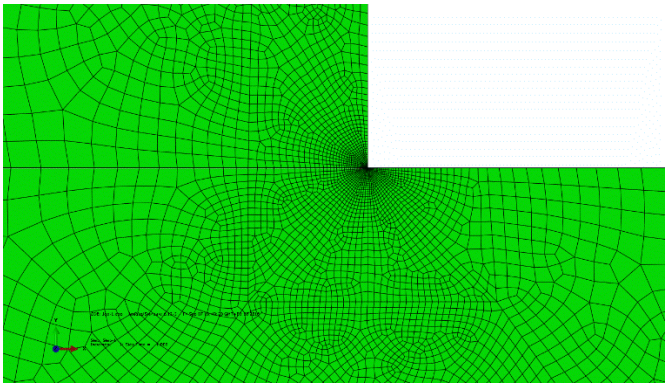


Рис. 3.3. Перший рівень згущення сітки

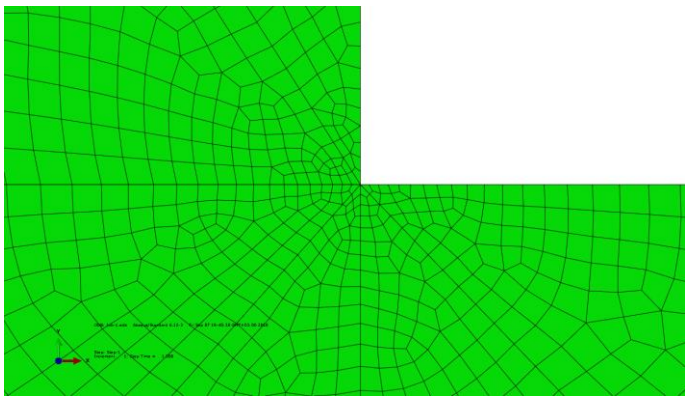


Рис. 3.4. Безпосередній окіл кутової точки

Для досягнення мети даної роботи характерний розмір скінченного елемента, що прилягає до кутової точки, складав $8{,}133\times10^{-5}$ від максимального розміру області.

Деякі результати розрахунків показано на наступних рисунках. Зокрема, на рис. 3.5 показно розподіл нормального напруження $\sigma_{22}\left(x_1,0\right)$ вздовж правої половини області контакту, а на рисунку 3.6 – розподіл $\sigma_{12}\left(x_1,0\right)$ вздовж цієї ж частини області контакту (криві I). Ці рисунки побудовано для випадку однакових матеріалів верхнього і нижнього прямокутників з $E_1 = E_2 = 1.\times10^5$ $МПа$, і $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ при $P = 1000\,Па.$

Із рис. 3.5 і 3.6 видно, що напруження різко зростають при наближенні до кутової точки. Це не дивно, тому що в даній точці напруження мають степеневу особливість, тобто ведуть себе як

$$\sigma_{11}\left(0,x_2\right)\Big|\xrightarrow[x_2\to h]{}\frac{K_1}{\left(h-x_2\right)^{\alpha}}\,, \tag{3.1}$$

де K_1 і α – коефіцієнт при особливості та степінь особливості, відповідно.

У даній роботі пропонується спосіб визначення степені цієї особливості і коефіцієнта при ній, який можна розглядати як узагальнення поняття коефіцієнта інтенсивності напружень, який є характерним для сингулярних точок зі степенем особливості 0,5.

Для визначення цих величин побудовано графік зміни нормального напруження $\sigma_{22}\left(x_1,0\right)$ в безпосередній близькості до кутової точки, а саме на проміжку $\left(14{,}557\textit{мм},\ 14{,}9952\textit{мм}\right)$. Цей графік наведено на рис. 3.7 (крива I).

Для порівняння на цьому ж рисунку наведено аналогічний графік для випадку наступних механічних характеристик прямокутників $E_1 = 1.\times 10^5$ *МПа*, $E_2 = 9.\times 10^5$ *МПа* і $\nu_1 = 0{,}2$, $\nu_2 = 0{,}3$ (крива II). Навіть із простого порівняння графіків 3.7 і 3.8 видно, що степінь особливості у випадку однакових матеріалів вища, ніж для випадку більш жорсткого нижнього матеріалу.

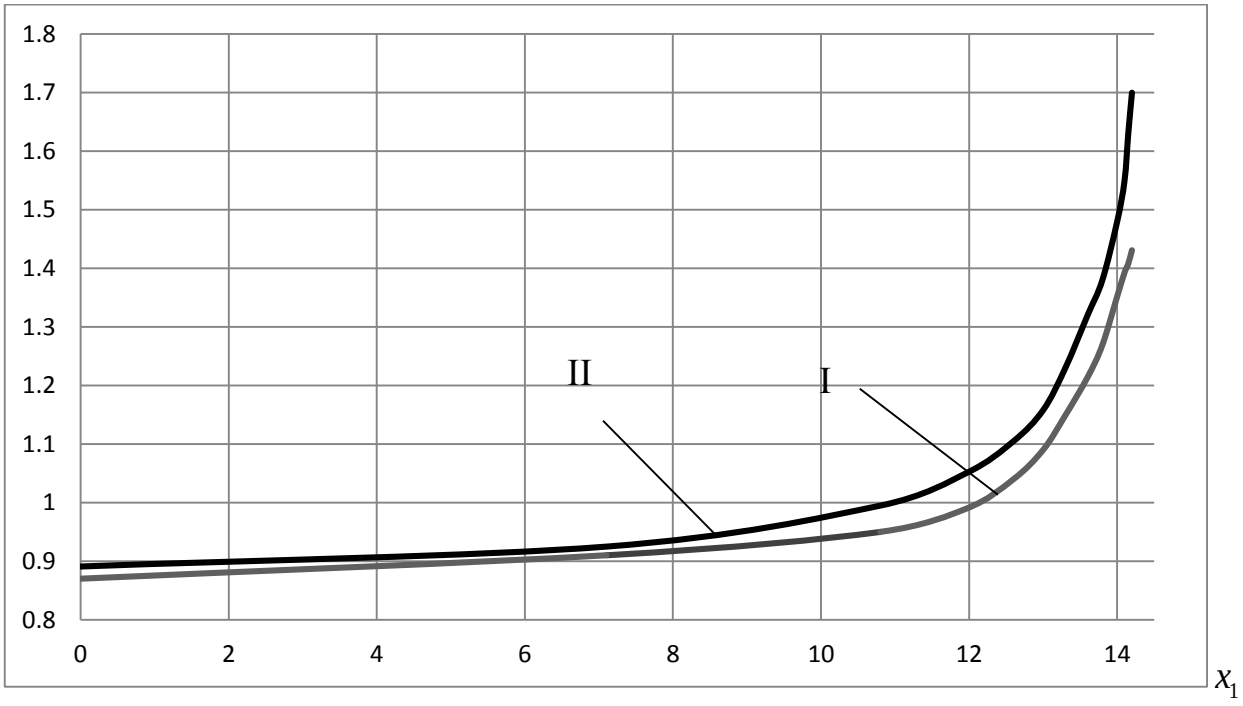


Рис. 3.5. Розподіл нормованого нормального напруження $\sigma_{22}\left(x_1,0\right)/P$ вздовж правої половини області контакту

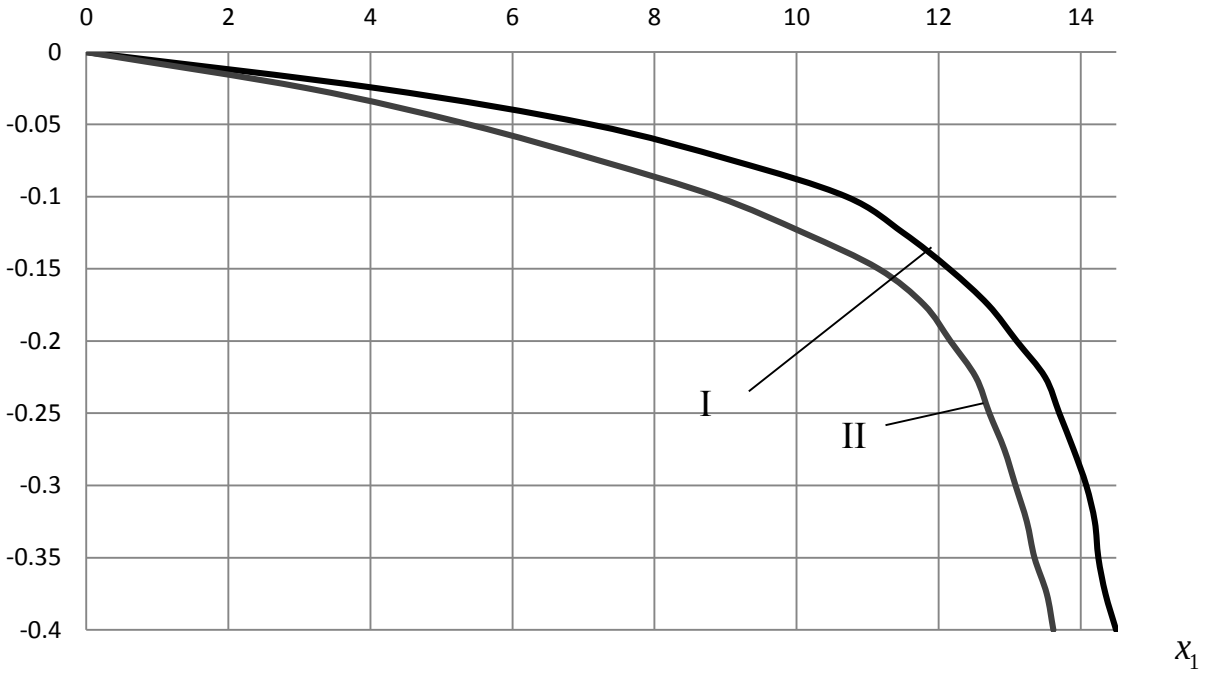


Рис. 3.6. Розподіл нормованого дотичного напруження $\sigma_{12}(x_1,0)/P$ вздовж правої половини області контакту

$\sigma_{22}(x_1,0)$

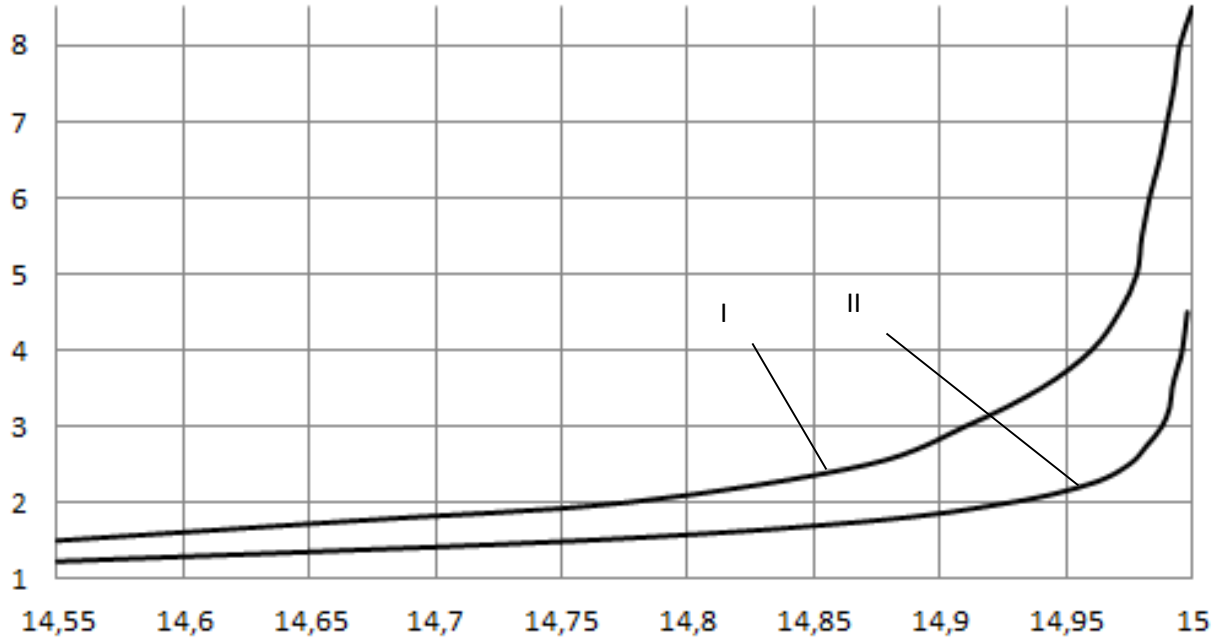


Рис. 3.7. Зміна нормованого нормального напруження $\sigma_{22}(x_1,0)/P$ в безпосередній близькості до кутової точки

Розглянемо методику визначення степені особливості напружень в околі кутових точок. Конкретно спосіб визначення степені особливості напружень біля кутової точки полягає у наступному. Вибираються дві точки $x_2^{(1)}$ та $x_2^{(2)}$ на деякому віддаленні від кутової точки і обчислюється

$$\sigma_{11}\left(0,x_2^{(1)}\right)=S_1,\ \sigma_{11}\left(0,x_2^{(2)}\right)=S_2.$$

Тоді, позначаючи $x_2^{(1)}=r_1,\ x_2^{(2)}=r_2$, із формули (3.1) маємо

$$S_1=\frac{K_1}{\left(h-r_1\right)^{\alpha}},\ S_2=\frac{K_1}{\left(h-r_2\right)^{\alpha}}.$$

Або

$$K_1=S_1\left(h-r_1\right)^{\alpha},\ K_1=S_2\left(h-r_2\right)^{\alpha}. \qquad (3.2)$$

Прирівнюючи праві частини останніх рівностей, одержуємо $S_1\left(h-r_1\right)^{\alpha}=S_2\left(h-r_2\right)^{\alpha}$.

Це співвідношення запишемо у вигляді

$$\left(\frac{h-r_1}{h-r_2}\right)^{\alpha}=\frac{S_1}{S_2},$$

що після логарифмування дає

$$\alpha\, ln\left(\frac{h-r_1}{h-r_2}\right)=ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right).$$

Із останнього рівняння одержуємо таку формулу для визначення степені особливості:

$$\alpha=ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right)/\,ln\left(\frac{h-r_1}{h-r_2}\right). \qquad (3.3)$$

Коефіцієнт при особливості (коефіцієнт інтенсивності) напружень може бути визначено по одній із формул (3.2).

Далі наведено деякі результати розрахунку степені особливості та КІН. Зокрема, для вищезгаданого однорідного матеріалу вибиралися точки $r_1=14{,}5557$ та $r_2=14{,}9831$ і обчислювались $S_1=1599{,}93$ та $S_2=6928{,}97$.

Підставляючи ці значення у формули (3.3) та (3.2), отримуємо $\alpha = 0{,}4487$, $K_1 = 1008{,}23\ Н / м^{3/2}$.

Аналогічним чином, вибираючи для неоднорідного матеріалу $r_1 = 14{,}5458$ та $r_2 = 14{,}9831$ і обчислюючи $S_1 = 1401{,}87$ та $S_2 = 3701{,}59$, одержуємо $\alpha = 0{,}3516$, $K_1 = 1110{,}69\ Н / м^{3/2}$.

3.2 Аналітичне дослідження проблеми та порівняння результатів

Розглянемо тепер розв'язання аналогічної задачі аналітичним методом.

При цьому будемо вважати, що довжини обох прямокутників набагато більші їхньої ширини, і верхній та нижній прямокутники можна розглядати як півполосу $|x_1| \le h$, $0 < x_2 < \infty$ та полосу $|x_1| < \infty$, $-b < x_2 < 0$, відповідно.

Використаємо рівняння рівноваги для плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях:

$$\left(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)}\right)\frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial x_j} + \mu^{(i)} \Delta u_j^{(i)} = 0\ ,\ \left(j = 1,2\right), \tag{3.4}$$

де

$$\theta^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_2}\ ,\ \lambda^{(i)} = \frac{\left(1-\nu_i\right)E_i}{2\left(1-2\nu_i\right)\left(1+\nu_i\right)}\ ,\ \mu^{(i)} = \frac{E_i}{2\left(1+\nu_i\right)}.$$

Введемо невідомі функції

$$q_1\left(x_1\right) = \sigma_{12}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \sigma_{12}^{(2)}\left(x_1,0\right)\ ,$$

$$q_2\left(x_1,0\right) = \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1}\left(x_1,0\right) = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\left(x_1,0\right) \text{ при } \left|x_1\right| \le h\,. \tag{3.5}$$

Застосовуючи метод інтегральних перетворень і вводячи крім цих невідомих функцій також функцію

$$q_3\left(x_1\right) = \sigma_{22}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \sigma_{22}^{(2)}\left(x_1,0\right) \text{ для } \left|x_1\right| \le h\,,$$

знайдемо окремо розв'язки задач для смуги і півсмуги.

Розв'язок рівнянь (3.5) для смуги $\left(i = 2\right)$ при граничних умовах (3.1) та умовах

$$\sigma_{2i}^{(2)}(x_1,0)=\begin{cases} q_{2i-1}(x_1), & |x_1|\le h, \\ 0 \quad\quad , & |x_1|>h, \end{cases} \tag{3.6}$$

отримано шляхом застосування комплексного перетворення Фурьє по координаті x_2.

Похідні від переміщень мають вигляд:

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}(x_1,0)=$$

$$=\pi\chi_{21}^0 q_3(x_1)+\chi_{22}^0\int_{-h}^{h}\frac{q_1(y)}{y-x_1}dy+\sum_{j=1-h}^{2}\int_{-h}^{h}q_{5-2j}(y)\psi_{2j}^0(x_1,y)dy, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}(x_1,0)=\chi_{11}^0\int_{-h}^{h}\frac{q_3(y)}{y-x_1}dy-\pi\chi_{12}^0 q_1(x_1)+\sum_{j=1-h}^{2}\int_{-h}^{h}q_{5-2j}(y)\psi_{1j}^0(x_1,y)dy,$$

де

$$\chi_{ii}^0=\chi_1,\ \chi_{ij}^0=\chi_2,\ (j\ne i),$$

$$\chi_1=2\chi_3\left(1-\nu^{(2)}\right),\ \chi_2=\chi_3\left(1-2\nu^{(2)}\right),\ \chi_3=\frac{1+\nu^{(2)}}{\pi E^{(2)}},$$

$$\psi_{ii}^0(x_1,y)=\chi_1\int_0^{\infty}\left(p\gamma_{1p}-1\right)\sin p(y-x_1)dp,$$

$$\psi_{21}^0(x_1,y)=-\psi_{12}^0(x_1,y)=\chi_2\int_0^{\infty}\left(p\gamma_{2p}-1\right)\cos p(y-x_1)dp,$$

$$\gamma_{1p}=\frac{\left(2\chi' sh2p_1-4p_1\right)}{pD_p},$$

$$\gamma_{2p}=\frac{\left[\dfrac{2\chi' ch2p_1-4p_1^2}{\left(1-2\nu^{(2)}\right)}-2\chi'\right]}{pD_p},$$

$$D_p=2\chi' ch2p_1+4p_1^2+\chi'^2+1,$$

$$\chi'=3-4\nu^{(2)},\ p_1=pb_0.$$

При отриманні співвідношень (3.7) враховано формули

$$\int_{-h}^{h} q_{2i-1}(y)dy\int_{0}^{\infty} \sin p(y-x_1)dp = \int_{-h}^{h} \frac{q_{2i-1}(y)}{y-x_1}dy,$$

$$\int_{-h}^{h} q_{2i-1}(y)dy\int_{0}^{\infty} \cos p(y-x_1)dp = \pi q_{2i-1}(x_1),$$

які витікають з властивостей інтегральних перетворень Фурьє.

Для розв'язання задачі для півсмуги проводиться заміна $\sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=\tilde{\sigma}_{22}^{(1)}(x_1,0)+\sigma_0$.

Тоді для додаткового напруженого стану маємо однорідні граничні умови на нескінченності. Застосовуючи для визначення цього стану інтегральні перетворення Фур'є і методику роботи [88] та повертаючись до основних невідомих, одержуємо вирази для $u_1^{(1)\prime}(0,x_1)$, $\sigma_{22}^{(1)}(0,x_1)$ у вигляді:

$$u_1^{(1)\prime}(x_1,0)=\Gamma_1^0(x_1),\ \sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=-2\mu^{(1)}\Gamma_2^0(x_1), \tag{3.8}$$

$$2\pi\Gamma_i^0(x_1)=\sum_{j=1}^{2}\eta_{ij}^0\int_{-h}^{h}\frac{q_j(y)}{x_1-y}dy+\Omega_i^0(x_1), \tag{3.9}$$

а η_{ij}^0 і $\Omega_i^0(x_1)$ визначаються формулами:

$$\eta_{11}^0=-\chi e_3,\ \eta_{12}^0=-e_2e_4,\ \eta_{21}^0=-e_2e_3,\ \eta_{11}^0=e_4,$$

$$e_1=1-\nu^{(1)},\ e_2=1-2\nu^{(1)},\ \chi=3-4\nu^{(1)},$$

$$e_3=-\left(2\mu^{(1)}e_1\right)^{-1},\ e_4=\frac{1}{e_1}, \tag{3.10}$$

$$\Omega_i^0(x_1)=\int_{-h}^{h}\left[\tilde{\mathrm{M}}_1(x_1,y,\beta_i)q_1(y)+\tilde{\mathrm{M}}_2(x_1,y,\beta_i)q_2(y)\right]dy+\tilde{Q}_i.$$

Ядра $\tilde{\mathrm{M}}_j(x_1,y,\beta_i)$ ($\beta_1=\nu^{(1)},\ \beta_2=1$) в даному випадку мають наступний вигляд:

$$\tilde{\mathrm{M}}_i(x_1,y,\beta_i)=e_{i+2}\int_{0}^{\infty}\Delta_t^{-1}\mathrm{M}_i^*(x_1,y,t,\beta)dt,$$

$$\mathrm{M}_i^*(x_1,y,t,\beta)=\left[f_{i1}(y,t,\beta)\chi_3(tx_1)+\right.$$

$$\left.+f_{i2}(y,t,\beta)tx_1\chi_4(tx_1)\right]exp\left[-(h-y)t\right], \tag{3.11}$$

$$f_{11}(y,t,\beta)=\left[2e_1+(h-y)t\right]\times$$
$$\times\left[th\chi_3(th)+\chi_4(th)\right]+\left[e_2+(h-y)t\right]th\chi_4(th)-$$
$$-2\beta\left\{\left[2e_1+(h-y)t\right]\chi_4(th)+\left[e_2+(h-y)t\right]\chi_3(th)\right\},$$

$$f_{12}(y,t,\beta)=-\left[2\left(1-\nu^{(1)}\right)+(h-y)t\right]\chi_4(th)-$$
$$-\left[e_2+(h-y)t\right]\chi_3(th), \qquad (3.12)$$

$$f_{21}(y,t,\beta)=\left[th\chi_3(th)+(1-2\beta)\chi_4(th)\right]t(h-y)-$$
$$-\left[th\chi_4(th)2\beta x_3(th)\right]\times\left[1-t(h-y)\right]\chi_3(th),$$

$$f_{22}(y,t,\beta)=\left[1-t(h-y)\right]\chi_3(th)-t(h-y)\chi_4(th),$$
$$\Delta_t=0{,}5sh(2th)+rth,$$

а $\tilde{Q}_1=0$, $\tilde{Q}_2=\sigma_0$.

Функції $\Delta_t^{-1}\mathrm{M}_i^*(x_2,y,t,\beta)$ і $\Delta_t^{-1}Q^*(x_2,t,\beta)$ при $t\to 0$ мають особливості, характер яких описаний в роботі [18].

Застосовуючи тому для усунення цієї особливості методику роботи [18], отримуємо

$$\Omega_i^0(x_2)=\int_{-h}^{h}\left[\mathrm{M}_1(x_2,y,\beta_i)q_1(y)+\mathrm{M}_2(x_2,y,\beta_i)q_2(y)\right]dy+\tilde{Q}_i, \qquad (3.13)$$

де

$$\mathrm{M}_i(x_1,y,\beta_i)=e_{i+2}\int_0^{\infty}\Delta_t^{-1}\left[\mathrm{M}_i^*(x_1,y,t,\beta)-\mathrm{M}_i^{**}(x_1,y,t,\beta)\right]dt, \qquad (3.14)$$

$$\mathrm{M}_1^{**}(x_1,y,t,\beta)=\begin{Bmatrix}e_2\\ \left[2\left(2\beta\nu^{(1)}-\beta-\nu^{(1)}\right)(1+ty)+ty\right]tx_1\end{Bmatrix}, \qquad (3.15)$$

$$\mathrm{M}_1^{**}(x_1,y,t,\beta)=\begin{Bmatrix}2\beta\\ 2x_1y\beta t^2\end{Bmatrix}.$$

Із (3.3), (3.4) витікає, що у зоні контакту повинні виконуватися умови

$$u_2^{(1)}(x_1,0)=u_2^{(2)}(x_1,0),\ \sigma_{22}^{(1)}(x_1,0)=q_3(x_1),$$

$$\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}(x_1,0)=q_2(x_1)\ \text{при}\ |x_2|\le h. \qquad (3.16)$$

Підставляючи співвідношення (3.7)-(3.9) у (3.18), отримуємо таку систему:

$$\sum_{n=1}^{3}\left\{\int_{-h}^{h}\left[\frac{a_{mn}}{x_1-y}+D_{mn}(x_1,y)\right]q_n(y)dy+\pi\theta_{mn}^0 q_n(x_1)\right\}=B_m, \qquad (3.17)$$

де $|x_1|\le h$,

$$a_{ij}=\eta_{ij}^0+2\pi\delta_i^1\delta_j^1\chi_1,\ a_{33}=1,\ a_{13}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=0,$$

$$D_{ij}(x_1,y)=M_j(x_1,y,\beta_i)-2\pi\,\delta_i^1\delta_j^1\psi_{22}^0(x_1,y),$$

$$D_{13}(x_1,y)=-2\pi\psi_{21}^0(x_1,y),\ D_{23}(x_1,y)=0,$$

$$D_{31}(x_1,y)=-\frac{\psi_{12}^0(x_1,y)}{\chi_1},\ D_{32}(x_1,y)=0,$$

$$D_{33}(x_2,y)=-\frac{\psi_{11}^0(x_1,y)}{\chi_1},$$

$$\theta_{13}^0=-2\pi\chi_2,\ \theta_{23}^0=\frac{1}{\mu^{(1)}},\ \theta_{31}^0=\frac{\chi_2}{\chi_1},\ \theta_{32}^0=\frac{1}{\chi_1},$$

$$\theta_{11}^0=\theta_{12}^0=\theta_{21}^0=\theta_{22}^0=\theta_{33}^0=0,$$

$$B_i=-\tilde{Q}_i,\ B_3=0,\ m=1,2,3.$$

Розв’язок системи (3.17) розшукується у вигляді:

$$q_m(y)=\frac{q_m^*(y)}{\left(h^2-y^2\right)^{\alpha}}, \qquad (3.18)$$

де $0\le Re(\alpha)<1,\ q_m^*(\pm h)\ne 0$.

Додаткові умови для цієї системи слідують з характеристик симетрії невідомих функцій, а також умов рівноваги півсмуги і мають вигляд:

$$\int_{-h}^{h} q_m(y)\,dy = T_m, \tag{3.19}$$

де $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 = 2hP$.

Степінь особливості α знаходиться за методикою [33] і зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння [19]:

$$\Delta(\alpha_1) \equiv det\left[\psi_{pq}(\alpha_1)\right]_1^3 = 0 \tag{3.20}$$

де

$$\psi_{1i}(\alpha) = a_{1i}\cos\pi\alpha + d_{1i}\varepsilon_i\left(\nu^{(1)}\right),$$

$$\psi_{2i}(\alpha) = a_{21}\cos\pi\alpha + d_{2i}\varepsilon_i,$$

$$\varepsilon_i(\beta) = \ell_{i1}(\beta) + \alpha\ell_{i2}(\beta) - \alpha(\alpha+1),$$

$$\psi_{i3}(\alpha) = \theta_{i3}^0 \sin\pi\alpha,$$

$$\psi_{3i}(\alpha) = \theta_{3i}^0 \sin\pi\alpha,$$

$$\psi_{33}(\alpha) = a_{33}\cos\pi\alpha.$$

Із цього рівняння, зокрема, витікає, що для $E_1 = E_2 = 1.\times 10^5$ *МПа*, і $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ степінь особливості $\alpha \approx 0{,}455$, а для $E_1 = 1.\times 10^5$ *МПа*, $E_2 = 9.\times 10^5$ *МПа* і $\nu_1 = 0{,}2$, $\nu_2 = 0{,}3$ маємо $\alpha \approx 0{,}366$.

Видно, що узгодженість результатів, отриманих за допомогою МСЕ, із вказаними є досить прийнятною.

Розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (3.18) при додаткових умовах (3.19) виконано за допомогою методу механічних квадратур, описаного в [20]. При цьому враховувалася степінь особливості розв'язку α, і як точки колокації використовувалися нулі відповідних многочленів Якобі.

У результаті для того ж однорідного матеріалу і навантаження, що і раніше, отримані розподіли нормального та дотичного напружень вздовж області контакту, які які зображено лініями II на рис. 3.5 і 3.6, відповідно.

Обчислено також коефіцієнти при особливостях нормального напруження для розглянутих вище однорідного та неоднорідного матеріалів. Вони вийшли рівними 1014,02 $H / м^{3/2}$ та 1016, 45 $H / м^{3/2}$, відповідно.

Порівнюючи отримані результати аналітичного та чисельного аналізу, видно їх досить хорошу узгодженість, що підкреслює коректність як аналітичного, так і чисельного підходів, використаних у даній роботі.

3.3 Спосіб знаходження параметрів руйнування для тріщин між двома матеріалами

Для ілюстрації методики, що пропонується, розглянемо модель, аналогічну до моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла [15, 59], яка була розвинута при дослідженні плоского напруженого стану тонкої пластини з тріщиною.

Відомо, що в цьому випадку на продовженнях тріщини розвиваються тонкі зони пластичності, отже, фактично задача стає пружно-пластичною. Але метод, запропонований в роботах [15, 59], дозволяє звести пружно-пластичну задачу до задачі лінійної механіки руйнування з невідомою довжиною зони ослаблених міжчастинних зв'язків (передруйнування), якою моделюється зона пластичності.

Для опису цієї моделі розглянемо спочатку нескінченну однорідну ізотропну пластину, послаблену ізольованою прямолінійною тріщиною $2l_0$ (рис. 3.8). Нехай у нескінченно віддалених точках пластини прикладено зовнішні розтягувальні напруження p, направленні перпендикулярно до лінії розміщення тріщини.

Віднесемо розглянуту пластину до прямокутної системи декартових координат xOy, вважаючи, що товщина пластини дорівнює одиниці, а тріщина розташована вздовж осі x на відрізку $|x| \le l_0$ (рис. 3.8).

Зазначимо, що якими б малими не були напруження p, в околі кінців реальної тріщини напруження $\sigma_y(x,0)$, визначені методами лінійної теорії

пружності, перевищують межу крихкої міцності матеріалу, тобто в цій частині тіла виникають області послаблених зв'язків. З симетрії задачі та властивостей δ_c-моделі [38], ці області можна розглядати як розрізи вздовж осі x при $l_0 \le |x| \le l$, протилежні берега яких притягуються з напруженням σ_0. Значення параметра l залишається поки що невідомим.

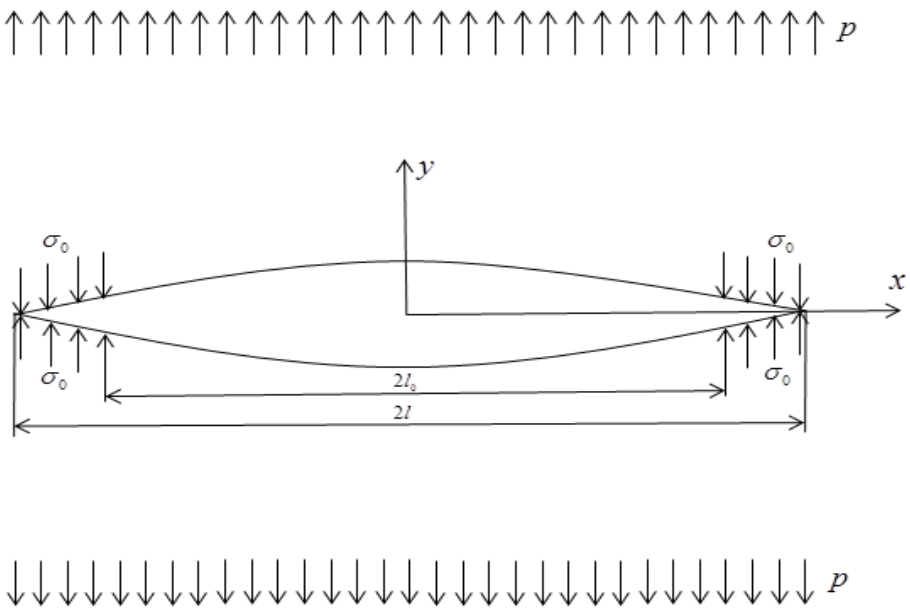


Рис. 3.8. Тріщина в однорідному матеріалі з областями послаблених міжчастинних зв'язків

Отже, задача про напружено-деформований стан в пластині з тріщиною зводиться до наступної задачі математичної теорії пружності. В пружній площині xOy (рис. 3.8) маємо розріз довжиною $2l\left(-l \le x \le l\right)$. На поверхні цього розрізу діє напруження

$$\tau_{xy}\left(x,0\right)=0,\ \sigma_y\left(x,0\right)=\begin{cases}0, & |x| \le l_0,\\ \sigma_0, & l_0 \le |x| \le l,\end{cases} \tag{3.21}$$

а в нескінченно віддалених точках площини $\sigma_y\left(x,\infty\right)=p$.

Віднімаючи від напруженого стану, який при цьому виникає, однорідний напружений стан $\sigma_x=\tau_{xy}=0,\ \sigma_y\left(x,y\right)=p$, отримаємо деякий

допоміжний напружений стан, що зникає на нескінченості. На поверхні розрізу цей стан визначається граничними умовами:

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\ \sigma_y(x,0)=\begin{cases}-p,\ |x|\le l_0,\\ \sigma_0-p,\ l_0\le|x|\le l,\end{cases} \tag{3.22}$$

а на нескінченності всі компоненти допоміжного напруженого стану прямують до нуля.

Розв'язок сформульованої задачі лінійної механіки руйнування наведено в [15, 38]. Зокрема, переміщення верхнього берега тріщини та нормальне напруження на її продовженні визначаються формулами:

$$v(x,0)=2\pi cp\sqrt{l^2-x^2}+c\sigma_0\left\{-(x-l_0)\Gamma(l,x.l_0)-\right.$$

$$\left.-(x+l_0)\Gamma(l,x,-l_0)-4\sqrt{l^2-x^2}\,\arccos\frac{l_0}{l}\right\},\ |x|\le l, \tag{3.23}$$

$$\sigma_y(x,0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-l^2}}\left\{\pi(p-\sigma_0)\left(x-\sqrt{x^2-l^2}\right)+2\sigma_0\, x\arcsin\frac{l_0}{l}+\right.$$

$$\left.+\sigma_0\sqrt{x^2-l^2}\times\left[\arcsin\frac{l^2-xl}{l(x-l_0)}-\arcsin\frac{l^2+xl}{l(x+l_0)}\right]\right\},\ |x|\ge l, \tag{3.24}$$

де

$$c=\frac{1}{\pi E},\ \Gamma(l,x,\xi)=ln\frac{l^2-x\xi-\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}}{l^2-x\xi+\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}},\ |x|\le l \tag{3.25}$$

На основі формули (3.24) КІН

$$K_1=\lim_{x_1\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-l_0)}\,\sigma_y(x_1,0)$$

визначається формулою

$$K_1=\sqrt{\pi l}\left(p-\frac{2\sigma_0}{\pi}\arccos\frac{l_0}{l}\right), \tag{3.26}$$

а на основі формули (3.23) переміщення верхнього берега тріщини в її початковій вершині таке:

$$v(l_0,0)=2\pi cp\sqrt{l^2-l_0^2}+c\sigma_0\left\{-2l_0\Gamma(l,x,-l_0)-4\sqrt{l^2-x^2}\,arccos\frac{l_0}{l}\right\},$$

що після перетворень приводить до виразу:

$$v(l_0,0)=2c\left\{\pi\sqrt{l^2-l_0^2}\left(p-\frac{2\sigma_0}{\pi}arccos\frac{l_0}{l}\right)-2l_0\sigma_0\,ln\frac{l_0}{l}\right\}. \qquad (3.27)$$

Враховуючи, що при $x\to l+0$

$$\sigma_y(x,0)=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x-l)}}=\left(p-\frac{2\sigma_0}{\pi}arccos\frac{l_0}{l}\right)\sqrt{\frac{l}{2(x-l)}},$$

а при $x\to l-0$

$$v'(x,0)=2c\left(2\sigma_0\,arccos\frac{l_0}{l}-\pi p\right)\sqrt{\frac{l}{2(l-x)}},$$

одержуємо, що швидкість звільнення енергії (ШЗЕ), пов'язаної з КІН K_1 визначається формулою:

$$G_1=\pi cK_1^2.$$

Згідно з термінологією роботи [68] ця складова називається локальною ШЗЕ.

Складова ж ШЗЕ, що пов'язана з напруженням σ_0, така:

$$G_2=2\sigma_0 v(l_0,0)=4c\sigma_0\sqrt{\pi\frac{l^2-l_0^2}{l}}K_1-8cl_0\sigma_0^2\,ln\frac{l_0}{l}.$$

Ця ШЗЕ визначається роботою, виконаною напруженням σ_0 при розриві матеріалу на проміжку (l_0,l). Згідно з [68] ця складова називається глобальною ШЗЕ.

Повна величина ШЗЕ визначається формулою:

$$G=G_1+G_2. \qquad (3.28)$$

Напруження $\sigma_y(x,0)$, представлені формулою (3.24), при довільному значенні параметру l є необмеженим, якщо $x\to l$. Але вважаючи, що $x=l$ і прирівнюючи отриманий в цьому випадку вираз в фігурних дужках (3.24) до

нуля, отримуємо формулу для визначення параметра l_*, при якому $\sigma_y(x,0)$ стає обмеженим:

$$l_* = l_0 \, sec \frac{p\pi}{2\sigma_0}. \qquad (3.29)$$

У таблиці 3.1 наведено значення G_1, G_2 та G, отримані для різних значень l, що вибиралися з проміжку $[l_0, l_*]$, при $l_0 = 1\,м$, $p = 10^6\ Па$, $\sigma_0 = 20p$. У цьому випадку $l_* = 1.00309 м$, $G = G_1 = 157.24\ Н/м$ при $l = l_0$ і $G = G_2 = 157.08\ Н/м$ при $l = l_*$.

Таблиця 3.1 Зміна локальної та глобальної ШЗЕ при $l_0 = 1м$, $p = 10^6 Па$, $\sigma_0 = 20p$ та різних положеннях точки $l \in [l_0, l_*]$

$10^3 (l - l_0) / l_0$	G_1, *Н/м*	G_2, *Н/м*	G, *Н/м*
0	157.08	0	157.08
0.31	73.3857	83.7322	157.118
0.62	47.949	109.199	157.148
0.93	32.091	125.081	157.172
1.24	21.189	136.002	157.192
1.55	13.4543	143.754	157.208
1.86	7.96726	149.253	157.22
2.16	4.18337	153.046	157.23
2.47	1.74744	155.489	157.236
2.78	0.412837	156.827	157.24
3.09	0	157.241	157.241

Як видно з таблиці 3.1, значення G, отримані для значень l, що знаходяться в проміжку $[l_0, l_*]$, практично не відрізняються від значень G в крайніх точках вказаного відрізка, тобто G являється практично інваріантом по відношенню до положення точки l.

Слід також відзначити, що для різних значень σ_0 величини l_*, що визначаються формулою (3.29), будуть різними. При цьому величина $G_2 = 2\sigma_0\delta_2$, де $\delta_2 = 2v(l_0,0)$ буде являти собою глобальну ШЗЕ. Вона буде рівна локальній ШЗЕ для відповідної тріщини Гріффітса.

3.4. Зсувна тріщина

Аналіз, аналогічний попередньому розділу, можна провести для тріщини, при деформації якої визначальними є зсувні напруження.

Розглянемо для цього задачу, зображену на рис. 3.9. Тобто має місце контакт двох ізотропних прямокутників з механічними характеристиками E_1, ν_1 (верхній) і E_2, ν_2 (нижній). Нижній прямокутник жорстко закріплений нижньою стороною, а на сторони верхнього діють нормальні напруження q_1 і q_2. Вважається, що на частинах $a < |x| < b$ інтерфейсу виникло розшарування, тобто утворилися тріщини, які при $q_1 < 0$ відносяться до зсувного типу. Таке розшарування може виникати у зв'язку з високою концентрацією напружень у кутових точках з'єднання, що розглядається.

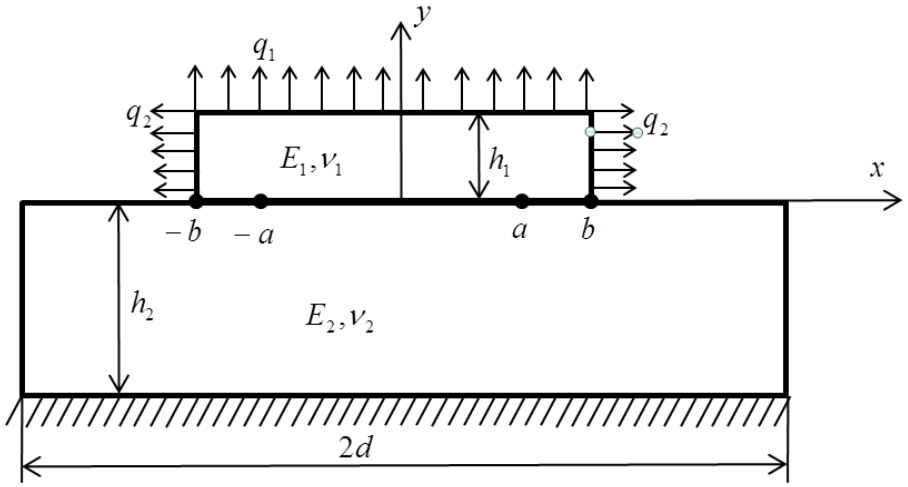


Рис. 3.9.1. Біматеріальна область з тріщинами зсуву біля кутових точок.

Застосуємо для аналізу цих тріщин модель, аналогічну моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла, але в її зсувному варіанті.

Введемо на продовженнях тріщин $c < |x| < a$ зони ослаблених міжчастинних зв'язків. Ці зони будемо моделювати розрізами, в яких діють зсувні напруження величини τ_0. Положення точок $-c$ і c вибирається довільним (рис. 3.9.2).

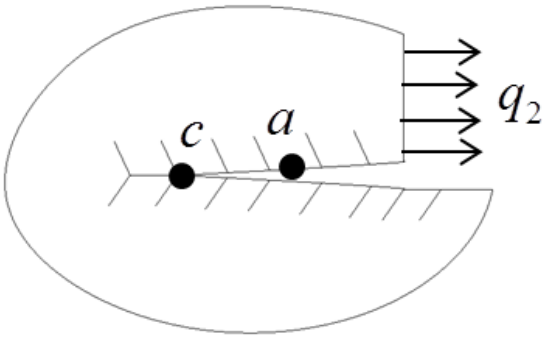


Рис.3.9.2. Конфігурація привершинної зони тріщини

Розв'язок поставленої задачі будемо розшукувати методом скінченних елементів. На рис. 3.10.1 показано скінченно-елементну сітку, яка згущується при підході до вершин тріщин (рис. 3.10.2). Для аналізу використано восьмивузлові елементи.

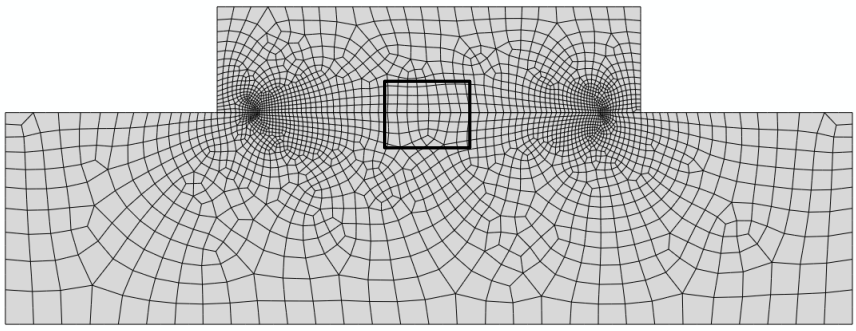


Рис. 3.10.1 Розбиття області на скінченні елементи

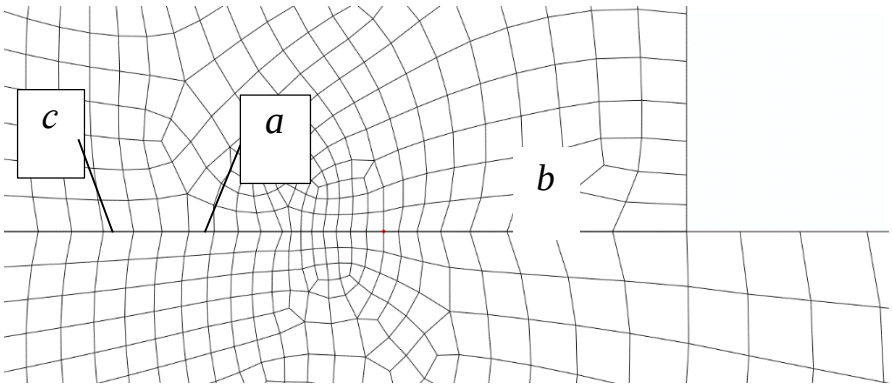


Рис. 3.10.2. Скінченно-елементна сітка в околі вершини тріщини

Вибирались d=20 *см*, b=10 *см*, a=8,5 *см*, c=8 *см*, $h_1 = 2$ *см*, $h_2 = 4$ *см*, $E_1 = 10^5 H / см^2$, $\nu_1 = 0{,}3$, $E_2 = 10^8 H / см^2$, $\nu_2 = 0{,}3$, $q_1 = -20 H / см^2$ $q_2 = 50 H / см^2$.

Значення τ_0 варіювалось. Обчислювалися значення інваріантного інтегралу J в новій вершині тріщини $(c,0)$, горизонтальне переміщення $u_1(a,0)$ початкової вершини тріщини, значення глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a,0)$, а також сумарне значення ШЗЕ

$$G = J + G_{gl}. \tag{3.30}$$

Результати розрахунків наведено у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 Значення J - інтегралу в новій вершині тріщини, переміщення $u_1(a,0)$, глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a,0)$ та сумарної ШЗЕ G для різних значень τ_0

$\tau_0, H / см^2$	0	20	40	60	75	90	102
$100 J, H / см$	5,36	3,40	1,91	0,89	0,45	0,27	≈ 0
$10^4 u_1(a,0), см$		9,69	8,47	7,25	6,34	5,43	5,11
$100 G_{gl}, H / см$	0	1,93	3,39	4,35	4,76	4,88	5,22
$100 G, H / см$	5,36	5,33	5,30	5,24	5,21	5,16	5,22

З результатів Таб. 3.1 видно, що сумарне значення ШЗЕ є практично незалежним від величини τ_0 (максимальна розбіжність значень складає 2,6%). Зокрема, при $\tau_0 = 102 \ \ H / см^2$ локальна ШЗЕ в точці *a* обертається в нуль, тобто напруження в цій точці стає скінченним, а значення глобальної ШЗЕ добре узгоджується з відповідним значенням локальної ШЗЕ при відсутності зони ослаблених міжчастинних зв'язків. Отримане значення τ_0 якраз і являє собою границю текучості такого матеріалу інтерфейсу на зсув, для якого при вибраному значенні *c* напруження в цій точці є скінченним. Проведений же аналіз показує, що при використанні запропонованої моделі не обов'язково заздалегідь визначати положення точки *c*, а достатньо для кожного конкретного τ_0 і *c* визначити J і G_{gl}. Сума ж цих величин з високим ступенем точності буде рівна ШЗЕ для заданої тріщини.

3.5 Висновки до розділу 3

Запропонована методика, визначення степені особливості напружень в околі кутових точок на стику однакових або різнорідних матеріалів. Вона основана на використанні методу скінченних елементів і може бути застосована до біматеріальних тіл скінченних розмірів будь-якої геометричної форми. Особливості методики продемонстровано на прикладі задачі про контакт ізотопних прямокутників різної ширини, один з яких навантажений рівномірно розподіленим напруженням на торці. З використанням методу скінчених елементів побудовано розподіли напружень в зоні контакту, і за рахунок суттєвого згущення сітки біля кутової точки визначено степінь особливості напружень в цій точці. Вважаючи, що прямокутники досить вузькі, і заміняючи їх півполосою і полосою, одержано біматеріальну область, для якої побудовано чисельно-аналітичний розв'язок. Порівняння цього розв'язку з чисельним показало їхню хорошу узгодженість, що підтверджує ефективність методик, що застосовано.

Для тріщини типу I в однорідному матеріалі розглянуто зони ослаблених міжчастинних зв’язків довільної довжини на продовженнях тріщини. Обчислено локальну та глобальну швидкості звільнення енергії. Для конкретного матеріалу та зовнішнього навантаження показано, що сума цих значень практично не залежить від довжини вказаної зони. Розглянуто також тріщину зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Введено зони ослаблених міжчастинних зв’язків на продовженні тріщини та знайдено локальна і глобальна складові швидкості звільнення енергії для різних значень зсувного напруження в цих зонах, величина якого визначається характеристиками адгезійного шару. Показано, що комбінація складових швидкості звільнення енергії дозволяє без визначення довжини зони ослаблених міжчастинних зв’язків знайти необхідний критичний параметр, який визначає можливість розвитку тріщини.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЬ ЗОНИ ПРОКОВЗУВАННЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНО ПРОВІДНОЇ ТРІЩИНИ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

4.1 Постановка задачі

Розглянемо електропровідну тріщину $c \le x_1 \le a$, $x_3 = 0$ між двома напівнескінченними п'єзоелектричними півпросторами $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$, які мають клас симетрії 6*mm* з напрямком поляризації x_1 (Партон і Кудрявцев [39]). Властивості матеріалу півпросторів такі: $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{lij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$ і $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{lij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$, відповідно.

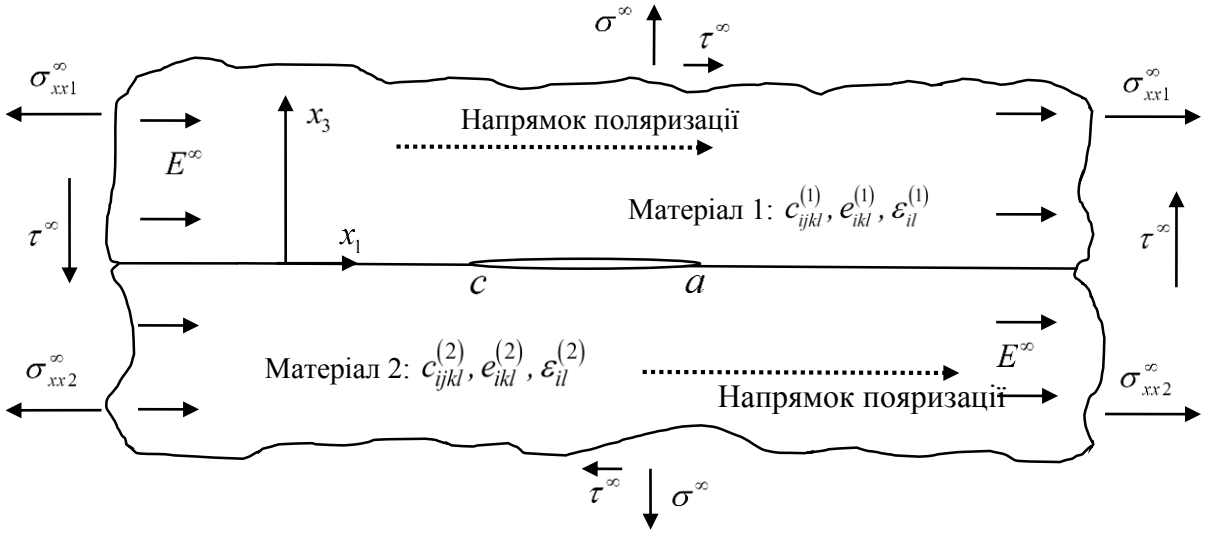


Рис. 4.1. Електропровідна міжфазна тріщина під дією віддаленого змішаного механічного навантаження $\sigma^\infty, \tau^\infty$ та електричного поля E^∞.

Умови навантаження на нескінченності такі: $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma^\infty$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau^\infty$, $\sigma_{11}^{(m)} = \sigma_{xxm}^\infty$, $E_1^{(m)} = E^\infty$. Тут і далі приймається $m = 1$ для верхньої області і $m = 2$ – для нижньої. Вважаємо, що рівняння нерозривності деформації ε_{11} виконуються по поверхні розділу на нескінченності. Оскільки навантаження не залежить від координати x_2, то можна розглянути задачу плоскої деформації у площині (x_1, x_3), зображену на рис. 4.1.

Визначальні співвідношення для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності масових сил та вільних зарядів можна представити у вигляді [25, 39]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k, \tag{4.1}$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k, \tag{4.2}$$

$$\sigma_{ij,i} = 0,\ D_{i,i} = 0, \tag{4.3}$$

$$\gamma_{ij} = 0.5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ E_i = -\varphi_{,i}, \tag{4.4}$$

де u_k, φ, σ_{ij}, γ_{ij} і D_i – пружні переміщення, електричний потенціал, напруження, деформації та електричні переміщення відповідно; c_{ijkl}, e_{lij} та ε_{ij} – модулі пружності, п’єзоелектричні константи та діелектричні константи, відповідно. Індекси в (4.1)-(4.4) варіюються від 1 до 3, а в (4.1)-(4.3) використовується умова підсумовування Ейнштейна.

Підставивши рівняння (4.4) в (4.1), (4.2) і після цього в (4.3), отримуємо:

$$\left(c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi\right)_{,li} = 0,\ \left(e_{ikl}u_k - \varepsilon_{il}\varphi\right)_{,li} = 0. \tag{4.5}$$

Для розглянутого випадку електромеханічних полів, незалежних від координати x_2, будемо використовувати такі наступні представлення:

$$\left\langle \mathbf{L}\left(x_1\right)\right\rangle = \mathbf{W}^{+}\left(x_1\right) - \mathbf{W}^{-}\left(x_1\right), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \mathbf{S}\mathbf{W}^{+}\left(x_1\right) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}\left(x_1\right), \tag{4.7}$$

які було наведено в роботі [86].

У цих співвідношеннях

$$\mathbf{L} = \left[u_1', u_3', D_3\right]^T,\ \mathbf{P} = \left[\sigma_{31}, \sigma_{33}, E_1\right]^T, \tag{4.8}$$

штрихи означають диференціювання по x_1, $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{W}\left(z\right)$ – вектор-функція, яка є аналітичною в кожній напівнескінченній площині, $\mathbf{W}^{+}\left(x_1\right) = \mathbf{W}\left(x_1 + i\cdot 0\right)$, $\mathbf{W}^{-}\left(x_1\right) = \mathbf{W}\left(x_1 - i\cdot 0\right)$.

Тут і далі позначення $\langle g(x_1)\rangle$ функції $g(z)$ означає стрибок цієї функції через матеріальний інтерфейс. Матриці $\mathbf{M}^{(k)}$ та $\mathbf{N}^{(k)}$ мають таку структуру:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1J}^{(k)} \\ a_{3J}^{(k)} \\ b_{4J}^{(k)} \end{bmatrix}_{J=1,3,4}, \quad \mathbf{N}^{(k)} = \begin{bmatrix} b_{1J}^{(k)} \\ b_{3J}^{(k)} \\ -a_{4J}^{(k)} \end{bmatrix}_{J=1,3,4}, \tag{4.9}$$

в якій $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$ ($k=1,2$) є компонентами матриць $\mathbf{A}^{(k)}$ і $\mathbf{B}^{(k)}$ (Suo та ін. [102]).

Варто зазначити, що представлення (4.6), (4.7) забезпечують виконання рівняння $\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1,0)$ для всього біматеріального інтерфейсу $x_1 \in (-\infty,\infty)$.

Подібно до позначень [100], будемо використовувати такі позначення для компонентів c_{ijkl}, e_{lij} та ε_{ij}, що пов'язані з площиною (x_1,x_3): $c_{1111}=c_{11}$, $c_{1133}=c_{13}$, $c_{3333}=c_{33}$, $c_{1313}=c_{44}$, $c_{113}=e_{31}$, $e_{333}=e_{33}$, $e_{131}=e_{15}$. Більше того, аналіз показує, що для розглянутого класу матеріалів (поляризованих у напрямку x_1) матриця $\mathbf{S}$ має таку структуру:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & s_{13} & s_{14} \\ s_{31} & is_{33} & is_{34} \\ s_{41} & is_{43} & is_{44} \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

де всі s_{ij} є дійсні і справедливі рівності $s_{31}=-s_{13}$, $s_{41}=s_{14}$, $s_{43}=-s_{34}$.

4.2 Модель відкритої тріщини

Далі припустимо, що поверхні тріщин вільні від навантажень та електропровідні, тобто умови на інтерфейсі такі:

$$\text{для } x_1 \notin [c,a]\text{: } \mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1,0),\ \mathbf{L}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{L}^{(2)}(x_1,0), \tag{4.11}$$

$$\text{для } x_1 \in (c,a)\text{: } \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0)=0,\ \sigma_{33}^{\pm}(x_1,0)=0,\ E_1^{\pm}(x_1,0)=0. \tag{4.12}$$

Застосовуючи до рівнянь (4.6), (4.7) аналіз, подібний до [79], отримуємо такі представлення:

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+r_{j4}E_1^{(1)}(x_1,0)=F_j^{+}(x_1)+\gamma_j F_j^{-}(x_1), \qquad (4.13)$$

$$t_{j1}\langle u_1'(x_1)\rangle+it_{j3}\langle u_3'(x_1)\rangle+it_{j4}\langle D_3(x_1)\rangle=F_j^{+}(x_1)-F_j^{-}(x_1), \qquad (4.14)$$

де

$$\gamma_1=\frac{1+\delta}{1-\delta},\gamma_3=1/\gamma_1,\ \gamma_4=1,\ \delta^2=\frac{s_{13}s_{41}s_{34}+s_{31}s_{43}s_{14}-s_{31}s_{13}s_{44}-s_{14}s_{41}s_{33}}{s_{11}\left(s_{33}s_{44}-s_{34}s_{43}\right)};$$

$$r_{11}=\left(s_{33}s_{44}-s_{34}s_{43}\right)\frac{\delta}{D},\ r_{14}=\frac{1}{D}\left(s_{33}s_{14}-s_{34}s_{13}\right),\ r_{31}=-r_{11},\ r_{34}=-r_{14},\ r_{44}=-\frac{s_{31}}{s_{41}}$$

,

($D=s_{13}s_{44}-s_{14}s_{43}$) є дійсними компонентами матриці $\mathbf{R}$, що має таку структуру:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & r_{14} \\ ir_{31} & 1 & r_{34} \\ 0 & 1 & r_{44} \end{bmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{T}$ з компонентами T_{ji} $(i,j=1,3,4)$ визначаємо як

$$\mathbf{T}=\mathbf{RS}. \qquad (4.15)$$

Для $\delta^2>0$ компоненти T_{ji} можуть бути представлені у формі

$$T_{j1}=t_{j1},\ T_{j3}=it_{j3},\ T_{j4}=it_{j4},$$

де всі t_{jk} $(j,k=1,3,4)$ є дійсними і $t_{41}=0$.

Нові невідомі функції $F_j(z)$ мають ті ж самі властивості, що $\mathbf{W}(z)$ і визначаються так:

$$F_j(z)=\mathbf{T}_j\mathbf{W}(z), \qquad (4.16)$$

де $\mathbf{T}_j$ – однорядкові матриці $\mathbf{T}_j=\left[T_{j1},T_{j3},T_{j4}\right]=\mathbf{R}_j\mathbf{S}$ $(j=1,3,4)$.

Беручи до уваги, що для $x_1\notin[c,a]$ виконуються співвідношення $F_j^{+}(x_1)=F_j^{-}(x_1)=F_j(x_1)$, отримуємо з рівняння (4.13)

$$(1+\gamma_j)F_j(x_1)=ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+r_{j4}E_1^{(1)}(x_1,0) \text{ для } x_1\to\infty. \qquad (4.17)$$

Беручи до уваги, що функції $F_j(z)$ є аналітичними у всій площині, розрізаній уздовж $x_1 \in (c,a)$, та використовуючи умови на нескінченності, з рівняння (4.17) можна отримати:

$$F_j(z)\Big|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \tag{4.18}$$

де

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{\sigma^{\infty} + r_{j4}E^{\infty}}{\vartheta_j}, \tilde{\tau}_j = -\frac{r_{j1}\tau^{\infty}}{\vartheta_j}, \ (j=1,3,4), \ \vartheta_k = (1+\gamma_k), \ (k=1,3), \ \vartheta_4 = 2.$$

Для розв'язання сформульованої задачі використовуємо представлення (4.13) та умови на інтерфейсі (4.11), (4.12).

Виконання (4.11) забезпечує аналітичність $F_j(z)$ для $x_1 \notin [c,a]$, тоді як (4.12) дає такі рівняння:

$$F_j^{+}(x_1) + \gamma_j F_j^{-}(x_1) = 0, (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in (c,a). \tag{4.19}$$

За результатами Мусхелішвілі [32] розв'язок задачі (4.19) за умов на нескінченності (4.18) та умов однозначності переміщень та електричного поля має вигляд:

$$F_j(z) = X_j(z)\left(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j\right)\left\{z - \left[\frac{a+c}{2} + i(a-c)\varepsilon_j\right]\right\}, \tag{4.20}$$

де

$$X_j(z) = (z-c)^{-1/2+i\varepsilon_j}(z-a)^{-1/2-i\varepsilon_j}, \ \varepsilon_j = \frac{\ln\gamma_j}{2\pi}.$$

За допомогою (4.13) формулу для комбінації напружень та електричного поля для $x_1 > a$ можна записати у вигляді:

$$ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + \sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + r_{14}E_1^{(1)}(x_1,0) =$$

$$= (1+\gamma_1)\left(\tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1\right)\left\{x_1 - \left[\frac{a+c}{2} + i(a-c)\varepsilon_1\right]\right\}(x_1-c)^{-1/2+i\varepsilon_1}(x_1-a)^{-1/2-i\varepsilon_1}, \tag{4.21}$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + r_{44}E_1^{(1)}(x_1,0) = \frac{2\tilde{\sigma}_4\left(x_1 - (c+a)/2\right)}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}. \tag{4.22}$$

Окремі компоненти напружень та електричне поле можна легко визначити з системи (4.21), (4.22).

Із (4.20)-(4.22) добре видно, що отриманий вираз має кореневу осциляційну сингулярність у вершинах тріщини. Незважаючи на те, що цей розв'язок дає хорошу оцінку напружено-деформованого стану на деякій відстані від вершини тріщини, він демонструє фізично нереальну поведінку електромеханічних величин у безпосередній близькості від вершин тріщини і, зокрема, веде до перекриття берегів тріщини.

4.3 Міжфазна тріщина із зонами ковзання біля її вершин

Із (4.21), (4.22) випливає, що в рамках розглянутої вище моделі напруження осцилюють і прямують до нескінченно великих значень у вершинах тріщини.

Щоб усунути цю фізично нереальну осциляційну особливість, припустимо, що на продовженні тріщини виникають зони механічного розшарування. Будемо називати ці області зонами ковзання. Як буде показано далі, ці зони дуже малі, і їх взаємний вплив незначний. Тому з високою точністю для певного класу навантажень можна враховувати лише довшу зону біля правої вершини тріщини. В іншому випадку навантажень зони ковзання біля лівої вершини тріщини можна розглянути шляхом простої перестановки матеріалів.

Отже, граничні умови на межі поділу можна записати у формі:

$$\text{для } x_1 \notin (c,b):\ \mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1,0),\ \mathbf{L}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{L}^{(2)}(x_1,0), \qquad (4.23)$$

$$\text{для } x_1 \in (c,a):\ \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0) = 0,\ \sigma_{33}^{\pm}(x_1,0) = 0,\ E_1^{\pm}(x_1,0) = 0, \qquad (4.24)$$

$$\text{для } x_1 \in (a,b): \langle u_3'(x_1,0)\rangle = 0,\ \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0) = 0,\ \langle \sigma_{33}(x_1)\rangle = 0,$$

$$\langle D_3(x_1,0)\rangle = 0,\ \langle E_1(x_1,0)\rangle = 0. \qquad (4.25)$$

Умови (4.25) означають, що інтерфейс розшаровується на (a,b), але він залишається суцільним у нормальному напрямку та електрично проникним у

ції області. Ця ситуація насправді допустима, оскільки інтерфейс, як правило, м'якший, ніж матриці, що його оточують.

Положення точки b наразі невідоме. Таким чином, за граничними умовами (4.25) вважаємо, що на продовженні тріщини має місце електропроникна зона ковзання.

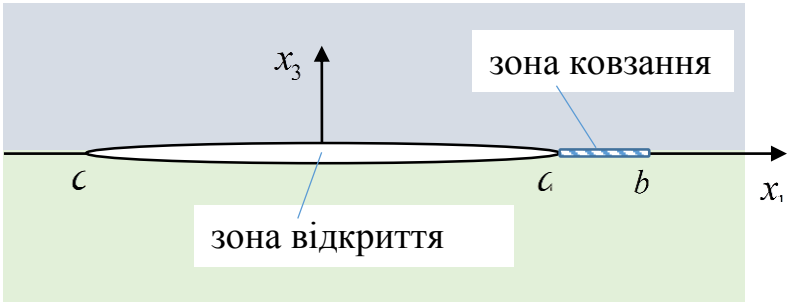


Рис. 4.2. Електропровідна міжфазна тріщина із зоною ковзання

Виконання граничних умов (4.24) за допомогою подання (4.13) веде до рівнянь (4.19).

Граничні умови (4.25) разом із рівняннями (4.13) та (4.14) дають для $x_1 \in (a,b)$ такі співвідношення

$$Im\left[F_k^+(x_1)+\gamma_k F_k^-(x_1)\right]=0,\ Im\left[F_k^+(x_1)-F_k^-(x_1)\right]=0,\ (k=1,3), \quad (4.26)$$

$$F_4^+(x_1)-F_4^-(x_1)=0. \quad (4.27)$$

Співвідношення (4.19) для $(k=1,3)$ та (4.26) ведуть до такої комбінованої крайової задачі Діріхле–Рімана:

$$F_k^+(x_1)+\gamma_k F_k^-(x_1)=0 \text{ для } x_1 \in (c,a), \quad (4.28)$$

$$Im\,F_k^{\pm}(x_1)=0 \text{ для } x_1 \in (a,b),\ (k=1,3), \quad (4.29)$$

тоді як співвідношення (4.27) показують аналітичність $F_4(z)$ на проміжку (a,b).

Граничні умови (4.24) та подання (4.13) для $j=4$ ведуть до рівняння:

$$F_4^+(x_1)+F_4^-(x_1)=0 \text{ , для } x_1 \in (c,a). \quad (4.30)$$

Таким чином, функція $F_4(z)$ є аналітичною у всій площині, за виключенням відрізка (c,a).

Із аналізу випливає, що розв'язок задачі (4.28), (4.29) для $k=3$ можна легко отримати з розв'язку цієї задачі для $k=1$. Отже, в подальшому розв'язується задача (4.28), (4.29) лише для $k=1$.

Розв'язок комбінованої крайової задачі Діріхле–Рімана (4.28), (4.29) було знайдено та застосовано до аналізу жорсткого штампа в [36]. Щодо проблеми міжфазної тріщини, цей розв'язок був отриманий в [84]. Використовуючи ці результати, точний розв'язок задачі (4.28), (4.29) для $k=1$, який задовольняє умови на нескінченності (4.18), можна записати у вигляді:

$$F_1(z)=P(z)X_1(z)+Q(z)X_2(z), \tag{4.32}$$

де

$$P(z)=C_1z+C_2,\ Q(z)=D_1z+D_2,$$

$$X_1(z)=ie^{i\varphi(z)}/\sqrt{(z-c)(z-b)},\ X_2(z)=e^{i\varphi(z)}/\sqrt{(z-c)(z-a)},$$

$$\varphi(z)=2\varepsilon ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}},\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}ln\gamma_1,$$

$$C_1=-\tilde{\tau}_1cos\beta-\tilde{\sigma}_1sin\beta,\ D_1=\tilde{\sigma}_1cos\beta-\tilde{\tau}_1sin\beta,$$

$$C_2=-\frac{c+b}{2}C_1-\beta_1D_1,\ D_2=\beta_1C_1-\frac{c+a}{2}D_1,$$

$$\beta=\varepsilon ln\frac{\sqrt{1+\lambda}-1}{\sqrt{1+\lambda}+1},\ \beta_1=\varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)},$$

$$\lambda=\frac{b-a}{l},\ l=a-c. \tag{4.33}$$

Параметр λ, введений формулою (4.33), буде відігравати важливу роль для подальшого аналізу, оскільки він визначає відносну довжину зони ковзання.

Використовуючи вираз (4.32) разом із формулою (4.13), отримуємо

$$ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+r_{14}E_1^{(1)}(x_1,0)=$$

$$= \left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} + \frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1 - b}} \right] \frac{\vartheta_1 \, exp\left[i\varphi(x_1) \right]}{\sqrt{x_1 - c}} \text{ для } x_1 > b, \tag{4.34}$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + r_{14} E_1^{(1)}(x_1, 0) =$$

$$= \frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(b - x_1)}} \left[\frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} cosh\varphi_0(x_1) + sinh\varphi_0(x_1) \right] +$$

$$+ \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \left[cosh\varphi_0(x_1) + \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} sinh\varphi_0(x_1) \right] \text{ для } x_1 \in (a, b), \tag{4.35}$$

де

$$\varphi_0(x_1) = 2\varepsilon \, tan^{-1} \sqrt{\frac{(a - c)(b - x_1)}{(b - c)(x_1 - a)}}.$$

Підстановка розв'язку (4.32) у формулу (4.14) веде до рівнянь:

$$t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle + it_{13} \langle u_3'(x_1) \rangle + it_{14} \langle D_3(x_1) \rangle = J_1(x_1) \text{ для } x_1 \in (c, a), \tag{4.36}$$

$$t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x_1 - c}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b - x_1}} cosh\varphi_0(x_1) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} sinh\varphi_0(x_1) \right] \text{ для } x_1 \in (a, b), \tag{4.37}$$

де

$$J_1(x_1) = 2\sqrt{\alpha} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b - x_1}} - i \frac{Q(x_1)}{\sqrt{a - x_1}} \right] \frac{exp\left[i\varphi^*(x_1) \right]}{\sqrt{x_1 - c}},$$

$$\varphi^*(x_1) = 2\varepsilon \, ln \frac{\sqrt{(b - a)(x_1 - c)}}{\sqrt{(b - a)(a - x_1)} + \sqrt{(a - c)(b - x_1)}}, \; \alpha = \frac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}.$$

Розв'язок задачі Гільберта (4.30) можна отримати, використовуючи результати [32] у вигляді:

$$F_4(z) = \frac{C_{04} + C_{14} z}{\sqrt{(z - c)(z - a)}}. \tag{4.38}$$

Для визначення коефіцієнтів C_{04}, C_{14} використовуємо умову на нескінченності (4.19) для $j=4$ і теорему Гаусса щодо контуру, що лежить на нижній і верхній гранях відрізка $x_1 \in (c,a)$.

Цю умову можна представити у вигляді [82]:

$$\int_c^a \left[F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1) \right] dx_1 = 0.$$

У результаті отримуємо таку формулу:

$$F_4(z) = \frac{h_4}{2}\left(z - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}, \tag{4.39}$$

де $h_4 = \sigma^\infty + r_{44} E^\infty$.

Із рівняння (4.13) з урахуванням $r_{41}=0$ та із (4.39) випливає таке представлення:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + r_{44} E_1^{(1)}(x_1,0) = 2F_4(x_1) =$$

$$= h_4\left(x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \text{ для } x_1 > a. \tag{4.40}$$

Дійсна частина рівняння (4.34) та рівняння (4.40) формують систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої можна легко знайти механічне напруження $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$, та електричне поле $E_1^{(1)}(x_1,0)$ для $x_1 > b$. Подібним чином рівняння (4.35) та рівняння (4.40) формують систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої можна легко знайти ті ж компоненти для відрізка (a,b).

Використовуючи рівняння (4.39) та (4.14) для $j=4$ та враховуючи, що $t_{41}=0$, отримуємо:

$$it_{43}\left\langle u_3'(x_1) \right\rangle + it_{44}\left\langle D_3(x_1) \right\rangle = F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1) = J_4(x_1) \text{ для } x_1 \in (c,a), \tag{4.41}$$

де

$$J_4(x_1) = h_4\left(x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{i\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}}.$$

Розглядаючи далі систему, складену з уявних частин (4.36) та (4.41), можна записати:

$$\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle = \Delta^{-1}\, Im\left\{t_{44}J_1(x_1) - t_{14}J_4(x_1)\right\}, \tag{4.42}$$

$$\left\langle D_3(x_1)\right\rangle = \Delta^{-1}\, Im\left\{-t_{43}J_1(x_1) + t_{13}J_4(x_1)\right\} \text{ для } x_1 \in (c,a), \tag{4.43}$$

де $\Delta = t_{13}t_{44} - t_{14}t_{43}$.

Далі вводимо коефіцієнти інтенсивності механічних напружень та електричного поля:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x_1 \to a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)}\,\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0), \\ k_2 &= \lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}\,\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0), \\ k_E &= \lim_{x_1 \to a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)}\,E_1^{(1)}(x_1,0). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Для визначення k_2 помножимо ліву та праву частини рівняння (4.34) на $\sqrt{2\pi(x_1 - b)}$ і приймемо, що $x_1 \to b + 0$. Отримуємо таку формулу:

$$k_2 = \frac{\vartheta_1}{r_{11}}\sqrt{\frac{2\pi}{l}}P(b). \tag{4.45}$$

Щоб визначити k_1 і k_E, помножимо ліву та праву частини рівнянь (4.35) та (4.40) на $\sqrt{2\pi(x_1 - a)}$ та приймемо, що $x_1 \to a + 0$.

Одержуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$k_1 + r_{14}k_E = \sqrt{\frac{2\pi}{a-c}}\left[\cosh\varphi_0(x_1) + \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\sinh\varphi_0(x_1)\right]Q(a),$$

$$k_1 + r_{44}k_E = h_4\sqrt{\frac{\pi(a-c)}{2}}, \tag{4.46}$$

Враховуючи, що $\varphi_0(a) = \ln\sqrt{\gamma_1}$ і $Q(a) = \frac{a-c}{2}h_5(\beta)$, система (4.46) набуває вигляду:

$$k_1 + r_{14}k_E = \sqrt{\frac{\pi(a-c)}{2\alpha}}h_5(\beta),$$

$$k_1 + r_{44} k_E = h_4 \sqrt{\frac{\pi(a-c)}{2}},$$

де

$$h_5(\beta) = \tilde{\sigma}_1 \cos\beta - \tilde{\tau}_1 \sin\beta - 2\varepsilon_1 \sqrt{\lambda+1}\left(\tilde{\tau}_1 \cos\beta + \tilde{\sigma}_1 \sin\beta\right).$$

Із цієї системи отримуємо:

$$k_1 = \frac{\sqrt{\pi(a-c)/2}}{r_{44} - r_{14}}\left[r_{44} h_5(\beta)/\sqrt{\alpha} - r_{14} h_4\right],$$

$$k_E = \frac{\sqrt{\pi(a-c)/2}}{r_{44} - r_{14}}\left[h_4 - h_5(\beta)/\sqrt{\alpha}\right]. \qquad (4.47)$$

4.4 Довжина зони ковзання

Розв'язок для міжфазної тріщини, отриманий у попередньому розділі, буде фізично виправданим, якщо є справедливими нерівності:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \le 0 \text{ для } x_1 \in (a,b),\ \langle u_3(x_1)\rangle \ge 0 \text{ для } x_1 \in (c,a). \qquad (4.48)$$

У цьому випадку тріщина відкрита для $x_1 \in (c,a)$, а зона ковзання залишається в стиснутому стані для $x_1 \in (a,b)$.

Відповідний аналіз показує, що ці нерівності виконуються, якщо λ взяти з відрізка $[\lambda_1, \lambda_2]$, де λ_1 є максимальним коренем з інтервалу (0,1) рівняння $k_1 = 0$ і λ_2 є максимальним коренем з інтервалу (0,1) рівняння $\sqrt{a - x_1}\,\langle u_3'(x_1, 0)\rangle\big|_{x_1 \to a-0} = 0$.

Використовуючи перше рівняння (4.47), а також (4.42), рівняння для визначення λ_1 і λ_2 запишемо у таких формах відповідно:

$$h_5\left[\beta(\lambda_1)\right] = \sqrt{\alpha}\,\frac{r_{14}}{r_{44}} h_4, \qquad (4.49а)$$

$$h_5\left[\beta(\lambda_2)\right] = \frac{r_1 t_{14} h_4}{2\sqrt{\alpha}\, t_{44}}. \qquad (4.49б)$$

Значення λ_1 та λ_2 можна знайти чисельно. Після цього положення точки b можна вибрати з відрізка $\left[a+\lambda_2(a-c),\, a+\lambda_1(a-c)\right]$.

4.5 Тріщина, вільна від електродів

Припустимо, що електроди відсутні, а поверхні тріщин вільні від механічного навантаження та електричного заряду.

У цьому випадку для моделювання таких тріщин найчастіше використовуються електропроникні або електроізольовані умови. Обидва ці типи умов було розглянуто відповідно в [78] та [79] для випадку поляризації матеріалу, ортогональної берегам тріщини та електричного потоку, спрямованого в цьому ж напрямку.

Оскільки модель зони передруйнування ніколи раніше не розглядалася для поляризації матеріалу, паралельної берегам тріщини, розглянемо спосіб усунення осциляційної особливості для цього випадку.

Беручи до уваги, що припущення про електрично проникну тріщину є більш реалістичним, ніж про непроникну тріщину, ми зосередимо увагу на електропроникній тріщині.

У цьому випадку припускаємо, що електрично проникна тріщина розташована в проміжку (c,b). При цьому її частина (c,a) відкрита, тоді як область тріщини (a,b) знаходиться в умовах контакту берегів без тертя.

У цьому випадку умови на інтерфейсі можна сформулювати так:

$$\text{для } x_1 \notin (c,b)\colon\ \mathbf{P}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{P}^{(2)}(x_1,0),\ \mathbf{L}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{L}^{(2)}(x_1,0), \tag{4.50}$$

$$\text{для } x_1 \in (c,a)\colon\ \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0)=0,\ \sigma_{33}^{\pm}(x_1,0)=0,$$
$$\left\langle E_1(x_1)\right\rangle=0,\ \left\langle D_3(x_1)\right\rangle=0, \tag{4.51}$$

$$\text{для } x_1 \in (a,b)\colon\ \left\langle u_3'(x_1,0)\right\rangle=0,\ \left\langle \sigma_{33}(x_1)\right\rangle=0,$$
$$\sigma_{13}^{\pm}(x_1,0)=0,\ \left\langle E_1(x_1)\right\rangle=0,\ \left\langle D_3(x_1)\right\rangle=0. \tag{4.52}$$

Із рівнянь. (4.50)-(4.52) випливає, що $\left\langle D_3(x_1)\right\rangle=0$ для $-\infty<x_1<\infty$.

Це співвідношення разом із рівнянням (4.6) дає $W_4^+(x_1)-W_4^-(x_1)=0$ для $-\infty<x_1<\infty$, а це означає, що $W_4(z)$ є аналітичною функція в усій площині.

Із урахуванням постійних значень електромеханічних величин для $z\to\infty$ маємо $W_4(z)=W_4^0=const$. Більше того, використовуючи вигляд (4.10) матриці $\mathbf{S}$, співвідношення (4.7) можна записати як:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)=is_{11}W_1^+(x_1)+s_{13}W_3^+(x_1)+is_{11}W_1^-(x_1)-s_{13}W_3^-(x_1),$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=s_{31}W_1^+(x_1)+is_{33}W_3^+(x_1)-s_{31}W_1^-(x_1)+is_{33}W_3^-(x_1)+2is_{34}W_4^0,$$

$$E_1^{(1)}(x_1,0)=s_{41}W_1^+(x_1)+is_{43}W_3^+(x_1)-s_{41}W_1^-(x_1)+is_{43}W_3^-(x_1)+2is_{44}W_4^0. \quad (4.53)$$

Беручи до уваги, що для $x_1\notin(c,b)$ $W_i^+(x_1)=W_i^-(x_1)$ $(i=1,3)$, з рівнянь (4.53) можна отримати:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=2is_{33}W_3^+(x_1)+2is_{34}W_4^0, \quad (4.54)$$

$$E_1^{(1)}(x_1,0)=2is_{43}W_3^+(x_1)+2is_{44}W_4^0 \text{ для } x_1\notin(c,b).$$

Виключаючи з останніх співвідношень $W_3^+(x_1)$ та беручи до уваги

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\sigma^\infty,\ E_1^{(1)}(x_1,0)=E^\infty \text{ для } x_1\to\infty,$$

отримуємо

$$W_4^0=i\Delta_1^{-1}\left(s_{43}\sigma^\infty-s_{33}E^\infty\right)/2, \quad (4.55)$$

де $\Delta_1=s_{33}s_{44}-s_{43}s_{34}$.

Поєднуючи перше та друге рівняння (4.53) та беручи до уваги (4.55), можна отримати:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+im_j\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)=t_j\left[F_j^+(x_1)+\gamma_jF_j^-(x_1)\right]+2is_{34}W_4^0, \quad (4.56)$$

де

$$F_j(z)=W_1(z)+i\rho_jW_3(z),\ j=1,3, \quad (4.57)$$

та

$$\rho_j=\frac{s_{33}+m_js_{13}}{s_{31}-m_js_{11}},\ \gamma_j=-\left(s_{31}+m_js_{11}\right)/t_j,$$

$$t_j = s_{31} - m_j s_{11},\ m_{1,3} = \mp\sqrt{-\frac{s_{31}s_{33}}{s_{11}s_{13}}}\ . \tag{4.58}$$

Рівняння (4.6) та (4.57) ведуть до такого виразу для похідних від стрибків переміщення:

$$\left\langle u_1'(x_1,0)\right\rangle + i\rho_j \left\langle u_3'(x_1,0)\right\rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1),\ j=1,3, \tag{4.59}$$

і з рівнянь (4.50) та (4.59) ясно, що функції $F_j(z)$ є аналітичними у всій площині, розрізаній уздовж (c,b).

У цьому випадку визначення зони контакту проводиться аналогічно роботі [78]. Різниця пов'язана з іншим напрямком поляризації матеріалу та електричним полем замість електричного потоку, заданого на нескінченності.

Виконуючи далі аналіз, подібний до [78], отримуємо трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту:

$$tan\,\beta = \frac{\sqrt{1-\lambda}\,\sigma^{\infty} + 2\varepsilon_1 m_1 \tau^{\infty}}{2\varepsilon_1 \sigma^{\infty} - \sqrt{1-\lambda}\, m_1 \tau^{\infty}}, \tag{4.60}$$

де

$$\lambda = \frac{b-a}{l},\ \beta = \varepsilon_1\, ln\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi}\, ln\,\gamma_1.$$

Коефіцієнт інтенсивності (4.42) напруження зсуву можна визначити за такою формулою

$$k_2 = -\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\pi l}{2}}\left[\left(\sigma^{\infty}\, sin\,\beta - m_1\tau^{\infty}\, cos\,\beta\right) + 2\varepsilon_1\sqrt{1-\lambda}\left(\sigma^{\infty}\, cos\,\beta + m_1\tau^{\infty}\, sin\,\beta\right)\right].$$

Після визначення довжини зони контакту з рівняння (4.60), напруження можна знайти за рівнянням (4.56). Далі, використовуючи (4.52), електричне поле можна записати як:

$$E_1^{(1)}(x_1,0) = \frac{s_{43}}{s_{33}}\left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) - \sigma^{\infty}\right] + E^{\infty} \text{ для } x_1 > b\,.$$

Детальний аналіз контактної моделі для електроізольованої тріщини був проведений в роботі [79], і подібний аналіз можна здійснити тут без особливих труднощів.

4.6. Чисельні результати та їх обговорення

Розглянемо вплив зовнішнього механічного та електричного навантаження на довжину зони ковзання та коефіцієнти електромеханічної інтенсивності (КІ).

Для чисельних розрахунків вибирались біматеріали, що складаються з п'єзокерамік PZT4 та PZT5H. Для області тріщини вибираємо $c = -0.01м$ і $a = 0,01м$.

Значення λ_1 та λ_2, коефіцієнти механічної та електричної інтенсивності k_2 та k_E представлено в таблиці 4.1 для $\sigma^\infty = 10^5 Па$ та різних значень параметрів τ^∞ і E^∞.

Із таблиці 4.1 добре видно, що всі параметри, які проаналізовано, сутєво залежать від напруженості електричного поля. Ця обставина дає можливість знизити загрозу руйнування шляхом прикладання відповідного електричного поля.

Варто зазначити, що значення $\sigma^\infty + r_{44}E^\infty$ відіграє визначальну роль в аналізі. А саме, для $E^\infty = -\sigma^\infty / r_{44}$ отримуємо $\lambda_1 = \lambda_2$ (для таблиці 4.1 це $E^\infty = 2373.95\,V/m$). Для $E^\infty < -\sigma^\infty / r_{44}$, зокрема, для $E^\infty = 0$, маємо $\lambda_1 > \lambda_2$, і існує набір фізично допустимих положень точки $b \in \left[a + \lambda_2(a-c),\ a + \lambda_1(a-c)\right]$. В той же час для $\sigma^\infty + r_{44}E^\infty > 0$ немає положення точки b, для якої виконувалися б обидві нерівності (4.48).

Таблиця 4.1. Значення довжин зони ковзання та коефіцієнтів механічної та електричної інтенсивності для $\sigma^{\infty}=10^5\,Па$ і різних напружень зсуву та електричного поля

$E^{\infty}\left[В/м\right]$	$\tau^{\infty}=-2\sigma^{\infty}$			
	λ_1	λ_2	$k_2\left[Н/м^{3/2}\right]$	$k_E\left[В/м^{1/2}\right]$
2373.95	2.01287×10^{-10}	2.01287×10^{-10}	-39471.7	-18.7281
0	1.40003×10^{-12}	6.4869×10^{-13}	-37160.6	-523.288
-2373.95	4.73359×10^{-15}	3.05196×10^{-16}	-33511.4	-1028.09
	$\tau^{\infty}=-5\sigma^{\infty}$			
2373.95	537287×10^{-5}	537287×10^{-5}	-90375.6	-42.8792
0	7.99619×10^{-6}	5.80918×10^{-6}	-89386.3	-548.063
-2373.95	1.13651×10^{-6}	5.93216×10^{-7}	-87937.4	-1053.03
-4747.9	1.51775×10^{-7}	5.59029×10^{-8}	-86002.7	-1557.76
-7121.85	1.86749×10^{-8}	4.72527×10^{-9}	-83547.8	-2062.25
	$\tau^{\infty}=-20\sigma^{\infty}$			
2373.95	0.193924	0.193924	-1.05903×10^{6}	-459.863
0	0.163035	0.158235	-1.03149×10^{6}	-959.465
-2373.95	0.136767	0.128737	-1.00802×10^{6}	-1459.88
-4747.9	0.114509	0.104472	-988062.	-1961.02
-7121.85	0.0957095	0.0845961	-961214.	-2518.57

Розкриття тріщини для $\sigma^{\infty}=10^5\,Па$, $E^{\infty}=-4747.9\,В/м$ і $\tau^{\infty}=-20\sigma^{\infty}$ (лінія *I*), а також $\tau^{\infty}=-30\sigma^{\infty}$ (лінія *II*) представлено на рис. 4.3.

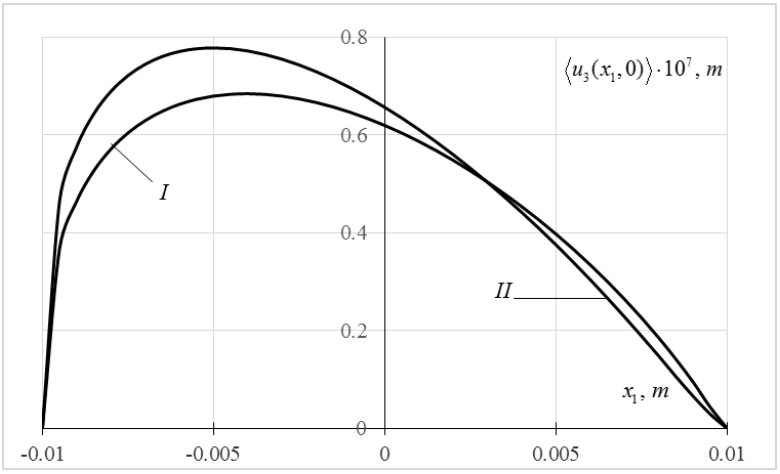


Рис. 4.3. Розкриття тріщини для $\sigma^\infty = 10^5\,Па$, $E^\infty = -4747.9\,В/м$ і $\tau^\infty = -20\sigma^\infty$ (лінія *I*), $\tau^\infty = -30\sigma^\infty$ (лінія *II*)

Відповідні значення нормального напруження в зоні ковзання наведено на рис. 4.4. Ці графіки побудовано для $\lambda = \lambda_2$. Видно, що для такого λ тріщина плавно закривається, а напруження є стискальними.

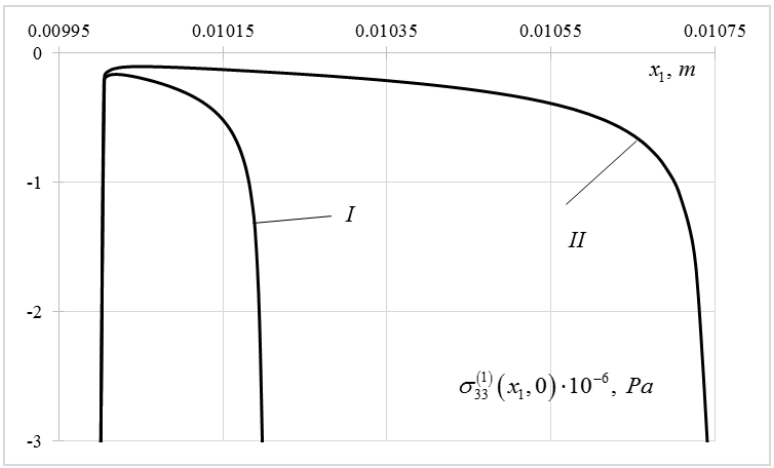


Рис. 4.4. Нормальне напруження в зоні ковзання для тих самих навантажень, що і для рис. 4.3

Поведінку стрибка переміщення в районі правої вершини тріщини для $\sigma^\infty = 10^5\,Па$, $E^\infty = -4747.9\,В/м$ і $\tau^\infty = -50\sigma^\infty$, показано на рис. 4.5. Лінії *I* та *II* проведено для $\lambda = \lambda_1$ і $\lambda = \lambda_2$, відповідно, а пунктирну лінію *III* отримано для $\lambda = 0.1$, що не належить до сегменту $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Відповідні величини $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ для однакових зовнішніх навантажень представлено на рис. 4.6. Видно, що всі лінії задовольняють першій нерівності (4.61). Однак стрибки переміщень на рис.4. 5 задовольняють другу нерівність (4.61) для $\lambda=\lambda_1$ та $\lambda=\lambda_2$ і не задовольняють згадану нерівність для $\lambda=0.1$. Тому, як очікувалося, випадок 3 не можна вважати допустимим способом розкриття тріщини.

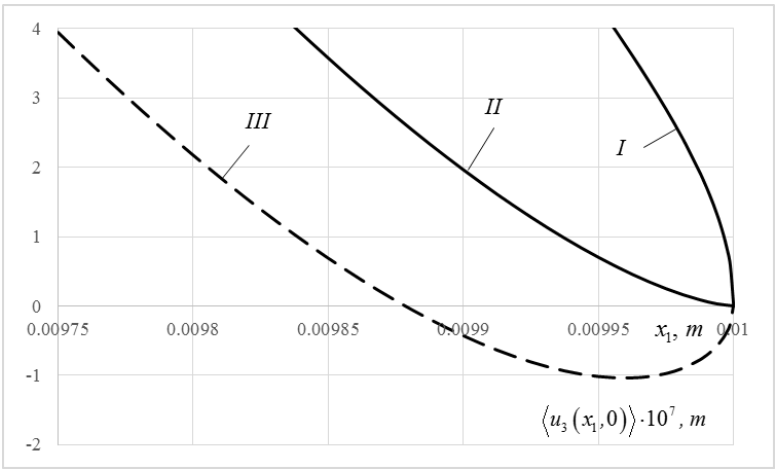


Рис. 4.5. Стрибок переміщення в околі правої вершини тріщини для $\sigma^\infty = 10^5\,Па$, $E^\infty = -4747.9\,В/м$ і $\tau^\infty = -50\sigma^\infty$

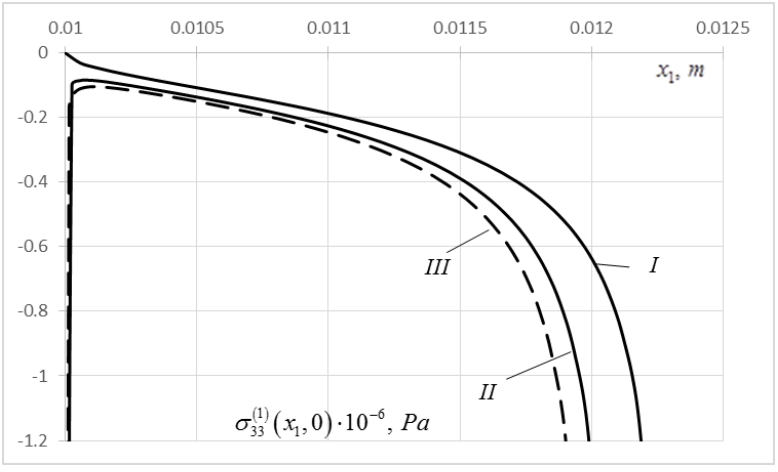


Рис.4.6. Величини $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ для тих же зовнішніх навантажень, що і на рисунку 4.5

4.7 Висновки до розділу 4

Розглянуто електропровідну міжфазну тріщину в п'єзоелектричному біматеріалі, поляризованому в напрямку, паралельному берегам тріщини та ортогональному фронту тріщини. Обидва матеріали навантажено віддаленими нормальними та зсувними напруженнями та електричним полем, співнаправленим з напрямком поляризації матеріалу. Вважається, що всі поля не залежать від координати, співнаправленої з фронтом тріщини, тому розглянуто задачу плоскої деформації. Електромеханічні величини виражено через кусково-аналітичну вектор-функцію. Використовуючи ці представлення та задовольняючи умови на матеріальному інтерфейсі, сформульовано проблему лінійного спряження, яку розв'язано точно.

Отримано фізично нереальну осциляційну сингулярність на кінцях тріщини, яку виражено формулами (4.20)-(4.22). Для усунення цієї особливості на продовженні тріщини введено зону ковзання берегів тріщини. У цьому випадку сформульовано комбіновані крайові задачі Діріхле-Рімана та Гільберта. Точні аналітичні розв’язки цих задач подано формулами (4.32) та (4.39). Всі необхідні механічні та електричні величини представлено в простій аналітичній формі. З умов (4.48), що забезпечують достовірність розробленої моделі, отримано трансцендентні рівняння для визначення довжини зони ковзання. Також обговорено спосіб усунення осциляційної сингулярності біля вершини електропроникної тріщини для розглянутого класу поляризації. Отримане трансцендентне рівняння (4.60) для визначення довжини зони контакту берегів у випадку моделі електропроникної тріщини.

Чисельне моделювання отриманих результатів проведено для біматеріалів PZT4 / PZT5H та різних механічних і електричних навантажень. Результати розкриття тріщини, напружень у зоні ковзання, коефіцієнтів механічної та електричної інтенсивності представлено в таблиці 4.1 та на рисунках 4.3-4.6. З отриманих результатів випливає, що всі згадані величини істотно залежать як від механічного навантаження, так і від електричного

поля. Також результати, представлені у таблицях та на рисунках для комбінації матеріалів PZT4 та PZT5H, підтверджують достовірність моделі, розробленої в цій роботі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано дослідження нових задач для ізотропних, ортотропних і п’єзоелектричних композитів з кутовими точками та тріщинами на межі поділу матеріалів і отримано такі результати:

1) Проведено аналіз біматеріального анізотропного простору з тріщиною на межі поділу матеріалів у полі розтягувально-зсувного навантаження на нескінченності. З урахуванням того, що що модель відкритої тріщини приводить у цьому випадку до фізично нереальної осцилюючої особливості, запропоновано нову модель, засновану на введенні зсувних зон передруйнування на продовженнях тріщини, для усунення цих особливостей. Проведено точний аналітичний аналіз цієї моделі і визначено напруження, їх коефіцієнти інтенсивності та розкриття тріщини.
2) Модель тріщини зі зсувними зонами передруйнування на її продовженні запропоновано також для випадку ізотропного біматеріалу. Основну увагу в цьому випадку акцентовано на визначенні швидкості звільнення енергії та її порівнянні зі значеннями для моделі відкритої тріщини. Крім того, аналіз аналогічної моделі проведено також для тіла скінченних розмірів за допомогою методу скінченних елементів. Встановлено хорошу відповідність аналітичних і чисельних результатів.
3) Для тіл скінченних розмірів запропоновано методику визначення степені особливості напружень та їх коефіцієнтів інтенсивності в околі кутових точок на стику однакових або різнорідних матеріалів. Вона основана на використанні методу скінченних елементів і асимптотичних представлень для напружень в околі кутових точок. Методику апробовано на прикладі задачі про контакт ізотопних прямокутників різних розмірів і підтверджено чисельно-аналітичним розв’язком аналогічної задачі контакту пружних полоси і півполоси.

4) Запропоновано методику визначення параметрів руйнування для тріщини, що виходить з кутової точки біматеріального з’єднання. Вона заснована на введенні зсувної зони передруйнування на продовженні тріщини і апробована на прикладі контакту двох прямокутників різної ширини.
5) Запропоновано методику усунення осциляційної сингулярності для електропровідної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі, поляризованому в напрямку, паралельному берегам тріщини. Ця методика базується на використанні зон ковзання на продовженні тріщини і зводиться до спільного розв’язання задач лінійного спряження Діріхле-Рімана та Гільберта. В результаті аналітичного розв’язку цих задач визначено розподіли електричних та механічних величин вздовж межі поділу матеріалів, довжини зон ковзання та коефіцієнти інтенсивності напружень.
6) Аналіз результатів проведених числових досліджень у рамках розроблених моделей дав можливість виявити і сформулювати нові ефекти та закономірності, серед яких найбільш вагомими є:

- для тріщини між двома матеріалами в біматеріальному ізотропному або анізотропному просторі введення зсувних зон передруйнування біля вершин тріщини дозволяє усунути осциляцію напружень, переміщень та сингулярність дотичного напруження і залишає лише звичайну кореневу особливість для нормального напруження;
- швидкість звільнення енергії для міжфазної тріщини із зоною передруйнування, яку отримано аналітично, добре узгоджується з відповідною величиною, визначеною в тілі скінчених розмірів при умові, що характерний розмір скінченної області набагато більший за довжину тріщини;
- при контакті двох пружних тіл прямокутної форми і різних розмірів степінь особливості напружень в кутовій точці на стику прямокутників є вищою у випадку однакових матеріалів, ніж для випадку, коли жорсткості

матеріалів є різними. В той же час коефіцієнт при особливості нормального напруження є більшим у другому випадку, ніж в першому;

- коефіцієнти інтенсивності напружень для тріщини між двома п’єзоелектричними матеріалами суттєво залежать від зовнішнього механічного навантаження та електричного поля як для осциляційної моделі тріщини, так і для моделі із зоною ковзання. Ця обставина дає можливість зменшувати вірогідність розвитку тріщини за рахунок відповідного підбору зовнішнього електричного поля;
- встановлено ряд інших цікавих кількісних залежностей, які відображено на графіках та в таблицях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антипов Ю. А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – № 2.– С. 290–306.
2. Бакиров В.Ф. Интегральные соотношения для задачи о трещине на границе раздела пьезоэлектрика и проводника // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 6. – С. 128–150.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Гинзбург В. Л. О поляризации и пьезоэффекте титаната бария // ЖЭТФ. – 1949. – Т. 19, вып. 1. – С. 36–41.
5. Гузь А. Н., Гузь И. А. , Меньшиков А. В., Меньшиков В. А. Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 3–13.
6. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
7. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. Линии скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред // Прикл. механика.– 1995.– Т. 31, № 6.– С. 86–91.
8. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999.– Т. 35, № 1. – С. 63–68.
9. Козінов С. В., Лобода В. В. Періодична система електропроникних тріщин на межі двох п’єзоелектричних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009.– Т. 52, № 2. – С. 81–91.

10. Кривой А. Ф., Архипенко К. М. Тріщина, що виходить на лінію з’єднання двох анізотропних півплощин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 3. – С. 110–116.

11. Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 36–45.

12. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 1. – С. 149–159.

13. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Осесимметричная трещина на границе с проводником // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 2. – С. 352–362.

14. Левченко М., Михаїл О., Садова-Квітка М., Квітка І. Про особливості деформування поліетиленових оболонок // Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). – Дніпро: 2019. – С. 106-107.

15. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механика. – 1959. – Т. 5. – С. 391–401.

16. Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1991. – С. 78–86.

17. Лобода В. В., Шевелёва А. Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76-82. [Переклад: Loboda V. V., Sheveleva A. E. Determination prefracture zones at a crack tip between two

elastic orthotropic bodies // Int. Appl. Mechanics. Vol. 39, No. 5, pp. 566-572 (2003)].

18. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы // ПММ. – 1986. – Т. 50, вип. 2. – С.

19. Лобода В. В. Решение плоской задачи упругого контакта полосы и полуполосы // Изв. АН СССР, МТТ. – 1987. – № 1. – С. 65-74.

20. Лобода В. В. О методах решения СИУ с неподвижными особенностями // Методы решения граничных задач и обработки данных. – Днепропетровск, 1989. – С.35-42.

21. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. I: Введение в теорию термопьезоэлектричества / Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с.

22. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. II: Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с.

23. Меньшиков В. А., Меньшиков А. В., Гузь И. А. Трещина на поверхности раздела упругих полупространств в условиях гармонического нагружения // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 47–56.

24. Меньшиков В. А. Коэффициенты интенсивности напряжений для дискообразной межматериальной трещины под. действием нормальной продольной волны // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 44–50.

25. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. // Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / Под. ред. Гузя А. Н. – К.: Наук. думка, 1989. – Т. 5. – 280 с.

26. Михаїл О. В., Лобода В. В. Про один спосіб аналізу напруженого стану композитів в околі кутових точок // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 2. – С. 99–108.

27. Михаїл О. В., Лобода В. В. Про спосіб знаходження параметрів руйнування для тріщин між двома матеріалами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – Випуск 32. – С. 50-60.

28. Міхаїл О. В., Лобода В. В. Чисельно-аналітичне дослідження особливостей НДС в околі ребра стику двох прямокутних паралелепіпедів // Математичні проблеми технічної механіки-2018. Матеріали міжнародної наукової конференції. – Київ, Черкаси, Кам'янське. – 2018. – С. 61.

29. Міхаїл О. В., Лобода В. В. Про визначення параметрів руйнування для тріщин на межі поділу матеріалів // Міжнародна наукова конференція Математичні проблеми технічної механіки-2021. – 2021. – С. 43-44.

30. Михаїл О., Шевельова А., Лобода В. Модель зони передруйнування для електропровідної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки – Львів 2021". – 2021. – С. 33.

http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.09.pdf

31. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Грифитса-Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика.– 1964.– Т. 28, № 6 – С. 1061–1069.

32. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

33. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

34. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 448 с.

35. Назаров С. А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикл. математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 3. – С. 520–532.

36. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 663–673.

37. Острик В. І., Улітко А. Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000.– Т. 43, № 2. – С. 119–126.

38. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с.

39. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

40. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.

41. Смирнов С. А. Осесимметричная задача теории упругости для пространства с разрезом по поверхности шарового пояса // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1984. – №5. – С. 44–48.

42. Смирнов С. А. Решение некоторых контактных задач теории упругости для пространства с разрезом по сферической поверхности // Межвуз. темат. сборник науч. трудов. – Днепропетровск: ДГУ, 1984. – С. 95–102.

43. Смирнов С. А. Напряженное состояние двухслойной толстостенной сферической оболочки с разрезами // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 97–101.

44. Смирнов С. А. Об одном подходе к решению задачи о сферическом разрезе в неоднородном теле // Докл. АН Украины. – 1992. – № 7. – С. 66 – 70.

45. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.– 1972.– Т. 8, № 11.– С. 58–65.

46. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В., Белокур И. П. Периодическая задача для составной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.– 1977.– Т. 13, № 1. – С. 82–86.

47. Улитко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жесткого соединения полупластин из различных материалов // Совр. проблемы мех. сплошной среды. – Ростов-на-Дону. – 1995. – С. 185–193.

48. Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной // Прикл. математика и механика. – 1994. – Т. 58, вып. 2. – С. 159–166.

49. Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. Антиплоская деформация составного пьезокерамического пространства с межфазной трещиной // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 8. – С. 73–77.

50. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

51. Шубников А. В. Пьезоэлектрические текстуры. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – 576 с.

52. Atkinson C. The interface crack with contact zone (an analytical treatment) // Int. J. Fracture. – 1982. – V. 18. – P. 161-177.

53. Beom H. G. Permeable cracks between two dissimilar piezoelectric materials // Int. J. Solids Structures. – 2003. – Vol. 40. – P. 6669–6679.

54. Beom H. G., Atluri S. N. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media. – Int. J. Fracture. – 2002. – 118. – P. 285–301.

55. Bogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J Appl. Mech. – 1971. – V. 38, No. 2. – P. 277-386.

56. Clements D. I. A crack between dissimilar anisotropic media // Int. J. Engng. Sci. – 1971. – Vol. 9. – P. 257-265.

57. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 631-636.

58. Comninou M. The interface crack in a shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – Vol. 45. – P. 287–290.

59. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1960. – Vol. 8, issue 2. – P. 100–108.

60. Dundurs J., Comninou M. Some consequences of inequality conditions in contact and crack problems // J. Elasticity. – 1979. – Vol. 9. – P. 71–82.

61. Dundurs J., Gautesen A. K. An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fracture. –1988. – Vol. 36. – P. 151-159.

62. England A. H. A crack between dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – 32. – P. 400–402.

63. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – 32. – P. 403–410.

64. Eshelby J. R., Read W. T., Shockley W. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory // Acta Metall. – 1953. – Vol. 1. –P. 251-259.

65. Fil’shtinskii L. A., Fil’shtinskii M. L. Green’s function for a composite piezoceramic plane with a crack between phases // J. Appl. Math. Mechs. – 1994. – 58(355–362.

66. Fil’shtinskii L. A., Fil’shtinskii M. L. Anti-plane deformation of a composite piezoceramic space with interphase crack // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33. – P. 655–659.

67. Fil’shtinskii L. A., Fil’shtinskii M. L. Optimal control of physical fields in piezoelectric bodies with defects // LN APP C M. – 2006. – 32. – P. 465-508+517-530.

68. Gao H., Zhang T. Y., Tong P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. Solids. – 1997. – Vol. 45. – P. 491-510.

69. Gao C. F., Wang M. Z. Collinear permeable cracks between dissimilar piezoelectric materials // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 4969–4986.

70. Gao C. F., Wang M. Z. Green’s functions of an interfacial crack between two dissimilar piezoelectric media // Int. J. Solids Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 5323–5334.

71. Gao C. F., Häusler C., Balke H. Periodic permeable interface cracks in piezoelectric materials // Int. J. Solids Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 323–335.

72. Gautsen A. K., Dundurs J. The interface crack in a tension field // J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 580-585.

73. Gautesen A. K. The interface crack under combined loading // Int. J. Fract. – 1993. – Vol. 60. – P. 349–361.

74. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1920. – Vol. A221. – P. 163–198.

75. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 69. – P. 317-335.

76. Herrmann K. P., Loboda V. V. Contact zone models for an interface crack in a thermomechanically loaded anisotropic bimaterial // J. Thermal Stresses. – 2001. – Vol. 24. – P. 479-506.

77. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.

78. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture mechanical assessment of interface cracks with contact zones in piezoelectric bimaterials under thermoelectromechanical loadings I. Electrically permeable interface cracks // Int. J. Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40. – P. 4191-4217.

79. Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorucha V. B. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial // Int. J. Fracture. – 2001. – 111. – P. 203-227.

80. Hwu C. Explicit solution for collinear interface crack problem // Int. J. Solids Structures. – 1993. – Vol. 30. – P. 301-312.

81. Hwu C. Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks // Engng Fracture Mech. – 1993. – Vol. 45. –P. 89-97.

82. Knish P., Loboda V. V., Labesse-Jied F., Lapusta Y. An electrically charged crack in a piezoelectric material under remote electromechanical loading // Letters in Fracture and Micromechanics. – 2012. –175, No 1. – P. 87-94.

83. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks // Engng. Fract. Mech. – 1993. – Vol. 44. – P. 573-580.

84. Loboda V. V. Analytical derivation and investigation of the interface crack models // Int. J. Solids Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4477–4489.

85. Loboda V., Gergel I., Khodanen T., Mykhail O. A crack between orthotropic materials with a shear yield zone at the crack tip // Mathematical Problems in Engineering. – 2019. – Article ID 9723089. 8 pages.

86. Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial // Int. J. Solids Struct. – 2014. – 51. – P. 63–73.

87. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. A sleeping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric bimaterial / Mechanics and Physics of Structural Media. – Elsevier, Academic press, 2022, pp. 253-269.

88. Loboda V. V., Tauchert T. R. The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips // Int. J. Eng. Sci. – 1985. – Vol. 23, No.12. – P. 1337-1349.

89. Mykhail O., Loboda V. Pre-fracture zone modeling for an interface crack in an isotropic bimaterial // Вісник Національного технічного університету «ХПІ».Серія: Динаміка і міцність машин. – 2020. – № 2. – P. 67-72.

90. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: an analytical solution // J. Mech. Phys. Solids. – 1991.– Vol. 39.– P. 113–144.

91. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case // Quart. Appl. Math. – 1992. – Vol. 2.– P. 305–322.

92. Ou Z. C., Chen Y. H. Interface crack problem in elastic dielectric/piezoelectric bimaterials // Int. J. Fract. – 2004. – Vol. 130. – P. 427–454.

93. Ou Z. C., Chen Y. H. Near-tip stress fields and intensity factors for an interface crack in metal/piezoelectric bimaterials // Int. J. Eng. Science. – 2004. – Vol. 42. – P. 1407–1438.

94. Parton V. Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials // Acta Astronaut. – 1976. – Vol. 3. – P. 671-683.

95. Qian W., Sun C. T. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids // Int. J. Solids Structures.– 1998. – Vol. 35. – P. 3317-3330.

96. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks // J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 98-103.

97. Rice J. R., Sih G. C. Plane problem of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – 32. – P. 418–423.

98. Ru C. Q. Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 2000. – 67. – P. 255–261.

99. Shih C. F., Asaro R. J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part 1 – small scale yielding // J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 299–316.

100. Sokolnikoff I. S. Mathematical Theory of Elasticity. – McGraw-Hill, New York, 1956. – 476 p.

101. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // Phil. Mag. – 1958. – Vol. 7. – P. 625–646.

102. Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – 40. – P. 739-765.

103. Ting T. C. T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // Int. J. Solids Structures. – 1986. – Vol. 22. – P. 965-983.

104. Wang S. S., Choi I. The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50. – P. 169-178.

105. Wang S. S., Choi I. The crack behavior in dissimilar anisotropic composites under mixed-mode loading // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50. – P. 179-183.

106. Wang T. C., Han X. L. Fracture mechanics of piezoelectric materials // Int. J. Fract. – 1999. – Vol. 98. – P. 15–35.

107. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. Am. – 1959. – Vol. 49. – P. 199-204.

108. Wu K. C. Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials // J. Appl. Mech. – 1990. – Vol. 57. – P. 882-886.