

АНОТАЦІЯ

Плашенко С.О. Зв'язані задачі про зворотній вплив деформування на зовнішнє навантаження. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2021.

У дисертаційній роботі вивчається клас задач механіки деформівного тіла про взаємовплив деформування пружних тіл та зовнішніх сил.

У **розділі 1** проведений аналіз публікацій за проблематикою дисертації, здійснена класифікація зв'язаних задач. Виділено такі класи зв'язаних задач:

1. Зв'язані задачі взаємовпливу механічних та фізичних полів у матеріалі тіла.
2. Зв'язані контактні задачі зі складними умовами взаємодії, що залежать від деформування.
3. Задачі взаємодії деформівного тіла та рідини або газу.
4. Динамічні задачі деформування тіл у потоці рідини (задачі гідропружності)
5. Задачі про дію слідкуючого навантаження.

В роботі відокремлене місце виконаних досліджень серед робіт даного напрямку.

Розділ 2 містить загальну постановку класу задач про взаємовплив деформування та дії зовнішніх сил та приклади розв'язання зв'язаних задач для балок.

Нехай оператор A заданому зовнішньому навантаженню ставить у відповідність переміщення $\bar{u}$ точок тіла, отримані як розв'язок крайової задачі механіки деформівного тіла. Оператор B характеризує зворотній вплив деформування на дію зовнішніх сил і переміщенням $\bar{u}$ точок тіла ставить у відповідність зовнішнє навантаження. Визначення деформованого стану тіла зводиться до розв'язання операторного рівняння

$$\bar{u} = A(B\bar{u}) = (A \circ B)\bar{u}.$$

Особливості взаємовпливу деформування провідника зі струмом та дії магнітного поля вивчались на прикладі задачі про прогин пружної балки зі струмом у магнітному полі, створеному струмом у нерухомому провіднику. Унаслідок деформування змінюється відстань між провідниками, що призводить до зміни величини сили Ампера, а отже до зміни прогинів балки. Числове розв'язання ґрунтується на ітераційному процесі розщеплення зв'язаної задачі та скінченно-елементній апроксимації. Встановлено комбінації характерних параметрів, за яких відбувається якісна зміна у деформуванні балки.

Отримано розв'язок задачі про прогин балки під дією вантажу, який може переміщатися уздовж балки, коли кут нахилу осі балки перевищує певне критичне значення. Встановлено ділянки балки, на яких вантаж перебуває у рівновазі. Отримано значення ваги вантажу, за якого вантаж перебуває в рівновазі за будь-якого положення на балці.

Розділ 3 присвячений дослідженню взаємовпливу деформування тіла та тиску рідини або газу, що знаходяться всередині тіла або на поверхні тіла.

Задача про прогини мембрани під дією ваги наливої води ілюструє зворотній вплив деформування мембрани на товщину шару води, а отже і на розподіл тиску. Унаслідок деформування відбувається перетікання рідини на нижчі ділянки поверхні мембрани, що призводить до перерозподілу тиску. Запропоновано ітераційний процес розщеплення операторного рівняння. З використанням принципу стискальних операторів встановлено достатні умови збіжності ітераційного процесу. Отримано вираз для величини натягу мембрани, за якого можлива рівновага мембрани з рідиною.

З метою вивчення поведінки мембранних покрівель у зимово-весняний період розглянута задача про прогини мембрани під вагою снігового покриву та у процесі розтавання снігу. Встановлено, що саме час розтавання снігу є найбільш небезпечним для міцності покрівлі. Зокрема показано, що у процесі розтавання максимальний прогин мембрани зростає майже втричі.

Досліджено взаємовплив деформування товстостінних труб і пружних куль та дії внутрішнього тиску рідини або газу. Властивості матеріалу описуються за допомогою моделі нелінійно-пружного тіла Муні.

Під дією тиску рідини, що тече уздовж отвору труби, змінюються поперечні розміри труби, що призводить до зміни швидкості течії рідини, а отже і до зміни тиску. Отримано область допустимих значень вхідних параметрів, за яких задача має розв'язок. Ґрунтуючись на розв'язку операторного рівняння, виконано аналіз критичної комбінації параметрів, за якої починається необмежене «роздування» труби. Встановлено залежність критичної швидкості перекачування рідини від геометричних та механічних характеристик труби.

Досліджено вплив наявності тромбу всередині каналу труби на максимальні переміщення стінок труби. Отримано, що збільшення площі перерізу тромбу призводить до зменшення радіусу каналу труби. Знайдено критичне значення величини тромбу, за якого труба не деформується.

Виконано аналіз деформування товстостінної порожнистої кулі у процесі закачування газу або у процесі нагрівання газу у порожнині. Досліджено залежність зміни товщини стінки кулі та тиску від маси закачаного газу. Отримано, що на початкових етапах закачування газу тиск швидко зростає, а товщина стінки зменшується; у подальшому приріст тиску та зменшення товщини стінок є пропорційними приросту маси газу.

Розділ 4 присвячений дослідженню зв'язаних задач контактної взаємодії штампів із пружним півпростором. Сили і моменти, прикладені до штампа, заздалегідь невідомі і залежать від осідань та поворотів штампа, тобто від деформування півпростору.

Запропоновано постановку зв'язаних контактних задач в вигляді операторних рівнянь відносно сил $\bar{P}$ та моментів $\bar{M}$:

$$(\bar{P}, \bar{M}) = A_4(\bar{P}, \bar{M})$$

Або осідань $\bar{U}$ та поворотів $\bar{\Phi}$:

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = A_3(\bar{U}, \bar{\Phi})$$

Отримано аналітичний розв'язок задачі про дію на поверхню півпростору важкого штампа з плоскою круговою основою. Тертям нехтується. Унаслідок асиметрії форми штампа або неоднорідності у розподілі маси лінія дії сили тяжіння $\bar{P}$ зміщена відносно центру основи. Штмп отримує не лише осідання, а і поворот. У разі високого розташування центру мас уже не можна нехтувати зміщенням лінії дії сили тяжіння унаслідок повороту штампа. Зміна положення лінії дії сили $\bar{P}$, у свою чергу, викликає додатковий поворот штампа. Отримано розподіл контактного тиску:

$$p(x, y) = \left(1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{E a^3} P h} \frac{x x_0}{a^2} \right) \frac{P}{2 \pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

де a – радіус основи штампа, h – висота положення центру мас штампа, x_0 – відстань від осі штампа до його центру мас, E , ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу півпростору.

Зв'язаний характер взаємодії штампа і півпростору виявляється у тому, що контактні напруження не пропорційні силі P , а розподіл контактного тиску залежить від механічних характеристик півпростору.

Встановлено критичні значення висоти центру мас, за яких штмп починає відставати від поверхні півпростору і втрачає рівновагу.

Дослідження контактної взаємодії за поступально-обертального руху штампа пов'язане з вивченням роботи гвинтових пресів та бурильних установок. За допомогою гвинтового механізму штампа надається осьова сила та обертальний момент, однак величини цих чинників заздалегідь невідомі і залежать від деформування тіла. У разі повного зчеплення штампа з півпростором отримано величини сили та моменту, прикладених до штампа, які залежать від механічних характеристик пружного тіла. У разі тертя за законом Амонтона-Кулона отримано умови, за яких починається проковзування штампа при обертанні.

Виконано дослідження особливостей дії на півпростір осердя соленоїда зі струмом у зовнішньому магнітному полі. Магнітний момент, який діє на витки соленоїда, викликає поворот осердя і, як наслідок, зміну величини моменту.

Встановлена залежність контактного тиску від сили струму, величини та напрямку індукції магнітного поля, а також від механічних характеристик матеріалу півпростору. Визначена сила, з якою треба притискати соленоїд, щоб унеможливити відрив осердя від поверхні півпростору. З'ясовано найбільш небезпечний для збереження контакту напрямок індукції магнітного поля.

Вивчення тиску на основу резервуарів, заповнених рідиною або сипучою речовиною, зведено до розв'язання контактної задачі про дію на півпростір важкого штампа зі змінним положенням центру мас. Встановлено, що критична висота заповнення порожнистого штампа залежить від механічних характеристик півпростору. Знайдено характерні значення параметрів, за яких штамп відривається від поверхні півпростору та втрачає рівновагу. Показано, що відрив штампа продовжується за сталого значення характерної величини аж до втрати рівноваги.

Розглянута задача про процес зміни контактного тиску унаслідок підйому вантажу уздовж бічної поверхні. Виконано аналіз контактного тиску у разі вертикального підйому та підйому уздовж гвинтової лінії. Показано, що максимально можлива висота підйому вантажу істотно залежить від механічних характеристик основи, проте однакова для обох способів руху. Встановлено, що при русі уздовж гвинтової лінії вісь штампа здійснює регулярну процесію із зростанням кута нутації. Отримано величину максимальної маси вантажу відносно маси штампа, за якої система перебуває в рівновазі.

Ключові слова: зв'язані задачі, контактні задачі, зв'язані поля, важкий штамп, ітераційний підхід.

ABSTRACT

Plashenko S.O. Coupled problems of reverse impact of deformation on external load. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on the program subject area 113 Applied mathematics. – Oles Honchar Dnipro National University, MES of Ukraine, Dnipro, 2019.

Problems class of solid mechanics, which considers mutual influence of the deformation of an elastic body and the external forces is studied in this dissertation.

Analysis of the publications related to dissertation research and classification of the coupled problems was described in the **section 1**. The following coupled problem classes were defined:

1. Coupled problems of the interaction of mechanical and physical fields in the body material.
2. Contact problems associated with complex interaction conditions that depend on deformation.
3. Problems of interaction of a deformable body and a liquid or gas.
4. Dynamic problems of deformation of bodies in a fluid flow (problems of hydroelasticity)
5. Problems on the action of the following load.

The place of the performed research among the works in the area was defined.

Section 2 has a general formulation of the problems class on the interaction of deformation and the action of external forces and examples of coupled problems related to beams.

Let operation A put given external load in correspondence to body displacement vector $\bar{u}$, which is obtained as a solution of the boundary value problem of the solid mechanics. Operator B defines reverse influence of the deformation on the external forces action and puts the displacements vector $\bar{u}$ in correspondence to external load.

Finding the body deformable state comes down to solving the operator equation

$$\bar{u} = A(B\bar{u}) = (A \circ B)\bar{u}.$$

Specifics of the mutual influence of the deformation of the electrical conductor with current and the magnetic field action was investigated based on the problem about deformation of the elastic beam with current in the magnetic field, created by the current in the stationary electrical conductor. Due to the deformation, the distance between the electrical conductors changes, which leads to the change of the magnitude of the Ampere force and, as a result, to a change in the deflection of the beam. Numerical solution is based on iterative process of decoupling of the coupled problem and finite-elements approximation. Combination of the characteristic parameters, which leads to qualitative changes in the beam deformation, was found.

A solution to the problem about the deflection of the beam under the load, which can move along the beam when the angle of inclination of the beam axis is not bigger than a specific critical value was found. Sections of the beam where the load is in equilibrium were found. The value of the weight of the load at which the load is in equilibrium at any position on the beam is obtained.

Section 3 is dedicated to research of mutual influence of body deformation and liquid or gas pressure which is located inside the body or on its surface.

A problem about membrane deflection under the weight of poured water shows the reverse influence of membrane deformation on the thickness of the water layer and, as a result, on the pressure distribution. Due to the deformation, liquid flows to the lower areas of the membrane surface, which leads to re-distribution of the pressure. The iterative process of operator equation splitting was suggested. Using the principle of compression operators, the sufficient conditions were found for the iterative process convergence. An expression for the value of the membrane tension at which the equilibrium of the membrane with the liquid is possible was obtained.

To study the behavior of the membrane roofs in winter-spring period, the problem about membrane deformation under the weight of snow cover and during the snow melting was considered. It was found that the most dangerous load on the roof happens during the melting process. In particular, it was shown that the maximum membrane deflection increases almost threefold during the melting.

The interaction between the deformation of thick-walled pipes and elastic spheres and the action of the internal pressure of a liquid or gas has been studied. The properties of the material are described using the Mooney nonlinear elastic body model.

Under the action of the pressure of the liquid flowing along the opening of the pipe, the transverse dimensions of the pipe change, which leads to a change in the velocity of the liquid, and, consequently, to a change in pressure. The range of admissible values of input parameters at which the problem has a solution was received. Based on the solution of the operator equation, the analysis of the critical combination of the parameters was performed, at which the unlimited "expansion" of the pipe begins. The dependence of the critical speed of the fluid pumping on the geometric and mechanical characteristics of the pipe was found.

The influence of the presence of a thrombus in the middle of the canal of the pipe on the maximum displacements of the pipe walls was investigated. It was found that increasing the cross-sectional area of the thrombus leads to a decrease in the radius of the tube channel. The critical value of the size of the thrombus, at which the tube is not deformed, was found.

The analysis of the deformation of a thick-walled hollow sphere in the process of gas injection or in the process of gas heating in the cavity was performed. The critical value of the product of the mass and temperature of the gas was established, at which an unlimited increase in the size of the cavity begins. The dependence of the change in the wall thickness of the sphere and the pressure and the mass of the injected gas was investigated. It was found that during the initial stages of gas injection the pressure increases rapidly and the wall thickness decreases; further increase in pressure and decrease in wall thickness are proportional to the increase in gas mass.

Section 4 is devoted to the study of coupled problems of contact interaction of dies with an elastic half-space. The forces and moments applied to the die are unknown in advance and depend on the displacements and rotations of the die, i.e., on the deformation of the half-space.

It was proposed to define coupled contact problems using operator equations for forces $\overline{P}$ and moments $\overline{M}$:

$$(\bar{P}, \bar{M}) = A_4(\bar{P}, \bar{M})$$

Alternatively, operator equation for displacements $\bar{U}$ and rotations $\bar{\Phi}$ can be defined:

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = A_3(\bar{U}, \bar{\Phi})$$

An analytical solution of the problem of action of the heavy die, with a flat circular base, on the surface of a half-space, is obtained. Friction is neglected. Due to the asymmetry of the shape of the die or inhomogeneity in the mass distribution, the line of the gravity force $\bar{P}$ is shifted relative to the center of the base. The die gets not only displacement, but also rotation. In the case of a high location of the center of mass, shifting the line of gravity due to the rotation of the die can be no longer neglected. Changing the position of the line of force $\bar{P}$, in turn, causes an additional rotation of the die. The contact pressure distribution is obtained:

$$p(x, y) = \left(1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph} \frac{xx_0}{a^2} \right) \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

where a – the radius of the die base, h – the height of the position of the center of mass of the die, x_0 – the distance from the axis of the die to its center of mass, E , ν – Young's modulus and the Poisson's ratio of the half-space material.

The coupled nature of the interaction between the die and the half-space is manifested in the fact that the contact stresses are not proportional to the force P , and the distribution of the contact pressure depends on the mechanical characteristics of the half-space.

The critical values of the height of the center of mass, at which the die begins to lag behind the surface of the half-space and loses its balance are found.

The study of contact interaction during the translational rotation of the die is associated with the study of the action of screw presses of drilling rigs. Using the screw mechanism, the die gets axial force and torque, but the magnitude of these factors is unknown in advance and depends on the deformation of the body. In the case of complete

adhesion of the die with the half-space, the values of force and torque applied to the die, which depend on the mechanical characteristics of the elastic body, were obtained. In the case of friction according to the law of Amonton-Coulomb, the conditions are obtained under which the die begins to slip during the rotation.

A study of the specifics of the action of a solenoid core with a current in the external magnetic field on the half-space is performed. The magnetic moment acting on the solenoid turns causes the core to rotate and, as a consequence, leads to a change in the magnitude of the moment.

The dependence of the contact pressure on the current strength, magnitude and direction of magnetic field induction, as well as on the mechanical characteristics of the half-space material is established. The force needed to press a solenoid to prevent separation of a core from a half-space surface was found. The direction of magnetic field induction, which is the most dangerous to maintain contact, was determined.

The study of the pressure on the base of tanks filled with liquid or bulk substance is reduced to solving the contact problem of the action of a heavy die with a variable position of the center of mass on the half-space. It was found that the critical height of filling the hollow die depends on the mechanical characteristics of the half-space. Characteristic values of parameters were found which correspond to the die coming off the surface of the half-space and losing its balance. It is shown that the separation of the die continues at a constant value of the characteristic value until the loss of equilibrium.

The problem of the process of change of contact pressure due to lifting of the load along the side surface was considered. The analysis of contact pressure in the case of vertical lifting and lifting along the helical line is performed. It is shown that the maximum possible height of lifting the load significantly depends on the mechanical characteristics of the base, but the same for both modes of movement. It is established that when moving along the helical line, the axis of the die performs a regular precession with increasing nutation angle. The maximum value of weight of the load relative the weight of the die was found at which the system is in equilibrium.

Key words: coupled problems, contact problems, coupled fields, heavy die, iterative process.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О.: Зв'язані контактні задачі про дію важких штампів зі змінним центром мас. Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. **2**, 75–80 (2019).
2. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О.: Зв'язані контактні задачі теорії пружності за поступально-обертального руху штампа. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка неоднорідних структур». **2**, 69–76 (2017).
3. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язана задача деформації плоскої мембрани під дією талого снігу. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка неоднорідних структур». **2**(1), 64–72 (2016).
4. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І. Зв'язана задача про прогин мембрани під дією наливої рідини. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. **25**, 171–180 (2016).
5. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язана задача про течію рідини у нелінійно-деформівній трубі. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. **29**, 198–206 (2019).

Розділ в колективній монографії

1. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О., Шумельчик, К.І.: Зв'язані задачі про взаємний вплив деформування та дії зовнішніх сил. В: Поляков, М.В. (ред.) Актуальні проблеми механіки: монографія, с. 338–342, ЛІРА, Дніпро (2018).

Статті у наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

1. Kuz'menko, V.I., Plashenko, S.O.: Coupled problems of contact interaction. J. Math. Sci. **243**(1), 85–100 (2019).

Тези доповідей

1. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О.: Зв'язані задачі про зворотній вплив деформування на дію гравітаційного поля. Сучасні проблеми термомеханіки, Львів, 22–24 вересня 2016, 271–272.
2. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О.: Зв'язані контактні задачі. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Львів, 17–20 вересня 2019, 176–177.
3. Кузьменко, В.І., Плашенко, С.О.: Зв'язані контактні задачі про зворотній вплив деформування на дію зовнішніх сил. Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Дніпро, 10–12 жовтня 2019, 102–103.
4. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язана задача про деформацію балки в магнітному полі струму. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS – 2018). Львів, 26–28 вересня 2018, 124–126.
5. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язані задачі взаємодії пружних тіл з рідиною та газом. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Львів, 17–20 вересня 2019, 74–75.
6. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язані задачі про взаємовплив деформування пружних тіл та тиску рідини або газу. Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Дніпро, 10–12 жовтня 2019, 117–118.
7. Плашенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Зв'язані задачі про зворотній вплив еволюції системи на зовнішні впливи. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS–2019). Дніпро, 20–22 листопада 2019, 208–209.
8. Плашенко, С.О.: Математична модель взаємовпливу деформування балки та локалізації навантаження. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS–2018). Дніпро, 21–23 листопада 2018, 168–169.

9. Плащенко, С.О., Кузьменко, В.І.: Тривимірна зв'язана задача про дію важкого штаму на поверхню півпростору. Математичні проблеми технічної механіки – 2018. Київ, Черкаси, Кам'янське, 16–19 квітня 2018, 67.