

INTERNATIONAL CONFERENCE MATHEMATIC PROBLEMS OF THE TECHNICAL MECHANIC

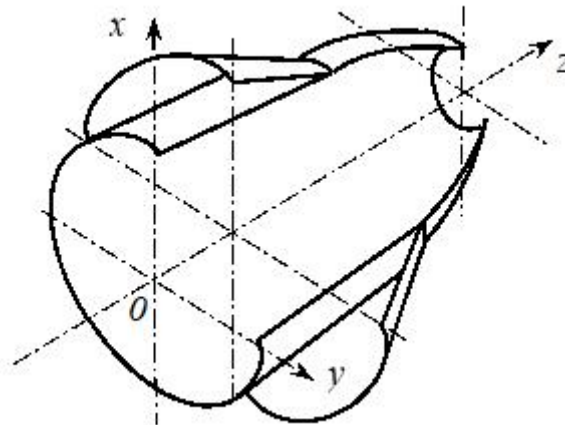
*ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
MPTM 2026*

February 19-20, 2026
Dnipro, Ukraine

Book of Abstracts
Part 1

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ – 2026

Матеріали конференції



Дніпро – 2026

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ – 2026

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Голова: Стеблянко П.О.

Заступники голови: Дзюба А.П., Крилова Т.В., Пошивалов В.П.

ТЕМАТИКА ДОПОВІДЕЙ

Механіка деформівного твердого тіла, механіка рідини, газу та плазми.

**Іноваційні технології в машинобудуванні, металургії, геотехнічній
механіці, будівництві та освіті.**

**XXVI МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
“МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ –
2026”**



Частина 1 (лютий 2026)

*Симпозіум «Механіка суцільного середовища і міцності конструкцій»,
присвячений 150-ій річниці від дня народження
академіка Олександра Миколайовича Динника.
(31.01.1876 – 22.09.1950)*



ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Голова: Академік НАНУ Булат А. Ф.

Заступники голови: Дзюба А. П., Дзюба С. В.

Вчений секретар: Стеблянко П. О.

Члени оргкомітету:

Гришак В.З., Дреус А.Ю., Комаров О.В., Лобода В.В., Пошивалов В.П., Сіренко В.М.

ОРГАНІЗАТОРИ СИМПОЗИУМУ

Міністерство освіти і науки України,
 Національна академія наук України,
 Дніпровський національний університет
 ім. О. Гончара,
 Придніпровський науковий
 центр НАНУ і МОНУ,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
 Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАНУ,
 Інститут технічної механіки НАНУ і ДКАУ

Відкриття Симпозіуму

*19 лютого 2026 о 10.00 на засіданні Вченої ради (of line)
 Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України*



Академік НАН України А.Ф. БУЛАТ

Вітальне слово від Президента Національної академії наук України академіка НАН України АНАТОЛІЯ ГЛІБОВИЧА ЗАГОРОДНЬОГО до учасників Симпозіуму пам'яті академіка АН України та про академіка О.М. Динника

А.Ф. БУЛАТ

Член Президії НАН України, Голова Придніпровського наукового центру НАН України і МОН України, директор Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України академік НАН України

ВНЕСОК ВИДАТНОГО МЕХАНІКА АКАДЕМІКА О.М. ДИННИКА У РОЗВИТОК ГІРНИЦТВА ТА ВПЛИВ РЕЗУЛЬТАТІВ ЙОГО ДОСЛІДЖЕНЬ НА ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ РОЗРОБКИ ВУГІЛЬНИХ І РУДНИХ РОДОВИЩ ПІВДНЯ УКРАЇНИ

<p>Сергій ДЗЮБА <i>Директор Придніпровського наукового центру НАН України і МОН України, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, доктор технічних наук</i> ОСНОВНІ ЕТАПИ ЖИТТЯ ТА НАУКОВОЇ ТВОРЧОСТІ АКАДЕМІКА О.М. ДИННИКА</p>
<p>Дмитро КОЛОСОВ <i>Завідувач кафедри механічної та біомедичної інженерії НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України, доктор технічних наук, професор</i> РОЗВИТОК НАУКОВОЇ ШКОЛИ ДИНАМІКИ І МІЦНОСТІ В НТУ «ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»</p>
<p>О.В. КОМАРОВ¹ завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, В.В. ЛОБОДА¹, А.П. ДЗЮБА¹, Ю.А. ЧЕРНЯКОВ¹, П.О. СТЕБЛЯНКО² ¹<i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i> ²<i>Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України</i> ВПЛИВ ДІЯЛЬНОСТІ О.М. ДИННИКА НА РОЗВИТОК НАУКИ МЕХАНІКИ В ДНУ</p>
<p>В.З.ГРИЦАК <i>Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»</i> ДО ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СТРИЖНІВ ЗА УМОВИ ДВОПАРАМЕТРИЧНОГО СТИСКУ З ПОЗДОВЖНІМ ЗМІННИМ НАВАНТАЖЕННЯМ</p>
<p>О.О. СТРЕЛЬНИКОВА^{1,2,4}, К.Г. ДЕГТЯРЬОВ¹, Д.В. КРЮТЧЕНКО¹, М.С. МІЩЕНКО², О.М. СЕРІКОВА³ ¹<i>Інститут енергетичних машин і систем НАН України, м. Харків,</i> ²<i>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,</i> ³<i>Національний науковий центр «Інститут судових експертиз ім. Засл. проф. М.С. Бокаріуса», м.Харків,</i> ⁴<i>Харківський національний університет радіоелектроніки</i> ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ З ПЕРЕГОРОДКАМИ З ВИКРИСТАННЯМ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ</p>
<p>М.В. МАРЧУК¹, Б.Д. ДРОБЕНКО¹, В.М. СІРЕНКО², Д.В. КЛИМЕНКО², В.С. ПАКОШ¹, В.М. ХАРЧЕНКО² ¹<i>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,</i> ²<i>Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро</i> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТОСОВНО ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НАВАНТАЖЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ</p>
<p>А.Ю. ДРЕУС, В.В. СТРЕМБОВСЬКИЙ, А.Ю. КРУГЛИЙ <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i> ПРОГНОЗУВАННЯ ЗЛЕДЕНІННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПРОФІЛІВ БПЛА НА ОСНОВІ ГІБРИДНОГО CFD-III ПІДХОДУ</p>
<p>А.П.ДЗЮБА¹, В.П.ПОШИВАЛОВ¹, В.М.СІРЕНКО² ¹<i>Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України</i> ²<i>Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро</i> РОЗРОБКА МЕТОДИКИ ПІДВИЩЕННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВОГО ПРОГНОЗУВАННЯ МІЦНІСНОЇ ЗДАТНОСТІ СКЛАДНИХ КОНСТРУКЦІЙ МАШИНОБУДУВАННЯ</p>

ЗМІСТ

Перша частина МНК МПТМ 2026

Пленарні доповіді

1. О.В. Комаров, В.В. Лобода, А.П. Дзюба, Ю.А. Черняков, П.О. Стеблянко ВПЛИВ ДІЯЛЬНОСТІ О. М. ДИННИКА НА РОЗВИТОК НАУКИ МЕХАНІКИ В ДНІПРОВСЬКОМУ НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ	9
2. В.З.Гришак ДО ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СТРИЖНІВ ЗА УМОВИ ДВОПАРАМЕТРИЧНОГО СТИСКУ З ПОЗДОВЖНІМ ЗМІННИМ НАВАНТАЖЕННЯМ	11
3. К.Г. Дегтярьов, Д.В. Крютченко, М.С. Міщенко, О.М. Сєрікова, О.О. Стрельникова ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ З ПЕРЕГОРОДКАМИ З ВИКРИСТАННЯМ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ	14
4. М.В.Марчук, Б.Д. Дробенко, В.М. Сіренко, Д.В. Клименко, В.С.Пакош, В.М.Харченко МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТОСОВНО ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НАВАНТАЖЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ	16
5. В.В. Стрембовський, А.Ю. Круглий, А.Ю. Дреус ПРОГНОЗУВАННЯ ЗЛЕДЕНІННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПРОФІЛІВ БПЛА НА ОСНОВІ ГІБРИДНОГО CFD-III ПІДХОДУ	18
6. О.Р. Гачкевич, Т.В. Козакевич, Т. Волчанські МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ У ПОРОЖНИСТОМУ СТАЛЕВОМУ ЦИЛІНДРІ НА ЙОГО ЗАЛИШКОВІ СТРУКТУРНИЙ І НАПРУЖЕНИЙ СТАНИ	19

Доповіді секцій: Механіка деформівного твердого тіла та механіка рідини, газу та плазми (19 лютого 2026)

7. О.П. Круковський, В.В. Круковська ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТОГО ПОРОДНОГО МАСИВУ З ГАЗОНОСНИМИ ПРОШАРКАМИ	20
8. М.О. Бабешко, В.Г. Савченко АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВРАХУВАННЯ В РОЗРАХУНКАХ УСКЛАДНЕНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ ТА ОБОЛОНОК	21
9. П.О. Стеблянко РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДИСКРЕТНО-ОДНОРІДНИХ ТОНКОСТІННИХ ТА ПРОСТОРОВИХ ТІЛ	22
10. Є.М. Ірза НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА ДІЇ ЗМІННОГО ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ	23
11. Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта, І.В. Щербина, О.В. Білова ВРАХУВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ СТРИНГЕРУ ТА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ МАТРИЦІ	24
12. М.Й. Юзв'як, Ю.В. Токовий РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ	26
13. Н.В. Сметанкіна, С.Ю. Місюра, Є.Ю. Місюра АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ	27
14. В.А. Максимюк, Є.А. Сторожук, І.С. Чернишенко ПРО ПІДХОДИ ДО ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ РАКЕТ НА ОСНОВІ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК	28
15. Є.О. Коваленко, С.О. Чернецький АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВИБОРУ ТИПУ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТУ НА ПРИКЛАДІ РОЗРАХУНКУ ТРИВИМІРНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧИ	29

Доповіді секцій: Механіка деформівного твердого тіла та механіка рідини, газу та плазми (20 лютого 2026)

16. І.К. Сенченко, Н.Д. Яковенко, С.М. Якименко УЗАГАЛЬНЕНИЙ КРИТЕРІЙ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ НЕОДНОРІДНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ	30
17. Є.А. Сторожук, І.С. Чернишенко РОЗРАХУНОК КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ НАВАНТАЖЕННЯ ОВАЛЬНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ	31
18. С.В. Тарасов, О.В. Сухова, В.А. Іванов, О.В. Дорош, А.С. Тарасов МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ РЕШТОК СВИНЦЕВО-КИСЛОТНИХ АКУМУЛЯТОРІВ	33
19. Ю.П. Глухов ХАРАКТЕРНІ ДИНАМІЧНІ ЕФЕКТИ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОШАРОВОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ	34
20. О.В. Воропай, С.І. Поваляєв, П.А. Єгоров, А.С. Шарапата ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ БАЛКИ ПІД ЧАС НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ	37
21. А.Ю. Глухов ПРО ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ КРУЧЕННЯ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ	42
22. О.М. Клецьков, В.В. Лобода ВПЛИВ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ НА АНТИПЛОСКУ ДЕФОРМАЦІЮ КВАЗІКРИСТАЛУ З ТРИЩИНОЮ	43
23. Є.А. Сторожук, Р.В. Серафимович ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО КРУГОВОГО ОТВОРУ В ТРИШАРОВІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИВИМІРНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	44
24. В.С. Кирилюк, О.І. Левчук ОСОБЛИВОСТІ РОЗПОДІЛУ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ПРИ СТИСКАННІ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПІВПРОСТОРІВ З ГЛАДКИМИ ЖОРСТКИМИ ПРОПОРЦІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ МІЖ НИМИ	45
25. В.С. Бейцун, С.В. Тарасов ОЦІНКА ЖОРСТКОСТІ СТИКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСФОРМОВАНИХ КОСМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА СКЛАДНОГО НАВАНТАЖЕННІ	46

Доповіді секції: Іноваційні технології в машинобудуванні, металургії, геотехнічній механіці, будівництві та освіті (19 лютого 2026)

26. Д.В. Акімов, К.Г. Дегтярьов, А.О. Кошкін, Д.В. Крютченко, О.М. Серкіова, О.О. Стрельнікова ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ТА РУЙНІВНИХ СТАНІВ ПЕРФОРОВАНИХ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ	48
27. В.М. Бурлаєнко, Г.І. Львов, С.Д. Дімітрова-Бурлаєнко ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ АКСІАЛЬНО ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДУЙОВАНИХ БАЛОК ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ	50
28. В.А. Максимюк, В.С. Ушакова, О.В. Ушаков ПРО ПРЯМЕ ВИМІРЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТИСКУ У ВОДЯНОМУ КУЛЕУЛОВЛЮВАЧІ	51
29. В.В. Хворостяний, М.А. Долгов, В.Й. Галенко, М.О. Цисар, Т.О. Христович ОПІР КРАЙОВОМУ СКОЛЮВАННЮ ФЛОАТ-СКЛА ПРИ ЗАСТОСУВАННІ КОНІЧНИХ ІНДЕНТОРІВ З РІЗНИМ РОЗМІРОМ СФЕРИЧНОЇ ВЕРШИНИ	52
30. С.В. Тарасов, О.Н. Молотков МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВИСОКОШВИДКІСНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ З ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИМ ПІДВІСОМ	58
31. Є.В. Воробйов, Л.С. Новогрудський, М.П. Адамчук, М.П. Земцов, Т.В. Анпілогова ПИТОМИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ ОПІР ТА ПОШКОДЖУВАНІСТЬ АЛЮМІНІЄВИХ СПЛАВІВ ЗА ВЕЛИКИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ	60
32. D. N. Lazuchenkov NUMERICAL CALCULATION OF ION CURRENT ON A CYLINDER IN A RAREFIED PLASMA FLOW WITH MAGNETIC FIELD	63

33. А.В. Сохацький ГІБРИДНІ ПІДХОДИ В МОДЕЛЮВАННІ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ	64
34. А. В. Широков, О. М. Березовський ОЦІНКА УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПЕРЕШКОД З ЕЛЕМЕНТАМИ УРАЖЕННЯ ДІАМЕТРОМ ДО 30 ММ	71

Доповіді секції: Іноваційні технології в машинобудуванні, металургії, геотехнічній механіці, будівництві та освіті (20 лютого 2026)

35. Г.І. Ларіонов, В.Л. Волошко, А.І. Рябко ДО ОБЧИСЛЕНЬ КОЕФІЦІЄНТУ СТІЙКОСТІ ДАМБИ ХВОСТОСХОВИЩА З ВИКОРИСТАННЯМ МПА МЕТОДУ	71
36. Ю.П.Кучугурний, С.В.Носіков, С.В.Пранник, М.П.Різниченко, І.М.Чумаченко МАГНІТОПЛАЗМОВИЙ ДЕОРБІТІНГ «КОСМІЧНОГО СМІТТЯ» В ІОНОСФЕРІ ЗЕМЛІ	74
37. Д.В. Горобець, М.Б. Соболевська МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА ЛЮДИНИ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ НА ОСНОВІ ДАНИХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ	75
38. С.В. Тарасов, О.Н. Молотков СПРОЩЕНИЙ АЛГОРИТМ СТАБІЛІЗАЦІЇ ОБЕРТАННЯ РОТОРА ДАР'Є ЗМІННОЇ КОНФІГУРАЦІЇ	76
39. К.М. Мішук, В.А. Кузнецов МЕХАНІЗМ УТВОРЕННЯ ТА РОЗВИТКУ МІКРОТРИЩИН У БЕТОНІ	78
40. Н.О. Levytskyi, S.O. Chernetskyi COMPARATIVE EVALUATION OF METHODS FOR MODELING FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS IN STATIC FINITE ELEMENT ANALYSIS USING ANSYS	82
41. Г.О. Стрельников, Н.С. Прядко, М.О. Катренко ТЕЧІЯ ГАЗУ В УКРОЧЕНИХ СОПЛАХ ІЗ ДЗВІНОПОДІБНИМ НАСАДКОМ	83
42. М.О. Babeshko, V.G. Savchenko ALGORITHM FOR SOLVING AXISYMMETRIC THERMOVISTOPLASTICITY PROBLEMS FOR BODIES AND SHELLS MADE OF TWO-COMPONENT FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIAL	84
43. Pavlo Steblyanko CALCULATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF DISCRETE-HOMOGENEOUS SPACE AND THIN-WALLED BODIES	84

ВПЛИВ АКАДЕМІКА ДИННИКА О.М. НА РОЗВИТОК НАУКИ МЕХАНІКИ В ДНІПРОВСЬКОМУ НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

О.В. Комаров¹, В.В. Лобода¹, А.П. Дзюба¹, Ю.А. Черняков¹,
П.О. Стеблянко²

¹*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

²*Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України*

Науково-педагогічна діяльність Динника Олександра Миколайовича в Дніпровському національному університеті розпочалася з моменту відновлення університетської мережі в Україні у 1933 році, в університеті (тоді Дніпропетровському державному університеті) було відкрито механічне відділення з трьома спеціалізаціями: теоретична механіка, теорія пружності, аерогідромеханіка. Підготовку студентів та аспірантів здійснювали три кафедри з аналогічними назвами.

Академіком Динником О.М. було покладено початок розвитку науки міцності на кафедрі теоретичної механіки, яким до того часу було створено сильну школу спеціалістів з цього напрямку в Україні. Ядро цієї школи свого часу складали відомі вчені: проф. Локшин А.С., проф. Лазарян В. А., проф. Гришкова Н. П. та ін.

З 1933 р. по 1941 р. академік Динник О.М. читав на механічному відділенні курси з прикладної теорії пружності і керував роботою аспірантів. За його ініціативи в університеті було створено лабораторію оптичних методів вивчення напружень, що тривалий час залишалася єдиною в Україні. За цей період випускниками механічного відділення підготовлено і захищено 16 кандидатських дисертацій. Його учнями є академік АН УРСР Савін Г.М., чл.-кор. АН УРСР Пеньков О.М., академік АН Кривий Ріг Леонов М.Я., проф. Павленко Г.Л., проф. Моргієвський Д.Б., доценти Тульчинський Б.Г., Полежаєв В.М., Ленченко А.І., Самойленко Ф.І.

У відповідності до загального наукового напрямку української школи теорії пружності, одним із засновників якої і був Динник О.М., в цей час проводилися дослідження плоских і просторових задач теорії пружності, міцності і стійкості стержнів, стержневих систем і оболонок, вивчалися механічні властивості матеріалів і умови їх руйнування.

В постановці плоскої задачі теорії пружності було досліджено розподіл напружень поблизу гірничих виробіток. Результати цих робіт увійшли у відому монографію Савіна Г.М. «Концентрація напружень біля отворів». В роботах Леонова М.Я. в точній постановці теорії пружності була розв'язана задача Герца про стискання двох пружних тіл.

В результаті розвитку науки механіки деформівного твердого тіла в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара, започаткованого О.М. Динником, сформувалися дві наукові школи. Напрямок досліджень, який в останні десятиліття можна охарактеризувати як «Проблеми механіки руйнування та нелінійного деформування матеріалів», уособлювала кафедра теоретичної та прикладної механіки (до 1991 року – кафедра теоретичної механіки). Кафедрою теоретичної механіки в різні роки завідували відомі вчені та педагоги: професор О.М. Пеньков (1933–1939 рр.); доцент Б.Г. Тульчинський (1939–1941 рр., 1945–1949 рр., 1951–1954 рр.); професор В.А. Лазарян (1944–1945 рр.); професор М.Я. Леонов (1949–1950 рр.); професор Ю.А. Шевляков (1954–1968 рр.); доцент П.А. Загубіженко (1968–1971 рр.); професор М.Ю. Швайко (1971–1992 рр.), професор В.В. Лобода (1992–2016 рр.)



Кафедра теоретичної механіки , 2007 рік

Кафедра обчислювальної механіки і міцності конструкцій була створена у 1953 році з метою підготовки фахівців з міцності і надійності конструкцій ракетно-космічної техніки, як загальноуніверситетська кафедра механіки суцільних середовищ. Засновником і незмінним завідувачем кафедри упродовж 36 років (1953-1989 рр.) був видатний вчений-механік академік НАН України, ректор упродовж 22 років (з 1964 по 1986 рр.) Дніпропетровського державного університету, докт. фіз.-мат. наук, проф. В.І. Моссаковський. Наукову діяльність кафедри можна охарактеризувати напрямками математичного, комп'ютерного і експериментального моделювання механічних процесів різної природи та створення методів, алгоритмів і прикладних комп'ютерних програм розрахунку динаміки, міцності, надійності, довговічності та оптимального проектування конструкцій в аерокосмічній галузі, машинобудуванні, геомеханіці, біомеханіці, будівництві. У процесі розвитку кафедри під керівництвом проф.

В.І. Моссаковського склався сильний творчий колектив, відомий серед вчених як України, так і за її межами – Дніпровська наукова школа механіки деформівного твердого тіла, яку пройшли більше 20 докторів та понад 160 кандидатів наук. З 1989 по 1994 рр. кафедру прикладної теорії пружності очолював Заслужений діяч науки і техніки України, Заслужений професор Дніпровського університету, член-кор. Міжнародної інженерної академії, д. техн. наук, проф. Л.В. Андреев (1929–2001 рр.). З 1994 року по 2016 рік завідувачем кафедри був Заслужений діяч науки і техніки України, д. техн. наук, проф. А.П. Дзюба.

У вересні 2016 року шляхом об'єднання кафедр теоретичної та прикладної механіки та обчислювальної механіки і міцності конструкцій було створено кафедру теоретичної та комп'ютерної механіки. Завідувачем кафедри з моменту її створення до 2025 року був Заслужений працівник освіти України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор фізико-математичних наук, професор В.В. Лобода. З березня 2025 року по теперішній час завідувачем кафедри є кандидат фізико-математичних наук, доцент О.В. Комаров.



Кафедра В.І. Моссаковського, 2008 рік

Кафедра продовжує традиції двох відомих наукових шкіл у напрямках дослідження проблем механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів, математичного, комп'ютерного і експериментального моделювання механічних процесів різної природи та створення методів, алгоритмів і прикладних комп'ютерних програм розрахунку динаміки, міцності, надійності, довговічності та оптимального проєктування конструкцій в аерокосмічній галузі, машинобудуванні, геомеханіці і біомеханіці.

ДО ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СТРИЖНІВ ЗА УМОВИ ДВОПАРАМЕТРИЧНОГО СТИСКУ З ПОЗДОВЖНІМ ЗМІННИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

В.З.Гришак

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

Метою роботи є наближений аналітичний розв'язок задачі двопараметричної стійкості пружної системи, зокрема стрижнів з центральним осьовим силовим стисканням та поздовжнім змінним за координатою навантаженням, кожний фактор з яких здатний викликати втрату стійкості початкової форми. Не зважаючи на досить значну кількість публікацій по даній тематиці, зокрема академіка Динника О.М. [1,2], проблема стійкості стержневих систем при комбінованому зовнішньому навантаженні не є тривіальною як з точки зору аналітичного підходу, який би дозволив отримати надійний наближений розв'язок для системи із змінними параметрами з подальшим застосуванням комп'ютерних технологій, так і в якості достатньо простої математичної моделі для виявлення нових механічних ефектів у конструкціях, пов'язаних із проблемою стійкості.

Застосовано постановку задачі стійкості стрижня при змінному за координатою поздовжнього стискання у формі Я.Г.Пановко [3] з дослідженням на базі диференціального рівняння сингулярного типу третього порядку і «малим» параметром при старшій похідній. Оскільки на точність асимптотичного розв'язку суттєво впливає величина параметру, проблема полягає в тому, щоб запропонувати такий підхід, який

зведе цей вплив до мінімуму [4]. Як відомо, не існує методу, який дозволяв би знайти точний розв'язок вказаного типу рівнянь у загальному виді, і тому задачі цього типу розв'язуються у значній кількості за допомогою чисельних методів.

В роботі на базі застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу [5], отримано новий наближений аналітичний розв'язок задачі як для «малих», так і «великих» величини параметру при старшій похідній. Даний підхід дозволяє побудувати функціональну залежність прогину стрижня від інтенсивності повздовжнього навантаження в аналітичній формі, що адекватно відповідає розв'язку задачі стійкості при змінному зовнішньому навантаженні з найбільшим зближенням до прямого чисельного рішення. Задача зводиться до необхідності інтегрування диференціального рівняння

$$\varepsilon^3 \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + g_1(z) \frac{\partial v}{\partial z} + g_2(z) v(z) = 0, \quad (1)$$

де $\varepsilon^{-1} = \sqrt[3]{\frac{P}{I}}$, $g_1 = \frac{1}{EI^4} (P + zq(z) - z \frac{\partial q}{\partial z})$, $g_2 = \frac{1}{EI^4} (q(z) + z \frac{\partial q}{\partial z})$, (2)

$q(z)$ – інтенсивність розподілу повздовжнього навантаження; P – стискаюча сила; z – координата поточного перерізу стрижня; $v(z)$ – функція прогину стрижня.

В якості прикладів розглянуто задачу стійкості стрижня для лінійного $q(z) = q_0 + kz$ та гармонійного $q(z) = q_0 + k \sin \pi z$ законів розподілу стискаючого зусилля. Згідно програми, що реалізує чисельний метод Гальоркіна, були отримані залежності поправок δ_{0i} , $(i=1,3)$ за відповідними законами навантаження. Наближені аналітичні розв'язки задачі за гібридним ВКБ-Гальоркін методом надаються у формі відповідно до випадку лінійної функції розподілення стискаючого зусилля

$$v(z) = C_1 \exp \int_0^z -\delta_{01} \sqrt[3]{\frac{q_0 + 2kz}{EI}} \partial \zeta + C_2 \exp \int_0^z -\delta_{02} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{\frac{q_0 + 2kz}{EI}} \partial \zeta + \\ + C_3 \exp \int_0^z -\delta_{03} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{\frac{q_0 + 2kz}{EI}} \partial \zeta. \quad (3)$$

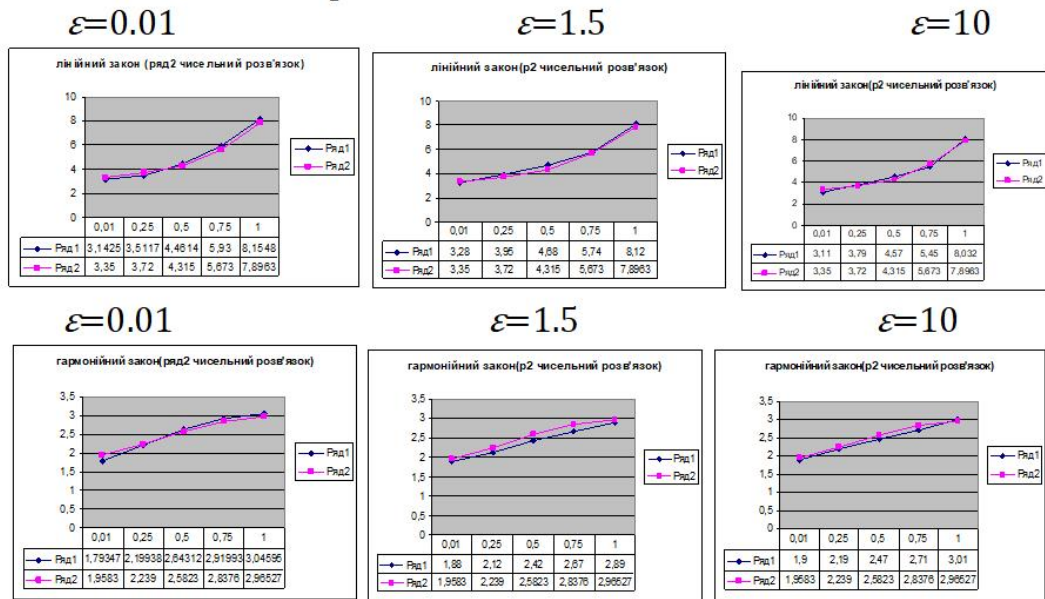
та гармонійного закону повздовжнього тиску

$$v(z) = C_1 \exp \int_0^z \delta_{01} w(z) \partial \zeta + C_2 \exp \int_0^z \delta_{02} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) w(z) \partial \zeta \\ + C_3 \exp \int_0^z \delta_{03} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) w(z) \partial \zeta, \quad + \quad (4)$$

де функція $w(z)$ дається залежністю

$$w(z) = -\sqrt[3]{\frac{q_0 + k \sin \pi z + k \pi z \cos \pi z}{EI}}. \quad (5)$$

Отримані результати розрахунку зображені графічно в залежності від параметра асимптотичного представлення аналітичного розв'язку з порівнянням із чисельним рішенням за методом кінцевих різниць.



Похибка аналітичних розв'язків для «великих» і «малих» значень параметра асимптотичного представлення ε становить 4-7%, що дає можливість стверджувати про ефективність запропонованого підходу до певного класу задач стійкості, які зводяться до сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами з параметром при старшій похідній.

В якості подальших досліджень стійкості конструкцій і систем, зокрема стрижневих, при комбінованому зовнішньому навантаженні вважається доцільним звернути увагу на порівняння здобутих розв'язків даної задачі за різними підходами, а також на вплив граничних умов, які у ряді випадків можуть привести до появи нелінійних ефектів і вплинути на форму граничної поверхні, яка обмежує область стійкості досліджуваної системи.

Література

1. Динник О.М. О продольном изгибе стержней переменного сечения.- Изв. Дон. политехн. ин-та, 1913, 1, отд. 2, с. 390-404.
2. Динник О.М. О продольном изгибе при распределенной нагрузке. -Изв. Екатериносл. горн. ин-та, 1915, вып. 1, с. 1-19.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – С. 352.
4. Geer J.F.; Andersen C.M.: Hybrid Perturbation-Galerkin Method for Differential Equations Containing a Parameter. Pan American Congress on Appl. Mech.,(1991), p.460-463.
5. Gristchak V.Z.; Dmitrieva Ye.: A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Application. Technische Mechanik, No.15,(1995), p.281-294.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ З ПЕРЕГОРОДКАМИ З ВИКРИСТАННЯМ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

К.Г. Дегтярьов¹, Д.В. Крютченко¹, М.С. Міщенко²,
О.М. Сєрікова³, О.О. Стрельнікова^{1,2,4}

¹*Інститут енергетичних машин і систем НАН України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, Україна*

²*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна*

³*Національний науковий центр «Інститут судових експертиз ім. Засл. проф. М.С. Бокаріуса», м.Харків, вул. Золочівська, 8а, 1177, Україна*

⁴*Харківський національний університет радіоелектроніки, просп. Науки, 14, Харків, 61166, Україна*

Робота присвячена числовому аналізу коливань рідини в осесиметричних оболонках обертання, зокрема конічної та сферичної форми, як з внутрішніми перегородками, так і без них. Основною метою дослідження є удосконалення та верифікація методу граничних елементів для розв'язання тривимірних крайових задач, що описують рух ідеальної нестисливої рідини в резервуарах. Вважається, що рідина є ідеальною та нестислою, а її рух, викликаний коливаннями оболонки, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. За допомогою методів теорії потенціалу задачу визначення потенціалу швидкостей зведено до системи двовимірних сингулярних граничних інтегральних рівнянь. Особливу увагу приділено аналітичним властивостям ядер граничних інтегральних операторів, визначенню типу особливості, оскільки саме чітке врахування цих властивостей істотно впливає на точність, збіжність і стійкість числового методу [1].

З використанням доведеної в роботі 2π -періодичності інтегральних операторів двовимірні сингулярні інтегральні рівняння зведено до еквівалентних одновимірних формулювань, що приводить до суттєвого зменшення обчислювальної складності та витрат комп'ютерного часу [2]. Запропонований варіант методу граничних елементів забезпечує ефективно й точно дослідження впливу внутрішніх перегородок, їх геометричних параметрів на власні частоти та форми коливань рідини. Така можливість є особливо важливою для аналізу явищ плескання та зменшення їх негативного впливу в інженерних системах.

Було розв'язано спектральні крайові задачі для конічних і сферичних оболонок, у результаті чого визначено фундаментальні власні частоти та відповідні форми коливань рідини. Отримані дані стали підґрунтям для дослідження вимушених коливань і моделювання характеристик стійкості руху рідини за умови дії різних динамічних збурень.

Коливання рідини в конічних резервуарах із внутрішніми перегородками та без них досліджуються за умов спільної дії горизонтальних і вертикальних збурень. Стійкість руху рідини аналізується за допомогою діаграми Айнса-Стретта.

Застосовано редукований метод граничних елементів і метод граничних елементів із підобластями [3]. Запропонований підхід дозволяє проаналізувати вплив перегородок на власні частоти та форми коливань рідини, а також на стійкість її руху.

Дискретизація включає 260 елементів уздовж сферичної (конічної) поверхні та 170 елементів уздовж радіуса вільної поверхні. Подальше збільшення кількості елементів не призводить до суттєвих змін результатів. Слід зазначити, що для обчислення найменших власних значень у так званій «задачі льодової лунки» (ісе-

fishing problem) використовується та ж сама сітка. У цій задачі формально розглядається нескінченно широкий і глибокий океан, вкритий льодовим покривом, у якому невеликий круговий отвір моделює лунку для риболовлі [4].

Запропонована методологія має як теоретичну новизну, так і практичну цінність у галузі моделювання взаємодії рідини з елементами конструкцій. Вона формує надійну та математично обґрунтовану основу для широкого кола інженерних застосувань, зокрема для проєктування й оцінювання безпеки баків ракетного палива, нафтових резервуарів і ємностей для зберігання легкозаймистих або небезпечних рідин [5].

Оскільки в окремих випадках навантаження спостерігається необмежене зростання амплітуди плескання, яке не має фізичного змісту, виникає необхідність удосконалення рівнянь руху шляхом уведення додаткових механізмів дисипації енергії, що обмежують амплітуди плескання. До поширених підходів належать емпірична модель демпфування Релея та нелінійні формулювання, запропоновані в роботі [6]. Подальші дослідження будуть спрямовані на розширення запропонованої моделі з урахуванням інтенсивних сейсмічних навантажень, нелінійних динамічних ефектів і більш складних механізмів взаємодії рідини з конструкцією, що дозволить підвищити точність і надійність прогнозів для складних реальних інженерних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Gnitko, V.I., Karaiev, A. O., Degtyariov, K. G., Vierushkin, I.A., Strelnikova, E. A.: Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis, WIT Transactions on Engineering Sciences, vol. 134, pp. 67-79, 2022, DOI: 10.2495/BE450061.
- [2] Sierikova, O. Strelnikova E. and Degtyariov K., Srength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials, 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, pp. 1-7, 2022, DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369.
- [3] Sierikova, O., Strelnikova, E., Degtyarev, K. Seismic Loads Influence Treatment on the Liquid Hydrocarbon Storage Tanks Made of Nanocomposite Materials, WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, vol. 17, pp. 62-70, 2022, DOI: 10.37394/232011.2022.17.9.
- [4] Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A.: Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations., International Journal of Applied Mechanics and Engineering, vol. 25, no. 3, pp. 117–132, 2020, <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038>.
- [5] Choudhary, N., Degtyarev, K., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Strelnikova, E.: Shell-like structures interacting with liquids and their applications, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 105(9), 2025, DOI:10.1002/zamm.70227.
- [6] Degtyariov, K., Kriutchenko, D., Osypov, I., Sierikova, O., Strelnikova, E. Dampers Influence on Sloshing Mitigation in Fuel Tanks of Launch Vehicles and Reservoirs. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Krytskyi, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2023. ICTM 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1008, 2024, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-61415-6_36.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТОСОВНО ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НАВАНТАЖЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО- КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

**М.В. Марчук¹, Б.Д. Дробенко¹, В.М. Сіренко², Д.В. Клименко², В.С. Пакош¹,
В.М. Харченко²**

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, м. Львів, Україна*

² *Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»,
м. Дніпро, Україна*

Екстремальні умови експлуатації тонкостінних та об'ємних елементів конструкцій сучасної ракетно-космічної техніки (РКТ) зумовлює їхню підвищену напруженість, що потребує використання найбільш досконалих математичних і розрахункових моделей, в яких по можливості необхідно достатньо повно відобразити реальні умови експлуатації конструкції та механічні властивості матеріалів. Тому крім традиційної властивості пружності матеріалу в розрахунках елементів конструкцій РКТ все більшого значення набувають його пластичні властивості. Особливо актуальним це питання постає при проектуванні елементів конструкцій рідинних двигунів РКТ, де протиріччя між вимогами міцності та мінімальної матеріаломісткості проявляється найбільш гостро. Прикладом може бути випадок, коли ставиться завдання визначення допустимого (руйнівного) навантаження, при якому матеріал значної частини вказаних об'єктів перебуває в пружно-пластичному стані. Такий стан матеріалу, що не зумовлює порушення функціонального призначення конструкції та роботи її обладнання, допускається в деяких елементах конструкцій РКТ одноразового використання, а також при тривалому експлуатаційному навантаженні.

Створення конструкцій РКТ, що найбільш повно відповідають умовам експлуатації, вимогам надійності, а також оптимальності у ваговому співвідношенні, зумовлює як розроблення нових матеріалів, методів проектування і розрахунку та вдосконалення вже існуючих і використовуваних, так і більш точних їхніх математичних моделей [3, 4, 6].

Придатність математичної моделі для розв'язування задач характеризується тим, якою мірою вона володіє так званими цільовими властивостями, основними з яких є адекватність, стійкість і чутливість [2]. У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі тому реальному явищу або об'єкту, для опису якого вона будується. Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей певного об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки меті дослідження.

При перевірці адекватності моделі як існуючої, так і спроектованої системи реально може бути використана лише обмежена підмножина всіх можливих значень вхідних параметрів. У зв'язку з цим для обґрунтування достовірності отриманих результатів моделювання велике значення має перевірка стійкості моделі. В теорії моделювання [2] це поняття трактується як здатність моделі зберігати адекватність при дослідженні ефективності системи у всьому можливому діапазоні робочого навантаження, а також при внесенні змін у конфігурацію системи.

Якщо зміна вхідних впливів або параметрів моделі (в деякому заданому діапазоні) не відображається на значеннях вихідних параметрів, то виникає потреба в оцінюванні чутливості моделі до зміни параметрів робочого навантаження та внутрішніх параметрів досліджуваного об'єкта. Таку оцінку проводять по кожному параметру моделі окремо. Базується вона на тому, що зазвичай діапазон можливих змін

параметра відомий. Дані, отримані при оцінці чутливості моделі, можуть бути використані при плануванні експериментів: корегуються ті параметри, за якими модель є найбільш чутливою.

Комп'ютерне моделювання – це процес відтворення поведінки об'єкта за допомогою комп'ютерної програми, що реалізує подання об'єкта у формі математичної моделі. Така програма називається комп'ютерною моделлю [2]. У більшості випадків складність співвідношень математичної моделі вимагає застосування чисельних методів розв'язання відповідних початково-крайових задач [1].

Результат комп'ютерного моделювання полягає в отриманні кількісних і якісних висновків щодо наявної моделі. Якісні висновки дають змогу виявити невідомі раніше властивості об'єкта, його структуру, динаміку розвитку, стійкість, цілісність та ін. Кількісні висновки в основному носять характер прогнозування деяких майбутніх або пояснення минулих значень змінних, що характеризують систему. За допомогою комп'ютерного моделювання вивчаються об'єкти, які неможливо, затратно або небезпечно відтворювати в реальних умовах. Це дає змогу не лише зекономити матеріальні ресурси, а й дотримуватися екологічних умов, уникати можливих шкідливих або руйнівних наслідків проведення випробувань. Комп'ютерне моделювання дозволяє візуалізувати об'єкти будь-якої природи, здійснювати багаторазові випробування їхніх моделей, кожного разу повертаючи їх у початковий стан, отримувати різні характеристики об'єкта в числовому або графічному вигляді, знаходити оптимальну конструкцію об'єкта, не виготовляючи його пробних екземплярів. Воно полягає в проведенні серії числових експериментів на комп'ютері, метою яких є аналіз й інтерпретація, зіставлення результатів моделювання з реальною поведінкою досліджуваного об'єкта та, за необхідності, подальше уточнення моделі. Кінцева мета комп'ютерного моделювання – ухвалення рішення на основі всебічного аналізу його результатів. Основою вироблення рішення є результати тестування й експериментів. Якщо результати не відповідають цілям поставленого завдання, це означає, що допущено помилки на попередніх етапах. Якщо такі помилки виявлено, то потрібне коригування моделі, тобто повернення до одного з попередніх етапів. Процес повторюється доти, поки результати експерименту не відповідатимуть цілям моделювання.

Слід зазначити, що метод комп'ютерного моделювання є чисельним методом, і тому, як будь-який чисельний метод, він має істотний недолік – його результати завжди носять частковий характер, котрі відповідають певним значенням параметрів об'єкта. Для його аналізу необхідно багаторазово моделювати процес його функціонування, варіюючи вхідні дані моделі.

Вище наведені підходи до математичного та комп'ютерного моделювання були застосовані авторами до розв'язання низки важливих науково-технічних проблем при вдосконаленні існуючих і проєктуванні нових перспективних зразків РКТ. Розроблено методику розрахунку корпусів твердопаливних двигунів типу «кокон» із багатошарових композитів за комплексної дії навантажень з урахуванням нагріву та стику з суміжними відсіками. Створено методики розрахунку міцності деталей сопел в таких двигунах за інтенсивного термосилового навантаження та оболонкових конструкцій із шаруватих композитів з гіперпружними складниками. Розроблені основи та створена методологія оцінки механічного стану та визначення фактичних руйнівних навантажень оболонкових конструкцій за результатами моделювання та неруйнівних експериментальних випробувань [1, 4, 5]. Все це має значний вплив на швидкість і якість проєктних розробок.

1. Дробенко Б.Д., Марчук М.В. Розрахункове моделювання руйнівних випробувань ракетних конструкцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2023. – 66, № 3–4. – С. 169–179.
2. Кононюк, А.Ю. Узагальнена теорія моделювання. Основи. Освіта України. –2012.

3. *Марчук М.В., Пакош В.С., Харченко В.М., Хом'як М.М.* Ефективні термопружні модулі дискретних композиційних шарів у межах моделі ортотропного матеріалу // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – 65, № 3–4. – С. 111–122.
4. *Drobenko B.D., Kushnir R.M., and Marchuk M.V.* Methodology for Exploration of the Strength and Determination of Destructive Load of Rocket and Space Engineering Constructions // *Sci. innov.* – 2021. – 17, no. 3. – P. 28–36.
5. *Drobenko B.D., Marchuk M.V.* Computational Simulation of Destructive Tests of Rocket Structures // *J. Math. Sci.* – 2025. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08109-0>
6. *Marchuk, M., Khomyak, M.* New Structural Approach for Determination of Effective Thermoelastic Modules of Discrete Composite Layers / In: H. Altenbach, V. Bogdanov, A. Grigorenko, R. Kushnir, V. Nazarenko, V. Eremeyev (eds). *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials*, Springer Nature. – vol. 204. – 2024. Springer. Cham. P. 381–411. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-54063-9_25.

ПРОГНОЗУВАННЯ ЗЛЕДЕНІННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПРОФІЛІВ БПЛА НА ОСНОВІ ГІБРИДНОГО CFD–ШІ ПІДХОДУ

Стрембовський В.В., Круглий А.Ю., Дреус А.Ю

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Метою роботи є демонстрація можливостей гібридного підходу CFD–ШІ для швидкого прогнозування геометрії льодових наростів на аеродинамічних профілях БПЛА на основі проведених чисельних розрахунків та побудованої нейромережевої моделі. Дана задача має важливе прикладне значення в контексті розвитку малогабаритних безпілотних літальних апаратів (БПЛА), що експлуатуються в умовах низьких чисел Рейнольдса ($Re < 10^6$), та для яких проблема зледеніння несучих поверхонь є надзвичайно актуальною.

У роботі сформовано навчальний набір даних із 3200 незалежних симуляцій зледеніння симетричного профілю NASA0012, згенерованих за допомогою коду LEWICE. Вхідний простір охоплював шість фізично значущих параметрів: швидкість потоку (8–200 м/с), кут атаки ($-4...7^\circ$), температуру ($-25...0^\circ\text{C}$), вміст рідкої води LWC ($0.02\text{--}2\text{ г/м}^3$), медіанний діаметр крапель MVD (5–500 мкм) та час експозиції (30–1200 с). Такий діапазон дозволив охопити режими інейного, змішаного та прозорого льоду.

На основі сформованого датасету реалізовано багат шаровий перцептрон (MLP), який відображає 6-вимірний простір вхідних параметрів у 800-вимірний простір координат контуру обмерзлого профілю (400 точок по контуру). Архітектура мережі включала чотири приховані шари (256–512–1024–1024 нейрони) з функцією активації ReLU та оптимізатором Adam. Навчання проводилося протягом 300 епох з розподілом вибірки на навчальний та валідаційний набори у співвідношенні 80/20.

За результатами тестування середня абсолютна похибка реконструкції геометрії льоду становила 0,741 см, що відповідає приблизно 1,5% довжини хорди ($c = 50\text{ см}$). Для інейного льоду досягнуто найвищу точність із локальною похибкою менш ніж 0,11 см, що свідчить про коректне відтворення фізично простих режимів миттєвого замерзання. Для змішаного та прозорого льоду модель зберігає правильну загальну морфологію та положення рогоподібних утворень, попри незначні локальні відхилення кривизни. Отримані результати демонструють, що нейромережева модель коректно навчається нелінійним зв'язкам між термодинамічними умовами та геометрією льодових наростів.

Запропонований підхід дозволяє радикально зменшити обчислювальні витрати порівняно з повними CFD-розрахунками та забезпечує прогнозування форми льоду в режимі, близькому до реального часу. Це відкриває можливості інтеграції моделі у системи автоматизованого проєктування, оцінювання аеродинамічної деградації та адаптивні системи захисту від зледеніння БПЛА.

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ У ПОРОЖНИСТОМУ СТАЛЕВОМУ ЦИЛІНДРІ НА ЙОГО ЗАЛИШКОВІ СТРУКТУРНИЙ І НАПРУЖЕНИЙ СТАНИ

О.Р. Гачкевич, Т.В. Козакевич, Т. Волчанські

*Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України (м. Львів,
Україна); Політехніка Опольська, Освітньо-навчальне об'єднання в Глушині
(Польща).*

Широке використання різних видів термічного впливу на різні елементи інженерних конструкцій вимагає створення адекватних моделей для кількісного опису взаємозв'язаних фізико-механічних процесів, які при цьому відбуваються, з врахуванням властивостей навколишнього середовища. Особливо актуальними і важливими є моделі для розрахунку структурного і напруженого стану твердих тіл, що знаходяться під впливом середовищ, властивості яких змінюються з часом. На основі таких моделей можна досліджувати і оптимізувати напружений стан тіл з врахуванням поліморфних перетворень, які істотно впливають на механічні властивості (міцності, надійності та довговічності) металевих виробів, а отже, на експлуатаційні можливості інженерних конструкцій.

Пропонується з метою широкого використання числових підходів використати відому модель [1] опису фазового складу маловуглецевих низьколегованих сталей і зумовленого ним залишкового напруженого стану (в яких вміст фазових складових пов'язаний з часом перебування точки в діапазоні температур поліморфних перетворень та хімічним складом сталі, а напруження, зумовлені ними – зі зміною питомого об'єму) на випадок сталевих порожнистих циліндрів при температурозалежному коефіцієнті теплообміну з зовнішнім охолоджуючим середовищем. При визначенні температурного поля та напруженого стану сталевого тіла використовуємо експериментально встановлені залежності коефіцієнта теплообміну від температури поверхні тіла, де подані залежності, які відповідають умовам охолодження сталевих тіл водяним душем.

Методика комплексного визначення залишкових структурного і напруженого станів тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих порожнистих циліндрів за умов технологічного нагріву з подальшим охолодженням, яка включає три етапи: визначення температурного поля на основі математичної постановки відповідної двовимірної початково-крайової задачі теплопровідності, а також обчислення часу перебування точок циліндра в інтервалі температур поліморфних перетворень; знаходження, з використанням узагальнених залежностей статистичного аналізу за відомого часу перебування точок тіла в діапазоні температур поліморфних перетворень та хімічного складу сталі, відсоткового вмісту фазових складових; визначення залишкових напружень на основі рівнянь методу умовних залишкових деформацій за відомої у відповідності до принципу адитивності деформації, викликаной відсотковим вмістом наявних фазових складових за встановленої зміни їх питомих об'ємів. Розроблена, ґрунтуючись на методі зважених залишків та МСЕ, методика чисельного

розв'язування відповідних задач математичної фізики кожного етапу.

Описана методика розрахунку залишкового структурного і напруженого станів в сталевих низьколегованих маловуглицевих циліндричних тілах може бути використана для аналізу і оптимізації більш широкого класу режимів охолодження сталевих тіл з метою цільового керування їх структурою, напруженим станом і функціональними властивостями.

І. О.Гачкевич, Т.Козакевич, Р.Кушнір Вибрані математичні проблеми термомеханіки маловуглицевих низьколегованих сталевих пластин при нагріві рухомими джерелами тепла за врахування структурних залишкових деформацій. Праці Наукового товариства ім. Шевченка. Львів-2023, - Т.LXXIV,- С.81-98 (230 с.)

ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТОГО ПОРОДНОГО МАСИВУ З ГАЗОНОСНИМИ ПРОШАРКАМИ

О.П. Круковський, В.В. Круковська

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

Аналіз експлуатаційного стану глибоких шахт Донбасу свідчить, що інтенсивне пучення порід підшви є однією з основних причин втрати стійкості підготовчих виробок. За наявності в підшві шарів різної міцності, зокрема чергування міцних і слабких газоносних порід, деформування масиву набуває складного характеру та може супроводжуватися раптовими руйнуваннями і проривами метану у виробку.

Для дослідження цих процесів розроблено математичну модель зв'язаних процесів деформування шаруватого вуглепородного масиву та фільтрації метану в порушеній області навколо гірничої виробки. Модель ґрунтується на рівняннях механіки суцільного середовища в пружно-пластичній постановці з використанням умови міцності Кулона–Мора та рівняння фільтрації газу з урахуванням зміни проникності внаслідок тріщиноутворення. Чисельна реалізація виконана методом скінченних елементів.

Результати моделювання показали, що проведення виробки ініціює формування області підвищеної різнокомпонентності поля напружень у підшві, причому максимальна концентрація напружень виникає в більш міцному пісковіку (рис. 1а). У слабших породах (аргіліті та вугіллі) при цьому інтенсивно розвиваються непружні деформації та процеси тріщиноутворення. З часом зона непружних деформацій розширюється, що може призводити до руйнування пісковіку як у крайових, так і в центральній частині підшви виробки.

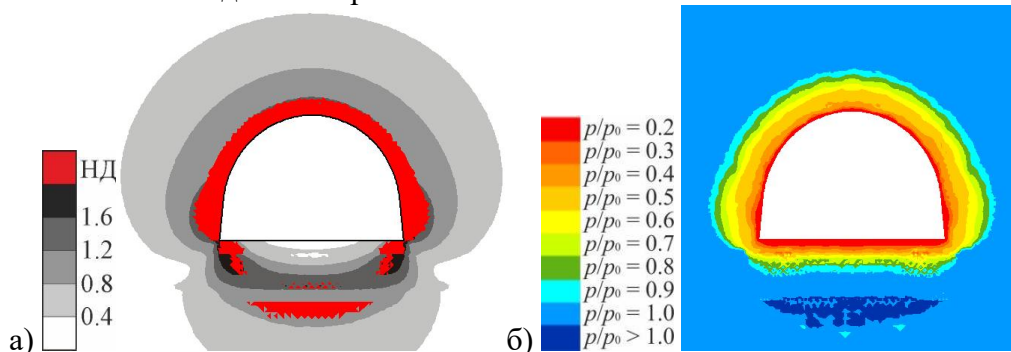


Рис. 1. Результати розрахунку при $t = 1$ доба: а) параметр концентрації напружень $Q^* = (s_1 - s_3) / gH$ і зони непружних деформацій (НД); б) відносний тиск газу p/p_0

Показано, що деформування порід супроводжується збільшенням їх фільтраційної проникності та перерозподілом газового тиску. Метан із верхньої частини газоносного пісковика фільтрується у виробку, тоді як руйнування вугільного прошарку призводить до накопичення метану під шаром міцного пісковика. У разі поступового розвитку порушеної області процес фільтрації газу має квазістаціонарний характер, тоді як крихке руйнування пісковика може спричинити раптовий прорив метану в підшову виробки.

Отримані результати дозволяють більш обґрунтовано оцінювати ризики втрати стійкості підготовчих виробок і газодинамічних проявів при їх проведенні в умовах шаруватої газоносної підшви та можуть бути використані для підвищення безпеки гірничих робіт.

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВРАХУВАННЯ В РОЗРАХУНКАХ УСКЛАДНЕНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ ТА ОБОЛОНОК

М.О. Бабешко, В.Г. Савченко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ

З використанням розроблених методик досліджено осесиметричний термопружнопластичний напружено-деформований стан складених тіл та оболонок, в яких поєднуються ізотропні та ортотропні матеріали. Вважається, що в процесах термосилового навантаження ізотропні матеріали деформуються як в межах, так і за межами пружності, а ортотропні матеріали деформуються пружно.

Для ізотропних матеріалів враховується залежність деформаційних характеристик від температури, виду напруженого стану та історії деформування. Використовуються визначальні рівняння [1], що описують деформування матеріалів вздовж траєкторій малої кривизни. Визначальні рівняння містять дві нелінійні залежності, одна з яких пов'язує перші інваріанти тензорів напружень та деформацій, а інша – другі інваріанти відповідних девіаторів. Вказані нелінійні залежності конкретизуються за результатами експериментів на пропорційне навантаження трубчастих зразків при різних значеннях температури і параметра виду напруженого стану. За параметр виду напруженого стану прийнято кут подібності девіаторів, який визначається через другий та третій інваріанти девіатора напружень.

Для ортотропних матеріалів, головні напрямки анізотропії яких збігаються з напрямками системи координат, враховується залежність властивостей від температури та різномодульності. Для опису деформування ортотропних матеріалів використано співвідношення [2] теорії різномодульної пружності.

Для спрощення алгоритму сформульовано визначальні рівняння в формі, єдиній для ізотропних і ортотропних матеріалів. Запропоновано спосіб лінеаризації визначальних рівнянь. При розв'язанні просторової задачі використовується метод скінченних елементів. Задача теорії оболонок розв'язується з використанням гіпотез Кірхгофа - Лява для пакету шарів. Одержано системи розв'язувальних рівнянь для просторових тіл та оболонок обертання. Розроблено та реалізовано методику послідовних наближень при поетапному визначенні пружнопластичного стану тіл в процесах термосилового навантаження.

Розв'язано ряд конкретних задач. Показано, що врахування залежності діаграм деформування від виду напруженого стану та пластичної стисливості можуть суттєво

змінювати одержані в розрахунках значення компонентів напружено-деформованого стану тіла, яке досліджується. Проаналізовано вплив на результати розрахунків врахування різномодульності ортотропних матеріалів. Встановлено, що врахування названих проявів залежності властивостей матеріалів від виду навантаження нарівні з залежністю від температури та історії деформування суттєво впливає на оцінку руйнівного навантаження тіл, що моделюють поведінку відповідальних елементів конструкцій в процесі експлуатації.

1. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – 42, N 4. – P. 421 – 430.

2. *Jones R.M.* Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // *AIAA J.* – 1977. – 15, N1. – P.16 – 23.

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДИСКРЕТНО-ОДНОРІДНИХ ТОНКОСТІННИХ ТА ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

П.О. Стебляк

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Узагальнено визначальні співвідношення нелінійного деформування (нелінійна пружність, пластичність) придатих для застосування при розв'язанні задач міцності тіл складених з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ). Для коефіцієнтів визначальних співвідношень, що описують залежність характеристик ФГМ від виду навантаження при деформуванні за межами пружності, і проведено верифікацію параметрів матеріалу на базі відомих експериментальних даних для функціональних матеріалів. Для запису визначальних рівнянь тензор деформацій представляється у вигляді суми тензорів пружної і пластичної деформації. Неоднорідні фізичні рівняння $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\epsilon_{ij} + b_{ij}$, де $a_{ijkl} - \text{const}$ в пружному випадку або залежать від параметрів процесу попереднього термопластичного деформування, які для ФГМ та функціональних матеріалів відомим чином може залежати від матеріальних координат тіла і часу.

Для метало-керамічних ФГМ фізико-механічні властивості матеріалу є функціями від об'ємної частки складових матеріалів і можуть бути виражені як

$$P = P_m V_m + P_c V_c, \quad V_m + V_c = 1,$$

де V_m, V_c - об'ємні частки кераміки ⁽¹⁾ та металу ⁽²⁾. Тоді

$$a_{ijkl}(x, y, z) = a_{ijkl}^{(1)} V_c(x, y, z) + a_{ijkl}^{(2)} V_m(x, y, z);$$

$$b_{ij}(x, y, z) = b_{ij}^{(1)} V_c(x, y, z) + b_{ij}^{(2)} V_m(x, y, z).$$

Для кубічних інтерполяції зміни властивостей шаруватих складових ФГМ по одній з координат отримано

$$a_{ijkl} = 2 \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^3 - 3 \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^2 + 1 a_{ijkl}^{(1)} + \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^2 \left(3 - 2 \frac{x-L_1}{L_2-L_1} \right) a_{ijkl}^{(2)};$$

$$b_{ij} = 2 \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^3 - 3 \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^2 + 1 b_{ij}^{(1)} + \frac{x-L_1}{L_2-L_1}^2 \left(3 - 2 \frac{x-L_1}{L_2-L_1} \right) b_{ij}^{(2)};$$

В результаті проведено узагальнення визначальних співвідношення, що описують залежність характеристик матеріалу від виду навантаження при деформуванні за межами пружності, і проведено верифікацію параметрів матеріалу на базі відомих експериментальних даних для функціональних матеріалів.

Розроблено метод розв'язання стаціонарних задач деформування тіл обертання із матеріалів з ефектом пам'яті форми на основі застосування сплайн-функцій для підвищення точності.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА ДІЇ ЗМІННОГО ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ

Є.М. Ірза

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б; Evgen_Irza@ukr.net*

Запропоновано методику розрахунку напружено-деформованого стану структурно неоднорідного по товщині порожнистого циліндра за дії змінного внутрішнього тиску. Розроблено числовий алгоритм розв'язання відповідної задачі.

Задачу про визначення напружено-деформованого стану в циліндрі сформульовано у переміщеннях. Фізико-механічні характеристики матеріалу циліндра розглянуто залежними від просторової координати по товщині циліндра.

Порожнистий циліндр перебуває за умов технологічного навантаження у вигляді змінного внутрішнього тиску.

Циліндр віднесено до криволінійної циліндричної системи координат $O r \varphi z$, займає область Ω і обмежений поверхнею Γ .

Зв'язок між компонентами тензорів напружень $\{\sigma\}$ і деформацій $\{\varepsilon\}$ беремо у вигляді

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

де $[D]$ – матриця пружних характеристик.

У циліндричній системі координат (для осесиметричного випадку) ці тензори зображені через компоненти так:

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{rr} \ \sigma_{\varphi\varphi} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{rz}], \quad \{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\varphi\varphi} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{rz}].$$

Матриця пружних характеристик має вигляд

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix},$$

де $E(r)$ – модуль пружності; $\nu(r)$ – коефіцієнт Пуассона.

В області Ω повинні виконуватися рівняння рівноваги і крайові умови:

$$\partial\sigma_{rr}/\partial r + \partial\sigma_{rz}/\partial z + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r = 0, \quad \partial\sigma_{rz}/\partial r + \partial\sigma_{zz}/\partial z + \sigma_{rz}/r = 0,$$

$$n_r\sigma_{rr} + n_z\sigma_{zr} - p_r = 0, \quad n_r\sigma_{rz} + n_z\sigma_{zz} - p_z = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma,$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \text{ на } \Gamma_u.$$

Обмежуємося малими деформаціями:

$$\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / r, \quad \varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r.$$

Для розв'язування використано метод зважених залишків в поєднанні з скінченно-елементним підходом.

Проведено дослідження залежності напруженого стану циліндра від зміни фізико-механічних характеристик матеріалу по товщині. У випадку, коли фізико-механічні характеристики є однорідними по товщині, величина і розподіл напружень по товщині циліндра не залежать від фізико-механічних характеристик матеріалу. У випадку, коли фізико-механічні характеристики матеріалу циліндра є неоднорідними по товщині, величина і розподіл напружень по товщині циліндра суттєво залежать від фізико-механічних характеристик матеріалу.

ВРАХУВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ СТРИНГЕРУ ТА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ МАТРИЦІ

Т.С. Кагадій¹, А.,Г. Шпорта¹, І. В. Щербина², О.В. Білова³

¹Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,

²Дніпровський державний аграрно-економічний університет,

³Український державний університет науки і технологій

Анотація

В роботі розглянуто задачу динамічної взаємодії стрингеру з в'язкопружним ортотропним напівпростором з урахуванням малого геометричного параметра. Запропоновано узагальнення асимптотичного методу для опису контактної взаємодії у випадку часово-залежних властивостей матеріалу. Показано вплив в'язкопружних характеристик на розподіл контактних напружень та часову еволюцію зусиль у стрингері. Отримані результати можуть бути використані для оцінки демпфуючих властивостей композитних конструкцій при динамічних навантаженнях.

Ключові слова: в'язкопружність, асимптотичний метод, стрингер, ортотропний напівпростір, динамічне навантаження.

Актуальність дослідження

Сучасні композиційні матеріали широко застосовуються в авіаційних, машинобудівних та будівельних конструкціях, де підкріплюючі елементи типу стрингерів працюють у складних умовах динамічного навантаження. У реальних матеріалах пружні властивості часто поєднуються з в'язкими, що зумовлює часову залежність напружено-деформованого стану. Тому класичні пружні моделі не завжди адекватно описують процеси передачі навантаження, особливо при ударних або імпульсних діях.

Врахування в'язкопружних властивостей ортотропного напівпростору дозволяє більш точно оцінити рівень контактних напружень, демпфування коливань та

енергетичні втрати, що є принципово важливим для прогнозування довговічності конструкцій.

Постановка задачі

Розглядається в'язкопружний ортотропний напівпростір з циліндричною анізотропією, підкріплений пружним стрингером малого радіуса. Стрингер зазнає дії динамічного осьового навантаження, яке моделюється ступінчастою функцією часу. Контакт між стрингером і напівпростором вважається ідеальним.

Матеріал напівпростору описується лінійною в'язкопружною моделлю з використанням інтегральних співвідношень типу Больцмана–Вольтерри, що дозволяє врахувати навантаження. Потрібно визначити розподіл контактних напружень та зусиль у стрингері з урахуванням часової релаксації матеріалу.

Метод розв'язання

Для розв'язання задачі використано асимптотичний метод малого параметра, пов'язаного з радіусом стрингера. Напружено-деформований стан напівпростору подано у вигляді суми двох складових: повільно змінної вздовж осі стрингера та складової типу пограничного шару.

Застосування перетворення Лапласа за часом дозволяє звести в'язкопружну задачу до формально пружної з комплексними модулями, що істотно спрощує аналіз. Отримані в просторі зображень розв'язки обертаються з урахуванням реологічних характеристик матеріалу.

Основні результати

Показано, що врахування в'язкопружності призводить до: зменшення максимальних контактних напружень у порівнянні з пружною моделлю; згладжування логарифмічної особливості напружень поблизу лінії контакту; появи часової затримки максимумів зусиль у стрингері; додаткового демпфування динамічних коливань.

У граничному випадку відсутності в'язких властивостей отримані розв'язки переходять у відомі результати для пружного ортотропного напівпростору, що підтверджує коректність запропонованої моделі.

Висновки

Запропоновано асимптотичний підхід до розв'язання задачі динамічної взаємодії стрингеру з в'язкопружним ортотропним напівпростором. Показано суттєвий вплив в'язкопружних властивостей на контактні напруження та часову поведінку зусиль. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні композитних конструкцій, що працюють в умовах динамічних навантажень.

Література

1. Encyclopedia of Computational Mechanics / E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.
2. Vetrov O.S. Shevchenko V.P. Study of the stress-strain state of ortotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. –183, № 2. – P. 231-240.
3. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В., Шпорта А.Г. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. Прикладні питання математичного моделювання. 2021. Т.3. No2.1.С. 107-117.
4. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. Прикладні питання математичного моделювання. 2020. Т.3. No 2.1. С. 107-116.
5. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в'язкопружності. Вісник Херсонського національного університету. 2019. No 2(69) .Ч.3. С. 69-76.

6. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / ред.: І. О. Луковський, Г. С. Кіт, Р. М. Кушнір. Львів : Ін-т приклад. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. 412 с.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ

М. Й. Юзв'як, Ю. В. Токовий

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
Національної Академії Наук України*

Побудова аналітичних розв'язків просторових задач теорії пружності та термопружності для необмежених або напівобмежених тіл (простору, півпростору, шару) залишається однією з фундаментальних і значущих у прикладному сенсі проблем механіки деформівного твердого тіла. Такі розв'язки виконують роль еталонних при верифікації числових методів, дають змогу всесторонньо дослідити вплив властивостей матеріалу, силових і теплових навантажень на базовий (основний) напружено-деформований стан без впливу крайових ефектів, а також слугують підґрунтям для побудови наближених і напіваналітичних методів для тіл складнішої геометрії.

Суттєвою методологічною проблемою просторової теорії термопружності є перевизначеність системи ключових рівнянь у напруженнях та ускладнення, пов'язані з використанням класичних потенціальних функцій (Максвелла, Морери тощо), які призводять до необґрунтованого підвищення диференціального порядку визначальних рівнянь, появи сторонніх розв'язків і труднощів у задоволенні крайових та асимптотичних умов. Це актуалізує пошук альтернативних підходів, при застосуванні яких задача зберігає мінімально необхідну диференціальну складність.

У доповіді з використанням методу безпосереднього інтегрування, запропонованого проф. В.М. Вігаком, побудовано аналітичні розв'язки просторових задач термопружності для простору, півпростору та шару в напруженнях. Ключовим елементом методу є використання трьох незалежних визначальних функцій – функцій Вігака, через які всі шість компонент тензора напружень виражено інтегральними співвідношеннями. На відміну від класичних потенціальних підходів, інтегральний характер зв'язку між напруженнями та функціями Вігака дає змогу тотожно задовольнити рівняння рівноваги, не підвищує диференціальний порядок рівнянь суцільності, забезпечує коректне задоволення крайових умов і виконання умов згасання на безмежності.

Для знаходження визначальних функцій Вігака використано три рівняння суцільності в напруженнях із відповідними інтегральними умовами. Доведено, що розв'язок, отриманий на основі трьох рівнянь суцільності, тотожно задовольняє інші три, що знімає проблему перевизначеності задачі у термінах напружень. Для всіх розглянутих областей отримано явні співвідношення, які дають змогу виразити три функції Вігака через одну єдину визначальну функцію. Показано можливість ефективного використання отриманих розв'язків у задачах керування термонапруженим станом шляхом встановлення зв'язку між єдиною визначальною функцією та функцією керування. На числовому прикладі продемонстровано, що побудовані розв'язки можуть використовуватися як еталонні для верифікації числових методів при дослідженні тіл складнішої геометрії.

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

Сметанкіна Н.В.¹, Місюра С.Ю.^{1,2}, Місюра Є.Ю.³

¹*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України*

^{1,2}*Національний технічний університет «ХПІ»*

³*Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця*

Сучасний розвиток техніки викликає необхідність дедалі ширшого використання тонкостінних конструкцій, однією з головних переваг яких є висока міцність при відносно невеликій вазі [1, 2]. Зокрема, тонкостінні оболонки є елементами відповідальних конструкцій у машинобудуванні, суднобудуванні і, особливо, авіаційній промисловості [3, 4]. Важливе місце серед зазначених конструкцій займають тонкі оболонки з різними вирізами, і на практиці часто буває необхідно знати, яким чином і при якому значенні зовнішнього навантаження відбудеться процес втрати їх стійкості. За наявності отвору в оболонці загальної втрати стійкості може передувати місцева, коли обурення локалізуються біля отвору, згасаючи з віддаленням від нього. Хоча це часто не означає вичерпання оболонкою несучої здатності, однак, у тих випадках, коли в силу умов експлуатації місцева втрата стійкості або взагалі неприпустима або може призвести до загальної втрати стійкості конструкції при незначному зростанні зовнішньої сили, постає питання про визначення значення відповідного критичного навантаження, а також характеру локальних збурень.

Внаслідок суттєвої неоднорідності напружено-деформованого докритичного стану в оболонках з отворами, знаходження якого саме по собі є досить складним завданням, при дослідженні локальної стійкості виникають великі труднощі математичного характеру. Метою роботи є розробка методу розв'язання задачі локальної стійкості циліндричних оболонок з одним круглим вирізом. Запропоновано метод дослідження, що дозволяє точно задовольнити всім граничним умовам та одному з рівнянь стійкості, у рамках лінійної постановки. Проаналізовано вплив геометрії та властивостей матеріалу оболонки на величини відповідних критичних навантажень та форми прогинів.

Література

1. Smetankina N.V., Postnyi O.V., Misura S.Yu., Merkulova A.I., Merkulov D.O. Optimal design of layered cylindrical shells with minimum weight under impulse loading. In: 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). 2021. P. 506–509. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7_42
2. Гонтаровський П. П., Сметанкіна Н. В., Гармаш Н. Г., Глядя А. А., Клименко Д. В., Сиренко В. Н. Дослідження напружено-деформованого стану паливного бака вафельної конструкції ракети-носія. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпро, 2019, вип. 29, с. 91–102.
3. Smetankina N., Ugrimov S., Kravchenko I., Ivchenko D. Simulating the process of a bird striking a rigid target. Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P. 711–721. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_71
4. Smetankina N.V. Non-stationary deformation, thermal elasticity and optimisation of laminated plates and cylindrical shells. Kharkiv: Miskdruk Publishers, 2011. 376 p.

ПРО ПІДХОДИ ДО ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ РАКЕТ НА ОСНОВІ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

В.А. Максимюк, Є.А. Сторожук, І.С. Чернишенко

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України

Інформація про внутрішній тиск у паливних баках і в камерах згоряння російських ракет дозволяє оцінити реальну дальність їхнього польоту. Загалом така інформація не є загальнодоступною у відкритих джерелах. Проте методи інженерних розрахунків та комплексний аналіз форми й розмірів, вигинів, тріщин та інших деформацій уламків паливних баків або корпусів двигунів дозволяє оцінити величину внутрішнього тиску, який призвів до такого типу руйнування, виходячи з відомих характеристик матеріалів (міцність, пластичність), товщини стінок та інших геометричних параметрів.

Встановити точний внутрішній тиск у російських ракетах, аналізуючи лише їхні уламки, є надзвичайно складним завданням, але шляхом проведення комплексних технічних та інженерних досліджень можна зробити певні оцінки. Так, на основі теорії оболонки з аналізу уламків можна оцінити діапазон або мінімальне значення внутрішнього тиску в російських ракетах.

Відзначимо, що в теорії оболонки, як і в механіці деформівного твердого тіла загалом, виділяють два типи задач: пряма і обернена. Пряма задача теорії оболонки дозволяє розрахувати напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій (якими є більшість паливних баків ракет і двигунів) під дією заданого внутрішнього тиску [1]. Обернена задача полягає у знаходженні навантажень на оболонку, які призводять до відомих пружних чи пластичних деформацій.

З цього погляду знаходження внутрішнього тиску в елементах ракет є оберненою задачею теорії оболонки. Загалом, навіть за відомого кінцевого деформованого стану конструкції обернені задачі, окрім найпростіших випадків, не є однозначними.

В окремих випадках, коли змінюються тільки розміри оболонки, а форма не міняється, обернена задача може бути однозначною. Так, у випадках розтягу циліндричної тонкої оболонки з відкритими чи закритими торцями (одним торцем) під рівномірним внутрішнім тиском обернена задача зводиться до простих алгебраїчних формул. А у випадку довільної формозміни оболонки нерівномірним тиском для однозначності бажано використати додаткову апріорну інформацію про діючий тиск чи характер деформування.

Зазвичай використовують так звану кінематичну умову, яка узгоджує вектор переміщень з відомою деформованою формою, а також додаткову силову умову про відсутність дотичних сил. Тоді обернена задача стає однозначною [2]. Так, в осесиметричному випадку вона зводиться до послідовності диференціальних рівнянь другого порядку з двома крайовими умовами.

А за наявності тільки окремих фрагментів ракет задача стає ще більш невизначеною. Підійти до її вирішення можна в інтерактивному режимі інженера з програмним засобом для розв'язання ряду прямих задач на основі його досвіду, інтуїції, евристики.

1. Klymenko D. V., Maksymyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Numerical Modeling of Nonlinear Elastic State of Rocket Fuel Tank Bottom Considering Actual Shear Stiffness of Composite Material // *Int. Appl. Mech.* – 2025. – 61, N 1. – P. 1-11.

2. Guz A.N., Maksimyyuk V.A., Tarasyuk V.S., Chernyshenko I.S. Inverse problems of the deformation of flexible cylindrical shells made of nonlinearly elastic composites // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, N 2. – P. 95–100.

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВИБОРУ ТИПУ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ НА ПРИКЛАДІ РОЗРАХУНКУ ТРИВИМІРНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧИ

Є.О. Коваленко, С.О. Чернецький

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Розглядається задача визначення збіжності розв'язку із використанням різних типів скінченних елементів для отримання полів переміщень, напружень і деформацій при розрахунку НДС двошарового тіла кінцевих розмірів $H \times A \times B$ де $H = h_1 + h_2$; $A = 2a$; $B = 2b$ під дією абсолютно жорсткого штампу сферичної форми радіусу R . Осадку штампу позначатимемо літерою Δ . При контакті між шарами тіла і тіла зі штампом розглянемо ковзання з можливим розшаруванням із врахуванням сил тертя за законом кулона з коефіцієнтом f .

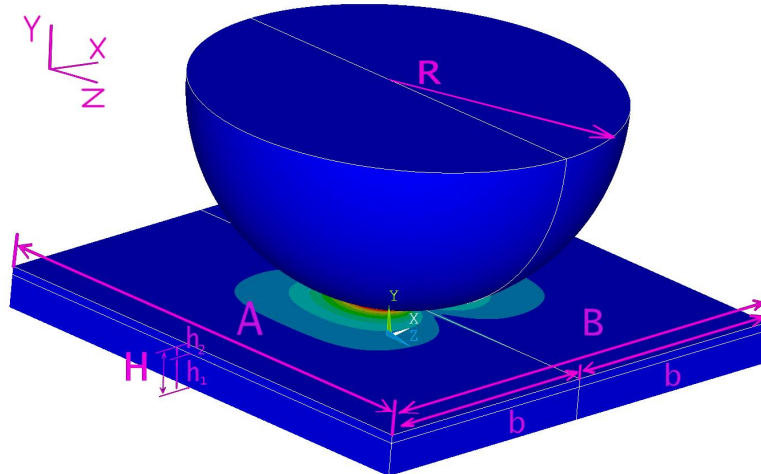


Рис. 1.1 Фізична постановка задачі

У силу симетрії задачі будемо розглядати лише половину тіла, по лінії симетрії діють відповідні граничні умови. Тіло будемо вважати жорстко зчепленим з основою і закріпленим на торцях по осі OZ.

Отримані і порівняні результати для осадки штампу $\Delta_y = -0.003$. Обрані матеріали шарів тіла:

верхнього мідно-нікелевий сплав: $E_1 = 1.53 \times 10^5$ мПа; $\nu_1 = 0.3$; $\nu_1 = 0.3$; $\sigma_{s1} = 124$ мПа; тангенційний модуль $E_{t1} = 5 \times 10^3$ мПа.

нижнього: нержавіюча сталь марки AISI 201: $E_2 = 1.93 \times 10^5$ мПа $\nu_2 = 0.27$; $\sigma_{s2} = 275.8$ мПа; тангенційний модуль $E_{t2} = 2 \times 10^4$ мПа.

Коефіцієнт тертя між шарами полоси $f = 0.15$.

Для розрахунків використано елементи SOLID185 (лінійний 8-вузловий) і SOLID186 (квадратичний 20-вузловий). Для досягнення збіжності результатів розрахунків до різниці у $<5\%$ за максимальними значеннями пластичних деформацій/напружень було проведено ряд послідовних розрахунків із використанням лінійних CE із поступовим збільшенням числа CE у тілі і згущення сітки у верхньому шарі під штампом. Для квадратичних CE SOLID186 було отримано результат при максимально можливій кількості CE із врахуванням технічних можливостей наявного

обладнання. Кількість SE при розрахунку із квадратичними елементами була обрана у 110 000 елементів.

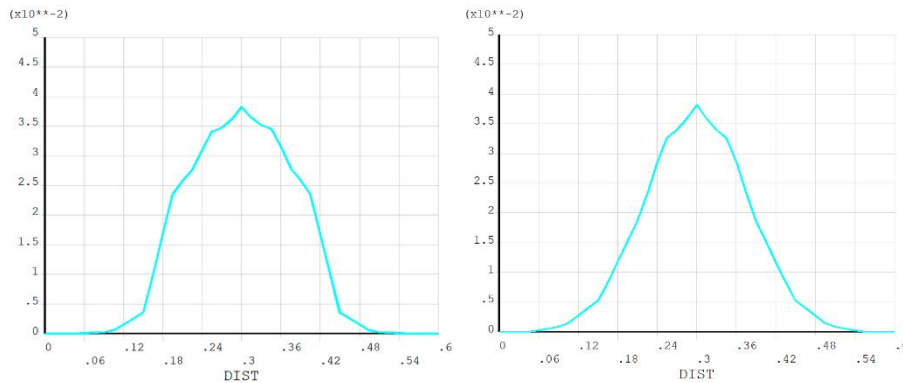


Рис.2 Графіки величини інтенсивності пластичних деформацій під штампом побудовані вздовж середини верхнього шару тіла у околиці контакту між штампом та тілом. Зліва розрахунок з лінійними KE, справа - з квадратичними.

Можна стверджувати що цієї ж точності було досягнуто використовуючи 250 000 лінійних елементів SOLID185. Порівнюючи час розрахунку можемо вважати що розрахунок із використанням квадратичних елементів є більш оптимальним, через його більшу швидкість і меншу кількість ресурсів потрібних для розрахунку.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ КРИТЕРІЙ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ НЕОДНОРІДНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

І.К. Сенченков¹, Н.Д. Яковенко¹, С.М. Якименко²

¹*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ
e-mail: term@inmech.kyiv.ua*

²*Центральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький
e-mail: yasm@i.ua*

В рамках зв'язаної задачі термов'язкопружності розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних шаруватих циліндричних тіл при силовому або кінематичному гармонічному навантаженні. Фізико-механічні характеристики матеріалу вважаються залежними від температури і частоти.

Для розв'язування задачі використовується метод покрокового інтегрування за часом та прискорена ітераційна схема розв'язання нелінійної крайової задачі термомеханіки на кожному часовому кроці. Лінеаризована задача на кожній ітерації розв'язується методом скінченних елементів.

Як приклад розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів двигуна на твердому паливі. Двигун розглядається як циліндр з в'язкопружного матеріалу із зіркоподібною в перерізі порожниною, підкріплений тришаровою пружною оболонкою. Коливання збуджуються силовим або кінематичним навантаженням на частині бічної поверхні.

Розраховано нелінійні амплітудно- і температурно-частотні характеристики стаціонарних коливань двигуна. Розраховано розподіли амплітуд НДС і температури для нелінійної задачі в околі резонансів. Детально досліджена концентрація НДС та

температури в околі западин зірчастої порожнини та на границі контакту паливо-оболонка.

Аналогічний аналіз проведений для нестационарних коливань при малих частотах.

Досліджено втомну міцність двигуна при транспортуванні. На основі результатів розрахунків сформульовано комплексний критерій втомної міцності, який об'єднує три механізми локального руйнування двигуна: механічне втомне руйнування матеріалу палива, відшарування палива від корпусу і термічну деградацію матеріалу палива внаслідок вібророзігріву. Визначено області ризику руйнування двигуна за цими механізмами. Ці області корелюються з місцями концентрації механічних і температурного полів. Досліджено вплив температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалу палива на еволюцію зон концентрації напружень і температури дисипативного розігріву двигуна.

Отримані результати можуть бути використані для оцінки можливостей утворення тріщин втоми біля западин зіркоподібного каналу, відшарування заряду від корпусу, а також оцінки параметрів транспортування двигуна, які виключають можливість термічного руйнування заряду.

РОЗРАХУНОК КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ НАВАНТАЖЕННЯ ОВАЛЬНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Є.А. Сторожук, І.С. Чернишенко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Композитні циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу (еліптичного, овального, параболічного, тощо) знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки як конструктивні елементи машин і приладів: фюзеляжі пасажирських і вантажних літаків; двигуни військових літаків; корпуси (обтікачі) ракет; канали парогенераторів і оболонки ТВЕЛів ядерних реакторів; резервуари автоцистерн; економайзери парових котлів.

В роботі досліджується нелінійне деформування і стійкість піддатливої на поперечний зсув довгої овальної незамкненої циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями за дії рівномірного нормального тиску q , прикладеного з боку опуклості оболонки.

Поперечний переріз незамкненої циліндричної оболонки має форму дуги овалу, кривина якого змінюється за законом $k = k_0(1 - \xi \cos 2k_0 s)$, де $k_0 = 1/r_0$; r_0 – радіус кола, довжина якого дорівнює довжині овалу; s – довжина дуги напрямної; ξ – параметр, який є мірою відхилення овалу від кола і змінюється в межах: $-1 \leq \xi \leq 1$.

Для дослідження напружено-деформованого стану даного класу гнучких циліндричних оболонок скористаємося рівняннями геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховуються деформації поперечного зсуву).

Зв'язок внутрішніх зусиль N, Q і момента M з компонентами деформації оболонки ε, ψ, μ прийнято згідно із законом Гука.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{ds} = 0; \quad \frac{dQ^*}{ds} - kN - q = 0; \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0; \quad Q^* = Q + N \frac{dw}{ds}. \quad (1)$$

Інтегруючи перше рівняння системи (1), отримуємо, що $N = C_0 = const$.

З другого і третього рівнянь рівноваги одержимо систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами для знаходження безрозмірних прогину \tilde{w} і кута повороту \tilde{g}

$$(1 + \tilde{N}\beta) \frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{g}}{d\eta} = \tilde{N}\beta(1 - \xi \cos \tilde{k}_0\eta) + \beta\tilde{q}; \quad \beta \frac{d^2\tilde{g}}{d\eta^2} - \tilde{g} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок системи (2), який задовольняє умовам $\tilde{w}(\pm 1) = 0$, $\left. \frac{d\tilde{g}}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0$, має вигляд

$$\tilde{w} = -\frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + \frac{P}{\tilde{N}} \left[1 + \frac{\tilde{N}(\eta^2 - 1)}{2} - \frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} + \frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} + A \cos \tilde{k}_0\eta \right];$$

$$\tilde{g} = -\frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} + \frac{P}{\lambda} \frac{\sin \lambda \eta}{\cos \lambda} - \lambda \eta + B \sin \tilde{k}_0\eta. \quad (3)$$

$$\text{Тут } P = 1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}; \quad \eta = \frac{s}{\delta}; \quad A = \frac{(1 + \beta\tilde{k}_0^2)B}{\tilde{k}_0}; \quad B = \frac{\lambda^2 \xi}{\tilde{k}_0(\lambda^2 - \tilde{k}_0^2)}; \quad \tilde{N} = \frac{N\delta^2}{D_M}; \quad \beta = \frac{D_M}{D_O\delta^2};$$

$$\tilde{q} = \frac{q\delta^2}{k_0D_M}; \quad \lambda^2 = -\frac{\tilde{N}}{1 + \beta\tilde{N}}; \quad \tilde{k}_0 = 2\delta k_0; \quad \tilde{k} = \delta^2 k_0/h; \quad h - \text{товщина}; \quad 2\delta - \text{довжина напрямної}.$$

Таким чином, точний розв'язок даної геометрично нелінійної задачі отримано в параметричній формі з величиною λ в якості параметра.

Задовольняючи умову про відсутність зближення між краями, одержимо залежність між параметрами навантаження \tilde{q} й тангенціального зусилля \tilde{N}

$$R_1P^2 + R_2P + R_3 = 0, \quad (4)$$

де коефіцієнти R_1, R_2, R_3 залежать від безрозмірного тангенціального зусилля, а також геометричних і механічних параметрів оболонки.

Верхнє і нижнє критичні значення навантаження, які відповідають точкам максимуму та мінімуму залежності прогину у вершині панелі від навантаження $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$ і при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка, знаходяться з використанням рівняння (4) і умови

$$\frac{d\tilde{q}}{d\lambda} = 0. \quad (5)$$

Для $\xi = 0,5$ і ряду значень параметрів $\beta, \tilde{k}_0, \tilde{k}$ отримані граничні значення узагальненого параметра кривини $\tilde{k}_{\pi/2}$ і \tilde{k}_π , верхнє і нижнє критичні значення навантаження \tilde{q}_u і \tilde{q}_l , при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка ($\tilde{k}_{\pi/2} < \tilde{k}_\pi$), та критичне навантаження \tilde{q}_b , при досягненні якого оболонка може втратити стійкість за рахунок біфуркації ($\tilde{k} < \tilde{k}_\pi$). Також були обчислені відповідні цим критичним навантаженням значення прогинів у вершині панелі $\tilde{w}_u, \tilde{w}_l, \tilde{w}_b$. В таблиці наведені результати розрахунків як для моделі Кірхгофа–Лява ($\beta = 0$), так і для моделі Тимошенка ($\beta = 0,08$).

Таблиця – Значення критичних навантажень та відповідних їм прогинів у вершині

β	\tilde{k}_0	$\tilde{k}_{\pi/2}$	\tilde{k}_π	\tilde{k}	$\tilde{q}_u(\tilde{q}_b)$	\tilde{q}_l	$\tilde{w}_u(\tilde{w}_b)$	\tilde{w}_l
---------	---------------	---------------------	-----------------	-------------	----------------------------	---------------	----------------------------	---------------

0	0,25	2,225	4,496	3,0	1,502	0,981	-0,159	-0,361
				4,0	2,121	0,374	-0,136	-0,387
				5,0	(2,896)	–	(-0,147)	–
	0,75	2,127	4,317	3,0	1,644	0,955	-0,162	-0,383
				4,0	2,356	0,262	-0,140	-0,409
				5,0	(3,286)	–	(-0,137)	–
0,08	0,25	2,033	3,438	2,5	1,154	0,920	-0,173	-0,348
				3,0	1,375	0,708	-0,150	-0,375
				5,0	(2,318)	–	(-0,072)	–
	0,75	1,946	3,346	2,5	1,251	0,921	-0,175	-0,373
				3,0	1,505	0,682	-0,154	-0,399
				5,0	(2,449)	–	(-0,075)	–

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ РЕШІТОК СВИНЦЕВО-КИСЛОТНИХ АКУМУЛЯТОРІВ

С.В.Тарасов, О.В.Сухова, В.А.Іванов, О.В.Дорош, А.С.Тарасов

Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України

В роботі виконаний вибір оптимальної конструкції литих здвоєних решіток для стартерних та індустріальних свинцево-кислотних VLRA-акумуляторів, послуговуючись розрахунком їх напружено-деформованого стану. Здвоєні решітки виготовляли зі сплавів Pb–Sn–Ca (0,6–0,9 ваг.% Sn; 0,06–0,09 ваг.%Ca; Pb – залишок) методом гравітаційного лиття на ливарних автоматах лінії збирання VLRA-акумуляторів фірми «BM» (Австрія). У зв'язку зі складністю вибору оптимальної конструкції решіток експериментальним шляхом, цю задачу вирішували на основі розрахунків їх міцності з використанням спеціалізованого програмного комплексу «ANSYS». Для цього створювали 3D-модель решітки і задавали її механічні характеристики, які отримували з діаграм розтягу сплавів Pb–Sn–Ca. Значення тимчасової межі міцності становило 30 МПа, умовної межі текучості – 8 МПа, модуля Юнга – 15 GPa і модуля зсуву – 49 GPa. В розрахунках застосовували схему навантаження решітки, що опирається на вушки під власною вагою.

Ефективність запропонованих змін конструкції решіток визначали, порівнюючи максимальні величини деформації і напруження, розраховані для вихідної і запропонованих моделей. Для вихідної решітки розраховане максимальне напруження дорівнювало 1,62 МПа, а деформація – 0,027 мм. З розглянутих дев'яти варіантів конструкції здвоєних решіток найгіршим виявився варіант установки тонких жилок у восьми кутових комітках, який призвів до одночасного збільшення деформації і напруження на 28% і 35% відповідно. Додавання сьоми похилих жилок незначно збільшило деформацію на 1,5%, але суттєво підвищило напруження на 23%. Виготовлення решітки з контуром, потовщеним у 1,5 рази, знизило деформацію лише на 4%, одночасно підвищивши напруження на 14%. Варіанти решітки зі збільшеною перемичкою в місці з'єднання одинарних решіток у здвоєну, решітки з суцільними кутовими комітками в місці з'єднання одинарних решіток у здвоєну, решітки з суцільними кутовими комітками по всьому контуру або решітки з додатковою похилою жилкою і суцільними кутовими комітками в місці з'єднання одинарних решіток у здвоєну забезпечили суттєве зменшення максимальної деформації від 24% до 39%, однак збільшили напруження від 4% до 24%.

Найкращим виявився варіант установки додаткової третьої перемички в місці з'єднання одинарних решіток у здвоєну і використання в площині решітки діагональних жилок з великим кутом нахилу. Це дозволило одночасно зменшити максимальну деформацію решіток на 34–39% і максимальне напруження на 31–37%. Необхідність внесення зазначених конструктивних змін, що дозволяють запобігти деформації решіток і їх вибракуванню, повністю підтвердилась у виробничих умовах акумуляторного підприємства МНБК «ВЕСТА».

ХАРАКТЕРНІ ДИНАМІЧНІ ЕФЕКТИ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОШАРОВОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ю.П. Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ

Дослідження наближених моделей шаруватого півпростору є одним із важливих напрямів у сучасній механіці деформівного тіла, динаміці ґрунтів і транспортній інженерії. Незважаючи на розвиток високоточних чисельних методів (скінченних елементів, граничних елементів, спектральних методів тощо), потреба в аналітичних і напіваналітичних моделях залишається актуальною.

Наближені моделі шаруватого півпростору виступають важливим інструментом у сучасних дослідженнях динамічних задач механіки. Вони поєднують аналітичну прозорість, обчислювальну ефективність та фізичну наочність, забезпечуючи основу для розвитку більш складних тривимірних і чисельних моделей, а також для практичних розрахунків у геотехнічних і транспортних системах.

Наближені моделі є єдиним практичним способом отримати швидкі та інженерно-корисні результати.

В цій роботі приведені результати досліджень двох наближених моделей шаруватого півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження: пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару (зосереджені маси) [1, 3] і пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі [2]. Для розв'язку задач використовувався інтегральний метод Фур'є.

У випадку пружної основи наближені двовимірні моделі двошарового півпростору - «зосереджені маси на півпросторі» та «пластина на півпросторі» - дають однакові якісні хвильові ефекти при дії рухомого навантаження. Відмінності між ними мають переважно кількісний характер і не впливають на фізичну інтерпретацію результатів.

Проведений аналіз також показав, що для нестисливого півпростору вплив початкових напружень на розподіл швидкостей переміщень і напружень проявляється значно виразніше, ніж у випадку стисливого півпростору. Для стисливого середовища відповідні залежності мають той самий характер, а відмінності зводяться до незначних кількісних поправок.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи, визначаються координатами точки, що досліджується, початковими напруженнями, швидкістю навантаження, механічними параметрами шаруватого середовища та умовами контакту елементів шаруватого середовища. Основні закономірності, що були встановлені в процесі досліджень представлені нижче:

1. Локальність впливу початкових напружень. Вплив початкових напружень є найбільш істотним у локальній зоні прикладення поверхневого навантаження, де

формується основна частина хвильового поля і відбувається інтенсивна передача енергії від навантаження до середовища. У цій області початкові напруження безпосередньо змінюють ефективні хвильові швидкості та умови формування поверхневих і підповерхневих хвиль, що призводить до суттєвих змін амплітуд напружень і швидкостей переміщень. Це пояснюється тим, що в цій області сумарний тензор напружень формується як суперпозиція початкового стану та індукованого динамічного поля. У віддалених зонах хвильове поле зазнає геометричного розсіювання та внутрішнього перерозподілу енергії, внаслідок чого внесок початкових напружень стає другорядним.

2. Асиметрія впливу стискання і розтягування. При попередньому стисканні матеріалу темп зростання досліджуваних величин є вищим, ніж при розтягуванні. Фізично це пов'язано з тим, що при стисканні ефективна жорсткість середовища зростає, змінюючи швидкості поширення хвиль і механізми концентрації напружень. При розтягуванні, навпаки, відбувається часткове «розсіювання» енергії хвиль, що знижує чутливість системи до початкових деформацій. У випадку розтягування середовище поводить себе більш «м'яко», а хвильові збурення частково компенсуються початковим станом.

3. Існування зон слабкої чутливості. Виявлено області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень практично не залежать від початкових деформацій. Такі зони формуються внаслідок балансу між геометричним затуханням хвиль, їх дисперсією та перерозподілом енергії між об'ємними і поверхневими хвилями. В цих зонах домінують об'ємні хвилі, а локальні поверхневі ефекти вже згасли, що узгоджується з хвильовою природою розповсюдження збурень у пружних середовищах. Це дозволяє в окремих інженерних задачах нехтувати початковими напруженнями без істотної втрати точності.

4. Взаємодія швидкості руху та початкових напружень. Зі зростанням швидкості руху навантаження амплітуди напружень і швидкостей переміщень загалом зменшуються, що пов'язано зі скороченням часу дії навантаження на фіксовану точку середовища. Водночас вплив початкових напружень посилюється, оскільки вони визначають фонові хвильові властивості середовища. Найбільш виражено це проявляється для попередньо стиснених матеріалів, де змінюється спектр допустимих хвильових режимів.

5. Дозвуковий режим. У дозвуковій області характер впливу початкових напружень залишається практично незмінним зі зростанням швидкості. Це зумовлено відсутністю ударних хвиль і збереженням квазістаціонарного хвильового поля, в якому фронти збурень симетрично поширюються вперед і назад відносно точки навантаження.

6. Симетричність епюр при дозвукових швидкостях. Симетричність епюр при дозвукових швидкостях має і математичну, і фізичну природу. Вона не є універсально фізичною властивістю, а виникає за певних ідеалізацій.

Симетричність епюр напружень і переміщень, що спостерігається при дозвукових швидкостях руху навантаження, є наслідком лінійності задачі, відсутності дисипативних механізмів та розгляду усталеного режиму в рухомій системі координат.

Формальна симетрія хвильового поля при дозвукових швидкостях має також умовний фізичний характер і зумовлена ідеалізаціями математичної моделі. Врахування дисипації, нестационарності або контактної нелінійності призводить до асиметрії хвильових фронтів перед навантаженням і за ним.

7. Асиметрія в транс- і надзвукових режимах. Для трансзвукових і надзвукових швидкостей епюри напружень і швидкостей переміщень стають асиметричними відносно точки прикладення навантаження. Формування асиметричного хвильового поля обумовлене появою конусів Маха та різною швидкістю затухання прямих і зворотних хвиль. Фізично це пов'язано з порушенням причинно-наслідкової симетрії:

хвилі не встигають поширюватися вперед, що призводить до формування переважного збудження в області позаду рухомого навантаження.

8. Поведінка прямих і зворотних хвиль. При надзвукових швидкостях пряма хвиля загасає значно швидше, ніж зворотна, однак не зникає повністю. Наявність поверхневого шару створює додаткові хвильові канали, зокрема квазіповерхневі моди, які підтримують існування випереджальних збурень навіть у надзвуковому режимі. Це підтверджує важливу роль захисного покриття у формуванні хвильового поля при високих швидкостях руху навантаження.

9. Вплив жорсткості поверхневого шару. Зі збільшенням жорсткості поверхневого шару зменшуються амплітуди напружень і швидкостей переміщень у півпросторі. Це пояснюється ефектом екранування: жорсткий шар перерозподіляє енергію навантаження в площині контакту та зменшує глибину проникнення динамічних збурень. Частина енергії зосереджується в самому шарі.

10. Роль умов контакту. При нежорсткому контакті (відсутність дотичних напружень) напруження і швидкості переміщень у півпросторі є більшими, ніж при жорсткому контакті. Це зумовлено зменшенням енерговідведення через зсувні деформації та більшою концентрацією нормальних напружень у зоні контакту. Аналогічно при жорсткому контакті вплив як швидкості навантаження, так і початкових напружень є менш вираженим, ніж у випадку нежорсткого контакту, оскільки жорстке зчеплення забезпечує більш рівномірний розподіл хвильової енергії між шаром і півпростором.

11. Демпфувальний ефект жорсткого контакту. Жорсткий контакт зменшує чутливість системи до швидкості руху навантаження та початкових напружень, так як при жорсткому контакті вплив як швидкості навантаження, так і початкових напружень є менш вираженим (п.10).

Таким чином, отримані результати узгоджуються з фізичними уявленнями про хвильові процеси в попередньо напружених шаруватих середовищах і дозволяють дати ґрунтовну інтерпретацію механізмів формування напружено-деформованого стану при дії рухомих навантажень у широкому діапазоні швидкостей.

Зауваження щодо меж застосування розглянутих моделей. Отримані результати справедливі в межах лінеаризованої теорії пружності для ізотропних гіперпружних тіл із однорідними початковими напруженнями за умови малих додаткових деформацій. У моделі не враховуються нелінійні ефекти, пов'язані з великими деформаціями, пластичністю, руйнуванням матеріалу, в'язкістю, а також можливі локальні порушення контакту між захисним шаром і півпростором. Розглядається усталений режим руху навантаження з постійною швидкістю, що обмежує застосування результатів до задач із різко змінними або імпульсними навантаженнями. Вплив неоднорідності матеріалів, анізотропії та скінченних розмірів конструкцій також не враховується. Тому отримані закономірності слід інтерпретувати як фізично обґрунтовані в межах прийнятих припущень та використовувати з урахуванням зазначених обмежень при інженерному аналізі.

1. Glukhov Yu.P., Babich S.Yu. Elastic base with a protective coating and initial stresses under action of moving load // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – 60, N 4. – P. 422–430. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01302-9>.

2. Glukhov Yu., Babich S., Kornienko V. Stress-strain state of a two-layered half-space with initial stresses under the influence of a moving load // Aleksander N. Guz, Holm Altenbach, Viacheslav Bogdanov, Vladimir M. Nazarenko Editors «Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine», Switzerland, Springer, 2023. – P. 103–118. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>.

3. Glukhov Y.P., Babich S.Y., Kornienko V.F. Moving Load of Prestressed Incompressible Half-Plane. // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – Vol. 60, No. 2. – P. 123–136. – DOI:

<https://doi.org/10.1007/s10778-024-01267-9>.

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ БАЛКИ ПІД ЧАС НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ

О. В. Воропай, С. І. Поваляєв, П. А. Єгоров, А. С. Шарапата

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Вступ. Конструктивні елементи, що працюють як балки, широко застосовуються в інженерній практиці. Причому в реальних конструкціях та механізмах на балки діють не тільки статичні, а ще й динамічні навантаження. Саме імпульсні або ударні навантаження, а також навантаження, що рухаються по поверхні балок викликають коливання (вібрації) [1-2].

Крайові умови балок описують за допомогою типових ідеалізацій (шарнірна опора, вільна опора, жорстке защемлення та інші). В теорії шарнірні опори дозволяють поворот елемента, як правило незначний. Однак навіть в шарнірних опорах лабораторних установок для дослідження коливальних процесів має місце певна дисипація енергії, яку бажано враховувати при дослідженні. Реальні опори вважаються шарнірними лише умовно, можна зазначити випадки, коли поворот балки в опорі сильно обмежений або ускладнений. В деяких випадках, наприклад шарніри в фермових конструкціях, реальних поворот майже не відбувається (він лише умовно дозволений). Тому, особливо при дослідженні нестационарних коливань балок та їх систем для уточненого моделювання слід враховувати дисипацію енергії у шарнірних опорах, тобто наблизитись від ідеалізацій до реальності.

Дисипацію енергії у шарнірах викликає тертя в цих опорах, тобто моменти опору. При моделюванні тертя в шарнірних опорах викликає великий інтерес кількісне визначення величин та динамічних залежностей моментів опору. Такі дослідження є виключно актуальними. Більшість оцінок виконується на основі експериментальних або стендових досліджень, також в останні часи розповсюджено числові розрахунки на основі методу скінченних елементів. Наприклад, у статті [3] представлені результати стендових випробувань та числового аналізу, проведених з метою визначення характеристик тертя у шарнірних опорах.

Аналітичні підходи зустрічаються відносно рідко. Також треба умовно розділити моделі дисипації енергії у крайніх шарнірних опорах, у проміжних опорах багатопрогонних балок та моделі дисипації енергії безпосередньо у матеріалі балки (за рахунок урахування внутрішнього тертя).

Відомо, що одна з кращих моделей нестационарного деформування та коливань балок базується на гіпотезах Тимошенка для урахування зсуву та інерції обертання. Такі балки називають балками Тимошенка. Саме така модель застосована в цій роботі.

Аналітичне розв'язання системи рівнянь для балки Тимошенка [2] з використанням інтегрального перетворення Лапласа [4] та сучасної теорії інтегральних рівнянь Вольтерра дозволяє отримувати чисельно-аналітичні розв'язки так званих прямих та обернених задач нестационарної механіки деформівного твердого тіла.

Під прямими розуміються задачі визначення переміщень, кутів повороту або параметрів НДС в певних точках балки при відомому зовнішньому навантаженні, а оберненими задачами – задачі визначення невідомих нестационарних навантажень, які викликали відомі зміни переміщень або інших параметрів.

Наприклад у роботі [5] описано розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням. В статті [6] виконується ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок, тобто розв'язано

обернену нестационарну задачу.

В [7] за допомогою теорії інтегральних рівнянь Вольєра виконано моделювання в'язкопружних додаткових (проміжних) опор з урахуванням їх масово-інерційних характеристик.

Запропоноване дослідження з визначення моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка при нестационарному навантаженні базується на моделі тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях, відноситься до циклу робіт [8, 9].

Постановка задачі та математична модель. Механічна система складається з шарнірно-обпертої по краях пружної ізотропної балки Тимошенка. На балку в деякій точці, координата якої є відомою, діє поперечне імпульсне нерухоме навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання балки (рис. 1).

Вважається, що в шарнірних опорах відбувається дисипація енергії, яка викликана безпосередньо тертям у шарнірах, а момент опору (тертя) лінійно пропорційний кутовий швидкості повороту балки в шарнірі:

$$M_i(t) = \kappa_i \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \quad (1)$$

де κ_i – коефіцієнт демпфування в i -му шарнірі, $d\psi_i(t)/dt$ – кутова швидкість повороту перерізу балки в i -му шарнірі.

Тоді кут повороту нормалі до серединної лінії балки можна знайти як:

$$\psi_i(t) = \frac{1}{\kappa_i} \int M_i(t) dt. \quad (2)$$

Вплив тертя в шарнірах моделюється за допомогою додавання двох додаткових зосереджених моментів $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які прикладені в лівій і правій опорах балки. Моменти $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ додаються у рівняння деформування, як зовнішні, але згідно третього закону Ньютона їх значення треба брати протилежного знаку.

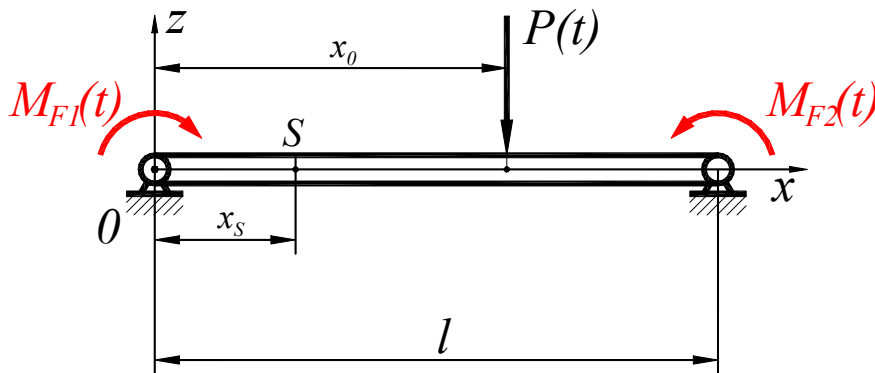


Рис. 1 – Схема навантаження балки

Система диференціальних рівнянь у частинних похідних для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов описує нестационарні деформаційні процеси:

$$\begin{aligned} G'bh \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_{\Sigma}(x,t); \\ E \frac{bh^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G'bh \frac{\partial w}{\partial x} - \psi &= \rho \frac{bh^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - M_{\Sigma}(x,t), \end{aligned} \quad (3)$$

де t – час, h – товщина балки; b – ширина балки; w – прогин серединної площини балки; ψ – кут повороту; ρ – густина матеріалу балки, E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона G – модуль зсуву, $G' = k'G$; k' – коефіцієнт зсуву.

Вкажемо, що $P_{\Sigma}(x, t)$ та $M_{\Sigma}(x, t)$ – збурююче силове та моментне навантаження:

$$P_{\Sigma}(x, t) = \delta(x - x_0) P_0(t), \quad (4)$$

$$M_{\Sigma}(x, t) = \delta(x) M_{F1}(t) + \delta(x - l) M_{F2}(t). \quad (5)$$

Система диференціальних рівнянь у частинних похідних (3) для балки Тимошенка в загальному вигляді розв'язується за допомогою розвинення невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні ряди Фур'є.

Крайові умови для шарнірно-обпертої балки Тимошенка (при $x = 0$ та $x = l$) мають значення: прогин $w = 0$; кут повороту $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$, оскільки $M = -EI \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$.

Таким чином, розвинення функцій переміщень і кутів повороту будуть мати наступний вигляд:

$$w(x, t) = \sum_{k=1} w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad (6)$$

$$\Psi(x, t) = \sum_{k=1} \Psi_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (7)$$

Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, інтегрального перетворення Лапласа. Після виконання обернених перетворень, розв'язки можливо отримати у вигляді інтегралів згортки, що дає можливість виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь.

Докладно розв'язання систем рівнянь описано в [8].

Пряма задача. В результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки можна отримати наступний аналітичний вираз для функції прогинів та кутів повороту:

$$w(x, t) = \int_0^t K_P^W(x, t - \tau) P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M1}^W(x, t - \tau) M_{F1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M2}^W(x, t - \tau) M_{F2}(\tau) d\tau; \quad (8)$$

$$\Psi(x, t) = \int_0^t K_P^{\Psi}(x, t - \tau) P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M1}^{\Psi}(x, t - \tau) M_{F1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M2}^{\Psi}(x, t - \tau) M_{F2}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

де $K_i(x, t)$ – відповідні ядра інтегралів згортки:

$$K_P^W(x, t) = \sum_{k=1} \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) [\Omega_{1k}^W \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^W \sin(\omega_{2k} t)];$$

$$K_{Mj}^W(x, t) = c_T^2 \sum_{k=1} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \lambda_k \sin(\lambda_k x) \frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}};$$

$$K_P^{\Psi}(x, t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1} \frac{C_k^P}{\Delta_k} \lambda_k \cos(\lambda_k x) \frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}};$$

$$K_{Mj}^{\Psi}(x, t) = \sum_{k=1} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) [\Omega_{1k}^{\Psi} \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^{\Psi} \sin(\omega_{2k} t)].$$

Зазначимо, що для зосередженого навантаження балки силою в точці з координатою x_0 відповідний коефіцієнт розвинення матиме вигляд:

$$C_k^P = \frac{2}{\rho l b h} \sin(\lambda_k x_0),$$

а для зосереджених моментів $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які приложені в опорах $x_1 = 0$ та $x_2 = l$:

$$C_{kj}^M = \frac{2}{\rho l I} \cos(\lambda_k x_j).$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$c_T^2 = \frac{G'}{\rho}, c_b^2 = \frac{E}{\rho}, \lambda_k = \pi \frac{k}{l}, \Delta_k = \sqrt{(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2)^2 - 4 \lambda_k^4 c_T^2 c_b^2},$$

$$\Omega_{1k}^W = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 c_b^2 + c_T^2 12/h^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^W = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 c_b^2 + c_T^2 12/h^2}{\omega_{2k}};$$

$$\Omega_{1k}^\Psi = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 c_T^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^\Psi = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 c_T^2}{\omega_{2k}}.$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_k)}.$$

Для розв'язання прямої задачі треба визначити переміщення точок балки при одночасному впливі на неї системи з трьох з навантажень – зовнішньої відомої сили $P(t)$ і двох невідомих зосереджених моментних навантажень $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які прикладені в шарнірних опорах.

Математична модель зводиться до двох інтегральних рівнянь Вольтерра I роду. Якщо, як у роботі [9] вважати, що $M_{F1}(t) = -M_{F2}(t)$ в силу того, що опори на краях балки як правило схожі (мають однаковий діаметр шарніру), тоді достатньо розв'язати одне інтегральне рівняння. Після визначення моментів тертя в опорах можна визначити компоненти переміщення у часі у всіх точках балки (як при дії трьох незалежних навантажень силового – $P(t)$, та моментних $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ на балку з ідеальними шарнірами без тертя в опорах).

Обернена задача. При розв'язанні оберненої задачі розглянуто випадок навантаження балки однією збурювальною силою $P(t)$, яка вважається відомою, та двома зосередженими моментами тертя $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які вважаються невідомими. Для визначення двох невідомих функцій необхідно знати закон зміни за часом прогину балки, що найменше в двох різних точках – $w(x_1, t)$ та $w(x_2, t)$. Тоді для визначення двох невідомих моментів тертя у шарнірах можна записати наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} w(x_1, t) &= \int_0^t K_{Pj}^W(x_1, t - \tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M1}^W(x_1, t - \tau) M_{F1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M2}^W(x_1, t - \tau) M_{F2}(\tau) d\tau; \\ w(x_2, t) &= \int_0^t K_{Pj}^W(x_2, t - \tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M1}^W(x_2, t - \tau) M_{F1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M2}^W(x_2, t - \tau) M_{F2}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

В ході розв'язання оберненої задачі проведено дискретизацію функцій часу в системі рівнянь (10) та записано наступну систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{P} + \mathbf{A}_{11} \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{w}_1; \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{P} + \mathbf{A}_{11} \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{w}_2; \end{aligned} \quad (11)$$

Для розв'язання системи рівнянь (11) після виконання операцій для блокових матриць був використаний метод регуляризації Тихонова.

На основі отриманих результатів був проведений чисельний експеримент.

Перспективи подальших досліджень. Перспективою розвитку даного дослідження автори вважають узагальнення розробленого методу на випадок балки з несиметричними крайовими умовами. Використаний підхід також може бути застосований для інших механічних систем (пластини, оболонки, тощо). Розроблена

методика розв'язання оберненої задачі може бути використана при управлінні коливаннями балки з урахуванням тертя в опорах.

Висновки. В даному дослідженні розроблено метод визначення моментів тертя в шарнірних опорах балки типу Тимошенка. Визначення моментів тертя відбувалася за функціями прогину в двох точках балки у часі.

Був проведений чисельний експеримент, який показав ефективність розробленого методу для отримання стійкого розв'язку даної оберненої задачі навіть при наявності похибок випадкового характеру у вихідних даних (для прогинів як функцій часу).

Відповідність результатів розв'язання прямої та оберненої задачі показали достовірність отриманих результатів.

Список літератури

1. Кохманюк С. С., Філіппов А. П. Коливання багатопрогонових балок на пружних опорах при руомому навантаженні // Будівельна механіка та розрахунок споруд. 1965. № 6. С. 32 - 36.

2. Кохманюк С. С., Янютін Є. Г., Романенко Л. Г. Коливання систем, що деформуються, при імпульсних і рухомих навантаженнях. Київ: Наукова думка, 1980. 232 с.

3. Brodny Jarosław. Determining the working characteristic of a friction joint in a yielding support. Archives of Mining Sciences. 2010, no. 55, pp. 733–746.

4. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. Mineola, N.Y.:Dover Publications, 2000. 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.

5. Янютін Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. 2007. № 8. С. 18 – 23.

6. Янютін Є. Г., Гришакін В. Т. Ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. 2008. №47. С 178-184.

7. Voropaу Alexey, Menshykov Oleksandr, Povaliaiev Sergiy, Sharapata Andriy, Yehorov Pavlo. Modeling a Viscoelastic Support Considering Its Mass-Inertial Characteristics During Non-Stationary Vibrations of the Beam // Journal of Engineering Sciences. 2023. №10. D8-D14. DOI: 10.21272/jes.2023.10(1).d2.

8. Воропай А. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шарапата А. С. Моделювання тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2023. № 2 (5). С. 33–45. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).04.

9. Воропай А. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шарапата А. С. Ідентифікація моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка. при нестационарному навантаженні. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2025. №. 1 (8). С. 17-27. ISSN 2222-0631. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.01(8).02.

ПРО ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ КРУЧЕННЯ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

А.Ю. Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ

Хвильові процеси в композитних і багатошарових матеріалах відіграють визначальну роль у формуванні їхньої динамічної поведінки під дією імпульсних і рухомих навантажень. Особливу увагу в сучасних дослідженнях приділяють хвилям кручення, які є зсувними хвилями без об'ємної деформації та характеризуються високою чутливістю до умов міжшарової взаємодії. Це робить їх ефективним інструментом для аналізу контактних ефектів і механізмів передачі зсувних напружень у композитних системах.

У реальних композитних матеріалах суттєвий вплив на хвильову динаміку мають початкові (залишкові) напруження, зумовлені технологічними процесами виготовлення, експлуатаційними навантаженнями або геостатичними умовами. Наявність початкових напружень змінює ефективні механічні характеристики матеріалу та призводить до перерозподілу хвильової енергії, що особливо помітно у зсувних хвильових режимах.

У зв'язку з цим актуальним є дослідження впливу граничних умов на поширення хвиль кручення в композитних матеріалах з початковими напруженнями на основі аналітично орієнтованих підходів, які дозволяють безпосередньо аналізувати структуру хвильового спектра та фізичні механізми взаємодії хвиль у багатошарових системах.

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановки та метод розв'язку задач про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних заздалегідь напружених стисливих і нестисливих матеріалах при повному контакті між шарами композиту і при повному проковзуванні шарів.

У композитних матеріалах із початковими (залишковими) напруженнями граничні умови відіграють подвійну роль: вони визначають як характер міжшарової взаємодії, так і спосіб прояву впливу початкових напружень на хвильову динаміку. Для хвиль кручення, які є зсувними хвилями без об'ємної деформації, цей вплив проявляється насамперед через зміну ефективних зсувних характеристик і спектральної структури системи.

За умов повного зчеплення між шарами виконується безперервність тангенціальних переміщень і зсувних напружень з урахуванням додаткових членів, зумовлених початковими напруженнями. У цьому випадку початкові напруження впливають на швидкість поширення хвиль кручення та форму дисперсійних кривих, змінюючи умови спектрального узгодження між шарами. Граничні умови забезпечують передачу як хвильової енергії, так і ефектів попереднього напруженого стану через усю композитну систему, що може призводити до появи нових критичних і резонансних режимів.

За повного проковзування дотичні напруження на межах шарів дорівнюють нулю, і вплив початкових напружень реалізується переважно в межах кожного окремого шару. У такому випадку хвилі кручення локалізуються, а зміна хвильових характеристик визначається власними початковими напруженнями кожного шару. Передача напруженого стану між шарами відсутня, що суттєво зменшує глобальний вплив початкових напружень на хвильовий спектр композиту.

Таким чином, граничні умови визначають, яким чином початкові напруження впливають на поширення хвиль кручення: за повного контакту — вплив початкових напружень має глобальний характер і проявляється у всьому композиті; за проковзування - вплив є локальним і обмежується окремими шарами; зовнішні

граничні умови контролюють спектральні та резонансні ефекти в попередньо напруженій системі.

ВПЛИВ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ НА АНТИПЛОСКУ ДЕФОРМАЦІЮ КВАЗІКРИСТАЛУ З ТРІЩИНОЮ

О.М. Клєцков, В.В. Лобода

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Незважаючи на наявність великої кількості публікацій стосовно механіки руйнування квазікристалів, антипласка зсувна деформація лінійного квазікристалу з ізольованою тріщиною з урахуванням фононно-фазонного зв'язку та поверхневих ефектів за моделлю Gurtin-Murdoch [1, 2] раніше не розглядалась у такому формулюванні. Якраз ця проблема вивчається у даній роботі. Вважається, що квазіперіодична вісь розташована вздовж осі x_3 , а матеріал піддається дії віддалених рівномірних антиплоских навантажень. Береги тріщини моделюються як пружні мембрани з власними матеріальними константами, що дозволяє врахувати поверхневу пружність у наномасштабі.

Фононні та фазонні напруження, деформації, а також поверхневі напруження виражено через аналітичну вектор-функцію комплексної змінної. Використовуючи ці представлення та умови на берегах тріщини, сформульовано систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з відповідними умовами на нескінченності. Розв'язок цих рівнянь побудовано чисельно методом колокацій із використанням поліномів Чебишева. Через знайдені функції виражені напруження на продовженні тріщини, розкриття берегів тріщини та інші механічні поля. Встановлено, що врахування поверхневої пружності усуває класичну кореневу сингулярність напружень поблизу вершин тріщини, а поля напружень і деформацій набувають скінченних значень.

Чисельний аналіз проведено для одновимірного гексагонального квазікристалу з заданими матеріальними константами та поверхневими параметрами. Показано, що поверхневі ефекти найбільш виражені для нанорозмірних тріщин, суттєво впливають на розподіл напружень і деформацій, посилюючи розмірну залежність розв'язку. Зі збільшенням довжини тріщини роль поверхневих ефектів зменшується, і поведінка наближається до класичної механіки руйнування. Отримані результати підкреслюють необхідність врахування поверхневої пружності при оцінці тріщиностійкості квазікристалів у нано- та субмікронному масштабах.

1. Gurtin, ME, and Murdoch, A. A continuum theory of elastic material surfaces. Arch Ration Mech Anal 1975; 57: 291–323.
2. Gurtin, ME, Weissmuller, J, and Larche, F. A general theory of curved deformable interface in solids at equilibrium. Philos Mag A 1998; 78: 1093–1109

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО КРУГОВОГО ОТВОРУ В ТРИШАРОВІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИВИМІРНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Є.А. Сторожук, Р.В. Серафимович

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Тришарові пластинки та оболонки широко застосовуються в авіа-, ракето- і суднобудуванні, цивільному і промислового будівництві. В багатьох випадках ці елементи за конструктивними або технологічними міркуваннями мають отвори і вирізи самої різноманітної форми. При розрахунку елементів конструкцій з концентраторами напружень за дії значних навантажень необхідно враховувати як реальні властивості матеріалів (пластичність), так і тривимірність напружено-деформованого стану в області отворів і вирізів.

Розглядається тришарова циліндрична оболонка, яка ослаблена круговим отвором і знаходиться під дією статичного навантаження. Віднесемо k -й шар оболонки ($k = 1, 2, 3$) до системи координат $O_k x_k y_k z_k$, осі $O_k x_k$, $O_k y_k$ якої збігаються з лініями головних кривин, а вісь $O_k z_k$ напрямлена за нормаллю до серединної поверхні k -го шару.

Деформування кожного шару описано співвідношеннями тривимірної теорії. Фізичні співвідношення для несучих шарів подані згідно теорії малих пружнопластичних деформацій для ізотропних матеріалів, а заповнювача – на основі закону Гука для композитних матеріалів.

Для розв'язання даного класу нелінійних крайових задач авторами розроблено чисельну методику, яка базується на застосуванні методів додаткових напружень і скінченних елементів (СЕ).

Використовуються СЕ першого порядку з лінійною апроксимацією компонентів вектора переміщень u_i ($i = 1, 2, 3$) за локальними координатами $(-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1)$:

$$u_i = \sum_{j=1}^8 u_i^{(j)} N_j(\xi, \eta, \zeta), \quad (1)$$

де $N_j(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j)$.

В роботі для боротьби з негативним явищем «замикання» деформації всередині СЕ не обчислюються за співвідношеннями Коші, а апроксимуються окремо від переміщень [1]. Наприклад, деформація $\varepsilon_{\xi\xi}$ у довільній точці СЕ обчислюється за такою формулою:

$$\varepsilon_{\xi\xi}(\xi, \eta, \zeta) = 0,25 \left[\varepsilon_{\xi\xi}(0, -1, -1)(1 - \eta)(1 - \zeta) + \varepsilon_{\xi\xi}(0, 1, -1)(1 + \eta)(1 - \zeta) + \varepsilon_{\xi\xi}(0, -1, 1)(1 - \eta)(1 + \zeta) + \varepsilon_{\xi\xi}(0, 1, 1)(1 + \eta)(1 + \zeta) \right]. \quad (2)$$

Відомо, що використання лінійного закону зміни переміщень за товщиною шарів при не рівних нулеві коефіцієнтах Пуассона матеріалів шарів призводить до неправильних результатів. Тому в роботі за товщиною кожного шару брали не менше двох СЕ.

Конкретні числові результати отримані для випадку, коли оболонка навантажена рівномірним внутрішнім тиском.

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с.

ОСОБЛИВОСТІ РОЗПОДІЛУ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ПРИ СТИСКАННІ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПІВПРОСТОРІВ З ГЛАДКИМИ ЖОРСТКИМИ ПРОПОРЦІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ МІЖ НИМИ

В. С. Кирилюк, О.І. Левчук

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Широке використання електропружних (п'єзоелектричних) матеріалів у інженерній практиці при проектуванні елементів вимірювальних систем (датчиків), перетворювачів енергії стимулює інтерес до збільшення і надійності п'єзоелементів. Науково обґрунтовану оцінку надійності і міцності елементів конструкцій проводять на основі детального аналізу їх напружено-деформованого стану з врахуванням наявних концентраторів напружень типу порожнин, включень, тріщин, а також контактної взаємодії з іншими елементами.

Теоретичною основою дослідження зв'язаних силових і електричних полів у електропружних тілах та елементах конструкцій з п'єзоелектричних матеріалів є строга математично модель, яка базується на розв'язанні зв'язаної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. При значному взаємному впливі силових і електричних полів (суттєвому ефекту зв'язаності цих полів), який є характерним для ряду п'єзокерамічних матеріалів, використання спрощуючих гіпотез і підходів призводять до значних похибок при оцінці і аналізі напруженого стану та параметрів електричного поля.

У даній доповіді на основі строгої математичної моделі, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів, досліджено контактну взаємодію двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів з гладкими жорсткими, пропорційними за висотою включеннями довільної форми між ними. При розгляді задачі припускалось, що поверхня поділу півпросторів є площиною ізотропії обох електропружних матеріалів, а також, має місце гладкий (без тертя) контакт включень з півпросторами. Встановлено, що при гладкому контакті півпросторів з жорсткими включеннями, поверхні яких не містять електродного покриття (є неелектродованими) можна знайти таке співвідношення висот включень довільної форми, що контактні напруження на поверхнях обох півпросторів стають ідентичними. Це співвідношення висот для гладких включень довільної форми залежить від електропружних властивостей обох п'єзоелектричних матеріалів. Як частинний випадок, зі знайдених аналітичних виразів впливає співвідношення пропорційності висот гладких жорстких включень довільної форми між двома чисто пружними трансверсально-ізотропними півпросторами, що призводять до ідентичних напружень на поверхнях пружних півпросторів. Отримані результати для п'єзоелектричних та пружних трансверсально-ізотропних півпросторів узагальнюють відомі результати Гладвела і Елати для пружних ізотропних тіл.

Для ряду п'єзоелектричних матеріалів проведено числові розрахунки, встановлено попарні коефіцієнти пропорційності висот жорстких включень між півпросторами з відповідних електропружних матеріалів. Виявлено значний вплив зв'язаності силових і електричних полів на співвідношення висот жорстких включень, що призводять до ідентичних контактних напружень на поверхнях обох півпросторів.

Ключові слова: математичне моделювання, п'єзоелектричні півпростори, зв'язаність полів, жорсткі пропорційні включення, довільна форма, ідентичні контактні напруження.

ОЦІНКА ЖОРСТКОСТІ СТИКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСФОРМОВАНИХ КОСМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА СКЛАДНОГО НАВАНТАЖЕННІ

В. С. Бейцун, С. В. Тарасов

Інститут транспортних систем і технологій НАН України

Створення високоефективних конструкцій нової техніки, зокрема великогабаритних космічних маніпуляторів та антенних систем, що розгортаються, вимагає забезпечення високої точності позиціонування цільового обладнання. Однією з ключових проблем при проектуванні таких систем є коректне врахування жорсткісних характеристик стикових вузлів. Класичні методи скінченно-елементного моделювання часто ідеалізують з'єднання, розглядаючи їх як абсолютно жорсткі або суцільні, що призводить до суттєвих похибок у визначенні динамічних характеристик та точності наведення.

Метою даної роботи є аналіз впливу конструктивної податливості фланцевих з'єднань на загальну деформаційну картину маніпулятора та розробка рекомендацій щодо уточнення розрахункових моделей на основі експериментальних даних.

Об'єктом дослідження обрано типовий вузол з'єднання секцій маніпулятора космічного призначення, що складається з тонкостінних алюмінієвих труб (сплав АД31Т5) та фланцевого з'єднання. Для виявлення реального внеску стику у загальну податливість системи було застосовано порівняльний метод: проведено серію натурних випробувань для моделі з фланцевим з'єднанням та ідентичної за геометричними параметрами суцільної моделі (еталона).

Експериментальні дослідження проводилися на спеціалізованих стендах за трьома основними видами навантаження, характерними для умов експлуатації космічних механізмів: поперечний вигин, кручення та осьовий розтяг. Вимірювання переміщень здійснювалося за допомогою прецизійних індикаторів годинникового типу та тензOMETричного обладнання.

Аналіз результатів випробувань на поперечний вигин показав критичну розбіжність між поведінкою ідеалізованої (суцільної) та реальної (фланцевої) моделей. Встановлено, що наявність фланцевого стику призводить до зниження згинальної жорсткості вузла у 4–5 разів порівняно з суцільною трубою. При навантаженні, еквівалентному експлуатаційному, переміщення контрольних точок фланцевої моделі демонструють значні відхилення від лінійного закону, що пояснюється вибіркою мікролофтів у різьбових з'єднаннях та локальними деформаціями контактуючих поверхонь. Це свідчить про те, що ігнорування податливості стику в глобальній динамічній моделі маніпулятора може призвести до помилок при розрахунку власних частот та амплітуд коливань.

Дослідження крутильної жорсткості виявило яскраво виражену нелінійність діаграми деформування. На початкових етапах навантаження жорсткість з'єднання близька до жорсткості основної ланки, проте при зростанні крутного моменту спостерігається різке зростання кутових переміщень. Відхилення експериментальних даних від розрахункових для суцільної моделі сягає понад 65% у зоні робочих навантажень. Такий характер деформування вказує на необхідність використання у розрахункових схемах нелінійних пружних елементів для моделювання роботи стику на кручення.

При дослідженні на поздовжній розтяг вплив податливості фланців виявився найменшим у абсолютному вимірі (переміщення на два порядки менші, ніж при вигині), проте відносна різниця між суцільним та експериментальним зразками залишається суттєвою (до 4 разів). Це підтверджує гіпотезу про те, що навіть при осьових

навантаженнях контактна податливість фланців грає роль демпфера, який змінює спектр поздовжніх коливань конструкції.

На основі отриманих експериментальних даних запропоновано підхід до корекції скінченно-елементних моделей маніпуляторів. Замість моделювання детальної геометрії болтів та контактних пар, що вимагає значних обчислювальних ресурсів, доцільно вводити у вузли з'єднання еквівалентні пружні елементи (шарніри зі змінною жорсткістю). Параметри жорсткості c_1, c_2 для рівнянь (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - c_1 \omega = 0 \Big|_{x=0}, EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \Big|_{x=l}, EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=l}, \end{aligned} \quad (1)$$

визначаються шляхом апроксимації отриманих експериментальних кривих "навантаження-переміщення". Це дозволяє зберегти розмірність моделі при значному підвищенні точності розрахунків.

Отримані результати також дозволили сформулювати практичні рекомендації щодо конструктивного вдосконалення вузлів. Для забезпечення заданої точності наведення антенної системи, що монтується на досліджуваному маніпуляторі, рекомендовано збільшення діаметра кріпильних елементів та оптимізацію топології їх розміщення на фланці, що дозволить мінімізувати ефект розкриття стику при згинальних навантаженнях.

Таким чином, експериментальна верифікація жорсткісних характеристик є обов'язковим етапом проектування конструкцій нової техніки. Запропонована методика дозволяє перейти від ідеалізованих моделей до реалістичних прогнозів поведінки системи, що є критично важливим для забезпечення надійності та функціональності космічних механізмів.

Список літератури

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа. 1980. С. 408.
2. Касаткин Б.С., Кудрин А.Б., Лобанов Л.М. и др. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. - К.: Наукова думка, 1981. С. 584.
3. Кобаяси А., Атлури С., Делли Д. и др. Экспериментальная механика. В 2-х книгах: Книга 1. М.: Мир, 1990. С. 616.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ТА РУЙНІВНИХ СТАНІВ ПЕРФОРОВАНИХ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ

Д.В. Акімов¹, К.Г. Дегтярьов^{2,3}, А.О. Кошкін⁴, Д.В. Крютченко²,
О.М. Сєрікова⁵, О.О. Стрельнікова^{2,3,4}

¹*Державне підприємство "Конструкторське бюро "Південне" ім. М.К. Янгеля"*

²*Інститут енергетичних машин і систем НАН України, м. Харків, Україна*

³*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна*

⁴*Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна*

⁵*Національний науковий центр «Інститут судових експертиз ім. Засл. проф. М.С. Бокаріуса», м.Харків, Україна*

Механічні процеси в оболонкових конструкціях, що зазнають інтенсивних динамічних навантажень, зазвичай досліджуються із застосуванням експериментальних і інженерних підходів разом із сучасними числовими методами, заснованими на рівняннях механіки суцільного середовища [1,2]. Дослідження таких динамічних процесів експериментальними методами призводить до значних матеріальних витрат і не дозволяє отримати детальну картину розподілу полів напружень, деформацій, швидкостей, переміщень, температур, а також не дає змоги описати ініціацію та ріст тріщин, накопичення пошкоджень і загальне руйнування конструкції.

Конструкція, що досліджується, є перфорованою оболонкою з отворами різного діаметру, яка аналізується із застосуванням сертифікованих програмних пакетів [3,4]. Ініціацію руйнування визначають як момент початку формування першої тріщини. Слід зазначити, що початок утворення першої тріщини та подальший її розвиток, що веде до остаточного руйнування конструкції, відбуваються майже одночасно.

Розроблена обчислювальна технологія дає змогу конструкторам здійснювати віртуальний аналіз міцності перфорованих оболонкових конструкцій до моменту їх руйнування. Методика забезпечує можливість варіювати товщину матеріалу, міцнісні характеристики та параметри навантаження, такі як інтенсивність та час прикладання навантаження, механічні характеристики матеріалу, кількість та діаметри отворів, а також використовувати експериментально отримані діаграми деформацій. Слід відзначити, що розвиток таких комп'ютерних технологій дозволяє значно зменшити кількість дорогих повномасштабних експериментів, замінюючи їх віртуальними комп'ютерними випробуваннями [5,6].

Відмітимо, що під час розрахунків спостерігалася затримка реакції конструкції на прикладене навантаження, ймовірно, це відбувалось через чутливість матеріалу до швидкості деформації та змінний характер навантаження. В деяких числових розрахунках цей ефект призводив до віртуального руйнування конструкції, навіть при здавалося б, достатній товщині стінки. Таку поведінку можна було точно відобразити лише за допомогою динамічного аналізу, який проведено в цьому дослідженні з використанням програмного забезпечення ANSYS.

На основі запропонованого підходу до оцінки напружено-деформованого стану циліндричної оболонки з періодичною системою отворів визначено руйнівні навантаження та момент виникнення тріщини. Результати тестування методів і алгоритмів дозволили побудувати адекватну геометричну модель, обрати оптимальні скінченні елементи для даного дослідження та визначити їхню кількість, яка забезпечує прийнятну точність розрахунків.

Використання інноваційних матеріалів [7,8] для виготовлення перфорованої конструкції очікувано покращить її міцнісні характеристики.

У майбутньому доцільно оптимізувати не лише товщину циліндричної частини оболонки, а й інші частини конструкції з урахуванням форми елементів, властивостей матеріалу, а також розташування, форми та радіусів отворів. Слід розглянути використання стандартного програмного забезпечення для оптимізації конструкцій, включаючи оригінальну методологію[9], розроблену авторами цього дослідження на основі гібридного адаптивного методу оптимізації, для визначення оптимальних проектних рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [7] Gnitko, V.I., Karaiev, A. O., Degtyariov, K. G., Vierushkin, I.A., Strelnikova, E. A.: Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis, WIT Transactions on Engineering Sciences, vol. 134, pp. 67-79, 2022, DOI: 10.2495/BE450061.
- [8] Zaitsev, B. P., Protasova, T. V., Smetankina, N. V., Klymenko, D. V., Larionov, I. F. & Akimov, D. V. (2020). Oscillations of the payload fairing body of the Cyclone-4M launch vehicle during separation. *Strength of Materials*, 52, 849–863. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00239-5>.
- [9] Shvets A., Murawski K., Fedorov Y (2025). Analytical determination of critical forces during buckling of systems consisting of two pinned connected rods. *Meccanica*, Vol. 60, pp. 441–455. <https://doi.org/10.1007/s11012-025-01941-3>
- [10] Degtyariov, K., Kriutchenko, D., Osypov, I., Sierikova, O., Strelnikova, E. Dampers Influence on Sloshing Mitigation in Fuel Tanks of Launch Vehicles and Reservoirs. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Krytskyi, D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2023. ICTM 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 1008, 2024, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-61415-6_36.
- [11] Sierikova, O. Strelnikova E. and Degtyariov K., Srength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials, 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, pp. 1-7, 2022, DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369.
- [12] Choudhary, N., Degtyarev, K., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Strelnikova, E.: Shell-like structures interacting with liquids and their applications, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 105(9), 2025, DOI:10.1002/zamm.70227.
- [13] Sierikova, O., Strelnikova, E., Degtyarev, K. Seismic Loads Influence Treatment on the Liquid Hydrocarbon Storage Tanks Made of Nanocomposite Materials, *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, vol. 17, pp. 62-70, 2022, DOI: 10.37394/232011.2022.17.9.
- [14] Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A.: Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations., *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 25, no. 3, pp. 117–132, 2020, <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038>.
- [15] Sierikova, O., Strelnikova, E., Degtyarev, K. Computer Modeling Wind Turbine Blades with Optimal Parameters. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2025;Vol. 20, pp. 51-62. DOI: 10.37394/232013.2025.20.6

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ АКСІАЛЬНО ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДУЙОВАНИХ БАЛОК ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

В. М. Бурлаєнко, Г. І. Львов, С. Д. Дімітрова-Бурлаєнко

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Вивчення нелінійних вільних коливань балок залишається ключовою проблемою будівельної механіки. Початкові дослідження зосереджувалися на однорідних і рівномірних балках, пізніше поширившись на геометрично неоднорідні, для яких встановлено суттєвий вплив змін поперечного перерізу на коливальні характеристики [1]. Аксиально функціонально градуйовані (АФГ) балки, із безперервною зміною властивостей матеріалу вздовж довжини, додатково розширюють можливості проектування та істотно впливають на модальну динаміку [2].

У цьому дослідженні виконано аналіз нелінійної поведінки власних коливань АФГ-балок змінного поперечного перерізу. Визначальні рівняння руху виведено на основі теорії балок Ейлера–Бернуллі та принципу Гамільтона з урахуванням геометричної нелінійності. Для визначення лінійних модальних характеристик застосовано метод диференціального перетворення, після чого для обчислення нелінійної частотно-амплітудної відповіді використано прямий ітераційний підхід [3]. Запропоновану методологію перевірено шляхом порівняння з результатами з літератури, що демонструє відмінну узгодженість.

Параметричні дослідження проведено для оцінки комбінованого впливу звуження та індексу градації матеріалу на нелінійну частотну поведінку балок змінного поперечного перерізу. Встановлено, що звуження є домінуючим фактором, впливаючи на співвідношення нелінійної та лінійної частот, причому звуження висоти створює більш виражений ефект пом'якшення, ніж звуження ширини, тоді як градація матеріалу змінює нелінійну динамічну відповідь, але її вплив загалом слабший порівняно з геометричними варіаціями. Граничні умови відіграють важливу роль: більш жорстко закріплені балки демонструють вищу жорсткість та посилену нелінійну поведінку. Для неоднорідних та АФГ-балок поєднаний вплив осьової градації та звуження суттєво змінює залежність частоти від амплітуди, що підкреслює необхідність врахування цих ефектів у конструкційному проектуванні.

Таким чином, отримані результати підкреслюють суттєвий вплив аксіальної градації матеріалу та геометричної неоднорідності на нелінійні динамічні характеристики, забезпечуючи корисну інформацію для проектування складних структурних елементів.

Список літератури

1. Ruta P, Szybiński J (2015) Nonlinear analysis of nonprismatic Timoshenko beam for different geometric nonlinearity models. *International Journal of Mechanical Sciences* 101-102, 349–362.
2. Burlayenko VN, Altenbach H, Dimitrova SD (2021) A material model-based finite element free vibration analysis of one-, two- and three-dimensional axially FGM beams. In: 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), IEEE, pp. 628–633.
3. Burlayenko V. N., Altenbach H., Lvov G. I. (2026) Nonlinear free vibration analysis of non-uniform and axially functionally graded beams using differential transform method. *Advanced Structured Materials*, Springer, Cham. (submitted)

ПРО ПРЯМЕ ВИМІРЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТИСКУ У ВОДЯНОМУ КУЛЕУЛОВЛЮВАЧІ

В.А. Максимюк¹, В.С. Ушакова¹, О.В. Ушаков²

¹*Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України,*

²*Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України*

Раніше для вивчення динамічних явищ у циліндричному гідрокулеуловлювачі було виконано експерименти в Центрі колективного користування приладами «Аналізатор динамічних процесів» з використанням 8-канального реєстратора LMS SCADAS Mobile (Бельгія). Вимірювались деформації (ε) на зовнішній поверхні сталевій ($E = 210$ ГПа) труби висотою 2 м, радіусом $R = 0,1$ м і товщиною стінок $h = 5$ мм за допомогою наклеєних тензорезисторів фірми «ВЕДА» типу КФ 5П1-3-120-Б-12 з базою 3 мм і опором 120 Ом. Відстрілювались кулі масою 8 г з початковою швидкістю 360 м/с. Тиск у воді оцінювався спрощено за формулою $p = \varepsilon Eh/R$.

Для прямого вимірювання тиску в ударній хвилі використовувались два занурювані малоінерційні датчики динамічного тиску PCB-W138A05 фірми PCB Piezotronics (рис. 1), виготовлені за технологією ІСР з вбудованим підсилювачем. Основні параметри датчиків: діапазон вимірювання – 0-34 МПа; чутливість – не гірше 0,15 В/МПа; резонансна частота – не нижче 1 МГц; час відгуку – до 1,5 мкс. Шість тензорезисторів і два датчики тиску було підключено до 8-канального реєстратора.

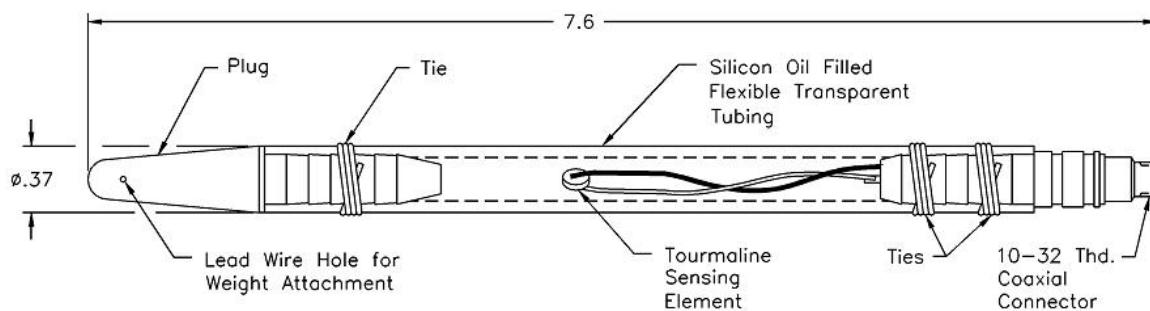


Рисунок 1 – Датчик динамічного тиску PCB-W138A05

Результати вимірювань оброблялися програмним забезпеченням LMS Test.Xpress, за допомогою якого встановлювались параметри імпульсу первинної ударної хвилі: максимальний тиск у воді поблизу внутрішньої поверхні труби p , максимальна колова деформація на зовнішній поверхні труби ε , півширина $\Delta t_{1/2}$ (табл. 1). За відстанню між датчиками і часом проходження ударної хвилі обчислювалась її швидкість v .

Таблиця 1 – Результати прямих і непрямих вимірювань

Вимірювання	Тиск p , МПа	Деформація ε , мкм/м	Півширина $\Delta t_{1/2}$, мс	Швидкість v , м/с
Датчик тиску	2,35	224	0,68	1040
Тензодатчик	3,49	333	1,25	1047

Порівнюючи пряме вимірювання колової деформації (333 мкм/м) з порахованим на основі прямого вимірювання тиску (2,35 МПа) за формулою $\varepsilon = \frac{pR}{Eh} = 224$ мкм/м, можна оцінити коефіцієнт динамічності в даному експерименті – 1,49.

ОПІР КРАЙОВОМУ СКОЛЮВАННЮ ФЛОАТ-СКЛА ПРИ ЗАСТОСУВАННІ КОНІЧНИХ ІНДЕНТОРІВ З РІЗНИМ РОЗМІРОМ СФЕРИЧНОЇ ВЕРШИНИ

В. В. Хворостяний, М. А. Долгов, В. Й. Галенко, М. О. Цисар, Т. О. Христович

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України

Експериментальні дослідження механічної поведінки крихких матеріалів в умовах крайового локального навантаження на сьогодні залишаються надзвичайно актуальними завдяки інформативності та ефективності методик, а також низці переваг, основними з яких можна вважати зручність, доступність та відносну простоту при виконанні випробувань, в яких у той же час відтворюються реальні робочі процеси, характерні для різноманітних відповідальних елементів конструкцій. В цьому контексті слід зазначити, що руйнування таких матеріалів як скло та кераміка переважно зніщуються з наявних дефектів на поверхні та характеризуються лавиноподібним поширенням руйнівних тріщин. Стан поверхневих та приповерхневих шарів крихких матеріалів при їх виготовленні, обробці та експлуатації, зокрема у крайових зонах та безпосередньо на самих кромках, є вирішальним фактором збереження несівної здатності відповідних силових та функціональних деталей машин. Висока чутливість до концентрації напружень, що спричиняє локальну пошкоджуваність при контактних взаємодіях з твердими тілами при статичних і динамічних навантаженнях, значно знижує можливості їх практичних впроваджень. Результати експериментів важливі для визначення характеристик пошкоджуваності, опору руйнуванню і тріщиностійкості технічних виробів з крихких матеріалів, що затребувано вимогами підвищення їх працездатності та ресурсу для багатьох застосувань в різних галузях промисловості. Найбільш показовими прикладами можуть слугувати різальні інструменти, ортопедичні та стоматологічні імпланти, деталі газових турбін, двигунів, електротехнічних та оптичних приладів.

Проте питання точності та достовірності визначення опору сколюванню матеріалів потребує свого вирішення за різних умов випробувань та модифікацій застосованих підходів. Видається необхідним враховувати особливості досліджуваних матеріалів, вплив визначальних факторів, серед яких можна виокремити тип індентора, його геометричні параметри, діапазони прикладеного зусилля та розміру утворених сколів, масштабний ефект, вихідна дефектність тощо. Відповідно до положень міжнародного стандарту CEN/TS 834-9:2010 [1] на метод випробувань із визначення опору крайовому сколюванню у макродіапазоні навантаження зазвичай використовують стандартний індентор Роквелла, тоді як для мікродіапазону робочим наконечником є індентор Віккерса. Але для вивчення певних аспектів локального руйнування та пошуку взаємозв'язків між різними механічними властивостями матеріалів застосовують в експериментальних дослідженнях також інші індентори стандартного і нестандартного виду, які часто поділяють на умовно «гострі» та «тупі». Запропонована характеристика опору руйнуванню кромки для багатьох крихких матеріалів загалом та для скла зокрема не завжди є постійною величиною, адже її величина залежить від діапазону відстані руйнування. Відмінності у локальній пошкоджуваності матеріалів та значеннях характеристик, що описують такі їх крайові руйнування спонукало дослідників у роботі [2, 3] розділити емпіричні дані на два масиви, що були названі інтервалами малих (0...0,3 мм) та великих (0,3...0,6 мм) значень відстані руйнування. За аналітичним підходом, викладеним в [2], перехідне значення відстані руйнування кромки для цих діапазонів становить 0,28 мм.

З метою оптимізації методу та мінімізації похибок визначення опору руйнуванню при крайовому локальному навантаженні, були проведені широкомасштабні тестування багатьох матеріалів таких як різноманітна за своїми

властивостями технічна кераміка, силікатні стекла різного хімічного складу, монокристали та керамічні композиційні матеріали [4, 5, 6]. Аналіз отриманих вибірок даних дозволив виділити найбільш прийнятний діапазон відстані руйнування L , граничні значення якого були 0,1 та 0,4 мм [4, 5]. Чисельне моделювання процесу крайового сколювання силікатного скла технічного призначення та лінійно-пружної кераміки допомогло встановити за ознакою збільшення параметру L зону впливу крайового ефекту, перехідну зону змішаного механізму руйнування та зону, в якій вплив крайового ефекту загасає [7]. Тому вище зазначений діапазон є обґрунтованим, за яким можуть бути знайдені стабільні значення опору руйнуванню. Проте для обмежених обсягів матеріалів, наприклад у випадках пошукових матеріалознавчих досліджень та контрольних чи верифікаційних випробувань, вкрай важливими є оціночні дані здатності скла чи виробів із нього чинити опір локальному руйнуванню. Мета наведеної роботи полягала у порівнянні декількох способів визначення характеристики опору сколюванню кромки флоат-скла при застосуванні конічних інденторів зі сферичними вершинами різного геометричного розміру.

Експериментальні дослідження були проведені ЕФ методом (Edge Fracture Method) на зразках вапняно-натрієвого скла, виготовленого за флоат-технологією для різноманітних технічних застосувань. Локальні сколювання кромки виконували за допомогою алмазних конічних інденторів з вершинами сферичної форми різних розмірів. Основним наконечником слугував стандартний індентор Роквелла з радіусом вершини $r = 200$ мкм. Інші індентори можна поділити на «гострі» ($r = 11$ та 100 мкм) та «тупі» ($r = 400$ та 800 мкм). За таким розподілом індентор Роквелла займає проміжне положення, хоча все ж його слід віднести до «тупих» наконечників [8, 9]. Випробовували зразки скла у вигляді балок прямокутного перерізу, які попередньо шліфували до дзеркального блиску. Детальний опис усіх методичних аспектів проведення експериментів наведено в попередніх роботах [4 – 6].

За даними прикладеного до індентора навантаження P_f , що спричиняло утворення крайового сколу та виміряної оптичним мікроскопом величини відстані руйнування L було обчислено характеристики опору руйнуванню F_R (для масиву емпіричних результатів у кількості n дослідів):

$$F_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{fi}}{L_i} \quad (1)$$

За базове значення опору руйнуванню скла приймали величину, розраховану для вибірки даних, що належить інтервалу значень відстані руйнування від 0,1 до 0,4 мм та позначали її як F_R^T . В дослідженні користувалися також іншими способами визначення опору сколюванню крихких матеріалів відповідно до запропонованої в [10] методики. Спочатку будували діаграми залежності опору руйнуванню F_{Rr} від відстані руйнування L для усіх застосованих інденторів (індекс r вказував на розмір вершини наконечника). На рис. 1 показана така діаграма для випадку сколювання кромки зразка флоат-скла індентором Роквелла. Помітно, що при збільшенні масштабу крайового сколювання, збільшується опір руйнуванню. Але за $L \sim 0,3$ мм залежність від зростаючої ділянки змінюється майже горизонтальною, вказуючи на наявність деякого «умовного плато». Проте для інших інденторів дослідження друга ділянка $F_{Rr} - L$ залежності може бути або спадаючою для «гострих» або зростаючою для «тупих» наконечників (рис. 2). Це контрастувало з випадком використання індентора Роквелла і відображало існуючі відмінності у механічній поведінці скла в умовах його локального руйнування при навантаженні краю інденторами з вершинами різного розміру. Зазначимо, що за аналізом напружено-деформованого стану в зоні пошкодження Роквеллом кромки зразка силікатного скла оптимальне значення параметра відстані руйнування становило саме 0,3 мм [7, 11].

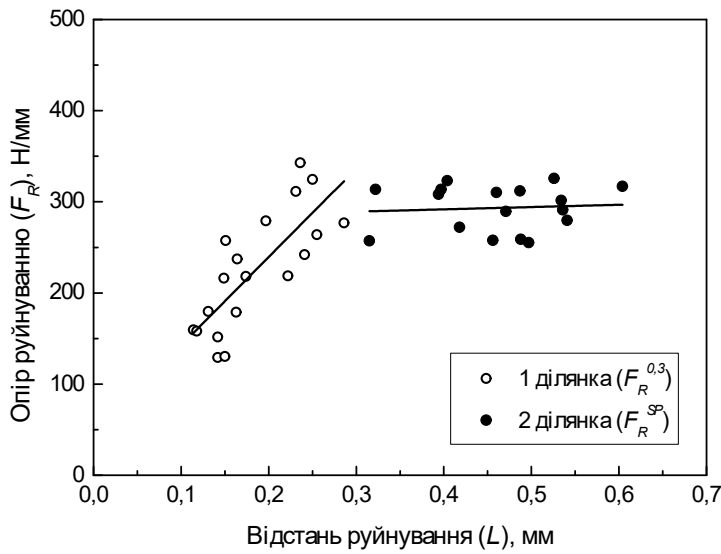
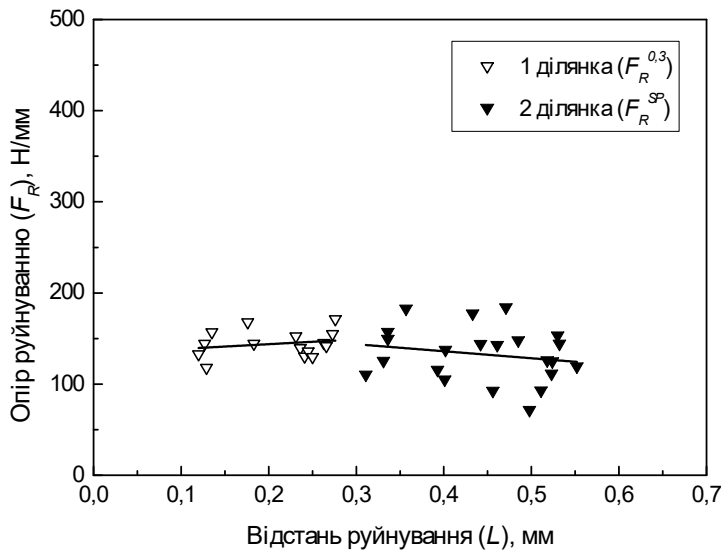


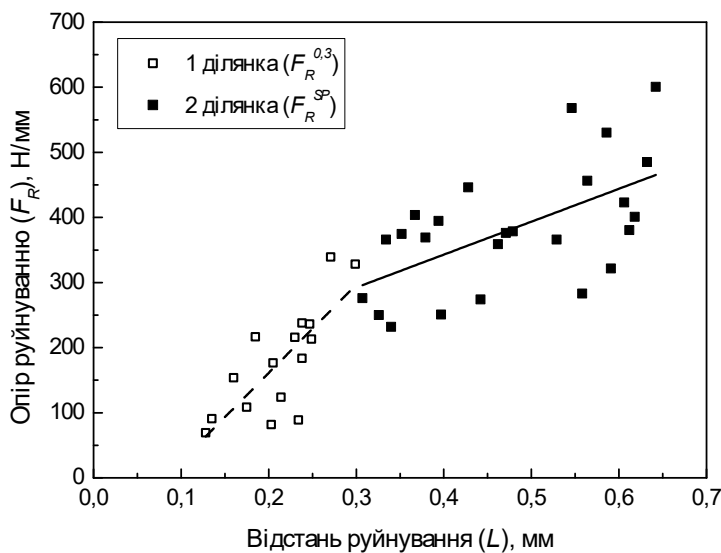
Рисунок 1 – Діаграма залежності опору руйнуванню F_R від відстані руйнування L для флоат-скла, випробуваного в умовах крайового сколювання зразків з використанням стандартного індентора Роквелла ($r=200$ мкм).

Для визначення величини опору руйнуванню $F_R^{0,3}$ розглядали вибірку даних, що обмежувалась значеннями $L \leq 0,3$ мм і застосовували переважно лінійну апроксимацію (на діаграмі – лінія на першій ділянці). Далі оперуючи коефіцієнтами рівняння апроксимації (в загальному випадку вона може бути нелінійною) знаходили характеристику $F_R^{0,3}$ просто підставляючи в це рівняння значення $L = 0,3$ мм. Додатково традиційним загальноприйнятим способом визначали величину F_R^{SP} як середнє значення для масиву даних, що утворювали другу ділянку на $F_R - L$ залежності (тобто для $L > 0,3$ мм). Крім цього в дослідженні аналізували характеристику крайової в'язкості E_{IR} матеріалу, яка визначалась тангенсом кута нахилу прямої лінійної апроксимації результатів випробувань на крайове сколювання і також служить мірою опору кромки руйнуванню [1, 6, 8, 11].

Виконання фрактографічного аналізу зруйнованих сколюванням кромки зразків флоат-скла сприяло з'ясуванню особливостей його руйнування залежно від радіуса вершини застосованого індентора. Загалом крайове пошкодження скла відбувалось з утворенням двох основних видів поширення руйнівних тріщин: сколи, що сформовані розвитком медіанної напівкруглої тріщини та такі, що виникали за рахунок зростання квазіконічної тріщини (рис. 3). Перший різновид сколу, як і при класичному індентуванні, являє собою випадок пружно-пластичного деформування матеріалу. При сколюванні значну роль відіграє крайових ефект, що спотворює систему утворених тріщин. Проте послідовність розвитку медіанної тріщини при сколюванні кромки має принципову подібність до індентування поверхні [9] та полягає у її зародженні з дефекту на межі зони пластичної деформації, потім тріщина набуває характерної напівкруглої форми, обмеженої зоною деформування або поверхнею матеріалу.



а



б

Рисунок 2 – Діаграми залежностей опору руйнуванню F_R від відстані руйнування L для флоат-скла, випробуваного в умовах крайового сколювання зразків з використанням конічних інденторів із сферичною вершиною радіуса r : а – 100 мкм; б – 800 мкм.

Також слід розвитку тріщини у вигляді близького до кола або кругового сегменту при контактному навантаженні індентором може бути результатом поширення радіальних тріщин, що зароджуються з дефектів на межі пластичної зони та розміщуються поблизу поверхні. Часто радіальні тріщини розглядаються як поверхневі сліди сформованої напівкруглої тріщини. Тому важко однозначно стверджувати які саме тріщини призвели до появи сколу у вигляді напівкола, адже це могло бути як наслідок розвитку безпосередньо медіанної тріщини, так й за рахунок розповсюдження радіальних тріщин чи злиттям цих двох варіантів розтріскування скла. При індентуванні крихких матеріалів в такій ситуації вживається термін, що позначає систему радіальних та медіанних тріщин [9]. У дослідях на сколювання кромки таким

чином утворені сколи були названі за ознакою своєї морфологічної побудови як результат поширення медіанної напівкруглої тріщини, які раніше в [6] найменувався «нігтеподібними» сколами, що характерні випадкам локального руйнування скла при застосуванні гострого індентора Віккерса або такі, що спостерігалися у випробуваннях на дряпання індентором Роквелла до крайового сколювання [5, 6].

Другий основний тип сколювання краю полягав у зародженні, зростанні та виходу на бічну поверхню зразка квазіконічної тріщини. Цей випадок відповідав пружному контакту при індентуванні поблизу кромки сферичним наконечником, що за своєю суттю є модифікацією розтріскування за Герцем. Вдавнення в матеріал індентора з плоскою вершиною або сфери великого діаметру спричиняло появу на поверхні зразка кільцевих тріщин, з яких при збільшенні прикладеного зусилля формувалася вглиб матеріалу тріщина у вигляді зрізаного конуса [7, 9]. При руйнуванні кромки сколюванням конічна тріщина видозмінювалася внаслідок впливу крайового ефекту. Крім зазначених основних типів крайових сколів спостерігалися випадки локальних руйнувань, що були від них похідними та мали ознаки поширення медіанної напівкруглої або утворення квазіконічної тріщини. Часто такі додаткові сколи одночасно поєднували їх особливості або були із вторинним розтріскуванням, що дещо заплутувало картину локальної втрати цілісності кромки скла. Проте їх можна було віднести до того чи іншого типу руйнування, нехтуючи при цьому побічними руйнівними процесами.

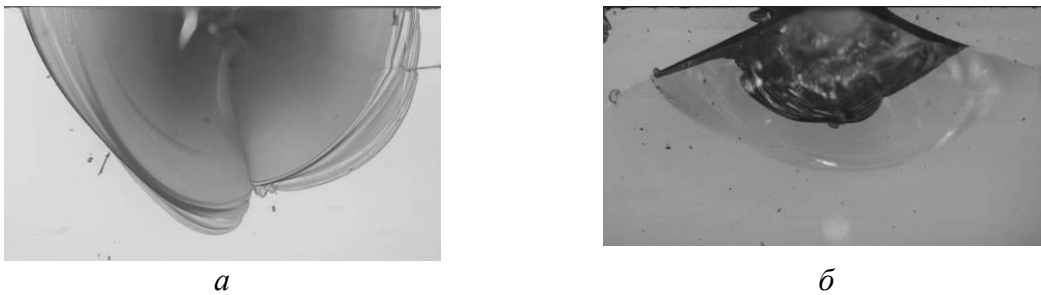


Рисунок 3 – Зображення характерних видів руйнування кромки в умовах їх сколювання конічними інденторами із сферичними вершинами різного розміру:
a – медіанна напівкругла тріщина; *б* – квазіконічна тріщина.

Для «гострих» інденторів наведеного дослідження із сферичними вершинами радіусами $r = 11$ та 100 мкм руйнування кромки відбувалося переважно з утворенням сколів від розвитку медіанної тріщини. Разом з тим вже у випадку використання індентора з $r = 100$ мкм з'являлась невелика кількість (до 20% від загального обсягу) сколів квазіконічної форми. Експерименти на сколювання краю більш тупими наконечниками, починаючи зі стандартного індентора Роквелла ($r = 200$ мкм), призводили до виникнення руйнувань лише від розвитку квазіконічних тріщин. Слід зазначити, що серед таких сколів також порівняно незначна їх частина (10...20% від усієї чисельності для кожного типу індентора) має викривлену форму або додаткове розтріскування. У підсумку можемо стверджувати, що збільшення розміру руйнівної вершини індентора кардинальним чином змінює характер крайового руйнування скла. Критичне значення радіусу для такої зміни очевидно відповідає величині $r = 200$ мкм.

Обчислені значення характеристик опору сколюванню кромки зразка флоат-скла для усіх інденторів дослідження зведено до табл. 1. Одержані результати свідчать про задовільну відповідність величин опору руйнуванню F_{Rr} і прийнятність застосування способу оцінки опору руйнування скла при обмеженій кількості експериментальних даних (характеристики $F_{Rr}^{0,3}$). При порівнянні величини $F_{Rr}^{0,3}$ з F_{Rr}^T та F_{Rr}^{SP} відносна похибка становила приблизно до 20% у випадку лінійної апроксимації першої ділянки $F_{Rr} - L$ залежності. Максимальна розбіжність між ними виявлялася для індентора

Роквелла і в такому разі значення Δ_T становило 39%. А використовуючи замість лінійної більш точну поліноміальну апроксимацію даних, ця похибка зменшувалася майже до 20%. Варто підкреслити, що результати випробувань крихких матеріалів зокрема силікатного скла методами крайового сколювання відзначалися досить великим розкидом, що в свою чергу зумовлювало необхідність аналізувати усереднені значення та застосовувати статистичну обробку.

Таблиця 1. Характеристики опору руйнуванню кромки зразка флоат-скла при застосуванні конічних інденторів зі сферичною вершиною радіуса r .

Радіус вершини r , мкм	Крайова в'язкість E_{IR} , Н/мм	Опір руйнуванню, Н/мм			Похибка, %	
		$F_R^{0.3}$	F_R^T	F_R^{SP}	Δ_T	Δ_{SP}
11	143 (20)	138 (15)	127 (20)	137 (10)	9	1
100	127 (23)	149 (15)	141 (23)	133 (22)	6	12
200	386 (24)	336/293 (19)	241 (24)	293 (17)	39/22	15/0
400	515 (19)	297 (13)	249 (19)	376 (14)	19	21
800	520 (25)	297 (16)	231 (25)	383 (25)	29	22

Примітка. В дужках вказана кількість виконаних експериментів. Через похилу ризику наведено дані лінійної та поліноміальної апроксимації даних.

Верифікація способу одержання оціночних значень опору руйнуванню за результатами сколювання при малих відстанях руйнування L показала його роботоздатність для низки конічних інденторів із сферичними вершинами різного геометричного розміру. Ці дані можуть бути демонстрацією можливості виконання менш матеріалозатратних випробувань при вивченні коштовних матеріалів (при цьому зазвичай скло, завдяки своїм фізико-хімічним та оптичним властивостям, розглядається як модельний матеріал), проведенні пошукових матеріалознавчих робіт, що важливо для продукції різних галузей промисловості таких як машинобудування, будівництво, медицина тощо.

Перелік літературних джерел:

1. CEN/TS 834-9:2010. Advanced Technical Ceramics – Mechanical Properties of Monolithic Ceramics at Room Temperature, Part 9: Method of Test for Edge-Chip Resistance, CEN, Current from 2010-08-15.
2. H. Chai, “On the Mechanics of Edge Chipping from Spherical Indentation”, *Int J Fracture*, **169**, 85 – 95 (2011).
3. C. Taufer and A. Della Bona, “Edge Chipping Resistance of Ceramics Bonded to a Dentine Analogue”, *J Mech Behav Biomed Mater*, **90**, 587 – 590 (2019).
4. G. A. Gogotsi, V. I. Galenko, S. P. Mudrik, et al., “Fracture Resistance Estimation of Elastic Ceramics in Edge Flaking: EF Baseline”, *J Eur Ceram Soc*, **30**, 1223 – 1228 (2010).
5. В. В. Хворостяний, “Опір руйнуванню крихких матеріалів при локальному навантаженні методом дряпання до крайового відколювання. Повідомлення 1. Методичні основи дослідження”, *Пробл. міцності*, №5, 65 – 73 (2020).

6. Г. А. Гогоци, В. И. Галенко, С. П. Мудрик и др., “Разрушение стекла при краевом скалывании”, *Пробл. прочности*, №6, 103 – 112 (2007).
7. O. A. Batanova, G. A. Gogotsi and Yu. G. Matvienko, “Numerical modeling edge chipping tests of ceramics”, *Eng Fract Mech*, **132**, 38 – 47 (2014).
8. R. Morrell and A. J. Gant, “Edge chipping of hard metals”, *Int J Refract Met H*, **19**, 293 – 301 (2001).
9. R. F. Cook, G. M. Pharr, “Direct observation and analysis of indentation cracking in glasses and ceramics”, *J Am Ceram Soc*, **73**, 787 – 817 (1990).
10. В. Й. Галенко, В. В. Хворостяний, “Оцінка величини опору сколюванню краю зразків крихких матеріалів”, *Проблеми міцності*, №2, 80 – 89 (2023).
11. Г. А. Гогоци, В. И. Галенко, “Сопротивление стекол скалыванию при использовании различных конических инденторов и барьер сопротивления началу разрушения”, *Проблемы прочности*, № 3, 35 – 42 (2016).

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВИСОКОШВИДКІСНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ З ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИМ ПІДВІСОМ

С.В. Тарасов, О.Н. Молотков

Інститут транспортних систем та технологій НАН України, Україна

Розрахунок динамічних взаємодій f_L , f_D , f_Z - сили левітації, гальмівної та бічної зіштовхуючої сил - сучасного високошвидкісного транспортного засобу (ТЗ) з електродинамічним підвісом (ЕДП) виконується шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь відносно струмів i_k

$$R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} = -I_s \frac{dM_{sk}}{dt}, \quad (1)$$

k [– ,] – номер контуру колії, $s = \overline{1, n}$ – номер поїзного контуру, яка описує взаємодії коротко замкнених контурів нескінченної структури колії із кожним надпровідним контуром ТЗ [1], та обчислення f_L , f_D , f_Z із нескінчених сум

$$f_L = I_s \sum_{k=-} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial y}, \quad f_D = I_s \sum_{k=-} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial x}, \quad f_Z = I_s \sum_{k=-} i_k \frac{\partial M_{sk}}{\partial z}, \quad (2)$$

де I_s - струм в s -ому надпровідному контурі поїзда, i_k - струм наведений в k -ому контурі колії, R_k та L_k - відповідно омичний опір та індуктивність k -го контуру колії, M_{sk} - коефіцієнт взаємодії s -го поїзного контуру та k -го контуру колії, n – кількість поїзних контурів.

Для побудови прийнятної методики розрахунку і проведення досліджень з забезпечення стійкості руху ТЗ в роботі [2] запропонована нестационарна модель структури колії з мінімальною кількістю контурів, що перевищує на один контур кількість поїзних контурів. Це дозволило нескінченно вимірну систему рівнянь (1) і нескінчені суми (2) звести до кінцевих, суттєво скоротити потрібні обчислювальні потужності для розрахунку силових взаємодій (2) та розробити відповідне програмне забезпечення.

Дослідження стійкості руху ТЗ проводилось на прикладі системи з ЕДП, яка налічувала $n=5$ надпровідних контурів ТЗ на проміжку руху в 20 контурів колії. Результат розрахунку сили левітації наведений на рис. 1, доводить відсутність починаючи з проходження 10 контуру колії кінцевих ефектів та придатність

запропонованої нестационарної моделі. В розрахунку враховувалось 6 контурів колії з переміщенням останнього контуру наперед в напрямку руху ТЗ.

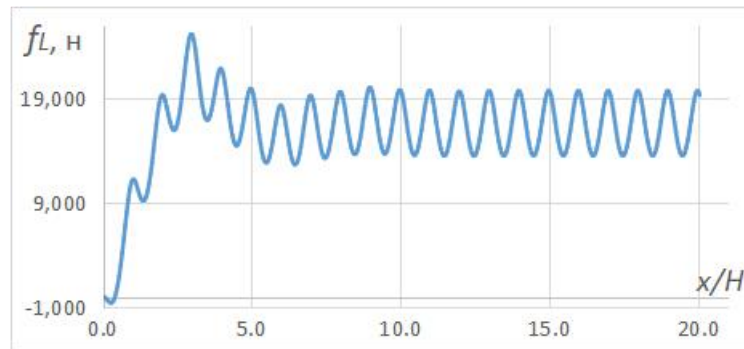


Рис. 1. Сила левітації нестационарної структури колії

Проведені розрахунки залежностей середніх сил взаємодії ЕДП довели, що при появі ненульового зміщення ТЗ в бічному напрямку з'являється бічна зіштовхуюча сила, яка спрямована в напрямку зміщення і може досягати значної величини. Графік відповідної залежності наведений на рис. 2. Зростання зіштовхуючої сили при зростанні бічного зміщення призводить до втрати стійкості системи ТЗ-колія в бічному напрямку.

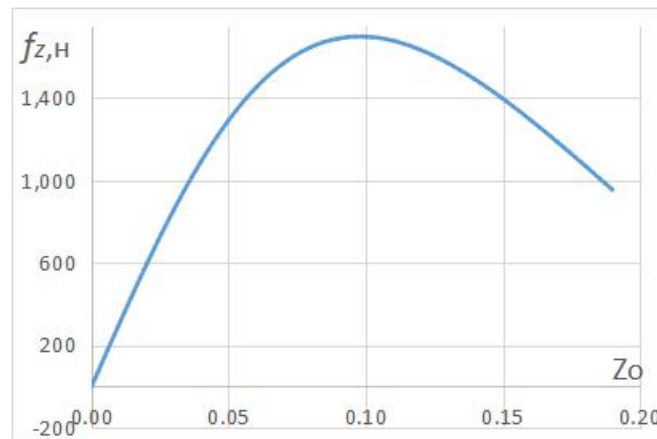


Рис. 2. Залежність середньої зіштовхуючої сили від бічного зміщення.

Для забезпечення стійкості системи в бічному напрямку необхідно змінити конструкцію колії так, щоб бічна зіштовхуюча сила при зростанні бічного зміщення змінила знак на протилежний, тобто була спрямована в сторону протилежного зміщенню. Забезпечити це можливо розташуванням додаткових надпровідних контурів ТЗ та контурів колії з обох боків транспортної системи. Тобто по бокам ТЗ розташувати поїзні контури та контури колії щоб зіштовхуюча сила виконувала роль підйомної, підйомна сила роль стабілізуючої. Для забезпечення стійкості в вертикальному напрямку необхідно створити початкове доволі невелике зміщення. Тоді при зменшенні зміщення підйомна сила буде зростати будучи протилежного напрямку до зміщення. Одночасно забезпечується стійкість і в бічному напрямку. Проведений аналіз та запропонована на його основі конструкція ТЗ і структури колії дозволяє зробити висновок, що попередньо нестійка система може бути перетворена на стійку, а параметри системи можуть бути визначені із використанням запропонованого методу розрахунку силових взаємодій в ЕДП та розробленого програмного забезпечення.

Висновки

Для моделювання руху ВШТЗ з дискретною структурою колії запропонована нестационарна модель з мінімальною кількістю контурів колії, що перевищує на один контур кількість поїзних контурів. Визначено момент переміщення останнього контуру колії на місце першого по ходу руху ТЗ. Запропоновано зміни конструкції ТЗ, які

забезпечують стійкість системи в бічному і вертикальному напрямках, а також необхідну величину підйомної сили левітації.

Список літератури

1. Дзензерський В.А. та ін. Дослідження коливань, стаціонарних режимів та стійкості руху різних типів електродинамічних транспортних систем. Технічна механіка. 2003, № 1, с.145-153.

2. Молотков О.Н. Нестационарна модель колії магнітолевітуючого транспортного засобу – Вісник Академії митної служби України. Серія: "Технічні науки", №1 (45), 2011 – с.65-71

ПИТОМИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ ОПІР ТА ПОШКОДЖУВАНІСТЬ АЛЮМІНІЄВИХ СПЛАВІВ ЗА ВЕЛИКИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Є.В. Воробйов, Л.С. Новогрудський, М.П. Адамчук, М.П. Земцов, Т.В. Анпілогова

Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Київ, Україна

Металеві матеріали, завдяки кристалічності та особливому типу хімічного зв'язку, мають як велику густину так і високу теплову та електричну провідність, тощо. Їх механічні властивості є тісно зв'язаними завдяки спільній залежності від складу, внутрішньої будови та її дефектів як вакансії, примісні атоми, дислокації, пори, розшарування, тріщини, так зване розпушення [1]. Крім механічних, іншими з найбільш структурно залежних властивостей металу є його електричні властивості, приміром електропровідність чи електричний опір. Взагалі питомий електричний опір металів за кімнатної температури знаходиться у дуже широкому діапазоні: 0,016 (Ag)...1,40 (Mn) Ом мм²/м, а при наявності великих пластичних деформацій він може змінюватись (як правило зростати) на порядки.

В роботі [2] для низки сталей різних класів та кристалічної структури досліджено вплив великих пластичних деформацій розтягу, крутіння, згину а також малоциклової втоми на питомий електричний опір матеріалу зразка, що прийнято за міру пошкоджуваності. Експериментально встановлено, що розтяг, на відміну від інших видів деформування, призводить до зменшення питомого електричного опору усіх досліджених сталей 03X20H16AG6, 03X13H9Г19AM2, OH9, M76, Ст3. Дається оцінка пошкоджуваності та її питомої величини, як такої, що припадає на одиницю залишкової пластичної деформації.

Наступним кроком має бути застосування методики [2] на інші класи металевих матеріалів. Метою цієї роботи є дослідження впливу пластичної деформації на пошкоджуваність алюмінієвого сплаву, що оцінюється за зміною питомого електричного опору.

Матеріали і методики

Об'єктами дослідження послуговувалися сплави на основі алюмінію, що знайшли широке застосування у техніці, у тому числі в криогенній. Такими є сплави АМцС, Д20 та АМг5.

Основним видом попереднього деформування був статичний розтяг, який здійснювали на випробувальній машині Instron-1126. Залишкову деформацію зразків отримували в кілька етапів, поступово збільшуючи її аж до появи шийки. Використовували циліндричні зразки з номінальними величинами початкового діаметру і довжини робочої частини відповідно 2 та 22 мм. Застосовували попереднє малоциклове деформування згином в ортогональних площинах і деформування крутінням як однонаправленим, так і циклічним. В цих випадках зразки мали діаметр

робочої частини та її довжину відповідно 3 та 23 мм. В однакових умовах проводили до п'яти дослідів, результати усереднювали.

Електричний опір робочої частини зразків вимірювали універсальним приладом Р4833 класу точності 0,1, що дає змогу визначити електричний опір у діапазоні $10^{-4} \dots 10^6$ Ом. Контакти приєднували на границях робочої частини зразків, на галтелях діаметром 6 мм.

Питомий опір розраховували за формулою

$$\rho = RF/l, \quad (1)$$

де R – опір; F – площа перетину; l – довжина робочої частини.

Такі розрахунки дають можливість усереднити величину F , що може дещо відрізнятися на різних ділянках робочої довжини зразка.

Результати і їхнє обговорення

Застосування цієї методики ілюструє рис. 1. На ньому у залежності від залишкової деформації наведено графіки зміни електричного опору (1), питомого електричного опору (2) і безрозмірної характеристики пошкоженості D (3) для сплаву АМг5. Обрана форма

$$D = 1 - |\Delta\rho / \rho_0| \quad (2)$$

є однією з прийнятних при оцінці пошкоджуваності за будь якими параметрами. Відмітимо, що принципи вибору параметру чи їх системи, що характеризують зміну структури і властивостей матеріалу, і які можна ставити у відповідність узагальненому поняттю «пошкоженість», або швидкості її зростання у процесі напрацювання, залишаються нерозробленими.

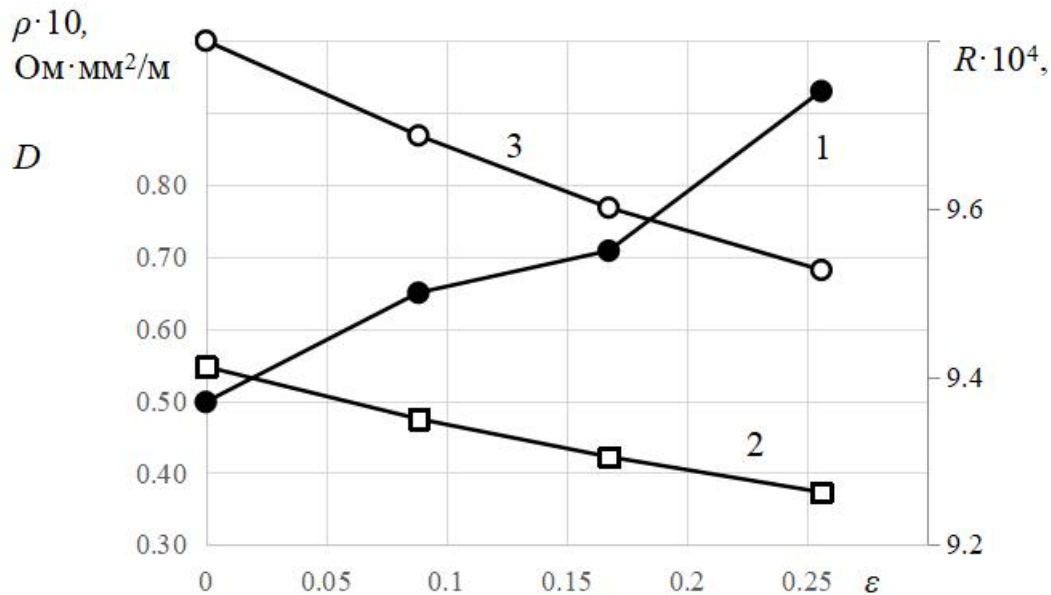


Рис. 1. Залежності електричного опору R (1), питомого електричного опору ρ (2) та його відносного зменшення D (3) зразка алюмінієвого сплаву АМг5 від залишкової пластичної деформації.

Таким чином, умовно непошкоджені матеріали, тобто такі, що перебувають у вихідному стані, відповідають $D_0 = 1$ (насправді це вихідна пошкоженість, оскільки він вже містить металургійні та виробничо-технологічні дефекти, що виникають при виплавці, початковій та подальшій механічній обробці). Використання модуля $|\Delta\rho / \rho_0|$ в (2) дозволяє зберегти єдиний підхід до оцінки пошкоджуваності за різнонаправлених змін питомої електропровідності.

Як видно на рис. 1, електричний опір R робочої частини при розтязі значно збільшується. Значення прийнятої міри пошкодженості зменшується від одиниці до граничної величини $D_l = 0,68$. При цьому криві (2) та (3), побудовані за єдиними шкалами, не тільки подібні, але співпадають при зсуві вздовж осі ординат. Обидві залежності відзначаються помірною нелінійністю.

Подібним чином проведено дослідження і на зразках інших алюмінієвих сплавів. У всіх випадках отримано помірне зменшення питомого електричного опору, і відповідну зміну характеристик пошкоджуваності, рис. 2.

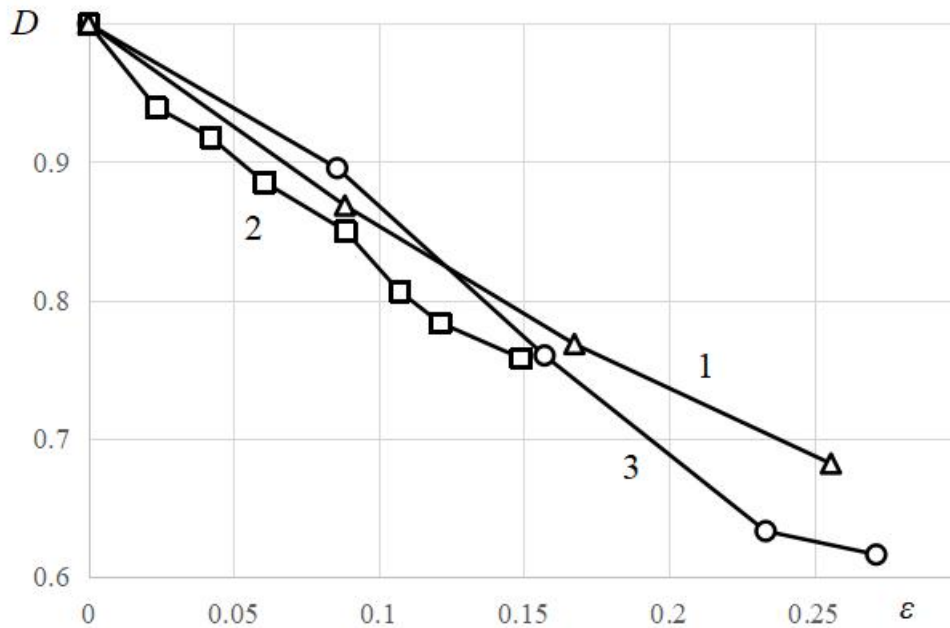


Рис. 2. Залежність характеристики пошкоджуваності від залишкової пластичної деформації розтягу зразків сплавів АМг5 (1), Д20 (2) і АМцС (3).

Досліджені сплави відрізняються за величинами D_l , але при цьому вони ще мають різні значення максимальної рівномірної деформації ϵ_d . Врахувати ці відмінності можна, якщо визначити питому пошкодженість за допомогою виразу

$$D_\epsilon = (1 - D_l) / \epsilon_d. \quad (3)$$

Цей показник характеризує чутливість металу до пошкодження через деформацію розтягом. Найменш чутливим виявився сплав АМг5 ($D_\epsilon = 1,23$), а найбільш сплав Д20 ($D_\epsilon = 1,60$). Сплав за цим показником АМцС займає проміжне становище ($D_\epsilon = 1,28$).

Проведені дослідження показують ефективність оцінки пошкоджуваності сплавів за параметрами електричного опору та раціональність подальших досліджень пошкоджуваності матеріалів різних класів за цими показниками за будь яких видів деформування.

Висновки

1. Експериментально встановлено, що розтяг призводить до зменшення питомого електричного опору досліджуваних алюмінієвих сплавів

2. Оцінено пошкоджуваність та її питому величину як таку, що припадає на одиницю залишкової пластичної деформації. При розтязі найбільшу чутливість до деформацій за цим показником виявив сплав Д20, а найменшу сплав АМг5.

Література

1. В. Г. Лифшиц, В. С. Крапошин, Я. Л. Линецкий, *Физические свойства металлов и сплавов: 2 изд. доп. и перераб.*, Металлургия, Москва (1980).
2. E.V. Vorobyov, L.S. Novogrudskiy, M.P. Adamchuk and M. P. Zemtsov. Effect of Various Types of Plastic Deformation and Pulsed Electric Current on the Damageability of Steels. *Strength of Materials*, 57, No. 5 (2025)

NUMERICAL CALCULATION OF ION CURRENT ON A CYLINDER IN A RAREFIED PLASMA FLOW WITH MAGNETIC FIELD

D. N. Lazuchenkov

*The Institute of Technical Mechanics
of National Academy of Sciences of Ukraine and State Space Agency of Ukraine*

A kinetic modeling is performed of the interaction of an infinite cylinder with a supersonic flow of rarefied plasma (which bulk velocity is perpendicular to the cylinder axis) with the presence of an external uniform magnetic field (which strength vector is parallel to the cylinder's axis). The cylinder is made of a conducting nonmagnetic material and it is under a constant negative potential relative to the unperturbed plasma potential. The plasma is considered to be Maxwellian, quasi-neutral, it consists of positive singly charged ions and electrons, and it is nonisothermal (temperatures of electrons and ions are different). It's assumed that charged particles are neutralized on the cylinder surface, and there is no electron emission. Under the above assumptions, the problem dimensionality is reduced, the particle velocity distribution functions are four-dimensional.

Free-molecular flow past a cylinder is modeled using a two-dimensional system of Vlasov-Poisson equations. The Poisson-Boltzmann model in the local-equilibrium electron approximation is used to calculate the electron-retarding local-equilibrium self-consistent electric field. The Vlasov equation for ions and the Poisson-Boltzmann equation for the self-consistent electric field are solved on nested grids using a finite-difference method of relaxation with splitting by physical processes and the method of characteristics. The reliability of the obtained results is confirmed by comparison with calculations by other authors and with the results of solving identical physical problems using different methods.

The main parameters of the problem, determining the flow regime, charged particles density and the electric field distributions are: bulk flow velocity with respect to the thermal ions velocity S_i , characteristic sizes $\xi = r_c / \lambda_d$, $\xi_B = r_c / r_{gi}$ (r_c is the cylinder base radius, λ_d is the Debye length, r_{gi} is the average Larmor radius of ions), the surface potential φ_c relative to the undisturbed plasma potential, normalized by kT_e/e . A series of calculations of free-molecular transverse flow around a cylinder is performed for different values of these parameters.

The influence of an external magnetic field strength and surface potential on the ion current collected by a cylinder is studied. For $S_i=5$, $\xi=5$, the ion current in a magnetic field at $\xi_B < 0.1$ increases by less than 0.2% (relative to the case without magnetic field, $\xi_B=0$) at negative potentials $\varphi_c \geq -60$, and by more than 1% at $\varphi_c \leq -200$. For negative potentials $\varphi_c \geq -200$ and $\xi_B < 0.05$ the ion current increases by less than 0.15%.

Quantitative estimates of the ion current on a cylinder under ionospheric conditions are obtained as a dependence of the surface potential φ_c and the ratios of the characteristic dimensions of the cylinder and plasma ξ , ξ_B . The results can be used in the diagnostics of

supersonic flows of low-temperature rarefied plasma using stationary cylindrical Langmuir probes.

ГІБРИДНІ ПІДХОДИ В МОДЕЛЮВАННІ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ

Сохацький А.В.

Інститут транспортних систем та технологій НАН України

Вступ. Турбулентність, як фізичне явище виникає за певних умов у нелінійному дисипативному рідинному або газоподібному середовищі з надзвичайно великим числом ступенів свободи. Фізичний процес течії характеризується енергетичним обміном з навколишнім середовищем. Внаслідок цього зміна в часі і просторі будь-якої гідродинамічної величини описується функціями, що містять величезне число компонент Фур'є, тобто мають дуже складний характер [1-3]. Саме з цієї причини кожна індивідуальна рідка частинка цього середовища такої динамічної системи рухається таким заплутаним чином, так що її координати і напрямок руху змінюються з часом за законами стохастичної механіки. Кореляції швидкості в будь-якій точці потоку обмежені при цьому малими часовими інтервалами, залежними від початкових умов, за межами яких неможливо встановити причинний зв'язок між полем швидкостей у різні моменти часу, зокрема кореляцію з попереднім рухом [2,3].

Усе це підкріплює уявлення про стохастичний характер пульсацій швидкості та інших фізичних параметрів у турбулентному потоці, що виникають як результат втрати стійкості ламінарного руху гідродинамічної системи під час зміни зовнішніх керуючих параметрів. З цього погляду турбулентний рух є більш хаотичним, ніж ламінарний, тобто турбулентність ототожнюється з хаосом.

Чепмен і Тобак виділили три епохи в розвитку наших уявлень про турбулентність: статистичну, структурну та детерміністичну [4]. Проте вичерпної теорії виникнення турбулентності в різноманітних аерогідродинамічних течіях і на сьогодні взагалі немає.

У більш загальному розумінні турбулізацію руху рідини або газу можна уявити як результат зміни топології фазових траєкторій, що призводить до перебудови атракторів і якісної зміни (біфуркації) стану руху у фазовому просторі. Відображенням стохастичної природи турбулентності слугує повне перемішування фазових траєкторій з різною асимптотичною поведінкою і структурою (топологією) областей тяжіння (атракторів), що їх оточують [3-6].

Сучасні підходи до опису турбулентної течії. У розвиненому турбулентному потоці присутні пульсації з масштабами від найбільших до дуже малих. Такі течії характеризуються наповненими спектрами Фур'є, причому не тільки часовими, а й просторовими. Основну роль у турбулентному потоці відіграють великомасштабні пульсації, масштаб яких - порядку величини характеристичної довжини L , що визначає розмір області G , у якій відбувається турбулентний рух [5-10]. Цю величину називають зовнішнім масштабом турбулентності. Великомасштабні рухи, що мають найбільші амплітуди, мають певну швидкість, за порядком величини порівнянну зі змінами середньої швидкості вздовж відстані L . Дрібномасштабні ж пульсації, що мають значно менші амплітуди, можна розглядати як дрібну детальну структуру, що накладається на основні великомасштабні турбулентні рухи. У дрібномасштабних пульсаціях укладена лише порівняно мала частина всієї кінетичної енергії рідини. Розвинена дрібномасштабна турбулентність є локально однорідною та ізотропною

Згідно з теорією Колмогорова [11] дрібномасштабна структура розвиненої турбулентності для ізотермічної течії (коли $\rho = const, \nu = const$) визначається

каскадним характером передання енергії по спектру вихорів (турбулентних пульсацій) різних просторово-часових масштабів.

Якісна схема каскаду Річардсона-Колмогорова полягає в наступному. Дрібні вихори отримують енергію в результаті послідовного подрібнення великих вихорів при зростанні числа Рейнольдса Re . Найбільші енергонесучі вихори утворюються внаслідок втрати стійкості вихідної ламінарної течії, і їхні розміри $\lambda_1 \sim L_1$ (Прандтлівський шлях перемішування) значно менші за характерний масштаб L самої області течії G . Ці збурення першого порядку, через занадто велике число Рейнольдса великомасштабних пульсацій $Re_{\lambda_1} \sim \lambda_1 u_1 / \nu$, відповідного їхньому масштабу λ_1 і відносної швидкості u_1 ; виявляються нестійкими і, руйнуючись, породжують збурення другого порядку ($\lambda_2 u_2$), які, зі свого боку, з тієї самої причини спричиняють появу ще більш дрібних вихорів і т. д [6-14].

Процес подрібнення вихорів зупиняється, коли сили молекулярної в'язкості в рідині починають відігравати істотну роль. Це відбувається для вихорів із числами Рейнольдса $Re_\eta \sim 1$. При цьому відбувається безперервний перерозподіл питомої кінетичної енергії $\sim U^3/L$ несучого потоку від великомасштабних вихорів до більш дрібних аж до найдрібніших із характерним розміром порядку внутрішнього масштабу турбулентності $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, який характеризує вплив в'язких ефектів на структуру дрібномасштабної турбулентності [4-10]. У межах дуже великих чисел Re встановлюється квазістаціонарний режим інерційного перенесення кінетичної енергії від великих вихорів до менших, за якого енергія, врешті-решт через молекулярну в'язкість ν перетворюється на тепло в гідродинамічно стійких дрібних вихорів масштабу $\lambda_k \sim \eta$ (в'язкий інтервал) [4-10,12-14].

Колмогоров припустив, що існує так званий інерційний інтервал ($\eta < \lambda_k < L_1$) масштабів вихорів, у яких не відбувається помітного продукування й дисипації енергії, точніше, дисипація в них мала порівняно з тією енергією, що її вони отримують від більших вихорів і передають дрібнішим [2,14,15].

Гібридні RANS–LES підходи. Гібридні RANS–LES моделі з'явилися порівняно недавно: в дев'яності роки наприкінці минулого століття. Найпоширенішим методом став метод моделювання від'єднаних вихорів – Detached Eddy Simulation або DES [16].

На сьогодні принаймні поширені декілька десятків таких моделей. Їх подальшому вдосконаленню й розвитку присвячено величезна кількість досліджень [4, 16–20]. DES тримав подальший розвиток – Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [21]. Це свідчить про позитивні сторони ідеї, що лежить в основі гібридних моделей. З іншого боку, немає повної задоволеності вже існуючими моделями такого типу.

Загальна концепція, що лежить в основі гібридних моделей, відбивається в їх назві. Вона полягає в спробі побудови комбінованих моделей, які функціонували б як RANS в одних і як LES в інших областях течії. Така можливість відкривається завдяки формальній схожості рівнянь Рейнольдса і рівнянь LES. Проте шляхи реалізації цієї можливості можуть бути абсолютно різноманітними. Це пояснюється відмінністю різних форм гібридних моделей.

Детальний огляд цих гібридних моделей представлено в цілому ряді наукових праць [4,22-25]. Проблеми розробки та вдосконалення гібридних RANS–LES моделей постійно обговорюються на різноманітних міжнародних конференціях, симпозіумах і т. п. [18, 19].

В першу чергу, до дуже поширених гібридних RANS–LES моделей слід зарахувати згаданий вище історично перший гібридний метод DES. Він був запропонований як альтернатива RANS і LES методам для розрахунку течій з великими

відривними зонами. Відомо, що RANS-моделі не здатні забезпечити прийнятну для практики точність розрахунку таких течій. LES потребує надмірно великих обчислювальних витрат, лівова частка яких пов'язана з розрахунком пристінної частини приєднаних примежових шарів, які містять енергонесучі вихори малих розмірів.

Це спонукало авторів DES [16–20] до створення такої моделі, яка функціонувала б як RANS в області приєданого примежового шару і забезпечувала цілком прийнятну точність, і як LES у відривних областях потоку, де його використання не потребує надмірно дрібних сіток. Назва методу (“моделювання від’єднаних вихорів”) підкреслює принципову відмінність DES від LES.

Таким чином, у рамках DES “точно” розрізняються лише “від’єднані” вихори, які містяться у відривній зоні. Відносно дрібні вихори, що формуються у приєданому примежовому шарі, описуються звичайними напівемпіричними RANS моделями. Ще одна важлива особливість DES полягає в тому, що в рамках цього підходу у RANS і LES областях використовується одна й та ж “базова” модель турбулентності, яка функціонує як RANS-модель усередині пристінного примежового шару і як її підсітковий аналог далеко від твердих стінок. При цьому межа між областями RANS і LES визначається в процесі розрахунку автоматично і залежить від кроків використовуваної обчислювальної сітки, від відстані від даної точки потоку до обтічної поверхні та від локальних параметрів потоку.

Інтенсивний розвиток обчислювальної аеродинаміки сприяв появі цілого ряду гібридних DES-методів [26–31]. У зв'язку з цим DES та інші аналогічні DES-подібні методи: Extra – Large Eddy Simulation або X – LES [29] і Limited Numerical Scales або LNS [30] часто не зовсім точно називають “незонними” (“non-zonal”) гібридними методами, щоб відрізнити їх від зонних гібридів, в яких RANS і LES області пропонуються з тих або інших міркувань. До таких методів належить, наприклад, зонний DES (Zonal DES або ZDES), що розвивається в дослідженні [31]), а також ряд інших зонних підходів. Цей метод має ряд переваг у порівнянні з DES, що полягають у більшій гнучкості. Проте його основний недолік – це необхідність апріорних уявлень про структуру течії, наприклад, про положення точки (лінії) відриву потоку.

Окрему групу гібридних RANS–LES методів становлять так звані моделі LES з пристінним моделюванням (Wall Modeled LES–WMLES) [32], які можуть використовуватися для розрахунку не лише відривних, але й складних приєднаних турбулентних течій. Ідея цих методів полягає у використанні RANS не в усьому пристінному примежовому шарі, як це робиться в DES, а тільки в його внутрішній області, тобто саме в тій області, на розрахунок якої припадають основні обчислювальні витрати LES. Проте спектр застосування WMLES досить широкий [4,33].

Останніми роками набув розвитку ще один підхід до RANSSLES моделювання турбулентності, що є найбільш загальною формою зонних методів і дістав назву вбудованого LES (Embedded LES), у рамках якої область LES може довільно розташовуватись усередині області RANS [34].

Це відкриває можливість використання обчислювального трудомісткого методу LES тільки в тих областях потоку, які не піддаються опису у рамках RANS, або в областях, для яких потрібно отримання інформації не лише про осереднені, але й про пульсаційні характеристики потоку. Така задача може виникнути під час розв'язування зв'язаних задач аеродинаміки та пружності, акустики

Проте для їх практичної реалізації потрібно розв'язання ряду складних фізичних проблем, пов'язаних зі “зшиванням” RANS і LES-розв'язків. Під час переходу від LES до RANS розв'язуванню необхідне забезпечення плавного пригнічення турбулентних пульсацій [35].

На сьогодні розроблено ще й так звані “безшовні” (seamless) RANS–LES гібриди, в яких обидва підходи тим або іншим чином “зважаються” і одночасно функціонують у всій розрахунковій області. Найбільш відомим із них є метод, що базується на частково осереднених рівняннях Нав’є–Стокса, – Partially Averaged Navier–Stokes або PANS [36]. Проте проблема побудови вагових функцій, що автоматично забезпечують адекватні, відповідно до локальних розмірів сітки, ваги RANS і LES моделей в даній точці потоку залишається, по суті, невирішеною. Це істотно обмежує практичне використання безшовних підходів RANS–LES.

Широкий досвід використання лінійних моделей свідчить про те, що й у наш час найбільш високий “рейтинг” серед них отримали дві моделі та їх модифікації:

– модель перенесення турбулентної в’язкості [37] (модель Спаларта–Аллараса або SA модель).

– модель перенесення кінетичної енергії турбулентності та питомої швидкості її дисипації [38, 39] – ($k - \omega$ Shear Stress Transport модель Ментера або SST модель).

Проте серед гібридних RANS–LES методів найпоширенішим залишається гібридний метод DES [16–20] та його пізніші модифікації.

Числовий розв’язок гібридним методом DES. Для розв’язування задачі з розрахунку характеристик турбулентного потоку використовується модель течії в’язкого стисливого газу, що описується осередненими за Рейнольдсом рівняннями Нав’є–Стокса. В більшості випадків розрахункова область має складну геометричну форму тому доцільно використовувати багатоблоковий підхід та криволінійну систему координат. Вихідна система осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав’є–Стокса для довільної криволінійної системи координат запишеться

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{E} - \mathcal{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\mathcal{F} - \mathcal{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\mathcal{G} - \mathcal{G}_v)}{\partial \zeta} = \mathcal{H}, \quad (1)$$

де \mathcal{G} – вектор невідомих змінних; \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} – вектори нев’язких потоків;

$\mathcal{E}_v = \xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v$, $\mathcal{F}_v = \eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v$, $\mathcal{G}_v = \zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v$ – вектори в’язких потоків; $\mathcal{H} = 1/jH$ – вектор джерельних членів.

Для замикання вихідних рівнянь обрано підхід DES [19].

Розроблено методику, алгоритм, та програмне забезпечення з використанням гібридного методу DES. Комплекс програмного забезпечення написано на мові програмування FORTRAN-95. На рис. 1 показано розподіл коефіцієнта тиску на поверхні циліндра для $Re=14000$ та порівняно з експериментальними даними [42]

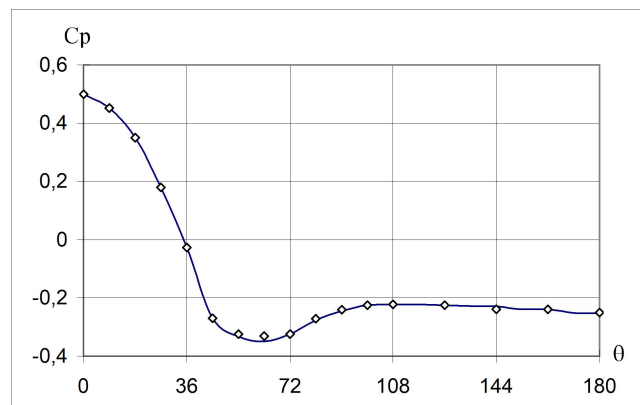


Рис.1. Розподіл коефіцієнта тиску на поверхні циліндра для $Re=14000$:
 ____ - розрахунок $Re=14000$; O- експеримент $Re =14500$ [42]

На рис. 2 показано динаміку коефіцієнта підйимальної сили для колового циліндра за часом для $Re=10000$.

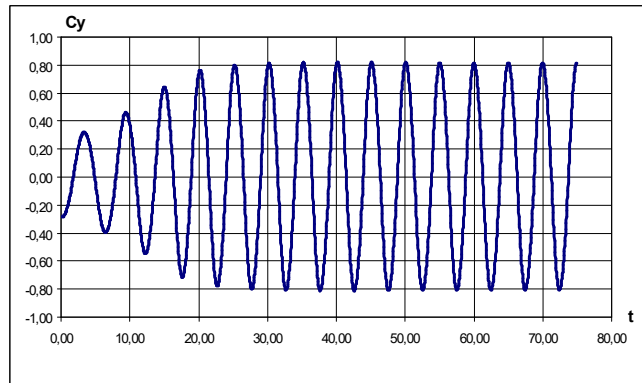
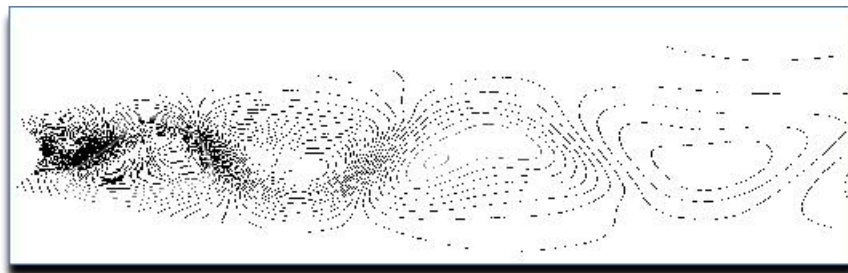
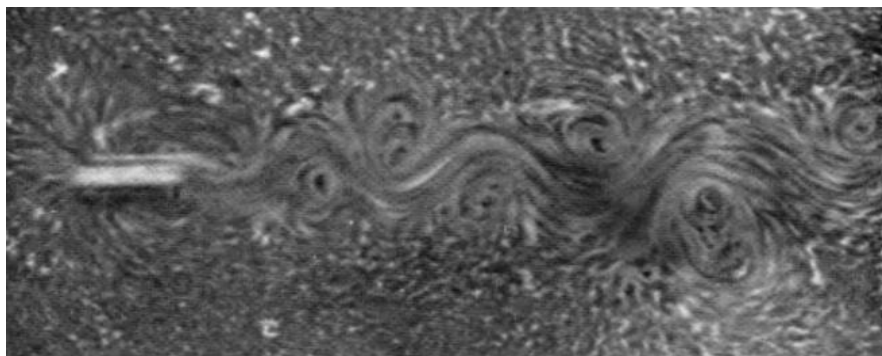


Рис. 2. Розрахунок залежності коефіцієнта підйимальної сили для колового циліндра за часом для $Re=10000$

На рис. 3 показано вихорову дорожку за коловим циліндром, отриману шляхом числового розрахунку та в експерименті [43] для $Re=19300$



a)



б)

Рис. 3. Вихорова дорожка в сліді колового циліндру:
a – розрахунок для $Re=19300$; б – експеримент для $Re=19300$ [43]

Висновки. Аналіз багаточисельних досліджень, як експериментальних так і результатів числового моделювання, показує, що локальні осереднені характеристики турбулентних течій формуються під впливом великомасштабних просторових нестационарних структур. Параметри цих структур залежать від геометрії течії та межових умов.

Дослідження показують, що «гіпотеза локальності», на якій в неявній формі базуються RANS моделі турбулентності, не виконується [41]. Це виключає можливість побудови ідеальної моделі турбулентної течії на основі універсальної RANS моделі турбулентності. Таким чином розробка методики розрахунку на основі універсальної RANS моделі турбулентності є нездійсненною.

Моделі турбулентності, що базуються на гіпотезі Буссінеска про лінійний зв'язок між тензорами рейнольдсових напружень і швидкостей деформацій, так і моделі перенесення рейнольдсових напружень мають обмежене застосування.

Проте, виходячи з аналізу сучасних досягнень у розробці методів розрахунку турбулентних течій та можливостей наявної обчислювальної техніки на найближчі десять років, основним робочим інструментом для виконання прикладних завдань аеродинаміки, пов'язаних із розрахунком турбулентних течій, залишатимуться методи, що базуються на використанні RANS у поєднанні з різними напівемпіричними моделями турбулентності та гібридні RANS–LES підходи.

Список використаних джерел

1. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Trans. Roy. Soc., 1895. P. 123–161.
2. Freund J. B., Moin P., Lele S. K. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer // Flow Physics and Computation Division. Technical Report TF-72. Stanford University, 1997.
3. Boersma B. I., Lele S. K. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. Center for Turbulence Research. Stanford University, 1999. P. 365–377.
4. Chapman G.T., Tobak M. Observations, theoretical ideas, and modeling of turbulent flows – past, present and future / *Theoretical Approaches to Turbulence (Dwoyer et al. (eds))*. New York: Springer-Verlag, 1985. P.19–49.
5. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. Turbulence and self-organization: modeling astrophysical objects. . London: Edition Publisher: Springer. 2013. 685 p.
6. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht: Kluwer Academic Publishersю. 2001. 375 p.
7. K. de Fériet J. Statistical mechanics and theoretical models of diffusion processes. *Advances in Geophysics, Volume 6*, 1959, P. 139-147
8. Belotserkovskii, O. M. Numerical experiment in turbulence: From order to chaos. *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 23, No. 5-6, 1996. P. 321–488.
9. Hinze I.J. Turbulence: An introduction to its mechanism and theory. New York: McGraw-Hill book company. 1959. 586 p.
10. Batchelor G. K An introduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge University Press. 1967. 615 p.
11. Колмогоров А. М. Локальная структура турбулентности в нестисливій рідині при дуже великих числах Рейнольдса. *Доповіди АН СРСР*. 1941. Т. 30. С. 299-303.
12. Frost W., Moulden T. Handbook of turbulence: Volume 1. Fundamentals and applications. New York: Publisher Plenum Press. 1977. 498 p.
13. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear system . *Physica*. 1978. v.70. P. 16.
14. Фрік П. Г. Турбулентність: підходи та моделі. Х.: ІКД. 2003. 292с.
15. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows.. *Flow turbulence and combustion*. 2015. 95(4). P. 709-737.
16. Spalart, P.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow [Text] / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // AIAA Paper. – 1992. – № 0112. – P. 439 – 478.

17. Spalart, P. R., On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature [Text] / P.R. Spalart, M. Shur // *Aerospace science and technology Journal*. – 1997. – Vol. 1, No 5. – P. 297–366.
18. Shur M. L. , Spalart P. R. , Strelets M. Kh., Travin A. K. Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate // *Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference, Paris, France, 9- 13 September 1996*. - Chichester: John Wiley & Sons, 1996. - P. 676-682.
19. Spalart P. R. , Jои W. H. , Strelets M. , Alaraz S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // *Proceedings 352 Список литературы of the 1 st AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana, 4-8 August 1 997*. - Louisiana Technical University, 1997. - P. 137- 148.
20. Spalart P. R. Strategies for turbulence modelling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. V. 21, No. 3. P. 252-263.
21. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. July, 2006. Pp. 181–195.
22. Sagaut P., Deck S., Terracol M. *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*, Imperial College Press, 2006. 340 p
23. Menter F. R., Schütze J., Gritskevich M. S. Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. *Hybrid RANS-LES Modelling, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2012, 117. Pp. 15–28.
24. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions, *Mechanical Engineering Reviews*, 2015, 00418.
25. Peng S.-H., Haase W., (Eds.) *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Corfu, Greece, 17–18 June 2007. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. V. 97, 2008.
26. Peng S.-H., Doerffer P., Haase W., (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Gdansk, Poland, June 2009. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. V. 111, 2010.
27. Fu S., Peng S.-H., Haase W., Schwaborn D. (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Beijing, China, September 2011. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. V. 117, 2012.
28. Girimaji S., Peng S.-H., Haase W., Schwaborn D. (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, College Station, A&M University, Texas, USA, 19–21 March 2014. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. V. 130, 2015.
29. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. Extra-large eddy simulation of massively separated flows, *AIAA Paper, AIAA-2004-0264*
30. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance, *AIAA Paper, AIAA-2000-0473*.
31. Deck S. Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES)

ОЦІНКА УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПЕРЕШКОД З ЕЛЕМЕНТАМИ УРАЖЕННЯ ДІАМЕТРОМ ДО 30 ММ

А. В. Широков, О. М. Березовський

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України

Елементи конструкцій, які працюють в екстремальних умовах потребують надійного визначення їх стійкості до ударних навантажень. Найпростішим варіантом подібної оцінки є методика полігонних випробувань, при якій зразки з досліджуваного матеріалу піддаються багаторазовому обстрілу з різних дистанцій і під потрібними кутами. Це реалізовано для стандартних калібрів набоїв до 9 мм.

Для більших елементів ураження з калібром 12 .. 30 мм проведення експериментальної оцінки ударної взаємодії є складним в першу чергу через необхідність метання з потрібною швидкістю ударника масою 20 .. 450 г. Окремо стоїть важливе питання влучання в потрібну область зразка на полігоні, що є трудомісткою задачею. Метання ж елементів ураження довільної форми унеможливується через використання штатних стволів.

Тому для розширення можливостей по оцінці ударної взаємодії перешкод з елементами ураження довільної форми діаметром до 30 мм було розроблено експериментальний стенд з балістичним маятником і методику його використання. Її суть полягає в тому, що елемент ураження довільної форми з діаметром до 30 мм і масою до 500 г розганяється в гладкій розгінній трубі пневмо-газового копра до необхідної швидкості в діапазоні 50 – 400 м/с і взаємодіє з перешкодою, яку закріплено на балістичному маятнику. Внаслідок цього маятникові передається ударний імпульс, який відхиляє його від положення рівноваги на деяку величину. Відзначимо, що плита маятника на якій кріпиться перешкода має спеціальний центральний отвір для вільного прольоту елементів ураження і уламків на випадок пробиття перешкоди. Відхилення балістичного маятника реєструється самописцем. За цим відхиленням розраховуються енергетичні втрати, що обумовлені деформуванням і руйнуванням перешкоди. Такий розрахунок базується на рівнянні балансу енергії. Це також дозволяє оцінити заперешкодну (у випадку наскрізного пробиття) швидкість елементу ураження.

Тож даний стенд дозволяє розширити межі оцінки ударної стійкості перешкод і дозволяє окрім інформації пробиття/не пробиття отримати додаткову інформацію, а саме: визначати енергію, що була затрачена на руйнування/деформацію перешкоди і розрахувати заперешкодну швидкість ударника.

ДО ОБЧИСЛЕНЬ КОЕФІЦІЄНТУ СТІЙКОСТІ ДАМБИ ХВОСТОСХОВИЩА З ВИКОРИСТАННЯМ МПА МЕТОДУ

Г.І. Ларіонов¹, В.Л. Волошко², А.І. Рябко¹

¹*Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України*

²*Дніпропетровський державний університет ім. О. Гончара, м. Дніпро, Україна*

Об'єкти хвостосховищ є одними з найбільш відповідальних компонентів геотехнічних систем. Основними структурними елементами, що забезпечують безпечну їх експлуатацію є захисні зовнішні та внутрішні дамби. Безпека функціонування дамб визначається стійкістю їх укисних систем. Параметри моніторингу об'єкту є вихідними даними для подальшого розрахунку і прогнозу стійкості комплексами програм на

основі МСЕ методів. Процедура це не проста і потребує значних затрат часу на обчислення параметрів та їх аналізу. Крім того на тепер практично відсутні загальноприйняті методи оцінки та прогнозування стану стійкості укисних систем. Як результат, однією з найактуальніших проблем є створення аналітичних процедур, які б дозволяли у оперативному режимі визначати стійкість геотехнічних укисних систем. Такі процедури відрізняються від складних деталізованих моделей зручністю використання насамперед у системах оцінювання та прогнозу на етапах попереднього проєктування та ситуативного моніторингу функціонуванні об'єктів що моделюються. Системи управління станом дамби дозволяють у оперативному режимі оцінювати рішення, щодо його режимів функціонування та напрямів розвитку об'єктів що розглядаються. Управління геотехнічними показниками стійкості дамб дозволяє здійснювати регулювання рівня комплексної техногенної та екологічної безпеки хвостосховищ [1].

У даному дослідженні у якості об'єкта дослідження розглядається внутрішня дамба хвостосховища. Більшість сучасних моделей дотичних до визначення механічної стійкості геотехнічних споруд засновані на системах рівнянь часткових похідних отриманих на основі теорії суцільного середовища та теорії твердого деформованого тіла. Системи комп'ютерного моделювання, як правило, отримують рішення подібних моделей за допомогою чисельних методів і зокрема МСЕ. Результатом рішення є поля векторів числових значень. Виникає задача аналізу та інтерпретації отриманих даних. Найбільш зручним вирішенням є побудова аналітичних формул, отриманих на базі існуючих МСЕ моделей. Треба відзначити, що подібний підхід можливий для використання, як у різних сферах досліджень, так і на множині різнорідних чисельних і аналітичних моделей та методів їх побудови і синтезу.

Метод послідовних апроксимацій (МПА) дозволяє отримувати апроксимацію функції якості у околі точки із області її визначення у мультиплікативному вигляді. Функція якості, у даному випадку, це функція стійкості $K_{st} = f(\alpha_s, a, b, h, \gamma, \theta, c, E)$, де K_{st} - коефіцієнт стійкості дамби; α_s - кут укосу, град; a - ширина берми, м; b - ширина укосу, м; h - висота дамби, γ - питома вага порід масиву дамби, кН/м³; θ - кут внутрішнього тертя, град.; c - зчеплення у масиві, кПа; E - модуль Юнга, кПа.

Для оперативної форми застосування представлення функції стійкості у околі точки у мультиплікативній формі у якості функцій добутку обрано степеневі функції [2]. Аналіз показників степенів дозволяє у оперативному режимі визначати чутливість до зміни параметрів дамби на її стійкість. Відносна похибка такого представлення складає 5%-7% , що є достатнім для оперативного прийняття рішень стосовно стану дамби. Так в статті [2] для оперативного визначення чутливості впливу конструктивних параметрів дамби хвостосховища на її стійкість замість використання теорії чутливості використали апроксимацію критерію стійкості. Апроксимацію обраного критерію здійснювали у мультиплікативному вигляді де складові добутку є степеневі функції, кожна з яких залежить лише від одного параметру, то ж за показниками степеню можна наближено встановити чутливість його до варіації параметрів. Чим більший показник степеню, тим більший вплив на критерій має той параметр. Таким чином можна не тільки здійснити наближену оцінку впливу параметрів на сам критерій, але й зробити висновки стосовно ризику виходу системи за допустимі межі. Похибки такого підходу, як правило, не перевищують величини 5-7%, що є достатнім для більшості прикладних задач геомеханіки.

Для підвищення точності визначення критерію або функції стійкості існує два шляхи. Перший полягає у звуження області його визначення, тобто інтервалів зміни параметрів, що не завжди є зручним. Другий підхід базується на тому, що оскільки обмежень на вибір функцій, окрім того, що вони належать до класу елементарних, не

виявлено, то для зниження похибок скористались іншими більш зручними функціями. В даній роботі зроблено спробу зниження похибок за рахунок використання більш універсальних функцій, а саме поліноміальних. Результати порівняння похибок за використання степеневих і поліноміальних функцій отримані в роботі.

Таким чином, об'єктом дослідження задачі є підвищення точності визначення коефіцієнту стійкості дамби хвостосховища шляхом використання поліноміальних функцій добутку під дією гідростатичного навантаження дамби (рис. 1). Задача вирішувалась у плоско-деформованій постановці [2].

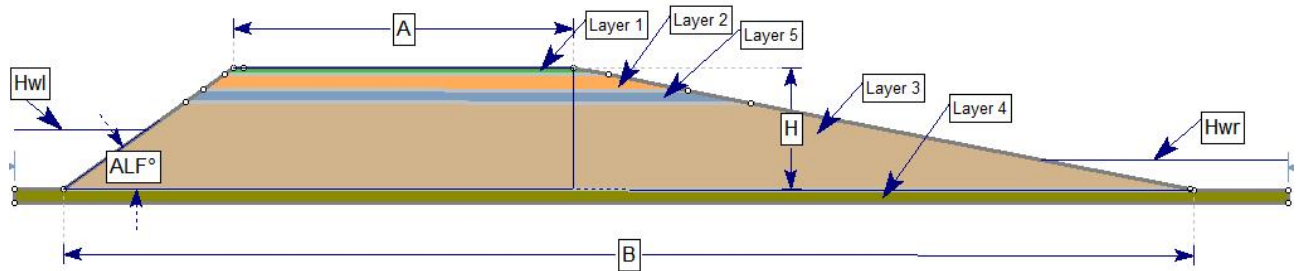


Рис.1 Схема модельного об'єкту

На рис.1: $H_{wl}=7$ - рівень води ліворуч, м; $H_{wr}=4$ - рівень води праворуч, м.; $A=a$; $ALF = \alpha_s$; $H=h$; $B=b$; Layer i – шар i -ї породи масиву.

Вираз для визначення величини коефіцієнта стійкості дамби за використання степеневих функцій наведено у формулі (1) нижче:

$$K_{st} = K(\alpha_s, a, b, h, \gamma, \theta, c, E) = \alpha \frac{b^{0.12087} \theta^{0.48} c^{0.5328} E^{0.0074}}{\alpha_s^{0.61557} a^{0.0054} h^{0.92166} \gamma^{0.6685}}, \quad (1)$$

де α – коефіцієнт апроксимації, визначається у відповідності до формули наведеної в [2]. Для обраної базової точки $\alpha = 30.7622$.

Отримані поліноміальні функції добутку у мультиплікативній формі, а саме:

$$\begin{aligned} w_1(\alpha_s) &= 5.63248 - 0.222279 \alpha_s + 0.00429827 \alpha_s^2 - 0.0000297105 \alpha_s^3 \\ w_1(a) &= 2.13645 - 0.000196421 a - 0.0000197858 a^2 + 2.85817 \cdot 10^{-7} a^3 \\ w_1(b) &= 0.577756 + 0.0343038 b - 0.000294369 b^2 + 8.42777 \cdot 10^{-7} b^3 \\ w_1(h) &= 4.06106 - 0.247089 h + 0.00623138 h^2 - 0.0000548106 h^3 \\ w_1(\gamma) &= 5.77215 - 0.359482 \gamma + 0.0113456 \gamma^2 - 0.000134525 \gamma^3 \\ w_1(\theta) &= 1.47998 + 0.02494 \theta + 0.00140924 \theta^2 - 0.0000163722 \theta^3 \\ w_1(c) &= 0.924041 + 0.0537487 c - 0.000187034 c^2 + 2.0519 \cdot 10^{-6} c^3 \\ w_1(E) &= 2.12089 + 7.48323 \cdot 10^{-7} E + 3.37453 \cdot 10^{-11} E^2 - 9.32836 \cdot 10^{-16} E^3 \end{aligned} \quad (2)$$

Де коефіцієнт апроксимації приймає значення $A = 0.00670432$.

Таке представлення функції стійкості дамби показало, що величина відносних похибок не перевищувала 3%. Виконане порівняння відносних похибок отриманих за формулами (1) та (2).

Висновки

1. Запропонована формула (2) дозволяє наближено, проте з більшою точністю, оцінювати ризики втрати стійкості від зміни значень параметрів.
2. Встановлено, що з єдиних позицій можна отримувати аналітичні формули, як для оцінки чутливості функції стійкості, так, і для отримання її значень з більшою точністю.

1. Рябко, А. І. (2024). Визначення модельних функціональних залежностей оптимізації та управління екобезпекою укисних споруд хвостосховищ. Виклики та

проблеми сучасної науки, 2, 461–466. <https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/143>. (Дата звернення: 19.01.2026).

2. Babii, K., Larionov, H., Ryabko, A., Novorukha, O., & Zhelyazov, T. (2025). Developing a multiplicative mathematical model for geomechanical stability of tailings dams by successive approximation method. *Geotech. Meh.*, 175, 38–53. <https://doi.org/10.15407/geotm2025.175.038>

МАГНІТОПЛАЗМОВИЙ ДЕОРБІТІНГ «КОСМІЧНОГО СМІТТЯ» В ІОНОСФЕРІ ЗЕМЛІ

**Кучугурний Ю. П., Носіков С. В., Пранник С. В., Різниченко М. П.,
Чумаченко І. М.**

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України

З подальшим освоєнням космічного простору проблема засмічення космічного простору приймає все більш загрозливі масштаби: на низьких навколосемних орбітах (висотою до 1000 км) перебуває більше 35000 об'єктів космічного сміття (ОКС) розмірами більш 10 см (по даним 2024 року). Вирішення проблеми очищення навколосемного простору від ОКС та запобігання забруднення є пріоритетним напрямком у дослідженнях провідних аерокосмічних країн світу, питанням присвячується увага ООН і міжнародних науково-технічних організацій.

Способи очищення навколосемного простору від ОКС, що розробляються у світі, полягають в зведенні ОКС з орбіт («деорбітінг») для спрямування їх у густі шари атмосфери і згоряння завдяки аеродинамічному гальмуванню. Середовище в навколосемному просторі на низьких і наднизьких орбітах – в іоносфері – це слабоіонізована розріджена плазма, в якій аеродинамічний опір при русі тіла навіть з характерними орбітальними швидкостями (порядку 8 км/с) дуже малий. Мета даної роботи – обґрунтувати принципи додаткового гальмування ОКС завдяки електромагнітній взаємодії джерела магнітного поля, встановленого на ОКС, з іоносферною плазмою, а також розробка можливих прототипів таких бортових джерел поля. Пропонується створювати бортові джерела поля на основі сучасних постійних магнітів з неодимових сплавів; такі практично енергонезалежні джерела магнітного поля стабільні, не втрачають властивості протягом десятків років і достатньо дешеві. Розглядаються ОКС достатньо великих розмірів – це космічні апарати (КА), час активного функціонування яких скінчився або які вийшли з ладу через аварії, ступені ракет-носіїв і т. п. На таких об'єктах на стадії створення мають бути розміщені бортові джерела магнітного поля, які дочасно перебувають у заекранованому «сплячому» режимі.

Силова взаємодія джерела магнітного поля з високошвидкісним (надзвуковим) потоком розрідженої плазми включає декілька взаємопов'язаних процесів, основаних на виникненні сили Лоренца при русі заряджених частинок в магнітному полі, перш за все взаємодією з іонами плазми. При обтіканні плазмою джерела поля в потоці плазми, через її електропровідність, генеруються кільцеві електричні струми. Основна компонента сили електромагнітного опору виникає, відповідно до закону Ленца, при взаємодії магнітних полів цих струмів з полем джерела. Для збільшення сили опору індукція магнітного поля має бути якомога вищою безпосередньо біля поверхні, що контактує з плазмою. В дальній зоні діє інший механізм гальмування: в магнітному полі формується міні-магнітосфера – структура, яка подібна до плазмового оточення планет з власним магнітним полем у потоці «сонячного вітру», а також безіткульна ударна хвиля. При проходженні цих магнітогідродинамічних структурних елементів

іони плазми змінюють свої траєкторії, відповідно змінюються їх імпульси; зворотну по знаку зміну імпульсу отримує і джерело поля. Цей вклад у силу опору слабший, але його роль зростає зі зменшенням густини плазми. Розділення частинок із зарядами різних знаків і бомбардування поверхонь електронами плазми призводить зарядження поверхонь і до виникнення кулонівських сил.

Вважаючи на відзначені механізми взаємодії тіла з власним магнітним полем – ОКС чи КА з бортовим джерелом поля, – було проведено розробки моделей джерел магнітного поля і експериментальні дослідження сил опору при обтіканні потоком плазми. Дослідження проводились на плазмоелектродинамічному стенді Інституту технічної механіки. Було створено декілька моделей джерел поля. Неодимові постійні магніти найсильніші з існуючих, але індукція поля на полюсних поверхнях все ж обмежена і складає не більше 0,5 Тл – 0,7 Тл для магнітів всіх розмірів і форм. Для збільшення поля було застосовано конструкції на основі схеми хрестоподібної збірки Халбаха – це несиметричне джерело магнітного поля, біля однієї полюсної поверхні поля його структурних елементів збірки складаються, біля іншої – взаємно гасяться. Для підсилення ефекту збірки доповнювались додатковими структурними елементами – спеціально орієнтованими неодимовими магнітами кубічної форми. Розроблено магнітні системи (збірки «5», «13», «25», «33») для прототипів бортового джерела власного постійного магнітного поля.

Експериментально показано, що структуру поля течії, зони збурення при обтіканні моделей різної геометричної форми з магнітними елементами визначає просторовий розподіл індукції магнітного поля. Аеродинамічна сила опору в потоці розрідженої плазми кратна кількості структурних магнітних елементів. Отримані кількісні оцінки залежності електромагнітної сили опору від магнітного моменту джерела магнітного поля і густини заряджених частинок в потоці плазми.

Для оцінки ефективності магнітоплазмового деорбітінгу ОКС у іоносфері було проведено розрахунки темпів зниження ОКС різних мас – 10 кг, 100 кг, 1000 кг і 2500 кг – з високої початкової орбіти – в межах низьких навколосеземних орбіт висотою до 1000 км – на орбіту висотою 100 км.

Таким чином, експериментально обґрунтовано, що магнітоплазмовий деорбітінг є ефективним способом примусового гальмування ОКС в іоносфері і відведення його на низькі орбіти для послідуєчого згоряння в атмосфері Землі.

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА ЛЮДИНИ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ НА ОСНОВІ ДАНИХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Д. В. Горобець, М. Б. Соболевська

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України

На теперішній час безальтернативним способом хірургічного лікування хворих із важкими дегенеративно-дистрофічними ураженнями кульшових суглобів є ендопротезування. Сучасними тенденціями в ендопротезуванні кульшового суглоба є розробка нових конструкцій ендопротезів на основі результатів біомеханічних досліджень стабільності фіксації ацетабулярних компонентів; удосконалення способів фіксації компонентів ендопротеза; розвиток технологій створення індивідуального ендопротеза шляхом побудови віртуальних 3D моделей тазових кісток з використанням результатів томографічних досліджень, що дозволяють визначити зосередження та

розміри кісткових пошкоджень, оцінити якість кісткових тканин та розробити персональну ацетабулярну систему з урахуванням особливостей її фіксації.

Метою даних досліджень є розробка на основі даних комп'ютерної томографії скінченно-елементних моделей для оцінки напружено-деформованого стану (НДС) елементів кульшового суглоба до та після тотального ендопротезування при експлуатаційних навантаженнях. Розроблено алгоритм побудови геометричної моделі кульшового суглоба людини з використанням даних комп'ютерної томографії. За цим алгоритмом побудовано 3D геометричну модель, яка включає крижову кістку хребтового стовпа, клубову, сідничу, лобову кістки, кульшову западину на бічній поверхні тазової кістки та головку стегнової кістки кульшового суглоба. Розроблено скінченно-елементну модель 1 для дослідження НДС елементів здорового кульшового суглоба при статичних навантаженнях і дано оцінку міцності його елементів. Показано, що значення максимальних еквівалентних напружень як в субхондральній, так і в спонгіозній тканинах в зоні контактної взаємодії головки стегнової кістки з вертлюжною западиною дорівнюють відповідно 5 МПа та 0,3 МПа, що значно нижче допустимих напружень. Розроблено скінченно-елементні моделі 2 – 4 для оцінки НДС елементів кульшового суглоба на різних стадіях після операції тотального ендопротезування з використанням безцементного ацетабулярного компонента, запресованого у вертлюжну западину, яка дефектів немає. Моделі 2 і 3 призначено для дослідження НДС елементів кульшового суглоба на початковій стадії після операції з урахуванням відповідно присутності або відсутності на дні вертлюжної западини фрагментів субхондральної тканини. Модель 4 призначена для аналізу НДС елементів кульшового суглоба на стадії повного загоєння після встановлення ендопротеза. Встановлено, що наявність фрагментів субхондральної тканини на дні вертлюжної западини є кращим варіантом ніж їх відсутність з точки зору менших напружень в елементах субхондральної тканини при стоянні людини на двох ногах на початковій стадії після операції. Показано, що на стадії повного відновлення після операції НДС елементів кісткових тканин кульшового суглоба при розглянутому навантаженні наближається до НДС здорового суглоба.

Ключові слова: кульшовий суглоб людини, комп'ютерна томографія, скінченно-елементне моделювання, напружено-деформований стан, ендопротезування.

СПРОЩЕНИЙ АЛГОРИТМ СТАБІЛІЗАЦІЇ ОБЕРТАННЯ РОТОРА ДАР'Є ЗМІННОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

С.В. Тарасов, О.Н. Молотков

Інститут транспортних систем та технологій НАН України, Україна

В роботі розглядається двоканальна система стабілізації обертання ротора Дар'є вертикально-осьової вітроенергетичної установки (ВЕУ), керованого сумісними змінами довжини лопатей і траверс, яка описується системою лінійних диференціальних рівнянь [1,2]

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_h}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H - \Delta\omega_h)/T, & \frac{d\Delta H}{dt} &= K_{1h} \Delta\omega_h + K_{2h} \frac{d\Delta\omega_h}{dt}, \\ \frac{d\Delta\omega_r}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2r}\Delta R - \Delta\omega_r)/T, & \frac{d\Delta R}{dt} &= K_{1r} \Delta\omega_r + K_{2r} \frac{d\Delta\omega_r}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_h + \Delta\omega_r,$$

де $\Delta\omega$ – результуюче відхилення швидкості обертів ротора ω від сталого значення ω_0 ; $\Delta\omega_h$, $\Delta\omega_r$ – відхилення від сталих значень швидкості обертів ротора в каналах стабілізації, що керуються змінами довжини лопатей та траверс відповідно; $\Delta V = 1(t)$ – довготривалі зміни швидкості вітру; ΔH , ΔR – зміни довжини лопатей та траверс відповідно; T , k_1 , k_{2h} , k_{2r} – додатні коефіцієнти лінеаризації, обчислені за конструктивними параметрами ротора ВЕУ та умовам його роботи; K_{1h} , K_{2h} , K_{1r} , K_{2r} – від’ємні коефіцієнти зворотних зв’язків в каналах стабілізації.

В зазначених умовах реалізація роботи повністю незалежних каналів стабілізації потребує роздільного виміру відхилень кутових швидкостей $\Delta\omega_h$ і $\Delta\omega_r$ та їх похідних, а також використання різних коефіцієнтів зворотних зв’язків в каналах стабілізації. Фізично в системі існує і може бути виміряне лише результуюче сумарне відхилення $\Delta\omega$, виділення з якого відхилень кутових швидкостей $\Delta\omega_h$ і $\Delta\omega_r$ та їх похідних не представляється можливим в силу лінійності системи (1). Використання різних коефіцієнтів зворотних зв’язків в повністю подібних з динамічної точки зору каналах стабілізації також представляється невиправданою ускладненістю. Тому відмовимося від незалежності каналів стабілізації, а саме припустимо, що вимірюється тільки результуюче відхилення кутової швидкості $\Delta\omega$, однойменні коефіцієнти зворотних зв’язків в каналах стабілізації однакові, виміри похідних швидкості обертів ротору замінимо на праву частину відповідного рівняння динаміки – першого та третього рівнянь системи (1), в яких $\Delta\omega_h$ і $\Delta\omega_r$ замінимо на $\Delta\omega$. Тоді спрощений алгоритм стабілізації швидкості обертів ротора змінної конфігурації буде:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\omega}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H + k_{2r}\Delta R - \Delta\omega) / T, \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= K_1 \Delta\omega + K_2(k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H - \Delta\omega) / T, \\ \frac{d\Delta R}{dt} &= K_1 \Delta\omega + K_2(k_1\Delta V + k_{2r}\Delta R - \Delta\omega) / T.\end{aligned}\quad (2)$$

Відповідно до значень коефіцієнтів системи (2) та необхідних і достатніх умов стійкості Вишнеградського спрощена система стійка, тобто має обмежені кінцеві значення

$$\Delta\omega = \frac{k_1 K_2}{K_2 - 2K_1 T} \Delta V, \quad \Delta H = \frac{k_1 K_1 T}{k_{2h}} \Delta V, \quad \Delta R = \frac{k_1 K_1 T}{k_{2r}} \Delta V,$$

має статичну помилку регулювання за змінною $\Delta\omega$, що не бажано з точки зору якості регулювання.

Скоригуємо алгоритм (2) для чого введемо в друге та третє рівняння системи (2) додатні ваги γ_1 , γ_2

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\omega}{dt} &= (k_1\Delta V + k_{2h}\Delta H + k_{2r}\Delta R - \Delta\omega) / T, \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= (k_{2h} K_2 \Delta H + ((K_1 T - K_2)\Delta\omega + k_1 K_2 \Delta V) \gamma_1) / T, \\ \frac{d\Delta R}{dt} &= (k_{2r} K_2 \Delta R + ((K_1 T - K_2)\Delta\omega + k_1 K_2 \Delta V) \gamma_2) / T,\end{aligned}$$

що не змінюють властивості стійкості системи, та обчислимо її кінцеві значення

$$\Delta\omega = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) K_2}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2) K_1 T} k_1 \Delta V,$$

$$\Delta H = \frac{K_1 T}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)K_1 T} \gamma_1 \frac{k_1}{k_{2h}} \Delta V, \quad (3)$$

$$\Delta R = \frac{K_1 T}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)K_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)K_1 T} \gamma_2 \frac{k_1}{k_{2r}} \Delta V.$$

Кінцеве значення $\Delta\omega$ стає нульовим у двох випадках: при $K_2 = 0$ та при $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. В першому випадку суттєво погіршиться якість регулювання в зв'язку із тим, що система втрачає регулювання за похідною від $\Delta\omega$. Другий випадок перетворює співвідношення (3) на

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta H = -\gamma_1 \frac{k_1}{k_{2h}} \Delta V, \quad \Delta R = -\gamma_2 \frac{k_1}{k_{2r}} \Delta V,$$

зберігає регулювання за координатою і за її похідною і гарантує відсутність статичної помилки регулювання. Довільні значення γ_1 і γ_2 з інтервалу $[0,1]$ дозволяють розподіляти навантаження на канали стабілізації в будь-якому співвідношенні, значення $\gamma_1 = 0$ відповідає керуванню змінами тільки довжини траверс, $\gamma_1 = 1$ – керуванню змінами тільки довжини лопатей.

Висновки

Запропоновано спрощений алгоритм стабілізації обертання ротору Дар'є вертикально-осьової ВЕУ, керованого змінами довжини лопатей і траверс, визначені умови забезпечення відсутності статичної помилки регулювання замкнутої системи стабілізації із спрощеним алгоритмом.

Список літератури

1.Тарасов С. В., Молотков О. Н. Алгоритми стабілізації швидкості обертів ротора Дар'є вітроенергетичної установки, керованого змінами довжини лопатей / С. В. Тарасов, О. Н. Молотков. Технічна механіка, 2023, № 4, с. 50 – 59. <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.050>.

2.Тарасов С. В., Молотков О. Н. Модель динаміки ротора Дар'є, керованого змінами довжини траверс. Матеріали 15-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування» (СЕУТТОО-2024) 13–15 березня 2024 р. 36. наук. праць. Херсон: Херсонська державна морська академія. 2024. С. 224–226.

МЕХАНІЗМ УТВОРЕННЯ ТА РОЗВИТКУ МІКРОТРИЩИН У БЕТОНІ

К.М. Мішук, В.А. Кузнєцов

*Інженерний навчально-науковий інститут ім. Ю.М. Потєбні
Запорізький національний університет*

Бетон є основним конструкційним матеріалом у промисловому та цивільному будівництві завдяки своїм особливостям: висока міцність на стиск, довговічність, морозостійкість та стійкість до різних агресивних середовищ тощо. Однак, попри це, бетон характеризується низькою міцністю на розтяг та схильністю до поступового руйнування, що, в свою чергу, обумовлює формування мікротріщин. З огляду цього, дослідження процесу утворення та розвитку мікротріщин у бетоні є досить актуальним аспектом, особливо враховуючи сучасні вимоги щодо довговічності, надійності та безпеки будівельних конструкцій.

Бетон – це композиційний каменеподібний будівельний матеріал, який складається з 3 основних компонентів: цементу (служить сполучним компонентом та забезпечує міцність і стійкість матеріалу), піску (виконує роль заповнювача простору між великими частинками щебеню та покращує оброблюваність бетонної суміші) та щебеню (забезпечує міцність і структурну стійкість бетону, при цьому розміри частинок можуть змінюватись в залежності від конкретних вимог до бетону), які об'єднані разом за допомогою води, яка в процесі гідратації активує хімічну реакцію та, за правильних пропорцій, дозволяє досягти потрібної міцності й консистенції бетону. Також залежно від конкретних вимог та призначення, до бетону можуть додаватися різні добавки (пластифікатори, прискорювачі схоплювання) для покращення його властивостей, наприклад, морозостійкість, водонепроникність або оброблюваність тощо (Рис. 1) [1].

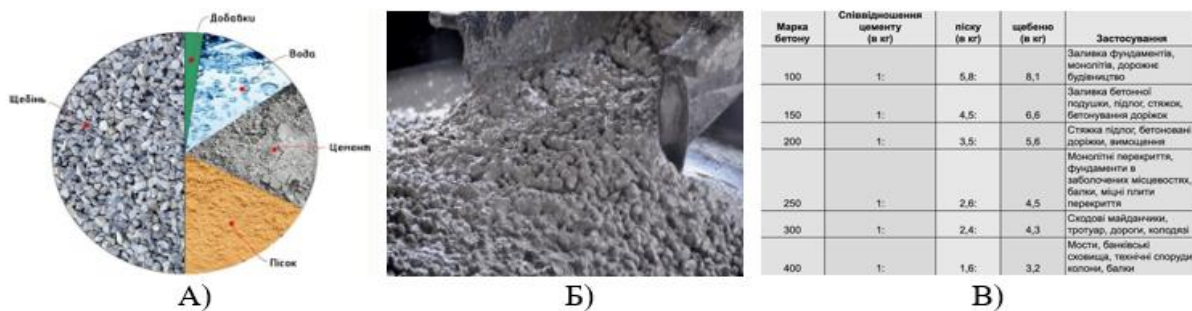


Рисунок 1. А) Компоненти бетону; Б) Загальний вигляд бетону; В) Використання бетону залежно від марки

Загалом, варто зауважити, що структура бетону, незалежно від його виду та експлуатаційного призначення, є багаторівневою – від нано- та мікрорівня (гідратаційні сполуки) до макрорівня (зерна заповнювача). Зокрема, саме така неоднорідна система зумовлює появу локальних напружень, які, в свою чергу, призводять до формування мікротріщин у бетоні навіть при незначних навантаженнях.

«Мікротріщини» – це термін, який використовується для опису мереж тріщин у бетоні, які настільки малі, що їх не видно без особливого збільшення. Мікротріщини виникають як нормальний побічний ефект гідратації цементу, спричинений значними змінами структурних якостей складових, внаслідок великих стискаючих навантажень та внаслідок руху, спричиненого термічними зрушеннями або усадкою [2]. Загалом, на ранніх етапах формування, мікротріщини критично не впливають на структурну цілісність та несучу здатність матеріалу, однак вони виступають початковою стадією руйнування бетону та визначають довговічність бетонних конструкцій.

Основні механізми мікротріщиноутворення у бетоні:

- Усадка бетону. Висихання бетонних деталей має структурні наслідки: диференціальна усадка при висиханні викликає самозрівноважені напруження, що призводять до формування мікротріщин на поверхні. Крім того, стискається лише цементна паста, тому деформація стримується заповнювачами, що призводить до розшарування на межі цементної паста/заповнювача (формується кільцеві тріщини) та до розвитку міжзеренних тріщин (формується радіальні тріщини) [3].

- Несумісність деформацій між компонентами. Деформаційна несумісність між заповнювачами та розчином зумовлює виникнення внутрішніх взаємодіючих напружень, що служать однією з основних причин утворення мікротріщин в бетоні. Тому, наприклад, вапняковий заповнювач відіграє суттєву роль в утворенні мікротріщин у відповідному бетоні, оскільки висока крихкість вапняку в поєднанні зі збільшеною міцністю зв'язку між цим заповнювачем і цементною пастою зменшує розбіжності в міцності та жорсткості між компонентами бетонної матриці, тому, з

огляду цього, ймовірність утворення тріщин, що перетинають заповнювачі, буде вищою, що робить поширення або взаємозв'язок тріщин більш прямим і легким [4].

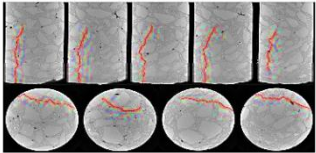
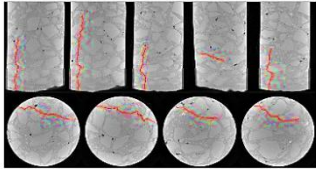
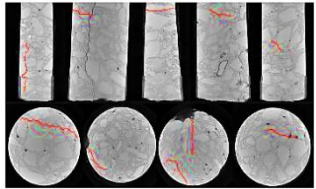
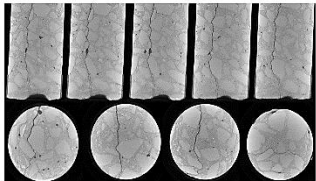
- Температурні впливи. Високий вміст цементу на одиницю об'єму та використання дрібніших цементів збільшують як початкову швидкість, так і загальну виділену теплоту гідратації, що може призвести до збільшення градієнтів температури всередині бетону. Різке теплове розширення складових бетону може створювати напруження та розтріскування, які негативно впливатиме на механічні властивості та довговічність бетону. Ці напруження виникають на ранніх стадіях гідратації бетону, коли він більш вразливий до розтріскування [5].

- Вплив механічних навантажень. Руйнування бетону при стиску локалізоване, оскільки мікротріщиноутворення виникає та поширюється з потенційно ослаблених ділянок. Тому довжина області руйнування в основному завжди однакова, навіть якщо висота зразка змінюється, тоді як її довжина може змінюватися через різницю властивостей матеріалу, таких як максимальний діаметр заповнювача [6].

- Вплив вологи та циклів «замерзання-відтавання». У бетоні виникають два типи пошкоджень під час циклів «замерзання-відтавання»: 1) чисте морозне пучення (внутрішнє пошкодження без дефектів поверхні); 2) поверхнєве лущення та зовнішні пошкодження (утворення мікротріщин від поверхневого льоду до бетонного блоку). Збільшення кількості циклів «замерзання-відтавання» призводить до збільшення кількості мікротріщин у межах перехідної контактної зони, причому їх більшість розташована поблизу заповнювача. Також варто зазначити, що зі збільшенням циклів «замерзання-відтавання» мікротріщини поширюються в цементній матриці та зрештою сходяться в одному місці з багатьох напрямків, тим самим пошкоджуючи бетон [7].

У Таблиці 1 наведено класифікацію утворених мікро- та макротріщин бетону.

Таблиця 1. Класифікація мікро- та макротріщин бетону

№ п/п	Тип тріщини	Характеристика тріщини	Ілюстрація
1	2	3	4
1	Мікротріщина I типу	Тріщини розвинулися повністю вздовж контуру крупних заповнювачів	
2	Мікротріщина II типу	Тріщини розвинулися вздовж контурів грубих заповнювачів. Сформовані області, де виступи прорізали кути грубих заповнювачів	
3	Мікротріщина III типу	Тріщини розвинулися вздовж контурів грубих заповнювачів. Сформовані області, де тріщина прорізала центр грубих заповнювачів	
4	Тріщина I типу	Напрямок розвитку тріщини повністю відповідав контуру крупних заповнювачів. Тріщини були відносно тонкими	

5	Тріщина II типу	Напрямок розвитку тріщин в основному вздовж контуру крупного заповнювача. Сформовані області, де тріщини прорізали кут крупного заповнювача. Тріщини були відносно тонкими	
6	Тріщина III типу	Напрямок розвитку тріщин не повністю відповідав контуру крупного заповнювача. Тріщини безпосередньо прорізали центр крупного заповнювача. Тріщини були товстішими	
7	Тріщина IV типу	Розвиток тріщини слідував контурам грубих заповнювачів, створивши області скупчення дрібних заповнювачів. Фрагментація значною мірою мала форму смуг або блоків	

Складено авторами на основі [8]

Утворення мікротріщин обумовлює формування макротріщин, які є причиною руйнування бетону. Механізм розвитку мікротріщин можна поділити на три етапи [6]:

1) I етап: локальна концентрація напружень; формування дефектів у межах перехідної контактної зони; виникнення мікротріщин.

2) II етап: поширення мікротріщин під дією повторних навантажень; взаємодія із сусідніми мікротріщинами; формування мікротріщинних кластерів.

3) III етап: об'єднання мікротріщин та мікротріщинних кластерів; формування макротріщин; втрата цілісності бетону.

З огляду того, що на процес мікротріщиноутворення бетону впливає значна кількість факторів, зокрема, водоцементне співвідношення, тип та розмір заповнювача, швидкість висихання, температурно-вологісний режим, режим навантаження, пористість матеріалу, наявність добавок тощо, варто зазначити, що утворені мікротріщини значною мірою впливають на властивості бетону, зокрема, зменшують його довговічність, знижують надійність та морозостійкість, прискорюють корозію арматури, збільшують проникність та скорочують термін служби загалом.

Підсумовуючи, варто зазначити, що формування мікротріщин у бетоні – це результат взаємодії фізико-хімічних, механічних та температурно-вологісних процесів, які показують себе по-різному, оскільки бетон володіє неоднорідністю та певною несумісною деформацією його структурних компонентів. При цьому, мікротріщини утворюються ще на ранніх етапах твердіння бетону та розвиваються в процесі його експлуатації, порушуючи тим самим структурну цілісність та знижуючи довговічність бетонних конструкцій загалом.

Список використаних джерел:

1. З чого роблять бетон. *База будівельних матеріалів PL2T. Будматеріали оптом у Києві та області*. URL: <https://pl2t.com/uk/blog/post/z-cogo-roblat-beton/> (дата звернення: 05.02.2026)

2. Exploring Microcracking in Cement. *AZoBuild*. URL: <https://www.azobuild.com/article.aspx?ArticleID=8396> (дата звернення: 05.02.2026)

3. Analysis of microcracking induced by differential drying shrinkage / C. de Sa et al. *Cement and Concrete Composites*. 2008. Vol. 30, no. 10. P. 947–956. URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0958946508000814> (дата звернення: 05.02.2026)

4. Cong D. B., Nakarai K., Nishikawa H. Effects of early-age thermal microcracking on material properties and structural performance of limestone aggregate concrete. *Cement and Concrete Composites*. 2021. P. 104267. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0958946521003358> (дата звернення: 05.02.2026)

5. Zunino F., Castro J., Lopez M. Thermo-mechanical assessment of concrete microcracking damage due to early-age temperature rise. *Construction and Building Materials*. 2015. Vol. 81. P. 140–153. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0950061815001488> (дата звернення: 05.02.2026)

6. Miura T., Sato K., Nakamura H. The role of microcracking on the compressive strength and stiffness of cracked concrete with different crack widths and angles evaluated by DIC. *Cement and Concrete Composites*. 2020. Vol. 114. P. 103768. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0958946520302742> (дата звернення: 05.02.2026)

7. Microscopic Deterioration Mechanism and Different Reinforcement Methods of Concrete Under Freeze–Thaw Environment: A Review / W. Niu et al. *Processes*. 2025. Vol. 13, no. 12. P. 4064. URL: <https://www.mdpi.com/2227-9717/13/12/4064> (дата звернення: 05.02.2026)

8. The Classification and Mechanism of Microcrack Homogenization Research in Cement Concrete Based on X-ray CT. *Buildings*. 2022. Vol. 12, no. 7. P. 1011. URL: <https://www.mdpi.com/2075-5309/12/7/1011> (дата звернення: 05.02.2026)

COMPARATIVE EVALUATION OF METHODS FOR MODELING FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS IN STATIC FINITE ELEMENT ANALYSIS USING ANSYS

H.O. Levytskyi, S.O. Chernetskyi

Oles Honchar Dnipro National University

Numerical analysis of the stress-strain state (SSS) in functionally graded material (FGM) structures generally follows two methodological approaches: using homogeneous finite elements or graded finite elements. In the former, multilayer models are constructed by assigning distinct material properties to individual layers or subdomains. Spatial variation is introduced via nodal coordinates, often by applying a fictitious temperature field. In the latter, graded finite elements are employed, where material properties are defined directly at the Gauss integration points [1, 2].

ANSYS offers several options for modeling the mechanical characteristics of FGMs, depending on the computational environment — Mechanical APDL or Workbench. In Workbench, material gradation is typically represented by assigning discrete materials to specific layers or geometric regions. Conversely, Mechanical APDL allows material properties to be defined as explicit functions of spatial coordinates via APDL commands, enabling a more direct implementation of continuous gradients.

This study evaluates the effectiveness of these two approaches using benchmark SSS problems with known analytical solutions, allowing for a quantitative assessment of both accuracy and computational performance.

References

1. Rousseau, C.E.; Tippur, H.V. *Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient*. Acta Materialia, 2000, 48, 4021–4033.
2. Santare, M.H.; Lambros, J. *Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials*. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67, 819–822.

ТЕЧІЯ ГАЗУ В УКОРОЧЕНИХ СОПЛАХ ІЗ ДЗВОНОПОДІБНИМ НАСАДКОМ

Г.О. Стрельников, Н.С. Прядко, М.О. Катренко

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України

В даний час при вирішенні нових завдань розробники сопла для ракетного двигуна все частіше звертаються до нетрадиційних конфігурацій, що відрізняються від класичного сопла Лавалю. При проектуванні нових ракет, що застосовуються для умов жорстких габаритних обмежень (щільних компоновок літальних апаратів), особливий інтерес становлять сопла зі стисненим контуром надзвукової частини. Зокрема, це може бути укорочене сопло Лавалю з дзвоноподібним насадком, близьким по конфігурації з конструктивними елементами наступного ступеня ракети, або сопло з примусовим розворотом (центральною тілом тарілчастого типу) потоку в критичному перерізі, що також має короткий профіль. Дослідження проводилися в основному з використанням наближених методів розрахунку та експериментів на моделях.

З використанням методу характеристик були досліджені сопла мінімальної довжини і різної форми. Було показано, що при укороченні сопла в ньому збільшуються хвильові втрати тяги, що викликаються виникненням у соплі стрибків ущільнення малої інтенсивності та місцевих відривних зон. Порівняно новим напрямком у проектуванні надзвукових сопел є створення так званого дзвоноподібного сопла, яке має, на відміну від класичного сопла Лавалю, більший кут входу до надзвукової частини сопла. Для сопла типу Dual-Bell з двома ділянками дзвоноподібної форми, які мають більшу ефективність в умовах зміни висоти польоту метод характеристик вже не дозволяє деталізувати всі особливості складної течії в дзвоноподібному соплі. У цьому випадку перевага надається методам Computational Fluid Dynamics models (CFD). Течія в соплі з перешкодою характеризується виникненням розвинених відривних зон зі стрибками ущільнення та значними градієнтами швидкості та тиску. При моделюванні турбулентних течій до загального набору рівнянь, що описують течію в соплі Лавалю, додаються ще рівняння турбулентної моделі. У роботі досліджувалося укорочене сопло Лавалю з дзвоноподібним насадком сферичної форми. На відміну від сопла типу Dual-Bell перша ділянка його є конічним соплом Лавалю, а друга ділянка – дзвоноподібна. Таке сопло може застосовуватись у розробках ущільнених компоновок літальних апаратів. При цьому зберігаються переваги роботи такого сопла зі зміною висоти польоту. Досліджується вплив зміни довжин обох ділянок укороченого сопла з насадком, кута входу в насадок та ін. на його характеристики. В розрахунках виявлені нові особливості течії газу в соплі, які являють собою не тільки науковий, але й практичний інтерес.

**ALGORITHM FOR SOLVING AXISYMMETRIC THERMOVISTOPLASTICITY
PROBLEMS FOR BODIES AND SHELLS MADE OF TWO-COMPONENT
FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIAL**

M.O.Babeshko, V.G.Savchenko

The S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU

An algorithm for solving the axisymmetric thermoviscoplasticity problem for spatial bodies and thin shells made of a two-component functional-gradient material has been developed. The constitutive equations of the theory of deformation processes along trajectories of small curvature are used. The functional dependence between the second invariants of stress and strain deviators is specified using deformation diagrams and creep curves of the functional-gradient material. They are modeled on the basis of the corresponding diagrams of the constituent materials and the given law of the volume content of these materials.

**CALCULATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF DISCRETE-
HOMOGENEOUS SPACE AND THIN-WALLED BODIES**

Pavlo Steblyanko

The S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU

A generalization of the determining relations of nonlinear deformation (nonlinear elasticity, plasticity) for functionally gradient materials (FGM), materials with shape memory effect, and traditional composite materials of granular and fibrous structure is proposed and substantiated.

For the coefficients of the determining relations that describe the dependence of the characteristics of FGM on the type of loading during deformation beyond the elastic limit, and verification of the material parameters was carried out on the basis of known experimental data for functional materials. To write the determining equations, the deformation tensor is represented as the sum of the elastic and plastic deformation tensors.

A method for solving stationary problems of deformation of bodies of revolution made of materials with shape memory effect based on the use of spline functions to increase accuracy has been developed.