Харківський національний автомобільно-дорожній університет
Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Воропай Олексій Валерійович

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА У НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПЛАСТИН

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________________ О. В. Воропай

Науковий консультант Янютін Євген Григорович докт. техн. наук, професор

Дніпро – 2019

АНОТАЦІЯ

Воропай О. В. Використання інтегральних рівнянь Вольтерра у нестаціонарних задачах динаміки пластин. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла (галузь знань) – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, МОН України, м Дніпро, 2019.

Робота виконана на кафедрі деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету та на кафедрі вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків.

Дисертаційна робота присвячена розв'язанню в загальному вигляді оберненої задачі про одночасну дію на пластину скінченого набору нестаціонарних довільних навантажень, яка може бути зведена до розв'язку системи інтегральних рівнянь Вольтерра, а також розробці спеціальних підходів для урахування дисипації енергії під час деформування елементів конструкцій.

На базі отриманого в загальному вигляді розв’язання оберненої задачі і розробки універсального підходу, який використовує інтегральні оператори, розв'язано три класи актуальних задач:

– ідентифікації системи зовнішніх нестаціонарних навантажень, яка діє на прямокутні пластини;

– спільної ідентифікації зовнішніх навантажень та реакцій в задачі моделювання нестаціонарних коливань пластин з зосередженими особливостями (масами, погашувачами коливань, додатковими опорами);

– ідентифікації керуючих впливів в задачі управління нестаціонарними коливаннями пластини.

Об'єкт дослідження – нестаціонарне навантаження прямокутних пластин з урахуванням особливостей навантаження та додаткових опор.

Предмет дослідження – інтегральні рівняння Вольтерра, до яких зводяться задачі нестаціонарного деформування пластинчастих елементів конструкцій.

Методи дослідження. Методи математичної фізики, теорія рядів Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, теорія операторів, теорія інтегральних рівнянь Вольтерра, теорія некоректних задач математичної фізики (використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова), матричне числення.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1) Набула подальший розвиток теорія розв’язку нестаціонарних обернених задач механіки деформівного твердого тіла.

2) Удосконалено комплекс методів та обчислювальні алгоритми для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, та розв’язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса.

3) На базі розв’язаної у загальному вигляді нестаціонарної оберненої задачі для прямокутної пластини та удосконаленому комплексу методів вперше розв’язані:

– обернена задача про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестаціонарних навантажень, що діють одночасно;

– обернені задачі моделювання нестаціонарних коливань прямокутних пластин при наявності додаткових зосереджених особливостей (маси, амортизатора, додаткових пружних та в'язкопружних опор);

– задача ідентифікації реакції в’язкопружної опори, яка контактує з пластиною, а також запропоновано та виконано декомпозицію цієї реакції на пружну та в’язку складові, шляхом заміни її двома незалежними в’язкою та лінійно-пружною додатковими опорами, що прикладені в одній точці або на близькій відстані.

4) Удосконалено методику активного управління нестаціонарними коливаннями прямокутної пластини за допомогою додаткових керуючих навантажень, а саме показана можливість:

а) урахування додаткових зосереджених особливостей;

б) управління коливаннями не в одній точці пластини, а на невеликій області відносно величини площі пластини;

в) гасіння коливань по всій поверхні пластини скінченою системою керуючих навантажень.

5) Побудовано розв’язок низки некоректних задач активного управління нестаціонарними поперечними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей, а також розглянуто схеми пасивного та активного віброзахисту в задачі гасіння коливань пластини з приєднаною масою.

6) Вперше виконано урахування дисипативних властивостей в матеріалі на базі розв’язків в рамках теорії пружності при деформуванні елементів конструкції з використанням згладжувальних лінійних інтегральних операторів для випадків внутрішнього в'язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара).

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані для визначення даних про характер і величину нестаціонарних навантажень, що виникають у різних механічних системах, які деформуються імпульсно, на основі непрямих проявів (переміщень, деформацій у деяких точках елементів конструкцій), а також вибір раціональних режимів управління коливаннями.

Впровадження матеріалів дисертаційної роботи та запропонованих підходів підтверджено довідками про використання результатів досліджень наведеними в додатку.

Було отримано три довідки про застосування матеріалів дисертаційної роботи від:

– кафедри вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором № 66/37-50-12 «Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б».

– ТОВ «Океан-судоремонт» при виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування.

– Корпорації «Співдружність». Матеріали наукових досліджень дисертації були використані при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін і камер для розбирання і утилізації вибухонебезпечних виробів.

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що представлені до захисту, отримані здобувачем самостійно.

Постановка деяких задач та обговорення результатів в опублікованих наукових працях проводились разом з науковим консультантом або співавторами.

У першому розділі здійснений огляд робіт за темою дисертаційної роботи. Літературний огляд складається з п'яти частин і висновку. Перша частина присвячена вибору теорії нестаціонарного деформування пластин. У ній відзначено, що рівняння, отримані Я. С. Уфляндом і Р. Д. Міндліном, дозволяютьураховувати ефекти інерції обертання та зсуву (теорія на основі гіпотез Тимошенка), які добре себе зарекомендували при дослідженні нестаціонарного деформування одношарових ізотропних пластин. У другій частині описаний ряд монографій і роботи оглядового характеру, присвячені дослідженню динаміки пластин. У третій частині огляду описані роботи з розв'язання нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла, у яких використаються інтеграли згортки та інтегральні рівняння. У четвертій частині розглянуті задачі, у яких використовуються інтегральні рівняння Вольтерра для визначення динаміки навантаження. П'ята частина огляду присвячена роботам з ідентифікації та управління коливаннями із застосуванням нових технологій.

У другому розділі описані чисельно-аналітичні методи, що використовуються в роботі. Викладені особливості застосування регуляризуючого алгоритму академіка А. М. Тихонова для розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла. В рамках регуляризуючого алгоритму розглянута скінченновимірна апроксимація некоректної задачі та згладжувального функціонала. Наведено приклад розв'язання тестової некоректної задачі (ідентифікації невідомого нестаціонарного поперечного навантаження, що діє на прямокутну ізотропну шарнірно-оперту пластину середньої товщини в пружній постановці) з використанням регуляризуючого алгоритму. Приділено увагу питанню вибору значень параметра регуляризації. Розглянуто комплекс методів для розв’язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра на основі використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова в сукупності з узагальненими алгоритмами Крамера та Гаусса для блокових матриць. Описано особливості використання узагальнених алгоритмів Крамера та Гаусса.

У третьому розділі розглядаються імпульсні впливи системи довільних складних навантажень (що мають не тільки поперечну, але й поздовжню складову) на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Представлено методику розв'язання прямих та обернених задач нестаціонарного навантаження прямокутних пластини. Приводиться ряд прикладів обчислень з ідентифікації системи декількох зовнішніх незалежних сил. Також у третьому розділі описана методика урахування впливу двосторонньої пружної інерційної основи при імпульсному деформуванні прямокутних пластин.

У четвертому розділі описано нестаціонарне деформування пластин при наявності різних зосереджених у точці або локалізованих на малих областях особливостей (мас, додаткових опор та погашувачів коливань). У розділі наведена постановка задачі та математична модель, а також розв'язання задачі в загальному вигляді.

У дисертаційній роботі викладається підхід, що дозволяє враховувати вплив ребер і зосереджених особливостей на нестаціонарне деформування елементів конструкції шляхом введення у вихідні моделі деформування пластин додаткових нестаціонарних сил (реакцій). Ці невідомі нестаціонарні навантаження можуть бути визначені з відповідних інтегральних співвідношень шляхом зведення їх до лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра або їх систем, що дозволяє отримувати аналітико-численні розв'язання без використання ітераційних схем.

Детально проаналізовано вплив кожної окремої особливості на процес нестаціонарного деформування прямокутної пластини. Також досліджений розподіл в'язкої та пружної складових у реакції додаткової в’язкопружної опори, що контактує з пластиною.

У п'ятому розділі розв'язано низку задач, які стосуються управління нестаціонарними коливаннями механічних систем, що містять пластини. Досліджується можливість управління нестаціонарними коливаннями механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси, за допомогою додаткового керуючого навантаження, функція зміни в часі якого ідентифікується. Також розглянута подібна задача в рамках пасивного віброзахисту – гасіння нестаціонарних коливань механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси, за допомогою введення в систему пасивного погашувача коливань.

На основі запропонованих підходів розв'язана задача керування поперечними коливаннями на невеликій області пластини, також було розглянуто задачу про активне гасіння нестаціонарних коливань по всій поверхні прямокутної пластини.

В шостому розділі вказані два підходи, що дозволяють на базі «пружних» розв’язків, отриманих у рамках теорії пружності, для деформівних елементів конструкції враховувати дисипативні властивості в матеріалі. Зокрема є

можливість моделювати внутрішнє в'язке та гістерезисне тертя, що описується моделями Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара.

Перший підхід базується на використанні диференціальних операторів і зводиться до модифікації аналітичних співвідношень для відповідних ядер інтегралів і частот, які можуть бути знайдені з розв'язку характеристичних рівнянь, записаних для різних моделей тертя.

Другий – використовує згладжувальні лінійні інтегральні оператори і може бути застосований для будь-яких розв'язків у рамках теорії пружності, які подані у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки з ядрами Коші. Згладжувальні інтегральні оператори дозволяють розраховувати ці ядра для змінених коефіцієнтів тертя, а також відновлювати пружну складову розв'язку, збурену внутрішнім тертям. Досліджено алгебраїчні властивості цих операторів. В наслідок того, що при розрахунках інтегралів виконується дискретизація, можна скористатися запропонованою в роботі модифікацією ядер відповідно до теореми Ефроса, причому ця модифікація здійснюється за рахунок множення вихідних ядер на спеціальним чином отримані матриці.

Для розглянутих задач у роботі наведені приклади числових розрахунків, які безпосередньо пов'язані з викладеним теоретичним матеріалом та ілюструють ефективність запропонованих підходів. Виконано відповідні дослідження з перевірки вірогідності отриманих результатів.

Ключові слова: інтегральні рівняння Вольтерра, прямокутна пластина типу Тимошенка, нестаціонарне навантаження, некоректні задачі, обернені задачі, ідентифікація, управління коливаннями, регуляризація, внутрішнє в’язке тертя, гістерезисне тертя, згладжувальні інтегральні оператори.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Монографії:

1. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Монография // Харьков: Изд-во «Лидер», 2018. 214 с. ISBN 978-617-7476-10-7

2. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. 212 с. ISBN 978-966-303-291-7 (Об.), ISBN 978-966-303-293-1 (Ч. II). *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

Статті у наукових фахових виданнях України
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

3. Воропай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. механика. 2007. 43. №7. С. 90-97. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

A. V. Voropai, E. G. Yanyutin. Identification of several impulsive loads on a plate // International Applied Mechanics. July 2007, Volume 43, Issue 7, pp 780–785. Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 43, No. 7, pp. 90–97, July 2007. (**SCOPUS**).

4. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ».

2015. № 55 (1164). С. 43-46. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Index Copernicus, Google Scholar**).

5. Воропай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2015. № 41 (1150). С. 17-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2079-0023. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

6. Батракова А. Г., Ряпухин В. Н., Воропай А. В., Дорожко Е. В., Егоров П. А. Исследование деформирования образца из асфальтобетона на раскол с использованием тензометрической аппаратуры // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2015 / Выпуск 71, С. 45-49. (**Index Copernicus, Google Scholar**). *Брав участь у постановці задачі, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.*

7. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. № 57 (1166). С. 25-29. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

8. Малахов Е. С., Воропай А. В. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. №6 (1178). С. 56-62. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**). *Написана у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв’язку та була прийнята участь у аналізі отриманих результатів.*

9. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. №16 (1188). С. 16-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

10. Воропай А. В., Малахов Е. С. Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2016. № 26 (1198). С. 45-49. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Index Copernicus, Google Scholar**). *Написана у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв'язку та була прийнята участь у аналізі отриманих результатів.*

11. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 6 (1228). С. 29-44. Бібліогр.: 11 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**). *Участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розробка методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць та застосування процедури згладжування при розв'язку конкретних задач.*

12. Воропай А. В. Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагружений // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 30 (1252). С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

13. Воропай А. В. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1297). С. 19-24. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

Статті у наукових фахових виданнях України:

14. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2004. №31 С. 176-179. *Автору належить участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв'язок задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження прямокутної пластини.*

15. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек. Вісник Харківського національного університету Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 661., 2005, С. 69-82. *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин.*

16. Воропай А. В., Гришакин В. Т., Янютин Е. Г. Некорректные обратные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении. Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №775, 2007, Харьков, С. 73-80. *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин.*

17. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. №38. С. 174-180. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

18. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. №47. С. 42-48.

19. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения элементов конструкции в виде пластин тензометрическим методом // Проблемы машиностроения. 2009. 12, №2. С. 47-55. *Автору належить участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв'язок задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження прямокутної пластини.*

20. Воропай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2010 / Выпуск 49, С. 84-87.

21. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Воропай О. В., Поваляєв С. І. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження. // Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 27. 2010, С. 153-156. *Участь у постановці задач та виборі моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.*

22. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2010. №69 – С. 46-52.

23. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Вып. 53, С. 87-90.

24. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2011. №52. С. 42-48.

25. Воропай О. В., Поваляєв С. І., Гришакін В. Т. Дослідження різних моделей дорожньої конструкції за нестаціонарного навантаження. // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Выпуск 55, С. 25-31. *Участь у постановці задач та виборі моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.*

26. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2012. №55. С. 30-37.

27. Воропай А. В., Шупиков А. Н.. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении.// Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2013. № 63 (1036). С. 29-34. *Участь у постановці задачі, розв'язання та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

28. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А. Измерительный комплекс для экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2015. №2(8). С. 182–187. ISSN 2226-9266 – Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE15_2/2015-8-5.2.pdf. *Участь у постановці задач, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень*

напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.

29. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А., Малахов Е. С. Экспериментальное измерение деформаций балок из различных материалов при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2016. №1(9). С. 128-138. ISSN 2226-9266. Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE16_1/5.5.pdf. *Брав участь у постановці задач, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.*

30. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций // Механіка та машинобудування, – Харків : НТУ «ХПІ», 2018 – №1. С. 3-22. *Участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розробка методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць та застосування процедури згладжування при розв'язку конкретних задач.*

Статті в іноземних виданнях:

31. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. Int. J. Solids and Struct. 41 (2004) 4919-4926. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

Тези наукових доповідей:

32. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Идентификация нестационарных нагружений воздействующих на пластины и оболочки / Материалы международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 мая 2005 г., Киев) / К.: КНУ им. Т. Шевченко. 2005. С. 360.

33. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Моделирование дорожных одежд с учетом движущихся многоосных автомобилей. XI научно-техническа конференция с международно участие "Транспорт, екология – устойчиво развитие". Болгария. Варна. Сборник доклады 2005, С. 402-408.

34. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении обратных задач динамической теории пластин и оболочек. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харьков-Херсон, 2005, С. 63-66.

35. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Международная научная конференция "Интегральные уравнения и их применения" 29 июня – 4 июля 2005 года. Одесса, С. 167.

36. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное снижение амплитуд нестационарных колебаний на прямоугольной области пластины. //VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь: ДиАйПи, 2006, С. 200.

37. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для упругодеформируемых стержней, пластин и оболочек. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». ИПМаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины. Тезисы докладов. 23-26 октября 2006 года. Харьков, С. 104.

38. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом особенностей нагружения. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007) Харьков-Херсон, 2007, С. 350-353.

39. Воропай А. В., Кучерова Н. И. Нестационарные задачи для прямоугольных пластин и пластин-полос при наличии сосредоточенных сил и масс. // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь, 2008, С. 46.

40. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Обратные нестационарные задачи для упруго-деформируемых балок и пластин. // Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» (Минск 30-31 октября 2008 г.) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларусии. Минск, 2008. С. 152-158.

41. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями пластины, несущей сосредоточенную массу // Тринадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 року, Київ. Матеріали конференції Т. І. К., НТУУ, 2010. С. 98.

42. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с гасителем / Материалы XV международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 мая 2011 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2011. С. 253.

43. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с установленным на ней амортизатором // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 50-летию механико-математического факультета ХНУ им. В. Н. Каразина (17-22 апреля 2011 г.). Харьков, 2011. С. 31-32.

44. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с дополнительной упругой подпоркой / Материалы XVI международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 мая 2013 г., Киев) / К.: КНУім. Т. Шевченко. 2013. С. 264.

45. Воропай А. В.. Моделирование нестационарного деформирования шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой подпоркой. Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики: материалы Международной научно-практической интернет-конференции (Харьков 10-25 мая 2013 г.) / Ред. совет: Тропина А. А. и др. Х.: Экограф, 2013. С. 24-28.

46. Воропай А. В. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины с дополнительной вязко-упругой опорой// «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013» г. Харьков 29 сентября – 4 октября 2013 г. / под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича.– Х.: Цифрова друкарня №1, 2013. С. 35-36.

47. Воропай А. В. Использование интегральных уравнений в задачах моделирования элементов виброзащиты. Сборник тезисов Международной научно-практической конференции по случаю Дня автомобилиста и дорожника: "Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля" Посвящённой 90-летию проф. Говорущенко Н. Я. 15-16 октября 2014 г. С. 186-187.

48. Воропай А. В. Моделирование воздействия на пластину дополнительных вязко-упругих опор // Наукові праці Міжнародної науково-практичної та науково-методичної конференції присвяченої 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з Дня народження професора А. Б. Гредескула "Новітні технології в автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців" 20-21 жовтня 2016 р. Х.: Видавництво «Форт», 2016. С. 234-235.

49. Воропай А. В., Малахов Е. С. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом диссипации // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2017. 214 С. (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка). С. 113.

50. Воропай А. В., Егоров П. А., Малахов Е. С. Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017) Харьков, 2017, С. 80-83.

51. Воропай А. В., Малахов Е. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки // Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19–20 жовтня 2017 р. Х.: Видавництво «ХНАДУ», 2017. С. 225-226.

ABSTRACT

Voropay A. V. Using of Volterra integral equations in nonstationary problems of plate's dynamics. – On the rights of the manuscript.

Thesis for a Doctor’s Degree of Technical Sciences in specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – Kharkiv National Automobile and Road University; National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2019.

The thesis deals with solving in general the inverse problem on finite set of arbitrary nonstationary loads acting simultaneous on a plate. The problem can be reduced to solving a system of Volterra integral equations and creating special approaches for taking into account energy dissipation during deformation of structural elements.

Three classes of relevant tasks are solved on the basis of general solution of the inverse problem obtained and created universal approach, which uses integral operators: – identification of the system of external non-stationary loads acting on rectangular plates;

– joint identification of external loads and reactions in the problem of modeling non-stationary plates vibrations with concentrated features (masses, vibration dampers, additional supports);

– identification of control actions in the problem of controlling non-stationary plate vibrations.

The object of the study: rectangular plates impacted by non-stationary loads, taking into account the features of the loading and additional supports.

The subject of the study: Volterra integral equations to which the problems of nonstationary deformation of plate structural elements are reduced.

Research methods. Methods of mathematical physics, Fourier series theory, Laplace integral transformation, operator theory, the theory of Volterra integral equations, the theory of ill-posed problems of mathematical physics (using the Tikhonov regularizing algorithm), matrix calculus.

The new scientific results obtained in the work are:

1) The theory of solving non-stationary inverse problems in the mechanics of deformable solids *is further developed*.

2) The complex of methods and computational algorithms for discretizing of systems of Volterra integral equations and solving block systems of linear algebraic equations using Tikhonov regularizing algorithm and generalized Cramer or Gauss algorithms *are improved*.

3) Based on the generalized solution to the non-stationary inverse problem for a rectangular plate and the improved set of methods *solved for the first time* are:

– the inverse problem of several unknown independent non-stationary forces acting simultaneously on the plate

– inverse problems of modeling non-stationary vibrations of rectangular plates in the presence of additional concentrated features (mass, shock absorber, additional elastic and viscoelastic supports);

– plate's viscoelastic support reaction identification problem. Decomposing this reaction on the elastic and viscous components is also proposed and executed. The viscoelastic support is replaced by two independent viscous and linear-elastic additional supports, which are applied at one point or at a short distance.

4) The method of active control of non-stationary vibrations of a rectangular plate with the help of additional control loads *is improved*, namely the possibility of:

a) taking into account additional concentrated features;

b) the vibrations are controlled not at one point of the plate, but in an area small relative to the size of the plate area;

c) the damping of vibrations along the entire surface of the plate by a finite system of control loads.

5) The *new* solutions to several ill-posed problems of active control of rectangular plate non-stationary transverse vibrations are considered, taking into account different concentrated features. The schemes of passive and active vibration protection in the problem of damping the plate with attached mass are also explored.

6) *For the first time* the dissipative properties of the materials are taken into account for solutions to structural elements deformation problems based on the theory of elasticity using linear integral smoothing operators for cases of internal viscous friction (Kelvin–Feucht model) and internal hysteresis friction (Bock–Schlippe–Kohler model).

The practical significance of the results obtained is that they can be used to determine the data on the nature and magnitude of non-stationary loads that arise in various mechanical systems under pulse deforming, based on indirect developments (displacements, strains at some points of structural elements), as well as, the choice of rational vibration control modes.

Implementation of the dissertation materials and proposed approaches is confirmed by references to the use of the research results presented in the appendix.

Three references on the application of the dissertation materials are received from:

– The Department "Surveying and designing of highway and airfields" of the Kharkiv National Automobile and Highway University at the completion of research work under the contract No. 66 / 37-50-12 "Modify, supplement and bring in conformity with the modern regulatory requirements the album of typical designs of non-rigid type pavement under the estimated load A1, A2, B".

– LTD «Ocean-Sudoremont». When investigating the impact loads of ship body elements during mooring.

– Corporation "Spivdruzhnist". Materials of dissertation scientific research are used in the design of plate elements of armored cabins and cameras for dismantling and utilizing explosive products.

Personal applicant’s contribution. The main scientific positions and the results presented in the dissertation obtained by the applicant independently.

Some of the problems were formulated and some of the results in published scientific works were discussed with the scientific adviser or co-authors.

The works on the topic of dissertation work are reviewed in its first section. The literature review consists of five parts and a conclusion. In the first part the choice of plate non-stationary deformation theory is discussed. It is noted that the equations obtained by J. S. Ufland and R. D. Mindlin allow taking into account the effects of inertia of rotation and shear (the theory based on the hypothesis of Timoshenko). These equations have proved themselves well in the study of non-stationary deformation of single-layered isotropic plates. The second part describes a series of monographs and works of a review nature on the study of plate dynamics. In the third part of the review the work dealing with solving non-stationary problems of the mechanics of deformable solid by means of convolution integrals and integral equations are mentioned. In the fourth part the problems using Volterra integral equations to determine the load dynamics are considered. The fifth part of the review presents the works on identification and vibration control by new technologies.

The second section is focused on the numerical-analytical methods used in the work. The peculiarities of the application of the academician A. N. Tikhonov regularizing algorithm for solving ill-posed problems in the mechanics of deformable solids are described. The finite-dimensional approximation of an ill-posed problem and a smoothing functional are considered in the framework of the regularizing algorithm. An example of solving a test ill-posed problem (identifying an unknown non-stationary transverse load acting on a rectangular isotropic hinge-supported plate of medium thickness in elastic formulation) using a regularizing algorithm is given. Close attention is paid to choosing the values of the regularization parameter. The complex of methods for solving Volterra integral equations based on Tikhonov regularizing algorithm in conjunction with generalized Cramer and Gauss algorithms for block matrices is considered. The features of using the generalized Cramer and Gauss algorithms are described.

In the third section impulse actions of an arbitrary complex load system (which have both transverse and longitudinal components) on rectangular elastic isotropic plates of medium thickness are considered within the framework of the Timoshenko refined theory. The method for solving direct and inverse problems of a rectangular plate non-stationary loading is presented. A number of computational examples on identification of a system of several external independent forces are given. Also the method of taking into account the influence of bilateral elastic inertial basis for rectangular plates under impulse deformation is described here.

The fourth section describes non-stationary deformation of plates with presence of various features (masses, additional supports and vibration absorbers) concentrated at points or localized in small areas. The section presents the problem statement and the mathematical model, as well as solving the problem in general terms.

The approach, which allows taking into account influence of ribs and concentrated features on nonstationary deformation of structural elements by introducing of additional nonstationary forces (reactions) in the initial model of plate deformation, is presented in the dissertation. These unknown non-stationary loads (reactions) can be determined from the corresponding integral equations by reducing them to linear Volterra integral equations or their systems, which allows obtaining analytical and numerical solutions without using iterative schemes.

The influence of each particular feature on the process of rectangular plate non-stationary deformation is analyzed in detail. The distribution of viscous and elastic components in the reaction of the additional viscoelastic support in contact with the plate is also investigated.

A series of problems related to control of non-stationary vibrations of mechanical systems containing plates are solved in the fifth section. The possibility of controlling non-stationary vibrations in mechanical system consisting of a plate and a concentrated mass is investigated with the help of additional control load, which function of change in time is identified. Also, similar problem is considered in the framework of passive vibration protection, namely suppression of non-stationary vibrations in mechanical system consisting of a plate and a concentrated mass, by introducing a passive damper into the system.

The approaches proposed are applied to solving the problem of controlling transverse vibrations in a small area of the plate. Also the problem of active damping of nonstationary vibrations along the entire surface of rectangular plate is considered.

The way of taking into account the dissipative properties of the material are studied in the sixth section of the dissertation. Two approaches based on the solutions obtained within the framework of the elasticity theory for deformable structural elements using differential and integral operators are proposed. In particular, they allow taking into consideration the internal viscous friction (Kelvin–Feucht model) and hysteresis friction (Bock–Schlippe–Kohler model) in the material.

The first approach is based on the use of differential operators and reduces to modification of analytic relations for the corresponding integral kernels and frequencies that can be found from the solution of the characteristic equations written for different friction models.

The second approach uses linear smoothing integral operators and can be applied to any elastic solutions that are represented by Duhamel convolution type integrals with Cauchy kernels. Smoothing integral operators allow to calculate these kernels for changed friction coefficients, as well as to restore the elastic component of the solution, disturbed by internal friction. The algebraic properties of these operators are investigated. Due to the fact that in the calculations of the integrals the discretization is performed, one can use the proposed kernel modification in accordance with the Efros theorem, and this modification is carried out by multiplying the original kernel by specially obtained matrices.

For the problems considered, the work proposes examples of numerical calculations that are directly related to the theoretical material presented and illustrate the effectiveness of the approaches proposed. The impact load of a medium thickness isotropic rectangular plate is studied experimentally to substantiate the theory developed. Reliability of the results obtained is tested appropriately.

Key words: Volterra integral equation, Timoshenko rectangular plate, nonstationary loading, ill-posed problem; inverse problems, identification, vibrations control problem, regularization, internal viscous friction, hysteresis friction, smoothing integral operators.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ІНДЕКСІВ І СКОРОЧЕНЬ

ρ – густина матеріалу;

E – модуль пружності;

ν – коефіцієнт Пуассона;

G – модуль зсуву;

G' – приведений модуль зсуву;

k' – коефіцієнт зсуву

D – циліндрична жорсткість;

h – товщина пластини;

l – довжина пластини;

m – ширина пластини;

x_i, y_i, z_i – декартові координати точок;

$u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ – компоненти переміщення;

$u_0(x,y,t)$, $v_0(x,y,t)$, $w_0(x,y,t)$ – переміщення точок серединної площини;

$\psi_x(x,y,t)$, $\psi_y(x,y,t)$ – кути повороту нормалі до серединної площини;

$\varepsilon_x(x,y,z,t)$, $\varepsilon_y(x,y,z,t)$, $\varepsilon_z(x,y,z,t)$ – деформація в точці;

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа;

$q(x,y,t)$ – поперечне навантаження, розподілене по поверхні пластини;

$P_{zj}(x,y,t)$ – нормальні (поперечні) сили (навантаження);

$P_{xj}(x,y,t)$, $P_{yj}(x,y,t)$ – дотичні навантаження;

$M_{xj}(x,y,t)$, $M_{yj}(x,y,t)$ – моментні навантаження;

$R_i(x,y,t)$ – контактні реакції (наприклад, між пластиною і особливістю);

ω_{ikn} – власні кругові частоти коливань пластини;

C_{knj} – коефіцієнти розвинення функцій зовнішніх навантажень у ряди Фур'є;

$J_1(r)$ – функція Бесселя першого роду;

$\int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t)$ – інтегральне рівняння Вольтерра I роду;

$x(t) + \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t)$ – інтегральне рівняння Вольтерра II роду;

$\int_0^t K(t-\tau)z(\tau)d\tau = u(t)$ – класичний запис інтегрального рівняння Вольтерра I роду;

$K(t-\tau)$ – скінченно-різницеве ядро Коші інтегрального рівняння;

A – інтегральний оператор, що відповідає ядру $K(t)$;

$\mathbf{A}_{i,j}$ – матриці, які відповідають ядрам інтегралів $K_{i,j}(t)$;

$\mathbf{P}_i$, $\mathbf{R}_i$ –

Δt – крок у часі;

T – величина всього проміжку дослідження;

J – число кроків за часом;

$\mathbf{A}^{-1} \subset \varnothing$ – обернена матриця;

$\mathbf{A}^T$ – транспонована матриця;

$\det \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A}$ – визначник матриці $\mathbf{A}$;

$M^{\alpha}[z]$ – згладжувальний функціонал А. М. Тихонова;

$\alpha > 0$ – параметр регуляризації;

δ – рівень "зашумлення" (збурювання) вихідних даних або відносна похибка;

k_f, t_f, m_f – постійні пружні основи;

c_i – коефіцієнт жорсткості додаткової опори в *і-й* точці;

κ_i – коефіцієнт демпфірування в *і-й* точці;

M – величина зосередженої маси;

$H(t)$ – функція Хевісайда;

$\delta(t)$ – дельа-функція Дірака;

η – коефіцієнт внутрішнього в’язкого тертя;

γ – коефіцієнт внутрішнього гістерезисного тертя;

d_0 – логарифмічний декремент загасання;

$K_0(t)$ –ядро інтегрального рівняння для пружної моделі;

$K_\eta(t)$ –ядро для моделі внутрішнього в’язкого тертя;

$K_\gamma(t)$ –ядро для моделі внутрішнього гістерезисного тертя;

$K_e(t)$ – ядро для моделі зовнішнього тертя;

$\Psi_0(t,\tau)$ – коригувальне ядро;

$\Psi_\eta(t,\tau)$ – коригувальне ядро для моделі внутрішнього в’язкого тертя;

$\Psi_\gamma(t,\tau)$ – коригувальне ядро моделі внутрішнього гістерезисного тертя;

σ – середньоквадратичне відхилення;

σ^2 – дисперсія;

НДС – напружено-деформований стан;

СІР – система інтегральних рівнянь;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;

БСЛАР – блокова система лінійних алгебраїчних рівнянь;

РА Тихонова – регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова;

УАК – узагальнений алгоритм Крамера;

УАГ – узагальнений алгоритм Гаусса;

ОКФ – згладжувальний оператор Кельвіна–Фойхта;

ОБШК – згладжувальний оператор Бока–Шліппе–Колара;

СЛТ – стандартне лінійне тіло.

ВСТУП

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Багато елементів машинобудівних конструкцій під час роботи піддаються нестаціонарним впливам. Надійність і довговічність таких виробів у цілому зумовлена їх якісним проектуванням, що базується на широкому інженерному досвіді та великій накопиченій інформаційній базі. Розширення цієї бази значною мірою пов'язане з детальними дослідженнями процесу нестаціонарного деформування елементів конструкцій. Одні з найпоширеніших елементів – це пластини, з якими зв'язані задачі, розглянуті в цій роботі.

Відомо, що при теоретичному аналізі динамічних процесів можна використати два загальних підходи, основаних на диференціальних та інтегральних операторах. Інтегральний підхід має більшу стійкість, завдяки своїм накопичувальним (інтегруючим) особливостям при розв'язанні некоректних задач, які часто зустрічаються при дослідженні нестаціонарних процесів деформування. В основному нестаціонарні деформаційні процеси докладно описуються за допомогою інтегральних рівнянь Вольтерра, застосування яких для пластинчастих елементів конструкції досліджується в дисертаційній роботі.

Під час проектування конструктори часто стикаються з проблемою недостатньої інформації про дії навантажень на механічні системи. Особливо серйозні проблеми виникають при нестаціонарному деформуванні елементів конструкцій. При дослідженні нестаціонарного деформування дуже важливо точно задавати навантаження, тому що їх зміна в часі може значно впливати на процес деформування і, отже, на результати розрахунків.

Розв’язок обернених задач ідентифікації невідомих нестаціонарних навантажень при обробленні експериментальних даних може істотно знизити вартість і час досліджень, а іноді частково або повністю замінити реальні дослідження спеціальними обчислювальними експериментами.

Таким чином, доповнення недостатньої інформації, щодо дії короткочасних імпульсних навантажень є дуже важливим питанням, особливо, коли це пов'язано з безаварійною роботою конструкцій і механізмів.

Крім того, треба підкреслити важливу роль в машинобудуванні та інженерії в цілому досліджень з управління коливаннями, які пов'язані з проблемою активного і пасивного віброзахисту конструкцій та устаткування.

Визначення законів зміни в часі імпульсних і ударних, а також керуючих навантажень може здійснюватися на базі розв’язання обернених нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла. Вказані задачі можуть бути зведені до інтегральних рівнянь Вольтерра, застосування яких для пластинчастих елементів конструкції досліджується в дисертації.

Застосування інтегральних рівнянь Вольтерра саме до задач деформування пластинчастих елементів конструкцій в цій роботі зумовлено тим, що для пластин (двовимірний об'єкт, який нестаціонарно деформується) найширше представлений клас розглянутих задач, а саме, задачі ідентифікації декількох невідомих незалежних навантажень, що діють одночасно, управління нестаціонарними коливаннями, а також задач моделювання різних особливостей навантаження або обпирання пластин.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'язання у загальному вигляді оберненої задачі про одночасну дію на пластину скінченного набору нестаціонарних довільних навантажень, яка може бути зведена до розв'язку системи інтегральних рівнянь Вольтерра, а також розроблення спеціальних підходів для урахування дисипації енергії під час деформування елементів конструкцій.

На базі отриманого в загальному вигляді розв’язання оберненої задачі і розроблення універсального підходу, при якому використовують інтегральні оператори, виконати розв'язання трьох класів актуальних задач:

– ідентифікації системи зовнішніх нестаціонарних навантажень, яка діє на прямокутні пластини;

– спільної ідентифікації зовнішніх навантажень та реакцій в задачі моделювання нестаціонарних коливань пластин з зосередженими особливостями (масами, погашувачами коливань, додатковими опорами);

– ідентифікації керуючих впливів в задачі управління нестаціонарними коливаннями пластини.

Для досягнення цієї мети в дисертації були поставлені та розв'язані такі основні наукові та прикладні задачі:

1) побудова модифікованих (удосконалених) методик використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова при розв'язанні систем інтегральних рівнянь Вольтерра та вибору оптимальних значень параметрів регуляризації (розв’язання некоректних задач математичної фізики);

2) розроблення спеціальних обчислювальних алгоритмів для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв'язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

3) розв'язання оберненої задачі ідентифікації декількох нестаціонарних навантажень, які діють на пластину одночасно;

4) на базі модифікації ядер Коші та власних кругових частот розробити підхід, який дає можливість урахування впливу пружної основи;

5) моделювання (розв'язання прямих та обернених задач) нестаціонарних коливань прямокутних пластин при наявності зосереджених мас, додаткових зосереджених лінійно-пружних опор, а також погашувачів коливань (ідентифікація невідомих реакцій між пластиною та зосередженими особливостями);

6) дослідження реакції додаткової в’язкопружної опори, що контактує із пластиною та її декомпозиція на пружну та в’язку складові;

7) побудова розв'язку задачі про управління нестаціонарними поперечними коливаннями прямокутної пластини (ідентифікація законів зміни у часі керуючих впливів на пластину);

8) аналіз задач пасивного та активного віброзахисту пластини при нестаціонарних коливаннях з приєднаною зосередженою масою;

9) створення спеціалізованого підходу, що дозволяє на базі наявних пружних моделей одержувати розв'язки, що враховують дисипацію енергії коливань (на базі диференціальних та згладжувальних лінійних інтегральних операторів);

10) проведення експериментальних досліджень з метою обґрунтування теоретичних результатів.

Об'єкт дослідження – нестаціонарне навантаження прямокутних пластин з урахуванням особливостей навантаження та додаткових опор.

Предмет дослідження – інтегральні рівняння Вольтерра, до яких зводяться задачі нестаціонарного деформування пластинчастих елементів конструкцій.

Методи дослідження. Методи математичної фізики, теорія рядів Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, теорія операторів, теорія інтегральних рівнянь Вольтерра, теорія некоректних задач математичної фізики (використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова), матричне числення.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1) Набула подальший розвиток теорія розв’язку нестаціонарних обернених задач механіки деформівного твердого тіла.

2) Удосконалено комплекс методів та обчислювальні алгоритми для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, та розв’язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса.

3) На базі розв’язаної у загальному вигляді нестаціонарної оберненої задачі для прямокутної пластини та удосконаленому комплексу методів **вперше** розв’язані:

– обернена задача про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестаціонарних навантажень, що діють одночасно;

– обернені задачі моделювання нестаціонарних коливань прямокутних пластин при наявності додаткових зосереджених особливостей (маси, амортизатора, додаткових пружних та в'язкопружних опор);

– задача ідентифікації реакції в’язкопружної опори, яка контактує з пластиною, а також запропоновано та виконано декомпозицію цієї реакції на пружну та в’язку складові, шляхом заміни її двома незалежними в’язкою та лінійно-пружною додатковими опорами, що прикладені в одній точці або на близькій відстані.

4) Удосконалено методику активного управління нестаціонарними коливаннями прямокутної пластини за допомогою додаткових керуючих навантажень, а саме показана можливість:

а) урахування додаткових зосереджених особливостей;

б) управління коливаннями не в одній точці пластини, а на невеликій області відносно величини площі пластини;

в) гасіння коливань по всій поверхні пластини скінченою системою керуючих навантажень.

5) Побудовано розв’язок низки некоректних задач активного управління нестаціонарними поперечними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей, а також розглянуто схеми пасивного та активного віброзахисту в задачі гасіння коливань пластини з приєднаною масою.

6) **Вперше** виконано урахування дисипативних властивостей в матеріалі на базі розв’язків в рамках теорії пружності при деформуванні елементів конструкції з використанням згладжувальних лінійних інтегральних операторів для випадків внутрішнього в'язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара).

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що представлені до захисту, отримані здобувачем самостійно.

Постановка деяких задач та обговорення результатів в опублікованих наукових працях проводились разом з науковим консультантом або співавторами.

[3, 17, 31, 33, 35, 36] – наукові праці написані у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці задачі, розв’язання задачі та розрахунки.

[14, 19] – участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв’язок задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження прямокутної пластини.

[2, 15, 16, 32, 34, 37-40] – участь у постановці та розв’язок задач для прямокутних пластин.

[27] – участь у постановці та розв’язок задачі, а також участь в аналізі отриманих результатів.

[6, 28, 29] – участь у постановці задач, розробленні концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.

[21, 25] – участь у постановці задач і виборі моделі дорожньої конструкції для розв’язання задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.

[8, 10, 49, 51] – написані у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв’язання та участь в аналізі отриманих результатів.

[50] – участь у постановці задач, автором безпосередньо розв’язана задача для випадку нестаціонарного деформування пластин за наявності додаткових зосереджених опор.

[11, 30] – участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розроблення методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць і застосування процедури згладжування при розв’язанні конкретних задач.

Апробація матеріалів дисертації. Основні положення і результати наукових досліджень дисертаційної роботи Воропая О. В. доповідались та обговорювались на щорічних наукових конференціях ХНАДУ (секція деталей машин і ТММ) та наукових семінарах кафедри ДМ і ТММ ХНАДУ (2005-2018 рр.) і кафедри вищої математики НТУ «ХПІ» (2015-2018 рр.), а також на наступних міжнародних конференціях та симпозіумах:

1) міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 травня 2005 р., Київ);

2) XI науково-технічній конференції з міжнародною участю "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгарія. Варна, 19–20 травня 2005 р.;

3) міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харків – Херсон, 2005;

4) міжнародній науковій конференції "Интегральные уравнения и их применения" 29 червня – 4 липня 2005 р. Одеса.;

5) XIV міжнародній науково-практичній конференції (MicroCAD 2006) «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я». Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, 18-19 травня 2006 р. Присвячується 100-річчю з дня народження М. Ф. Семка;

6) VIII Кримській міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Алушта, 10-17 вересня 2006 р. Таврійський національний ун-т. Сімферополь;

7) міжнародній конференції «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України. 23-26 жовтня 2006 р.;

8) XII міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007) Харків – Херсон, 2007;

9) IX Кримській міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения». Алушта, 15-20 вересня 2008 р. / Таврійський національний ун-т. Сімферополь;

10) міжнародній науково-технічній конференції «Инновации в машиностроении» (Минск 30-31 жовтня 2008 р.) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларусии;

11) Тринадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 р. Київ;

12) XV міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 травня 2011 р. Київ)

13) міжнародній конференції, присвяченій 50-річчю механіко-математичного факультету ХНУ ім. В. Н. Каразіна «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (17-22 квітня 2011 р.). Харків;

14) XVI міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 травня 2013 р., Київ);

15) міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики» (Харьков ХНАДУ 10-25 травня 2013 р.);

16) міжнародній школі-конференції «Тараповские чтения». «Современные проблемы математики, механики и информатики». Харків, ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.;

17) міжнародній науково-практичній конференції з нагоди Дня автомобіліста і дорожника: "Новітні технології розвитку конструкції, виробництва, експлуатації, ремонту і експертизи автомобіля" присвяченої 90-річчю народження проф. Говорущенко М. Я. 15–16 жовтня 2014 р., м. Харків;

18) Міжнародній науково-практичній та науково-методичній конференції, присвяченій 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з дня народження професора А. Б. Гредескула «Новітні технології в

автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців», ХНАДУ, 20–21 жовтня 2016 р.;

19) Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – (Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

20) міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017), Харків, 26-28 червня 2017р.

21) міжнародній науково-практичній конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців», 19–20 жовтня 2017 р., ХНАДУ.

У повному обсязі дисертація доповідалась на:

– спільному розширеному засіданні кафедр вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» та деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету під керівництвом доктора технічних наук, професора Л. В. Курпи;

– на семінарі кафедри вищої математики Національного Аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ» під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. Г. Ніколаєва;

– на семінарі науково-технічної проблемної ради з динаміки та міцності машин Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом доктора технічних наук, професора К. В. Аврамова;

– на розширеному семінарі відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України О. М. Гузя.

– науковому семінарі «Механіка деформівних тіл і конструкцій» Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара при Дніпровському науковому центрі НАН України та науковій раді з механіки деформівного твердого тіла НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України В. С. Гудрамовича.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 51 наукову працю, серед яких одна одноосібна монографія, одна монографія в співавторстві, 29 наукових статей , з них 28 статей у фахових виданнях України, 12 входять до видань, які внесені до міжнародних наукометричних баз, 1 стаття у зарубіжному виданні, 20 опублікованих тез доповідей та матеріалів конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних літературних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи – 359 сторінок, з яких основного тексту – 282 сторінки, 165 рисунків, не містить таблиць, 2 додатки. Список використаних джерел містить 300 найменувань на 36 сторінках. Додатки – 16 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету в період з 2005 по 2014 роки та кафедрі вищої математики Національного технічного університету «ХПІ» в період з 2015 по 2018 роки.

Робота виконана згідно з:

– індивідуальним планом підготовки докторанта кафедри вищої математики НТУ «ХПІ»;

– робочим планом бюджетної теми № 01-53-04 "Створення методів математичного моделювання з управління нестаціонарними деформаційними процесами" (ДР №0104U002046) з 2004 по 2006 роки.

– робочим планом бюджетної теми № 01-53-07 "Математичні основи експрес-аналізу механічних параметрів дорожнього покриття та дослідження його динамічних властивостей" (ДР №0107U001004) з 2007 по 2009 роки.

– щорічними планами науково-дослідної роботи кафедри деталей машин і ТММ ХНАДУ з 2005 по 2018 роки.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані для визначення даних про характер і величину нестаціонарних навантажень, що виникають у різних механічних системах, які деформуються імпульсно, на основі непрямих проявів (переміщень, деформацій у деяких точках елементів конструкцій), а також вибір раціональних режимів управління коливаннями.

Впровадження матеріалів дисертаційної роботи та запропонованих підходів підтверджено довідками про використання результатів досліджень наведеними в додатку.

Було отримано три довідки про застосування матеріалів дисертаційної роботи від:

– кафедри вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором № 66/37-50-12 «Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б».

– ТОВ «Океан-судоремонт» при виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування.

– Корпорації «Співдружність». Матеріали наукових досліджень дисертації були використані при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін і камер для розбирання і утилізації вибухонебезпечних виробів.

РОЗДІЛ 1
СТИСЛИЙ ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1. Вибір теорії нестаціонарного деформування пластин

Існує декілька класифікацій пластин у рамках механіки деформівного твердого тіла. У книзі [122] виділяють *тверді пластини*, *гнучкі пластини* невеликого прогину та *абсолютно гнучкі пластини* (мембрани). Розв'язання задач для мембран міцно увійшло в класичний курс математичної фізики [1, 127], тому не будемо тут зупинятися на питаннях пов'язаних з їх поведінкою.

С. П. Тимошенко у своїй широко відомій книзі, написаної разом з С. Войновский-Кригером «Пластинки та оболонки» [125] вводить наступну класифікацію по товщині пластин:

– *тонкі пластинки з малими прогинами* (класична теорія тонких пластин);

– тонкі пластинки з великими прогинами (нелінійна теорія);

– *товсті пластинки* (розглядаються в рамках тривимірної теорії).

Класична теорія коливань тонких ізотропних однорідних пружних пластин, що згинаються, базується на наступних припущеннях:

1) лінійні елементи, які до деформації перпендикулярні до серединної площини, залишаються прямолінійними і нормальними до скривленої серединної поверхні після деформації;

2) елементи серединної площини не піддаються розтяганню, що рівнозначно зведенню задачі про деформації до дослідження деформації серединної поверхні пластини.

Ці припущення були прийняті Г. Кірхгофом у роботі «Про рівновагу і рух пружної пластини» [255]. На їх основі він вивів визначальне рівняння для поперечних коливань пластини:

$$D\nabla^2\nabla^2 w_0(x,y,t)+\rho h\frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial t^2}=q(x,y,t),$$

де x, y – декартові координати;

t – змінна часу,с;

$w_0(x,y,t)$ – прогин точок серединної площини пластини;

ρ – густина матеріалу пластини, кг/м^3;

h – товщина пластини, м;

$q(x,y,t)$ – зовнішнє поперечне навантаження, прикладене до пластини;

E – модуль пружності, Па;

ν – коефіцієнт Пуассона;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини.

Це рівняння параболічного типу. Та, як відзначалося згодом багатьма дослідниками, має ряд недоліків і описує тільки низькочастотні деформаційні процеси, що повільно протікають.

У середині двадцятого століття в існуючі класифікації були включені так звані *пластини середньої товщини*, рівняння поперечних коливань яких було істотним уточненням моделі Кірхгофа. Уточнені рівняння, були отримані Я. С. Уфляндом [131] на основі моделі балок Тимошенка [124] в 1948 р., а в 1951 р. Міндлін (R.D. Mindlin) [264] одержав такі ж рівняння, виходячи з варіаційного формулювання, і довів єдиність їх розв'язків.

Стосовно до пластин припускається, що елемент, спочатку прямолінійний і нормальний до серединної площини пластини, залишається також прямолінійним після деформації, однак кут його нахилу до серединної площини пластини може бути відмінний від прямого кута (кут змінюється):

$$\begin{gathered} u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z \cdot \psi_x(x,y,t); \\ v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z \cdot \psi_y(x,y,t); \\ w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t), \end{gathered}$$

де $z \in [-h/2; h/2]$, h – товщина пластини;

$u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ і $w(x,y,z,t)$ – компоненти вектора переміщення;

$u_0(x,y,t)$, $v_0(x,y,t)$ і $w_0(x,y,t)$ – переміщення точок серединної площини пластини;

$\psi_x(x,y,t)$ і $\psi_y(x,y,t)$ – кути повороту нормалі до серединної площини пластини в площинах xOz і yOz, відповідно.

Визначальне рівняння є гіперболічним та описує розповсюдження двох типів деформаційних хвиль.

У монографії [15] розглядаються тонкі пластинки та оболонки, пружні прогини яких порівнянні з їхньою товщиною, але малі в зіставленні основними розмірами. У ній містяться теоретичні та експериментальні результати, отримані автором у період з 1941 по 1955 р. Перша частина книги (глави 1-4) присвячена гнучким пластинкам. Розглянуто задачу про більші прогини прямокутної та круглої пластинок при поперечному навантаженні, а також питання стійкості та закритичної деформації цих пластинок. У наступній монографії [16] цього автора нелінійна теорія динаміки пластин та оболонок викладена не тільки для гіпотез Кірхгофа (пластин) і Кірхгофа-Лява (оболонок), але і моделі типу Тимошенка.

В огляді Е. І. Григолюка та І. Т. Селезова [67] наведено докладний опис некласичної теорії пластин та оболонок, у якому в основному розглядаються уточнені динамічні теорії, засновані на моделі С. П. Тимошенко. Крім того, в [67] освітлено результати механіки деформівного твердого тіла, отримані у вітчизняній і закордонній літературі з вісімнадцятого століття до середини 1971 р., а також описані шляхи для подальшого уточнення моделей деформування пластин.

Згодом широкий розвиток отримали різні варіанти уточнених теорій коливань пластин та оболонок [60, 260], що пов'язані з необхідністю одержання більш точної математичної моделі і нові додаткової інформації про НДС конструкційних елементів. Стислий огляд робіт цього напрямку представлений у публікації [260]. У цій же роботі отримана уточнена теорія високого порядку деформування пластини, що враховує поперечну деформацію зсуву, поперечну нормальну деформацію та нелінійний розподіл у площині переміщень вздовж товщини.

Вибір моделі уточненої теорії високого порядку залежить від ряду критеріїв. Наприклад, від відносної товщини пластини h/l (h – товщина пластини, l – характерний розмір досліджуваного тіла); наявності шарів і співвідношення їх пружних властивостей; видів навантаження (локалізація в просторі та за часом). У роботі [279] показано застосовність уточненої теорії високого порядку на прикладі задачі про удар багатошарової пластини кулею. Модель ґрунтується на гіпотезах нелінійної залежності переміщень від поперечної координати в кожному шарі, причому переміщення u, v мають кубічну залежність від поперечної координати, а прогин w – квадратичну залежність; крім того, враховуються поперечні деформації. Аналогічні результати докладно описуються в монографії [109], де також отримані рівняння руху для багатошарових пластин та оболонок на основі уточнених теорій першого та високого порядків. Наприклад, в роботах [119, 120, 274] виконано моделювання динамічного відгуку різних шаруватих конструкцій на імпульсні навантаження.

У загальному вигляді уточнені рівняння отримані як математична апроксимація тривимірної теорії пружності, і мають вигляд степеневих рядів по поперечній координаті z:

$$\begin{gathered}u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\cdot\psi_{x1}(x,y,t)+z^3\psi_{x3}(x,y,t)+\ldots;\\ v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\cdot\psi_{y1}(x,y,t)+z^3\psi_{y3}(x,y,t)+\ldots;\\ w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)+z^2\cdot\psi_{z2}(x,y,t)+\ldots\end{gathered}$$

Як правило, для апроксимації поздовжніх переміщень використовуються ряди по непарних степенях, а для прогинів – по парним, однак при моделюванні поперечного обтиснення можна зустріти члени виду $z\cdot\psi_{z1}(x,y,t)$. У монографії [118] будується уточнена модель теорії багатошарових пластин, а в [102, 118] – теорії оболонок, які враховують локальне поперечне стиснення.

Відзначимо, що рівняння, отримані Я. С. Уфляндом і Р. Д. Міндліном, дозволяють враховувати ефекти інерції обертання та зсуву. При дослідженні нестаціонарного деформування одношарових ізотропних пластин добре себе зарекомендувала теорія на основі гіпотез Тимошенка, а уточнені теорії більш високого порядку доцільно застосовувати для неоднорідних і багатошарових пластин.

1.2. Монографії та роботи оглядового характеру

Наукова школа академіка А. П. Філіппова внесла істотний вклад [18] у вивчення нестаціонарних коливань деформівних елементів конструкцій у вигляді пластин (та інших пружно деформівних об'єктів канонічних форм). У роботах [65, 132, 133, 134] розглянуто питання, пов'язані з коливаннями деформівних пластин під дією навантажень різного характеру, у тому числі під дією ударних. Наведено аналітичні та числові методи їх розрахунку. У публікації [135], крім розвитку методів розв'язання динамічних задач, представлені результати експериментальних досліджень деформування елементів конструкцій. Також відзначимо дві монографії, написані учнями А. П. Філіппова [17, 156].

Вкажемо, що в роботі оглядового характеру [75] можна ознайомитися з бібліографією великої кількості досліджень динаміки пластин та оболонок.

Унікальним по своєму змісту є трьохтомний збірник [107], який являє собою серію оглядів, що містять бібліографію наукових досліджень у СРСР у проміжку з 20-х по 70-і рр. двадцятого століття по актуальним розділам сучасної механіки, включаючи основну проблематику загальної механіки, механіки рідини і газу, а також механіки деформівного твердого тіла. Особливої уваги заслуговує третій том [106], у якому проведений глибокий аналіз основних методів і найважливіших результатів минулого сторіччя по багатьом напрямкам розвитку лінійної теорії пружності.

Узагальнюючі публікації закордонних учених і учених України по ряду наукових напрямків механіки, які виконані в останні роки XX століття, зібрані в шеститомному виданні «Успіхи механіки» [129, 130].

Відзначимо фундаментальні роботи з теорії пластин та оболонок учених Інституту механіки ім. С. П. Тимошенко НАН України [74, 114], у яких широко використовуються інтегральні перетворення та теорія інтегральних рівнянь, у тому числі Вольтерра.

У роботах [5, 6, 72] досліджено статичні і динамічні задачі для пружних основ з початковими напруженнями. На базі введених комплексних потенціалів розглянуті плоскі статичні (для одного і системи жорстких штампів з тертям і без урахування тертя) і динамічні (для рухомих з постійною швидкістю штампів, навантажень) контактні задачі для пружних тіл з початковими напруженнями. Результати отримані в загальній формі при довільній структурі пружного потенціалу. Вісесиметричні контактні задачі і задачі про тріщину нормального відриву в шарі з початковими напруженнями зведені до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду, яке допускає ефективне чисельне розв’язання для неперервного ядра. Наприклад, в публікації [5] наведено результати дослідження впливу початкового напруження на момент згину в пластині, що лежить на попередньо-напруженому напівпросторі, за дії рухомого навантаження. Рівняння руху пластини записано з врахуванням зсуву та інерції обертання. У просторі зображень одержано розв'язок в загальному випадку для стисливого і нестисливого напівпросторів, різних умов контакту та швидкостей руху навантаження.

У монографії [74] показано, що для деяких класів зображень за Лапласом, оригінали яких не вдається одержати аналітично, їх визначення можна звести до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра. У першу чергу, цей прийом зручний у випадку зображень, що мають вид *дробу*

$$x^L(s) = f^L(s)/k^L(s),$$

де оригінали функцій $f^L(s)$ і $k^L(s)$ існують та можуть бути визначені в явному вигляді. Множачи ліву і праву частини формули на знаменник $k^L(s)$ і застосовуючи теорему про згортку оригіналів, одержуємо інтегральне рівняння Вольтерра I роду

$$\int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t),$$

яке потім або зводиться до рівняння Вольтерра II роду, або розв'язується чисельно.

При можливості подання зображення у вигляді

$$x^L(s) = \frac{f^L(s)}{1+k^L(s)},$$

де оригінали функцій $f^L(s)$ і $k^L(s)$ можуть бути визначені аналітично, безпосередньо із цього співвідношення можна одержати інтегральне рівняння Вольтерра II роду

$$x(t) + \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t).$$

Запропонований прийом, як приклад, застосований при розв'язанні зовнішньої задачі нестаціонарної гідропружності, коли обернене перетворення Лапласа за допомогою теорії лишків отримати дуже важко або не можливо.

1.3. Роботи з розв'язання нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла, у яких використовуються інтеграли згортки та інтегральні рівняння

Напрямок, присвячений оберненим задачам у механіці деформівного твердого тіла [11, 61, 64, 248, 271, 272], почав активно розвиватися з 70-х років минулого століття, і продовжує розвиватися дотепер, хоча перші роботи з'явилися ще на початку двадцятого століття. Їх інтенсивний розвиток став можливим у зв'язку з досягненнями в областях математичної фізики, обчислювальної математики та бурхливим розвитком обчислювальної техніки; приведемо деякі відомі монографії [66, 89, 108, 116, 117, 126, 137].

В обернених задачах механіки деформівного твердого тіла потрібно знайти причини та визначити фактори, залежно від класу оберненої задачі, при відомих наслідках і деякій додатковій інформації про об'єкт дослідження. У монографії [11] наведений варіант класифікації обернених задач, при якому розрізняють ретроспективні, граничні, коефіцієнтні та геометричні обернені задачі. Для зазначених варіантів обернених задач при деякій додатковій експериментальній інформації визначаються коефіцієнти диференціальних операторів, початкові та крайові умови, геометрія внутрішніх дефектів (порожнин, тріщин).

В роботі [12] докладно описані методи і алгоритми розв'язання інтегральних рівнянь, до яких можуть зводитися обернені задачі, міститься огляд літератури, а також методи їх наближеного розв'язання, наприклад, метод регуляризації Тихонова.

Деякі автори також виділяють коректні, некоректні та проміжні задачі [110].

Найбільш широке практичне застосування при розв'язанні обернених задач отримав метод регуляризації А. М. Тихонова, що полягає у введенні спеціального функціонала, що згладжує, [116, 126, 137]. Питання вибору параметра регуляризації добре вивчені у літературі, наприклад, у роботі [108] отримано умови узгодження параметра регуляризації з похибкою вихідних даних, а також необхідні і достатні умови для збіжності наближеного розв'язку до точного.

Питанням вибору оптимального параметра регуляризації Тихонова при розв'язанні задач ідентифікації для лінійно-пружного континуума присвячена робота [267].

В [283] крім апріорного вибору параметра вивчаються апостеріорні правила вибору параметра регуляризації Тихонова для розв'язання нелінійних неупорядкованих задач. Автори вводять два апостеріорні правила та показують, що в порівнянні з їх попередніми роботами оптимальні результати збіжності порядку були отримані при набагато слабкіших припущеннях, що важливо в інженерній практиці. Чисельні експерименти підтверджують деякі теоретичні результати.

В цей час можна зустріти багато робіт, присвячених розвитку методу А. М. Тихонова, наприклад, [235, 251, 256, 280, 281, 291].

Метод послідовного прогнозування-коректування параметра регуляризації при розв'язанні обернених задач Вольтерра описаний в [256], причому як «еталонний» метод автор використовує метод А. М. Тихонова, з яким виконується зіставлення.

У роботі [251] виконується визначення параметра регуляризації для дискретних некоректних задач. Пряме розв'язання дискретних некоректних систем лінійних рівнянь або розв'язання задач методом найменших квадратів з даними, що «зашумлені» помилками, у загальному випадку не дає гарних результатів, оскільки накопичена помилка «руйнує» обчислений розв'язок. У цій статті пропонується нова проста методика визначення значення параметра регуляризації. Вона заснована на порівнянні обчислених розв'язків, що обумовлені регуляризацією Тихонова та усіченою сингулярною декомпозицією. Аналогічні порівняння пропонуються для великомасштабних проблем. Методика визначення параметра регуляризації дає неявну оцінку норми помилки у вихідних даних.

Відзначимо, що зараз виділяють цілий клас методів регуляризації Арнольді-Тихонова [235, 280, 281, 291].

Одна з основних робіт цього напрямку [235]. У ній викладається те, що регуляризація Тихонова для великомасштабних лінійних некоректних задач звичайно реалізується шляхом визначення часткової бідіагоналізації Ланцоша матриці даної системи рівнянь. У цій роботі розглядається можливість обчислення часткового розкладання Арнольді даної матриці. Обчислювальні приклади ілюструють, що для такого підходу може знадобитися менша кількість обчислень добутків матриць на вектори і, отже, менше арифметичних операцій. Більше того, запропонований метод регуляризації Арнольді-Тихонова з обмеженим діапазоном не вимагає знання сполученої матриці і, отже, його зручно використовувати для задач, у яких важко обчислити сполучені матриці.

В [280] представлено два нових алгоритми, які особливо підходять для розрідженої реконструкції. Основна ідея складається в ітераційному використанні процедури регуляризації. Матриця регуляризації може обновлятися як на кожному кроці, так і після того, як були виконані деякі ітерації, що привело до двох різних підходів: перший з них заснований на ідеї методу; другий заснований на перезапуску алгоритму Арнольді. Наводяться числові приклади, щоб показати ефективність цих нових методів, і проведені порівняння з деякими іншими вже існуючими алгоритмами.

Автоматичне настроювання параметрів для методів Арнольді-Тихонова описані в [281]. У рамках ітераційних методів регуляризації для великомасштабних лінійних некоректних задач у цій статті вводиться новий алгоритм вибору параметра регуляризації при виконанні методу Арнольді-Тихонова. Припускаючи, можливість застосування принципу нев'язки, ця нова стратегія може працювати без обмежень на вибір матриці регуляризації. Запропонований метод також використовується як процедура визначення рівня шуму, коли він завищений. Наводяться числові експерименти, пов'язані з дискретизацією інтегральних рівнянь і відновленням зображень.

У роботі [291] описано два елементарних методи розв'язання задачі найменших квадратів з лінійної дискретної некоректної задачі – це тихоновська регуляризація та усічене розкладання за сингулярним значенням (TSVD). На основі описаних методів пропонується модифікований метод регуляризації, що застосовується до гібридного методу Арнольді. Для ілюстрації ефективності методу представлені теоретичний аналіз і числові приклади.

1.4. Роботи, у яких використовуються інтегральні рівняння Вольтерра для визначення динаміки навантаження

На рис. 1.1 представлено схему, що ілюструє основні можливі варіанти використання інтегральних рівнянь Вольтерра в задачах нестаціонарного деформування пластинчастих елементів конструкцій.

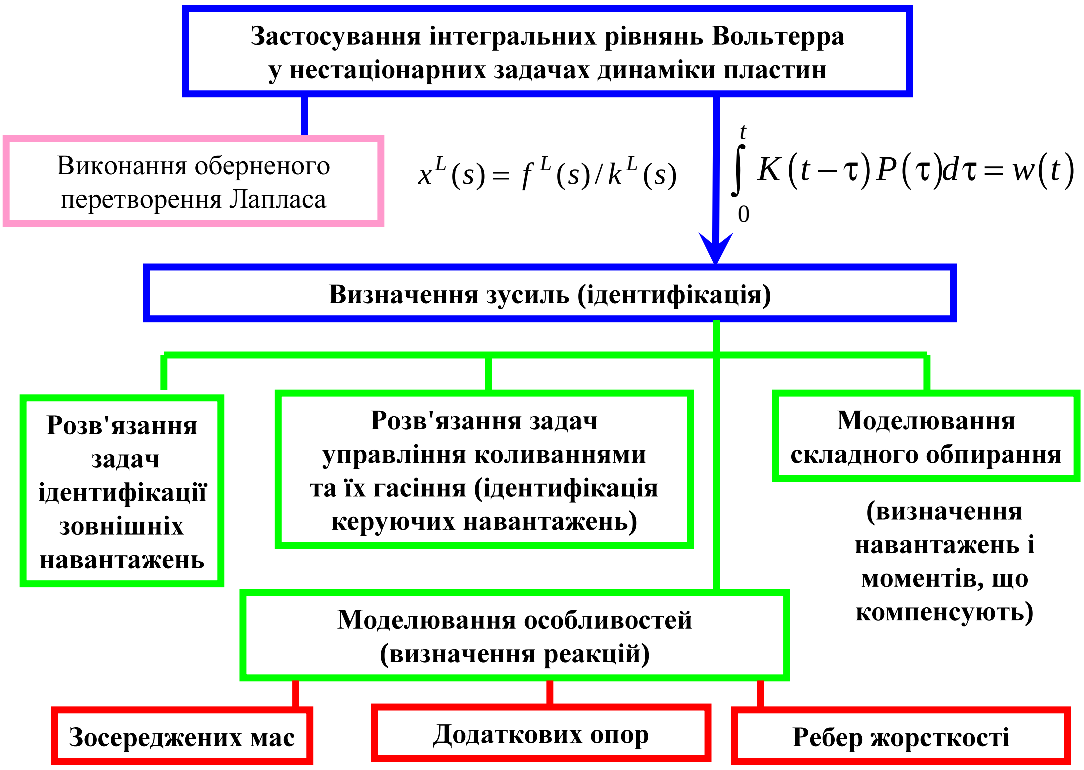


Рисунок 1.1 – Застосування інтегральних рівнянь Вольтерра

У колективних монографіях [82, 83, 84, 105, 220], написаних під керівництвом Янютіна Є. Г. зібрано ряд наукових результатів, які відносяться до наукового напрямку, що розглядається у цій роботі. Деякі результати вперше опубліковані в цих монографіях, основна частина результатів досліджень була опублікована як статті в періодичних виданнях, збірниках наукових праць, а також матеріалах міжнародних конференцій і симпозіумів.

У роботах [48, 104] розглядаються нестаціонарні коливання струн та їх систем, викликані скінченною кількістю зосереджених навантажень. Нестаціонарними навантаженнями можуть моделюватися зовнішні сили, також реакції, що відповідають впливу зосереджених мас або демпферів. Для системи струн, що перетинають одну загальну струну, будується узагальнена схема дослідження. Викладається методика побудови системи рівнянь, що складається з одномірних хвильових рівнянь для певної довільної кількості струн, яка замикається додатковими співвідношеннями в точках контакту. Отримана система є системою інтегральних рівнянь Вольтерра, що після дискретизації зводиться до блокової системи лінійних рівнянь. Блокова система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується з використанням узагальненого алгоритму Крамера (УАК) та регуляризуючого алгоритму Тихонова (РА Тихонова). У роботі [104] розв'язано обернену задачу для системи з трьох струн, що контактують між собою в деяких точках так, що переміщення в цих точках збігаються. У статті [48] як приклад розв'язана задача про нестаціонарні коливання струни з двома приєднаними демпферами.

У статті [21] описано задачу ідентифікації нестаціонарного зосередженого навантаження, що діє на прямокутну мембрану, а в [177] досліджується можливість керування нестаціонарними коливаннями мембрани в деякій її точці.

У роботах [138, 153, 154, 217, 219, 224] наводиться розв'язання некоректної динамічної задачі для кругової мембрани, представлені пряма і обернена задачі для нестаціонарно навантаженої круглої мембрани, досліджується ідентифікація зовнішнього навантаження, що діє на кругову мембрану.

В [197] розглянуто коливання прямокутної мембрани, що контактує із пружною основою, при імпульсному навантаженні.

Роботи [154, 198, 199, 200, 219] присвячені нестаціонарним коливанням мембран з приєднаною масою і мембран, що несуть кілька зосереджених мас. Зазначені задачі зводяться до системи декількох інтегральних рівнянь Вольтерра.

У статтях [204, 206] опубліковано розв'язання задач про визначення впливу зосередженого нестаціонарного навантаження на мембрану-смугу та відновлення в часі функції навантаження, що діє на нескінченну мембрану-смугу.

Публікації [207, 215] присвячені розв'язанню нестаціонарних задач теорії пружності (прямих, обернених і управління) для стрижневих елементів конструкцій постійного перетину. У роботі [143] на базі розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра досліджується нестаціонарна задача управління напруженим станом стрижневого елементу.

У роботі [141] досліджуються поздовжні хвильові коливання складених стрижнів при імпульсному деформуванні. Управління динамічним напруженим станом складених стрижнів описане в [208].

У роботах [147, 148, 179, 210, 213] опубліковано дослідження з розв'язання прямих і обернених задач для нестаціонарно навантаженого стрижня змінного перетину. Особлива увага приділена питанням ідентифікації та управління в задачах імпульсного деформування стрижнів змінного перетину. Вкажемо, що розглядається не довільний закон зміни площі змінного перетину, а спеціальний експонентний вид, що дозволяє одержання розв'язань прямої задачі в аналітичної формі.

Дослідження прямих і обернених задач для складеного стрижня змінного перетину описані також в [211, 214].

Прямі і обернені задачі для пружно деформівних балок розглянуті в роботах [46, 50, 43, 149, 151, 155, 161, 162, 163, 164, 178, 189, 190, 193, 194, 195, 196, 203, 225].

У публікаціях [49, 191, 192] подібні задачі розглядаються з урахуванням дисипації або у в’язкопружній постановці.

Відзначимо, що в статті [45] опубліковано результати експериментальних вимірювань деформацій балок з різних матеріалів (сталь, орг. стекло ПММА, асфальтобетон) при ударному навантаженні. Зазначена робота може служити джерелом вихідних даних при розв'язанні обернених задач ідентифікації ударних впливів на балки з реальних конструкційних матеріалів.

В [190, 203] з використанням інтегральних рівнянь Вольтерра досліджуються коливання шарнірно обпертих балок при нерухомому силовому збурюванні.

Розв'язанню нестаціонарних прямих і обернених задач для балок з додатковим пружним обпиранням присвячена стаття [151].

Застосування інтегральних рівнянь Вольтерра в задачах нестаціонарного деформування систем балок описане в [149, 178, 195], наведено розв'язання обернених нестаціонарних задач.

Розв'язанню обернених задач при впливі рухомих навантажень на однопрогонові балки присвячені роботи [50, 149, 162, 163, 193, 194, 225, 246]. Під оберненими задачами в цих роботах розуміються задачі, ціль яких – ідентифікація рухомих навантажень, що діють на балки.

В [43, 50, 149, 155, 161, 164, 203] описано розв'язання прямих і обернених задач для двох- і багатопрогонових балок. Наприклад, у роботах [164, 195] наведено приклади для трьох- і чотирьохпрогонових балок.

Аналогічні задачі були розглянуті також у в’язкопружній постановці. Так у роботах [178, 191, 192] розв'язано задачі ідентифікації рухомих навантажень, що діють на в’язкопружні балки.

У роботах [178, 196] розглядається механічна система, що складається з балки та приєднаної до неї зосередженої маси, причому вплив маси замінюється невідомою реакцією між балкою та масою. Для визначення невідомої реакції розв'язується обернена задача, що зводиться до розв'язання інтегрального рівняння (або системи рівнянь) Вольтерра. Аналогічний підхід використаний в [46] для моделювання коливань мас і додаткових опор, що контактують із балками.

У роботах [69, 196, 203] на базі розв'язання обернених задач виконується ідентифікація параметрів при нестаціонарних коливаннях механічних систем, що містять елементи у вигляді балок. Так в [69, 203] описано методику знаходження як точки прикладення невідомої нестаціонарної зосередженої сили, що діє на балку, на основі мінімізації функціонала нев’язки, так і закону зміни невідомого навантаження в часі. Вкажемо, що в [69] задачі ідентифікації розв’язані у в’язкопружній постановці. У статті [196] розглянуто задачі з ідентифікації координати точки прикладення зосередженої сили та величини приєднаної зосередженої маси для коливної системи «балка-маса».

У статті [189] розв’язується задача ідентифікації навантаження, яке збурює коливання при дії на складену балку, що складається із двох частин з різних матеріалів (з різними пружними постійними). При розв'язанні задачі використовується метод фіктивних навантажень і розширеного поля, що приводить до дослідження системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.

У роботі [50] описано застосування інтегральних рівнянь Вольтерра для визначення навантажень, що компенсують, при моделюванні нестаціонарних коливань консольної балки, яка заміняється шарнірно обпертою балкою більшої довжини з додатковими (фіктивними) навантаженнями.

Розв'язанню прямих і обернених задач для тонких пластин у рамках моделі Кірхгофа присвячені дослідження [147, 148, 158, 160, 161, 162, 163, 165, 192, 299]. У роботах [147, 148, 158, 160, 162, 192, 299] враховується вплив пружної основи на деформування прямокутних пластин, що моделюють дорожні одяги, при дії рухомих навантажень для урахування впливу транспортних засобів.

У роботах [161, 165] досліджується нестаціонарне деформування тонких пластин круглої форми, розв’язані прямі та обернені задачі.

Відзначимо, що в [192] описано ідентифікацію рухомих навантажень, що діють на плити, які моделюються тонкими пластинами у в’язкопружній постановці.

В [47, 149, 205, 287] досліджується нестаціонарне деформування пластини-смуги, виконується ідентифікація зосередженого нестаціонарного впливу на нескінченну пластину-смугу.

Дослідження динамічного деформування прямокутної пластини на основі одного хвильового рівняння в рамках теорії типу Тимошенка описане в [185].

Постановка та розв'язання динамічних прямих і обернених задач для прямокутної пластини з урахуванням поперечного обтиснення представлено в публікаціях [184, 186].

Нестаціонарним коливанням шарнірно-обпертої пластини, підкріпленої лінійними ребрами жорсткості, присвячені роботи [201, 202], наведено розв'язання прямої та оберненої задач.

Застосування теорії інтегральних рівнянь Вольтерра при розв'язанні динамічних обернених задач для круглих пластин середньої товщини описане в [51, 52, 154, 180, 219].

У роботах [154, 218, 219, 226, 228] досліджується нестаціонарне вісесиметричне деформування положистих сферичних оболонок. Деформування оболонок описане в рамках гіпотез типу Тимошенка. Наведено розв'язання прямих і обернених задач при цьому використовується метод фіктивних навантажень, що компенсують зайві збурення, для точного виконання необхідних крайових умов.

Аналогічні дослідження наведені для напівсферичних і підйомистих сферичних оболонок у публікаціях [222, 294]. Представлено розв'язання задачі ідентифікації поверхневого нестаціонарного навантаження, що діє вісесиметрично на напівсферичну оболонку з жорстко затисненим краєм. Розв'язання оберненої задачі виконуються з використанням некласичної теорії оболонок і методу регуляризації А. М. Тихонова. Як вихідні дані для ідентифікації зовнішнього навантаження використані дані реальних експериментальних досліджень. Отриманий задовільний збіг ідентифікованого навантаження з реальним.

Цикл робіт [51, 52, 56, 58, 157, 179, 180, 183, 187, 188, 212, 216, 221, 223, 226, 228] присвячений розв'язанню некоректних задач для циліндричних оболонок.

В [51, 52, 179, 180, 212, 216, 226, 228] досліджуються прямі та обернені некоректні задачі імпульсного вісесиметричного деформування для циліндричних оболонок скінченної довжини.

Наприклад, в [226, 228] представлено розв'язання задачі теорії пружності про управління компонентами узагальненого переміщення в точці уздовж довжини циліндричної оболонки скінченної довжини при вісесиметричному деформуванні за рахунок дії системи торцевих силових впливів, які визначаються з розв'язання інтегральних рівнянь.

У роботах [51, 52, 180] метою задачі управління нестаціонарними коливаннями циліндричної оболонки скінченної довжини було забезпечення виконання критерію керування (заданого прогину в деякій її точці) шляхом введення додаткових навантажень. Описано методику використання теорії некоректних задач математичної фізики стосовно до проблеми ідентифікації керуючих навантажень для оболонок.

Відзначимо роботу [157], у якій описаний наближений спосіб ідентифікації довільного вісесиметричного навантаження, що діє на циліндричну оболонку, причому виконується ідентифікація навантаження не тільки за часом, але й за просторовою змінною.

Розв’язані прямі та обернені задачі імпульсного навантаження невісесиметричних циліндричних оболонок нескінченної довжини [56, 58, 183, 187, 188, 221, 223].

В роботах [56, 188] досліджується нестаціонарне вісесиметричне деформування складених циліндричних оболонок скінченної довжини. Задачі розв’язуються з використанням методів розширеного поля та фіктивних навантажень, у результаті задачі зводяться до розв'язання систем інтегральних рівнянь.

Розв'язання прямої та оберненої задачі для шарнірно-обпертої циліндричної оболонки з концентричними ребрами жорсткості наведене в [79, 80, 152]. Зауважимо, що хоча автори опиралися на відоме розв'язання прямої задачі, опубліковане в [97], використовуючи сучасні підходи теорії інтегральних рівнянь і некоректних задач математичної фізики, вони одержали нові розв'язання як прямої, так і оберненої задач.

Розв'язання прямих і обернених задач для конічних оболонок у роботах [179, 209] було виконано з використанням методу кінцевих різниць.

Певні успіхи були досягнуті в області розв'язання некоректних нестаціонарних задач просторової теорії пружності. Так у роботах [55, 57] досліджується нестаціонарне деформування пружного простору із циліндричною порожниною, розв’язується задача ідентифікації кінематичного навантаження на поверхні циліндричної порожнини пружного простору. У роботах [159, 164] розглядається початковий етап деформування пружного півпростору при кінематичному впливі, приводиться розв'язання оберненої задачі.

У рамках розв'язання обернених некоректних задач нестаціонарної динаміки проводилися експериментальні дослідження напружено-деформованого стану пружних елементів конструкцій. Одним з найбільш простих та дешевих, але в той же час досить точних методів дослідження при деформуванні (у тому числі нестаціонарному) є тензометричний. Більш докладно про цей метод та апаратуру, яка застосовувалась для виміру деформацій при ударному навантаженні можна ознайомитися, наприклад, в [44] або монографії [17]. Роботи [45, 81, 87] присвячені експериментальним дослідженням реальних елементів конструкцій при їх деформуванні з використанням тензометрії на устаткуванні, описаному в статті [44].

Цикл робіт [42, 59, 147, 148, 163, 158, 160, 162, 174, 192, 227, 299] пов'язаний з моделюванням дорожніх покриттів (жорсткого та нежорсткого типу) і дорожніх конструкцій в цілому. Одержання аналітичних розв'язків при моделюванні дорожніх конструкцій дає можливість побудови розв'язань обернених задач, що значно розширює галузь досліджень і можливі застосування математичних моделей, що отримані.

1.5. Роботи, присвячені ідентифікації та управлінню коливаннями із застосуванням нових технологій

В останні роки в інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України стали інтенсивно розвиватися дослідження задач при коливаннях електропружних механічних систем, які можна віднести до обернених та/або некоректних задач. Вкажемо деякі з них [2, 3, 4, 93, 94, 99, 139, 140, 142, 144, 145, 146, 230, 233, 292, 293]. Відзначимо, що в зазначених роботах математична основа розв'язання містить аналогічні підходи з тематикою цієї роботи (використовується теорія інтегральних рівнянь Вольтерра та методи регуляризації при їх розв'язанні).

Значний внесок у розвиток міцності, надійності та довговічності тонкостінних і неоднорідних конструкцій практичного призначення, а також сучасних конструкційних матеріалів (у тому числі для ракетних космічних комплексів) внесли науковці Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара та Інституту технічної механіки НАН України і НКА України (Гудрамович В. С., Дзюба А. П., Пошивалов В. П. та інші) [71, 88, 112, 113, 249, 268]. Наприклад, у роботі [268] розроблено метод прогнозування довготривалої міцності конструкційних матеріалів при ізотермічній повзучості в умовах одноосного стаціонарного навантаження з урахуванням стадії зміцнення. Запропоновано стохастичну модель руйнування при повзучості і методику ідентифікації констант повзучості матеріалу. Проведено розрахунок параметрів стохастичної моделі, який підтверджує її адекватність експериментальним даним. У статті [88] розглядаються: а) метод на основі розв’язування задачі оптимізації з використанням принципу максимуму Понтрягіна при обмеженнях загального вигляду, який дозволяє шляхом математичного моделювання створювати конструкції середнього класу складності з високою питомою міцністю при досить хороших деформаційних властивостях, б) голографічна методика, що дозволяє отримувати наочні і прийнятні за точністю результати при визначенні параметрів жорсткісних і міцнісних властивостей оболонково-пластинчатих конструкції, що оптимізуються, на їх модельних і натурних зразках, в) експериментально-розрахунковий підхід, що дає можливість поліпшити параметри більш складних за формою, розподілом матеріалу і навантаження конструкцій, визначення напружено-деформованого стану яких шляхом розрахунку є недостатньо надійним. Їх ефективність демонструється на прикладах аналізу перерозподілу матеріалу циліндричної оболонки і ребристої пластини в зоні дії нормальної до поверхні сили картера коробки передач і зчеплення автомобіля. Викладена ідея перспективного підходу до раціонального розподілу матеріалу особливо складних корпусних конструкцій. Представлені розробки розширюють клас тонкостінних елементів конструкцій сучасної техніки і споруд, для яких можна ефективно реалізувати високий рівень конструкторських рішень по забезпеченню раціональних параметрів.

Відзначимо монографію [71], у якій викладено теоретичні засади методології голографічних й акустико-емісійних досліджень та діагностування конструкцій. Представлено розроблений на базі цих взаємодоповнюючих методів комплекс нових ефективних підходів, методик і засобів для досліджень та діагностування неоднорідних конструкцій при дії механічних навантажень, теплових полів і вібрації. Наведено приклади їх застосування у вирішенні низки проблемних задач, що складають теоретичний та практичний інтерес. Отримані результати значно розширюють коло задач механіки неоднорідних конструкцій, що вирішуються, можуть бути надійною основою для розробки і верифікації більш досконалих математичних моделей, підходів і методик при проектуванні, визначенні властивостей і діагностиці складних елементів нової техніки й інженерних споруд.

У публікації [247] на основі еволюційних (генетичних) алгоритмів для розв'язання обернених геометричних і коефіцієнтних задач теорії пружності (по визначенню розмірів, положення і властивостей, локалізованих і безперервних однорідностей у тілах, які здійснюють сталі або нестаціонарні коливання) виконується ідентифікація ударного навантаження, що діє на композитну панель у просторі (місце удару) та за часом.

У статті [252] розглядається процедура відновлення імпульсного навантаження, що діє на нелінійні системи, що зводиться до розв’язання інтегрального рівняння Вольтерра I роду із застосуванням методу регуляризації, розробленого авторами цієї роботи.

Цікавою є публікація [257], де розглядаються різні аспекти динамічної ідентифікації навантажень від транспортних засобів, що рухаються по верхній частині балки-плити мостової конструкції, що моделюється як ортотропна пластина, а навантаження від коліс – групою осьових навантажень. Крім аналітичних досліджень, авторами дані рекомендації з вибору кількості датчиків і місця їхньої установки. Відзначимо, що до такого ж напрямку відноситься більш рання публікація цих авторів [300].

Задачі управління можна розглядати як один з напрямків вібраційного захисту відповідальних конструкцій (гасіння нестаціонарних коливань, викликаних ударними та іншими короткочасними динамічними навантаженнями). Також до цього напрямку треба віднести задачі оптимального керування коливальними системами. Одним з основних факторів, що сприяють розвитку задач такого роду, є створення сучасних компактних і ефективних пристроїв для управління коливаннями, а також спеціальних удосконалених матеріалів (intelligent або smart materials) [128, 282, 285].

Наведемо нижче ряд прикладів застосування нових пристроїв і матеріалів для активного управління нестаціонарними коливаннями.

У статті [237] описано керування коливаннями пружної пластини, що збурюється імпульсною поперечною силою, яка діє під кутом, за допомогою спеціальних пристроїв п’єзодатчик/п’єзопривод (piezosensor/actuator). Пластина оснащена трьома парами п'єзоелектричних накладок, які використовуються як датчики та виконавчі механізми. Різні закони керування, а також комбінації датчиків і виконавчих механізмів були зіставлені для оцінки їх ефективності.

У роботах [232, 273, 290] гасіння коливань пластин здійснюється за допомогою приєднання зовнішнього динамічного гасителя.

У роботі [290] розглянуто активній погашувач коливань для пластинки, що згинається. Погашувач контактує з нею вздовж краю, однак сама пластина представлена, по суті, у вигляді коливної маси (яка не деформується). У роботі [273] розглядаються змушені коливання тонкої пластини з «дискретним динамічним погашувачем» з використанням методу скінчених елементів. Розглянуто механічну систему, яка складається з тонкої пластини і приєднаних до неї дискретних мас у вигляді накладок. Проаналізовано вплив товщини і площі плями контакту накладок на динамічне поглинання вібрації. Показано, що кілька дискретних мас краще поглинають вібрації у всьому частотному діапазоні 0-1000 Гц. Крім того зазначається, що існує оптимальна вага дискретної маси для оптимального поглинання вібрацій і оптимальна товщина накладок для даної області, а також оптимальна площа для даної товщини, в цьому випадку накладки поводяться оптимально як динамічні поглиначі вібрацій.

У роботах [261, 262] досліджується проблема управління коливаннями консольної прямокутної пластини за допомогою динамічного погашувача (vibratory flap – вібруюча полоса або «вібраційний клапан»). Визначається оптимальне співвідношення мас погашувача для найкращого зниження на першій і другий цільових частотах. Проведено експериментальне дослідження поперечної вібрації гармонійно збудженої, затиснутої прямокутної пластини з додатковою полосою.

У публікації [263] пропонується знижувати вібрації пластинчастих елементів за допомогою спеціальних вирізів певної форми. Вирізи широко використовуються в пластинах і оболонках для полегшення відводу тепла і забезпечення доступу до різних компонентів. Очікується, що через наявність вирізів динамічна поведінка погіршиться, і величини вібрації будуть збільшені. Досліджується можливість створення прямокутного вирізу в пластині з метою використання цього вирізу в якості динамічного поглинача вібрацій.

У статтях [295, 296] для активного управління коливаннями гнучких прямокутних пластин використається розроблений авторами підхід з використанням нових технологій і сучасних досліджень в області теорії автоматичного керування. Керування здійснюється на основі динамічного багатоканального контролера, який використовує результати моделювання коливань пластини виконані за допомогою методу скінчених елементів.

У роботах [90, 91, 92] описана методика активного демпфірування змушених резонансних коливань згину прямокутних пластин при дії на них невідомого механічного навантаження за допомогою спільного використання двох типів п'єзовключень – сенсорів (п'єзодатчиків) і актуаторів (п'єзоприводів). За показниками сенсора (величині заряду або різниці потенціалів) відновлюється амплітуда і фаза зовнішнього навантаження. Після цього до актуатору підводиться різниця потенціалів, що розраховується по вже відомому навантаженню. Як приклад, в [92] розглянуто задачу про активне демпфірування резонансних коливань прямокутної в'язкопружної пластини з шарнірним обпиранням її торців. Отримано простий аналітичний вираз для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації невідомого механічного навантаження, обумовленого по експериментальними показниками сенсора. Зазначено на істотне значення дисипативних властивостей пасивного матеріалу для стійкості активного демпфірування резонансних коливань пластини. В [90, 91] за допомогою такого ж підходу розглянуті задачі про активне демпфірування коливань прямокутної пластини з жорстким защемленням торців і для випадку змішаних крайових умов відповідно.

Можливість контролю вібрації за допомогою активного п'єзоелектричного приводу з контролером оберненого зв'язку, що самонавчається («self-learning controller»), для конструкції у вигляді гнучкої пластини представлена в [284].

Незважаючи на те, що робота [239] присвячена гасінню вібрацій циліндричної оболонки, а не пластини, відзначимо її, тому що наведений у ній спосіб управління можна розглядати як проміжний варіант структурного управління. У цій роботі гасіння здійснюється не спеціальним пристроєм або матеріалом/шаром матеріалу в цілому, а спеціальними смугами, інтегрованими в шарувату циліндричну оболонку. У роботі піднімаються питання параметричної оптимізації при вивченні впливу геометричних параметрів розташування та товщини смуг, що демпфірують.

Моделювання та контроль вібрації пластини в сполученні з п'єзоелектричним матеріалом розглядається в [258].

Роботи [250, 254] належать до керування коливаннями механічних об'єктів, виконаних зі спеціальних матеріалів. У роботі [250] розглядаються пластини з функціонально градієнтних матеріалів (Functionally Graded Material – FGM), причому в ці пластини інтегровані цілі шари, що є п’єзодатчиками/п’єзоприводами (piezosensor/actuator). У роботі [254] описано зв'язану теорію деформацій зсуву пластини першого порядку (first order shear deformation theory - FSDT) для п'єзоелектричної гібридної прямокутної пластини, що не допускає розподілу електричного потенціалу та температури по її товщині. Ця теорія оцінюється порівнянням із тривимірним розв’язанням. Виявлено, що вплив зв'язаних ефектів є значним для відносно товстих п'єзоелектричних шарів.

У роботі [286] досліджується управління коливаннями п'єзоелектричних консольних композитних пластин, використовується модель скінченого елемента, заснована на теорії деформацій зсуву першого порядку (FSDT), розроблена для статичної форми згину та вібрації композитної пластини з скловолокна / поліефіру, пов'язаної з п'єзоелектричним приводом і сенсорними накладками. У моделі враховується маса та жорсткість п'єзоелектрика. Простий алгоритм керування швидкістю з негативним оберненим зв'язком для прямих і обернених п'єзоелектричних ефектів, використається для активного управління перехідним відгуком інтегрованої структури через замкнутий контур управління. У роботі представлені числові результати, які добре погоджуються з експериментами.

Активне гасіння коливань двошарової прямокутної пластини (метал-п’єзокерамика) при нестаціонарному електромеханічному навантаженні досліджено в статті [230]. Електричний сигнал, підведений до твердих електродних покриттів п’єзошару, зменшує амплітуди механічно індукованих коливань пластини. Розглядаються два підходи до визначення характеру електричного сигналу: перший полягає в мінімізації напруженого стану пластини, а другий підхід пов'язаний з суттєвим зменшенням змушених коливань при мінімізації вхідної потужності для формування керуючого впливу. Для моделювання електромеханічних коливань використовуються узагальнені гіпотези Кірхгофа. Розв’язання крайової задачі було отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом та відокремлення змінних. Щоб оцінити ефективність запропонованих у роботі підходів, коливання пластин були досліджені, коли п’єзошар перебував у режимі прямого п'єзоелектричного ефекту. Числові та аналітичні результати були підтверджені порівнянням з розв’язаннями методом скінчених елементів. У роботі також описаний метод розв’язання задачі відновлення залежності механічного навантаження за часом на основі відомих значень різниці потенціалів між відкритими п’єзошаровими електродами, яка виникає через коливання згину біморфної пластини.

У роботі [269] автори пропонують використовувати датчики прискорення для ідентифікації параметрів вібронавантажень і виготовлені із спеціальних удосконалених матеріалів консольні пластини, які моделюють гнучкі елементи, приєднані до космічних апаратів (сонячні батареї), для активного управління вібраціями та ефективного погашення коливань. Іншим з можливих шляхів управління коливаннями в таких конструкціях є використання гіроскопа та п’єзокерамічних накладок («PZT patches») [270].

Існують також інші підходи до управління коливаннями конструкцій у вигляді пластин та оболонок [234, 236]. Так у роботі [234] в задачі пасивного віброзахисту композитних пластин як пружні основи використовуються сучасні вдосконалені матеріали з пам'яттю (shape memory).

У статті [236] досліджується прямокутна алюмінієва пластина, що вібрує в повітрі або в контакті з водою. Пластина кріпиться болтами до стінки прямокутного контейнера з плексигласу. Деякі режими коливань спочатку реалізуються для перевірки впливу різних рівнів води та компонентів управління на модальні параметри. Потім до моделі системи застосовується адаптований алгоритм прямого перетворення з фільтром на основі методу найменших квадратів, що реалізує структурне управління вібрацією в лінійному полі з використанням підходу одиничного входу / одиничного виходу (single-input-single-output – SISO) для перших режимів вібрації пластини при наявності тонального первинного збурювання.

Відзначимо роботу [266], в якій описане параметричне моделювання та заснована на FPGA (field-programmable gate array – програмувальній польовій вентильній матриці) система реального часу для активного управління коливаннями п'єзоелектричної шаруватої консольної балки при резонансі.

Для зниження вібрацій іноді застосовують магнітострикційні приводи. У публікації [229] за допомогою методу скасування, заснованого на використанні інтелектуальних компенсаційних приводів, описане зниження вібрацій простої структури, що імітує несучу пластину заготівки. Запропонована стратегія компенсації реалізується при використанні магнітострикційних приводів, що діють вдалині від їх резонансних частот. Зокрема, описана процедура була протестована на двох іспитових пристроях, спеціально призначених для застосування у верстатах: вони потребують використання одного і трьох магнітострикційних приводів для одномірної (1D) і тривимірної (3D) компенсації коливань. Отримане зменшення бокових коливань 1D і 3D пластин у діапазоні частот до 400 Гц виявляється дуже задовільним.

Для гасіння коливань при значному динамічному навантаженні можна використати спеціальні стяжки, виготовлені зі сплавів з пам'яттю форми (shape memory alloys – SMA), наприклад, з NiTi-сплаву. Робота [275] присвячена дослідженням сплавів NiTi SMA, які мають більший втомний ресурс. Досліджується можливість розробки пристроїв для зм'якшення збитку від ураганів. Ці пристрої для фіксації в основному використовують дисипацію гістерезисної енергії NiTi у результаті її псевдопружної характеристики. У роботі вивчаються характеристики загасання та жорсткості (попередньо напружених і ненапружених) проводів NiTi та вплив цих динамічних характеристик на зміну динамічного відгуку структури. У проведеному дослідженні встановлено, що гібридні стяжки (сухожилля) мають найвищий ефект демпфірування та посилення для конструкції. Також робиться висновок про те, що, коли амплітуда збудження мала, стяжки діють як пристрої жорсткості. Як тільки амплітуда збудження досить велика, щоб ініціювати індуковані напругою фазові перетворення, стяжки діють як пристрої поглинання енергії. Ці результати дають дуже корисну інформацію для розробки більш ефективних кріпильних пристроїв, які можуть витримувати інтенсивні динамічні навантаження, наприклад, впливи ураганів.

Відзначимо, що активно ведуться наукові дослідження, присвячені безпосередньо виконавчим механізмам (actuators) для активного управління коливаннями та гасіння вібрацій. У роботі [276] досліджуються питання моделювання, ідентифікації та оптимізації одного такого пристрою з урахуванням часових затримок.

Розробці нетрадиційного динамічного амортизатора вібрації для гасіння в лінійних конструкціях присвячена робота [244]. Як прототип обраний відомий амортизатор так званого фойхтового типу. Представлено простий підхід для визначення наближених аналітичних розв'язань та оптимізації розробленого динамічного поглинача вібрації, прикріпленого до керованої вихідної конструкції, під дією силового збурення.

Оптимальна конструкція нового амортизатора для випадкових силових збурювань досліджується в роботі [265]. Для заданих значень демпфірування і маси системи визначені оптимальні коефіцієнти жорсткості та демпфірування поглинача. Показано, що існує оптимальне співвідношення мас, на відміну від класичних поглиначів, у яких продуктивність зростає зі збільшенням маси поглинача. Оптимальні параметри, пов'язані з оптимальним відношенням мас, обчислюються та підсумовуються для ряду коефіцієнтів загасання первинної системи. Ефективність запропонованого поглинача обговорюється та порівнюється з ефективністю класичного поглинача.

Одним з найважливіших напрямків, присвячених зниженню небезпечних амплітуд коливань у будівельних конструкціях, є проектування пристроїв захисту при землетрусах. Наведемо, як приклад, роботи [277, 278], у яких описана напівактивна система керування з використанням нечіткої логіки для регульованих демпферів, що знижують сейсмічні реакції каркасів будинків під час землетрусів. Представлено числове моделювання реакції каркаса 10-поверхового будинку [277].

Активний масляний демпфер (AMD) є одним з найбільше часто використовуваних активних пристроїв керування. В [232] описано числове моделювання ефекту зсуву, викликаного землетрусом, 10-поверхового будинку, що оснащений активним масляним демпфером. Наведені результати показують, що запропонований у роботі метод може бути корисним для зменшення сейсмічних реакцій конструкцій з меншими витратами на обчислення та забезпечити високу точність.

До опису активного погашення вібрацій в «інтелектуальних» конструкціях, що характеризуються невизначеністю моделі під дією збурювань навколишнього середовища, можна віднести науковий матеріал з роботи [231].

1.6. Висновок

Роботи [21, 82, 150, 168 – 171, 173, 175-177, 218, 226, 228, 298] відносяться до циклу досліджень, проведених у рамках кандидатської дисертації Воропая О. В., у якій розв'язані пряма та обернена задачі для пружної ізотропної прямокутної пластини середньої товщини під дією одного незалежного поперечного та (або) одного дотичного навантаження.

Основний зміст робіт [19, 20, 22 – 54, 59, 84, 87, 104, 155, 166, 167, 172, 174, 178 – 182, 227, 297] розгорнуто представлений в цій дисертаційній роботі.

Для пластин середньої товщини теорії типу С. П. Тимошенка з використанням теорії некоректних задач математичної фізики отримані розв'язання обернених задач динамічної теорії пружності з ідентифікації нестаціонарних навантажень, що діють на прямокутні пластини поперечно або дотично до їх зовнішніх лицьових поверхонь. Також в аналітичному вигляді побудоване розв'язання задачі ідентифікації при одночасному впливі на пластини двох незалежних поперечної та дотичній сил. Показано, що запропонована методика може застосовуватися при проведенні експериментальних досліджень елементів конструкцій у вигляді прямокутних пластин, які навантажуються нестаціонарно.

На основі отриманих розв'язань некоректних обернених задач динаміки пластин розроблені методика управління нестаціонарними коливаннями однієї довільної точки пластини за допомогою введення додаткових керуючих навантажень, що реалізують необхідні критерії керування. Запропонована методика дозволяє одержувати залежності зміни в часі керуючих впливів для різних варіантів імпульсних навантажень.

Згадані в даному огляді літератури роботи Воропая О. В., опубліковані після захисту кандидатської дисертації (2004 р.), носять узагальнюючий характер і розкривають тему його докторської дисертації, а також розвивають тематику побудови розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла.

З проведеного огляду можна зробити наступні **висновки**.

На теперішній час досліджені різні форми геометричного розподілу навантаження по поверхні пластини: зосереджені, рівномірно розподілені по малих і великих областях у вигляді круга, квадрата, прямокутника та еліпса, а також нерівномірно розподілені навантаження (у вигляді половини еліпсоїда обертання). Досліджувалося урахування обтиснення пластини. В рамках теорії пружності виконувалася ідентифікація складової ударного навантаження за часом на базі вихідних даних, які отримані з експериментальних досліджень. Розроблено методику, що дозволяє враховувати поздовжні та поперечні навантаження пластини. Розв'язано задачу управлінням нестаціонарними коливаннями в одній точці пластини.

Укажемо, що, незважаючи на деяку завершеність досліджень з ідентифікації нестаціонарних поперечних навантажень, що діють на прямокутні пластини середньої товщини, є ряд питань, що вимагають додаткового розгляду та уточнення:

Становить інтерес створення комплексу методів з ідентифікації системи сил, що складається з декількох одночасно прикладених незалежних навантажень, які можуть діяти як поперечно до серединної поверхні пластини, так і під нахилом або дотично до неї.

Назріла необхідність побудови загальної методики, яка дозволяє враховувати різні особливості типу наявності додаткової зосередженої або розподіленої маси, додаткових опор (пружних, в’язкопружних, та погашувачів коливань).

Доцільно розробити методи управління не в точці, а на малій у порівнянні з розмірами пластини площадці, а також створити ефективні методики гасіння нестаціонарних коливань по всій поверхні пластини.

Істотний інтерес становить створення спеціалізованого підходу, що дозволяє на базі наявних пружних моделей, одержувати розв'язання, які враховують дисипацію енергії коливань.

Основні наукові результати, наведені у першому розділі,опубліковано у працях автора [1-51].

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ, ВИКОРИСТАНІ В РОБОТІ

Описаний регуляризуючий алгоритм академіка А. М. Тихонова та його застосування для розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла.

Відомо, що розв'язання деяких задач нестаціонарного деформування пружних елементів конструкцій можуть бути зведені до розв'язання інтегральних рівнянь. Розв'язання інтегральних рівнянь, особливо Вольтерра першого роду, найчастіше є некоректною задачею. У рамках регуляризуючого алгоритму розглянута скінченновимірна апроксимація некоректної задачі та згладжу вального функціонала. Наведено приклад розв'язання тестової некоректної задачі з використанням регуляризуючого алгоритму. Приділено увагу питанню вибору значень параметра регуляризації.

Розглянуто комплекс методів для розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра на основі використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова в сукупності з узагальненими алгоритмами Крамера та Гаусса для блокових матриць. Описано особливості використання узагальнених алгоритмів Крамера та Гаусса, а також для алгоритму Гаусса наведено кілька варіантів його реалізації.

2.1. Введення

Як відомо, задачі нестаціонарного деформування пружних елементів конструкції описуються лінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних або їх системами [74, 135]. При їх аналітичному розв'язанні щодо змінної часу t одним з найбільш ефективних методів є використання операційного числення [7, 77, 78, 86, 95, 98, 103]. У випадку використання перетворення Лапласа диференціальним рівнянням у просторі зображень відповідають алгебраїчні рівняння щодо параметра перетворення Лапласа s. Труднощі з'являються, як правило, тільки при оберненому перетворенні для складних функцій. Використання теореми згортки при одержанні оригіналів функцій приводить до того, що шуканий розв'язок представляється у вигляді *інтеграла Дюамеля* (згортки)

$$u(t)=\int_{0}^{t}F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

який при відомих функціях $u(t)$, $F_2(t)$ і невідомою функцією $F_1(t)$ є *інтегральним рівнянням Вольтерра I-го роду*.

Такі рівняння зустрічаються при розв'язанні обернених нестаціонарних задач механіки [82, 83, 84, 105, 220], коли залежність зміни в часі сили, що збурює коливання, $z(t)$ невідома, а відомі лише її непрямі прояви. Наприклад, $u(t)$ – це зміни в часі переміщень або деформації в деякій точці елемента конструкції, викликані цією силою. Класичний запис інтегрального рівняння (2.1):

$$\int_{0}^{t}K(t-\tau)z(\tau)d\tau=u(t), \tag{2.2}$$

де функцію $K(t-\tau)$ прийнято називати різницевим ядром інтегрального рівняння.

Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра (2.2) найчастіше є некоректною задачею. У роботах [12, 66, 108, 116, 117, 126, 137] докладно описані умови некоректності задач математичної фізики, а також деякі методи їх розв'язання, наприклад *метод регуляризації Тихонова*.

Відзначимо, що всі математичні аспекти (докази, можливості застосування методу регуляризації, збіжності, стійкості та ін.) детально описані в чисельних працях *академіка А. М. Тихонова* та його послідовників [66, 116, 126, 137], присвячених сучасній теорії некоректних задач математичної фізики. Істотний розвиток метод регуляризації Тихонова дістав у задачах астрофізики [66]. В цей час регулярно з'являються математичні роботи, у яких описуються узагальнення та модифікації методу регуляризації Тихонова [235, 256, 280, 281, 291], а також досліджуються питання вибору параметра регуляризації [251, 281].

У цій роботі описуються прикладні аспекти *регуляризуючого алгоритму* А. М. Тихонова, особливості його використання при розв'язанні некоректних нестаціонарних задач механіки, а також питання, пов'язані з вибором параметра регуляризації.

2.2. Опис регуляризуючого алгоритму

При чисельному розв'язанні некоректних задач необхідно апроксимувати вихідну нескінченновимірну задачу скінченновимірною, для якої розробляється алгоритм, реалізований на ЕОМ. Розглянемо регуляризуючий алгоритм для розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра I-го роду.

Запишемо рівняння (2.2) в операторній формі:

$$A[z] = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{2.3}$$

де Z і U – гільбертові простори; A – інтегральний оператор, що відповідає ядру $K(t)$; $z = z(t)$ – шукана функція; $u = u(t)$ – відповідає правій частині (2.2).

Скінченно-різницева апроксимація виразу (2.3) будується з використанням квадратурних формул (наприклад, формул *метода прямокутників*, *метода трапецій* та ін.).

Введемо наступні позначення: Δt – крок у часі, с; T – величина всього проміжку дослідження $T = J \cdot \Delta t$, с; J – число кроків за часом.

Найбільш простим методом дискретизації, що зустрічається часто, для функції $K(t)$ є:

1) Метод лівих прямокутників (див. рис. 2.1)

$$K_i = K[i \cdot \Delta t]. \tag{2.4}$$

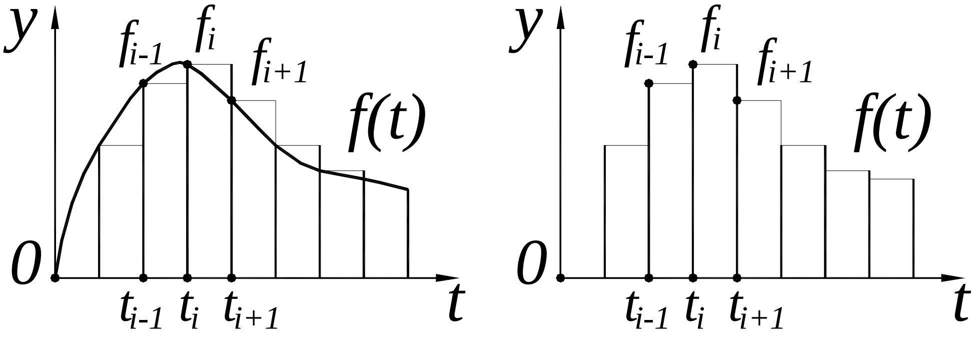


Рисунок 2.1 – Метод лівих прямокутників

На рис. 2.1 показано варіанти графічного інтегрування функції $f(t)$ методом лівих прямокутників.

2) Метод правих прямокутників (див. рис. 2.2)

$$K_i = K[(i+1) \cdot \Delta t]. \tag{2.5}$$

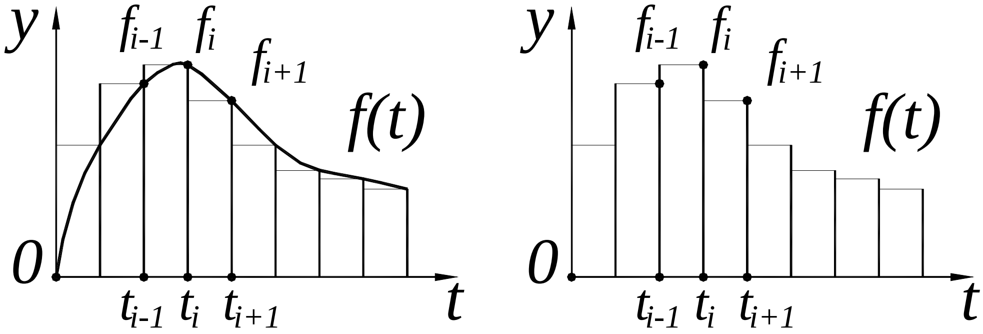


Рисунок 2.2 – Метод правих прямокутників

Рис. 2.2 демонструє графічне інтегрування функції $f(t)$ методом правих прямокутників. При порівнянні рис. 2.1 і рис. 2.2 видно, що виходять однакові результати, тільки для методу правих прямокутників вони зміщені на Δt вправо, уздовж осі часу.

Ці два методи належать до методів першого порядку. Наступні методи відносять до методів другого порядку, і вони мають більш високу точність.

3) Метод середніх прямокутників (див. рис. 2.3)

$$K_i = K\left[(i + 0.5) \cdot \Delta t\right]. \tag{2.6}$$

Формулу інтегрування на основі методу середніх прямокутників називають квадратурною формулою Маклорена. На рис. 2.3 показано графічне інтегрування довільної функції $f(t)$.

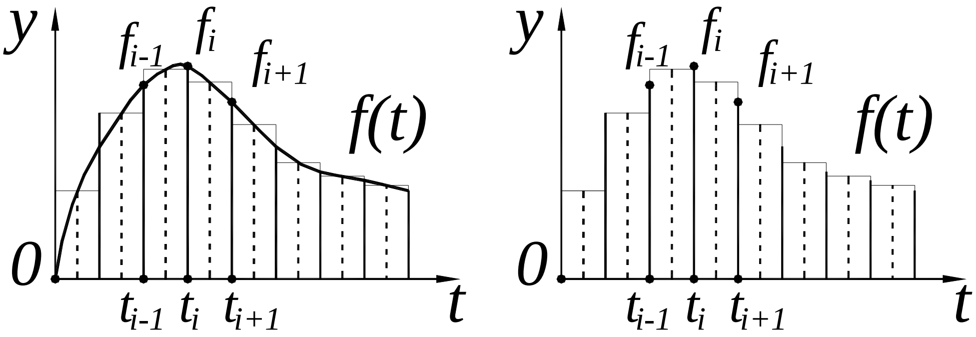


Рисунок 2.3 – Метод середніх прямокутників (формула Маклорена)

4) Метод трапецій для одиничного інтервалу (подібний до методу середніх прямокутників, див. рис. 2.3)

$$K_i = \frac{K\left[i \cdot \Delta t\right] + K\left[(i+1) \cdot \Delta t\right]}{2}, \tag{2.7}$$

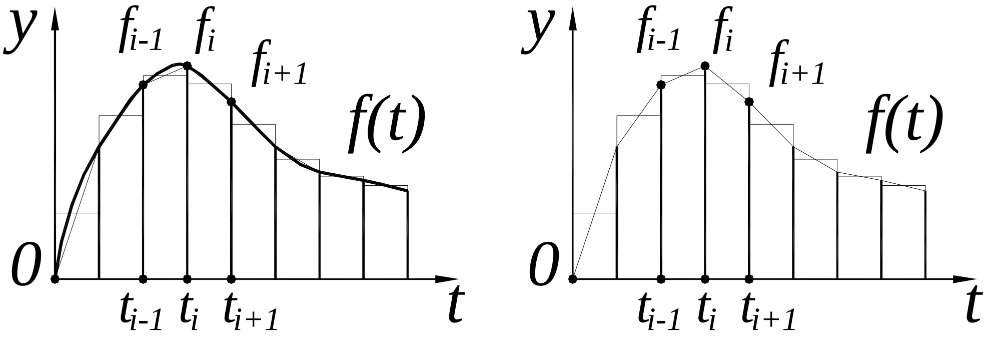


Рисунок 2.4 – Метод трапецій

5) Метод трапецій для подвійного інтервалу (аналогічний попередньому)

$$K_i = \frac{K\left[(i-1) \cdot \Delta t\right] + K\left[(i+1) \cdot \Delta t\right]}{2}. \tag{2.8}$$

На рис. 2.5 для зручності порівняння на одному графіку наведено одночасно метод середніх прямокутників і трапецій. Видно, що результати, хоч і близькі, але не збігаються. Висота еквівалентних прямокутників береться посередині досліджуваного інтервалу, на відміну від методу трапецій, де беруться середні арифметичні значення на інтервалі. Для деяких функцій, що осцилюють, цей метод забезпечує кращі результати.

Вкажемо, що тут наведені тільки найпростіші квадратурні формули. Наближене обчислення визначених інтегралів на сьогодні добре вивчене та описано у великій кількості підручників з вищої математики, наприклад [63], там же наведено оцінку похибок цих та інших методів для сімейства квадратурних формул Ньютона–Котеса та Грегорі. Відомо, що значно відрізняється точність методів першого і другого порядку.

Окремо виділяють метод парабол (формула Сімпсона), що має більше високу точність і відноситься до методів четвертого порядку. Однак формула Сімпсона ефективна для монотонних функцій, а ядра інтегральних рівнянь, як правило, належать до осцилюючих. Тому використати формулу Сімпсона з великим кроком не можна, а із дрібним не доцільно.

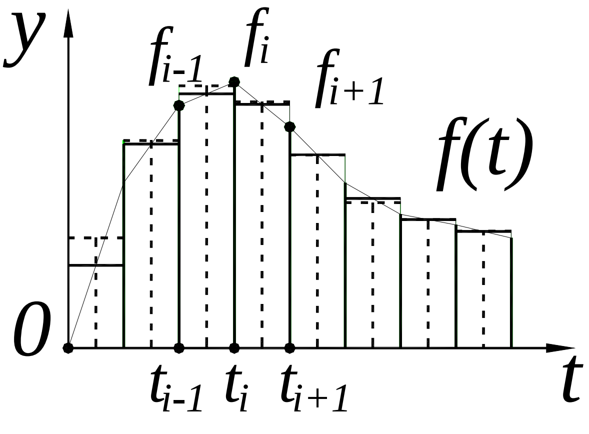


Рисунок 2.5 – Порівняння методу середніх прямокутників і трапецій

У випадку дискретизації виразу (2.2) методом лівих прямокутників з рівномірною сіткою ($\Delta t = \Delta\tau$) можна записати:

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \Delta t \sum_{i=1}^{j} K[(j-i) \cdot \Delta t] z(i \cdot \Delta t). \qquad (2.8)$$

Однак у випадку вироджених ядер $K(0)=0$ головна діагональ відповідної матриці буде містити елементи рівні нулю, і доцільніше застосовувати метод правих прямокутників

$$u_j = u(j\cdot\Delta t) = \Delta t\sum_{i=1}^{j} K[(j-i+1)\cdot\Delta t]z(i\cdot\Delta t), \tag{2.9}$$

причому необхідна точність дискретизації досягається за допомогою зменшення кроку.

У випадку дискретизації виразу (2.2) методом середніх прямокутників з рівномірною сіткою можна записати:

$$u_j = u(j\cdot\Delta t) = \Delta t\sum_{i=1}^{j} K[(j-i+0.5)\cdot\Delta t]z(i\cdot\Delta t). \tag{2.10}$$

Відзначимо, що формула (2.10) має більш високу точність і не має штучного зсування одержуваної кривої на $0.5\cdot\Delta t$.

Окремо виділимо, якщо функції вхідні в ядро не сильно складні та можуть бути аналітично проінтегровані, то краще застосовувати дискретизацію із частковим інтегруванням ядра виду:

$$u_j = u(j\cdot\Delta t) = \sum_{i=1}^{j} z(i\cdot\Delta t)\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j\cdot\Delta t-\tau)d\tau \tag{2.11}$$

Наприклад, для функції виду $K(t)=\Omega\cdot\sin(\omega\cdot t)$ на основі (2.8) можна записати:

$$u_j = \Delta t\cdot\Omega\cdot\sum_{i=1}^{j} z(i\cdot\Delta t)\sin(\omega(j-i)\cdot\Delta t); \tag{2.12}$$

а на основі (2.11):

$$u_j = 2\cdot\frac{\Omega}{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{j} z(i\cdot\Delta t)\sin(\omega(j-i)\cdot\Delta t)\sin\left(\omega\cdot\Delta t\big/2\right). \tag{2.13}$$

Дискретним аналогом для операторного рівняння (2.3) є система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка записана в матричному вигляді:

$$\mathbf{Az}=\mathbf{u}. \tag{2.14}$$

де $\mathbf{A}$ – матриця, що відповідає інтегральному операторові A, елементи якої можуть бути знайдені відповідно до залежності $a_{i,j} = K[(i-j)\Delta t]$; Δt – крок дискретизації за часом; $\mathbf{z}$ – вектор, що відповідає невідомій функції $z(t)$; $\mathbf{u}$ – вектор, що відповідає правій частині $u(t)$, елементи якого визначаються як $u_i = u(i \cdot \Delta t)$.

Відзначимо, що у випадку дискретизації інтегрального оператора A, який відповідає ядру $K(t,\tau)$, насправді виникне вже новий оператор A_h, який відповідає $K_h(t,\tau)$, такий, що згідно А. М. Тихонову, $\|A - A_h\|_{W_2^1 \to L_2} \le h_\delta$, де h_δ – так звана похибка дискретизації. Тому що $h_\delta \to 0$, для простоти в матричному співвідношенні (2.14) і скрізь надалі індекс h буде опускатися.

В випадку невиродженого ядра та добре обумовленої матриці $\mathbf{A}$, а також можливості обчислення оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1} \subset \varnothing$, можна одержати наступний вираз для шуканого вектора:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}. \qquad (2.15)$$

Якщо замість точного значення $\bar{u} = A \cdot \bar{z}$, нам відомо наближене значення u_δ таке, що $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$, де $\delta > 0$ – похибка завдання правої частини рівняння (вихідних даних), то $U = L_2[0,T]$. З фізичних міркувань можна вважати, що точне розв'язання $\bar{z}$, яке відповідає $\bar{u}$, є неперервна функція, яка майже всюди має похідну, інтегровану на $[0,T]$ з квадратом. Тому природно покласти $Z = W_2^1[0,T]$. В описаній постановці *для безрозмірного рівняння* (2.3) згладжквальний функціонал А. М. Тихонова має вигляд:

$$M^{\alpha}[z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + \alpha\|z\|_{W_2^1}^2. \qquad (2.16)$$

де $\alpha > 0$ – параметр регуляризації.

В розгорнутому вигляді (2.16) можна записати так:

$$M^{\alpha}[z] = \int_0^T \left[\int_0^t K(t-\tau) z(\tau) d\tau - u(t) \right]^2 dt + \alpha \int_0^T \left\{ z^2(t) + [z'(t)]^2 \right\} dt. \qquad (2.17)$$

Розв'язання некоректної задачі зводиться до відшукання мінімуму згладжквального функціонала $\inf\limits_{z\in Z} \mathrm{M}^{\alpha}[z]$, або його дискретного $\inf\limits_{z\in Z} \hat{\mathrm{M}}^{\alpha}[z]$ аналога. Дискретизацію найпростіше здійснювати на основі скінченно-різницевої апроксимації з рівномірним та однаковим кроком сіток $\Delta t = \Delta\tau = T/J$ на відрізку $[0,T]$. При реалізації обчислень на ЕОМ дослідження показали, що задовільні результати мають місце вже при $J \geq 100$. Збільшення кількості кроків у часі спричиняє зменшення Δt, що вже несе деяку регуляризуючу дію, як показано, наприклад, в [12]. Значне підвищення кількості кроків викликає більші витрати машинного часу. При проведенні обчислювальних експериментів, було встановлено, що при розв'язанні тестових задач гарні стійкі результати були досягнуті при $J = 500$.

Такім чином, згідно регуляризуючого алгоритму Тихонова розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра (2.2) еквівалентно розв'язанню регуляризованої системи лінійних рівнянь:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbf{C})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}. \tag{2.18}$$

де $\mathbf{A}^T$ – транспонована до $\mathbf{A}$ матриця, $\mathbf{C}$ – симетрична трьохдіагональна $(J \times J)$ матриця, яка має вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+1/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/\Delta t^2 & 1+1/\Delta t^2 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Розв'язок системи (2.18) можна записати у явному вигляді:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u}. \tag{2.20}$$

В працях академіка А. М. Тихонова і його послідовників показано, що в згладжквальному функціоналі (2.16), в залежності від апріорної інформації та вимог до гладкості функції, можуть використовуватися різні функціональні

Гільбертові простори. Наприклад, якщо замість простору Соболєва W_2^1 для $z(t)$ ввести L_2, то вид виразів (2.18), (2.20) не зміниться, а зміниться тільки вид матриці: **C** – вона стане одиничною.

2.3. Вибір параметра регуляризації

Певною складністю для ряду досліджень є оптимальний вибір параметра регуляризації. Розглянемо питання вибору параметра регуляризації α при розв'язанні рівнянь Вольтерра I-го роду з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова, реалізованого на ЕОМ.

Класичними та найбільш зручними методами вибору параметра регуляризації α для більшості обернених задач є методи мінімізації за α функціоналів *нев'язки* типу:

$$\left\| z^{\alpha} - \bar{z} \right\|_C . \tag{2.21}$$

$$\left\| A_z z^{\alpha} - u \right\|_{L_2}^2 . \tag{2.22}$$

де $\bar{z}$ – точний розв'язок, z^{α} – наближений, отриманий з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова при різних α.

Вкажемо, що введення та мінімізація функціонала (2.21) можлива тільки в деяких випадках, наприклад, у тестових задачах, при тарировці та ін., коли відомий точний розв'язок або його оцінки. Відповідно в більшості випадків необхідно використовувати функціонала виду (2.22). Причому залежно від конкретних задач, іноді доводиться шукати глобальні екстремуми, іноді локальні – тоді зручно для більш вдалого вибору параметра регуляризації вводити додаткові функціонали, використовуючи різну апріорну інформацію про шукану функцію (обмеження величини та ін.).

Окремо розглянемо вплив параметра регуляризації при розв'язанні некоректних задач механіки, що зводяться до інтегральних рівнянь Вольтерра.

При $\alpha = 0$ із залежності (2.20) можна одержати наступне співвідношення:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \qquad (2.23)$$

яке при скороченні праворуч і ліворуч на $\mathbf{A}^T$ збігається зі співвідношенням (2.3); однак співвідношення (2.23) також має місце, оскільки іноді неможливо знайти $\mathbf{A}^{-1}$, але вдається приблизно обчислити $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$.

Зі співвідношення (2.20) видно, що чим менше значення параметра регуляризації α, тим менша неточність вноситься у вихідне рівняння (2.2), тобто при рівних значеннях функціоналів бажано брати по можливості менші значення параметра регуляризації. Однак при дуже малих значеннях α згладжквальний функціонал Тихонова буде мати дуже слабкий стабілізуючий ефект і при незначних збурюваннях правої частини інтегрального рівняння розв'язання буде нестійким.

Також відзначимо, що в (2.18) параметр регуляризації множиться на матрицю $\mathbf{C}$, елементи якої пропорційні $1/\Delta t^2$, тобто матриця $\mathbf{C}$ може складатися з досить великих чисел (у розглянутому нижче прикладі це величини порядку $10^9 \div 10^{10}$), тому що при дослідженні перехідних процесів, до яких відноситься нестаціонарне (високошвидкісне) деформування пружних елементів конструкції, аналізуються дуже короткі проміжки часу з достатньо великим числом кроків дискретизації. У зв'язку із цим для ненормованих матриць $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ та $\mathbf{C}$, доводиться використати досить малі величини параметра регуляризації ($\alpha < 10^{-20}$).

Тому що згладжквальний функціонал Тихонова коректно вводити тільки для безрозмірних операторних рівнянь (2.3), розглянемо варіанти переходу до безрозмірної задачі:

1) У вихідних рівняннях просторові координати відносяться до довжини або ширини пластини, а час ділиться на цей же параметр і множиться на характерну швидкість (хвиль зсуву або вигину), тобто змінна часу ділиться на час пробігу хвилі уздовж пластини. Наприклад:

$$t_l = l \Big/ \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \tag{2.24}$$

2) Перед дискретизацією час вибирається не в секундах, а в частках найбільшого періоду (за першою гармонікою). Також у згладжквальному функціоналі член при шуканій функції (навантаженню) ділиться на квадрат статичної жорсткості механічної системи в досліджуваній точці пластини. Для описаного нижче прикладу у випадку використання зазначеного варіанта безрозмірювання $\alpha_{opt} = 10^{-2}$.

3) Всі розмірні величини діляться на одиничні розмірні коефіцієнти. З погляду мінімізації обчислень – це найшвидший і простий метод, але він приводить до дуже маленьких величин параметра регуляризації $\alpha < 10^{-20}$. Вкажемо, що наведені далі розрахунки були виконані відповідно до цього варіанта переходу до безрозмірної задачі. Для цього випадку можливе додаткове нормування матриць з метою приведення їх елементів до величин порядку $1 \div 10$, у такому випадку $\alpha \in [0.001;10]$.

Відзначимо, що у випадку розмірного операторного рівняння в обернених нестаціонарних задачах механіки деформівного твердого тіла можна використати модифікований згладжквальний функціонал виду:

$$\widehat{M}^{\alpha}[z] = \|Az - u\|^2_{L_2} + (\alpha^*)^2 \cdot c^2_{st} \left[\omega_{\min}{}^2 \cdot \|z\|^2_{L_2} + \|z'\|^2_{L_2}\right], \tag{2.25}$$

де α^* – безрозмірний параметр регуляризації в розмірній задачі; c_{st} – статична жорсткість системи в досліджуваній точці; $\omega_{\min}$ – мінімальна власна кругова частота коливань пластини.

Для описаного далі приклада параметр регуляризації буде $\alpha^*_{opt} = 10^{-5}$, але дослідження показали, що результати розв’язання оберненої задачі не відрізняються в залежності від того, для який функціоналу (розмірного чи безрозмірного) виконувалась мінімізація. Тобто змінюється лише величина параметра регуляризації.

2.4. Приклад розв'язання оберненої некоректної задачі для пружнодеформівної пластини

Розглянемо детально числове розв'язання оберненої некоректної задачі для прямокутної шарнірно обпертої пластини середньої товщини, аналогічної викладеній в [169]. Оскільки тут буде описаний обчислювальний експеримент з розв'язання оберненої задачі, то, на відміну від реальних експериментальних досліджень, точна залежність збурювальної сили буде відома. Відповідно для такої тестової задачі з'являється додаткова можливість оцінки точності ідентифікації зовнішнього навантаження при різних значеннях параметра регуляризації.

При ідентифікації невідомого нестаціонарного навантаження $P(t)$, що діє на пластину, при відомих змінах прогину $w(t)$ в деякій точці пластини, викликаними цією силою, необхідно розв'язувати інтегральне рівняння Вольтера I-го роду

$$\int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau = w(t), \tag{2.26}$$

де $K(t)$ – його ядро, яке визначається на базі аналітичного або чисельно-аналітичного розв'язання прямої задачі (тобто системи диференціальних рівнянь у частинних похідних). Як показано в [82, 84, 169] ядро $K(t)$ для прямокутних пластин має наступний вигляд:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\Omega_{jkn} \cdot \sin \omega_{jkn}(t)\,. \tag{2.27}$$

При розв'язанні оберненої некоректної задачі був прийнятий наступний порядок проведення обчислювального експерименту:

- Попередньо задавалося збурювальне навантаження $\overline{P}(t)$ (півхвиля синусоїди певної амплітуди).
- Зі співвідношення (2.26) визначалися значення прогину $\overline{w}(t)$ при дії заданого навантаження.

● Замість точних значень $w(t)$ як вихідних даних для оберненої задачі задавалися наближені значення $w_{\delta}(t)$. Збурювання з рівнем накладання шуму $\delta = 10\%$ здійснювалося за залежністю:

$$w_{\delta}(t) = \overline{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t), \tag{2.28}$$

де $w_{\max}$ – максимальне значення прогину пластини при дії навантаження $\overline{P}(t)$, $Rnd(t)$ – випадкові числа в діапазоні [-1;1].

● Рівняння (2.26) розв'язувалося при точно заданій функції $\overline{w}(t)$ та збуреній правій частині $w_{\delta}(t)$.

● Виконувався вибір оптимального параметра регуляризації.

● Здійснювалася оцінка точності ідентифікації при заданому навантаженні $\overline{P}(t)$.

При розрахунках серединна площина пластини збігалася із площиною xOy декартової системи координат. Розрахунки виконувалися при наступних значеннях: ρ=7890 кг/м^3; ν=0.3; E=2.07·10^{11} Па; h=0.04 м; l=0.6 м, m=0.4 м. Число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50.

Координати точки прикладення збурювального навантаження: x_0=0.4 м, y_0=0.3 м; координати точки, значення прогину в якій використовувалися при розв'язанні оберненої задачі: x_s=0.25 м, y_s=0.1 м.

На рис. 2.6 показано зміни в часі прогину $w_s(t) = \overline{w}(t)$, знайденого в результаті розв'язання прямої задачі – точні значення правої частини рівняння (жирна крива) і $w_{\delta}(t)$ – неточно задані значення правої частини, що використовувались як вихідні дані для розв'язання оберненої задачі (тонка крива).

Відзначимо, що незбуреним точним значенням прогину відповідає гладка крива, а зашумленим значеннянням – збурена (сильно осцилююча). Таким чином збурювання вихідних даних значно погіршує стійкість розв’язання та підсилює «некоректність» поставленої задачі.

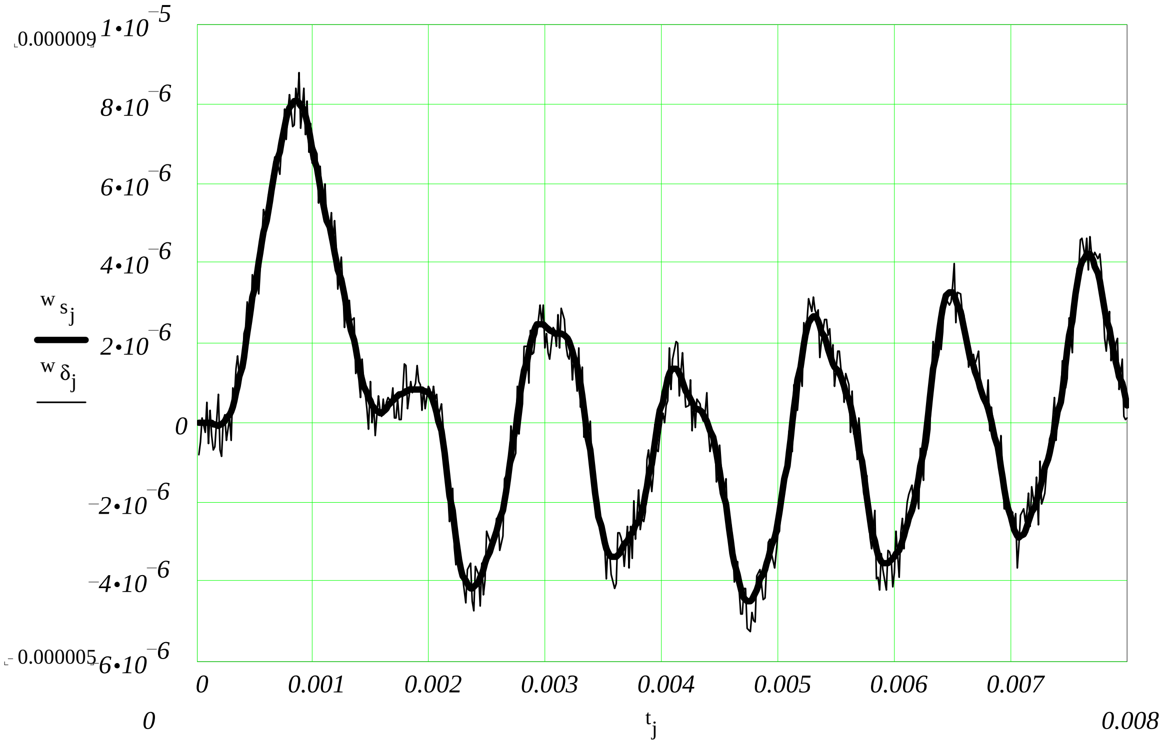


Рисунок 2.6 – Вихідні дані для оберненої задачі

Невідоме збурювальне навантаження $P(t)$ визначалося з виразу (2.20). Якщо виписати матрицю, що множиться на вектор, який відповідає шуканому навантаженню у регуляризованій системі лінійних рівнянь, то видно, що вона має два доданки $(\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\cdot\mathbf{C})$. Напевно, що елементи матриці $\alpha\cdot\mathbf{C}$, які містять параметр регуляризації не повинні перевищувати або бути значно менше елементів матриці $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$. Для цього розрахункового випадку максимальні значення елементів матриці $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ були порядку $2\cdot10^{-18}$, мінімальні значення для взятих по модулю елементів цієї матриці $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ були порядку $5\cdot10^{-28}$. Максимальне значення елементів матриці $\mathbf{C}$ для досліджуваного проміжку часу дорівнювало $\max(\mathbf{C})=7.813\cdot10^9$ або порядку 10^{10}. Отже, для описаного випадку параметр регуляризації α повинен мати значення приблизно в діапазоні від $10^{-18}\cdot10^{-9}=10^{-27}$ до $10^{-28}\cdot10^{-9}=10^{-37}$, розширеному на 10^{+2}. У такий спосіб у цій роботі величина параметра регуляризації досліджувалася в діапазоні $\alpha \in \left[10^{-35}; 10^{-25}\right]$. Вкажемо, що на деяких з наступних рисунків для зручності аналізу показаний не весь діапазон, а тільки його частина.

Причому, при розв'язанні тестової задачі добре видно, що при значеннях $\alpha = 10^{-25}$ наближений розв'язок був недостатньо точним, а максимальна амплітуда була сильно заниженою (див. рис. 2.7), де жирній кривій відповідає точна сила $\overline{P}(t)$, а тонкій – ідентифікована. Це обумовлено тим, що доданок $\alpha \cdot \mathbf{C}$ перевищує матрицю $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, що містить ядра інтегрального рівняння. При всіх $\alpha > 10^{-25}$ ситуація ще гірша і знайдений наближений розв'язок втрачає сутність.

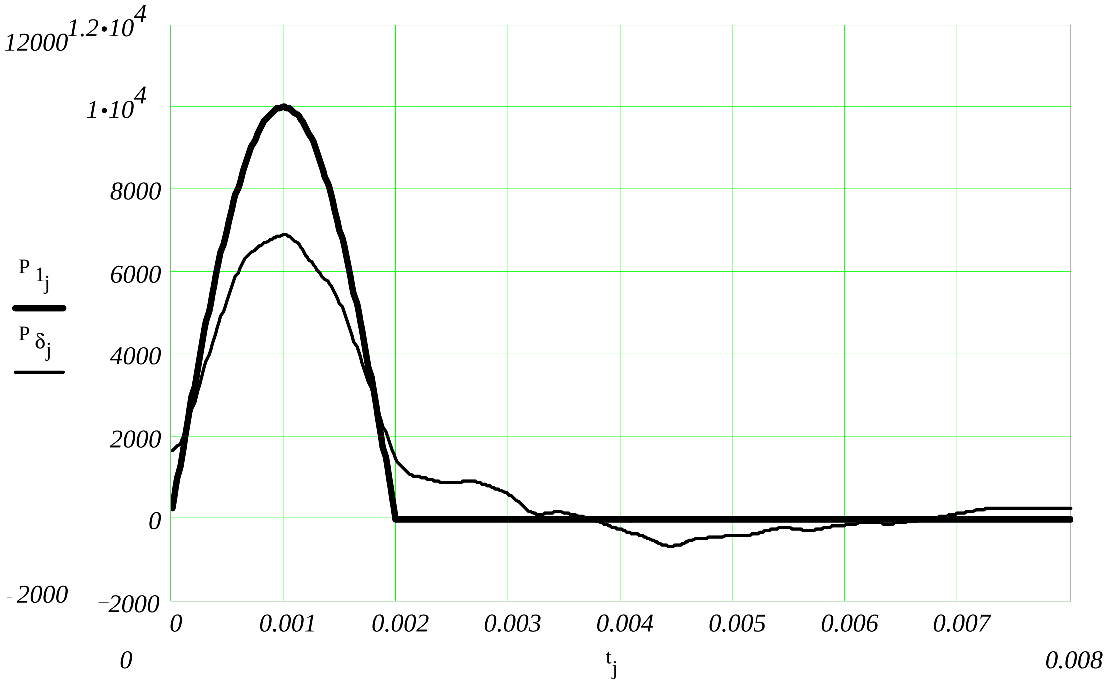
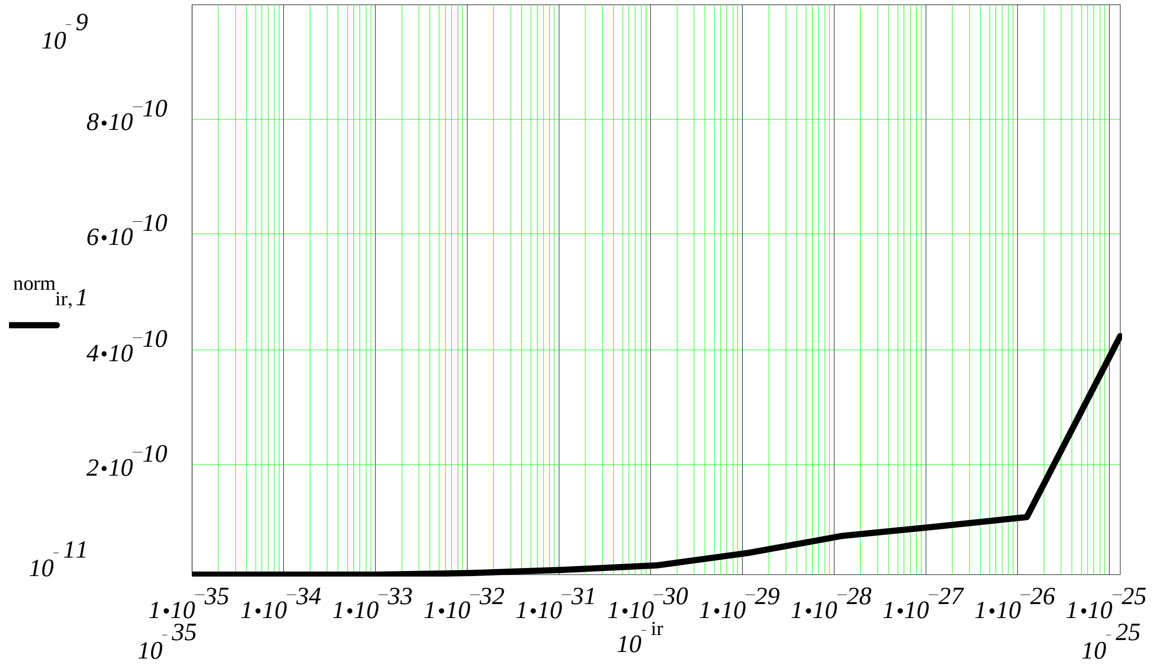


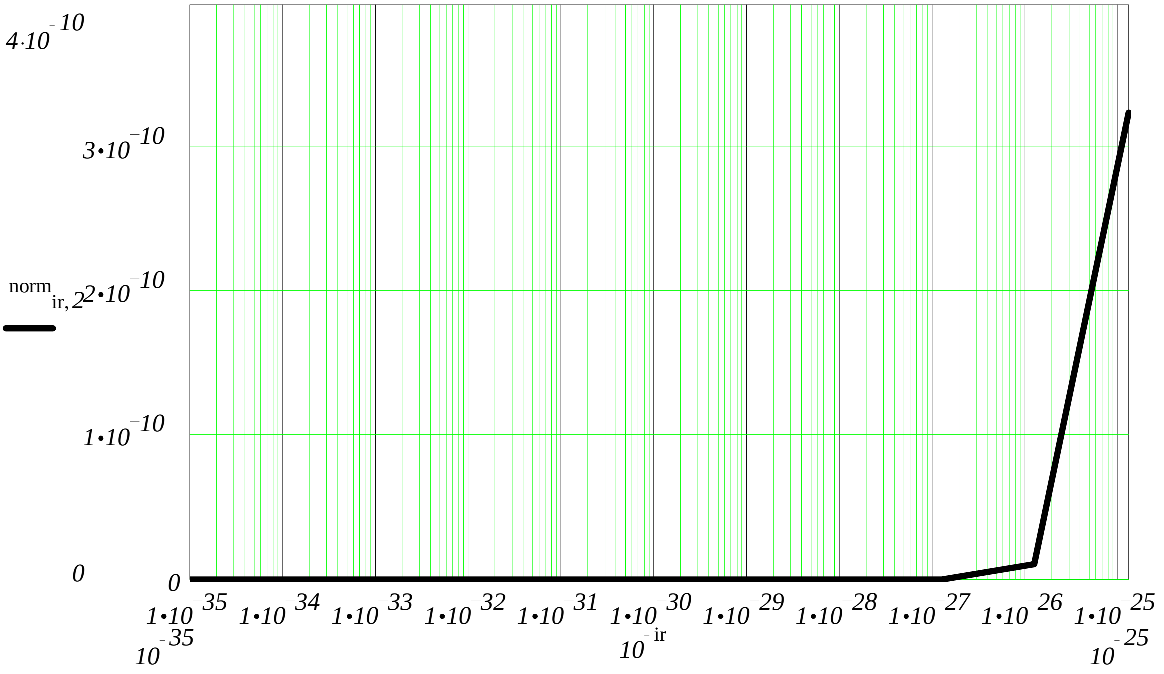
Рисунок 2.7 – Збурювальне навантаження (вихідне) та приблизно визначене

Для вибору оптимальних значень параметра регуляризації α при розв'язанні регуляризованої системи лінійних рівнянь (2.20) досліджувалися кілька функціоналів, графічні залежності яких наведені нижче. Вкажемо, що на всіх цих графіках значення параметра регуляризації для наочності відкладені уздовж осі абсцис у логарифмічній шкалі.

На рис. 2.8 показано функціонали типу нев'язки, на основі яких найчастіше вибирається параметр регуляризації:



а



б

а – для збуреної правої частини; б – для точно заданої правої частини

Рисунок 2.8 – Вид функціоналів типу нев'язки

У випадку неточно заданої правої частини інтегрального рівняння $w_\delta(t)$ функціонал нев'язки можна записати у вигляді: $\left\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^\alpha-\mathbf{w}_\delta\right\|_{l_2}^2$ (рис. 2.8, *а*); у тестовій задачі маємо вид цього функціонала для незбуреної правої частини $\overline{w}(t)$ – $\left\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^\alpha-\mathbf{w}\right\|_{l_2}^2$ (рис. 2.8, *б*).

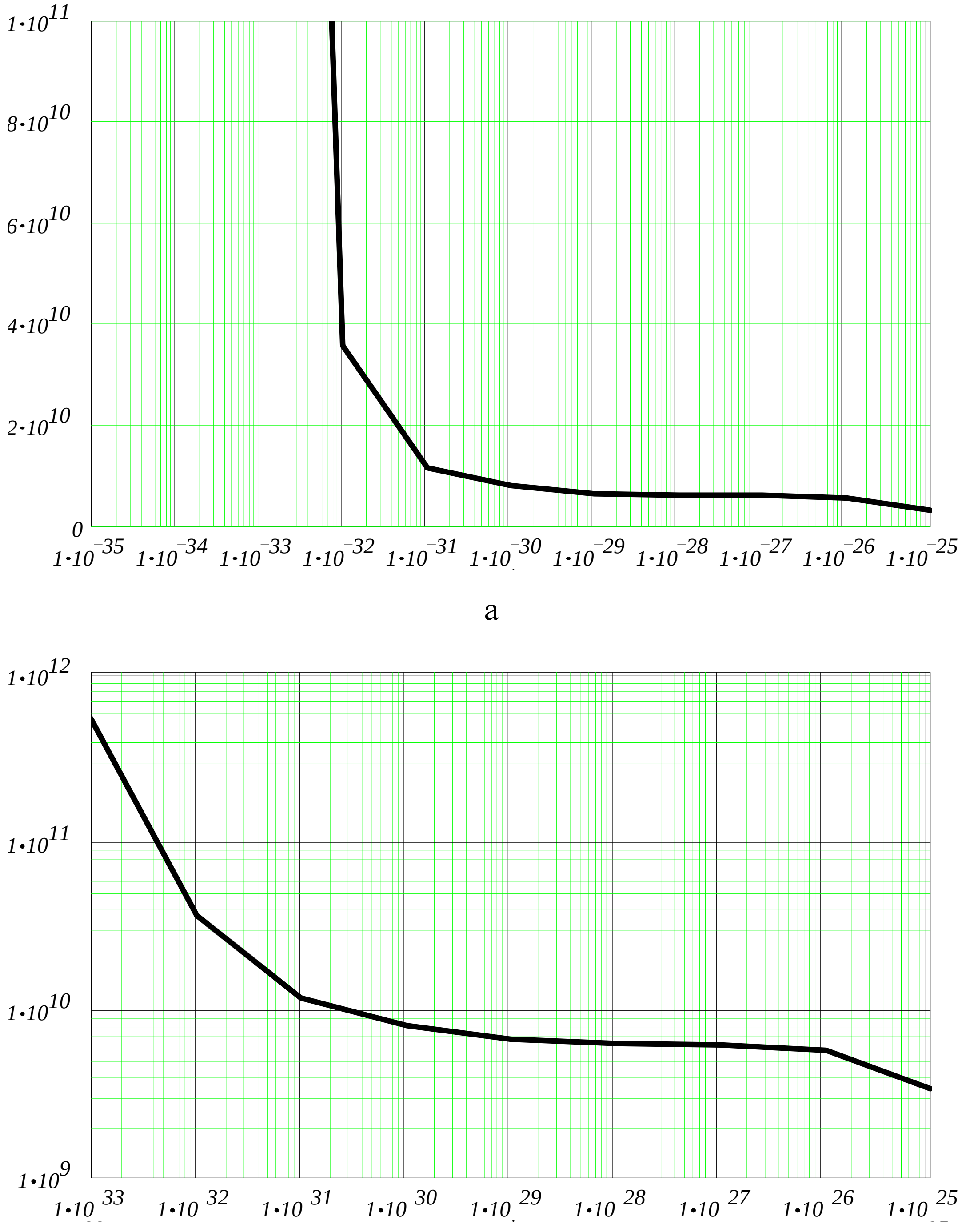
Вкажемо, що значення функціонала нев'язки для точно заданої правої частини повинне прямувати до нуля. На рис. 2.8, *б* видно, що при $\alpha<10^{-27}$, значення функціонала практично наближаються до нуля. Однак, у випадку неточно заданої (збуреної) правої частини значення функціонала повинні прямувати не до нуля, а до деякої малої константи, пропорційної рівню шуму δ. Як правило, у всіх реальних задачах присутні похибки виміру, посилення, перетворення та ін., у цьому випадку необхідно шукати не глобальний, а локальний екстремум функціонала. На рис. 2.8, *а* можна виділити діапазон вибору параметра регуляризації $\alpha\in\left[10^{-31};10^{-26}\right]$.

Для зменшення цього діапазону необхідно розглядати додаткові функціонали, використовуючи різну апріорну інформацію. Наприклад, функціонал «сумарного навантаження», який можна трактувати як варіацію мінімуму енергії (мінімуму роботи збурювального навантаження) – $\left\|\mathbf{p}^\alpha\right\|_{l_2}^2$ (рис. 2.9, *а*). На рис. 2.9, *б* графічно показаний цей же функціонал, тільки для зручності аналізу значення уздовж вісі ординат також відкладені в логарифмічній шкалі.

Відзначимо, що необхідні переміщення пластини будуть викликані мінімальною, але не нульовою силою, а отже, у досліджуваному для параметра регуляризації діапазоні $\alpha\in\left[10^{-28};10^{-26}\right]$.

Цікаве уточнення можна одержати, якщо ввести обмеження на відхилення обчисленого за ідентифікованою силою прогину від вихідного:

$\left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{\alpha} - \mathbf{w}_{\delta} \right\|_{C}$ (рис. 2.10). Розглядаючи цей функціонал в сукупності з попередніми (рис. 2.8– рис. 2.9), можна припустити, що $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.



б

а – значення уздовж осі ординат відкладені у звичайній шкалі;

б – значення уздовж осі ординат відкладені в логарифмічній шкалі

Рисунок 2.9 – Вид функціонала «сумарного навантаження»

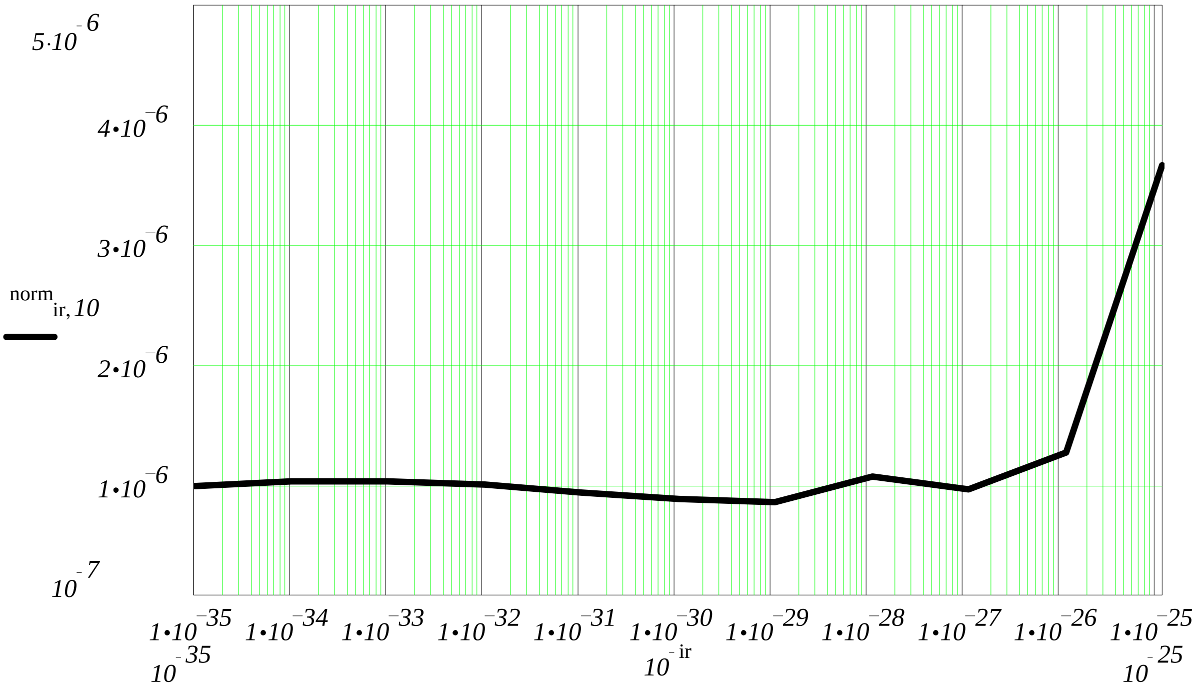


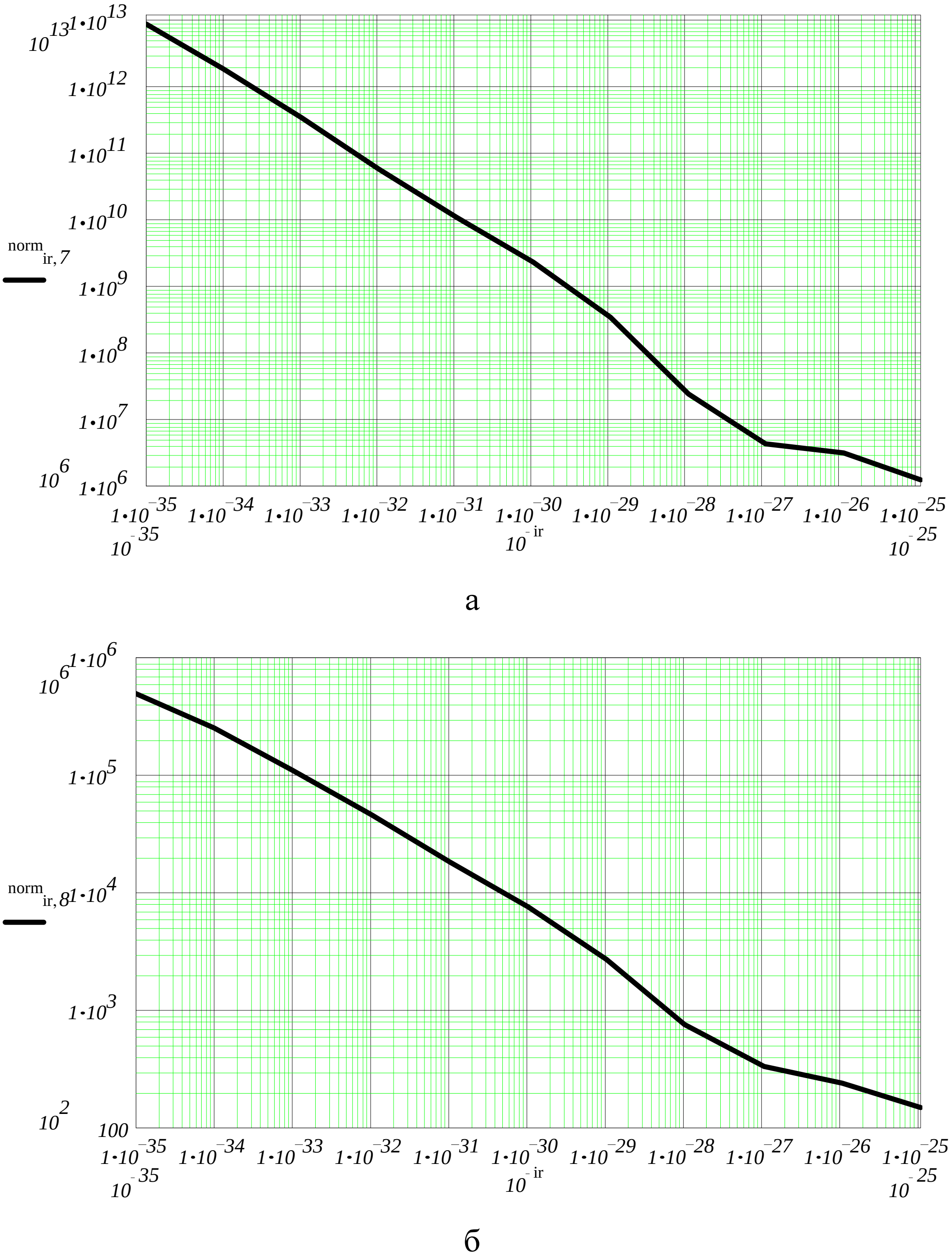
Рисунок 2.10 – До вибору параметра регуляризації

Також, коли є можливість використати додаткову апріорну інформацію про «гладкість» навантаження, що ідентифікується, можна досліджувати додаткові функціонали «гладкості»: $\left\|(\mathbf{P}^{\alpha})'\right\|^{2}_{l_2}$ – рис. 2.11, *а* та $\left\|(\mathbf{P}^{\alpha})'\right\|_{C}$ – (рис. 2.11, *б*). Вивчаючи функціонали на (рис. 2.11), можна також виділити $\alpha \in \left\lfloor 10^{-28};10^{-26} \right\rfloor$ та особливо $\alpha = 10^{-27}$.

У тестових задачах, а також при проведенні експериментальних дослідженнях з точно відомими тарувальними навантаженнями з'являється можливість оцінити точність розв'язання оберненої задачі (відносну похибку ідентифікації навантаження) згідно наступної залежності:

$$\delta_{id} = \frac{\int\limits_0^t \left[P^{\alpha}(t) - \overline{P}(t)\right]dt}{\int\limits_0^t \overline{P}(t)dt} \approx \frac{\left\|\mathbf{P}^{\alpha} - \overline{\mathbf{P}}\right\|_{L_1}}{\left\|\overline{\mathbf{P}}\right\|_{L_1}}. \tag{2.29}$$

Графік «відносної похибки ідентифікації навантаження» показаний на рис. 2.12.



а – функціонал «гладкості» у метриці l_2;

б – функціонал «гладкості» у метриці C

Рисунок 2.11 – Вплив параметра регуляризації на гладкість навантаження, що ідентифікується.

На рис. 2.12 явно видно, що для розглянутого приклада розрахунку найкращі результати розв'язання оберненої некоректної задачі отримані при значеннях параметра регуляризації $\alpha_{opt} = 10^{-27}$ (як і передбачалося раніше, з аналізу функціоналів, які представлені на рис. 2.8 – рис. 2.11).

Функціонал виду $\left\| \mathbf{P}^{\alpha} - \overline{\mathbf{P}} \right\|_{l_2}^{2} \Big/ \left\| \overline{\mathbf{P}} \right\|_{l_2}^{2}$ на рис. 2.13 має ще значніше виражений екстремум при $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.

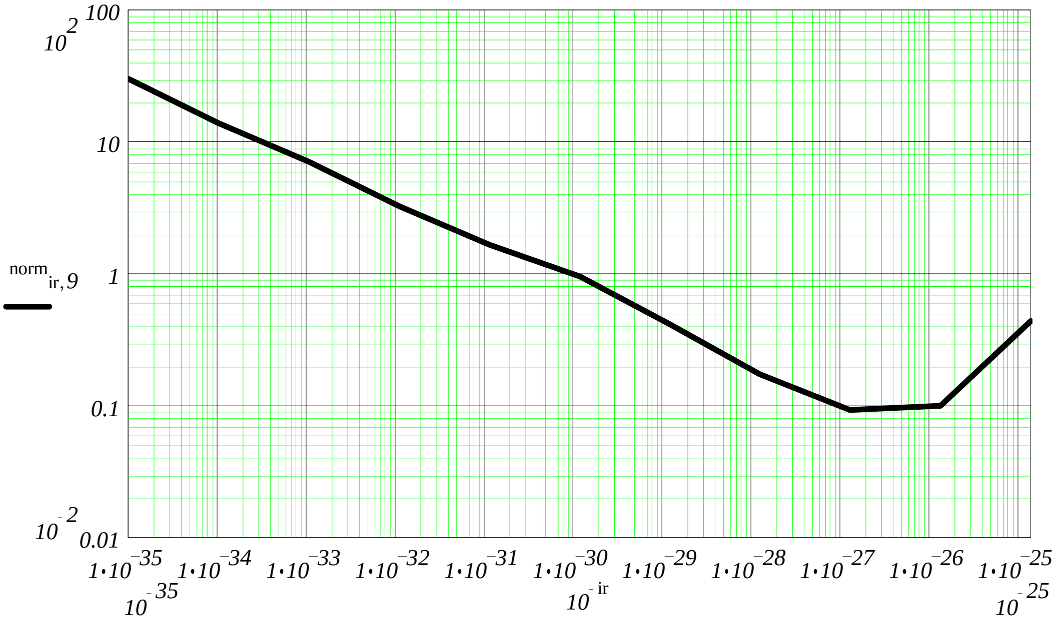


Рисунок 2.12 – Оцінка «точності» ідентифікації

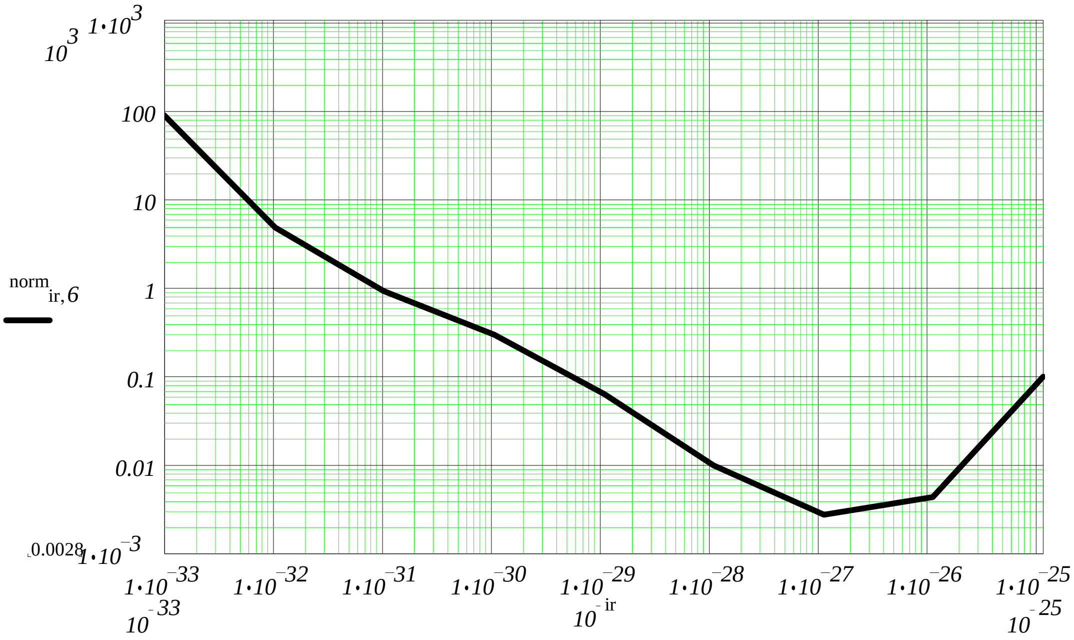


Рисунок 2.13 – Вибір оптимального параметра регуляризації

На рис. 2.14 – рис. 2.17 показано графіки ідентифікованого зовнішнього навантаження при різних значеннях параметра регуляризації – тонкі криві та тестове навантаження – півхвиля синусоїди (товста крива).

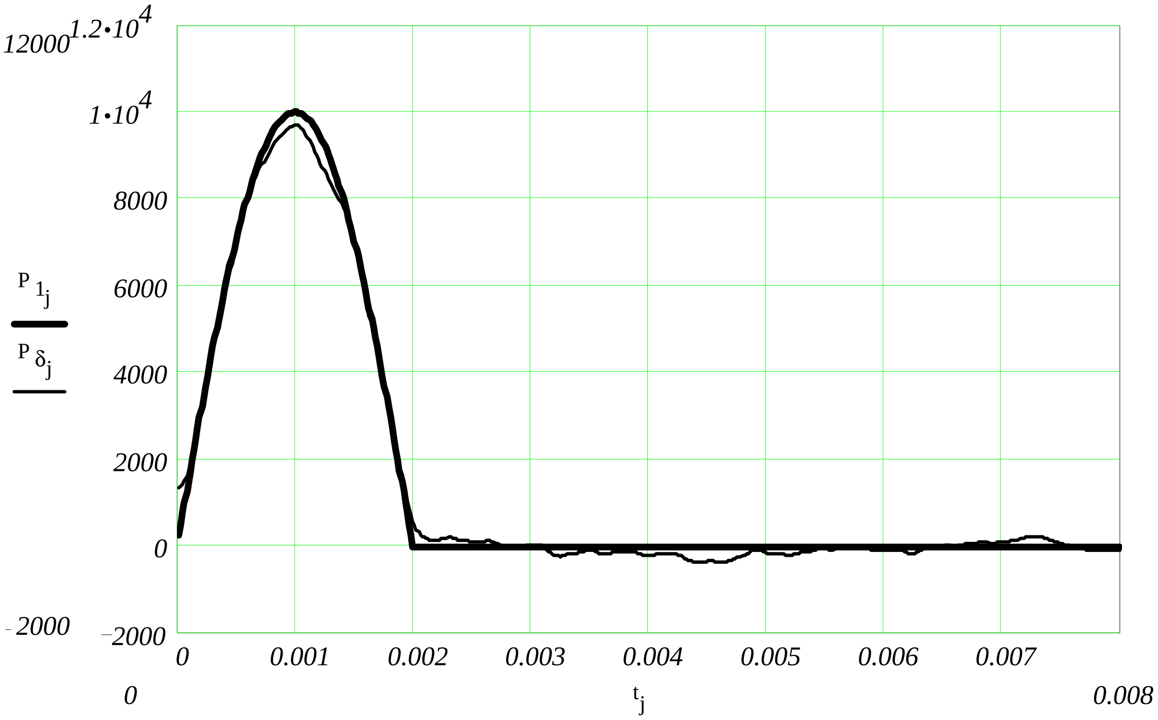


Рисунок 2.14 – Зміна ідентифікованого навантаження в часі при $\alpha = 10^{-26}$

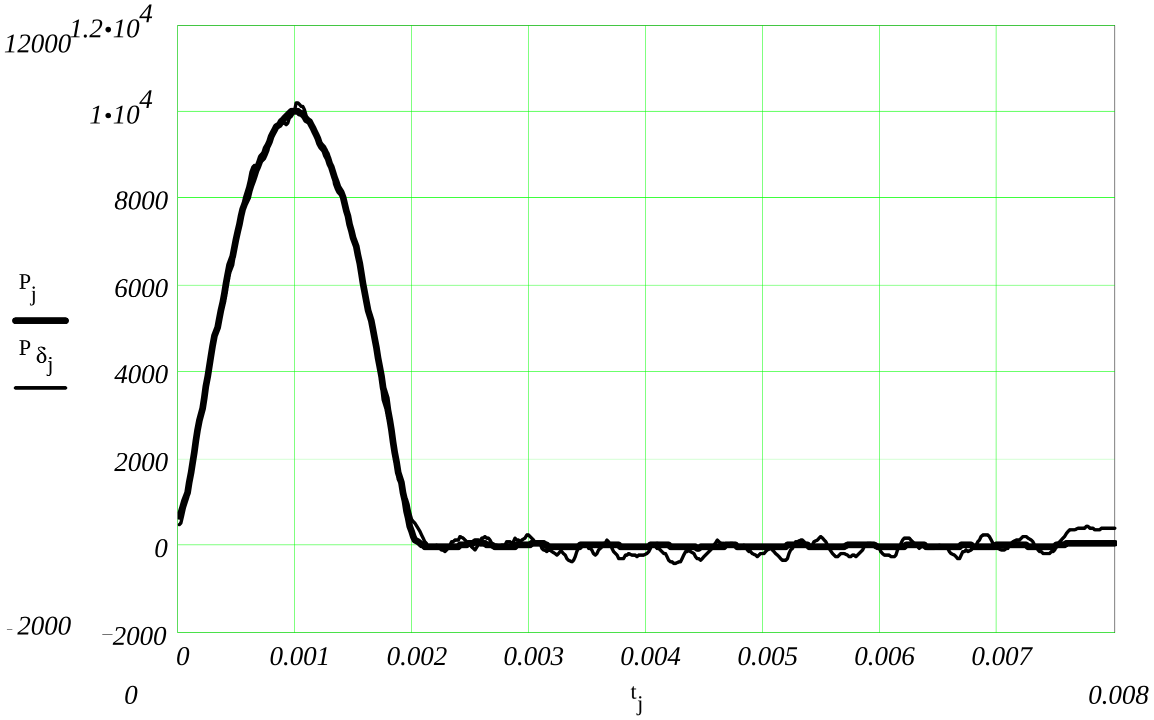


Рисунок 2.15 – Зміна ідентифікованого навантаження в часі при $\alpha = 10^{-27}$

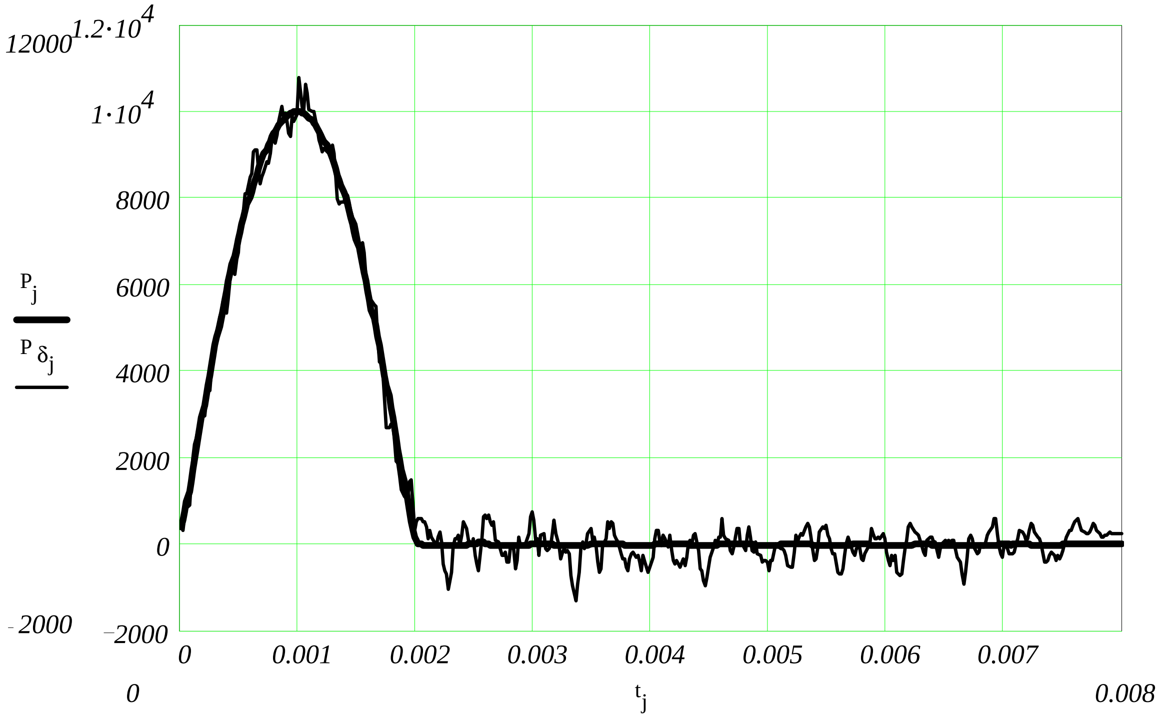


Рисунок 2.16 – Зміна ідентифікованого навантаження в часі при $\alpha = 10^{-28}$

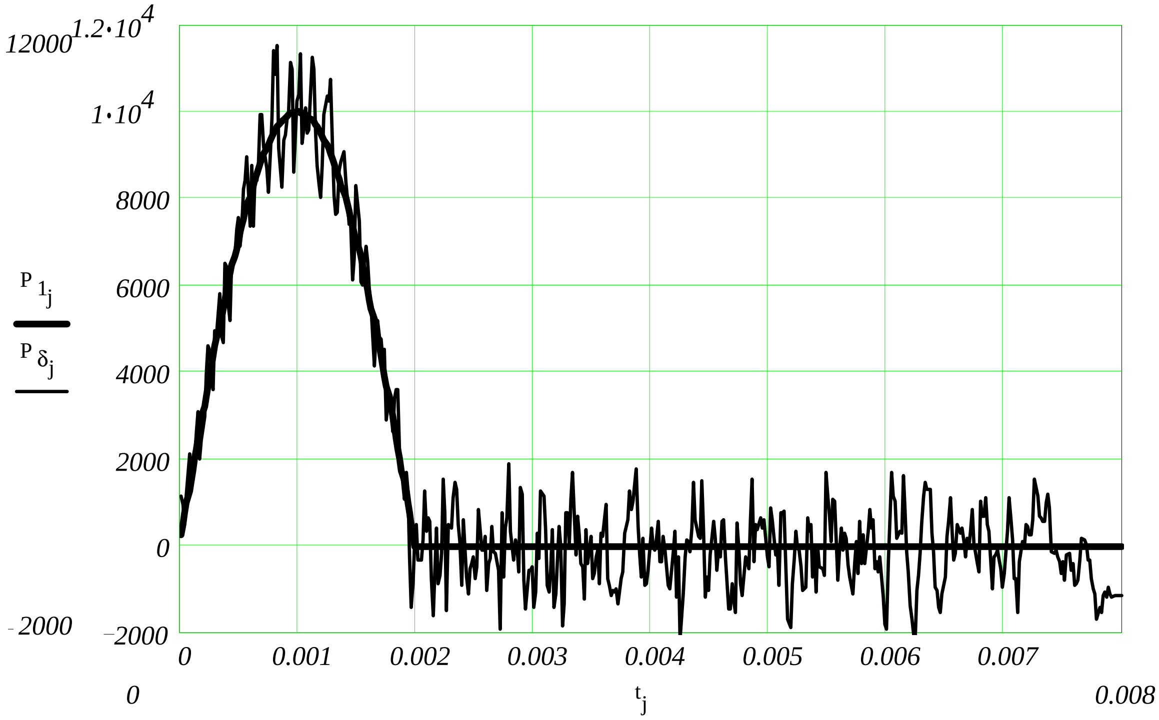


Рисунок 2.17 – Зміна ідентифікованого навантаження в часі при $\alpha = 10^{-29}$

На рис. 2.14 (параметр регуляризації $\alpha = 10^{-26}$) показані в цілому задовільні результати, однак через «велику» величину α у них частково «занижені» максимальні значення. На рис. 2.15 ($\alpha = \alpha_{opt} = 10^{-27}$) видно добрий збіг тестового та ідентифікованого навантаження. На рис. 2.16 ($\alpha = 10^{-28}$) – починають сильно проявлятися ефекти, викликані «зашумленням» (збуренням) вихідних даних. Рис. 2.17 відповідає значенню параметра регуляризації $\alpha = 10^{-29}$, цей рисунок демонструє, що при $\alpha \le 10^{-29}$ – вплив згладжквального функціонала А. М. Тихонова недостатній (результати стають незадовільними).

Описано застосування регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова для розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла, що виникають при дослідженні інтегральних рівнянь, на прикладі розв'язання оберненої некоректної задачі ідентифікації невідомого навантаження, яке викликає нестаціонарне деформування елемента конструкції у вигляді пластини. Застосування РА Тихонова дозволяє одержувати досить стійке розв'язання і дає гарні результати при «зашумленні» вихідних даних. Однак серйозну увагу необхідно приділяти вибору параметра регуляризації, бажано вибирати його на основі аналізу декількох функціоналів, що базуються на використанні апріорної інформації про шукану функцію. Істотний вплив на величину параметра регуляризації мають процедури переходу до безрозмірних операторних рівнянь перед введенням згладжквального функціоналу або нормування матриць.

2.5. Розв'язання системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра

Вище докладно описане розв'язання некоректної задачі, у якій досліджувалося одне інтегральне рівняння, описана методика вибору параметра регуляризації, а також наведений числовий розрахунок для тестової задачі.

Розглянемо алгоритм розв'язання системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра.

До такої системи може бути зведена задача, про одночасний вплив на пластину двох нестаціонарних незалежних поперечних сил, прикладених у двох різних точках пластини. Для прогинів у двох довільних точках пластини можна записати наступні співвідношення:

$$\begin{cases} w_1(t) = w(x_1, y_1, t) = \int\limits_0^t P_1(\tau) K_{P1}^{W1}(t-\tau) d\tau + \int\limits_0^t P_2(\tau) K_{P2}^{W1}(t-\tau) d\tau; \\ w_2(t) = w(x_2, y_2, t) = \int\limits_0^t P_1(\tau) K_{P1}^{W2}(t-\tau) d\tau + \int\limits_0^t P_2(\tau) K_{P2}^{W2}(t-\tau) d\tau, \end{cases} \qquad (2.30)$$

які у випадку, коли сили $P_1(t)$ і $P_2(t)$ невідомі, є системою інтегральних рівнянь (СІР) Вольтерра I роду. Опис вхідних в (2.30) елементів аналогічний опису виразу (2.26).

Запишемо дискретний аналог СІР (2.30) у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}, \qquad (2.31)$$

де $\mathbf{A}$ – блокова матриця [62], складена з матричних елементів $\mathbf{A}_{i,j}$, що відповідають ядрам інтегралів $K_{i,j}(t)$, які входять в (2.30).

Вкажемо, що кожна матриця $\mathbf{A}_{k,n}$ має спеціальний вигляд:

$$\mathbf{A}_{k,n} = \begin{bmatrix} K_{k,n}[\Delta t] & 0 & 0 & \ldots \\ K_{k,n}[2 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[\Delta t] & 0 & \ldots \\ K_{k,n}[3 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[2 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[\Delta t] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \qquad (2.32)$$

де k – номер рядка блоку (матриці) у блоковій матриці; k – номер стовпця.

Тобто матриця (2.32) є квадратною нижньою трикутною, а її елементи на головній діагоналі та на всіх піддіагоналях збігаються між собою. Таким чином, всі матриці $\mathbf{A}_{k,n}$ є переставними між собою, наприклад, $\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}$.

Зауважимо, що термін піддіагональ узятий з [62], де вводяться поняття p-я піддіагональ (наддіагональ), які відповідають елементам матриць $a_{i,j}$, у яких різниця індексів дорівнює константі:

$$i-j=p\ \ (j-i=p), \tag{2.33}$$

де i – номер рядка елемента матриці; j – номер стовпця; p – номер наддіагоналі (піддіагоналі).

Якщо ввести матрицю $\mathbf{M}$, таку що:

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}, \tag{2.34}$$

тоді система двох матричних рівнянь (2.31) буде еквівалентна наступним двом незалежним матричним рівнянням:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}_1&=\mathbf{A}_{22}\mathbf{w}_1-\mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_2;\\ \mathbf{M}\cdot\mathbf{P}_2&=\mathbf{A}_{11}\mathbf{w}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_1,\end{aligned} \tag{2.35}$$

для кожного з яких можна використати вищевикладену теорію розв'язання некоректних задач. Згідно РА Тихонова, за аналогією з (2.20), можна записати підсумкові співвідношення для розв'язання (2.35):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1&=(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\alpha_1\mathbf{C})^{-1}\mathbf{M}^T(\mathbf{A}_{22}\mathbf{w}_1-\mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_2);\\ \mathbf{P}_2&=(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\alpha_2\mathbf{C})^{-1}\mathbf{M}^T(\mathbf{A}_{11}\mathbf{w}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_1),\end{aligned} \tag{2.36}$$

де α_1, α_2 – два незалежних параметри регуляризації (які можуть збігатися).

2.6. Узагальнений алгоритм Крамера (УАК)

У ряді випадків, розв'язувана задача зводиться до системи з N інтегральних рівнянь (наприклад, при дії на пластину N невідомих незалежних силових впливів). У такому випадку система N інтегральних рівнянь після дискретизації може бути представлена у вигляді наступної блокової СЛАР:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \vdots\\ \mathbf{p}_i\\ \vdots\\ \mathbf{p}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_j\\ \vdots\\ \mathbf{u}_N\end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

де $\mathbf{u}$ – блоковий вектор відповідає правим частинам СІР, а шуканим є блоковий вектор $\mathbf{p}$ (система сил, що збурюють).

Якщо подивитися на матрицю $\mathbf{M}$ у виразі (2.34), то вона точно збігається з вираженням для визначника блокової матриці $\mathbf{A}$ з розміром 2×2. Тоді за аналогією з методом Крамера для розв'язання звичайних СЛАР можна скласти узагальнений алгоритм для розв'язання блокових СЛАР. Операції будуть виконуватись не з числами, а з блоками чисел – матрицями. Такий підхід буде узагальненням методу Крамера, і його можна називати узагальнений алгоритм Крамера (за аналогією з терміном узагальнений алгоритм Гаусса). Отже, матеріал попереднього пункту можна розглядати як описання прикладу розв'язання блокової СЛАР 2×2 за допомогою УАК.

Відповідно до методу Крамера розв'язання СЛАР $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{y}$ має такий вигляд:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \tag{2.38}$$

де $\det \mathbf{A}$ – визначник матриці $\mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}_i$ – визначник матриці, у якій i-й стовпець матриці системи заміняється стовпцем правих частин.

Аналогічно для блокової СЛАР (2.37) можна записати наступні вирази для визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{vmatrix}, \tag{2.39}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1,i-1} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{A}_{1,i+1} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{2,i-1} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{A}_{2,i-1} & \cdots & \mathbf{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N-1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,i-1} & \mathbf{u}_{N-1} & \mathbf{A}_{N-1,i-1} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N} \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{N,i-1} & \mathbf{u}_N & \mathbf{A}_{N,i-1} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Визначник матриці – це число, а визначник блокової матриці – матриця розмірами складового блоку. Використовуючи визначники (2.39), (2.40) систему N рівнянь можна замінити на N незалежних рівнянь виду:

$$\Delta \cdot \mathbf{p}_i = \Delta_i , \qquad (2.41)$$

де індекс i змінюється від 1 до N.

Вирази аналогічні (2.38) коректно записати у вигляді

$$\mathbf{p}_i = \Delta^{-1} \cdot \Delta_i , \qquad (2.42)$$

однак при розв'язанні некоректних задач не завжди вдається одержати обернену матрицю для Δ, тоді згідно РА Тихонова можна записати еквівалентну (2.41) регуляризовану СЛАР:

$$\left(\Delta^T \Delta + \alpha_i \mathbf{C}\right) \cdot \mathbf{p}_i = \Delta^T \Delta_i , \qquad (2.43)$$

розв'язання якої буде:

$$\mathbf{p}_i = \left(\Delta^T \Delta + \alpha_i \mathbf{C}\right)^{-1} \Delta^T \Delta_i . \qquad (2.44)$$

Зазначимо, що для обчислення матричних визначників (2.39), (2.40) не можна використовувати більш швидкі (наближені) числові методи, тому що алгебраїчні операції виконуються не із числами, а з матрицями. Визначники можна одержувати тільки на базі точних формул (для визначників 2-го і 3-го порядків), через перестановки або за допомогою блокових мінорів. Відомо, що у визначник входить $N!$ складових, і символьне (алгебраїчне) обчислення блокового визначника 5×5 є досить трудомісткою операцією та з нелінійним ростом часу розрахунків (пропорційно факторіальній залежності), отже для розв'язання систем інтегральних рівнянь з числом рівнянь більше 5 доцільно використовувати інші методи.

У той же час для розв'язання систем, що складаються з 2-4 рівнянь, це один з кращих і ефективних методів.

2.7. Узагальнений алгоритм Гаусса (УАГ)

Послідовність операцій при розв'язанні СЛАР методом Гаусса добре відома та описана в багатьох джерелах, тому вона не буде тут детально викладатися. Зупинимося тільки на особливості роботи з блоковими СЛАР і матрицями, а також опишемо та проаналізуємо з позицій розв'язання некоректних задач деякі варіації методу та узагальненого алгоритму Гаусса [62].

Для розв'язання блокової СЛАР (2.37) зручно скласти на базі квадратної блокової матриці $\mathbf{A}$ прямокутну розмірності $N \times N+1$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1,i} & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1} & \mathbf{A}_{1N} & \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2,i} & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1} & \mathbf{A}_{2N} & \mathbf{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N-1,1} & \mathbf{A}_{N-1,2} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,i} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N-1} & \mathbf{A}_{N-1,N} & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{A}_{N1} & \mathbf{A}_{N,2} & \cdots & \mathbf{A}_{N,i} & \cdots & \mathbf{A}_{N,N-1} & \mathbf{A}_{NN} & \mathbf{u}_N \end{array}\right), \qquad (2.45)$$

яка за допомогою стандартних операцій приводиться до деякого спеціального (гауссового) виду. Наприклад, всі числа в першому рядку діляться на перший елемент a_{11}, а в другому рядку на перший елемент a_{21}, а потім з першого рядка віднімається другий і тоді в результуючому виразі перший елемент буде тотожно дорівнювати нулю. При роботі з блоковими матрицями операції проводяться не з числами, а з блоками (матрицями), тому порядок дій аналогічний, тільки замість ділення на елемент (число) a_{11} потрібно множити на обернену матрицю $(\mathbf{A_{11}})^{-1}$ і т.д. Тобто всі дії, що містять операцію ділення, потрібно замінити на подібні, що будуть мати операцію множення на відповідну обернену матрицю. Також необхідно підкреслити, що всі блоки (матриці) повинні бути квадратними (число строк повинно співпадати з числом стовбців) а також бути однакового розміру.

Опишемо кілька видів до яких можна привести блокову матрицю (2.45).

1) Вид діагональної матриці $\mathbf{A}$ з одиничною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{u}_1^{*1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{u}_2^{*1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \mathbf{u}_{N-1}^{*1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & \mathbf{u}_N^{*1} \end{array}\right), \tag{2.46}$$

у цьому випадку змінений останній стовпець $\mathbf{u}^{*1}$ і буде розв'язком задачі, однак до такого виду привести матрицю (2.45) при розв'язанні некоректних задач, використовуючи тотожні перетворення, практично не можливо.

В ряді джерел при розв'язанні блокових СЛАР, використовуючи УАГ, рекомендують виконувати тільки прямий хід і приводити матрицю (2.45) до верхнього трикутного виду. Можна виділити кілька видів верхніх трикутних матриць.

2) Вид верхньої трикутної матриці з одиничною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{A}_{\mathbf{1},\mathbf{2}}^{*} & \cdots & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N-1}^{*} & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N}^{*} & \mathbf{u}_1^{*2} \\ 0 & 1 & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^{*} & \mathbf{A}_{2,N}^{*} & \mathbf{u}_2^{*2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*} & \mathbf{u}_{N-1}^{*2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \mathbf{u}_N^{*2} \end{array}\right). \tag{2.47}$$

Вид (2.47) це проміжний етап при одержанні виду (2.46), у якому $\mathbf{u}_N^{*2} = \mathbf{p}_N$. При розв'язанні некоректних задач найчастіше не вдається знайти стійкий розв'язок навіть $\mathbf{u}_N^{*2} \approx \mathbf{p}_N$, про інші $\mathbf{p}_1$, …, $\mathbf{p}_{N-1}$ можна навіть не згадувати.

3) Вид верхньої трикутної матриці з одиничною діагоналлю, крім останнього блокового елемента:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{A}_{\mathbf{1},\mathbf{2}}^{*} & \cdots & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N-1}^{*} & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N}^{*} & \mathbf{u}_1^{*3} \\ 0 & 1 & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^{*} & \mathbf{A}_{2,N}^{*} & \mathbf{u}_2^{*3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*} & \mathbf{u}_{N-1}^{*3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N,N}^{*} & \mathbf{u}_N^{*3} \end{array}\right). \tag{2.48}$$

У цьому випадку для $\mathbf{A}^*_{N,N}\cdot p_N=\mathbf{u}^{*3}_N$ (останнього рядка) один раз виконується процедура регуляризації за Тихоновим, далі виконується зворотний хід. Вид (2.48) має переваги в тім, що параметр регуляризації α потрібно вибирати один раз і не складно вибрати його оптимальне значення α_{opt}. Однак, тому що процедура регуляризації виконується однократно при розв'язанні некоректних задач до цього виду можна приводити блокові СЛАР з невеликим значенням N (для систем з чотирьох і п'яти інтегральних рівнянь були отримані стійкі результати).

4) Вид верхньої трикутної матриці з неодиничною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
\mathbf{A}^*_{1,1} & \mathbf{A}^*_{\mathbf{1,2}} & \cdots & \mathbf{A}^*_{\mathbf{1},N-1} & \mathbf{A}^*_{\mathbf{1},N} & \mathbf{u}^{*4}_1 \\
0 & \mathbf{A}^*_{2,2} & \cdots & \mathbf{A}^*_{2,N-1} & \mathbf{A}^*_{2,N} & \mathbf{u}^{*4}_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}^*_{N-1,N} & \mathbf{A}^*_{N-1,N} & \mathbf{u}^{*4}_{N-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}^*_{N,N} & \mathbf{u}^{*4}_N
\end{array}\right). \tag{2.49}$$

Цей вид можна порекомендувати як один з найбільш стійких і відносно простих. Для останнього рядка можна виконувати регуляризацію з оптимальним значенням параметра регуляризації α_{Nopt}, а інші параметри регуляризації $\alpha_1,...,\alpha_{N-1}$ просто приймати з раціонального діапазону, тобто на зворотному ході не розв'язувати задачі оптимізації для кожного рядка при одержанні задовільних (стійких) результатів (При розв'язанні системи з десяти інтегральних рівнянь цей метод дозволяв одержувати стійкі наближені розв'язки).

5) Вид верхньої трикутної матриці з не одиничною діагоналлю, подібний (2.49), але отриманий без застосування операцій обернень матриць $\mathbf{A}^{-1}_{\mathbf{i,j}}$, тобто, коли використовуються тільки операції множення матриць і додавання/вирахування. Наприклад, якщо всі матриці в першому рядку помножити на першу матрицю в другому рядку праворуч $\mathbf{A}_{1,j}\cdot\mathbf{A}_{2,1}$, а всі матриці в другому рядку помножити на першу матрицю першого рядка ліворуч $\mathbf{A}_{1,1}\cdot\mathbf{A}_{2,j}$, а потім відняти отримані вирази, тоді перший елемент у

результуючому виразі також буде тотожно дорівнювати нулю ($\mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_{2,1} \equiv 0$).

При приведенні до виду (2.49) без застосування операцій обернення може спостерігатися необмежений ріст або зменшення матриць $\mathbf{A}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$, і необхідне постійне нормування рядків на кожному етапі прямого ходу, тому в наступному виразі для кожного блоку доцільно ввести додатковий верхній індекс $\mathbf{A}_{i,j}^{*n}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{A}_{1,1}^{*n} & \mathbf{A}_{\mathbf{1},\mathbf{2}}^{*n} & \cdots & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N-1}^{*n} & \mathbf{A}_{\mathbf{1},N}^{*n} & \mathbf{u}_1^{*5} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2}^{*n} & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^{*n} & \mathbf{A}_{2,N}^{*n} & \mathbf{u}_2^{*5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*n} & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*n} & \mathbf{u}_{N-1}^{*5} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N,N}^{*n} & \mathbf{u}_N^{*5} \end{array}\right). \tag{2.50}$$

Вкажемо, що якщо реалізувати алгоритм автоматичного нормування, можна одержати таку систему виду (2.50), у якій на зворотному ході можна буде використати для всіх рядків однаковий параметр регуляризації α.

У висновку вкажемо, що у випадку розв'язання блокових СЛАР з використанням УАК число найпростіших операцій при обчисленнях пропорційно $N!$, а при використанні УАГ – пропорційно N^3 і при розв'язанні систем інтегральних рівнянь більше п'яти йому, імовірно, немає альтернативи.

Окремо підкреслимо, що УАГ можна застосовувати для блокових матриць, у яких блоки (складові підматриці $\mathbf{A}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$) можуть бути і не переставні між собою, вони повинні бути тільки однакової розмірності.

2.8. Висновок по розділу

Описано прикладні аспекти *регуляризуючого алгоритму* А. М. Тихонова, особливості його використання при розв'язанні некоректних нестаціонарних задач механіки, а також питання, пов'язані з вибором параметра регуляризації.

В працях академіка А. М. Тихонова і його послідовників показано, що в згладжквальному функціоналі (2.16), в залежності від апріорної інформації та вимог до гладкості функції, можуть використовуватися різні функціональні Гільбертові простори, зокрема простор Соболєва.

Наведено приклад застосування РА Тихонова для розв'язання оберненої некоректної задачі ідентифікації невідомого навантаження, яке викликає нестаціонарне деформування пластинчастого елемента конструкції.

Застосування РА Тихонова дозволяє одержувати досить стійке розв'язання і дає гарні результати при «зашумленні» вихідних даних. Однак необхідно приділяти увагу при виборі параметра регуляризації: бажано вибирати його на основі аналізу декількох функціоналів, які базуються на використанні апріорної інформації про шукану функцію. Істотний вплив на величину параметра регуляризації мають процедури переходу до безрозмірних операторних рівнянь перед введенням згладжквального функціоналу або нормування матриць.

У випадку розв'язання блокових СЛАР з використанням УАК число найпростіших операцій при обчисленнях пропорційно $N!$, а при використанні УАГ – пропорційно N^3 і при розв'язанні систем інтегральних рівнянь більше п'яти доцільно використовувати УАГ.

Окремо підкреслимо, що УАГ можна застосовувати для блокових матриць, у яких блоки (складові підматриці $\mathbf{A_{i,j}}$) можуть бути і не переставні між собою, вони повинні бути тільки однакової розмірності.

Основні наукові результати, наведені у другому розділі,опубліковано у працях автора [1, 2, 5, 8, 10, 14, 15, 34, 35, 37, 51].

РОЗДІЛ 3

НЕСТАЦІОНАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН

У даному розділі розглядаються імпульсні впливи системи довільних складних навантажень (що мають не тільки поперечну, а й поздовжню складову) на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Представлено теорію розв'язання прямої та оберненої задачі теорії пружності для нестаціонарних навантажень пластини. Наводиться кілька прикладів обчислень з ідентифікації системи декількох зовнішніх незалежних навантажень. Також викладається підхід щодо урахування пружної інерційної двосторонньої основи типу Власова-Леонтьева

3.1. Вплив на прямокутну пластину системи скінченого числа незалежних довільних навантажень

Розташуємо пластину в декартових координатах так, що її серединна площина буде перебувати в площині xOy та буде обмеженою прямими x=0, x=l, y =0, y=m, а напрямок осі Oz буде збігатися з нормаллю до площини xOy.

Вкажемо, що l і m – розміри пластини в плані. Координати точки прикладення j-ї сили або центра малої області рівномірно розподіленого навантаження – x_{0j}, y_{0j} . Скінчене число навантажень, що діють, дорівнює N.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося моделлю пластин теорії С. П. Тимошенка, яка враховує ефекти інерції обертання нормального елемента та поперечного зсуву.

Складові переміщення елемента пластини позначимо u, v і w. Далі зробимо наступні допущення: будемо вважати, що компоненти переміщення u і

v – лінійно залежні від z, а w від z не залежить [67, 131, 264]. Тоді, виходячи з вищевказаного, можна записати

$$\begin{gathered} u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z \cdot \psi_x(x,y,t); \\ v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z \cdot \psi_y(x,y,t); \\ w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t). \end{gathered} \tag{3.1}$$

де x, y, z – декартові координати, u_0, v_0 та w_0 – переміщення точок серединної площини пластини, ψ_x та ψ_y – кути повороту нормалі до серединної площини пластини в площинах xOz та yOz відповідно; $z \in [-h/2;\ h/2]$, де h – товщина пластини (рис. 3.1).

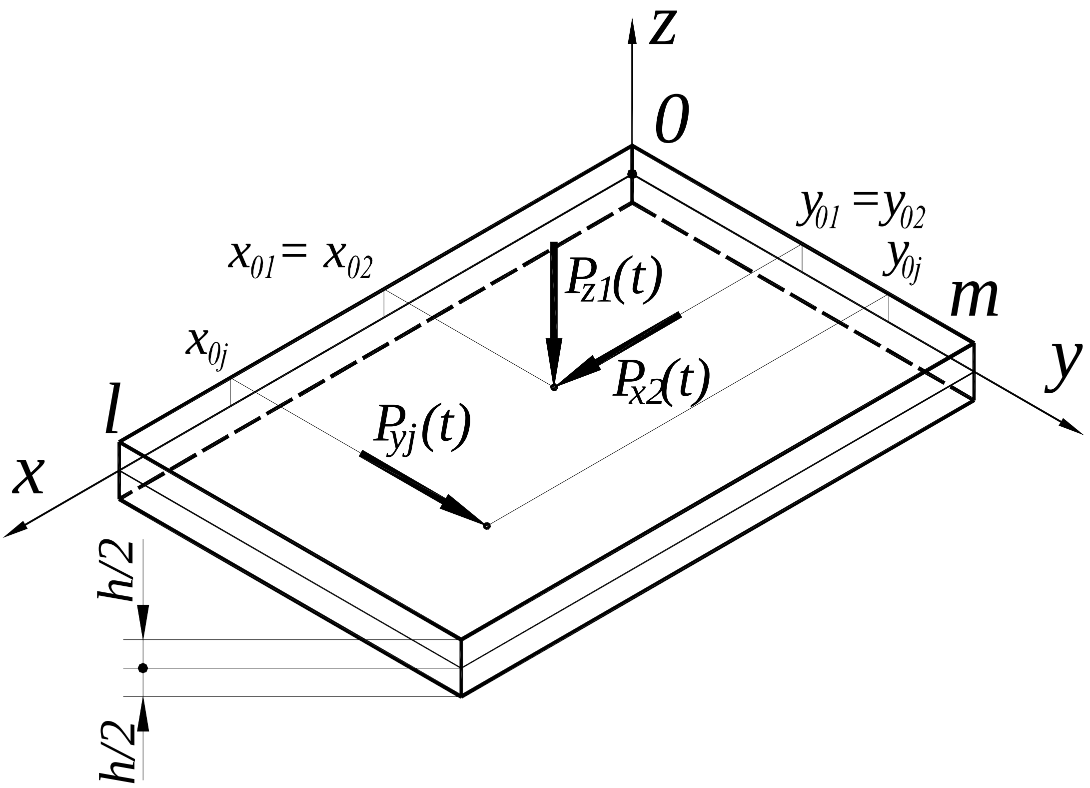


Рисунок 3.1 – Пластина, навантажена системою поздовжніх та поперечних сил

Задача про нестаціонарне деформування пружної ізотропної пластини з урахуванням відповідних початкових і крайових умов, а також навантаження системою з N сил і моментів зводиться до розв'язання наступної системи п'яти диференціальних рівнянь у частинних похідних, кожне з яких другого порядку:

$$\left\{\begin{array}{l}
E_p h\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+Gh\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+h(E_p\nu+G)\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x\cdot\partial y}=\rho h\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\sum\limits_{j=1}^{N}P_{xj}(x,y,t);\\
Gh\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+E_p h\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+h(E_p\nu+G)\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x\cdot\partial y}=\rho h\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-\sum\limits_{j=1}^{N}P_{yj}(x,y,t);\\
G'h(\nabla^2 w_0+\psi_{xy})=\rho h\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}-\sum\limits_{j=1}^{N}P_{zj}(x,y,t);\\
\dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_x+(1+\nu)\dfrac{\partial\psi_{xy}}{\partial x}\right]-G'h(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+\psi_x)=\rho\cdot I\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}-\sum\limits_{j=1}^{N}M_{xj}(x,y,t);\\
\dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_y+(1+\nu)\dfrac{\partial\psi_{xy}}{\partial y}\right]-G'h(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}+\psi_y)=\rho\cdot I\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}-\sum\limits_{j=1}^{N}M_{yj}(x,y,t),
\end{array}\right. \qquad (3.2)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина матеріалу пластини, кг/м^3; $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; $I=h^3/12$; $E_p=\dfrac{E}{(1-\nu^2)}$; $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\psi_{xy}=\dfrac{\partial\psi_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi_y}{\partial y}$; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини; G' – приведений модуль зсуву $G'=k'$. Відзначимо, що k' – коефіцієнт зсуву, детальні відомості про який наведені в [67].

Повну систему рівнянь (3.2), що описують деформування пластин у рамках гіпотез типу Тимошенка, можна розділити на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема, що складається з двох диференціальних рівнянь у частинних похідних (кожне з яких другого порядку) щодо невідомих переміщень серединної поверхні $u_0(x,y,t)$ і $v_0(x,y,t)$, відповідає поздовжнім навантаженням. Друга підсистема, що складається із трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних (кожне з яких другого порядку) щодо функцій прогинів $w_0(x,y,t)$ і кутів повороту нормалі $\psi_x(x,y,t)$ та $\psi_y(x,y,t)$ – поперечним навантаженням. Відзначимо, що для оболонок такий розподіл на дві незалежні підсистеми неможливий, тому що всі п'ять рівнянь будуть зв'язані додатковими членами, у які входить кривизна. Наприклад, подібну систему рівнянь для оболонок записану в зусиллях і моментах можна знайти в монографії вчених Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко НАН України [74].

Наведена в дисертації система рівнянь (3.2) враховує вплив всіх можливих навантажень [82]: нормальних $\sum_{j=1}^{N} P_{zj}(x,y,t)$, дотичних $\sum_{j=1}^{N} P_{xj}(x,y,t)$, $\sum_{j=1}^{N} P_{yj}(x,y,t)$ та моментних $\sum_{j=1}^{N} M_{xj}(x,y,t)$, $\sum_{j=1}^{N} M_{yj}(x,y,t)$.

На рис. 3.1 моментні навантаження, що входять в два останні рівняння (3.2), не показані через міркування спрощення візуального сприйняття.

При розв'язанні задачі приймемо нульові початкові умови, а саме:

$$u_0(x,y,0)=v_0(x,y,0)=w_0(x,y,0)=\psi_x(x,y,0)=\psi_y(x,y,0)=0;$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}_0(x,y,0)}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial \mathrm{v}_0(x,y,0)}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial \mathrm{w}_0(x,y,0)}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial \psi_x(x,y,0)}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial \psi_y(x,y,0)}{\partial \mathrm{t}}=0; \tag{3.3}$$

Для шарнірно-обпертої пластини, щоб задовольнити необхідним крайовим умовам [74]:

вздовж країв y=0 і y=m:

$$w_0=0; \quad \psi_{\mathrm{x}}=0; \quad M_{\mathrm{y}}=0; \quad \mathrm{S}_{\mathrm{xy}}=0; \quad \mathrm{v}_0=0, \tag{3.4}$$

вздовж країв x=0 і x=l:

$$w_0=0; \quad M_{\mathrm{x}}=0; \quad \psi_{\mathrm{y}}=0; \quad \mathrm{u}_0=0; \quad \mathrm{S}_{\mathrm{xy}}=0, \tag{3.5}$$

запишемо шукані функції (3.1) у вигляді розвинень в наступні подвійні ряди Фур'є:

$$u_0(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t)\cdot\sin\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi\cdot y}{m}; \tag{3.6}$$

$$v_0(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t)\cdot\cos\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\cdot y}{m}; \tag{3.7}$$

$$w_0(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t)\cdot\sin\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\cdot y}{m}; \tag{3.8}$$

$$\psi_x(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{Xkn}(t)\cdot\cos\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\cdot y}{m}; \tag{3.9}$$

$$\psi_y(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{Ykn}(t)\cdot\sin\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi\cdot y}{m}. \tag{3.10}$$

Для вільно-обпертої пластини (інший варіант закріплення) крайові умови будуть мати вигляд [74]:

вздовж країв y=0 і y=m:

$$w_0 = 0; \quad M_\mathrm{y} = 0; \quad N_\mathrm{y} = 0; \quad u_0 = 0, \tag{3.11}$$

вздовж країв x=0 і x=l:

$$w_0 = 0; \quad M_\mathrm{x} = 0; \quad N_\mathrm{x} = 0; \quad v_0 = 0. \tag{3.12}$$

У цьому випадку розвинення шуканих функцій (3.1) можна записати у вигляді наступних подвійних рядів Фур'є за тригонометричними функціями для $u_0(x,y,t)$ і $v_0(x,y,t)$ замість (3.6) і (3.7):

$$u_0(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t) \cdot \cos\frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi \cdot y}{m}; \tag{3.13}$$

$$v_0(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t) \cdot \sin\frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos\frac{n\pi \cdot y}{m}. \tag{3.14}$$

Для $w_0(x,y,t)$, $\psi_x(x,y,t)$, $\psi_y(x,y,t)$ розвинення будуть у точності збігатися з виразами (3.8)-(3.10), тому для прямокутних пластин, на які діють тільки поперечні навантаження не виділяють окремо крайові умови у вигляді вільного обпирання, а розглядають в основному шарнірне обпирання. Вільне обпирання як окремий вид крайових умов вводять тільки для пластин, у яких є дотичні складові навантажень, а частіше їх застосовують для панелей або оболонок.

Підставивши розвинення (3.6)-(3.10) в систему диференціальних рівнянь у частинних похідних (3.2) і скориставшись властивістю ортогональності тригонометричних функцій, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь за змінною t. Система диференціальних рівнянь розв'язується в такий спосіб: при нульових початкових умовах виконується пряме інтегральне перетворення Лапласа [7, 77, 78, 86, 95, 98, 103]; у просторі зображень на основі розв'язання системи алгебраїчних рівнянь знаходяться шукані коефіцієнти розвинення $w_{kn}^L(s)$, $u_{kn}^L(s)$, $v_{kn}^L(s)$, $\psi_{x\,kn}^{\;L}(s)$, $\psi_{y\,kn}^{\;L}(s)$; виконується зворотне перетворення Лапласа. У результаті одержуємо:

$$\begin{aligned} u_{knj}(t) = {} & \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=4}^{5} \Omega_{ikn}^{U} \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \\ & + \left(c_p^2 \nu + c^2\right) \frac{C_{knj}^{Pyj} \cdot \lambda_k^{*} \cdot \mu_n^{*}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{yj}(\tau) d\tau; \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} v_{knj}(t) = {} & \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=4}^{5} \Omega_{ikn}^{V} \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau + \\ & + \left(c_p^2 \nu + c^2\right) \frac{C_{knj}^{Pxj} \cdot \lambda_k^{*} \cdot \mu_n^{*}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{xj}(\tau) d\tau; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} w_{knj}(t) = {} & \frac{C_{knj}^{Pzj}}{\Delta_{kn}} \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{2} \Omega_{ikn}^{W} \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \\ & + c_T^2 \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{xj}(\tau) d\tau + \\ & + c_T^2 \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^{*}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{yj}(\tau) d\tau; \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \psi_{Xknj}(t) = {} & c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^{*}}{\Delta_{kn}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{3} \left(\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\varphi X} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{3} \left(\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\varphi Y} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau; \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \psi_{Yknj}(t) = {} & c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^{*}}{\Delta_{kn}} \int\limits_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{3} \left(\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\varphi X} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^{*}} \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{3} \left(\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\varphi Y} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{3.19}$$

де $c_G^2 = \dfrac{G}{\rho}$; $c_T^2 = \dfrac{G'}{\rho}$; $c_p^2 = \dfrac{E_p}{\rho}$; $\lambda_k^{*} = \pi \dfrac{k}{l}$; $\mu_n^{*} = \pi \dfrac{n}{m}$; $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\dfrac{k^2}{l^2} + \dfrac{n^2}{m^2} \right)$,

$\mu_{kn}^2 = \pi^2 \left(\dfrac{k^2}{l^2} - \dfrac{n^2}{m^2} \right)$; $\Delta_{kn} = \sqrt{\left(\lambda_{kn}^2 \left(c_T^2 + c_p^2 \right) + c_T^2 \cdot 12/h^2 \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4}$;

$$\Delta_{kn}^{*}=\sqrt{\left(c_p^2+c_G^2\right)^2\lambda_{kn}^4-4c_G^2c_p^2(\lambda_k^{*\,4}+\mu_n^{*\,4})-4\lambda_k^{*\,2}\mu_n^{*\,2}\left(c_p^4(1-\nu^2)-2\nu c_G^2c_p^2\right)};$$

$$\Omega_{4kn}^{U}=\omega_{4kn}-\frac{c_G^2\lambda_k^{*\,2}+c_p^2\mu_n^{*\,2}}{\omega_{4kn}};\qquad \Omega_{5kn}^{U}=-\omega_{5kn}+\frac{c_G^2\lambda_k^{*\,2}+c_p^2\mu_n^{*\,2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{4kn}^{V}=\omega_{4kn}-\frac{c_p^2\lambda_k^{*\,2}+c_G^2\mu_n^{*\,2}}{\omega_{4kn}};\qquad \Omega_{5kn}^{V}=-\omega_{5kn}+\frac{c_p^2\lambda_k^{*\,2}+c_G^2\mu_n^{*\,2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^{W}=\omega_{1kn}-\frac{c_p^2\lambda_{kn}^2+c_T^2\cdot 12/h^2}{\omega_{1kn}};\ \Omega_{2kn}^{W}=-\omega_{2kn}+\frac{c_p^2\lambda_{kn}^2+c_T^2\cdot 12/h^2}{\omega_{2kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^{\psi}=\omega_{1kn}-\frac{c_T^2\lambda_{kn}^2}{\omega_{1kn}};\ \ \Omega_{2kn}^{\psi}=-\omega_{2kn}+\frac{c_T^2\lambda_{kn}^2}{\omega_{2kn}};\ \ \Omega_{3kn}^{\psi}=0;$$

$$\Omega_{1kn}^{\varphi X}=-\frac{\left(\omega_{1kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{1kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2+\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\cdot\frac{12}{h^2}\right)-2c_T^4\mu_n^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn}(\omega_{3kn}^2-\omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\varphi X}=\frac{\left(\omega_{2kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{2kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2+\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\frac{12}{h^2}\right)-2c_T^4\mu_n^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn}(\omega_{3kn}^2-\omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\varphi X}=\Delta_{kn}\frac{\left(\omega_{3kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{3kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2+\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\frac{12}{h^2}\right)-2c_T^4\mu_n^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn}(\omega_{1kn}^2-\omega_{3kn}^2)(\omega_{2kn}^2-\omega_{3kn}^2)},$$

$$\Omega_{1kn}^{\varphi Y}=\frac{\left(\omega_{1kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{1kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2-\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\frac{12}{h^2}\right)+2c_T^4\lambda_k^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn}(\omega_{3kn}^2-\omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\varphi Y}=-\frac{\left(\omega_{2kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{2kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2-\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\frac{12}{h^2}\right)+2c_T^4\lambda_k^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn}(\omega_{3kn}^2-\omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\varphi Y}=-\Delta_{kn}\frac{\left(\omega_{3kn}^2-c_T^2\lambda_{kn}^2\right)\left(\omega_{3kn}^2-c_p^2\left(\lambda_{kn}^2-\frac{1+\nu}{2}\mu_{kn}^2\right)-c_T^2\frac{12}{h^2}\right)+2c_T^4\lambda_k^{*\,2}\frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn}(\omega_{1kn}^2-\omega_{3kn}^2)(\omega_{2kn}^2-\omega_{3kn}^2)},$$

причому ω_{ikn} – власні кругові частоти коливань пластини:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \Delta_{kn})} \,;$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \Delta_{kn})} \,; \quad \omega_{3kn} = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \frac{12}{h^2}} \,;$$

$$\omega_{4kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2(c_p^2 + c_G^2) + \Delta_{kn}^*}{2}} \,; \quad \omega_{5kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2(c_p^2 + c_G^2{}^2) - \Delta_{kn}^*}{2}} \,.$$

У результаті розв'язання відповідних вікових рівнянь, отриманих на основі (3.2), можна записати наступні залежності для власних частот коливань пластини середньої товщини:

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{0.5\left(\lambda^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \sqrt{\left(\lambda^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2}\right)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4}\right)} \,;$$

$$\omega_2(\lambda) = \sqrt{0.5\left(\lambda^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \sqrt{\left(\lambda^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2}\right)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4}\right)} \,;$$

$$\omega_3(\lambda) = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + c_T^2 \frac{12}{h^2}} \,.$$

На рис. 3.2 показано графіки залежності квадрата власних частот від квадрата хвильових чисел для поперечних і поздовжніх коливань пластинчастих елементів конструкції відповідно до гіпотез типу Тимошенка (3.1) для системи рівнянь (3.2). На цьому рисунку крива 1 відповідає функції $\omega_1(\lambda)$, крива 2 – $\omega_2(\lambda)$, крива 3 – $\omega_3(\lambda)$, крива 4 – $\omega_4(\lambda)$, крива 5 – $\omega_5(\lambda)$.

На рис. 3.3 показані окремо залежності частоти власних коливань $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$, $\omega_3(\lambda)$ для поперечних хвиль згину та зсуву, причому на зазначених графіках для прикладу показані крапки (чорні кружечки), що відповідають дискретним власним частотам $\omega_{1,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{2,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{3,7,9}(\lambda_{7,9})$.

На рис. 3.4 показано такі ж залежності для поздовжніх хвиль $\omega_4(\lambda)$, $\omega_5(\lambda)$ і дискретні власні частоти $\omega_{4,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{5,7,9}(\lambda_{7,9})$.

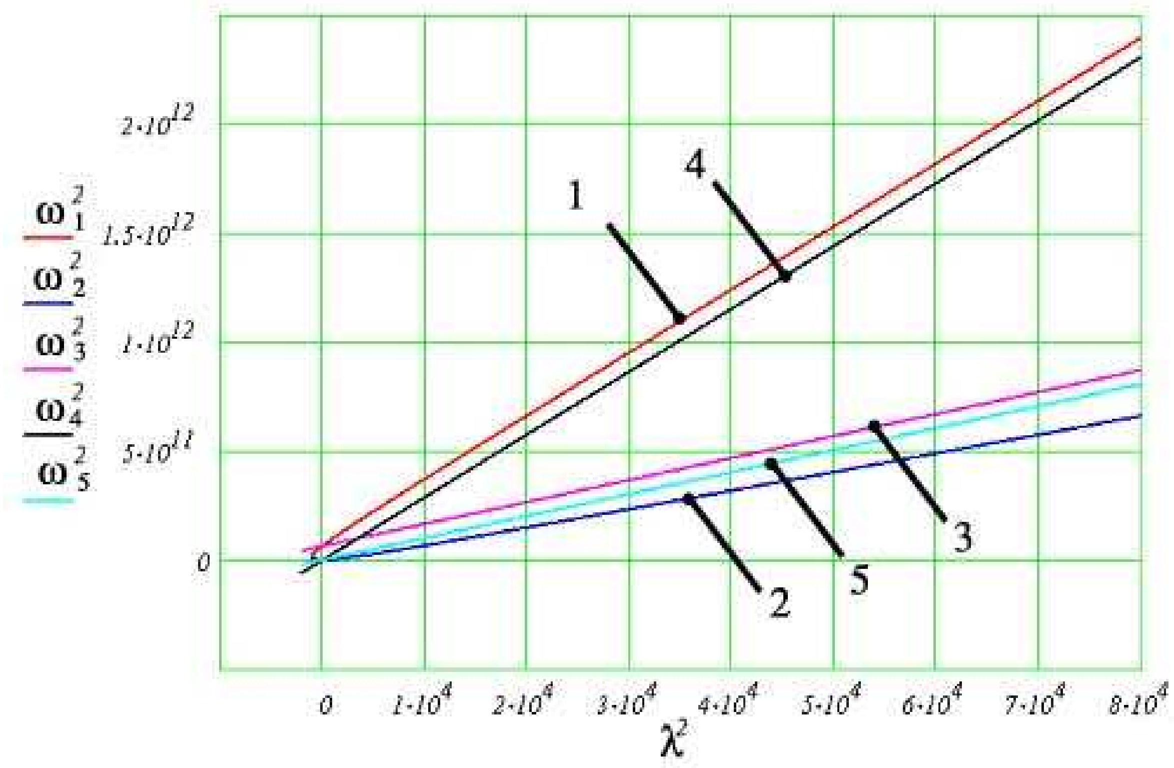


Рисунок 3.2 – Розв'язок вікового рівняння

для поздовжніх і поперечних коливань пластини

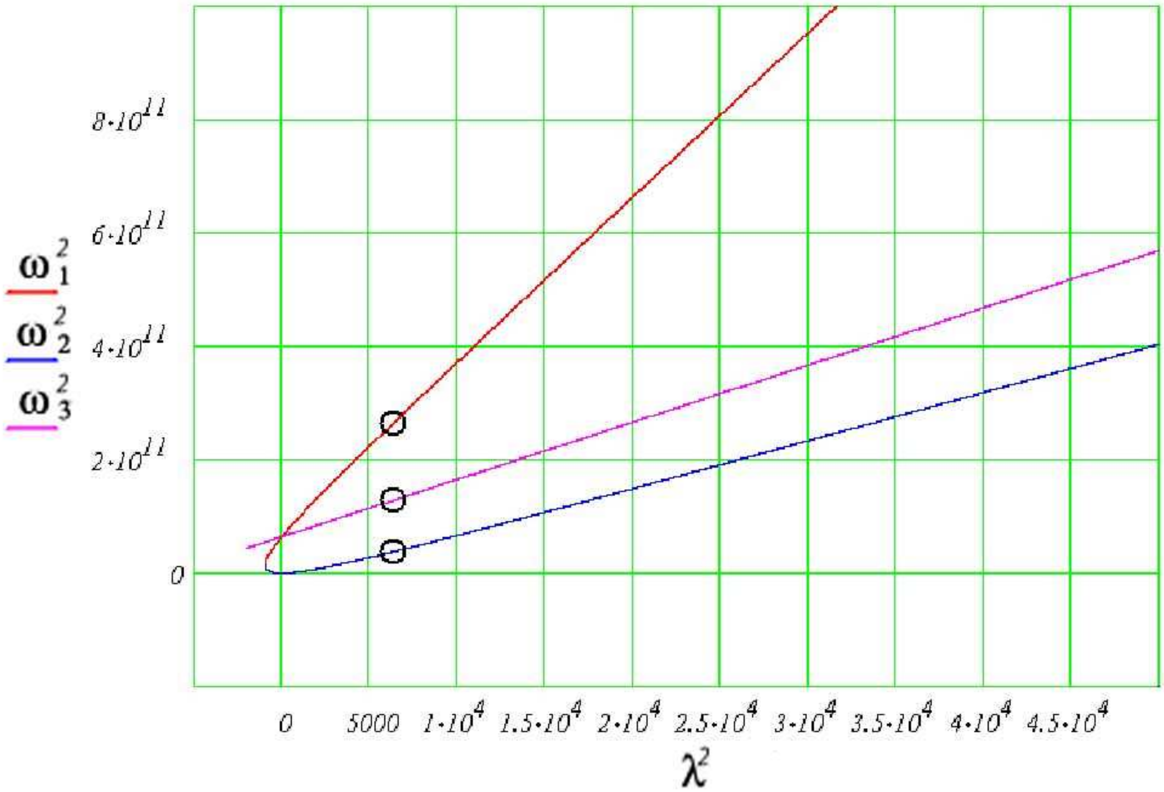


Рисунок 3.3 – Розв'язок вікового рівняння

для поперечних коливань (згину та зсуву)

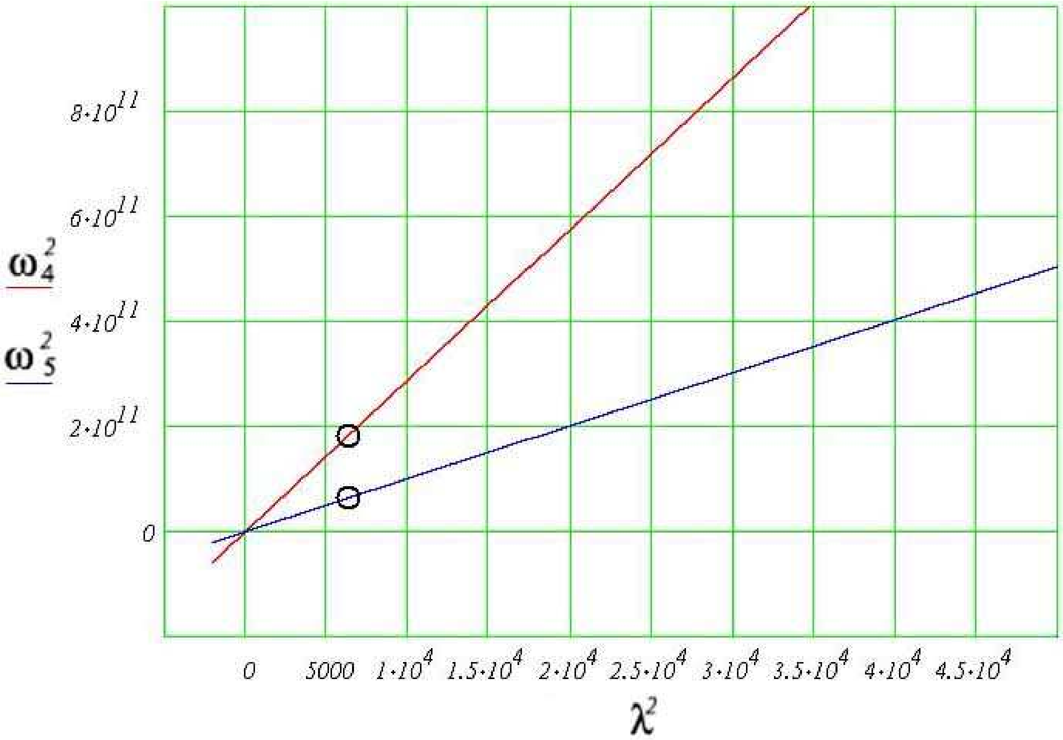


Рисунок 3.4 – Розв'язок вікового рівняння для поздовжніх коливань

Показувати дискретні власні частоти, які використовувались в розв'язанні системи рівнянь (3.2) не має сенсу, тому що навіть, якщо враховувати по 50 членів ряду Фур'є в кожному напрямку – то буде 2500 частот, і відповідні дискретні крапки зливаються і повторюють лінії на рис. 3.2.

Слід зазначити, що у виразах (3.17)–(3.35) коефіцієнти C_{knj}^{Px}, C_{knj}^{Py}, C_{knj}^{Pz}, C_{knj}^{Mx}, C_{knj}^{My} – є коефіцієнтами розвинення функцій зовнішніх навантажень у ряди Фур'є.

У випадку зосередженого навантаження пластини в точці з координатами $\left(x_{0j}, y_{0j}\right)$ ці коефіцієнти будуть мати вигляд:

$$C_{knj}^{Px} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \qquad (3.20)$$

$$C_{knj}^{Py} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \qquad (3.21)$$

$$C_{knj}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{3.22}$$

$$C_{knj}^{Mx} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{3.23}$$

$$C_{knj}^{My} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0}}{m}\right). \tag{3.24}$$

Наступні вирази для коефіцієнтів розвинення функцій зовнішніх навантажень у ряди Фур'є наведені тільки для поперечної складової навантаження $P_{zj}(x,y,t)$, яка найчастіше зустрічається в реальних задачах. Вирази для інших складових нескладно одержати за аналогією з виразами (3.20)-(3.24).

Випадок, коли навантаження рівномірно розподілене по малій прямокутній області, представлений на рис. 3.5. Тут $\Delta x, \Delta y$ – розміри області прикладення навантаження уздовж осей Ox і Oy, відповідно, а точка (x_{0j}, y_{0j}) – центр прямокутника. Вираз для такого навантаження буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} P_z(x,y,t) = P(t)\left[H\left(x-(x_{0j}-\Delta x/2)\right)-H\left(x\text{-}(x_{0j}+\Delta x/2)\right)\right]\times \\ \times\left[H\left(y-(y_{0j}-\Delta y/2)\right)-H\left(y\text{-}(y_{0j}+\Delta y/2)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

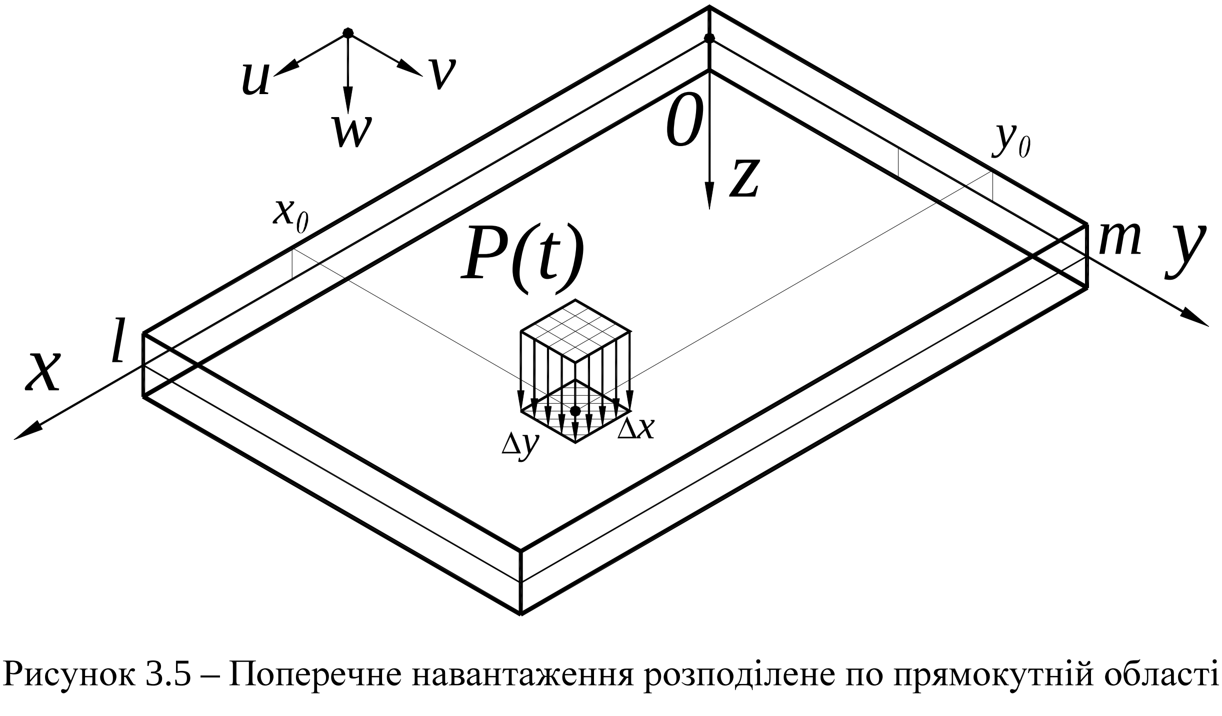


Рисунок 3.5 – Поперечне навантаження розподілене по прямокутній області

Коефіцієнти розвинення будуть мати вигляд:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm}\frac{1}{\rho\, h}\frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*}\sin\frac{k\pi x_{0j}}{l}\sin\frac{k\pi\Delta x}{2l}\sin\frac{n\pi y_{0j}}{m}\sin\frac{n\pi\Delta y}{2m}. \qquad (3.26)$$

Якщо навантаження рівномірно розподілене по кругу (рис. 3.6) радіус якого дорівнює r:

$$P_{zj}(x,y,t) = \begin{cases} P_j(t), & (x - x_{0\mathrm{j}})^2 + (y - y_{0j})^2 \le r^2; \\ 0, & (x - x_{0\mathrm{j}})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2, \end{cases} \qquad (3.27)$$

де $P_i(t)$ – невідома функція зміни в часі *j-го* навантаження $P_{zj}(x,y,t)$. Тоді:

$$C_{jkn} = \frac{4}{l \cdot m}\cdot\frac{1}{\rho h}\cdot\frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}}\cdot J_1(\lambda_{kn} r)\sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right), \qquad (3.28)$$

причому $J_1(\lambda_{kn} r)$ – функція Бесселя першого роду [10]. Відзначимо, що спосіб одержання виразів для наведеного коефіцієнта описаний у роботі [135].

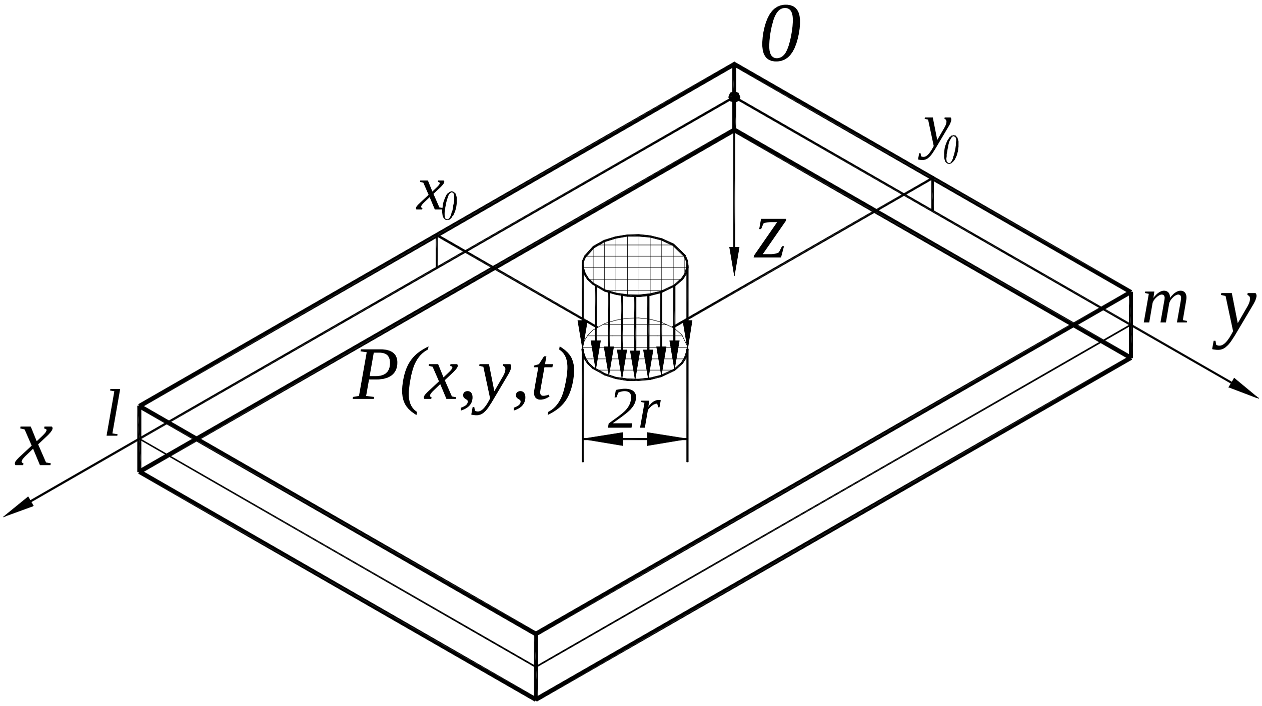


Рисунок 3.6 – Поперечна навантаження, яке рівномірно розподілене по кругу

Якщо припустити, що в зоні контакту навантаження розподілене не рівномірно, а у вигляді половини еліпсоїда обертання, що в деяких випадках більш точно відображає фізичні аспекти процесу деформування, то

$$P_{zj}(x,y,t)=\begin{cases} P(t)\sqrt{1-\dfrac{(x\text{-}x_{0j})^2}{r^2}-\dfrac{(y-y_{0j})^2}{r^2}}, & (x\text{-}x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2\le r^2;\\ 0, & (x\text{-}x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2>r^2.\end{cases}\tag{3.29}$$

В цьому випадку коефіцієнти розвинення навантаження в подвійні ряди Фур'є будуть мати наступний вигляд:

$$C_{jkn}=\frac{4}{lm}\frac{1}{\rho h}\frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2}\left(\frac{\sin(\lambda_{kn}r)}{\lambda_{kn}r}-\cos(\lambda_{kn}r)\right)\sin\left(\frac{k\pi x_{0j}}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_{0j}}{m}\right).\tag{3.30}$$

При дії на пластину навантажень, що рухаються з постійною швидкістю, необхідно у відповідних формулах для коефіцієнтів розвинення замість аргументів, пов'язаних з нерухомою точкою (x_{0j}, y_{0j}), записати нові аргументи виду $(V_{xj}\cdot t, V_{yj}\cdot t)$, де V_{xj}, V_{yj} – складові швидкості рухомого навантаження уздовж осей Ox і Oy, відповідно. Наприклад, якщо точка прикладення зосередженого поперечного навантаження рухається уздовж осі Ox з постійною швидкістю V_0 (див. рис. 3.7), то коефіцієнт розвинення цього навантаження, аналогічний (3.22), буде мати вигляд:

$$C_{kn}^{Pz}=\frac{4}{l\cdot m}\cdot\frac{1}{\rho h}\cdot\sin\left(\frac{k\pi\cdot V_0\cdot t}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi\cdot y_0}{m}\right).\tag{3.31}$$

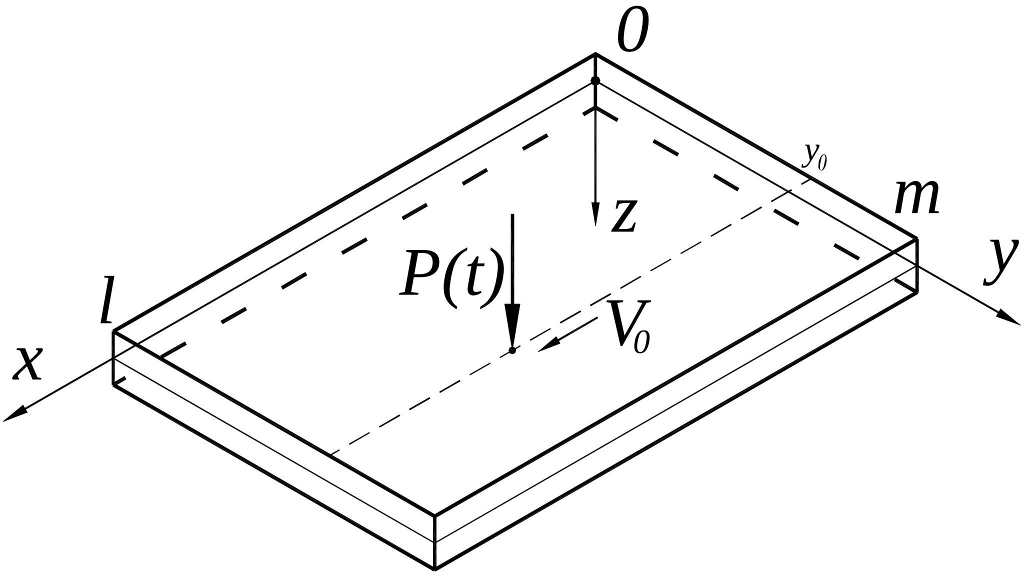


Рисунок 3.7 – Поперечне рухоме навантаження

Переміщення точки пластини з координатами x_s, y_s при довільному навантаженні можна знайти з наступних співвідношень

$$u_{0S}(t)=u_0(x_s,y_s,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Pxj}^{U}(t-\tau)P_{xj}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{Pyj}^{U}(t-\tau)P_{yj}(\tau)d\tau\right); \tag{3.32}$$

$$v_{0S}(t)=v_0(x_s,y_s,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Pxj}^{V}(t-\tau)P_{xj}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{Pyj}^{V}(t-\tau)P_{yj}(\tau)d\tau\right); \tag{3.33}$$

$$\begin{gathered}w_S(t)=w(x_s,y_s,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Pzj}^{W}(t-\tau)P_{zj}(\tau)d\tau\right)+\\+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Mxj}^{W}(t-\tau)M_{xj}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{Myj}^{W}(t-\tau)M_{yj}(\tau)d\tau\right);\end{gathered} \tag{3.34}$$

$$\begin{gathered}\psi_{xS}(t)=\psi_x(x_s,y_s,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Pzj}^{\psi X}(t-\tau)P_{zj}(\tau)d\tau\right)+\\+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Mxj}^{\psi X}(t-\tau)M_{xj}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{Myj}^{\psi X}(t-\tau)M_{yj}(\tau)d\tau\right);\end{gathered} \tag{3.35}$$

$$\begin{gathered}\psi_{yS}(t)=\psi_y(x_s,y_s,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Pzj}^{\psi Y}(t-\tau)P_{zj}(\tau)d\tau\right)+\\+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t K_{Mxj}^{\psi Y}(t-\tau)M_{xj}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{Myj}^{\psi Y}(t-\tau)M_{yj}(\tau)d\tau\right),\end{gathered} \tag{3.36}$$

де

$$K_{Pxj}^{U}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^{*}}\cos\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\sum_{i=4}^{5}\Omega_{ikn}^{U}\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Pyj}^{U}(t)=\left(c_p^2\nu+c^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Py}\lambda_k^{*}\mu_n^{*}}{\Delta_{kn}^{*}}\cos\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{4kn}t}{\omega_{4kn}}-\frac{\sin\omega_{5kn}t}{\omega_{5kn}}\right),$$

$$K_{Pxj}^{V}(t)=\left(c_p^2\nu+c^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Px}\lambda_k^{*}\mu_n^{*}}{\Delta_{kn}^{*}}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\cos\frac{n\pi y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{4kn}t}{\omega_{4kn}}-\frac{\sin\omega_{5kn}t}{\omega_{5kn}}\right),$$

$$K_{Pyj}^{V}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^{*}}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\cos\frac{n\pi y_s}{m}\sum_{i=4}^{5}\Omega_{ikn}^{V}\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Pzj}^{W}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Pz}}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\sum_{i=1}^{2}\Omega_{ikn}^{W}\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K^{W}_{Myj}(t)=-c_T^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{My}_{knj}}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{1kn}t}{\omega_{1kn}}-\frac{\sin\omega_{2kn}t}{\omega_{2kn}}\right),$$

$$K^{\psi X}_{Pzj}(t)=c_T^2\frac{12}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{Pz}_{knj}\lambda_k^*}{\Delta_{kn}}\cos\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{1kn}t}{\omega_{1kn}}-\frac{\sin\omega_{2kn}t}{\omega_{2kn}}\right),$$

$$K^{\psi X}_{Mxj}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{Mx}_{knj}}{2\Delta_{kn}\lambda_k^*}\cos\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega^{\psi}_{ikn}+\Omega^{\varphi X}_{ikn}\right)\sin\omega_{ikn}t,$$

$$K^{\psi X}_{Myj}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{My}_{knj}}{2\Delta_{kn}\lambda_k^*}\cos\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega^{\psi}_{ikn}+\Omega^{\varphi Y}_{ikn}\right)\sin\omega_{ikn}t,$$

$$K^{\psi Y}_{Pzj}(t)=c_T^2\frac{12}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{Pz}_{knj}\mu_n^*}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\cos\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{1kn}t}{\omega_{1kn}}-\frac{\sin\omega_{2kn}t}{\omega_{2kn}}\right),$$

$$K^{\psi Y}_{Mxj}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{Mx}_{knj}}{2\Delta_{kn}\mu_n^*}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\cos\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega^{\psi}_{ikn}-\Omega^{\varphi X}_{ikn}\right)\sin\omega_{ikn}t,$$

$$K^{\psi Y}_{Myj}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{My}_{knj}}{2\Delta_{kn}\mu_n^*}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\cos\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega^{\psi}_{ikn}-\Omega^{\varphi Y}_{ikn}\right)\sin\omega_{ikn}t.$$

Відзначимо, що при розв'язанні реальних задач, у яких необхідно досліджувати переміщення в декількох точках при дії складної системи зовнішніх навантажень, вирази (3.32)-(3.36) у компактній формі можуть бути записані у вигляді:

$$u_i^{\nu}(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_{ij}^{\nu}(t-\tau)P_j(\tau)d\tau, \qquad (3.37)$$

де індекс j відповідає номеру зовнішнього нестаціонарного (зосередженого або розподіленого по малій області) навантаження з координатами $\left(x_{0j},y_{0j}\right)$, причому у випадку складного навантаження – компоненти цього навантаження зручніше вважати та позначати як окремі незалежні навантаження; індекс i відповідає точці, у якій досліджуються компоненти переміщення $(u,v,w\ )$, а індекс $\nu=I,II,III$ – безпосередньо самому компоненту переміщення, тобто:

$$\begin{gathered} u_i^I(t) = u_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_x(x_i, y_i, t); \\ u_i^{II}(t) = v_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_y(x_i, y_i, t); \\ u_i^{III}(t) = w_0(x_i, y_i, t). \end{gathered} \tag{3.38}$$

Вкажемо, що на основі залежностей (3.32) - (3.36) нескладно одержати вирази для напружень і деформацій у довільній точці пластини, наприклад, вираження для деформацій будуть мати вигляд аналогічний (3.37) і відрізнятися від попередніх виражень значеннями ядра:

$$\varepsilon_{v_i}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t K_{ij}^{v}(t-\tau) P_j(\tau) d\tau. \tag{3.39}$$

Тут позначення аналогічні описаним раніше в (3.37), за винятком індексів $v = x, y$ – які зручніше позначити у вигляді букв, що збігаються з напрямками осей, уздовж яких визначається деформація ($\varepsilon_x(t)$ і $\varepsilon_y(t)$; нагадаємо, що відповідно до прийнятих гіпотез $\varepsilon_z(t) = 0$).

Для одержання «деформаційних» ядер необхідно ядра для визначення функцій компонент переміщення $u_0(x_i, y_i, t)$, $v_0(x_i, y_i, t)$ і кутів повороту $\psi_x(x_i, y_i, t)$, $\psi_y(x_i, y_i, t)$ розглядати не як функцію змінної t в точці (x_i, y_i, t), а як функцію декількох змінних (x, y, t) і взяти частинну похідну по відповідній просторовій координаті (x або y) [123]:

$$\varepsilon_x(x, y, z, t) = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}; \tag{3.40}$$

$$\varepsilon_y(x, y, z, t) = \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y}. \tag{3.41}$$

Отже для деформаційних ядер можна записати:

$$K_j^{\varepsilon x}(x, y, t) = \frac{\partial K_j^U(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial K_j^{\psi X}(x, y, t)}{\partial x} = K_j^{dU}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi X}(x, y, t);$$

$$K_j^{\varepsilon y}(x, y, t) = \frac{\partial K_j^V(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial K_j^{\psi Y}(x, y, t)}{\partial y} = K_j^{dV}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi Y}(x, y, t),$$

де
$$K_{Pxj}^{dU}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^{5} \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{Pyj}^{dU}(t)=-\left(c_p^2\nu+c^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Py}\lambda_k^{*\,2}\mu_n^*}{\Delta_{kn}^*}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{4kn}t}{\omega_{4kn}}-\frac{\sin\omega_{5kn}t}{\omega_{5kn}}\right),$$

$$K_{Pzj}^{d\psi X}(t)=-c_T^2\frac{12}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Pz}\lambda_k^{*\,2}}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{1kn}t}{\omega_{1kn}}-\frac{\sin\omega_{2kn}t}{\omega_{2kn}}\right),$$

$$K_{Mxj}^{d\psi X}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega_{ikn}^{\psi}+\Omega_{ikn}^{\varphi X}\right)\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Myj}^{d\psi X}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega_{ikn}^{\psi}+\Omega_{ikn}^{\varphi Y}\right)\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Px}^{dV}(t)=-\left(c_p^2\nu+c^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{kn}^{Px}\lambda_k^*\mu_n^{*\,2}}{\Delta_{kn}^*}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{4kn}t}{\omega_{4kn}}-\frac{\sin\omega_{5kn}t}{\omega_{5kn}}\right),$$

$$K_{Pyj}^{dV}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Py}\lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*}\sin\frac{k\pi x_s}{l}\sin\frac{n\pi y_s}{m}\sum_{i=4}^{5}\Omega_{ikn}^{V}\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Pzj}^{d\psi Y}(t)=-c_T^2\frac{12}{h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Pz}\mu_n^{*\,2}}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\left(\frac{\sin\omega_{1kn}t}{\omega_{1kn}}-\frac{\sin\omega_{2kn}t}{\omega_{2kn}}\right),$$

$$K_{Mxj}^{d\psi Y}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega_{ikn}^{\psi}-\Omega_{ikn}^{\varphi X}\right)\sin\omega_{ikn}t\,,$$

$$K_{Myj}^{d\psi Y}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi\cdot x_s}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y_s}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(\Omega_{ikn}^{\psi}-\Omega_{ikn}^{\varphi Y}\right)\sin\omega_{ikn}t\,.$$

У виразах (3.39) ядра для визначення, наприклад, деформації в точці (x_1, y_1) – $\varepsilon_{x_1}(t)$ при дії тільки поперечного навантаження $P_{z1}(t)$ та моменту $M_{x2}(t)$ будуть мати такий вигляд:

$$K_{11}^{x}(t)=K_{Pzj}^{d\psi X}(t);$$

$$K_{12}^{x}(t)=K_{Mxj}^{d\psi X}(t),$$

а сама деформація $\varepsilon_{x_1}(t)$ описується формулою:

$$\varepsilon_{x_1}(t)=\int_0^t K_{11}^{x}(t-\tau)P_{z1}(\tau)d\tau+\int_0^t K_{12}^{x}(t-\tau)M_{x2}(\tau)d\tau\,. \qquad (3.42)$$

Таким чином, одержання залежностей виду (3.37), (3.39), по суті, завершує побудову розв'язання прямої задачі про складне нестаціонарне деформування прямокутної пластини.

В операторній формі вирази (3.37), (3.39) можна записати у вигляді:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\left[p_j\right], \tag{3.43}$$

де u_i – відповідає шуканій функції компонента переміщення або деформації від часу; A_{ij} – інтегральний оператор Дюамеля для відповідних скінченно-різницевих ядер Коші $K_{ij}(t)$ або оператор згортки; p_j відповідає зміні в часі *j-ї* сили $P_j(t)$.

Однак при практичних дослідженнях нестаціонарного деформування пластинчастих елементів конструкції потрібно мати конкретні числові значення, а не формульні, тому зручніше замість виразів виду (3.43) записувати їхні дискретні аналоги:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{P}_j, \tag{3.44}$$

де вектор $\mathbf{u}_i$ відповідає функції u_i; матриця $\mathbf{A}_{ij}$ – інтегральному операторові згортки A_{ij}, елементи якої a_{ij} відповідають різницевим ядрам $K(t_i - t_j)$; а вектор $\mathbf{P}_j$ – функціям навантаження $P_j(t)$.

У ряді випадків виникає наступна обернена задача: напружено-деформований стан (НДС) об'єкта частково відомий (відомий тільки в деяких точках), а необхідно знайти зовнішнє нестаціонарне навантаження, що діє на даний об'єкт. У монографії [82] були викладені методики ідентифікації "простих" навантажень прямокутної пластини, коли для ідентифікації зовнішнього навантаження досить було знати зміну в часі якого-небудь параметра НДС в одній із точок. Більш складна проблема виникає при ідентифікації довільних складних навантажень. Наприклад, коли в певній точці на пластину діє довільне зосереджене навантаження, що містить усі компоненти навантаження (три силові та дві моментні), тоді необхідно знати зміну в часі п'яти параметрів НДС (не обов'язково в одній точці). У цьому випадку треба при розв'язанні ідентифікаційної задачі аналізувати систему з п'яти інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, що містять п'ять невідомих функцій часу та залежності для п'яти параметрів НДС з відомими функціями часу, які приймаються як вихідні дані.

3.2. Ідентифікація декількох імпульсних навантажень, що діють на пластину

Особливий інтерес представляють дослідження в області обернених некоректних задач з ідентифікації одночасно діючих декількох незалежних довільних (поздовжніх і поперечних) навантажень.

Розглядається імпульсний вплив на пружну ізотропну пластину середньої товщини системи декількох навантажень. Під імпульсним впливом розуміється нестаціонарне навантаження пластини протягом часу порівнянного з періодом нижчих власних частот її коливань. Поведінка пластини вивчається на скінченному інтервалі часу. Нехай закони зміни в часі цих навантажень невідомі, однак при цьому передбачається, що геометричні області навантажень та їхні координати задані. Також припускається, що задані плоскі області прикладення навантажень є однозв'язковими (у загальному випадку), а в межах області навантаження, що діють на пластину, не залежать від просторових координат.

Комбінація співвідношень типу (3.37), (3.39) при заданих функціях у правій частині та шуканих функціях $P_j(t)$ є системою з N лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, розв'язання якої є метою в задачі ідентифікації.

В операторній формі система інтегральних рівнянь виду (3.43) буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} A_{i1}\left[p_i\right]=u_1; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} A_{ij}\left[p_i\right]=u_j; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} A_{iN}\left[p_i\right]=u_N. \end{cases} \qquad (3.45)$$

Вкажемо, що опис системи (3.45) аналогічний наведеному вище для операторного вираження (3.43).

Система інтегральних рівнянь розв'язується за допомогою спеціально розробленого комплексу методів, що базується на використанні узагальнених алгоритмів для розв'язання блокових матричних рівнянь [62] і РА Тихонова.

Послідовність розв'язання, відповідно до описаного комплексу методів, наступна: для системи інтегральних рівнянь виконується дискретизація за часом, у результаті чого, зазначена система інтегральних рівнянь виду (3.45) зводиться до блокового СЛАР виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}. \qquad (3.46)$$

Тут $\mathbf{A}_{ij}$ – матриця, що відповідає інтегральному операторові $A_{ij}\left[\cdot\right]$, вектор $\mathbf{p}_i$ відповідає функції p_i, а $\mathbf{u}_j - u_j$.

Блокова СЛАР типу (3.46) розв'язується з використанням узагальненого алгоритму (Гаусса – УАГ або Крамера – УАК), у результаті можна одержати N рівнянь, що залежать тільки від одного *i-го* навантаження:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}_i. \qquad (3.47)$$

де $\mathbf{M}$ і $\mathbf{M}_i$ – матриці, визначені з застосуванням УАК.

Для кожного рівняння виду (3.47) виконується процедура регуляризації за А. М. Тихоновим, у результаті якої приходимо до регуляризованої СЛАР виду:

$$\left(\mathbf{M}^T\mathbf{M}+\alpha_i\mathbf{C}\right)\cdot\mathbf{p}_i=\mathbf{M}^T\mathbf{M}i. \qquad (3.48)$$

де $\alpha_i > 0$ – параметр регуляризації, **C** – симетрична трьохдіагональна матриця, форма якої наведена раніше.

Параметр регуляризації α_i, що входить в (3.48), обчислюється на основі мінімізації по α_i , відповідного кожному $\mathbf{p}_i$ функціоналу виду:

$$\left\|\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}_i(\alpha_i)-\mathbf{M}i\right\|^2. \qquad (3.49)$$

3.3. Приклад ідентифікації декількох поперечних навантажень

Припустимо, що число поперечних незалежних нестаціонарних навантажень, що діють на пластину, дорівнює *N* (для спрощення зображення на рис. 3.8 показано вплив системи з двох незалежних поперечних навантажень).

Причому вважається, що точки прикладення цих навантажень відомі, а невідомі лише закони зміни цих навантажень у часі $P_j(t)$. Вкажемо, що є методи для визначення зовнішнього навантаження $P_{zj}(x,y,t)$ не тільки за часом, але і просторової складової. Ці методи можна умовно розділити на дві групи.

До першої групи відносяться експериментальні методи [73, 171, 176], засновані на використанні надлишкової вимірюваної інформації та вони дуже вимогливі до точності. Для визначення координат точки прикладення *j-го* зосередженого навантаження на досліджуваній пластині необхідно розмістити три додаткових датчики, що реєструють прихід деформаційних хвиль, породжених нестаціонарними навантаженнями $P_{zj}(x,y,t)$.

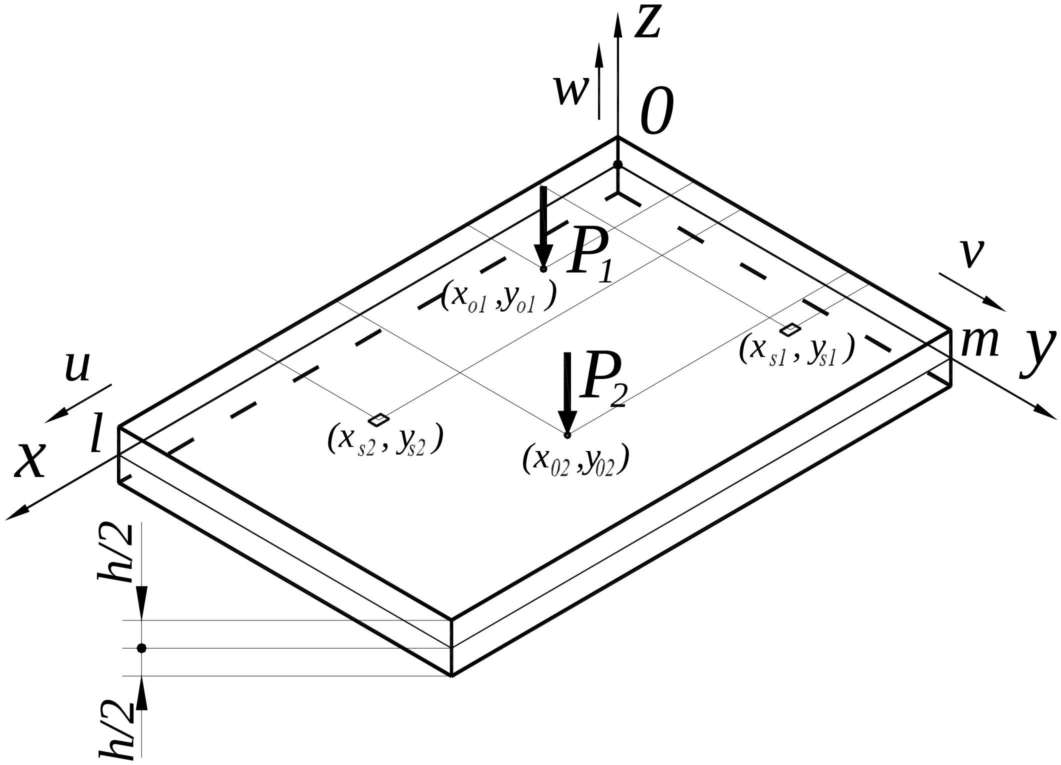


Рисунок 3.8 – Схема навантаження пластини

Отже, для ідентифікації N навантажень бажано мати систему $3 \cdot N$ таких датчиків, які відносно рівномірно повинні бути розподілені по поверхні пластини. Виходячи з геометричної картини поширення деформаційних хвиль у пластині, для кожного *j-го* навантаження можна скласти систему з 3-х алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_p t_{0-1} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; \\ c_p t_{0-2} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}; \\ c_p t_{0-3} = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}, \end{cases} \tag{3.50}$$

де t_{0-1} – проміжок часу між моментом прикладення навантаження і її реєстрацією першим (найближчим) датчиком; t_{0-2}, t_{0-3} – проміжки часу реєстрації другим і третім датчиком відповідно; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) – координати датчиків, що зареєстрували збурювання, першим, другим і третім відповідно; (x_0, y_0)– координати джерела збурювання; $c_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho \cdot (1 - \nu^2)}}$ –

найбільша по величині швидкість деформаційної хвилі в пластині. Легко показати, що система рівнянь (3.55) еквівалентна наступній

$$\begin{cases} c_p t_2 = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} - \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; \\ c_p t_3 = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} - \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}, \end{cases} \qquad (3.51)$$

причому $t_{0-2} = t_{0-1} + t_2$, $t_{0-3} = t_{0-1} + t_3$, де t_2, t_3 – час між реєстрацією сигналу першим і другим датчиком, першим і третім датчиком відповідно.

Наведена система (3.51) нелінійна, до того ж для системи з N навантажень необхідно розв'язати N таких систем. Хоча, поставлена задача і не проста – вона може бути розв'язана числовими методами, алгоритми яких реалізовані на ЕОМ, однак більше складна задача буде полягати в тому, щоб досить точно виміряти набір часів t_{j2}, t_{j3} для всіх N навантажень.

До другої групи відносяться обчислювальні методи, засновані на мінімізації відповідних функціоналів нев'язки $\left\| \mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{P}_j^{\alpha_j} - \mathbf{w}_{\delta j} \right\|_{l_2}^2$ не тільки за параметром регуляризації α_j, але і за параметрами, що залежать від координат $\left(x_{0j}, y_{0j}\right)$, які входять в C_{knj}. Вкажемо, що така задача розв'язується винятково чисельно та приблизно. Також відзначимо, що навіть для визначення точки прикладення одного навантаження час обчислень значно більше (більше чим в 10 разів), чим просто для ідентифікації його залежності за часом.

Вкажемо, що перший спосіб може бути застосований для невеликого числа незалежних навантажень, і його також можна використати як початкове наближення. Подальше уточнення координат необхідно виконувати на основі мінімізації відповідних нев'язок.

У висновку зазначимо, що за винятком деяких специфічних задач, пов'язаних з ідентифікацією зовнішніх навантажень у реальному часі, ідентифікація координат $\left(x_{0j}, y_{0j}\right)$ точок прикладення навантажень не потрібна, тому що місця навантажень, як правило, добре видно візуально і можуть бути досить точно обмірювані безпосередньо на досліджуваному об'єкті.

В реальних задачах найчастіше зустрічаються поперечні навантаження, зміна яких у часі невідома, (див. рис. 3.8), і система (3.2) може бути переписана в більш відомому спрощеному вигляді, що складається з трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних, кожне з яких другого порядку:

$$\begin{cases} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum\limits_{j=1}^{N} P_{zj}(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}\right] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho I \dfrac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{3.52}$$

Укажемо, що функції $P_{zj}(x, y, t)$, що входять у праву частину першого рівняння, відповідають *j-му* збурювальному навантаженню, кожне з яких має різні координати області його прикладення та закони зміни інтенсивності навантажень $P_j(t)$ у часі.

Систему рівнянь (3.52) при деяких обмеженнях в ряді монографій, наприклад [134], зводять до одного диференціального рівняння четвертого порядку щодо прогину. Однак, при розв'язанні задач ідентифікації реальних навантажень як вихідні дані найчастіше використовуються деформації, для аналітичного визначення яких необхідні залежності кутів повороту нормалі ψ_x і ψ_y, тому тут наведена розгорнута система з трьох рівнянь.

Будемо припускати, що умови закріплення пластини відповідають шарнірному обпиранню її торців.

При обчисленнях у відповідних подвійних рядах утримувалося скінчене число перших членів, причому необхідне їх число встановлювалося на ґрунті дослідження практичної збіжності рядів.

Для ідентифікації системи з N навантажень, тобто знаходження функцій $P_j(t)$, необхідно задати зміну в часі яких-небудь параметрів напружено-деформованого стану (НДС) пластини в N різних її точках. Нехай точки з координатами (x_{Si}, y_{Si}) – місця установки датчиків, що реєструють зміну деформаційних параметрів пластини (переміщення або деформації).

Припустимо, що датчик фіксує зміни прогину $w_i^*(t)$ в точці з координатами (x_{Si}, y_{Si}) як функцію часу, тоді для цієї точки можна записати наступний вираз

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t} P_j(\tau)K_j^W(x_{Si}, y_{Si}, t-\tau)d\tau = w_i^*(t). \qquad (3.53)$$

Якщо датчик, реєструє, наприклад, зміни деформації $\varepsilon_{xi}^*(t)$ в точці з координатами (x_{Si}, y_{Si}) на верхній лицьовій поверхні пластини, тоді вираз аналогічний (3.53) буде мати такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t} P_j(\tau)K_{ij}^{\varepsilon x}(t-\tau)d\tau = \varepsilon_{xi}^*(t), \qquad (3.54)$$

де $K_{ij}^{\varepsilon x}(t) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{jkn}b(\lambda_k^*)^2}{\Delta_{kn}}\sin\frac{k\pi x_{Si}}{l}\sin\frac{n\pi y_{Si}}{m}\sum_{p=1}^{2}\frac{\sin\omega_{pkn}t}{\omega_{pkn}}$.

Вкажемо, що в представлених виразах (3.53), (3.54) вигляд ядра залежить від j-го збурювального навантаження та прогинів або деформацій в i-й точці, в якій визначаються параметри напружено-деформованого стану. Надалі ядра виду $K_j^{\varepsilon x}(t)$ або $K_j^W(t)$ будемо позначати – $K_{ij}(t)$.

Наприклад, у випадку навантаження пластини системою з 2-х нестаціонарних поперечних навантажень і реєстрації у двох її точках деформацій $\varepsilon_{xi}^*(t)$, можна записати наступну блокову СЛАР:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.55)$$

В результаті її розв'язання за описаної раніше методикою можна одержати явні вирази (у матричній формі) для шуканих навантажень:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \alpha_1\mathbf{C})^{-1}\mathbf{M}^T(\mathbf{A}_{22}\varepsilon_1 - \mathbf{A}_{21}\varepsilon_2); \\ \mathbf{P}_2 &= (\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{C})^{-1}\mathbf{M}^T(\mathbf{A}_{11}\varepsilon_2 - \mathbf{A}_{21}\varepsilon_1), \end{aligned} \qquad (3.56)$$

де $\mathbf{M} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}$.

При проведенні розрахунків на величини деформацій $\overline{\varepsilon_{xj}}(t)$, які є результатами розв'язання прямої задачі при заданих законах зміни в часі зовнішніх навантажень $P_i(t)$, накладався «шум» відповідно до формули:

$$\varepsilon^*_{xj}(t) = \overline{\varepsilon_{xj}}(t) + \varepsilon_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t), \tag{3.57}$$

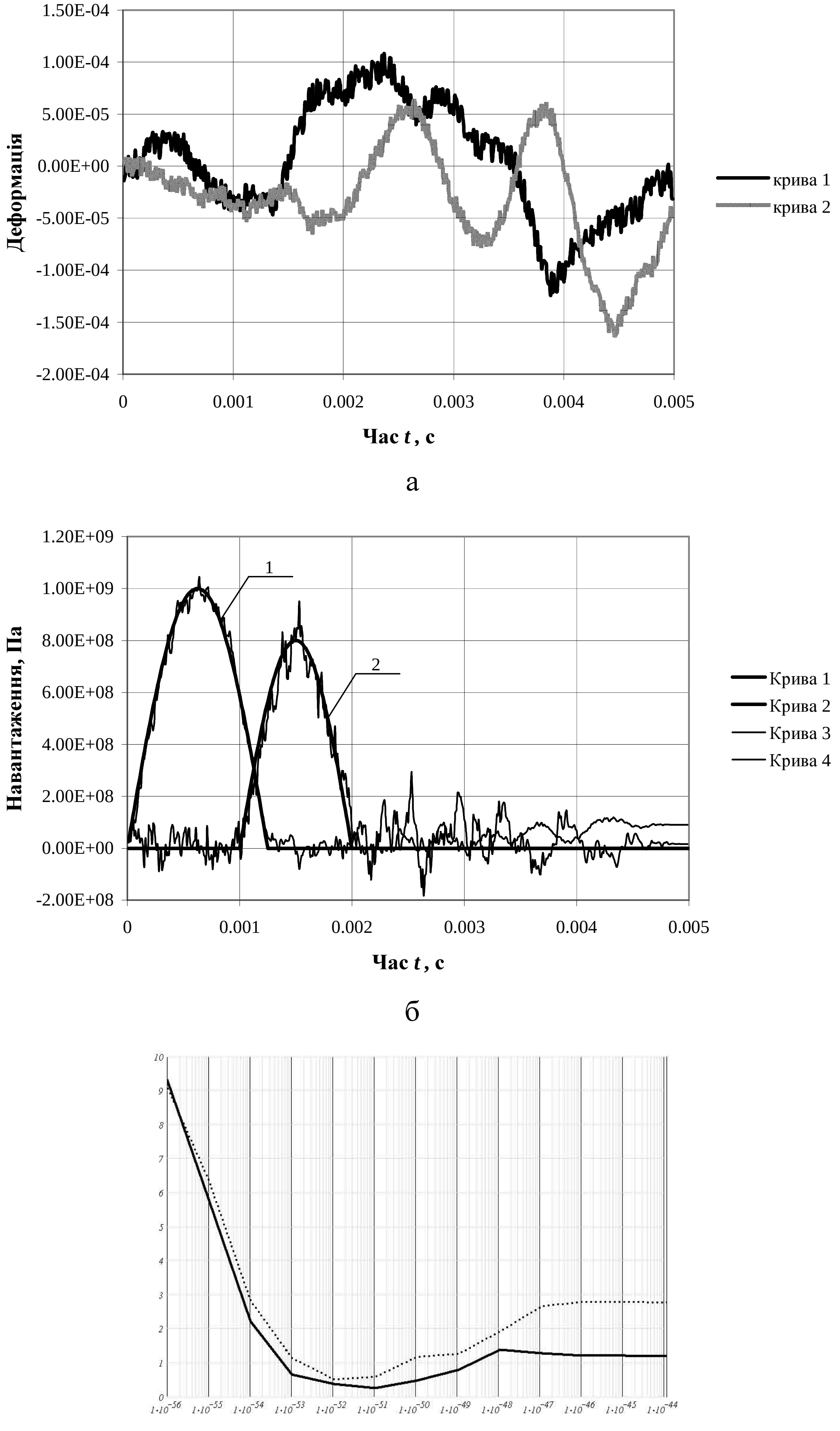
де δ – відносна похибка; $\varepsilon_{\max}$ – максимальна деформація пластини в розглянутій точці, $Rnd(t)$ – випадкові числа в інтервалі $[-1;1]$. Вкажемо, що процедура «зашумлення» моделює похибки, що виникають при реальних вимірах параметрів НДС елементів конструкцій (наприклад, тензометричним методом).

При обчисленнях, наведених на рис. 3.9, були прийняті наступні значення параметрів: ρ=7890 кг/м^3; E=2.07·10^{11} Па; ν=0.3; k'=0.85; h=0.04 м; l=0.6 м, m=0.4 м, r_1=r_2=r=0.005 м; $\max P_1(t) = 10^9$ Па, $\max P_2(t) = 8 \cdot 10^8$ Па, $\delta = 0.15$. Координати точок центрів прикладення поперечних навантажень $x_{01} = 0.4$ м, $y_{01} = 0.3$ м; $x_{02} = 0.2$ м, $y_{02} = 0.2$ м. Координати точок, деформації $\varepsilon_x(t)$ в яких вважалися відомими при розв'язанні задачі ідентифікації, (місця установки датчиків) $x_{s1} = 0.3$ м, $y_{s1} = 0.1$ м; $x_{s2} = 0.1$ м, $y_{s2} = 0.5$ м.

На рис. 3.9, *а* показані зміни в часі функцій $\varepsilon^*_{x1}(t)$ і $\varepsilon^*_{x2}(t)$, що використовувались як вихідні дані при розв'язанні оберненої задачі, криві 1 і 2 відповідно.

На рис. 3.9, *б* наведені криві, що зображують зміну в часі функцій $P_1(t)$ і $P_2(t)$, причому криві 1 і 2 (товсті лінії) відповідають заданим змінам навантажень, прийнятим при розв'язанні відповідної прямої задачі, а криві 3 і 4 (тонкі лінії) – ідентифікованим значення навантажень, при "зашумленні" вихідних даних з рівнем $\delta = 0.15$.

Вкажемо, що на рис. 3.9, *б* навантаження (вертикальна вісь) є контактним тиском і відкладені у паскалях.



а

б

в

Рисунок 3.9 – Ідентифікація системи сил при відомих деформаціях

На рис. 3.9 *в* представлена графічна ілюстрація результатів мінімізації відповідних функціоналів при визначенні параметрів регуляризації α_1 (суцільна крива) і α_2 (крапки). З представлених результатів видно, що найбільш раціональні значення при розв'язанні даної задачі такі: $\alpha_1 = 10^{-51}$, $\alpha_2 = 10^{-52}$.

Розглядався також випадок навантаження пластини системою з 3-х нестаціонарних поперечних зосереджених навантажень. Як вихідні дані для задачі ідентифікації використовувалися зміни прогинів $w_j(t)$ у трьох її точках. У цьому випадку для ідентифікації системи із трьох незалежних нестаціонарних навантажень розв'язувалася система трьох інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.

При обчисленнях, наведених на рис. 3.10, були прийняті наступні значення параметрів: $P_1(t) = 8 \cdot 10^4$ Н, $P_2(t) = 10^5$ Н, $P_3(t) = 6 \cdot 10^4$ Н, $\delta = 0.05$.

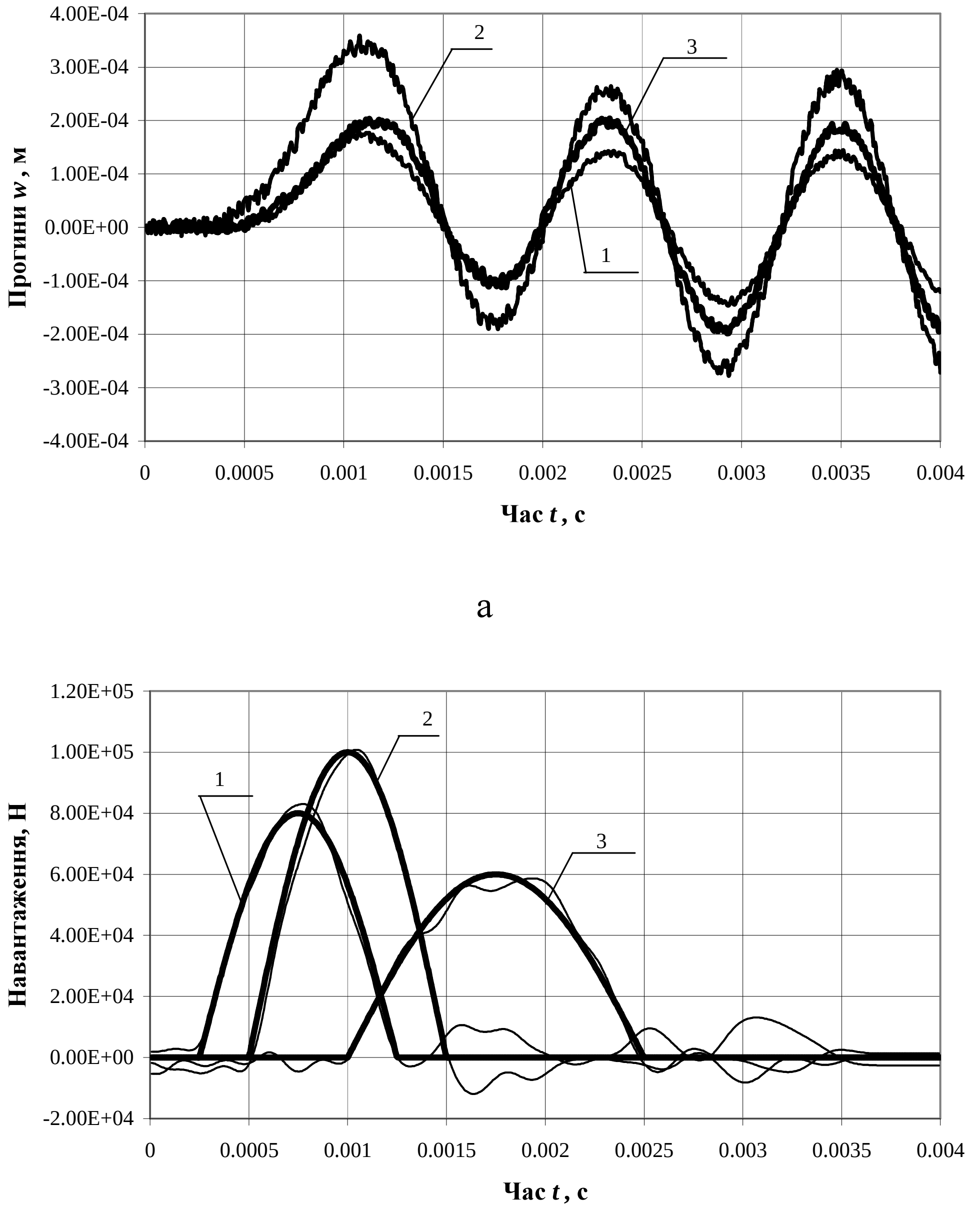
Координати точок прикладення поперечних сил: $x_{01} = 0.3$ м, $y_{01} = 0.25$ м; $x_{02} = 0.25$ м, $y_{02} = 0.2$ м; $x_{03} = 0.35$ м, $y_{03} = 0.15$ м.

Координати точок, прогини $w(t)$ в яких вважалися відомими при розв'язанні оберненої задачі, (місця установки датчиків): $x_{s1} = 0.1$ м; $y_{s1} = 0.1$ м; $x_{s2} = 0.3$ м; $y_{s2} = 0.3$ м; $x_{s3} = 0.5$ м; $y_{s3} = 0.2$ м.

На рис. 3.10, *а* показані зміни в часі функцій $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $w_3(t)$, криві 1, 2 і 3 відповідно – вихідні дані для ідентифікації.

На рис. 3.10, *б* наведені криві, що зображують зміну в часі сил $P_1(t)$, $P_2(t)$ і $P_3(t)$, причому криві 1, 2 і 3 (товсті лінії) відповідають заданим змінам сил, що використовувались при розв'язанні відповідної прямої задачі, а тонкі криві відповідають ідентифікованим значенням сил при "зашумлених" вихідних даних з рівнем $\delta = 0.05$.

Зазначимо, що ідентифіковані криві (тонкі лінії) майже співпадають з «еталонними» товстими, або розташовані на невеликій відстані, тому не потрібно додатково позначати їх на рисунках. Це також додатково ілюструє «якість» ідентифікації.



а

б

Рисунок 3.10 – Ідентифікація системи сил при відомих прогинах

З наведених результатів видно, що запропонована методика, дозволяє одержувати досить стійкі розв'язки для систем інтегральних рівнянь, до яких зводиться розв'язання задачі ідентифікації законів зміни в часі декількох незалежних збурювальних навантажень, які діють одночасно на прямокутні пластини середньої товщини.

3.4. Урахування впливу пружної основи при імпульсному деформування прямокутних пластин

Розглянемо деформування пластинчастих елементів конструкцій, що лежать на пружній основі. Відомо, що пружна основа практично не перешкоджає зсуву пластини в повздовжньому напрямку при навантаженні похилими або дотичними до лицьових поверхонь силами. Однак при такому зсуві під дією повздовжніх сил природно буде виникати тертя, отже, при розв'язанні подібних задач потрібно враховувати дисипацію енергії. У випадку, коли необхідно детально досліджувати механіку такого деформування потрібно використовувати більш складні багатошарові моделі, у яких є можливість враховувати необхідні умови контакту між шарами. Таким чином, основний вплив пружної основи проявляється при поперечному навантаженні пластинчастих елементів конструкцій [76]. Тут використовується одна з найбільш повних пружних одношарових моделей основи – двостороння пружна інерційна основа «Власова-Леонтьєва», математична модель якої описана в монографії [13]. Гіпотези, які прийняті для цієї моделі пружної основи добре узгоджуються з гіпотезами С. П. Тимошенка для пластин (обидві моделі враховують ефекти інерції та зсуву, одна – в основі, друга – в самій пластині).

Розглянемо навантаження пластини на пружній основі силами, нормальними до її серединної площини (рис. 3.11) і прикладеними в точках (x_{0j}, y_{0j}).

Для визначення компонентів переміщення пластини в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка представимо наступну систему диференціальних рівнянь аналогічну (3.52), яка з урахуванням відповідних початкових і крайових умов, а також умов взаємодії пластини з основою буде мати рівняння, що описують нестаціонарні деформаційні процеси в розглянутій механічній системі:

$$\begin{cases} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum\limits_{j=1}^{N} P_{zj}(x,y,t) + R(x,y,t); \\ D\nabla^2\psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2\psi_{xy}\right] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{3.58}$$

де $P_{zj}(x,y,t)$ – j-*й* нестаціонарний вплив;

$R(x,y,t)$ – реакція пружної основи (див. монографію [13]).

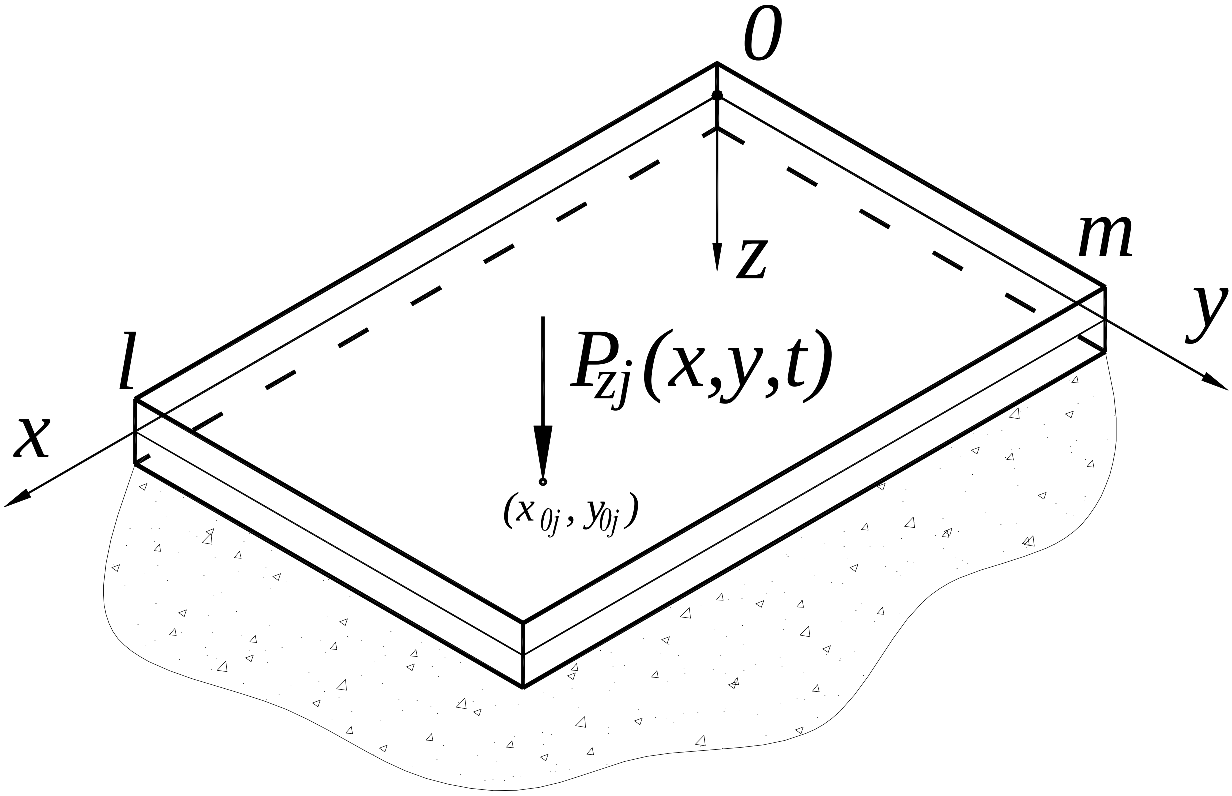


Рисунок 3.11 – Схема пластини на пружній основі

У припущенні, що основа є пружною одношаровою двосторонньою та інерційною, відповідно до роботи [13] можна записати наступне вираження для функції реакції основи:

$$R(x,y,t) = -2t_f \cdot \nabla^2 w_0(x,y,t) + k_f \cdot w_0(x,y,t) + m_f \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial t^2}, \tag{3.59}$$

де k_f, t_f, m_f – постійні пружні основи:

k_f – коефіцієнт прямої пропорційності (коефіцієнт постілі), що визначає роботу пружної основи на стиск;

t_f – коефіцієнт, що дозволяє враховувати дотичні напруження, що виникають у пружній основі;

m_f – питома маса пружної основи для урахування ефекту інерції.

Ці параметри можуть бути знайдені, наприклад, з наступних співвідношень:

$$k_f = \frac{E_0}{1-\nu_0}\int_0^H \psi'^2(z)dz,$$

$$t_f = \frac{E_0}{4(1+\nu_0)}\int_0^H \psi^2(z)dz, \qquad (3.60)$$

$$m_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(z)dz,$$

де E_0 – модуль пружності пружно основи,

ν_0 – коефіцієнт Пуассона пружної основи,

ρ_0 – густина матеріалу основи,

$\psi(z)$ – функція поперечного розподілу переміщень в основі.

У результаті урахування дотичних напружень описувана модель здатна «розподіляти навантаження» [13], а завдяки інерційній складовій – може бути застосовна в задачах динамічного навантаження.

Відзначимо, що існує декілька гіпотез щодо функції поперечного розподілу переміщень в основі $\psi(z)$ в залежності від вертикальної просторової координати, більш детально ознайомитись з цим питанням можна також в монографії [13].

Розв'язання системи диференціальних рівнянь (3.58) у припущенні нульових початкових умов для шарнірно-обпертої пластини на пружній основі буде мати вигляд аналогічний (3.37) і відрізнятися від попередніх виразів ядрами:

$$w_0(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_j^{fW}(x,y,t-\tau)P_j(\tau)d\tau;$$

$$\psi_x(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_j^{f\Psi x}(x,y,t-\tau)P_j(\tau)d\tau; \qquad (3.61)$$

$$\psi_y(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_j^{f\Psi y}(x,y,t-\tau)P_j(\tau)d\tau,$$

де $K_j^{fW}(x,y,t)$, $K_j^{f\Psi x}(x,y,t)$, $K_j^{f\Psi y}(x,y,t)$ – ядра відповідних інтегралів Дюамеля (згорток) виду:

$$K_j^{fW}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{jkn}^f}{\Delta_{kn}^f}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}\left[\Omega_{1kn}^f\omega_{1kn}^f\sin\omega_{1kn}^f t-\Omega_{2kn}^f\omega_{2kn}^f\sin\omega_{2kn}^f t\right];$$

$$K_j^{f\Psi x}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{jkn}^f b\lambda_k^*}{\Delta_{kn}^f}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}\left[\frac{\sin\omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f}-\frac{\sin\omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f}\right];$$

$$K_j^{f\Psi y}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{kn}^f b\mu_n^*}{\Delta_{kn}^f}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{m}\left[\frac{\sin\omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f}-\frac{\sin\omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f}\right].$$

У представлених співвідношеннях: замість швидкості хвиль зсуву в рамках теорії типу Тимошенка $c_T^2=\frac{G'}{\rho}$ з'являється швидкість $c_f=\frac{G'h}{\rho h+m_f}$, що враховує вплив основи на швидкість таких хвиль (уповільнення, що залежить від питомої маси основи); $a_2=\frac{2t_f}{\rho h+m_f}$; $a_3=\frac{k_f}{\rho h+m_f}$;

$$\Omega_{1kn}^f=\omega_{1kn}^f-\frac{d\cdot\lambda_{kn}^2+b}{\omega_{1kn}^f};\ \ \Omega_{2kn}^f=\omega_{2kn}^f-\frac{d\cdot\lambda_{kn}^2+b}{\omega_{2kn}^f};$$

$$\Delta_{kn}^f=\sqrt{(\lambda_{kn}^2(c_f+a_2+d)+a_3+b)^2-4[\lambda_{kn}^2(\lambda_{kn}^2 d(c_f+a_2)+a_3 d+a_2 b)+a_3 b]};$$

$$\omega_{1kn}^f=\sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(c_f+a_2+d)+a_3+b)+\Delta_{kn}^f]};$$

$$\omega_{2kn}^f=\sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(c_f+a_2+d)+a_3+b)-\Delta_{kn}^f]};\ \ .$$

Причому ω_{1kn}^f, ω_{2kn}^f – власні кругові частоти коливань, що враховують вплив пружної основи.

Слід зазначити, що в ядрах виразів (3.61) коефіцієнти C^{f}_{jkn} – є коефіцієнтами розвинення зовнішнього навантаження в ряди Фур'є, аналогічні коефіцієнтам (3.20)-(3.24), тільки з урахуванням параметрів основи.

У випадку зосередженого навантаження пластини (рис. 3.11) у точці з координатами (x_{0j}, y_{0j}):

$$P_{zj}(x,y,t)=\delta(x-x_{0j})\delta(y-y_{0j})P_j(t),$$

де $P_j(t)$ – функція зміни інтенсивності *j*-ї сили в часі.

Ці коефіцієнти будуть мати вигляд:

$$C^{f}_{jkn}=\frac{4}{l\cdot m}\cdot\frac{1}{\rho\cdot h+m_f}\cdot\sin(\frac{k\pi\cdot x_{0j}}{l})\cdot\sin(\frac{n\pi\cdot y_{0j}}{m}). \tag{3.62}$$

У випадку навантаження пластини «рухливими» силами (рис. 3.12) у коефіцієнтах C^{f}_{kn} треба замінити відповідну змінну по координаті (*x* або *y*) на $V_0\cdot t$, де V_0 – швидкість руху навантаження (постійна).

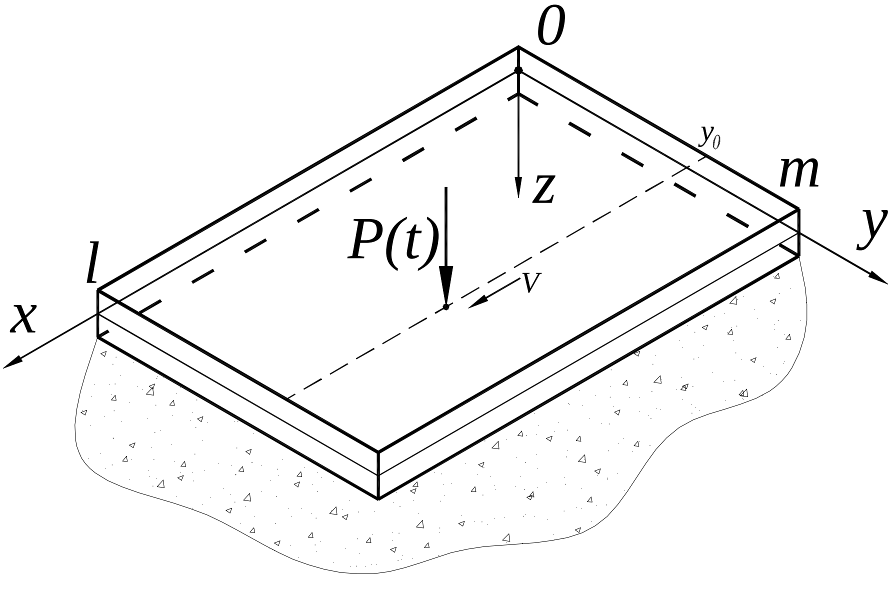


Рисунок 3.12 – Рухоме зосереджене навантаження пластини на основі

У випадку навантаження пластини на основі при дослідженнях прямокутним штампом (рис. 3.13) розглянемо вплив розподіленого по прямокутнику навантаження (Δx_j ,Δy_j – розміри області прикладення вздовж осей Ox і Oy відповідно, а точка $\left(x_{0j}, y_{0j}\right)$ – центр прямокутника), коефіцієнти будуть мати вигляд аналогічний (3.26):

$$C^f_{jkn} = \frac{4}{lm}\frac{1}{\rho\, h + m_f}\frac{4}{\lambda^*_k \mu^*_n}\sin\frac{k\pi x_{0j}}{l}\sin\frac{k\pi\Delta x_j}{2l}\sin\frac{n\pi y_{0j}}{m}\sin\frac{n\pi\Delta y_j}{2m}. \qquad (3.63)$$

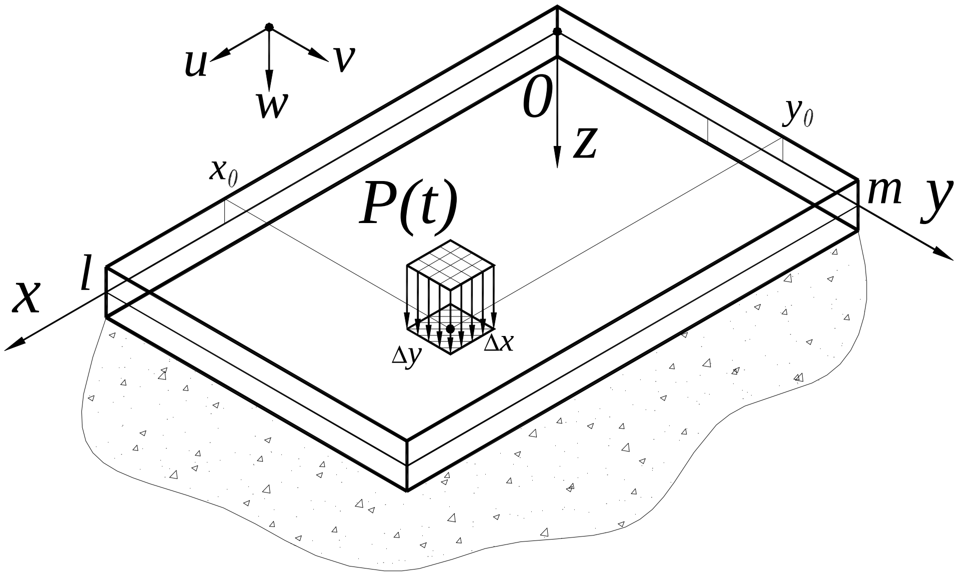


Рисунок 3.13 – Схема пластини на пружній основі
з рівномірно розподіленим навантаженням

У випадку, коли навантаження, прикладене до пластини на основі рівномірно розподілено по кругу радіуса r (круглий штамп або випробування автомобільним колесом), коефіцієнти будуть мати подібний (3.28) вигляд:

$$C^f_{jkn} = \frac{4}{lm}\frac{1}{\rho\, h + m_f}\frac{2\pi r}{\lambda_{kn}} J_1(\lambda_{kn} r)\sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \qquad (3.64)$$

Якщо навантаження в зоні контакту розподілено не рівномірно, а у вигляді половини еліпсоїда обертання, коефіцієнти розвинення навантаження в подвійні ряди Фур'є приймуть за аналогією з (3.30) вигляд:

$$C^f_{kn} = \frac{4}{lm}\frac{1}{\rho h + m_f}\frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2}\left(\frac{\sin(\lambda_{kn} r)}{\lambda_{kn} r} - \cos(\lambda_{kn} r)\right)\sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right). \qquad (3.65)$$

При моделюванні різних контактних навантажень пластини (наприклад, навантаження дорожньої конструкції колесом автомобільної шини) може бути враховано, що пляма контакту має круглу або еліптичну форму, а розподіл тиску може бути рівномірним або у вигляді половини еліпсоїда (рис. 3.14).

Наприклад, при навантаженні дорожньої конструкції рухомим колесом вираз для коефіцієнта C_{kn}^f (3.64) можна записати у вигляді:

$$C_{kn}^f = \frac{4}{lm}\frac{1}{\rho h + m_f}\frac{2\pi r}{\lambda_{kn}} J_1(\lambda_{kn} r)\sin\left(\frac{k\pi V_0 t}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right). \qquad (3.66)$$

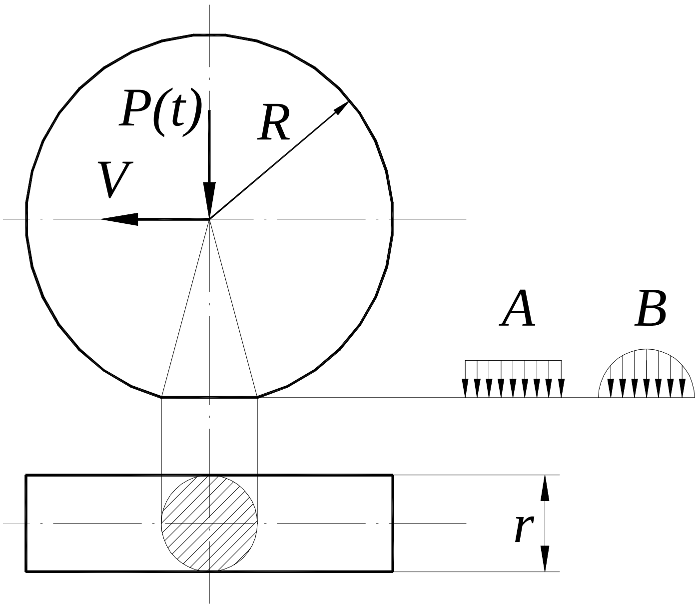


Рисунок 3.14 – Моделювання контактних навантажень від колеса

Співвідношення (3.61) визначають розв'язання прямої задачі імпульсного деформування прямокутної пластини на пружній основі.

Вкажемо, що на основі залежностей (3.61) нескладно одержати вирази для деформацій у довільній точці пластини на основі.

Для деформацій аналітичні вирази будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_j^{f\varepsilon x}(x,y,t-\tau)P_{zj}(\tau)d\tau; \\ \varepsilon_y(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{N}\int_0^t K_j^{f\varepsilon y}(x,y,t-\tau)P_z(\tau)d\tau, \end{aligned} \qquad (3.67)$$

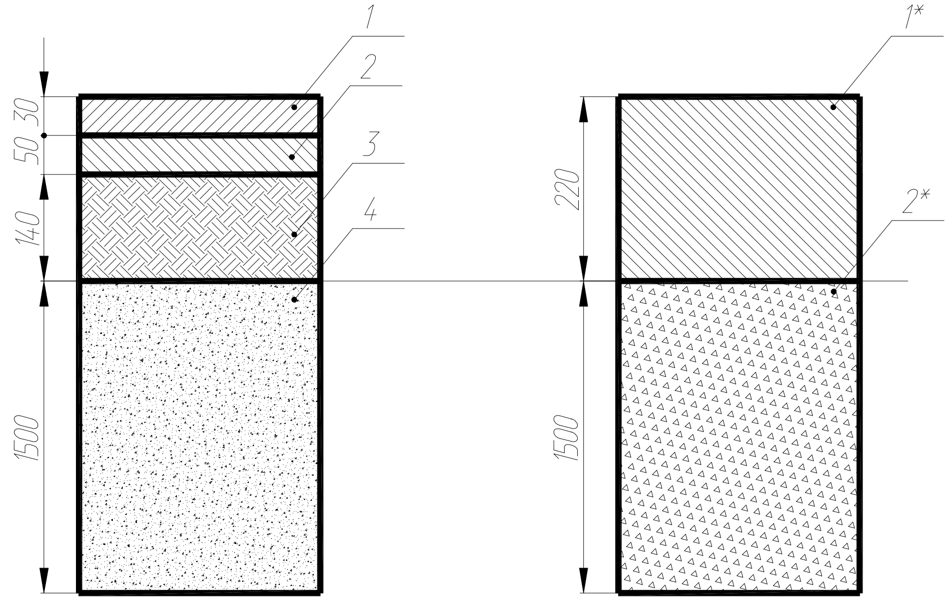
де $K_j^{f\varepsilon x}(x,y,t) = -z\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{jkn}^f b\lambda_k^{*\,2}}{\Delta_{kn}^f}\sin\frac{k\pi x_j}{l}\sin\frac{n\pi y_j}{m}\left[\frac{\sin\omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin\omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f}\right];$

$$K_j^{f\varepsilon y}(x,y,t) = -z\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{jkn}^{f} b \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}^{f}}\sin\frac{k\pi x_j}{l}\sin\frac{n\pi y_j}{m}\left[\frac{\sin\omega_{1kn}^{f}t}{\omega_{1kn}^{f}}-\frac{\sin\omega_{2kn}^{f}t}{\omega_{2kn}^{f}}\right],$$

z – поперечна координата точки в якій визначається деформація (по висоті).

Запропонована модель пластини на основі дозволяє моделювати, наприклад, нестаціонарні навантаження дорожніх конструкцій різного типу. Наведемо один приклад: дорожнє покриття моделюється як ізотропна пластина середньої товщини типу Тимошенко; дорожня основа – як пружна одношарова інерційна основа типу Власова-Леонтьева. Припускається, що контакт між основою і дорожнім одягом є двостороннім.

На рис. 3.15 показано схему конструкції дорожнього одягу [85] (лівий рисунок) і схема її спрощеної моделі (правий рисунок), яка прийнята при розрахунках.



1. середньозернистий асфальтобетон;
2. покриття з пачосів з добавкою цементу;
3. мінеральний бетон;
4. основний ґрунт;

1*. пластина середньої товщини;

2*. пружна інерційна основа типу Власова-Леонтьева.

Рисунок 3.15 – Схема заміни дорожньої конструкції пластиною на пружній основі

На рис. 3.16 показано зміни прогину елементів дорожнього покриття при дії рухомого навантаження. Розрахунок виконувався для запропонованої моделі – пластина середньої товщини типу Тимошенка, що лежить на пружній інерційній основі типу Власова-Леонтьева. Для зіставлення результатів розрахунків з результатами інших авторів експериментальні дані взяті з роботи [115] (Малеванский В. В. , Радовский Б. С. и др. Испытание дорожных одежд на стенде Госдорнии, с. 53-58) – чорна крива, криві 1-4 – приклад розрахунку прогинів при різних параметрах дорожньої конструкції.

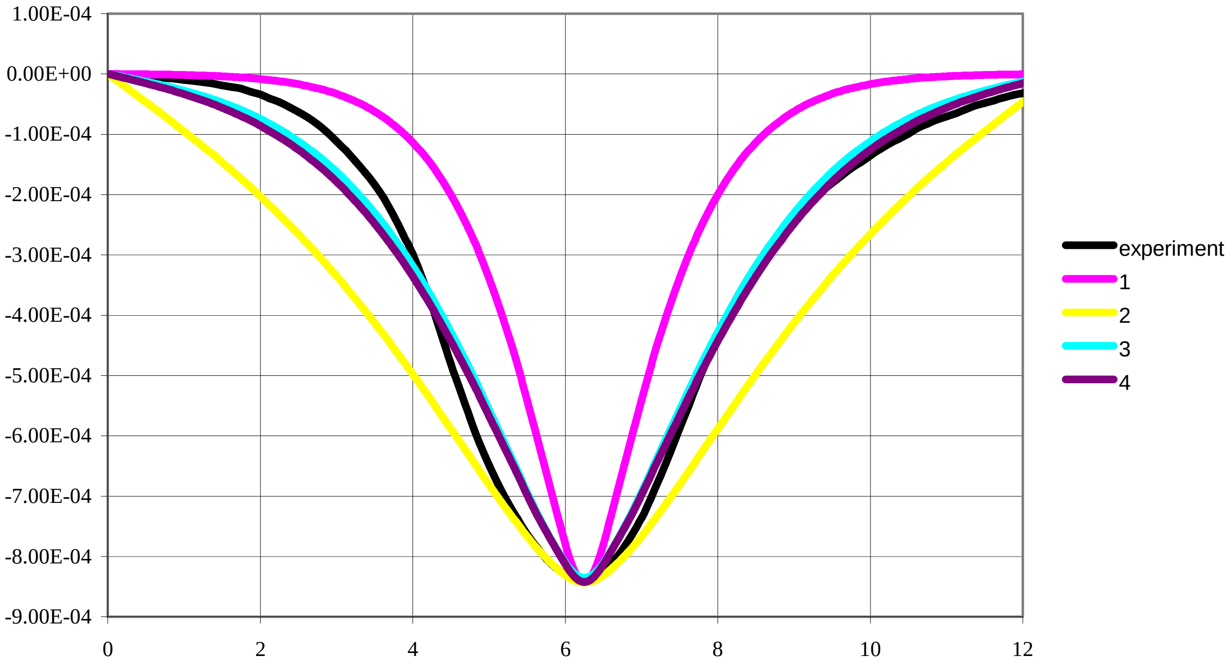


Рисунок 3.16 – Зіставлення з експериментом

З графіка видно, що розрахункові криві, хоча і близькі, але не співпадають. Слід зазначити, що експериментальна крива не симетрична відносно екстремуму, що обумовлено, напевно, в’язкопружним характером деформування, а розрахункові криві симетричні, тому що отримані для (більш простої) пружної моделі як пластини, так і основи.

3.5. Висновок по розділу

Розглянуто складні нестаціонарні навантаження (мають не тільки поперечні, а й поздовжні складові), які діють на прямокутну пружну ізотропну пластину середньої товщини (в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка).

Представлено теорію розв'язання прямої та оберненої задачі теорії пружності для скінченного набору незалежних нестаціонарних навантажень пластини. Наведено кілька прикладів обчислень з ідентифікації таких зовнішніх навантажень.

З наведених результатів видно, що запропонована методика, дозволяє одержувати досить стійкі розв'язання для систем інтегральних рівнянь, до яких зводиться розв'язання задачі ідентифікації законів зміни в часі декількох незалежних збурювальних навантажень, які діють одночасно на прямокутні пластини середньої товщини.

Викладено підхід щодо урахування пружної інерційної двосторонньої основи типу Власова-Леонтьева.

Основні наукові результати, наведені у третьому розділі,опубліковано у працях автора [1 – 3, 12, 15, 19, 21, 25, 32 – 34, 37].

РОЗДІЛ 4

НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИН ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ

4.1. Вступ

Реальні механічні об'єкти, як правило, є досить складними. При побудові математичної моделі розглядають основний механічний об'єкт (балка, пластина або оболонка), а іншими, найчастіше, нехтують. У деяких випадках їх нестаціонарне деформування може бути досліджене на основі відомих моделей пластин з урахуванням впливу різних особливостей, а саме: додаткових опор (пружних або в'язкопружних); ребер жорсткості; малих тіл, що мають певну масу при малих геометричних розмірах). Слід зазначити, що при нестаціонарних коливаннях у динамічних системах значний вплив можуть здійснювати жорсткості та демпфірувальні властивості додаткових опор і ребер, а також сили інерції, викликані малими тілами, у яких можуть бути значні прискорення (особливо при нестаціонарних коливаннях). Сили інерції можна враховувати за допомогою приєднаних мас (зосереджених або розподілених).

В галузі прямих задач є наукові праці, в яких досліджується вплив таких особливостей.

Укажемо, що в роботі [290] описаний аналітичний метод знаходження частот коливань механічної системи, яка складається з ізотропної прямокутної пластини, а також зосередженої маси, пружини та погашувача коливань, приєднаних до пластини в деяких точках. У цій роботі для опису коливань пластини також використовуються подвійні ряди ортогональних функцій. У статті [238] досліджуються вільні коливання прямокутних пластин, що несуть зосереджені маси.

У роботі [289] описане використання аналітичного і чисельного комбінованого методу (analytical-and-numerical-combined method – ANCM) для аналізу вільних коливань прямокутної пластини з будь-якою кількістю зосереджених мас і пружин. Крайові умови пластини, а також величини та координати зосереджених елементів є довільними. На базі отриманого у вигляді замкнутих форм власних частот розв'язання для «необмеженої» пластини (без будь яких прикріплених зосереджених елементів) з використанням методу суперпозиції мод отримане рівняння власних значень «обмеженої» пластини (з будь-яким числом прикріплених зосереджених елементів). Рівняння для власних значень розв'язується чисельно, щоб одержати власні частоти і форми мод «обмеженої» пластини. За умови, що похибки шуканих власних частот приблизно однакові, порядок рівняння власних значень, отриманого з ANCM, набагато нижче, ніж порядок, отриманий методом скінчених елементів (finite element method – FEM). Таким чином, процесорний час, необхідний ANCM, набагато менше, ніж потрібно FEM. Крім того, ANCM також перевершує чисто аналітичний метод (розв'язання в замкнутій формі), оскільки він застосовний для аналізу вільних коливань однорідної прямокутної пластини, що несе будь-яку кількість зосереджених елементів.

В [241] публікації описане чисельне розв'язання задачі про вільні коливання підріплених панелей з довільним набором крайових умов, що несуть множину зосереджених мас і приєднаних жорсткостей. Такі панелі є основними складовими елементами кораблів і морських споруд. Розв'язання засноване на методі передбачуваних мод, як функції наближення використовуються характеристичні ортогональні поліноми, які мають властивості балкових функцій Тимошенко і задовольняють заданим крайовим умовам. Для пластин застосовується теорія Миндлина, а для ребер жорсткості – теорія балок Тимошенко. Співвідношення для власних значень отримують за допомогою рівняння руху Лагранжа. Розроблено чисельний метод для аналізу вільних коливань неізольованих плит і жорстких панелей, що несуть зосереджені маси і локально підтримуються опорами або пружинами. У роботі [242] описані подальші дослідження авторів, у яких на основі запропонованого ними методу розглядаються також задачі про змушені коливання.

В інженерній практиці масивна машина може бути розміщена на плиті, яка підтримується балками, що розглядаються як пружні крайові умови. Вібрація плит через періодичне збудження масивним устаткуванням може викликати ушкодження будинків і бути джерелом шуму. У роботі [259] представлений аналітичний підхід до аналізу вібрацій прямокутної пластини, що несе масивний верстат з однорідними пружними опорами. Машина моделюється розподіленою масою. Поперечні переміщення точок пластини визначаються як суперпозиція подвійних косинус-рядів Фур'є та декількох додаткових функцій. Всі невідомі коефіцієнти Фур'є розраховуються на основі методу Рэлея-Ритца. Для перевірки запропонованого підходу, представлені кілька числових прикладів із класичними крайовими умовами. Результати показують добру відповідність між аналітичними результатами та результатами, отриманими методом скінчених елементів (ANSYS). Досліджено вплив розміру пластини, місця розташування машини та жорсткості опори.

Дослідженням коливань прямокутних пластин, які несуть зосереджені маси присвячені також роботи [240, 245]. У публікації [253] описані дослідження динаміки прямокутних пластин Міндліна при навантаженнях, що рухаються. Отримано замкнуте розв'язання для випадку рухомого навантаження. Представлено «напіваналітичне» розв'язання для випадку навантаження з масою, що рухається. Досліджується пружний динамічний відгук пружної пластини середньої товщини з довільними крайовими умовами і масою, яка рухається. Визначальні рівняння руху отримано на базі FSDT (first-order shear deformation plate theory – теорія пластин першого порядку, що враховує деформації зсуву, або теорія пластин Миндлина). Розглядалося шарнірне обпирання пластини та інші крайові умови.

Відзначимо що, у монографії [97] розглядається вплив рухомої маси на балки та тонкі прямокутні пластини, що лежать на пружній основі, причому при дослідження застосовуються підходи до моделювання зосередженої маси подібні тим, які запропоновані в цій дисертації.

Обернені задачі такого напрямку мало вивчені. Відзначимо, що до теперішнього часу добре досліджені коливання багатопрогонових балок з однієї або декількома додатковими пружними опорами. Згадаємо деякі роботи такого типу, пов'язані з додатковими пружними опорами (додатковими зосередженими жорсткостями) для пружно деформівних елементів конструкцій у вигляді балок. Наприклад, у роботі [96] розглянуто багатопрогонові балки на пружних опорах при рухомому навантаженні, задачі розв'язуються з використанням методу Ньютона та ітераційних схем для визначення прогину балки з урахуванням жорсткості додаткових опор. У роботі [151] представлено розв'язання прямої та оберненої задачі для балок з додатковими опорами, причому вплив опор моделюється за допомогою невідомих зосереджених сил.

Робіт, що розглядають елементи конструкцій, що контактують із гасителями коливань, у рамках механіки деформівного твердого тіла порівняно мало. Наприклад, у роботі [290] розглянуто дію активного погашувача коливань пластинки, що згинається, причому погашувач контактує з нею вздовж межі, однак сама пластина представлена, по суті, у вигляді коливної маси. У роботі [273] розглядаються змушені коливання тонкої пластини з «дискретним динамічним погашувачем» з використанням методу скінчених елементів.

У цій роботі викладається підхід, який дозволяє враховувати вплив ребер і точкових особливостей на нестаціонарне деформування елементів конструкції шляхом введення у вихідні моделі деформування пластин (балок) додаткових нестаціонарних сил (реакцій). Ці невідомі нестаціонарні навантаження можуть бути визначені з відповідних інтегральних співвідношень, шляхом зведення їх до лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра або їх систем, що дозволяє одержувати аналітико-числові розв'язання без використання ітераційних схем.

При такому підході в ряді випадків підкріплювальне ребро жорсткості на пластині можна розглядати як приєднаний об'єкт у вигляді балки та досліджувати зв'язані коливання системи балка-пластина. Подальший аналіз нестаціонарного деформування механічної системи балка-пластина може бути зроблений з допущенням, про те, що балка із пластиною контактують не по всій поверхні, а в деяких конкретних точках, тобто, по суті, вплив ребра жорсткості заміняється системою з декількох додаткових навантажень. Природно, що при виконанні конкретних розрахунків необхідно шукати компроміс між кількістю невідомих сил (точністю моделі) і часом, що витрачається на розрахунки, а також можливостями використовуваних комп'ютерів і спеціального програмного забезпечення .

4.2. Постановка задачі та математична модель

Нестаціонарне деформування балок або пластин описується системами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Досвід показує, що для зазначених об'єктів гарні результати дають моделі на базі гіпотез С. П. Тимошенка, що враховують інерцію обертання і зсув. Такі системи рівнянь можуть бути розв'язані за допомогою розвинення шуканих функцій (переміщень і кутів повороту нормалі) у відповідні ряди (Фур'є, Бесселя та ін.). Тоді для коефіцієнтів розвинення, як функцій часу, можна записати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можуть бути розв'язані з використанням, наприклад, інтегрального перетворення Лапласа. У цьому випадку, при виконанні обернених перетворень, розв'язки можуть бути представлені у вигляді інтегралів типу згортки, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь.

Таким чином, для шуканих функцій переміщень і кутів повороту нормалі, а також деформацій можуть бути отримані вирази виду:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau ; \tag{4.1}$$

де $w_j(t)$ – зміна в часі компонента переміщення деякої точки (наприклад, прогину пластини), $P_i(t)$ – *i-е* навантаження ($P_{0i}(t)$ – зовнішня сила або $R_i(t)$ реакція на особливість, що моделюється, наприклад додаткову опору), $K_{ij}(t)$ – ядро відповідного інтеграла згортки для *i-го* навантаження в *j-й* точці.

При нестаціонарному деформуванні пластин або балок з особливостями для кожної особливості, що моделюється – об'єкта, що контактує з балкою або пластиною, можна записати вираз виду (4.1). Тобто для *N*-об'єктів можна записати систему з *N* інтегральних рівнянь, що буде мати $2 \cdot N$ невідомих (невідомі як функції переміщення $w_j(t)$ так і $R_i(t)$ – реакції). Для розв'язання такої системи інтегральних рівнянь необхідно записати додаткові (замикаючі) співвідношення для кожної з точок, у якій є особливість.

Розглянемо можливі випадки:

а) зосереджена в деякій точці пластини додаткова (локалізована) маса (рис. 4.1)

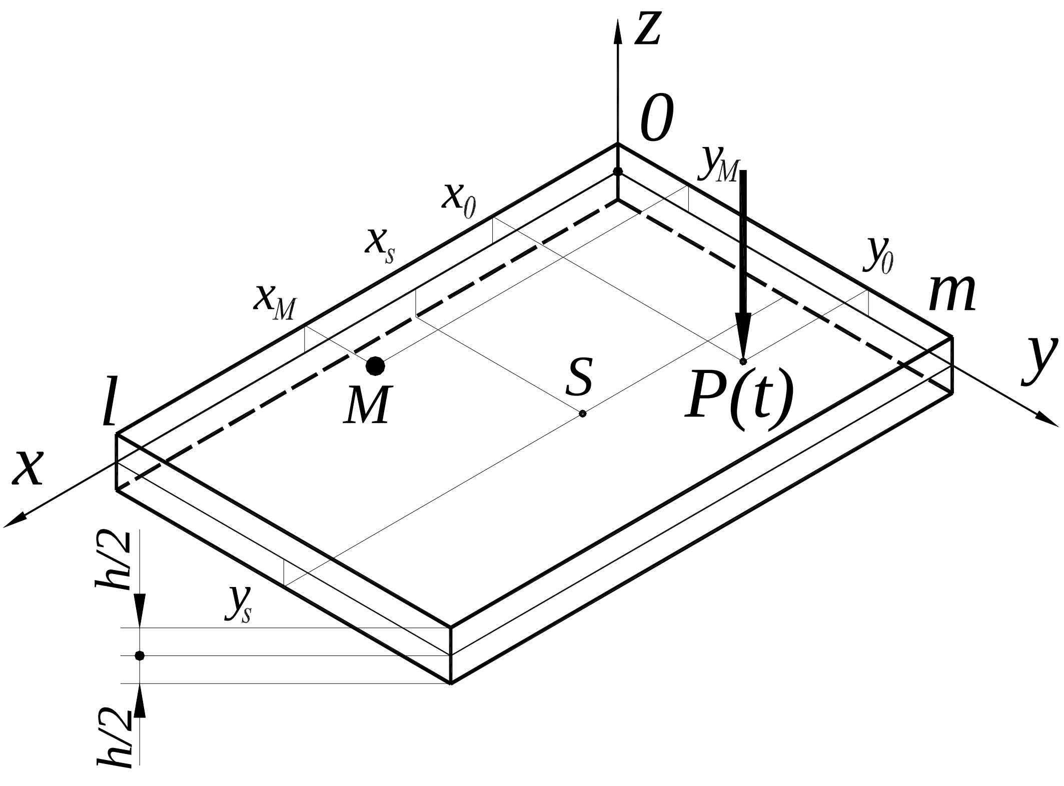


Рисунок 4.1 – Зосереджена (локалізована) маса

Для урахування зосередженої маси її реакція буде мати вигляд

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2}, \tag{4.2}$$

де m_i – зосереджена маса в *і-й* точці.

Вираз для прогину в точці приєднання цієї маси можна записати у формі

$$w_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t R_i(\tau)(t-\tau)d\tau; \tag{4.3}$$

б) Приєднана в деякій точці пластини додаткова лінійно-пружна опора (рис. 4.2)

Для урахування додаткової пружної опори її реакція буде мати вигляд

$$R_i(t) = c_i w_i(t), \tag{4.4}$$

де c_i – коефіцієнт жорсткості додаткової опори в *і-й* точці;

тоді вираз для прогину в точці прикладання цієї реакції можна записати як

$$w_i(t) = {}^{1}\!/_{c_i} R_i(t), \tag{4.5}$$

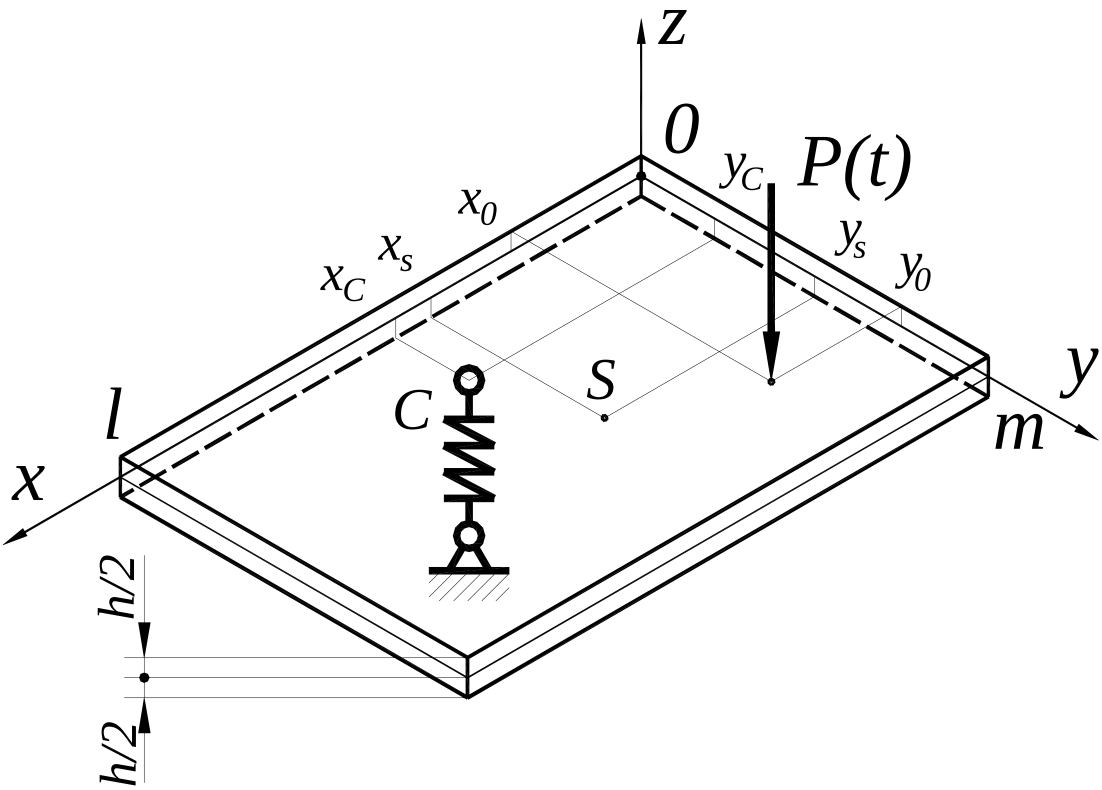


Рисунок 4.2 – Додаткова лінійно-пружна опора

в) Приєднаний у деякій точці пластини погашувач коливань (демпфер, амортизатор) – рис. 4.3

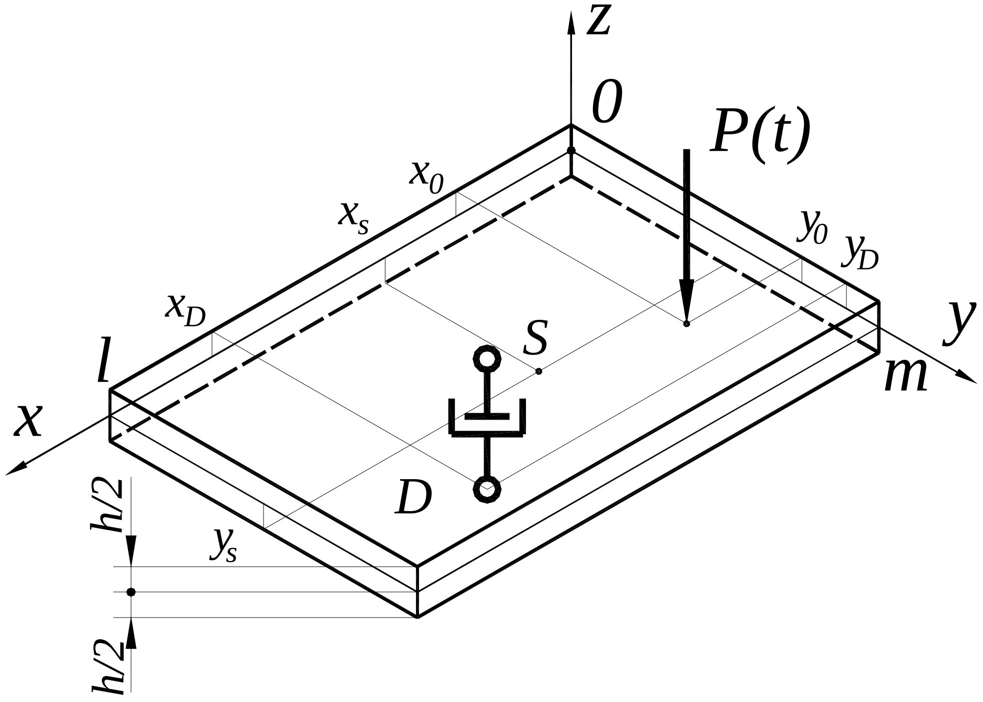


Рисунок 4.3 – Додаткова опора, що демпфірує (амортизатор)

Для урахування впливу додаткової опори, що демпфірує, її реакція буде мати вигляд

$$R_i(t) = \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}, \tag{4.6}$$

де κ_i – коефіцієнт демпфірування в *i-й* точці;

тоді вираз для прогину в точці приєднання амортизатора

$$w_i(t) = \frac{1}{\kappa_i}\int_0^t R_i(\tau)d\tau, \tag{4.7}$$

г) Більшість реальних опор насправді в’язкопружні, тобто мають як в'язкі, так і пружні характеристики (рис. 4.4).

Для урахування реакції між пластиною і додатковою в’язкопружною опорою треба використати вираз виду

$$R_i(t) = c_i w_i(t) + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}, \tag{4.8}$$

тоді вираз для прогину в точці прикладення реакції від в’язкопружної опори можна записати як

$$w_i(t) = \int_0^t K_{ei}(t-\tau)R(\tau)d\tau, \tag{4.9}$$

де $K_{ei}(t) = \dfrac{1}{\kappa_i} \cdot e^{-c_i/\kappa_i \cdot t}$ – скінченно-різницеве ядро Коші, що враховує в'язкі та пружні характеристики додаткової опори в *і-й* точці.

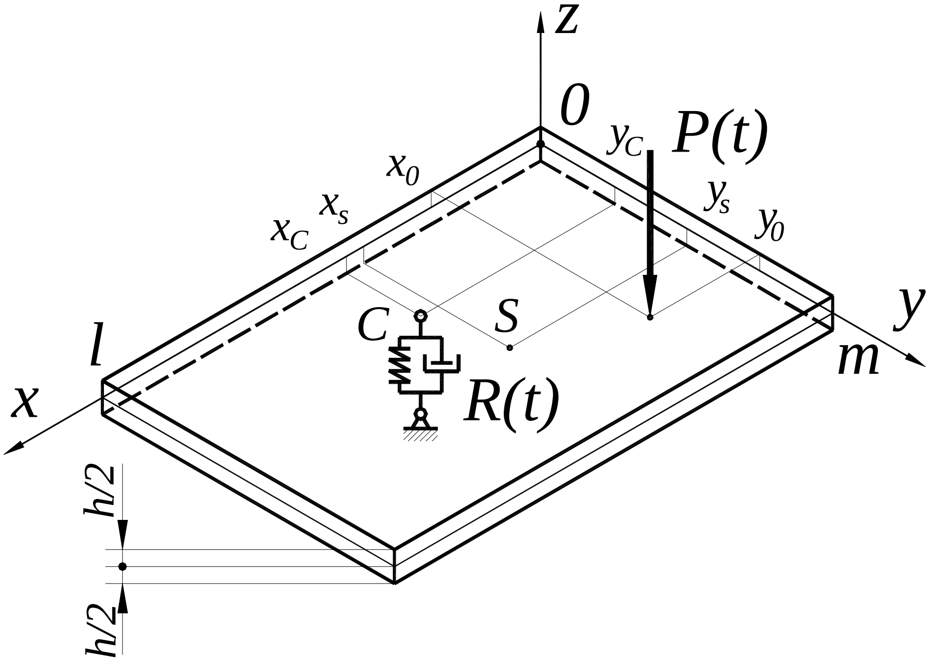


Рисунок 4.4 – Додаткова в’язкопружна опора

д) У самому загальному випадку можна представити об'єкт, що моделюється, у вигляді комбінації наявності впливу маси, жорсткості та демпфірування (рис. 4.5).

Вираз для реакції між пластиною і додатковою в’язкопружною опорою з урахуванням інерційних ефектів:

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} + c_i w_i(t). \tag{4.10}$$

Приведемо для розглянутого випадку (як найбільш загального) методику одержання виразу для функції прогинів у відповідній точці.

Виконаємо для виразу (4.10) інтегральне перетворення Лапласа, при нульових початкових умовах одержимо формулу:

$$R_i(s)=m_i\cdot s^2\cdot w_i(s)+\varkappa_i\cdot s\cdot w_i(s)+c_i\cdot w_i(s). \qquad (4.11)$$

З (4.11) буде випливати вираз для зображення прогину:

$$w_i(s)=\frac{R_i(s)}{m_i\cdot s^2+\varkappa_i\cdot s+c_i}. \qquad (4.12)$$

Після виконання оберненого перетворення Лапласа з використанням теореми про згортку одержимо наступний вираз для прогину в точці прикладання реакції від в’язкопружної опори з урахуванням її маси:

$$w_i(t)=\int\limits_0^t K_{fi}(t-\tau)R(\tau)d\tau, \qquad (4.13)$$

де $K_{fi}(t)=\frac{1}{\omega_{CDi}}\cdot e^{-\frac{\varkappa_i}{2\cdot m_i}\cdot t}\cdot\sin(\omega_{CDi}\cdot t)$ – скінченно-різницеве ядро інтеграла типу згортки, що враховує пружні та в'язкі характеристики додаткової опори в *i*-й точці, а $\omega_{CDi}=\sqrt{c_i/m_i-0.25\cdot\varkappa_i^2/m_i^2}$ – власна кругова частота, що відповідає *i*-й додатковій в’язкопружній опорі з урахуванням її маси.

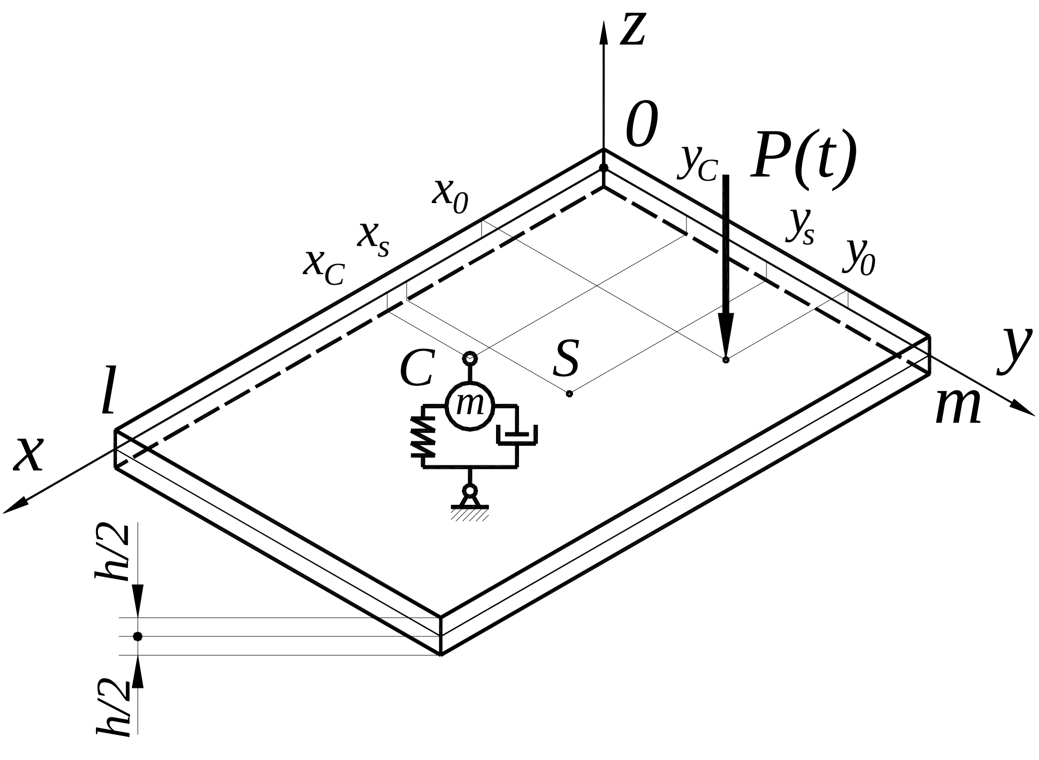


Рисунок 4.5 – Додаткова в’язкопружна опора з урахуванням її масово-інерційних характеристик

е) Якщо розглянути динамічну контактну задачу (пряму чи обернену), яка пов’язана з взаємодією пластини і ребра жорсткості у вигляді балки (наприклад, моделі типу Тимошенка), то можна піти таким шляхом:

– ввести N штук фіктивних сил, що діють як на балку так і на пластину (ціле число N підбирається надалі в процесі чисельного експерименту);

– побудувати систему N інтегральних рівнянь, що випливають із умов співпадання прогинів балки і пластини в точках прикладення згаданих фіктивних сил;

– провести розв’язання цієї системи інтегральних рівнянь згідно описаним раніше підходам.

Знання законів зміни за часом фіктивних сил дасть змогу знайти параметри НДС пластини та ребра.

4.3. Опис розв'язання задачі в загальному вигляді

Система інтегральних співвідношень виду (4.1), що доповнена виразами виду (4.2)-(4.10) і (4.13), розв'язується відповідно наступного алгоритму:

1) Вирази (4.2), (4.4), (4.6), (4.8) і (4.10) перетворюються до виду

$$w_i(t) = f\left[R_i(t)\right], \tag{4.14}$$

(перетворені вирази позначені (4.3), (4.5), (4.7), (4.9) і (4.13) відповідно).

2) Виконується виключення невідомих функцій переміщень $w_i(t)$, шляхом прирівнювання відповідних виразів виду (4.1) і (4.14), наприклад, для однієї в’язкопружної опори (4.1) і (4.9), а саме:

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_0^t K_e(t-\tau)R(\tau)d\tau. \tag{4.15}$$

Вираз (4.15) після переносу відомих членів у праву частину рівняння, а невідомих у ліву прийме вигляд

$$\int_0^t \left[K_R^W(t-\tau)+K_e(t-\tau)\right]R(\tau)d\tau=\int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau. \tag{4.16}$$

У підсумку вихідна система, що складається з $2\cdot N$ інтегро-диференціальних співвідношень, зводиться до системи N інтегральних рівнянь Вольтерра щодо невідомих реакцій $R_i(t)$.

3) Виконується дискретизація системи інтегральних рівнянь (СІР). Після дискретизації кожне інтегральне рівняння заміняється системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). У результаті чого, наприклад, для трьох невідомих реакцій приходимо до блокової СЛАР виду:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_{P1}\\ \mathbf{w}_{P2}\\ \mathbf{w}_{P3}\end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

де матриці $\mathbf{A}_{ij}$ відповідають дискретизованим ядрам інтегральних рівнянь $K_{ij}(t)$ в *і-й* точці для *j-го* навантаження, вектори $\mathbf{r}_j$ – зміні *j-ї* функції навантаження в часі $R_j(t)$, $\mathbf{w}_{Pi}$ – функції зміни переміщення в часі в *і-й* точці, що викликані тільки зовнішньою силою $P_0(t)$, обумовлені як $w_{Pi}=\int_0^t K_{Pi}(t-\tau)P_0(\tau)d\tau$. Вкажемо, що в інтегральних рівняннях присутні тільки скінченно-різницеві ядра Коші, тому всі матриці $\mathbf{A}_{ij}$ будуть переставними та квазідіагональними.

4) Блокова СЛАР виду (4.17) розв'язується за допомогою узагальненого алгоритму Крамера або Гаусса з використанням регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова.

У результаті розв'язання блокової СЛАР визначаються невідомі залежності в часі реакцій $R_j(t)$, кожна з яких описує вплив приєднаного у відповідній точці об'єкта на нестаціонарні коливання (деформування) основного розглянутого об'єкта (балки або пластини). Знаючи зовнішнє навантаження та залежності $R_j(t)$, можна визначити усі компоненти переміщення в будь-якій необхідній точці об'єкта, що досліджується, на базі залежностей виду (4.1).

4.4. Нестаціонарні коливання пластини з приєднаною зосередженою масою

Постановка задачі: механічна система складається із прямокутної пружної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно обпертої вздовж її периметру, та зосередженої маси M , що лежить на її верхній лицьовій поверхні (рис. 4.6). На пластину діє поперечне зосереджене імпульсне навантаження, що викликає нестаціонарні коливання пластини та маси.

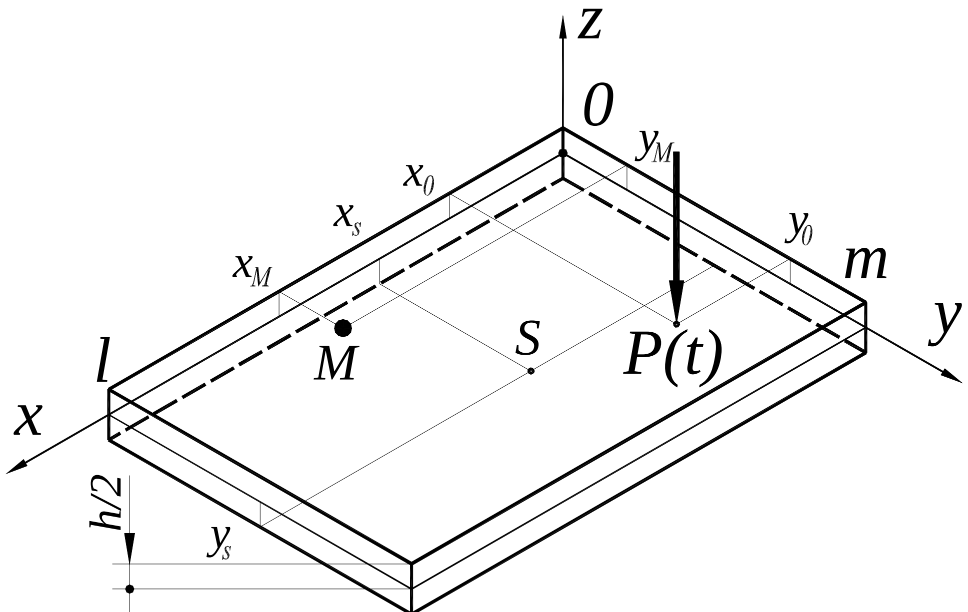


Рисунок 4.6 – Схема навантаження пластини з зосередженою масою

Під прямою задачею розуміється визначення залежності компонент переміщення в часі при відомому збурювальному навантаженні і зосередженій масі.

Під оберненою задачею – ідентифікація невідомого закону зміни в часі нестаціонарного навантаження при відомих змінах прогину пластини в деякій її точці.

Для точки (x_M, y_M), у якій локалізована додаткова маса *M*, можна записати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} w(x_M, y_M, t) = \int\limits_0^t R(\tau)\dfrac{t-\tau}{M}d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int\limits_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau - \int\limits_0^t R(\tau)K_R(t-\tau)d\tau, \end{cases} \tag{4.18}$$

яка може бути перетворена до наступного інтегрального рівняння типу Вольтерра 1 роду при відомій правій частині:

$$\int\limits_0^t R(\tau)\left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M}\right]d\tau = \int\limits_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau. \tag{4.19}$$

У матричному вигляді рівняння (4.19) можна записати:

$$\mathbf{A_R R} = \mathbf{A_P P}, \tag{4.20}$$

де $\mathbf{R}$ – невідомий вектор, що відповідає функції $R(t)$, вектор $\mathbf{P}$ – функції $P(t)$, матриці $\mathbf{A_R}$ і $\mathbf{A_P}$ – відповідним ядрам інтегрального рівняння (4.19).

Тому що розглянута задача є некоректною, розв'язання інтегрального рівняння здійснюється з використанням РА Тихонова.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана із площиною *xOy* декартової системи координат. Приймалися наступні параметри:

– для матеріалу пластини: E=2.07$\cdot 10^{11}$ Па; ν=0.3; ρ=7890 кг/м^3;

– для геометрії пластини: h=0.04 м; l=0.6 м; m=0.4 м;

– для координат (див. рис. 4.7):

x_0= 0.4 м, y_0= 0.3 м – точка навантаження;

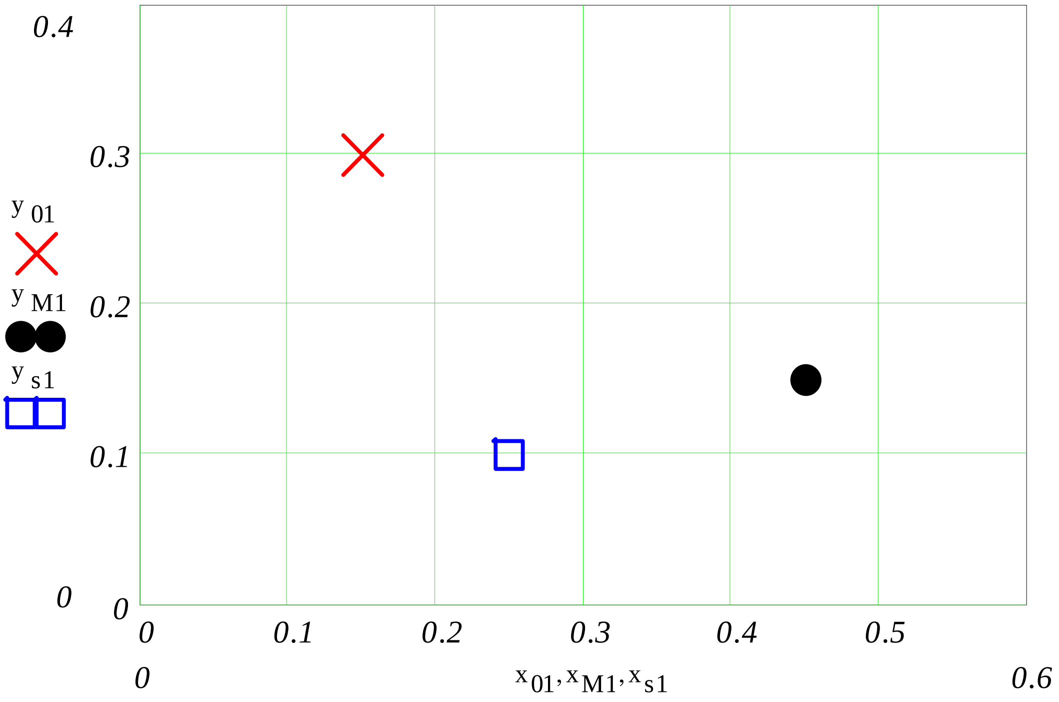
x= 0.2 м, y=0.2 м – координати зосередженої маси;

x= 0.3 м, y=0.1 м – координати датчика;

(розв'язання справедливо для будь-яких точок, що належать пластині, але не лежать на її межі);

– величина зосередженої маси M=5 кг;

– число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50.



× – зовнішня сила; • – точка приєднання зосередженої маси

Рисунок 4.7 – Схема навантаження пластини в плані

При визначенні невідомого вектора $\mathbf{R}$, згідно РА Тихонова параметр регуляризації α визначався на основі мінімізації за α двох функціоналів, графіки яких наведені на рис. 4.8.

Відзначимо, що кривій 1 на рисунок 4.8 відповідав функціонал нев’язки $M1^{\alpha}[R]=\left\|A_R R(\alpha)-A_p P\right\|$, що природно випливає з (4.20), а кривій 2 на рисунок 4.8 – функціонал $M2^{\alpha}[R]=\left\|R(\alpha)\right\|$ – обмеження шуканої функції $R(t)$. З рис. 4.8 видно, що параметр регуляризації варто брати в діапазоні $\alpha=10^{-31}\div10^{-30}$.

На рис. 4.9 показано відому зміну зосередженого навантаження $P(t)$ – криву 1 і визначені при різних значеннях параметра регуляризації α залежності $R(t)$ – криві 2.

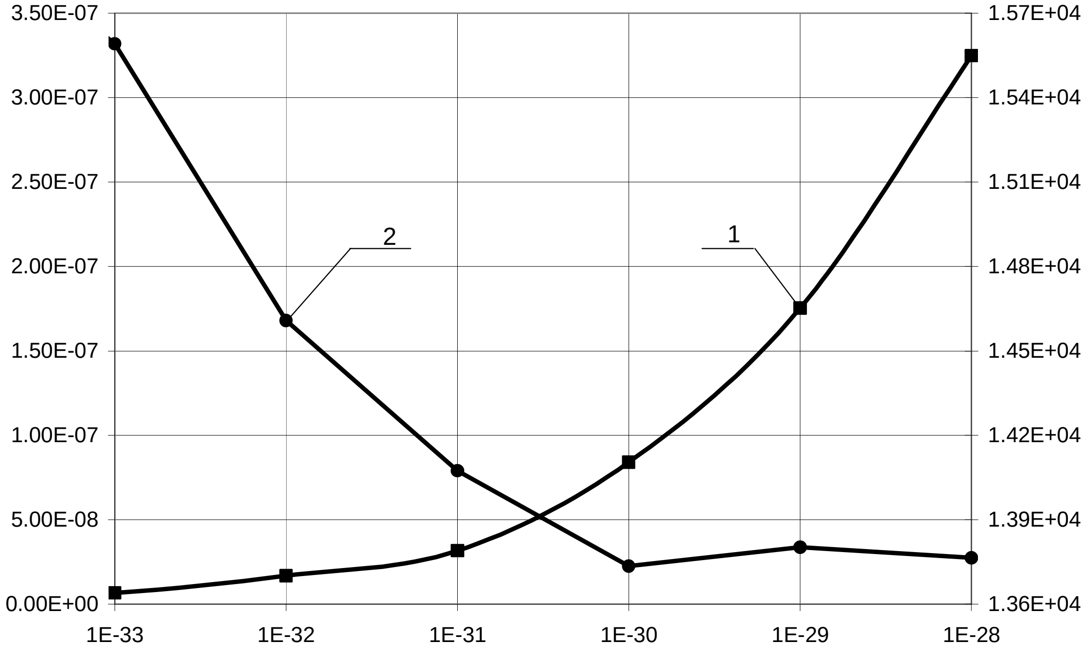


Рисунок 4.8 – Визначення параметра регуляризації

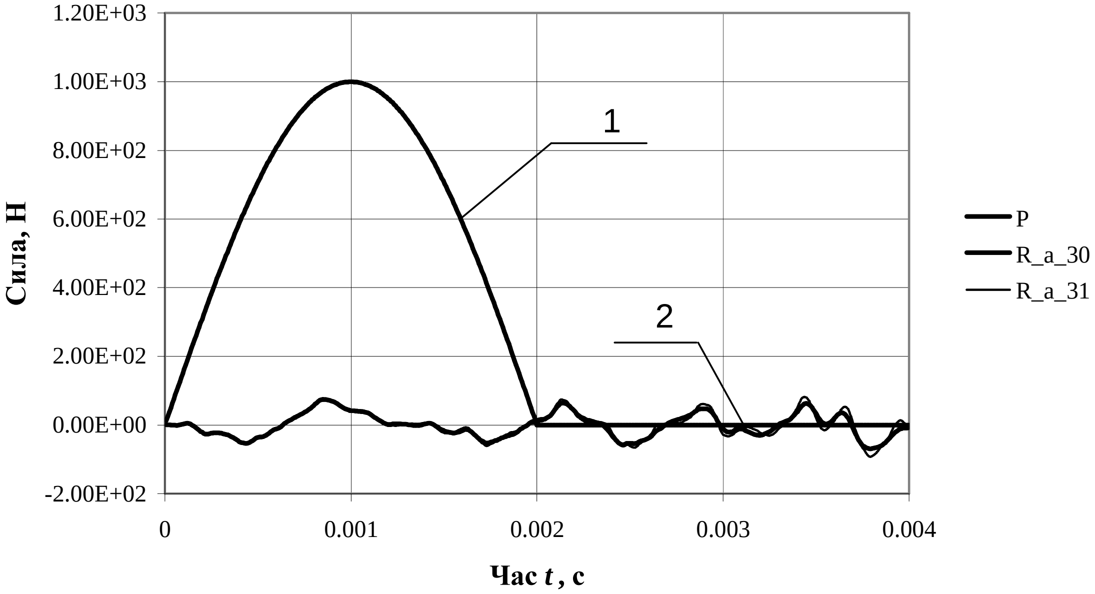
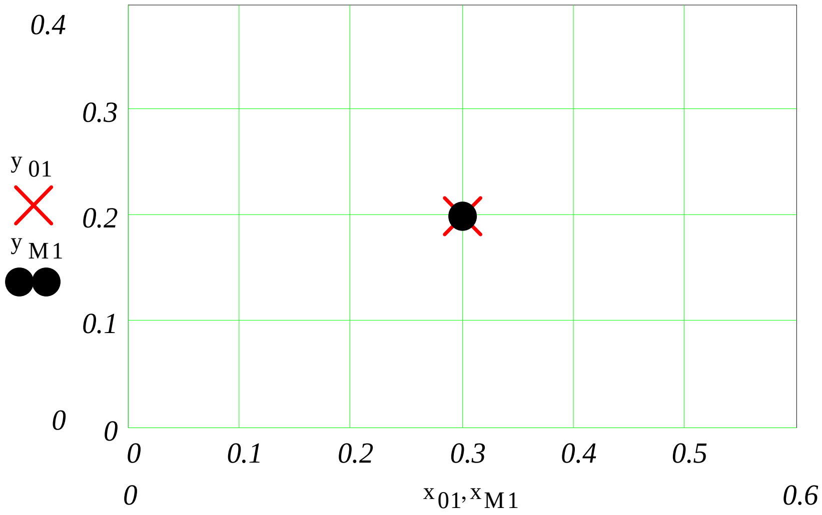


Рисунок 4.9 – Визначення реакції зосередженої маси

На наступних графіках (рис. 4.11, рис. 4.12) при розрахунках приймалися такі ж параметри, за винятком координат точки навантаження, зосередженої маси та координат точки, у якій виконувався розрахунок. Всі точки співпадають і відповідають центру пластини – див. рис. 4.10.



× – зовнішня сила; ● – точка приєднання зосередженої маси

Рисунок 4.10 – Схема навантаження пластини в плані

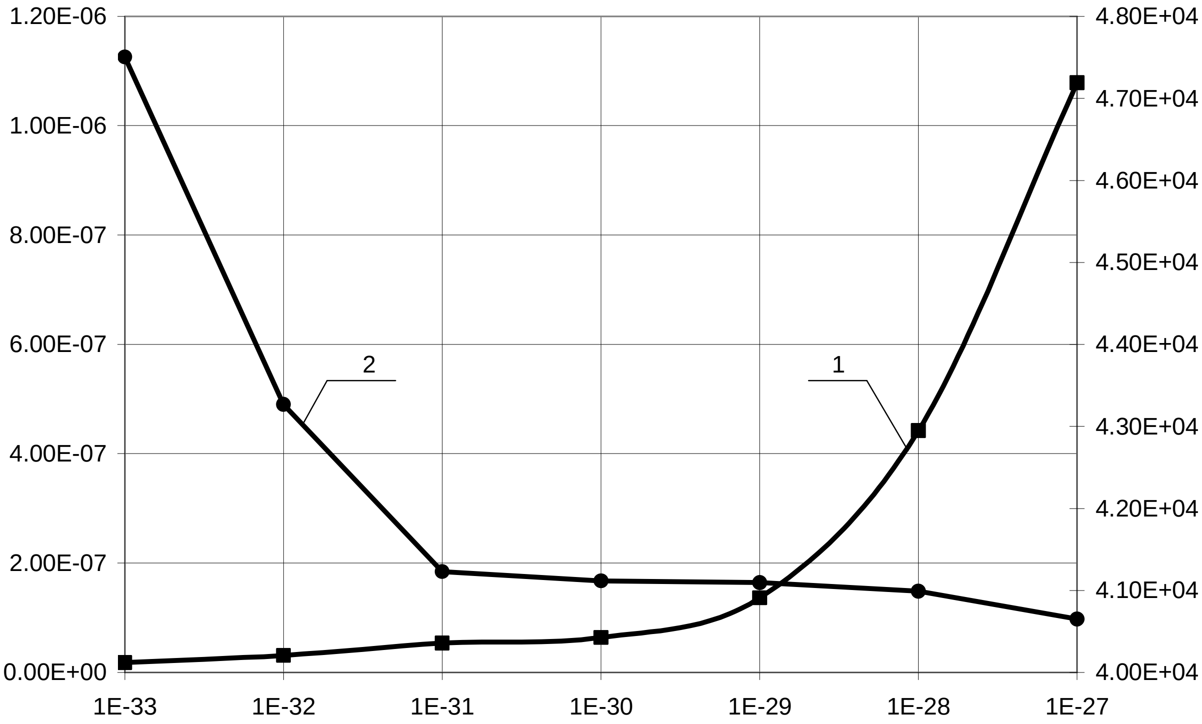


Рисунок 4.11 – Визначення параметра регуляризації

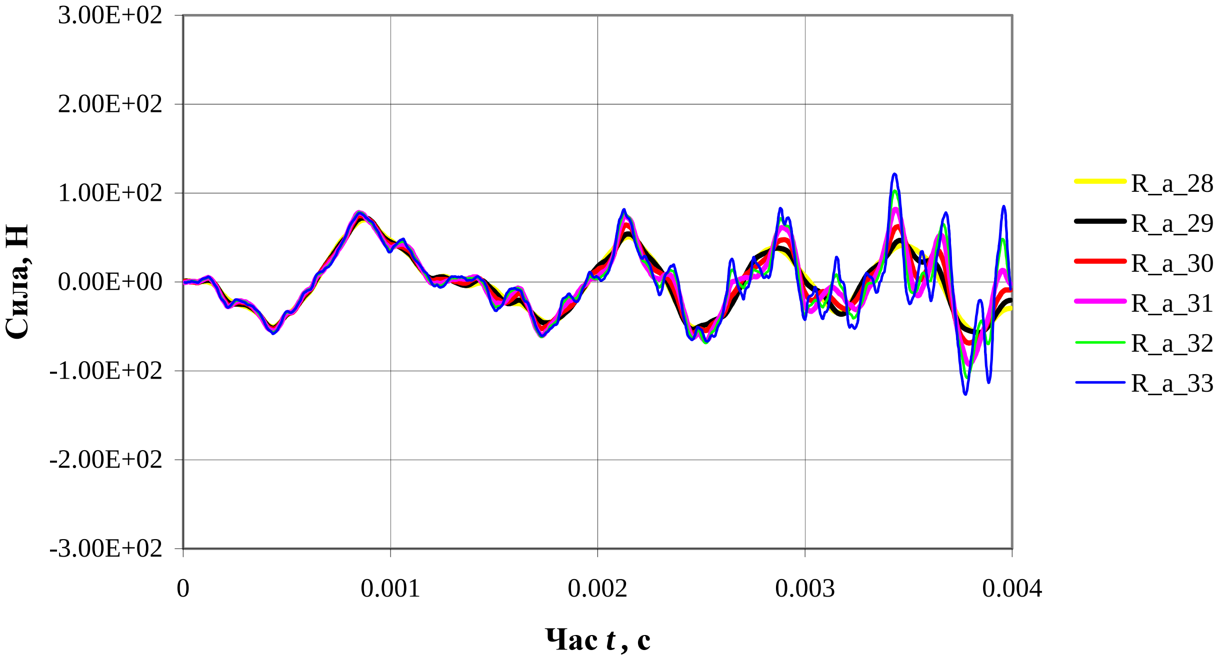


Рисунок 4.12 – Визначення реакції зосередженої маси

Опис рис. 4.11 аналогічний опису рис. 4.8.

На рис. 4.12 показано криві, що відповідають $R(t)$, визначеним при різних значеннях параметра регуляризації α ($\alpha_1 = 10^{-28}$, $\alpha_2 = 10^{-29}$, $\alpha_3 = 10^{-30}$, $\alpha_4 = 10^{-31}$, $\alpha_5 = 10^{-32}$, $\alpha_6 = 10^{-33}$).

З рис. 4.12 видно, що криві, розраховані при $\alpha_3 = 10^{-30}$ і $\alpha_4 = 10^{-31}$ близькі, а при подальшому зменшенні α з'являються «паразитні» коливання приблизного розв'язку($\alpha_5 = 10^{-32}$, $\alpha_6 = 10^{-33}$).

Після визначення функції $R(t)$ на основі співвідношень виду (4.1) можна визначити прогини, а також будь-які інші параметри напружено-деформованого стану в будь-якій точці пластини.

Досліджувався також вплив величини зосередженої маси на нестаціонарні коливання. Зосереджені маси бралися рівними *M*=1 кг, 10 кг і 20 кг. При дослідженні всі координати (маси, сили і точки дослідження) прийняті в центрі пластини. На представлених графіках (рис. 4.14) кривій 2 відповідала зосереджена маса *M*=1 кг; кривій 3 – маса *M*=10 кг; кривій 4 – маса *M*=20 кг.

На рис. 4.13 показано зміну прогину в центрі пластини, крива 1 на цьому графіку відповідає випадку, коли зосереджена маса відсутня. На рис. 4.14 зображено зміну реакції взаємодії між масою і пластиною $R(t)$ (криві 2-4), причому кривій 1 відповідає зміна навантаження $P(t)$, що збурює коливання.

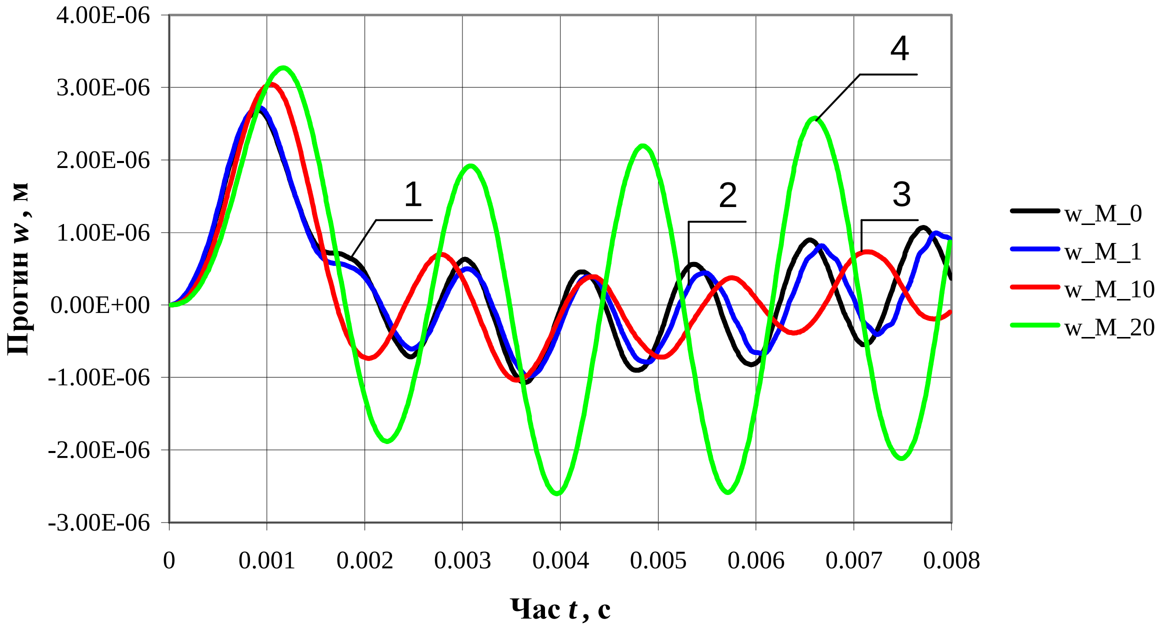


Рисунок 4.13 – Вплив величини зосередженої маси на прогин пластини

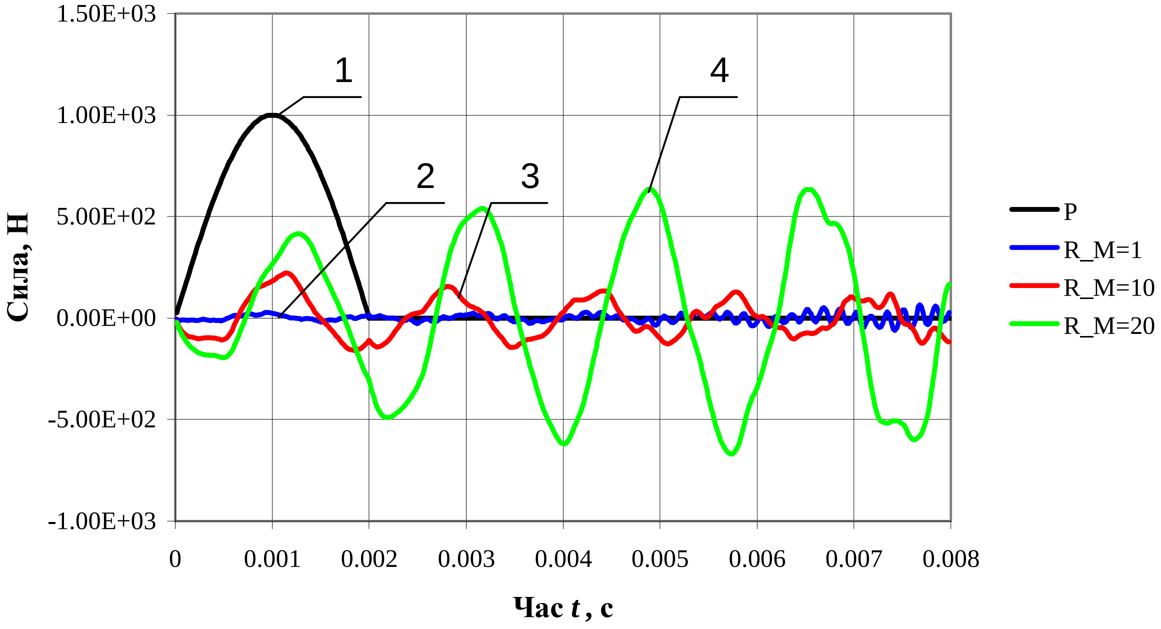


Рисунок 4.14 – Вплив величини зосередженої маси на реакцію $R(t)$

З наведених графіків (рис. 4.13, рис. 4.14) видно, що невеликі маси незначно впливають на величини прогинів, а сили взаємодії $R(t)$ – малі; вплив маси на процес коливань росте з величиною маси. Відзначимо, що при сильному збільшенні маси (коли вона стає порівнянна з масою пластини) спостерігається значне посилення впливу маси, а далі коливання механічної системи, що складається з пластини та приєднаної до неї зосередженої маси, «вироджуються» у коливання механічної системи подібні до коливань системи з одним ступенем свободи.

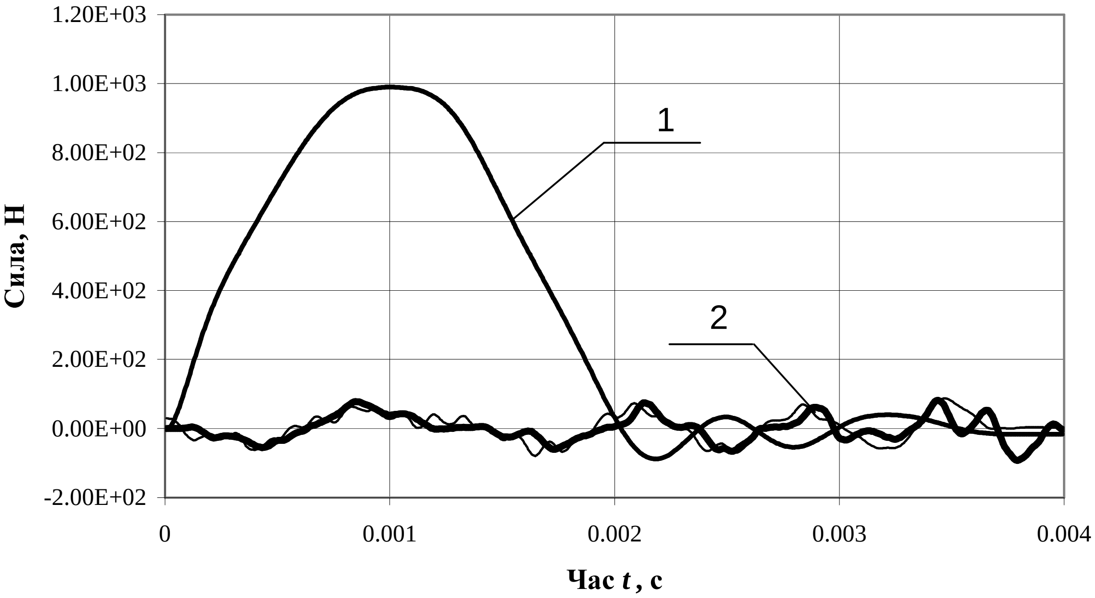
Опишемо обернену задачу. У випадку, якщо відомо зміну прогину в деякій точці S пластини $w(x_S, y_S, t)$, координати x_S, y_S та величина зосередженої маси M, а потрібно визначити невідомий закон зміни в часі збурювального навантаження $P(t)$ – задача зводиться до розв'язання системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду. У матричному виді цю систему можна записати так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_S \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

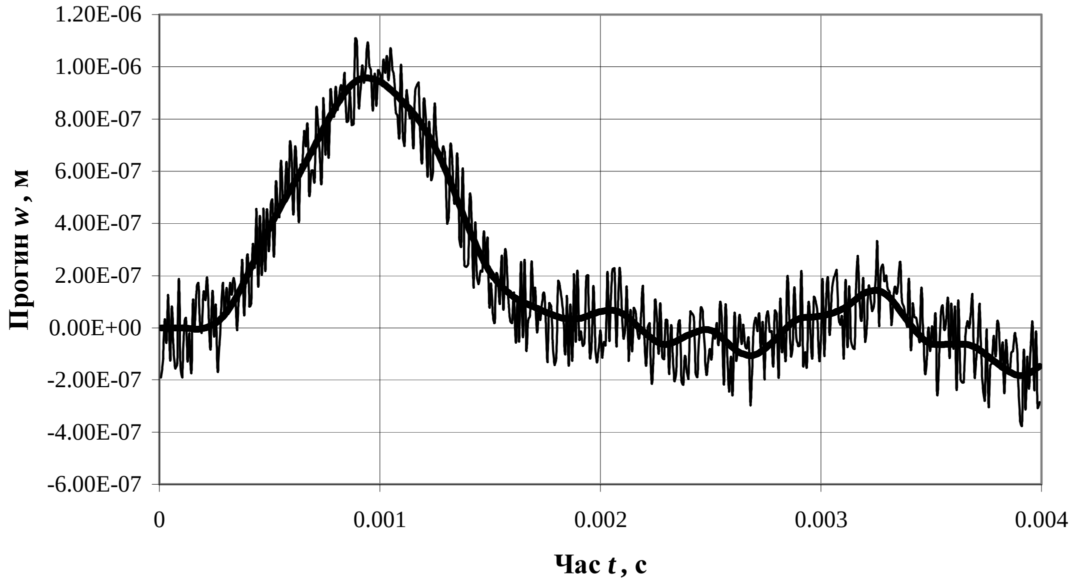
Блокова СЛАР (4.21) розв'язується з використанням УАК для блокових матриць, а також РА Тихонова. Розв'язання таких СЛАР описане раніше.

Обчислювальні експерименти з ідентифікації невідомого навантаження (зосередженої сили), що збурює коливання, і сили взаємодії між масою та пластиною показані рис. 4.15, *а*. Крива 1 на рис. 4.15, *а* відповідає визначеній при розв'язанні (4.21) функції $P(t)$; криві 2 – зміна $R(t)$ (жирна крива – розв'язання прямої задачі, тонка – ідентифікована функція).

Як вихідні дані для ідентифікації використовувалося вищеописане розв'язання прямої задачі – зміна прогину пластини (жирна крива на рис. 4.15, *б*. Для моделювання похибок, що виникають при проведенні реальних експериментів, на вихідні дані був накладений «шум» з рівнем до 20% (тонка крива на рис. 4.15, *б*).



а



б

Рисунок 4.15 – Ідентифікація невідомого навантаження

На основі представлених результатів (рис. 4.15, *а*) можна зробити висновок про те, що описане розв'язання задачі ідентифікації, на основі збурених даних для пластин із зосередженими масами є ефективним і стійким до похибок. Можливість урахування зосереджених мас є важливим результатом, що поліпшує відповідність моделі реальним механічним системам.

4.5. Нестаціонарні коливання прямокутної пластини, що має додаткову лінійно-пружну опору

Механічна система складається із прямокутної пружної ізотропної пластини середньої товщини, що шарнірно-обперта уздовж свого периметра й додаткової зосередженої лінійно-пружної опори, що контактує із пластиною в деякій точці (рис. 4.16). На пластину впливає нестаціонарне навантаження, що викликає коливання. Розрахунки зводяться до аналізу інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням методу регуляризації А. М. Тихонова.

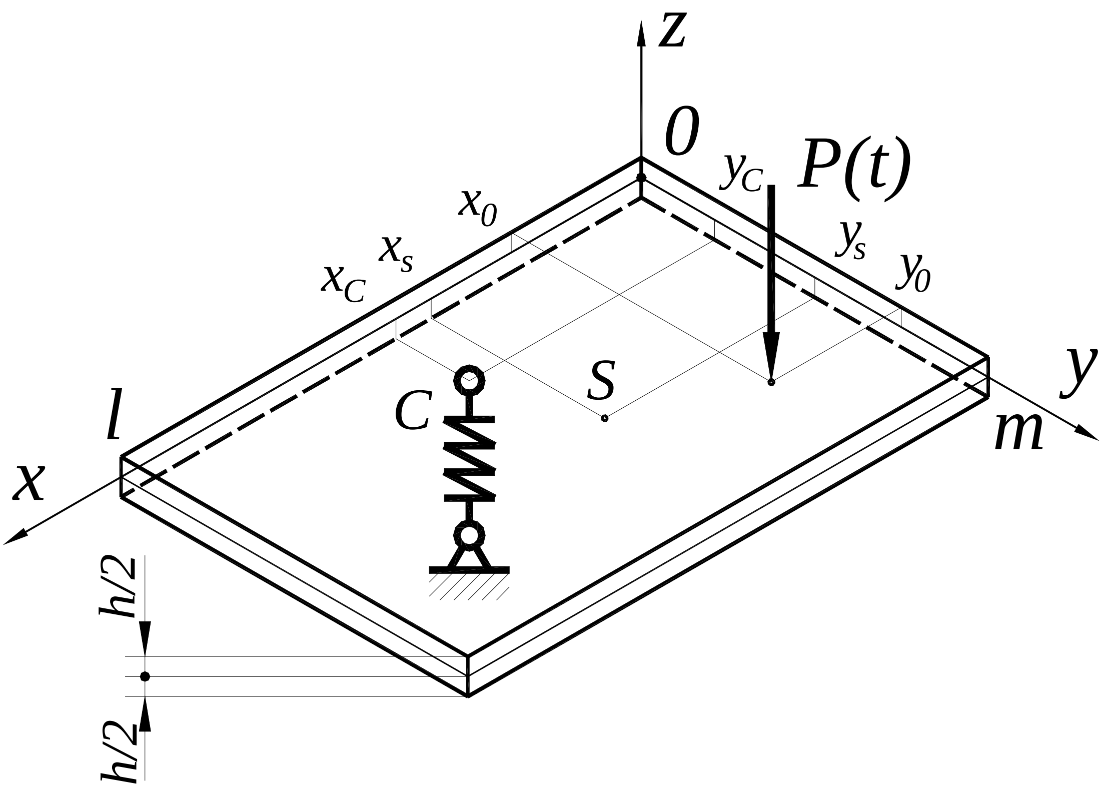


Рисунок 4.16 – Схема навантаження пластини з додатковою пружною опорою

Проблема полягає в ідентифікації закону зміни в часі невідомої реакції $R(t)$, для визначення якої вираз (4.14) для точки кріплення додаткової пружної опори до пластини (x_C, y_C) може бути зведеним до інтегрального рівняння Вольтерра II роду щодо невідомої $R(t)$:

$$c\int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau = c\int_0^t R(\tau)K_R(t-\tau)d\tau + R(t). \qquad (4.22)$$

У матричному вигляді рівняння (4.22) можна записати:

$$\mathbf{A}_R^*\mathbf{R} + \mathbf{R} = \mathbf{A}_P^*\mathbf{P}, \qquad (4.23)$$

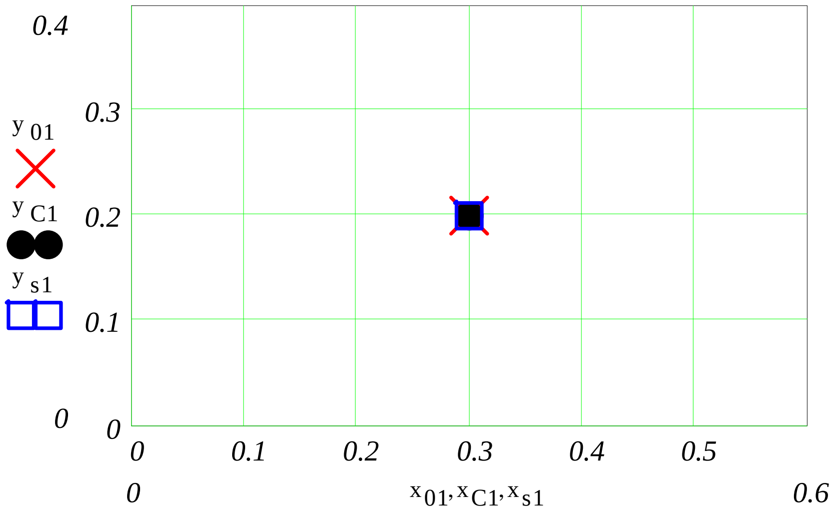
де $\mathbf{R}$ – невідомий вектор, що відповідають функції $R(t)$, вектор $\mathbf{P}$ – функції $P(t)$, матриці $\mathbf{A}_P^* = c \cdot \mathbf{A}_P$, $\mathbf{A}_R^* = c \cdot \mathbf{A}_R$, а матриці $\mathbf{A_R}$ й $\mathbf{A_P}$ відповідають відповідним ядрам інтегрального рівняння (4.22).

Оскільки рівняння (4.22) є інтегральним рівнянням Вольтерра II роду відносно $R(t)$, то розв'язання його дискретного аналога (4.23) може здійснюється без використання методу регуляризації А. М. Тихонова або при значенні параметра регуляризації $\alpha = 0$.

У результаті розв'язання (4.23) знаходиться сила взаємодії між додатковою опорою і пластиною $R(t)$, що дозволяє визначати компоненти переміщення в часі у всіх точках пластини.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана із площиною xOy декартової системи координат. Числові розрахунки виконувалися при наступних значеннях: ρ=7890 кг/м^3; ν=0.3; E=2.07·10^{11} Па; h=0.04 м; l=0.6 м, m=0.4 м. Координати точки прикладення збурювального навантаження: x_0=0.3 м, y_0=0.2 м. Координати точки кріплення додаткової лінійно-пружної опори до пластини: x_C=0.3 м, y_C=0.2 м. (Для наочності розглянутий випадок, коли нестаціонарна сила діє в центрі пластини, а додаткова лінійно-пружна опора встановлена в тому ж місці під пластиною – див. рис. 4.17).

На рис. 4.18 показано зміну в часі збурювального навантаження $P(t)$ (півхвиля синусоїди) і визначена в результаті розв'язання інтегрального рівняння (4.23) реакція між пластиною і додатковою опорою $R(t)$ при жорсткості додаткової лінійно-пружної опори рівної $c = 10^9$ Н/м.



× – зовнішня сила; • – точка кріплення опори

Рисунок 4.17 – Схема навантаження пластини в плані

На рис. 4.19 наведено криві зміни прогину за часом в центрі пластини: крива 1 – прогин без додаткової пружної опори; крива 2 демонструє прогин при дії тільки реакції $R(t)$; крива 3 – сумарна крива, що описує прогин пластини з додатковою пружною опорою (див. рис. 4.18) при дії збурювального навантаження.

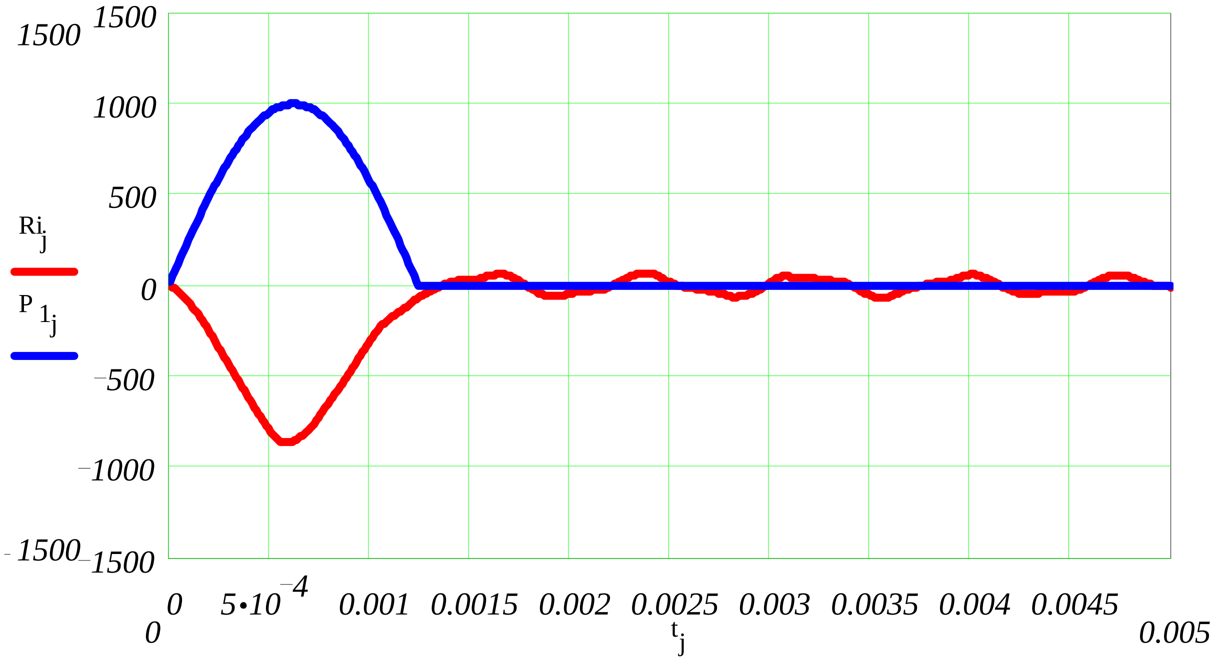


Рисунок 4.18 – Збурювальне навантаження і реакція додаткової пружної опори

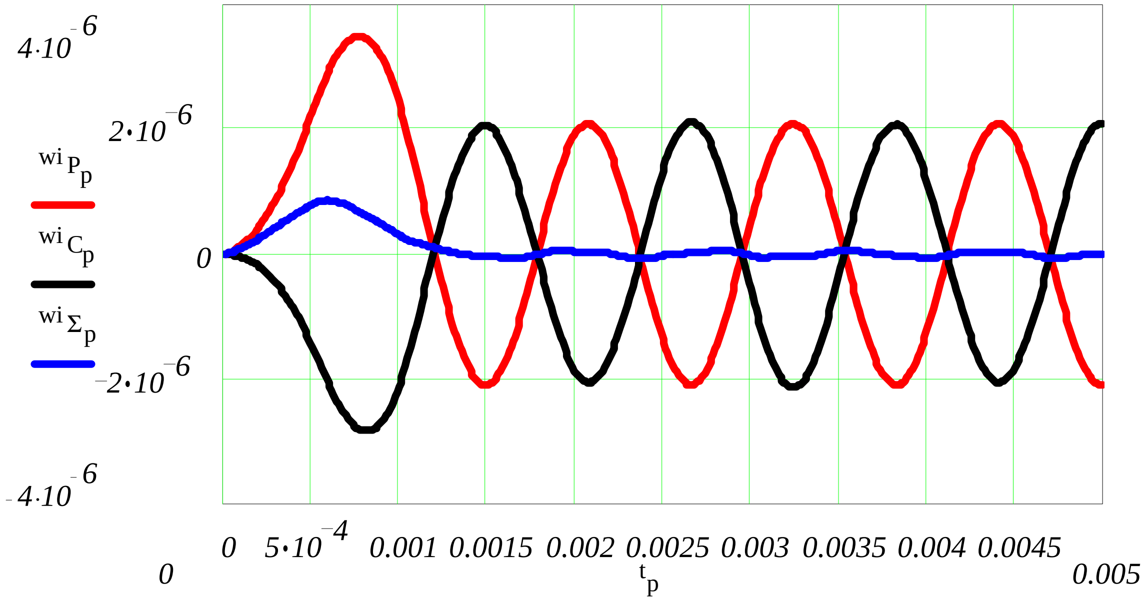
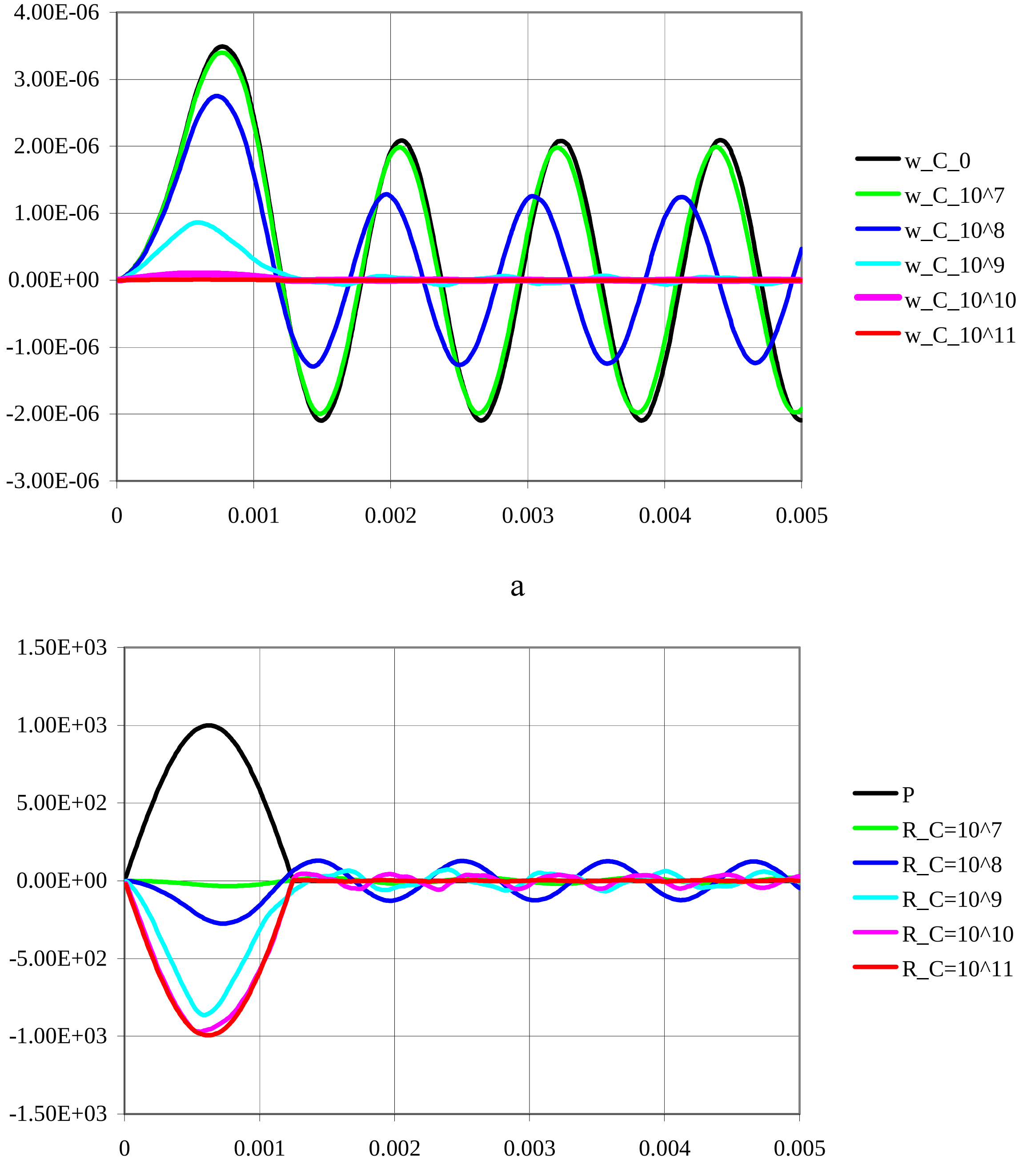


Рисунок 4.19 – Вплив реакції додаткової опори на прогин пластини

На рис. 4.20, *а* показаний вплив жорсткості додаткової пружної опори на прогин пластини в точці навантаження, а на рис. 4.20, *б* показана зміна збурювального навантаження $P(t)$ – крива 1 і $R(t)$ реакції між пластиною та пружною опорою при різних значеннях коефіцієнта жорсткості c пружини – криві 2-6.

Крива 1 на рис. 4.20, *а* показує зміну прогину за часом без додаткової пружної опори (або при $c=0$); при значенні коефіцієнта жорсткості $c<10^7$ Н/м прогини практично не відрізняються, при $c=10^7$ Н/м (крива 2) видно незначне зниження амплітуди прогину та його відставання за фазою; при $c=10^8$ Н/м (крива 3) спостерігається помітне зниження амплітуди прогину (близько 20%) і запізнювання; при $c=10^9$ Н/м (крива 4) спостерігається значний вплив додаткової опори на коливання пластини (графіки, наведені на рис. 4.18 і рис. 4.19 отримані для значення коефіцієнта жорсткості $c=10^9$). При подальшому підвищенні жорсткості додаткової опори $c=10^{10}$ Н/м (крива 5) істотно знижується вигин пластини (тому що жорсткість додаткової опори стає вище жорсткості самої пластини), а вже при жорсткості $c=10^{11}$ Н/м (крива 6) сумарний прогин пластини стає значно нижчим (додаткова опора буде «занадто» жорсткою, а значення прогинів майже нульові). У цьому випадку ($c \geq 10^{11}$ Н/м) реакція додаткової опори практично дорівнює збурювальному навантаженню (крива 6 на рис. 4.20, *б*).



а

б

Рисунок 4.20 – Вплив жорсткості додаткової пружної опори

Вкажемо, що представлені числові значення справедливі тільки для розглянутого випадку. У кожному конкретному випадку вони будуть залежати від геометричних і механічних параметрів системи, однак характер впливу коефіцієнта жорсткості додаткової пружної опори у всіх випадках буде аналогічний описаному.

Наступні рис. 4.21, рис. 4.22 і рис. 4.23 аналогічні раніше наведеним рис. 4.17, рис. 4.18 і рис. 4.19 відповідно. Вони відрізняються тільки координатами точки прикладення збурювального навантаження: x_0=0.2 м, y_0=0.2 м і координатами точки приєднання додаткової лінійно-пружної опори до пластини: x_C=0.4 м, y_C=0.2 м. На рис. 4.23, *а* – *в* наведені криві зміни прогину в точках (x_0, y_0), центрі пластини і (x_C, y_C) відповідно.

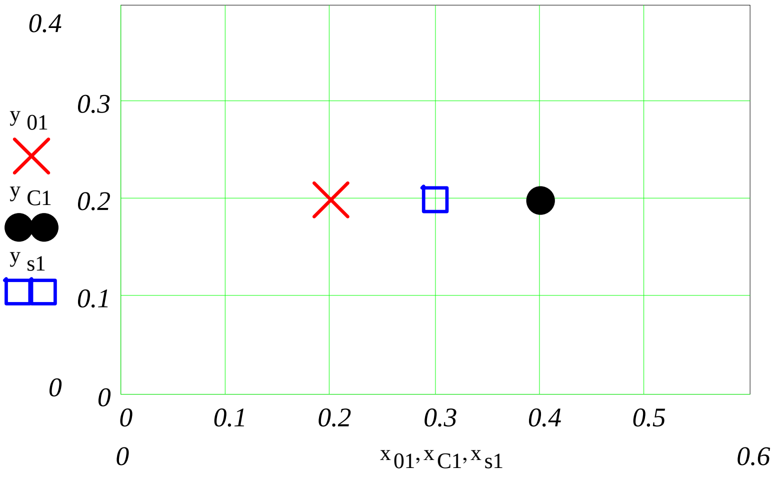


Рисунок 4.21 – Схема навантаження пластини в плані

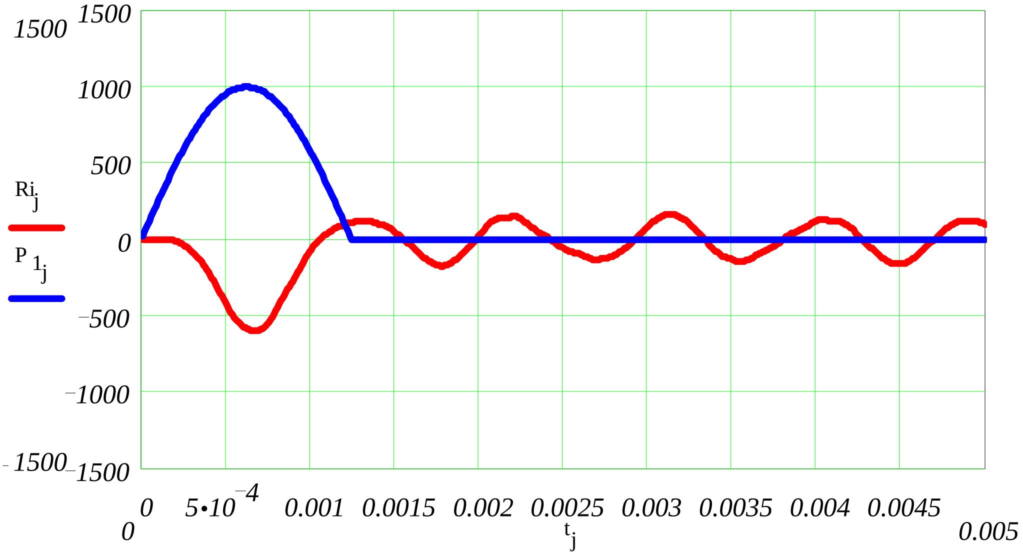
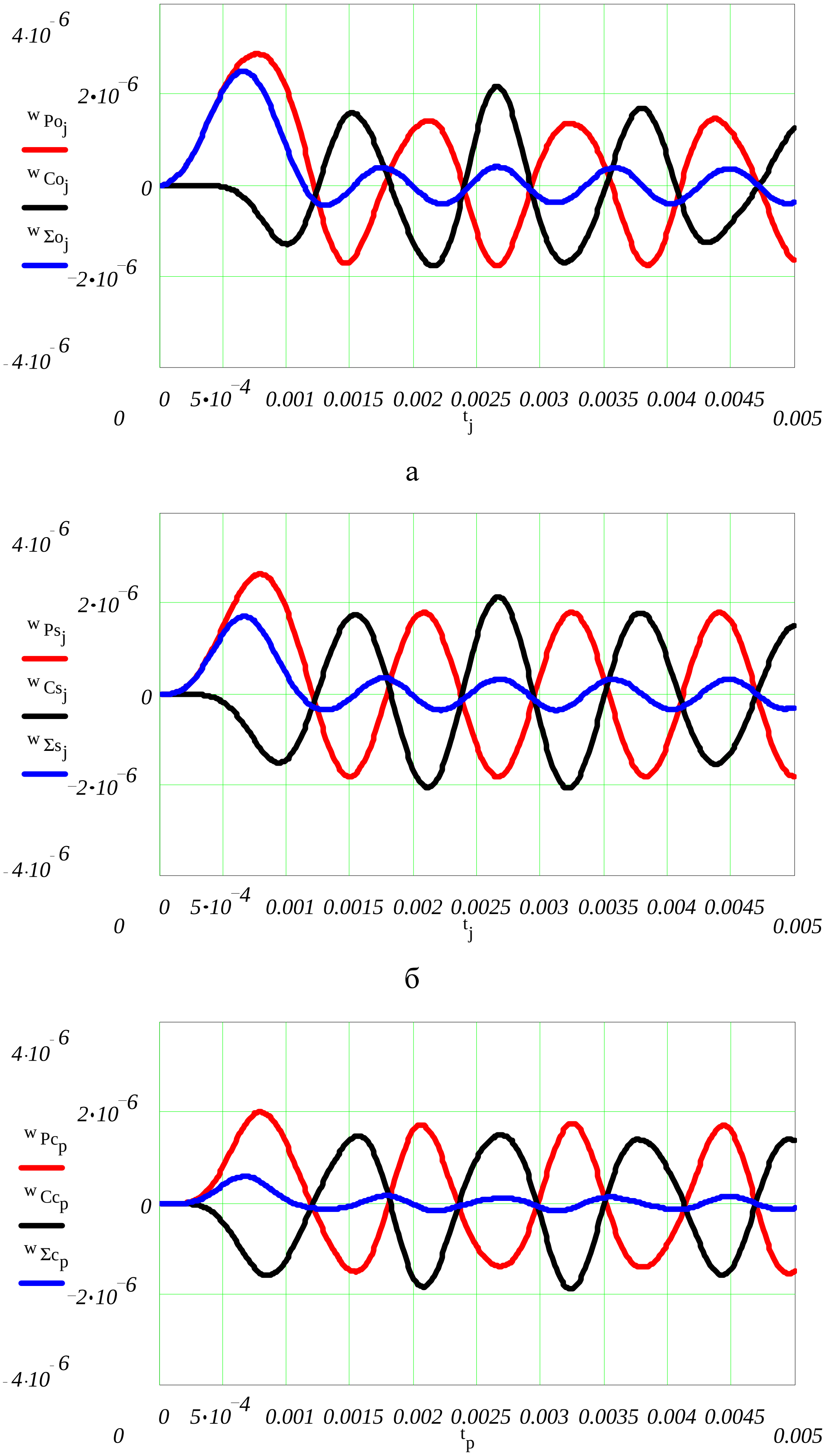


Рисунок 4.22 – Збурювальне навантаження і реакція додаткової пружної опори



а

б

в

Рисунок 4.23 – Вплив реакції додаткової пружної опори на прогин

Відповідна обернена нестаціонарна задача може мати кілька постановок. Вкажемо дві найбільш природні та логічні:

1) ідентифікація закону зміни в часі збурювального навантаження при відомій жорсткості додаткової опори та залежності зміни прогину або деформації за часом у деякій точці пластини.

2) ідентифікація жорсткості додаткової лінійно-пружної опори при відомих залежності зміни прогину або деформації за часом в деякій точці пластини та законі зміни за часом збурювального навантаження (подібна постановка – підбір жорсткості, відповідно до необхідних значень нестаціонарного прогину або деформації)

У кожному із зазначених випадків задача зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра. Тільки в першому випадку потрібно ідентифікувати невідому функцію за часом $P(t)$, а в другому випадку – константу c (задача більш проста) за умови, що всі координати (та інші параметри) відомі.

Розглянемо докладно перший випадок (більш складний). Вплив додаткової опори на пластину моделюється у вигляді невідомої нестаціонарної сили: таким чином, поставлена задача аналогічна задачі ідентифікації двох незалежних нестаціонарних навантажень, що діють на пластину в різних точках. Як показано в розділі 3, для ідентифікації двох навантажень необхідно знати зміну за часом переміщення або деформації у двох будь-яких точках пластини. Однак у цьому випадку величина реакції $R(t)$ залежить від прогину пластини та для визначення двох незалежних функцій $P(t)$ і $R(t)$ нам досить знати зміну за часом прогину або деформації тільки в одній точці, яку позначимо (x_S, y_S).

Для точок (x_S, y_S) і (x_C, y_C) з урахуванням виразів (4.1) і (4.4) можна записати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} w(x_s, y_s, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_{SP}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R(\tau) K_{SR}(t-\tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_{CP}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R(\tau) K_{CR}(t-\tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \dfrac{R(t)}{c}. \end{cases} \qquad (4.24)$$

Система (4.24) може бути перетворена до системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра щодо функцій $P(t)$ і $R(t)$, причому перше рівняння буде інтегральним рівняння Вольтерра II роду, а друге – I роду. Інтегральне рівняння Вольтерра II роду може бути перетворене до рівняння I роду шляхом внесення функції $R(t)$ під інтеграл. Тобто систему (4.24) можна записати так:

$$\begin{cases} c\int\limits_0^t P(\tau) K_{CP}(t-\tau) d\tau - c\int\limits_0^t R(\tau) [K_{CR}(t-\tau)] d\tau - R(t) = 0, \\ \int\limits_0^t P(\tau) K_{SP}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R(\tau) K_{SR}(t-\tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \qquad (4.25)$$

Система інтегральних рівнянь (4.25) розв’язується з використанням РА Тихонова, відповідно до якого, при розв'язанні некоректних задач виконується скінченовимірна апроксимація інтегральних рівнянь.

Після перетворення та дискретизації розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра (4.25) еквівалентно розв'язанню наступної блокової системи лінійних алгебраїчних рівнянь (БСЛАР):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \qquad (4.26)$$

де матриці $\mathbf{A}_{ij}$ відповідають дискретизованим ядрам інтегральних рівнянь, вектори $\mathbf{P}$ і $\mathbf{R}$ відповідають невідомим функціям $P(t)$ і $R(t)$, а $\mathbf{w}_s$ – відомій функції зміни прогину пластини $w(x_S, y_S, t)$.

Опис розв’язання БСЛАР аналогічних (4.26) наведено раніше.

Числові розрахунки для оберненої задачі виконувалися при наступних значеннях: ρ=7890 кг/м^3; ν=0.3; E=2.07·10^{11} Па; h=0.04 м; l=0.6 м, m=0.4 м.

Координати точки прикладення збурювального навантаження: $x_0 = 0.15$ м, $y_0 = 0.3$ м. Координати точки кріплення додаткової лінійно-пружної опори до пластини: $x_C = 0.45$ м, $y_C = 0.15$ м. Координати точки, в якій передбачалася відомою зміна прогину за часом: $x_S = 0.25$ м, $y_S = 0.1$ м. Величина коефіцієнта жорсткості додаткової опори $c = 10^9$ Н/м. Число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50.

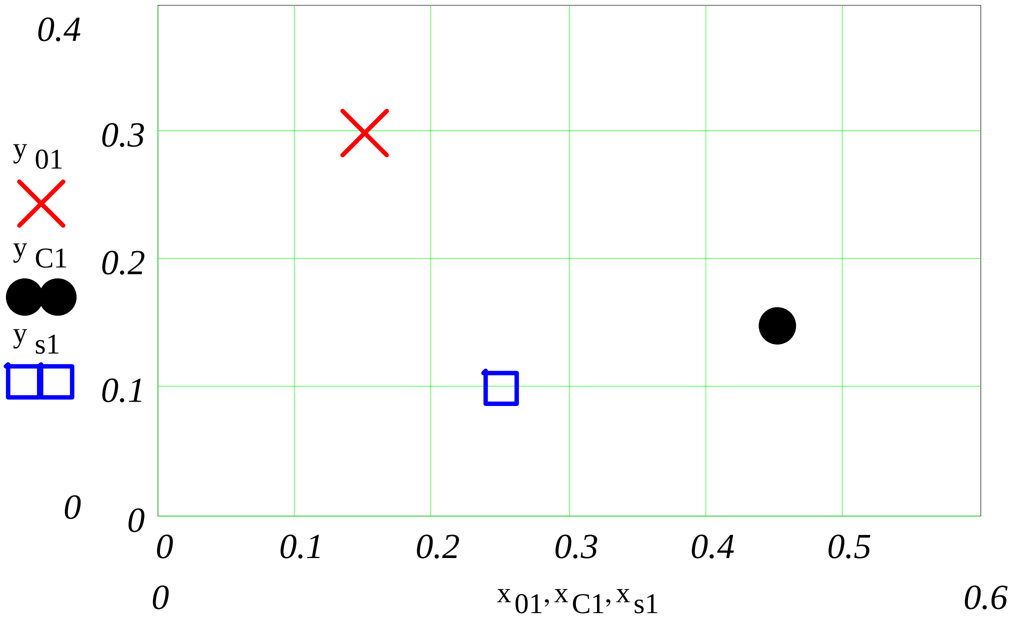
При проведенні тестових розрахунків на величини прогинів $\overline{w_s}(t)$, які є результатами розв’язання прямої задачі при заданому законі зміни в часі зовнішнього навантаження $P(t)$, накладався випадковий «шум» відповідно до закону нормального розподілу викидів («гауссів шум»). «Гаусів шум» розраховувався в додатку MathCAD с використанням вбудованої функції для нормального розподілу *rnorm* відповідно до формули:

$$w_s(t) = \overline{w_s}(t) + rnorm(t, 0, \delta \cdot w_{\max}). \tag{4.27}$$

Тобто до значень вихідної функції $\overline{w_s}(t)$ додавалися випадкові величини з дисперсією $\sigma = \delta \cdot w_{\max}$, де δ – відносна похибка; $w_{\max}$ – величина максимального прогину пластини в розглянутій точці. Вкажемо, що процедура «зашумлення» добре моделює випадкові похибки, що виникають при реальних вимірах параметрів НДС елементів конструкцій, і дозволяє перевірити обчислювальний алгоритм на стійкість.

На рис. 4.24 показано схему навантаження пластини при ідентифікації невідомих сил $P(t)$ і $R(t)$.

На рис. 4.25 показано вихідні дані для розв’язання оберненої задачі: w_δ – тонка крива, що відповідає значенням прогину пластини в точці (x_S, y_S), на які накладено «шум» з рівнем $\delta = 10\%$, і тут же наведена $w_{\Sigma s}$ – товста крива, що відповідає точним значенням прогину пластини $\overline{w_s}(t)$.



× – точка навантаження зовнішньою силою;

• – точка приєднання додаткової пружної опори;

□ (квадратиком) показана точка установки датчика прогину

Рисунок 4.24 – Схема навантаження пластини в плані

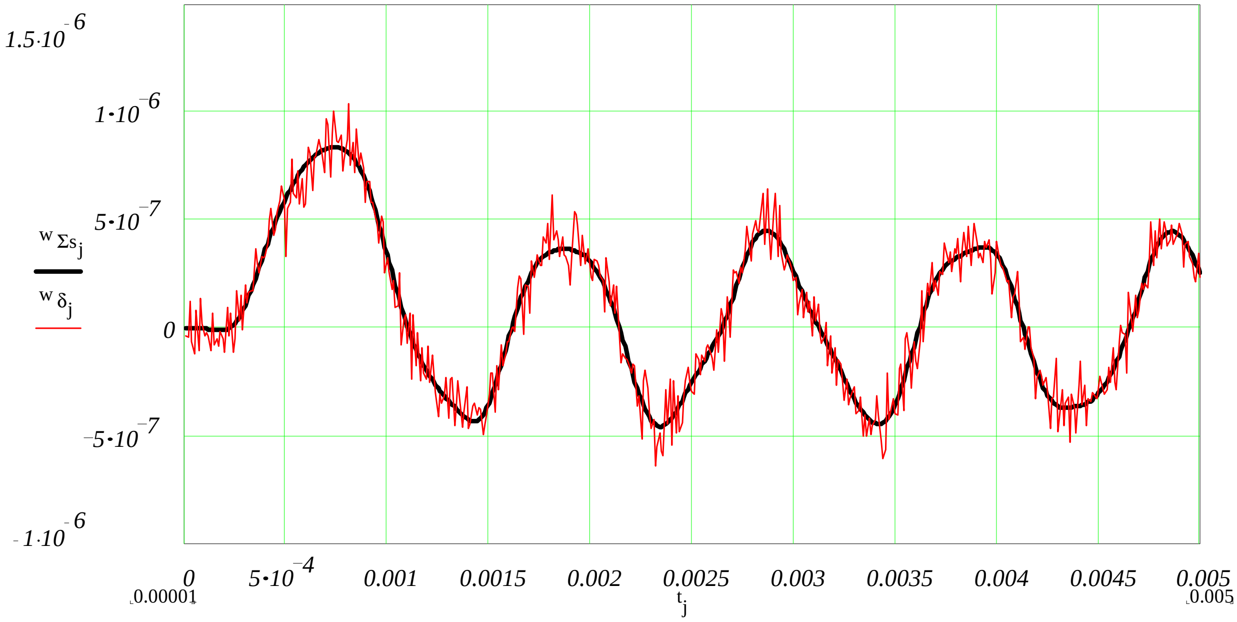


Рисунок 4.25 – Вихідні дані ідентифікації

На рис. 4.26 показані результати розв’язання оберненої задачі: ідентифіковані значення збурювальної сили $P(t)$ і реакції пружної опори $R(t)$, які були знайдені при розв’язанні (4.26), На цьому ж рисунку для зручності оцінки ідентифікації показана зміна збурювального навантаження $P(t)$ (півхвиля синусоїди) і визначена в результаті розв’язання прямої задачі реакція додаткової лінійно-пружної опори $R(t)$. Як видно з рис. 4.26 ідентифіковані криві добре відповідають точним значенням, незважаючи на зашумлення.

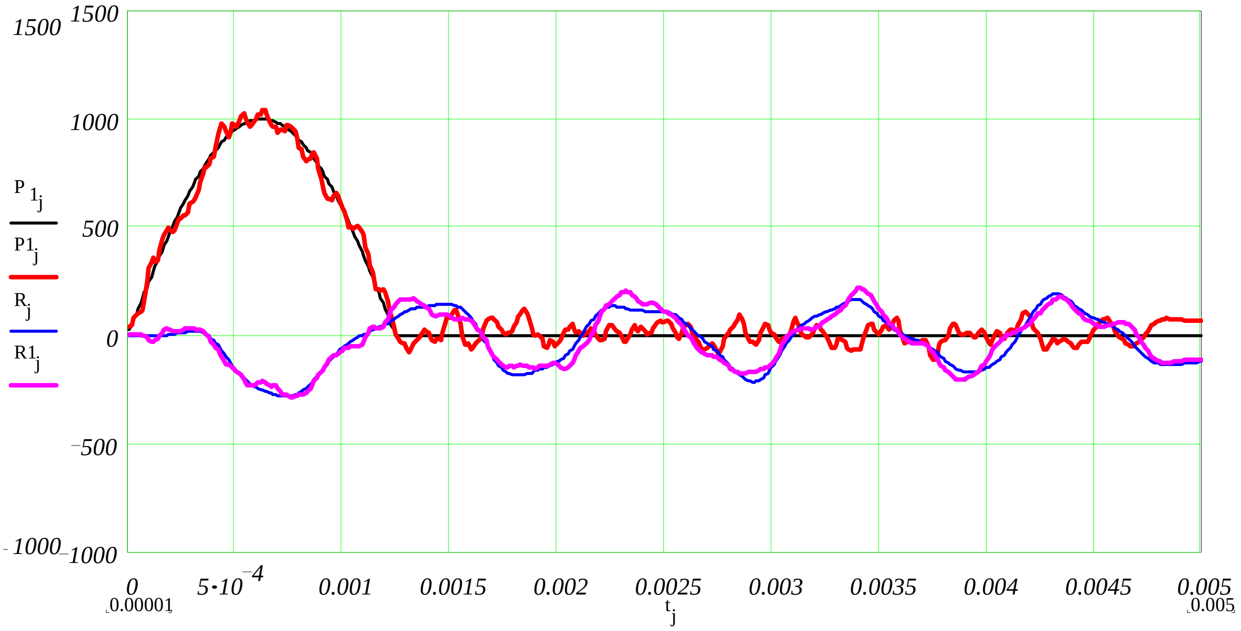


Рисунок 4.26 – Результати ідентифікації невідомих навантажень

Істотний вплив на стійкість числового розв’язання БСЛАР (4.26), особливо при «зашумленій» правій частині, мають параметри регуляризації α_i, що використовуються в РА Тихонова. Ці параметри доцільно вибирати незалежно для кожної з функцій, що ідентифікуються (хоча вони можуть і збігатися – це залежить від відповідних ядер інтегральних рівнянь).

Параметри регуляризації визначаються на основі мінімізації за α_i відповідних функціоналів нев'язки і (або) інших додатково введених функціоналів.

В цьому випадку для кожної сили, що ідентифікуються, ($P(t)$ і $R(t)$) досліджувалися два функціонали виду:

$$M1^{\alpha}[P]=\frac{\|B\cdot P(\alpha)-B_P\|_{l_2}}{\|B_P\|_{l_2}}, \tag{4.28}$$

$$M2^{\alpha}[P] = \|P(\alpha)\|; \tag{4.29}$$

$$M1^{\alpha}[R] = \frac{\|B \cdot R(\alpha) - B_R\|_{l_2}}{\|B_R\|_{l_2}}, \tag{4.30}$$

$$M2^{\alpha}[R] = \|R(\alpha)\|, \tag{4.31}$$

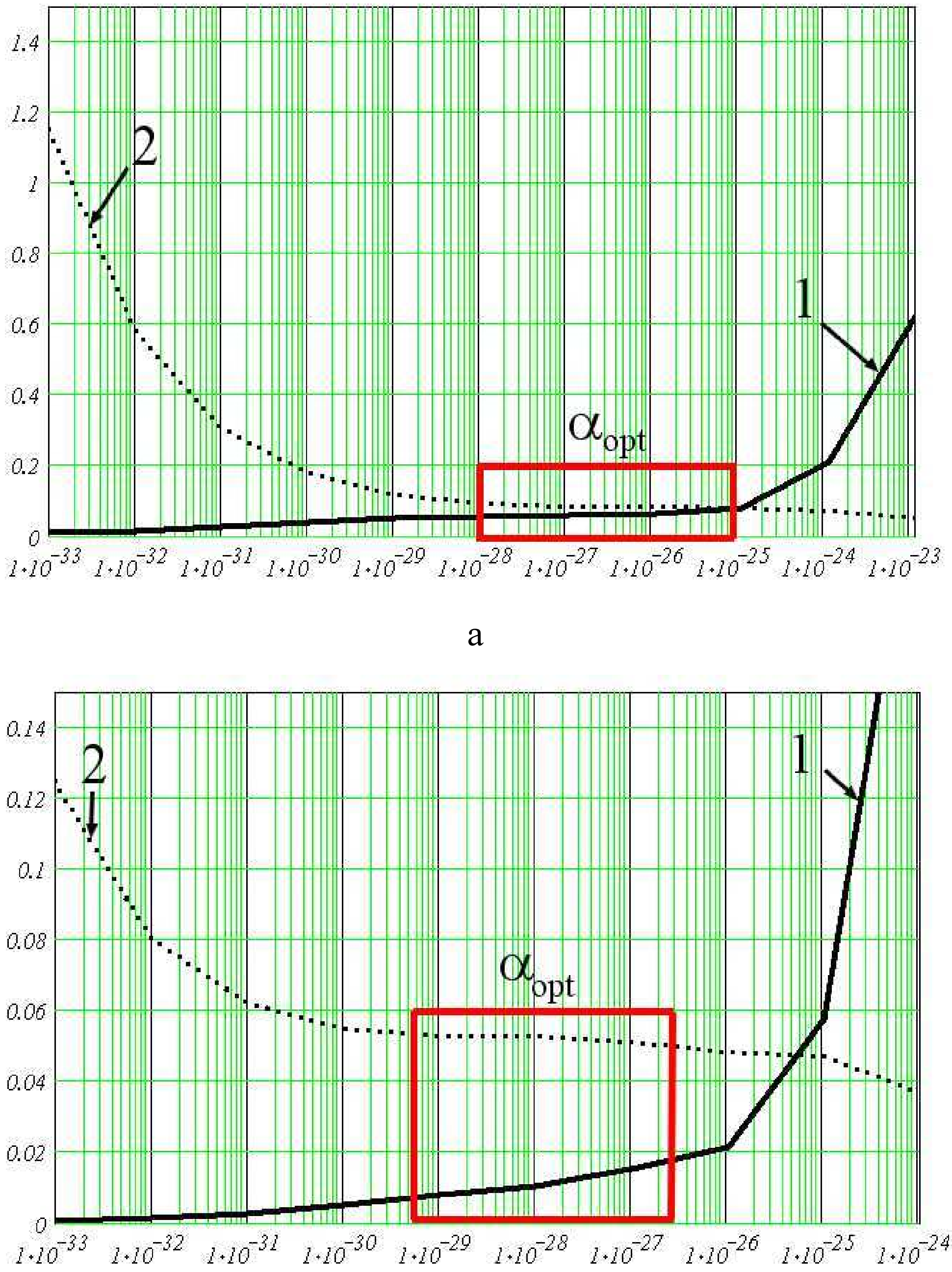
де B – інтегральний оператор, дискретний аналог якого для БСЛАР (4.26) буде мати вигляд $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathrm{A}_{12}\mathbf{A}_{21}$, $P(\alpha)$ і $R(\alpha)$ – знайдені при різних значеннях параметра регуляризації α_i сили $P(t)$ і $R(t)$, дискретні аналоги для B_P і B_R будуть $\mathbf{B_P} = -\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{w_S}$ і $\mathbf{B_R} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{w_S}$ відповідно.

Функціонали виду (4.28), (4.30) – це функціонали «відносної нев'язки», які при розв’язанні системи інтегральних рівнянь у випадку «незашумленої» (незбуреної) правої частини повинні прямувати до нуля, а при збурюванні вихідних даних прямувати до якоїсь малої величини. По суті, ці функціонали ілюструють «точність» ідентифікації.

Функціонали виду (4.29), (4.31) – це функціонали «сумарного ідентифікованого навантаження», які в деякому раціональному діапазоні повинні мати по можливості мінімальні значення (відповідно до принципу мінімуму енергії).

Наступні рис. 4.27, *а* і рис. 4.27, *б* показують пари функціоналів (4.28), (4.29) і (4.30), (4.31) для вибору параметрів регуляризації α_P і α_R, причому значення функціоналів відкладені вздовж осі ординат, а сам параметр α відкладений вздовж осі абсцис у логарифмічній шкалі.

З рис. 4.27, *а* і рис. 4.27, *б* видно, що в досліджуваному діапазоні при зменшенні значень параметра регуляризації α_i нев'язка зменшується, однак росте «сумарне навантаження», тобто вимоги суперечливі, і отже, значення параметра регуляризації повинне бути компромісним.



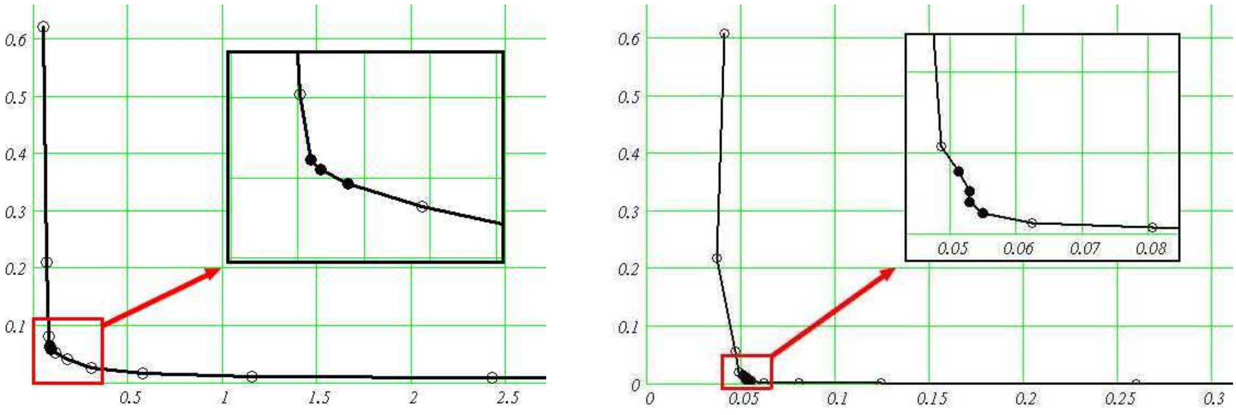
а

б

Рисунок 4.27 – Вибір значень параметра регуляризації α_P і α_R

Згідно рис. 4.27, *а* величину параметра регуляризації α_P варто вибирати в діапазоні $10^{-26} \le \alpha_P \le 10^{-28}$, а для параметра регуляризації α_R, згідно рис. 4.27 *б* – $10^{-27} \le \alpha_R \le 10^{-29}$. Вкажемо, що для наведеного числового розрахунку на рис. 4.26 при «зашумленні» $\delta = 0.1$ параметри регуляризації були прийняті рівними $\alpha_P = \alpha_R = 10^{-28}$.

У випадку розв’язання задач оптимізації при суперечливих критеріях зручно використати підхід, викладений у монографії [121], і побудувати компромісну криву. Для побудови компромісних кривих один із суперечливих критеріїв будують уздовж осі ординат, а інший уздовж осі абсцис, а значення параметрів, що оптимізують, відповідають точкам на графіку. Суть підходу зводиться до того, що в компромісній області виділяється кілька точок, кожна з яких відноситься до набору параметрів, які оптимізують, а далі здійснюється вибір конкретної або конкретних точок на основі експертного аналізу. На рис. 4.28 показано компромісні криві для α_P і α_R, тут критерій, що відповідає мінімуму відносної нев'язки, відкладений уздовж вертикальної осі, а критерій мінімального «сумарного навантаження» уздовж горизонталі.



а б

Рисунок 4.28 – Компромісні криві для α_P і α_R

На рис. 4.28 оптимальні точки виділені чорними кружками. Згідно рис. 4.28, *а* виділено 3 точки – оптимальні значення параметра регуляризації α_P – $\alpha_P = 10^{-26}$, $\alpha_P = 10^{-27}$, $\alpha_P = 10^{-28}$ (у тім же діапазоні, що обрано раніше), а для параметра регуляризації α_R, згідно рис. 4.28, *б* треба додати 4-у точку – $\alpha_R = 10^{-30}$.

Тому що розв’язувалася тестова, а не реальна задача, і відомі точні значення сил $P(t)$ і $R(t)$, то можна оцінити «точність» ідентифікації залежно від параметра регуляризації. На рис. 4.29 показано функціонали $M_P^{\alpha}[P] = \left\| P(\alpha) - \overline{P} \right\|$ – крива 1 і $M_R^{\alpha}[R] = \left\| R(\alpha) - \overline{R} \right\|$ – крива 2, де $\overline{P}$ і $\overline{R}$ – точні значення шуканих функцій, які взяті з прямої задачі.

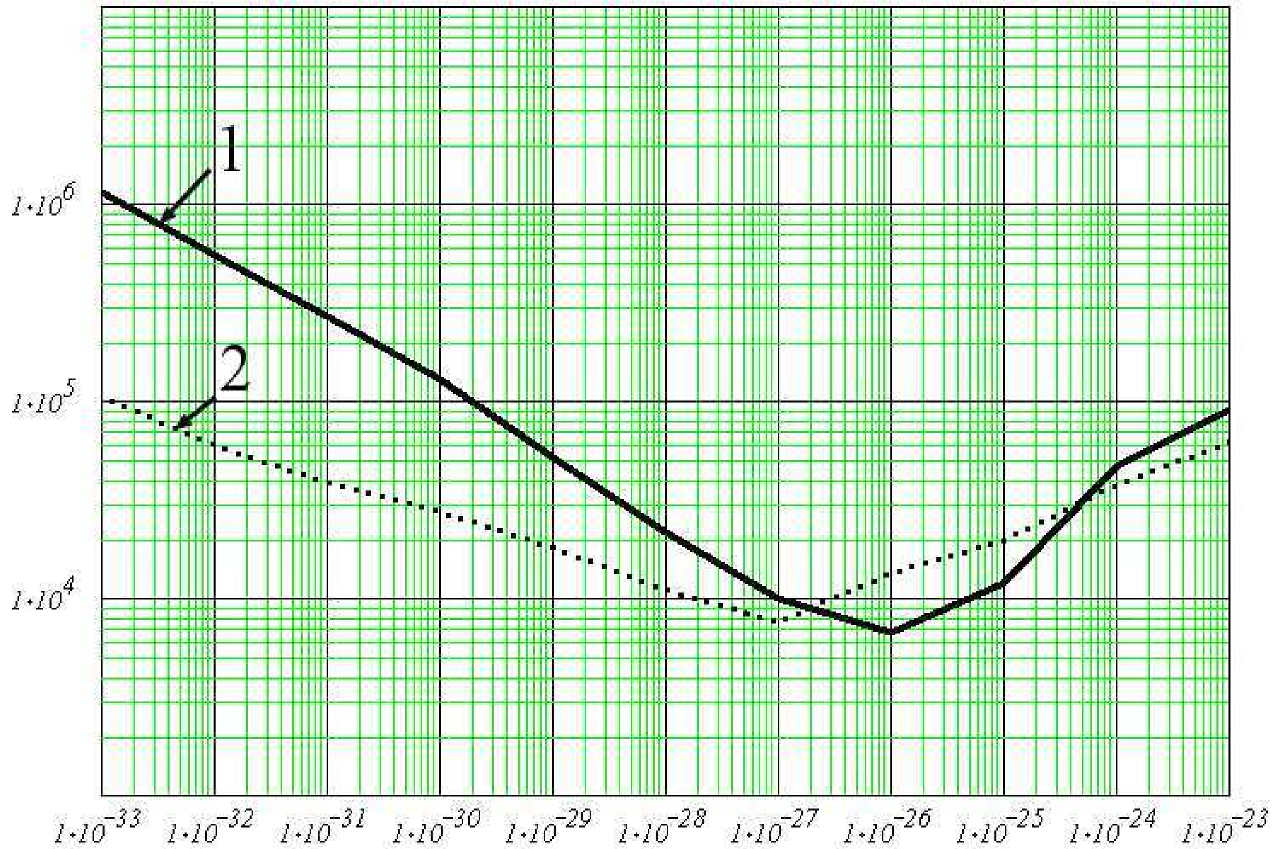


Рисунок 4.29 – Вибір значень параметра регуляризації α_P і α_R

З графіків на рис. 4.29 видно, що кращі результати ідентифікації отримані при значеннях $\alpha_P = 10^{-26}$ і $\alpha_R = 10^{-27}$, які попадають у знайдені раніше оптимальні діапазони.

Описано новий підхід, при якому вплив додаткової опори на пластину моделюється у вигляді невідомої нестаціонарної сили, яку знайдено з розв’язання інтегрального рівняння Вольтерра. На основі запропонованого підходу при моделюванні нестаціонарного деформування пластинчастих елементів конструкцій з додатковими пружними опорами є можливість одержувати стійкі аналітико-численні розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла без використання ітераційних схем. Можливість ідентифікації реакції між пластиною і додатковою опорою дозволяє полегшити вибір її жорсткості для «зм'якшення» імпульсних та ударних навантажень у конкретних механічних системах. Розв’язано обернену нестаціонарну задачу механіки твердого деформівного тіла. Завдяки використанню РА Тихонова отримане стійке чисельно-аналітичне розв’язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра. Показано можливість ідентифікації невідомого навантаження, що збурює коливання, за вихідними даними, які «зашумлені». Це дає можливість застосовувати описану методику при експериментальних дослідженнях для реальних результатів вимірювань.

4.6. Моделювання нестаціонарного деформування прямокутної пластини з погашувачем коливань

Гасіння коливань (особливо нестаціонарних) є важливим напрямком задач вібрprinciples захисту елементів конструкцій. Актуальність зазначених задач у цей час безсумнівна. При необхідності гасіння коливань уже створених елементів конструкцій використовують різні керовані та некеровані пристрої – погашувачі коливань (vibration absorbers). Найбільш відомими і розповсюдженими пристроями є амортизатори, які широко поширені у всіх галузях машинобудування, зокрема, в автомобілебудуванні. Як правило, моделювання наявності погашувачів здійснюється на базі систем з скінченим числом ступенів свободи (найчастіше одномасових). При такому підході елементи конструкцій розглядаються як недеформівні тіла.

Досліджується нестаціонарне деформування прямокутної пластини середньої товщини із встановленим на ній погашувачем коливань (рис. 4.30). Передбачається, що збурювальна сила $P(t)$ діє поперечно, а вплив погашувача враховується у вигляді невідомого зосередженого навантаження

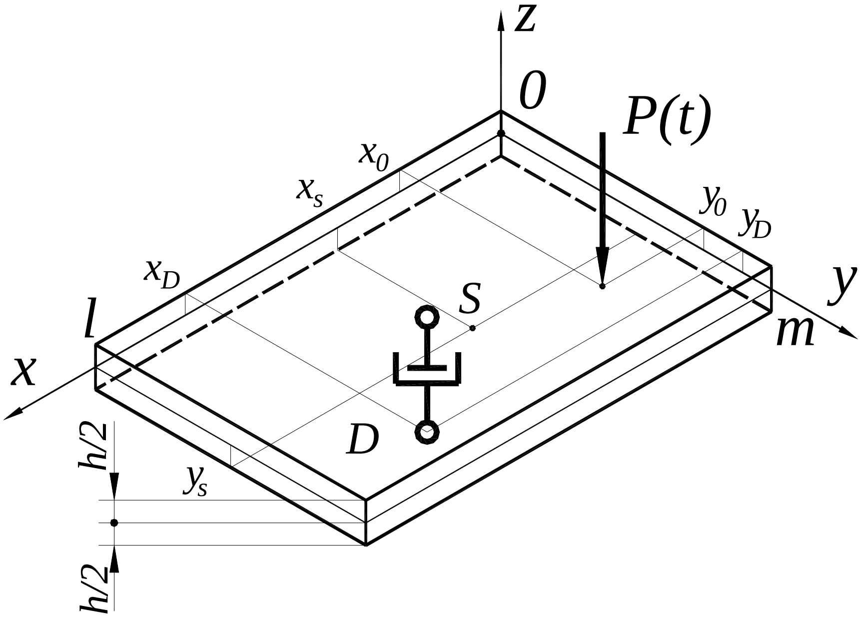


Рисунок 4.30 – Додаткова опора, що демпфірує (амортизатор)

Пряма задача може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра I роду, розв'язання якого здійснюється з використанням РА Тихонова, тому що задача є некоректною:

$$\int_0^t R(\tau)\left[K_R(t-\tau)+\frac{1}{\kappa}\right]d\tau=\int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau. \tag{4.32}$$

В результаті розв’язання знаходиться сила взаємодії між погашувачем і пластиною $R(t)$, що дозволяє визначати компоненти переміщення в часі в усіх точках пластини.

Розв’язання оберненої задачі. У випадку коли потрібно визначити невідомий закон зміни в часі збурювального навантаження $P(t)$ необхідно знати зміну прогину хоча б в одній точці пластини. Нехай в деякій точці S пластини $w(x_S, y_S, t)$ відома зміна прогину в часі (наприклад, експериментальні дані). Тоді задача зводиться до розв’язання системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра I роду (тому що невідомих сил у цьому випадку буде вже дві – це $P(t)$ і реакція між погашувачем і пластиною $R(t)$, яка також невідома):

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau)K_{DP}(t-\tau)d\tau - \int_0^t R(\tau)\left[K_{DR}(t-\tau)+\frac{1}{\kappa}\right]d\tau = 0, \\ \int_0^t P(\tau)K_{SP}(t-\tau)d\tau - \int_0^t R(\tau)K_{SR}(t-\tau)d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \qquad (4.33)$$

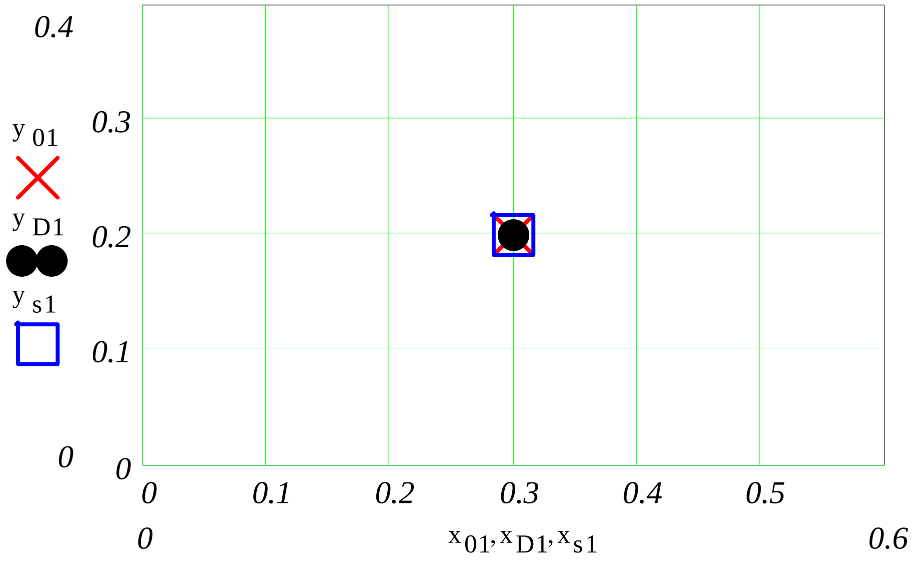
Згідно РА Тихонова виконується скінченовимірна апроксимація системи інтегральних рівнянь. Після дискретизації в матричному виді система (4.33) буде мати вигляд аналогічний (4.21), відрізнятися будуть тільки матриці $\mathbf{A}_{ij}$, тому що змінилися відповідні ядра в СІР.

Далі представлені результати обчислень. Числові розрахунки виконувались при наступних значеннях: ρ = 7890 кг/м^3; ν = 0.3; E=2.07·10^{11} Па; h = 0.04 м; l = 0.6 м, m = 0.4 м.

Координати точки прикладення збурювальної сили: x_0 = 0.3 м, y_0 = 0.2 м.

Координати встановленого на пластині погашувача: x_D = 0.3 м, y_D = 0.2 м.

Першим розглянутий випадок, як і для додаткової лінійно-пружної опори, коли нестаціонарна сила діє в центрі пластини, а погашувач установлений у тім же місці під пластиною – див. рис. 4.31.



× – точка навантаження зовнішньою силою;

• – точка приєднання погашувача

Рисунок 4.31 – Схема навантаження пластини в плані:

На рис. 4.32 показано зміни в часі реакції між пластиною і установленим на ній погашувачем коливань при трьох різних значеннях параметра регуляризації:

$\alpha_R = 10^{-24}$ – відносно «велике» значення параметра регуляризації (дуже наближене розв'язання, не зовсім фізичне – у початковий момент часу реакція повинна дорівнювати нулю).

$\alpha_R = 10^{-31}$ – значення параметра регуляризації з оптимального діапазону (як буде показано далі на рис. 4.33).

$\alpha_R = 10^{-36}$ – занадто «мале» значення параметра регуляризації (недостатньо регуляризоване розв'язання – видні паразитні осциляції, яких не існує насправді у ідентифікованої реакції). В цьому випадку починає втрачатися стійкість розв'язання).

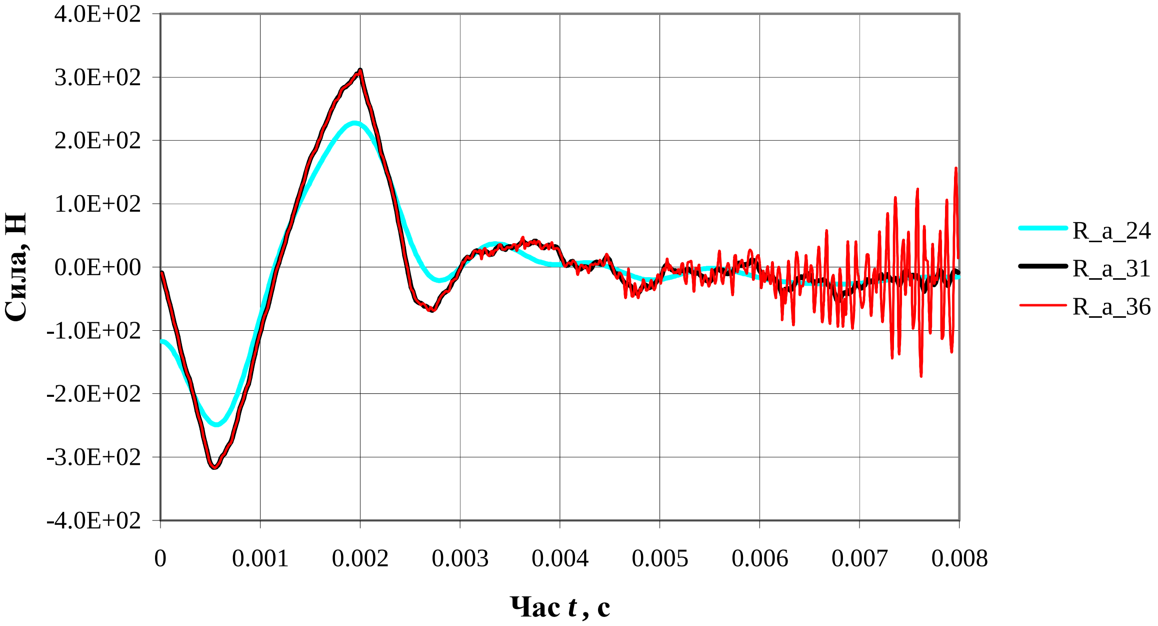


Рисунок 4.32 – Реакція погашувача при різних значеннях параметра регуляризації

Параметр регуляризації α_R доцільно вибирати на основі мінімізації раніше описаних функціоналів нев'язки (показані лінією із круглими крапками) і «сумарної реакції» (лінія із квадратними крапками), вид яких наведений на рис. 4.33. З рисунка видно, що область оптимальних значень параметра регуляризації лежить у діапазоні $10^{-34} \le \alpha_R \le 10^{-31}$, коли нев’язки малі, а «сумарна реакція» ще не починає сильно зростати (тобто до початку осциляцій при ідентифікації реакції $R(t)$).

На рис. 4.34 наведені криві зміни прогину в центрі пластини без погашувача – крива 1 ($w_P(t)$); прогин, викликаний реакцією між пластиною і погашувачем – крива 2 ($w_D(t)$); і крива сумарного прогину, викликаного дією зовнішньої сили $P(t)$ та реакції $R(t)$ – крива 3 ($w_\Sigma(t)$).

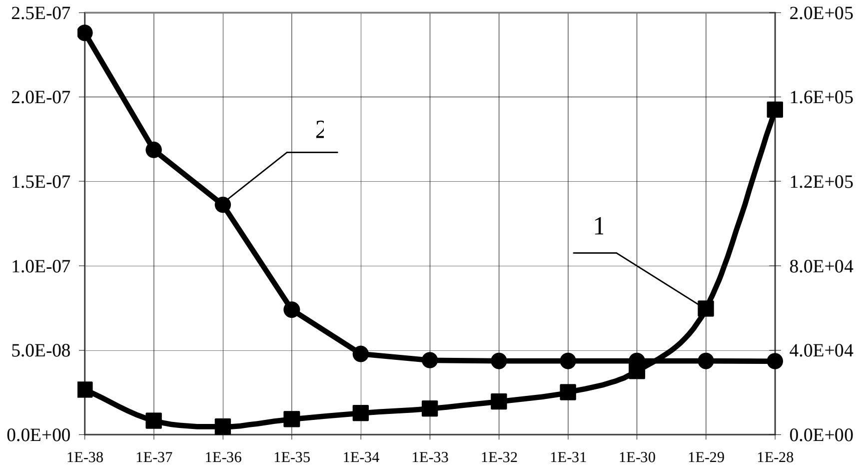


Рисунок 4.33 – До вибору значень параметрів регуляризації α_R

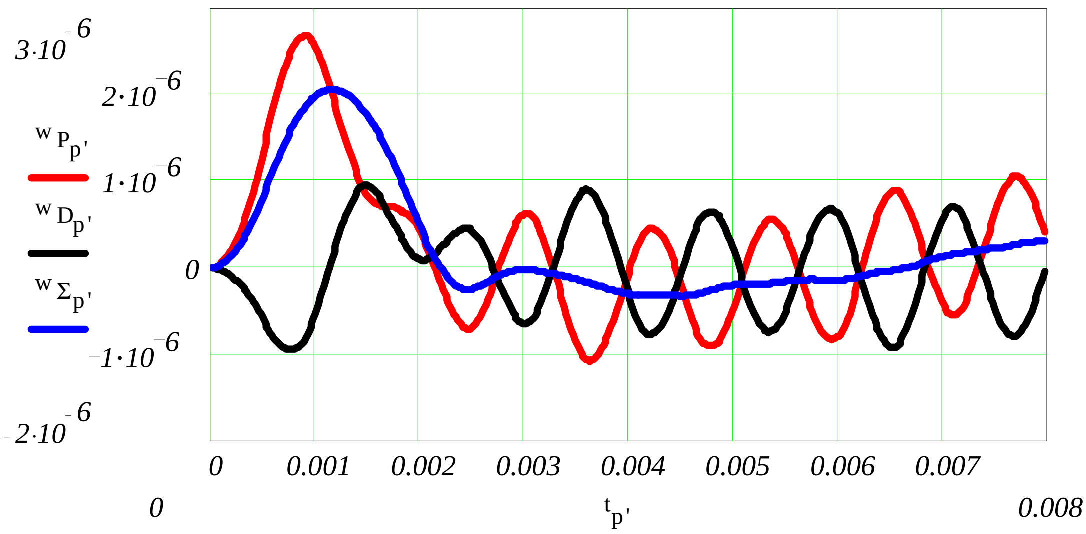


Рисунок 4.34 – Зміна прогину центра пластини

Криві 2 і 3 на рис. 4.34 отримані при значенні коефіцієнта демпфірування $\kappa = 10^5$ кг/с і параметра регуляризації $\alpha_R = 10^{-31}$.

На рис. 4.35 і рис. 4.36 показано вплив коефіцієнта демпфірування на сумарний прогин пластини та величину реакції між пластиною і погашувачем коливань.

Вкажемо, що для наведеного приклада числового розрахунку при коефіцієнтах демпфірування $\kappa < 10^4$ кг/с величина реакції погашувача мала (зміна прогину пластини за часом практично повністю збігається з зміною прогину без погашувача) і впливом амортизатора можна зневажити. При збільшенні коефіцієнта демпфірування $\kappa > 10^6$, тому що погашувач установлений у місці під навантаженням, він поглинає практично все навантаження, а сама пластина майже не деформується. Описані результати дозволяють судити про вірогідність отриманого розв'язання, тому що виконуються два граничних випадки – дуже малого і дуже великого демпфірування (за аналогією з виконанням граничних переходів для аналітичного розв'язання).

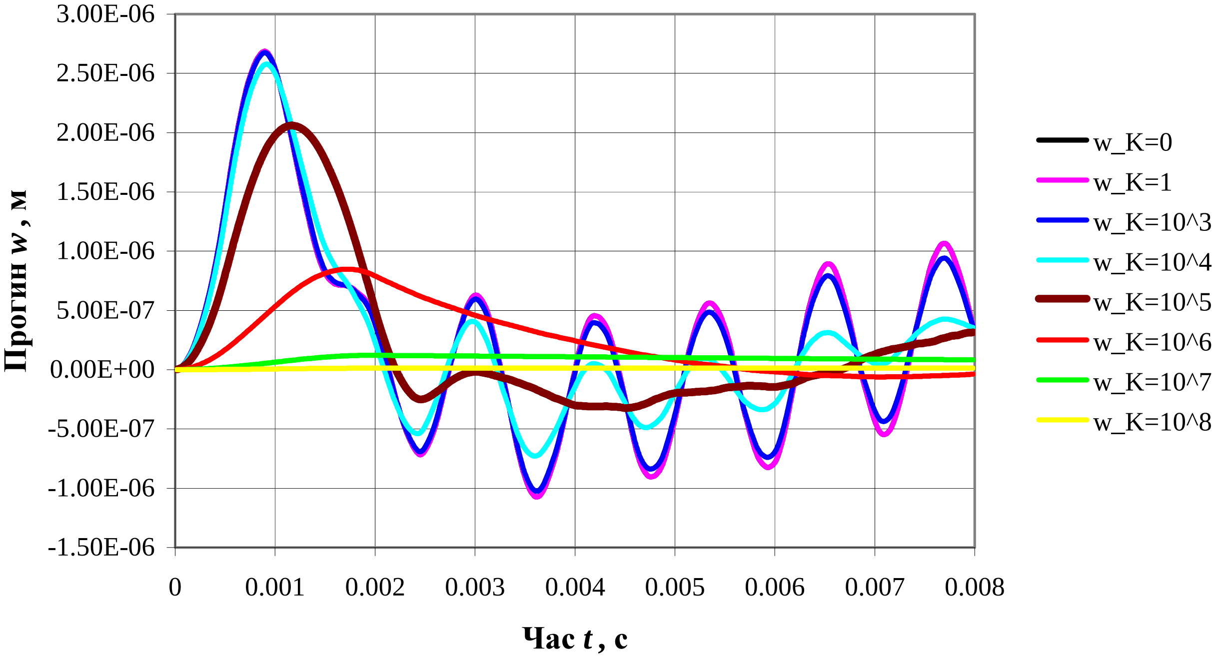


Рисунок 4.35 – Зміна прогину центра пластини

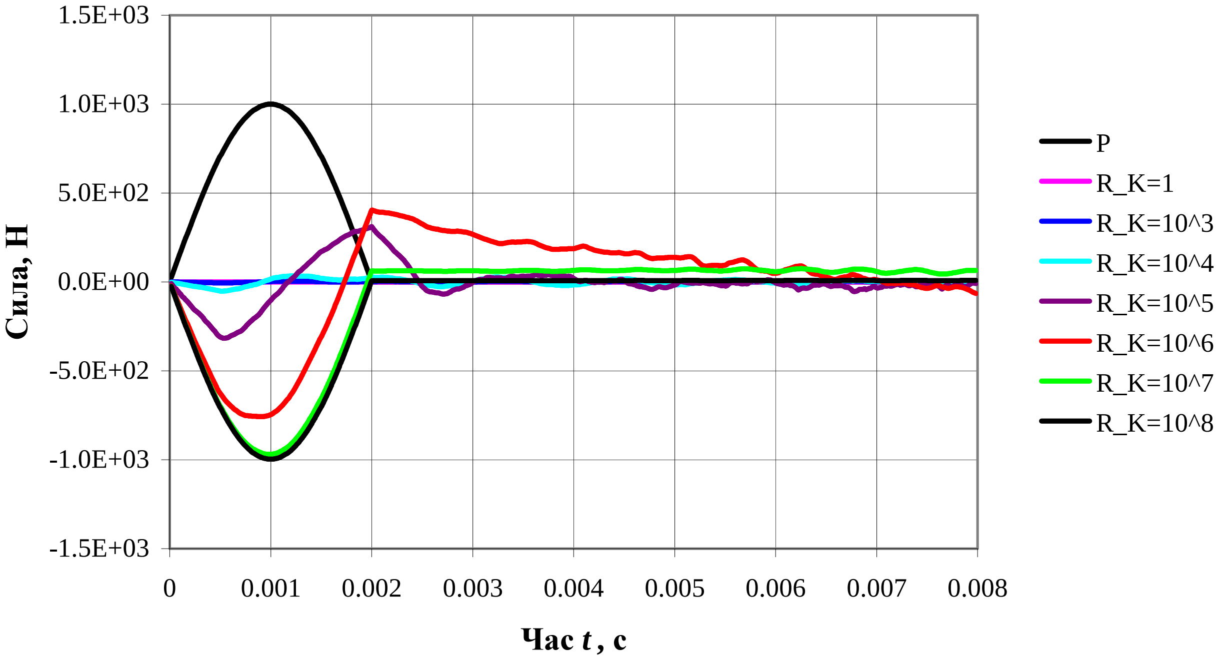
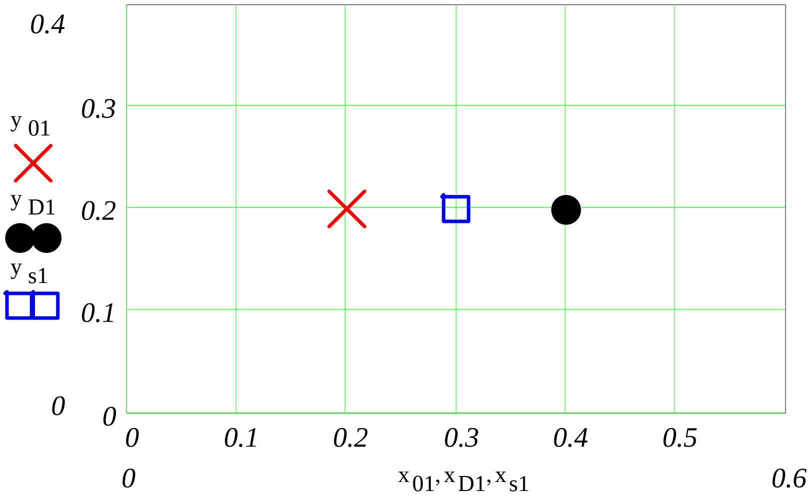


Рисунок 4.36 – Зміна збурювальної сили і реакції погашувача

При обчисленнях, пов'язаних з прямою задачею, розглядалися також інші варіанти навантаження. На рис. 4.37, рис. 4.38 і рис. 4.39 наведено розрахунок з такими ж вихідними даними, як у попередньому випадку, за винятком координат точок. Координати точки прикладення збурювального навантаження*:* $x_0 = 0.2$ м, $y_0 = 0.2$ м. Координати встановленого на пластині погашувача: $x_D = 0.4$ м, $y_D = 0.2$ м.



Точки: × – навантаження зовнішньою силою; • – приєднання погашувача

Рисунок 4.37 – Схема навантаження пластини в плані

На рис. 4.38 наведено криві зміни прогину в центрі пластини без погашувача – крива 1 і при різних коефіцієнтах демпфірування амортизатора (крива 2 – $\kappa = 10^4$ кг/с; крива 3 – $\kappa = 10^5$ кг/с; крива 4 – $\kappa = 10^6$ кг/с; крива 5 – $\kappa = 10^7$ кг/с).

На рис. 4.39 показано зміну в часі зовнішньої збурювальної сили – крива 1, а також реакції між пластиною і встановленим на ній погашувачем коливань (криві 2-5 відповідно).

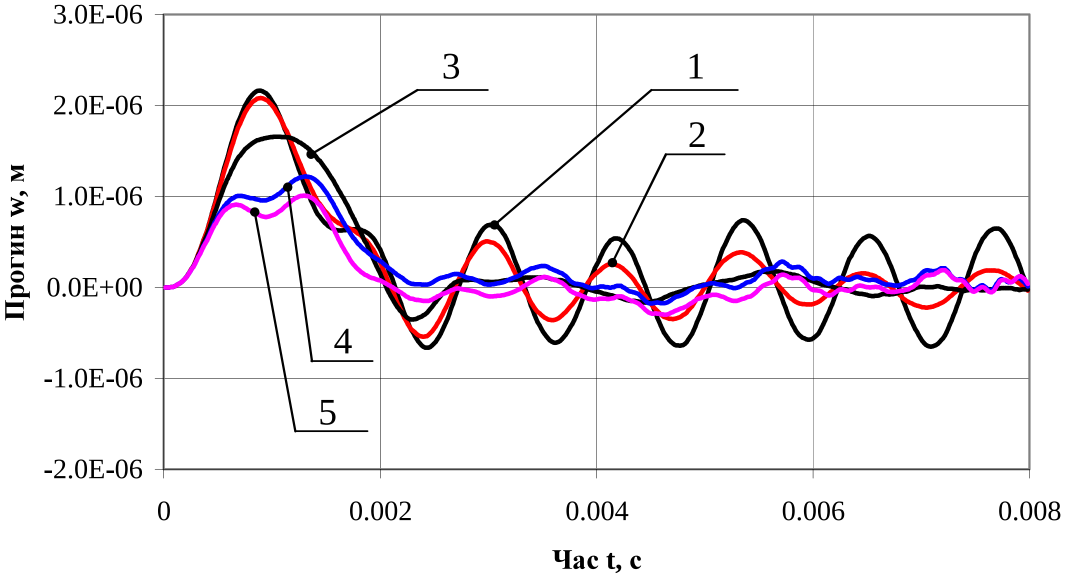


Рисунок 4.38 – Зміна прогину центра пластини у часі

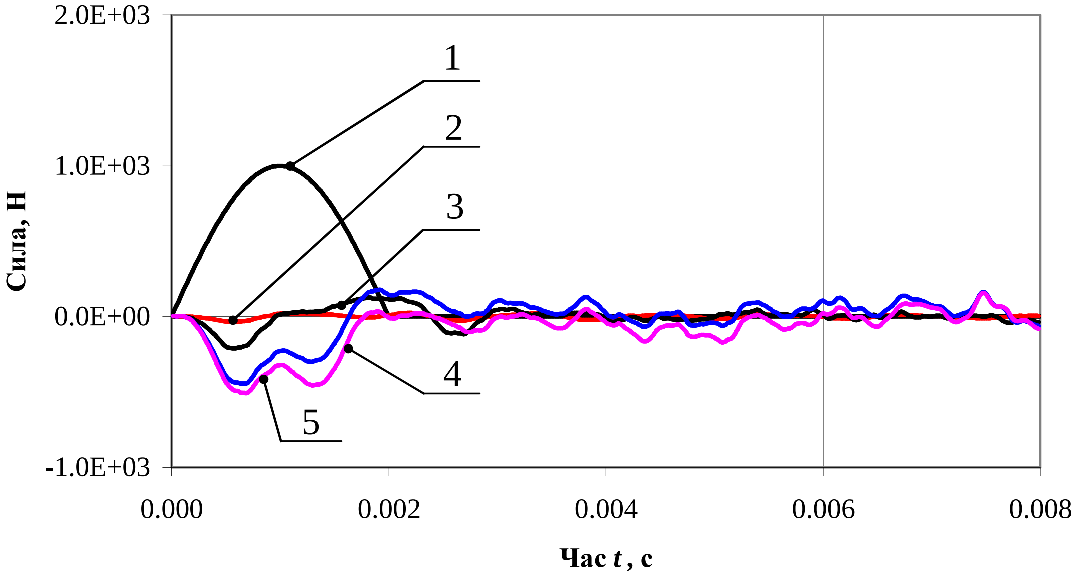


Рисунок 4.39 – Збурювальна сила і реакції погашувача

Вкажемо, що при обчисленнях графіків, наведених на рис. 4.38 і рис. 4.39 параметр регуляризації приймався $\alpha_R = 10^{-31}$.

На основі запропонованого підходу при моделюванні нестаціонарного деформування прямокутної пластини, із встановленим на ній погашувачем коливань, є можливість одержувати стійкі аналітико-числові розв'язання задач для прямокутної пружної пластини.

При обчисленнях, які відповідали оберненій задачі, використовувалися вихідні дані такі ж, як у попередніх розрахунках, за винятком координат:

$x_0 = 0.15$ м, $y_0 = 0.3$ м – координати точки навантаження;

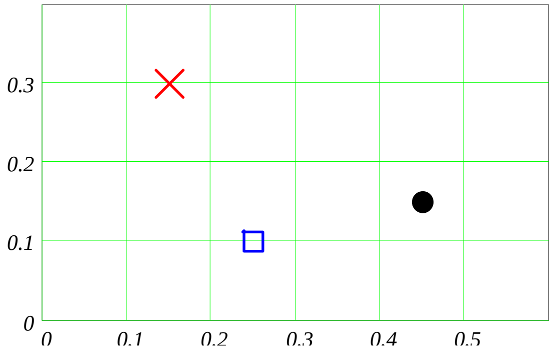
$x_D = 0.45$ м, $y_D = 0.15$ м – координати місця установки амортизатора;

$x_S = 0.25$ м, $y_S = 0.1$ м – координати датчика прогину пластини;

коефіцієнт демпфірування амортизатора $\kappa = 10^5$ Н/(м/с).

При проведенні розрахунків на величини прогинів $w_s(t)$, які були отримані при розв'язанні прямої задачі, коли закон зміни в часі зовнішнього навантаження $P(t)$ був заданий, накладався «гауссів шум», механізм накладення якого описувався раніше, див. формулу (4.27). Вкажемо, що для наведеного числового розрахунку відносна похибка «зашумлення» приймалася $\delta = 0.2$.

На рис. 4.40 показано схему навантаження пластини в плані для оберненої задачі.



× – точка навантаження зовнішньою силою;

• – точка приєднання додаткової пружної опори;

□ – (квадратиком) показана точка встановлення датчика прогину

Рисунок 4.40 – Схема навантаження пластини для оберненої задачі:

На рис. 4.41 показано вихідні для ідентифікації – «зашумлена» зміна прогину (w_δ), а також для візуальної оцінки «зашумлення» – точні значення зміни прогину (w_s).

На рис. 4.42 для зручності оцінки ідентифікації показана зміна збурювального навантаження $P(t)$ (півхвиля синусоїди – тонка крива) та ідентифіковані значення цієї сили (показані точками), а також визначена в результаті розв’язання прямої задачі реакція амортизатора $R(t)$ (тонка крива) та її ідентифіковані значення (показані точками).

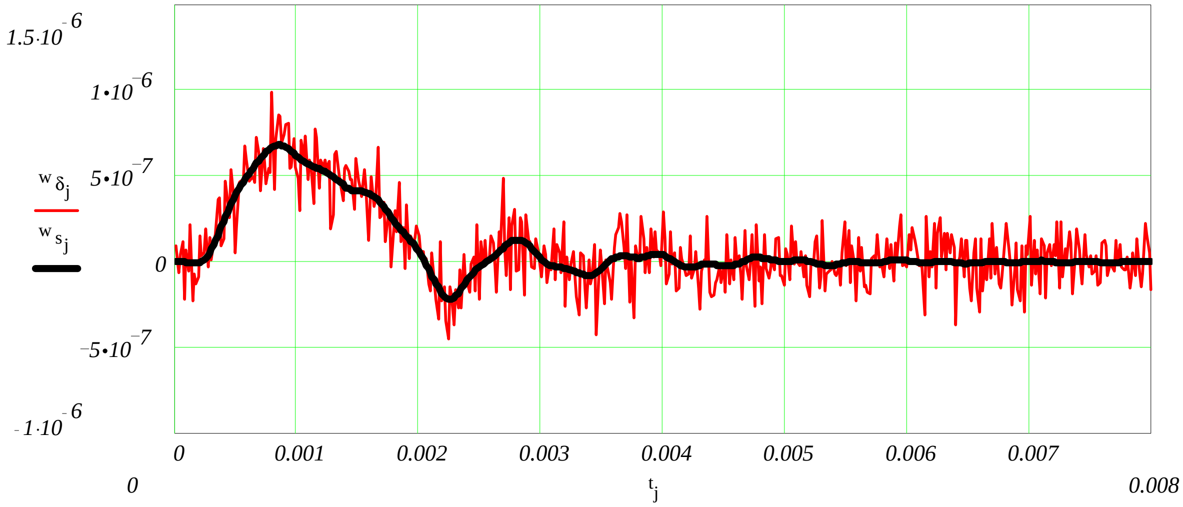


Рисунок 4.41 – Вихідні дані ідентифікації

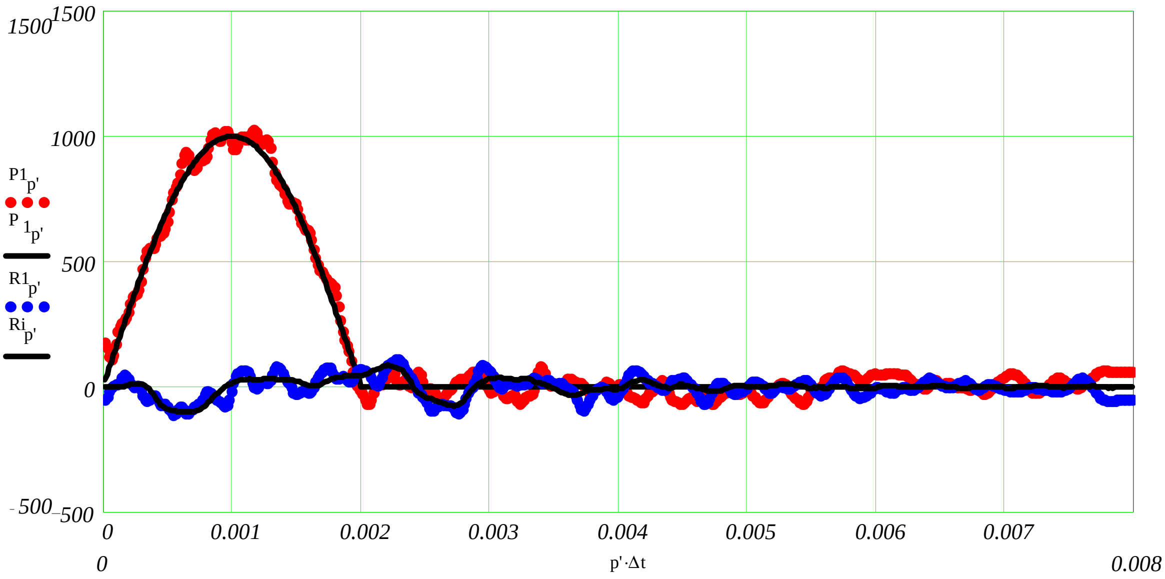
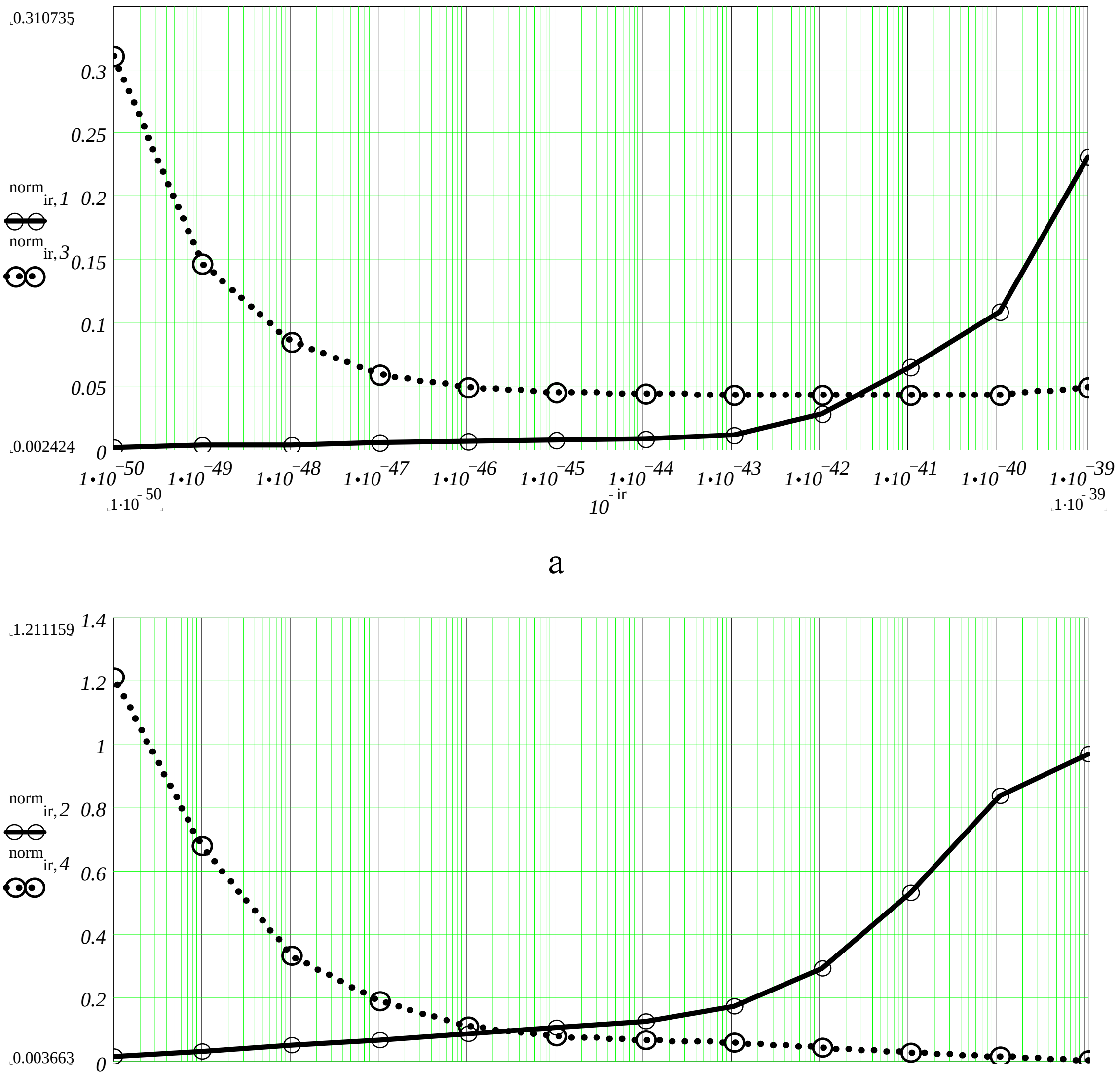


Рисунок 4.42 – Ідентифікація невідомих навантажень

Ідентифіковані значення $P(t)$ і $R(t)$ були отримані при значеннях параметрів регуляризації $\alpha_P = 10^{-45}$ і $\alpha_R = 10^{-45}$. Як видно з рис. 4.42 графіки ідентифікованих сил (знайдені при розв'язанні БСЛАР) добре накладаються на криві, що відповідають точним значенням (з вихідними даними для прямої задачі).

Параметри регуляризації α_P і α_R визначалися на основі мінімізації за α відповідних функціоналів відносної нев’язки та сумарного навантаження (4.28)-(4.31), які показані на рис. 4.43.



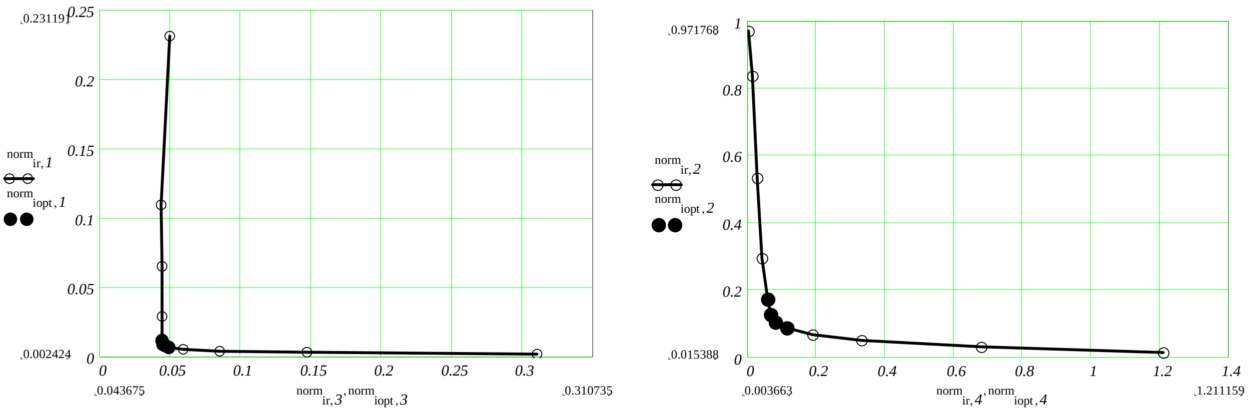
а

б

Рисунок 4.43 – Вибір значень параметра регуляризації α_P і α_R

Опис рис. 4.43 і рис. 4.44 повністю подібний опису аналогічних рисунків з попереднього пункту – рис. 4.27 і рис. 4.28 відповідно.

З аналізу функціоналів, наведених на рис. 4.43 і компромісних кривих рис. 4.44, можна виділити наступні оптимальні діапазони для параметрів регуляризації: $10^{-46} \le \alpha_P \le 10^{-43}$ і $10^{-46} \le \alpha_R \le 10^{-43}$.



а б

Рисунок 4.44 – Компромісні криві для α_P і α_R

В підрозділі запропоновано новий підхід при моделюванні нестаціонарного деформування прямокутної пластини з встановленим на ній амортизатором, вплив якого моделюється невідомою силою, що прикладається до пластини. На основі запропонованого підходу, є можливість одержувати стійкі аналітико-числові розв’язання відповідних прямої та оберненої нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла. Показана можливість ідентифікації невідомого збурювального навантаження на базі «зашумлених» вихідних даних, чим обумовлена застосовність описаної методики також при експериментальних дослідженнях для реальних результатів вимірів.

4.7. Нестаціонарні коливання пластини з додатковою в’язкопружною опорою

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої вздовж контуру та додаткової зосередженої в’язкопружної опори (рис. 4.45). На пластину діє нестаціонарне навантаження, що викликає коливання.

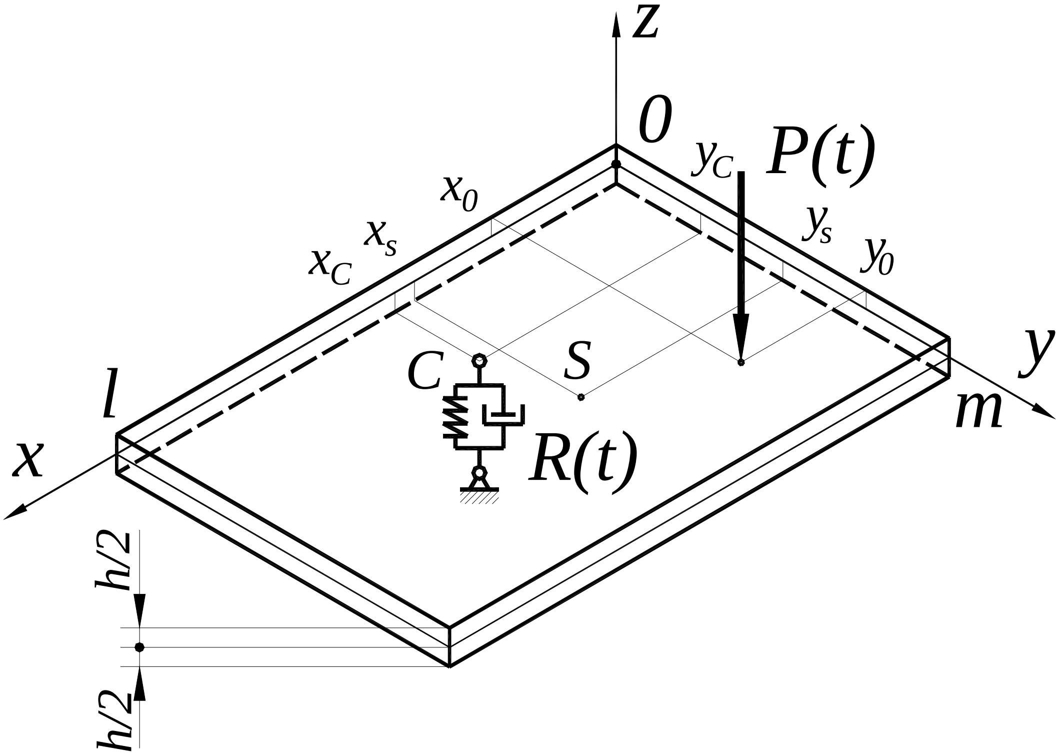


Рисунок 4.45 – Додаткова в’язкопружна опора

Розглядаються додаткові в’язкопружні опори, тому що на практиці вкрай рідко зустрічаються чисто пружні або чисто в’язкі опори.

Для точки, у якій знаходиться додаткова опора, можна записати наступні співвідношення для прогину:

$$\begin{cases} R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot \dfrac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt}, \\ w(x_C, y_C, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_{PC}(x_C, y_C, t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t K_{RC}(x_C, y_C, t-\tau) R(\tau) d\tau. \end{cases} \tag{4.34}$$

Система інтегро-диференційних рівнянь (4.34) може бути перетворена до системи інтегральних рівнянь шляхом заміни першого рівняння в (4.34) його інтегральним аналогом (4.9):

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int\limits_0^t K_e(t-\tau)R(\tau)d\tau, \\ w(x_C, y_C, t) = \int\limits_0^t P(\tau)K_{PC}(t-\tau)d\tau - \int\limits_0^t R(\tau)K_{RC}(t-\tau)d\tau, \end{cases} \tag{4.35}$$

де $K_e(t) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{-\frac{c}{\kappa} \cdot t}$ – скінченно-різницеве ядро Коші, що враховує в’язкі (κ) і пружні (c) характеристики додаткової в’язкопружної опори, а вигляд ядер $K_{PC}(t)$ і $K_{RC}(t)$ не однократно наводився раніше.

Після виключення в (4.35) $w(x_C, y_C, t)$ одержимо наступне інтегральне рівняння Вольтерра І роду:

$$\int\limits_0^t \left[K_{RC}(t-\tau) + K_e(t-\tau)\right]R(\tau)d\tau = \int\limits_0^t K_{PC}(t-\tau)P(\tau)d\tau, \tag{4.36}$$

яке після дискретизації в матричному виді можна записати:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{A_P} \mathbf{P}, \tag{4.37}$$

де матриця $\mathbf{A}_R^*$ відповідає інтегральному операторові в лівій частині (4.36), а $\mathbf{A_P}$ – інтегральному операторові в правій частині рівняння (4.36).

Рівняння (4.37) розв'язується чисельно з використанням РА Тихонова.

Для розглянутої механічної системи можливі наступні постановки обернених задач:

1) ідентифікація параметрів зовнішнього навантаження або одержання залежності зміни за часом зовнішнього нестаціонарного навантаження пластини при відомій реакції між пластиною і додатково опорою;

2) визначення параметрів додаткової в’язкопружної опори при відомому (тарованому) навантаженні;

3) ідентифікація повної системи навантажень як збурювальної сили, так і реакції між пластиною та додатковою опорою;

4) підбір необхідних характеристик в’язкопружної опори (жорсткості та коефіцієнта демпфірування) для забезпечення необхідних параметрів напружено-деформованого стану або задоволення деяким обмеженням,

5) ідентифікація повної системи навантажень як збурювальної сили, так і складових реакцій між пластиною та додатково опорою, а також місць прикладення всіх навантажень.

П'ята постановка із зазначених вище є найбільш загальною. Розв'язання оберненої задачі для п'ятої постановки буде мати два етапи – визначення координат і знаходження законів зміни в часі цих навантажень (це і є третя постановка). Тому розглянемо докладно розв'язання оберненої задачі для третьої постановки.

Як вихідні дані для перерахованих обернених задач використовуються зміни прогину або деформації пластини в часі (вони відомі або можуть бути обмірювані експериментально), причому похибка їхнього завдання (виміру) не перевищує величини $\delta > 0$, тобто $\left\| w_\delta - \overline{w} \right\| \le \delta$.

На пластину в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестаціонарні коливання пластини з додатковою опорою. Деформування пластини моделюється в рамках уточненої теорії пластин середньої товщини типу С. П. Тимошенка. Вплив додаткової опори на пластину заміняється невідомою нестаціонарною силою $R(t)$, прикладеною до пластини в місці встановлення опори. Коефіцієнти жорсткості та демпфірування опори вважаються постійними.

У точці $S(x_S, y_S)$ (див. рис. 4.45) аналітичний вираз для визначення прогину пластини буде мати такий вигляд:

$$w(x_S, y_S, t) \equiv w_S(t) = \int_0^t K_P^W(x_S, y_S, t-\tau)P(\tau)d\tau - \int_0^t K_R^W(x_S, y_S, t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (4.38)$$

Якщо у виразі (4.38) невідома зміна за часом збурювального навантаження $P(t)$ і реакції між пластиною та додатковою опорою $R(t)$, то цей вираз є інтегральним рівнянням Вольтерра з двома невідомими. Для розв'язання оберненої задачі інтегральне рівняння (4.38) необхідно доповнити двома виразеннями для прогину в точці контакту пластини та додаткової опори (4.36).

Тоді з (4.38) і (4.36) можна скласти наступну СІР:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t K_{11}(t-\tau)P(\tau)d\tau + \int\limits_0^t K_{12}(t-\tau)R(\tau)d\tau = w_s(t); \\ \int\limits_0^t K_{21}(t-\tau)P(\tau)d\tau + \int\limits_0^t K_{22}(t-\tau)R(\tau)d\tau = 0, \end{cases} \tag{4.39}$$

де ядра можна позначити як $K_{11}(t) = K_{PS}(x_S, y_S, t)$, $K_{12}(t) = K_{RS}(x_S, y_S, t)$, $K_{21}(t) = K_{PC}(x_C, y_C, t)$, $K_{22}(t) = K_{RC}(x_C, y_C, t) + K_e(t)$.

Розв'язання подібної СІР Вольтерра можна віднести до некоректних задач математичної фізики (причому, як по Адамару, так і по Тихонову), тому для розв'язання системи (4.39) використовувався РА Тихонова.

Дискретний аналог СІР (4.39) має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

У матричній системі (4.40) вектор $\mathbf{p}_1$ відповідає невідомій функції зміни в часі зовнішнього навантаження $P(t)$, вектор $\mathbf{p}_2$ – реакції між пластиною і додатковою в’язкопружною опорою $R(t)$, $\mathbf{w}_s$ – вихідним даним для ідентифікації (змінам прогину) $w_s(t)$; матриці $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$ і $\mathbf{A}_{22}$ – відповідають ядрам $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ і $K_{22}(t)$.

Матрична система (4.40) зводиться до двох незалежних матричних рівнянь на основі узагальнення методу Крамера, тобто застосування узагальненого алгоритму Крамера для блокових матриць:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_j, \tag{4.41}$$

де $\mathbf{D}$ – визначник блокової матриці $\mathbf{A}$, а $\mathbf{D}_j$ – визначник блокової матриці $\mathbf{A}_j$, у якій j-й стовпець замінявся стовпцем правої частини.

Кожне матричне рівняння (4.41) є незалежною системою лінійних алгебраїчних рівнянь і згідно РА Тихонова тут розв'язувалися еквівалентні регуляризовані СЛАР виду:

$$\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}+\alpha_j\mathbf{C}\right)\cdot\mathbf{p}_j=\mathbf{D}^T\mathbf{D}_j, \qquad (4.42)$$

де $\mathbf{C}$ – симетрична трьохдіагональна матриця, вид якої для безрозмірної задачі наведений в [116, 126, 137], а в роботі [37] зазначено варіанти обезрозмірювання, $\alpha_j > 0$ – параметр регуляризації, оптимальний вибір якого в подібних задачах також описаний в [37] і виконується шляхом введення та мінімізації функціоналів типу нев'язки з урахуванням додаткових умов та обмежень, що базуються на апріорній інформації про шукані невідомі сили.

У результаті розв'язання двох СЛАР виду (4.42) знаходиться сила взаємодії між пластиною та додатковою в'язкопружною опорою $R(t)$ і невідоме навантаження $P(t)$, що збурює коливання.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана з площиною xOy декартової системи координат. Числові розрахунки виконувалися при наступних значеннях: $\rho = 7890$ кг/м^3; $\nu = 0.3$; $E = 2.07\cdot10^{11}$ Па; $h = 0.04$ м; $l = 0.6$ м, $m = 0.4$ м. Координати точки прикладення збурювального навантаження: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.2$ м. Координати точки кріплення додаткової в'язкопружної опори до пластині: $x_C = 0.2$ м, $y_C = 0.2$ м. Координати точки, у якій зміна прогину вважається відомим: $x_S = 0.3$ м, $y_S = 0.2$ м. Значення коефіцієнта жорсткості додаткової опори $c = 10^8$ Н/м, а коефіцієнт демпфірування $\kappa = 4\cdot10^4$ Н·с/м; число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є 50×50.

Далі описується обчислювальний експеримент, у якому значення прогину не виміряються на реальній пластині, а визначаються з розв'язання прямої (тестової) задачі, у якій збурювальне навантаження $\overline{P(t)}$ задається. Як вихідні дані (рис. 4.46) вибиралися значення прогину в точці S – $\overline{w}(t)$. Ці дані взяті з розв'язку прямої задачі – товста («незашумлена») крива, а також використовувалися значення прогину, на які був накладений шум за залежністю:

$$w_{\delta}(t) = \overline{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t)\,, \tag{4.43}$$

де $w_{\max}$ – максимальне значення прогину пластини в точці, що досліджується, при дії навантаження $\overline{P}(t)$, $Rnd(t)$ – випадкові числа в діапазоні [-1;1], $\delta = 20\%$ – рівень шуму, що накладався.

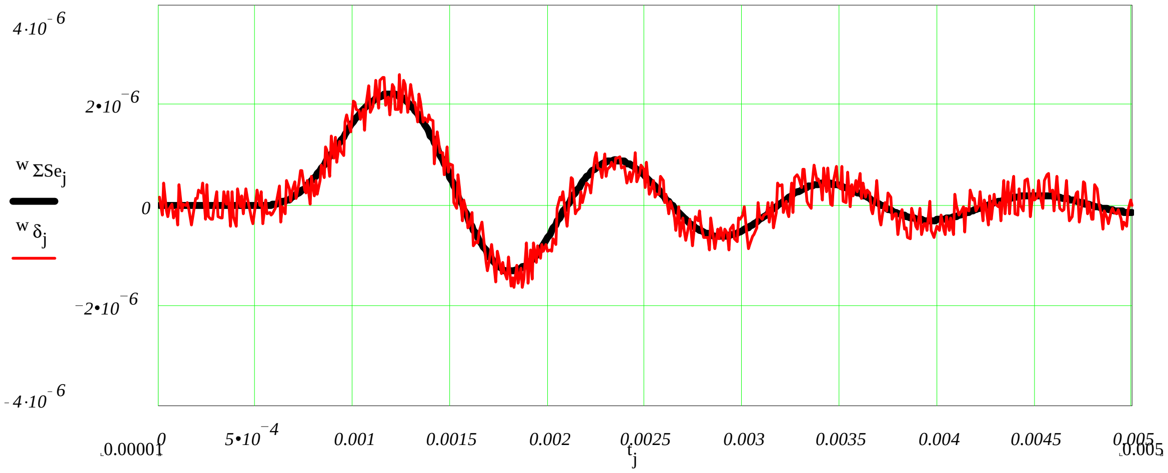


Рисунок 4.46 – Вихідні дані для оберненої задачі

У випадку правильного розв'язання оберненої задачі, ідентифіковані сили $P(t)$ і $R(t)$ повинні бути близькі (або збігатися) з тестовою силою $\overline{P(t)}$ і визначеною при розв'язанні прямої задачі реакцією $\overline{R(t)}$, що наочно демонструє вірогідність отриманих результатів. Також з'являється можливість як якісної, так і кількісної оцінки розв'язання оберненої задачі.

На рис. 4.47 суцільними лініями показана зміна в часі збурювального навантаження $\overline{P(t)}$ (півхвиля синусоїди) і визначена в результаті розв'язання прямої задачі реакція між пластиною та додаткової в’язкопружної опорою $\overline{R(t)}$, а точками показані ідентифіковані значення сил $P(t)$ і $R(t)$ знайдені при чисельно-аналітичному розв'язанні оберненої задачі за вихідними даними, що «незашумлені».

На рис. 4.48 показано ідентифіковані значення сил $P(t)$ і $R(t)$ знайдені на основі чисельного розв'язання інтегральних рівнянь Вольтера з неточно заданою правою частиною («зашумлені» вихідні дані).

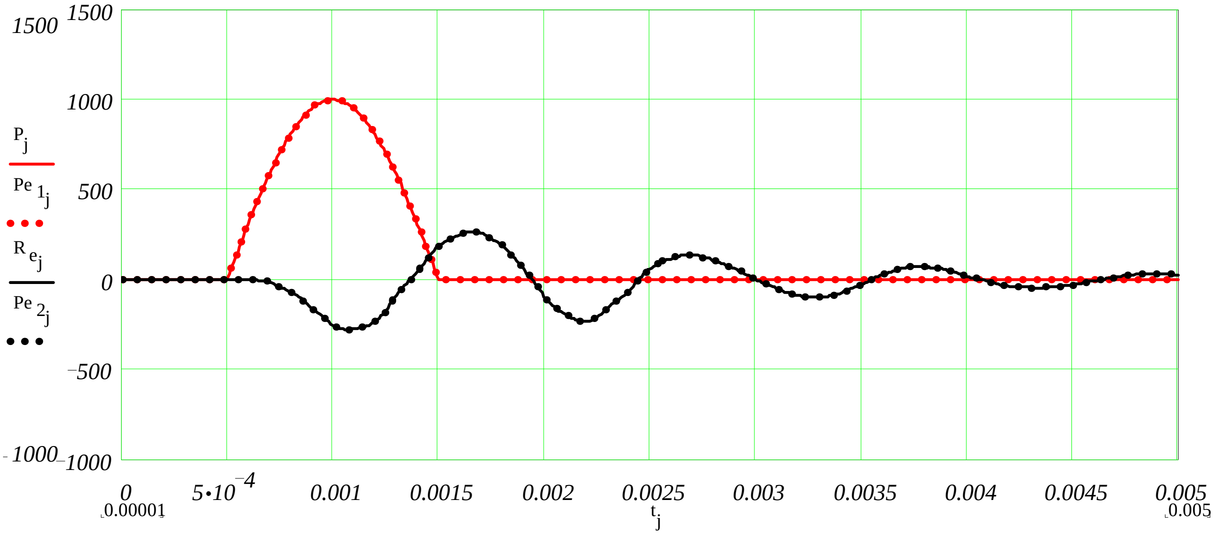


Рисунок 4.47 – Збурювальне навантаження і

реакція додаткової в’язкопружної опори

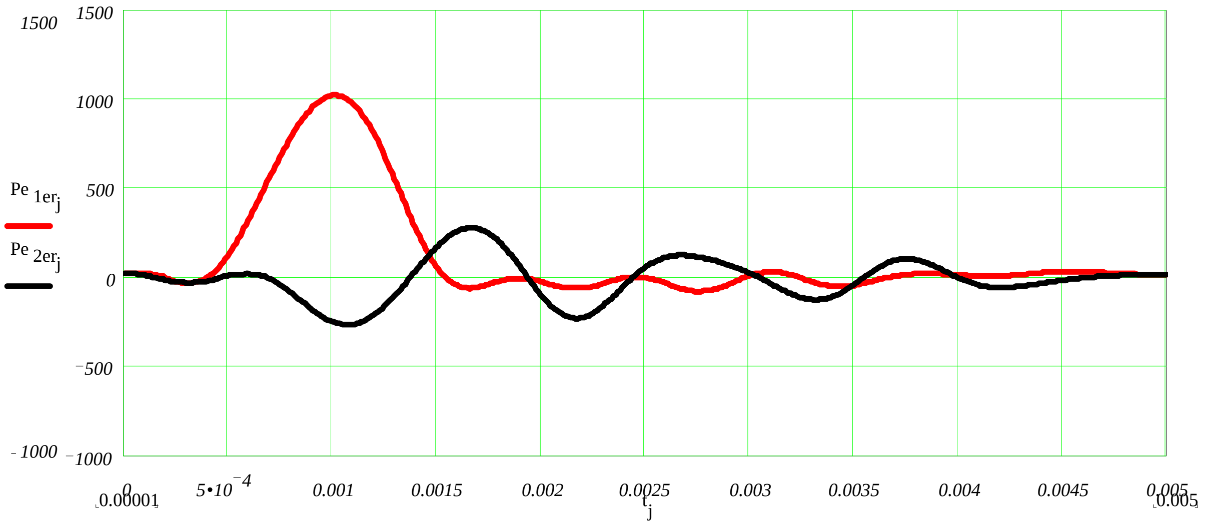


Рисунок 4.48 – Результати розв'язання задачі ідентифікації

На рис. 4.49 і рис. 4.50 показано функціонали, на основі яких вибирався параметр регуляризації α при розв'язанні регуляризованих СЛАР виду (4.42), причому рис. 4.49 відповідає незбуреній правій частині $\overline{w}(t)$, а рис. 4.50 – «зашумленим» вихідним даним $w_\delta(t)$.

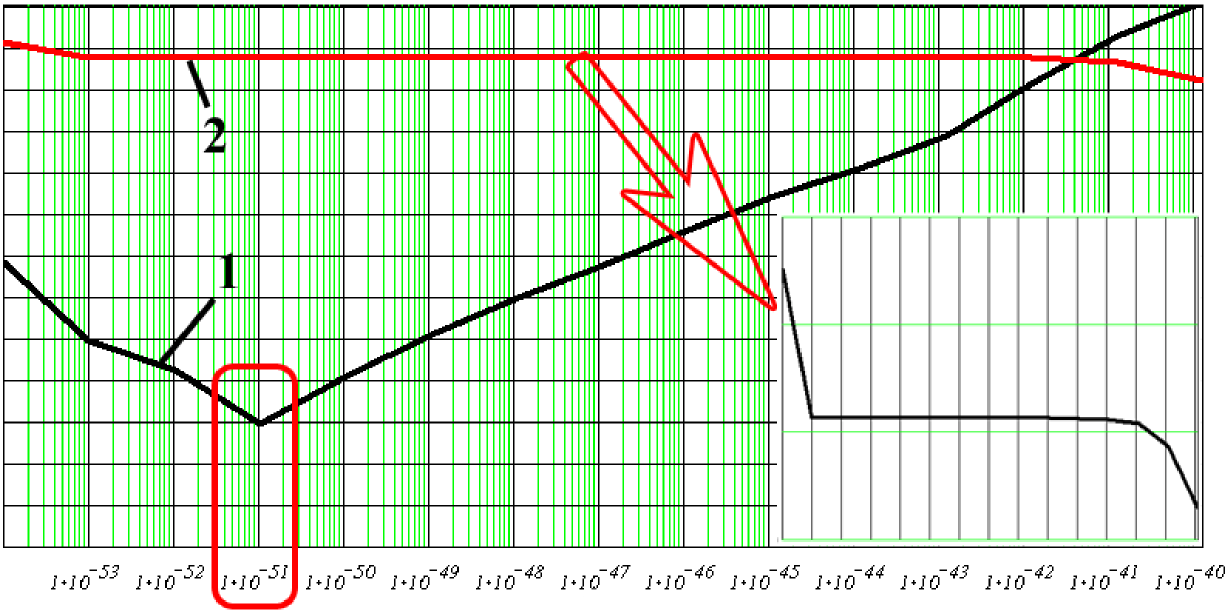


Рисунок 4.49 – Вибір параметра регуляризації для точно заданої правої частини

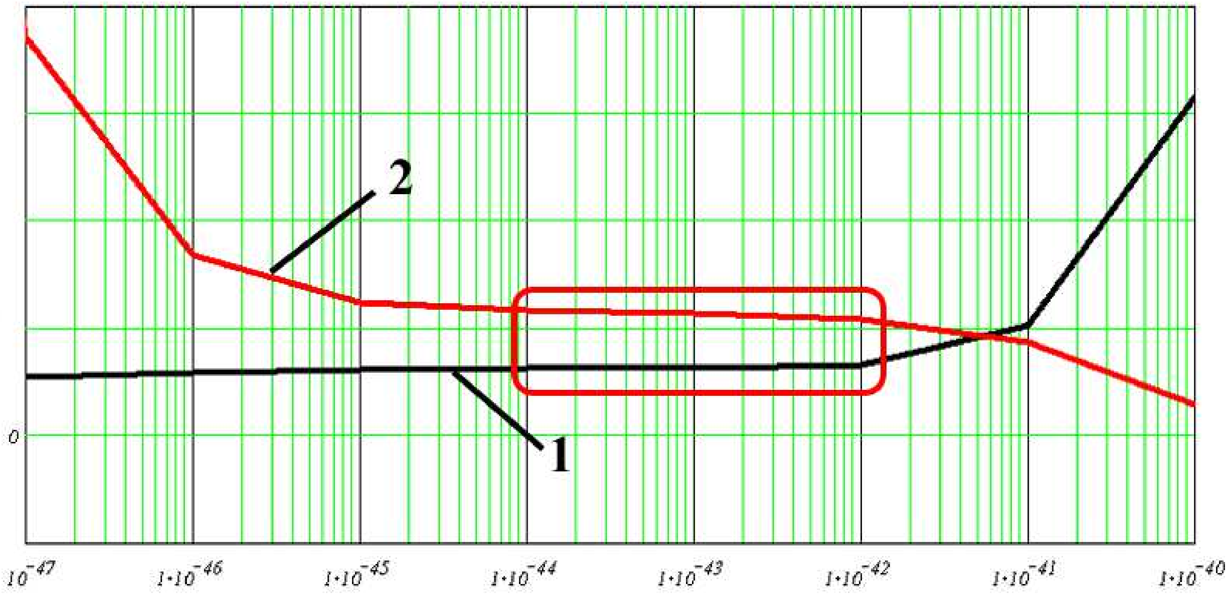


Рисунок 4.50 – Вибір параметра регуляризації для «зашумленої» правої частини

Кривим 1 на рис. 4.49 і рис. 4.50 відповідають значення функціонала «нев’язки» виду:

$$\left\| \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{P}^{\alpha} + \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{R}^{\alpha} - \mathbf{w} \right\|_{l_2}^{2} . \tag{4.44}$$

Вкажемо, що у випадку «незашумленої» правої частини «нев’язка» повинна прямувати до нуля і оптимальні значення параметра регуляризації відповідають глобальному мінімуму функціонала, як видно з рис. 4.49 кривої 1 – це значення параметра регуляризації $\alpha_{opt} = 10^{-51}$. Використання як вихідних даних «зашумлених» значень (у тестовій задачі – випадкове «зашумлення», при реальних вимірах – похибки посилення, перетворення та ін.) спричиняє відсутність механічної обумовленості глобального мінімуму функціонала нев’язки. Отже, нас цікавить знаходження не глобального мінімуму (який може не існувати або ж параметр регуляризації може відповідати не фізичним значенням обумовлених функцій $P(t)$ і $R(t)$), а локального мінімуму або перегину кривої, що відповідає функціоналу нев’язки – на рис. 4.50 (див. криву 1) можна виділити значення параметра регуляризації $\alpha \le 10^{-42}$.

Для подальшого вибору параметра регуляризації потрібно, використовуючи апріорну інформацію про навантаження, що ідентифікуються, вводити додаткові обмеження або функціонали, наприклад, криві 2 на рис. 4.49 і рис. 4.50 відповідають значенням функціоналу «сумарного впливу» навантаження, що збурює коливання, і реакції додаткової опори:

$$\left\|\mathbf{P}^{\alpha}\right\|_{l_2}^{2} + \left\|\mathbf{R}^{\alpha}\right\|_{l_2}^{2}, \tag{4.45}$$

тому що зовнішнє збурювальне навантаження $\overline{P(t)}$ є скінченим (і обмежено певною максимальною величиною), а величина реакції між пластиною та додатковою опорою $\overline{R(t)}$ повинно по можливості приймати мінімальні значення, але не рівні нулю (що відповідало б відсутності реакції).

Для «незашумлених» даних на рис. 4.49 (крива 2) видно, що величина функціонала «сумарного впливу» практично не змінюється в діапазоні $\alpha \in [10^{-53};10^{-42}]$, що пояснюється обчислювальною стійкістю алгоритму при незбуреній правій частині. У випадку «зашумлених» вихідних даних функціонал «сумарного впливу» виявляється дуже чутливий до збурювання, це дозволяє нам виділити раціональну зону параметра регуляризації в діапазоні $\alpha \in [10^{-44};10^{-42}]$ (див. рис. 4.50, крива 2).

Тому що розв’язується тестова обернена задача (відомі точні значення шуканих функцій $\overline{P(t)}$ і $\overline{R(t)}$), маємо можливість «оцінки» ідентифікації за допомогою аналізу функціонала виду:

$$\left\|\mathbf{P}^{\alpha}-\overline{\mathbf{P}}\right\|_{l_2}^{2}+\left\|\mathbf{R}^{\alpha}-\overline{\mathbf{R}}\right\|_{l_2}^{2}, \qquad (4.46)$$

значення якого представлені на рис. 4.51, де крива 1 отримана для розв'язання оберненої задачі з незбуреними вихідними даними, а крива 2 – для «зашумлених» значень прогину $w_{\delta}(t)$.

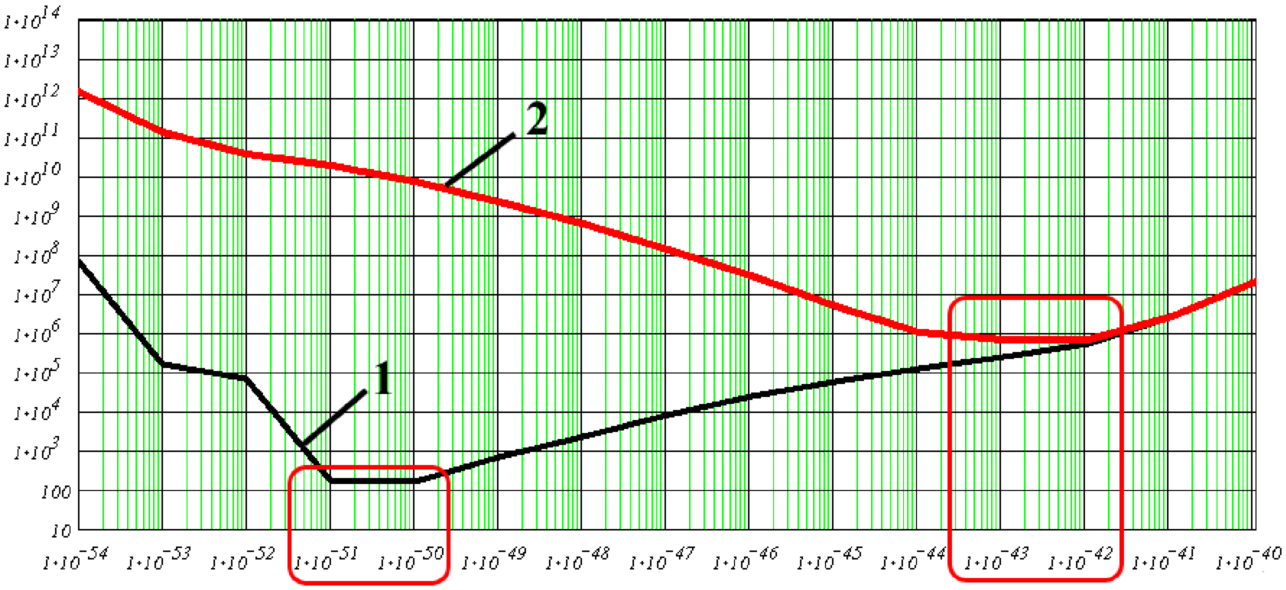


Рисунок 4.51 – Оцінка ідентифікації

Відзначимо, що на рис. 4.49, рис. 4.50 і рис. 4.51 значення уздовж осі абсцис для наочності відкладені на логарифмічній шкалі, а на рис. 4.49 і рис. 4.51 також на логарифмічній шкалі відкладені й значення уздовж осі ординат (на рис. 4.49 у лівому нижньому куті показана крива 2 з віссю ординат, відкладеної на звичайній шкалі).

На рис. 4.51 можна чітко виділити оптимальні значення параметра регуляризації для «незашумленого» випадку $\alpha_{opt}\in[10^{-51};10^{-50}]$ (значення функціонала трохи менші при $\alpha=10^{-51}$) і для «зашумленого» –

$\alpha_{opt} \in [10^{-43};10^{-42}]$ (значення функціонала трохи менші при $\alpha = 10^{-43}$). Відзначимо, що без використання точних значення сил $\overline{P(t)}$ і $\overline{R(t)}$ (у реальній задачі вони були б невідомі), вдалося визначити значення параметра регуляризації близькі до оптимальних. Ідентифіковані навантаження, наведені на рис. 4.47 і рис. 4.48, розраховані саме при цих оптимальний значеннях $\alpha = 10^{-51}$ і $\alpha = 10^{-43}$ відповідно.

Описано методику розв'язання оберненої задачі ідентифікації невідомих навантажень, що викликають нестаціонарне деформування пластини з додатковою опорою, відповідно до якої отримані стійкі аналітико-числові розв'язання без використання ітераційних схем.

4.8. Розподіл в'язкої і пружної складових у реакції додаткової в'язкопружної опори, що контактує з пластиною

У випадку, коли при розв'язанні задачі пріоритетом є визначення зовнішнього збурювального навантаження $P(t)$ у часі, методика, яку описано вище, демонструє досить високу ефективність. У зазначених задачах вплив в’язкопружної опори, замінявся однією реакцією (4.8), що дозволяє визначити її в результаті розв'язання відповідної прямої або оберненої задачі.

Однак для задач, пов'язаних з ідентифікацією точних параметрів в’язкопружної опори (жорсткості та в'язкості), або при оптимальному проектуванні додаткових опор, що знижують амплітуди прогинів, визначення повної реакції недостатньо. Необхідно знати окремо вплив в'язкої і пружної складової реакції. У цьому випадку доцільно розглянути задачу в наступній постановці: нехай прямокутна пластина має дві фіктивні незалежні додаткові опори – в'язку (що демпфірує) і лінійно–пружну, які прикладені у двох різних точках (рис. 4.52).

Припускається, що точка D з координатами проекції на серединну площину пластини (x_D, y_D) – це місце контакту з демпфером, дія якого заміняється реакцією $R_D(t) = \kappa \cdot dw(x_D, y_D, t)/dt$, а точка C з координатами (x_C, y_C) – місце контакту з лінійно–пружною додатковою опорою (свого роду жорсткою пружиною), реакція якої $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$.

У загальному випадку припускається, що точки C і D не збігаються, але розташовані на невеликій відстані. В силу принципу суперпозиції спільна дія в'язкої і пружної опор приблизно збігається з дією в'язкопружної опори $R(t) = R_D(t) + R_C(t)$.

Якщо ж (в окремому випадку) точки C і D збігаються, то з погляду механіки спільний вплив в'язкої і пружної опор еквівалентний впливу в'язкопружної опори. Розв'язання для окремого випадку виявилося можливим, оскільки система рівнянь для розв'язання у прямій і оберненої задачах вийшла не виродженою.

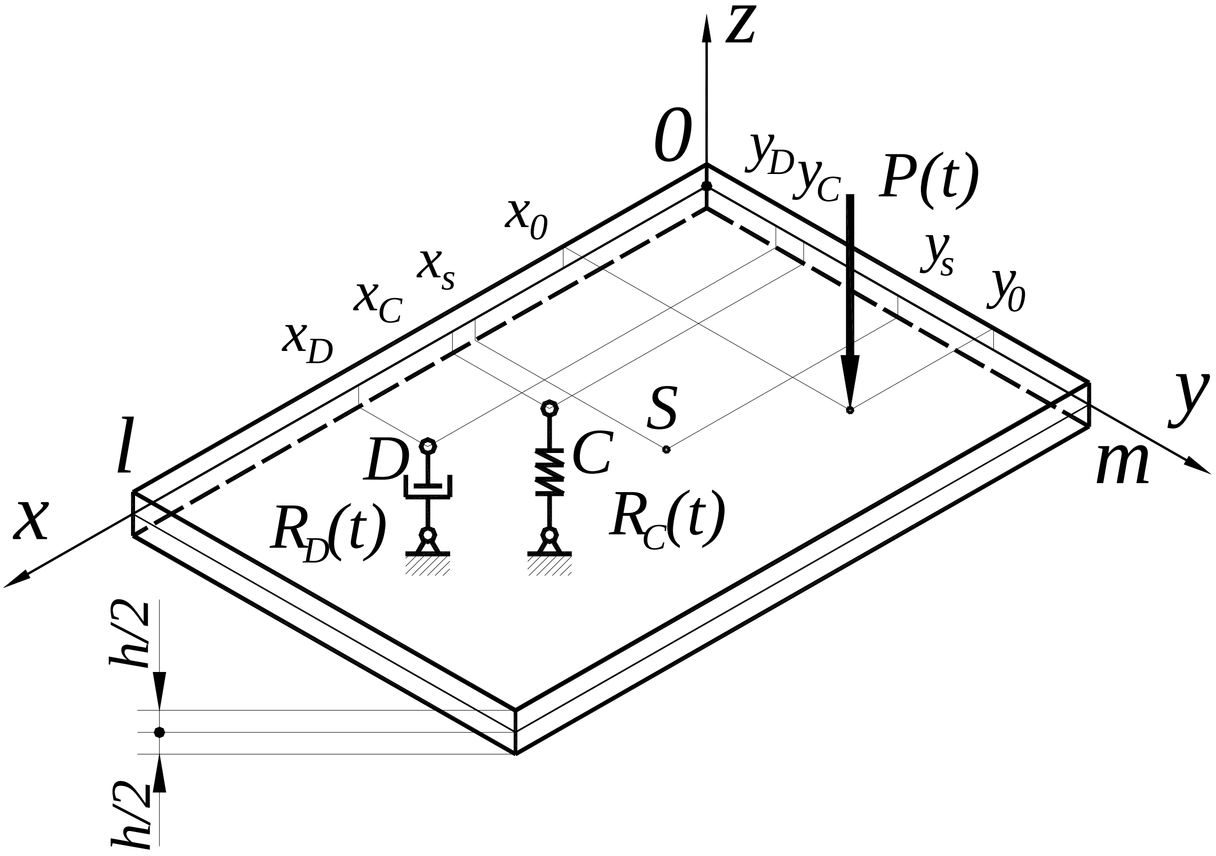


Рисунок 4.52 – Пластина із двома додатковими незалежними опорами

На основі (4.1) можна записати наступні вирази для точок контакту з демпфером (x_D, y_D) і лінійно-пружною додатковою опорою (x_C, y_C):

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int\limits_0^t K_{PC}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau - \int\limits_0^t K_{CC}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau - \int\limits_0^t K_{DC}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int\limits_0^t K_{PD}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau - \int\limits_0^t K_{CD}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau - \int\limits_0^t K_{DD}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau, \end{cases} \tag{4.47}$$

де $P(t)$ – зовнішнє нестаціонарне збурювальне навантаження, $K_{ij}(t)$ – ядра, записані для конкретного i*-го* навантаження в j*-й* точці, $R_D(t)$ і $R_C(t)$ – відповідні реакції в точках контакту з демпфером і лінійно–пружною опорою.

Зазначимо, що реакції $R_C(t)$ і $R_D(t)$, що діють з боку додаткових опор на пластину, вважалися умовно від'ємними (узяті у виразах (4.47) зі знаком мінус), дії з боку пластини на демпфер і «пружину» вважалися рівними за величиною, але умовно додатними (для зручності запису).

У випадку, коли $P(t)$ відома, систему інтегральних рівнянь (4.47) щодо невідомих сил $R_C(t)$ і $R_D(t)$ можна доповнити виразами в точках контакту (3.20) і (4.7). Виключимо з рівнянь прогини та перенесемо відомі члени в праву частину рівнянь:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t K_{CC}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \dfrac{R_C(t)}{c} + \int\limits_0^t K_{DC}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau = \int\limits_0^t K_{PC}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau; \\ \int\limits_0^t K_{CD}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \int\limits_0^t K_{DD}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \dfrac{R_D(\tau)}{\kappa}d\tau = \int\limits_0^t K_{PD}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau, \end{cases} \tag{4.48}$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (4.48) була виконана дискретизація методом часткового інтегрування ядер. Тобто на малих дискретних ділянках часу ($\Delta t = T / J$, де T – досліджуваний проміжок, а J – число кроків дискретизації) сила $P(t) = P(j\cdot\Delta t) = P_j$, а також реакції $R_C(j\cdot\Delta t)$ і $R_D(j\cdot\Delta t)$ вважалися постійними. У результаті отримана наступна система матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC}\cdot\mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DC}\cdot\mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PC}\cdot\mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{CD}\cdot\mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD}\cdot\mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PD}\cdot\mathbf{P}, \end{cases} \tag{4.49}$$

де матриці $\mathbf{A}_{PC}$ і $\mathbf{A}_{PD}$ відповідають частково проінтегрованим ядрам $K_{PC}(t-\tau)$ і $K_{PD}(t-\tau)$, елементи яких можуть бути знайдені у вигляді $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, як значення проінтегрованого ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int\limits_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau)d\tau. \tag{4.50}$$

Матриці $\mathbf{A}_{DC}$, $\mathbf{A}_{CD}$ і $\mathbf{A}^*_{CC}$ відповідають частково проінтегрованим ядрам $K_{DC}(t-\tau)$, $K_{CD}(t-\tau)$ і $K_{CC}(t-\tau)$.

Матриця $\mathbf{A}_{CC}$ еквівалентна виразу: $\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}^*_{CC} + \frac{1}{c}\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Добуток $\mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D$ відповідає інтегралу:

$$\int\limits_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] \cdot R_D(\tau)d\tau. \tag{4.51}$$

Система (4.49) розв’язується з використанням УАК для блокових матриць і РА Тихонова. У результаті розв'язання (4.49) визначаються $\mathbf{R}_C$ і $\mathbf{R}_D$, які є дискретними аналогами невідомих незалежних реакцій $R_C(t)$ і $R_D(t)$.

Можливо кілька варіантів постановки оберненої нестаціонарної задачі. Розглянемо основні варіанти.

Точки прикладення навантаження і установки додаткових опор відомі, а також відомі коефіцієнт жорсткості та коефіцієнт демпфірування, потрібно визначити зовнішню збурювальну силу $P(t)$, та, як наслідок, реакції $R_C(t)$ і $R_D(t)$ (які також невідомі). Для ідентифікації потрібно знати (виміряти) зміну прогину $w(x_S, y_S, t)$ або деформації (наприклад, $\varepsilon_x(x_S, y_S, t)$) в одній довільній точці пластини.

Зовнішня збурювальна сила $P(t)$ відома, потрібно визначити невідомі параметри додаткової в’язкопружної опори. Для ідентифікації потрібно знати (виміряти) зміну прогину або деформації у двох довільних точках пластини.

Невідомими є як зовнішня збурювальна сила $P(t)$, так і параметри додаткової в'язкопружної опори (коефіцієнт жорсткості та коефіцієнт демпфірування). Для ідентифікації потрібно знати (виміряти) зміну прогину або деформації мінімум у трьох довільних точках пластини.

Розглянемо розв'язання оберненої задачі в першій постановці.

Припустимо, що нам відома зміна в часі прогину в деякій точці пластини, а саме, $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, тоді на основі (4.1), для точки S можна записати:

$$w(x_S, y_S, t) = \int_0^t K_{PS}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{CS}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \int_0^t K_{DS}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau \cdot \quad (4.52)$$

Причому у виразі (4.52) члени, що містять значення $R_C(t)$ і $R_D(t)$, записані зі знаком плюс, оскільки при розв'язанні оберненої задачі реакції $R_C(t)$ і $R_D(t)$ розглядаються як додаткові зовнішні незалежні сили, які можуть приймати позитивні або негативні значення.

У матричній формі вираз (4.52) запишеться так:

$$\mathbf{A}_{PS}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{A}_{CS}\cdot\mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DS}\cdot\mathbf{R}_D = \mathbf{w}_S. \quad (4.53)$$

де вектор $\mathbf{w}_S$ відповідає дискретним значенням функції $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ (що саме має місце при реальних вимірах), інші позначення аналогічні використаними в (4.49). По суті, вираз (4.53) є матричним рівнянням з трьома невідомими векторами $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_C$ і $\mathbf{R}_D$. Для його розв'язання необхідно записати ще два додаткових матричних рівняння, які можуть бути отримані з (4.49) шляхом переносу всіх невідомих у ліву частину та зміни знаків перед членами, які мають $\mathbf{R}_C$ і $\mathbf{R}_D$, на позитивні.

Для зручності запису та розв'язання системи трьох матричних рівнянь доцільно перепозначити шукані вектори навантажень $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_C$ і $\mathbf{R}_D$ на $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ і $\mathbf{p}_3$, відповідно, тоді матриці $\mathbf{A}_{ji}$ будуть замість буквених індексів мати стандартні числові позначення, а саме – рядок буде відповідати точці пластини, а стовпець – навантаженню:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.54)$$

Система (4.54) розв’язується аналогічно системі (4.49). У результаті розв'язання (4.54) визначаються $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ і $\mathbf{p}_3$, тобто дискретні аналоги невідомих сил $P(t)$, $R_C(t)$ і $R_D(t)$. Для зручності дослідження додатні напрямки сил збігаються з додатними напрямками прогинів, а від'ємні значення відповідають протилежному напрямку.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана з площиною xOy декартової системи координат. Розрахунки виконувалися при наступних значеннях параметрів: $\rho = 7890$ кг/м^3; $\nu = 0 .3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $h = 0.04$ м; $l = 0.6$ м, $m = 0.4$ м. Координати точки прикладення збурювального навантаження мають значення: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.2$ м. Координати точки кріплення додаткової в’язкопружної опори до пластини: $x_{\mathrm{CD}} = 0.2$ м, $y_{\mathrm{CD}} = 0.2$ м. Значення коефіцієнта жорсткості додаткової опори $c = 10^8$ Н/м, а коефіцієнт лінійно-в'язкого демпфірування $\kappa = 4 \cdot 10^4$ Н/(м/с); число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є 50×50.

При розв'язанні прямої задачі розглядалося два випадки. Оскільки точки контакту пластини з «в'язкою» і «пружною» додатковими опорами в загальній постановці є незалежними, то в першому випадку вважалося, що вони збігаються (окремий випадок $x_C = x_D = x_{CD} = 0.2$ м, $y_C = y_D = y_{CD} = 0.2$ м), а в другому випадку вважалося, що вони розташовувалися на деякій відстані, коли їх сумарний вплив ще подібний впливу однієї в’язкопружної опори ($x_C = 0.15$ м, $y_C = 0.15$ м и $x_D = 0.25$ м, $y_D = 0.25$ м).

На рис. 4.53 і рис. 4.54 показано результати обчислень для першого випадку.

Визначені в результаті розв'язання системи рівнянь (4.49) складові реакції між пластиною та додатковою в’язкопружною опорою наведені на рис. 4.53: 1-я крива відповідає сумарній реакції в’язкопружної опори $R_{CD}(t) = R_C(t) + R_D(t)$;

2-я крива – пружна складова в’язкопружної опори $R_C(t)$; 3-я крива – в'язка складова $R_D(t)$.

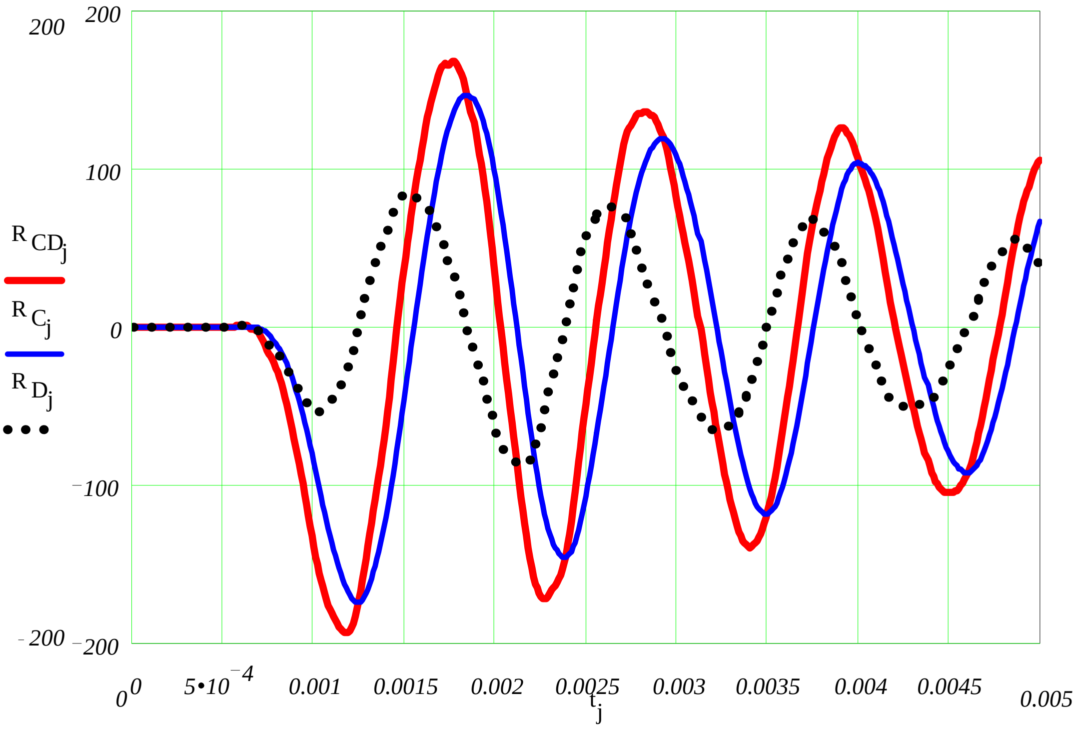


Рисунок 4.53 – Складові реакції в’язкопружної опори

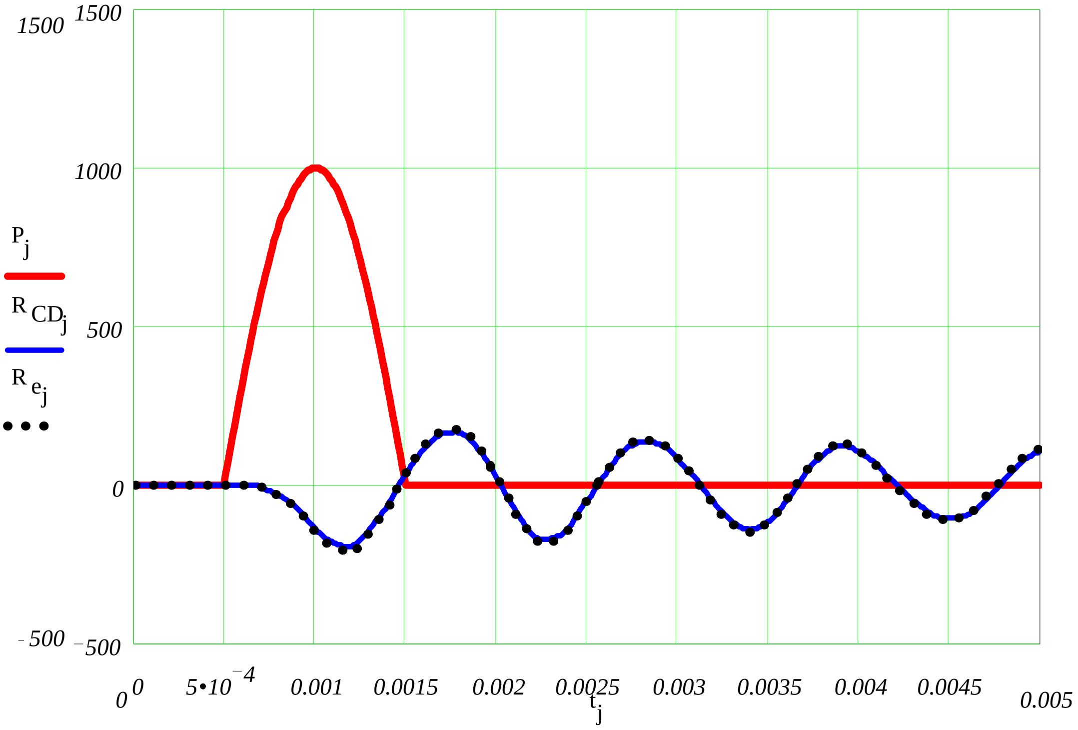


Рисунок 4.54 – Реакції в’язкопружної опори, знайдені двома різними методами

На рис. 4.54 показано зміну в часі збурювального навантаження $P(t)$ (півхвиля синусоїди) і дві криві, які відповідають реакції в’язкопружної опори $R_e(t)$ і $R_{CD}(t)$. Вкажемо, що $R_{CD}(t)$, тобто сумарна реакція, показана суцільною лінією, а $R_e(t)=R(t)$ – це реакція саме в’язкопружної опори (4.8), визначення якої описано раніше, на рис. 4.54 відкладена крапками, причому видно, що ці дві криві повністю збігаються. Збіг кривих доводить правильність розв'язання та можливість використання кожного із двох методів для визначення реакції в’язкопружної опори.

На рис. 4.55 і рис. 4.56 показано результати обчислень для другого випадку. Тут точки опори вибиралися на невеликій відстані – точка контакту в’язкопружної опори покладалася в центрі невеликого кола з радіусом $5\sqrt{2}$ см (приблизно 1/10 величини пластини), а точки контакту «в'язкої» та «пружної» опор розташовувалися на кінцях діаметра цього кола. Розглядався випадок, коли дві додаткові фіктивні опори моделюють одну в’язкопружну, і їхня сумарна дія ще подібна, але вже помітна відмінність сумарної реакції від реакції в’язкопружної опори. Криві рис. 4.55 і рис. 4.56, в основному аналогічні, описаним вище для рис. 4.53 і рис. 4.54. Вкажемо лише на деякі відмінності:

– на рис. 4.55 наведено на одну криву більше, оскільки додатково показана реакція в’язкопружної опори $R_e(t)$ (яка вже не збігається з $R_{CD}(t)$);

– на рис. 4.56 реакція однієї додаткової в’язкопружної опори та сумарна реакція (спільна дія в’язкої і пружної опор) не збігаються, причому максимальні значення реакції в’язкопружної опори приблизно на третину вище, ніж величини сумарної реакції.

Таке збільшення пояснюється, напевно, тим, що подвійна опора виконує дію, яка дещо згладжує та усереднює (причому, як з математичної, так і з механічної точок зору).

Обчислення при розв'язанні оберненої задачі виконувалися тільки для першого випадку, тобто розв'язувалася задача ідентифікації невідомого нестаціонарного навантаження, що діє на пластину, і розподілу невідомих в'язкої і пружної складових додаткової в'язкопружної опори, приєднаної до шарнірно-обпертої пластини в деякій її точці.

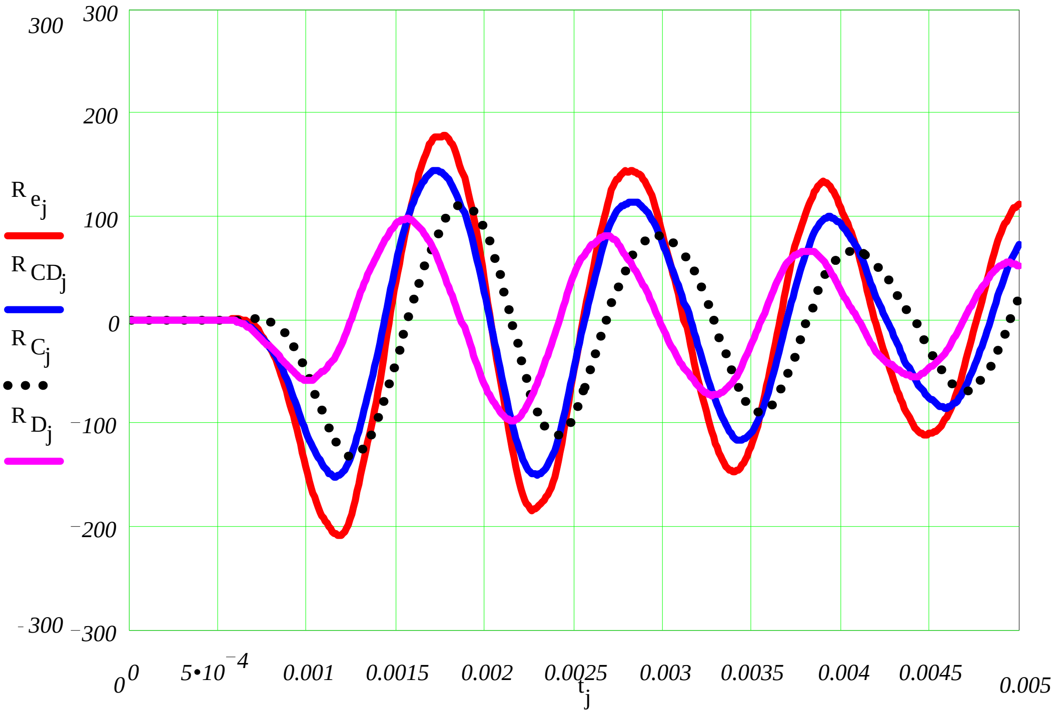


Рисунок 4.55 – Складові реакції додаткових в'язкої і пружної опор

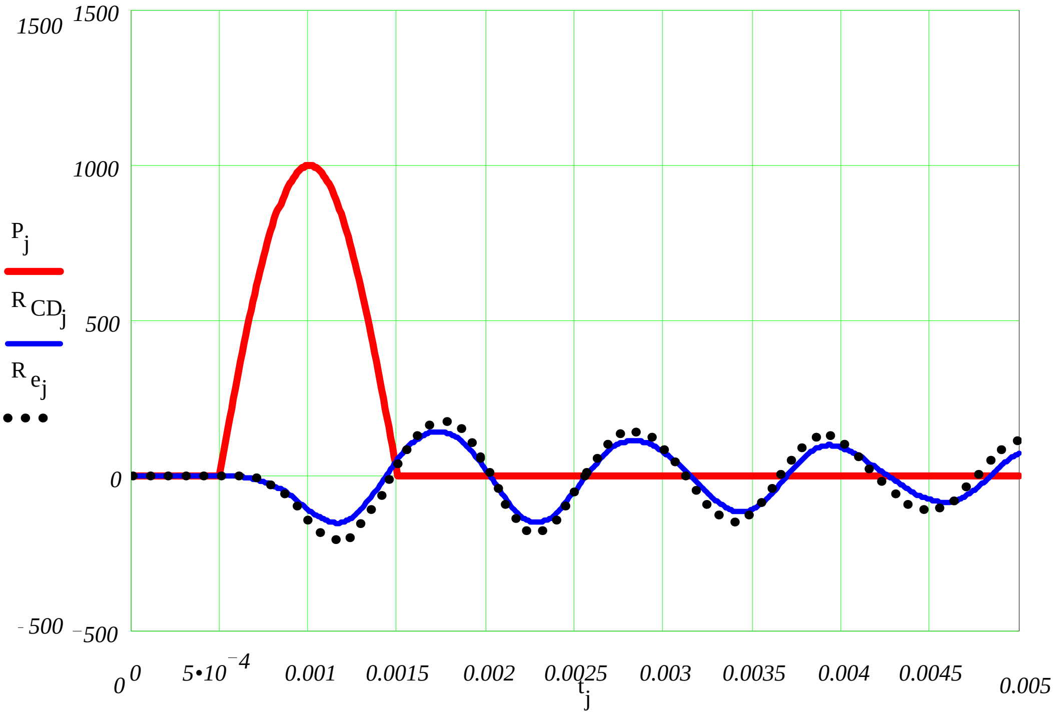


Рисунок 4.56 – Реакції в’язкопружної опори, знайдені двома різними способами

На рис. 4.57 показано вихідні дані для розв'язання задачі ідентифікації: зміни прогину в деякій точці пластини (отримані при розв'язанні прямої задачі) – гладка крива, а також «зашумлені» значення прогину. Вкажемо, що для моделювання випадкових похибок, що виникають при експериментальному вимірі прогинів або деформацій у точках пластини, приймався нормальний розподіл шуму з середньоквадратичним відхиленням, рівним 10%.

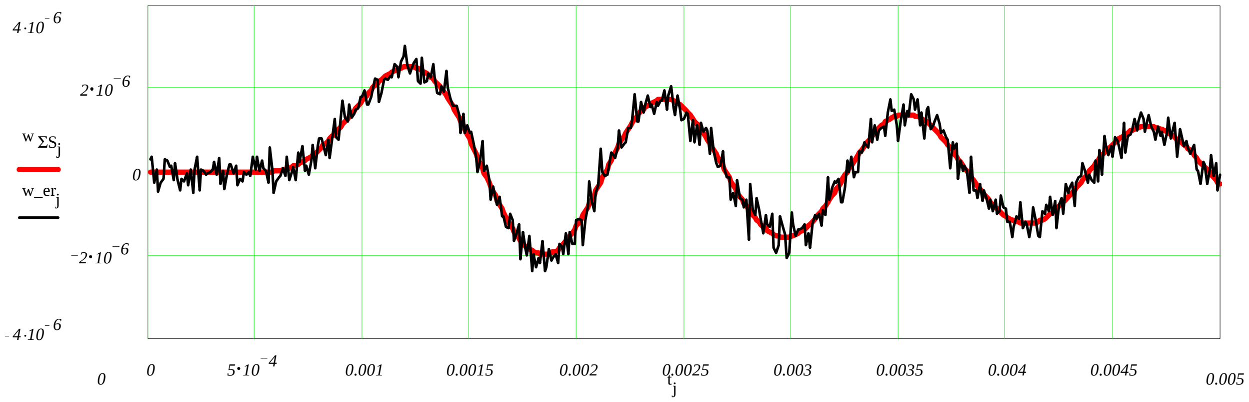


Рисунок 4.57 – Вихідні дані для ідентифікації (розрахунок для першого випадку)

На рис. 4.58 і рис. 4.59 суцільними лініями показані збурювальне навантаження і складові в’язкопружної опори, отримані при розв'язанні прямої задачі, а крапками представлені ідентифіковані значення сил $P(t)$, $R_C(t)$ і $R_D(t)$, які знайдені у результаті чисельно-аналітичного розв'язання матричної системи (4.54).

Рис. 4.58 відповідає ідентифікації зміни в часі нестаціонарних навантажень за «незашумленими» вихідними даними, а рис. 4.59 – за «зашумленими».

Графіки на рис. 4.58 демонструють практично повну відповідність ідентифікованих навантажень аналогічним величинам із прямої задачі. Виключення становить проміжок у самому кінці досліджуваного інтервалу часу, де спостерігаються невеликі відхилення, викликані, можливо, нагромадженням похибок обчислень при чисельно-аналітичному розв'язанні системи (4.54). На рис. 4.59 можна спостерігати, що задовільні результати при розв'язанні задачі ідентифікації можуть бути отримані навіть при значному «зашумленні» вихідних даних, і описана методика може успішно застосовуватися при обробці експериментальних даних для непрямого виміру нестаціонарних збурювальних навантажень і реакцій «в'язких» та «пружних» опор.

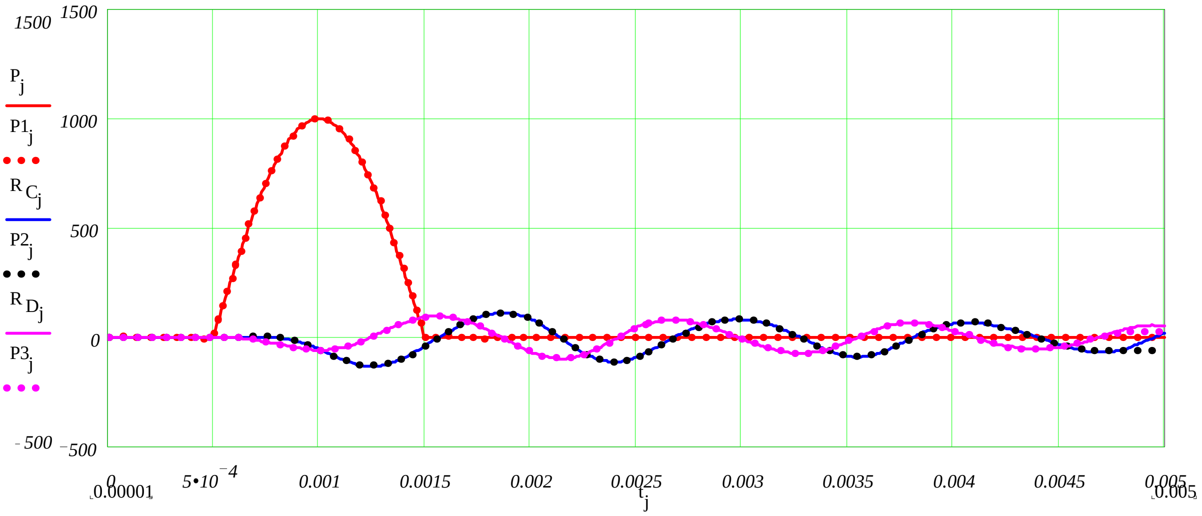


Рисунок 4.58 – Ідентифіковані сили за «незашумленими» вихідними даними (зовнішня сила та дві складові реакції)

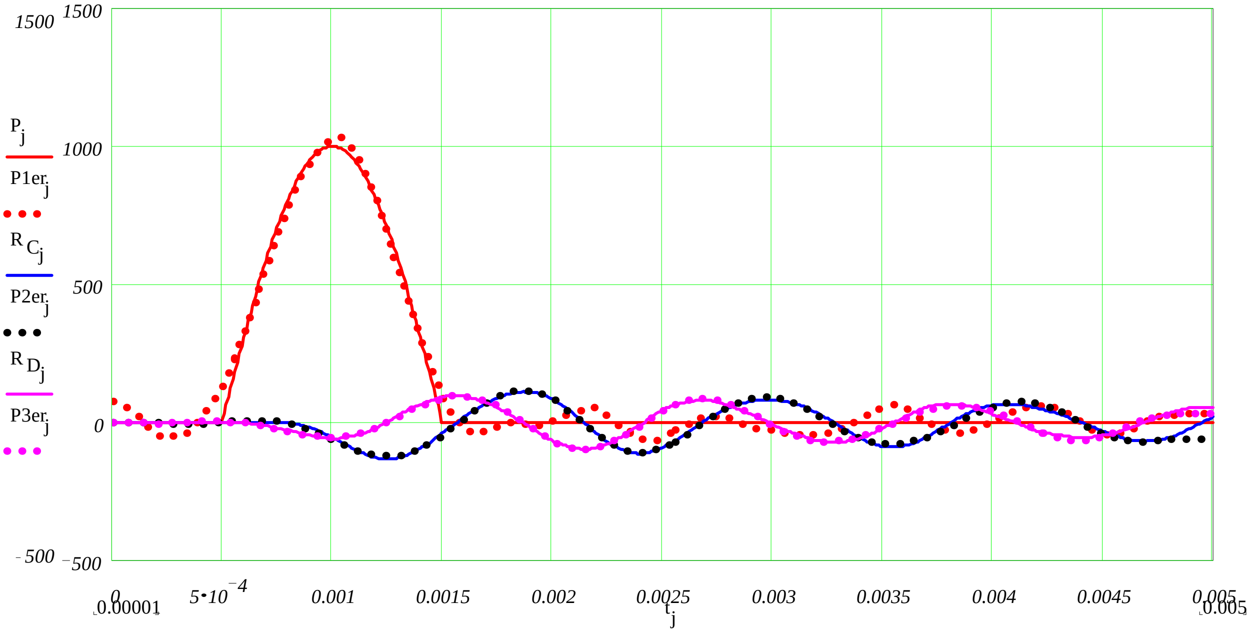


Рисунок 4.59 – Ідентифіковані сили за «зашумленими» вихідними даними (зовнішня сила та дві складові реакції)

На підставі представленого у підрозділі матеріалу можна зробити наступні висновки:

Описано ефективний підхід, при якому вплив додаткової в’язкопружної опори на пластину моделюється у вигляді двох невідомих незалежних нестаціонарних сил – в'язкої і пружної складової реакції між пластиною та додатковою опорою. Невідомі нестаціонарні навантаження визначаються з розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра.

Описано методику розв'язання прямої та оберненої задач з ідентифікації невідомого навантаження, що викликає нестаціонарне деформування пластини з додатковою в’язкопружною опорою. Ця методика дозволяє одержувати стійкі розв'язки.

4.9. Висновок по розділу

Описаний підхід, дозволяє досліджувати нестаціонарне деформування пластинчастих елементів конструкцій при наявності зосереджених мас, додаткових опор і ребер жорсткості, вплив яких замінюється невідомими силами (реакціями). Ідентифікація невідомих реакцій виконується на основі розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра або їх систем.

На основі запропонованого підходу є можливість одержувати стійкі аналітико-числові розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла без використання ітераційних схем.

Основні наукові результати, наведені в четвертому розділі,опубліковано у працях автора [1, 2, 4, 7, 9, 18, 22– 24, 26, 27, 39 – 46, 48, 50].

РОЗДІЛ 5

УПРАВЛІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМИ КОЛИВАННЯМИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ, У СКЛАД ЯКИХ ВХОДЯТЬ ПЛАСТИНИ

5.1. Вступ

В цей час активно розвиваються дослідження з управління напружено-деформованим станом елементів конструкцій. Одним з основних факторів, що сприяють розвитку цієї тематики, є створення сучасних компактних та ефективних пристроїв для управління коливаннями, наприклад, п’єзодатчик/п’єзопривод (piezosensor/actuator); магнітореологічні (MR) датчики; шари в'язкопружного матеріалу, поміщені між магнітними (електромагнітними) шарами; елементи конструкцій в цілому, створені з так званих удосконалених матеріалів (smart materials), функціонально впорядкованих матеріалів (ФВМ або FGM) та ін. Вкажемо деякі опубліковані роботи цього напрямку: [250, 254] це роботи з управління коливаннями механічних об'єктів, виконаних із спеціальних матеріалів. У статтях [237, 239, 275] описано управління коливаннями за допомогою спеціальних пристроїв п’єзодатчик/п’єзопривод (piezosensor/actuator), виготовлених у вигляді накладок, розпірок та ін., що вводять у механічні системи.

Найчастіше задачі управління параметрами напружено-деформованого стану або нестаціонарними коливаннями присвячені «гасінню» коливань. Існує кілька підходів до реалізації активного та пасивного віброзахисту.

Гасіння коливань (особливо нестаціонарних) є важливим напрямком задач віброзахисту елементів конструкцій. Актуальність зазначених задач у цей час безсумнівна. При необхідності гасіння коливань вже створених елементів конструкцій використають різні керовані та некеровані пристрої – погашувачі коливань (vibration absorbers). Найбільш відомими та розповсюдженими пристроями є амортизатори, які широко поширені у всіх галузях машинобудування, зокрема, в автомобілебудуванні.

Одним з найбільш простих і розповсюджених методів гасіння коливань є використання амортизаторів. Застосування амортизаторів або інших видів погашувачів може відноситися як до систем пасивного віброзахисту, так і активного, залежно від того чи є можливість управління цими пристроями.

Звернемо увагу на деякі роботи, пов'язані з пластинчастими елементами конструкцій. У роботі [290] розглянуто активний погашувач коливань для пластинки, що вигинається. Погашувач контактує з пластиною вздовж її краю, однак сама пластина представлена, по суті, у вигляді коливної маси. У роботі [273] розглядаються вимушені коливання тонкої пластини з «дискретним динамічним погашувачем», причому зазначимо, що використовується метод скінчених елементів.

Гасіння коливань можна розглядати як окремий випадок управління коливаннями, коли метою управління є мінімізація амплітуд переміщень/деформацій або їх повне усунення. У теорії автоматичного управління (ТАУ) часто розглядаються задачі подібного роду. Відомі основні схеми автоматичного управління/регулювання (САУ або САР): замкнута САУ (управління з оберненим зв'язком) і розімкнута САУ.

Замкнуті САУ мають ряд переваг і докладно розглянуті в ТАУ. Такі схеми активно використовуються сьогодні і є основою для створення сучасних систем управління в реальному часі. Однак при управлінні високошвидкісними процесами (наприклад, нестаціонарними коливаннями) побудова замкнутих САУ є серйозною задачею, що вимагає також наявності складного та дорогого устаткування при побудові оберненого зв'язку. У випадку управління нестаціонарним деформуванням, викликаним імпульсними (ударними) навантаженнями, характер зміни в часі, яких є повторюваний і може бути окремо вивчений на ґрунті розв'язання задач ідентифікації, можлива побудова більш дешевих розімкнутих САУ.

Для розв'язання подібних задач доцільно використовувати наступний підхід – управління коливаннями здійснюється за допомогою введення в механічну систему додаткових керуючих навантажень. Тоді задача управління зводиться до ідентифікації цих невідомих навантажень, які визначаються з розв'язання відповідних обернених нестаціонарних задач. Вибір конкретної системи управління та механізмів реалізації знайдених керуючих сил здійснюється вже на стадії практичних або експериментальних досліджень.

В даному розділі розглядається можливість управління нестаціонарними коливаннями механічних систем, в склад до яких входять прямокутні пластини при імпульсному поперечному навантаженні. Шукане розв'язання початково-крайової задачі комбінується з розв'язання, що відповідає дії на пластини заданої системи збурювальних навантажень і розв'язку, що відповідає впливу на пластину додаткової (керуючої) системи навантажень. На фінішному етапі побудови розв'язання використовується згладжувальний функціонал А. М. Тихонова.

5.2. Управління нестаціонарними коливаннями механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси

Механічна система складається з прямокутної пружної ізотропної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої вздовж її контуру та зосередженої маси, що приєднана до її верхньої лицьової поверхні (рис. 5.1). Передбачається, що зміна переміщення в часі зосередженої маси повністю збігається зі зміною прогину пластини в точці, де перебуває маса, тобто $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

На пластину в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестаціонарні коливання пластини та маси. Потрібно керувати нестаціонарними коливаннями в точці пластини $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$, так щоб задовольнити необхідному критерієві (заздалегідь сформульованому). Як критерій управління може бути обране зменшення амплітуд прогину, тобто зміна прогину пластини у часі в точці управління прямує до нуля $w_S(t) \to 0$ (гасіння коливань) або ж коливання в точці управління повинні відповідати деякому необхідному закону зміни в часі $w_S(t) = w_C(t)$ (наприклад, мати вигляд синусоїди).

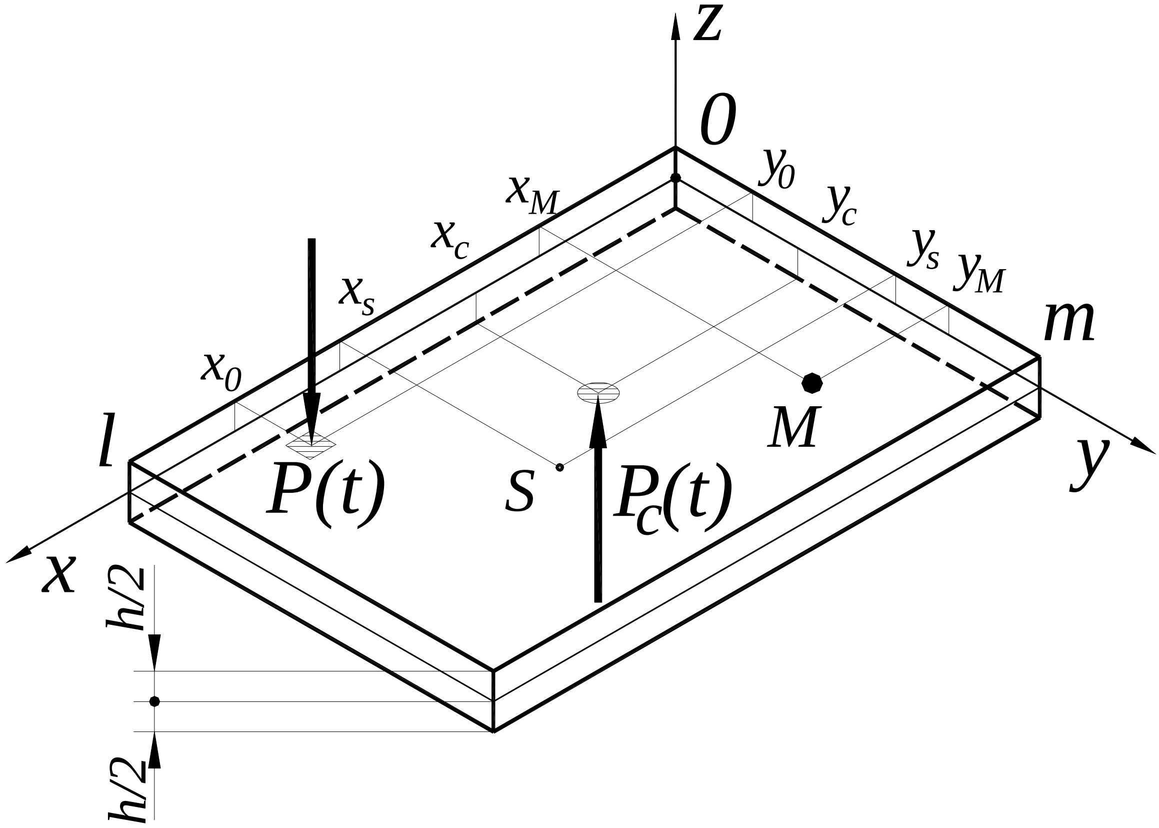


Рисунок 5.1 – Схема управління нестаціонарними коливаннями маси

Зазначимо, що задача розв'язується в загальній постановці, коли точки управління (x_S, y_S) та приєднання зосередженої маси (x_M, y_M) не збігаються, однак отримане розв’язання буде справедливо і для окремого випадку, коли точка управління збігається із точкою приєднання зосередженої маси $(x_M = s_S, y_M = y_S)$.

Управління здійснюється за допомогою прикладення до пластини додаткового (керуючого) навантаження $P_C(t)$. Задача управління полягає в ідентифікації закону зміни в часі цього навантаження $P_C(t)$. Таким чином, для визначення закону зміни в часі керуючого впливу потрібно розв’язати обернену нестаціонарну задачу для механічної системи, що складається з пластини та маси.

При розв’язанні задачі передбачалося, що координати точок прикладення навантажень (збурювальних та керуючих), і координати приєднання зосередженої маси довільні (будь-які точки, що належать пластині та не лежать на її краю). Також вважалася відомою величина зосередженої маси.

В рамках теорії пластин С. П. Тимошенка представимо наступну систему диференціальних рівнянь [84], яка з урахуванням відповідних початкових і крайових умов визначає розв’язання, що описує нестаціонарні деформаційні процеси в пластині з приєднаною зосередженою масою *M*:

$$\begin{cases} \begin{cases} G'h(\nabla^2 w+\psi_{xy})=\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-P(x,y,t)+P_c(x,y,t)+R(x,y,t); \\ D\nabla^2\psi_{xy}-G'h(\psi_{xy}+\nabla^2 w)=\rho\cdot I\dfrac{\partial^2\psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi_{xy}+(1+\nu)\nabla_1^2\psi_{xy}\right]-G'h(\varphi_{xy}+\nabla_1^2 w)=\rho\cdot I\dfrac{\partial^2\varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases} \\ M\dfrac{d^2 w(x_M,y_M,t)}{dt^2}=R(x_M,y_M,t). \end{cases} \qquad (5.1)$$

Вкажемо, що:

$P(x,y,t)$ – збурювальне навантаження, яке може бути зосередженим або рівномірно розподіленим;

$P_c(x,y,t)$ – керуючий вплив на пластину (зосереджене або розподілене навантаження);

$R(x,y,t)=\delta(x-x_M)\cdot\delta(y-y_M)\cdot R(x_M,y_M,t)$ – реакція пластини на вплив зосередженої маси *M*.

Опис розв’язання подібних систем і підсумкових співвідношень наведено раніше.

Для знаходження переміщення зосередженої маси $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$, можна записати два інтегральних співвідношення, розглядаючи окремо динаміку точки пластини та зосередженої маси:

$$\begin{cases} w_M(t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t P_c(\tau) K_{Pc}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_M(t) = \int\limits_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau. \end{cases} \tag{5.2}$$

Після підстановки $w_M(t)$ з другого рівняння в перше система (5.2) може бути перетворена до наступного інтегрального рівняння

$$\int\limits_0^t R(\tau) \left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int\limits_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t P_c(\tau) K_{Pc}(t-\tau) d\tau. \tag{5.3}$$

Інтегральне рівняння (5.3) після дискретизації можна представити в матричному вигляді:

$$\mathbf{A_{RM}R} = \mathbf{A_{PM}P} - \mathbf{A_{PcM}P_c}, \tag{5.4}$$

де вектор $\mathbf{P}$ – відповідає відомій функції $P(t)$; $\mathbf{P_c}$ – $P_c(t)$; $\mathbf{R}$ – невідомий вектор, що відповідає $R(t)$; матриці $\mathbf{A}_{\mathbf{R}M}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{P}M}$ і $\mathbf{A}_{\mathbf{Pc}M}$ відповідають ядрам рівняння (5.3).

Матричне рівняння (5.4) справедливо у випадку, коли керуючий вплив $P_c(t)$ відомий. Однак при розв’язанні задач управління метою є визначення керуючого впливу. Тобто в рівняння (5.4) входить дві невідомих функції $P_c(t)$ і $R(t)$. Для їх визначення необхідно в рівнянні (5.4) перенести невідомий член у ліву частину рівняння та доповнити його виразом для критерію управління, у яке також увійдуть дві шукані функції $P_c(t)$ і $R(t)$. В такий спосіб виходить система двох інтегральних рівнянь Вольтерра, записана для двох точок пластини – точці, у якій розташована приєднана зосереджена маса $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$, і точці, у якій здійснюється управління згідно необхідного критерію $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$. У матричному виді можна записати:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P_c} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{PM}P} \\ \mathbf{w_C} - \mathbf{A_{PS}P} \end{bmatrix}, \qquad (5.5)$$

де матриці, які відповідають ядрам, що входять в інтеграли шуканих функцій, позначені $\mathbf{A}_{ij}$, так що індекс $j=1$ відповідає $P_c(t)$; $j=2$ – $R(t)$; $i=1$ – точці (x_M, y_M); $i=2$ – (x_S, y_S); вектор $\mathbf{w_C}$ – відповідає необхідному критерію управління $w_C(t)$. Причому для випадку гасіння коливань можна прийняти $w_C(t) = -w_S(t)$, тоді $w_C(t) + w_S(t) = 0$.

У результаті чисельно-аналітичного розв’язання (5.5) визначаються шукані залежності $R(t)$ і $P_c(t)$. Розв’язання зазначеної системи рівнянь в силу некоректності здійснюється з використанням РА Тихонова.

Істотний вплив на «якість» управління має параметр регуляризації α, який міститься в РА Тихонова. В задачах управління цей параметр визначається на основі мінімізації за α функціонала «якості», що відповідає наближенню отриманих значень прогину до необхідних значень критерію:

$$M^{\alpha}[P_c] = \left\| w_C - A_p P + A_R R^{\alpha} + A_{Pc} P_c^{\alpha} \right\| \qquad (5.6)$$

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана з площиною xOy декартової системи координат. Вважалося, що збурювальне навантаження рівномірно розподілено по прямокутній області зі сторонами Δx і Δy відповідно та центром (x_0, y_0), а керуюче навантаження рівномірно розподілене по кругу радіуса r з центром (x_C, y_C). При обчисленнях приймалися наступні значення:

– $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0.3$; $\rho = 7890$ кг/м^3;

– $h = 0.04$ м; $l = 0.6$ м; $m = 0.4$ м;

– число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50.

На рис. 5.2 наведено схему розташування точок при управлінні коливаннями. Передбачається, що треба забезпечити необхідний закон зміни переміщення в точці пластини $w_C(t)$ у вигляді синусоїди.

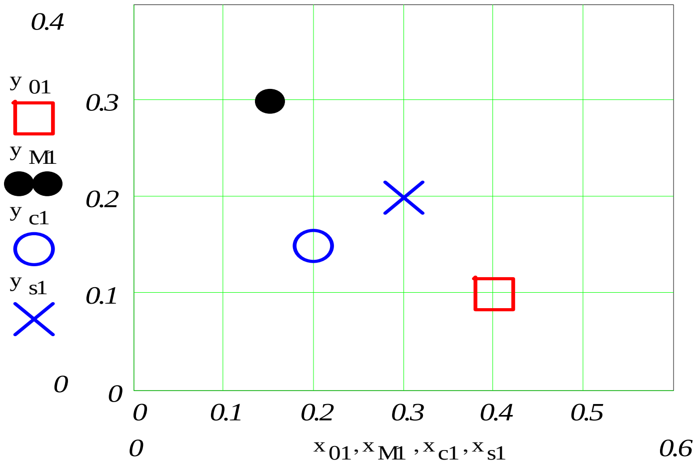


Рисунок 5.2 – Схема навантаження пластини з масою

Координати точок:

– $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.1$ м – прикладення збурювального навантаження;

– $x_C = 0.2$ м, $y_C = 0.15$ м – прикладення керуючого навантаження;

– $x_S = 0.3$ м, $y_S = 0.2$ м – у якій здійснюється управління;

– $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – приєднання зосередженої маси.

На рис. 5.3 показано графіки зміни функціоналів якості (5.6) – крива 1 і сумарного навантаження – крива 2 залежно від параметра регуляризації α. Вкажемо, що значення параметра регуляризації для зручності відкладені на логарифмічній шкалі.

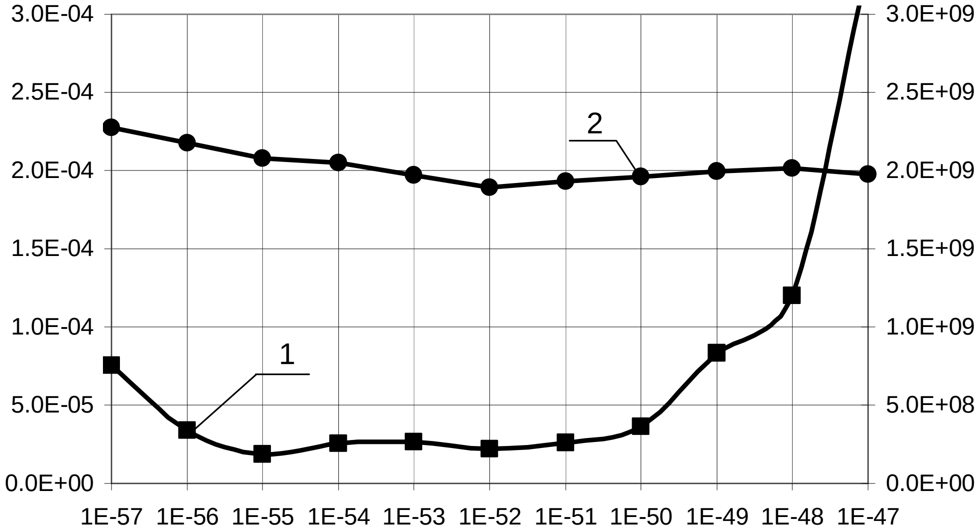
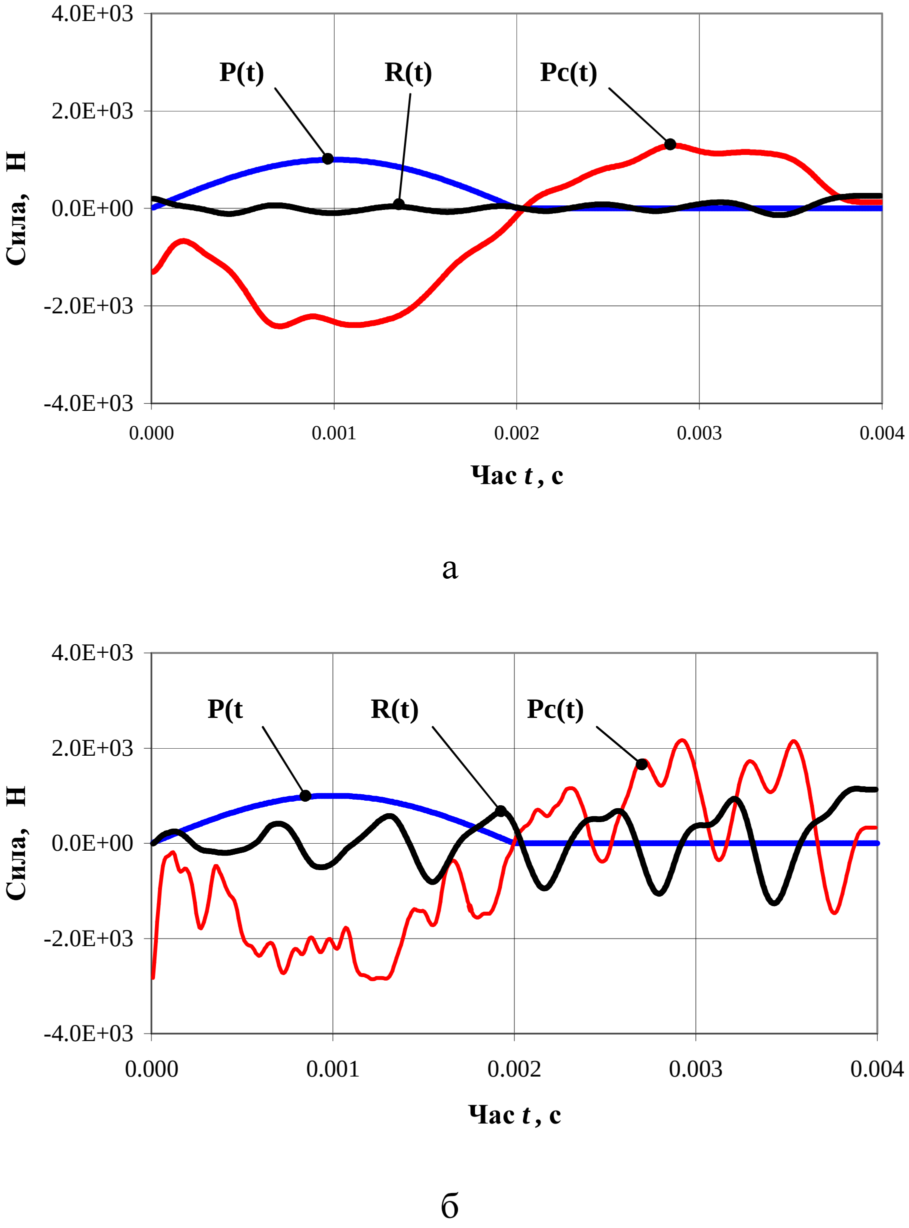


Рисунок 5.3 – До вибору параметра регуляризації

З рис. 5.3 видно, що параметр регуляризації бажано брати менше $\alpha = 10^{-49}$, а найкраща «якість» досягається при $\alpha = 10^{-55}$. Однак можна виділити ще локальний мінімум функціонала (5.6) при $\alpha = 10^{-52}$, що відповідає мінімуму функціонала сумарного навантаження та відповідає меншим значенням керуючого впливу $P_c(t)$. Для ілюстрації впливу параметра регуляризації на закон зміни у часі керуючих навантажень на рис. 5.4 представлено результати розрахунків при значеннях $\alpha = 10^{-52}$ і $\alpha = 10^{-55}$.



а – при $\alpha = 10^{-52}$; *б* – при $\alpha = 10^{-55}$

Рисунок 5.4 – Визначення реакції зосередженої маси і керуючого впливу:

На рис. 5.4 показано зміни $P(t)$, $P_c(t)$, $R(t)$:

– збурювального навантаження $P(t)$, яке змінюється у вигляді півхвилі синусоїди із тривалістю імпульсу $2 \cdot 10^{-3}$ с;

– визначені в результаті розв’язання СІР (5.5) значення керуючого впливу $P_c(t)$ (має амплітуди, що перевищують збурювальне навантаження) і реакції маси $R(t)$ (по величині значно менше $P(t)$ і $P_c(t)$).

Вкажемо, що для зручності аналізу результатів величини збурювальних та керуючих навантажень, а також амплітуди реакції зосередженої маси, наведені в ньютонах (рівномірно розподілені навантаження, вимірювані в паскалях, були помножені на відповідні площі контакту, які припускалися незмінними).

З рис. 5.4 можна зробити висновок, що при значеннях параметра регуляризації $\alpha = 10^{-52}$ амплітуди та пульсація керуючого впливу помітно менше, ніж при $\alpha = 10^{-55}$. Отже при практичній реалізації активного управління коливаннями доцільно при виборі параметра регуляризації враховувати не тільки функціонал якості, але і мінімізувати «сумарний вплив».

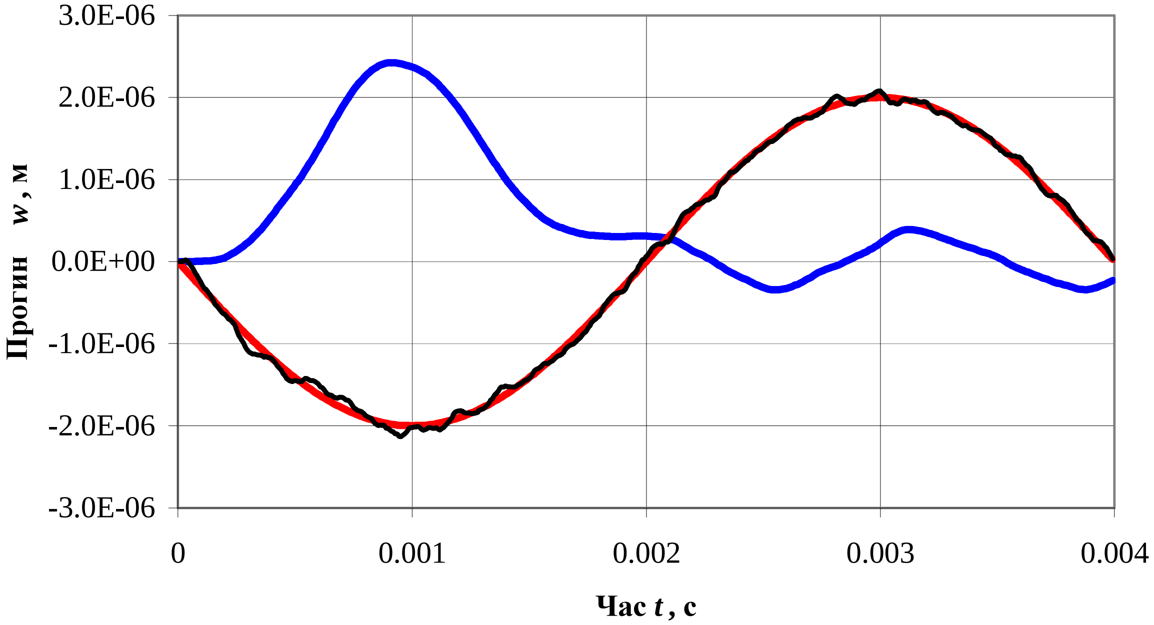
На рис. 5.5 показано три криві зміни переміщення в точці управління:

– необхідне переміщення в точці управління – цільова функція для управління (синусоїдальна зміна);

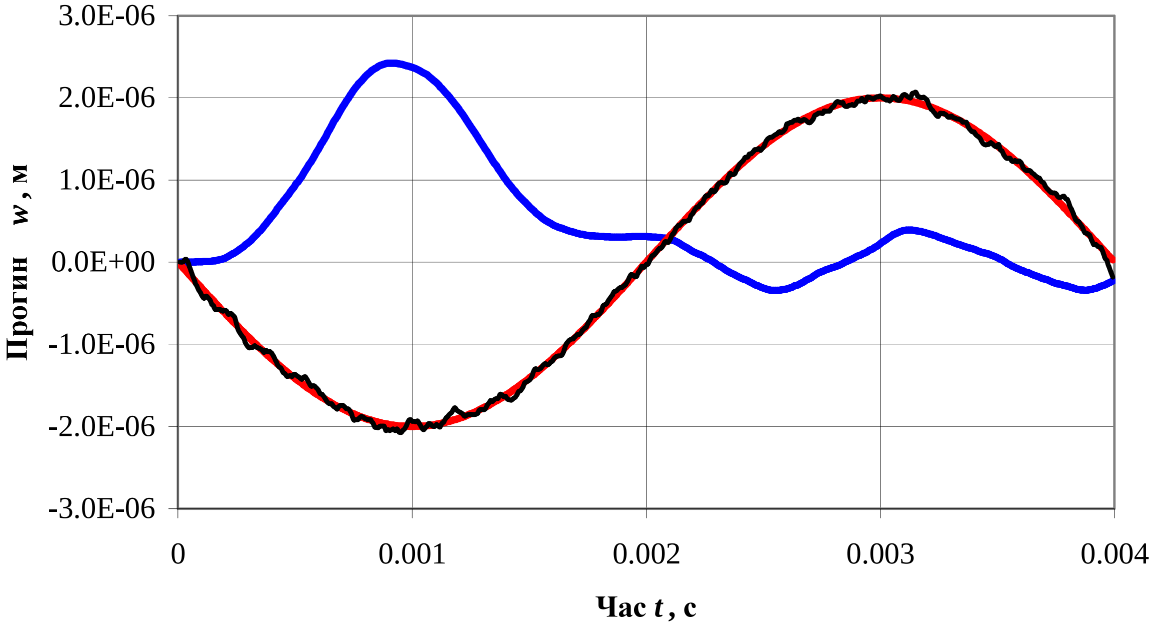
– переміщення в точці управління при дії тільки навантаження, що збурює коливання;

– результат управління при дії збурювального навантаження і керуючого впливу (тонка крива – практично збігається з необхідною кривою, але має незначні відхилення).

Як видно з рис. 5.5 криві необхідного переміщення та отримані в результаті здійснення управління практично повністю збігаються, що свідчить про досягнення бажаних результатів. Так само відзначимо, що результати управління на рис. 5.5, *а* практично не поступаються результатам на рис. 5.5, *б*, хоча вигляд керуючого впливу значно простіший. Отже, можна стверджувати, що при виборі параметра регуляризації необхідно вибирати компромісне розв’язання, що враховує не тільки «якість» управління, але і «сумарний вплив».



а



б

а – при $\alpha = 10^{-52}$; *б* – при $\alpha = 10^{-55}$

Рисунок 5.5 – Результати управління

Далі представлені результати розрахунків аналогічної задачі, за винятком того, що критерієм є гасіння коливань.

Опис рис. 5.6, рис. 5.7 і рис. 5.8 аналогічний опису рис. 5.3, рис. 5.4 і рис. 5.5, відповідно.

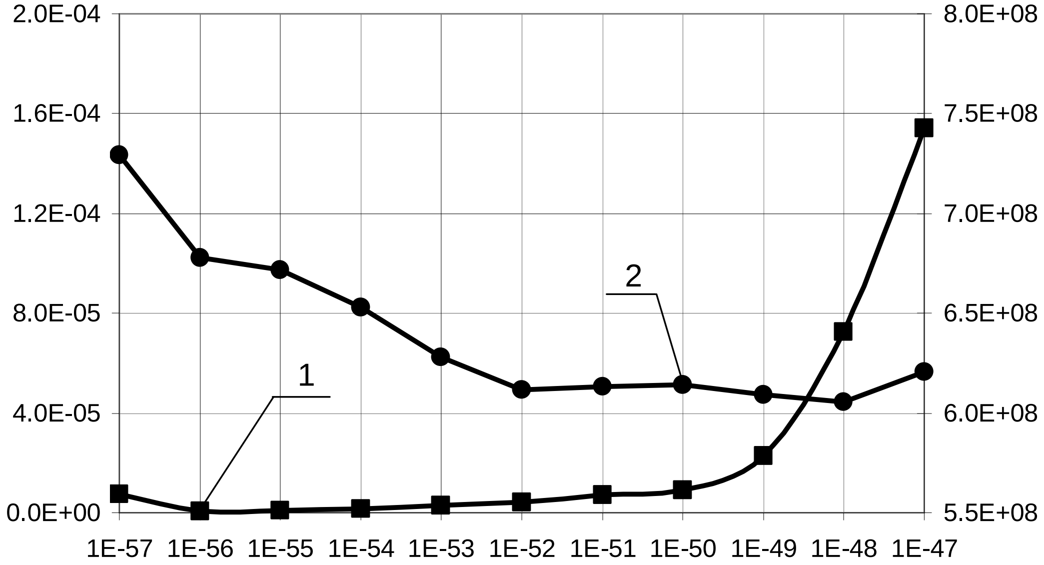


Рисунок 5.6 – До вибору параметра регуляризації

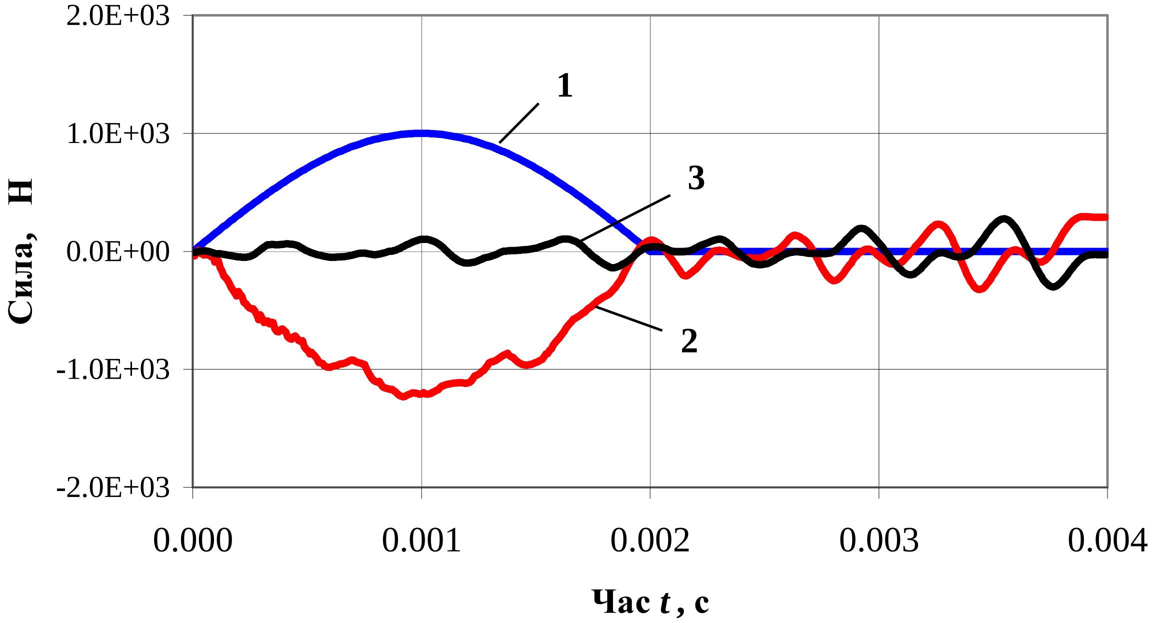


Рисунок 5.7 – Збурювальне навантаження, керуючий вплив та реакція зосередженої маси, які знайдені при $\alpha = 10^{-56}$

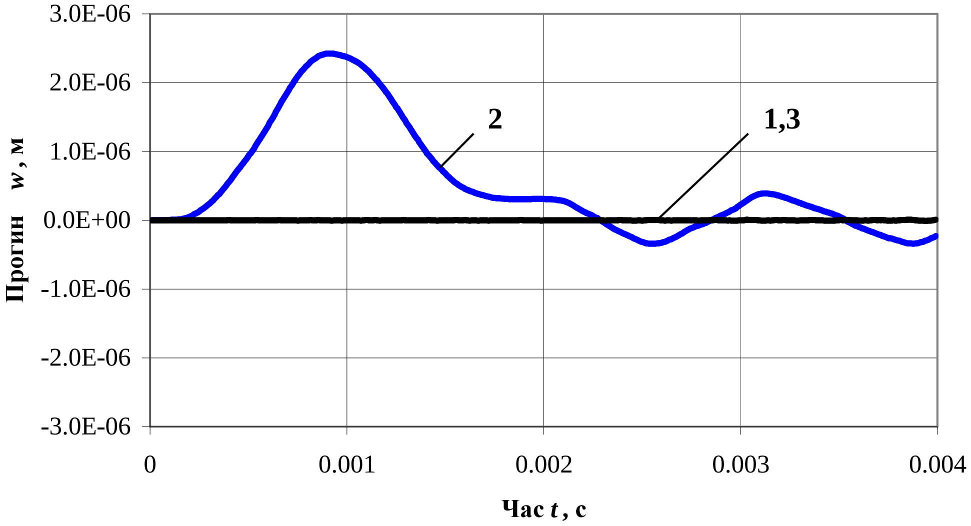


Рисунок 5.8 – Результати управління при $\alpha = 10^{-56}$

Вкажемо, що також досліджувалась можливість розв’язання задачі та розрахунків для окремого випадку, коли точка управління збігається з точкою приєднання зосередженої маси, що при іншій постановці можна розглядати, як можливість управління переміщенням зосередженої маси, яка приєднана до прямокутної шарнірно-обпертої пластині при нестаціонарних коливаннях.

Опис рис. 5.9, рис. 5.10, рис. 5.11 і рис. 5.12 також аналогічний опису рис. 5.2, рис. 5.3, рис. 5.4 і рис. 5.5, відповідно. Відмінність рис. 5.9 від аналогічного рис. 5.2 полягає тільки в координатах точки управління та зосередженої маси: $x_S = x_M$=0.3 м, $y_S = y_M$=0.2 м – центр пластини.

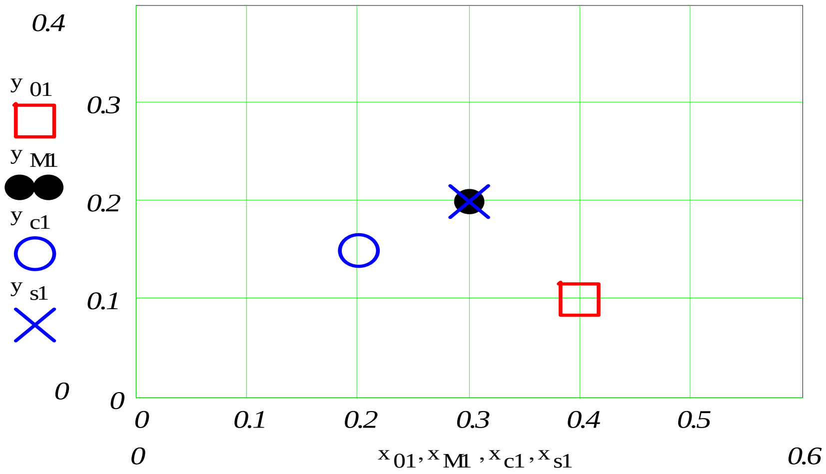


Рисунок 5.9 – Схема управління коливаннями пластини та зосередженої маси

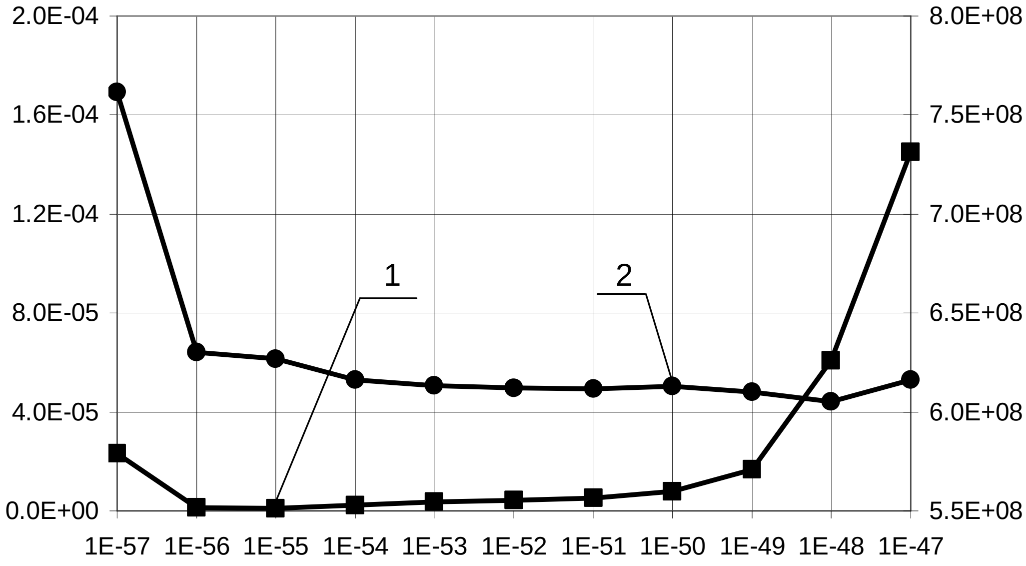


Рисунок 5.10 – До вибору параметра регуляризації

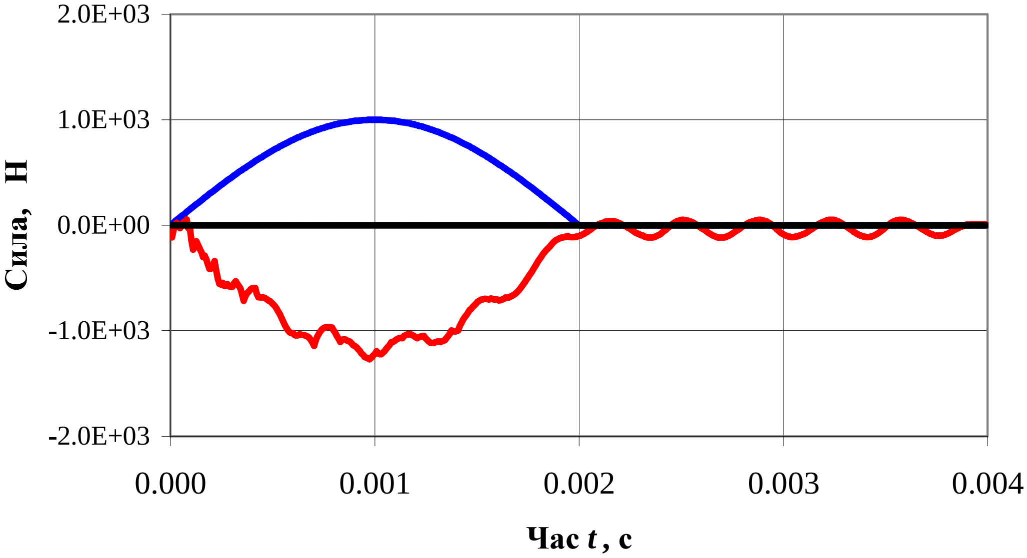


Рисунок 5.11 – Збурювальне навантаження, керуючий вплив та реакція зосередженої маси

Тому що потрібно погасити коливання пластини в точці приєднання зосередженої маси, то реакція між пластиною та масою буде практично дорівнювати нулю (чим краще вдається погасити коливання, тим менше будуть переміщення точки, отже, і реакція взаємодії між пластиною та масою). Це твердження дуже гарно демонструє рис. 5.11, на якому чітко видно, що керуючий вплив схожий на збурювальне навантаження, але має протилежний знак і пульсації хвильового характеру, а $R(t)=0$.

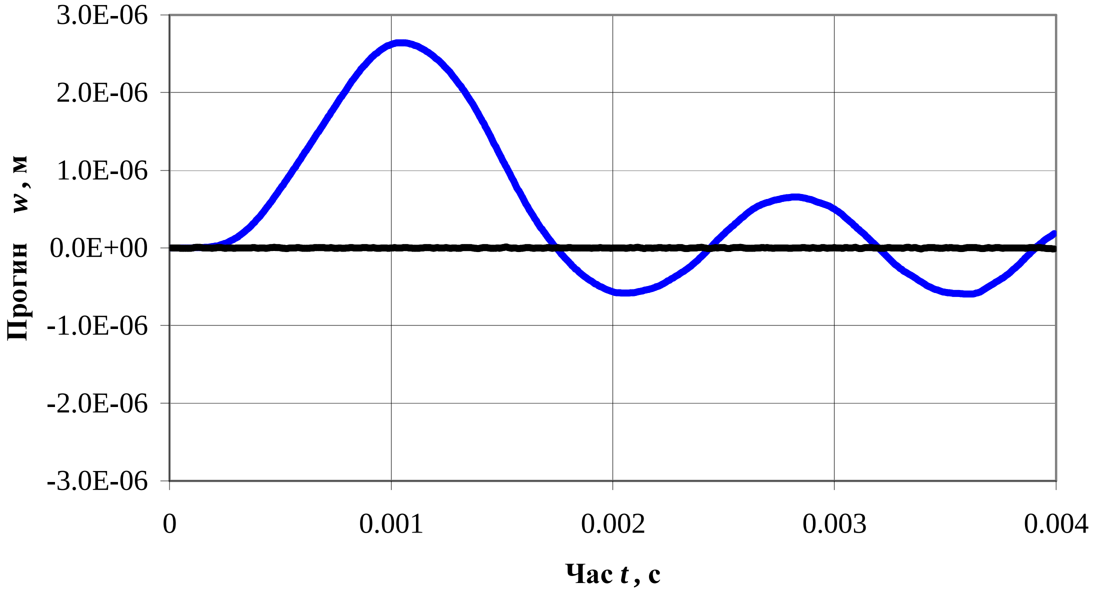


Рисунок 5.12 – Результати управління при $\alpha = 10^{-52}$

Висновки. Показано можливість управління нестаціонарними коливаннями механічної системи, яка складається з прямокутної шарнірно-обпертої пластини та зосередженої маси за допомогою додаткового (керуючого) навантаження. На основі представлених результатів можна зробити висновок про те, що запропонована схема управління та алгоритм визначення керуючого впливу при розв'язанні оберненої задачі для механічної системи є ефективними і досить стійкими.

5.3. Гасіння нестаціонарних коливань механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси. Пасивний віброзахист

У попередньому підрозділі наведений приклад гасіння коливань, який можна віднести до активного віброзахисту. Тут буде розглянута подібна задача, яка належить до пасивного віброзахисту.

Досліджується можливість гасіння нестаціонарних коливань механічної системи, яка складається з прямокутної шарнірно-обпертої пластини та зосередженої маси, за допомогою спеціально приєднаного до пластини в певній точці пасивного погашувача коливань (рис. 5.13).

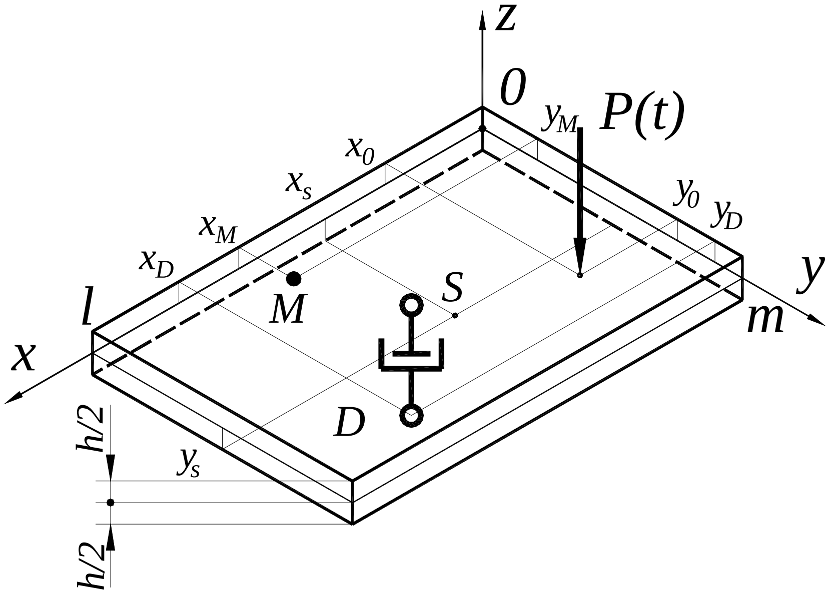


Рисунок 5.13 – Схема гасіння нестаціонарних коливань пластини та маси

Система диференціальних рівнянь, що описує нестаціонарні деформаційні процеси в пластині з приєднаною масою *M*, аналогічна наведеній раніше (5.1).

Для переміщень точок, у яких приєднані зосереджена маса $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$ і погашувач коливань $w(x_D, y_D, t) = w_D(t)$, можна записати наступні інтегральні співвідношення:

$$\begin{cases} w(x_D, y_D, t) = \int\limits_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau, \\ w(x_D, y_D, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R_D(\tau) K_{DD}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int\limits_0^t R_M(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t R_M(\tau) K_{MM}(t-\tau) d\tau. \end{cases} \tag{5.7}$$

Виключивши з інтегральних співвідношень (5.7) $w(x_M, y_M, t)$ і $w(x_D, y_D, t)$, одержуємо наступну систему інтегральних рівнянь Вольтерра I роду щодо невідомих $R_D(t)$ і $R_M(t)$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t R_D(\tau)\left[K_{DD}(t-\tau)+\frac{1}{\kappa}\right]d\tau+\int\limits_0^t R_M(\tau)K_{MD}(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t P(\tau)K_{PD}(t-\tau)d\tau, \\ \int\limits_0^t R_D(\tau)K_{DM}(t-\tau)d\tau+\int\limits_0^t R_M(\tau)\left[K_{MM}(t-\tau)+\frac{t-\tau}{M}\right]d\tau=\int\limits_0^t P(\tau)K_{PM}(t-\tau)d\tau. \end{cases} \quad (5.8)$$

Опис і вид ядер, що входять в (5.8) приводився раніше. Система (5.7), як і подібні, розв’язується з використанням РА Тихонова. Після дискретизації її можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{A_{DD}R_D}+\mathbf{A_{MD}R_M}=\mathbf{A_{PD}P}, \\ \mathbf{A_{DM}R_D}+\mathbf{A_{MM}R_M}=\mathbf{A_{PM}P}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Як вказувалося раніше для розв’язання матричної системи (5.9) зручно використовувати узагальнені алгоритми, у випадку прямої задачі, коли збурювальне навантаження $P(t)$ відоме, а шуканими є $R_D(t)$ і $R_M(t)$, у системі (5.9) зручно перепозначити матриці і записати її в блоковому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{R_D} \\ \mathbf{R_M} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{w_{PD}} \\ \mathbf{w_{PM}} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Тоді у випадку розв’язання оберненої задачі, коли всі три силові залежності $P(t)$, $R_D(t)$ і $R_M(t)$ невідомі, а задана зміна прогину в деякій точці $w(x_S, y_S, t)=w_S(t)$ можна записати наступну блокову систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{13}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{23}} \\ \mathbf{A_{31}} & \mathbf{A_{32}} & \mathbf{A_{33}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R_D} \\ -\mathbf{R_M} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w_s} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

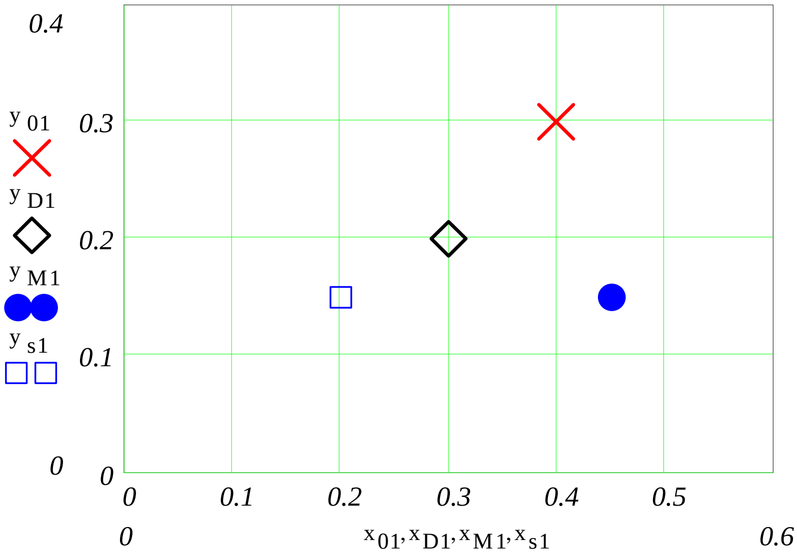
При розрахунках, як і раніше, передбачалося, що серединна площина пластини була пов'язана із площиною xOy декартової системи координат. Вважалося, що збурювальне навантаження, реакції маси і демпфера зосереджені в точках. При обчисленнях приймалися наступні значення:

– E = 2.07·10^{11} Па; ν = 0.3; ρ = 7890 кг/м^3;

– h = 0.04 м; l = 0.6 м; m = 0.4 м;

– число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50.

На рис. 5.14 наведено схему розташування точок для розрахунків при розв’язанні прямої та оберненої задачі.



× – зовнішня сила; • – точка приєднання зосередженої маси;

◊ – точка приєднання демпфера; □ – точка виміру прогинів пластини

Рисунок 5.14 – Схема пластини з масою і демпфером у плані:

Координати точок:

– $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.3$ м – прикладення збурювального навантаження;

– $x_D = 0.3$ м, $y_D = 0.2$ м – приєднання демпфера;

– $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – зосередженої маси;

– $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м – у якій вважалася відомою зміна прогину $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ при розв’язанні оберненої задачі.

При обчисленнях в рамках аналізу прямої задачі шукані функції $R_D(t)$ і $R_M(t)$ визначалися з розв’язання системи (5.10), яка розв’язувалася чисельно-аналітично згідно РА Тихонова. Параметри регуляризації α_D і α_M визначалися на основі мінімізації за α відповідних функціоналів нев’язки. На рис. 5.15 показано графіки зміни нев'язок для $R_D(t)$ (показаний крапками) і $R_M(t)$ залежно від параметра регуляризації α. Вкажемо, що значення параметра регуляризації для зручності відкладені на логарифмічній шкалі.

З рис. 5.15 видно, що є зони оптимальних значень параметрів регуляризації: для α_D – це $10^{-47} < \alpha_D < 10^{-43}$; для α_M це $-10^{-48} < \alpha_M < 10^{-46}$, причому при подальших розрахунках приймалися $\alpha_D = 10^{-46}$ і $\alpha_M = 10^{-47}$.

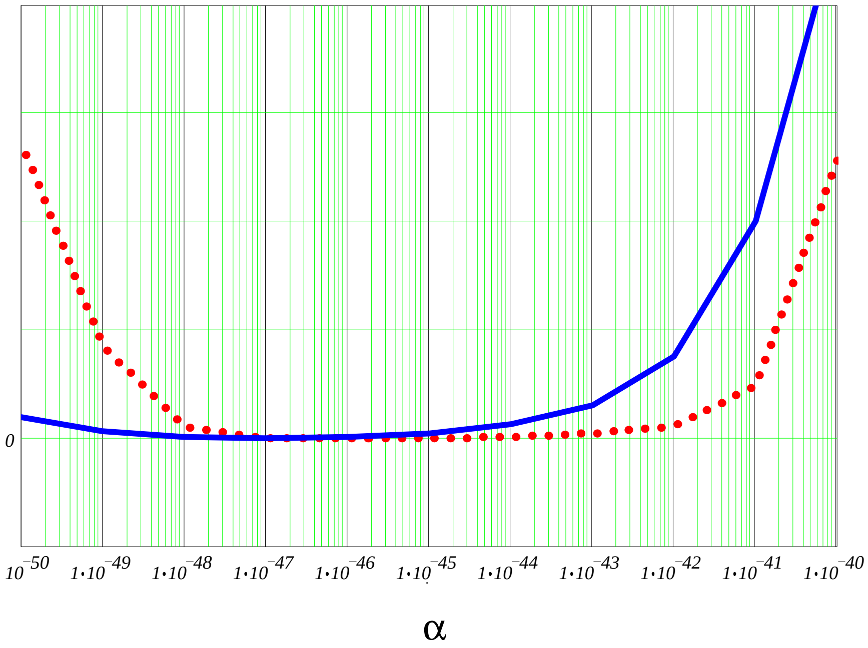


Рисунок 5.15 – До вибору параметрів регуляризації α_D і α_M

На рис. 5.16 показано графіки зміни прогинів пластини в точці S, викликаних дією тільки збурювальної сили $P(t)$ – $w_{PS}(t)$; тільки реакцією між погашувачем і пластиною $R_D(t)$ – $w_{DS}(t)$; тільки реакцією зосередженої маси $R_M(t)$ – $w_{MS}(t)$; а також графік, який показує зміну прогину досліджуваної точки для пластини з масою (сумарна крива) при наявності зосередженого погашувача – $w_S(t)$.

Наведений рис. 5.16 демонструє (крива $w_S(t)$), що, при використанні погашувача коливань з обраним оптимальним коефіцієнтом демпфірування, можна трохи згладити основний пік прогинів, а потім у перебігу декількох періодів майже повністю погасити нестаціонарні коливання (значно зменшити амплітуди прогинів). Це підтверджує ефективність систем пасивного віброзахисту.

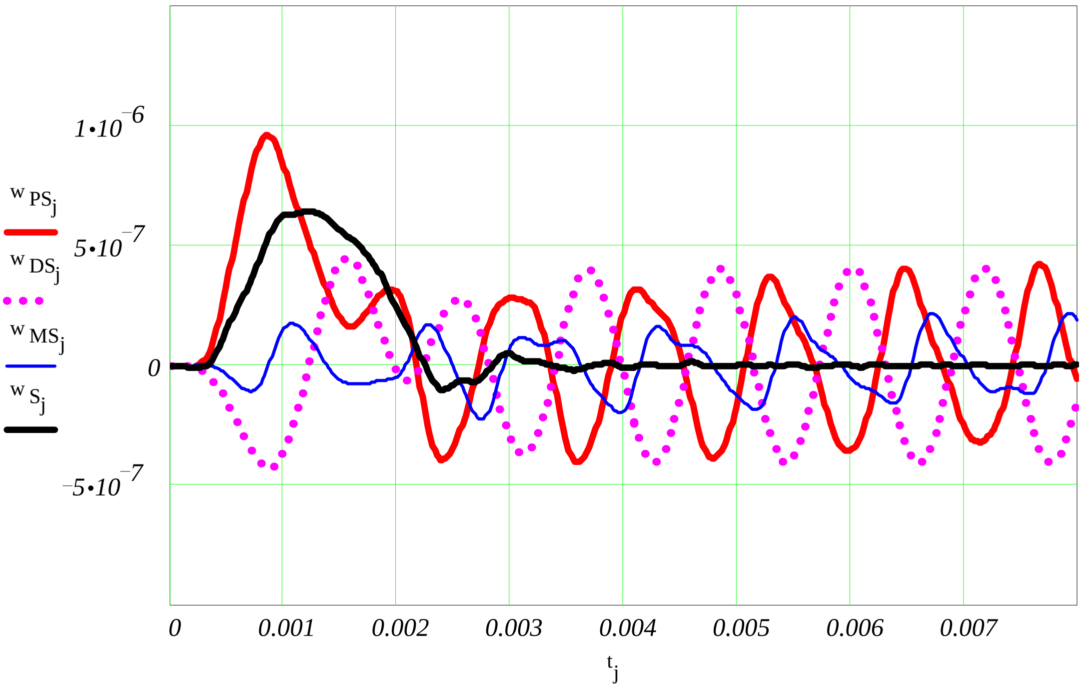


Рисунок 5.16 – Зміна прогину в точці пластини x_S =0.2 м, y_S =0.15 м

На рис. 5.17 показано графіки зміни в часі зовнішнього збурювального навантаження $P_1(t)$, а також визначені з розв'язання (5.10) реакції між пластиною і демпфером $R_D(t)$ та реакції зосередженої маси $R_M(t)$, знайдені при значеннях параметрів регуляризації $\alpha_D = 10^{-46}$ і $\alpha_M = 10^{-47}$ відповідно.

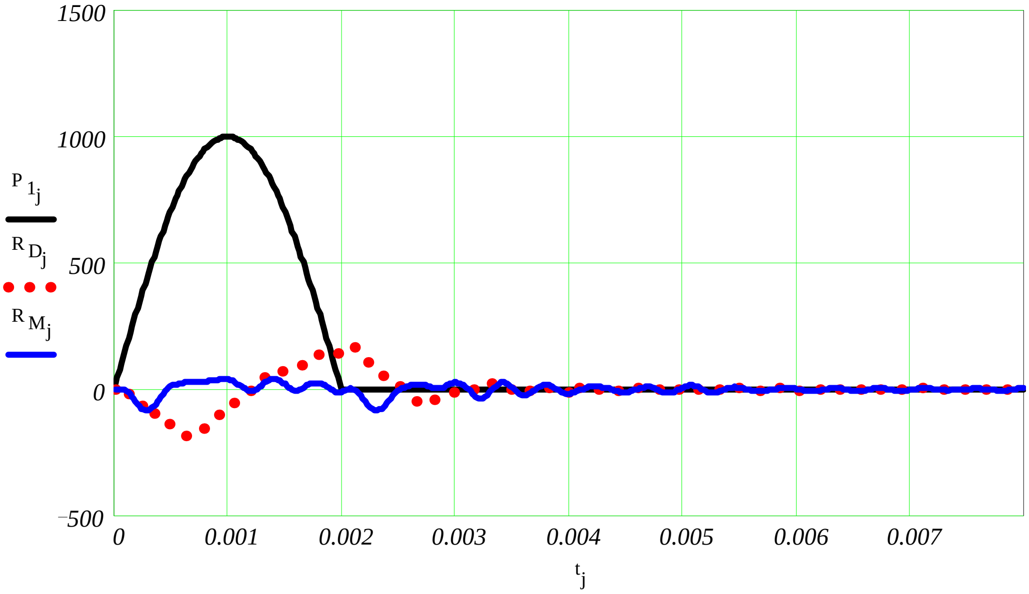


Рисунок 5.17 – Навантаження, що діють на пластину

При обчислювальному експерименті в процесі розв’язання оберненої задачі закон зміни навантаження $P(t)$, що збурює коливання, вважався невідомим. Ідентифікація виконувалася за «зашумленим» і «незашумленим» значенням прогину $w_S(t)$ в точці S, знайденим у результаті розв’язання прямої задачі.

На рис. 5.18 показані «незашумлені» значення прогину в точці S $w_S(t)$ і «зашумлені» $w_\delta(t)$. «Зашумлення» вихідних даних здійснювалося з використанням закону нормального розподілу (яки моделює похибки випадкового характеру), механізм накладення якого описувався раніше; відносна похибка «зашумлення» (дисперсія) приймалася $\delta = 0.2$.

На рис. 5.19 і рис. 5.20 показано ідентифіковані за $w_S(t)$ і $w_\delta(t)$ залежності зміни в часі $P(t)$, $R_D(t)$ і $R_M(t)$.

Вкажемо, що ідентифікація $P(t)$, $R_D(t)$ і $R_M(t)$ виконувалася при значенні параметрів регуляризації $\alpha_P = 10^{-61}$, $\alpha_D = 10^{-62}$ і $\alpha_M = 10^{-62}$ відповідно. Вигляд відповідних функціоналів нев’язки, на основі мінімізації яких вибиралися оптимальні значення параметрів регуляризації подібний показаним на рис. 5.15 і окремо для оберненої задачі не приводиться.

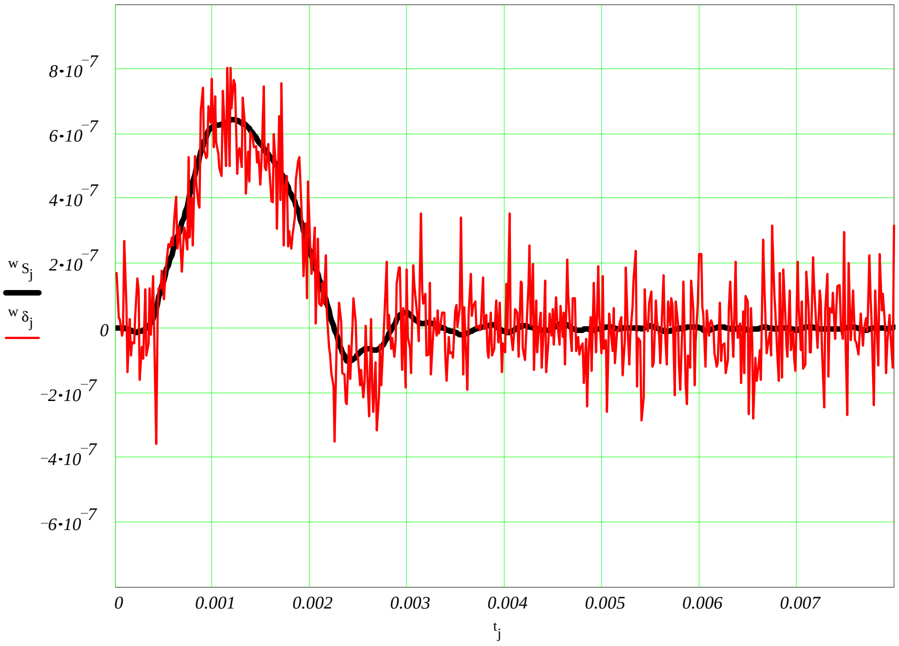


Рисунок 5.18 – Вихідні дані ідентифікації (зміна прогину)

Відзначимо, що на рис. 5.19 і рис. 5.20 ідентифіковані $P(t)$, $R_D(t)$ і $R_M(t)$ показані точками, а точні залежності, які були взяті з результатів розв'язання прямої задачі, показані суцільними лініями.

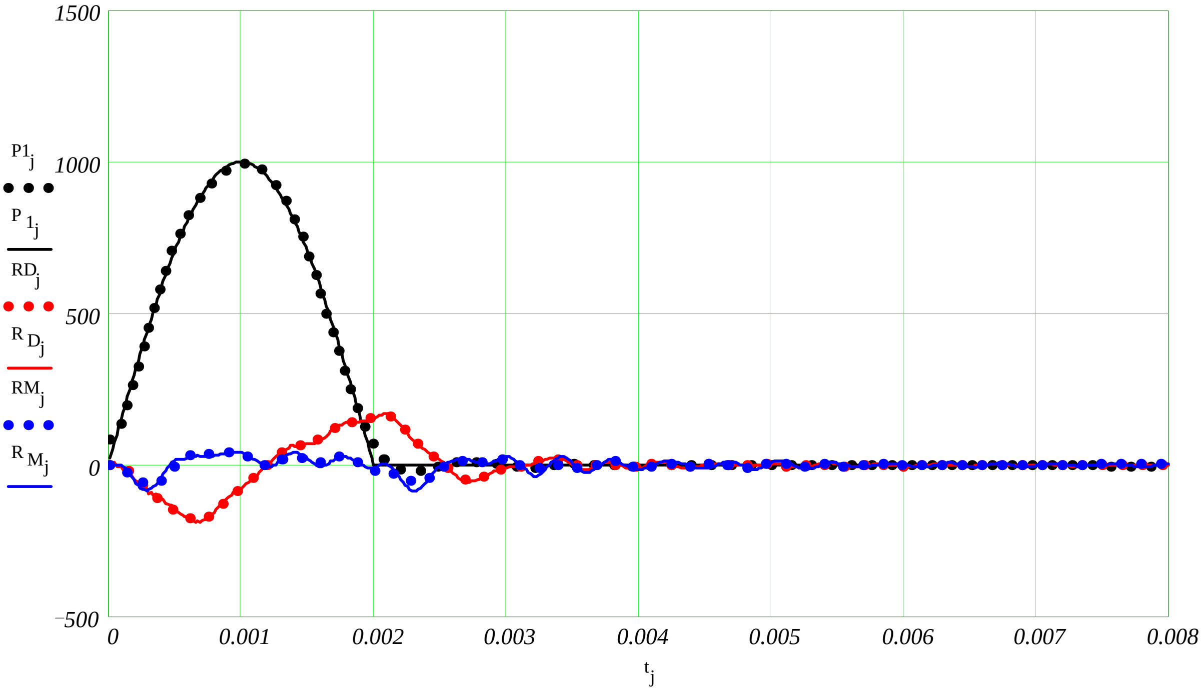


Рисунок 5.19 – Результати ідентифікації за «незашумленими» вихідними даними

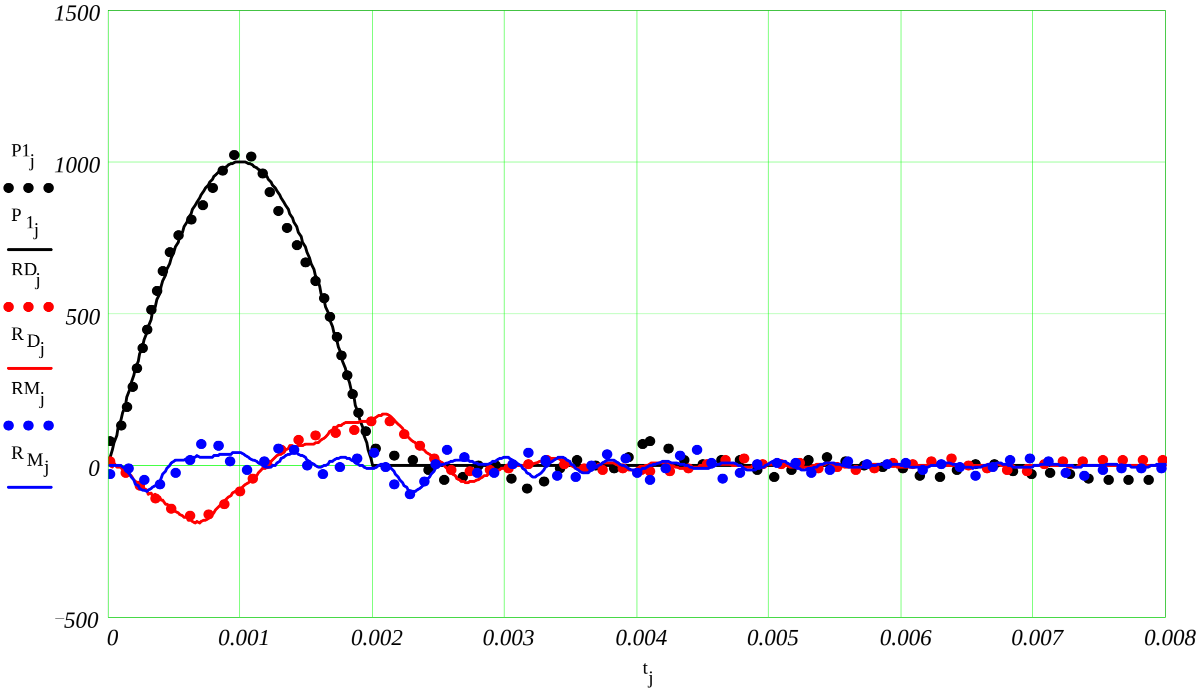


Рисунок 5.20 – Результати ідентифікації за «зашумленими» вихідними даними

З рис. 5.19 добре видно, що ідентифіковані $P(t)$, $R_D(t)$ і $R_M(t)$ за «незашумленими» вихідними даними практично повністю збігаються з точними їхніми значеннями. У випадку використання «зашумлених» вихідних даних (рис. 5.20) результати ідентифікації виходять досить задовільні, особливо в зоні з великими амплітудами, що викликає значний інтерес при дослідженні нестаціонарних процесів.

На основі представлених на рис. 5.20 результатів можна зробити висновок про те, що запропонована методика розв’язання оберненої задачі та алгоритм визначення невідомих навантажень є ефективними і досить стійкими до збурювання вихідних даних.

5.4. Управління поперечними коливаннями на невеликій області пластини

Методика управління коливаннями прямокутної пластини за допомогою прикладення системи декількох зовнішніх керуючих впливів, яка використовується в цьому дослідженні, є логічним продовженням методики, наведеної в [297]. Там викладене розв’язання відповідної задачі про управління нестаціонарними коливаннями в одній точці прямокутної пластини за допомогою застосування однієї керуючої сили.

Тут опишемо розв’язання більш загальної задачі про управління нестаціонарними коливаннями. Розглядається можливість управління на істотно меншій у порівнянні з розмірами пластини прямокутній площадці. Пластина вважається пружною, ізотропною, прямокутної форми та середньої товщини (рис. 5.21). Габарити пластини $l \times m$, а товщина h. Схема закріплення пластини відповідає шарнірному обпиранню. Припустимо, що на пластину діє система декількох незалежних поперечних навантажень, прикладених у точках (x_{0i}, y_{0i}).

Потрібно управляти коливаннями (наприклад, забезпечити необхідний закон зміни в часі прогину пластини або, навпаки, зменшити величини прогинів або деформацій пластини) на невеликій прямокутній області пластини. Управління здійснюється за допомогою системи, що складається з чотирьох незалежних керуючих впливів (сил), які є шуканими.

На рис. 5.22 показано окремий випадок схеми управління коли сили, що керують прикладені в кутах малої прямокутної області, в якій здійснюється управління. Така схема не завжди застосовна (у силу геометричних міркувань), але дозволяє дещо спростити схему управління, а також зменшити величини керуючих сил, тобто енергію, затрачувану на управління.

У випадку, якщо закон зміни в часі навантажень, що збурюють коливання, відомий, поставлена задача зводиться до відшукання чотирьох невідомих керуючих навантажень.

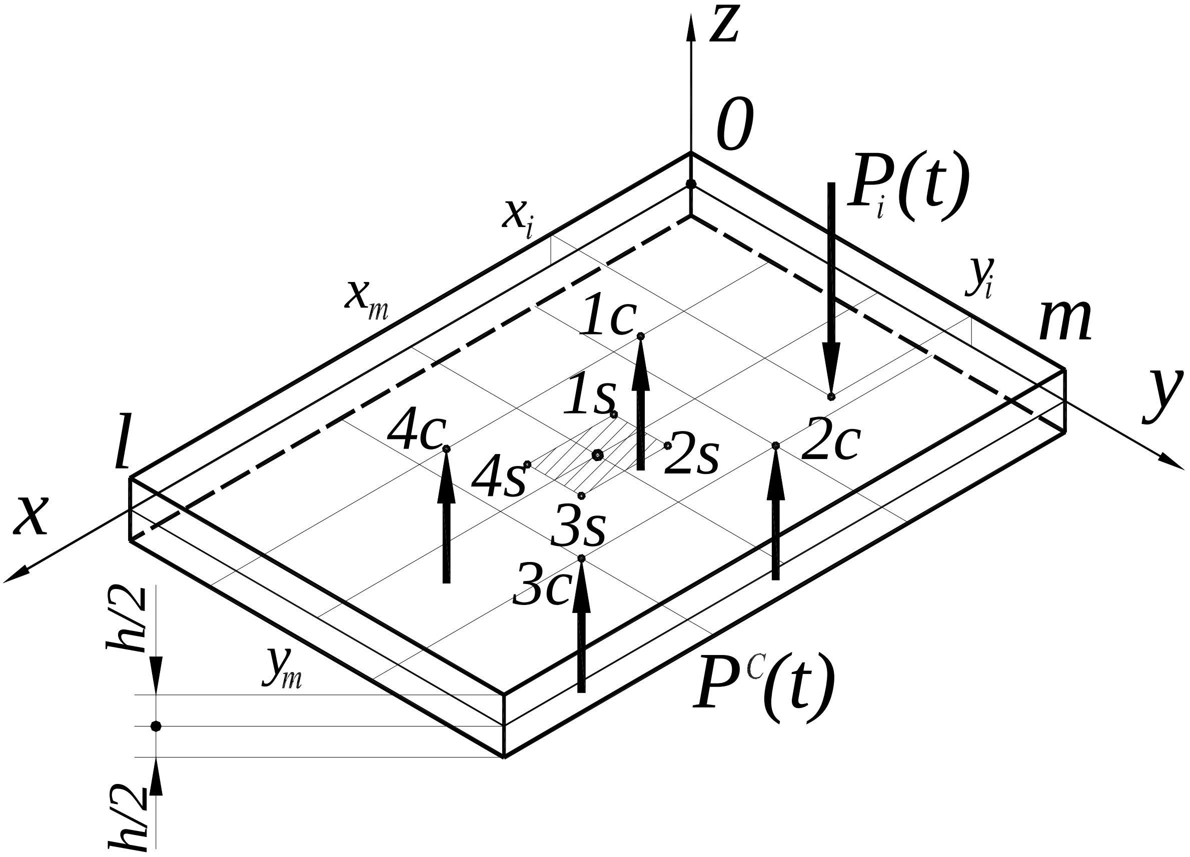


Рисунок 5.21 – Схема управління коливаннями

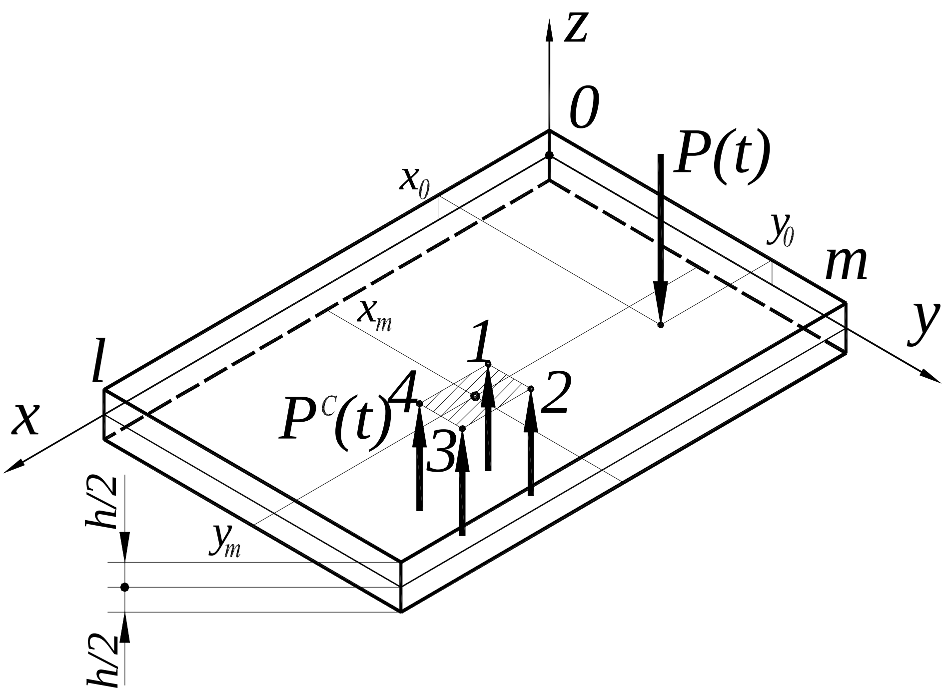


Рисунок 5.22 – Схема управління коливаннями (окремий випадок)

Рівняння нестаціонарних коливань прямокутної пластини під дією системи поперечних навантажень (збурювальних і керуючих) за аналогією з (5.1) можна записати наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{N} P_i(x,y,t) + \sum\limits_{i=1}^{Nc} P_i^c(x,y,t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \dfrac{D}{2}\Big[(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}\Big] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{array} \right. \qquad (5.12)$$

де $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i(x,y,t)$ – система збурювальних навантажень (у цьому дослідженні N=2 – два зосереджених навантаження $P_1(x,y,t)$ і $P_2(x,y,t)$, прикладені у двох різних точках, причому $P_1(t) \neq P_2(t)$) ;

а $\sum\limits_{i=1}^{Nc} P_i^c(x,y,t)$ – система керуючих навантажень (тут Nc=4).

У результаті для прогину і кутів повороту нормалі розв’язання прямої задачі одержуємо у вигляді суми інтегралів Дюамеля (згорток):

$$w(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{t}P_i(\tau)K_i^W(x,y,t-\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{Nc}\int_{0}^{t}P_i^c(\tau)K_i^W(x,y,t-\tau)d\tau;$$

$$\psi_x(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{t}P_i(\tau)K_i^{\Psi x}(x,y,t-\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{Nc}\int_{0}^{t}P_i^c(\tau)K_i^{\Psi x}(x,y,t-\tau)d\tau; \tag{5.13}$$

$$\psi_y(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{t}P_i(\tau)K_i^{\Psi y}(x,y,t-\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{Nc}\int_{0}^{t}P_i^c(\tau)K_i^{\Psi y}(x,y,t-\tau)d\tau,$$

де $K_i^{\Psi x}(x,y,t)$, $K_i^{\Psi y}(x,y,t)$, $K_i^W(x,y,t)$ – відповідні скінченно-різницеві ядра Коші інтегралів Дюамеля (згорток), виду:

$$K_i^{\Psi x}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{ikn}\cdot b\cdot\lambda_k^*}{\Delta_{kn}}\cdot\cos\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\cdot y}{m}\cdot\sum_{p=1}^{2}\frac{\sin\omega_{pkn}(t)}{\omega_{pkn}},$$

$$K_i^{\Psi y}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{ikn}\cdot b\cdot\mu_n^*}{\Delta_{kn}}\cdot\sin\frac{k\pi\cdot x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi\cdot y}{m}\cdot\sum_{p=1}^{2}\frac{\sin\omega_{pkn}(t)}{\omega_{pkn}},$$

$$K_i^W(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}}\cdot\sin\frac{k\pi\cdot x}{l}\sin\frac{n\pi\cdot y}{m}\cdot\sum_{p=1}^{2}\Omega_{pkn}\cdot\sin\omega_{pkn}(t).$$

Нагадаємо, що розв’язок системи (5.12) наведено у третьому розділі, там також мається детальний опис усіх позначень, параметрів та констант.

Припустимо, що потрібно погасити коливання (по можливості істотно зменшити амплітуди коливань прогину пластини) на невеликий у порівнянні з розмірами пластини прямокутній області.

Тому, що критерієм управління є зменшення амплітуд прогину, можна вважати справедливими наступні вирази:

$$w(x_{sj},y_{sj},t)=0, \tag{5.14}$$

де (x_{sj},y_{sj}) – чотири точки, що обмежують прямокутну область гасіння.

Використовуючи вид розв’язання прямої задачі для прогинів (5.13) і критерії управління (5.14), можна одержати систему чотирьох інтегральних рівнянь Вольтерра І роду, кожне з яких буде мати наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{Nc}\int_0^t P_i^C(\tau)K_i^W\left(x_{sj},y_{sj},t-\tau\right)d\tau=\sum_{i=1}^{N}\int_0^t P_i(\tau)K_i^W\left(x_{sj},y_{sj},t-\tau\right)d\tau. \tag{5.15}$$

Для розв’язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра І роду спочатку виконується її дискретизація, після чого отримаємо блокову матричну СЛАР. Тобто система чотирьох інтегральних рівнянь виду (5.15) для розглянутого випадку буде мати наступний матричний вигляд:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24}\\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34}\\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{c1}\\ \mathbf{P}_{c2}\\ \mathbf{P}_{c3}\\ \mathbf{P}_{c4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}\mathbf{A}0_{1i}\mathbf{P}_i\\ \sum\limits_{i=1}\mathbf{A}0_{2i}\mathbf{P}_i\\ \sum\limits_{i=1}\mathbf{A}0_{3i}\mathbf{P}_i\\ \sum\limits_{i=1}\mathbf{A}0_{4i}\mathbf{P}_i\end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Розв’язання подібних систем рівнянь щодо шуканих функцій $P_{cj}(t)$ описано не одноразово і здійснюється зі застосуванням комплексу методів, що базується на використанні УАК чи УАГ для блокової матриці $\mathbf{A}$ і РА Тихонова при обертанні матриць.

На наступних рисунках представлені результати числових розрахунків.

Числові розрахунки виконувались при наступних значеннях параметрів: ρ=7890 кг/м^3; E=2.07·10^{11} Па; ν=0.3; h=0.04 м; l=0.6 м, m=0.4 м.

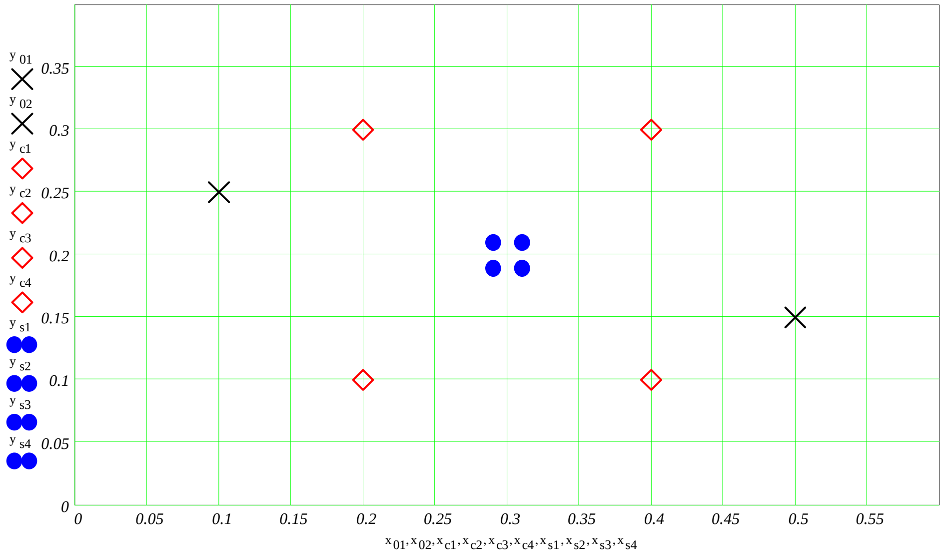
Координати точок прикладення збурювальних навантажень: $x_{01}=0.1$ м, $y_{01}=0.25$ м, $x_{02}=0.5$ м, $y_{02}=0.15$ м.

Координати прикладення системи керуючих навантажень: $x_{c1}=0.2$ м, $y_{c1}=0.1$ м, $x_{c2}=0.2$ м, $y_{c2}=0.3$ м, $x_{c3}=0.4$ м, $y_{c3}=0.3$ м, $x_{c4}=0.4$ м, $y_{c4}=0.1$ м.

Координати точок, що обмежують прямокутну область управління: $x_{s1}=0.29$ м, $y_{s1}=0.19$ м, $x_{s2}=0.29$ м, $y_{s2}=0.21$ м, $x_{s3}=0.31$ м, $y_{s3}=0.21$ м, $x_{s4}=0.31$ м, $y_{s4}=0.19$ м.

Координати центра пластини: $x_m=0.3$ м, $y_m=0.2$ м.

Для зручності сприйняття всі ці точки показані на рис. 5.23.



× – точки, у яких прикладено зовнішні збурювальні сили (2 шт.);

◊ – точки, у яких прикладено керуючі впливи (4 шт.);

● – точки на краю малої області управління (4 шт.)

Рисунок 5.23 – Схема пластини в плані

Тому що система (5.16) розв’язувалася з використанням УАК і РА Тихонова, то для визначення кожного з чотирьох керуючих впливів можна скористатися однаковим значенням параметра регуляризації, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$. Це обумовлено тим, що ядра, які входять у систему інтегральних рівнянь, зрівняльні за величиною, а отже і керуючі впливи повинні бути одного порядку.

На рис. 5.24 показано функціонал «сумарного прогину» для точки, яка знаходиться в центрі малої площадки, на якій здійснюється управління (ця точка, як видно з рис. 5.23 збігається з геометричним центром пластини):

$$M^{\alpha}[w_m] = \left\| w_m \right\|_{l1}, \tag{5.17}$$

де w_m – прогин у центрі площадки «гасіння» коливань.

Функціонал (5.17) показаний при значеннях параметра регуляризації α, взятих у раціональному для даної задачі діапазоні $10^{-94} < \alpha < 10^{-84}$. (Значення параметра α на рис. 5.24 відкладені на логарифмічній шкалі). З рис. 5.24 видно, що явно виділяються два значення параметра: $\alpha = 10^{-86}$ і $\alpha = 10^{-89}$. Далі приводяться результати розрахунків з управління коливаннями при цих значеннях параметра регуляризації α.

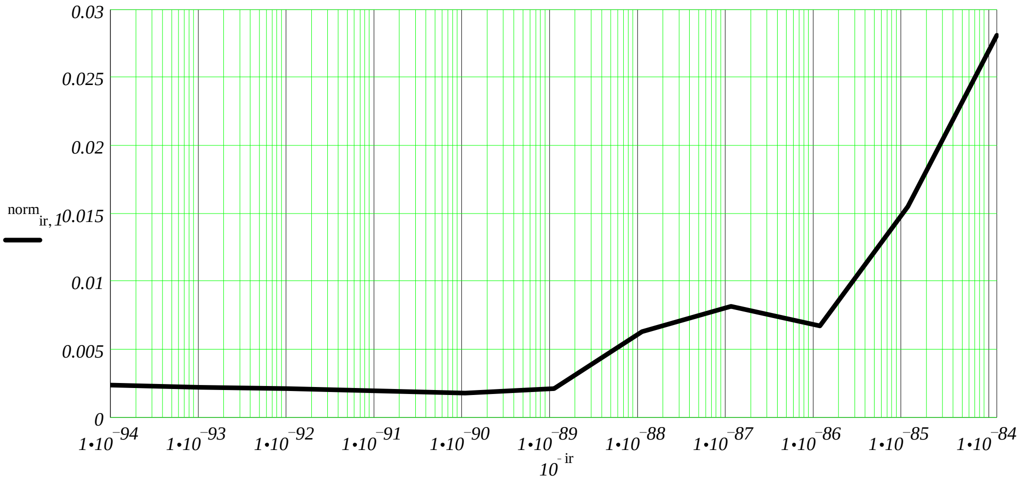


Рисунок 5.24 – До вибору параметра регуляризації

На рис. 5.25 показано зміну в часі прогинів пластини в точках управління (точках, що обмежують прямокутну область управління), а також у геометричному центрі області «гасіння» коливань. На рисунку наведені дві групи кривих: одна відповідає випадку, коли відсутні керуючі впливи, а друга – коли прикладені всі чотири керуючих навантаження, закон зміни в часі яких знайдений у результаті розв'язання задачі управління при значенні $\alpha = 10^{-86}$.

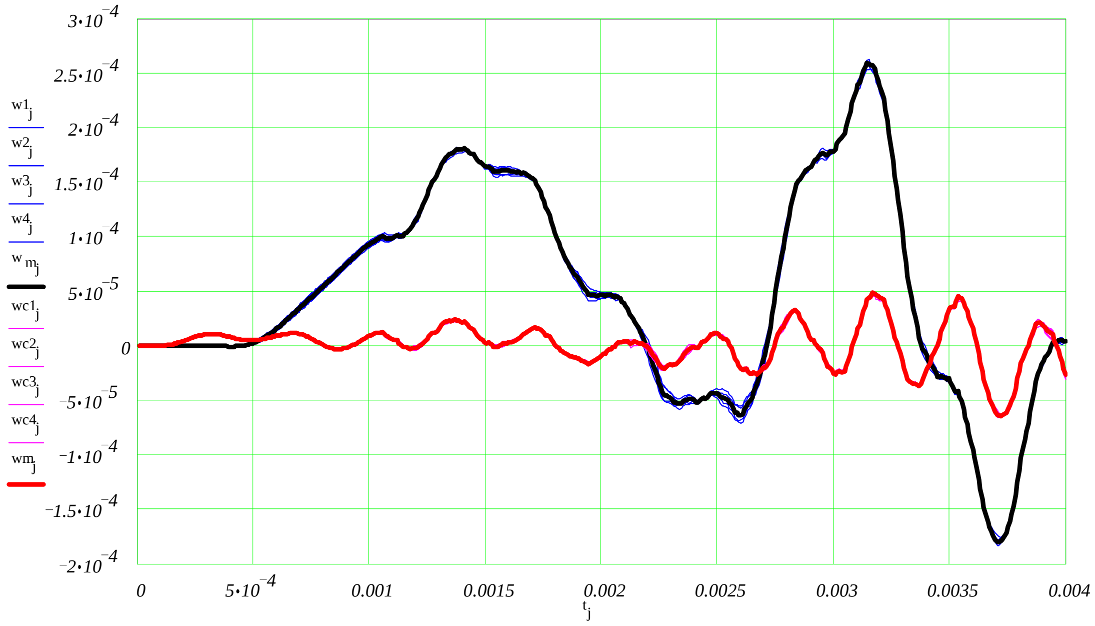


Рисунок 5.25 – Зміна прогину в області управління

На рис. 5.26 показано зміни в часі двох зовнішніх сил, що збурюють коливання, які змінюються, як «півхвилі синусоїди» і «прямокутного сходу скінченної тривалості», а також чотирьох керуючих навантажень, які носять складний коливний характер. Зміни в часі керуючих навантажень знайдені на основі розв’язання оберненої задачі (див. систему рівнянь (5.16)). На цьому рисунку криві окремо не позначені.

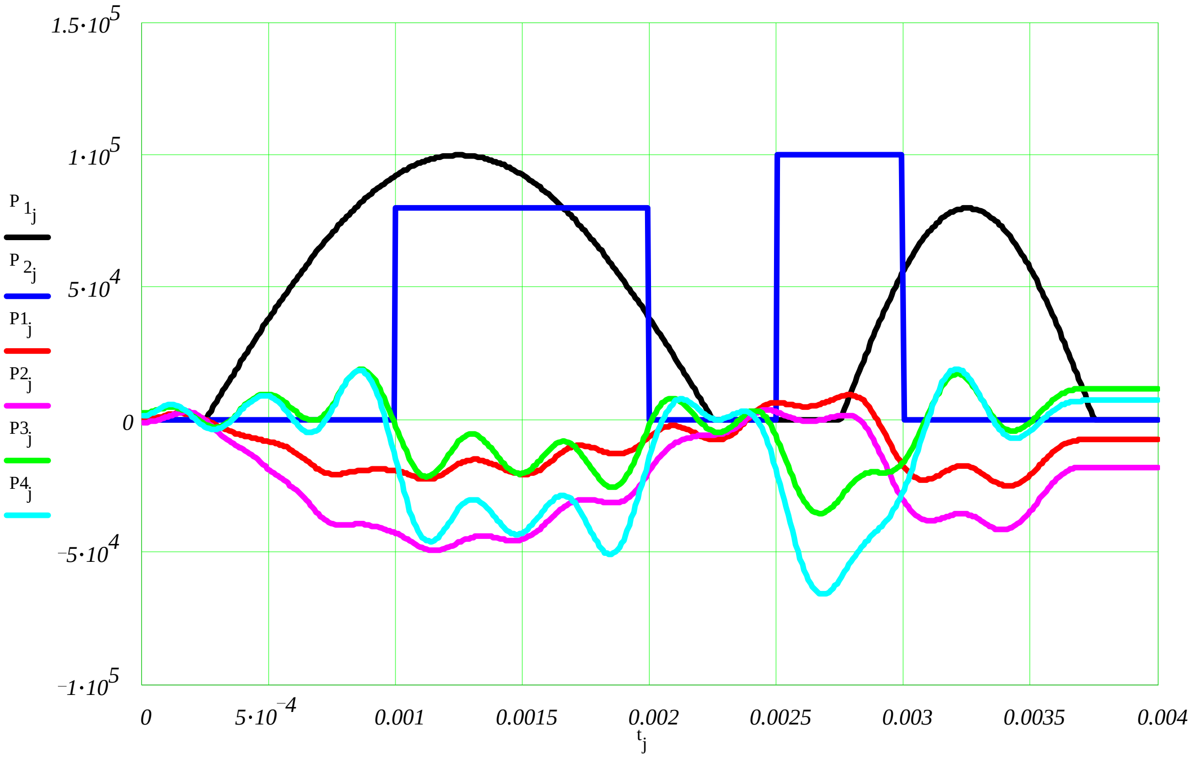


Рисунок 5.26 – Збурювальні та керуючі навантаження

З рис. 5.25 видно, що при знайдених значеннях керуючих навантажень хоча і не вдається повністю погасити нестаціонарні коливання, амплітуди прогинів знижуються більш ніж в 5 разів, чого в деяких випадках може бути достатньо. Іноді значні амплітуди коливань можуть вплинути на появу ушкоджень об'єктів, пов'язаних із пластинчастими елементами (наприклад, засклення).

Опис рис. 5.27 і рис. 5.28 повністю аналогічний опису рис. 5.25 і рис. 5.26, за винятком значення параметра регуляризації, при якому були розраховані представлені результати – це оптимальне значення $\alpha = 10^{-89}$.

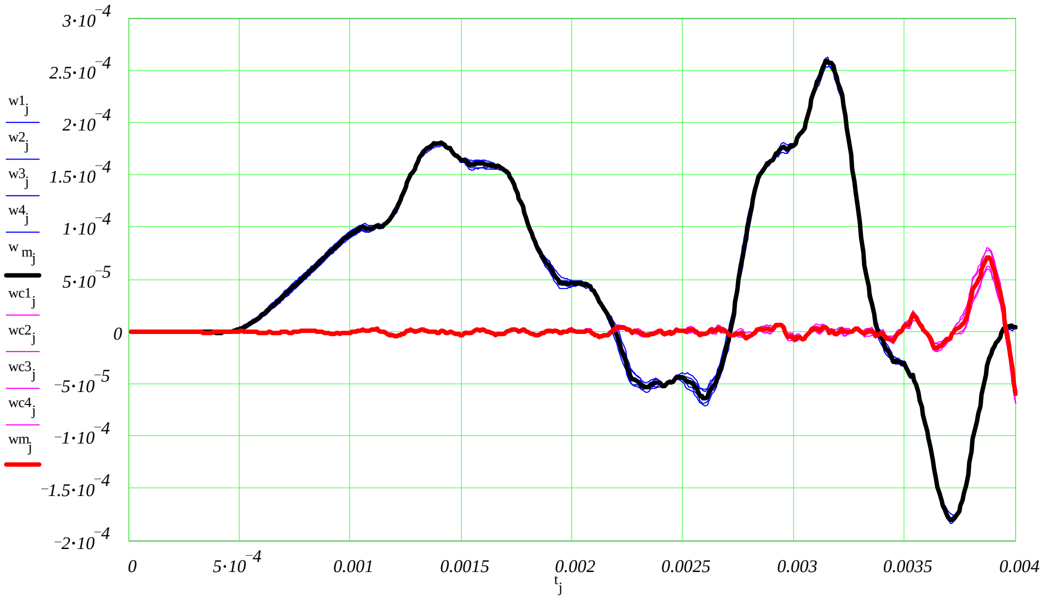


Рисунок 5.27 – Зміна прогину в області управління

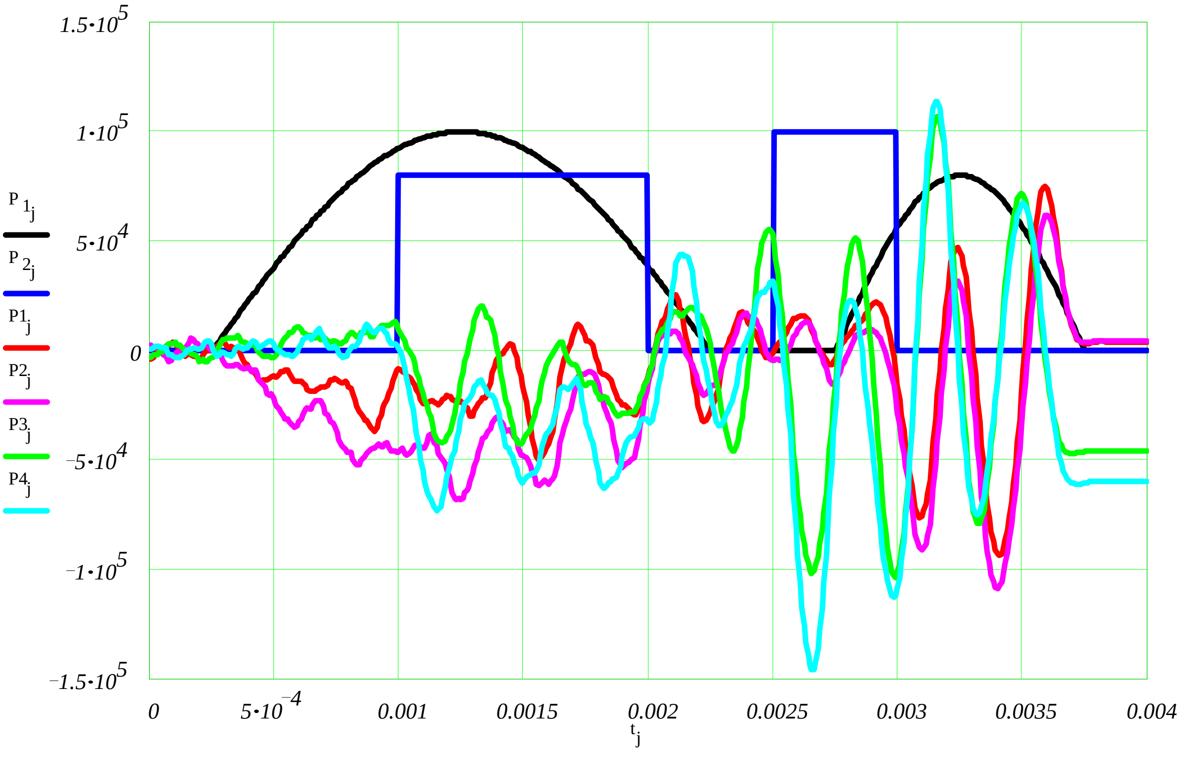


Рисунок 5.28 – Збурювальні та керуючі навантаження

З рис. 5.28 видно, що зміни керуючих впливів у часі, знайдені при оптимальному значенні $\alpha = 10^{-89}$, носять більш яскраво виражений коливний характер, а їх амплітуди за величиною перевершують значення збурювальних навантажень.

Результати, наведені на рис. 5.27 показують, що вдається майже повністю погасити нестаціонарні коливання на малій області пластини, за винятком невеликого проміжку часу, наприкінці досліджуваного тимчасового діапазону. Це викликано, певно, нагромадженням похибок обчислень при числовому розв'язанні системи рівнянь (5.16).

Далі розглядається окремий випадок по гасінню коливань на малій площадці, коли керуючі навантаження будуть прикладені прямо безпосередньо в кутах цієї площадки (див. рис. 5.22). На рис. 5.29 показано схему управління, детальний опис рис. 5.29 аналогічний наведеному для рис. 5.23.

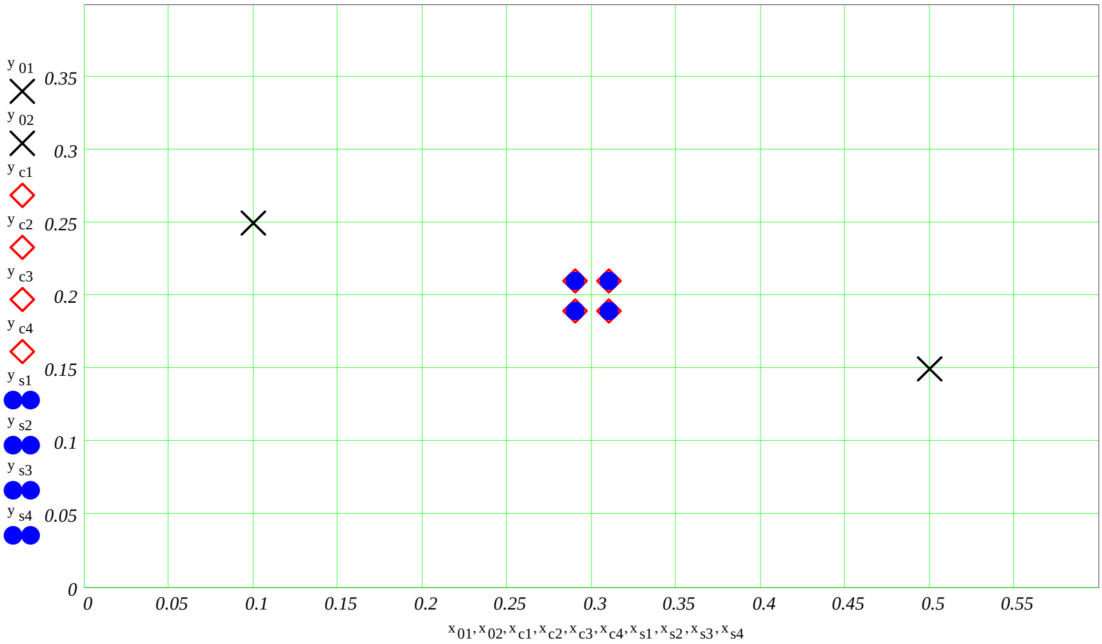


Рисунок 5.29 – Схема пластини в плані

Параметри пластини та координати точок прикладення збурювальних навантажень прийняті такими ж як у попередніх розрахунках: $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 0.5$ м, $y_{02} = 0.15$ м.

Координати точок, що обмежують прямокутну область управління, повністю збігаються з координатами прикладення керуючих навантажень: $x_{s1} = 0.29$ м, $y_{s1} = 0.19$ м, $x_{s2} = 0.29$ м, $y_{s2} = 0.21$ м, $x_{s3} = 0.31$ м, $y_{s3} = 0.21$ м, $x_{s4} = 0.31$ м, $y_{s4} = 0.19$ м.

Координати центра пластини: $x_m = 0.3$ м, $y_m = 0.2$ м.

На рис. 5.30 показано функціонали «сумарного прогину» – суцільна крива і «сумарного керуючого впливу» – показаний точками.

При розв’язанні задачі управління можно додатково мінімізуваи енергію, що буде витрачатись на гасіння коливань. Вид функціонала «сумарного керуючого впливу:

$$M2^{\alpha}[P_C] = \sum_{i=1}^{4} \left\| P_{C_i} \right\|. \qquad (5.18)$$

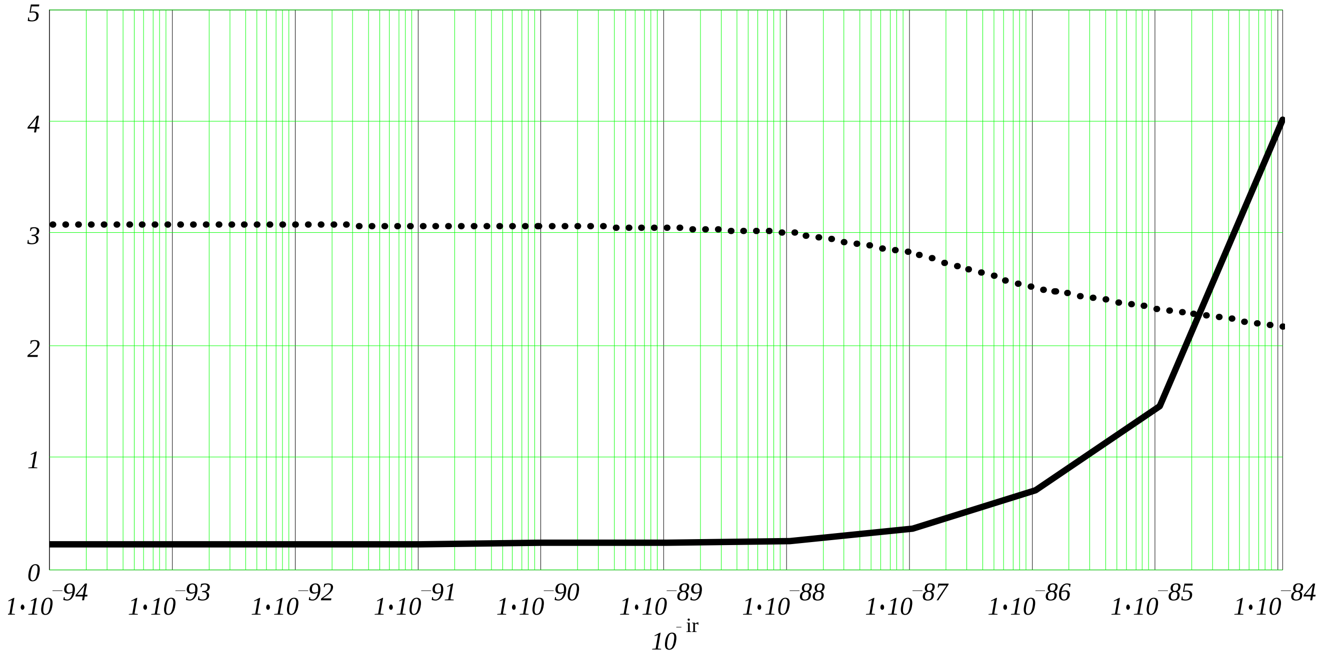


Рисунок 5.30 – До вибору параметра регуляризації

З рис. 5.30 видно, що для розв’язання задачі досить брати значення параметра регуляризації $\alpha \le 10^{-88}$, тому що дедалі при його зменшенні результати практично не змінюються.

На рис. 5.31 показано зміни в часі прогинів пластини в точках управління, а на рис. 5.32 – зміни в часі двох зовнішніх збурювальних сил і чотирьох керуючих впливів при $\alpha = 10^{-88}$. Нагадаємо, що детальний опис рисунків аналогічний наведеним раніше.

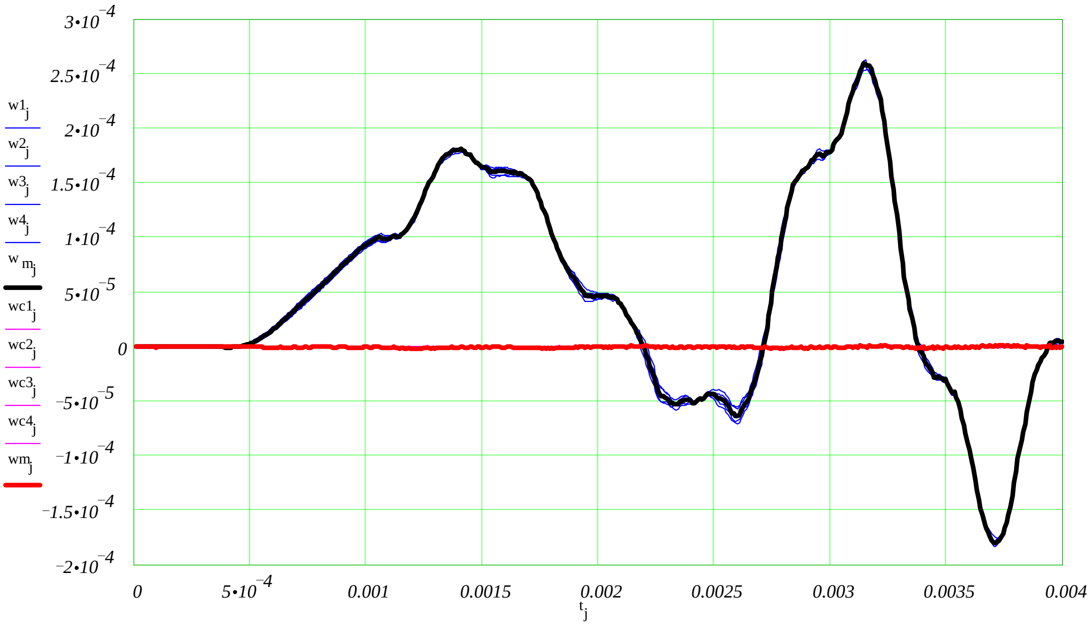


Рисунок 5.31 – Зміна прогину в області управління

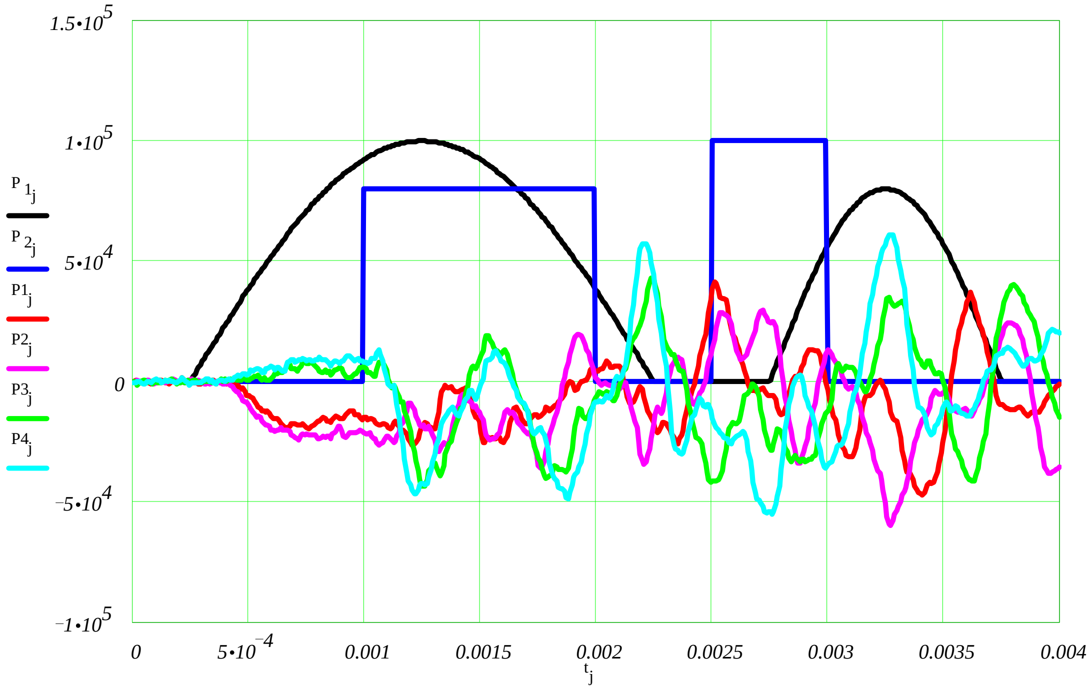


Рисунок 5.32 – Збурювальні та керуючі навантаження

З рис. 5.31 і рис. 5.32 видно, що у випадку, коли точки в яких здійснюється управління збігаються з точками прикладення керуючих навантажень, розв’язання системи рівнянь (5.16) виходить значно стійкішим і вдається практично повністю погасити коливання на малій області управління.

На наступних рис. 5.33, рис. 5.34, рис. 5.35 показано розподіл прогину по поверхні пластини (двовимірні епюри) у різні моменти часу.

Рис. 5.33 відповідає моменту часу $t = 0.0014$ с (поблизу першого максимального прогину коливань пластини);

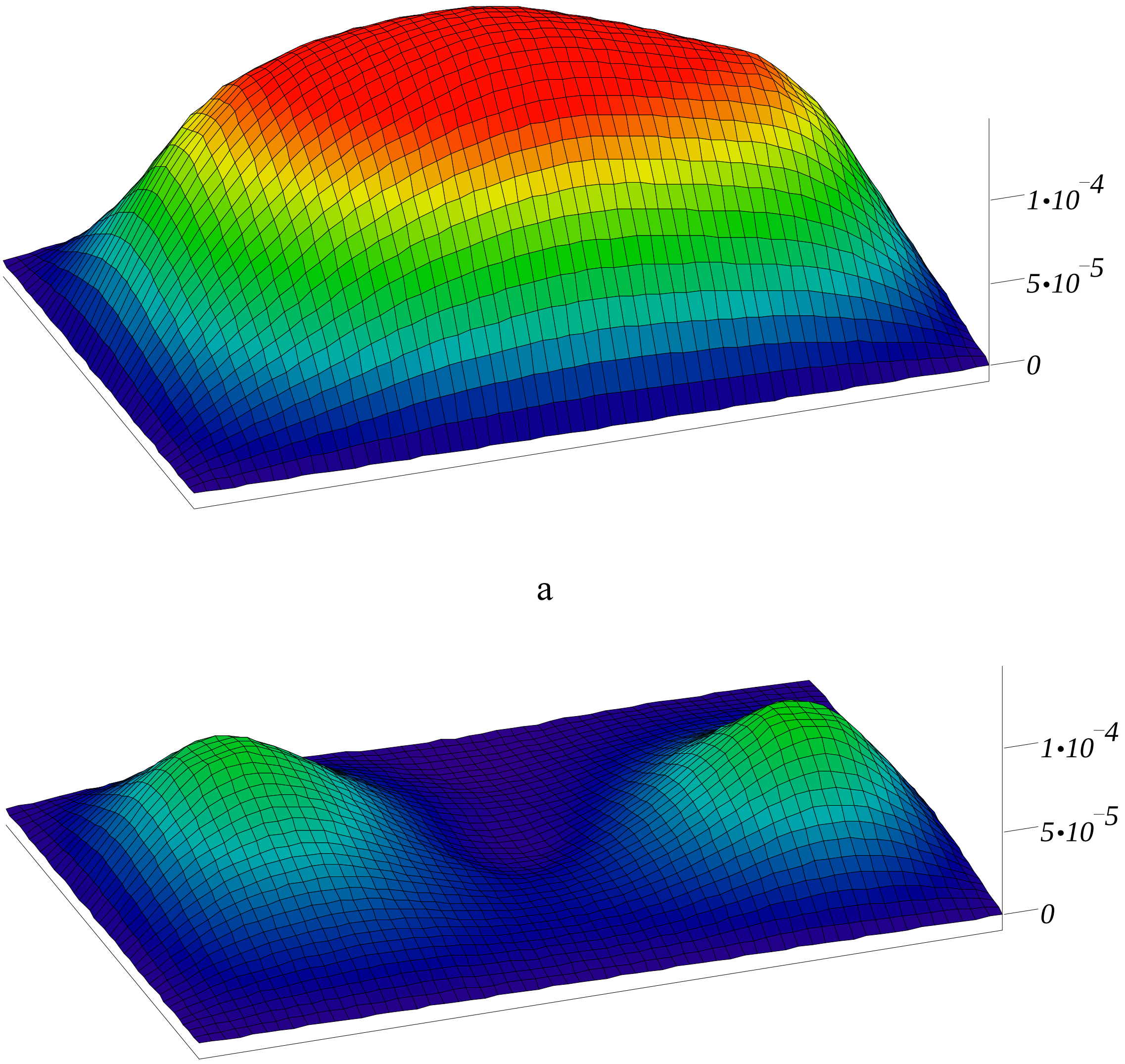
рис. 5.34 – $t = 0.00252$ с;

рис. 5.35 – $t = 0.0032$ с.

На цих рисунках показані результати розрахунків для двох випадків:

а) коли прикладені тільки збурювальні навантаження;

б) коли здійснюється управління на малій області, причому вид керуючих впливів показаний на рис. 5.32.

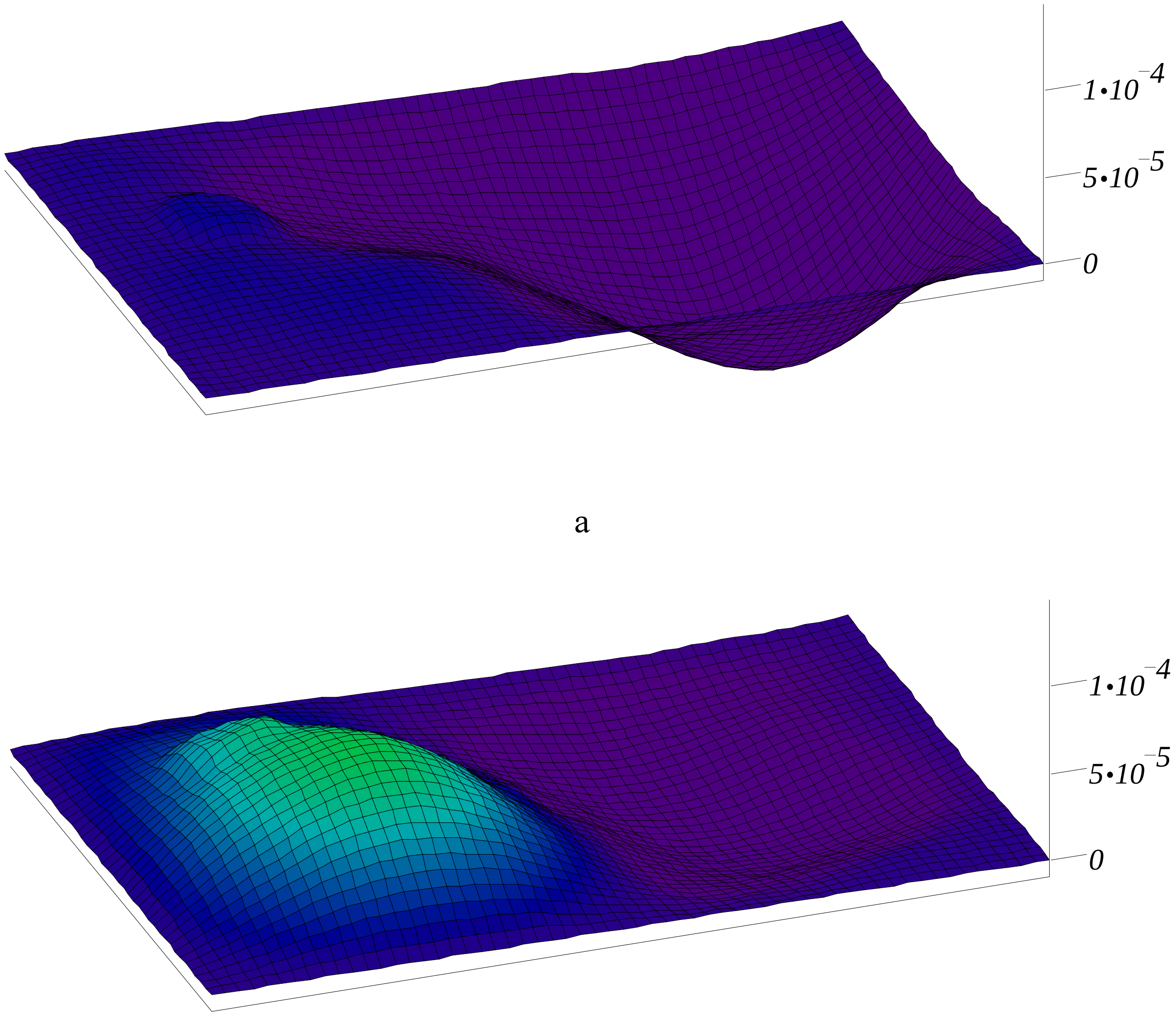


а

б

Рисунок 5.33 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.0014$ с

На рис. 5.34 демонструється момент часу між імпульсами, що збурюють коливання, коли епюра прогину пластини, в силу хвильових процесів має протилежні за знаком значення. Таким чином, показано, що управління коливаннями здійснюється при будь-яких напрямках навантажень і є можливість управляти незалежно від знаку максимальних переміщень.



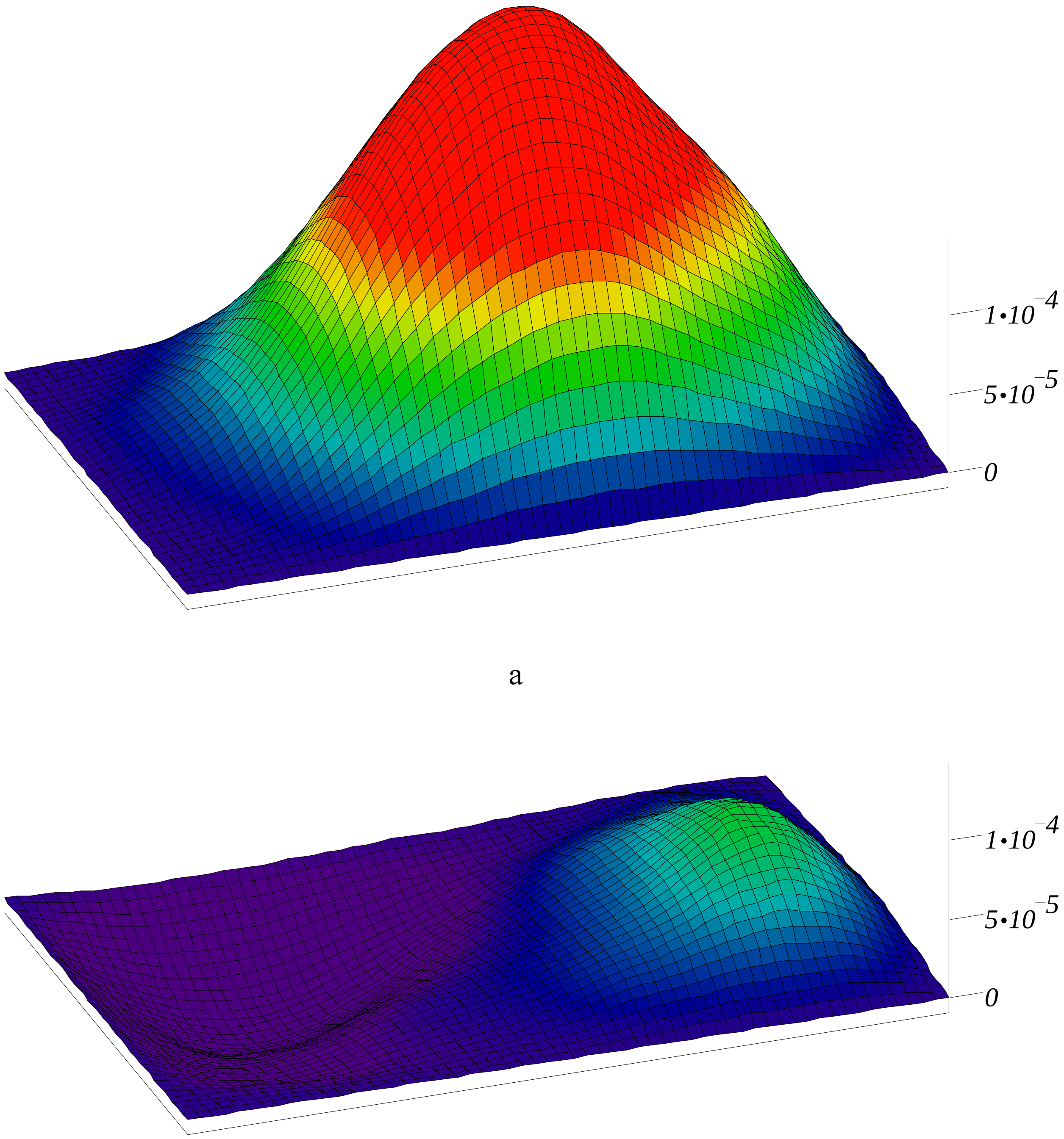
а

б

Рисунок 5.34 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.00252$ с

На рис. 5.35 показано момент часу, який відповідає найбільшим нормальним переміщенням пластини, коли збігається дія навантажень, що збурюють коливання, з наслідком хвильових процесів від попередніх імпульсів.

Нагадаємо, що мала область пластини, на якій здійснюється управління (гасіння) коливаннями знаходиться в центрі пластини (на тривимірних графіках вона окремо не виділена). А чотири керуючі навантаження прикладені на краю цієї області.



а

б

Рисунок 5.35 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.0032$ с

На рис. 5.33, рис. 5.34, рис. 5.35 можна спостерігати, що незалежно від напрямку переміщень точок пластини, її середина залишається практично нерухома. Всі рисунки для зручності візуального порівняння показані в однаковому масштабі та дозволяють оцінити: наскільки завдяки керуючим впливам знизилися переміщення не тільки в малій області управління, але і по всій пластині.

5.5. Активне гасіння нестаціонарних коливань прямокутної пластини

Одна з найважливіших проблем в інженерії – це проблема віброзахисту. З удосконаленням сучасних конструкцій, матеріалів і нових технологій все частіше починають застосовуватися схеми активного віброзахисту. Особливо це стосується елементів конструкцій, які знаходяться під дією імпульсних навантажень, тому що в цьому випадку елементи пасивного віброзахисту не завжди можуть працювати задовільно, особливо на початкових етапах збурювання.

Розглянемо пружну ізотропну прямокутну пластину середньої товщини (як і у попередньому пункті). Габарити пластини – $l\times m$, а товщина h (рис. 5.36). Схема закріплення пластини відповідає шарнірному обпиранню.

Відзначимо, що обраний підхід до розв’язання задачі є наближеним, однак результати, які одержані є фізичними та цікавими.

Припустимо, що на пластину діє система N незалежних поперечних навантажень, прикладених у точках(x_{0i}, y_{0i}), що викликає деформування пластини. Потрібно «погасити» коливання (по можливості значно зменшити амплітуди коливань прогину в часі) на всій пластині. При цьому передбачається, що на пластину діє система, що складається з Nc незалежних між собою, додаткових керуючих впливів. Як приклад розглядається система, що складається з чотирьох зосереджених керуючих навантажень (сил) для компенсації впливу на пластину двох збурювальних навантажень. У випадку, якщо закон зміни в часі навантажень, що збурюють коливання, відомий, поставлена задача зводиться до відшукання всіх невідомих керуючих впливів.

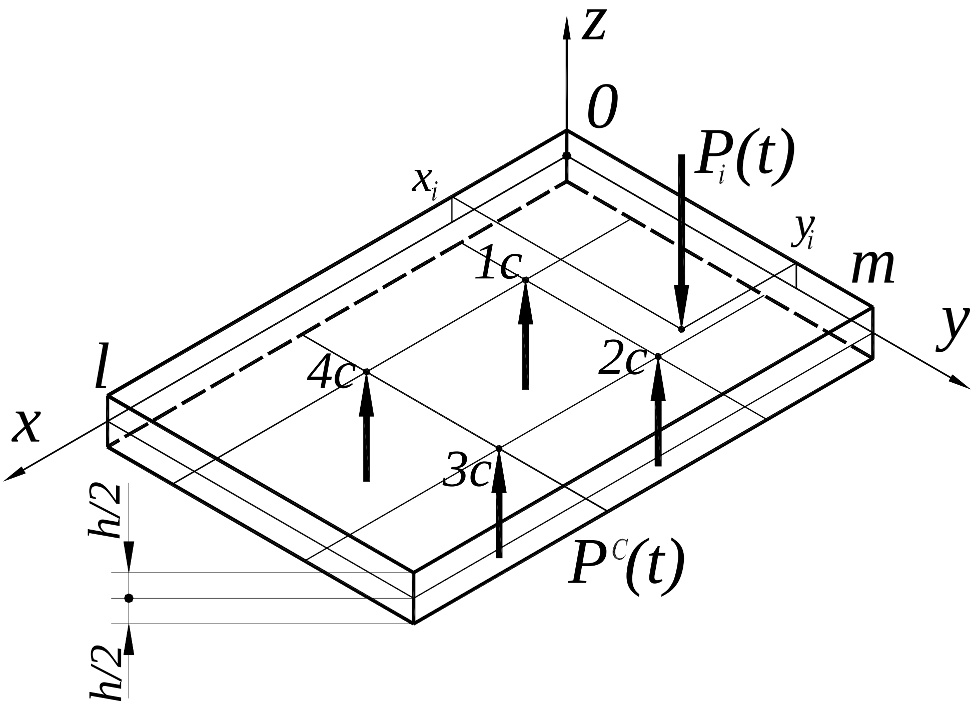


Рисунок 5.36 – Схема «гасіння» коливань

Система рівнянь нестаціонарних коливань прямокутної пластини під дією набору поперечних навантажень (збурювальних і керуючих) аналогічна (5.12).

Вкажемо, що в (5.12) $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i(x,y,t)$ і $\sum\limits_{i=1}^{Nc} P_i^c(x,y,t)$ – системи збурювальних і керуючих навантажень (для активного «гасіння»).

Тому що потрібно «гасити» коливання по всій серединній площині пластини, то як критерій управління можна вибрати:

$$w(x,y,t)=0 \qquad (5.19)$$

(рівність нулю значень прогинів). В принципі для виконання умови (5.19) необхідно впливати на пластину нескінченною системою керуючих сил, розташованих по всій поверхні пластини. Однак практична реалізація такого випадку навантаження неможлива. Замінимо умову (5.19) більше реальним, а саме, будемо розглядати тільки кінцеве число керуючих впливів *Nc*. Як критерій управління можна вибрати наступні вирази:

$$w\left(x_{cj}, y_{cj}, t\right) = 0, \tag{5.20}$$

де (x_{cj}, y_{cj}) – точки прикладення *Nc* керуючих впливів.

Використовуючи розв’язання прямої задачі для прогинів (5.13) і критерії управління (5.20) для *Nc* керуючих впливів, можна одержати систему з *Nc* інтегральних рівнянь Вольтерра I роду:

$$\sum_{i=1}^{Nc} \int_0^t P_i^C(\tau) K_i^W\left(x_{cj}, y_{cj}, t-\tau\right) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t P_i(\tau) K_i^W\left(x_{cj}, y_{cj}, t-\tau\right) d\tau \tag{5.21}$$

Розв’язання зазначеної системи рівнянь (5.21) аналогічно системі (5.15).

Числові розрахунки виконувалися при наступних значеннях параметрів: $\rho=7890$ кг/м^3; $E=2.07\cdot10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м.

Координати точок прикладення двох незалежних поперечних збурювальних навантажень, прикладених у точках (x_{01}, y_{01}) і (x_{02}, y_{02}): $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 0.5$ м, $y_{02} = 0.15$ м..

Координати прикладення системи керуючих навантажень: $x_{c1} = 0.29$ м, $y_{c1} = 0.19$ м, $x_{c2} = 0.29$ м, $y_{c2} = 0.21$ м, $x_{c3} = 0.31$ м, $y_{c3} = 0.21$ м, $x_{c4} = 0.31$ м, $y_{c4} = 0.19$ м.

Координати центра пластини: $x_m = 0.3$ м, $y_m = 0.2$ м.

Перший розрахунковий випадок майже повністю аналогічний викладеному в попередньому пункті, за винятком схеми розташування керуючих впливів (див. рис. 5.37).

На рис. 5.38 і рис. 5.39 представлено результати числових розрахунків по гасінню коливань на пластині. На рис. 5.38 показані збурювальні навантаження, і керуючі впливи. На рис. 5.39 – прогини без керуючих впливів і у випадку активного гасіння. Жирною кривою на цьому графіку показані прогини в центрі пластини.

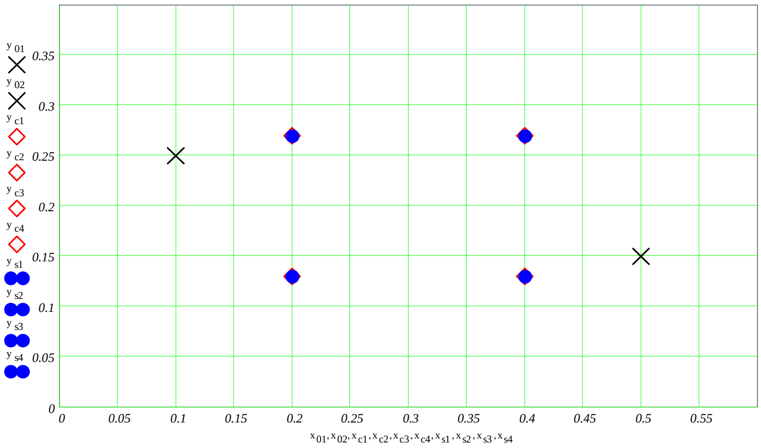


Рисунок 5.37 – Схема пластини в плані

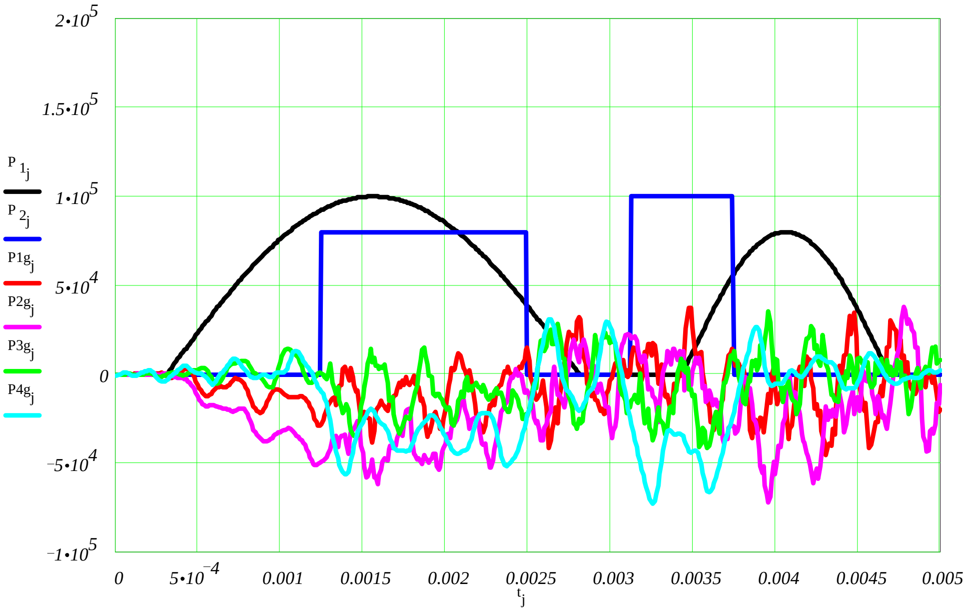


Рисунок 5.38 – Збурювальні та керуючі навантаження

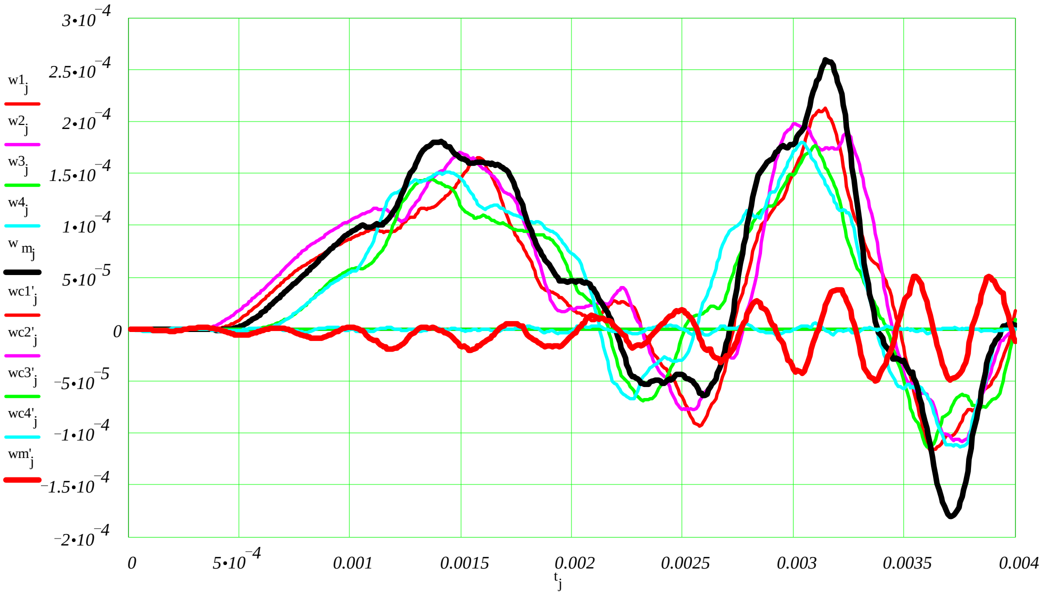
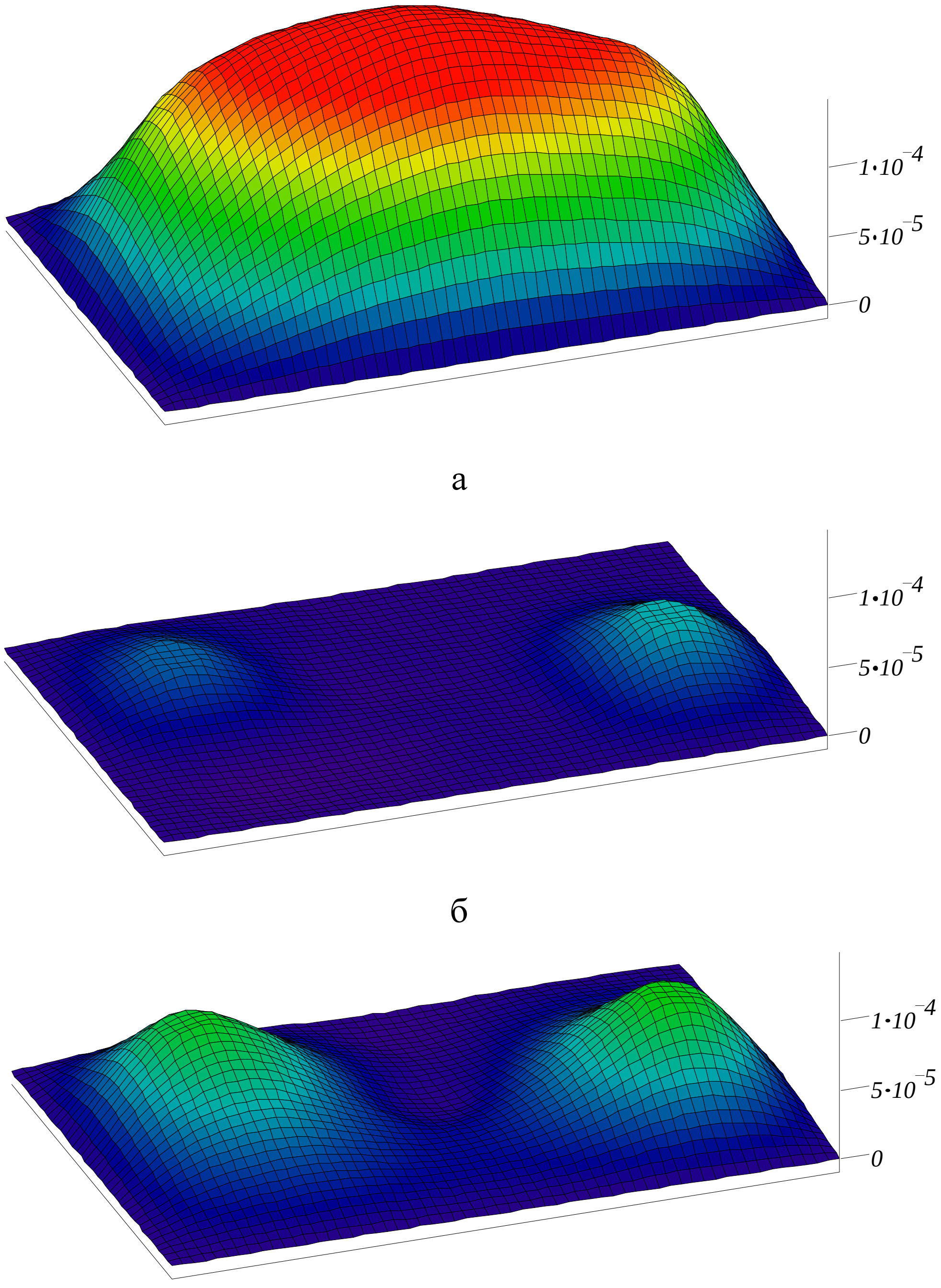


Рисунок 5.39 – Прогини при гасінні коливань пластини

На наступних рисунках (рис. 5.40, рис. 5.41, рис. 5.42) показано розподіл прогину по поверхні пластини в ті ж моменти часу ($t = 0.0014$ с; $t = 0.00252$ с; $t = 0.0032$ с) як і для випадку управління на малій області. Опис рисунків так само аналогічний наведеним раніше. Для можливості візуального порівняння на рисунках рис. 5.40, *в*, рис. 5.41, *в*, рис. 5.42, *в* (третім зображенням) показаний рис. 5.33, *б*, рис. 5.34, *б*, рис. 5.35, *б* (друге зображення з попереднього розрахунку).

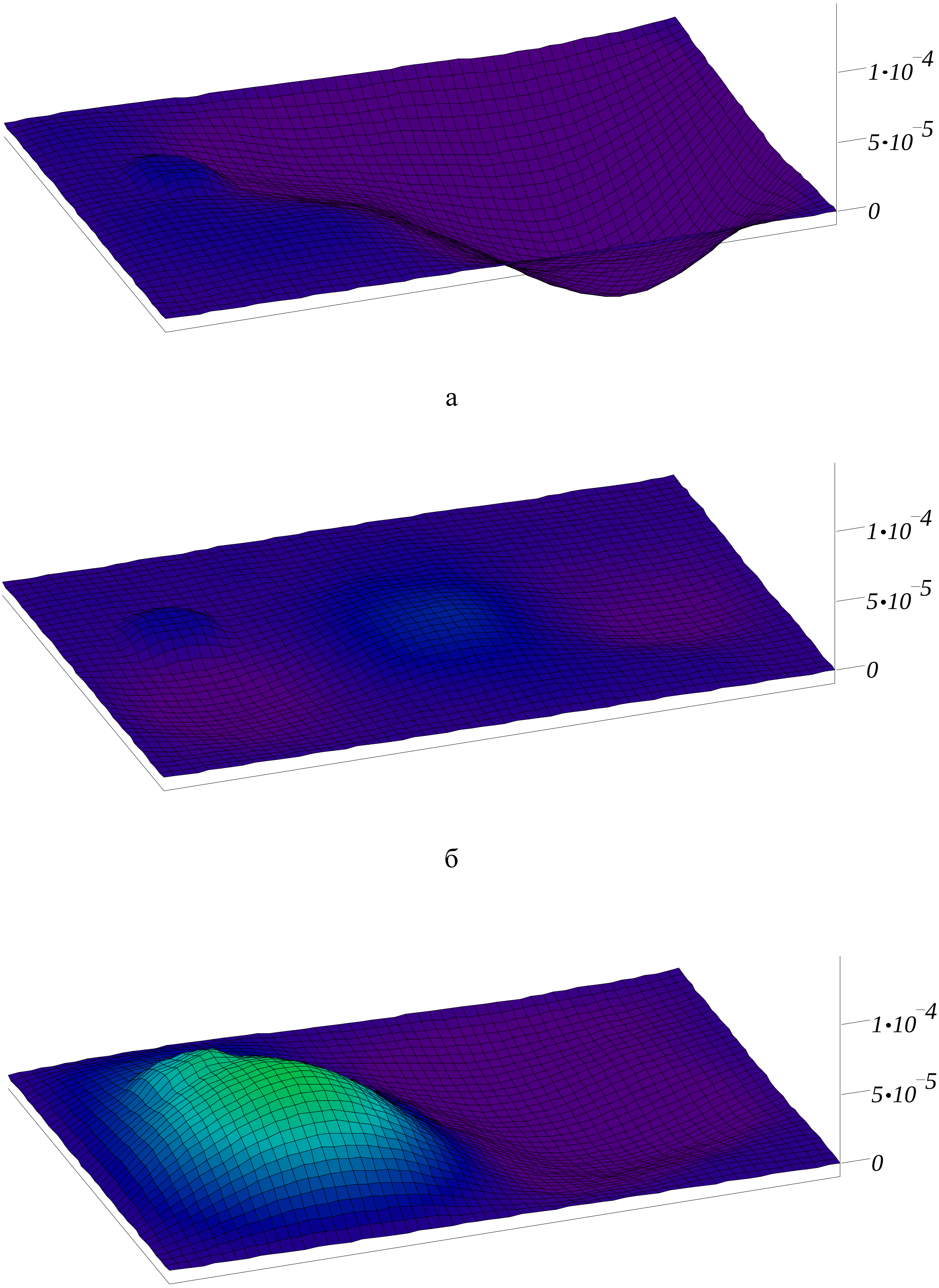


а

б

в

Рисунок 5.40 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.0014$ с



в

Рисунок 5.41 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.00252$ с

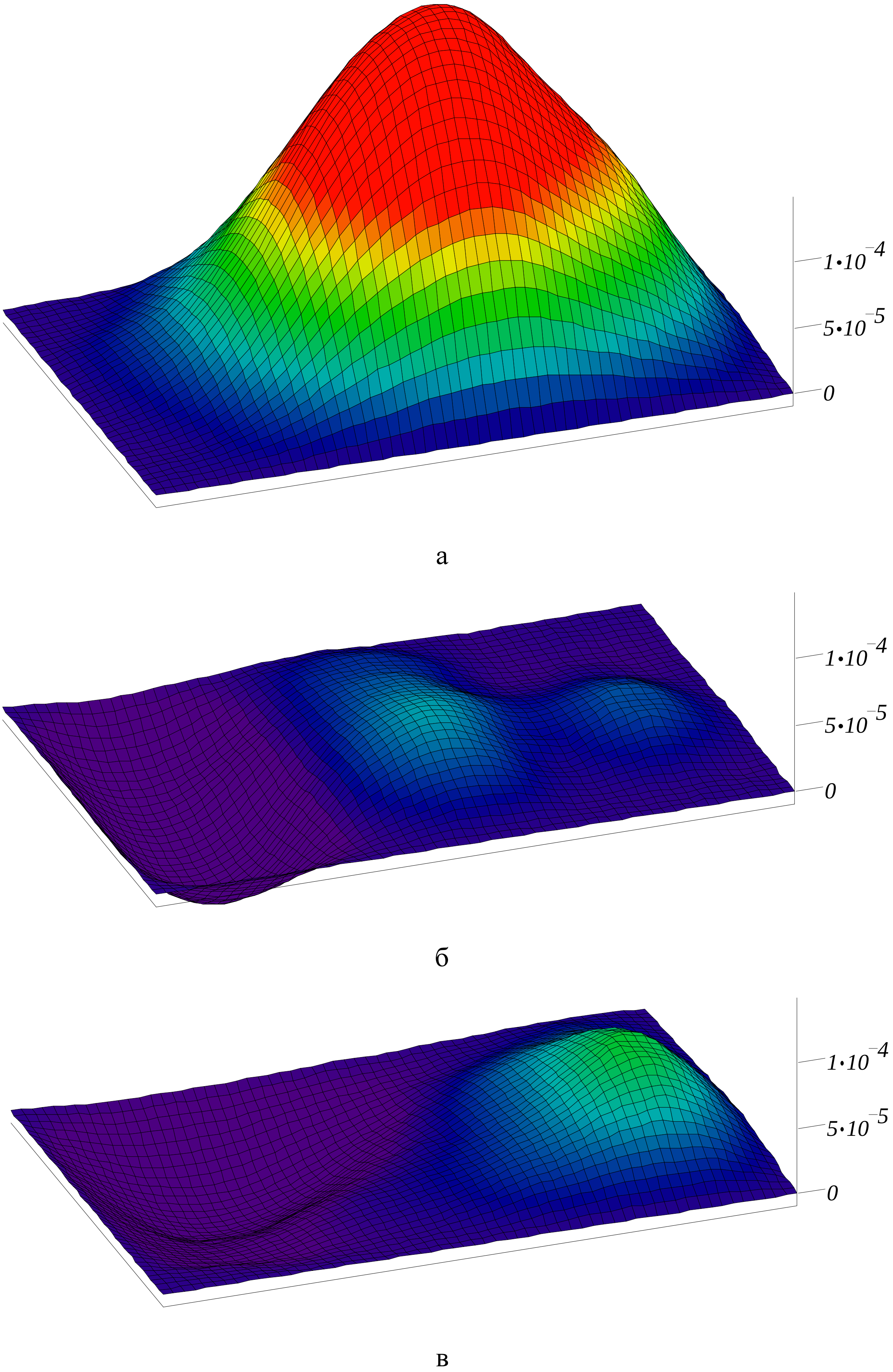


Рисунок 5.42 – Розподіл прогину по пластині при $t = 0.0032$ с

Якщо зрівняти на рис. 5.40, рис. 5.41, рис. 5.42 випадок гасіння по всій пластині – *б* з гасінням на малій області в центрі пластини – *в*, то видно, що вдається помітно зменшити амплітуди прогинів практично по всій поверхні пластини. Виключенням є області навколо точок прикладення сил, що збурюють коливання, – у цих точках амплітуди знижені, але біля навантажень вони залишаються помітними (хоча меншими).

Також досліджувався вплив геометричних розмірів пластини на можливість гасіння коливань по всій поверхні пластини.

Для розрахунку були прийняті такі ж параметри, як у першому прикладі розрахунку, за винятком довжини і ширини пластини: l=1.2 м, m=0.8 м (див. рис. 5.43), а також координат точок.

Координати точок прикладення двох незалежних поперечних збурювальних навантажень у точках (x_{01}, y_{01}) і (x_{02}, y_{02}): $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 1$ м, $y_{02} = 0.5$ м.

Координати прикладення системи керуючих навантажень: $x_{c1} = 0.4$ м, $y_{c1} = 0.2$ м, $x_{c2} = 0.4$ м, $y_{c2} = 0.6$ м, $x_{c3} = 0.8$ м, $y_{c3} = 0.6$ м, $x_{c4} = 0.8$ м, $y_{c4} = 0.2$ м.

Координати центра пластини: $x_m = 0.6$ м, $y_m = 0.4$ м.

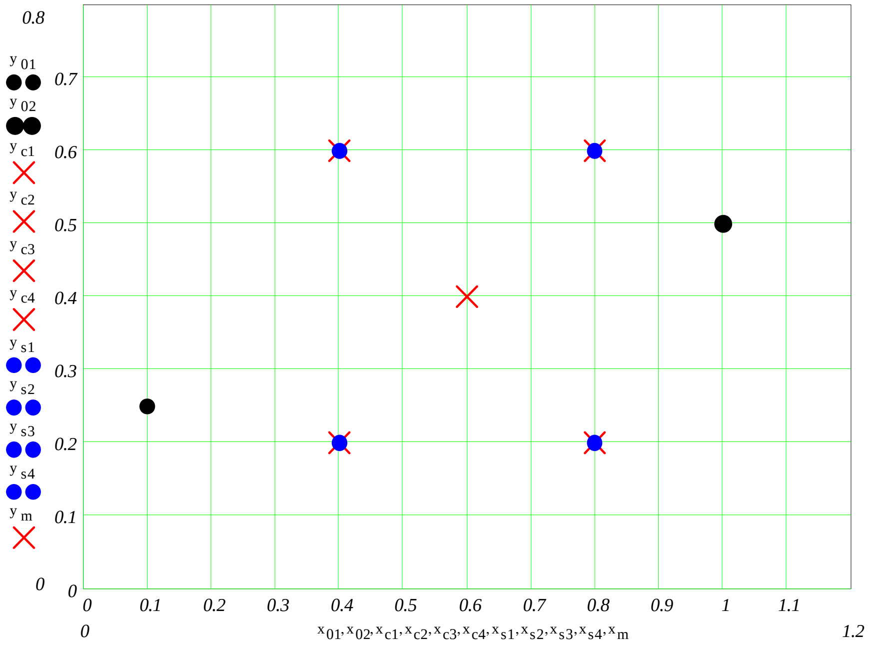


Рисунок 5.43 – Схема пластини в плані

На рис. 5.44 і рис. 5.45 представлено результати числових розрахунків для випадку зі збільшеними розмірами пластини. Опис рисунків аналогічний наведеним раніше.

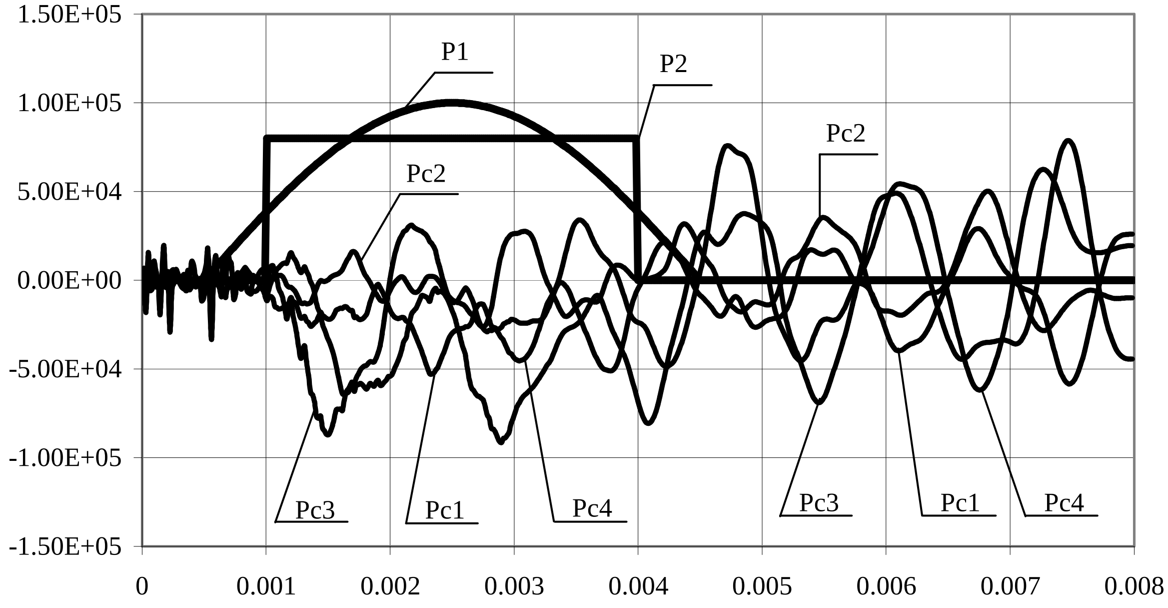


Рисунок 5.44 – Результати гасіння коливань пластини (сили у часі)

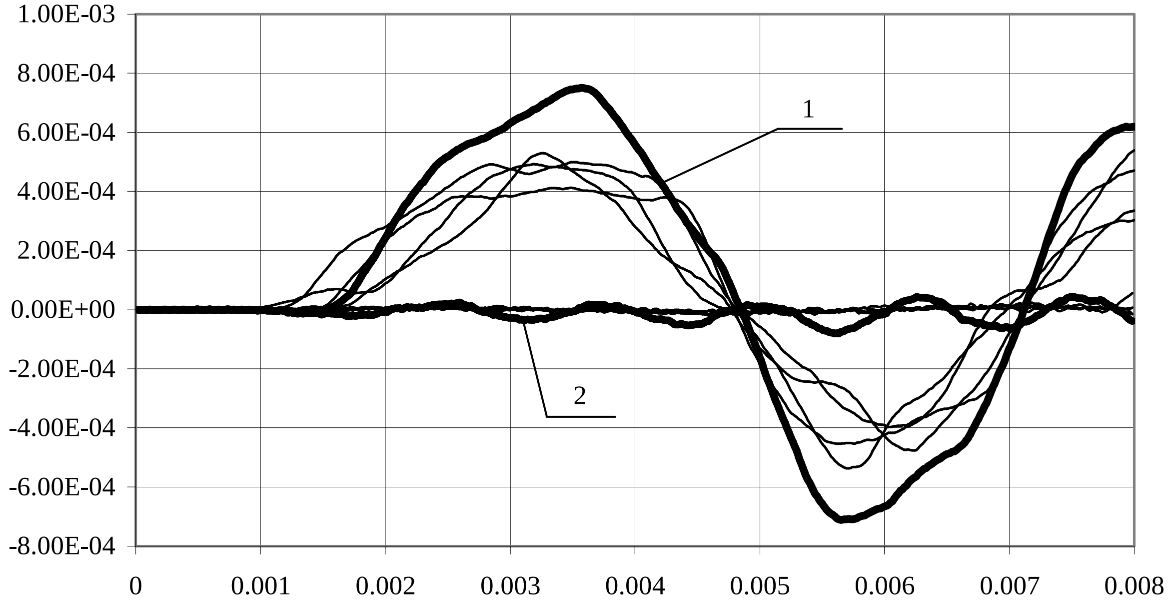
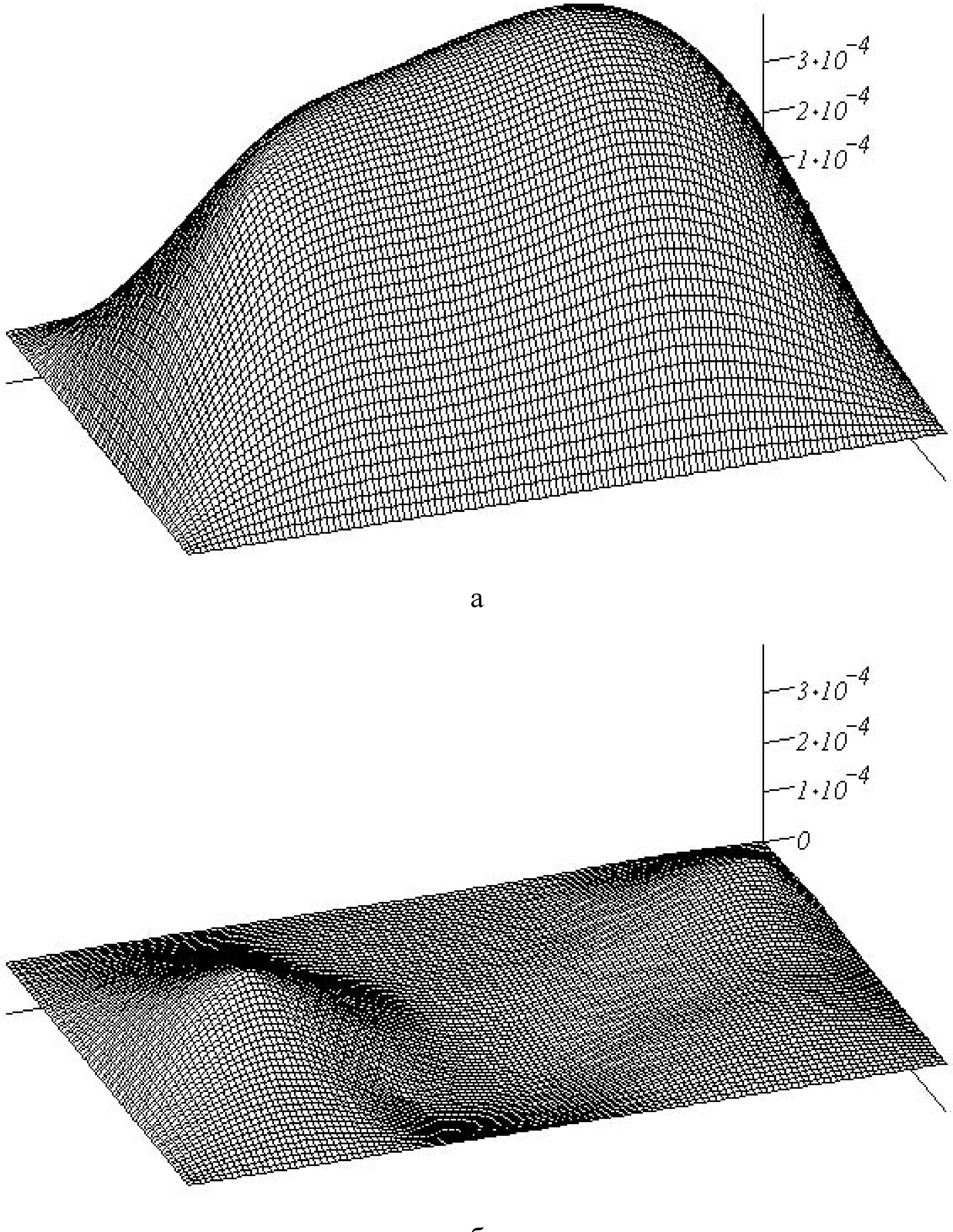


Рисунок 5.45 – Результати гасіння коливань пластини (прогини у часі)

На рис. 5.45 показано зміни в часі прогинів пластини в точках прикладення керуючих навантажень і у центрі пластини. Група кривих 1 на рис. 5.45 отримана при відсутності керуючих впливів, а група кривих 2 на цьому рисунку відповідає прикладенню чотирьох керуючих впливів, закон зміни в часі, яких знайдений в результаті розв'язання оберненої задачі управління.



а

б

Рисунок 5.46 – Розподіл прогину по серединній площині пластини

На рис. 5.46 ілюструється розподіл прогинів у серединній площині пластини в момент часу $t_0 = 3.2 \cdot 10^{-3}$ с.

Рис. 5.46, *а* відповідає випадку, коли відсутнє управління, а на пластину діють тільки імпульсні навантаження, що збурюють коливання, рис. 5.46, *б* відповідає випадку, коли здійснюється управління – прикладена система тих же збурювальних навантажень, і чотирьох керуючих навантажень, які їх гасять.

Вкажемо, що для наведеного розрахунку (див. рис. 5.44 – рис. 5.46) величина максимального прогину зменшується більш ніж в 3 рази, а величина сумарного прогину пластини зменшується майже в 8 разів: $\frac{w_\Sigma}{wc_\Sigma} = 7.756$, де $w_\Sigma = \sum_x \sum_y w(x, y, t_0)$ – сумарний прогин пластини, у випадку, коли прикладені тільки збурювальні сили; $wc_\Sigma = \sum_x \sum_y w(x, y, t_0)$ – сумарний прогин пластини у випадку, коли здійснюється активне «гасіння».

У розглянутій задачі число керуючих сил (для того, щоб з високою точністю забезпечити виконання критеріїв управління) повинне бути великим. Тому виникає проблема про вибір оптимальних параметрів у задачі з великим числом критеріїв (у тому числі й суперечливих), а, отже, для істотного поліпшення системи управління необхідно використати спеціальні математичні підходи, один із яких описаний у монографії [121].

5.6. Висновок по розділу

Показано можливість управління нестаціонарними коливаннями механічних системи, які складаються з прямокутних пластин та різних зосереджених особливостей за допомогою додаткових (керуючих) навантаженнь.

Розглянуто задачі управління коливаннями в точці пластини для механічної системи пластина–зосереджена маса. Запропонована схема управління та алгоритм визначення керуючого впливу при розв’язанні оберненої задачі для механічної системи є ефективними і досить стійкими.

Крім того, розглянута подібна задача, для випадку гасіння коливань в рамках пасивного вібрhозахисту.

Приведено розв’язання задачі управління поперечними коливаннями на невеликій області пластини за допомогою системи чотирьох додаткових керуючих впливів, закони зміни у часі яких визначаються.

Досліджено можливість гасіння коливань по всій поверхні пластини скінченою системою керуючих навантажень.

У заключенні вкажемо, що у випадку створення систем гасіння нестаціонарних коливань для відповідальних конструкцій і споруд необхідно сполучати активні та пасивні схеми віброзахисту. Таким чином, значно покращаться результати гасіння коливань, тому що активні елементи будуть ефективно знижувати перші швидкі сплески, а пасивні, хоча і мають деяке запізнювання, завдяки накопичувальному ефекту будуть добре згладжувати коливання на заключних етапах управління коливальним процесом.

Основні наукові результати, наведені в четвертому розділі,опубліковано у працях автора [1, 2, 13, 16, 17, 20, 22, 31, 36 – 38, 40, 41, 47].

РОЗДІЛ 6

ВИКОРИСТАННЯ ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ УРАХУВАННЯ ДИСИПАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕФОРМІВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На основі операційного числення, синус- перетворення Фур'є і теореми Ефроса запропоновано новий підхід до аналізу перехідних процесів у в’язкопружному континуумі, викликаних нестаціонарними силовими збурюваннями. Він дозволяє враховувати внутрішнє в'язке і гістерезисне тертя в матеріалах, яке описується моделями Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара. Зазначений підхід використовує згладжувальні лінійні інтегральні оператори і може бути застосований для будь-яких розв’язків, які можуть бути отримані в рамках теорії пружності та представлені у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки з ядрами Коші. Згладжувальні інтегральні оператори дозволяють перераховувати ці ядра для змінених коефіцієнтів тертя, а також відновлювати пружну складову розв'язання, збурену внутрішнім тертям. Досліджено алгебраїчні властивості цих операторів. Наведено приклади розрахунків для поперечних коливань пластини у в’язкопружній постановці.

6.1. Вступ і постановка задачі

На сьогодні у теорії пружності отримано значну кількість аналітичних розв'язань для задач нестаціонарного деформування пружних елементів конструкцій [65, 82, 83, 84, 96, 97, 105, 134, 135, 156, 220]. Існує кілька загальноприйнятих аналітичних методів розв'язання зазначених задач. Один з основних методів одержання аналітичного розв'язку нестаціонарних задач – це використання інтегрального перетворення Лапласа. Багато розв’язків можуть бути представлені у вигляді інтегралів згортки з ядрами Коші. Наприклад, у монографіях [82, 83, 84, 105, 220] описано кілька розв'язань для пружного деформування різних елементів конструкції.

Дослідження дисипативних властивостей в’язкопружних матеріалів, як правило, здійснюється з використанням диференціальних операторів [8, 9, 111].

У статті [42] показано, що для отриманих аналітично «пружних» розв’язків (одержаних в рамках теорії пружності) у вигляді інтегралів згортки з ядрами Коші можна модифікацією ядра моделювати наявність внутрішнього в’язкого тертя Кельвіна – Фойхта.

А саме, нехай розв’язок рівняння коливань пружного континуума

$$\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{u}\right] + \vec{P}(\mathbf{x},t) \qquad (6.1)$$

представлено у вигляді:

$$u(t) = \int_0^t K_0(t-\tau)P_0(\tau)\,d\tau, \qquad (6.2)$$

де ρ – густина матеріалу; $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \left[u_x, u_y, u_z\right]$ – вектор переміщень у деякій точці тіла V (стрижня, балки, пластини або оболонки) з координатами $\mathbf{x}$ у момент часу t; $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left[.\right]$ – диференціальний оператор, складений із часткових похідних за координатами, який описує дію сил пружності; $\vec{P}(\mathbf{x},t)$ – векторна величина навантаження (зовнішньої сили), що збурює коливання, зосередженої у відомій точці $\mathbf{x}_0$,

$$\vec{P}(\mathbf{x},t) = P_0(t)\cdot\vec{n}\cdot\delta_0(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}), \qquad (6.3)$$

$\vec{n}$ – орт напрямку дії сили; $y = \delta_0(\mathbf{x})$ – дельта-функція Дірака; $u(t)$ – переміщення об'єкта в деякій точці $\mathbf{x}_S$, що цікавить дослідника; функція $y = P_0(t)$ – зовнішнє нестаціонарне збурювальне навантаження, прикладене в точці $\mathbf{x}_0$; функція $y = K(t)$ – скінченно-різницеве ядро Коші інтеграла Дюамеля, яке несе інформацію про деформівний об'єкт.

Вкажемо, що для реальних елементів конструкцій відбувається не пружне, а в’язкопружне деформування. Коли сили в’язкого тертя малі – ними, природно, зневажають. Однак, в багатьох випадках, дисипацію енергії при механічних коливаннях необхідно враховувати. У роботі [70] в загальному виді описане застосування операторного методу розрахунку вимушених коливань в'язкопружної механічної системи; викладено спосіб, який використовується при розробці методики динамічного розрахунку циліндричних пружин (для моделі тонкого гвинтового бруса). Більш докладне розв'язання задачі для гвинтового бруса наведене в [68]. У згаданих роботах аналізувався випадок кінематичного порушення коливань в одномірному в'язкопружному континуумі.

В даній дисертаційній роботі розглядається силове порушення коливань у в'язкопружному тілі загального виду.

Тоді урахування дисипації зводиться до коректування співвідношення (6.2), у якому використовується інше інтегральне ядро $y = K_\eta(t)$, форма якого згладжена тертям:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t-\tau) P_0(\tau) d\tau . \tag{6.4}$$

Вкажемо, що якщо навантаження прикладене не в одній точці, а в дискретному наборі або на континуальній множині точок, то використовується *принцип лінійної суперпозиції*, і в правій частині рівностей (6.2) і (6.4) з'являється сума або ще один (зовнішній) інтеграл.

Різницеве ядро $y = K_\eta(t)$ може бути отримано трьома основними способами:

1) як реакція системи на удар, зареєстрована в результаті фізичного моделювання динаміки об'єкта (тобто, у ході спеціально поставленого та проведеного експерименту);

2) як розв'язок рівнянь, що описують аналогічний перехідний процес при урахуванні тертя;

3) шляхом відповідної модифікації, що вигладжує ядра $y = K_0(t)$, отримані при математичному моделюванні пружних деформацій без урахування тертя.

В продовження роботи [42] тут вивчається третій шлях і аналізуються можливості застосування процедури модифікації ядра не тільки до найпростішого виду внутрішнього тертя – в’язкого, яке описується моделлю Кельвіна–Фойхта, але й до магніто-гістерезисного тертя (що виникає в пружних континуумах зі сталі, нікелю та інших феромагнітних матеріалів), а також до механіко-гістерезисного тертя, що виникає на межах твердих зерен у розплавах та інших гетерогенних пружних середовищах. Ми не будемо заглиблюватися у фізичні аспекти моделей, а, насамперед, будемо розглядати можливість модифікації, що згладжує ядра відповідно до гіпотези гістерезисного тертя Бока–Шліппе–Колара.

6.2. Вплив в’язкого тертя на частоти та амплітуди коливань

Якщо в задачі не враховується тертя, то ядро інтеграла (6.2), яке тут і далі позначено $K_0(t)$, може бути обчислене як сума ряду [82]

$$K_0(t) = \sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j) \cdot [\sin(\omega_j t)/\omega_j], \tag{6.5}$$

де ω_j, $j = 0,1,2,\ldots$ – кругові частоти вільних коливань континуума, перераховані в порядку зростання їхньої величини; $y = f(\omega)$ – амплітудні функції, що виникають при локалізації власних форм коливань з частотою ω в точці x_0.

Ядру-оригіналу $y = K_0(t)$ відповідає його зображення по Лапласу

$$K_0(s) = \sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j)/[s^2 + \omega_j^2]. \tag{6.6}$$

Відзначимо, що всі значення частот ω_j у цій сумі є додатними числами, причому, якщо спеціально не підбирати розміри, то для двох- або тривимірних континуумів вони не є кратними. Тому ядро $y = K_0(t)$, що відповідає прямокутній пластині, на рис. 6.1 не має періоду повторення, а зниження початкової амплітуди коливань є наслідком накладення гармонік з різними фазами. Вкажемо, що на рис. 6.1 показано ядра для розрахунку поперечних коливань прямокутної пластини з розмірами $0.6\times 0.4\times 0.04$ м; декремент загасання $d_0 = 0.07$.

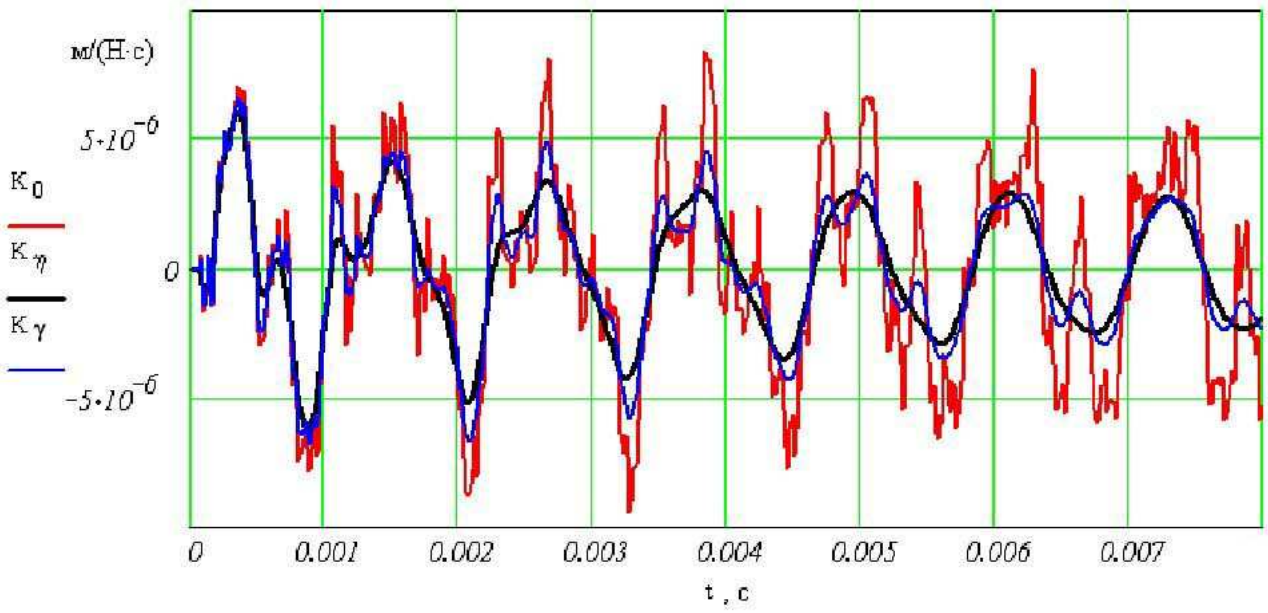


Рисунок 6.1 – Ядра інтегралів $y = K_0(t)$ і під дією в’язкого $y = K_\eta(t)$ і гістерезисного $y = K_\gamma(t)$ тертя

Після урахуванні внутрішнього тертя Кельвіна–Фойхта, що має коефіцієнт тертя η, в операторі сил пружності з'являється додатковий член, пропорційний швидкості переміщення,

$$\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = \mathcal{L}_\mathbf{x}\left[\mathbf{u} + \eta\cdot\partial\mathbf{u}/\partial t\right] + \vec{P}(\mathbf{x},t), \tag{6.7}$$

а рівність (6.6) здобуває наступний вид:

$$K_\eta(s) = \sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j)/[s^2 + \eta\cdot\omega_j^2\cdot s + \omega_j^2], \tag{6.8}$$

звідки одержуємо формулу для оригіналу

$$K_\eta(t) = \sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j)\cdot\exp(-\alpha_j t)\cdot[\sin(\beta_j t)/\beta_j], \tag{6.9}$$

де дійсні числа ω_j і функція $f(\omega)$ – ті ж, що і вище, а комплексні частоти

$$\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j,\ \alpha_j < 0,\ \beta_j > 0,\ i^2 = -1 \qquad (6.10)$$

знаходяться з характеристичного рівняння

$$\lambda_j^2 + \eta\omega_j^2 \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0. \qquad (6.11)$$

За умови $\omega_j < 2/\eta$ частоти λ_j розміщуються в комплексній площині на колі, показаному на рис. 6.2, *а*, а відповідні гармоніки описують загасаючі періодичні коливання; множник, що демпфірує, для *j*-ї гармоніки має вигляд

$$z_j(t) = \exp(-0.5\eta\omega_j^2 t). \qquad (6.12)$$

При значеннях $\omega_j > 2/\eta$ частоти λ_j зміщаються на від’ємну піввісь, а коливання стають аперіодичними.

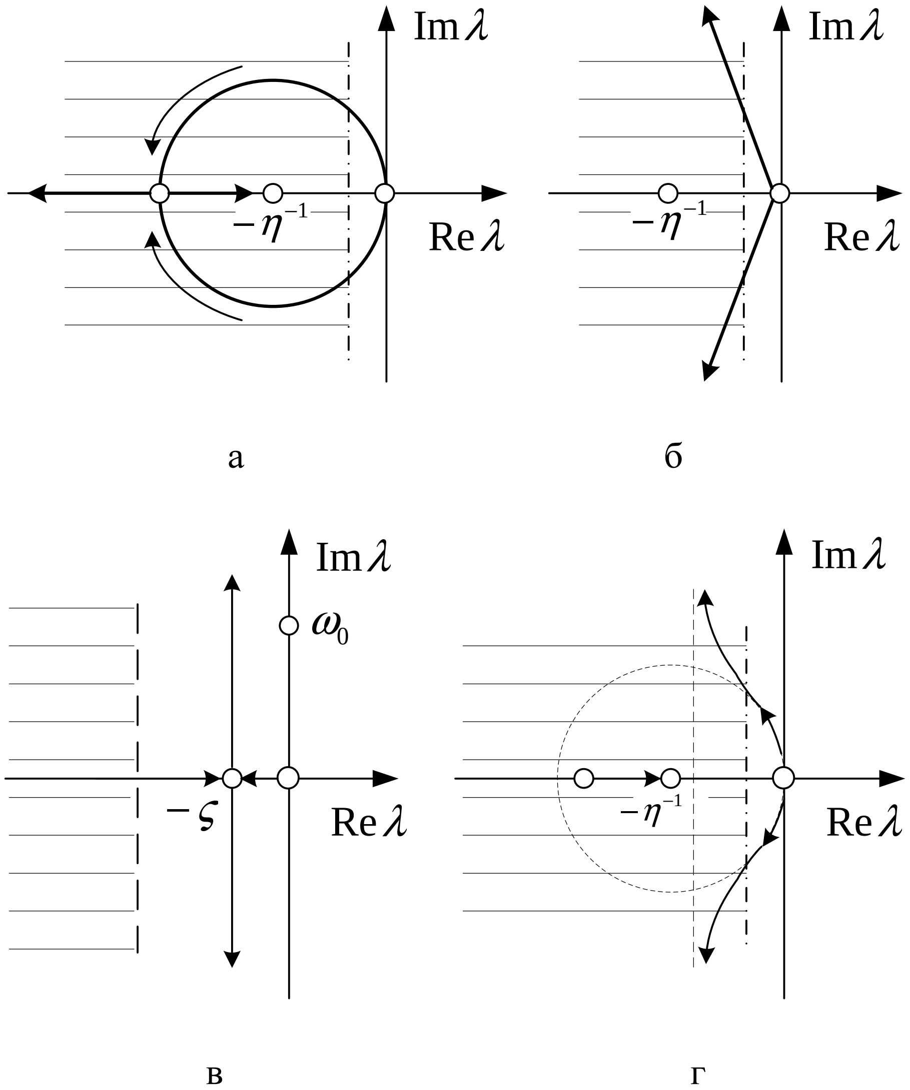
На рис. 6.2, *а* ліворуч штрихпунктирної прямої в’язке демпфірування виявляється настільки сильним, що на проміжку дискретизації $\Delta t = 0.01T_0$ (тут T_0– період коливань основної гармоніки) амплітуда коливань зменшується в 2 і більше разів, і такі коливання далі можна не розглядати. У результаті для приклада динамічного деформування пластини сума (6.9) є скінченою і містить близько 80 членів.

Графік ядра $y = K_\eta(t)$ також показаний на рис. 6.1; як і слід було сподіватися, після урахуванні тертя загасання (або, висловлюючись точніше, згладжування форми) ядра підсилилося.

Для різних пружних матеріалів декремент загасання d_0 основної гармоніки різний [8, 111], але, як правило, він не виходить за межі діапазону 0.001... …01; на рис. 6.1 використано декремент загасання 7%. Отже,

$$\eta / T_0 = 0.5d_0 / \pi^2 \in [0.00005;0.005]. \qquad (6.13)$$

В [41, 42] використовувалося це співвідношення при апроксимаціях коригувального ядра.



а – Кельвіна–Фойхта; б – Бока–Шліппе–Колара;

в – зовнішнього в’язкого тертя; г – стандартного лінійного тіла

Рисунок 6.2 – Розташування комплексних частот коливань для різних моделей

6.3. Вплив гістерезисного тертя на частоти і амплітуди коливань

У моделі Бока–Шліппе–Колара [8] оператор гістерезисного тертя замість похідної за часом, як у рівності (6.7), використовує похідну за фазовим кутом для кожної форми власних коливань $\mathbf{u}_j$, і рівняння перехідного процесу приймає вид:

$$\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = L_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{u}+\gamma\sum\nolimits_{j=1,2,\ldots}(\omega_0/\omega_j)\,\partial\mathbf{u}_j/\partial t\right]+\vec{P}(t), \quad \mathbf{u}=\sum\nolimits_{j=1,2,\ldots}\mathbf{u}_j\,, \tag{6.14}$$

де γ – коефіцієнт дисипації при гістерезисному терті. Коефіцієнт γ, як і η, має фізичну розмірність часу, с.

Відзначимо, що таке тертя зберігає форми власних коливань $\mathbf{u}_j$, що відповідають задачі пружної деформації (без дисипації), тому в рамках стандартного підходу аналіз коливань не важкий і зводиться до задачі підсумовування ряду для зображення ядра у просторі Лапласу:

$$K_\gamma(s)=\sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j)/(s^2+\gamma\cdot\omega_0\omega_j\cdot s+\omega_j^2)\,, \tag{6.15}$$

а потім для оригіналу,

$$K_\gamma(t)=\sum\nolimits_{j=0,1,2,\ldots} f(\omega_j)\cdot\exp(-\alpha_j t)\cdot[\sin(\beta_j t)/\beta_j]\,, \tag{6.16}$$

причому комплексні частоти $\lambda_j=\alpha_j+i\cdot\beta_j$ рис. 6.2 *б* знаходяться з характеристичного рівняння

$$\lambda_j^2+\gamma\omega_0\,\omega_j\,\lambda_j+\omega_j^2=0\,. \tag{6.17}$$

Результат розрахунку ядра $y=K_\gamma(t)$ для прямокутної пластини при гістерезисному терті з декрементом загасання $d=0.07$ (тут він однаковий для всіх гармонік) показаний на рис. 6.1; туди ж поміщений графік ядра, отриманий для в’язкого тертя при декременті $d=0.07$.

Зіставлення результатів має безпосередній фізичний зміст: у першому випадку пластина виготовлена з вуглецевої (отже, магнітної) сталі, а в другому – з нержавіючої (не магнітної) сталі. Пружні та інерційні характеристики цих матеріалів однакові, розміри та крайові умови для пластини – теж однакові, а природа тертя – різна. Про фактори дисипації і їх зв'язок з властивостями пружного матеріалу досить докладно написано в [111], і додавати нові відомості не будемо, обмежимося посиланням.

Аналізуючи рис. 6.1, бачимо, що графіки помітно відрізняються. Гістерезисне тертя у порівнянні з в’язким тертям зменшує згладжування ядра.

6.4. Згладжувальний оператор Кельвіна–Фойхта і його властивості

Для випадку в’язкого внутрішнього тертя в статтях [41, 42] з урахуванням відомої теореми Ефроса про оригінал складного зображення [86, 98] доведено, що ядра $K_0(t)$ і $K_\eta(t)$ зв'язані співвідношенням

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t,\tau) K_0(\tau) d\tau, \tag{6.18}$$

де

$$\Psi_\eta(s,\tau) = \frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}} \right), \tag{6.19}$$

тут від'ємне число τ відіграє роль параметра.

Як бачимо, урахування тертя зводиться до коректування різницевого ядра Коші в інтегралі (6.2), і

операція коректування ядра однакова для всіх пружних систем і для всіх точок системи.

Функцію $y = \Psi(t,\tau)$ будемо називати коригувальним ядром. Якщо прийняти значення $\eta = 0$, то одержимо

$$\Psi_0(s,\tau) = \exp(-\tau s), \tag{6.20}$$

що відповідає оригіналу

$$\Psi_0(t,\tau) = \delta(t-\tau). \tag{6.21}$$

Але якщо коефіцієнт тертя $\eta > 0$, то оригінал для зображення (6.5), на жаль, відсутній у довідниках по операційному численню, і ця задача потребує розробки спеціального методу знаходження коригувального ядра.

Значення функції $\Psi_\eta(t,\tau)$ виявилися додатними, а характерний вигляд графіків, що відповідають перетинам цієї функції при постійних значеннях часу t, показаний на рис. 6.3.

З'ясуємо, чому рівняються площі $w(t)$ під графіками перетинів коригувального ядра $\Psi_\eta(t,\tau)$:

$$w(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t,\tau)\,d\tau\,. \tag{6.22}$$

Для цього застосуємо до обох частин формули (6.22) перетворення Лапласа:

$$w(s) = \int_0^\infty \Psi_\eta(s,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+\eta s}\cdot \exp\left(-\tau\cdot\frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right)d\tau = \frac{1}{s\sqrt{1+\eta s}}\,. \tag{6.23}$$

Від зображення (6.23) нескладно перейти до оригіналу, використовуючи таблицю перетворення Лапласа:

$$w(t) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{t/\eta}\right), \tag{6.24}$$

де $y = \operatorname{erf}(x)$ – це інтеграл ймовірностей [95].

Відношення $\varsigma = t/\eta$ є безрозмірною величиною і позначає зміну часу для шкали, де коефіцієнт в'язкості η є одиницею. Графік функції $w(\varsigma)$ показаний на рис. 6.4; при значеннях $\varsigma > 3$, тобто за умови $t > 3\eta$, площа під графіком відрізняється від 1 на малу величину, якою припустимо зневажити.

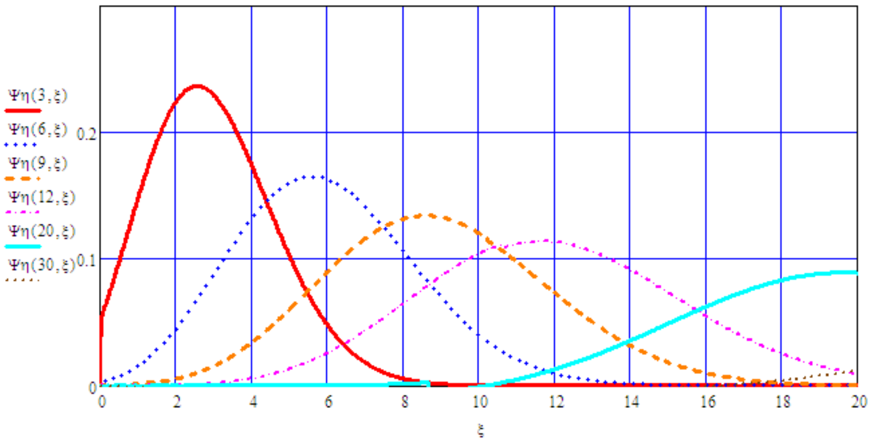


Рисунок 6.3 – Графіки коригувального ядра $\Psi\eta(\varsigma,\xi) = \Psi_\eta(t/\eta,\ \tau/\eta)$

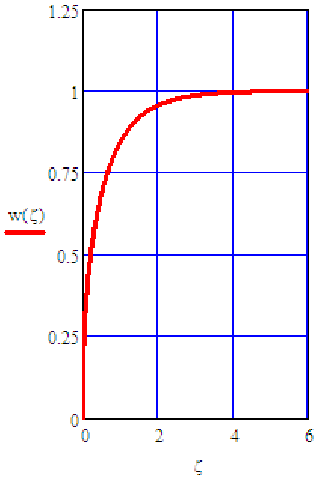


Рисунок 6.4 – Площа під графіком коригувального ядра

Аналіз розрахункових кривих $z(\tau)=\Psi_\eta(t,\tau)$ показав, що за умови $t>3\eta$ форма перетину близька до форми графіка густини нормального розподілу (тобто, до кривої Гаусса $y=\rho_0(\tau-t,\sqrt{\eta t})$), причому максимум кривої близький до моменту t, але трохи відхиляється в меншу сторону (рис. 6.3).

При виконанні умови $t/\eta >> 1$ ця функція має наступну апроксимацію:

$$\Psi_\eta(t,\tau)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}}\cdot\exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right), \tag{6.25}$$

яка збігається з функцією $y=\rho_0(\tau-a,\sigma)$ густини нормального розподілу, що має математичне сподівання $a=t$ та дисперсію $\sigma^2=\eta t$, що і було потрібно довести.

На класі оригіналів $y=K(t)$, заданих при значеннях $t\geq 0$, кусочно-неперервних та інтегрувальних на будь-якому скінченному проміжку зміни аргументу t, визначимо лінійний інтегральний оператор формулою

$$\mathcal{G}_\eta[K(t)]=\int\limits_0^\infty \rho_0(\tau-t,\sqrt{\eta t})\cdot K(\tau)d\tau. \tag{6.26}$$

З попереднього матеріалу випливає що саме цей оператор за умови $t/\eta >> 1$ за формулою

$$K_\eta(t)=\mathcal{G}_\eta[K_0(t)] \tag{6.27}$$

виконує коректування, що згладжує ядра $y=K_0(t)$ при урахуванні внутрішнього тертя Кельвіна–Фойхта, тому ми назвали його згладжувальним оператором Кельвіна–Фойхта (ОКФ).

Якщо врахувати властивості кривої Гаусса, змінна інтегрування τ в (6.23) не виходить за межі проміжку

$$[t-3\sqrt{\eta t};\, t+3\sqrt{\eta t}], \tag{6.28}$$

так що границі інтегрування можна замінити на більш вузькі, і ми одержимо:

$$\mathcal{G}_\eta[K(t)]=\int\limits_{t-3\sqrt{\eta t}}^{t+3\sqrt{\eta t}} \rho_0(\tau-t,\sqrt{\eta t})\cdot K(\tau)d\tau. \tag{6.29}$$

ОКФ багато в чому нагадує відомий алгоритм згладжування функції з ядром Гаусса [288], використовуваний при обробці результатів експерименту, але є істотна відмінність: тут дисперсія – це змінна величина, що зростає пропорційно кореню з часу t. В результаті чого носій коригувального ядра здобуває клиноподібну форму, виділену на рис. 6.5 пунктиром.

Як і будь-який інший оператор, ОКФ можна застосовувати повторно; крім того, можна перемножувати ОКФ, що відповідають різним коефіцієнтам в'язкості (тобто застосовувати послідовно). У статті [42] доведена

Теорема. Нехай дані два коефіцієнти в’язкого тертя η_1, η_2. Тоді за умови $t/(\eta_1+\eta_2) >> 1$ виконується рівність

$$\mathcal{G}_{\eta_2}[\mathcal{G}_{\eta_1}[K(t)]] = \mathcal{G}_{\eta_1+\eta_2}[K(t)]. \tag{6.30}$$

Доказ. Повторному згладжуванню відповідає коригувальне ядро наступного виду:

$$\Psi_\Sigma(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1\xi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1\xi}\right) d\xi. \tag{6.31}$$

За умови $t/\eta >> 1$ цей інтеграл можна замінити більше простим:

$$\Psi_\Sigma(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1 t}\right) d\xi, \tag{6.32}$$

і в аргументі експоненти виділити повний квадрат по змінній ξ:

$$-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1 t} = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2\tau}{\eta_1+\eta_2}\right]^2 - \frac{(\tau-t)^2}{2t\cdot(\eta_1+\eta_2)}. \tag{6.33}$$

Отже

$$\begin{gathered} \Psi_\Sigma(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2t\cdot(\eta_1+\eta_2)}\right) \times \\ \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2\tau}{\eta_1+\eta_2}\right]^2\right) d\xi \end{gathered} . \tag{6.34}$$

Для інтеграла скористаємося рівностями

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2t}\cdot\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2}\cdot\left[\xi-\frac{\eta_1 t+\eta_2\tau}{\eta_1+\eta_2}\right]^2\right)d\xi\approx$$

$$\approx\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2t}\cdot\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2}\cdot\xi^2\right)d\xi=\sqrt{2\pi t\cdot\eta_1\eta_2/(\eta_1+\eta_2)} \tag{6.35}$$

і, після скорочення однакових виразів, одержимо:

$$\Psi_\Sigma(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta_1+\eta_2)t}}\cdot\exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2(\eta_1+\eta_2)t}\right), \tag{6.36}$$

що й було потрібно довести.

Якщо використати для аналізу заміняючі схеми, які показані рис. 6.6, то доведений результат здасться тривіальним. Але не слід забувати, що за умови $t\rightarrow+0$ він порушується, і це зайвий раз свідчить про недосконалість спрощених схем.

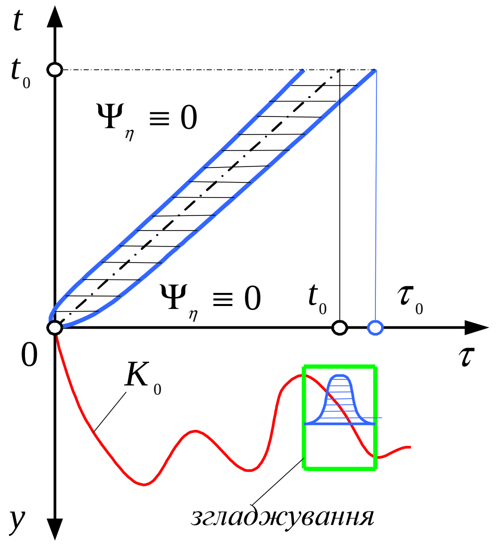
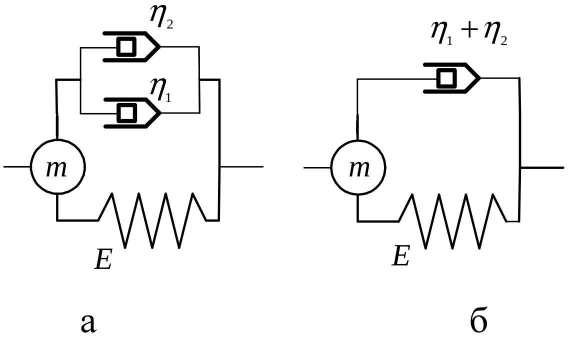


Рисунок 6.5 – Графічна інтерпретація процедури згладжування ядра



На схемах позначено: m – маса;

E – пружність, $\eta_{1,2}$ – в'язкість.

а – послідовне згладжування;

б – сумарне згладжування

Рисунок 6.6 – Заміняючі схеми, для динамічного аналізу в’язкопружної поведінки матеріалу

Помітимо, що при значенні $\eta = 0$ оператор $\mathcal{G}_0[.]$ задовольняє тривіальній рівності $\mathcal{G}_0[K(t)] = K(t)$ і є одиничним (тотожним) оператором $\mathcal{I}[.]$. Якщо в рівнянні (6.7) і формулі (6.16) використати від'ємне значення η, то ми прийдемо до оберненого оператора Кельвіна–Фойхта, тобто

$$\mathcal{G}_\eta^{-1}[.] = \mathcal{G}_{-\eta}[.]. \qquad (6.37)$$

Обернений оператор не згладжує, навпаки, після його дії розмах коливань зростає відповідно до загальної теорії операторів [14], близьких до тотожного. Його значення можна шукати як суму наступного ряду:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_\eta^{-1}[.] = [\mathcal{I}[.] - (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])]^{-1} = \\ &= \mathcal{I}[.] + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.]) + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])^2 + (\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.])^3 + \ldots \end{aligned} \qquad (6.38)$$

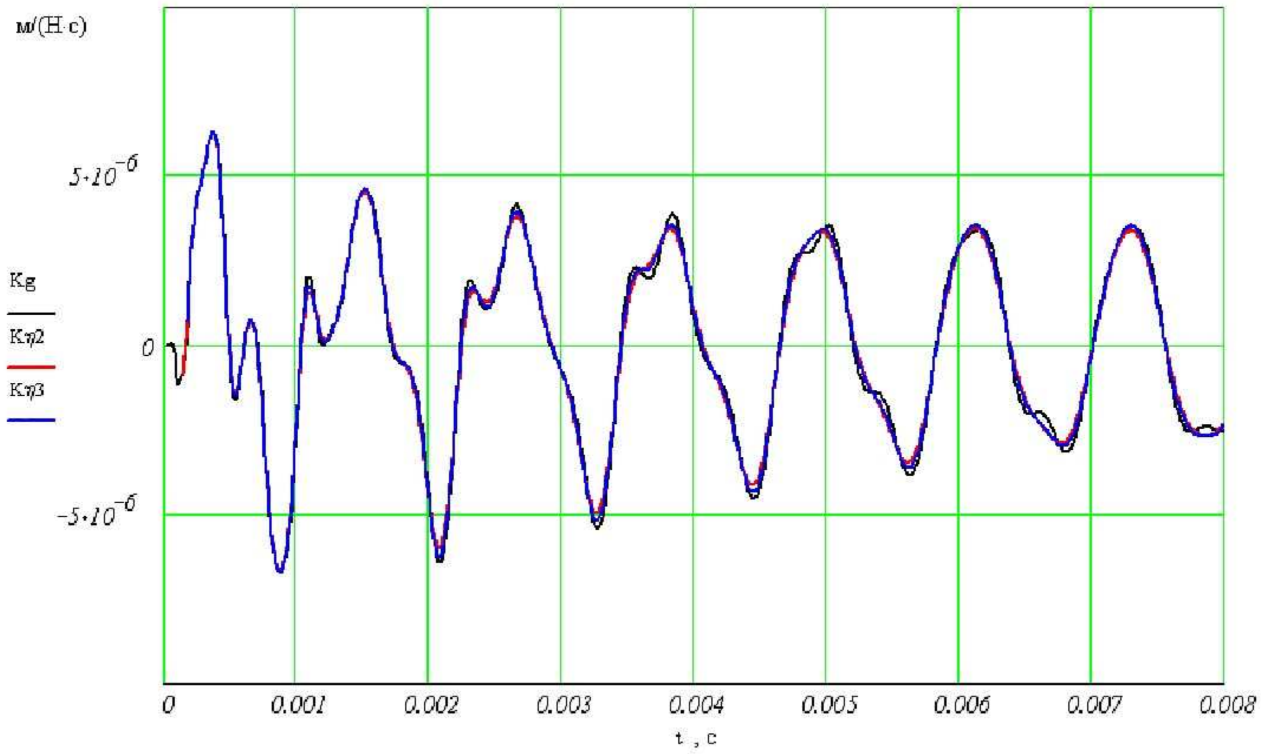
Якщо коефіцієнт тертя η малий, то різниця між функціями $y = K(t)$ і $y = \mathcal{G}_\eta[K(t)]$ також мала, тому в сумі (6.38) можна залишити тільки два або три перших члени, і ми одержимо наближені формули для оберненого оператора:

$$\mathcal{G}_\eta^{-1}[.] \approx 2\mathcal{I}[.] - \mathcal{G}_\eta[.] \text{ або } \mathcal{G}_\eta^{-1}[.] \approx 3\mathcal{I}[.] - 3\mathcal{G}_\eta[.] + \mathcal{G}_{2\eta}[.]. \qquad (6.39)$$

Пояснимо, навіщо потрібний обернений оператор. Припустимо, що ядро $y = K_\eta(t)$, показане на рис. 6.1, отримано не шляхом підсумовування ряду (6.5), а при виконанні лабораторних досліджень, тобто форми та частоти власних коливань невідомі. Відомо [111], що коефіцієнти внутрішнього тертя сильно залежать від температури (значно сильніше, ніж модулі пружності та зсуву). Потрібно оцінити, як зміниться ядро $y = K_\eta(t)$ (і всі інші характеристики, які залежать від цього ядра), якщо в результаті зниження температури декремент загасання d_0 зменшиться в 2 рази – до значення $d_0 = 0.035$. Для розв’язання цієї задачі повинно бути виконане обернене коректування ядра, тобто, застосований обернений ОКФ. Застосування формул (6.39) для поставленої задачі проілюстроване на рис. 6.7. Ядро $y = Kg(t)$ отримане як результат дії прямого ОКФ, а ядра $y = K\eta2(t)$ і $y = K\eta3(t)$ – як результат послідовної дії прямого (з подвоєним декрементом) і оберненого ОКФ:

$$Kg(t) = \mathcal{G}_\eta[K_0(t)]; \quad K\eta(t) = \mathcal{G}_\eta^{-1}[\mathcal{G}_{2\eta}[K_0(t)]]. \tag{6.40}$$

На рис. 6.7 розходження між графіками мале, що підтверджує ефективність методу побудови оберненого оператора (6.38).



$Kg(t)$ – точне ядро, $K\eta 2(t)$ – перше наближення (2 члени ряду),

$K\eta 3(t)$ – друге наближення (3 члени)

Рисунок 6.7 – Приклад застосування оберненого ОКФ за формулою (6.38)

Характер зміни коригувального ядра при малому часі

Апроксимація (6.22) коригувальної функції для часу $t = 0$ приймає додатні значення

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{2\eta}\right), \tag{6.41}$$

але при цьому сама коригувальна функція рівняється 0.

Щоб довести це твердження, розглянемо зображення (6.19) при $s \to \infty$ та спростимо його наступним, припустимим для цього випадку, чином:

$$\frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}} \right) \approx \frac{1}{\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}} \right). \qquad (6.42)$$

Отримане зображення має оригінал

$$y = \mathrm{erfc}(\tau / \sqrt{\eta t}) / \eta, \qquad (6.43)$$

який при $t = 0$ дорівнює 0, що і було потрібно перевірити.

Помітимо, що апроксимацією

$$\Psi_{\eta}(t,\tau) \approx \mathrm{erfc}(\tau / \sqrt{\eta t}) / \eta \qquad (6.44)$$

можна користуватися, якщо $t < \eta$, що, наприклад, актуально при розв'язанні деяких задач теорії повзучості. Що стосується моделювання коливань з урахуванням в'язкого тертя, то тут настільки малі значення часу, як правило, не використовуються, а у всьому робочому діапазоні для згладжування ядра можна застосовувати функцію (6.22).

Метод усунення особливості для розрахунку коригувального ядра

У практичному гармонійному аналізі розроблений і використовується метод Крилова для поліпшення збіжності тригонометричного ряду Фур'є [136]. Аналогічний метод можна застосувати для обчислення невласного інтеграла у формулі обернення, що для розглянутого випадку має такий вигляд:

$$\Psi_{\eta}(t,\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{1+\eta \cdot i\omega} \cdot \exp\left(\frac{-\tau \cdot i\omega}{\sqrt{1+\eta \cdot i\omega}} + t \cdot i\omega \right) \right] d\omega. \qquad (6.45)$$

Зображення $\Psi_{\eta}(s,\tau)$ представимо у вигляді суми

$$\Psi_{\eta}(s,\tau) = \frac{1}{1+\eta s}\left[\exp\left(\frac{-\tau}{\sqrt{1+\eta s}} \right) - \exp\left(-\tau \sqrt{\frac{s}{\eta}} \right) \right] + \frac{1}{1+\eta s} \exp\left(-\tau \sqrt{\frac{s}{\eta}} \right) \qquad (6.46)$$

і помітимо, що другий член є добутком двох відомих зображень, і може бути обернений при використанні згортки відповідних оригіналів; у результаті одержуємо:

$$\Psi_2(t,\tau)=\left(\frac{1}{\eta}\cdot\exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)\right)*\left(\frac{\tau}{2\sqrt{\pi t^3\eta}}\cdot\exp\left(-\frac{\tau^2}{4\eta t}\right)\right). \qquad (6.47)$$

На практиці використовується шкала $\varsigma = t/\eta$ безрозмірного часу, і наближена формула для визначення значень цієї функції має такий вигляд:

$$\Psi_2(\zeta,\tau)=\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1/\sqrt{\zeta}}^{100/\sqrt{\zeta}}\exp\left[-\left(t-1/\xi^2+(\tau/\eta)^2\xi^2/4\right)\right]d\xi; \qquad (6.48)$$

для обчислення цього інтеграла використовуються стандартні процедури пакета MathCAD.

Для першого члена приходиться, як і раніше, застосовувати формулу обернення

$$\Psi_1(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\Omega_1}\mathrm{Re}\left[\frac{\exp(t\cdot i\omega)}{1+\eta\cdot i\omega}\cdot\left(\exp\left(\frac{-\tau\cdot i\omega}{\sqrt{1+\eta\cdot i\omega}}\right)-\exp\left(-\tau\cdot\sqrt{\frac{i\omega}{\eta}}\right)\right)\right]d\omega, \qquad (6.49)$$

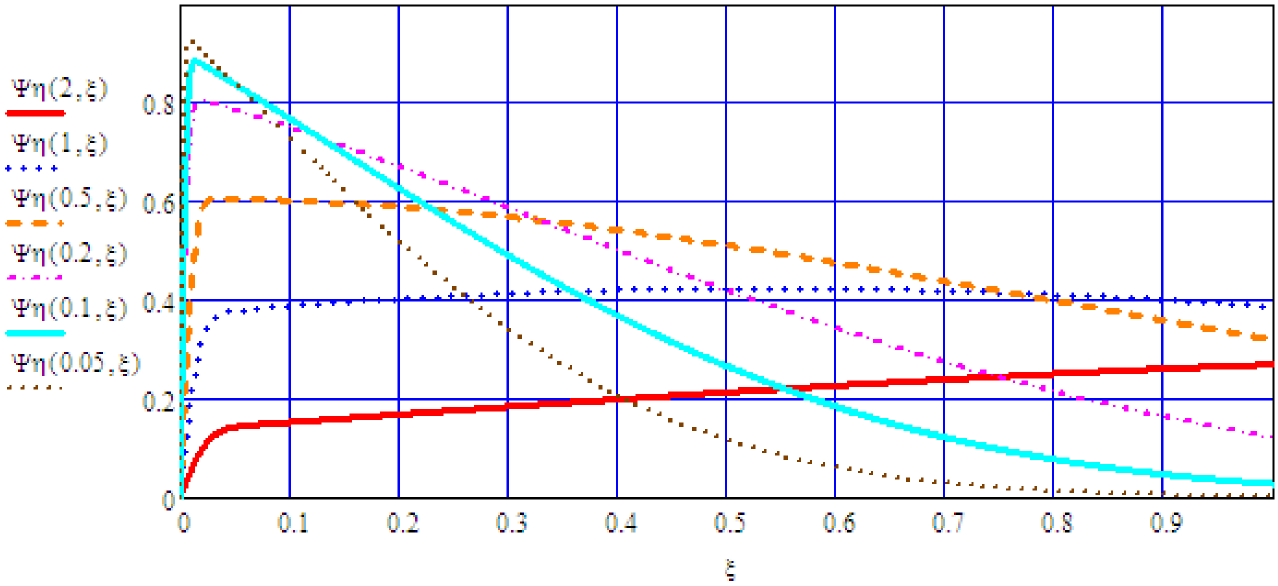
але оскільки підінтегральна функція зі зростанням частоти ω спадає значно швидше, ніж в інтегралі (6.39), то при практичному використанні цієї формули верхня границя зменшується на два порядки:

$$\Omega_1\cdot\eta>10^2.$$

Після цього використовується рівність

$$\Psi_\eta(t,\tau)=\Psi_1(t,\tau)+\Psi_2(t,\tau), \qquad (6.50)$$

яка, є нехай і наближеною, але похибка визначення ядра згідно зазначеному методу вкрай мала. Результат застосування методу для початкового проміжку часу $t<\eta$ показаний на рис. 6.8.



Отримані по формулі (6.50); ділянки монотонного зростання при значеннях $\xi < 0.01$ відповідають апроксимації (6.44)

Рисунок 6.8 – Графіки коригувального ядра $\Psi\eta(\varsigma,\xi) = \Psi_\eta(t/\eta,\, \tau/\eta)$ при малому безрозмірному часі

6.5. Згладжувальний оператор Бока–Шліппе–Колара і його властивості

Покажемо, що аналогічний підхід, але з іншим коригувальним ядром, можна застосувати для гістерезисного тертя. У цьому випадку дійсна і уявна частини комплексної частоти мають вигляд

$$\alpha_j = -h \cdot \omega_j;\ \beta_j = \omega_j \sqrt{1-h^2}\text{, де } h = 0.5\gamma\omega_0, \qquad (6.51)$$

отже

$$\lambda_j = -0.5\eta\,\omega_0\omega_j \pm i\,\omega_j\sqrt{1-0.25\cdot\gamma^2\,\omega_0^2} = \mp i\,\omega_j \cdot \exp(\mp i \cdot \varphi), \qquad (6.52)$$

а значення малого кута φ можна знайти з рівняння $\sin\varphi = h$.

Виходить, що особливі точки функції $w = K_0(s)$ під впливом тертя переміщаються по симетричних дугах кола з центром у нулі із мнимої осі в ліву комплексну напівплощину, повертаючись на постійний кут φ або $-\varphi$ (рис. 6.2, *б*). Оскільки для гістерезисного тертя величина декременту загасання $d = 2\pi h$ звичайно не перевершує 0.02 , то

$$h \le 0.02/(2\pi) \approx 0.003 \text{ и } \cos\varphi = \sqrt{1-h^2} \ge 0.999995, \tag{6.53}$$

тобто демпфіровані частоти практично не відрізняються від вихідних частот коливань.

Тертя, при аналізі якого демпфіруванням власних частот коливань припустимо зневажити, будемо називати *когерентним*.

Таким чином, гістерезисне тертя є когерентним. В’язке тертя не є когерентним для високих частот, але для малих і середніх частот, що не потрапляють у заштриховану область на рис. 6.2, *а*, також є когерентним. Існують й інші випадки когерентного тертя; таку властивість, наприклад, має зовнішнє в’язке тертя та складне тертя в *стандартному лінійному тілі* (див. рис. 6.2, *в*–*г*).

Формулу (6.16) для ядра перепишемо в наступній еквівалентній формі:

$$K_\gamma(t) = \sum\nolimits_{j=0,1,2,...} f(\omega_j)\cdot \exp(-\sin\varphi\cdot\omega_j t)\cdot[\sin(\omega_j t)/\omega_j]\,, \tag{6.54}$$

і для перетворення дискретної суми в інтеграл скористаємося неперервною дельтаподібною функцією $\delta_\varepsilon(\omega)$, що за умови $\varepsilon \to 0$ переходить в узагальнену функцію Дірака $\delta_0(\omega)$, а ряд замінимо його N-ю частковою сумою. У результаті одержимо:

$$K_\gamma(t,\varepsilon,N) = \int\limits_0^\infty [\,f_{\varepsilon,N}(\omega)/\omega]\cdot\exp(-\sin\varphi\cdot\omega t)\cdot\sin(\omega t)\,d\omega\,, \tag{6.55}$$

де графік функції

$$f_{\varepsilon,N}(\omega) = f(\omega)\cdot\sum\nolimits_{j=0,1,...N}\delta_\varepsilon(\omega-\omega_j) \tag{6.56}$$

показаний на рис. 6.9. Площі заштрихованих трикутників дорівнюють коефіцієнтам ряду $f(\omega_0), f(\omega_1),..., f(\omega_N)$, а основа кожного трикутника має довжину ε.

За умови $\varepsilon \to 0, N \to \infty$ функція $K_\eta(t,\varepsilon,N)$ переходить у шукане ядро $K_\eta(t)$.

У силу (6.5) аналогічна рівність та аналогічний результат граничного переходу мають місце для ядра $y = K_0(t)$, причому з тією же функцією $f_{\varepsilon,N}(\omega)$:

$$K_0(t,\varepsilon,N) = \int_0^\infty [f_{\varepsilon,N}(\omega)/\omega] \cdot \sin(\omega t)\, d\omega\,. \tag{6.57}$$

Функція $y = f_{\varepsilon,N}(\omega)/\omega$, за її побудовою, при будь-яких значеннях $\varepsilon > 0$ і $N < \infty$ неперервна і абсолютно інтегрувальна на проміжку $(0, +\infty)$. Отже, інтеграл з правої частини (6.57) – це синус-перетворення Фур'є, і тут можна застосувати обернене перетворення:

$$f_{\varepsilon,N}(\omega)/\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_0(\tau,\varepsilon,N) \cdot \sin(\omega\tau)\, d\tau\,. \tag{6.58}$$

Після підстановки в (6.54) одержуємо:

$$K_\gamma(t,\varepsilon,N) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\int_0^\infty K_0(\tau,\varepsilon,N) \cdot \sin(\omega\tau)\, d\tau\,] \cdot \exp(-\sin\varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t)\, d\omega\,. \tag{6.59}$$

У подвійному інтегралі змінимо порядок інтегрування:

$$K_\gamma(t,\varepsilon,N) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_0(\tau,\varepsilon,N) \cdot [\int_0^\infty \exp(-\sin\varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega\tau)\, d\omega] d\tau, \tag{6.60}$$

і в обох частинах спрямуємо ε до нуля, а N – до нескінченності. У результаті одержимо:

$$K_\gamma(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_0(\tau) \cdot [\int_0^\infty \exp(-\sin\varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega\tau)\, d\omega] d\tau\,. \tag{6.61}$$

Отже функція, що коректує, визначається рівністю

$$\Psi_\gamma(t,\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\sin\varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega\tau)\, d\omega. \tag{6.62}$$

Інтеграл (6.62) береться за частинами, і ми приходимо до формули:

$$\Psi_\gamma(t,\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial\tau}\left[arctg\frac{\tau - t}{ht} - arctg\frac{\tau + t}{ht} \right], \tag{6.63}$$

де від величини $\sin\varphi$ ми повернулися до коефіцієнта $h = 0.5\gamma\omega_0$.

Врахуємо, що коефіцієнт h дуже малий, тому $arctg[(\tau+t)/(ht)]\approx\pi/2$, і після диференціювання другий член пропадає. Таким чином, для аналізу гістерезисного тертя можна використовувати коригувальне ядро

$$\Psi_\gamma(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left[arctg\frac{\tau-t}{ht}\right]=\frac{1}{\pi ht}\cdot\frac{1}{[(\tau-t)/ht]^2+1}. \qquad (6.64)$$

Графік цієї функції (його називають кривою Коші) наведений на рис. 6.10, там же, для порівняння, показана крива Гаусса, що є коригувальним ядром (6.25) для в'язкого тертя.

При більших значеннях аргументу арктангенс спадає повільніше, ніж густина нормального розподілу. Тому, щоб відійти від невласного інтеграла і, при цьому, зберегти необхідну точність розрахунку інтервал згладжування $[t-\Delta t, t+\Delta t]$ в інтегралі

$$K_\gamma(t)=\int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\Psi_\gamma(t,\tau)\cdot K_0(\tau)d\tau \qquad (6.65)$$

розширюється до множини $[0,2t]$, тобто використовується значення $\Delta t=t$. Однак, якщо $\Delta t>T_0$, де T_0 – це основний період коливань, то похибка переходу до власного інтеграла додатково зменшується внаслідок коливних властивостей ядра $y=K(t)$. Тому в цій роботі вибір інтервалу згладжування був підпорядкований умові

$$\Delta t=\min(t,T_0). \qquad (6.66)$$

Рівність (6.65) або, у короткому записі,

$$C_\gamma[K(t)]=K_\gamma(t) \qquad (6.67)$$

визначає дію згладжувального оператора Бока–Шліппе–Колара (ОБШК) $C_\gamma[.]$. Властивості цього оператора (і оберненого до нього оператора $C_\gamma^{-1}[.]$) ідентичні описаним раніше властивостям згладжувального ОКФ для в'язкого тертя. Крім того, варто вказати на ще одну властивість:

$$C_\gamma[.]=k\cdot C_{\gamma/k}[.]+(1-k)\cdot I[.], \qquad (6.68)$$

яка дозволяє додатково скорочувати інтервал згладжування в (6.65). При значенні $k=2$ одержуємо

$$C_{\gamma}[.]=2\cdot C_{0.5\cdot\gamma}[.]-I[.] \quad \text{и} \quad \Delta t=\min(0.5t,T_0). \tag{6.69}$$

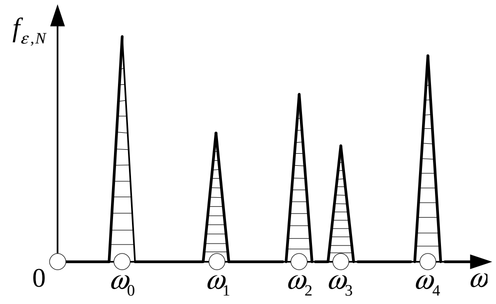


Рисунок 6.9 – Неперервна апроксимація коефіцієнтів розвинення в узагальнений ряд Фур'є

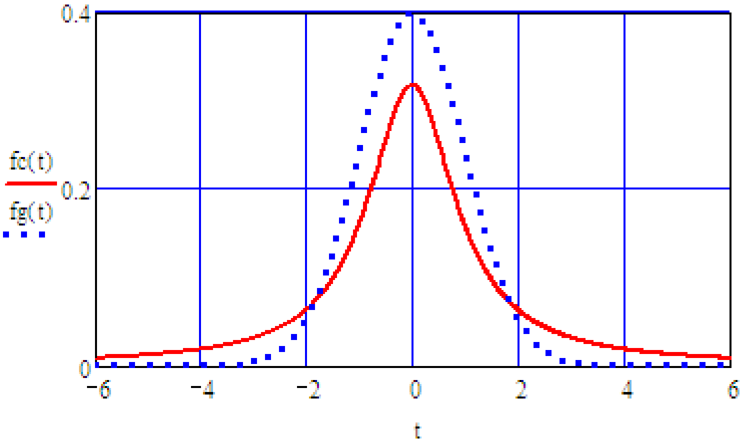


Рисунок 6.10 –Згладжувальні Криві Коші і Гаусса при однаковому декременті загасання

6.6. Коригувальні ядра для загального випадку та для змішаного тертя

Особливістю гістерезисного тертя є незмінність кута φ для всіх власних частот ω_j. Для будь-якого іншого випадку когерентного тертя кут φ_j переміщення спектра в комплексну площину залежить від переміщуваної частоти, і цю залежність передає деяка функція $\varphi(\omega)$.

Повторюючи попередні викладення, приходимо до узагальнюючої рівності:

$$\Psi(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\sin\varphi(\omega)\cdot\omega t)\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega\tau)\,d\omega. \tag{6.70}$$

Звідси, розглядаючи загальний випадок, вдається зробити ще один крок:

$$\Psi(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-\sin\varphi(\omega)\cdot\omega t)\cdot\cos(\omega(t-\tau))\,d\omega, \qquad (6.71)$$

але далі потрібно використати конкретний вид функції $\varphi(\omega)$.

Наприклад, для випадку в’язкого тертя $\sin\varphi(\omega)=0.5\eta\omega$ приходимо до рівності

$$\Psi_{\eta}(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-0.5\cdot\eta\cdot\omega^{2}t)\cdot\cos(\omega(t-\tau))\,d\omega. \qquad (6.72)$$

Отриманий невласний інтеграл обчислюється методами теорії функцій комплексного змінного і приводить до рівності (6.25). Таким чином, для в’язкого тертя теорія, яка розвивається тут, одержала незалежну перевірку своїх основних результатів при використанні двох різних методів.

Для гістерезисного тертя перевірка теорії виконувалася шляхом зіставлення ядер $K_{\gamma1}(t)$ й $K_{\gamma2}(t)$, отриманих за формулами (6.54) і (6.64), (6.65) відповідно (рис. 6.11). Ядра, отримані для гістерезисного тертя двома різними способами, практично збіглися.

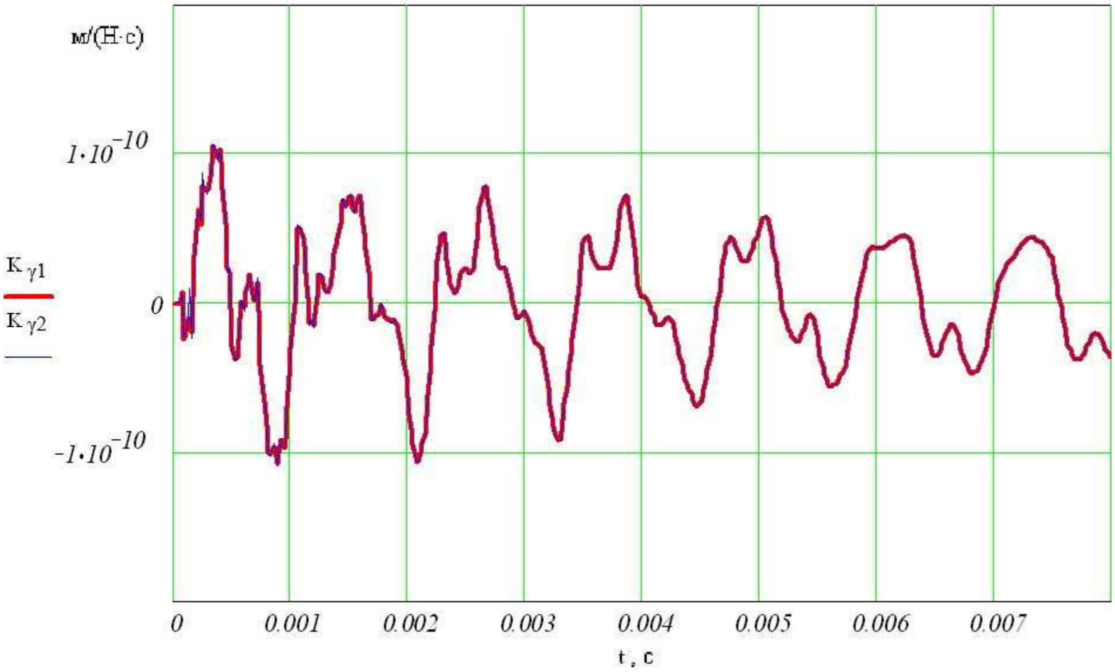


Рисунок 6.11 – Ядра, отримані двома різними способами, практично збіглися

У завершення пункту приведемо формулу для коригувального ядра при некогерентному терті:

$$\Psi(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\sin\varphi(\omega)\cdot\omega t)\cdot\sin(\cos\varphi(\omega)\cdot\omega t)\cdot\sin(\omega\tau)\,d\omega, \qquad (6.73)$$

цією формулою можна користуватися і у тому випадку, якщо демпфірування високих частот приводить до аперіодичних коливань (тобто тригонометричний $\sin(\cos\varphi(\omega)\cdot\omega t)$ стає гіперболічним).

Коригувальне ядро для змішаного тертя

Нехай пластина або балка контактує з зовнішнім середовищем, що надає істотний опір руху зовнішній поверхні (наприклад, вона лежить на основі з піску, глини або іншого сипучого або високов'язкого матеріалу). Тоді рівняння коливань з урахуванням змішаного характеру тертя буде мати такий вигляд:

$$\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2+\varsigma\cdot\partial\mathbf{u}/\partial t=\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{u}+\eta\cdot\partial\mathbf{u}/\partial t\right]+\vec{P}(\mathbf{x},t), \qquad (6.74)$$

звідки одержуємо рівняння для демпфірованих власних частот і коефіцієнтів загасання коливань –

$$\lambda_j^2+(\eta\omega_j^2+\varsigma)\cdot\lambda_j+\omega_j^2=0, \qquad (6.75)$$

де ς,η – коефіцієнти зовнішнього й внутрішнього в’язкого тертя.

Аналогічні рівняння можна використати при моделюванні пружних і дисипативних властивостей деяких композитних матеріалів (пластику, бетону, асфальтобетону, металевих сплавів і багатьох інших). Тут доводиться відмовлятися від теорій, заснованих на гіпотезі однорідного пружного середовища, і враховувати наявність у цьому матеріалі внутрішньої складної структури, наприклад, твердих зерен, вкраплених у в’язку основу. При внутрішніх деформаціях кожна фаза буде мати свою швидкість переміщення, відмінну від середньої швидкості $\partial\mathbf{u}/\partial t$ переміщення матеріалу. У результаті на межі зерен виникнуть напруження зсуву $\varsigma\cdot\partial\mathbf{u}/\partial t$. А в цілому в матеріалі будуть одночасно діяти два види тертя – внутрішнє тертя в’язкої основи, що має коефіцієнт тертя η, яке описується моделлю Кельвіна–Фойхта, і в’язке тертя на межах зерен, пропорційне швидкості ковзання з коефіцієнтом тертя ς.

Помітимо, що для композитного матеріалу, щоб повністю відповідати закону збереження імпульсу, співвідношення (6.74) варто було б доповнити рівнянням руху зерен (як це, наприклад, зроблено у відомій моделі Коссера [100, 101]), але в даному дослідженні це буде зайвою деталізацією; при моделюванні зовнішнього тертя збурювання середовища за поверхнею тіла також нікого не цікавлять. Досить вважати, що тверді зерна рухаються істотно повільніше, ніж пружна основа.

Величина

$$d(\omega)=\pi(\eta\cdot\omega+\varsigma/\omega) \tag{6.76}$$

визначає логарифмічний декремент загасання на власній частоті ω. Графік цієї величини показаний на рис. 6.12; у районі мінімуму він має протяжне плато, де результат практично не змінюється.

Зрівняємо цей результат з іншими видами тертя. Нехай d_0, як і раніше, позначає логарифмічний декремент загасання для основної форми коливань. Тоді на всіх власних частотах ω коливань континуума при різних моделях тертя будемо мати:

– для гістерезисного тертя – $d(\omega)=d_0=const$;

– для в’язкого тертя – $d(\omega)=d_0\cdot(\omega/\omega_0)$;

– для граничного тертя – $d(\omega)=d_0\cdot(\omega_0/\omega)$.

Перепишемо рівність (6.76) у наступному виді:

$$d(\omega)=d_\eta(\omega)+d_\varsigma(\omega), \tag{6.77}$$

де

$$d_\eta(\omega)=\pi\cdot\eta\cdot\omega=d_{0.\eta}\cdot(\omega/\omega_0);\ \ d_\eta(\omega)=\pi\cdot\varsigma/\omega=d_{0.\varsigma}\cdot(\omega_0/\omega). \tag{6.78}$$

Рис. 6.12 ілюструє випадок, коли $d_{0.\varsigma}=4\cdot d_{0.\eta}$, $d_{0.\varsigma}+d_{0.\eta}=0.02$.

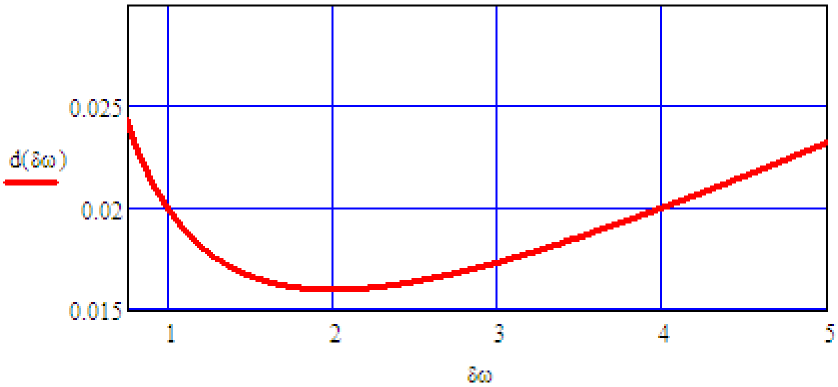


Рисунок 6.12 – Залежність декременту загасання від відносної частоти $\delta\omega = \omega / \omega_0$

Як бачимо, змішане тертя на основних частотах коливань поводиться подібно гістерезисному тертю.

Можливо, у цьому збігу й полягає розгадка походження моделі тертя Бока–Шліппе–Колара, що, як зазначено в [8, 9, 111], має численні експериментальні підтвердження і тому рекомендується для використання, у тому числі, і при розрахунках не феромагнітних сплавів, причому при перехідних процесах коливань. Поняття фазової похідної, яке використовується в даній моделі, для цього випадку не має фізичного змісту. Коли перехідний процес перебуває на самому початку свого розвитку, на першому періоді вільних коливань, то використати в рівняннях руху так званий фазовий кут – це означає вступати в протиріччя з класичною ньютоновскою механікою і її принципом причинності.

Інша справа – моделювання феромагнітних матеріалів, у яких існує пам'ять, що працює на перемагнічуванні доменів, і є межа намагнічування. Тут гістерезисне тертя Бока–Шліппе–Колара може знайти причини свого виникнення в особливих і вже добре вивчених властивостях матеріалу. Якщо ж пружний матеріал не має пам'яті, то знайти інше, чим дане вище, пояснення феномену гістерезисного тертя (при перехідних процесах) важко. Відоме пояснення прийшло в механіку з квантової фізики та трактує будь-яке пружне тіло як сукупність власних форм його коливань, зв'язаних між собою умовою збереження межі тіла. Тобто, на початку перехідного процесу самих коливань ще немає, а своєрідні треки – траєкторії, за якими вони повинні розвиватися, підготовлені заздалегідь, і на кожному треку діє своє тертя. Як тільки з'являється зовнішній вплив, воно миттєво розщеплюється за власними формами, і кожна форма, рухаючись по своєму треку, загасає з індивідуальною швидкістю. Виглядає таке пояснення дуже гарно і сучасно, але воно мало кого переконує. Куди простіше погодитися з тим, що модель гістерезисного тертя – це апроксимація моделі змішаного тертя, яка актуальна для діапазону основних частот коливань.

Метод коректування ядра, розроблений для випадку змішаного тертя, можна (у першому наближенні) використати для гістерезисного тертя. Для діапазону основних частот виконується наближена операторна рівність

$$\boldsymbol{C}_{\gamma}[.] \approx \mathcal{G}_{0.2\cdot\gamma}[.] + (\exp(-0.4\pi\gamma\cdot\omega_0 t) - 1)\cdot\boldsymbol{I}[.], \qquad (6.79)$$

яка скорочує об'єм необхідних обчислень більш ніж в 10 разів.

Якість апроксимації для розрахунку прямокутної пластини показана на рис. 6.13.

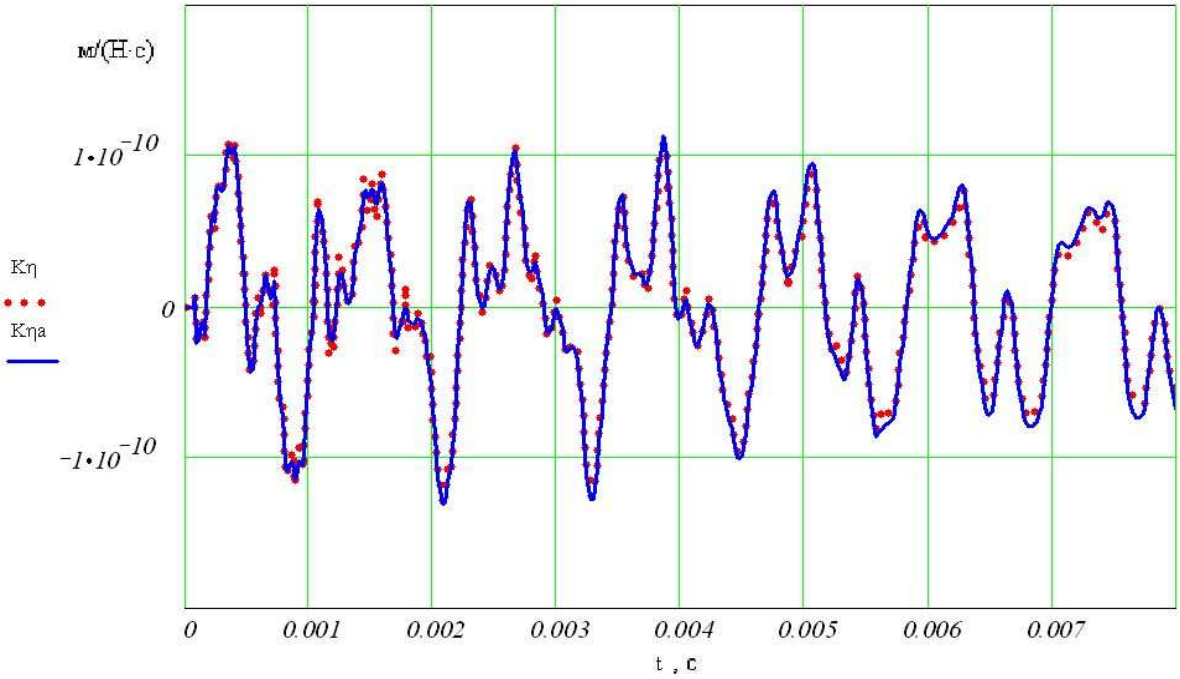


Рисунок 6.13 – Ядро $K\eta(t)$ для гістерезисного тертя

і його апроксимація $K\eta a(t)$ з використанням формули (6.79)

6.7. Область застосування нового методу і перспективи її розширення

Описаний підхід, після додаткової спеціалізації коригувального ядра, природно поширюється на задачі повзучості та текучості, а також на загальну задачу в’язкопружного деформування, у якій замість моделі Кельвіна–Фойхта використовується модель стандартного лінійного тіла (СЛТ). Зокрема, стосовно до СЛТ рівність (6.25) приймає наступний вид:

$$\Psi_\eta(s,\tau)=\frac{1+\delta_E\eta s}{1+\eta(1+\delta_E)s}\cdot\exp\left(-\tau s\cdot\sqrt{\frac{1+\delta_E\eta s}{1+\eta\,(1+\delta_E)s}}\right), \qquad (6.80)$$

де $\delta_E = E_1/E_2$; E_1, E_2 – це модулі пружності з моделей Кельвіна–Фойхта і Максвелла.

Зображення (6.80) і комплексні частоти коливань (рис. 6.2, *г*), мають іншу асимптотику, що змінює поводження оригіналу при часі $t \to +0$. Але початкові відрізки скоректованих частот на рис. 6.2, *а*, і *г* близькі, тому при аналізі механічних коливань для моделі СЛТ при урахуванні в'язкості можна продовжувати використовувати оператор $G_\eta[.]$.

При розв’язанні задачі повзучості на перший план виходить інша проблема: коефіцієнт тертя η тут дуже великий (нерідко він становить сотні секунд), і при застосуванні оператора Кельвіна–Фойхта для малого моменту часу t (що складає долі секунди) доводиться визначати вихідне ядро для великого проміжку часу, порівнянного із середньоквадратичним відхиленням $\sigma=\sqrt{\eta t}$. Відношення

$$\sigma/t=\sqrt{\eta/t} >> 1, \qquad (6.81)$$

і чим більше ця величина, тим нижче ефективність такого підходу до розв’язання задачі.

У зв'язку з цим виникає гносеологічний аспект, який необхідно прояснити. При коректуванні ядра $y=K_0(t)$, виконаного для деякого моменту часу t_0, ОКФ використає (рис. 6.5) значення цього ж ядра із проміжку

$$t \in [t_0 - 3\sqrt{\eta t_0}\,; t_0 + 3\sqrt{\eta t_0}\,], \qquad (6.82)$$

тобто, у тому числі, для моментів часу $t > t_0$. Ядро $y = K_0(t)$ – це реакція пружного континуума на нормоване зовнішнє збурювання, і, здавалося б, виникає порушення відомого фізичного принципу причинності. У дійсності ніякого порушення тут немає – нормоване збурювання виконується в початковий момент часу $t = 0$, а різницевий характер інтегрального ядра означає, що пружні характеристики процесу (коефіцієнти відповідних рівнянь) не залежать від часу. Тому реакція $y = K_0(t)$ для всіх моментів часу $t > 0$ визначена первісно і відхилитися від заданої траєкторії вона не може.

6.8. Приклад використання розробленої теорії для прямокутної пластини

Вирази для визначення прогину шарнірно обпертої пластини (рис. 6.14) і її деформацій у випадку, коли на неї діє нестаціонарне поперечне навантаження $P_0(t)$ імпульсного типу (рис. 6.15), неодноразово наведені раніше і мають такий вигляд:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K_w(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \qquad (6.83)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \int_0^t K_e(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \qquad (6.84)$$

де $w(x, y, t)$ – зміна прогину пластини в часі; $\varepsilon(x, y, t)$ – зміна деформації; $K_i(x, y, t)$ – пружні різницеві ядра інтегралів типу згортки в точці пластини з координатами $\mathbf{x}(x, y)$.

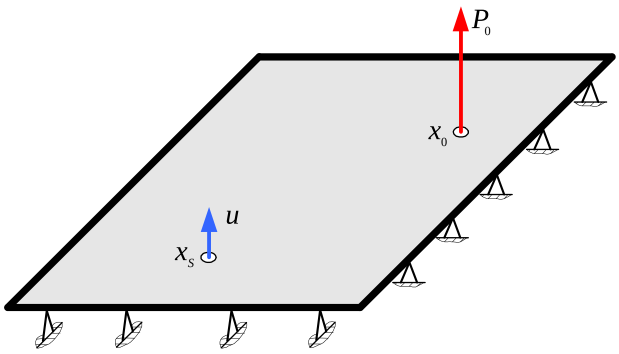


Рисунок 6.14 – Схема навантаження пластини

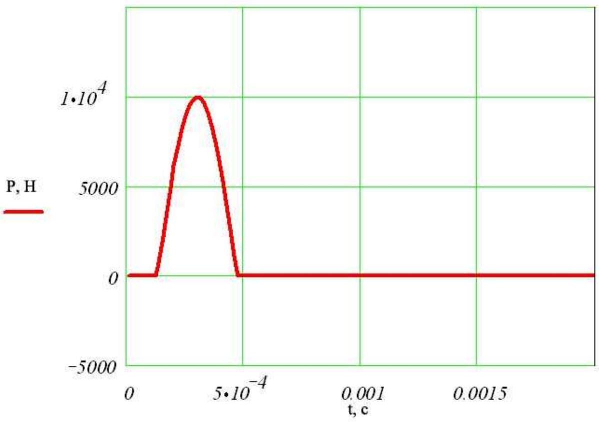


Рисунок 6.15 – Сила, що збуджує коливання в пластині

Якщо вважати, що сила, яка збурює коливання, є зосередженим навантаженням, то відповідні ядра Коші $K_0(t)$ для шарнірно-обпертої пластини середньої товщини за моделлю типу С. П. Тимошенка будуть мати вигляд:

$$K_w(x_S, y_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\Omega_{1kn}\cdot\sin(\omega_{1kn}t) - \Omega_{2kn}\cdot\sin(\omega_{2kn}t)]\times$$
$$\times\sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \tag{6.85}$$

$$K_e(x_S, y_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{kn}\cdot\left[\frac{\sin(\omega_{1kn}t)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin(\omega_{2kn}t)}{\omega_{2kn}}\right]\times$$
$$\times\sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \tag{6.86}$$

де ω_{1kn} і ω_{2kn} – власні частоти коливань пластини; l і m – довжина і ширина пластини; (x_0, y_0) – координати точки $\mathbf{x}_0$, у якій прикладається навантаження, а (x_S, y_S) – це координати точки $\mathbf{x}_S$, у якій визначається зміна прогину в часі.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана з площиною *xOy* декартової системи координат. Розрахунки виконувалися при наступних значеннях параметрів:

– густина матеріалу $\rho = 7890$ кг/м^3; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$; модуль пружності $E = 207$ ГПа;

– товщина пластини $h = 0.04$ м; довжина $l = 0.6$ м, ширина $m = 0.4$ м;

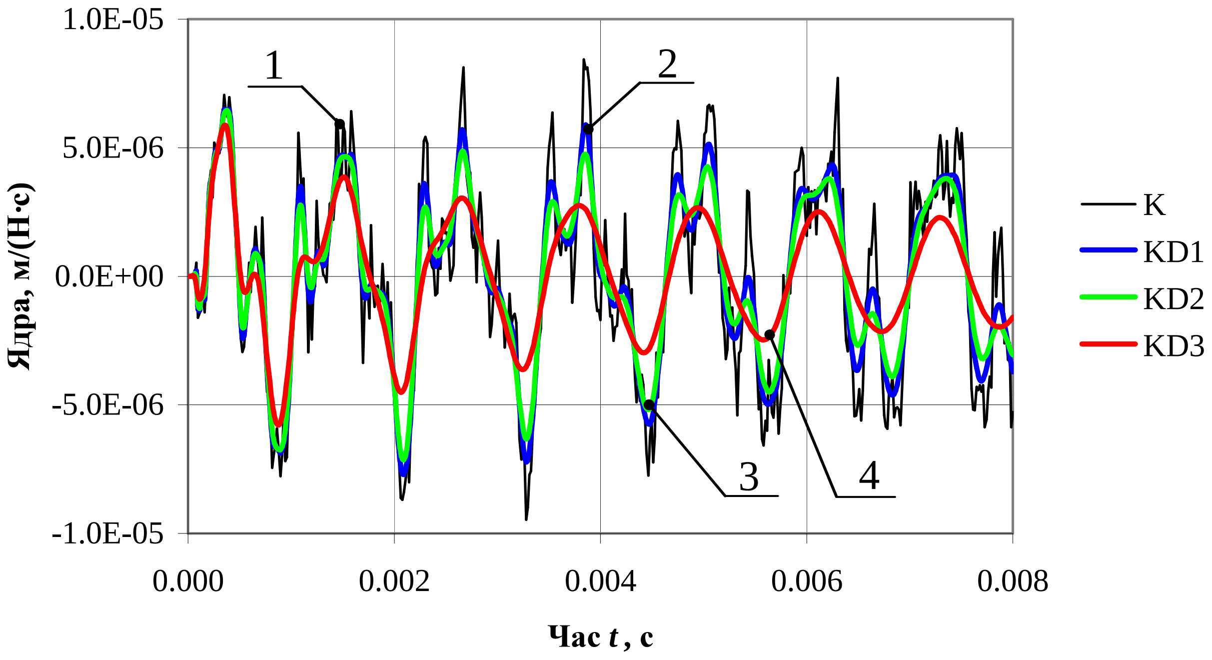
– координати точки прикладення збурювального навантаження мають значення: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.3$ м;

– координати точки, у якій досліджуються в'язкопружні коливання пластини: $x_S = 0.25$ м, $y_S = 0.1$ м;

– декремент загасання основної форми коливань $d_0 = 0.05$.

Число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є, що описують розвинення розв'язку за власними формами коливань, у всіх випадках становило 40×40; але, як вказувалося вище, після урахування тертя воно (без зниження точності розрахунку) могло бути скорочене до 80...100 гармонік.

На рис. 6.16 представлено вид ядер для інтегралів згортки (6.83): крива 1 – це вихідне ядро (6.85), а криві 2, 3 і 4 відповідають модифікованим (відповідно до описаної вище процедури) ядрам (6.18) з декрементами загасання основної форми коливань $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$, $d_0 = 0.1$.



$$K(t) \equiv K_0(t);\; KD1(t) \equiv K_{\eta 1}(t);\; KD2(t) \equiv K_{\eta 2}(t);\; KD3(t) \equiv K_{\eta 3}(t)$$

Рисунок 6.16 – Вид вихідних і модифікованих ядер Коші

Результати розрахунків прогинів без урахуванні тертя та при заданих декрементах загасання коливань наведені на рис. 6.17. Кривій 1 відповідає «пружна» зміна прогину, а кривим 2, 3 і 4 – прогини з урахуванням внутрішнього в’язкого тертя при $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$ і $d_0 = 0.1$, відповідно. Збурювальна сила, вид якої аналогічний зображеному на рис. 6.15, являла собою першу півхвилю синусоїди з амплітудою 10 кН і тривалістю 2 мс; початку імпульсу відповідає час 0.8 мс. Модуляція амплітуди на кривій 1 пояснюється накладенням декількох коливань із різними частотами та фазами.

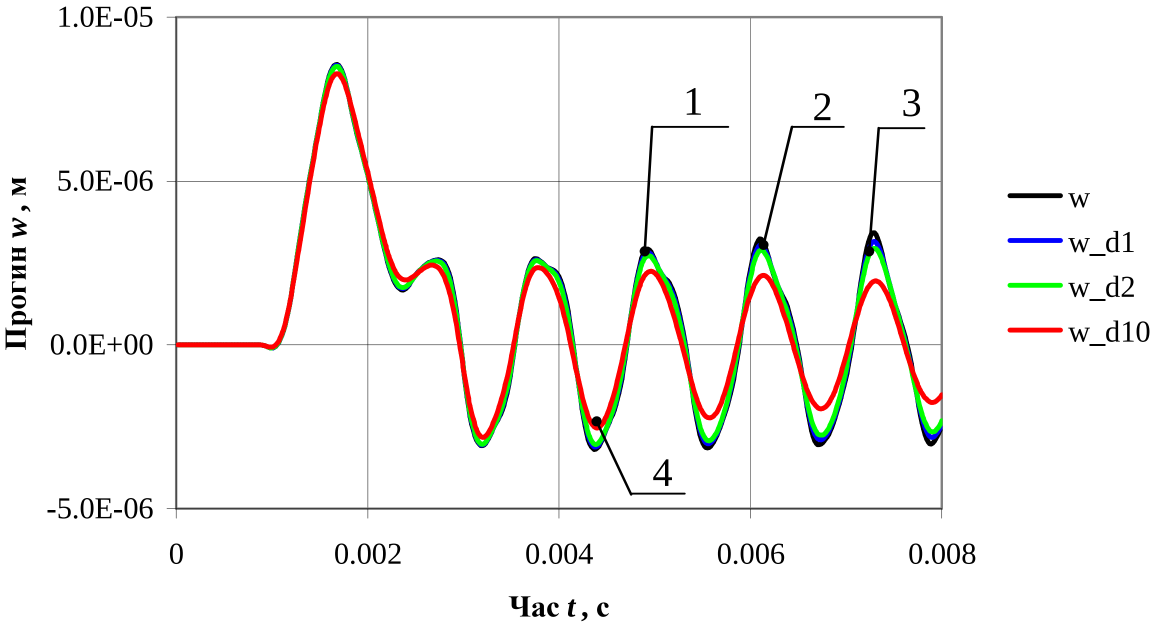


Рисунок 6.17 – Зміни прогину пластини при коливаннях
(розрахунок з урахуванням і без урахування в’язкого тертя)

На рис. 6.18 і рис. 6.19 представлено модифіковані ядра для інтегралів згортки (6.85) і (6.86), відповідно: криві 1 – зовнішнє тертя; криві 2 – внутрішнє гістерезисне тертя; криві 3 – внутрішнє в’язке тертя.

Результати розрахунків прогинів і деформацій пластини з урахуванням різних моделей тертя за допомогою модифікованих ядер наведені на рис. 6.20 і рис. 6.21: криві 1 – зовнішнє тертя; криві 2 – гістерезисне тертя; криві 3 – в’язке тертя.

Сила, що збурює коливання, являла собою першу півхвилю синусоїди (рис. 6.15) з амплітудою 10 кН і тривалістю 340 мкс; початку дії імпульсу на рис. 6.20 і рис. 6.21 відповідає час 136 мкс.

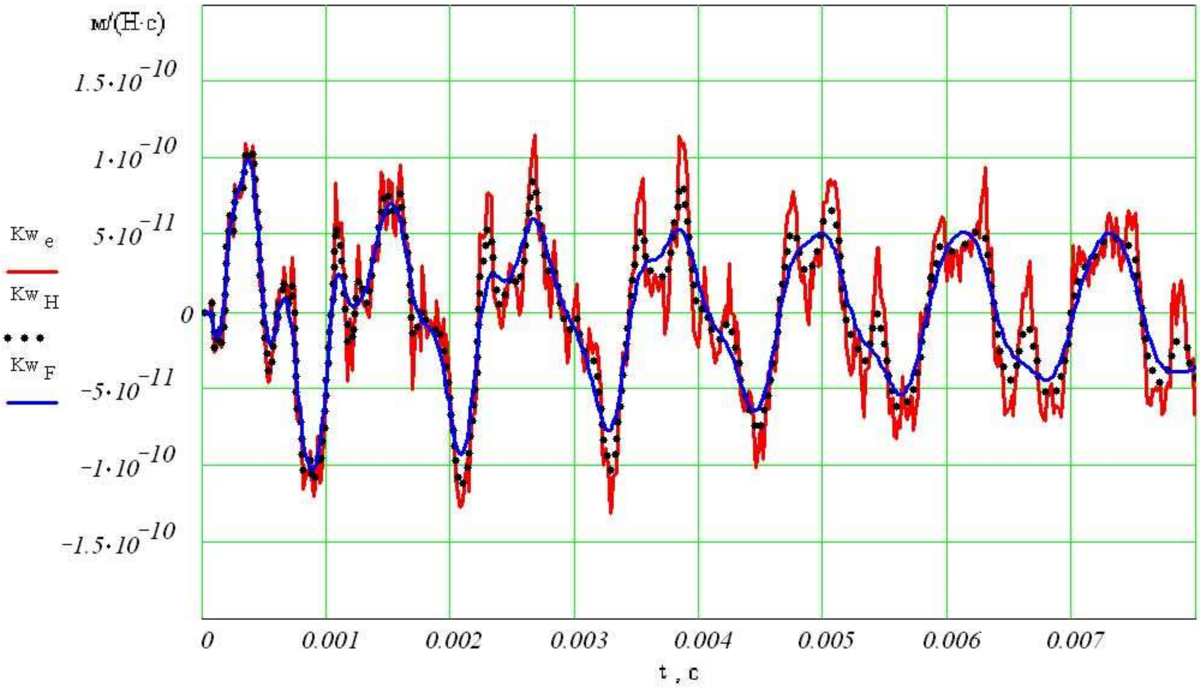


Рисунок 6.18 – Модифіковані ядра для прогинів

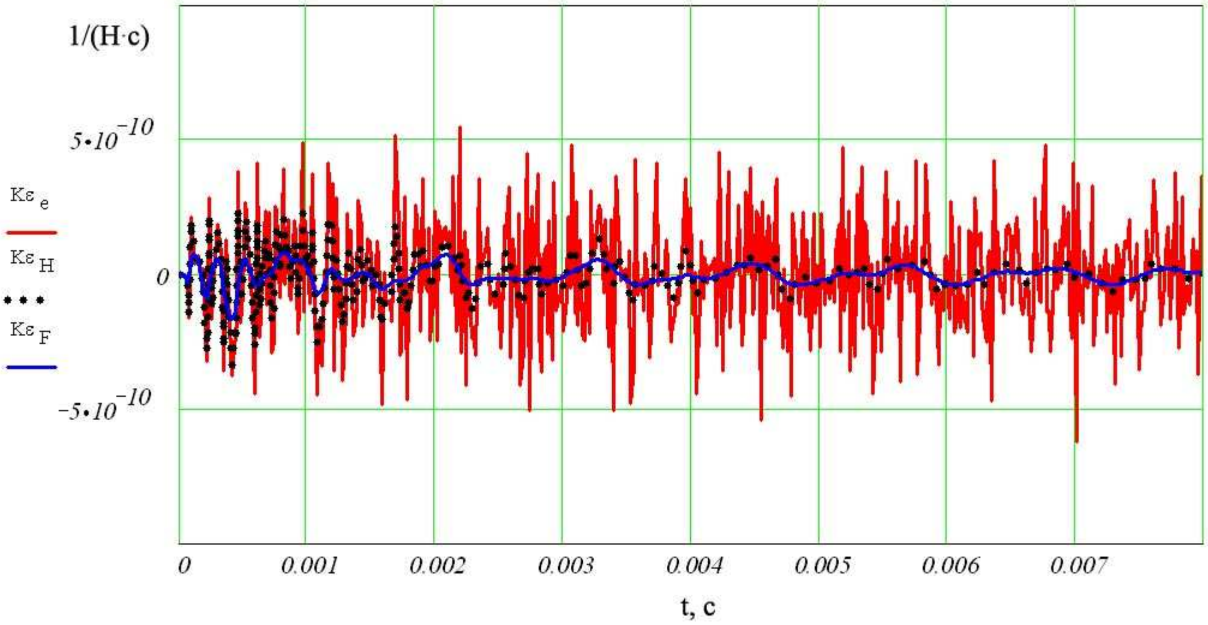


Рисунок 6.19 – Модифіковані ядра для деформацій очищені від високочастотних компонентів

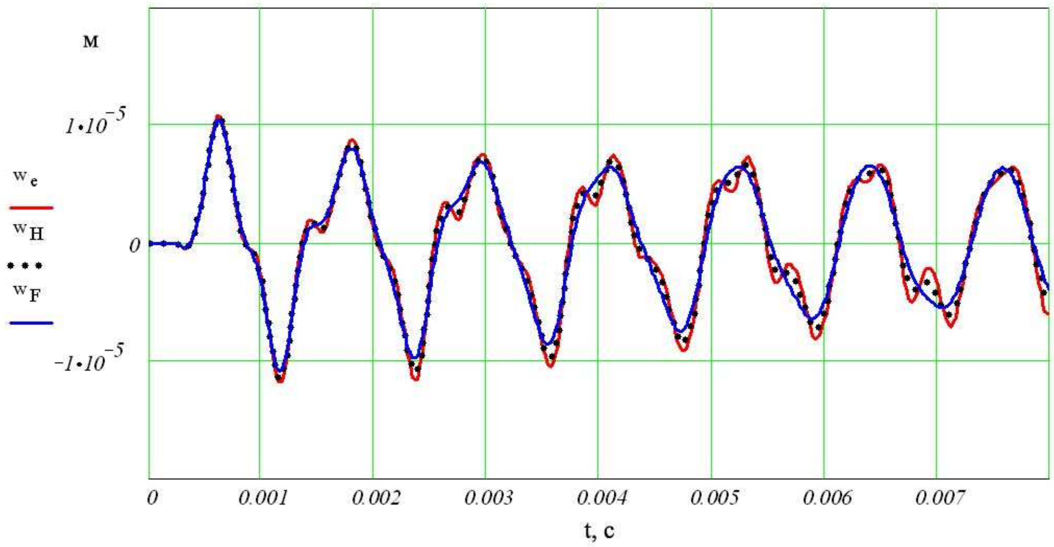


Рисунок 6.20 – Зміни прогину пластини при коливаннях з урахуванням тертя

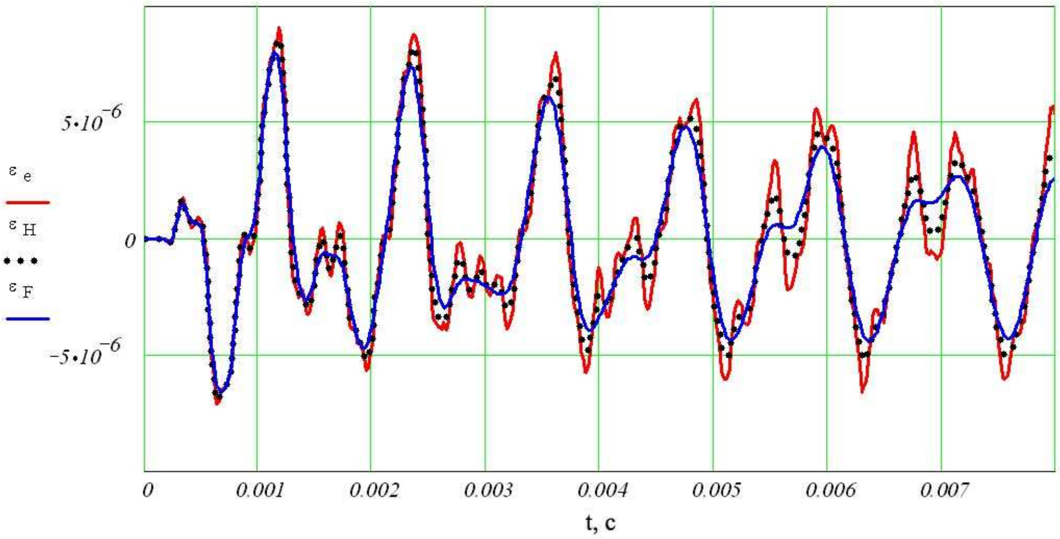


Рисунок 6.21 – Зміни деформації пластини при коливаннях з урахуванням тертя

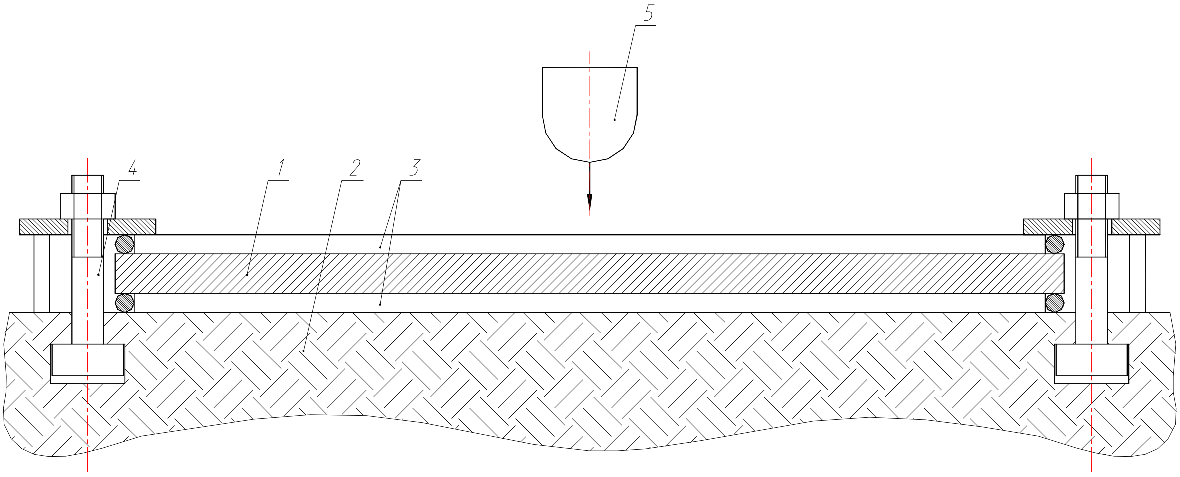
Також з метою обґрунтування теоретичних результатів, отриманих у розділі, було проведено теоретико-експериментальні дослідження з ударного навантаження прямокутних пластин середньої товщини.

Експериментальні дослідження виконувалися з використанням вимірювального комплексу (рис. 6.22), до складу якого входили багатоканальна тензометрична станція з підсилювачем, багатоканальний аналого-цифровий перетворювач і комп'ютер.

Рисунок 6.22 – Схема вимірювального комплексу

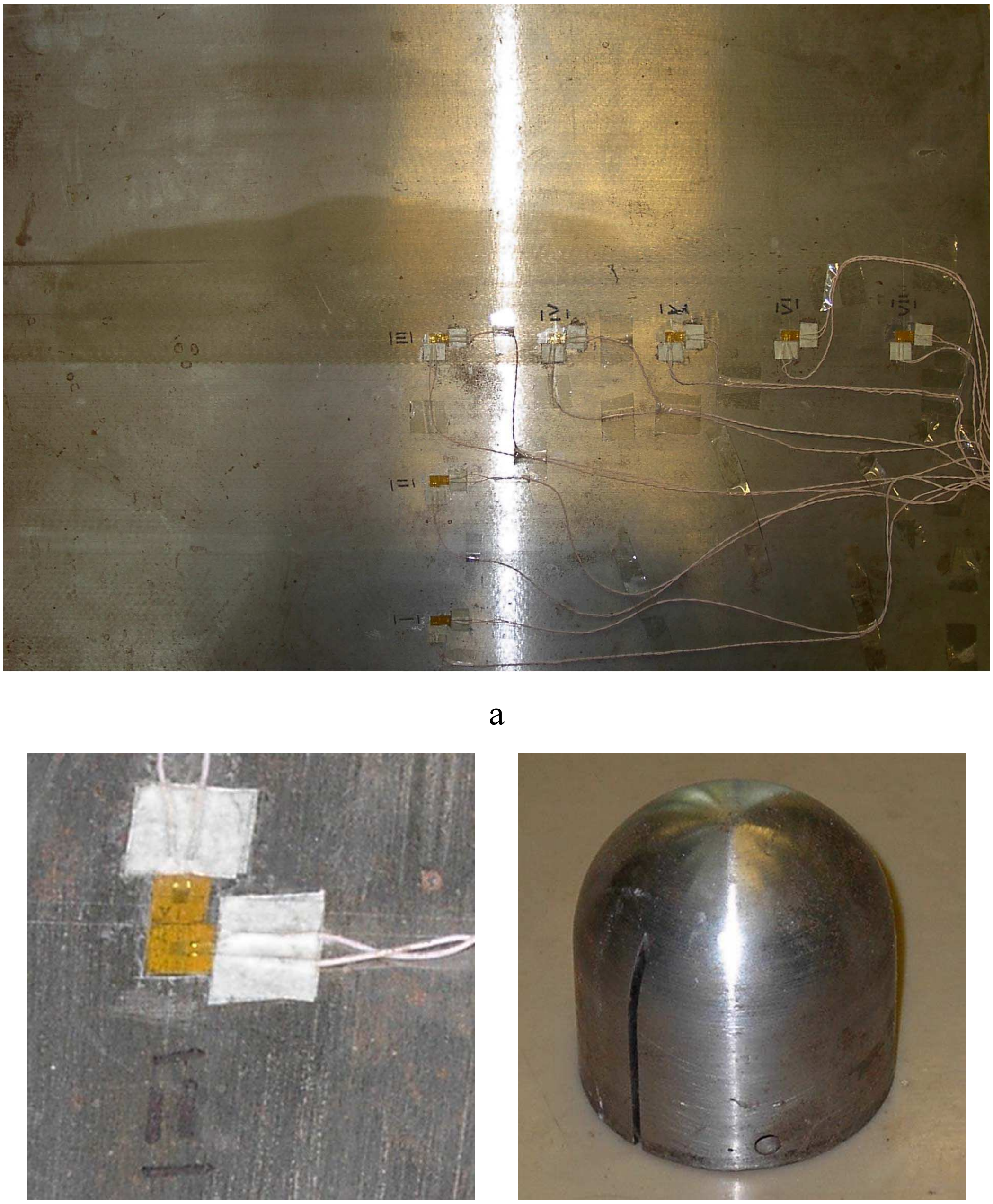
Схема ударного навантаження прямокутної пластини, деформування якої досліджувалося, наведена на рис. 6.23. Вкажемо, що її обпирання найбільше близько відповідало шарнірному.

Для проведення експерименту була використана сталева легована пластина (бронепластина), розміри якої після механічної обробки були 600х400х24.3 мм, на нижній лицьовій площині якої були наклеєні тензодатчики (рис. 6.24, *а*). Для виміру деформації у взаємно перпендикулярних напрямках у кожній з досліджуваних точок було приклеєно по два тензодатчика (рис. 6.24, *б*). Удар виконувався по верхній лицьовій площині пластини вільно падаючим тілом (рис. 6.24, *в*).



1 – пластина з наклеєними тензодатчиками; 2 – основа;
3 – елементи обпирання (круглі циліндричні стрижні);
4 – кріплення контуру обпирання до основи; 5 – ударник

Рисунок 6.23 – Схема ударного навантаження пластини



а

б в

Рисунок 6.24 – Фотографічні зображення

При розрахунках приймалися наступні параметри: $E=2.1\cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $\rho=7890$ кг/м^3; $h=0.0243$ м; $l=0.588$ м; $m=0.388$ м; $x_0=$ 0.294 м, $y_0=$ 0.194 м – координати точки навантаження; $x_1=$ 0.294 м, $y_1=0.194$ м – координати 1-го датчика (під навантаженням).

Ідентифікація ударного навантаження на основі експериментальних даних була виконана як у пружній постановці [84, 181, 182], так і з урахуванням дисипації енергії. За експериментальним даними – зміні деформації $\varepsilon_y(t)$

(рис. 6.25) – на базі розв’язаної оберненої задачі була виконана процедура ідентифікації зміни у часі зовнішнього навантаження при ударі. Нерівномірно розподілений тиск між ударником та пластиною в області контакту, площа якого теж змінюється під час навантаження, моделювався зосередженим в точці зусиллям, яке вимірюється в ньютонах (рис. 6.26).

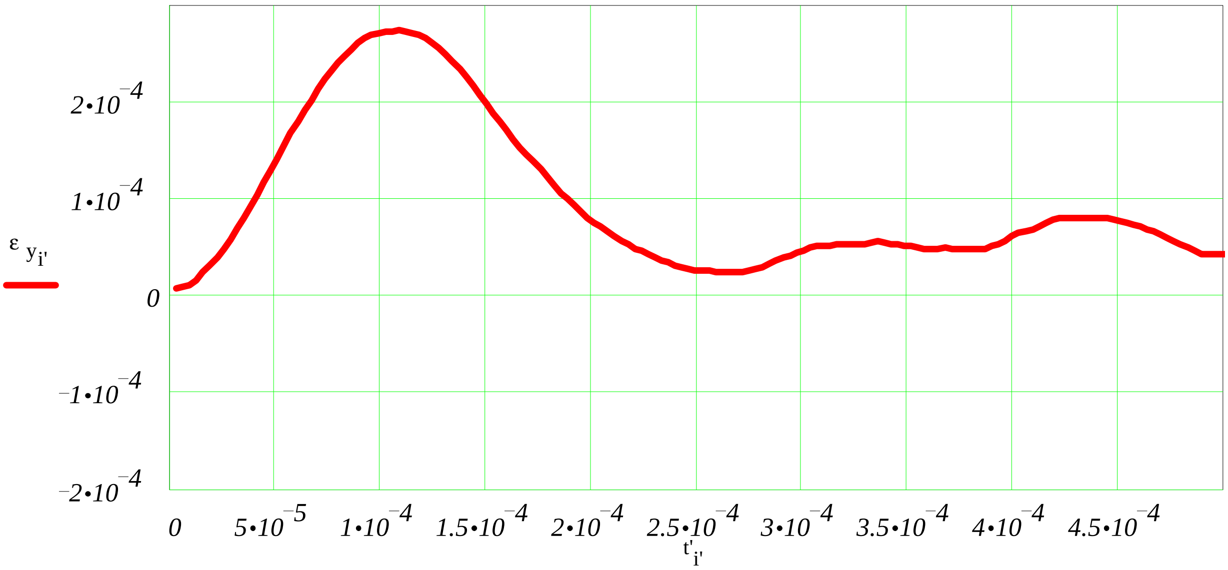


Рисунок 6.25 – Вихідні дані – зміна деформації за часом в точці пластини

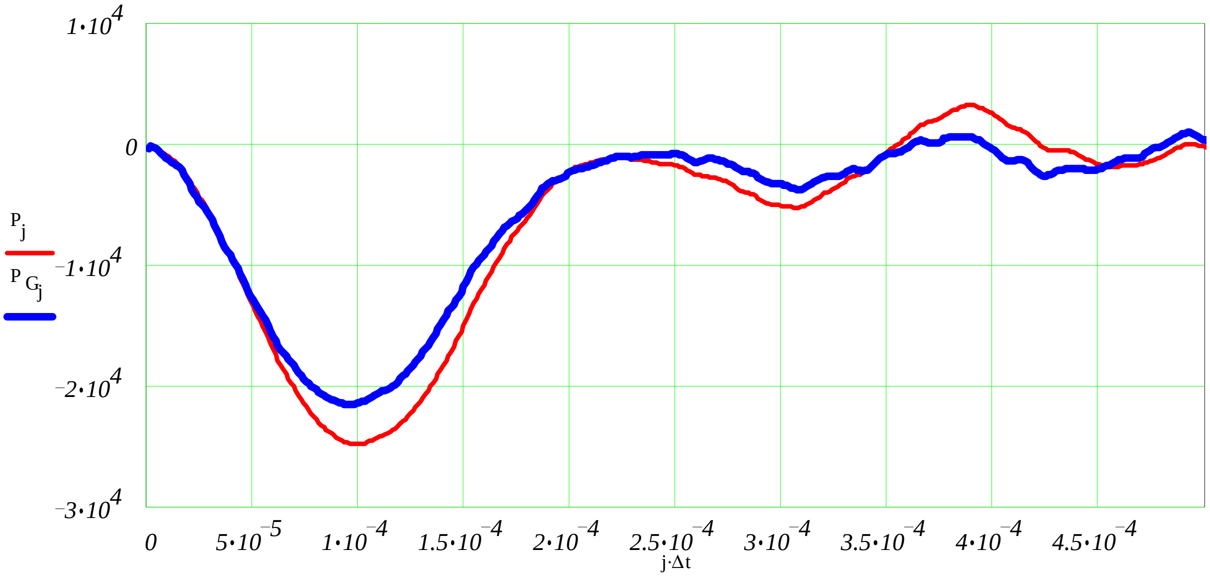


Рисунок 6.26 – Ідентифіковане контактне навантаження
з урахуванням внутрішнього тертя та без урахування

Відзначимо, що при моделюванні деформування пластини з урахуванням внутрішнього тертя в рамках гіпотез Бока–Шліппе–Колара (гістерезисне тертя) – результати практично не відрізнялись від отриманих у пружній постановці. Що викликано, напевно не магнітною природою дисипації.

Зовсім іншим чином обстояли справи при урахуванні внутрішнього в'язкого тертя відповідно до моделі Кельвіна–Фойхта. Для коефіцієнта в'язкого тертя $\eta = 7.07 \cdot 10^{-6}$ с, що відповідало логарифмічному декременту загасання $d_0 = 0.4\%$ ідентифіковане контактне навантаження при зовнішній подобі стало набагато физичнішим.

З огляду рис. 6.26 можна зробити висновок, що урахування внутрішнього в'язкого тертя (згідно моделі Кельвіна–Фойхта) дозволяє отримувати більш реалістичні результати розрахунків. Без урахування тертя можна помітити, що ідентифікована крива контактного навантаження іноді змінює знак, що пов'язано, певно, накопленими похибками розрахунків. При використанні більш фізичної моделі з урахуванням внутрішнього тертя ця невідповідність зникає.

6.9. Висновки по розділу

Для в'язкопружного континуума, який моделюється з урахуванням внутрішнього в'язкого тертя згідно моделі Кельвіна–Фойхта, або гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара) розроблений новий чисельно-аналітичний метод розрахунку перехідних процесів, що відбуваються під впливом нестаціонарного силового навантаження. Метод використовує операційне числення та синус- перетворення Фур'є і зводиться до застосування нових інтегральних операторів, що згладжують. Ці оператори використовують криві Гаусса і Коші при моделюванні в'язкого внутрішнього і гістерезисного тертя. Зазначений підхід базується на згладжувальних лінійних інтегральних операторах і може бути застосований для будь-яких «пружних» розв’язань, які представлені у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки.

Головною перевагою, яка визначила високу ефективність нового методу, є те, що він не використовує інформацію про структуру розв’язків, а саме про частоти і форми вільних коливань континуума, і, отже, він не чутливий до похибок опису крайових умов і недосконалості прийнятих гіпотез деформування (Кірхгофа, С.П. Тимошенка, та ін.). Завдяки чому його вдається використовувати в режимі обробки осцилограм, які отримані у результаті проведення експерименту.

Метод дозволяє виділяти з досліджуваних коливань так звану «пружну» складову і найменш трудомістким способом моделювати перехідні процеси при різних значеннях коефіцієнта тертя, що, наприклад, відповідає термічному стану матеріалу, який змінюється.

Можливості розробленого методу проілюстровані на прикладі вимушених нестаціонарних коливань двовимірного континуума – прямокутної пластини.

Основні наукові результати, наведені в четвертому розділі,опубліковано у працях автора [1, 2, 11, 14, 19, 28 – 30, 35, 49].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі в загальному вигляді розв’язано обернену задачу про одночасну дію на пластину скінченої системи нестаціонарних довільних навантажень.

При цьому:

– подальший розвиток набула теорія розв’язання обернених нестаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла;

– розроблено методику та обчислювальні алгоритми для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв’язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса;

– набула подальшого розвитку методика вибору оптимальних значень параметра регуляризації Тихонова за допомогою додаткової апріорної інформації про навантаження, які ідентифікуються (додаткових умов механіки деформування), а також теорії оптимізації при суперечливих критеріях;

– розв’язано обернену задачу про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестаціонарних навантажень, що діють одночасно;

– розроблено, побудовано і вперше реалізовано стійкі до збурювання вихідних даних обчислювальні алгоритми з відновлення складних імпульсних навантажень, що діють на прямокутні пластини типу С.П.Тимошенка;

– показана можливість урахування двосторонньої пружної інерційної основи на базі модифікації скінченно-різницевих ядер Коші та власних кругових частот;

– розв’язано прямі та обернені задачі моделювання нестаціонарних коливань прямокутних пластин при наявності зосереджених мас, додаткових зосереджених опор та погашувачів коливань;

– виконано декомпозицію реакції в’язкопружної опори на пружну та в’язку складові, що є особливо важливим в задачах оптимального проектування додаткових в’язкопружних опор;

– проведено аналіз впливу зосереджених особливостей на процес коливань, що може бути використано для зменшення амплітуд коливань відповідальних конструкцій з пластинчастими елементами;

– побудоване розв’язання некоректної задачі про управління нестаціонарними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей;

– показана специфіка роботи схем пасивного та активного віброзахисту пластини при нестаціонарних коливаннях та зазначено, що для відповідальних конструкцій необхідно комбінувати пасивні та активні елементи віброзахисту;

– побудовано розв’язання задачі управління коливаннями на невеликій області відносно величини площі пластини;

– показана можливість значного зменшення амплітуд коливань по всій поверхні пластини скінченою системою керуючих навантажень (розглянуто систему чотирьох керуючих сил) та відносна стійкість розроблених програм і алгоритмів ідентифікації керуючих навантажень;

– розроблений підхід, який дає можливість моделювати дисипативні властивості матеріалу на базі рішень в рамках теорії пружності для деформівних елементів конструкції з використанням диференціальних та інтегральних операторів;

– вперше розроблені згладжувальні лінійні інтегральні оператори для випадку внутрішнього в’язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара) та одержані спеціальні матриці для модифікації ядер при числових розрахунках;

– проведено експериментальне дослідження ударного навантаження прямокутної ізотропної пластини середньої товщини з метою обґрунтування теоретичних результатів;

– показано покращення результатів ідентифікації нестаціонарних навантажень на основі експериментальних даних при урахуванні дисипації енергії (при переході від пружних до в'язкопружних моделей);

– розроблені численні комп'ютерні програми для числових розрахунків.

Достовірність отриманих результатів підтверджується:

– аналізом математичної стійкості та збіжності отриманих розв'язків;

– зіставленням результатів розв'язання прямих і обернених задач;

– зіставленням з результатами, отриманими при розв'язанні іншими методами або зіставленням з результатами інших авторів;

– зіставленням з результатами теоретико-експериментальних досліджень.

Було отримано три довідки про застосування матеріалів дисертаційної роботи від:

– кафедри вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором № 66/37-50-12 «Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б».

– ТОВ «Океан-судоремонт» при виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування.

– Корпорації «Співдружність». Матеріали наукових досліджень Воропая О. В. були використані при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін і камер для розбирання і утилізації вибухонебезпечних виробів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1964. 288 с.

2. Бабаев А. Э., Янчевский И. В. Идентификация ударной нагрузки, действующей на круглую электроупругую биморфную пластину // Прикл. механика. 2011. Т. 47, № 5. С. 97–107.

3. Бабаев А. Э., Бабаев А. А., Янчевский И. В. Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны. 2007. №3. С. 16–27.

4. Бабаєв А. Е., Янчевський І. В. Активне керування деформованим станом асиметричної триморфної балки в нестаціонарних режимах роботи // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. Т. 54, № 2. С. 70–78.

5. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Изгиб пластины на упругом основании с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикладная механика. 2017. Т. 53, № 3. С. 63–76.

6. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Корниенко В. Ф. Применение комплексных потенциалов в смешанных задачах для предварительно напряженных тел. “Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов”: матер. IV Міжнар. наук.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. 2 / Белорус. держ. ун-т трансп.; під заг. ред. Ю. І. Кулаженко. Гомель: БелГУТ, 2018. с. 115-117.

7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981, 718 с.

8. Василенко Н.В. Теория колебаний.– К.: "Вища школа", 1992. 430с.

9. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. К.: Вища школа. 2004. 525 с.

10. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций: в 2-х ч. Ч. 1. / Г.Н. Ватсон. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.

11. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

12. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. Киев: Наукова думка. 1986. 544 с.

13. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: ФИЗМАТГИЗ. 1960. 492 с.

14. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. 400 с.

15. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 419 с.

16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1972. 432 с.

17. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Севрюков В. И., Янютин Е. Г. Скоростное деформирование элементов конструкций. Киев: Наук. Думка. 1989. 192 с.

18. Воробьев Ю.С., Ларин А.А., Львов Г.И. Академик Анатолий Петрович Филиппов – лидер научной школы в области динамики и прочности машин (к 110-летию со дня рождения) // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. работ. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. № 42. С. 3-7.

19. Воропай А. В. Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагружений // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 30 (1252). С. 27-38. Бібліогр.: 14 назв. ISSN 2222-0631.

20. Воропай А. В. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці

та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ». 2018. № 3 (1297). С. 19-24. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631.

21. Воропай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную мембрану. «Вестник Харьковского государственного политехнического университета», Технологии в машиностроении. Выпуск 124. 2000, С. 95-99

22. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Монография // Харьков: Изд-во «Лидер», 2018. 214 с.

23. Воропай А. В. Использование интегральных уравнений в задачах моделирования элементов виброзащиты. Сборник тезисов Международной научно-практической конференции по случаю Дня автомобилиста и дорожника: "Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля" Посвящённой 90-летию проф. Говорущенко Н. Я. 15-16 октября 2014 г. С. 186-187.

24. Воропай А. В. Моделирование воздействия на пластину дополнительных вязко-упругих опор // Наукові праці Міжнародної науково-практичної та науково-методичної конференції присвяченої 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з Дня народження професора А. Б. Гредескула "Новітні технології в автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців" 20-21 жовтня 2016 р. Х.: Видавництво «Форт», 2016. С. 234-235.

25. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Выпуск 53. С. 87-90.

26. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой подпоркой. Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики: материалы Международной научно-практической Интернет-

конференции (Харьков 10-25 мая 2013 г.) / Ред. совет: Тропина А. А. и др. Х.: Экографю 2013. С. 24-28.

27. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с гасителем / Материалы XV международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 мая 2011 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2011. С. 253.

28. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с дополнительной упругой подпоркой / Материалы XVI международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 мая 2013 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2013. С. 264.

29. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. №55 (1164). С. 43-46.

30. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Х: НТУ "ХПИ", 2008. №47. с. 42-48.

31. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2011. №52. С. 42-48.

32. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с установленным на ней амортизатором // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 50-летию механико-математического факультета ХНУ им. В. Н. Каразина (17-22 апреля 2011 г.). Харьков. 2011. С. 31-32.

33. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Х: НТУ "ХПИ", 2012. №55. С. 30-37.

34. Воропай А. В. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины с дополнительной вязко-упругой опорой // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013» ХНУ им. В. Н. Каразина г. Харьков 29 сентября – 4 октября 2013 г. / под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича. Х.: Цифрова друкарня №1. 2013. С. 35-36.

35. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. № 57 (1166). С. 25-29.

36. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Х: НТУ «ХПІ», 2016. №16 (1188). С. 16-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631.

37. Воропай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. Харьков: НТУ «ХПИ». 2015. №41 (1150). С. 17-22. Библиогр.: 7 назв. ISSN 2079-0023.

38. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями пластины, несущей сосредоточенную массу // Тринадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 року, Київ. Матеріали конференції Т. I. К. НТУУ. 2010. С. 98.

39. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ". 2010. №69. С. 46-52.

40. Воропай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра

Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2010 / Выпуск 49. С. 84-87.

41. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций // Механіка та машинобудування. Харків : НТУ «ХПІ». 2018. №1. С. 3-22.

42. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Х: НТУ «ХПІ». 2017. № 6 (1228). С. 29-44. Бібліогр.: 11 назв. ISSN 2222-0631.

43. Воропай А. В., Гришакин В. Т., Янютин Е. Г. Некорректные обратные нестационарные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении // Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №775. 2007. Харьков, С. 73-80.

44. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А. Измерительный комплекс для экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2015. №2(8). С. 182-187. ISSN 2226–9266 – Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE15_2/2015-8-5.2.pdf.

45. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А., Малахов Е. С. Экспериментальное измерение деформаций балок из различных материалов при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2016. №1(9). С. 128-138. ISSN 2226-9266. Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE16_1/5.5.pdf.

46. Воропай А. В., Егоров П. А., Малахов Е. С. Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017) Харьков. 2017. С. 80-83.

47. Воропай А. В., Кучерова Н. И. Нестационарные задачи для прямоугольных пластин и пластин-полос при наличии сосредоточенных сил и масс // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь. 2008. С. 46.

48. Воропай А. В., Малахов Е. С. Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками // Віснык НТУ «ХПІ». Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2016. № 26 (1198). С. 45-49.

49. Воропай А. В., Малахов Е. С. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом диссипации // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. Агентство. 2017. 214 С. (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка). С. 113.

50. Воропай А. В., Малахов Е. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки // Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19-20 жовтня 2017 р. Х.: Вид-во «ХНАДУ». 2017. С. 225-226.

51. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтера при решении задач динамической теории пластин и оболочек // Труды XII Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” (МДОЗМФ–2005). Харьков-Херсон. 2005. С. 63-66.

52. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек // Вестник Харьковского национального университета. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». № 661. 2005. С. 69-82.

53. Воропай А. В., Шупиков А. Н. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2013. № 63 (1036). С. 29-34.

54. Воропай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. Механика. 2007. 43. №7. С. 90-97.

55. Воропай Н. И. Идентификация кинематического нагружения на поверхности цилиндрической полости упругого пространства // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. научн. тр. Х. 2011. № 52. С. 48-53.

56. Воропай Н. И., Гнатенко Г. А., Янютин Е. Г. Математическое моделирование в задачах нестационарного деформирования цилиндрических оболочек // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ–2010): (18-21 мая 2010 г., Харьков). Харьков, 2010. Ч. 1. С. 92-96.

57. Воропай Н. И., Янютин Е. Г. Нестационарное деформирование упругого пространства с цилиндрической полостью // Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях»: (Харьков, 17-22 апреля 2011 г.): тезисы докладов. Харьков, 2011. С. 32-33.

58. Воропай Н. І., Янютін Є. Г. Математичне моделювання імпульсного впливу на пружну циліндричну оболонку // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я: тези доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції (Харків, 12-14 травня 2010 р.): Ч. І. Харків. 2010. С. 53.

59. Воропай О. В., Поваляєв С. І., Гришакін В. Т. Дослідження різних моделей дорожньої конструкції за нестаціонарного навантаження // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Выпуск 55. С. 25-31.

60. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во ун-та, 1990. 136 с.

61. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики / А.С. Галиуллин. М.: Наука. 1986. 224 с.

62. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Издание третье. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1967. 576с.

63. Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. Общий курс математики в 2-х т.,. Т. 1. Харьков: Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ». 2011. 652 с.

64. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний: пер. с англ. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований. 2008. 607 с.

65. Голоскоков Е.Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. К.: Наук. думка. 1977. 340 с.

66. Гончарский А.В. Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука. 1978. 336 с.

67. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ. 1973. 272 с.

68. Григорьев А. Л., Молдавский Э. А., Тартаковский И. И. Операторный метод расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы. / Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции 18-21 сентября 1991 г. Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов. Харьковский ордена Ленина авиационный институт им. Н. Е. Жуковского. Харьков. Типография ХВВКИУРВ. 1991. С. 78.

69. Гришакин В. Т. Идентификация импульсной нагрузки, воздействующей на вязко-упругую балку // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2015. № 6 (1115). С. 22-29.

70. Грунауэр А. А., Тартаковский И. И., Григорьев А. Л. О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб. Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985. Вып. 39. С. 7-22.

71. Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М. Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів / За ред. акад. НАН України З. Т. Назарчука / Львів. Простір-М, 2017. 492 с.

72. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германія. 2015 р., CAARBRUCKEN: LAP LAMBERT Academic Publishing. 468 с.

73. Гузь И. С., Янютин Е. Г., Титарев В. Г. Использование сигналов акустической эмиссии для определения координат развивающихся дефектов в анизотропных оболочках и пластинах. “Проблемы прочности”. 1977. №6

74. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наук. думка, 1982. 400 с.

75. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вища шк. 1984. 208 с.

76. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі / Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков, Я.П. Бузько // Вісник Харківського національного університету «ХПІ». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. 2002. № 19. С. 68-72.

77. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1965. 466 с.

78. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа. 1966. 405 с.

79. Егоров П. А. Идентификация нестационарных нагрузок, воздействующих на шарнирно-опертую оболочку, подкрепленную

концентрическими ребрами жесткости // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Матем. моделювання в техніці та технологіях. 2014. № 39 (1082). С. 71-80.

80. Егоров П. А. Нестационарные колебания шарнирно-опертой оболочки с концентрическими ребрами жесткости // Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля: междунар. науч.-практ. конф., 15-16 окт. 2014 г.: тез. докл. Харьков: ХНАДУ. 2014. С. 190.

81. Егоров П. А. О влиянии жесткости основания на результаты экспериментальных исследований нестационарного деформирования элементов конструкций // Новітні технології в автомобілебудівництві та транспорті : міжнар. наук.-практ. конф., 15-16 жовтня 2015 г.: наук. пр. Харків: ХНАДУ. 2015. С. 273-274.

82. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.: Монография. Харьков ХНАДУ. 2004. 392 с.

83. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х ч. Часть I / Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, В. Т. Гришакин. Харьков: Изд-во ХНАДУ. 2010. 180 с.

84. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. Харьков: Изд-во ХНАДУ. 2010. 212 с.

85. Инструкция по проектированию дорожных одежд нежесткого типа. ВСН 46-83. МИНТРАНССТРОЙ. М.: Транспорт. 1985. 157 с.

86. Интегральные преобразования и операционное исчисление /В. А. Диткин, А. П. Прудников / Государственное издательство физико-математической литературы. М. 1961, 524 с.

87. Исследование деформирования образца из асфальтобетона на раскол с использованием тензометрической аппаратуры / А. Г. Батракова, В. Н. Ряпухин, А. В. Воропай, Е. В. Дорожко, П. А. Егоров // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного

научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2015 / Выпуск 71. С. 45-49.

88. К методологии поиска рационального распределения материала тонкостенных элементов конструкций / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, Ю. М. Селиванов // Техническая механика. 2016. №3. С. 7–16.

89. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009. 458 с.

90. Карнаухова Т.В. Активное демпфирование вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов // Доповіді НАН України. 2009. № 6. С. 68-72.

91. Карнаухова Т.В. Влияние механических граничных условий на активное демпфирование вынужденных изгибных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин // Доповіді НАН України. 2009. № 8. С. 58-61.

92. Карнаухова Т.В. О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин // Доповіді НАН України. 2009. № 5. С. 78-82.

93. Ковальчук П. С., Янчевский И. В. Управление колебаниями незамкнутой сферической оболочки из электроупругого материала // Зб. наук. праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». 2012. Вип. 18. С. 79-90.

94. Ковальчук П. С., Янчевский И. В. Управление радиальными колебаниями толстостенного сферического пьезокерамического излучателя // Зб. наук. праць «Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла». 2012. Вип. 13. С. 212-223.

95. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). М.: Наука. 1977. 832 с.

96. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 6. С.32-36.

97. Кохманюк С.С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наукова думка, 1980. 232 с.

98. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. 305 с.

99. Кубенко В. Д., Янчевський І. В. Невісесиметричні коливання вигину круглої біморфної пластини з п'єзокерамічним шаром при імпульсному електромеханічному навантаженні // Зб. наук. пр. укр.-рос. наук. семінару «Нестаціонарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи». м. Львів. 12-15 вересня 2012 р. С. 73-77.

100. Кулеш М. А., Грекова Е. Ф., Шардаков И. Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009. Т. 55, № 2. С. 216-225.

101. Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 2. С. 227-235.

102. Луговой П.З. Мейш В. Ф., Штанцель Э. А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. К.: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2005. 536 с.

103. Лурье А. И. Операционное исчисление. М.: Гостехтеориздат, 1950. 432 с.

104. Малахов Е. С., Воропай А. В. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. №6 (1178). С. 56-62. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631.

105. Математическое моделирование нестационарных колебаний элементов конструкций (монография). /Воропай Н. І., Гнатенко Г. О., Шарапата А. С.// Харьков: Издательство «Лидер», 2014. 297 с.

106. Механика в СССР за 50 лет. Т. 3 / А.И. Каландия, А.И. Лурье, Г.Ф. Манджавидзе [и др.]; ред. А.И. Лурье. М.: Наука, 1972. С. 4-70.

107. Механика в СССР за 50 лет: в 3 т. / гл. ред. Л.И. Седов. М.: Наука. Т. 1 : Общая и прикладная механика. 1968. 416 с; Т. 2 : Механика жидкости и газа. 1970. 880 с; Т. 3 : Механика деформируемого твердого тела. 1972. 480 с.

108. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 608 с.

109. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. Харьков: Изд. ХНЭУ. 2004. 252 с.

110. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учебное пособие для вузов. СПб: Политехника. 2003. 261 с.

111. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. К.: Наук. думка. 1971. 375 с.

112. Пошивалов В. П. О подходах к нормированию прочности и обеспечению надежности ракетных космических комплексов / В.С. Гудрамович, Ю.Ф.Даниев, В. П. Пошивалов // Актуальні проблеми механіки: монографія / під редакцією М. В. Полякова. Дніпро: Ліра, 2018. С.216–224.

113. Пошивалов В. П., Даниев Ю. Ф. Модели надежности программного обеспечения эргатических систем // Техническая механика. 2017, №4. С.89-95.

114. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6 т. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н, Гринченко В.Т. Киев: Наук. думка. 1986. 288 с.

115. Радовский Б. С. Проблемы механики дорожно-строительных материалов и дорожных одежд. К.: ООО «Полиграфконсалтинг». 2003. 240 с.

116. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. М.: Наука, 1983. 200 с.

117. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: учебное пособие. М.: Изд-во ЛКИ. 2009. 480 с.

118. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек: монография / Н. В. Сметанкина. Харьков: «Міськдрук», 2011. 376 с.

119. Сметанкіна Н. В. Коливання шаруватих ортотропних оболонок складної форми при ударному навантаженні / Н. В. Сметанкіна // Вібрації в техніці та технологіях. 2016. № 2(82). С. 77-84.

120. Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В., Шупіков О. М. Моделювання динамічного відгуку шаруватих конструкцій на імпульсне навантаження / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Т. 38(2). С. 64–70.

121. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учебное пособие для вузов. / Издание второе, переработанное и дополненное. М.:Дрофа. 2006. 175 с.

122. Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 320 с.

123. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 560 с.

124. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука. 1967. 444 с.

125. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука. 1966. 636 с.

126. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 288 с.

127. Тихонов А.Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 724 с.

128. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение. М.: Техносфера. 2006. 224 с.

129. Успехи механики: в 6 т. / ред. А.Н. Гузя. Киев: «А.С.К.». Т. 1. 2005. 776 с.; Т. 2. 2006. 832 с.; Т. 3. 2007. 752 с.

130. Успехи механики: в 6 т. / ред. А.Н. Гузя. Киев: «Літера ЛТД». Т. 4. 2008. 720 с.; Т. 5. 2009. 752 с.

131. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ. 1948. Т. 12. № 3. С. 287-300.

132. Филиппов А. П., Скляр В. А. Колебания стержней и плит при ударе // Динамика и прочность машин. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. 1967. Вып. 6. С. 42-47.

133. Филиппов А. П., Скляр В. А. Поперечный удар по прямоугольной плите нелинейным упругим телом // Динамика и прочность машин. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. 1973. Вып. 18. С. 45.

134. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 736 с.

135. Филиппов А.П. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. К.: Наук. думка. 1978. 184 с.

136. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. Издание пятое, стереотипное. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1970. 656 с.

137. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. М.: Наука. 1990. 230 с.

138. Шарапата А. С. Прямая и обратная задача для нестационарно нагруженной круглой мембраны // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. 2000. Вып. 106. С. 20-25.

139. Янчевский И. В. Идентификация действующих на упругодеформируемые элементы конструкций нестационарных нагрузок с

помощью МКЭ // Мат-лы Междунар. научно-техн. конф. «Датчики, приборы, системы – Приборостроение 2013». пгт. Гурзуф. 16-20 сентября 2013 г. С. 3.

140. Янчевский И. В. Идентификация нестационарной нагрузки, воздействующей на асимметричный биморф // Вестник НТУ «ХПИ». Вып. «Динамика и прочность машин». 2008. № 36. С. 184-190.

141. Янчевский И. В. Исследование волновых колебаний составных стержней при импульсном деформировании. Вестник Харьковского государственного политехнического университета, 1998, Вып. 23, С. 74-78.

142. Янчевский И. В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упруго-деформируемому элементу конструкции. Пробл. машиностроения. 2015. Т. 18. № 2. С. 43-54.

143. Янчевский И. В. Решение нестационарной задачи управления напряженным состоянием стержневого элемента. Вестник Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. 2000. Вып. 11. С. 51-54.

144. Янчевский И. В. Управление нестационарными колебаниями слойно-ступенчатого биморфа // Вестник НТУ «ХПИ». Вып. «Динамика и прочность машин». 2009. № 42. С. 196-204.

145. Янчевский И. В., Бабаев А. Э. Определение ударной нагрузки, действующей на электроупругую биморфную балку с разрезными токопроводящими покрытиями // Прикладная механика. 2010. 46. №9. С. 60-70.

146. Янчевский И. В., Бабаев А. Э., Бабаев А. А. Активное демпфирование нестационарных изгибных колебаний биморфной балки // Прикладная механика. 2010. 46. № 7. С. 84-92.

147. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Поваляєв С. І. Обернені задачі імпульсного деформування пластин та стержнів // Машинознавство. 2006. №2. С.17-22.

148. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Поваляєв С. І. Обернені задачі імпульсного деформування пластин та стрижнів // Тези доповідей сьомого міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові. Львів. 2005. С.33-34.

149. Янютін Є. Г., Воропай Н. І., Гнатенко Г. О. Прямі та обернені задачі для балки та пластини-полоси // Машинознавство. 2009. №8(146). С. 10-15.

150. Янютін Є. Г., Воропай О. В. Ідентифікація нестаціонарного зосередженого навантаження, що діє на прямокутну пластину. Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. X міжнародна науково-практична конференція. Тези доповідей НТУ "ХПІ", 2002, С. 85-86

151. Янютін Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестаціонарних прямих та обернених задач для балок з пружнім додатковим спиранням // Машинознавство. 2007. № 8. С. 18-23.

152. Янютін Є. Г., Єгоров П. А. Ідентифікація нестаціонарного навантаження, яке діє на циліндричну шарнірно-обперту оболонку, підкріплену концентричними ребрами жорсткості // Матеріали всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 25-26 червня 2015 р. К. : НУХТ. 2015. С. 48-50.

153. Янютін Є. Г., Шарапата А. С. Рішення некоректної динамічної задачі для кругової мембрани // Анотації доповідей міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. Харків. 16-17 травня 2002 р. С. 87.

154. Янютін Є. Г., Шарапата А. С., Єгоров П. А. Розв'язування обернених нестаціонарних задач теорії пружності // Матеріали всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26-27 червня 2013 р. К. : НУХТ. 2013. С. 28-29.

155. Янютин Е. Г, Воропай А. В., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом особенностей нагружения // Труди XIII міжнародного симпозіуму «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», (Херсон, 11-13 жовт. 2007 р.) / М-во освіти та науки України, Харк. національний ун-т ім. Каразіна. ХНУ ім. Каразіна. 2007. С. 350-353.

156. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. Киев: Наук. думка. 1993. 147 с.

157. Янютин Е. Г. Приближенный способ идентификации произвольной осесимметричной нагрузки, воздействующей на цилиндрическую оболочку / Е. Г. Янютин, С. И. Поваляев // Прикл. мех. 2008. Т. 44, № 7. С. 91-100.

158. Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Идентификация нестационарной подвижной нагрузки, воздействующей на плиту на упругом инерционном основании // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» №21: Зб. наук. праць. Харків, 2005. С. 133-139.

159. Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Начальный этап деформирования упругого полупространства при кинематическом воздействии // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2012. № 54 (960). С. 202-208.

160. Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Решение прямых и обратных нестационарных задач теории упругости для прямоугольной плиты на упругом инерционном основании // Можливості використання методів механіки для розв’язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій: Матеріали II міжвузівської науково-практичної конференції. Харків 28 грудня 2004 р. Харків. 2004. С. 12-15.

161. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Идентификация нагрузок, воздействующих на круглую плиту и двухпролетную балку // International conference. Dynamical system modeling and stability investigation. Kyiv, May 22-25 2007. Киев, 2007. С. 351.

162. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на балки и плиты // Збірник наукових праць Національного гірничого університету № 24: Зб. наук. праць. Дніпропетровськ. 2006. С. 145-150.

163. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи при упругом деформировании балок и пластин // VIII Кримська Міжнародна математична школа «Метод функций Ляпунова и его приложения», (Крим, Алушта, 10-17 вересня 2006 р.). М-во освіти та науки

України, Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського. Сімферополь, 2006. С. 199.

164. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Решение обратных задач для деформирующихся нестационарно полупространств и балок // IX Кримська Міжнародна математична школа «Метод функций Ляпунова и его приложения». (Крим, Алушта, 15-20 вересня 2008 р.) /М-во освіти та науки України, Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського. Сімферополь, 2008. С. 191.

165. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Поваляев С. И. Два подхода к решению обратных задач теории упругости // VII Международная научная школа-семинар. Импульсные процессы в механике сплошных сред. Николаев, 21-25 августа 2007. Николаев. 2007. С 41-42.

166. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ". 2007. №38. С. 174-180.

167. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное снижение амплитуд нестационарных колебаний на прямоугольной области пластины. //VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь: ДиАйПи. 2006. С. 200.

168. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация изменения во времени импульсно воздействующей на прямоугольную пластину распределенной нагрузки. Вісник ХДТУСГ. Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Фізичні та комп'ютерні технології. Випуск 10. 2002. С. 297-301.

169. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Прикладная Механика. 2003. 39. №10. С. 97-102.

170. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины // Проблемы машиностроения. 2004. 7, №1. С 76-81.

171. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную плиту. Вестник НТУ "ХПІ". Динамика и прочность машин. 9'2002 т. 9. С. 146-152.

172. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Международная научная конференция "Интегральные уравнения и их применения" 29 июня – 4 июля 2005 года. Одесса, С. 167.

173. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Импульсное деформирование прямоугольных пластин на упругом основании. / Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 13. 2003, С. 181-183.

174. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Моделирование дорожных одежд с учетом движущихся многоосных автомобилей. XI научно-техническа конференция с международно участие "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгария. Варна. Сборник доклады 2005. С. 402-408.

175. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Распознавание изменения во времени импульсно воздействующей на прямоугольную пластину нагрузки. Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве. Труды 5 международной научно-технической конференции. Харьков, ФЭД, 2002, с. 560-563.

176. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Решение обратной нестационарной задачи теории упругости для прямоугольной пластины. Вестник ХГАДТУ. Выпуск 17. 2002. С. 79-82.

177. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями мембраны. Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. 12'2003 т. 1, С. 151-155

178. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Обратные нестационарные задачи для упруго-деформируемых балок и пластин // Международная научно-техническая конференция «Инновации в

машиностроении», (Минск, 30-31 октября 2008 г.). Национальная академия наук Беларусии. Минск, 2008. С. 152-158.

179. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для упругодеформируемых стержней пластин и оболочек // Международная конференция. Актуальные проблемы прикладной математики и механики. ИПМаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины. Харьков, 23-26 октября 2006г. Харьков , 2006. С. 104.

180. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Идентификация нестационарных нагружений воздействующих на пластины и оболочки / Материалы международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 мая 2005 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2005. С. 360.

181. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения элементов конструкции в виде пластин тензометрическим методом // Пробл. машиностроения. 2009. 12, №2. С. 47-55.

182. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ". 2004. №31. С. 176-179.

183. Янютин Е. Г., Воропай Н. И. Восстановление импульсного воздействия на бесконечную цилиндрическую оболочку // Вестник ХНАДУ: сб. научн. тр. Х. 2010. Вып. 49. С. 116-119.

184. Янютин Е. Г., Воропай Н. И. Исследование динамических процессов в пластине на основе уточненной теории с учетом поперечного обжатия // XV International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (DSMSI): (25-27 may 2011, Kyiv). Киев. 2011. С. 335.

185. Янютин Е. Г., Воропай Н. И. Исследование динамического деформирования пластины на основе одного волнового уравнения // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. Х. 2011. №. 13. С. 194-200.

186. Янютин Е. Г., Воропай Н. И. Постановка и решение динамических прямых и обратных задач для прямоугольной пластины с учетом поперечного обжатия // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. Х., 2010. №68. С. 155-166.

187. Янютин Е. Г., Воропай Н. И. Управление нестационарными колебаниями бесконечно длинной цилиндрической оболочки // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. научн. тр. Х., 2010. №. 37. С. 170-175

188. Янютин Е. Г., Воропай Н. И., Гнатенко Г. А. Применение интегральных уравнений Вольтерра в задачах импульсного деформирования цилиндрических оболочек // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: (13-15 травня 2010 р., Київ). Киев, 2010. Т. 1. С. 460.

189. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. А. Идентификация нагрузки, воздействующей на составную балку // Вестник ХНАДУ: Сб. научн. тр. Харьков: Изд-во ХНАДУ. 2010. Вып. 49. С. 93-97.

190. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. А. Определение импульсного нагружения балки // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. Харків: НТУ «ХПІ», 2008. № 47. С. 184-189.

191. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязко-упругих балок // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. 2008. №47. С 178-184.

192. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на вязко-упругие балки и плиты // International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation», (Київ, 27-29 травня 2009 р.). М-во освіти та науки України, Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. К.: Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. 2009. С. 267.

193. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Исследование влияния нестационарной подвижной нагрузки на балки конечной длины // Автомобільний транспорт. 2003. №13. С. 184-186.

194. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Исследование влияния подвижной нагрузки на балки конечной длины // Матеріали 1-й міжвузівської науково-практичної конференції «Можливості використання методів механіки для розв’язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій», (Харків, 25 грудня 2003 р.) Академія пожежної безпеки України. Х.: Академія пожежної безпеки України, 2003. С. 22.

195. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Применение интегральных уравнений Вольтерра в задачах нестационарного деформирования балок // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, (Київ, 15-17 травня 2008 р.). М-во освіти та науки України, Національний технічний університет України «КПІ». Київ. 2008. С. 472.

196. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2013. № 54 (1027). С. 207-213.

197. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2013. № 37 (1010). С. 223-230.

198. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембран с присоединенными массами // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. 2012. Вып. 56. С. 75-79.

199. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны с присоединенной массой // Прикладные задачи математики и механики («ПЗММ» – 2012) : междунар. науч.-техн. конф., 10-14 сент. 2012 г.: материалы конференции. Севастополь : 2012. С. 38-42.

200. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник НТУ «ХПІ». Серія:

Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2012. № 54 (960). С. 209-216.

201. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости (прямая и обратная задача) // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2015. № 6 (1115). С. 191-200.

202. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Неустановившиеся колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости // Материалы XVII междунар. конф. "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI", 27-29 мая 2015 г. Киев: КНУ им. Т. Шевченко. 2015. С. 104.

203. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Определение точки приложения нестационарной сосредоточенной силы, воздействующей на балку // Тез. докл. междунар. науч. шк.-конф. «Тараповские чтения», 29 сент. 4 окт. 2013 г. Харьков: 2013. С. 78.

204. Янютин Е. Г., Кучерова Н. И. Восстановление во времени функции нагрузки, воздей-ствующей на бесконечную мембрану-полосу // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. научн. тр. Х., 2007. №. 22. С. 182-187.

205. Янютин Е. Г., Кучерова Н. И. Идентификация сосредоточенного нестационарного воздействия не бесконечную пластину-полосу // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. Х. 2008. №. 36. С. 190-195.

206. Янютин Е. Г., Кучерова Н. И. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу // Вестник ХНАДУ: сб. научн. тр. Х., 2006. Вып. 32. С. 80-83.

207. Янютин Е. Г., Перегон В. А., Янчевский И. В. Решение нестационарных задач теории упругости (прямых, обратных и управления) для стержневых элементов конструкций. Проблемы машиностроения, 1999, 2, №3-4. С. 86-92.

208. Янютин Е. Г., Перегон В. А., Янчевский И. В. Управление динамическим напряженным состоянием составных стержней. Материалы

Международной научной конференции "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Львов-Луцк, 26-29 сент. 2000 г. С. 295-299.

209. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Восстановление динамических нагрузок, действующих на конические оболочки // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2012. № 2. С. 218-224.

210. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Идентификация и управление в задачах импульсного деформирования стержней переменного сечения // Автомобильный транспорт. 2003. №13. С. 187-189.

211. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Некорректные задачи динамического деформирования составного стержня // Сборник научных трудов Национального горного университета. 2004. №19. том 4. С. 77-83.

212. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Некорректные задачи импульсного деформирования для цилиндрической оболочки // Вестник национального технического университета "ХПИ".– 2005. №22. С. 129-138.

213. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Прямая и обратная задачи для нестационарно нагруженного стержня переменного сечения // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. 2003. №23. С. 53-55.

214. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Прямая и обратная задачи для составного стержня переменного сечения // Материалы 1-й межвузовской научно-практической конференции “Возможности использования методов механики для решения вопросов безопасности в условиях чрезвычайных ситуаций”. Харьков. 2003. С. 11-15.

215. Янютин Е. Г., Светличная С. С, Янчевский И. В. Численно-аналитический способ решения начально-краевых задач теории упругости. Тезисы докладов 4–го Международного симпозиума украинских инженеров–механиков, Львов, 19-21 мая 1999 г. С. 9.

216. Янютин Е. Г., Шарапата А. С. Обратная нестационарная задача теории упругости для цилиндрической оболочки // Вестник Национального

технического университета “Харьковский политехнический институт”. Харьков: НТУ “ХПИ”. 2004. № 31. С. 172-175.

217. Янютин Е. Г., Шарапата А. С. Решение некорректной динамической задачи для круговой мембраны // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. Харьков: НТУ “ХПИ”. 2002. № 9, т. 9. С. 153-156.

218. Янютин Е. Г., Шарапата А. С., Воропай А. В. Вычислительный эксперимент в задачах идентификации нестационарных нагружений прямоугольной пластины и пологой сферической оболочки. Вісник Харківського національного університету. № 590. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.", 2003. С. 255-258.

219. Янютин Е. Г., Шарапата А. С., Егоров П. А. Прямые и обратные нестационарные задачи теории упругости // Материалы XVI междунар. конф. "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI", 29-31 мая 2013 г. Киев: КНУ им. Т. Шевченко. 2013. С. 279.

220. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций (монография). Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ). 2001. 184 с.

221. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Обратная задача теории упругости при нестационарном неосесимметричном нагружении цилиндрической оболочки. Вестник Харьковского государственного политехнического университета, 2000, Вып. 104. С. 125-129.

222. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Распознавание импульсной нагрузки, воздействующей на полусферическую оболочку средней толщины. Тезисы докладов X-й Международной конференции "Dynamical system modeling and stability investigation" DSMSI–2001, Киев, 22-25 мая 2001 г. С. 348.

223. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Распознавание импульсной нагрузки, воздействующей неосесимметрично на цилиндрическую оболочку. Материалы X-го Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в

задачах математической физики" МДОЗМФ–2000, пос. Лазурное, 29 мая – 5 июня 2001 г. С. 391-395.

224. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Шарапата А. С. Идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану // Автомобильный транспорт. 2001. Вып. 7-8. С. 226-229.

225. Янютин Е.Г., Гришакин В. Т. Идентификация нестационарной подвижной нагрузки, действующей на балку конечной длины // XIV Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье», (Харьков, 18-19 травня 2006 р.). М-во освіти та науки України, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Х.: НТУ «ХПІ». 2006. С. 12.

226. Янютин Є. Г., Янчевський І. В., Шарапата А. С., Воропай О. В., Некоректні задачі імпульсного деформування пластин та оболонок // Машинознавство. 2003. № 8. С. 31-34.

227. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Воропай О. В., Поваляєв С. І. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв’язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження // Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 27. 2010, С. 153-156.

228. Янютін Є. Г., Янчевський І. В., Шарапата А. С., Воропай О. В. Некоректні задачі імпульсного деформування пластин та оболонок. Шостий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. Тези доповідей. Львів, 2003, С. 33-34.

229. A simplified vibration compensation through magnetostrictive actuators / Zucca M.; Raffa F. A.; Fasana A.; Colella N.. - In: JOURNAL OF VIBRATION AND CONTROL. - ISSN 1077-5463. - STAMPA. - 21:14(2015), pp. 2903-2912.

230. Active damping of nonstationary vibrations of a rectangular plate under impulse loading / Veniamin D. Kubenko, Igor V. Yanchevskiy / Journal of Vibration and Control, 19(10):1514-1523 July 2013.

231. Active vibration suppression in smart structures subjected to model uncertainties and environmental disturbances: an adaptive approach / Hamid Reza

Koofigar, Shahab Amelian / Journal of Vibration and Control. Volume: 19 (2013) issue: 13, pp. 2046–2053.

232. Amir Younespour, Hosein Ghaffarzadeh. Structural active vibration control using active mass damper by block pulse functions //Journal of Vibration and Control. Volume: 21 issue: 14, page(s): 2787–2795.

233. Babaev A. E., Yanchevskiy I. V. Active control of the strained state of an asymmetric trimorphic beam under nonstationary modes of operation // J. of Math. Sc. 2012. Vol. 184, No. 1. P. 78-87.

234. Birman Victor. Shape memory elastic foundation and supports for passive vibration control of composite plates / Victor Birman // International Journal of Solids and Structures. 2008. V. 45, № 1. P. 320-335.

235. Bryan Lewis, Lothar Reichel Arnoldi-Tikhonov regularization methods // Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 226, Issue 1, 1 April 2009, Pages 92-102.

236. Carra S. Active vibration control of a thin rectangular plate in air or in contact with water in presence of tonal primary disturbance / S. Carra, M. Amabili, R. Ohayon, P.M. Hutin // Aerospace Science and Technology. 2008. V. 12, № 1. P. 54-61.

237. Caruso G. Active vibration control of an elastic plate using multiple piezoelectric sensors and actuators / G. Caruso, S. Galeani, L. Menini // Journal of Simulating Modelling Practice and Theory, 11(5-6), P. 403-419. 2003.

238. Cha P. D. Free vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass. Journal of Sound and Vibration. Volume 207, Issue 4, 6 November 1997, Pages 593-596. https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1163.

239. Chen Lin-Hung, Huang Shyh-Chin. Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment // Comput. and Struct. 2001. 79, N 14. P. 1355 – 1362.

240. Chintakindi L. Amba-Rao. On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. Volume 31, Issue 3, 1964, Pages 550-551.

241. Dae Seung Cho, Byung Hee Kim, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Nikola Vladimird. Free vibration analysis of stiffened panels with lumped mass and stiffness attachments. Ocean Engineering. Volume 124. 15 September 2016, Pages 84-93.

242. Dae Seung Cho, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Byung Hee Kim, NikolaVladimird. Free and forced vibration analysis of arbitrarily supported rectangular plate systems with attachments and openings. Engineering StructuresVolume 171, 15 September 2018, Pages 1036-1046. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.032.

243. Das Y. C. and Navaratna D. R. Vibrations of a Rectangular Plate With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot. J. Appl. Mech 30(1), 31-36 (Mar 01, 1963). doi:10.1115/1.3630102.

244. Design of non-traditional dynamic vibration absorber for damped linear structures /ND Anh and NX Nguyen / Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Vol 228, Issue 1 (2014), pp. 45–55.

245. Ding Zhou, Tianjian Ji. Free vibration of rectangular plates with attached discrete sprung masses. Shock and Vibration 19(1):pp. 101-118. January 2012. DOI: 10.1155/2012/983576.

246. E. Voronova. Identification of a non–stationary movable load by means of a movable sensors system / Є.М. Воронова, Є.Г. Янютин, В.Т. Гришакин // Х.: Вестник Харьковского национального автомобильно–дорожного университета. 2007. №37. С. 143-144.

247. Gang Yan. Impact load identification of composite structure using genetic algorithms / Gang Yan, Li Zhou // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 319, № 3-5. P. 869-884.

248. Glasko V. Inverse Problems of Mathematical physics / V. Glasko. American Institute of Physics, 1988. 108 p.

249. Hart E. L., and Hudramovich V. S. Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // Journ. Appl. Mathematics and Mechanics. 2016. V. 80, Issue 2. P. 156–163.

250. He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators // Int. J. Solids and Struct. 2001. 38, N 9. P. 1641 – 1655.

251. Hochstenbach M. E., Reichel L., Rodriguez G. Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 273, 1 January 2015, Pages 132-149.

252. Jang T.S. Indirect measurement of the impulsive load to a nonlinear system from dynamic responses: Inverse problem formulation / T.S. Jang, Hyoungsu Baek, S.L. Han, T. Kinoshita // Mechanical Systems and Signal Processing. 2010. V. 24, № 6. P. 1665-1681.

253. Javad Vaseghi Amiri, Ali Nikkhoo, Mohammad Reza Davoodi, Mohsen Ebrahimzadeh Hassanabadi. Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method. Thin-Walled Structures. Volume 62, January 2013, Pages 53-64. https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.07.014.

254. Kapuria S., Dumir P.C. Coupled FSDT for piezotermoelectric hybrid rectangular plate // Int. J. Solids and Struct. 2000. 37, N 42. P. 6131 – 7153.

255. Kirchhoff G.R. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe / G.R. Kirchhoff // J. Reine und Angew. Math. 1850. V. 40, № 1. P. 51–88.

256. Lamm P.K., Scofield T.I. Sequential predictor-corrector methods for the variable regularization of Volterra inverse problems // Inverse problems. 2000. 16. P. 373 – 399.

257. Law S.S. Moving load identification on a simply supported orthotropic plate / S.S. Law, J.Q. Bu, X.Q. Zhu, S.L. Chan // International Journal of Mechanical Sciences. 2007. V. 49, № 11. P. 1262-1275.

258. Li Y. Y. Modeling and vibration control of a plate coupled with piezoelectric material / Y. Y. Li, L. Cheng, P. Li // Composite Structures. 2003. V. 62, № 2. P. 155-162.

259. Lingzhi Wang, Zhitao Yan, Zhengliang Li, Zhimiao Yan. Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Massive Machine with Elastic Supports. International Journal of Structural Stability and Dynamics. Volume 16, Issue 10, 1 December 2016, https://doi.org/10.1142/S0219455415500698.

260. Lo K.H. A high-order theory of plate deformation. Part 1: Homogeneous plates / K.H. Lo, R.M. Christensen, E.M. Wu // ASME J. of Applied Mechanics. 1977. № 44. P. 663-668.

261. Mahadevaswamy P., Suresh B. S. Influence of Aspect Ratio of Vibratory Flap on Dynamic Response of Clamped Rectangular Plate. International Journal of Structural Stability and Dynamics. Vol. 15. No. 04, 1450064 (2015). https://doi.org/10.1142/S 0219455414500643.

262. Mahadevaswamya P., Sureshb B. S. Optimal mass ratio of vibratory flap for vibration control of clamped rectangular plate. Ain Shams Engineering Journal. Volume 7. Issue 1. March 2016, Pages 335-345. https://doi.org/10.1016/j.asej.2015.11.014.

263. Manfred Ulz, S. Eren Semercigil. Vibration control for plate-like structures using strategic cut-outs. Journal of Sound and Vibration. Volume 309, Issues 1–2, 8 January 2008, Pages 246-261. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.068.

264. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R.D. Mindlin // J. Appl. Mech. 1951. Vol. 18, № 1. P. 31-38.

265. Optimal design of a new vibration absorber setup for randomly forced systems / Jimmy S Issa / Journal of Vibration and Control. Vol 19 (2012), Issue 16, pp. 2335–2346.

266. Parameswaran, AP & Gangadharan, K. Parametric modeling and FPGA based real time active vibration control of a piezoelectric laminate cantilever beam at resonance // JVC/Journal of Vibration and Control, 2015, vol 21, no. 14, pp. 2881-2895. DOI: 10.1177/1077546313518818.

267. Park H.W. Determination of optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua / H.W. Park, S. Shin, H.S. Lee // Intern. J. numerical, methods engin. 2001. V 51. P. 1211-1230.

268. Poshyvalov V. Doyar I. Development of a stochastic model of failure of structural materials in creep at hardening stage// Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 3, No5(81). P.25-31.

269. Qiu Zhi-cheng. Acceleration sensors based modal identification and active vibration control of flexible smart cantilever plate / Zhi-cheng Qiu, Hong-xin Wu, Chun-de Ye // Aerospace Science and Technology. 2009. V. 13, № 6. P. 277-290.

270. Qiu Zhi-cheng. Experimental researches on sliding mode active vibration control of flexible piezoelectric cantilever plate integrated gyroscope / Zhi-cheng Qiu, Hong-xin Wu, Dong Zhang // Thin-Walled Structures. 2009. V. 47, № 8-9. P. 836-846.

271. Ramm A.G. Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering / A.G. Ramm. Springer, 2005. 462 p.

272. Ramm A.G. Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering / A.G. Ramm. Springer, 2005. 462 p.

273. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // Journal of Thin-Walled Structures, 2005. Vol. 43. P. 1513-1533.

274. Rodichev Yu. M., Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S.V. Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic loads // Strength of materials. 2018. Vol. 50, No 6. P. 868–873.

275. Saadat S., Noori M. et al. Using NiTi SMA tendons for vibration control of coastal structures // Smart Mater. and Struct. 2001. 10, N 4. P. 695 – 704.

276. Sarhadi, Pouria et al. “Identification of nonlinear actuators with time delay and rate saturation using meta-heuristic optimization algorithms.” J. Systems & Control Engineering 229 (2015): 808-817

277. Semi-active fuzzy control for seismic response reduction of building frames using variable orifice dampers subjected to near-fault earthquakes / Ghaffarzadeh

Hosein, Alizadeh Dehrod Ebrahim, Talebian Nima / Journal of Vibration and Control. vol. 19 2013, pp. 1980–1998.

278. Semi-active structural fuzzy control with MR dampers subjected to near-fault ground motions having forward directivity and fling step / Hosein Ghaffarzadeh / Smart Structures and Systems Vol. 12, Number 6, Dec. 2013, pp. 595-617

279. Shupikov A.N. High-order theory of multilayer plates. The impact problem / A.N. Shupikov, S.V. Ugrimov, A.V. Kolodiazhny, V.G. Yareschenko // Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35, № 25. P. 3391-3403.

280. Silvia Gazzola and James G. Nagy Generalized Arnoldi-Tikhonov Method for Sparse Reconstruction // Computational Methods in Science and Engineering. SIAM J. Sci. Comput., 36(2), B225–B247. (23 pages).

281. Silvia Gazzola, Paolo Novati. Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods // Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 256, 15 January 2014, Pages 180-195.

282. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: application of functional materials // Appl. Mech. Rev. 1998. 51. P. 505 – 521.

283. Tautenhahn U. Tikhonov regularization and a posteriori rules for solving nonlinear ill posed problems / U. Tautenhahn, Jin Qi-nian // Inverse problems. 2003. V. 19. P. 1-21.

284. Tavakolpour Ali Reza. Self-learning active vibration control of a flexible plate structure with piezoelectric actuator / Ali Reza Tavakolpour, Musa Mailah, Intan Z. Mat Darus, Osman Tokhi // Simulation Modelling Practice and Theory. 2010. V. 18, № 5. P. 516-532.

285. The Encyclopedia of Smart Materials / M. Schwartz, editor-in-chief. NY: A Wiley-Intersc. Publ., 2002. 1193 p.

286. Thinh Tran Ich. Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments / Tran Ich Thinh, Le Kim Ngoc // Computational Materials Science. 2010. V. 49, № 4. P. 276-280.

287. Voropay N. Identification of impulse load action on the plate–strip / N. Voropay // Active processes in higher technical education to train specialists for

transportation and highway engineering and automotive industry: матеріали Міжнародної науково–практичної конференції студентів та молодих вчених вищих технічних навчальних закладів іноземними мовами: (28-29 квітня 2009 р., Харків) / ХНАДУ. Харків, 2009. С. 139-142.

288. Watson, G. S. 1966. Smooth regression analysis. Sankha, Ser. A. Volume 26. 359-378.

289. Wu J.S., Luo S.S. Use of the analytical-and-numerical-combined method in the free vibration analysis of a rectangular plate with any number of point masses and translational springs. Journal of Sound and Vibration. Volume 200, Issue 2, 20 February 1997, Pages 179-194.

290. Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // Journal of Sound & Vibration, 300(1-2), 2007, P. 250-64.

291. Xiao-Juan Yang, Li Wang A modified Tikhonov regularization method// Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 288, November 2015, Pages 180-192.

292. Yanchevskiy I. V. Excitation of the bending vibrations of a rectangular metal-piezoceramic plate by a nonstationary electric signal // J. of Math. Sc. 2012. Vol. 185, No. 6. P. 852-857.

293. Yanchevskiy I. V., Babaev A. E., Babaev A. A. Influence of an oscillating circuit on the radiation of transient acoustic waves by an electroelastic cylinder // Journal of the Acoustic Society of America. 2010. 127, Iss. 4. P. 2282–2289.

294. Yanchevsky, I.V., Yanyutin, Ye.G., 2004. Identification of an impulse load acting on an axisymmetrical hemispherical shell. International Journal of Solids and Structures 41, 3643-3652.

295. Yang Jingyu, Chen Guoping. Computed Force-Based Sliding Mode Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience Volume 6. Number 1. pp. 385-390. March 2012. https://doi.org/10.1166/asl.2012.2207.

296. Yang Jingyu, Chen Guoping. Robust Nominal Model-Based Sliding Mode Robust Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. Applied Mathematics & Information Sciences 7(2L):671-678. June 2013. http://dx.doi.org/10.12785/amis/072L42.

297. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. Int. J. Solids and Struct. 41 (2004) 4919-4926.

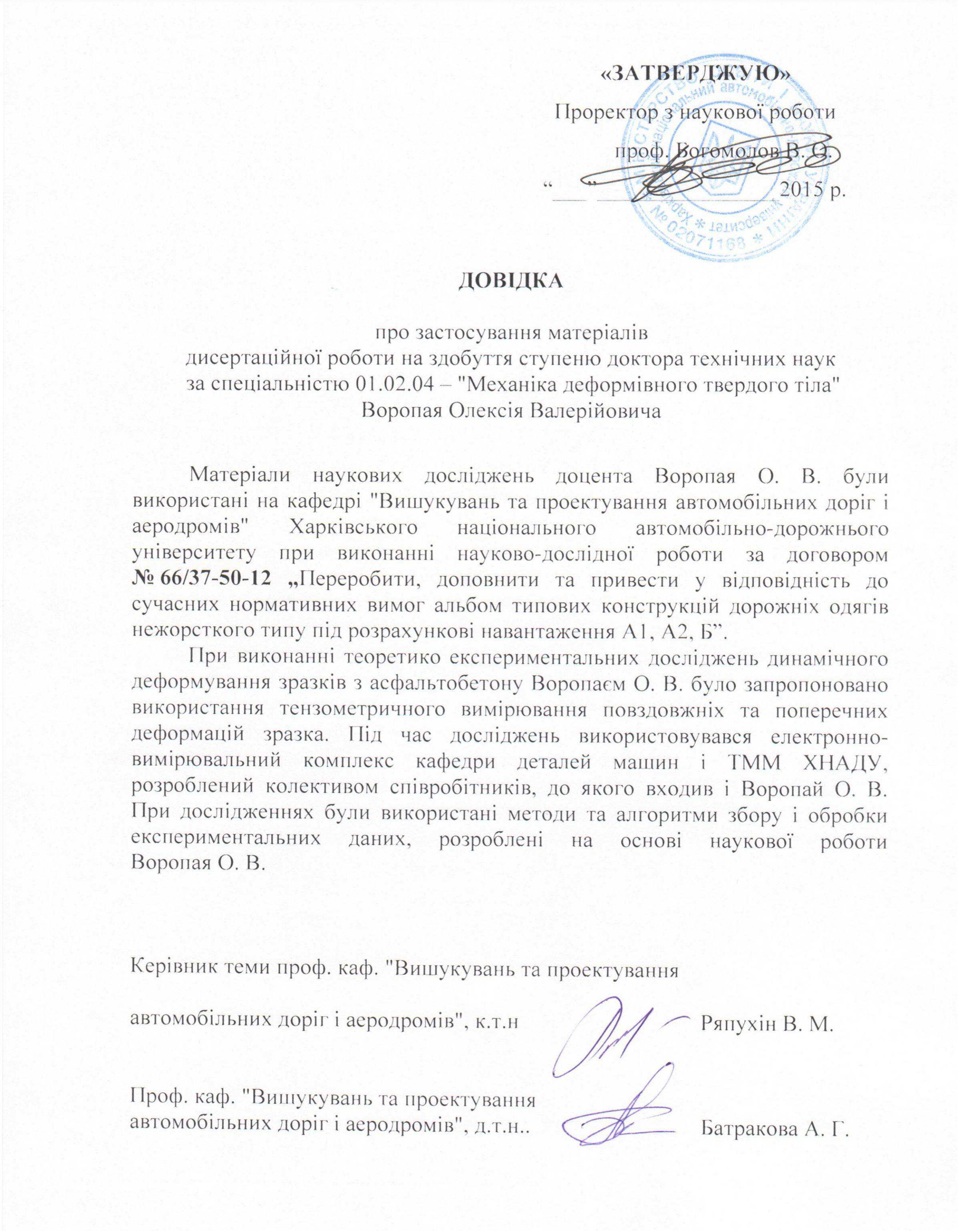
298. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Sharapata A. S. Controlling of nonstationary rectangular plate vibrations and identification of spherical shallow shell loading. Dynamical system modelling and stability investigation. Thesis of conference reports. Kyiv. 2003, p. 382

299. Yanyutin E. G., Bogdan D. I., Voronova E. M. Solution of the problem of plate forced oscillations in case of the movable loading // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета №31: Сб. науч. труд. Харьков, 2005. С. 92-94

300. Zhu X.Q. Identification of moving loads on an orthotropic plate / X.Q. Zhu, S.S. Law // Journal Vibr. and Acoust. 2001. V. 123, № 2. P. 238-244.

ДОДАТОК А

Довідки про використання результатів досліджень



«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи
проф. Богомолов В. О.
“___” ____________ 2015 р.

№ 02071168

ДОВІДКА

про застосування матеріалів
дисертаційної роботи на здобуття ступеню доктора технічних наук
за спеціальністю 01.02.04 – "Механіка деформівного твердого тіла"
Воропая Олексія Валерійовича

Матеріали наукових досліджень доцента Воропая О. В. були використані на кафедрі "Вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів" Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором **№ 66/37-50-12 „**Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б”.

При виконанні теоретико експериментальних досліджень динамічного деформування зразків з асфальтобетону Воропаєм О. В. було запропоновано використання тензометричного вимірювання повздовжніх та поперечних деформацій зразка. Під час досліджень використовувався електронно-вимірювальний комплекс кафедри деталей машин і ТММ ХНАДУ, розроблений колективом співробітників, до якого входив і Воропай О. В. При дослідженнях були використані методи та алгоритми збору і обробки експериментальних даних, розроблені на основі наукової роботи Воропая О. В.

Керівник теми проф. каф. "Вишукувань та проектування
автомобільних доріг і аеродромів", к.т.н Ряпухін В. М.

Проф. каф. "Вишукувань та проектування
автомобільних доріг і аеродромів", д.т.н.. Батракова А. Г.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Генеральний директор
ТОВ «Океан-Судоремонт»
Л. М. Шумейко
“03” 2016 р.

Ідентифікаційний код 37698435
№1

ДОВІДКА

про застосування матеріалів дисертаційної роботи
Воропая Олексія Валерійовича
на здобуття ступеню доктора технічних наук
за спеціальністю 01.02.04 – "Механіка деформівного твердого тіла"
Тема роботи:
«Використання інтегральних рівнянь Вольтерра
у нестаціонарних задачах динаміки пластин»

Матеріали наукових досліджень Воропая О. В. були використані у ТОВ "Океан-судоремонт".

Актуальною проблемою при проектуванні та розрахунках на міцність елементів корпусів судів під час нестаціонарних навантажень є урахування точних даних щодо максимальних величин контактних сил та законів їх зміни у часі.

При виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування Воропаєм О. В. було запропоновано провести модельні експерименти на простіших конструктивних елементах – прямокутних пластинах з використанням тензометричного вимірювання поперечних деформацій під час удару. Завдяки розв'язку оберненої задачі ідентифікації невідомих навантажень, що діють на прямокутну пластину та розрахункових алгоритмів для розв'язку обернених задач, розроблених на основі наукової роботи Воропая О. В. вдалося визначити експериментальні контактні навантаження при пружному та непружному ударі. Значення цих контактних сил використовувалися у ТОВ "Океан-судоремонт" при комп'ютерному моделюванні деформаційних процесів у силових елементах корпусу судів методом скінчених елементів на базі власних САПР заводу.

Керівник відділу

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Генеральний директор
корпорації «Співдружність»
_____________________ В.О.Мітішов
«_____» ______________ 2017р.

«СПІВДРУЖНІСТЬ»
Ідентифікаційний код 24382101
№1

ДОВІДКА

про застосування матеріалів дисертаційної роботи
Воропая Олексія Валерійовича
на здобуття ступеню доктора технічних наук
за спеціальністю 01.02.04 – "Механіка деформівного твердого тіла"
Тема роботи:
«Використання інтегральних рівнянь Вольтерра
у нестаціонарних задачах динаміки пластин»

Матеріали наукових досліджень Воропая О. В. були використані при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін та камер для розбирання та утилізації вибухонебезпечних виробів.

Автором дисертації розглянуто задачі з ідентифікації декількох зовнішніх нестаціонарних навантажень, що діють на прямокутні пластини. Визначення зміни у часі зовнішніх імпульсних навантажень дозволяє більш точно проводити подальші числові розрахунки пластинчатих елементів при їх нестаціонарному деформуванні за допомогою пакетів скінченно-елементного аналізу.

Результати дисертації (пружні та в’язкопружні моделі, алгоритми, комплекси методів та програми для числової обробки) були використані при експериментальних дослідженнях ударних навантажень прямокутних броньованих пластин, метою яких було з'ясування нестаціонарних деформацій у різних точках пластин та визначення зміни ударних навантажень у часі , що викликали ці деформації. Застосування результатів рішення обернених задач дозволило реалізувати аналіз напружено-деформівного стану конструкції в умовах неповної інформаційної бази даних та доповнити недостатні дані для подальших розрахунків.

Використання комплексу результатів, отриманих у дисертації дозволить внести необхідні корективи на етапі конструкторських розробок без залучення додаткових витрат.

Заступник генерального директора
з виробництва і якості . О.В.Рябоконь

ДОДАТОК Б

Список публікацій за темою дисертації

та відомості про апробацію результатів дисертації

Список опублікованих праць за темою дисертації

Монографії:

1. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Монография // Харьков: Изд-во «Лидер», 2018. 214 с. ISBN 978-617-7476-10-7

2. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. 212 с. ISBN 978-966-303-291-7 (Об.), ISBN 978-966-303-293-1 (Ч. II). *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

Статті у наукових фахових виданнях України
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

3. Воропай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. механика. 2007. 43. №7. С. 90-97. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

A. V. Voropai, E. G. Yanyutin. Identification of several impulsive loads on a plate // International Applied Mechanics. July 2007, Volume 43, Issue 7, pp 780–785. Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 43, No. 7, pp. 90–97, July 2007. (**SCOPUS**).

4. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ».

2015. № 55 (1164). С. 43-46. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Index Copernicus, Google Scholar**).

5. Воропай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2015. № 41 (1150). С. 17-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2079-0023. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

6. Батракова А. Г., Ряпухин В. Н., Воропай А. В., Дорожко Е. В., Егоров П. А. Исследование деформирования образца из асфальтобетона на раскол с использованием тензометрической аппаратуры // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2015 / Выпуск 71, С. 45-49. (**Index Copernicus, Google Scholar**). *Брав участь у постановці задачі, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.*

7. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. № 57 (1166). С. 25-29. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

8. Малахов Е. С., Воропай А. В. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. №6 (1178). С. 56-62. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**). *Написана у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв'язку та була прийнята участь у аналізі отриманих результатів.*

9. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. №16 (1188). С. 16-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

10. Воропай А. В., Малахов Е. С. Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2016. № 26 (1198). С. 45-49. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Index Copernicus, Google Scholar**). *Написана у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв'язку та була прийнята участь у аналізі отриманих результатів.*

11. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 6 (1228). С. 29-44. Бібліогр.: 11 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**). *Участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розробка методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць та застосування процедури згладжування при розв'язку конкретних задач.*

12. Воропай А. В. Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагружений // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. № 30 (1252). С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

13. Воропай А. В. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1297). С. 19-24. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631. (**Ulrisch`s Periodicals Directory, Google Scholar**).

Статті у наукових фахових виданнях України:

14. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2004. №31 С. 176-179. *Автору належить участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв'язок задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження прямокутної пластини.*

15. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек. Вісник Харківського національного університету Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 661., 2005, С. 69-82. *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин.*

16. Воропай А. В., Гришакин В. Т., Янютин Е. Г. Некорректные обратные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении. Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №775, 2007, Харьков, С. 73-80. *Автору належить участь у постановці та розв'язок задач для прямокутних пластин.*

17. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. №38. С. 174-180. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

18. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой. // Вестник национального

технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. №47. С. 42-48.

19. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения элементов конструкции в виде пластин тензометрическим методом // Проблемы машиностроения. 2009. 12, №2. С. 47-55. *Автору належить участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв’язок задачі ідентифікації нестаціонарного навантаження прямокутної пластини.*

20. Воропай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2010 / Выпуск 49, С. 84-87.

21. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Воропай О. В., Поваляєв С. І. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв’язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження. // Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 27. 2010, С. 153-156. *Участь у постановці задач та виборі моделі дорожньої конструкції для розв’язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.*

22. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2010. №69 – С. 46-52.

23. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Вып. 53, С. 87-90.

24. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором // Вестник национального технического

университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2011. №52. С. 42-48.

25. Воропай О. В., Поваляєв С. І., Гришакін В. Т. Дослідження різних моделей дорожньої конструкції за нестаціонарного навантаження. // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Выпуск 55, С. 25-31. *Участь у постановці задач та виборі моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестаціонарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.*

26. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2012. №55. С. 30-37.

27. Воропай А. В., Шупиков А. Н.. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении.// Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2013. № 63 (1036). С. 29-34. *Участь у постановці задачі, розв'язання та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

28. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А. Измерительный комплекс для экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2015. №2(8). С. 182–187. ISSN 2226-9266 – Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE15_2/2015-8-5.2.pdf. *Участь у постановці задач, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.*

29. Воропай А. В., Дзюбенко А. А., Егоров П. А., Малахов Е. С. Экспериментальное измерение деформаций балок из различных материалов при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2016. №1(9). С. 128-138. ISSN 2226-9266. Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE16_1/5.5.pdf. *Брав участь у постановці задач, розробці концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.*

30. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций // Механіка та машинобудування, – Харків : НТУ «ХПІ», 2018 – №1. С. 3-22. *Участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розробка методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць та застосування процедури згладжування при розв'язку конкретних задач.*

Статті в іноземних виданнях:

31. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. Int. J. Solids and Struct. 41 (2004) 4919-4926. *Написана у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці, розв'язок задачі та розрахунки, а також участь в аналізі отриманих результатів.*

Тези наукових доповідей:

32. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Идентификация нестационарных нагружений воздействующих на пластины и оболочки / Материалы международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 мая 2005 г., Киев) / К.: КНУ им. Т. Шевченко. 2005. С. 360.

33. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Моделирование дорожных одежд с учетом движущихся многоосных автомобилей. XI научно-техническа конференция с международно участие "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгария. Варна. Сборник доклады 2005, С. 402-408.

34. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении обратных задач динамической теории пластин и оболочек. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харьков-Херсон, 2005, С. 63-66.

35. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Международная научная конференция "Интегральные уравнения и их применения" 29 июня – 4 июля 2005 года. Одесса, С. 167.

36. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное снижение амплитуд нестационарных колебаний на прямоугольной области пластины. //VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь: ДиАйПи, 2006, С. 200.

37. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для упругодеформируемых стержней, пластин и оболочек. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». ИПМаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины. Тезисы докладов. 23-26 октября 2006 года. Харьков, С. 104.

38. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом особенностей нагружения. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007) Харьков-Херсон, 2007, С. 350-353.

39. Воропай А. В., Кучерова Н. И. Нестационарные задачи для прямоугольных пластин и пластин-полос при наличии сосредоточенных сил и масс. // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь, 2008, С. 46.

40. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Обратные нестационарные задачи для упруго-деформируемых балок и пластин. // Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» (Минск 30-31 октября 2008 г.) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларусии. Минск, 2008. С. 152-158.

41. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями пластины, несущей сосредоточенную массу // Тринадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 року, Київ. Матеріали конференції Т. І. К., НТУУ, 2010. С. 98.

42. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с гасителем / Материалы XV международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 мая 2011 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2011. С. 253.

43. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с установленным на ней амортизатором // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 50-летию механико-математического факультета ХНУ им. В. Н. Каразина (17-22 апреля 2011 г.). Харьков, 2011. С. 31-32.

44. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с дополнительной упругой подпоркой / Материалы XVI международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 мая 2013 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2013. С. 264.

45. Воропай А. В.. Моделирование нестационарного деформирования шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой подпоркой. Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики: материалы Международной научно-практической интернет-конференции (Харьков 10-25 мая 2013 г.) / Ред. совет: Тропина А. А. и др. Х.: Экограф, 2013. С. 24-28.

46. Воропай А. В. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины с дополнительной вязко-упругой опорой// «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013» г. Харьков 29 сентября – 4 октября 2013 г. / под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича.– Х.: Цифрова друкарня №1, 2013. С. 35-36.

47. Воропай А. В. Использование интегральных уравнений в задачах моделирования элементов виброзащиты. Сборник тезисов Международной научно-практической конференции по случаю Дня автомобилиста и дорожника: "Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля" Посвящённой 90-летию проф. Говорущенко Н. Я. 15-16 октября 2014 г. С. 186-187.

48. Воропай А. В. Моделирование воздействия на пластину дополнительных вязко-упругих опор // Наукові праці Міжнародної науково-практичної та науково-методичної конференції присвяченої 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з Дня народження професора А. Б. Гредескула "Новітні технології в автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців" 20-21 жовтня 2016 р. Х.: Видавництво «Форт», 2016. С. 234-235.

49. Воропай А. В., Малахов Е. С. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом диссипации // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2017. 214 С. (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка). С. 113.

50. Воропай А. В., Егоров П. А., Малахов Е. С. Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017) Харьков, 2017, С. 80-83.

51. Воропай А. В., Малахов Е. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки // Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19–20 жовтня 2017 р. Х.: Видавництво «ХНАДУ», 2017. С. 225-226.