МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

СТЕПАНОВА НАТАЛІЯ ІВАНІВНА

УДК 539.3

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИЛОВИХ ВПЛИВІВ, ВКЛЮЧЕНЬ ТА РОЗРІЗІВ У ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дніпро – 2019

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі комп'ютерних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Гук Наталія Анатоліївна,
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
Міністерства освіти і науки України,
завідувач кафедри комп'ютерних технологій

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Жук Ярослав Олександрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки

доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв Володимир Іванович,
Національний університет
«Запорізька політехніка»,
професор кафедри механіки

Захист відбудеться « 24 » грудня 2019 р. о $14^{\underline{00}}$ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 при Дніпровському національному університету імені Олеся Гончара за адресою:
м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 35, корпус 5, ауд.27.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. О. Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49107, м. Дніпро, вул. Казакова, 8.

Відгуки на автореферат просимо надсилати за адресою: 49010, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, вченому секретарю спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10.

Автореферат розіслано « 22» листопада 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор А. П. Дзюба

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Потреби сучасної інженерної практики у машинобудуванні, аеро- та суднобудуванні, будівництві, на транспорті ставлять жорсткі вимоги до експлуатаційних характеристик споруд та технічних засобів, насамперед це стосується надійності, економічності, безпеки експлуатації.

Одним із факторів забезпечення надійної роботи тонких пластинчастих елементів є розробка методів прогнозування їх дійсного стану з урахуванням наявності дефектів матеріалу у вигляді включень, розрізів, можливого впливу зосереджених сил. За певних рівнів навантаження або умов експлуатації в місцях розташування вказаних дефектів та силових впливів можуть спостерігатися істотні концентрації напружень, які необхідно своєчасно ідентифікувати заради безпечного використання та запобігання передчасного руйнування конструкцій.

Тому необхідність мати надійні та зручні у використанні методи ідентифікації напружено-деформованого стану пластин з дефектами при зміні характеру діючих навантажень визначає актуальність обраної теми роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, результати яких викладено у дисертаційній роботі, виконувались у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара (2014-2019 рр.). Тема дисертації відповідає основним напрямкам наукових досліджень кафедри комп'ютерних технологій. Проведені у роботі дослідження виконані в рамках науково-дослідних тем Міністерства освіти і науки України «Розробка програмно-математичного забезпечення та моделювання інформаційних процесів», номер державної реєстрації №0113U004203 (2014-2016); «Дослідження математичних моделей фізичних процесів методами ідентифікації та рекурентного аналізу із застосуванням інформаційних технологій», номер державної реєстрації №0116U002229 (2016-2018).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є:

– розробка методу обернених задач стосовно до спостережуваних тонких пластин для визначення невідомих локальних силових впливів, ідентифікації включень та внутрішніх граничних контурів;

– розвиток числових методів розв'язання обернених задач теорії тонких пластин, дослідження особливостей процесу ідентифікації.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

– сформулювати розрахункові моделі для опису процесу нелінійного деформування тонких пластин при наявності у матеріалі пластини включень з невідомими геометричними параметрами та пружними властивостями, порушень суцільності пластини, в умовах дії зосереджених сил невідомої величини;

– сформулювати обернену задачу ідентифікації зазначених особливостей у варіаційній постановці, обрати множину коректності розв'язків задачі;

– побудувати дискретну модель деформування пластини з використанням характеристичних функцій, які дозволяють враховувати вплив зосереджених сил, наявність дефектів у вигляді включень, розрізів та визначати їх розташування у пластині та параметри;

– розвинути ітераційний підхід щодо розв'язання сформульованої варіаційної задачі та числові методи, що його реалізують, розробити алгоритм, дослідити алгоритм на точність, встановити межі застосування підходу;

– розвинути підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини;

– за допомогою розробленого підходу й алгоритмів числової реалізації сформулювати й розв'язати задачі про реконструкцію локальних силових впливів, задачі ідентифікації місця розташування та властивостей жорстких включень, задачі ідентифікації розрізів у пластині;

– провести порівняльний аналіз отриманих результатів із відомими з літератури результатами розв'язання аналогічних задач ідентифікації.

Об'єкт дослідження – пружно деформована тонка пластина при частково невідомих параметрах її моделі.

Предмет дослідження – ідентифікація параметрів реальної моделі тонкої пластини на основі результатів спостереження за процесом її деформування.

Методи дослідження. У роботі застосовано чисельно-аналітичне моделювання нелінійного процесу пружного деформування реальної тонкої пластини. Використано варіаційний метод дослідження нелінійних крайових задач з додатковими умовами у вигляді рівностей, метод скінченних елементів у поєднанні з методом продовження за параметром та методом Ньютона-Рафсона. Виконано комплексне тестування розробленого числового методу розв'язання оберненої задачі, порівняльний аналіз з результатами, отриманими іншими авторами, а також проаналізовано точність і вірогідність отриманих розв'язків.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

– вперше для розв'язання оберненої задачі теорії пластин застосовано варіаційний підхід, що базується на формуванні повного функціонала енергії пластини, до якого приєднується додаткова умова, що визначає близькість дійсного та спостережуваного станів, а невідомі параметри моделі пластини описано за допомогою характеристичних функцій;

– розроблено метод та числові алгоритми, які дозволяють ідентифікувати локальні силові впливи, жорсткі включення та розрізи у тонкій пластині за результатами спостережень за її напружено-деформованим станом;

– розвинуто підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини;

– вперше запропоновано підхід щодо уточнення розрахункової скінченно-елементної моделі пластини з математичним розрізом;

– отримано числові розв'язки задач ідентифікації місця розташування та фізико-механічних властивостей жорстких включень;

– отримано числові розв'язки задач реконструкції локальних силових впливів;

– отримано числові розв'язки задач ідентифікації розрізів у пластині.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів, наведених у дисертації, забезпечується використанням загальноприйнятих моделей деформування тонкостінних систем, коректністю математичних постановок прямих та обернених задач, використанням надійних аналітичних і числових методів розв'язання задач, контрольованою точністю обчислень, відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач, доброю узгодженістю отриманих результатів з опублікованими результатами інших дослідників.

Практичне значення отриманих результатів полягає у:

– можливості використання розроблених математичних моделей та методів дослідження спостережуваних пластин з урахуванням різних, у тому числі й екстремальних, змін у системі для визначення параметрів моделей дійсності;

– створенні комплексу прикладних програм для реконструкції реальних навантажень, ідентифікації дефектів у вигляді включень та розрізів за результатами вимірювання характеристик напружено-деформованого стану, який може бути використаний у процесі моніторингу тонкостінних конструкцій;

– можливості безпосереднього використання результатів розв'язання обернених задач для оцінки дійсного стану тонких пластин у елементах конструкцій в умовах експлуатації.

Апробація результатів дисертації. Окремі результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на:

– XII - XIV, XVI МНПК «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS)», м. Дніпро, 19-21 листопада 2014, 18-20 листопада 2015, 16-18 листопада 2016, 21- 23 листопада 2018;

– XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015)», м. Львів, 24-25 вересня 2015;

– V Міжнародній конференції «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии», м. Кишинэу, 22-25 березня 2016;

– науковому семінарі кафедри комп'ютерних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, травень 2016;

– МНПК «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні (ІТММ-2018)», м. Дніпро, 27-29 березня 2018;

– IV МНПК «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018)»: м. Черкаси, 17-18 травня 2018;

– МНПК «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019)», м. Івано-Франківськ, 20-25 травня 2019;

– науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 20 червня 2019, керівник – д. ф.-м. н., професор В.В. Лобода;

– об'єднаному (міжкафедральному) науковому семінарі «Сучасні питання оптимізації, дискретної математики, інформаційних технологій та математичного моделювання» на базі діючого наукового семінару «Сучасні питання оптимізації та дискретної математики» при Науковій раді НАН України з проблеми «Кібернетика» факультету прикладної математики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 24 вересня 2019, керівник – чл.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., професор О.М. Кісельова.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 14 наукових працях, серед яких 5 статей [1-5], з них одну статтю [1] надруковано у журналі, що входить до наукометричної бази даних Scopus, 4 статті [2-5] опубліковано у виданнях, уключених МОН України до переліку фахових видань, 9 тез доповідей і матеріалів всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [6 - 14].

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У роботах [1-13], які написано разом з науковим керівником, доктором фізико-математичних наук, професором Н. А. Гук, співавтору належить участь у постановці задачі, виборі методів розв'язування, обговоренні алгоритму та аналізі результатів обчислювальних експериментів. У роботах [1, 2, 6] здобувачем самостійно побудовано дискретні моделі тонкостінних систем, розроблені алгоритми розв'язування задач та виконано їх програмну реалізацію. У роботах [3, 10, 13] здобувачеві належить побудова математичної моделі системи що досліджується, проведення обчислювальних експериментів. У роботах [4, 5, 7, 9, 11] здобувачем було здійснено вибір методів розв'язання задачі, побудовано скінченно-елементну модель і проведено обчислювальні експерименти. У роботі [8] здобувачем було здійснено лінеаризацію задачі, проведено обчислювальний експеримент та проаналізовано числові результати. У роботі [12] здобувачеві належить проведення обчислювального експерименту та порівняльний аналіз способів відбору точок спостереження. Роботу [14] опубліковано без співавторів.

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 211 сторінок складається із вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел із 189 найменувань, 2 додатків на 10 сторінках і містить 54 рисунка та 17 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, висвітлено наукову новизну, практичне значення та вірогідність отриманих результатів, подано інформацію про апробацію результатів роботи, публікації за темою дисертації та особистий внесок здобувача, структуру та обсяг дисертаційної роботи.

В **першому розділі** проведено аналітичний огляд публікацій за темою дисертації. Зазначено, що останнім часом задачам ідентифікації дефектів у тонких пластинах приділяється значна увага. Виявленню неоднорідностей у вигляді включень присвячені роботи І.Ю. Цвелодуба, Е.І. Шифріна, П.В. Шушпаннікова, В.В. Щербакова, Є.Б. Яреми, A. Morassi. Локальні силові дії та термічні впливи на пластину досліджуються в роботах О.О. Ватульяна, Я.О. Жука, Ю.Г. Одинокова, Є.Г. Янютіна. Моделюванню пошкоджень у тонких пластинах у вигляді розрізів, тріщин присвячені дослідження Р. М. Мартиняка, М.Ф. Морозова, В.В. Панасюка, М.П. Саврука, Г.Т. Сулима.

Зазначається, що в даний час для дослідження тонкостінних систем все частіше використовуються переважно уточненні або некласичні теорії пластин, запропоновані у роботах С.П. Тимошенко, В.А. Баженова, В.В. Болотіна, А.С. Вольміра, І. І. Воровича, Г.Д. Гавриленка, Е.І. Григолюка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, В.З. Грищака, В.В. Кабанова, Б.Я. Кантора, В.Л. Красовського, Л. В. Курпи, Н.Ф. Морозова, Н.І. Ободан, О.В. Погорелова, В.І. Пожуєва, Л.С. Срубщика, П.О. Стеблянка, В.Т. Трощенка, В.П. Шевченка, M. Amabili, G. W. Hunt, J. M. T. Thompson, P. Wriggers та інших дослідників.

В задачах механіки теорію обернених задач розвинуто в роботах А.Л. Бухрейма, О.О. Ватульяна, В.І. Кузьменка, Р.М.Кушніра, Є.Г. Янютіна, Ю.М. Мацевитого, В.А.Постнова, І.Ю.Цвелодуба, А.В. Ясінського.

Найчастіше для розв'язання прямих задач теорії тонких пластин у випадку неоднорідності властивостей матеріалу, нелінійності диференціальних рівнянь, складності граничних умов використовують метод скінченних елементів. Особливостям його застосування присвячені роботи Ю.І. Бадрухіна, В.І. Грішина, І.І. Дияка, О.С. Зенкевича, В.А. Постнова, В.Д. Чубаня та інших.

На основі проведеного аналізу літератури визначено місце даної роботи і обґрунтовано вибір напрямків дослідження.

У другому розділі задачу ідентифікації силових впливів, включень, лінійних розрізів у тонкій пластині сформульовано як обернену задачу.

Деформований стан тонкої пластини, яка займає обмежену контуром $Г$ просторову область $\Omega=\{X| \quad X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R^3\}$ (область Ω може бути й багатозв'язною) та знаходиться під дією експлуатаційного навантаження, описується вектор-функцією переміщень $\widehat{U}\left(X,H^d(X)\right)\equiv\left(\widehat{u}_i(X,H^d(X)),\widehat{w}(X,H^d(X))\right)$ та залежить від функції невідомих оберненої задачі $H^d(X)$, $d=\overline{1,3}$.

Для опису обернених задач вводяться функції $H^d(X)$:

$H^1(X)$ – характеризує наявність у матеріалі пластини жорстких включень;

$H^2(X)$ – характеризує прикладені локальні сили невідомих величин;

$H^3(X)$ – описує внутрішні контури області Ω.

Зв'язок між функціями $\widehat{U}\left(X,H^d(X)\right)$ і $H^d(X)$ для пружного деформування пластини описано нелінійною системою рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left[C_1^{ijtq}(H^1)\left(\frac{\partial u_q}{\partial\xi_t}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\xi_t}\frac{\partial w}{\partial\xi_q}\right)\right]+V_j(X,H^2)=0;$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\left(C_2^{ijtq}(H^1)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_t\partial\xi_q}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(C_1^{ijtq}(H^1)\left(\frac{\partial u_t}{\partial\xi_q}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\xi_t}\frac{\partial w}{\partial\xi_q}\right)\right)+V(X,H^2)=0, \tag{1}$$

яку побудовано з урахуванням гіпотез Кірхгофа-Лява та із застосуванням нелінійних співвідношень теорії В. В. Новожилова у припущенні про малість деформацій й квадратів кутів повороту в порівнянні з одиницею

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial u_j}{\partial\xi_i}+\frac{\partial w}{\partial\xi_i}\frac{\partial w}{\partial\xi_j}\right];\qquad \chi_{ij}=-\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi_j}\right), \tag{2}$$

де $C_1^{ijtq}(H^1)$, $C_2^{ijtq}(H^1)$ – функції, що описують жорсткість пластини на розтягування-стискання та згинальну жорсткість; $V(X,H^2(X))=q(X)+\sum_k Z_k(X)\cdot H^2(X)$ – функція навантаження системи, яка враховує відоме розподілене навантаження $q(X)$ та невідомі зосереджені сили

$Z_k(X)$, $k=\overline{1,K}$; $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{\chi}_{ij}$, $i=1{,}2$ – складові тангенціальної та згинальної деформацій, $i, j, t, q = 1{,}2$.

При формулюванні розв'язуючих співвідношень введено безрозмірні змінні: $\xi_1=\hat{\xi}_1/\hat{a}$; $\xi_2=\hat{\xi}_2/\hat{b}$; $X=(\xi_1,\xi_2)$, безрозмірні функції: $u_1=\hat{u}_1/\hat{a}$; $u_2=\hat{u}_2/\hat{b}$; $w=\hat{w}/\hat{h}$; $C_1^{ijtq}(H^1(X))=\hat{C}_1^{ijtq}(H^1(X))/\hat{E}_0\hat{h}$; $C_2^{ijtq}(H^1(X))=\hat{C}_2^{ijtq}(H^1(X))/\hat{E}_0\hat{h}^3$; $q(X)=\hat{q}(X)(1-\nu^2)\hat{a}/\ \hat{E}_0\hat{h}^2$; $Z(X)=\hat{Z}(X)(1-\nu^2)\hat{a}/\hat{E}_0\hat{h}$; $\varepsilon_{ij}=\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\chi_{ij}=\hat{a}\hat{\chi}_{ij}$, де $(\hat{\cdot})$ – відповідні розмірні функції; $2\hat{a}$, $2\hat{b}$, $\hat{h}$ – лінійні розміри і товщина пластини; $\hat{E}_0(X)$, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\varepsilon=\hat{h}^2/\sqrt{12}\hat{a}^2$ – параметр.

При побудові математичної моделі задачі враховано узагальнений закон Гука у формі:

$$T_{ij}=C_1^{ijkl}(H^1)\varepsilon_{kl}; \qquad M_{ij}=\varepsilon C_2^{ijkl}(H^1)\chi_{kl}, \tag{3}$$

де T_{ij}, M_{ij} – тангенціальні зусилля, згинальні й крутні моменти, безрозмірні функції для яких введено співвідношеннями $T_{ij}=\hat{T}_{ij}\ \hat{a}(1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^2$, $M_{ij}=\hat{M}_{ij}\ \hat{a}(1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^3$.

Функції $C_1^{ijkl}(H^1)$, $C_2^{ijkl}(H^1)$ обчислюються у такий спосіб:

$$C_1^{ijtq}(H^1)=\int_{-h/2}^{h/2}D^{ijtq}(X,H^1)dx_3, \qquad C_2^{ijtq}(H^1)=\int_{-h/2}^{h/2}D^{ijtq}(X,H^1)(x_3)^2dx_3.$$

За наявністю включень у точках X_k, $k=\overline{1,K}$ пластини залежність пружних характеристик системи від параметрів моделі $H^1(X)$ враховано у такий спосіб:

$$D^{1111}(X,H^1)=\frac{E_0(X)+\sum_k(E_k(X)-E_0(X))H^1(X)}{(1-\nu^2)};\ D^{1122}(X,H^1)=\frac{\left(E_0(X)+\sum_k(E_k(X)-E_0(X))H^1(X)\right)\nu}{(1-\nu^2)};$$

$$D^{1212}(X,H^1)=\frac{E_0(X)+\sum_k(E_k(X)-E_0(X))H^1(X)}{2(1+\nu)},$$

де $E_k(X)$, $k=\overline{1,K}$ – модуль Юнга включень.

Сформульовано умови на зовнішніх контурах області Ω:

$$w\big|_\Gamma=w^* \text{ або } Q_{ii}\big|_\Gamma=Q_{ii}^*;\ u_i\big|_\Gamma=u_i^* \text{ або } T_{ij}\big|_\Gamma=T_{ij}^*;\ \left.\frac{\partial w}{\partial\xi_i}\right|_\Gamma=\frac{\partial w^*}{\partial\xi_i} \text{ або } M_{ij}\big|_\Gamma=M_{ij}^*, \tag{4}$$

де $\hat{Q}_{ij}$ – поперечні сили, $Q_{ij}=\hat{Q}_{ij}\ \hat{a}(1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}^2$; u_i^*, w^*, $\dfrac{\partial w^*}{\partial\xi_i}$, T_{ij}^*, M_{ij}^*, Q_{ij}^* – задані значення відповідних функцій на зовнішньому контурі пластини Γ, $i, j=1{,}2$.

За наявністю дефектів у вигляді поздовжніх ($\xi_2=const$) або поперечних ($\xi_1=const$) розрізів на берегах розрізу $\Gamma_p^\pm(H^3(X))$ повинні виконуватися умови:

$$\Gamma_p^\pm(H^3(X))\big|_{\xi_2=const}:\ T_{22}=0,\ T_{12}=0,\ M_{22}=0,\ Q_{22}=0;$$

$$\Gamma_p^\pm(H^3(X))\big|_{\xi_1=const}:\ T_{11}=0,\ T_{12}=0,\ M_{11}=0,\ Q_{11}=0. \tag{5}$$

Сформульованій крайовій задачі (1, 4, 5) відповідає варіаційна постановка: при фіксованій функції параметрів моделі $H^d(X)$ необхідно знайти вектор-функцію $U(X)$, таку що

$$U(X) = \arg\min_{U} J\big(U(X), H^d(X)\big), U \in \overline{U}\,, \tag{6}$$

де $J\big(U(X), H^d(X)\big)$ – функціонал повної енергії системи, що розглядається.

Геометричні співвідношення (2), узагальнений закон Гука (3), крайові умови (4), (5) приєднуються до функціонала $J\big(U(X), H^d(X)\big)$ за допомогою множників Лагранжа. З умов стаціонарності отриманого функціоналу, визначаючи невідомі множники Лагранжа, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
J(U(X), H^d(X)) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big(C_1^{ijtq}(H^1)\varepsilon_{ij}(X)\varepsilon_{tq}(X) + \varepsilon^2 C_2^{ijtq}(H^1)\chi_{ij}(X)\chi_{tq}(X)\Big)d\xi_1 d\xi_2 - \\
&-\int_{\Omega}\left(\big(q_1u_1 + q_2u_2 + qw\big) + \sum_k \big(Z_{1(k)}u_1 + Z_{2(k)}u_2 + Z_{(k)}w\big)H^2(X)\right)d\xi_1 d\xi_2 - \\
&-\int_{\Omega}\left(T_{11}(\xi_1,\xi_2)\left[\varepsilon_{11}(\xi_1,\xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right)^2\right] + T_{22}(\xi_1,\xi_2)\left[\varepsilon_{22}(\xi_1,\xi_2) - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2}\right)^2\right] + \right. \\
&+T_{12}(\xi_1,\xi_2)\left[\varepsilon_{12}(\xi_1,\xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\frac{\partial w}{\partial \xi_2}\right] + \varepsilon^2\left(M_{11}(\xi_1,\xi_2)\left[\chi_{11}(\xi_1,\xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right)^2\right] + \right. \\
&\left.\left.+M_{22}(\xi_1,\xi_2)\left[\chi_{22}(\xi_1,\xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2}\right)^2\right] + M_{12}(\xi_1,\xi_2)\left[\chi_{12}(\xi_1,\xi_2) - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right]\right)\right)d\xi_1 d\xi_2 - \\
&-\int_{\Gamma_{\mathrm{i}}}\left(\tilde{T}_\tau^* u^\tau + \tilde{T}_m^* u^m + \tilde{M}_m^* \frac{\partial w}{\partial m} + \tilde{Q}^* w\right)d\Gamma_{\mathrm{i}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{j}}}\left(\tilde{T}_\tau\big(u^\tau - u^{\tau*}\big) + \tilde{T}_m\big(u^m - u^{m*}\big) + \tilde{Q}\big(w - w^*\big) + \tilde{M}_m\left(\frac{\partial w}{\partial m} - \frac{\partial w^*}{\partial m}\right)\right)d\Gamma_{\mathrm{j}}\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

де q_1, q_2, q – складові розподілених зовнішніх навантажень; $Z_{1(k)}(H^2)$, $Z_{2(k)}(H^2)$, $Z_{(k)}(H^2)$ – проекції k-ї локальної сили на осі ξ_1, ξ_2 й на нормаль до поверхні пластини; m, τ – орти нормалі та дотичної до границі Γ; m^i, m_i, τ^i, τ_i – коваріантні й контраваріантні складові орта нормалі й орта дотичної до границі Γ; $u^m = u_i m^i$; $u^\tau = u_i \tau^i$ – проекції переміщень на m і τ; $\tilde{T}_m = T_{ij} m^i m^j$, $\tilde{T}_\tau = T_{ij}\tau^i\tau^j$ – проекція зовнішніх нормального та дотичного до границі Γ зусиль; $\tilde{M}_m = M_{ij} m^i m^j$ – проекція згинального моменту на m; $\tilde{Q} = \tau^i \frac{\partial}{\partial \tau_i}\big(\tau_j m_k M^{jk}\big)$ – поперечне зусилля, що прикладене до границі Γ.

В отриманому функціоналі (7) незалежно варіюються всі невідомі функції задачі в області Ω й на контурах пластини.

Розв'язання оберненої задачі передбачає визначення невідомих функцій $H^d(X)$ за результатами спостережень, отриманими шляхом вимірювання значень характерних параметрів стану пластини σ_p^* в точках γ_p, $p = \overline{1,P}$.

Умову близькості напружено-деформованого стану пластини, що визначається з умов стаціонарності функціоналу (7), і спостережуваного стану сформульовано у такий спосіб:

$$\sigma(U, H^d(X))\Big|_{U=U_{\gamma_p}} - \sigma_p^* = 0\,,\ p = \overline{1,P}\,, \tag{8}$$

де $\sigma(U,H^d(X))\Big|_{U=U_{\gamma_p}}$ – обчислене значення вектор-функції $\sigma(U,H^d(X))$ в точках γ_p.

В такому разі обернена задача визначення властивостей моделі полягає в знаходженні пари $\left(U(X),H^d(X)\right)$, що доставляє мінімум функціоналу (7) та задовольняє рівності (8).

Для порівняння можливих станів пластини у гільбертовому просторі $L_{2\Omega}$ при фіксованій вектор-функції $H^d(X)$ було застосовано метрику:

$$\rho^2_{L_{2\Omega}} = \int_\Omega \Big[C_1^{ijtq}(H^1(X))\left(\varepsilon_{ij}(H^d(X)) - \varepsilon^*_{ij}\right)\left(\varepsilon_{tq}(H^d(X)) - \varepsilon^*_{tq}\right) +$$
$$+ \varepsilon^2 C_2^{ijtq}(H^1(X))\left(\chi_{ij}(H^d(X)) - \chi^*_{ij}\right)\left(\chi_{tq}(H^d(X)) - \chi^*_{tq}\right)\Big] d\xi_1 d\xi_2 . \qquad (9)$$

Виходячи з вигляду метрики (9) найбільш інформативною для опису стану пластини є вектор-функція узагальнених деформацій $\sigma(U,H^d(X)) = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$, $i,j=1,2$, значення компонент якої отримуються з нелінійних геометричних співвідношень (2) шляхом підстановки компонент вектор-функції переміщень $U\left(X,H^d(X)\right)$. Спостережувані значення деформацій $\sigma^*_p = \{\varepsilon^*_{ij\,p}, \chi^*_{ij\,p}\}^T$, $p=\overline{1,P}$ отримуються з показників датчиків вимірювання деформацій, які встановлено на поверхні пластини.

У третьому розділі розроблено метод розв’язання поставленої оберненої задачі та алгоритм його реалізації. Для побудови розв’язків прямої та оберненої задач здійснюється перехід до дискретної моделі пластини з використанням скінченно-елементної апроксимації.

Для опису невідомих функцій задачі введено сітки, невідомим функціям ставляться у відповідність вектори, компоненти яких є вузловими значеннями функцій задачі. На області Ω введено:

– сітку з вузлами $X_n = \left(\xi_{1n}, \xi_{2n}\right), n=\overline{1,N}$ для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач. Функції $U\left(X,H^d(X)\right)$, $\sigma(U,H^d(X))$, $H^d(X)$ подаються у вигляді векторів: $\{U_n\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{H^d_n\}$;

– сітку з вузлами $X_p = \left(\xi_{1p}, \xi_{2p}\right), p=\overline{1,P}$ для опису координат точок вимірювання компонент вектора деформацій $\{\sigma^*_p\}$, вузли X_p обираються з числа X_n.

Невідомі функції задачі на елементі задаються для локальної системи координат за допомогою апроксимацій через вузлові значення.

Після введеної дискретизації область Ω може бути зображено у вигляді сукупності прямокутних підобластей $\Omega_n(X_n)$, де вузол $X_n = \left(\xi_{1n}, \xi_{2n}\right)$ відповідає лівому верхньому куту підобласті Ω_n. За умов $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$, $mes(\Omega_i \bigcap \Omega_j) = 0$, $i \neq j$ сукупність підобластей $\Omega_n(X_n)$ є розбиттям множини Ω.

Для визначення невідомих оберненої задачі введено характеристичні функції підмножин Ω_n у вигляді:

$$H^d_n(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_n \in \Omega^d_n \\ 0, & \text{якщо } X_n \in \Omega \setminus \Omega^d_n \end{cases}, \; d=\overline{1,3}; \quad n=\overline{1,N} . \qquad (10)$$

На підставі теорії оптимального розбиття множин О. М. Кісельової[1] задачу визначення невідомих функцій оберненої задачі $H^d(X)$ сформульовано як задачу оптимального розбиття множин у такий спосіб: необхідно знайти вектор-функцію $(U_*(X), H_*(X)) \in \overline{U} \times \overline{H}$, таку, що доставляє мінімум функціоналу (7) за умов (8) на множині $\overline{H}$, яка складається з R можливих розв'язків задачі:

$$\overline{H} = \left\{ H(X) = \left(\overset{1}{H}(X), \ldots \overset{R}{H}(X) \right) : \overset{l}{H}(X) = \left\{ \overset{l}{H}_i(X) \right\},\ l = \overline{1,R},\ i = \overline{1,N},\right.$$

$$\left. \overset{l}{H}_i(X) = 0 \vee 1,\ \overset{l}{H}_i(X) \cdot \overset{l}{H}_j(X) = 0,\ i \neq j,\ \sum_{i=1}^{N} \overset{l}{H}_i(X) = 1 \right\}. \qquad (11)$$

З урахуванням результатів, отриманих у дослідженнях О. М. Кісельової, та умов (8), (11) розв'язок задачі полягає у відшуканні пари $(H_*(X), \psi_*(X))$, що є сідловою точкою функціонала

$$h(H(X), \Psi(X)) = J(U(X), H(X)) + \int_{\Omega} \varphi_0(X) \left(\sum_{i=1}^{N} H_i(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^{P} \lambda_p \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}(H(X_p)) - \sigma^*_{ij_p} \right) d\Omega, \qquad (12)$$

де $J(U(X), H(X))$ – функціонал (7); $\Psi = (\varphi_0(X), \lambda)$, $\Psi \in \overline{\Psi}$; $\varphi_0(X)$ – дійсна функція, яку визначено на області Ω; $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p\}$, $p = \overline{1,P}$ – P- вимірний вектор дійсних чисел, $\lambda \in \overline{\Lambda}$; $\overline{\Psi} = L_{2\Omega} \times \overline{\Lambda}$; $\overline{H}$, $\overline{\Psi}$ – області визначення невідомих задачі.

Показано, що сідлова точка функціоналу (12) збігається з розв'язком сформульованої крайової задачі (1) – (5), а компоненти вектора невідомих оберненої задачі отримано у вигляді:

$$H_n^d(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad Y_n^d(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_{ij_n} \geq 0 \\ 1, & \text{якщо} \quad Y_n^d(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_{ij_n} \geq 0 \end{cases}. \qquad (13)$$

Доданок $Y_n^d(U)$ будується для кожної окремої оберненої задачі з доданків функціоналу (7), що залежать від відповідних $H^d(X)$, $d = \overline{1,3}$.

Після виконання процедур інтегрування, варіювання та підсумовування матриць елементів отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь N-го порядку:

$$M(U) - V = 0, \qquad (14)$$

де $M(U)$ – матриця жорсткості системи, яка містить нелінійні складові.

Для розв'язання системи (14) застосовується ітераційний метод продовження по параметру навантаження $t^{(r)} = t^{(r-1)} + \Delta t$, $0 \leq t \leq 1$, складові проекції поверхневої сили зображуються у такий спосіб: $V_i^{(r)} = t^{(r)} \cdot \overline{V_i}$, $i = \overline{1,3}$, де Δt – крок методу продовження; r – номер кроку. Тоді система (14) на r-му кроці методу продовження по параметру набуває вигляду:

$$A^{(r)}(U^{(r-1)}) \Delta U^{(r)} = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t), \qquad (15)$$

де $A^{(r)}(U^{(r-1)}) = \left\{ \frac{\partial M}{\partial U} \right\} \bigg|_{U^{(r-1)}}$ – лінеаризована матриця жорсткості; $U^{(r)} = U^{(r-1)} + \Delta U^{(r)}$; $\Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t)$ – приріст правої частини системи при зміні номера кроку r.

[1] Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. – К.: Наукова думка, 2005. – 562с

Для знаходження вектора невідомих оберненої задачі на r-му кроці методу продовження по параметру організовано ітераційний процес, який складається з двох етапів: визначення місця розташування дефекту та уточнення його характеристик. Для виконання першого етапу побудовано *алгоритм A1*:

1. Задати початкові значення $H^{d^{(0)}}(X) = \left\{ H^{d^{(0)}}_{\ n} \right\}$, $H^{d^{(0)}}_{\ n} = 0 \vee 1$, $\left\{ \lambda_n^{(0)} \right\}$, $n = \overline{1, N}$; $l = 0$, де l – номер кроку внутрішнього ітераційного процесу.
2. З використанням спостережуваних значень деформацій $\left\{ \sigma^*_{ij\,p} \right\}$, $p = \overline{1, P}$ обчислити U, $Y_n^{(l)}(U)$ при заданих $\left\{ H^{d^{(l)}}_{\ n} \right\}$, $\left\{ \lambda_n^{(l)} \right\}$ із розв'язання системи (15).
3. У внутрішньому ітераційному процесі визначити значення $\varphi_0^{\ (l)}(X)$ та $\left\{ \lambda_n^{(l+1)} \right\}$; обчислити значення компонент $H^{d^{(l+1)}}_{\ n}$ за формулою (13).
4. Перевірити умову $\left\| \lambda^{(l+1)} - \lambda^{(l)} \right\| \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0$; якщо умова виконується, перейти до кроку 5; інакше – $l = l + 1$, перейти до кроку 2.
5. Побудувати вектор $H^d(X) = \left\{ H_n^d(X) \right\}$ із компонент $H^{d^{(l+1)}}_{\ n}$. Кінець.

Отриманий за допомогою алгоритму *A1* бінарний вектор невідомих оберненої задачі $H^d(X)$ визначає місце розташування областей, де присутні дефекти або прикладено зосереджені силові впливи.

На другому етапі відбувається визначення параметрів дефектів та зосереджених сил з розв'язання задачі мінімізації функціоналу (9) з використанням методу локальної оптимізації – методу Ньютона-Рафсона.

Для побудови розв'язку у якості початкового наближення $\left\{ \tilde{H}^{d^{(0)}}_{\ n}(X) \right\}$ обирається вектор $H^d(X)$, отриманий на попередньому етапі, у якому компоненти $H_n^d(X)$, що набули значення 1, замінюються фізичними значеннями параметрів. Далі компоненти вектора $\tilde{H}^d(X)$ визначаються у такий спосіб:

$$\tilde{H}^{d(s)} = \tilde{H}^{d(s-1)} - \left(G^T \cdot G \right)^{-1} G^T \Delta(\tilde{H}^{d(s-1)}), \tag{16}$$

де $G = G(X_p, \tilde{H}^d) = \left[\dfrac{\partial \Delta_k (X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right]$ – матриця градієнту вектора нев'язки $\Delta(X_p, \tilde{H}^d) = \left(\sigma_{ij}(X_p, \left\{ \tilde{H}_n^d \right\}) - \sigma^*_{ij}(X_p) \right)$, яка визначається чисельно з використанням різницевого аналога, s – номер кроку ітераційного процесу другого етапу.

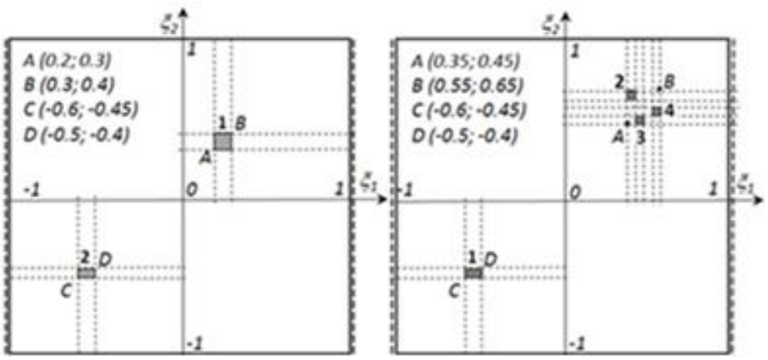
Збіжність методу Ньютона-Рафсона забезпечується вибором близького до дійсного розв'язку початкового наближення, яке визначається згідно з (13) на першому етапі процесу ідентифікації.

У четвертому розділі досліджено можливості запропонованого підходу до ідентифікації включень та зосереджених силових впливів у тонких пластинах.

Числове моделювання напружено-деформованого стану системи виконано з використанням програмного комплексу, що реалізує метод скінченних елементів. Скінченно-елементну модель побудовано з використанням регулярної сітки прямокутних елементів. Розмір скінченного елемента визначався наперед заданою точністю розв'язання прямої задачі та обирався в експерименті шляхом послідовного згущення сітки до отримання стабільних результатів за основними показниками напружено-деформованого стану системи.

Рівень зовнішнього навантаження було обрано таким чином, щоб деформування пластини було пружним і система залишалася стійкою. В описах вказано відносні значення навантажень: $q = \hat{q} / \hat{q}_{кр}$, $Z_k = \hat{Z}_k / \hat{Z}_{кр}$, $k = \overline{1, K}$.

У підрозділі 4.1 за допомогою запропонованого підходу виконано ідентифікацію жорстких включень в матеріалі пластини. При проведенні обчислювальних експериментів у якості дійсних включень розглядалися матеріали, для яких ($2 \le \hat{E} / \hat{E}_0 \le 10$), де $\hat{E}, \hat{E}_0$– модулі Юнга включення та матеріалу пластини відповідно.



a *b*

Рис. 1 – Моделі пластини з включеннями

Розглянуто пластину ($2a \times 2b$, $a/b = 1$, $a/h = 50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$, скінченно-елементна модель складалась з *6561* вузла), яка знаходилась під дією нормального до поверхні розподіленого навантаження $q = 0.9$.

У пластині, яку жорстко затиснено по кромках $\xi_1 = \pm 1$, кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні (рис. 1*a*), присутні два включення $l_1 \times l_2$. Відносні розміри включень становлять: *1* – $l_1 / a = 0.1$, $l_2 / b = 0.1$; *2* – $l_1 / a = 0.1$, $l_2 / b = 0.05$; модулі Юнга включень: $E_1^* / E_0 = 7$, $E_2^* / E_0 = 5$.

Процедура ідентифікації складалась з двох етапів: ідентифікація місця розташування включень та визначення значень їх модулів Юнга.

На рис.2 показано кроки виконання ітераційної процедури першого етапу ідентифікації. Дійсні включення позначено сірим кольором. У якості початкового наближення було обрано області пластини (позначено номерами вузлів), у яких спостерігались найбільші відхилення значень тангенціальних деформацій та деформацій зсуву пластини з включеннями від аналогічних характеристик однорідної пластини.

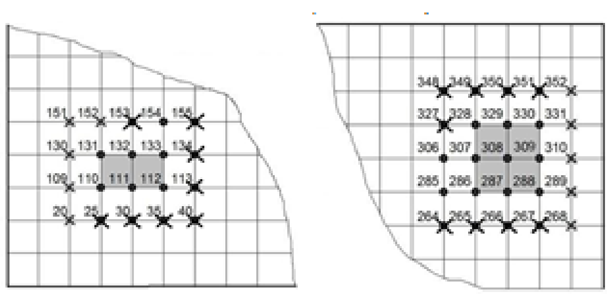


Рис. 2 – Ітераційний процес ідентифікації місця розташування двох включень у пластині

Відповідні компоненти вектору $\left\{ H_n^{1(0)}(X) \right\}$ отримали значення *1*. На ітераціях першого етапу процедури ідентифікації спостерігалось поступове зменшення розмірів області: маленькими хрестиками позначено вузли, в яких компоненти $H_n^1(X)$ змінили значення з *1* на *0* після першого кроку виконання алгоритму *A1*, великими хрестиками – після виконання 2 та 3 ітерації. За результатами виконання 4 ітерацій було ідентифіковано вузли, що належать областям розташування включень (позначено чорними точками).

На другому етапі виконано відновлення пружних характеристик включень з використанням ітераційної процедури методу Ньютона-Рафсона. Для формування початкового наближення $\widetilde{H}^{1(0)}(X)$ використано вектор $H^1(X)$: якщо компонента $H_n^1(X)$ мала значення *1*, відповідна компонента $\widetilde{H}_n^{1(0)}(X)$ отримувала значення модуля Юнга включення $\widehat{E}^{(0)}/\widehat{E}_0 = 9$, решті компонент було надано значення модуля Юнга пластини.

На рис. 3 показано, як змінювалися значення модулів пружності впродовж процесу їх ідентифікації для різних відносних значень модуля Юнга в характерних вузлах: 1) вузол *308* – належить включенню *1*; 2) вузол *132* – належить включенню *2*; 3) вузол *154* – належить пластині, але на першому етапі процесу ідентифікації був визначений як такий, що належить включенню *2*.

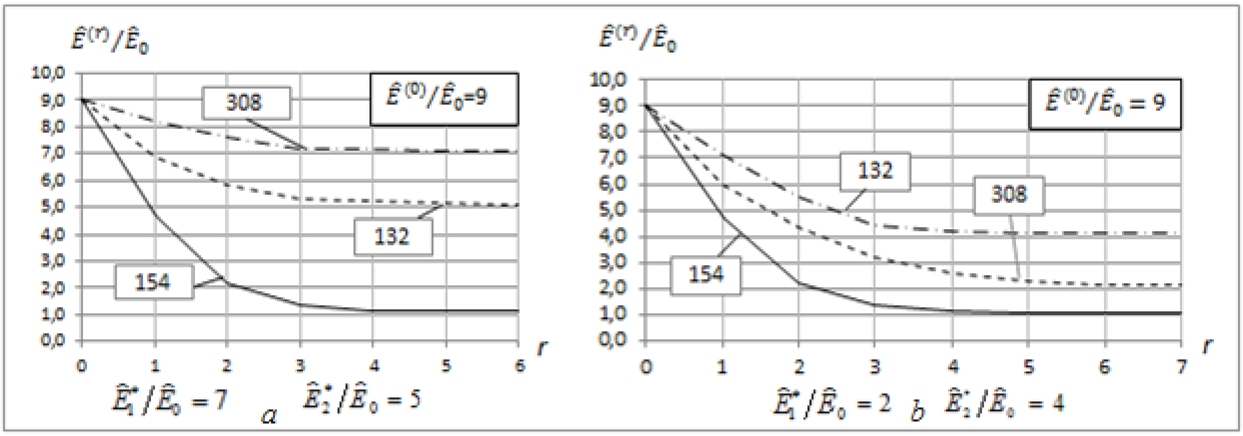
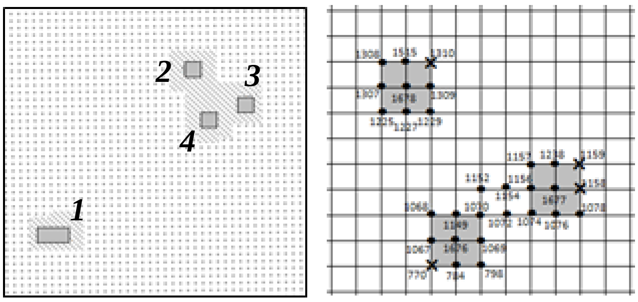


Рис. 3 – Ідентифікація модулів Юнга двох включень

Як свідчать отримані результати, на ітераціях процедури методу Ньютона-Рафсона спостерігалося стабільне наближення значень модулів Юнга у вузлах до дійсних значень, що обумовлено спеціальним вибором початкового наближення з використанням результатів першого етапу ідентифікації. Після визначення місця розташування включень задача ідентифікації модулів Юнга розв'язується на компактній множині, що забезпечує збіжність ітераційного процесу Ньютона-Рафсона.

Для дослідження впливу геометричних параметрів включень на можливість їх ідентифікації розглянуто пластину ($a/b=1$, $a/h=50$, $E_0 = 2\cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$) з групою дрібних включень *2-4* та окремим включенням *1* (рис.1*b*). Пластина знаходиться під дією нормального до поверхні розподіленого навантаження $q = 0.9$ та жорстко затиснена по кромках $\xi_1 = \pm 1$, кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні. Відносні розміри включень: *1*: $l_1/a = 0.1$, $l_2/b = 0.05$; *2-4* : $l_1/a = 0.05$, $l_2/b = 0.05$.



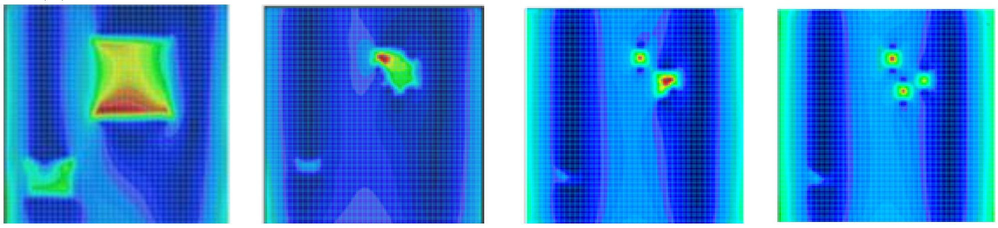
a *b*

Рис. 4 – Ідентифікація пружних характеристик групи включень

Включення *1* розташовано на відстані $d > a$ від включень *2-4*, мінімальна відстань між включеннями (*3* та *4*) дорівнює їх розміру. Області пластини, які було обрано у якості початкового наближення першого етапу процедури ідентифікації, на рис. 4*a* виділено штрихуванням. Відповідні компоненти вектору $\left\{H^{1(0)}_{n}(X)\right\}$ набули значення *1*.

Місце розташування включення *1* було визначено за 4 кроки ітераційної процедури. На рис. 4*b* зображено результат ідентифікації місця розташування групи включень *2-4* , отриманий за 6 ітерацій. Чорними точками позначені вузли, у яких компоненти $H^{1(6)}_{n}$ отримали значення 1, хрестиками – значення 0, але відносяться до дійсних включень.

На рис. 5*a* - *c* наведено картини напружено-деформованого стану пластини з групою включень *1-4* на етапах процедури ідентифікації їх місця розташування. Для порівняння на рис. 5*d* наведено картину деформування для пластини з дійсними включеннями. Як свідчить аналіз рис. 4*b* та 5*c*, при визначенні місця розташування включень не вдалося відокремити області розташування дійсних включень *3* і *4*.



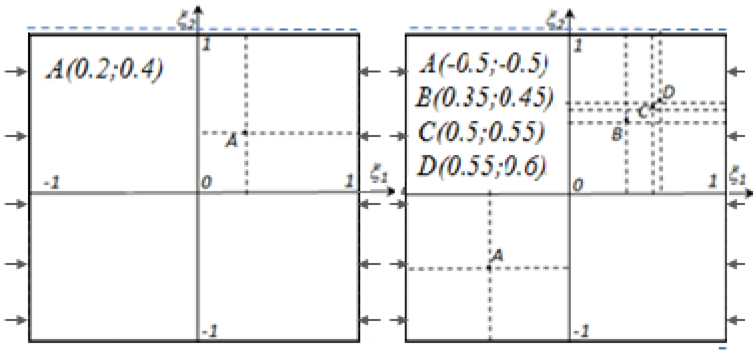
a *b* *c* *d*

Рис. 5– Напружено-деформований стан пластини з групою включень:
a – початкове наближення; *c* – результат ідентифікації;
b – результат третьої ітерації; *d* – дійсні включення

Визначення значень модуля Юнга включень, що належать групі *2-4*, виконано з початковим наближенням $\widehat{E}^{(0)}/\widehat{E}_0 = 5$ за 7 ітерацій методу Ньютона-Рафсона. Похибка відновлення значень не перевищувала *2.5%*. Значення модуля Юнга у вузлах, які належать пластині (вузли між *3* і *4* включеннями на рис. 4*b*), було отримано с похибкою не більшою за *12%*.

Результати обчислювальних експериментів продемонстрували ефективність використання запропонованого підходу щодо ідентифікації включень різного розміру, взаємного розташування та пружних властивостей.

У підрозділі 4.2 досліджено процес реконструкції локального навантаження, який передбачає визначення розташування точок прикладання сил (перший етап) та уточнення величин зосереджених сил (другий етап процедури ідентифікації).



a *b*

Рис. 6 – Моделі пластин в задачах ідентифікації зосереджених сил

Розглянуто пластину ($a/b=1$, $a/h=50$, $E_0=2\cdot10^5$МПа, $\nu=0.3$, *8281* вузол у скінченно-елементній моделі), яка знаходиться під дією комбінованого навантаження: стискальних зусиль $q|_{\xi_1=\pm1}=0.7$ та локальної сили Z_1^*, прикладеної нормально до поверхні пластини в точці A. Кромки пластини $\xi_2=\pm1$ жорстко затиснено (рис. 6*а*).

Початкове наближення $H^{2(0)}(X)=\left\{H_n^{2(0)}\right\}$, $n=\overline{1,N}$ для першого етапу ідентифікації було сформовано аналогічно до задачі ідентифікації місця розташування включень. Компоненти $H_n^2(X)$, $n=\overline{1,N}$, які після виконання першого етапу отримали значення *1* (6 компонент), було використано для формування початкового наближення другого етапу ідентифікації $\tilde{H}^{2(0)}(X)$: вказані компоненти було замінено на значення початкового наближення сили $Z^{(0)}=0.5$. Далі значення компонент $\tilde{H}_n^2(X)$ визначалися в ітераційній процедурі методу Ньютона-Рафсона.

На рис. 7 показано як змінювалися розподіли прогинів в характерних перерізах пластини на етапах процесу ідентифікації точки прикладання сили. Дрібний пунктир відповідає початковому наближенню $H^{2(0)}(X)$, штрих-пунктирна та пунктирна лінії – 2 і 3 ітераціям відповідно, суцільна лінія – результату ідентифікації (4 ітерація). Значення прогинів наближаються до значень прогинів, спричинених дією дійсного навантаження (позначено маркерами).

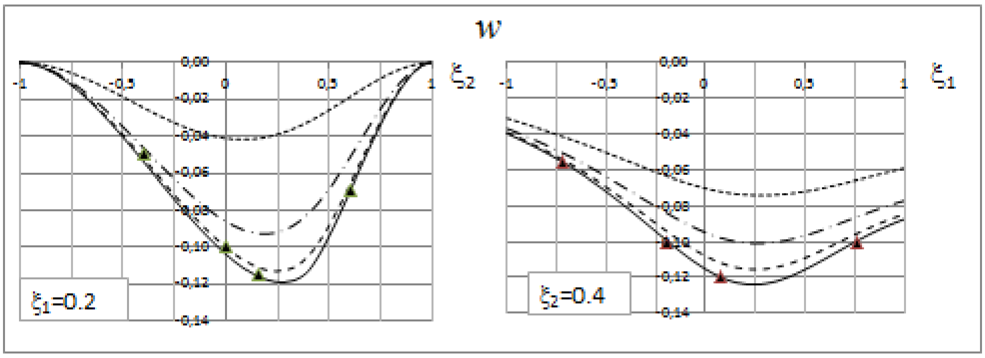


Рис. 7 – Розподіл прогинів *w* на ітераціях ідентифікації точки прикладання локальної сили

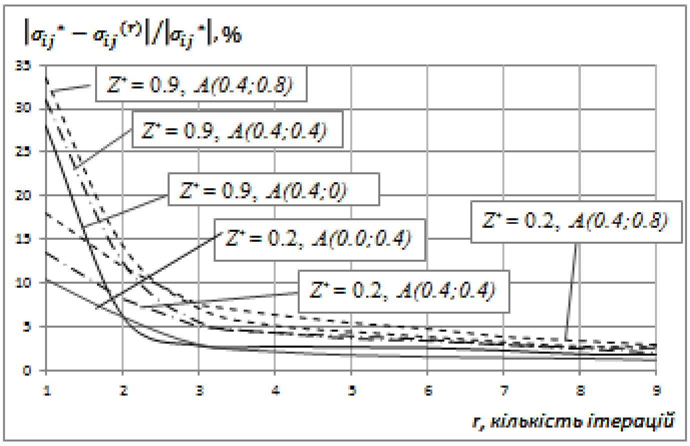


Рис.8– Похибки відновлення деформацій на ітераціях процедури ідентифікації

Для дослідження можливостей запропонованого підходу щодо ідентифікації локальної сили в залежності від розташування точки її прикладання відносно затисненої кромки пластини, задачу було розв’язано для випадків, коли точка A знаходилась на лінії $\xi_1=0.4$ на відстанях $d/b=1;0.6;0.2$ від затисненого краю пластини. Розрахунки проведено для локальної сили величини $Z^*=0.2$ та

$Z^* = 0.9$. На рис.8 наведено залежності відносної похибки наближення значень деформацій σ_{ij} до спостережуваних значень в точці A на ітераціях методу Ньютона-Рафсона.

Встановлено, для всіх точок прикладання зосередженої сили, спостерігається збіжність обчислювального процесу за значеннями деформацій. У зв'язку з тим, що поблизу затисненої кромки пластини значення плоскої деформації та кручення порівняні з максимальними значеннями деформації основного напружено-деформованого стану, наближення точки прикладання сили до цього краю ускладнює процес її ідентифікації. Реконструкція сили, що викликає деформації, істотно більші за крайові деформації, значно меншою мірою залежить від точки прикладання сили.

Досліджено ефективність ідентифікації кількох сил, прикладених на різних відстанях одна від одної. Розглянуто пластину ($a/b = 1$, $a/h = 50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$), що знаходиться під дією стискальних зусиль $q\big|_{\xi_1 = \pm 1} = 0.5$ та системи локальних сил $Z_k^* = 0.8$, $k = \overline{1,4}$, прикладених нормально до поверхні пластини в точках *A(-0.5;0.5), B(0.35;0.45), C(0.5;0.55), D(0.55;0.6)* (рис. 6*b*). Кромки пластини $\xi_2 = \pm 1$ жорстко затиснено.

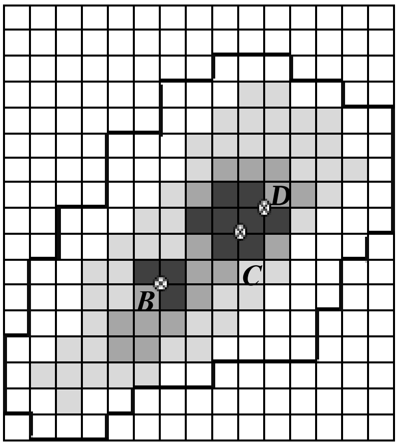


Рис.9 - Процес ідентифікації групи локальних сил

На рис. 9 зображено процес ідентифікації точок прикладання групи сил $Z_2^* \div Z_4^*$ з $Z^{(0)} = 0.5$: чорною лінією позначено результат 3 ітерації, у відтінках сірого – результати 4-6 ітерацій; точки прикладання дійсних сил позначено білими кружками. Можна побачити, що область прикладання групи сил поступово зменшуєть ся. За результатами обчислень вдалося відокремити лише область дії сили Z_2^*.

На другому етапі процедури відновлювались величини зосереджених сил. Результати ідентифікації групи локальних сил наведено в табл.1.

Таблиця 1

Ідентифікація групи локальних силових впливів (рис.6*b*)

Точка прикладання сили	Кількість ітерацій етапу визначення точки прикладання сили	Відновлені значення локальних сил	Відносна похибка відновлення значень, %
A	4	0.7834	2.08
B	6	0.7814	2.33
C	6	0.7763	2.96
D	6	0.7772	2.85

Проведено аналіз чутливості алгоритму до похибки вхідних даних. В обчислювальному експерименті розглядалась пластина ($a/b = 1$, $a/h = 50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$), яка знаходилась під дією стискальних зусиль $q\big|_{\xi_1 = \pm 1} = 0.2$ та зосередженої сили $Z^* = 0.7$ (рис. 6*a*).

Похибка вхідних даних моделювалась випадковими збуреннями деформацій: $\tilde{\sigma}_p = \sigma_p^* \left(1 + \left|\sigma_p^* / \sigma_{p\max}^*\right| \theta\ R\right)$,

де $\tilde{\sigma}_p$ – збурені значення спостережуваних деформацій σ_p^*; $\sigma_{p\max}^*$ – максимальне значення σ_p^*; p – номер точки вимірювань; R – рівномірно розподілена на відрізку $[-1;\ 1]$ випадкова величина; $\theta = 10^d$ – параметр, який визначає рівень похибки вхідних даних; d – показник.

З використанням збурених результатів вимірювань $\tilde{\sigma}_p$ було проведено ідентифікацію точки прикладання сили при зміні показника d від *-5* до *-1*.

Встановлено, що зі збільшенням рівню шуму спостерігається зростання похибки відновлення параметрів моделі навантаження. Так, при $d = -1$, спостерігається зміщення максимуму функції прогину, що пов’язано з похибкою у визначенні розташування точки прикладання сили. При $d = -1$ похибка визначення координат точки прикладання сили становила 8%, похибка відновлення сили – 6%. Проведений аналіз продемонстрував стійкість запропонованого підходу до можливих похибок вимірювань і задовільну точність отриманих результатів.

Виконано порівняння результатів відновлення локального силового впливу, отриманих з використанням запропонованого підходу, з результатами, відомими з літератури. Розглянуто пластину ($a/b = 1$, $a/h = 50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$), що знаходиться під дією локального навантаження, заданого на симетрично розташованій на поверхні пластини прямокутній площадці розмірами l_1/a, $l_2/b = 1$. Кромки $\xi_1 = \pm 1$ пластини довільно оперті, кромки $\xi_2 = \pm 1$ – вільні. Навантаження моделювалось прикладанням у відповідних площадці вузлах скінченно-елементної сітки сил Z^*.

В табл.2 наведено результати прогинів w/h, отриманих під дією відновленої сили Z^* в центрі пластини при різних розмірах площадки навантаження. Тут же наведено аналітичний розв’язок w_0/h, отриманий за формулою, наведеною в роботі [*Жигалко Ю. П. Обратные задачи изгиба пластин при локальном нагружении / Ю. П. Жигалко. Исследования по теории пластин и оболочек. – 1981. – Вып.16. – С.75-82.*]

Таблиця 2

Порівняння результатів прогинів w/h з аналітичним розв’язком w_0/h

	Z=0.2*					*Z*=0.7*				
l_1/a	*0.01*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.05*	*0.01*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.05*
w_0/h	0.0552	0.0535	0.0519	0.0503	0.0488	0.1932	0.1874	0.1817	0.1761	0.1707
w/h	0.0528	0.0509	0.04942	0.0482	0.0475	0.1864	0.1813	0.1759	0.1705	0.1626

Як свідчить аналіз таблиці, значення прогинів, викликаних дією відновленого навантаження Z^*, відрізняються від аналітичного розв’язку не більш ніж на 5%.

П'ятий розділ присвячено ідентифікації лінійних розрізів у тонкій пластині. При розв'язанні оберненої задачі ідентифікації розрізів у пластині виникає необхідність розв'язування послідовності прямих задач з різним розташуванням розрізів, що при застосуванні методу скінченних елементів вимагає перебудовувати скінченно-елементну модель пластини на кожній ітерації, створювати нову нумерацію вузлів, тобто призводить до значних часових витрат.

В роботі для моделювання лінійних розрізів розвинуто підхід, що застосовує однократно побудовану модель пластини і ґрунтується на використанні варіаційного принципу: умови на берегах розрізу перетворюються в умови на лінії, що імітує розріз у суцільній конструкції. Умови на лінії розрізу для суцільної пластини визначаються шляхом розв'язання оберненої задачі, невідомими функціями якої є стрибки узагальнених переміщень на лінії розрізу, а в якості функції, що мінімізується, виступає середньоквадратичне відхилення значень зусиль та моментів на лінії розрізу від нульових значень.

Враховуючи умови (5) та неперервність функцій T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij} всередині області Ω та на берегах розрізу, функціонал (7) матиме доданки $J_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}$ у вигляді:

$$J_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \int\limits_{\substack{b_1 \\ \Gamma_p^{\mp}(H^3) \\ \xi_1 = const}}^{b_2} \left(T_{12}\left(u_1^+ - u_1^-\right) + T_{22}\left(u_2^+ - u_2^-\right) + M_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2}^+ - \frac{\partial w}{\partial \xi_2}^- \right) + Q_{22}\left(w^+ - w^-\right) \right) d\xi_2 +$$
$$+ \int\limits_{\substack{a_1 \\ \Gamma_p^{\pm}(H^3) \\ \xi_2 = const}}^{a_2} \left(T_{11}\left(u_1^+ - u_1^-\right) + T_{12}\left(u_2^+ - u_2^-\right) + M_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1}^+ - \frac{\partial w}{\partial \xi_1}^- \right) + Q_{11}\left(w^+ - w^-\right) \right) d\xi_1 \qquad (17),$$

де $l_1 = a_2 - a_1$ – довжина поздовжнього розрізу ($\xi_2 = const$); $l_2 = b_2 - b_1$ – довжина поперечного розрізу ($\xi_1 = const$). Невідомі функції U, $\tilde{U}^{(t)}_{\Gamma_p^{\pm}}$, T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij} варіюються незалежно всередині області Ω і на берегах розрізу $\Gamma_p^{\pm}(H^3)$ при $\tilde{U}^{(1)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left[u_1^+ - u_1^-\right]$; $\tilde{U}^{(2)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left[u_2^+ - u_2^-\right]$; $\tilde{U}^{(3)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left[w^+ - w^-\right]$; $\tilde{U}^{(4)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left[\partial w^+/\partial\xi_1 - \partial w^-/\partial\xi_1\right]$; $\tilde{U}^{(5)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left[\partial w^+/\partial\xi_2 - \partial w^-/\partial\xi_2\right]$, де $\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = \left\{\tilde{U}^{(t)}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}\right\}$, $t = \overline{1,5}$ – стрибки переміщень і кутів повороту.

В силу незалежності вектор-функції $\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}$ умову стаціонарності функціоналу (7) може бути реалізовано як $\delta_B J = 0$, де $B = \left\{U, T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}\right\}$, за умови

$$\delta_{\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}} J_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)} = 0. \qquad (18)$$

Таким чином, задача про деформування пластини з розрізом еквівалентна задачі про деформування суцільної пластини зі стрибками переміщень та кутів повороту на лінії, що імітує розріз. Значення невідомих стрибків переміщень на лінії розрізу визначаються із розв'язання оберненої задачі, яка формулюється з умови (18) у такий спосіб: $\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}} = \arg\min\limits_{\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}}} \Delta^T\left(\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}}\right)\Delta\left(\tilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}}\right)$ при попередньому виконанні умови $\delta_\Delta J = 0$, де $\Delta\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm}\right)$ – вектор нев'язки, у разі $\xi_1 = const$ – $\Delta\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm}\right) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}^T$, у разі $\xi_2 = const$ – $\Delta\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm}\right) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}^T$.

Значення компонент стрибків переміщень $\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ визначаються в ітераційному процесі метода Ньютона-Рафсона:

$$\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)} = \widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)} - \left[W\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)}\right)\right]^{-1} \cdot G\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)}\right), \tag{19}$$

де $\left[W\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)}\right)\right] = \left[A^T\right]\left[A\right]$, $G = \left[A^T\right]\Delta^{(s-1)}$; $A = \left[\partial\Delta_k \big/ \partial\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)_l}\right]_{\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm} = \widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm}^{(s-1)}}$ – матриця похідних нев'язки $\Delta\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm}\right)$ по компонентам вектора невідомих оберненої задачі; s – номер кроку ітераційного процесу.

В роботі побудовано алгоритм *A2* для визначення стрибків переміщень $\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ на лінії розрізу:

1. Задати початкові значення: $s = 0$, $\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(0)}$, ε – точність.
2. Розв'язати пряму задачу при відомому векторі $U_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}$, отримати вектори $T^{(s)} = \{T_{ij_n}\}$; $Q^{(s)} = \{Q_{ij_n}\}$; $M^{(s)} = \{M_{ij_n}\}$, $n = \overline{1, N}$.
3. Сформувати вектор $\Delta\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}\right)$; якщо для кожної k-ї компоненти вектора виконується умова $\Delta_k\left(\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}\right) \le \varepsilon$ – перейти до кроку 5, інакше – до кроку 4.
4. $s = s + 1$. Визначити вектор $\widetilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}$ з формули (19), перейти до кроку 2.
5. Кінець.

Запропонований підхід щодо визначення стрибків узагальнених переміщень на лінії розрізу було застосовано для уточнення картини напружено-деформованого стану пластини, отриманої за допомогою методу скінченних елементів.

Розглянуто пластину ($a/b = 1$, $a/h = 50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\nu = 0.3$) з горизонтальним розрізом *AB* ($A(-0.1; 0.7)$,) довжиною $l_1/a = 0.1$, який було змодельовано математичним розрізом. Пластина знаходиться під дією осьового розтягування $q\big|_{\xi_2 = \pm 1} = 0.5$, кромки $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено.

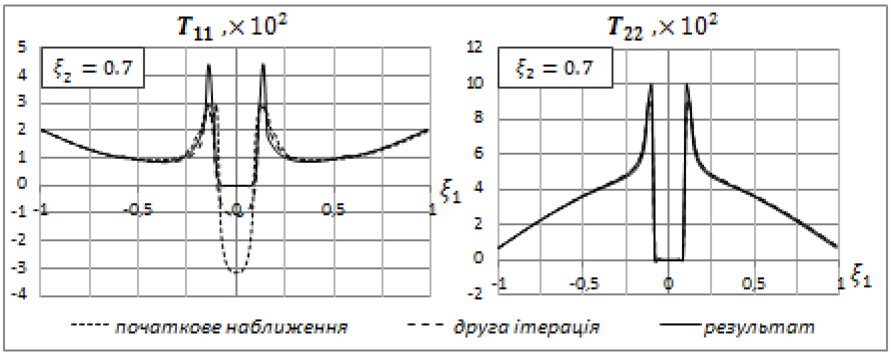


Рис.10 – Значення зусиль на ітераціях визначення стрибків переміщень

Розрахунки проводилися на двох типах сіток: регулярній та нерегулярній (відбувалось згущення сітки у зонах розташування вершин розрізу). Статичні умови на берегах розрізу за результатами розрахунків на обох сітках не виконувалися.

Для уточнення картини напружено-деформованого стану пластини з розрізом у вузлах сітки, що належать берегам розрізу, було додано стрибки переміщень та кутів повороту $\widetilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}$, значення яких отримано за допомогою алгоритму *A2*.

Використання запропонованої процедури дозволило домогтися виконання статичних умов на берегах розрізу, розподіл зусиль на ітераціях процедури уточнення значень $\widetilde{U}_{\Gamma_p^{\pm}(H^3)}$ наведено на рис.10.

Запропонований підхід щодо моделювання розрізу було застосовано для ідентифікації дефектів у вигляді лінійних розрізів. Розв’язання оберненої задачі передбачало визначення вектора невідомих координат вершин розрізу $H^3(X)=\{\xi_{1A},\ \xi_{2A},\xi_{1B},\ \xi_{2B}\}$, $H^3(X)\in\overline{H}$ з розв’язання задачі мінімізації функціоналу $S(H^3(X))=\sum_p\left(\sigma(X_p,H^3(X))-\sigma_p^*\right)^2$, $p=\overline{1,P}$. Визначення компонент вектора $H^3(X)$ виконувалось з використанням методу вектора спаду. Вектором спаду $\Delta\left(H_q^3,H'\right)$ функції $S(H^3(X))$ є вектор з компонентами $\Delta_q=S(H_q^3(X))-S(H')$, де $H_q^3(X)$, $q=\overline{1,8}$ – розв’язки задачі, які належать околу M_r (рис. 11). Якщо всі $\Delta_q=\Delta\left(H_q^3,H'\right)\geq 0$, тоді точка H' є точкою локального мінімуму, тобто $S(H')=\min\limits_{H_r^3}S\left(H^3(X)\right)$, $H_r^3\in M_r$.

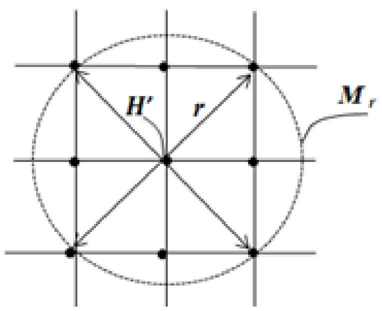


Рис.11 – Множина розв’язків

Для ідентифікації вершин розрізу було побудовано алгоритм *A3*:

1. Задати: $H^{3^{(0)}}(X)=\{\xi_{1A}^{(0)},\ \xi_{2A}^{(0)},\xi_{1B}^{(0)},\ \xi_{2B}^{(0)}\}$ – початкове значення вектора невідомих оберненої задачі; r – радіус окілу, $r>0$, $s=0$ – номер кроку.
2. Розв’язати пряму задачу з поточним положенням вершин розрізу $H^{3^{(s)}}(X)$, для визначення напружено-деформованого стану пластини.
3. Для кожної з вершин побудувати вектор спаду $\Delta=\{\Delta_q\}$ в напрямку точок сітки X_n, для яких відстань $\rho\left(X_k^{(s)},X_{k^q}\right)\leq r$, $q=\overline{1,8}$. Якщо всі компоненти $\Delta_q\geq 0$, перейти до пункту 4; інакше – виконати крок у напрямку вузла, в якому компонента Δ_q приймає найменше значення, $s=s+1$, перейти до п. 2.
4. Кінець.

За допомогою алгоритму *A3* виконано ідентифікацію горизонтального розрізу *AB* у пластині ($a/b=1$, $a/h=50$, $E_0=2\cdot 10^5$ *МПа*, $\nu=0.3$), яка знаходилась під дією осьового розтягування $q_2\big|_{\xi_2=\pm 1}=0.5$, кромки $\xi_1=\pm 1$ жорстко затиснені. Значення σ_p^* було отримано з розв’язання прямої задачі деформування аналогічної пластини з розрізом довжини $l_1/a = 0.25$, вершини якого розташовано у вузлах $A(0;0)$, $B(0.25;0)$.

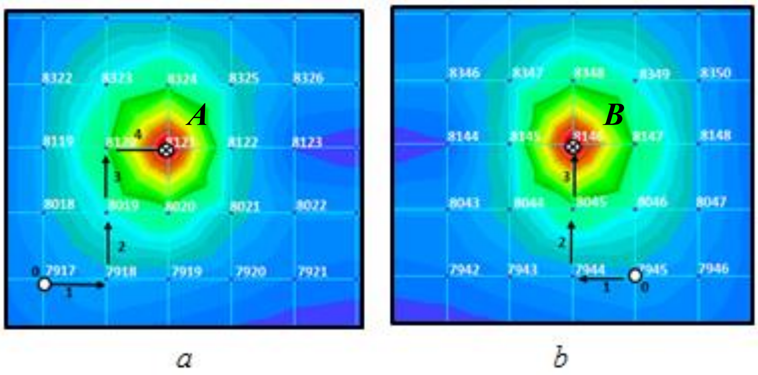


Рис. 12 – Ідентифікація вершин розрізу

На рис. 12 стрілками вказані напрямки руху на ітераціях методу вектора спаду. Для відновлення положення вершини A було виконано 4 ітерації, для B – 3 ітерації. Слід зазначити, що значення величини $\min\Delta_q$ на ітераціях методу вектора спаду швидко зменшується (рис.13).

В роботі досліджено вплив місця розташування розрізу відносно затисненої $\xi_1 = 1$ та навантаженої $\xi_2 = 1$ кромок на виконання процедури ідентифікації. Встановлено, що у разі переміщення розрізу у напрямку осі ξ_2 характер розподілу напружень в перерізах, які збігаються з лінією розрізу, практично не змінюється, розподіл напружень є симетричним.

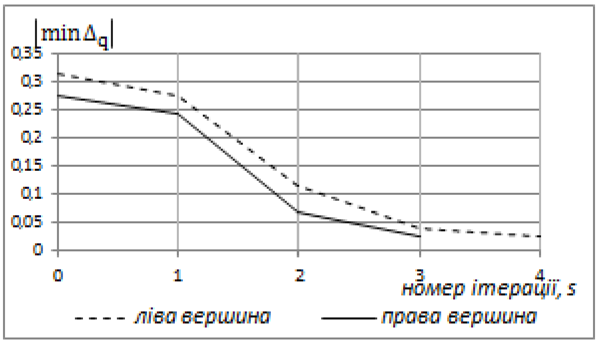


Рис. 13 – Збіжність процесу ідентифікації вершин розрізу

Наближення до затисненої кромки $\xi_1 = 1$ (рис.14) супроводжується зменшенням стрибків напружень в вершинах розрізу, характер їх розподілу перестає бути симетричним: значення напружень у вершині розрізу, що розташована ближче до затисненої кромки, значно менше. Зазначені особливості характеру напружено-деформованого стану впливають на процедуру ідентифікації: наближення до затисненої кромки збільшує кількість ітерацій, необхідних для ідентифікації вершини з заданою точністю. Так, у разі, коли відстань від вершини розрізу до затисненої кромки пластини становила $r/a = 0.1$, для відновлення координат вершини знадобилося виконати 8 ітерацій.

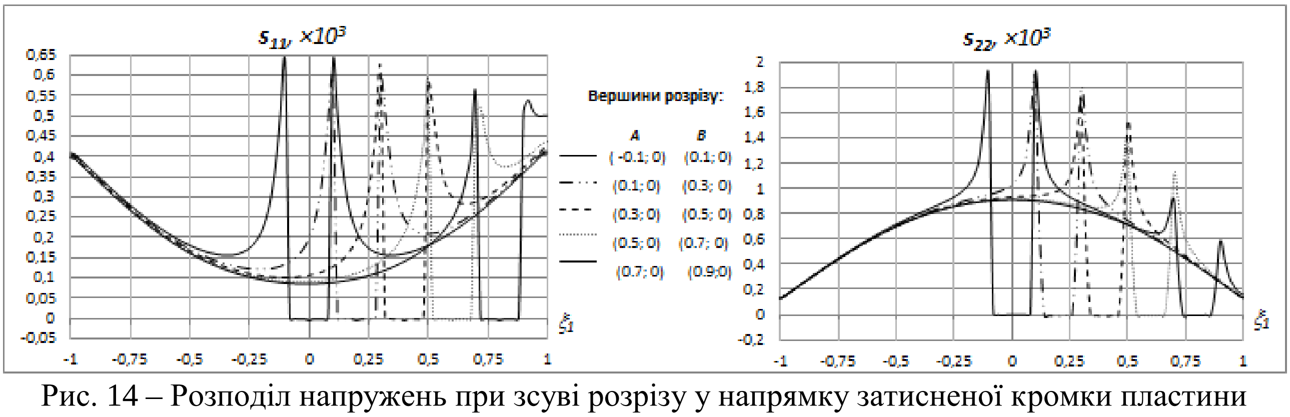


Рис. 14 – Розподіл напружень при зсуві розрізу у напрямку затисненої кромки пластини

Досліджено вплив геометричних параметрів розрізу на виконання процедури ідентифікації. В ході експериментів для центрального розрізу відносної довжини $l/a = \{0.05;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5\}$ вдалося ідентифікувати координати його вершин за 3-6 кроків ітераційного процесу, найбільшу кількість ітерацій виконано для визначення вершин розрізу довжиною $l / a = 0.05$.

Присутність в пластині такого дефекту супроводжується незначними відхиленнями характеристик її напружено-деформованого стану від відповідних характеристик суцільної пластини, що призводить до збільшення області початкового наближення вектора невідомих оберненої задачі.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено створенню теоретичних й алгоритмічних основ числових методів ідентифікації властивостей тонкостінних систем в процесі експлуатації за відомими результатами спостережень за напружено-деформованим станом системи.

В роботі отримано такі висновки:

1. Вперше в рамках нелінійної теорії пластин із використанням методу обернених задач побудовано модель деформування спостережуваної тонкої пластини при наявності жорстких включень, розрізів, дії зосереджених сил, місце розташування та властивості яких підлягають визначенню.
2. Для побудови моделі оберненої задачі застосовано варіаційний підхід, що базується на формулюванні повного функціоналу енергії пластини, до якого приєднується додаткова умова, що визначає близькість обчисленого та спостережуваного станів пластини, а параметри моделі описано за допомогою характеристичних функцій.
3. Для оцінки близькості стану пластини, що визначається за допомогою математичної моделі, та спостережуваного стану обрано метрику, яка використовує найбільш інформативні функції напружено-деформованого стану.
4. Вперше застосовано новий числовий метод та побудовано ітераційний алгоритм, що поєднують скінченно-елементну дискретизацію моделі пластини, лінеаризацію за допомогою методу продовження по параметру навантаження, теорію оптимального розбиття множин та метод Ньютона-Рафсона для визначення параметрів моделі.
5. Розвинуто підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини з лінією, вздовж якої задані стрибки переміщень та кутів повороту, визначення яких відбувається із розв’язання оберненої задачі шляхом задоволення статичних умов на берегах розрізу.
6. За допомогою розробленого підходу розв’язано задачу ідентифікації розрізів у тонкій пластині та досліджено ефективність підходу в залежності від довжини розрізу та місця його розташування в пластині.
7. Досліджено процес ідентифікації жорстких включень в деформівній тонкій пластині для різних випадків взаємного розташування вказаних дефектів в матеріалі пластини та різних значень їх характеристик.
8. Розглянуто процес деформування тонкої пластини в умовах комбінованого навантаження за участю зосереджених сил, точки прикладання та величини яких визначалися за допомогою запропонованого підходу. На прикладі ідентифікації локальних сил продемонстровано стійкість розробленого алгоритму до похибки вхідних даних.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гук Н. А. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладная математика. – 2016. – Том 2. – № 7 (80). – С.4-9. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
2. Гук Н. А. Ідентифікація жорстких включень у тонкій пластині / Н. А. Гук, Н. І. Степанова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер.: «Математика, прикладна математика і механіка». – 2015. – Том 82. – С. 47-60.
3. Гук Н. А. Идентификация точечных силовых воздействий в тонкостенных системах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій».– Дн-ськ: Ліра.– 2015.– Вип. 24– С. 58-72.
4. Гук Н. А. Нелинейное деформирование сжато-изогнутой пластины с разрезом / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Вісник Запорізького національного університету. Сер.: «Фізико-математичні науки». –2016. – №2. – С. 89-102.
5. Гук Н.А. Идентификация трещин в тонких пластинах / Н.А. Гук, Н.И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2017. – Вип. 26 – С. 51-69.
6. Гук Н. А. Идентификация включений в деформируемой пластине / Н. А. Гук, Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014): Матеріали XII Міжнародної наукової конференції, листопад 2014., м. Дніпро. – 2014. – С. 68-70.
7. Гук Н. А. Обробка даних спостережень методом обернених задач при діагностуванні приповерхневих тріщин / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015): Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24-25 вересня 2015. – Львів. – С. 134-136.
8. Гук Н. А. Идентификация локального силового воздействия в тонкостенной системе методом обратных задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015): Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2015., м. Дніпро. – 2015. – С. 60- 61.
9. Гук Н. А. Моделирование поведения тонкостенной системы с повреждением как обратная задача / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математическое моделирование и информационные технологии: Материалы 5-й международной конференции, 22-25 марта 2016, Кишинэу. – 2016. – Том 2.– С. 94-96.
10. Гук Н. А. Ідентифікація тріщин у пластинах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016): Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2016., м. Дніпро. – 2016. – С. 57-59.

11. Гук Н. А. Ідентифікація зосереджених зовнішніх впливів методом обернених задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні: Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 27 – 29 березня 2018 року, м. Дніпро. – С. 62.
12. Гук Н. А. Імітація розрізу у тонкостінних системах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018): Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції, 17-18 травня 2018 р., м. Черкаси. – 2018. – С. 47-49.
13. Гук Н. А. Вибір точок спостереження в задачах ідентифікації дефектів в тонкостінний системі / Н. А. Гук, Н. І. Степанова // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019): Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 20-25 травня 2019, м. Івано-Франківськ. – 2019. – С. 305-308.
14. Степанова Н. І. Вплив початкового наближення на результат ідентифікації пружних характеристик жорстких включень у тонкій пластині / Н. І. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2018): Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції, листопада 2018., м. Дніпро. – 2018. – С. 198-200.

АНОТАЦІЯ

Степанова Н. І. Обернені задачі ідентифікації силових впливів, включень та розрізів у тонкій пластині. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, м. Дніпро, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено розробці методу обернених задач щодо ідентифікації силових впливів та дефектів у тонкій пластині за результатами спостереження за її напружено-деформованим станом.

В роботі побудовано модель деформування спостережуваної тонкої пластини за наявністю включень, розрізів, дії зосереджених сил в умовах навантажень, близьких до критичних.

Застосовано варіаційний підхід, що базується на формулюванні повного функціоналу енергії пластини, до якого приєднано додаткову умову близькості обчисленого та спостережуваного станів. Параметри моделі описано за допомогою характеристичних функцій.

Розроблено чисельний метод та побудовано ітераційний алгоритм розв'язання задачі ідентифікації, що поєднують скінченно-елементну дискретизацію моделі пластини, лінеаризацію за допомогою методу продовження по параметру навантаження, теорію оптимального розбиття множин та метод Ньютона-Рафсона для визначення параметрів моделі.

Розвинуто підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини з лінією, уздовж якої задані стрибки переміщень та кутів повороту, визначення яких відбувається із розв’язання оберненої задачі шляхом задоволення статичних умов на берегах розрізу.

За допомогою розробленого підходу розв’язано задачі ідентифікації локальних силових впливів, жорстких включень, поздовжніх й поперечних розрізів. Досліджено ефективність запропонованого підходу в залежності від параметрів дефектів.

Ключові слова: тонка пластина, обернена задача, ідентифікація, включення, зосереджена сила, розріз, функція Лагранжа, метод скінченних елементів.

ABSTRACT

Stepanova N. Inverse problems of identification of force effects, inclusions and cuts in a thin plate. – Qualification scientific work presented as a manuscript.

Thesis for Science Candidate Degree in Physics and Mathematics by specialty 01.02.04 – Mechanics of the Deformable Solids (Physics and Mathematics). – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2019.

This thesis is devoted to the development of the method of inverse problems for the identification of force influences and defects in a thin plate by the results of observation of its stress - strain state.

The model of deformation of the observed thin plate by the presence of inclusions, sections, action of local forces under conditions of loads close to critical ones is constructed in the thesis.

The variational approach is applied that based on the formulation of the full functional of the energy of the plate, to which an additional condition is attached, which determines the closeness of the real and observed states of the plate, and the unknown parameters of the model are described by means of characteristic functions.

A numerical method is developed and an iterative algorithm for solving the identification problem combining finite element discretization of the plate model, linearization using the load parameter extension method, the theory of optimal partitioning of the sets and the Newton-Rafson method are developed.

An approach has been developed to model a cut in a plate based on a solid plate model with a line along which the specified jumping of displacements and angles of rotation that determined by solving the inverse problem by satisfying the static conditions on the edges of the cut.

With the developed approach, the tasks of identification of local power influences, rigid inclusions, longitudinal and cross cuts are solved. The effectiveness of the proposed approach is studied depending on the defect parameters.

Keywords: thin plate, inverse problem, identification, inclusion, local force, crack, Lagrange function, finite element method.