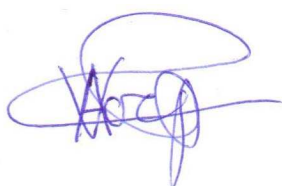


Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ВОРОПАЙ ОЛЕКСІЙ ВАЛЕРІЙОВИЧ

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'V. Voropay', with stylized loops and flourishes.

УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА
У НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПЛАСТИН

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дніпро – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету Міністерства освіти і науки України та на кафедрі вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор технічних наук, професор

Янютин Євген Григорович

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
професор кафедри вищої математики.

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України,

доктор технічних наук, професор

Гудрамович Вадим Сергійович,

Інститут технічної механіки

НАН України і НКА України, завідувач відділу
міцності і надійності механічних систем;

доктор технічних наук, професор

Бабич Степан Юрійович,

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка

НАН України, провідний науковий співробітник відділу
динаміки та стійкості суцільних середовищ;

доктор технічних наук, старший науковий співробітник

Сметанкіна Наталя Володимирівна,

Інститут проблем машинобудування

ім. А. М. Підгорного НАН України, завідувач відділу
вібраційних і термоміцнісних досліджень.

Захист відбудеться "20" грудня 2019 р. о 14.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за адресою: м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 35, корп. 5, ауд. 27.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. О. Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49107, м. Дніпро, вул. Козакова, 8.

Автореферат розісланий "19" листопада 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор

А. П. Дзюба

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Багато елементів машинобудівних конструкцій під час роботи піддаються нестационарним впливам. Міцність і надійність таких виробів у цілому зумовлена їх якісним проектуванням, що базується на широкому інженерному досвіді та великій накопиченій інформаційній базі. Розширення цієї бази значною мірою пов'язано з детальними дослідженнями процесу нестационарного деформування елементів конструкцій. Одні з найпоширеніших елементів – це пластини, задачі для яких розглянуті в цій роботі.

Відомо, що при теоретичному аналізі динамічних процесів можна використати два загальних підходи, оснований на диференціальних та інтегральних операторах. Інтегральний підхід має більшу стійкість завдяки своїм накопичувальним (інтегруючим) особливостям при розв'язанні некоректних задач, які часто зустрічаються при дослідженні нестационарних процесів деформування. В основному нестационарні деформаційні процеси докладно описуються за допомогою інтегральних рівнянь Вольтерра, застосування яких для пластинчастих елементів конструкції досліджується в дисертаційній роботі.

Актуальність теми. Під час проектування виробів сучасної техніки актуальною є проблема недостатньої інформації про дії навантажень на механічні системи. Особливо серйозні проблеми виникають при нестационарному деформуванні елементів конструкцій. При дослідженні нестационарного деформування дуже важливо точно задавати навантаження, тому що їх зміна в часі може значно впливати на процес деформування і, отже, на результати розрахунків.

Розв'язок обернених задач ідентифікації невідомих нестационарних навантажень при обробленні експериментальних даних може істотно знизити вартість і час досліджень, а іноді частково або повністю замінити реальні дослідження спеціальними обчислювальними експериментами.

Таким чином, доповнення недостатньої інформації, щодо дії короткочасних імпульсних навантажень є дуже важливим питанням, особливо, коли це пов'язано з забезпеченням безаварійної роботи конструкцій.

Треба підкреслити, крім того, важливу роль в машинобудуванні досліджень з управління коливаннями, які пов'язані з проблемою активного і пасивного віброзахисту елементів конструкцій та устаткування.

Визначення законів зміни в часі імпульсних і ударних, а також керуючих навантажень може здійснюватися на базі розв'язання обернених нестационарних задач механіки деформівного твердого тіла. Вказані задачі можуть бути зведені до інтегральних рівнянь Вольтерра, застосування яких для пластинчастих елементів конструкції досліджується в дисертації.

Застосування інтегральних рівнянь Вольтерра саме до задач деформування пластинчастих елементів конструкцій в цій роботі зумовлено тим, що для пластин (двовимірний об'єкт, який нестационарно деформується) найширше представлений клас розглянутих задач, а саме, задач ідентифікації декількох невідомих незалежних навантажень, що діють одночасно, управління

нестационарними коливаннями, а також задач моделювання різних особливостей навантаження або обпирання пластин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету в період з 2005 по 2014 роки та кафедрі вищої математики Національного технічного університету «ХПІ» в період з 2015 по 2018 роки.

Робота виконана згідно з такими планами:

- індивідуальним планом підготовки докторанта кафедри вищої математики НТУ «ХПІ»;
- робочим планом бюджетної теми 01-53-04 "Створення методів математичного моделювання з управління нестационарними деформаційними процесами" (ДР №0104U002046) з 2004 по 2006 роки;
- робочим планом бюджетної теми № 01-53-07 "Математичні основи експрес-аналізу механічних параметрів дорожнього покриття та дослідження його динамічних властивостей" (ДР №0107U001004) з 2007 по 2009 роки.
- щорічними планами науково-дослідної роботи кафедри деталей машин і ТММ ХНАДУ з 2005 по 2018 роки.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'язання у загальному вигляді оберненої задачі про одночасну дію на пластину скінченного набору нестационарних довільних навантажень, яка може бути зведена до розв'язку системи інтегральних рівнянь Вольтерра, а також розроблення спеціальних підходів для урахування дисипації енергії під час деформування елементів конструкцій.

На базі отриманого в загальному вигляді розв'язання оберненої задачі і розроблення універсального підходу, при якому використовують інтегральні оператори, виконати розв'язання трьох класів актуальних задач:

- ідентифікації системи зовнішніх нестационарних навантажень, яка діє на прямокутні пластини;
- спільної ідентифікації зовнішніх навантажень і реакцій в задачі моделювання нестационарних коливань пластин із зосередженими особливостями (масами, погашувачами коливань, додатковими опорами);
- ідентифікації керуючих впливів в задачі управління нестационарними коливаннями пластини.

Для досягнення цієї мети в дисертації були поставлені та розв'язані такі основні наукові та прикладні задачі:

- 1) побудова модифікованих (удосконалених) методик використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова при розв'язанні систем інтегральних рівнянь Вольтерра та вибору оптимальних значень параметрів регуляризації (розв'язання некоректних задач математичної фізики);
- 2) розроблення спеціальних обчислювальних алгоритмів для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв'язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- 3) розв'язання оберненої задачі ідентифікації декількох нестационарних навантажень, які діють на пластину одночасно;

4) на базі модифікації ядер Коші та власних кругових частот розробити підхід, який дає можливість урахування впливу пружної основи;

5) моделювання (розв'язання прямих та обернених задач) нестационарних коливань прямокутних пластин за наявності зосереджених мас, додаткових зосереджених лінійно-пружних опор, а також погашувачів коливань (ідентифікація невідомих реакцій між пластиною та зосередженими особливостями);

6) дослідження реакції додаткової в'язкопружної опори, що контактує із пластиною, та її декомпозиція на пружну та в'язку складові;

7) побудова розв'язку задачі про управління нестационарними поперечними коливаннями прямокутної пластини (ідентифікація законів зміни у часі керуючих впливів на пластину);

8) аналіз задач пасивного і активного віброзахисту пластини при нестационарних коливаннях із приєднаною зосередженою масою;

9) створення спеціалізованого підходу, який дозволяє на базі наявних пружних моделей одержувати розв'язки, що враховують дисипацію енергії коливань (на базі диференціальних і згладжувальних лінійних інтегральних операторів);

10) проведення експериментальних досліджень з метою обґрунтування теоретичних результатів.

Об'єкт дослідження – нестационарне навантаження прямокутних пластин з урахуванням особливостей навантаження та додаткових опор.

Предмет дослідження – інтегральні рівняння Вольтерра, до яких зводяться задачі нестационарного деформування пластинчастих елементів конструкцій.

Методи дослідження. Методи математичної фізики, теорія рядів Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, теорія операторів, теорія інтегральних рівнянь Вольтерра, теорія некоректних задач математичної фізики (використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова), матричне числення.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

1. Набула подальший розвиток теорія розв'язку нестационарних обернених задач механіки деформівного твердого тіла.

2. Удосконалено комплекс методів та обчислювальні алгоритми для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, та розв'язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса.

3. На базі розв'язаної у загальному вигляді нестационарної оберненої задачі для прямокутної пластини та удосконаленого комплексу методів **вперше** розв'язано:

– обернену задачу про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестационарних навантажень, що діють одночасно;

– обернені задачі моделювання нестационарних коливань прямокутних пластин за наявності додаткових зосереджених особливостей (маси, амортизатора, додаткових пружних і в'язкопружних опор);

– задача ідентифікації реакції в'язкопружної опори, яка контактує з пластиною, а також запропоновано та виконано декомпозицію цієї реакції на пружну та в'язку складові, шляхом заміни її двома незалежними в'язкою та лінійно-пружною додатковими опорами, що прикладені в одній точці або на близькій відстані.

4. Удосконалено методику активного управління нестационарними коливаннями прямокутної пластини за допомогою додаткових керуючих навантажень, а саме показано можливість:

- а) урахування додаткових зосереджених особливостей;
- б) управління коливаннями не в одній точці пластини, а на невеликій області відносно величини площі пластини;
- в) гасіння коливань по всій поверхні пластини скінченою системою керуючих навантажень.

5. Побудовано розв'язок низки некоректних задач активного управління нестационарними поперечними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей, а також розглянуто схеми пасивного і активного віброзахисту в задачі гасіння коливань пластини з приєднаною масою.

6. **Вперше** виконано урахування дисипативних властивостей в матеріалі на базі розв'язків у рамках теорії пружності при деформуванні елементів конструкції з використанням згладжувальних лінійних інтегральних операторів, для випадків внутрішнього в'язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара).

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані для визначення даних про характер і величину нестационарних навантажень, що виникають у різних механічних системах, які деформуються імпульсно, на основі непрямих проявів (переміщень, деформацій у деяких точках елементів конструкцій), а також вибір раціональних режимів управління коливаннями.

Впровадження матеріалів дисертаційної роботи та запропонованих підходів підтверджено довідками про використання результатів досліджень, наведеними в додатку.

Було отримано три довідки про застосування матеріалів дисертаційної роботи від:

– кафедри вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором № 66/37-50-12 „Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б”.

– ТОВ «Океан-судоремонт» при виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування.

– Корпорації «Співдружність» при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін і камер для розбирання і утилізації вибухонебезпечних виробів.

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що подані до захисту, отримані здобувачем самостійно.

Постановка деяких задач та обговорення результатів в опублікованих наукових працях проводилися разом із науковим консультантом або співавторами.

[3, 7, 8, 33, 35, 36] – наукові праці написані у співавторстві з науковим консультантом; автору належить участь у постановці задачі, розв’язання задачі та розрахунки.

[4, 10] – участь у постановці задачі і проведенні експериментального дослідження, а також розв’язок задачі ідентифікації нестационарного навантаження прямокутної пластини.

[2, 5, 6, 32, 34, 37 - 40] – участь у постановці та розв’язок задач для прямокутних пластин.

[18] – участь у постановці та розв’язок задачі, а також участь в аналізі отриманих результатів.

[21, 22, 25] – участь у постановці задач, розробленні концепції тензометричного вимірювального комплексу та у проведенні теоретико-експериментальних досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій при динамічному навантаженні.

[12, 16] – участь у постановці задач і виборі моделі дорожньої конструкції для розв’язання задачі ідентифікації нестационарного навантаження, а також дослідження моделі на базі пластин середньої товщини на пружній основі.

[24, 27, 49, 51] – написані у співавторстві з аспірантом, автором були поставлені задачі, сформульовані рекомендації щодо розв’язання та участь в аналізі отриманих результатів.

[50] – участь у постановці задач, автором безпосередньо розв’язана задача для випадку нестационарного деформування пластин за наявності додаткових зосереджених опор.

[28, 31] – участь у постановці задач та створенні згладжувальних лінійних інтегральних операторів; розроблення методики числової реалізації за допомогою спеціальних матриць і застосування процедури згладжування при розв’язанні конкретних задач.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати наукових досліджень дисертаційної роботи Воропая О. В. доповідались та обговорювались на щорічних наукових конференціях Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (секція деталей машин і ТММ) та наукових семінарах кафедри деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (2005 – 2018 рр.) і кафедри вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (2015 – 2018 рр.), а також на наступних міжнародних конференціях та симпозіумах:

1) міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 травня 2005 р., Київ);

2) XI науково-технічній конференції з міжнародною участю "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгарія. Варна, 19–20 травня 2005 р.;

3) міжнародному симпозиумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харків – Херсон, 2005;

4) міжнародній науковій конференції "Интегральные уравнения и их применения" 29 червня – 4 липня 2005 р. Одеса.;

5) XIV міжнародній науково-практичній конференції (MicroCAD 2006) «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я». Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, 18-19 травня 2006 р. Присвячується 100-річчю з дня народження М. Ф. Семка;

6) VIII Кримській міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Алушта, 10-17 вересня 2006 р. Таврійський національний ун-т. Сімферополь;

7) міжнародній конференції «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України. 23-26 жовтня 2006 р.;

8) XII міжнародному симпозиумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007) Харків – Херсон, 2007;

9) IX Кримській міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения». Алушта, 15-20 вересня 2008 р. / Таврійський національний ун-т. Сімферополь;

10) міжнародній науково-технічній конференції «Инновации в машиностроении» (Минск 30-31 жовтня 2008 р.) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси;

11) Тринадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 р. Київ;

12) XV міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 травня 2011 р. Київ)

13) міжнародній конференції, присвяченій 50-річчю механіко-математичного факультету ХНУ ім. В. Н. Каразіна «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (17-22 квітня 2011 р.). Харків;

14) XVI міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 травня 2013 р., Київ);

15) міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики» (Харьков ХНАДУ 10-25 травня 2013 р.);

16) міжнародній школі-конференції «Тараповские чтения». «Современные проблемы математики, механики и информатики». Харків, ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.;

17) міжнародній науково-практичній конференції з нагоди Дня автомобіліста і дорожника: "Новітні технології розвитку конструкції,

виробництва, експлуатації, ремонту і експертизи автомобіля" присвяченої 90-річчю народження проф. Говорущенко М. Я. 15–16 жовтня 2014 р., м. Харків;

18) Міжнародній науково-практичній та науково-методичній конференції, присвяченій 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з дня народження професора А. Б. Гредескула «Новітні технології в автомобілебудуванні...», ХНАДУ, 20–21 жовтня 2016 р.;

19) Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – (Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

20) міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017), Харків, 26-28 червня 2017р.

21) міжнародній науково-практичній конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування...», 19–20 жовтня 2017 р., ХНАДУ.

У повному обсязі дисертація доповідалась:

– на спільному розширеному засіданні кафедр вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» та деталей машин і ТММ Харківського національного автомобільно-дорожнього університету під керівництвом доктора технічних наук, професора Л. В. Курпи;

– на семінарі кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ» під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. Г. Ніколаєва;

– на семінарі науково-технічної проблемної ради з динаміки та міцності машин Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України під керівництвом доктора технічних наук, професора К. В. Аврамова;

– на розширеному семінарі відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України О. М. Гузя.

– науковому семінарі «Механіка деформівних тіл і конструкцій» Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара при Дніпровському науковому центрі НАН України та науковій раді з механіки деформівного твердого тіла НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України В. С. Гудрамовича.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 51 наукову працю, серед яких одна одноосібна монографія, одна монографія в співавторстві, 29 наукових статей, з них 28 статей у фахових виданнях України, 12 входять до видань, які внесені до міжнародних наукометричних баз, 1 стаття у зарубіжному виданні, 20 опублікованих тез доповідей та матеріалів конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних літературних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи – 359 сторінок, з яких основного тексту – 282 сторінки, 165 рисунків, не містить таблиць, 2 додатки. Список використаних джерел містить 300 найменувань на 36 сторінках. Додатки – 16 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і задачі дослідження, зазначено основні наукові результати, наведено відомості про публікації та апробацію основних положень, а також кваліфікаційні ознаки дисертації.

У **першому розділі** здійснено огляд робіт за темою дисертаційної роботи. Огляд літератури складається з п'яти частин і висновку. Перша частина присвячена вибору теорії нестационарного деформування пластин. У ній відзначено, що рівняння, отримані Я. С. Уфляндом і Р. Д. Миндлином, дозволяють урахувувати ефекти інерції обертання та зсуву (теорія на основі гіпотез Тимошенка), які добре себе зарекомендували при дослідженні нестационарного деформування одношарових ізотропних пластин. У другій частині наведено ряд монографій і роботи оглядового характеру, присвячені дослідженню динаміки пластин. У третій частині огляду описані роботи з розв'язання нестационарних задач механіки деформівного твердого тіла, у яких використовуються інтеграли згортки та інтегральні рівняння. У четвертій частині розглянуто задачі, в яких використано інтегральні рівняння Вольтерра для визначення динаміки навантаження. П'ята частина огляду присвячена роботам з ідентифікації та управління коливаннями із застосуванням нових технологій.

Розглядаючи історичний перебіг у розробленні теорії пластин та оболонок, а також методи дослідження їх коливань, необхідно відзначити вплив на розвиток дисертаційної роботи наукових праць таких вчених: А. Е. Бабаєва, С. Ю. Бабіча, В. В. Болотіна, М. В. Василенка, В. З. Власова, А. С. Вольміра, Ю. С. Воробйова, К. З. Галімова, А. Г. Горшкова, Є. І. Григолюка, Я. М. Григоренка, О. Я. Григоренка, В. С. Гудрамовича, О. М. Гузя, Б. Я. Кантора, М. О. Кільчевського, С. С. Кохманюка, В. Д. Кубенка, Л. В. Курпи, М. М. Леонтьєва, П. З. Лугового, А. І. Лур'є, В. П. Ольшанського, Г. С. Писаренка, І. Т. Селезова, Н. В. Сметан-кіної, С. П. Тимошенка, С. В. Угрімова, Я. С. Уфлянда, А. П. Філіппова, О. М. Шупікова, Є. Г. Янютіна, R. M. Cooper, J. N. Goodier, K. L. Jonson, K. H. Lo, P. M. Naghdi, R. D. Mindlin та інших вітчизняних і зарубіжних дослідників.

Крім того необхідно відзначити, що до питань, які пов'язані з некоректними задачами математичної фізики та механіки деформівного твердого тіла, вагомий вплив на дослідження в рамках дисертаційної роботи зробили наукові праці наступних вчених: А. М. Тихонова, Ф. Р. Гантмахера, В. Я. Арсеніна, О. А. Самарського, А. Г. Яголи, О. В. Гончарського, А. М. Черепашука, М. О. Лавренєва, В. О. Морозова, А. Ф. Верляня, В. С. Сізікова, А. С. Апарцина, О. О. Ватульяна, Р. К. Lamm.

У заключній частині огляду зроблено такі висновки:

– становить інтерес створення комплексу методів з ідентифікації системи навантажень, що складається з декількох одночасно прикладених незалежних сил, які можуть діяти як поперечно до серединної поверхні пластини, так і під нахилом або дотично до неї;

– виникла потреба побудови загальної методики, що дозволяє враховувати різні зосереджені або розподілені особливості типу наявності додаткової маси, додаткових опор (лінійно-пружних, демпфіруювальних і в'язкопружних);

– доцільно розробити методи управління поведінкою пластини не тільки в точці, але й на малій порівняно з розмірами пластини площадці, а також створити ефективні методики гасіння нестационарних коливань по всій поверхні пластини;

– істотно цікавим є створення спеціалізованого підходу, що дозволяє на базі наявних пружних моделей одержувати розв'язки, що враховують дисипацію енергії коливань.

У **другому розділі** описано чисельно-аналітичні методи, що використовуються у роботі. Викладено регуляризуючий алгоритм академіка А. М. Тихонова (РА Тихонова) та особливості його застосування для розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла. У рамках регуляризуючого алгоритму розглянуто скінченновимірну апроксимацію некоректної задачі та згладжувального функціонала. Наведено приклад розв'язання тестової некоректної задачі (ідентифікації невідомого нестационарного поперечного навантаження, що діє на прямокутну ізотропну шарнірно-обперту пластину середньої товщини в пружній постановці) з використанням регуляризуючого алгоритму.

При проведенні тестових розрахунків на точні величини прогинів (деформацій) $\overline{w_s(t)}$, які є розв'язком прямої задачі при заданому законі зміни в часі зовнішнього навантаження $P(t)$, накладався випадковий «шум» відповідно до закону нормального розподілу викидів («гауссів шум»). «Гауссів шум» розраховувався в пакеті MathCAD з використанням вбудованої функції для нормального розподілу за формулою $\overline{w_s(t)} = \overline{w_s(t)} + \text{rnorm}(t, 0, \delta \cdot w_{\max})$.

Отже, до значень вихідної функції $\overline{w_s(t)}$ додавалися випадкові величини з дисперсією $\sigma = \delta \cdot w_{\max}$, де δ – відносна похибка; $w_{\max}$ – величина максимального прогину пластини в розглянутій точці. Вкажемо, що процедура «зашумлення» добре моделює випадкові похибки, що виникають при реальних вимірах параметрів НДС елементів конструкцій, і дозволяє перевірити обчислювальний алгоритм на стійкість.

Приділено увагу питанню вибору значень параметра регуляризації. Розглянуто комплекс методів для розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра на основі використання регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова в сукупності з узагальненими алгоритмами Крамера та Гаусса для блокових матриць. Описано особливості використання узагальнених алгоритмів Крамера та Гаусса, а також для алгоритму Гаусса наведено кілька варіантів його реалізації.

У **третьому розділі** розглянуто імпульсні впливи системи довільних складних навантажень (що мають не тільки поперечну, але й поздовжню складову) на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини в

рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Наведено методику розв'язання прямих та обернених задач у рамках теорії пружності для нестационарних навантажень пластини. Подано ряд прикладів обчислень з ідентифікації системи декількох зовнішніх незалежних сил. Крім того, у третьому розділі описана методика урахування впливу двосторонньої пружної інерційної основи при імпульсному деформуванні прямокутних пластин.

Складові переміщення елемента пластини позначені u , v та w . Були прийняті такі припущення:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t); \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t); \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

де x, y, z – декартові координати, u_0, v_0 та w_0 – переміщення точок серединної площини пластини, ψ_x і ψ_y – кути повороту нормалі до серединної площини пластини в площинах xOz та yOz , відповідно; $z \in [-h/2; h/2]$, де h – товщина пластини.

Задача про нестационарне деформування пружної ізотропної пластини з урахуванням відповідних початкових і крайових умов, а також навантаження системою з N сил і моментів зводиться до розв'язання такої системи п'яти диференціальних рівнянь у частинних похідних, кожне з яких має другий порядок:

$$\left\{ \begin{aligned} E_p h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + G h \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h(E_p v + G) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \cdot \partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t); \\ G h \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + E_p h \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + h(E_p v + G) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \cdot \partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t); \\ G' h (\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) &= \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина матеріалу пластини, кг/м³; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; $I = h^3/12$; $E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}$;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$; $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість

пластини; G' – приведений модуль зсуву $G'=k'$. Відзначимо, що k' – коефіцієнт зсуву.

Повну систему рівнянь (2), що описують деформування пластин у рамках гіпотез Тимошенка, можна розділити на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема, що складається з двох диференціальних рівнянь у частинних

похідних щодо невідомих $u_0(x, y, t)$ і $v_0(x, y, t)$, відповідає поздовжнім навантаженням, а друга підсистема, що складається із трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних щодо функцій прогинів $w_0(x, y, t)$ і кутів повороту нормалі $\psi_x(x, y, t)$ та $\psi_y(x, y, t)$, – поперечним навантаженням. Відзначимо, що для оболонок такий розподіл неможливий, тому що всі п'ять рівнянь будуть пов'язані додатковими членами, в які входить кривизна.

У наведеній системі рівнянь враховується вплив всіх можливих навантажень (рис. 1).

Система рівнянь (2) розв'язується з використанням методу Фур'є (відокремлення змінних). Відповідно до крайових умов, наприклад, для шарнірно-обпёртої пластини вираз для прогину матиме вигляд

$$w_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}, \quad (3)$$

де l – довжина пластини, м; m – ширина пластини, м.

Відповідні розвинення в ряди Фур'є підставляються у систему диференціальних рівнянь у частинних похідних. Далі, скориставшись властивістю ортогональності тригонометричних функцій, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь для змінної t .

Систему диференціальних рівнянь розв'язують таким способом: при нульових початкових умовах виконують пряме інтегральне перетворення Лапласа; у просторі зображень на основі розв'язання системи алгебраїчних рівнянь знаходять шукані коефіцієнти розвинення $w_{kn}^L(s)$, $u_{kn}^L(s)$, $v_{kn}^L(s)$, $\psi_{xkn}^L(s)$, $\psi_{ykn}^L(s)$; виконують обернене перетворення Лапласа. При виконанні оберненого перетворення Лапласа використовується теорема згортки, вихідні вирази утворюються у вигляді інтегральних співвідношень – інтегралів згортки (Дюамеля) з скінченно-різницею ядрами Коші $K(t - \tau)$.

Вкажемо, що ω_{ikn} – власні кругові частоти коливань пластини

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \Delta_{kn})};$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \Delta_{kn})}; \quad \omega_{3kn} = \sqrt{c_p^2 \frac{1-v}{2} \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \frac{12}{h^2}};$$

$$\omega_{4kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2(c_p^2 + c_G^2) + \Delta_{kn}^*}{2}}; \quad \omega_{5kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2(c_p^2 + c_G^2) - \Delta_{kn}^*}{2}},$$

де $c_G^2 = \frac{G}{\rho}$; $c_T^2 = \frac{G'}{\rho}$; $c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}$; $\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}$; $\mu_n^* = \pi \frac{n}{m}$; $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$,

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12/h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Delta_{kn}^* = \sqrt{(c_p^2 + c_G^2)^2 \lambda_{kn}^4 - 4c_G^2 c_p^2 (\lambda_k^{*4} + \mu_n^{*4}) - 4\lambda_k^{*2} \mu_n^{*2} (c_p^4(1-v^2) - 2vc_G^2 c_p^2)}.$$

На рис. 2 показані графіки залежності квадрата власних частот від квадрата хвильових чисел для поперечних і поздовжніх коливань пластинчастих елементів конструкції відповідно до гіпотез типу Тимошенка для системи рівнянь. На цьому рисунку крива 1 відповідає функції $\omega_1(\lambda)$, крива 2 – $\omega_2(\lambda)$, крива 3 – $\omega_3(\lambda)$, крива 4 – $\omega_4(\lambda)$, крива 5 – $\omega_5(\lambda)$.

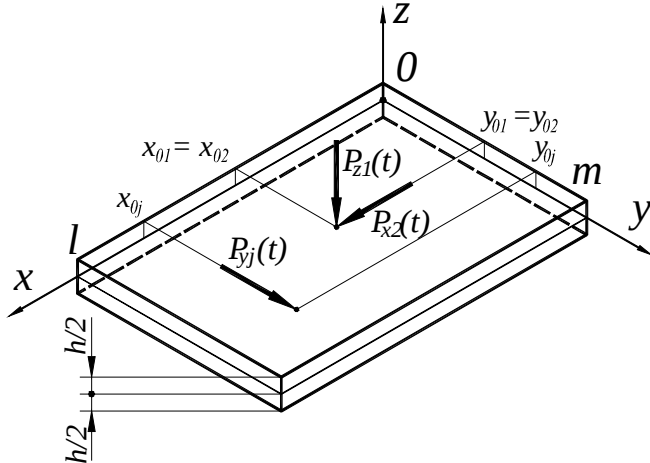


Рисунок 1 – Схема навантаження пластини

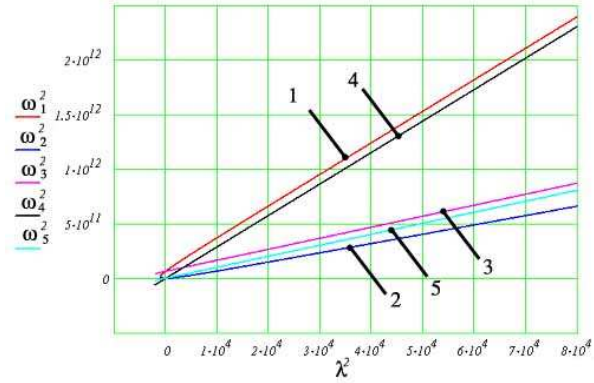


Рисунок 2 – Розв'язок вікового рівняння для поздовжніх і поперечних коливань пластини

В розділі наведено приклади ідентифікації декількох навантажень.

Комбінація співвідношень для прогинів та деформацій при заданих функціях у правій частині та шуканих функціях $P_j(t)$ є системою з N лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, розв'язання якої є метою задачі ідентифікації.

Відповідно до описаного комплексу методів для системи інтегральних рівнянь виконується дискретизація за часом, у результаті чого зазначена система інтегральних рівнянь зводиться до блокової СЛАР виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $\mathbf{A}_{ij}$ – матриця, що відповідає інтегральному оператору $A_{ij}[\cdot]$, вектор $\mathbf{p}_i$ відповідає функції p_i , а $\mathbf{u}_j - u_j$.

Блокова СЛАР (4) розв'язується з використанням узагальненого алгоритму (Гаусса – УАГ або Крамера – УАК). В результаті можна отримати N рівнянь, що залежать тільки від одного i -го навантаження:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}_i, \quad (5)$$

де $\mathbf{M}$ і $\mathbf{M}_i$ – матриці, визначені із застосуванням УАК.

Для кожного рівняння (5) виконується процедура регуляризації за А. М. Тихоновим, в результаті якої приходимо до регуляризованої СЛАР виду

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_i \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{i}, \quad (6)$$

де $\alpha_i > 0$ – параметр регуляризації, $\mathbf{C}$ – симетрична трихдіагональна матриця.

Опишемо приклад навантаження пластини системою із двох нестационарних поперечних навантажень з реєстрацією у двох її точках деформацій $\varepsilon_{xi}^*(t)$ (рис. 3).

При обчисленнях були прийняті такі значення параметрів: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu=0.3$; $k'=0.85$; $h=0.04 \text{ м}$; $l=0.6 \text{ м}$, $m=0.4 \text{ м}$; $\max P_1(t)=10^9 \text{ Па}$, $\max P_2(t)=8 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\delta=0.15$. Області прикладення навантажень – круги постійного радіуса $r_1=r_2=r=0.005 \text{ м}$. Координати точок центрів прикладення поперечних навантажень наступні: $x_{01}=0.4 \text{ м}$, $y_{01}=0.3 \text{ м}$; $x_{02}=0.2 \text{ м}$, $y_{02}=0.2 \text{ м}$. Координати точок, деформації $\varepsilon_x(t)$ в яких вважалися відомими при розв'язанні задачі ідентифікації, (місця установки датчиків): $x_{s1}=0.3 \text{ м}$, $y_{s1}=0.1 \text{ м}$; $x_{s2}=0.1 \text{ м}$, $y_{s2}=0.5 \text{ м}$.

На рис. 4 показані зміни в часі функцій $\varepsilon_{x1}^*(t)$ та $\varepsilon_{x2}^*(t)$, що використовувались як вихідні дані при розв'язанні оберненої задачі (криві 1 – чорна та 2 – сіра крива відповідно).

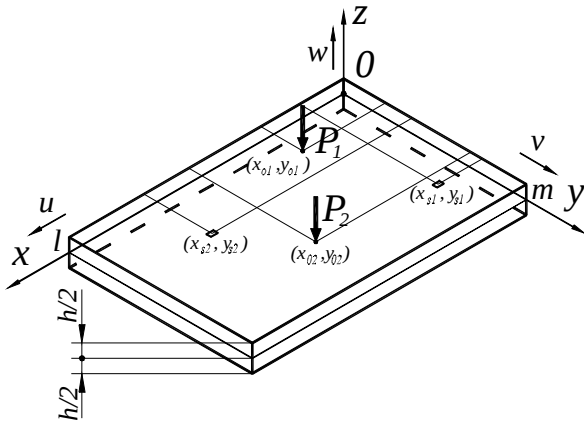


Рисунок 3 – Схема навантаження пластини

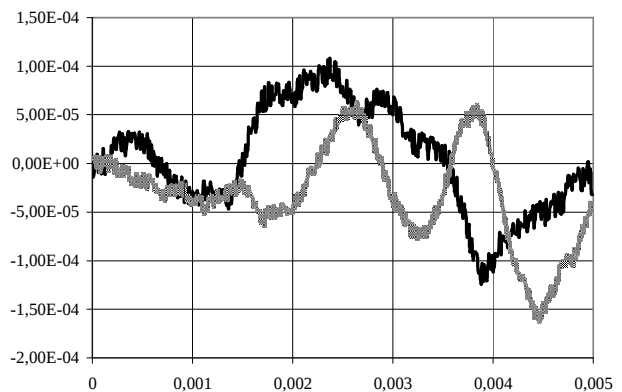


Рисунок 4 – Вихідні дані для ідентифікації

При проведенні розрахунків на величини деформацій $\overline{\varepsilon_{xj}}(t)$, які є результатами розв'язування відповідної прямої задачі при заданих законах зміни в часі зовнішніх навантажень $P_i(t)$, накладався «шум». Укажемо, що процедура «зашумлення» моделює похибки, які виникають при реальних вимірюваннях параметрів НДС елементів конструкцій (наприклад, тензометричним методом).

На рис. 5 показані криві, що зображують зміну в часі функцій $P_1(t)$ та $P_2(t)$, причому криві 1 та 2 (товсті лінії) відповідають заданим змінам навантажень, прийнятим при розв'язанні відповідної прямої задачі, а криві 3 та

4 (тонкі лінії) – ідентифікованим значення навантажень при "зашумленні" вихідних даних із рівнем $\delta = 0.15$ (15%).

На рис. 6 наведена графічна ілюстрація результатів мінімізації відповідних функціоналів при визначенні параметрів регуляризації α_1 (суцільна крива) і α_2 (крапки). Із наведених результатів видно, що найбільш раціональні значення при розв'язанні даної задачі такі: $\alpha_1 = 10^{-51}$, $\alpha_2 = 10^{-52}$.

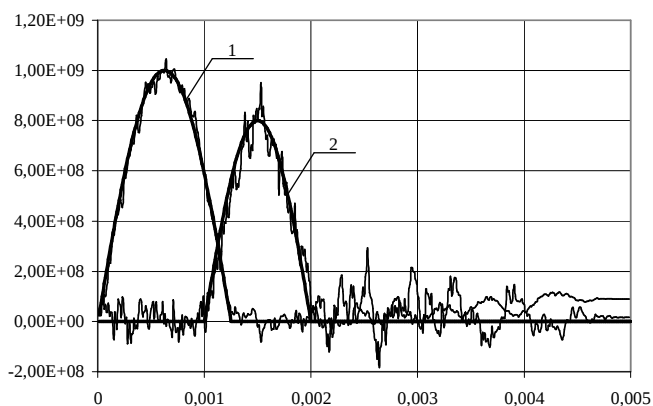


Рисунок 5 – Результати ідентифікації

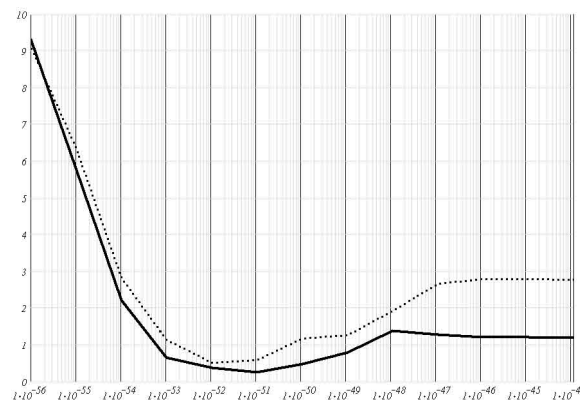


Рисунок 6 – Функціонали нев'язки

Розглянуто також випадок навантаження пластини системою із трьох нестационарних поперечних зосереджених навантажень. Як вихідні дані для задачі ідентифікації використовувалися зміни прогинів $w_j(t)$ у трьох її точках. У цьому випадку для ідентифікації системи із трьох незалежних нестационарних навантажень розв'язувалася система трьох інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.

Із наведених результатів видно, що запропонований метод дозволяє одержувати досить стійкі розв'язки для систем інтегральних рівнянь, до яких зводиться розв'язання задачі ідентифікації законів зміни в часі декількох незалежних навантажень, що збурюють коливання і діють одночасно на прямокутні пластини середньої товщини.

Крім того, у третьому розділі описано можливість у динамічній задачі урахування впливу пружної інерційної двосторонньої основи типу Власова-Леонтьєва*. Реакція основи:

$$R(x, y, t) = -2t_f \cdot \nabla^2 w_0(x, y, t) + k_f \cdot w_0(x, y, t) + m_f \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (7)$$

де k_f , t_f , m_f – постійні пружної основи: k_f – коефіцієнт прямої пропорційності (коефіцієнт постелі), що визначає роботу пружної основи на стискання; t_f – коефіцієнт, що дозволяє враховувати дотичні напруження, які виникають у пружній основі; m_f – питома маса пружної основи для урахування ефекту інерції.

У четвертому розділі описано нестационарне деформування пластин при наявності різних зосереджених у точці або локалізованих на малих областях

* Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 492 с.

особливостей (мас, додаткових опор та погашувачів коливань). У розділі наведена постановка задачі та математична модель, а також розв'язання задачі в загальному вигляді.

У дисертаційній роботі викладено підхід, що дозволяє враховувати вплив ребер і зосереджених особливостей на нестационарне деформування елементів конструкції шляхом введення у вихідні моделі деформування пластин додаткових нестационарних сил (реакцій). Ці невідомі нестационарні навантаження можуть бути визначені з відповідних інтегральних співвідношень шляхом зведення їх до лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра або їх систем, що дозволяє отримувати аналітико-чисельні розв'язання без використання ітераційних схем.

Для урахування зосередженої маси (рис. 7, а) її реакція буде мати вигляд

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2}, \quad (8)$$

де m_i – зосереджена маса в i -й точці.

Вираз для прогину в точці приєднання цієї маси можна записати у формі

$$w_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t R_i(\tau)(t - \tau) d\tau. \quad (9)$$

Приєднана в деякій точці пластини додаткова лінійно-пружна опора показана на рис. 7, б.

Для розрахунку додаткової пружної опори її реакція буде мати вигляд

$$R_i(t) = c_i w_i(t), \quad (10)$$

де c_i – коефіцієнт жорсткості додаткової опори в i -й точці.

Тоді вираз для прогину в точці прикладення цієї реакції можна записати як

$$w_i(t) = \frac{1}{c_i} R_i(t). \quad (11)$$

Приєднаний у деякій точці пластини погашувач коливань (демпфер, амортизатор) показаний на рис. 7, в.

Для урахування впливу додаткової опори, що демпфірує, її реакцію можна записати у вигляді

$$R_i(t) = \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}, \quad (12)$$

де κ_i – коефіцієнт демпфірування в i -й точці;

тоді вираз для прогину в точці приєднання амортизатора матиме вигляд

$$w_i(t) = \frac{1}{\kappa_i} \int_0^t R_i(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Більшість реальних опор насправді є в'язкопружними, тобто мають як в'язкі, так і пружні характеристики (рис. 7, з і д).

Для урахування реакції між пластиною і додатковою в'язкопружною опорою коректно використати вираз виду

$$R_i(t) = c_i w_i(t) + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}. \quad (14)$$

Тоді вираз для прогину в точці прикладення реакції на в'язкопружну опору можна записати як

$$w_i(t) = \int_0^t K_{ei}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (15)$$

де $K_{ei}(t) = \frac{1}{\kappa_i} \cdot e^{-\frac{c_i}{\kappa_i} t}$ – скінченно-різницеве ядро Коші, що враховує пружні та

в'язкі характеристики додаткової опори в i -й точці.

У самому загальному випадку можна навести зосереджений об'єкт, що моделюється, у вигляді комбінації впливу маси, жорсткості та демпфірування (рис. 7 е).

Вираз для реакції між пластиною і додатковою в'язкопружною опорою з урахуванням інерційних ефектів матиме вигляд

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} + c_i w_i(t). \quad (16)$$

Після виконання елементарних перетворень одержимо такий вираз для прогину в точці, у якій прикладена реакція на в'язкопружну опору з урахуванням її маси:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (17)$$

де $K_{fi}(t) = \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i}{2 \cdot m_i} t} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t)$ – скінченно-різницеве ядро інтегралу типу

згортки, що враховує пружні та в'язкі характеристики додаткової опори в i -й точці, а $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – власна частота, що відповідає i -й додатковій в'язкопружній опорі з урахуванням її маси.

Якщо розглянути динамічну контактну задачу (пряму чи обернену), яка пов'язана з взаємодією пластини і ребра жорсткості у вигляді балки (наприклад, моделі типу Тимошенка), то можна піти таким шляхом:

- ввести N штук фіктивних сил, що діють як на балку, так і на пластину (ціле число N підбирається надалі в процесі чисельного експерименту);
- побудувати систему N інтегральних рівнянь, що впливають із умов збігу прогинів балки і пластини в точках прикладення згаданих фіктивних сил;
- провести розв'язання цієї системи інтегральних рівнянь згідно з описаним раніше підходом.

Знання законів зміни за часом фіктивних сил дасть змогу знайти параметри НДС пластини та ребра.

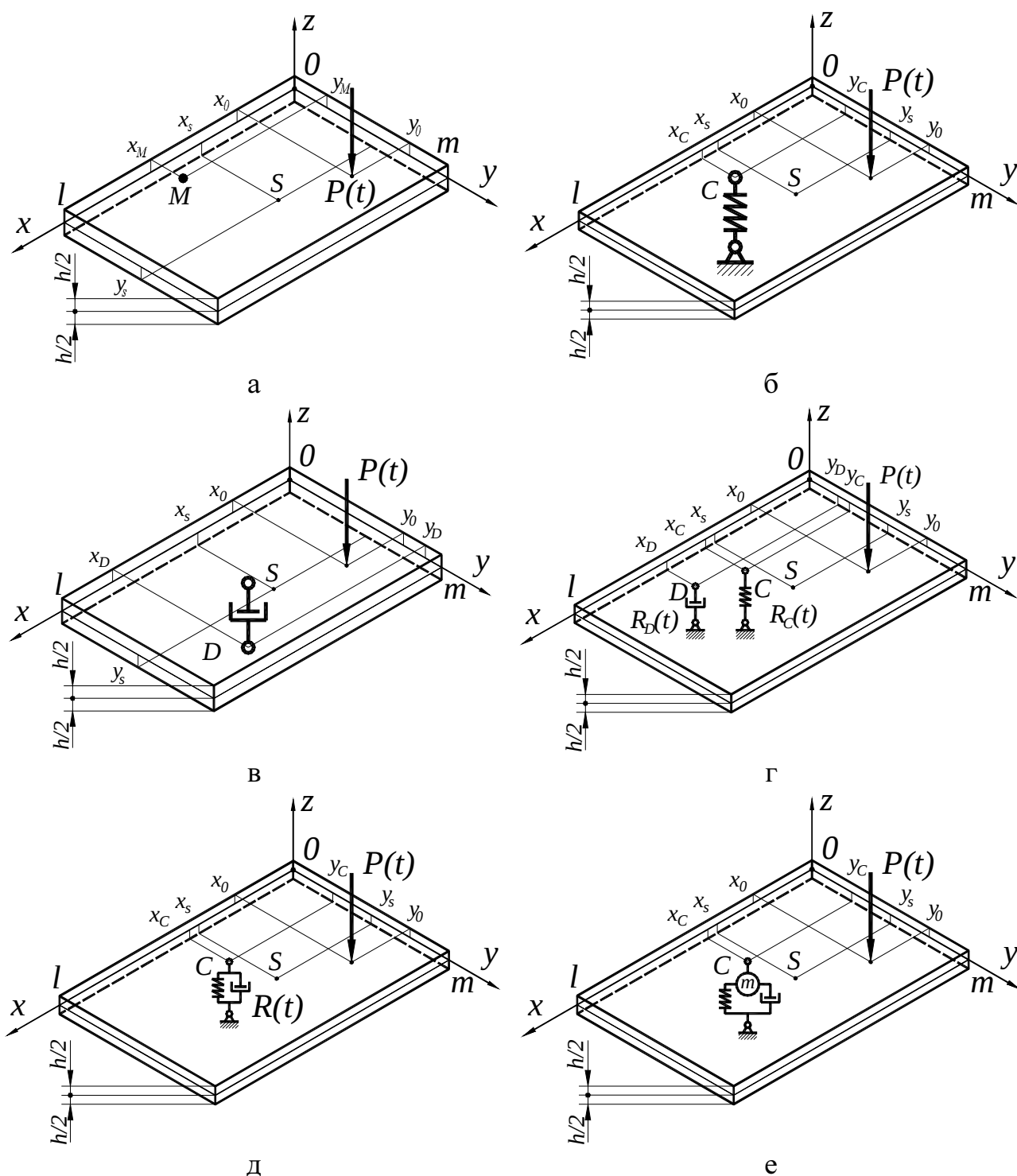


Рисунок 7 – Особливості, зосереджені в точці пластини або локалізовані на малих областях

Відповідно до схем, які зображені на рис. 7, а – 7, е в четвертому розділі дисертації розглянуто такі задачі:

- нестационарні коливання пластини з приєднаною зосередженою масою;
- нестационарні коливання прямокутної пластини, що має додаткову лінійно-пружну опору;
- моделювання нестационарного деформування прямокутної пластини з погашувачем коливань;

– нестационарні коливання пластини з додатковою в'язкопружною опорою.

Детально проаналізовано вплив кожної окремої особливості на процес нестационарного деформування прямокутної пластини.

Крім того, досліджено розподіл в'язкої та пружної складових у реакції додаткової в'язкопружної опори, що контактує з пластиною.

Розрахунки виконувались при таких значеннях параметрів: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$. Координати точки прикладення збурювального навантаження мають значення: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$; координати точки кріплення додаткової в'язкопружної опори до пластини: $x_c = 0.2 \text{ м}$, $y_c = 0.2 \text{ м}$. Значення коефіцієнта жорсткості додаткової опори – $c = 10^8 \text{ Н/м}$, а коефіцієнт лінійно-в'язкого демпфірування – $\kappa = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є – 50×50 при числових розрахунках.

При обчисленнях у рамках прямої задачі припускалося, що точки контакту пластини з «в'язкоюю» та «пружною» додатковими опорами збігаються (окремий випадок: $x_C = x_D = x_{CD} = 0.2 \text{ м}$, $y_C = y_D = y_{CD} = 0.2 \text{ м}$), оскільки задача розв'язувалася в загальній постановці, коли всі точки не збігаються, а їх координати не залежать одна від одної.

На рис. 8 і 9 показані результати обчислень для прямокутної пластини з в'язкопружною опорою згідно з рис. 7, ε і δ – два варіанти моделі.

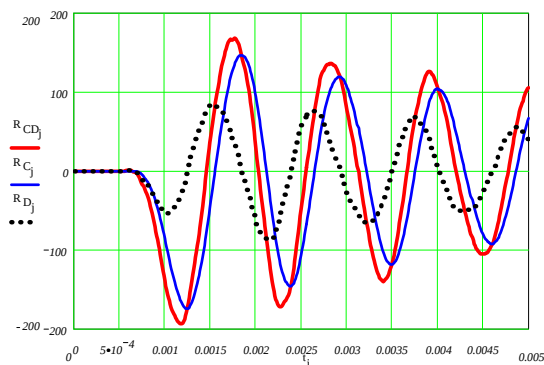


Рисунок 8 – Складові реакції в'язкопружної опори

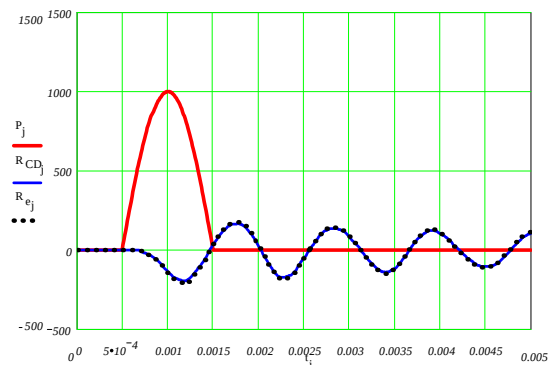


Рисунок 9 – Реакції в'язкопружної опори, знайдені за двома різними варіантами

Визначені в результаті розв'язання системи інтегральних рівнянь складові реакції між пластиною та додатковою в'язкопружною опорою графічно наведені на рис. 8: перша крива відповідає сумарній реакції в'язкопружної опори $R_{CD}(t) = R_C(t) + R_D(t)$; друга крива – пружна складова $R_C(t)$; третя крива – в'язка складова $R_D(t)$.

На рис. 9 показано зміну в часі навантаження $P(t)$, що збурює пластину (півхвиля синусоїди), та дві криві, що відповідають реакції в'язкопружної опори $R_{CD}(t)$ і $R_e(t)$. Вкажемо, що $R_{CD}(t)$, тобто сумарна реакція, показана суцільною лінією, а $R_e(t) = R(t)$ – це реакція саме в'язкопружної опори, на

рис. 8 (відповідна лінія зображена крапками), причому видно, що ці дві криві повністю збігаються. Збіг кривих доводить правильність розв'язання та можливість використання кожного з двох указаних варіантів для визначення реакції в'язкопружної опори.

Описаний підхід дозволяє досліджувати нестационарне деформування пластинчастих елементів конструкцій за наявності зосереджених мас, додаткових опор і ребер жорсткості, вплив яких замінюється невідомими силами (реакціями). Ідентифікація невідомих реакцій виконується на основі розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра або їх систем.

У **п'ятому розділі** розв'язано низку задач, які стосуються управління нестационарними коливаннями механічних систем, що містять пластини. Досліджено можливість управління нестационарними коливаннями механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси (рис. 10), за допомогою додаткового керуючого навантаження, функція зміни в часі якого ідентифікується. Розглянуто також подібну задачу в рамках пасивного віброзахисту – гасіння нестационарних коливань механічної системи, що складається з пластини та зосередженої маси, за допомогою введення в систему пасивного погашувача коливань (рис. 11).

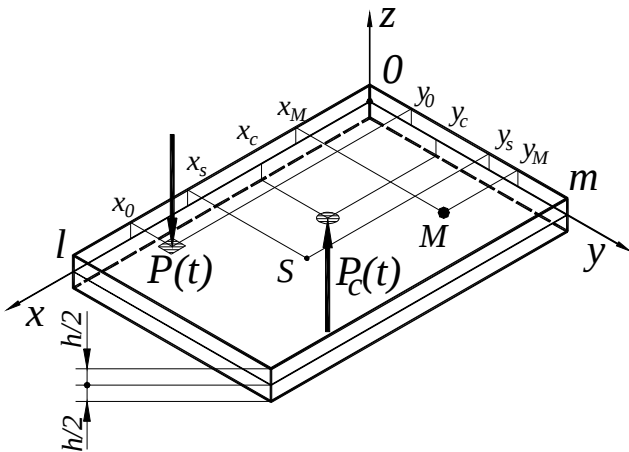


Рисунок 10 – Схема активного віброзахисту пластини

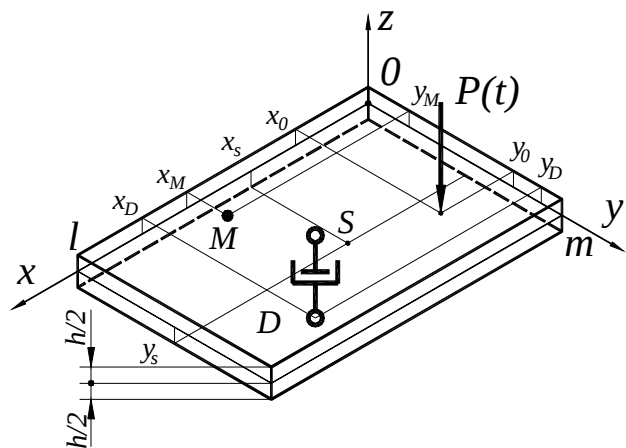


Рисунок 11 – Схема пасивного віброзахисту пластини

Для знаходження переміщення зосередженої маси $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$, можна записати два інтегральних співвідношення, розглядаючи окремо динаміку точки пластини та зосередженої маси, які після виключення $w_M(t)$ будуть мати вигляд такого інтегрального рівняння Вольтерра:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t - \tau) + \frac{t - \tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{P_c}(t - \tau) d\tau. \quad (18)$$

Інтегральне рівняння (18) після дискретизації можна навести в матричному вигляді:

$$\mathbf{A}_{RM} \mathbf{R} = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P} - \mathbf{A}_{PcM} \mathbf{P}_c, \quad (19)$$

де вектор $\mathbf{P}$ – відповідає відомій функції $P(t)$; $\mathbf{P}_c - P_c(t)$; $\mathbf{R}$ – невідомий вектор, що відповідає $R(t)$; матриці $\mathbf{A}_{RM}$, $\mathbf{A}_{PM}$ і $\mathbf{A}_{PSM}$ відповідають відповідним ядрам рівняння (18).

При розв'язанні задач управління метою є визначення керуючого впливу. В рівняння (19) входять дві невідомі функції $P_c(t)$ і $R(t)$. Для їх визначення необхідно в рівнянні (19) перенести невідомий доданок у ліву частину рівняння та доповнити його виразом для критерію управління, в який також увійдуть дві шукані функції $P_c(t)$ і $R(t)$. Таким чином, буде сформовано систему двох інтегральних рівнянь Вольтерра, яка записана для двох точок пластини – точки, в якій розташована приєднана зосереджена маса $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$, і точки, в якій здійснюється управління згідно з необхідним критерієм $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$. У матричному вигляді можна записати:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{PM}\mathbf{P} \\ \mathbf{w}_C - \mathbf{A}_{PS}\mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

де матриці, що відповідають ядрам, які входять в інтеграли для шуканих функцій, позначені $\mathbf{A}_{ij}$, так що індекс $j=1$ відповідає $P_c(t)$; $j=2 - R(t)$; $i=1 -$ точці (x_M, y_M) ; $i=2 - (x_S, y_S)$; вектор $\mathbf{w}_C$ – відповідає необхідному критерію управління $w_C(t)$. Причому для випадку гасіння коливань можна прийняти $w_C(t) = -w_S(t)$, тоді $w_C(t) + w_S(t) = 0$.

У результаті чисельно-аналітичного розв'язання (20) визначаються шукані залежності $R(t)$ і $P_c(t)$. Розв'язання зазначеної системи рівнянь внаслідок некоректності здійснюється з використанням РА Тихонова.

Істотний вплив на «якість» керування має параметр регуляризації α , що міститься в РА Тихонова. У задачах управління цей параметр визначається на основі мінімізації за α функціонала «якості», що відповідає наближенню отриманих значень прогину до необхідних значень критерію:

$$M^\alpha[P_c] = \|w_C - A_P P + A_R R^\alpha + A_{Pc} P_c^\alpha\|. \quad (21)$$

При обчисленнях задачі активного віброзахисту пластини серединна площа пластини була пов'язана із площиною xOy декартової системи координат. Вважалося, що навантаження діє рівномірно і розподілене по прямокутній області зі сторонами Δx і Δy відповідно та центром (x_0, y_0) , а керуюче навантаження рівномірно розподілене по колу радіуса r із центром (x_C, y_C) . При обчисленнях приймалися наступні значення:

– $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $\rho=7890$ кг/м³;

– $h=0.04$ м; $l=0.6$ м; $m=0.4$ м;

– число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є приймалося 50×50 .

На рис. 12 показано схему розташування точок при управлінні коливаннями. Передбачається, що необхідно забезпечити гасіння коливань у точці керування.

Координати точок:

– $x_0=0.4$ м, $y_0=0.1$ м – прикладення навантаження, що збурює коливання;

- $x_c = 0.2$ м, $y_c = 0.15$ м – прикладення керуючого навантаження;
- $x = 0.3$ м, $y = 0.2$ м – знаходження точки, в якій здійснюється керування;
- $x = 0.15$ м, $y = 0.3$ м – приєднання зосередженої маси.

На рис. 13 показані графіки зміни функціоналів якості (21) – крива 1 і сумарного навантаження – крива 2 залежно від параметра регуляризації α . Вкажемо, що значення параметра регуляризації для зручності відкладені в логарифмічній шкалі.

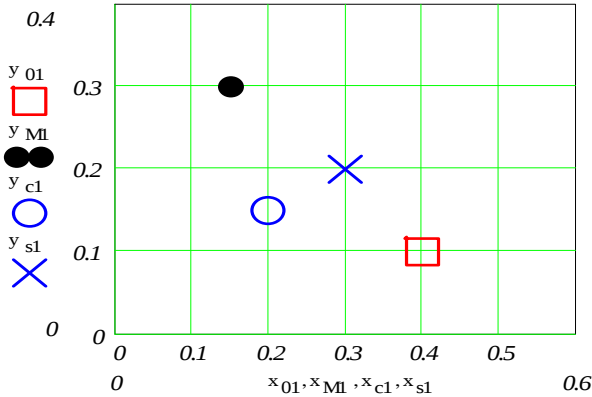


Рисунок 12 – Схема активного управління пластини з масою

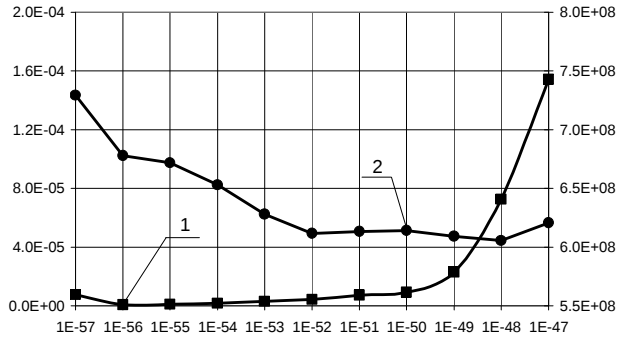


Рисунок 13 – До вибору параметра регуляризації

На рис. 13 можна побачити, що параметр регуляризації бажано брати менше $\alpha = 10^{-49}$, далі функціонал змінюється незначно, хоча краща «якість» досягається при $\alpha = 10^{-56}$. У разі практичної реалізації активного управління коливаннями доцільно при виборі параметра регуляризації не тільки враховувати функціонал якості, але і мінімізувати «сумарний вплив». З огляду на криву функціонала сумарного навантаження менші значення керуючого впливу $P_c(t)$ відповідають значенням параметра регуляризації $10^{-50} \leq \alpha \leq 10^{-52}$, а оптимальним значенням з урахуванням двох суперечливих критеріїв буде $\alpha = 10^{-52}$.

На рис. 14 показані зміни навантажень $P(t)$, $P_c(t)$ і $R(t)$:

- навантаження, що $P(t)$ збурює пластину, змінюється у вигляді напівхвилі синусоїди з тривалістю імпульсу $2 \cdot 10^{-3}$ с – крива 1;
- визначені в результаті розв'язання системи (20) значення керуючого впливу $P_c(t)$ – крива 2 (амплітуди перевищують вплив, що збурює коливання) і, реакції $R(t)$ маси – крива 3 (амплітуди за величиною значно менші, ніж $P(t)$ та $P_c(t)$). На рис. 14 показані результати отримані при значеннях $\alpha = 10^{-52}$.

Вкажемо, що для зручності аналізу результатів величини навантажень, що збурюють та керують коливаннями пластин, а також реакція зосередженої маси, наведені в ньютонх (рівномірно розподілені навантаження, вимірювані в паскалях, були помножені на відповідні площі контакту, які припускалися незмінними).

На рис. 15 показані три криві зміни переміщення в точці керування:

- 1) необхідне переміщення в точці керування – цільова функція для управління (нульові переміщення);

2) переміщення в точці керування при впливі тільки збурювального навантаження;

3) результат управління при дії збурювального навантаження і керуючого впливу (переміщення в точці керування практично зникли – криві 1 і 3 збігаються).

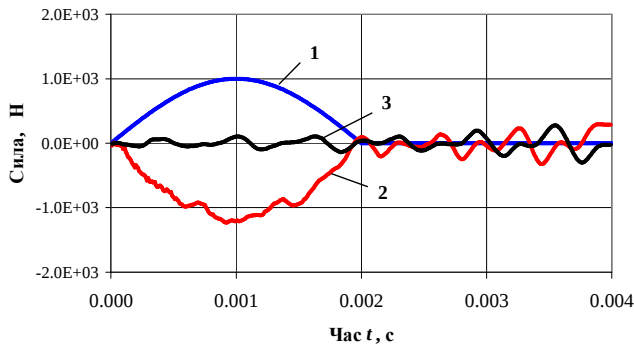


Рисунок 14 – Збурювальне навантаження, керуючий вплив та реакція зосередженої маси

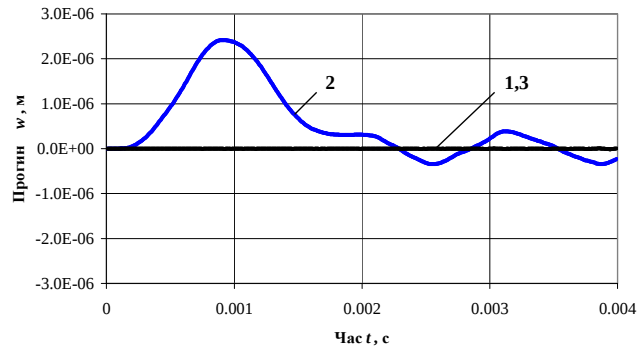


Рисунок 15 – Результати управління при $\alpha = 10^{-52}$

На основі запропонованого в роботі комплексу методів розв'язано задачу управління поперечними коливаннями на невеликій області пластини – два варіанти – рис. 16, а (загальний випадок) і рис. 16, б (особливий випадок, коли точки прикладення керуючих навантажень збігаються з вершинами прямокутника, що обмежує область управління).

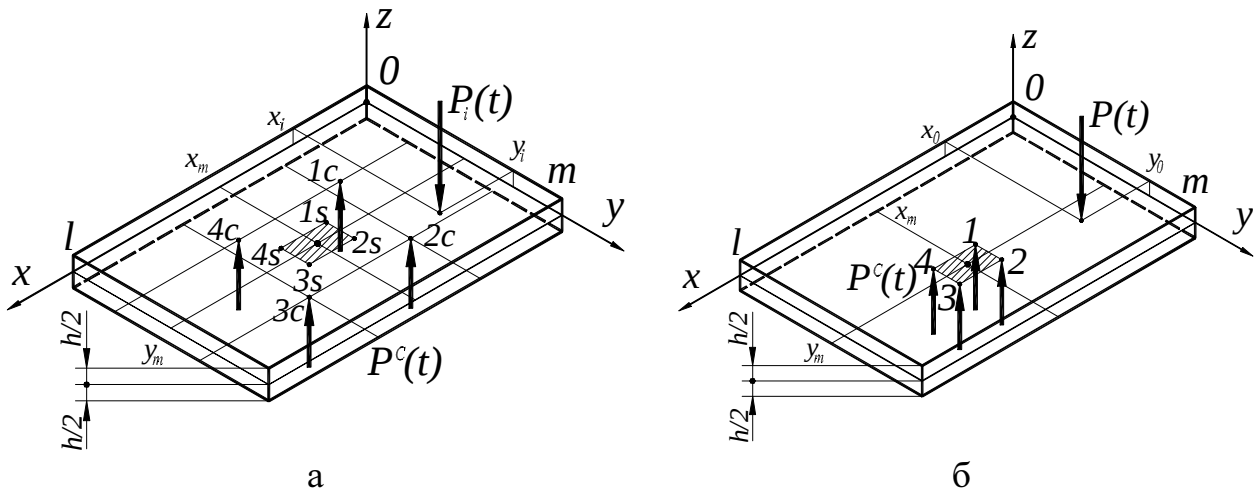


Рисунок 16 – Схема активного управління на малій площадці пластини

Обчислення виконувалися при таких значеннях параметрів: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu = 0.3$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$.

Координати точок прикладення двох незалежних поперечних навантажень, що збурюють коливання, (x_{01}, y_{01}) та (x_{02}, y_{02}) :

$$x_{01} = 0.1 \text{ м}, y_{01} = 0.25 \text{ м}, x_{02} = 0.5 \text{ м}, y_{02} = 0.15 \text{ м}.$$

Координати прикладення системи керуючих навантажень (для першого випадку – рис. 16, а):

$x_{c1} = 0.2$ м, $y_{c1} = 0.1$ м, $x_{c2} = 0.2$ м, $y_{c2} = 0.3$ м;

$x_{c3} = 0.4$ м, $y_{c3} = 0.3$ м, $x_{c4} = 0.4$ м, $y_{c4} = 0.1$ м.

Координати вершин прямокутника, що обмежує область управління:

$x_{s1} = 0.29$ м, $y_{s1} = 0.19$ м, $x_{s2} = 0.29$ м, $y_{s2} = 0.21$ м;

$x_{s3} = 0.31$ м, $y_{s3} = 0.21$ м, $x_{s4} = 0.31$ м, $y_{s4} = 0.19$ м.

Координати центра пластини: $x_m = 0.3$ м, $y_m = 0.2$ м.

На рис. 17 і 18 показані результати числових розрахунків щодо гасіння коливань на невеликій прямокутній площадці для другого варіанту (особливий випадок), причому на рис. 17 показані збудовальні та керуючі навантаження, а на рис. 18 – прогини без управління та у випадку активного гасіння коливань. Товстою кривою на цьому графіку показані прогини в центрі пластини.

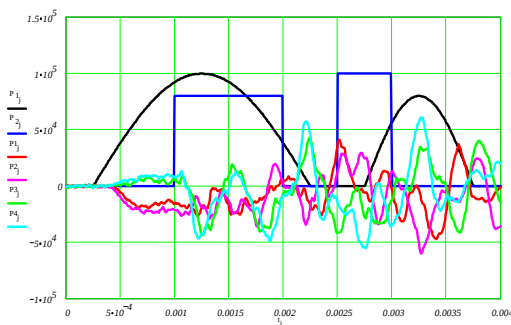


Рисунок 17 – Вид збудовальних та керуючих навантажень

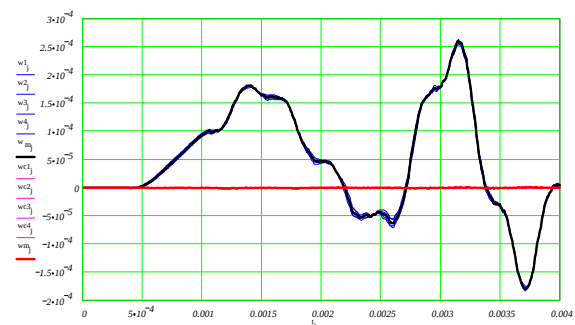


Рисунок 18 – Результати гасіння на невеликій області пластини

З аналізу результатів для двох варіантів гасіння коливань на невеликій площадці можна зробити такі висновки:

– у загальному випадку розташування точок прикладення керуючих навантажень (перший варіант – рис. 16, а) хоч і вдається значно знизити амплітуди прогинів, не вдається повністю погасити коливання на площадці;

– чим менші відстані від точок прикладення керуючих навантажень до області управління, тим кращі результати (більш стійкі розв'язання систем інтегральних рівнянь), а для особливого випадку результати є найкращими – рис. 18.

У п'ятому розділі було розглянуто також задачу про активне гасіння нестационарних коливань по всій поверхні прямокутної пластини (рис. 19 – 20). Опис рис. 19 і 20 аналогічний наведеним вище.

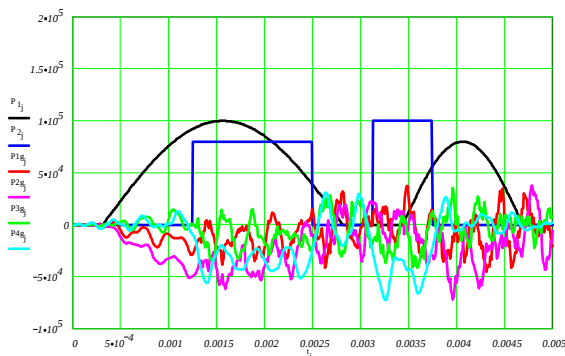


Рисунок 19 – Вид збудовальних та керуючих навантажень

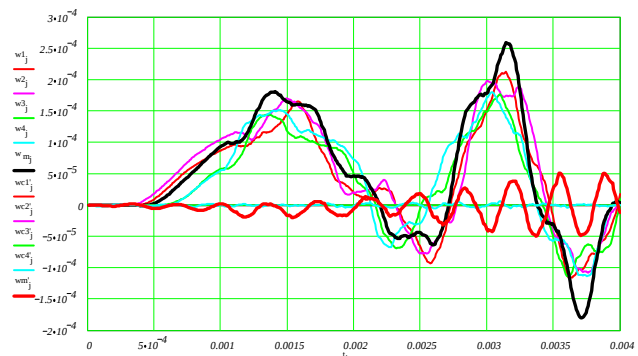


Рисунок 20 – Результати гасіння по всій поверхні пластини

На рис. 21 зображено схему розташування керуючих навантажень по всій поверхні пластини.

На рис. 22 показано розподіл прогину поверхні пластини в момент часу $t = 0.0014$ с, коли прикладені тільки навантаження, що збуджують пластину.

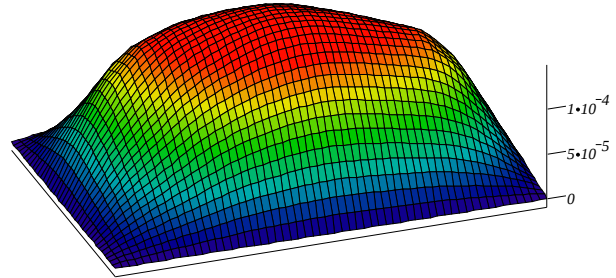
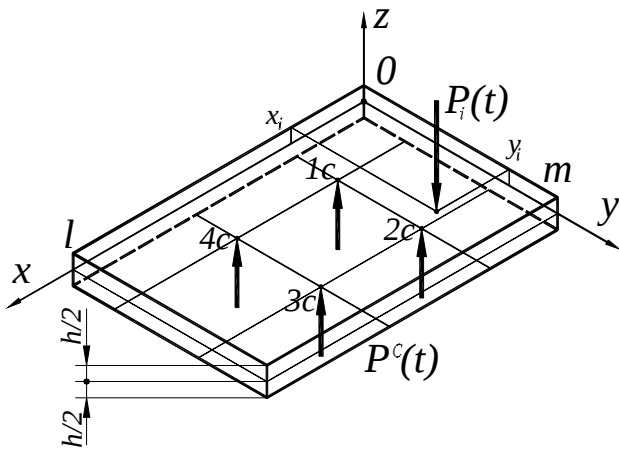


Рисунок 21 – Схема активного гасіння коливань по всій пластині

Рисунок 22 – Розподіл прогину по поверхні пластини без управління

На рис. 23 і 24 показано розподіл прогину по поверхні пластини в момент часу $t = 0.0014$ с для випадків, коли здійснюється гасіння на малій площадці пластини (рис. 23) та при гасінні коливань по всій пластині (рис. 24).

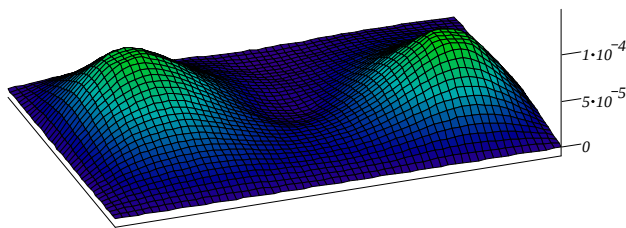


Рисунок 23 – Розподіл прогину по поверхні пластини ($t = 0.0014$ с) при управлінні на малій площадці пластини

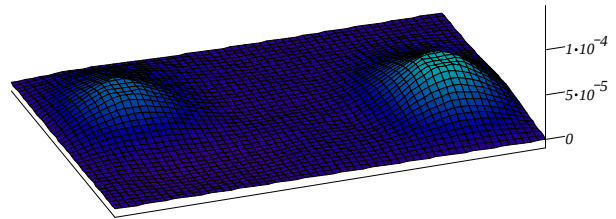


Рисунок 24 – Розподіл прогину по поверхні пластини ($t = 0.0014$ с) при гасінні коливань по всій пластині

Відзначимо, що для наведеного розрахунку (рис. 24) величина максимального прогину зменшується більше ніж у 5 разів, а величина сумарного прогину пластини зменшується більше ніж у 10 разів.

У розглянутій задачі для того, щоб значно краще забезпечити виконання критеріїв управління, число керуючих сил має бути великим. Тому виникає проблема вибору оптимальних параметрів у задачі з великою кількістю критеріїв (у тому числі суперечливих), а отже, для істотного поліпшення системи керування необхідно використати спеціальні математичні підходи*.

У висновку до розділу вкажемо, що у випадку розроблення систем гасіння нестационарних коливань для відповідальних конструкцій і споруд слід сполучати активні та пасивні схеми віброзахисту. Тоді значно поліпшаться результати гасіння коливань, тому що активні елементи будуть ефективно

* Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учебное пособие для вузов. / Издание второе, переработанное и дополненное. М.:Дрофа, 2006. 175 с.

знижувати перші швидкі сплески, а пасивні, хоча мають деяке запізнення, завдяки накопичувальному ефекту будуть добре згладжувати коливання на заключних етапах управління коливальним процесом.

У **шостому розділі** вказані два підходи, що дозволяють на базі «пружних» розв'язків, отриманих у рамках теорії пружності, для деформівних елементів конструкції враховувати дисипативні властивості в матеріалі. Зокрема є можливість моделювати внутрішнє в'язке та гістерезисне тертя, що описується моделями Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара.

Перший підхід базується на використанні диференціальних операторів і зводиться до модифікації аналітичних співвідношень для відповідних ядер інтегралів і частот, які можуть бути знайдені з розв'язку характеристичних рівнянь, записаних для різних моделей тертя.

При другому підході використовуються згладжувальні лінійні інтегральні оператори, і може бути застосований для будь-яких розв'язків у рамках теорії пружності, які подані у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки з ядрами Коші. Згладжувальні інтегральні оператори дозволяють розраховувати ці ядра для змінених коефіцієнтів тертя, а також відновлювати пружну складову розв'язку, збурену внутрішнім тертям. Досліджено алгебраїчні властивості цих операторів. У результаті того, що при розрахунках інтегралів виконується дискретизація, можна скористатися запропонованою в роботі модифікацією ядер відповідно до теореми Ефроса*, причому ця модифікація здійснюється шляхом множення вихідних ядер на спеціальним чином отримані матриці.

Урахування дисипації зводиться до коректування інтегрального співвідношення, в якому використовується інше інтегральне ядро $K_{\eta}(t)$, форма якого згладжена тертям:

$$u(t) = \int_0^t K_{\eta}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Різницеве ядро $K_{\eta}(t)$ може бути отримано трьома основними способами:

1) як дослідження реакції системи на удар, зареєстрованої в результаті фізичного моделювання динаміки об'єкта (тобто у ході спеціально поставленого та проведеного експерименту);

2) при розв'язанні рівнянь, що описують аналогічний перехідний процес із урахуванням тертя;

3) шляхом відповідної модифікації, що вигладжує ядра $K_0(t)$, отримані при математичному моделюванні пружних деформацій без урахування тертя.

Оскільки перший спосіб належить до експериментальних досліджень, які до того ж є досить дорогими, розглянемо детальніше другий і третій способи.

Для випадку в'язкого внутрішнього тертя з урахуванням відомої теореми Ефроса про оригінал складного зображення ядра $K_0(t)$ і $K_{\eta}(t)$ зв'язані співвідношенням

* Интегральные преобразования и операционное исчисление /В. А. Диткин, А. П. Прудников / Государственное издательство физико-математической литературы. М. – 1961, 524 с.

$$K_{\eta}(t) = \int_0^{\infty} \Psi_{\eta}(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (23)$$

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right), \quad (24)$$

причому невід'ємне число τ відіграє роль параметра.

З огляду на вигляд (24) і властивості кривої Гаусса співвідношення (23) можна досить точно обчислювати за наближеною формулою

$$K_{\eta}(t) = \int_{t-3\cdot\sigma}^{t+3\cdot\sigma} \Psi_{\eta}(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (25)$$

де σ – дисперсія, $\sigma^2 = \eta t$.

Для випадку гістерезисного внутрішнього тертя за аналогією з (23) можна записати:

$$K_{\gamma}(t) = \int_0^{\infty} \Psi_{\gamma}(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau; \quad (26)$$

$$\Psi_{\gamma}(t, \tau) \approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\arctg \frac{\tau-t}{0.5\gamma\omega_0 t} \right] \frac{1}{^2+1} = \frac{2}{\pi\gamma\omega_0 t} \cdot \frac{1}{[2(\tau-t)/\gamma\omega_0 t]^2 + 1}. \quad (27)$$

Графік цієї функції (27) (його називають кривою Коші) наведено на рис. 25 (суцільна крива), там же, для порівняння, показана крива Гаусса (крапками), що є коригувальним ядром (24) для в'язкого тертя.

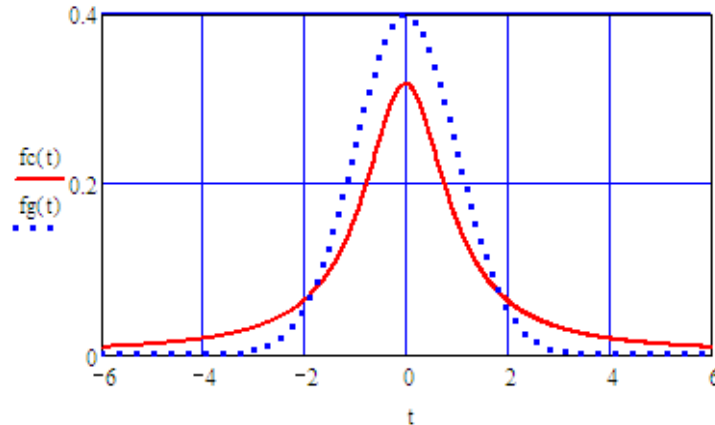


Рисунок 25 – Згладжувальні криві Коші і Гаусса при однаковому декременті загасання

Урахування тертя зводиться до заміни «пружного» різницевого ядра Коші $K_0(t)$ на ядро $K_{\eta}(t)$ у випадку внутрішнього в'язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) або на ядро $K_{\gamma}(t)$ у випадку внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара).

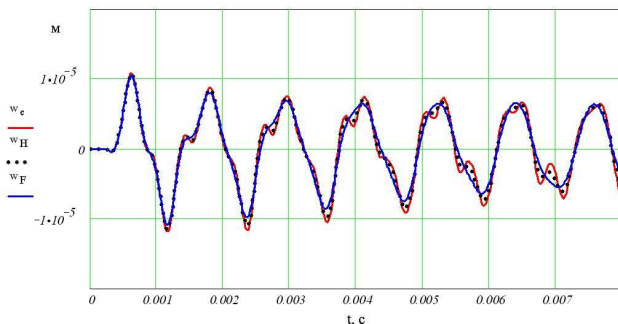
У шостому розділі дисертації наведено приклади розрахунків для поперечних коливань пластини у в'язкопружній постановці, а саме прогинів і деформацій пружної та в'язкопружної пластини. Отримано вирази для ядер інтегралів згортки для «пружного» розв'язку та з наявністю дисипації

(урахуванням внутрішнього в'язкого та гістерезисного тертя в матеріалі пластини).

Розрахунки виконувались при таких значеннях параметрів: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; товщина пластини $h = 0.04 \text{ м}$; довжина $l = 0.6 \text{ м}$, ширина $m = 0.4 \text{ м}$; координати точки прикладення збурювального навантаження мають значення $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.3 \text{ м}$; координати точки, в якій досліджуються в'язкопружні коливання пластини: $x = 0.25 \text{ м}$, $y = 0.1 \text{ м}$; декремент загасання основної форми коливань – $d_0 = 0.05$.

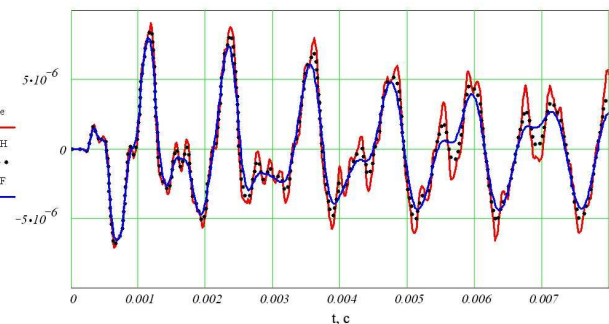
Число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є, що описують розвинення розв'язку за власними формами коливань, у всіх розрахунках приймалося кінцевим, таким, що дорівнює 40×40 ; але, як указувалося раніше, після урахування тертя воно (без зниження точності розрахунку) могло бути скорочене до $80 \dots 100$ гармонік у цілому, тобто 9×9 або 10×10 .

Результати розрахунків прогинів і деформацій пластини з урахуванням різних моделей тертя за допомогою модифікованих ядер показані на рис. 26 і 27: криві 1 (w_e , ϵ_e) – зовнішнє тертя; криві 2 (w_H , ϵ_H) – гістерезисне тертя; криві 3 (w_F , ϵ_F) – в'язке тертя. Збурювальна сила являла собою першу півхвилю синусоїди з амплітудою 10 кН тривалістю 340 мкс ; початок дії імпульсу відповідає часу 136 мкс .



w_e – зовнішнє, w_H – гістерезисне,
 w_F – в'язке тертя

Рисунок 26 – Прогини пластини при коливаннях з урахуванням тертя



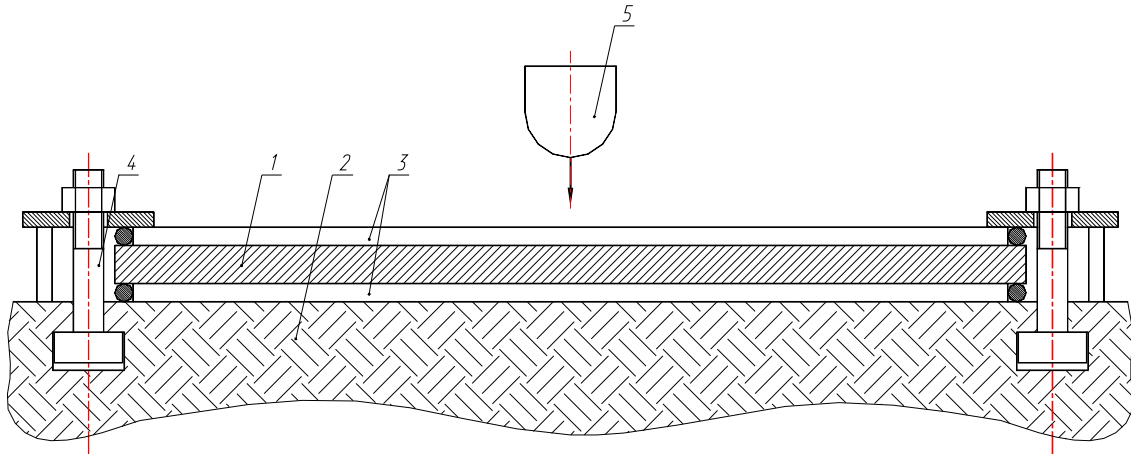
ϵ_e – зовнішнє, ϵ_H – гістерезисне,
 ϵ_F – в'язке тертя

Рисунок 27 – Деформації пластини при коливаннях з урахуванням тертя

З метою обґрунтування теоретичних результатів, що отримані у розділі, було проведено теоретико-експериментальні дослідження щодо ударного навантаження прямокутних пластин середньої товщини. Експериментальні дослідження виконувалися з використанням вимірювального комплексу, до складу якого входили багатоканальна тензометрична станція з підсилювачем, багатоканальний аналого-цифровий перетворювач і комп'ютер. Схему ударного навантаження прямокутної пластини, деформування якої досліджувалося, показано на рис. 28. Вкажемо, що її обпирання найбільше близько відповідало шарнірному.

Для проведення експерименту було використано сталеву леговану пластину, на нижній лицьовій площині якої були наклеєні тензодатчики

(рис. 29, а). Для вимірювання деформації у взаємно перпендикулярних напрямках у кожній з досліджуваних точок було приклеєно по два тензодатчика (рис. 29, б). Удар виконувався по верхній лицьовій площині пластини вільно падаючим тілом (рис. 29, в). При розрахунках приймалися такі параметри: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0.3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0.0243$ м; $l = 0.588$ м; $m = 0.388$ м; $x_0 = 0.294$ м, $y_0 = 0.194$ м – координати точки навантаження; $x_1 = 0.294$ м, $y_1 = 0.194$ м – координати першого датчика (під навантаженням).

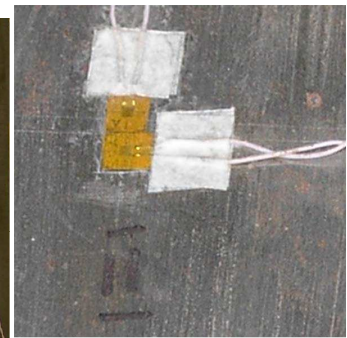


- 1 – пластина з наклеєними тензодатчиками; 2 – основа;
3 – елементи обпирання (круглі циліндричні стрижні);
4 – кріплення контуру обпирання до основи; 5 – ударник

Рисунок 28 – Схема ударного навантаження пластини



а



б



в

Рисунок 29 – Фотографічні зображення

Ідентифікація ударного навантаження на основі експериментальних даних була виконана як у пружній постановці, так і з урахуванням дисипації енергії. За експериментальними даними – зміною деформації $\varepsilon_y(t)$ (рис. 30) – було виконано процедуру ідентифікації зовнішнього навантаження при ударі. Нерівномірно розподілений тиск між ударником і пластиною в області контакту, площа якого теж змінюється під час навантаження, моделювався зосередженим у точці зусиллям, яке вимірюється в ньютонах (рис. 31).

Відзначимо, що при моделюванні деформування пластини з урахуванням внутрішнього тертя в рамках гіпотез Бока–Шліппе–Колара (гістерезисне тертя) результати практично не відрізнялися від отриманих у пружній постановці. Це викликано, напевно, немагнітною природою дисипації.

При урахуванні внутрішнього в'язкого тертя відповідно до моделі Кельвіна–Фойхта ситуація була дещо іншою. Для коефіцієнта в'язкого тертя $\eta = 7.07 \cdot 10^{-6}$ с, що відповідало логарифмічному декременту загасання $d_0 = 0.4\%$, ідентифіковане контактне навантаження при зовнішній подібності (до ідентифікованого без урахування дисипації енергії) стало більш фізичним.

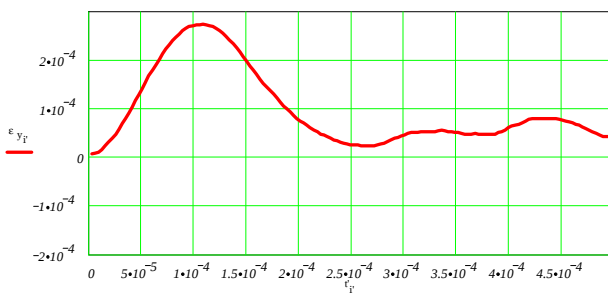


Рисунок 30 – Вихідні дані – зміна деформації за часом у точці пластини

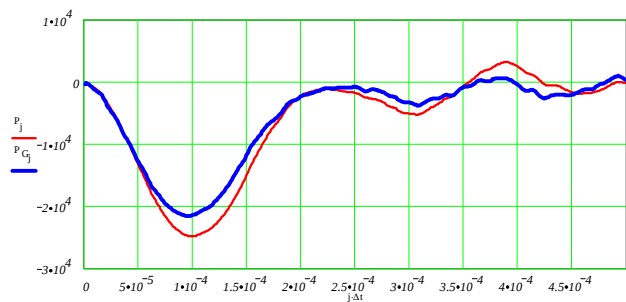


Рисунок 31 – Ідентифіковане контактне навантаження з урахуванням внутрішнього тертя та без урахування

З аналізу кривих, наведених на рис. 31, можна зробити висновки, що ідентифіковані контактні навантаження на базі різних моделей деформування (пружного та в'язко-пружного) добре узгоджуються між собою, а також, що урахування внутрішнього в'язкого тертя (згідно моделі Кельвіна–Фойхта) дозволяє отримувати більш реалістичні результати розрахунків. Без урахування тертя можна помітити, що ідентифікована крива контактного навантаження змінює знак, що неможливо (пов'язано, певно, накопленими похибками розрахунків). При використанні більш фізичної моделі з урахуванням дисипації енергії (внутрішнього в'язкого тертя) ця невідповідність зникає.

Слід зазначити, що використання запропонованих інтегральних операторів шляхом модифікації ядер інтегральних рівнянь Вольтерра (отриманих в рамках теорії пружності) значно покращує стійкість розрахунків саме завдяки ефекту згладжування. Крім того для розв'язків, які одержані у вигляді розвинень у ряди, завдяки урахуванню внутрішнього тертя поліпшується їх розрахункова збіжність.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі в загальному вигляді розв'язано обернену задачу про одночасну дію на пластину скінченної системи нестационарних довільних навантажень.

При цьому:

- подальшого розвитку набула теорія розв'язання обернених нестационарних задач механіки деформівного твердого тіла;
- розроблено методику та обчислювальні алгоритми для дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв'язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса;
- набула подальшого розвитку методика вибору оптимальних значень параметра регуляризації Тихонова за допомогою додаткової апріорної інформації про навантаження, які ідентифікуються (додаткових умов механіки деформування), а також теорії оптимізації при суперечливих критеріях;
- розв'язано обернену задачу про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестационарних навантажень, що діють одночасно;
- розроблено, побудовано і вперше реалізовано стійкі до збурювання вихідних даних обчислювальні алгоритми з відновлення складних імпульсних навантажень, що діють на прямокутні пластини типу С. П. Тимошенка;
- показана можливість урахування двосторонньої пружної інерційної основи на базі модифікації скінченно-різницевого ядра Коші та власних кругових частот;
- розв'язано прямі та обернені задачі моделювання нестационарних коливань прямокутних пластин за наявності зосереджених мас, додаткових зосереджених опор та погашувачів коливань;
- виконано декомпозицію реакції в'язкопружної опори на пружну та в'язку складові, що є особливо важливим у задачах оптимального проектування додаткових в'язкопружних опор;
- проведено аналіз впливу зосереджених особливостей на процес коливань, що може бути використано для зменшення амплітуд коливань відповідальних конструкцій із пластинчастими елементами;
- побудоване розв'язання некоректної задачі про управління нестационарними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей;
- показано специфіку роботи схем пасивного і активного віброзахисту пластини при нестационарних коливаннях та зазначено, що для відповідальних конструкцій необхідно комбінувати пасивні та активні елементи віброзахисту;
- побудовано розв'язання задачі управління коливаннями на невеликій області відносно величини площі пластини;
- показано можливість значного зменшення амплітуд коливань по всій поверхні пластини скінченною системою керуючих навантажень (розглянуто систему чотирьох керуючих сил) та відносна стійкість розроблених програм і алгоритмів ідентифікації керуючих навантажень;

– розроблено підхід, який дає можливість моделювати дисипативні властивості матеріалу на базі розв’язань у рамках теорії пружності для деформівних елементів конструкції з використанням диференціальних та інтегральних операторів;

– вперше розроблено згладжувальні лінійні інтегральні оператори для випадку внутрішнього в’язкого тертя (модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара) та одержано спеціальні матриці для модифікації ядер при числових розрахунках;

– проведено експериментальне дослідження ударного навантаження прямокутної ізотропної пластини середньої товщини з метою обґрунтування теоретичних результатів;

– показано поліпшення результатів ідентифікації нестационарних навантажень на основі експериментальних даних при урахуванні дисипації енергії (при переході від пружних до в’язкопружних моделей);

– створено комп’ютерні програми для числових розрахунків.

Достовірність отриманих результатів підтверджується:

– аналізом математичної стійкості та збіжності отриманих розв’язків;

– зіставленням результатів розв’язання прямих і обернених задач;

– зіставленням із результатами, отриманими при розв’язанні іншими методами або зіставленням із результатами інших авторів;

– зіставленням із результатами теоретико-експериментальних досліджень.

Отримано три довідки про застосування матеріалів дисертаційної роботи від таких установ:

– кафедри вишукувань та проектування автомобільних доріг і аеродромів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при виконанні науково-дослідної роботи за договором № 66/37-50-12 „Переробити, доповнити та привести у відповідність до сучасних нормативних вимог альбом типових конструкцій дорожніх одягів нежорсткого типу під розрахункові навантаження А1, А2, Б”.

– ТОВ «Океан-судоремонт» при виконанні досліджень ударних навантажень елементів корпусу судів під час швартування.

– Корпорації «Співдружність» при проектуванні пластинчастих елементів броньованих кабін та камер для розбирання і утилізації вибухонебезпечних виробів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Монография. Харьков: Изд-во «Лидер», 2018. 214 с.
2. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. 212 с.
3. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 41 (2004) 4919-4926.
4. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2004. №31. С. 176-179.
5. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек. Вісник Харківського національного університету Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 661., 2005, С. 69-82.
6. Воропай А. В., Гришакин В. Т., Янютин Е. Г. Некорректные обратные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении. Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №775, 2007. Харьков. С. 73-80.
7. Воропай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. механика. 2007. 43. №7. С. 90-97.
A. V. Voropai, E. G. Yanyutin. Identification of several impulsive loads on a plate // *International Applied Mechanics*. July 2007, Volume 43, Issue 7, pp 780–785. Translated from *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 43, No. 7, pp. 90–97, July 2007.
8. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. №38 С. 174-180.
9. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. №47. С. 42-48.
10. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения элементов конструкции в виде пластин тензометрическим методом // Пробл. машиностроения. 2009. 12, №2. С. 47-55.
11. Воропай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2010 / Выпуск 49. С. 84-87.

12. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Воропай О. В., Поваляєв С. І. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестационарного навантаження. // Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 27. 2010. С. 153-156.
13. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2010. №69. С. 46-52.
14. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011 / Вып. 53. С. 87-90.
15. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2011. №52. С. 42-48.
16. Воропай О. В., Поваляєв С. І., Гришакін В. Т. Дослідження різних моделей дорожньої конструкції за нестационарного навантаження // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. 2011. Выпуск 55. С. 25-31.
17. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ "ХПИ", 2012. №55. С. 30-37.
18. Воропай А. В., Шупиков А. Н. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2013. № 63 (1036). С. 29-34.
19. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. № 55 (1164). С. 43-46.
20. Воропай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП», 2015. № 41 (1150). С. 17–22. Библиогр.: 7 назв. ISSN 2079-0023.
21. Воропай А. В. Дзюбенко А. А., Егоров П. А. Измерительный комплекс для экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций при ударном нагружении // [Електронний ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2015. №2(8). С. 182–187. ISSN 2226-9266 – Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE15_2/2015-8-5.2.pdf.

22. Батракова А. Г., Ряпухин В. Н. , Воропай А. В. , Дорожко Е. В., Егоров П. А. Исследование деформирования образца из асфальтобетона на раскол с использованием тензометрической аппаратуры // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. 2015. Выпуск 71. С. 45-49.
23. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2015. № 57 (1166). С. 25-29.
24. Малахов Е. С., Воропай А. В. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП», 2016. №6 (1178). С. 56-62.
25. Воропай А. В. Дзюбенко А. А., Егоров П. А., Малахов Е. С. Экспериментальное измерение деформаций балок из различных материалов при ударном нагружении // [Электронный ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. Х.: ХНАДУ, 2016. №1(9). С. 128-138. ISSN 2226-9266. Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE16_1/5.5.pdf.
26. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП», 2016. №16 (1188). С. 16-22. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631.
27. Воропай А. В., Малахов Е. С. Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. Х.: НТУ «ХПИ». 2016. № 26 (1198). С. 45-49.
28. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП», 2017. № 6 (1228). С. 29 – 44. Бібліогр.: 11 назв. ISSN 2222-0631.
29. Воропай А. В. Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагрузжений // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХП», 2017. № 30 (1252). С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. ISSN 2222-0631.
30. Воропай А. В. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХП», 2018. № 3 (1297). С. 19-24. Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2222-0631.
31. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном

деформировании элементов конструкций // Механіка та машинобудування, Харків: НТУ «ХПІ», 2018. №1. С. 3-22.

32. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Идентификация нестационарных нагрузжений воздействующих на пластины и оболочки / Материалы международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 мая 2005 г., Киев) / К.: КНУ им. Т. Шевченко. 2005. С. 360.

33. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Моделирование дорожных одежд с учетом движущихся многоосных автомобилей. XI научно-техническая конференция с международно участие "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгария. Варна. Сборник доклады 2005. С. 402-408.

34. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении обратных задач динамической теории пластин и оболочек. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харьков-Херсон, 2005, С. 63-66.

35. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Международная научная конференция "Интегральные уравнения и их применения" 29 июня – 4 июля 2005 года. Одесса, С. 167.

36. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное снижение амплитуд нестационарных колебаний на прямоугольной области пластины. //VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т.– Симферополь: ДиАйПи. 2006. С. 200.

37. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для упругодеформируемых стержней, пластин и оболочек. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». ИПМаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины. Тезисы докладов. 23-26 октября 2006 года. Харьков, С. 104.

38. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом особенностей нагружения. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007) Харьков-Херсон, 2007, С. 350-353.

39. Воропай А. В., Кучерова Н. И. Нестационарные задачи для прямоугольных пластин и пластин-полос при наличии сосредоточенных сил и масс. // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008 г. / Таврический национальный ун-т. Симферополь. 2008. С. 46.

40. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Гришакин В. Т., Гнатенко Г. А. Обратные нестационарные задачи для упруго-деформируемых балок и пластин. // Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» (Минск, 30-31 октября 2008 г.) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. Минск. 2008. С. 152-158.

41. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями пластины, несущей сосредоточенную массу // Тринадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 року, Київ. Матеріали конференції. Т. 1. К.: НТУУ. 2010. С. 98.
42. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с гасителем / Материалы XV международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 мая 2011 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2011. С. 253.
43. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с установленным на ней амортизатором / Воропай А. В. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 50-летию механико-математического факультета ХНУ им. В. Н. Каразина (17-22 апреля 2011 г.). Харьков, 2011. С. 31-32.
44. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с дополнительной упругой подпоркой / Материалы XVI международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 мая 2013 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. 2013. С. 264.
45. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой подпоркой. Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики: материалы Международной научно-практической Интернет-конференции (Харьков 10-25 мая 2013 г.) / Ред. совет: Тропина А. А. и др. Х.: Экограф, 2013. С. 24-28.
46. Воропай А. В. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины с дополнительной вязко-упругой опорой// «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013», г. Харьков 29 сентября – 4 октября 2013 г. / под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича.– Х.: Цифрова друкарня №1, 2013. С. 35-36.
47. Воропай А. В. Использование интегральных уравнений в задачах моделирования элементов виброзащиты. Сборник тезисов Международной научно-практической конференции по случаю Дня автомобилиста и дорожника: "Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля", посвящённой 90-летию проф. Говорущенко Н. Я. 15-16 октября 2014 г. С. 186–187.
48. Воропай А. В. Моделирование воздействия на пластину дополнительных вязко-упругих опор // Наукові праці міжнародної науково-практичної та науково-методичної конференції, присвяченої 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з Дня народження професора А. Б. Гредескула "Новітні технології в автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців" 20-21 жовтня 2016 р. Х.: Видавництво «Форт», 2016. С. 234-235.

49. Воропай А. В., Малахов Е. С. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом диссипации // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2017. 214 С. (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка). С. 113.

50. Воропай А. В., Егоров П. А., Малахов Е. С. Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017). Харьков, 2017, С. 80-83.

51. Воропай А. В., Малахов Е. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки // Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19–20 жовтня 2017 р. Х.: Видавництво «ХНАДУ», 2017. С. 225-226.

АНОТАЦІЯ

Воропай О. В. Використання інтегральних рівнянь Вольтерра у нестационарних задачах динаміки пластин. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, 2019.

Запропоновано комплекс методів розв'язання некоректних задач нестационарного навантаження пластинчастих елементів конструкції, які можуть бути зведені до розв'язання одного інтегрального рівняння Вольтерра або їх систем. Описано методику дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв'язання блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса.

Сформульовано та вирішено обернену задачу про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестационарних навантажень, що діють одночасно.

Детально досліджено задачу про моделювання нестационарних коливань прямокутних пластин за наявності зосереджених або локалізованих на невеликій області особливостей (мас, додаткових опор та погашувачів коливань). Побудовано розв'язання некоректної задачі про управління нестационарними поперечними коливаннями прямокутної пластини з урахуванням різних зосереджених особливостей.

Розроблено підхід, який дає можливість моделювати дисипативні властивості матеріалу на базі розв'язків теорії пружності для деформівних елементів конструкції з використанням диференціальних і згладжувальних лінійних інтегральних операторів для випадку внутрішнього в'язкого тертя

(модель Кельвіна–Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока–Шліппе–Колара).

Для розглянутих задач у роботі наведено приклади числових розрахунків, які безпосередньо пов'язані з викладеним теоретичним матеріалом та ілюструють ефективність запропонованих підходів. Виконано відповідні дослідження з перевірки вірогідності отриманих результатів.

Ключові слова: інтегральні рівняння Вольтерра, прямокутна пластина типу Тимошенка, нестационарне навантаження, некоректні задачі, обернені задачі, ідентифікація, управління коливаннями, регуляризація, внутрішнє в'язке тертя, гістерезисне тертя, згладжувальні інтегральні оператори.

АННОТАЦІЯ

Воропай А. В. Применение интегральных уравнений Вольтерра в нестационарных задачах динамики пластин. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, г. Днепр, 2019.

Предложен комплекс методов решения некорректных задач нестационарного нагружения пластинчатых элементов конструкции, которые могут быть сведены к решению одного или системы интегральных уравнений Вольтерра. Описана методика дискретизации систем интегральных уравнений Вольтерра, и затем решения блочных систем линейных алгебраических уравнений с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова и обобщенных алгоритмов Крамера или Гаусса.

Сформулирована и решена обратная задача о воздействии на пластину нескольких неизвестных независимых нестационарных нагрузок, действующих одновременно.

Детально исследована задача моделирования нестационарных колебаний прямоугольных пластин при наличии сосредоточенных или локализованных на небольшой области особенностей (масс, дополнительных опор и гасителей колебаний). Построено решение некорректной задачи об управлении нестационарными поперечными колебаниями прямоугольной пластины с учетом различных сосредоточенных особенностей.

Выполнен учёт диссипативных свойств в материале на базе решений, полученных в рамках теории упругости для деформируемых элементов конструкции с использованием дифференциальных и сглаживающих линейных интегральных операторов для случая внутреннего вязкого трения (модель Кельвина–Фойхта) и внутреннего гистерезисного трения (модель Бока–Шлиппе–Колара).

Для рассмотренных задач в работе приведены примеры численных расчетов, которые непосредственно связаны с изложенным теоретическим материалом и иллюстрируют эффективность предложенных подходов. Выполнены соответствующие исследования по проверке достоверности полученных результатов.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, прямоугольная пластина типа Тимошенко, нестационарное нагружение, некорректные задачи, обратные задачи, идентификация, управление колебаниями, регуляризация, внутреннее вязкое трение, гистерезисное трение, сглаживающие интегральные операторы.

ABSTRACT

Voropay A. V. Using of Volterra integral equations in nonstationary problems of plate's dynamics. – Manuscript copyright.

Thesis for a Doctor Degree in Technical Science by specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2019.

The thesis deals with solving in general the inverse problem on finite set of arbitrary nonstationary loads acting simultaneous on a plate. The problem can be reduced to solving a system of Volterra integral equations and creating special approaches for taking into account energy dissipation during deformation of structural elements.

Three classes of relevant tasks are solved on the basis of general solution of the inverse problem obtained and created universal approach, which uses integral operators:

- identification of the system of external non-stationary loads acting on rectangular plates;
- joint identification of external loads and reactions in the problem of modeling non-stationary plates vibrations with concentrated features (masses, vibration dampers, additional supports);
- identification of control actions in the problem of controlling non-stationary plate vibrations.

The inverse problem of acting on the plate of several unknown independent nonstationary loads is formulated and solved. It is assumed that several non-stationary loads act simultaneously.

The problem of modeling nonstationary vibrations of rectangular plates in the presence of features concentrated on or localized in a small area has been studied in detail. The concentrated features can be in the form of masses, additional supports and vibration dampers. The linear-elastic, viscous and viscoelastic additional supports are considered. The influence of each particular feature on the process of rectangular plate non-stationary deformation is analyzed in detail. The distribution of viscous and elastic components in the reaction of the additional viscoelastic support in contact with the plate is also investigated. The viscoelastic support is replaced by two independent viscous and linear-elastic additional supports, which are applied at one point or at a short distance.

The new solutions to several ill-posed problems of active control of rectangular plate non-stationary transverse vibrations are considered, taking into account different concentrated features. The schemes of passive and active vibration protection in the problem of damping the plate with attached mass are also explored.

The dissipative properties of the material are taken into account. The solutions obtained within the framework of the theory of elasticity for deformable elements of the structure are used as the base ones. Approaches which used differential and integral operators are considered. They allow taking into consideration the internal viscous friction (Kelvin–Feucht model) and hysteresis friction (Bock–Schlippe–Kohler model) in the material. This approach, which uses smoothing linear integral operators, can be applied to any elastic solutions that are represented by Duhamel convolution type integrals with Cauchy kernels. The examples of calculating for a plate in elastic and viscoelastic settings are given.

For the problems considered, the work proposes examples of numerical calculations that are directly related to the theoretical material presented and illustrate the effectiveness of the approaches proposed. The impact load of a medium thickness isotropic rectangular plate is studied experimentally to substantiate the theory developed. Reliability of the results obtained is tested appropriately.

Keywords: Volterra integral equation, Timoshenko rectangular plate, nonstationary loading, ill-posed problems; inverse problems, identification, vibrations control problem, regularization, internal viscous friction, hysteresis friction, smoothing integral operators.