УДК 519.6

И. Д. Дубровский, В. Л. Бучарский

Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

МЕТОД ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглянуто питання постановки граничних умов при двовимірній надзвуковій течії газу в доступних формах. Запропоновано альтернативний метод постановки граничних умов на поверхні тіл. Наведено та проаналізовано результати розрахунку задач про відбиття ударної хвилі від плоскої стінки за Махом і потоку продуктів згоряння у соплі рідинного ракетного двигуна з використанням запропонованого метода. Зроблено висновок про можливість застосування нового методу в подальших розрахунках.

Ключові слова: *граничні умови, газова динаміка, чисельні методи.*

Рассмотрен вопрос постановки граничных условий при двумерном сверхзвуковом течении газа в областях сложной формы. Предложен альтернативный метод постановки граничных условий на поверхности тел. Приведены и проанализированы результаты расчета задач о Маховском отражении ударной волны от плоской стенки и течении продуктов сгорания в сопле жидкостного ракетного двигателя с помощью предлагаемого метода. Сделан вывод о возможности применения нового метода в дальнейших расчетах.

Ключевые слова: *граничные условия, газовая динамика, численные методы.*

The question of setting boundary conditions for a two-dimensional supersonic gas flow in accessible forms is considered. An alternative method of setting boundary conditions on the body surface is proposed. The results of the calculation of double Mach reflection of a shock wave from a flat wall and the gas flow inside of liquid-propellant rocket engine using alternative method are presented and analyzed. The conclusion about the possibility of applying the new method in further calculations is made.

Keywords: *boundary conditions, gas dynamics, numerical methods.*

Вступление. Современная вычислительная гидрогазодинамика благодаря стремительному развитию компьютерных технологий позволяет решать задачи практически любой сложности и, как следствие, получать параметры потока любых течений для объектов произвольной формы. Однако при увеличении сложности геометрии существенно возрастает время, требуемое для решения поставленной задачи. Одной из причин этого является необходимость учета криволинейных границ объекта. Это приводит к применению громоздких преобразований систем координат для отображений физической области на вычислительную либо к использованию нерегулярных неструктурированных сеток [1].

© Дубровский И. Д., Бучарский В. Л., 2019

В общем случае постановку граничных условий на поверхности тел произвольной формы при решении задач газодинамики с помощью метода конечного объема можно разделить по применяемому способу построения сетки на две группы:

1. Использование сеток из структурированных, неструктурированных элементов, в которых границы конечных объемов совпадают с границами расчетной области и в общем случае непараллельны осям декартовой прямоугольной системы координат [2];

2. Использование дробных ячеек (при этом конечные объемы есть прямоугольники с границами, параллельными координатным осям, а границы области проходят внутри конечных объемов).

Достоинством методов первой группы является совпадение границ рассматриваемого твердого тела в физической области и расчетной сетки. Однако в результате такого подхода существенно усложняется расчет потоков на границах конечных объемов, поскольку эти потоки будут комбинацией потоков в декартовой системе координат.

С другой стороны, применение дробных ячеек в декартовой системе координат позволяет избавиться от данного недостатка, но, в свою очередь, приводит к необходимости использования в вычислениях малых чисел Куранта [3] в связи с дроблением конечного объема на мелкие части.

Таким образом, для упрощения вычислений на границах расчетной области необходимо применение альтернативного метода постановки граничных условий на твердой поверхности, который объединял бы достоинства и исключал недостатки вышеперечисленных стандартных методов.

Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение нового способа постановки граничных условий на твердой стенке при решении системы уравнений законов сохранения сплошной среды методом конечного объема в областях сложной формы с использованием регулярных прямоугольных сеток в декартовой ортогональной системе координат, а также проверка возможности его использования в практических задачах.

Математическая модель. Для математического описания процессов сверхзвукового течения газа в качестве основной расчетной модели была выбрана модель идеального сжимаемого газа, описываемая интегральными уравнениями Эйлера в интегральной форме в двумерной постановке и замыкаемая уравнением состояния [4]. Для удобства проведения расчетов эти уравнения были записаны в векторной форме:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{U} dt + \oint_S \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})\right) dS = 0$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho H u \end{pmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho H v \end{pmatrix},$$

где: ρ – плотность, p – давление, u – компонента скорости по оси OX, v – компонента скорости по оси OY, E – удельная полная энергия, H – удельная полная энтальпия.

Принято разделять следующие виды граничных условий в задачах сверхзвуковой газодинамики [5]:

1. Вход. Задаются три параметра потока, как функции от координаты.

2. Выход. Параметры на выходе вычисляются либо с помощью экстраполяции, либо с использованием следующего соотношения:

$$\frac{d\phi}{dn} = 0;$$

где: ϕ – некоторый параметр потока, производная берется по нормали к границе.

3. Свободная граница. Параметры потока вычисляются по вышеприведенной формуле, либо также с помощью экстраполяции.

4. Твердая стенка. В случае невязкого потока применяются условия скольжения для скорости на поверхности тела:

$$\frac{d\vec{V}_\tau}{d\tau} = 0,\ \vec{V}_n = 0;$$

где: V – скорость потока, τ – касательное к поверхности направление, n- нормальное направление.

Для вязкого потока используются условия прилипания:

$$\vec{V}_\tau = 0,\ \vec{V}_n = 0;$$

5. Ось симметрии. Параметры потока вычисляются по следующим соотношениям:

$$\frac{d\phi}{dn} = 0,\ \frac{d\vec{V}_\tau}{d\tau} = 0,\ \vec{V}_n = 0;$$

где τ – касательное к оси симметрии направление, n- нормальное направление.

В проведенных в работе вычислениях применялись соотношения на входе, выходе, свободной границе, оси симметрии и на твердой стенке для невязкого потока.

Метод решения уравнений математической модели. Для интегрирования системы уравнений применялся метод конечных объемов, состоящий из следующих последовательных этапов:

1. Реконструкция параметров потока на границах конечного объема по их средним по конечному объему значениям.

2. Решение задачи о распаде разрыва на границах конечного объема и вычисление потоков через границы конечного объема.

3. Интегрирование по времени.

Решение системы уравнений математической модели в рассматриваемых задачах осуществлялось в декартовой системе координат. Расчетная область была равномерно разбита прямоугольными конечными объемами с длинами граней Δх и Δу по осям ОХ и ОУ соответственно. На этапе реконструкции использовались кусочно-постоянные функции. Задача о распаде разрыва решалась приближенно по соотношениям Лакса-Фридрихса [6]. По полученным значениям потоков на границах конечных объемов проводилось интегрирование по времени для векторного уравнения, записанного в следующем виде, с помощью явного метода Эйлера [7]:

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}_{i,j}}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_{i+1/2,j} - \boldsymbol{F}_{i-1/2,j}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(\boldsymbol{G}_{i,j+1/2} - \boldsymbol{G}_{i,j-1/2}\right)\right)$$

Метод постановки граничных условий. Особенностью предлагаемого метода постановки граничных условий является их учет на этапе реконструкции. Суть этого заключается в коррекции вычисляемых потоков на границах конечных объемов, через которые проходят границы расчетной области, таким образом, чтобы, при выбранной реконструкции параметров потока, на линии границы внутри конечного объема выполнялись заданные граничные условия.

Рассмотрим последовательность действий, выполняемых при постановке граничных условий предлагаемым способом. Для начала выделим из расчетной области конечный объем, содержащий внутри себя границу раздела твердого тела и газового потока. В той части ячейки, которая содержит стенку, введем фиктивный газовый поток с такими параметрами, чтобы удовлетворялись условия скольжения на границе между стенкой и газом. Исходя из этого, получим, что весь конечных объем наполнен газовой средой, а влияние стенки учитывается за счет параметров фиктивного газового потока, для определения которых применяется следующая последовательность вычислений на этапе реконструкции:

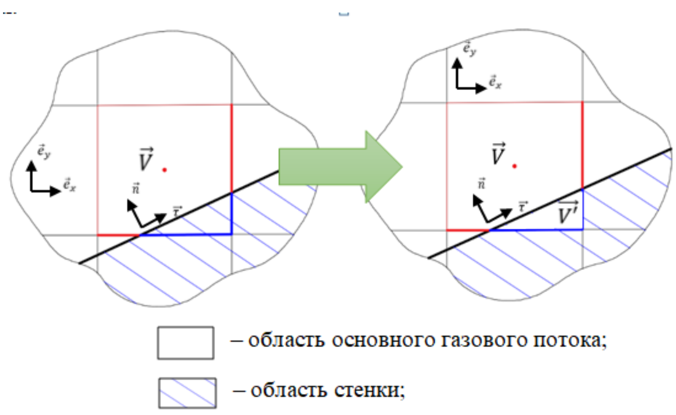

Рис. 1. Схема введения «фиктивного» потока

1. Так как реконструкция выполняется кусочно-постоянными функциями, значения плотности и давления принимаются постоянными по всему конечному объему.

2. Осуществляется переход к локальной системе координат ($\vec{\tau}$, $\overrightarrow{\text{晦}}$), связанной с поверхностью тела.

3. Определяются скорости в фиктивной области в соответствии с применяемым типом граничных условий по следующим формулам:

$$\vec{V}_\tau^{'} = \vec{V}_\tau, \quad \vec{V}_n^{'} = -\vec{V}_n$$

где $\vec{V}_\tau^{'}, \vec{V}_\tau$ – касательные компоненты фиктивного и основного газовых потоков соответственно, $\vec{V}_n^{'}, \vec{V}_n$ – нормальные компоненты фиктивного и основного газовых потоков соответственно, $\vec{V}^{'}, \vec{V}$ - абсолютные скорости фиктивного и основного газового потока.

4. Выполняется переход к глобальной системе координат ($\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$),.

5. Определяются декартовы компоненты скорости в области фиктивного газового потока.

6. Проводится осреднение между скоростями фиктивного и основного газовых потоков по граням конечного объема.

На этом этапе постановка граничных условий завершается и можно переходить к следующему пункту вычислений – решению задачи о распаде разрыва, зная значения скорректированных по осредненным скоростям потоков по граням конечного объема.

Таким образом, в результате выполненных действий все конечные объемы, содержащие границу раздела расчетной области, в дальнейших вычислениях будут рассматриваться как целые, неделимые, так как влияние границ расчетной области учитывалось на этапе реконструкции. Отсюда следуют два преимущества рассматриваемого метода:

1. Расчет ведется в декартовой системе координат – на каждой грани конечного объема необходимо вычислять только 1 поток.

2. Вследствие целостности конечного объема не нужно использовать малые числа Куранта.

Результаты и их обсуждение. Для подтверждения корректности предлагаемого способа постановки граничных условий были решены две тестовые задачи. Везде использовалась регулярная прямоугольная сетка с постоянными по осям шагами. Были решены нестационарная задача о Маховском отражении ударной волны, набегающей на плоскую поверхность, и задача о стационарном течении продуктов сгорания в сопле жидкостного ракетного двигателя. Решение каждой из задач состояло из двух этапов, результаты которых сравнивались между собой:

1. Решение при традиционных способах постановки граничных условий.

2. Решение при предлагаемом способе постановки граничных условий.

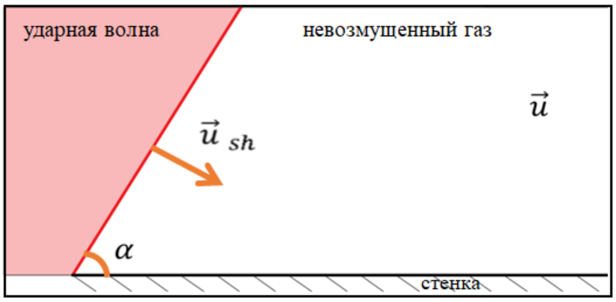

Рис. 2. Постановка задачи о Маховском отражении при традиционном способе вычисления граничных условий

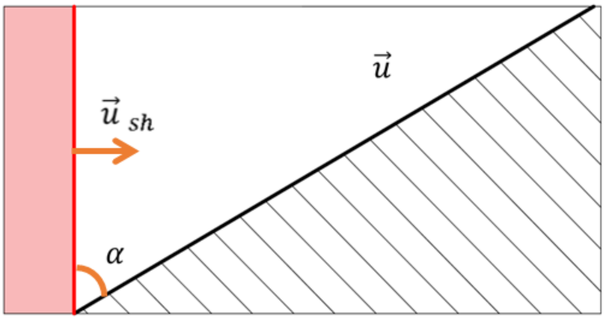

Рис. 3. Постановка задачи о Маховском отражении при предлагаемом способе вычисления граничных условий:
$\vec{u}_{sh}$ – скорость распространения фронта ударной волны, $\vec{u}$ – скорость невозмущенного газа, α – угол между стенкой и ударной волной

Исходные данные для задачи о Маховском отражении были взяты из статьи [8] для обоих этапов вычислений, однако во втором случае физическая область задачи была повернута на 30° против часовой стрелки.

В первой задаче вычисления проводились при одинаковом числе Куранта и до определенного в [8] времени. Во второй задаче – до установления.

Результаты вычислений представлены в первой задаче в виде градиентов плотности в расчетной области и основных геометрических размеров возмущенной зоны, во второй задаче – в виде градиента плотности газового потока в сопле ракетного двигателя. Расхождение в первой задаче оценивалось путем сравнения геометрических размеров области образовавшейся возмущенной зоны, а также величины плотности в характерных точках области (А, Б, В, Г, О) и вычислялось по максимальным относительным погрешностям.

Анализ полученных результатов позволяет судить о хорошем качественном и приемлемом количественном согласовании, как для реконструкции первого порядка точности, для обоих вариантов тестовых задач.

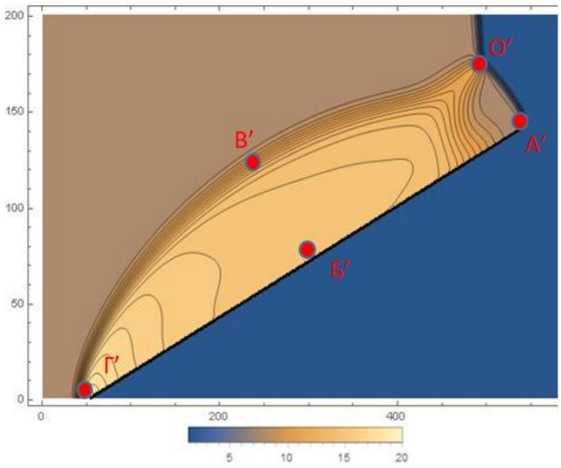

Рис. 4. Градиент плотности в первой задаче при традиционной постановке граничных условий

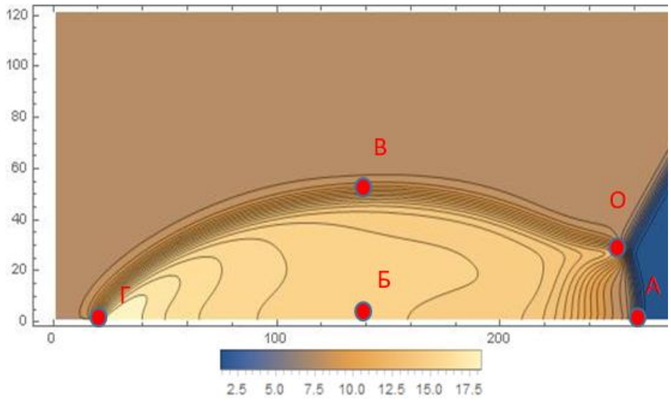

Рис. 5. Градиент плотности в первой задаче при новой постановке граничных условий

Таблица 1

Расхождение по форме области в первой задаче

Длина	|OA|	|AГ|	|БВ|
Вариант 1	0.253	2.000	0.416
Вариант 2	0.251	2.014	0.404
%	0.792	0.700	2.893

Таблица 2

Расхождение по величине плотности в первой задаче

ρ	O	A	Б	В	Г
Вариант 1	7.319	5.063	15.220	11.355	11.527
Вариант 2	7.517	4.843	15.176	11.742	11.684
%	2.643	4.332	0.288	3.300	1.339

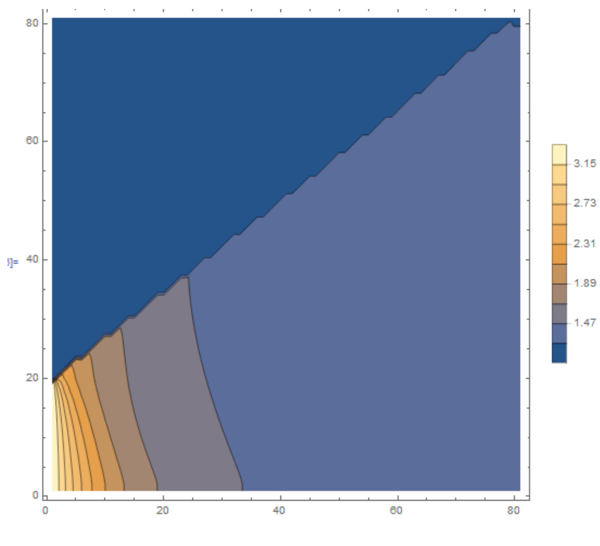

Рис. 6. Градиент плотности во второй задаче при новой постановке граничных условий. Расчетная сетка -80х80 конечных объемов

Выводы. В данной работе предложен альтернативный метод постановки граничных условий для задач газодинамики в областях сложной геометрической формы. Он позволяет избавиться от недостатков известных способов постановки граничных условий, в свою очередь, показывает приемлемую сходимость с ними при решении тестовых задач. Дальнейшее развитие описываемого метода предполагается осуществлять в сторону его обобщения на методы высоких порядков точности.

Библиографические ссылки

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Пер. с англ. В 2-х т. Т. 1. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М: Мир, 1990. 384 с.

2. Moukalled F., L. Mangani, M. Darwish. The finite volume method in computational fluid dynamics. An advanced introduction with OpenFOAM and Matlab / F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish// Fluid Mechanics And Its Application, Springer, 2015. – Vol. 133, p. 798.

3. Suli E. An Introduction to Numerical Analysis / E. Suli, D. Mayers. — Cambridge: Cambridge University Press. – 2003. – P. 444.

4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. / Л. Г. Лойцянский. – М: Дрофа, 2003. 840 с.

5. Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications/ J. Blazek. – Oxford:Elseveir, 2007. p. 491.

6. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamic/ E. F. Toro. – Springer-Verlag. – 1999. – P. 686.

7. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин.– М: Наука, 1978. — 512 с.

8. Woodward P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks/ P. Woodward, P. Colella //Journal Of Computational Physics. – 1984. – V. 54. – P. 115-173.

Надійшла до редколегії 30.10.2019 р.