

ISSN 2074-5903



ПІТАННЯ

ПРИКЛАДНОЇ

МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧНОГО

МОДЕЛЮВАННЯ

2014

ISSN 2674-3893

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара



ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Збірник наукових праць

Дніпропетровськ
Видавництво «Ліра»

2014

УДК 004, 517, 519, 532, 536, 681
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431
П 32

*Друкується за ухвалою вченої ради
Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара*

У збірнику вміщені результати фундаментальних досліджень та практичних розробок з проблем математичного і програмного забезпечення інтелектуальних систем. Статті присвячені питанням математичного моделювання складних прикладних систем і розробки ефективних обчислювальних методів та алгоритмів їх розв'язання, а також оптимізації, чисельних методів, функціонального аналізу, математичної фізики. Призначений для науковців, викладачів ВНЗ, може бути корисним аспірантам і студентам.

П 32 Питання прикладної математики і математичного моделювання:
зб. наук. пр. / редкол. О. М. Кісельова (відп. ред.) та ін. — Д.: Вид-во «Ліра», 2014. — 276 с.

Сборник содержит результаты фундаментальных исследований и практических разработок по проблемам математического и программного обеспечения интеллектуальных систем. Статьи посвящены вопросам математического моделирования сложных прикладных систем и разработке эффективных вычислительных методов и алгоритмов их решения, а также оптимизации, численных методов, функционального анализа, математической физики. Предназначен для ученых, преподавателей вузов, может быть полезен аспирантам и студентам.

УДК 004, 517, 519, 532, 536, 681
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

Редакційна колегія:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Кісельова** (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д-р техн. наук, проф. **Н. І. Ободан**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян** (НТУУ «КПІ»); д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут**; д-р техн. наук, проф. **О. Г. Байбуз**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. М. Пасічник** (Академія митної служби, м. Дніпропетровськ); д-р техн. наук, проф. **О. І. Михайльов** (НМетА, м. Дніпропетровськ); д-р техн. наук, проф. **В. М. Корчинський**; д-р техн. наук, проф. **В. В. Гнатушенко**; канд. фіз.-мат. наук **О. О. Кузенков**; канд. фіз.-мат. наук **Т. О. Шевченко**; д-р техн. наук, проф. **О. М. Карпов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. Мельников** (США); д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Дейнеко** (Великобританія).

© Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, 2014

© Видавництво «Ліра», оформлення, 2014

М. Г. ¹Бердник

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Отримано узагальнене тривимірне рівняння балансу енергії циліндра, що обертається з постійною кутовою швидкістю Ω , з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Знайдено тривимірне температурне поле суцільного циліндра, що обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Получено обобщенное трехмерное уравнение баланса энергии вращающегося цилиндра с постоянной угловой скоростью Ω , с учетом конечной скорости распространения тепла. Найдено трехмерное температурное поле вращающегося сплошного цилиндра с учетом конечной величины скорости распространения тепла.

It was obtained a generalized three-dimensional energy balance equation for a rotating cylinder with constant angular velocity Ω , with the finite speed of propagation of heat. Three-dimensional temperature field of a rotating solid cylinder with the final velocity of the heat was found.

Ключові слова: інтегральне перетворення, температурне поле, ортогональний ряд.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій.

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1; 7]. Однак при високих інтенсивних нестационарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [6; 7; 9]. У [7; 8] показано, що рівняння переносу енергії у випадку узагальненого закону теплопровідності Фур'є справедливо для одномірного, однорідного і стаціонарного простору. Питання про можливість узагальнення рівняння переносу на тривимірний випадок розглянуто у [7].

Метою роботи є розробка нових узагальнених тривимірних математичних моделей температурних розподілів у рухомому середовищі у вигляді крайових задач математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв'язання отриманих крайових задач для рівняння теплопровідності, розв'язки яких використовуються під час керування температурними полями.

Постановка задачі. У [2] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [2] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) приймає вигляд

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

де γ – щільність середовища; c – питома теплоємність; T – температура середовища; t – час; τ_r – час релаксації.

Розглянемо розрахунок нестационарного неосесиметричного температурного поля суцільного циліндра скінченної довжини L , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, та теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0 , а на поверхні циліндра температура не залежить від часу $G(\varphi, z)$.

Математично задача визначення температурного поля циліндра полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = \frac{a}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(1, \varphi, z, t) = v(\varphi, z), \quad (4)$$

$$\theta(\rho, \varphi, 0, t) = 0, \quad \theta(\rho, \varphi, 1, t) = 0, \quad (5)$$

де $\theta = \frac{T(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$ – відносна температура циліндра; $T_{\max} = \max_{\varphi, z} G(\varphi, z)$;

$\rho = \frac{r}{R}$; R – зовнішній радіус циліндра; $\chi = (R/L)^2$; $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт те-

мпературопровідності; $v(\varphi, z) \in C(\bar{D})$.

Тоді рішення крайової задачі (2) – (5) $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z , один раз по t в області D і неперервним на $\bar{D}$ [8], тобто $\theta(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$, а функції $v(\varphi, z)$, $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ v(\varphi, z) \end{array} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \theta_n(\rho, z, t) \\ v_n(z) \end{array} \right\} \cdot \exp(in\varphi), \quad (6)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_n(\rho, z, t) \\ v_n(z) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ v(\varphi, z) \end{array} \right\} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi;$$

$$\theta_n(\rho, z, t) = \theta_n^{(1)}(\rho, z, t) + i\theta_n^{(2)}(\rho, z, t), \quad v_n(z) = v_n^{(1)}(z) + i v_n^{(2)}(z),$$

де i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho, z, t)$ для $n=0, 1, 2, \dots$, тому що $\theta_n(\rho, z, t)$ і $\theta_{-n}(\rho, z, t)$ будуть комплексно спряженими [10]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2) – (5) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(1)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(1)} \theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(1)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(1)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \theta_n^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_n^{(1)} + \chi \frac{\partial^2 \theta_n^{(1)}}{\partial z^2} \right] \quad (7)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(1)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(1)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(1)}(1, z, t) = v^{(1)}(z), \quad (9)$$

$$\theta_n^{(1)}(\rho, 0, t) = 0, \quad \theta_n^{(1)}(\rho, 1, t) = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } \vartheta_n^{(i)} = \begin{cases} -\omega_n, & \text{якщо } i=1 \\ \omega_n, & \text{якщо } i=2 \end{cases}; \quad m_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i=1 \\ 1, & \text{якщо } i=2 \end{cases}; \quad i=1,2.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) інтегральне перетворення Ханкеля [3; 4]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_0^1 \rho f(\rho) J_n(\mu_{n,k} \rho) d\rho, \quad (11)$$

де $J_n(x)$ – функція Бесселя 1^{го} роду n порядку; $\mu_{n,k}$ – корені трансцендентного рівняння $J_n(\mu_{n,k}) = 0$, які можна знайти за формулою [5]:

$$\mu_{n,k}^2 = -\frac{m-1}{8\beta} - \frac{4(m\pi^2)(7-31)}{36\beta^5} - \frac{32(m-1)(83m^2-982m+3779)}{15(8)} - \frac{64(m-1)(6949m^{32}-15385m^{15}+1585743m-6277237)}{1056\beta^7},$$

де $\beta = \frac{1}{4}\pi(2n+4k-1)$, $m = 4n^2$, а формула оберненого перетворення має вигляд

$$f(\rho) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{n,k}\rho)}{J'_n(\mu_{n,k})} \bar{f}(\mu_{n,k}). \quad (12)$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)} \left[\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(m_i)}}{\partial t} \right] + \tau_r \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial t^2} = \frac{a}{R^2} \left[\mu_{n,k} J'_n(\mu_{n,k}) \bar{\theta}_n^{(i)} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2} \right]. \quad (13)$$

з початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(z,0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial t}(z,0) = 0 \quad (14)$$

і граничними умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(0,t) = 0, \quad \bar{\theta}_n^{(i)}(l,t) = 0, \quad i=1,2. \quad (15)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (13) інтегральне перетворення Фур'є:

$$\hat{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x) \sin(\pi \cdot m \cdot x) dx, \quad \text{де } \lambda_m = \pi \cdot m; \quad m=1,2,\dots, \text{ а формула оберненого}$$

перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\tau \cdot m \cdot x) \cdot \hat{f}(\lambda_m).$$

У результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt} + \vartheta_n^{(i)} \left[\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{dt} + \tau_r \frac{d^2\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt^2} \right] = \frac{a}{R} \left[\mu_{nk} \frac{J'_n(\mu_{nk})}{\mu_{nk}^2 + \lambda_m} \right] \bar{\theta}_n^{(i)} - (\mu_{nk}^{22} + \lambda_m) \bar{\theta}_n^{(i)}$$

з початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}(z, 0)}{\partial t} = 0.$$

Застосовуємо до системи звичайних диференціальних рівнянь інтегральне перетворення Лапласа:

$$\tilde{f}(Q) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\theta}_n^{(i)}$:

$$s\bar{\theta}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)} \left(\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s^2 \bar{\theta}_n^{(i)} \right) = q_{nk} \left(\frac{\mu_{nk} J'_n(\mu_{nk})}{\mu_{nk}^2 + \lambda_m} \right) \bar{\theta}_n^{(i)} - \bar{\theta}_n^{(i)}, \quad (16)$$

$$\text{де } i=1,2; \quad q_{nk} = \frac{a}{R^2} \cdot (\mu_{nk}^2 + \lambda_m).$$

Розв'язавши систему рівнянь (16), одержуємо

$$\tilde{\theta}_n^{(i)} = \alpha_{n,k} \frac{\tilde{V}_n^{(i)} \left(\tau_r s^2 + s + q_{n,k} \right) + (-1)^{i+1} \omega_n \tilde{V}_n^{(m_i)} (1 + s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2 + s + q_{n,k} \right)^2 + \omega_n^2 (1 + s\tau_r)^2}, \quad i=1,2, \quad (17)$$

$$\text{де } \alpha_{nk} = \frac{a}{R^2} \mu_{nk} J'_n(\mu_{nk})$$

Застосовуючи до зображення функцій (17) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(1)}(t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{nk}(s_j) \cdot \left\{ V_n^{(1)} \cdot \left[(2\tau_{rs_j} + 1) + \tau \omega_{ni} \right] + V_n^{(2)} \cdot \left[\tau \omega_n - (2\tau_{rs_j} + 1)i \right] \right\} \times \\ & \times (e^{s_j} - 1) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{nk}(s_j) \cdot \left\{ V_n^{(1)} \cdot \left[(2\tau_{rs_j} + 1) - \tau \omega_{ni} \right] + V_n^{(2)} \cdot \left[\tau \omega_n + (2\tau_{rs_j} + 1)i \right] \right\} \times \\ & \times (e^{s_j} - 1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(2)}(t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{nk}(s_j) \cdot \left\{ V_n^{(2)} \cdot \left[(2\tau_{rs_j} + 1) + \tau \omega_{ni} \right] - V_n^{(1)} \cdot \left[\tau \omega_n - (2\tau_{rs_j} + 1)i \right] \right\} \times \\ & \times (e^{s_j} - 1) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{nk}(s_j) \cdot \left\{ V_n^{(2)} \cdot \left[(2\tau_{rs_j} + 1) - \tau \omega_{ni} \right] - V_n^{(1)} \cdot \left[\tau \omega_n + (2\tau_{rs_j} + 1)i \right] \right\} \times \\ & \times (e^{s_j} - 1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5s_j^{-1}}{(2\tau_{rs_j} + 1) + (\tau_r \omega_n)^2}, \text{ а значення } s_j \text{ для } j=1,2,3,4 \text{ визначаються}$$

за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega_{ni} - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega_{ni})^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega_{ni} + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega_{ni})^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень Ханкеля, Фур'є одержуємо температурне поле суцільного циліндра довжини L , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\begin{aligned} \theta(\rho, \varphi, z, t) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\hat{\theta}_n^{(1)}(\varphi) + i \cdot \hat{\theta}_n^{(2)}(\varphi) \right] \sin(\tau_m z) \right\rangle \frac{J_n(u_{n,k} \rho)}{J'_n(u_{n,k})} \right\} \cdot \exp(in\varphi) \\ \hat{\theta}_n^{(1)}(\varphi), \hat{\theta}_n^{(2)}(\varphi) \text{ визначаються за формулами (18), (19).} \end{aligned}$$

Висновки. Знайдено температурне поле суцільного циліндра скінченної довжини L , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є.

Бібліографічні посилання

1. Берд Р. Явления переноса / Р.Берд, В.Стьюарт, Е.Лайтфут. – М., 1974. – 686 С.
2. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої

- швидкості поширення тепла / М.Г. Бердник // Вісник Дніпропетр. ун-та. Сер. «Механіка» – 2005. – №10. – С. 197–202.
3. **Галицын А.С.** Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.И. Жуковский. – К. : Наук. думка. 1979. – 561 с.
 4. **Гринберг Г.А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г.А. Гринберг. – М.;Л. : Изд-во АН СССР. 1958. – 732 с.
 5. **Грэй Э.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грэй, Г.Б. Мэтьюз. – М., ИЛ., 1949. – 386 с.
 6. **Лакуста Л.В.** Некоторые оценки границ применимости гиперболического уравнения теплопроводности / Л.В.Лакуста, Ю.А.Тимофеев // ИФЖ. – 1979, т.37, – №2, – С. 366–370.
 7. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 599 с.
 8. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных / С.Г.Михлин. – М. : Высш. шк., 1977. – 427 с.
 9. **Подстригач Я.С.** Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1976. – 310 с.
 10. **Толстов Г.П.** Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

Надійшла до редколегії 28.05.2014

УДК 519.8

О.Б. ²Блюсс, Л.С. Коряшкіна, Н.О. Гранкіна

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ І ПОЛЯ ДІЇ СКІНЧЕННОГО ЧИСЛА ДЖЕРЕЛ У НЕПЕРЕРВНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Представлено математичну модель для задачі розміщення скінченної кількості джерел у неперервному середовищі з метою максимізації мінімального сукупного ефекту дії цих джерел. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі з використанням методів недиференційовної оптимізації.

Представлена математическая модель для задачи размещения конечного числа источников в непрерывной среде с целью максимизации минимального совокупного эффекта действия этих источников. Предложен алгоритм решения задачи с использованием методов недифференцируемой оптимизации.

A mathematical model for the problem of location a finite number of sources in continuous environments to maximize the minimum cumulative effects of these sources is presented. The algorithm for solving the problem using undifferentiated optimization techniques is proposed.

Ключові слова: задача оптимального розміщення сервісу, неперервне середовище, методи недиференційовної оптимізації, математичне моделювання, функція впливу.

Вступ. Сьогодні багато практично важливих задач оптимізації, а також задач з інших розділів прикладних наук, зводиться до задач розміщення скінченної кількості об'єктів деякої інфраструктури (соціальної, ринкової, інноваційної), які в сукупності створюють територіальне «поле обслуговування» для «клієнтів», що знаходяться в даному ареалі, з метою мінімізації (або максимізації) деякого критерію якості розміщення. Зазвичай на практиці об'єктами, що необхідно розмістити, є «пункти обслуговування», такі як склади, крамниці, соціальні служби, ремонтні майстерні та інші, а задача оптимального розміщення полягає в тому, щоб максимально наблизити ці пункти до «клієнтів». Спорідненими із задачами розміщення сервісів, традиційно пов'язаними з організацією сервісних або виробничих мереж, є задачі оптимального розбиття множин (ОРМ) [4]. Основна проблема, що вирішується за допомогою моделей та методів ОРМ, полягає у діленні регіону на підрегіони, що обслуговуються лише одним сервісним центром.

Розв'язування задач про розміщення сервісів, як правило, супроводжується великою кількістю альтернативних варіантів розбиття клієнтів, яких обслуговує кожен сервіс. Одним з критеріїв вибору оптимального розв'язку є, наприклад, мінімізація витрат на представлення/отримання того чи іншого сервісу.

Неперервні задачі оптимального розміщення виникають під час математичного опису реальних процесів, в яких споживачі (клієнти) майже неперервно заповнюють деяку область. Інтенсивне дослідження таких задач проводиться з 60-х років XX століття і продовжує привертати увагу з наукової й практичної точок зору до теперішнього часу. В англomовній літературі задачі розміщення/розбиття відомі як «*facility location problem*», «*Continuous Location-Allocation Problem*» [1].

В [2] як задача оптимального розміщення і поля дії скінченного числа джерел у неперервному середовищі розглядається задача оптимального планування променевої терапії злоякісних новоутворень. У цій задачі потрібно розмістити задану кількість джерел опромінення в ураженій тканині таким чином, щоб сукупний ефект дії джерел був якомога більш однорідним.

У даній роботі запропоновано математичну модель задачі розміщення джерел опромінення в ураженій області, що є модифікацією моделі, запропонованої в [2]. Для чисельного розв'язання задачі запропоновано та реалізовано метод недиференційовної оптимізації, а саме метод узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних значень градієнта – r -алгоритм Н.З. Шора [3]. Також в роботі реалізовано евристичний метод розв'язання задачі розміщення, запропонований в [2], адаптований відповідно до побудованої математичної моделі. Наведено аналіз та порівняння результатів, отриманих за обома алгоритмами.

Постановка задачі оптимального планування променевої терапії

Будемо розглядати задачу оптимального розміщення в контексті оптимального планування променевої терапії злоякісних новоутворень, запропоновану в [2], коли потрібно розмістити задану кількість джерел опромінення в ураженій тканині.

У внутрішньотканинній променевій терапії для досягнення повного терапевтичного ефекту (безрецидивного виліковування пухлинного захворювання) необхідно так розмістити джерела радіоактивного опромінення в пухлині, щоб дозове поле було якомога більш однорідним. Справа в тому, що в області низьких рівнів опромінення (в області локальних мінімумів поля дії) можливий рецидив захворювання, і, навпаки, в області високих доз можуть виникати променеві некрози, що тяжко виліковуються.

Отже розглянуту задачу будемо інтерпретувати в такому контексті: в якості «поля обслуговування» виступає уражена ділянка тіла людини, всі клітини якої є «клієнтами», а «пунктами обслуговування» виступають джерела опромінення, які розміщуються всередині ураженої ділянки та створюють терапевтичне радіаційне поле, що пригнічує центри ураження. Причому будемо вважати, що ураження в різних точках шкірної ділянки, що розглядається, може бути різним. Задача полягає в розміщенні заданої кількості джерел опромінення так, щоб дозове поле (сукупний ефект дії джерел) було якомога більш однорідним.

Побудова математичної моделі. Нехай Ω – обмежена множина з евклідового простору E^n . Хоча представлена нижче математична модель задачі про розміщення сформульована для довільного скінченного n , враховуючи інтерпретацію задачі, будемо розглядати випадок, коли $n = 2$.

На відміну від [2], де область Ω приймається однорідною, тобто вважається, що всі клітини однаково уражені, припустимо, що в області існують так звані «центри ураження», тобто точки області, в яких захворювання зароджується і виражено найсильніше. Позначимо їх через $\theta_i = (\theta_i^{12}, \theta_i, \dots, \theta_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, M}$. Припустимо, що захворювання від кожного центру поширюється на деяку частину сусідніх клітин, і чим далі знаходиться клітина від центру – тим менше вона уражена.

Нехай вплив кожного центру на ураження в точці $x \in \Omega$ характеризується функцією

$$\rho_i(\|x - \theta_i\|) = B_i \exp(-\beta_i \|x - \theta_i\|^2), i = \overline{1, M}, \quad (1)$$

де B_i – ступінь ураження i -го центру, β_i – параметр функції, що показує, наскільки «широкою» є здатність i -го центру до розростання та поширення ураження на сусідні клітини, $\|\cdot\|$ – евклідова норма.

Тоді сукупний ступінь ураження $P(x, \theta)$ в точці $x \in \Omega$ залежить від усіх центрів ураження, що наявні в області, і виражається формулою

$$P(\theta, x) = \sum_{i=1}^M \rho_i(\|x - \theta_i\|). \quad (2)$$

Надалі при розв'язанні задачі розміщення будемо враховувати ступінь ураження в кожній точці області.

На рис. 1, 2 зображено приклади поверхонь функцій ураження (2) при заданій кількості центрів, розташованих у двовимірній області $\Omega = \{ 2.5 \leq x \leq 2.5; -1.5 \leq y \leq 1.5 \}$.

Позначимо через $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, i \in \overline{1, N}$ джерела впливу на середовище, які необхідно розмістити. Нехай вплив кожного джерела в точці $x \in \Omega$ характеризується функцією

$$d_i(\tau_i, x) = d_i(\|x - \tau_i\|), i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Сукупний ефект дії всіх джерел $\tau_i, i \in \overline{1, N}$ в точці $x \in \Omega$ утворює поле обслуговування $D(\tau, x)$, що визначається виразом

$$D(\tau, x) = \sum_{i=1}^N d_i(\tau_i, x), \quad (4)$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма.

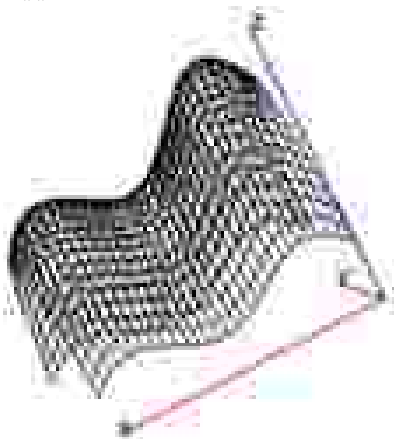


Рис. 1. Сукупний ступінь ураження в області з двома центрами:

$$B_1 = 20, \beta = 0.2, \tau_1 = 18, \tau_2 = 0.18$$

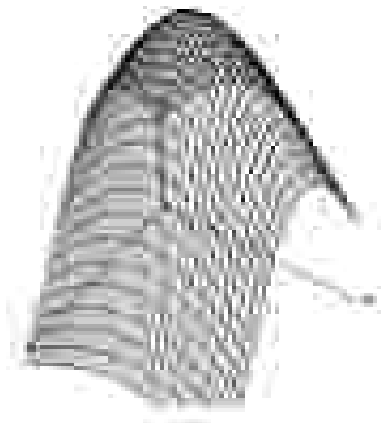


Рис. 2. Сукупний ступінь ураження в області з трьома центрами:

$$B_1 = 20, \beta = 0.2, \tau_1 = 18, \tau_2 = 0.08, B_{33} = 18, \beta = 0.16$$

Будемо вважати, що чим більшим є ступінь ураження точки в області, що розглядається, тим ближче до цієї точки мають бути розташовані джерела впливу на них, тобто тим більшим має бути дозове поле в її околі.

Дію всіх джерел на точку ураженої області Ω будемо описувати в такий спосіб:

$$DP(\tau, x) = \frac{1}{P(\theta, \tau)} \sum_{i=1}^N d_i(\|x - \tau_i\|). \quad (4)$$

Задача полягає у розміщенні в Ω джерел $\tau_i, i = \overline{1, N}$ таким чином, щоб максимізувати мінімальний рівень поля дії $DP(\tau, x)$ в області Ω , що розглядається (в припущенні, що «злипання» джерел є недопустимим), що математично може бути формалізовано в такий спосіб:

$$\min_{x \in \Omega} DP(\tau, x) \rightarrow \max_{\tau \in \Omega^N}. \quad (5)$$

Зауважимо, що цільова функція задачі оптимізації розміщення і поля дії джерел у неперервному середовищі, що розглянута в [2], є окремим випадком задачі (5), коли $P(\theta, \tau) = \forall \tau \in \Omega$.

Також, на відміну від математичної моделі, запропонованої в [2], де в якості функції впливу джерела було обрано степеневу функцію

$$d_i(\|x - \tau_i\|) = \frac{1}{\|x - \tau_i\|^\gamma} \text{ при } \gamma = 2, \text{ тут розглядаються функції вигляду}$$

$$d_i(\|x - \tau_i\|) = Q \exp(-\alpha \|x - \tau_i\|^2), \quad i = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де Q – максимальна інтенсивність джерела, α – параметр функції, що показує, наскільки «широким» є вплив джерела. У даній роботі вважається, що для усіх джерел вказані величини однакові, хоча це не є суттєвим припущенням. На рис. 3, 4 зображено поверхні функцій спільного впливу (4) заданої кількості джерел, розташованих у двовимірній області $\Omega = \{x | -2.5 \leq x \leq 2.5; -1.5 \leq y \leq 1.5\}$ за умови, що вплив одного джерела описується за формулою (6).

Вибір вигляду функцій впливу джерел базується на наступних міркуваннях. Степеневі функції вигляду $d_i(\|x - \tau_i\|) = \frac{1}{\|x - \tau_i\|^\gamma}, \gamma > 0$, які задовольняють умову $d_i(+0) = \infty$, мають «неприємну» з обчислювальної точки зору особливість, обумовлюючи необхідність «виколоювання» точок $x = \tau_i$ при обчисленні значення функції (4) під час реалізації чисельних

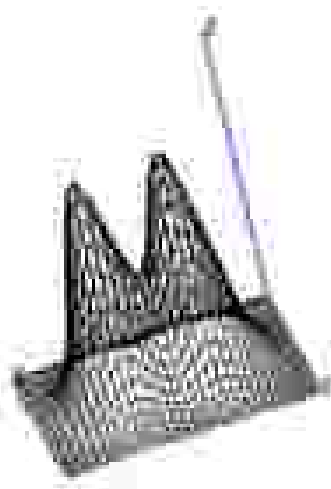


Рис. 3. Дозове поле, утворене двома джерелами: $Q = 100, \alpha = 5$

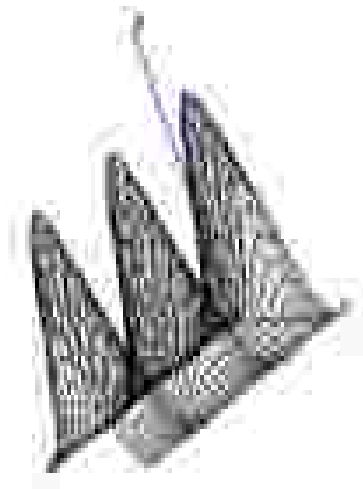


Рис. 4. Дозове поле, утворене трьома джерелами: $Q = 100, \alpha = 5$

алгоритмів розв'язання задачі. Такий вибір функцій впливу ускладнює або робить неможливим застосування до розв'язання даної задачі чисельних методів максимізації, які добре зарекомендували себе навіть при розв'язуванні задач недиференційовної оптимізації та збіжність яких теоретично обґрунтована. Функції вигляду (6) позбавлені вказаного недоліку. Аналогічні міркування були проведені при виборі вигляду функцій ураження (1). При цьому вважається, що параметри функцій впливу джерел та функцій ураження можуть бути визначені експериментально.

Методи розв'язування. Для розв'язання даної задачі було застосовано два методи: наближений алгоритм, запропонований в [2], та метод недиференційовної оптимізації – метод узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних значень градієнта (r-алгоритм Шора).

Ідея наближеного алгоритму базується на припущенні, що оптимальне розміщення джерел досягається тоді і тільки тоді, коли всі локальні мінімуми сукупного поля дії є рівними між собою, таке розміщення існує і є єдиним (з точністю до нумерації джерел). Для чисельного розв'язання задачі організуємо ітераційний процес, виконавши спочатку дискретизацію області. На кожному кроці алгоритму зміщуємо кожне джерело з певним кроком до найближчого глобального мінімуму, поступово зменшуючи

крок зміщення за певним правилом. Ітераційний процес завершується, якщо або всі локальні мінімуми сітки з деякою точністю є глобальними, або крок зміщення стає меншим, ніж заданий мінімальний крок.

Очевидно, цільова функція задачі (5) не є диференційованою на всій області Ω , тому для розв'язування задачі пропонується застосовувати метод узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних значень градієнта для розв'язку задачі (5). Ефективність усіх субградієнтних методів суттєво залежить від обумовленості функції, що оптимізується. Тому, щоб збільшити швидкість збіжності, можна спробувати здійснити перетворення координат (заміну метрики) з метою покращення обумовленості. Саме ця ідея лежить в основі r -алгоритму, що комбінує принципи субградієнтних методів та методів зі змінною метрикою [4].

Наведемо чисельний алгоритм методу.

Алгоритм

Ініціалізація. Задамо кількість джерел N і початкове розміщення $\tau^{(0)} \in \Omega$. Область Ω покриваємо прямокутною сіткою. Надалі дискретизовану область будемо позначати через $\bar{\Omega}$.

Обчислюємо за заданим початковим розміщенням джерел величину цільової функції $I(\tau^{(0)}) = \min_{x \in \Omega} DP(\tau^{(0)}, x)$ за формулою (4). За допомогою скінченно-різницевих формул обчислюємо всі компоненти вектора субградієнта $g(\tau^{(0)})$ цільової функції I в точці $\tau^{(0)}$.

Обираємо початковий пробний крок r -алгоритму $h_0 > 0$.

Перший крок. Обчислюємо $\tau^{(1)}$ за формулою

$$\tau^{(1)} = \tau^{(0)} - h_0 g(\tau^{(0)}).$$

Переходимо до другого кроку.

Нехай у результаті роботи алгоритму після $m = 1, 2, 3, \dots$ кроків отримано деяке розміщення $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$. Опишемо $(m+1)$ -ий крок алгоритму.

$(m+1)$ -ий крок.

1. За набором $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$ обчислюємо величину

$$I(\tau^{(m)}) = \min_{x \in \Omega} DP(\tau^{(m)}, x) \text{ за формулою (4).}$$

2. Обчислюємо наближено значення всіх компонент вектора субградієнта $g(\tau^{(m)})$ цільової функції I при $\tau = \tau^{(m)}$.
3. Проводимо $(m+1)$ -ий крок τ -алгоритму в H -формі, ітераційна формула якого має вигляд

$$\tau^{(m+1)} = \tau^{(m)} + h_m \frac{H_{m+1} g(\tau^{(m)})}{\sqrt{H_{m+1} g(\tau^{(m)})^T g(\tau^{(m)})}},$$

де H_{m+1} – матриця розтягнення простору з коефіцієнтом σ (його доцільно брати рівним 3) у напрямку різниці двох послідовних значень градієнта, що обчислюється за формулою

$$H_{m+1} = \left(\frac{1}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T}{(H_m \xi_m, \xi_m)},$$

де $H_0 = E$, $\xi_m = g(\tau^{(m)}) - g(\tau^{(-1)})$.

Якщо через округлення в обчисленнях матриця H_{m+1} перестає бути додатньо визначеною, замінюємо її одиничною матрицею.

Крок h_m обираємо з умови:

$$\max_{h>0} DP \left(\tau^{(m)} + h \frac{H_{m+1} g(\tau^{(m)})}{\sqrt{H_{m+1} g(\tau^{(m)})^T g(\tau^{(m)})}} \right).$$

4. Якщо умова

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, 0 < \varepsilon$$
 (7)

не виконується, то переходимо до $(m+2)$ -го кроку алгоритму, в іншому випадку переходимо на крок 5.

5. Завершення ітераційного процесу. Приймаємо за оптимальне розміщення $\tau^* = \tau^{(k)}$, де k – номер ітерації, на якій виконалась умова (7).

Кінець алгоритму.

Результати обчислювальних експериментів. Розглянемо результати обчислювальних експериментів на прикладі області ураження, що має форму еліпса. Розглянемо випадок рівномірного «попиту» на дозу впливу в області ураження, тобто приймемо ступінь ураження кожної клітини однаковим та рівним одиниці. На рис. 5 та 6 наведено приклади роботи алгоритмів для 3 та 6 джерел відповідно. Зірочкою позначено джерела, що складають оптимальний розв'язок задачі, знайдений за допомогою

r -алгоритму, а прямокутником – оптимальне розміщення джерел, отримане за допомогою наближеного алгоритму Клепера. Зазначимо, що тут і в наведених нижче прикладах початкове наближення центрів, а також похибка, яка допускається при знаходженні координат джерел, однакові.

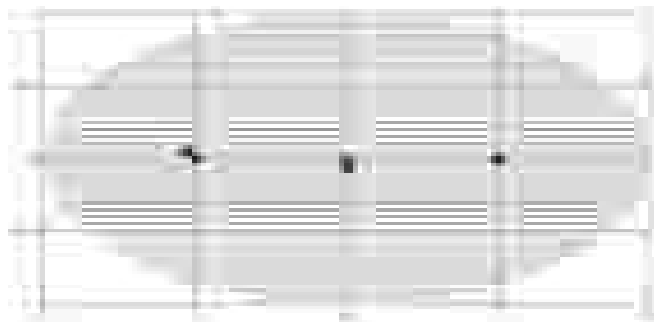


Рис. 5. Оптимальне розміщення трьох джерел в області з рівномірним «попитом»

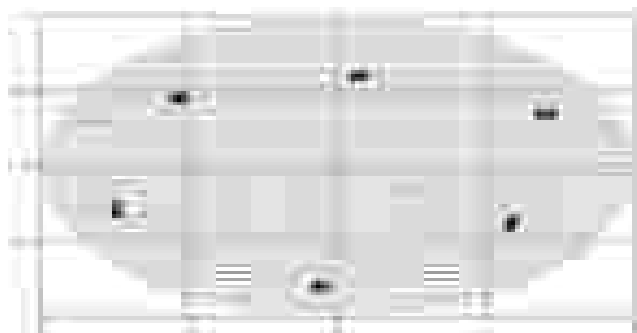


Рис. 6. Оптимальне розміщення шести джерел в області з рівномірним «попитом»

У табл. 1 наведено для порівняння значення цільової функції задачі, коли «попит» на ступінь впливу джерел рівномірний по всій області, отримані за двома наведеними алгоритмами.

Порівнявши результати, ми можемо зробити висновок, що в області рівномірного «попиту» обидва алгоритми дають майже однакові результати, але при зростанні числа джерел алгоритм недиференційовної оптимізації дає розташування з більш високим значенням цільової функції.

На рис. 7 – 9 наведено знайдені за допомогою обох алгоритмів розташування 3, 4 та 6 джерел опромінення відповідно у випадку нерівномірно-

го «попиту» в області, розмістивши в ній два центри ураження з координатами $(-1;0.5)$ і $(1;0.5)$.

Таблиця 1

Результати роботи алгоритмів для області з рівномірним «попитом»

Кількість джерел	Оптимальне значення цільової функції, отримане за допомогою Γ -алгоритму	Оптимальне значення цільової функції, отримане за допомогою алгоритму Клеппера
2	6.55	6.55
3	15.23	15.23
4	29.14	26.61
6	56.45	52.29

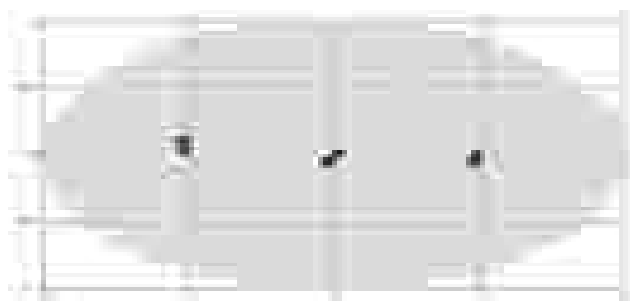


Рис. 7. Оптимальне розміщення трьох джерел в області з нерівномірним «попитом»

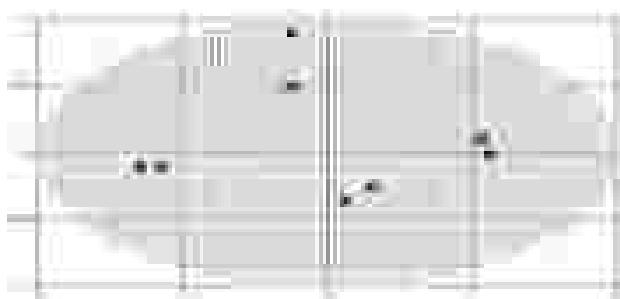


Рис. 8. Оптимальне розміщення чотирьох джерел в області з нерівномірним «попитом»

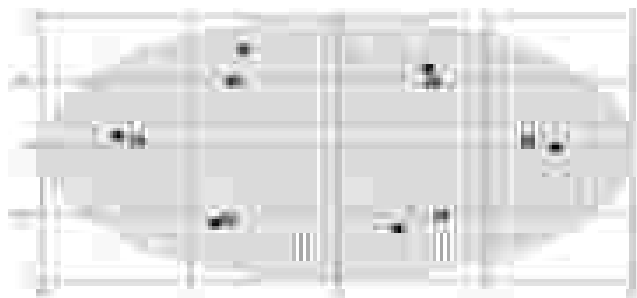


Рис. 9. Оптимальне розміщення шести джерел в області з нерівномірним «попитом»

Наведемо отримані значення цільової функції для нерівномірного «попиту» у вигляді порівняльної таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

Результати роботи алгоритмів для області з нерівномірним «попитом»

Кількість джерел	Значення цільової функції (r-алгоритм)	Значення цільової функції (евристичний алгоритм)
2	0.248	0.244
3	0.591	0.564
4	1	0.827
6	2.265	1.821

Проаналізувавши отримані результати, можна зробити висновок, що застосування методів недиференційовної оптимізації є більш «чутливим» до центрів ураження в області та дає розташування джерел з більш високим значенням цільової функції, ніж наближений алгоритм.

Висновки. Таким чином, у роботі запропоновано математичну модель задачі оптимізації розміщення і поля дії скінченного числа джерел у неперервному середовищі з урахуванням «попиту» на ступінь впливу цих джерел у кожній точці заданої області і вимогою якомога більшої однорідності поля дії цих джерел. Для розв'язання задачі було застосовано два алгоритми: наближений алгоритм Клеппера та r-алгоритм Шора. Отримані результати обчислювальних експериментів показали, що застосування методів недиференційовної оптимізації до розв'язання сформульованої задачі є більш доцільним у випадку, коли сам попит не є однорідним на області, що розглядається.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические модели / Е.М. Киселёва, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.
2. **Клеппер Л.Я.** Оптимизация поля действия конечного числа источников в непрерывной среде / Л.Я. Клеппер // Экономика и математические методы. – 2009. – № 2. – С. 113–119.
3. **Шор Н.З.** Методы недифференцируемой оптимизации / Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 1979. – 200 с.
4. **Farahani R. Z.** Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 pp.

Надійшла до редколегії 25.06.2014

УДК 519.658

В. Г. Боборикін*, В. Л. Волошко, Л. В. Волошко****

**Навчально-тренувальний центр Кримської електроенергетичної системи*

***Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

ПРО ОДИН ЕФЕКТИВНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ТА ПОСТАНОВКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Розглянуто метод потенціалу для розв'язання крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння у випадку складної форми області. Отримання ефективних чисельних результатів послужило базою для формулювання трьох задач безумовної оптимізації.

Рассмотрен метод потенциала для решения граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения в случае сложной формы области. Получение эффективных численных результатов послужило базой для формулирования трех задач безусловной оптимизации.

Potential method was considered for boundary value problem solution with inhomogeneous biharmonic equation in case of the domain of irregular shape. Getting of effective results is the base for formulation of three unconstrained optimization problems.

Ключові слова: крайова задача, оптимізаційна задача, бігармонічне рівняння, неканонічна форма області.

Вступ

Оптимізаційні задачі математичної фізики є важливою галуззю сучасної математики з точки зору практичного застосування. Аналіз останніх наукових досліджень у цій царині свідчить, що ефективні розв'язки крайових задач бігармонічних рівнянь для областей складної форми мало вивчені з точки зору побудови на їх основі оптимізаційних алгоритмів.

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння Розглянемо таку задачу. Необхідно знайти розв'язок неоднорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta_w = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

при крайових умовах

$$w = \Phi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

в області складної форми Ω , обмеженої контуром Γ .

Коротко наведемо алгоритм розв'язку цієї задачі, який особливо ефективний для випадку області складної форми.

Частинним розв'язок бігармонічного рівняння [1]

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (3)$$

$$\text{де } r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Тоді розв'язком задачі для однорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta w = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

при крайових умовах

$$\begin{aligned} w &= \Phi(x, y) - w_1(x, y) = \tilde{\Phi}(x, y), \\ \frac{dw}{dn} &= \Psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) = \tilde{\Psi}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

буде сума бігармонічних потенціалів

$$w_{\Sigma}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}) = \iint_{\Gamma} (r^{2/3} \ln r) \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma + \frac{\partial}{\partial \nu} (r \ln r) \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma, \quad (6)$$

де μ_1, μ_2 – невідомі функції щільності.

Задоволення крайових умов (5) приводить до системи інтегральних рівнянь:

$$\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(x, y) \\ \tilde{\Psi}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

з якої будуть знайдені невідомі функції μ_1, μ_2 . Система (7) записана у матричному вигляді, де

$$A(\xi, \eta; x, y) = \left\| \begin{array}{cc} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \\ \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) & \frac{\partial}{\partial n \partial v} (r^2 \ln r) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 \\ \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial n} & \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial n} \end{array} \right\|. \quad (8)$$

Алгоритм розв'язку системи (7) детально розглянуто в [3].

Розв'язком задачі (1) – (2) буде сума функцій (3) і (6) з відомими μ_1, μ_2 . Або детальніше

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (G_1(\psi, \xi, \eta), G_2(\psi, \xi, \eta))_{(x, y) \in \Omega} \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta). \quad (9)$$

Для формулювання оптимізаційної задачі, необхідно записати розв'язок так, щоб у явному вигляді були присутні функції $\Phi(x, y)$ та $\Psi(x, y)$.

Виразимо μ_1, μ_2 з системи інтегральних рівнянь (7)

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} = A^{-1}(\xi, \eta; x, y) \cdot \begin{pmatrix} \Phi(x, y) \\ \Psi(x, y) \end{pmatrix}$$

і підставимо в розв'язок (9). Отримаємо:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (G_1(\psi, \xi, \eta), G_2(\psi, \xi, \eta))_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(\xi, \eta; x, y) \cdot \begin{pmatrix} \Phi(\xi, \eta) \\ \Psi(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta).$$

Тепер позначимо

$$\begin{aligned} & (G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)) = \\ & = (\tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta), \tilde{G}_2(x, y; \xi, \eta))_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(x, y; \xi, \eta). \end{aligned}$$

І тоді остаточно розв'язок задачі (1) – (2) матиме такий вигляд:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} G_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)) \begin{pmatrix} \phi(\xi, \eta) \\ \psi(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta), \quad (10)$$

де $G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)$ – називають функціями впливу правих частин.

Наведемо приклад, який ілюструє ефективність обраного підходу. Нехай модельна функція має вигляд $w(x, y) = x^4 / 24$. Тоді маємо задачу:

$$\Delta \Delta w(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\varphi(x, y)|_{\Gamma} = x^4 / 24, \quad \psi(x, y)|_{\Gamma} = (x^3 / 6) \cos(n \wedge x).$$

Чисельний розв'язок наведено в табл. 1.

Обираємо складний контур гіпоциклоїди, яка задається рівняннями

$$x = (R - r) \cos \varphi + d \cos \left(\frac{R - r}{r} \varphi \right)$$

$$y = (R - r) \sin \varphi + d \sin \left(\frac{R - r}{r} \varphi \right)$$

Розрахунки проведені для таких параметрів: нерухоме коло радіусом $R=6$, радіус твірного кола $r=1.2$, відстань до точки $d=1$.

Таблиця 1

Результати обчислень

(x, y)	w наближене	w точне	Похибка
(1.5, 4)	0.2108956	0.2109375	0.0000419
(2, 0.25)	0.6668450	0.6666667	0.0001783
(2.75, 3.5)	2.3957681	2.3829753	0.0127928
(4.25, 0.5)	13.594732	13.593913	0.000819
(6, 0)	54.002465	54.000000	0.002465

Таким чином, чисельні результати підтверджують ефективність запропонованого розв'язку. Отже, цей метод можна використати для розв'язування більш складних задач, які вимагають побудови ітераційного процесу, на кожному кроці якого розв'язується лінійна задача.

Задача 1. Ідентифікація функції правої частини однієї з крайових умов

Спочатку наведемо фізичний приклад. Як відомо, неоднорідне бігармонічне рівняння описує згин пластини при поперечовому навантаженні на неї, яке визначається функцією правої частини цього рівняння. Нехай маємо щільний півпростір з нескінченним наскрізним отвором форми Ω , в якому закріплено пластину такої ж форми.

Нехай значення однієї з крайових умов:

$$w(x, y) = \Phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Фізично це означає, що граничні точки пластини не зміщуються, тобто вона закріплена по контуру.

Функція $\psi(x, y)$ визначає тангенс кута нахилу α пластини в її граничних точках, тобто спосіб кріплення пластини (рис. 1).

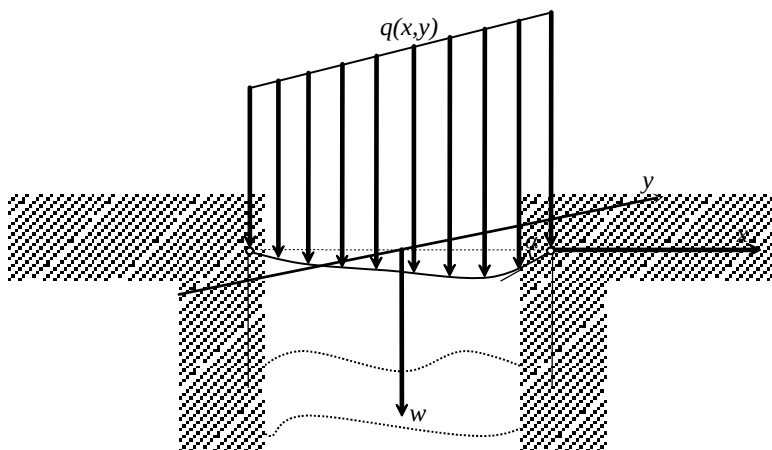


Рис. 1. Згин пластини під дією навантаження $f(x, y)$

Оптимізаційна задача полягає в тому, що необхідно відшукати такі кути нахилу крайових точок $tg\alpha(x, y) = \Psi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$, при яких сума квадратів прогинів по всій області пластини буде мінімальною [2].

Таким чином маємо задачу:

$$\Delta\Delta w = f(xy), \quad (xy) \in \Omega. \quad (11)$$

$$w = \varphi(x, y) \equiv 0, \quad \frac{dw}{dn} = \Psi(x, y), \quad (xy) \in \Gamma. \quad (12)$$

$$I(\Psi(xy)) = \iint_{\Omega} w_{xx}^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left[\iint_{\Omega} G_{xy}, \xi\eta \cdot f(\xi\eta) d\xi\eta + \right. \\ \left. + \iint_L (G_{xy}, \xi\eta), G_{xy}, \xi\eta \right) \left(\int_{\xi\eta}^{\xi\eta} \right) d\xi\eta \right]^2 dx dy \quad \min_{\Psi}. \quad (13)$$

Очевидно

$$\Psi(x, y) = \tilde{\Psi}(x, y) + \frac{dw_1}{dn}(x, y).$$

Задача 2. Ідентифікація функції правої частини бігармонічного рівняння

Поставимо подібну задачу, але цього разу будемо шукати таке поперечне навантаження, тобто функцію $f(x, y)$, щоб сума квадратів прогинів по всій області пластини була мінімальною і виконувалися задані крайові умови.

$$\Delta\Delta w = f(xy), \quad (xy) \in \Omega. \quad (14)$$

$$w = \varphi(x, y) \equiv 0, \quad \frac{dw}{dn} = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (15)$$

$$I(\Psi(xy)) = \iint_{\Omega} w_{xx}^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left[\iint_{\Omega} G_{xy}, \xi\eta \cdot f(\xi\eta) d\xi\eta + \right. \\ \left. + \iint_L (G_{xy}, \xi\eta), G_{xy}, \xi\eta \right) \left(\int_{\xi\eta}^{\xi\eta} \right) d\xi\eta \right]^2 dx dy \quad \min_f. \quad (16)$$

Задача 3. Оптимальне розбиття області

Постановки задач оптимального розбиття області та їх розв'язки для рівняння Лапласа наведені в [3; 4]. Природним чином виникає аналогічна задача для пластини, яку треба розбити на сегменти з різними навантаженнями, щоб сума квадратів прогинів по всій області пластини була мінімальною і виконувалися задані крайові умови.

Нехай $\Omega \subset E_2$ із гладкою границею Γ . Введемо в розгляд клас $P_N(\Omega)$ усіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин.

$$P_N(\Omega) = \left\{ \bar{\omega} = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i : \Omega_i \subset \Omega, i = \overline{1, N}, \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Нехай стан керованого об'єкта описується функцією $w(x, y) \in C^4(\Omega)$, яка задовольняє крайову задачу

$$\Delta \Delta w = f(x, y; \bar{\omega}), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (17)$$

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (18)$$

$$F = \left\{ f(xy; \bar{\omega}) : f(xy; \bar{\omega}) = f_i(xy), \right. \\ \left. x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i \in P_N(\Omega) \right\}. \quad (19)$$

Як керування $f(x, y; \bar{\omega})$ виступає функція правої частини бігармонічного рівняння, яка залежить від розбиття $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$ множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Множина допустимих керувань F являє собою клас кусково-неперервних на Ω функцій, які визначаються розбиттям $\bar{\omega}$ множини Ω таким чином, що для точок (x, y) кожної з підмножин $\Omega_i \in \bar{\omega} \in P_N(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$, функція керування $f(x, y; \bar{\omega})$ співпадає з однією із заданих функцій $f_i(x, y)$. Розв'язок крайової задачі, який відповідає функції $f(x, y; \bar{\omega})$, позначимо $w(x, y; \bar{\omega})$.

Необхідно визначити таке розбиття $\bar{\omega}^* \in P_N(\Omega)$, для якого функція $f(x, y; \bar{\omega})$ надавала б мінімальне значення функціоналу

$$\begin{aligned}
 I(f(x, y); \bar{\omega}) &= \iint_{\Omega} w(x, y)^2 dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \left[\iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Gamma} (G(x, y; \xi, \eta), G(x, y; \xi, \eta)) \cdot \begin{pmatrix} \phi(\xi, \eta) \\ \psi(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_{f(\xi, \eta)}
 \end{aligned}$$

Бібліографічні посилання

1. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1984. – 384 с.
2. **Боборикін В. Г.** Функции Грина для заземленной кирхгофовой пластины произвольного очертания / В.Г. Боборикін // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2013. – №5(17). – Т.2. – С. 21–29.
3. **Волошко Л. В.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми / Л. В. Волошко, О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія : Моделювання. – 2011. – №8(3). – Т.2. – С. 20–28.
4. **Кісельова О. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.
5. **Коряшкіна Л. С.** Решение одной задачи управления параболической системой / Л.С. Коряшкіна // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 94–102.

Надійшла до редколегії 02.06.2014

В.М. ⁴Богомаз

*Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна*

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто проблему побудови ефективних регуляризаторів в одному класі задач оптимізації механічних систем. Запропоновано спосіб апроксимації таких регуляризаторів у нерелексивних просторах.

Рассмотрена проблема построения эффективных регуляризаторов в одном классе задач оптимизации механических систем. Предложен способ аппроксимации таких регуляризаторов в нерелексивных пространствах.

The paper is sanctified to the problem of search of effective regularizators in one class of optimization problem of the mechanical systems. The method of approximation such regularizators in non-reflexive spaces is proposed.

Ключові слова: регуляризатор, апроксимація, нерелексивні простори.

Вступ. Як відомо, динаміка багатьох механічних процесів та об'єктів описується системами звичайних диференціальних рівнянь. Для визначення ефективних режимів протікання таких процесів та функціонування динамічних об'єктів широко залучаються задачі оптимального керування з нескаларним показником якості. Серед такого класу задач особливе місце займають ті, в яких цільове відображення діє в нескінченновимірний простір, наявні обмеження на керування та фазові змінні. За таких умов не можна однозначно стверджувати факт існування ефективних розв'язків. В якості способу доведення існування та побудови ефективних розв'язків у роботі [1] запропоновано залучати ефективні (Λ, μ) -регуляризатори обмежень. У результаті здійснення такого підходу розв'язується сімейство задач векторної оптимізації зі штрафом. У роботі [1] запропоновано загальну схему побудови регуляризаторів такого типу в задачах векторної оптимізації, розв'язки яких є елементами релексивних просторів, що в деякій мірі спрощувало процедуру побудови «штрафної» складової цільового відображення.

Основною метою цієї роботи є дослідження питання побудови ефективних регуляризаторів у класі задач векторної оптимізації, які означені на нерелексивних просторах, та створення алгоритму апроксимації регуляризаторів для конкретних типів обмежень, які найчастіше зустрічаються в практичних задачах.

Основні поняття та постановка задачі. Нехай керування системи є елементами простору $U = L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ та функції зміни станів системи належать до класу $X = W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n)$. Позначимо через τ добуток слабкої топології в $L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ та топології рівномірної збіжності в $W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n)$. Динаміка розглянутого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь І-го порядку з початковими умовами $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якість роботи такого об'єкта оцінюється цільовим відображенням $I: U \times X \rightarrow \mathbb{R}$, яке має властивість (Λ, μ) -напівнеперервності знизу.

Будемо вважати, що простір образів цільового відображення $Z = L^1(0, T)$ наділений слабкою топологією μ та частково впорядкований конусом невід'ємних елементів $\Lambda = \{f \in L^1(0, T) \mid f(t) \geq 0 \text{ м.т.т. } t \in (0, T)\}$.

Частковий порядок у просторі Z позначимо через $\leq_\Lambda$, що означає

$$z_1 \leq_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \{\theta_Z\}.$$

Означення 1. [3] Підмножину простору $Z \cup \{-\infty\}$ будемо називати Λ_μ -інфімумом відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ та позначати $\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x)$, якщо вона є ефективним Λ_μ -інфімумом образу $I(\Xi)$, тобто

$$\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x) = \begin{cases} \min(\text{cl}_\mu I(\Xi)), & \min(\text{cl}_\mu I(\Xi)) \neq \emptyset, \\ \{-\infty\}, & \min(\text{cl}_\mu I(\Xi)) = \emptyset, \end{cases}$$

де $\text{cl}_\mu I(\Xi)$ – μ -замикання образу цільового відображення $I(\Xi)$.

Нехай $\{u_k, x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність в Z . Позначимо через $L^\mu \{u_k, x_k\}$ множину всіх μ -граничних точок цієї послідовності. Нехай $(u^0, x^0) \in U \times X$ – деякий фіксований елемент, визначимо мно-жину

$$L^{\tau \times \mu}(I, (u^0, x^0)) = \bigcup_{\{u_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Theta_{\tau}(u^0, x^0)} L^{\mu}\{I(u_k, x_k)\},$$

де $\Theta_{\tau}(u^0, x^0)$ – сукупність усіх послідовностей $\{u_k, x_k\} \subset U \times X$ таких, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^0, x^0)$ в $U \times X$.

Означення 2. [3] Відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ називається (Λ, τ, μ) -напівнеперервним знизу в точці (v_y) , якщо виконується умова:

$$I(v_y) \in \liminf_{(u_x) \xrightarrow{\tau} (v_y)}^{\Lambda, \mu} I(u_x),$$

$$\text{де } \liminf_{(u_x) \xrightarrow{\tau} (v_y)}^{\Lambda, \mu} I(u_x) = \begin{cases} L_{\min}^{\tau \times \mu}(I, (v_y)), & L_{\min}^{\tau, \mu}(I, (v_y)) \neq \emptyset; \\ \inf_{(u_x) \xrightarrow{\tau} (v_y)}^{\Lambda, \mu} L^{\tau \times \mu}(I, (v_y)), & L_{\min}^{\tau, \mu}(I, (v_y)) = \emptyset; \end{cases}$$

$$L_{\min}^{\tau \times \mu}(I, (v_y)) = L_{\min}^{\tau \times \mu}(I, (v_y)) \quad \inf_{(u_x) \xrightarrow{\tau} (v_y)}^{\Lambda, \mu} I(u_x).$$

Математичною моделлю задачі визначення ефективних режимів роботи такої системи є задача векторної оптимізації з фазовими обмеженнями:

$$I(u_x) \xrightarrow{\inf}^{\Lambda, \mu}, \quad (1)$$

$$x = f(t, u_x) \text{ на } (0, T), \quad (2)$$

$$u \in \partial, \quad (3)$$

$$0(x) = 0, \quad (4)$$

$$F(u_x) \leq_{\Lambda} \theta, \quad (5)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

де $F: U \times X \rightarrow Z$ – задане нелінійне відображення, θ – нульовий елемент в $L^1(0, T)$, система (2) – (4) має такі властивості:

$$1) f(t, u_x) = f(t, x) - b(t, x);$$

$$2) \text{ відображення } a: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ та } b: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}:$$

а) є вимірними за Лебегом відносно t для будь-яких x ;

б) є неперервними за x для майже всіх $t \in (0, T)$;

в) існують такі функції $\alpha, \beta \in L^1(0, T)$ та константи $c, d > 0$, що для

будь-яких $x_{12} \in \mathbb{R}^n$ виконуються такі нерівності:

$$\begin{aligned}\|a(t, x_1) - a(t, x_2)\|_n &\leq \alpha(t) \|x_1 - x_2\|_n, \|a(t, 0)\|_n \leq \beta(t), \\ \|b(t, x_1) - b(t, x_2)\|_n &\leq c \|x_1 - x_2\|_n, \|b(t, 0)\|_n \leq d.\end{aligned}$$

Нехай надалі U_∂ є слабо компактною підмножиною простору $L^1(0, TR^m)$ (умови слабкої компактності встановлює теорема Данфорда–Петтіса [4]), K є замкнутою відносно топології рівномірної збіжності множиною в $W^{1,1}(0, TR^n)$. Означимо таку множину допустимих пар:

$$\Xi = \{(u_x) \in U \times X \mid u = f(t, u_x), u \in U_\partial, x(0) = x_0, x \in K \text{ f.u.t.}, t \in \Theta\}. \quad (7)$$

Як було показано в роботі [1] для розв'язування подібних задач доречно залучати поняття ефективного (Λ, μ) -регуляризатора. У зв'язку з цим множину Ξ запропоновано представити як перетин двох множин Ξ_1 (включає обмеження (2) – (5)) та K таких, що задача (1) – (5) є регулярною, та розглянути послідовність задач векторної оптимізації зі штрафом:

$$I_\varepsilon(u_x) = I(u_x) + \varepsilon \beta^1(u_x) \longrightarrow \inf_{(u_x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} I_\varepsilon(u_x), \quad (8)$$

де $\varepsilon > 0$ – параметр штрафу, $\beta: U \times X \rightarrow Z$ – відображення, яке задовольняє умовам: $\beta(u_x) = 0$ для всіх $(u_x) \in \Xi$ та $\beta(u_x) >_\Lambda 0$ для всіх $(u_x) \notin K$.

Означення 3. [3] При фіксованому $\varepsilon > 0$ пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ називається (Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі (8), якщо виконується умова $(I_\varepsilon(u^*, x^*) - \Lambda) \cap \text{cl}_\mu I_\varepsilon(\Xi_1) = \{I_\varepsilon(u^*, x^*)\}$.

Означення 4. [1] Пару $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ будемо називати (Λ, μ) -регуляризатором множини K , якщо виконується умова: $\beta(u^*, x^*) \in \inf_{(u, x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} \beta(u, x)$. Позначимо сукупність всіх (Λ, μ) -регуляризаторів множини K через Δ .

Означення 5. [1] (Λ, μ) -регуляризатор $(\tilde{u}, \tilde{x}) \in \Xi_1$ множини K будемо називати ефективним, якщо виконується умова $I(\tilde{u}, \tilde{x}) \not\geq_\Lambda I(u, x), \forall (u, x) \in \Delta$.

Слід зауважити, що найчастіше в практичних задачах оптимального керування зустрічаються фазові обмеження такого вигляду:

$$a) K_1 = \{x \in X \mid \varphi(t, x) \geq c \text{ мс. на } (0, T)\}, c - \text{задане число};$$

$$b) K_2 = \{x \in X \mid \|x\| \leq \delta \text{ на } (0, T)\}, \alpha, \gamma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n);$$

с) $K_3 = \{x \in X \mid \|x - y\|_Y \leq \delta \text{ на } \Omega \subset (0, T)\}$, де Y – лінійний нормований простір такий, що $X \subset Y$, $\delta > 0$ – задана константа, Ω – довільний заданий інтервал відрізка $(0, T)$, $y \in Y$ – заданий фіксований елемент;

д) $K_4 = \{x \in X \mid \|G(x) - G^*\| \leq \eta\}$ де Q – лінійний нормований простір такий, що $Q \subset Y$; $G: X \rightarrow Q$ – заданий оператор; $\eta, G^* \in Q$ – задані розподілення.

У роботі [3] показано, що за зроблених вище припущень множина Ξ_1 , яка включає обмеження (2)–(5) є τ -компактною в просторі $U \times X$.

Існування регуляризатору в означеному класі задач. У роботі [1] доведено результат, який торкається існування ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів за умови, що відображення $\beta(u, x)$ є секвенційно напівнепрервним знизу відносно відповідних топологій. Встановимо факт існування ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів у задачі (1)–(6), коли відображення $\beta(u, x)$ має більш слабку властивість, зокрема, (Λ, μ) -напівнепрервність знизу.

Теорема 1. Нехай множина Ξ_1 є τ -компактною в $U \times X$ та відображення $\beta(u, x)$, $I(u, x)$ є (Λ, μ) -напівнепрервними знизу. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ задача (8) має непорожню множину (Λ, μ) -ефективних розв'язків, якщо виконується умова:

$$\{\beta(u_{\varepsilon k}, x)\} = \liminf_{(u_{\varepsilon k}) \xrightarrow{\tau} (u_{\varepsilon})}^{\Lambda, \mu} (u_{\varepsilon}) \quad (u_{\varepsilon}).$$

Доведення. За аналогією з доведенням теореми 3.2 у роботі [2], маємо: відображення $I_{\varepsilon}(u, x)$ є обмеженим на множині Ξ_1 при кожному $\varepsilon > 0$.

Нехай ξ є довільним елементом $\inf_{(u_{\varepsilon k}) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} I_{\varepsilon}(u_{\varepsilon k}, x)$. Тоді існує послідовність $\{(u_{\varepsilon k})\} \subset \Xi_1$ така, що $I_{\varepsilon}(u_{\varepsilon k}, x) \xrightarrow{\mu} \xi$ в $0,1(T)$ при $k \rightarrow \infty$. Із τ -компактності множини Ξ_1 випливає існування допустимої

пари $(u_k, x_k) \in \Xi_1$ такої, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_{\infty}, x_{\infty})$. Таким чином, $\xi \in L^{\tau\beta}(I_{\infty}, (u_{\infty}, x_{\infty}))$, звідки випливає співвідношення

$$L^{\tau\beta}(I_{\infty}, (u_{\infty}, x_{\infty})) \cap \inf_{(u_k, x_k) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} I_{\infty}(u_k, x_k) \neq \emptyset.$$

За попередніми припущеннями відображення $\beta(u, x) \in (\Lambda, \tau, \mu)$ -напівнеперервним знизу, отже, воно задовольняє властивості

$$\beta(u_k, x_k) \in \liminf_{(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u, x)}^{\Lambda, \mu} (u_k, x_k), \quad \forall (u, x) \in \Xi_1.$$

Тому $\varepsilon^{-1}\beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}) \nearrow_{\Lambda} \eta$, $\forall \eta \in L^{\tau\beta}(\varepsilon^{-1}\beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}))$.

Враховуючи початкові припущення, при $k \rightarrow \infty$ маємо

$$I(u_k, x_k) + \varepsilon^{-1}\beta(u_k, x_k) = I_{\varepsilon}(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi \text{ в } 0,1(T).$$

Покажемо, що виконується співвідношення

$$\xi \leq_{\Lambda} a + \varepsilon^{-1}\beta(u_{\infty}, x_{\infty}), \quad \forall \eta \in \liminf_{(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_{\infty}, x_{\infty})}^{\Lambda, \mu} I(u_k, x_k). \quad (9)$$

Для цього припустимо, що це не так. Отже, існує елемент $a^* \in \liminf_{(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_{\infty}, x_{\infty})}^{\Lambda, \mu} I(u_k, x_k)$ такий, що виконується умова

$$\xi \leq_{\Lambda} a^*, \quad \varepsilon^{-1}\beta(u_{\infty}, x_{\infty}). \quad (10)$$

У цьому випадку елемент ξ має подання

- (i) $\xi = a_1 + \varepsilon^{-1}\beta(u_{\infty}, x_{\infty})$;
- (ii) $\xi = a_2 + \varepsilon^{-1}\zeta$, $\zeta \in L^{\tau\beta}(\varepsilon^{-1}\beta(u_{\infty}, x_{\infty}))$.

Розглянемо випадок (i). Тоді виконується співвідношення $a_{11} + \varepsilon^{-1}\beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}) \leq_{\Lambda} a^* + \varepsilon^{-1}\beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}) \Rightarrow a_{11} \leq_{\Lambda} a^*$, але це суперечить умові $a^* \in \liminf_{(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_{\infty}, x_{\infty})}^{\Lambda, \mu} I(u_k, x_k)$.

Розглянемо випадок (ii), тоді

$$a_{22} + \varepsilon^{-1}\zeta \leq_{\Lambda} a^* + \varepsilon^{-1}\beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}) \Rightarrow a + \varepsilon^{-1}(\zeta - \beta(u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon})) \leq_{\Lambda} a^*. \quad (11)$$

Другий доданок лівої частини співвідношення задовольняє одній з трьох умов:

1) $(\zeta\beta^-(u_{\varepsilon x})) \in \Lambda$, тоді $a\alpha \leq_{\Lambda} *$, що суперечить умові $a^* \in \liminf_{(u_{\varepsilon x}) \xrightarrow{\tau} (u_{\varepsilon\varepsilon x})}^{\Lambda, \mu} I(u_{\varepsilon x})$;

2) $(\zeta\beta^-(u_{\varepsilon x})) \in (\Lambda)$, тоді відображення β не задовольняє умові (Λ, μ) -напівнеперервності знизу;

3) випадок $(\zeta\beta^-(u_{\varepsilon x})) \notin \Lambda \cup (\Lambda)$ виключається за рахунок співвідношення $\{\beta(u_{\varepsilon\varepsilon x})\} = \liminf_{(u_{\varepsilon x}) \xrightarrow{\tau} (u_{\varepsilon\varepsilon x})}^{\Lambda, \mu} (u_{\varepsilon x})$.

Таким чином, приходимо до висновку, що нерівність (10) є хибною, тобто пара $(u_{\varepsilon x}) \in (\Lambda, \mu)$ -ефективним розв'язком задачі (8) – (9) при фіксованому $\varepsilon > 0$. Теорема доведена.

Залучаючи ідею доведення теореми 3.6 в роботі [2], легко довести наступне.

Теорема 2. Нехай множина Ξ_1 є τ -компактною в $U \times X$ та відображення $\beta(u_x)$, $I(u_x) \in (\Lambda, \mu)$ -напівнеперервними знизу. Тоді задача (1)–(6) має непорожню множину ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів множини K .

Очевидно, що при виконанні вищезроблених припущень задача (1)–(6) задовольняє умовам теорем 1, 2. Отже, проблема побудови ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів полягає у виборі конструкції відображення β для конкретних обмежень. Для обмежень типу а) та б) залучимо відображення типів

$$\beta(u_x) = |x(t) - c| - (x(t) - c), \quad (12)$$

$$\beta(u_x) = |x(t) - \alpha(t)| - (x(t) - \alpha(t)) + |\gamma(t) - x(t)| - (\gamma(t) - x(t)). \quad (13)$$

Очевидно, що внаслідок властивості неперервності модуля відображення β у вигляді (12) та (13) є неперервним відносно топології рівномірної збіжності в просторі $C(0, TR^n)$, а отже, відносно τ -топології в просторі UX .

Природа обмеження с) пояснюється тим, що в деяких задачах фазова траєкторія об'єкта керування має бути близькою до заданої функції $y(t)$ на величину δ за нормою відповідного простору Y або поточково близь-

кою на інтервалі розглянутого відрізка часу $\Omega \subset (0, T)$. Отже, обмеження K_3 може породжуватися двома типами нерівностей:

$$1) \|xy\|_Y \leq \delta, \quad Y = L^p(0, TR^n), \quad (1 \leq p \leq \infty);$$

$$2) |x(t) - y(t)| \leq \delta(t) \quad \text{на} \quad \Omega \subset (0, T), \quad \delta \in Y, \quad Y = L^p(0, TR^n), \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Для обмеження 1) пропонується залучити відображення типу

$$\beta(u_x) = \left(\|x - y\|_{L^p(0, TR^n)} - \delta \right)^+ + \|x - y\|_{L^p(0, TR^n)}^{-\delta} c, \quad (14)$$

де $c \in \Lambda$, $\forall \delta \in [1, \infty)$.

З неперервності вкладення простору $W^{1,1}(0, TR^n)$ в $C(0, TR^n)$ та властивості неперервності модуля впливає неперервність відображення β відносно топологій τ та μ у відповідних просторах. Для обмеження другого типу рекомендовано обрати неперервне відображення β вигляду

$$\beta(u_x) = \|x(t) - y(t)\| \chi_{\Omega} \delta(t) + |x(t) - y(t)| \chi_{-\delta(t)}, \quad (15)$$

де χ_{Ω} – характеристична функція інтервалу $\Omega \subset (0, T)$.

Фізичне значення обмеження d) пояснюється тим, що величина, яка є залежною від фазової траєкторії системи, має бути поточною близькою до заданого розподілення G^* на величину $\eta(t)$ на інтервалі розглянутого відрізка часу $\Omega \subset (0, T)$. Покладемо в якості простору Q клас функцій $L^p(0, T)$ ($1 \leq p < \infty$). Нехай оператор $G_X \rightarrow Q$ є неперервним відносно топології τ в $U \times X$ та слабкої топології $L^p(0, T)$. За цих умов для регуляризації обмеження K_4 пропонується розглянути відображення

$$\beta(u_x) = \|G(x) - G^*\| \chi_{\Omega} \eta(t) + |G(x) - G| \chi_{-\eta(t)}. \quad (16)$$

Зауваження 1. Відображення (16) можна залучати, якщо $Q = L^\infty(0, T)$ (у цьому випадку необхідно, щоб відображення G було неперервним відносно $*$ -слабкої топології простору Q). Якщо обмеження K_4 поро-

джено рівністю $G(x) = G^*$ на Ω , тоді можна використати відображення $\beta(x) = |G(x) - G^*|_{\Omega}$.

Висновки. Для означеного класу задач векторної оптимізації з фазовими обмеженнями запропоновано схему апроксимації ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів у нереклексивних просторах, залучаючи ідею методу штрафів. Доведено результат, який торкається існування таких регуляризаторів, якщо «штрафна» складова цільового відображення є (Λ, μ) -напівнеперервною знизу. Наведено конструкції «штрафної» складової цільового відображення для конкретних типів обмежень.

Бібліографічні посилання

1. **Богомаз В.М.** Про регуляризацію фазових обмежень в одному класі задач векторної оптимізації / В.М. Богомаз, І.В. Нечай // Системні технології. – Д.: Вид-во НМетАУ. 1(78) 2012. – С. 18–25.
2. **Богомаз В.М.** Про оптимізацію одного класу динамічних систем з фазовими обмеженнями : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Богомаз Володимир Миколайович. – Д., 2012. – 126 с.
3. **Богомаз В. Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями / В. Н. Богомаз, П. И. Когут // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №3. – С. 31–45.
4. **Буттацо Дж.** Одномерные вариационные принципы. Введение / Дж. Буттацо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт – Новосибирск : Науч. книга. – 2002. – 248 с.
5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В.А. Треногин – М. : Наука, 1980. – 496 с.

Надійшла до редколегії 01.02.2014

Т. А. ⁵Божанова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ КЕРУВАННЯ НА МЕРЕЖІ

Наведено гідродинамічну модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що транспортний потік на ребрах мережі є об'єктом керування, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Оскільки множина ефективних розв'язків такої задачі не є порожньою, доведено існування її узагальнених розв'язків.

Приведена гидродинамическая модель для транспортного потока на сети. В предположении, что транспортный поток на ребрах сети является объектом управления, ставится задача его оптимизации в векторной форме. Так как множество эффективных решений такой задачи не пусто, доказано существование ее обобщенных решений.

We consider the traffic flow models on networks in vector-valued optimization statement, where the flow is controlled on the edges of network. As the set of the efficient solutions of this problem is not empty, we prove the existence of its generalized solutions.

Ключові слова: транспортний потік на мережі, гідродинамічна модель, векторна оптимізація, узагальнені розв'язки.

Вступ. На сьогодні існує ціла низка робіт як вітчизняних, так і зарубіжних, присвячених проблемі моделювання руху транспортних потоків [2; 3], розробці необхідних умов оптимальності та оптимальних законів керування такими процесами у припущенні, що якість керування на мережі оцінюється за усередненими параметрами [4; 5]. Проте більш ефективними є дослідження проблеми оптимізації транспортних потоків з точки зору задач векторної оптимізації, які є більш точними моделями реальних процесів. Разом з тим, проблема розв'язності задач векторної оптимізації в нормованих просторах не є тривіальною, оскільки існування розв'язків таких задач та їх властивості суттєво залежать від багатьох чинників, наприклад, від властивостей цільового відображення, від властивостей множини допустимих розв'язків, від порядкового конуса, від вибору топологій у цільовому просторі тощо.

У даній роботі головним об'єктом дослідження виступає гідродинамічна модель транспортного потоку на мережі, що складається зі скінченної сукупності доріг, які з'єднані певними вузлами. Припускається, що якість керування транспортним потоком на ребрах мережі визначається не скалярним відображенням у простір $L^2(\Omega_T)$, який упорядкований за конусом Λ додатних елементів. За цих припущень встановлено, що поставлена задача векторної оптимізації з розподіленими параметрами на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків [1]. Використовуючи загальновідомий метод побудови розв'язків задач векторної оптимізації, а саме застосовуючи процедуру скаляризації, доведемо існування узагальнених розв'язків такої задачі.

Постановка задачі. Нехай $\Omega = (\tilde{I}, \tilde{J})$ – транспортна мережа, котра налічує строго N доріг. Для $i \in \{1, \dots, N\}$ дорога I_i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$, $\rho_i = \rho_i(t, x)$ – щільність машин на дорозі I_i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$, $\rho_{\max, i}$ – максимально можлива щільність на дорозі, котра відповідає появі затору на даній ділянці мережі. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графу Φ , обмеженому областю Ω , а вузли, які з'єднують дороги, – вершинам цього графу. Припускається, що на кожному ребрі мережі динаміка руху описується таким нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних 1 -го порядку [6]:

$$\partial_t \rho_i(t, x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = u_i, (t, x) \in (0, T) \times (a_i, b_i) \equiv \Omega_{i,T}$$

з початковими умовами

$$\rho_i(0, x) = \bar{\rho}_i(x), \forall x \in (a_i, b_i) \quad (2)$$

та функцією потоку

$$f(\rho) = v(\rho)\rho, \quad (3)$$

де $v(\rho)$ – швидкість машин, при цьому $v(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ , а функції потоку $f_i(\rho)$ мають задовольняти умовам:

- 1) $f_i(\rho)$ неперервно диференційовні на $[0, \rho_{\max, i}]$; 2) $f_i(0) = f_i(\rho_{\max, i}) = 0$;
- 3) f_i – строго увігнуті; $\exists \sigma \in (0, \rho_{\max, i}) : f'_i(\sigma) = 0$ та $(\rho - \sigma_i) f'_i(\rho) < 0$, $\forall \rho \neq \sigma_i$. Вважається, що у кожному вузлі J з n вхідними ребрами

$I_1, \dots, I_n$ та m вихідними ребрами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ виконується умова балансу

$$\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(t, b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t, a_i)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall J \in \tilde{J};$$

задана матриця розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ з властивостями

$$\begin{aligned} A(J) &= [\alpha_{ji}(J)], \quad j \in \{n+1, \dots, n+m\}, i \in \{1, \dots, n\}, \\ \alpha_{ji}(J) &\neq \alpha_{ji'}(J), \quad \forall i' \neq i, 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) &= 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

та $\forall k \in R$ виконується ентропійна умова Кружкова на мережі

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i - k) (\partial_t \Phi + \text{sgn}(\rho_i - k) (f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \Phi) dx dt \geq 0,$$

для довільних гладких функцій Φ та $\Phi: [0, T] \times I_i \rightarrow R$ з компактними носіями на множині $(0, T) \times (a_i, b_i)$. За цих припущень можна гарантувати існування та єдиність слабкого розв'язку задачі Коші в класі функцій з обмеженою повною варіацією.

Пов'яжемо із задачею (1) – (3) таку задачу векторної оптимізації:

$$\begin{cases} \text{знайти } u^* \in U_{ad} \text{ такі, що} \\ F(u^*, \rho(u^*)) \in \text{Sup}_{u \in U_{ad}}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) \end{cases} \quad (4)$$

де $u = (u_1, \dots, u_N)$ – функції керування транспортним потоком, які задані на ребрах мережі; $F: U_{ad} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega)$ – цільове відображення; Λ – упорядкований конус додатних елементів у просторі $X = L^2(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^2(\Omega_{N,T})$; ω – слабка топологія простору X ; функція щільності $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N): \Omega_T \rightarrow R^N$, $\rho_i \in L^\infty(0, T; BV(I_i))$,

$i = \overline{1, N}$, задовольняє таким умовам:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_t \partial_t \phi + f_i(\rho_i) \partial_x \phi) dx dt = \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} u_i dx dt, \\ \forall \phi \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \quad \forall I_i \in \tilde{I}, \quad i = \overline{1, N}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i - k |\partial_t \tilde{\phi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\phi}) dx dt \geq 0, \\ \forall k \in R, \forall \tilde{\phi} \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \tilde{\phi} \geq 0, \forall i = \overline{1, N}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i \text{ на } I_i, \quad \forall i = \overline{1, N}; \quad (7)$$

$$\begin{cases} f_j(\rho_j(\cdot, a_j^+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)), \\ \forall J \in \tilde{J}, \forall j = n+1, \dots, n+m; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального} \\ \text{значення на парі } (u^k, \rho) \text{ при обмеженнях (5) - (8)}. \end{cases} \quad (9)$$

Припускається, що функції керування u_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ належать множині $U = \prod_{i=1}^N L^\infty(\Omega_{i,T})$ і виконуються такі умови:

- 1) $f = (f_1, \dots, f_N): R \rightarrow R^N$ – локально Ліпшицева функція;
- 2) множиною допустимих керувань U_{ad} виступає обмежена підмножина в U , яка є замкнутою в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

У якості такої множини допустимих керувань візьмемо множину функцій, які є обмеженими майже скрізь та мають обмежену повну варіацію, тобто

$$\tilde{U}_{ad} = \left\{ u \in \prod_{i=1}^N (L^\infty(\Omega_{i,T}) \cap BV(\Omega_{i,T})) \mid \|u_i\|_{L^\infty(\Omega_{i,T})} \leq c_i, \|u_i\|_{BV(\Omega_{i,T})} \leq d_i \right\}.$$

У роботі [1] показано, що будь-яка послідовність $\{u^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)\}_{k=1}^\infty \subset \tilde{U}_{ad}$ містить підпослідовність, яка збігається сильно до деякого $u^* \in \tilde{U}_{ad}$ у просторі $L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

Означення 1. Будемо казати, що задача (4) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \dots, f_N)$ існує пара $(u, \rho) \in \tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))$, де $\rho = \rho(u)$ – це відповідний розв'язок задачі (4) – (9) і такий, що $F(u, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega_T)$.

Позначемо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (4) – (9). Очевидно, що $\Xi \subset \tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))$. У роботі [1] було доведено, що Ξ є секвенційно компактною відносно τ -збіжності, де τ – це топологія на $Y = \tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega))$, яка задана як добуток сильної збіжності в $L^1(\Omega_T)$ та слабкої топології в просторі $L^2(0, T; BV(\Omega))$.

Означення 2. Пару $(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати (Λ, ω) -ефективним розв'язком задачі (4) – (9), якщо пара (u^{eff}, ρ^{eff}) реалізує (Λ, ω) -супремум відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$, тобто

$$F(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \sup_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) = \sup^{\Lambda, \omega} \{F(u, \rho) : \forall (u, \rho) \in \Xi\}.$$

Позначимо через $Eff_\omega(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω) -ефективних розв'язків задачі (4)-(9) та нехай $\hat{F} : [\tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))] \rightarrow Y^\bullet$ – деяке розширення відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$ на весь простір $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тут через $Y^\bullet$ позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega_T) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 3. Будемо казати, що відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T) \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -напівнеперервним зверху $((\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв.) у точці $(u^0, \rho^0) \in \Xi$, якщо $F(u^0, \rho^0) \in \limsup_{(u, \rho) \rightarrow (u^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} \hat{F}(u, \rho)$. Відображення $F \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на множині Ξ , якщо $F \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на кожній парі з Ξ .

Оскільки множина Ξ допустимих пар є секвенційно компактною в заданій топології τ , то це дає підстави гарантувати розв'язність широкого класу оптимізаційних задач для транспортних потоків на мережах. Отже, наведемо теорему, яка торкається існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (4) – (9) (доведення див. у [1]).

Теорема 1. Припустимо, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. відображення

$F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$. Тоді задача (4) – (9) має непорожню множину (Λ, ω) -ефективних розв’язків.

Як відомо, загальним методом побудови розв’язків задач векторної оптимізації є залучення процедури їх скаляризації. Тож пов’яжемо із задачею векторної оптимізації (4) – (9) скалярну задачу

$$F_\lambda(u, \rho) = \int_{\Omega} F(u, \rho) \lambda(x) dx \rightarrow \sup, \quad (10)$$

$$(u, \rho) \in \tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega)),$$

де λ – це елемент конуса

$$\Lambda = \left\{ f = (f_1, \dots, f_N) \in L^2(\Omega) : f_i(x) \geq 0 \text{ м.с. на } \Omega = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i) \right\}$$

Функціонал F_λ називатимемо λ -згорткою відображення F .

Узагальнені розв’язки. Нехай λ – довільний елемент конуса Λ . Позначимо через

$$Sol(\Xi; F_\lambda) := \underset{(u, \rho) \in \Xi}{\text{Arg max}} F_\lambda(u, \rho)$$

множину розв’язків скалярної задачі (10).

Наведемо допоміжні означення, які будуть потрібні у подальшому.

Означення 4. Будемо казати, що послідовність $\{u^k, \rho^k\}_{k=1}^\infty \subset \Xi$ є максимізуючою для задачі векторної оптимізації (4) – (9), якщо

$$F(u^k, \rho^k) \rightarrow \xi \text{ слабо в } L^2(\Omega_T),$$

де ξ – елемент з множини $\text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$.

Означення 5. Будемо казати, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре обумовленою відносно τ -топології на Y , якщо вона є розв’язною і кожна максимізуюча послідовність $\{u^k, \rho^k\}_{k=1}^\infty \subset \Xi$ містить підпослідовність, τ -збіжну до деякої пари з $\text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda)$. У цьому випадку максимізуючу послідовність називають максимізуючою послідовністю за Тихоновим. Також будемо казати, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре поставленою за Тихоновим відносно τ -топології на Y , якщо вона є розв’язною, і кожна максимізуюча

послідовність з множини $\Xi \setminus \text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda)$ має τ -граничну пару у множині $\text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda)$.

Означення 6. Будемо казати, що пара $(u^*, \rho^*) \in \Xi$ є $(\tau; \omega)$ -узагальненим розв'язком задачі (4) – (9), якщо існує послідовність $\{u^k, \rho^k\}_{k=1}^\infty$ з множини Ξ та елемент $\xi \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$ такі, що $(u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*, \rho^*)$ в Y і $F(u^k, \rho^k) \rightarrow \xi$ слабо в $L^2(\Omega_T)$.

Позначимо через $\text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх $(\tau; \omega)$ -узагальнених розв'язків задачі (4) – (9). Очевидно, що $\text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda) \subseteq \text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda)$. Проте у загальному випадку, обернене включення $\text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda) \subset \text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda)$ не є правильним. Логічним наслідком теореми 1 є наступний результат.

Твердження 1. За умови виконання припущень теореми 1 задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре поставленою за Тихоновим відносно τ -топології на Y , і при цьому

$$\text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda) = \text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda).$$

Для того, щоб отримати суттєві умови, які б гарантували, що множина $(\tau; \omega)$ -узагальнених розв'язків задачі (4) – (9) не є порожньою, скористаємося скалярним представленням цієї задачі у вигляді (10).

Нехай $sc_\tau^- F_\lambda : \Xi \rightarrow R$ – τ -напівнеперервна зверху регуляризація функціонала

$$F_\lambda(u, \rho) = \int_{\Omega} F(u, \rho) \lambda(x) dx \text{ з деяким } \lambda \in \Lambda,$$

тобто $sc_\tau^- F_\lambda$ є найменшим τ -напівнеперервним зверху функціоналом, який задовольняє умову $sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho) \geq F_\lambda(u, \rho)$, $\forall (u, \rho) \in \Xi$. Тоді, згідно з прямим методом варіаційного числення, маємо:

Твердження 2. Нехай $\Xi \subset \tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))$, $\Xi \neq \emptyset$. Тоді для фіксованого $\lambda \in \Lambda$ кожна максимізуюча послідовність для скалярної задачі

$$\sup_{(u, \rho) \in \Xi} sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho) \quad (11)$$

має τ -граничну пару, яка є максимумом $sc_\tau^- F_\lambda$ на Ξ , тобто $Sol(\Xi; sc_\tau^- F_\lambda) \neq \emptyset$.

Теорема 2. Припустимо, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є регулярною. Нехай задано цільове відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$ (не обов'язково $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -напівнеперервне зверху на Ξ). Тоді має місце таке включення:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda^\#} \text{Arg max}_{(u, \rho) \in \Xi} sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho) \subseteq \text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda). \quad (12)$$

Доведення. Для початку зауважимо, що для конуса додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega_T)$ маємо: $\text{cor}(\Lambda) \subset \Lambda^\#$. Тому квазивнутрішність $\Lambda^\#$ конуса Λ не є порожньою. Нехай λ – довільний елемент з $\Lambda^\#$. Тоді, згідно з твердженням 2, існує принаймні одна пара $(u^*, \rho^*) \in \Xi$ така, що

$$(u^*, \rho^*) \in \text{Arg max}_{(u, \rho) \in \Xi} sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho). \quad (13)$$

Оскільки $sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho) \in \tau$ -нн. зв. границею функціонала $F_\lambda(u, \rho)$, то існує послідовність $\{u^k, \rho^k\}_{k=1}^\infty \subset \Xi$ така, що $(u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*, \rho^*)$ та

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega F(u^k, \rho^k) \lambda(x) dx &= sc_\tau^- F_\lambda(u^*, \rho^*) \geq \\ &\geq sc_\tau^- F_\lambda(u, \rho) \geq \int_\Omega F(u, \rho) \lambda(x) dx, \quad \forall (u, \rho) \in \Xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Оскільки $\Lambda^\# \setminus \{0\}$ непорожній випуклий конус в $L^2(\Omega_T)$ з непорожньою алгебраїчною внутрішністю, то цей конус є відтворюючим в

$L^2(\Omega_T)$, тобто $[\Lambda^\# \cup 0] - [\Lambda^\# \cup 0] = L^2(\Omega_T)$. Тоді в просторі $L^2(\Omega_T)$ впорядкований конус Λ є нормованим відносно норми топології $L^2(\Omega_T)$, тобто

$$y <_\Lambda z \Rightarrow \|y\|_{L^2(\Omega_T)} < \|z\|_{L^2(\Omega_T)}. \quad (15)$$

Тепер, повертаючись до виразу (14), отримуємо: існує число $\hat{k} \in \mathbb{N}$ і елемент $\hat{y} \in L^2(\Omega_T)$ такі, що

$$\int_{\Omega} F(u^k, \rho^k) \lambda(x) dx > \int_{\Omega} \hat{y} \lambda(x) dx, \quad \forall k > \hat{k}.$$

Оскільки $\lambda \in \Lambda^\#$, то це означає, що $F(u^k, \rho^k) >_\Lambda \hat{y}$ для всіх $k > \hat{k}$. Використовуючи властивість (15), приходимо до висновку, що існує константа $C > 0$ така, що $\|F(u^k, \rho^k)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C$ для всіх $k > \hat{k}$. Тому

можемо припустити, що послідовність $\{F(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в $L^2(\Omega_T)$. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, існує елемент $\eta \in L^2(\Omega_T)$ і підпослідовність з послідовності $\{F(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty$ (для якої збережемо той же індекс k) такі, що $F(u^k, \rho^k) \rightarrow \eta$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $k \rightarrow \infty$.

Припустимо тепер, що

$$(u^*, \rho^*) \notin \text{GenEff}_{\tau, \omega}(\Xi; F; \Lambda). \quad (16)$$

Тоді, згідно з означенням 6, $\eta \notin \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$. Звідси випливає, що існує елемент $\xi \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$ такий, що $\xi >_\Lambda \eta$. Тому $\xi - \eta \in \Lambda \setminus \{0\}$, і використовуючи той факт, що $\lambda \in \Lambda^\#$, приходимо до нерівності

$$\int_{\Omega} \eta(x) \lambda(x) dx < \int_{\Omega} \xi(x) \lambda(x) dx, \quad (17)$$

яка еквівалентна тому, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u, \rho) \lambda(x) dx < \int_{\Omega} \xi(x) \lambda(x) dx$.

З іншого боку, для елемента $\xi \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$ існує послідовність

$\{u^k, \rho^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ така, що $F(\tilde{u}^k, \tilde{\rho}^k) \rightarrow \xi$ слабо в $L^2(\Omega_T)$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ -компактною, то можемо припустити, що

$(\tilde{u}^k, \tilde{\rho}^k) \xrightarrow{\tau} (\tilde{u}^*, \tilde{\rho}^*)$. Тоді, згідно з нерівністю (14), маємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u^k, \rho^k) \lambda(x) dx \geq \int_{\Omega} F(\tilde{u}^i, \tilde{\rho}^i) \lambda(x) dx, \quad \forall i \in N. \quad (18)$$

Переходячи до границі у (18), отримаємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u^k, \rho^k) \lambda(x) dx \geq \int_{\Omega} \xi(x) \lambda(x) dx.$$

Проте це суперечить нерівності (17), а отже і (16). Таким чином, (u^*, ρ^*) є $(\tau; \omega)$ -узагальненим розв'язком задачі векторної оптимізації (4) – (9).

Висновки. У роботі досліджено з точки зору задач векторної оптимізації проблему керування транспортними потоками на мережах, динаміка руху яких описується нелінійними законами збереження, що приводять до розгляду системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних 1-го порядку. Залучаючи процедуру скаляризації задач векторної оптимізації та ідеологію регуляризації за Тихоновим, було доведено існування узагальнених розв'язків поставленої задачі векторної оптимізації, які можна розглядати як альтернативу ефективним.

Бібліографічні посилання

1. **Божанова Т. А.** Про одну задачу керування з розподіленими параметрами на транспортній мережі / Т. А. Божанова // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. – 2011. – Т. 19, № 8. – С. 114–127.
2. **Гук В. І.** Транспортні потоки: теорія та її застосування в урбаністиці: моногр. / В. І. Гук, Ю. М. Шкодоський. – Х. : "Золоті сторінки", 2009. – 232 с.
3. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях / БН. Четвёрушкин, М.А. Трапезникова, И. Ф. Фурманова, Н.Г. Чурбанова // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, №4. – С.163–168.
4. **Garavello M.** Traffic Flow on Networks / M. Garavello, B. Piccoli // AIMS Series on Appl. Math. – 2006. – Vol. 1. – P. 243.
5. **Gugat M.** Optimal Control for Traffic Flow Networks / M. Gugat, M. Herty, A. Klar, G. Leugering // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2005. – № 126. – P. 589–616.
6. **Lighthill M. L.** On kinetic waves / M. L. Lighthill, J. B. Whitham // Proceedings of Royal Society of Edinburg. – 1983. – № 229(A). – P. 217–243.

Надійшла до редколегії 28.01.2014

УДК 519.6:669

Л.Т. Бойко*, Д.М. Тогобицька, А.І. Белькова**, В.М. Промішлянська***

**Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

***Інститут чорної металургії імені З.І. Некрасова НАН України*

ПРОГРАМНА СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ЗАДАЧІ ВИБОРУ СКЛАДУ ДОМЕННОЇ ШИХТИ, ЯКИЙ ЗАБЕЗПЕЧУЄ РАЦІОНАЛЬНИЙ ШЛАКОВИЙ РЕЖИМ

Досліджено процес виплавки чавуну у доменній печі. Для побудованої математичної моделі досліджуваного процесу вибрано метод розв'язання та розроблено алгоритм чисельної реалізації методу. Розроблена програма допомагає технологам визначити оптимальний склад доменної шихти при встановлених обмеженнях на параметри шихти, чавуну та шлаку.

Исследован процесс выплавки чугуна в доменной печи. Для построенной математической модели исследуемого процесса выбран метод решения и разработан алгоритм численной реализации метода. Разработанная программа помогает технологам определить оптимальный состав доменной шихты при установленных ограничениях на параметры шихты, чугуна и шлака.

The process of smelting cast iron in a blast furnace is being explored. The mathematical model of this process was built, the method of the solution was chosen and the algorithm for the numerical realization of the method was developed. Designed program helps technologists to determine the optimal composition of domain charge under specified restrictions for certain parameters of charge, cast iron and slag.

Ключові слова: доменна шихта, чавун, шлак, математичне моделювання, комп'ютерна програма.

Вступ. Для виплавки чавуну потрібної якості в доменній печі дуже важливо так підготувати склад шихти, щоб забезпечити раціональний шлаковий режим, тобто забезпечити потрібні фізико-хімічні властивості шлакового розплаву. Однак, за останні десятиріччя дуже змінилась (як якісно, так і компонентно) сировинна база України. У доменному процесі використовується більше вторинних ресурсів, у рудах і коксі збільшився вміст деяких негативних (для доменного процесу) елементів. Це приводить до суттєвих коливань хімічного складу чавуну та шлаку. Тому задача

контролю та вибору такого складу доменної шихти, який би забезпечував якісний шлаковий режим, стає особливо актуальною [1; 3].

Використання математичних методів разом із можливостями сучасних комп'ютерних технологій дозволяє створювати більш комфортні умови для швидкого прийняття рішень у різних виробничих ситуаціях.

Виробнича постановка задачі. Потрібно знайти таку комбінацію вхідних параметрів (маси шихтових матеріалів), які б забезпечували потрібні інтегральні характеристики шлаку та виплавку кондиційного по відношенню до сірки та кремнію чавуну.

Дослідження, проведені в ІЧМ, дозволили встановити параметри, які характеризують зв'язок між складом шихти та властивостями шлаку. До таких параметрів відносяться: Δ_e – фізико-хімічний еквівалент шлаку, ρ – показник стехіометрії шлаку та інші [1; 3].

Аналізуючи залежність параметрів Δ_e та ρ від складу шихти, бажано забезпечити потрібні властивості шлаку.

Математична постановка. Для математичного формулювання задачі впровадимо такі позначення:

m – кількість матеріалів шихти;

x_i – маса i -го матеріалу шихти (в тоннах), $1 \leq i \leq m$;

n – кількість хімічних компонентів шихти, важливих для плавки;

c_{ij} – масова частка j -го хімічного компонента у одній тонні i -го матеріалу шихти, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$;

$p_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} x_i$ – загальна маса j -го хімічного компонента в шихті, $1 \leq j \leq n$;

I – множина тих номерів матеріалів шихти, масу яких можна змінювати (в заданих межах);

r – кількість параметрів шлаку та чавуну, на які встановлюються обмеження;

$s_k = f_k(p_1, p_2, \dots, p_n)$ – параметри шлаку або чавуну, на які встановлено обмеження, $1 \leq k \leq r$; функції f_k відомі алгоритмічно.

Обмеженнями є такі умови:

$$0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, m. \quad (1)$$

$$c_k \leq s_k \leq d_k, \quad k = 1, r. \quad (2)$$

Тут a, b, c, d_k – задані числа.

Потрібно так вибрати змінні $x_i, i \in \overline{1, m}$ з проміжків (1), щоб обчислені через них параметри $s_k, k = \overline{1, r}$ попали у відповідні проміжки, тобто, щоб виконувалися умови (2).

Оскільки $p_j, j = \overline{1, n}$ залежать від $x_i, i \in \overline{1, m}$, то в подальшому параметри $s_k, k = \overline{1, r}$ зразу розглядаємо як деякі функції від $x_i, i \in \overline{1, m}$, тобто

$$s_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad k = \overline{1, r}, \quad (3)$$

причому функції g_k задаються алгоритмічно.

Метод розв'язування передбачає розглядати пряму та обернену задачі. Алгоритм розв'язування прямої задачі дозволяє по заданих $x_i, i \in \overline{1, m}$ обчислювати значення $s_k, k = \overline{1, r}$. Алгоритм розв'язування оберненої задачі дозволяє навпаки, по заданих значеннях $s_k, k = \overline{1, r}$ обчислювати відповідні значення $x_i, i \in \overline{1, m}$.

Алгоритм розв'язування прямої задачі.

1. За відомими масами кожного з матеріалів шихти та їхнім хімічним складом розраховується хімічний склад загальної маси шихти.
2. За певними алгоритмами виконуються розрахунки: прогнозу загальної маси та хімічного складу чавуну і шлаку; витрати коксу на одну тону чавуну; параметри $s_k, k = \overline{1, r}$.

Обернену задачу розв'язуємо у такий спосіб. Алгоритмічно задані залежності (3) наближуємо аналітичними залежностями. Для цього вибираємо потрібну кількість різних варіантів аргументів $x_i, i \in \overline{1, m}$, що задовольняють умови (1). Для кожного варіанта аргументів розв'язуємо пряму задачу і отримуємо значення $s_k, k = \overline{1, r}$. За отриманою таблицею значень будуємо найкраще середньоквадратичне наближення залежностей (3) у вигляді лінійних функцій

$$s_k = \gamma_{k0} + \sum_{i=1}^m k_i x_i, \quad k = \overline{1, r}. \quad (4)$$

Отже, в залежностях (4) коефіцієнти $\{\overline{y}_{ki}, k = \overline{1, r}, i = \overline{0, m}\}$ стануть відомими. Якщо тепер зафіксувати $s_k, k = \overline{1, r}$ з умов (2), то система рівнянь (4) перетворюється в СЛАР у некоректній постановці відносно $x_i, i \in \overline{1, m}$. Ця СЛАР розв'язувалась методом регуляризації [4].

Програма та аналіз результатів. Комп'ютерна програма складається з таких модулів: «Прогноз», «Діагностика» та «Оптимізація».

Програмний модуль «Прогноз» розв'язує пряму задачу, тобто дозволяє спрогнозувати масу і хімічний склад чавуну та шлаку за поданими параметрами шихти.

Програмний модуль «Діагностика» аналізує сукупність розрахованих параметрів; подає інформацію про ключові властивості чавуну та шлаку у зручній візуальній формі; формує оцінку ситуації, що склалася на доменній печі та надає рекомендації щодо необхідних заходів впливу.

Якщо потрібно, то технолог може скористатися програмним модулем «Оптимізація», який розв’язує обернену задачу, тобто уточнює параметри шихти таким чином, щоб забезпечити необхідну якість продуктів плавки.

Всі програмні модулі поєднуються у зручному інтуїтивно зрозумілому інтерфейсі, що дозволяє користувачеві швидко переміщуватися між програмними модулями. Програма написана мовою програмування Visual C# з використанням програмного середовища Microsoft Visual Studio 2012. Вхідні дані передаються в програму у вигляді файлів MS Excel.

Програма тестувалася на реальному прикладі. В якості вхідних даних, що наведені в табл. 1, використано завантаження доменної печі № 9 металургійного комбінату «Криворіжсталь»

Таблиця 1

Маса та хімічний склад матеріалів шихти

Measurement	Dec 2010	Jan 2011	Feb 2011	Mar 2011	Apr 2011	May 2011	Jun 2011	Jul 2011	Aug 2011	Sep 2011	Oct 2011	Nov 2011	Dec 2011
Temp	27.1	26.1	25.1	24.1	23.1	22.1	21.1	20.1	19.1	18.1	17.1	16.1	15.1
Hum	75.1	74.1	73.1	72.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1
Pressure	1013.2	1013.1	1013.0	1012.9	1012.8	1012.7	1012.6	1012.5	1012.4	1012.3	1012.2	1012.1	1012.0
WindSpeed	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0
WindDir	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
CloudCover	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Humidity	75.1	74.1	73.1	72.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1
Temp	27.1	26.1	25.1	24.1	23.1	22.1	21.1	20.1	19.1	18.1	17.1	16.1	15.1
Humidity	75.1	74.1	73.1	72.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1

Для даного прикладу $m = 7$, $n = 9$. За вибраними масами всіх параметрів шихти виконується прогноз маси та хімічного складу чавуну і шлаку (програмний модуль «Прогноз»). Отримані результати аналізуються за допомогою програмного модуля «Діагностика» (рис.1).

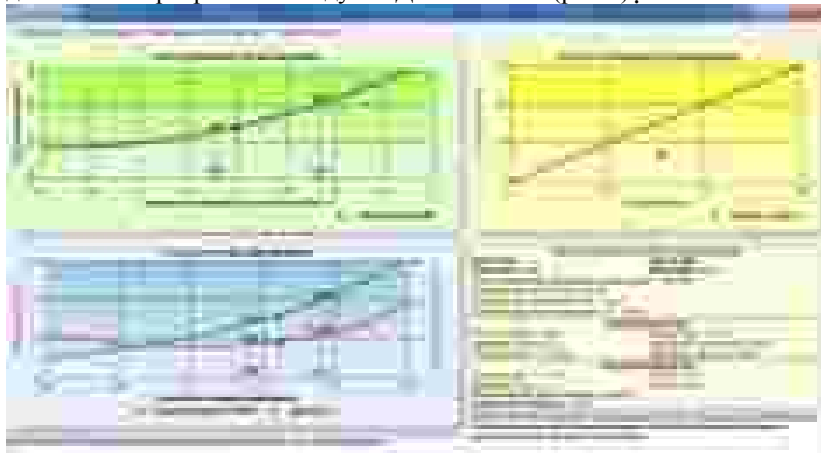


Рис. 1. Результати роботи програмного модуля «Діагностика»

Якщо в результаті аналізу зроблено висновок, що такий склад шихти не приводить до виплавки чавуну необхідної якості, то доцільно скористатися модулем «Оптимізація». Дані для використання цього модуля задаються користувачем (оператором доменної печі) у режимі діалогу з програмою, а саме: у вікні, зображеному на рис. 2, відмічаються ті параметри шихти, масу яких можна змінювати, а також задаються допустимі межі цих змін. Також користувач вказує, на які саме вихідні параметри чавуну та шлаку накладаються обмеження і якими є ці обмеження.

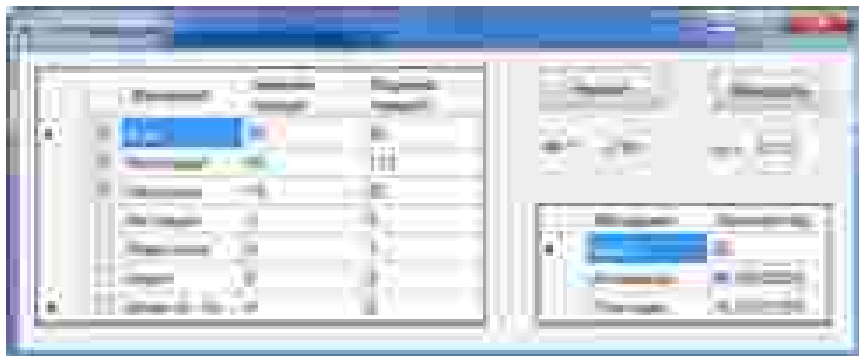


Рис. 2. Програмний модуль «Оптимізація»

У даному прикладі обрано параметри Δ_e та ρ з такими обмеженнями: $-2.323 < \Delta_e < 2.217$; $0.708 < \rho < 0.718$. Після виконання розрахунків програма видає результат, показаний на рис. 2.

Бачимо, що відмічені параметри шихти потрапили у задані відрізки. Змінимо склад шихти за рекомендацією програми, і знову скористаємося модулями «Прогноз» та «Діагностика» для оцінки прогнозованих результатів плавки. Результат роботи програмних модулів зображено на рис. 1.

Висновки. Розроблена програмна система може виступати в якості радника технолога, який за рекомендаціями цієї програми зможе прийняти необхідні практичні рішення щодо зміни в процесі виплавки чавуну.

Відмітимо, що ця задача розглядалася в роботі [2], але була розв'язана за іншим алгоритмом.

Бібліографічні посилання

1. Алгоритмические и программные средства системы контроля и управления шлаковым режимом доменной плавки / Д. Н. Тогобицкая, А. И. Белькова, А. Ю. Гринько, Д. А. Степаненко // Системные технологии. Региональный сб. науч. тр. – Д., 2013. – Вып. 3(86). – С. 9–14.
2. Альошин В. А. Комп'ютерна система вибору оптимального складу доменної шихти та параметрів технології доменної плавки / В.А. Альошин, Д. М. Тогобицкая, Л. Т. Бойко // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2006. – С. 3–14.
3. Опыт создания и внедрения системы контроля и управления шлаковым режимом доменной плавки в шихтовых и технологических условиях заводов Укр. раины / Д. Н. Тогобицкая, А. И. Белькова, А. Ф. Хамхотыко и др. // Сб. науч. тр. ИЧМ «Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии». – Д., 2009. – Вып. 19. – С. 100–112.

4. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

Надійшла до редколегії 02.06.2014

В. Я. 7Бурдюк

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗНАМЕНИТІЙ ФОРМУЛІ ЕЙЛЕРА – 273 РОКИ

Подано сучасний та стислий виклад математичного матеріалу, необхідного для побудови знаменитої формули Леонарда Ейлера. Відтворено формулу Л. Ейлера та деякі наслідки з неї.

Представлено современное и сжатое изложение математического материала, необходимого для построения знаменитой формулы Леонарда Эйлера. Воспроизведено формулу Л. Эйлера и некоторые следствия из неё.

Modern and concise exposition of the mathematical material, needed to construct the famous L. Euler's formula, is given. L. Euler's formula and some her consequences are reproduced.

Ключові слова: комплексні числа, формула Ейлера.

Вступ. Йдеться про формулу

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \text{ де } i = \sqrt{-1}.$$

Ця формула вперше з'явилась у 1741 році в журналі, а в 1748 році – у книжці, перекладом якої є [4] (дивись там § 138 та примітку 30). При введенні цієї формули Ейлер вважав відомими формули для синуса та косинуса суми двох кутів. Пізніше різні автори виводили формулу Ейлера іншими методами (дивись, наприклад, підручники [1] та [3]).

Нові часи спонукають до нових роздумів над здобутками класиків.

Постановка задачі. Подати у стислій, але зрозумілій формі весь необхідний математичний матеріал для побудови знаменитої формули Ейлера, а потім побудувати цю формулу та отримати відомі, і не дуже, наслідки з цієї формули.

Метод розв'язування

1. Поле комплексних чисел.

Визначаємо шість дій на множині R *реальних* або дійсних чисел (але краще – *реальних*, бо ж тоді легко говорити про «ірреальні числа», відомі в літературі як гіпердійсні числа):

дві нульові дії $0, 1$, тобто дві константи $0, 1$;

дві одинарні дії $-, ^{-1}$, тобто протилежне число і зворотне число (не визначеним є лише 0^{-1});

дві бінарні дії $+, \cdot$, тобто додавання та множення, причому так, щоб мати:

авелеву групу $(R, +, -, 0)$;

майже авелеву групу $(R, \cdot, ^{-1}, 1)$, адже заважає відсутність 0^{-1} ;

дистрибутивність множення відносно додавання.

Отримуємо *поле* R реальних чисел.

На полі R існує природне бінарне відношення порядку $<$, а саме:

1) всі додатні числа за означенням є більші від числа 0 ,

2) $\forall a, b \in R (a < b \Leftrightarrow 0 < b - a)$,

тож маємо відношення *лінійного* порядку $<$, яке узгоджується з бінарними діями на множині R , тобто якщо $a < b$, то $a + c < b + c$, а якщо ще $0 < c$, то $a \cdot c < b \cdot c$. Отримуємо лінійно упорядковане поле $(R, <)$.

Поповнивши це поле новим числом i таким, що $i^2 = -1$ (зрозуміло, що число i не є реальним), отримуємо *поле* C *комплексних* чисел, в якому повноправними членами є числа $a + b \cdot i$, що складаються з *реальної частини* a , де $a \in R$, та *уявної частини* $b \cdot i$, де $b \in R \wedge b \neq 0$.

Не існує відношення лінійного порядку, яке було б продовженням на множину C лінійного порядку $<$, існуючого на множині R . Але ми визначаємо бінарне відношення $\prec$ на множині C , яке є відношенням порядку (нелінійного) та узгоджується з дією додавання та з дією множення на додатні реальні числа, а саме:

$$(a + b \cdot i) \prec (c + d \cdot i) \Leftrightarrow a < c \wedge b \leq d.$$

Тож якщо $(a + b \cdot i) \prec (c + d \cdot i)$, то:

1) $(a + b \cdot i) + (x + y \cdot i) \prec (c + d \cdot i) + (x + y \cdot i)$,

адже із $a < c \wedge b \leq d$ випливає $a + x < c + x$ та $b + y \leq d + y$;

2) якщо ще $0 < r$, то $(a + b \cdot i) \cdot r < (c + d \cdot i) \cdot r$,

адже із $a < c \wedge b \leq d$ та $0 < r$ випливає $a \cdot r < c \cdot r \wedge b \cdot r \leq d \cdot r$.

Таким чином, маємо упорядковане, але не лінійно, поле комплексних чисел $(C, <)$.

Вважаємо відомими такі формули у числовому полі R :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n, \quad e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots,$$

але пізніше скористаємося їхніми аналогами у числовому полі C :

$$(e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n), \quad (1)$$

$$(e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \dots). \quad (2)$$

2. Геометрія дії множення комплексних чисел.

Кожне комплексне число $z = x + y \cdot i = x + iy$ зображують точкою $(x, y) \in R^2$ евклідової площини, а відстань від цієї точки до точки $(0, 0)$ називають *модулем числа* z та позначають $|z|$, тож $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Нехай $\rho(z_0)$ – це відрізок площини, одним із кінців якого є точка $z_0 = (x, y)$, що лежить на колі $x^2 + y^2 = 1$, а іншим – точка $(0, 0)$. Вісь Ox та відрізок $\rho(z_0)$ утворюють кут φ радіан, або просто кут φ , тож $z_0 = (1, 0) \Rightarrow \varphi = 0$, $z_0 = (0, 1) \Rightarrow \varphi = \pi/2$, $z_0 = (0, -1) \Rightarrow \varphi = -\pi/2$. Бачимо, що рух відрізка $\rho(z_0)$ проти ходу стрілки годинника збільшує кут φ від 0 до 2π , а рух відрізка $\rho(z_0)$ по ходу стрілки годинника зменшує кут φ від 0 до -2π , і все повторюється з періодом 2π .

Маючи точку $z_0 = (x, y)$, відрізок $\rho(z_0)$ і кут φ , визначають:

$$\cos \varphi = x, \quad \sin \varphi = y$$

та отримують $z_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, а також $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1$.

Уявляють точку $z_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ на евклідовій площині як комплексне число $\cos \varphi + i \sin \varphi$.

Лема 1. Для довільних кутів α та β існує кут χ такий, що

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \chi + i \sin \chi, \quad \text{причому}$$

$$\cos \chi = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (3)$$

$$\sin \chi = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta. \quad (4)$$

Доведення. Маємо: 1) $(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) =$

$$(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + i(\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta);$$

$$2) (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta)^2 =$$

$$\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta +$$

$$+ \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta =$$

$$\cos^2 \alpha \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 0 + \sin^2 \alpha \cdot (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 1,$$

тож $(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \chi + i \sin \chi$ для деякого χ , причому виконуються формули (3) та (4).

Очевидно: кут χ , про який мовиться у лемі 1, є певним чином залежним від кутів α та β . Якщо взяти $\chi = \alpha + \beta \pm 2k\pi$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, то у випадку $\alpha = 0$ отримаємо

$$\cos \chi = \cos(\beta \pm 2k\pi) = \cos \beta, \sin \chi = \sin(\beta \pm 2k\pi) = \sin \beta.$$

Але якщо $\alpha = 0$, то із формул (3) та (4) отримуємо те ж саме:

$$\cos \chi = \cos \beta, \sin \chi = \sin \beta.$$

Таким чином, формула $\chi = \alpha + \beta \pm 2k\pi$ відповідає дійсності, а тому отримуємо відомі формули для синуса та косинуса суми двох кутів:

$$\cos \chi = \cos(\alpha + \beta \pm 2k\pi) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\sin \chi = \sin(\alpha + \beta \pm 2k\pi) = \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta.$$

Якщо $z = x + iy \wedge z \neq 0$, то пишуть $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, де $r = |z|$, $\cos \varphi = x/r$, $\sin \varphi = y/r$, а кут φ називають *аргументом комплексного числа* z . Якщо $z_1 = x_1 + iy_1 \wedge z_1 \neq 0$, то $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, а тому $z \cdot z_1 = r \cdot r_1 \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 + i(\cos \varphi \cdot \sin \varphi_1 + \sin \varphi \cdot \cos \varphi_1)) =$

$$r \cdot r_1 \cdot (\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)).$$

Бачимо, що бінарну дію множення комплексних чисел виконують так:

модулі цих чисел перемножують, а аргументи – додають.

3. Формула Ейлера та її узагальнення.

Кожна реальна додатна функція $y = f(x)$, що є визначеною на всій множині R , породжує визначену на всій множині C комплексну функцію

$$w = f(z) = f(x + iy) = f(x) \cdot (\cos y + i \sin y),$$

тож комплексне число $f(z)$ має модуль $f(x)$ та аргумент y , і якщо

$y = 0$, то $f(z) = f(x)$. Якщо ж $x = 0$, то

$$f(z) = f(iy) = f(0) \cdot (\cos y + i \sin y),$$

а якщо ще $f(0) = 1$, то $f(iy) = \cos y + i \sin y$, тож має місце лема 2.

Лема 2. Реальна функція $f(x) = e^x$ породжує комплексну функцію

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y). \quad (5)$$

Із формули (5), за умови $x = 0$, отримуємо **знамениту формулу Ейлера**

$$e^{i \cdot y} = \cos y + i \sin y. \quad (6)$$

Для довільних $z = x + iy$ та $w = u + iv$ обчислюємо

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \cdot e^u \cdot (\cos v + i \sin v) = \\ &= e^{x+u} \cdot ((\cos y \cdot \cos v) + i(\cos y \cdot \sin v + \sin y \cdot \cos v)) = \\ &= e^{y+v} \cdot (\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{z+w}, \end{aligned}$$

тож маємо $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$, а також

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y} \cdot (\cos x + i \sin x) \text{ та } e^{-iz} = e^{iy} \cdot (\cos x - i \sin x).$$

Визначаємо:

$$\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2, \quad \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i, \quad (7)$$

$$\text{тож } (\cos z)^2 = (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})/4, \quad (\sin z)^2 = -(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})/4,$$

і тому маємо $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$, а також

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z - \quad (8)$$

узагальнення для формули Ейлера. Отже, формула (5) є продуктивною: із неї логічно випливають формули (6), (7) та (8).

4. Наслідки.

Із формули (2) випливає така формула:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - z^2/2! - iz^3/3! + z^4/4! + iz^5/5! - z^6/6! - iz^7/7! + \dots = \\ &= 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots + i(z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots). \end{aligned}$$

Звідси та із формули (6) отримуємо відомі формули:

$$\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots ; \quad (9)$$

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots . \quad (10)$$

Зрозуміло, що формули (9) та (10) є істинними і для реальної змінної x .

Як зазначено у словнику [2] (стаття «Показательная функция»), за означення комплексної функції $w = e^z$ можна прийняти і формулу (1), і формулу (2), і формулу (5), але там формулу (5) фактично не використано.

У підручниках [1] та [3] за первинні означення прийнято формули (2), (9) та (10), а все інше виводиться з цих формул, причому формулами Ейлера названо формули (7) та (8).

Перевага запропонованого нами підходу до побудови формули Ейлера полягає у відтворенні природного плину речей, який з мінімальними затратами дає потрібні результати.

Висновки

1. Запропоновано бінарне відношення $\prec$ на множині C комплексних чисел, яке є відношенням порядку (нелінійного) та узгоджується з дією додавання на множині C та з дією множення на додатні реальні числа
2. Поновлено ще один шлях до знаменитої формули Ейлера.
3. У кінці згаданого шляху відтворено і формулу Ейлера, і її узагальнення.

Бібліографічні посилання

1. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая шк., 1981, т. 1. – 687 с.
2. **Математический** энциклопедический словарь / глав. ред. Ю. В. Прохоров. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
3. **Привалов Н. И.** Введение в теорию функций комплексного переменного / Н. И. Привалов. – М. : Физматгиз, 1960. – 444 с.
4. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечных : моногр. / Л. Эйлер. – М. : Гос. изд. физ.-мат. л-ры, 1961, т. 1. – 392 с.

Надійшла до редколегії 07.04.2014

Л.Л. 8Гарт

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМА ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Досліджено питання про обчислювальну стійкість алгоритму загального проєкційно-ітераційного методу розв'язання лінійного операторного рівняння в банаховому просторі. Наведено умови, за якими метод має властивість монотонності та надлінійну швидкість збіжності.

Исследован вопрос о вычислительной устойчивости алгоритма общего проекционно-итерационного метода решения линейного операторного уравнения в банаховом пространстве. Приведены условия, при которых метод обладает свойством монотонности и сверхлинейной скоростью сходимости.

The problem of computational stability of the algorithm of general projection-iteration method is investigated for solving a linear operator equation in Banach space. The conditions are given under that the method has monotonicity and superlinear convergence degree.

Ключевые слова: операторное уравнение, линейный оператор, аппроксимация, проекционный, итерационный, проекционно-итерационный, метод, приближение, последовательность, устойчивость, сходимость, погрешность.

Введение. Многочисленные теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят к необходимости решения различных классов операторных уравнений в функциональных пространствах. Частными случаями таких уравнений являются хорошо известные интегральные, дифференциальные (как обыкновенные, так и в частных производных) и интегро-дифференциальные уравнения (одномерные и многомерные, линейные и нелинейные, регулярные и сингулярные, корректные и некорректные).

Указанные уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (прямые, проекционные, итеративные, смешанные и др.). Однако, несмотря на полученные в этой области многочисленные результаты [1; 3 – 6]

работа по их развитию и усовершенствованию все еще далека от своего завершения.

В данной работе под проекционным методом понимается метод, согласно которому исходное (точное) уравнение, рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменяется приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве. Приближенное уравнение решается точно, и его точное решение объявляется приближением к решению исходного уравнения. Установлению критериев сходимости, исследованию быстроты сходимости, получению оценок погрешности, изучению устойчивости вычислительных схем и различным приложениям проекционных методов посвящены фундаментальные работы Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, Л.В. Канторовича, М.А. Красносельского, С.Г. Михлина, В.В. Петришина, Н.И. Польского, а также работы С.Д. Балашовой, Б.Г. Габдулхаева, Ю.И. Грибанова, А.Ю. Лучки и других авторов. При этом широко используются идеи функционального анализа, которые дают возможность выработать единый подход к решению самых разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Впервые общая теория проекционных методов для решения операторных уравнений второго рода и приводящихся к ним уравнений в банаховых пространствах была построена академиком Л.В. Канторовичем (1948 г.). В рамках общей теории Л.В. Канторовича исследования по проекционным, а также проекционно-итерационным методам решения уравнения первого рода

$$Au = f$$

с линейным ограниченным оператором A , действующим из X в Y (X, Y – банаховы пространства), проводились С.Д. Балашовой [5]. В последующей работе [6] проекционный метод был исследован применительно к уравнению первого рода с линейным, вообще говоря, неограниченным оператором A , действующим в банаховом пространстве X . Там же был предложен общий проекционно-итерационный метод решения этого уравнения, доказаны теоремы о сходимости как проекционного, так и проекционно-итерационного методов, получены оценки погрешности. Результаты исследований распространены на случай, когда приближенные уравнения заданы не в подпространствах $X_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$ исходного пространства, а в некоторых пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных им.

В данной работе рассматривается вопрос о вычислительной устойчивости и скорости сходимости общего проекционно-итерационного метода

решения линейного операторного уравнения с, вообще говоря, неограниченным оператором в банаховом пространстве.

Постановка задачи. Пусть задано уравнение

$$Au = f, \quad (1)$$

где A – линейный (аддитивный и однородный) оператор, действующий в банаховом пространстве X . Предположим, что это уравнение имеет в X единственное решение u^* .

Аппроксимируем уравнение (1) последовательностью приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где A_n – линейный непрерывно обратимый оператор, действующий в подпространстве X_n исходного пространства ($X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$, $X_1 \neq \emptyset$), $f_n = P_n f$, P_n – линейный проектирующий оператор, переводящий X в X_n ($P_n(X) = X_n$, $P_n u_n = u_n$ для $u_n \in X_n$).

Предположим, что при любом $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия

$$\|P_n A u^* - A_n P_n u^*\| \leq \alpha_n, \quad (3)$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$$\|P_n u^* - u^*\| \leq \beta_n, \quad (4)$$

где $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$$\|A_n^{-1}\| \leq C, \quad (5)$$

где C – константа.

Условие (5), в частности, обеспечивает существование и единственность решения $u_n^* \in X_n$ каждого из приближенных уравнений (2), а также его непрерывную зависимость от правой части f_n , при этом

$$\|u_n^*\| \leq C \cdot \|f_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сходимость последовательности $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ к u^* в X устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (о сходимости проекционного метода) [2]. Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда последовательность $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ решений прибли-

женных уравнений (2) сходится к решению u^* исходного уравнения (1) по норме пространства X и справедлива оценка погрешности

$$\|u_n^* - u^*\| \leq \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $\gamma_n = C \cdot \alpha_n + \beta_n$.

Будем рассматривать проекционно-итерационный метод решения уравнения (1), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (2) некоторого итерационного метода, определяемого оператором V :

$$u_n^{(k+1)} = V(u_n^{(k)}, A_n, f_n), \quad k = 0, 1, \dots; \quad u_n^{(0)} \in X_n. \quad (7)$$

Построив с помощью этого метода для n -го приближенного уравнения k_n приближений $u_n^{(k)} \in X_n$, $k = 1, 2, \dots, k_n$ и положив последнее из них равным начальному приближению для следующего, $(n+1)$ -го уравнения, получим последовательность $\{u_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ приближений к решению u^* уравнения (1):

$$u_n^{(k+1)} = V(u_n^{(k)}, A_n, f_n), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (8)$$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n^{k_n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad u_1^{(0)} \in X_1.$$

Относительно итерационного процесса (7) потребуем, чтобы он был монотонным, то есть, чтобы при каждом $n = 1, 2, \dots$ выполнялось условие

$$\|V(u_n^{(k)}, A_n, f_n) - u_n^*\| \leq \rho_n \|u_n^{(k)} - u_n^*\|, \quad 0 < \rho_n < 1. \quad (9)$$

Условие (9) гарантирует монотонное убывание в подпространстве $X_n \subset X$ нормы погрешности $z_n^{(k)} = u_n^{(k)} - u_n^*$ от итерации к итерации, а значит, сходимость и численную устойчивость итерационного метода [7].

Будем считать в дальнейшем, что

$$V(u_n^{(k)}, A_n, f_n) = u_n^{(k)} - \tau_n^{(k+1)} (B_n^{(k+1)})^{-1} (A_n u_n^{(k)} - f_n),$$

то есть в роли итерационного процесса, применяемого к решению приближенных уравнений, выступает неявный ($B_n^{(k+1)} \neq E$) нестационарный итерационный процесс, где $B_n^{(k+1)}$ — линейный непрерывно обратимый оператор в подпространстве X_n , определяющий тот или иной конкретный итерационный метод, $\tau_n^{(k+1)}$ — итерационный параметр. Тогда формулы

(8), определяющие проекционно-итерационный метод решения уравнения (1), примут вид

$$u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - \tau_n^{(k+1)} (B_n^{(k+1)})^{-1} (A_n u_n^{(k)} - f_n), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (10)$$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(k_n)}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad u_1^{(0)} \in X_1.$$

Сходимость последовательности $\{u_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ к u^* в X устанавливает следующая теорема.

Теорема 2 (о сходимости проекционно-итерационного метода) [2]. Пусть выполнены условия (3)–(5) и (9). Тогда последовательность $\{u_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая по формулам (8) (или (10)), сходится в X к решению u^* уравнения (1) и справедлива оценка погрешности

$$\|u_n^{(k_n)} - u^*\| \leq \chi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\text{где } \chi_n = \delta'_n \|z_1^{(0)}\| + \delta''_n + \gamma_n, \quad \delta'_n = \prod_{j=1}^n \rho_j^{k_j}, \quad \delta''_n = \sum_{i=2}^n (\gamma_{i-1} + \gamma_i) \prod_{j=i}^n \rho_j^{k_j},$$

$$z_1^{(0)} = u_1^{(0)} - u_1^*, \quad \gamma_n \text{ дается формулой (6).}$$

Изучение сходимости проекционно-итерационного метода в [2] проводилось в предположении, что вычислительный процесс является идеальным, т.е. вычисления ведутся с бесконечным числом знаков. В реальном вычислительном процессе все вычисления осуществляются с конечным числом знаков, и на каждом этапе счета появляются ошибки округления, что порождает вычислительную погрешность метода.

В проекционно-итерационном методе вычислительная погрешность образуется из погрешностей аппроксимации и погрешностей, допускаемых в ходе итераций. Если число p шагов в проекционно-итерационном методе велико, велико число k_n итераций на каждом n -м шаге метода ($n = 1, 2, \dots, p$), а сам метод обладает свойством накапливать погрешности округления каждого такого шага, то вычислительная погрешность проекционно-итерационного метода может оказаться слишком большой, так что может произойти полная потеря точности и приближенное решение $u_n^{(k_n)}$ может сильно отличаться от искомого решения.

Целью данной работы является исследование вопроса о вычислительной устойчивости проекционно-итерационного метода (10) для решения

уравнения (1) и получение условий, при которых метод обладает не только свойством монотонности, но и сверхлинейной скоростью сходимости.

Метод решения. Погрешность проекционно-итерационного метода (10) в результате выполнения его n -го шага ($n = 1, 2, \dots$) характеризуется элементом $r_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)} - u^*$ и в силу очевидного соотношения $u_n^{(k_n)} - u^* = u_n^{(k_n)} - u_n^* + u_n^* - u^*$ представляется в виде суммы

$$r_n^{(k_n)} = z_n^{(k_n)} + g_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

погрешности $z_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)} - u_n^*$ итерационного метода на k_n -й итерации и погрешности $g_n = u_n^* - u^*$ проекционного метода. Отсюда с учетом (6) для погрешности $r_n^{(k_n)}$ проекционно-итерационного метода получаем такую оценку

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq \|z_n^{(k_n)}\| + \|g_n\| \leq \|z_n^{(k_n)}\| + \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Из оценки (13), в частности, вытекает один из способов целесообразного выбора чисел k_n ($n = 1, 2, \dots$). Поскольку итерационный метод в силу своей монотонности сходится, т.е. $\|z_n^{(k)}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то порядок $\|r_n^{(k_n)}\|$ при данном n определяется величиной γ_n . Поэтому число k_n достаточно выбрать таким, чтобы $\|z_n^{(k_n)}\|$ и γ_n имели один и тот же порядок малости. Роль k_n , например, может играть наименьшее из чисел k ($k = 0, 1, \dots$), удовлетворяющих неравенству

$$\|z_n^{(k)}\| \leq \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

С другой стороны, погрешность $r_n^{(k_n)}$ можно оценить при помощи оператора перехода от итерации к итерации в итерационном методе. С этой целью выразим приближение $u_n^{(k)} = z_n^{(k)} + u_n^*$ из формулы для погрешности $z_n^{(k)}$ итерационного метода и, подставив в (10), получим для нее уравнение

$$z_n^{(k+1)} = z_n^{(k)} - \tau_n^{(k+1)} (B_n^{(k+1)})^{-1} A_n z_n^{(k)} = S_n^{(k+1)} z_n^{(k)}, \quad (15)$$

$$k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad z_n^{(0)} = u_n^{(0)} - u_n^*, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $S_n^{(k+1)} = E - \tau_n^{(k+1)} (B_n^{(k+1)})^{-1} A_n$ – оператор перехода от k -й итерации к $(k+1)$ -й итерации в итерационном процессе для n -го приближенного уравнения, при этом на основании условия монотонности (9)

$$\|S_n^{(k)}\| \leq \rho_n < 1, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Далее, используя последовательно (15), находим:

$$z_n^{(k_n)} = S_n^{(k_n)} z_n^{(k_n-1)} = S_n^{(k_n)} S_n^{(k_n-1)} z_n^{(k_n-2)} = \dots = S_n^{(k_n)} S_n^{(k_n-1)} \dots S_n^{(1)} z_n^{(0)} = T_n^{(k_n)} z_n^{(0)},$$

где $T_n^{(k_n)} = S_n^{(k_n)} S_n^{(k_n-1)} \dots S_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда с учетом (16) будет

$$\|z_n^{(k_n)}\| \leq \|T_n^{(k_n)}\| \|z_n^{(0)}\| \leq \prod_{i=1}^{k_n} \|S_n^{(i)}\| \|z_n^{(0)}\| \leq \rho_n^{k_n} \|z_n^{(0)}\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

и для погрешности $r_n^{(k_n)}$ проекционно-итерационного метода на основании (13) получим оценку

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq \rho_n^{k_n} \|z_n^{(0)}\| + \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а поскольку

$$\begin{aligned} \|z_n^{(0)}\| &= \|u_n^{(0)} - u_n^*\| = \|u_{n-1}^{(k_{n-1})} - u_n^*\| \leq \|u_{n-1}^{(k_{n-1})} - u^*\| + \|u^* - u_n^*\| \leq \\ &\leq \|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_n, \quad n > 1, \end{aligned} \quad (18)$$

то

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq \rho_n^{k_n} (\|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_n) + \gamma_n, \quad n > 1. \quad (19)$$

Отметим, что, следуя неравенству (17), можно к тому же определить число k_n итераций, достаточное для получения в итерационном процессе для n -го приближенного уравнения заданной в (14) точности вычислений γ_n [7]. Потребуем, чтобы

$$\rho_n^{k_n} \leq \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

то есть чтобы $k_n \geq k_n(\gamma_n) = \left\lceil \frac{\ln(1/\gamma_n)}{\ln(1/\rho_n)} \right\rceil$. Тогда из (17) получим, что

$$\|z_n^{(k_n)}\| \leq \gamma_n \|z_n^{(0)}\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

т.е. после проведения $k_n(\gamma_n)$ итераций начальная погрешность $\|z_n^{(0)}\|$ уменьшается в γ_n^{-1} раз. Заметим, что в практике применения итерационных методов оценочное значение $k_n(\gamma_n)$ для числа итераций часто оказывается сильно завышенным.

Покажем, что из соотношения (19), начиная с некоторого $n = N > 1$, вытекает свойство монотонности проекционно-итерационного процесса

$$\|r_n^{(k_n)}\| \leq q_n \|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\|, \quad 0 < q_n < 1. \quad (22)$$

Для этого достаточно показать, что для любого $n \geq N > 1$ найдется такое число ε_n ($0 < \varepsilon_n < 1$), что будет

$$(\rho_n^{k_n} + 1) \gamma_n \leq \varepsilon_n \|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\|. \quad (23)$$

Тогда на основании неравенства (19) в качестве q_n в формуле (22) при условии, что $q_n < 1$, можно будет для указанных номеров n принять

$$q_n = \rho_n^{k_n} + \varepsilon_n. \quad (24)$$

Пользуясь неравенством треугольника

$$\|g_n\| = \|g_n + z_n^{(k_n)} - z_n^{(k_n)}\| \leq \|r_n^{(k_n)}\| + \|z_n^{(k_n)}\|,$$

с учетом (12) получим соотношение

$$\|r_n^{(k_n)}\| \geq \|g_n\| - \|z_n^{(k_n)}\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а так как из оценок (21), (18) и (11) для любого $n > 1$ следует, что

$$\|z_n^{(k_n)}\| \leq \gamma_n \|z_n^{(0)}\| \leq \gamma_n (\|r_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_n) \leq \gamma_n \theta_n, \quad (25)$$

где $\theta_n = \chi_{n-1} + \gamma_n$, то получим

$$\|r_n^{(k_n)}\| \geq \|g_n\| - \gamma_n \theta_n, \quad n > 1.$$

Тогда, очевидно, выполнимость при некотором $0 < \varepsilon_n < 1$ неравенства

$$(\rho_n^{k_n} + 1) \gamma_n \leq \varepsilon_n (\|g_{n-1}\| - \gamma_{n-1} \theta_{n-1}), \quad n > 1, \quad (26)$$

автоматически влечет выполнимость (23).

Укажем наименьшее из значений ε_n , удовлетворяющих (26). Поскольку в условиях теоремы 2 $\theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то найдется такой номер

$n = N_1 > 1$, начиная с которого будет $\theta_n < 1$ и тем более $\gamma_n < 1$. Тогда для всех номеров $n > N_1$ с учетом (6) найдем

$$\varepsilon_n \geq \frac{(p_n^{k_n} + 1) \gamma_n}{\|g_{n-1}\| - \gamma_{n-1} \theta_{n-1}} \geq \frac{(p_n^{k_n} + 1) \gamma_n}{(1 - \theta_{n-1}) \gamma_{n-1}} > \gamma_n.$$

Тем самым показано, что при любом $n > N_1$ найдется число $\varepsilon_n^* > \gamma_n$ ($0 < \varepsilon_n^* < 1$) такое, что для всех значений $\varepsilon_n \geq \varepsilon_n^*$ ($0 < \varepsilon_n < 1$) будет выполнено неравенство (26), а значит и (23).

Положим теперь, следуя (24), $q_n = p_n^{k_n} + \gamma_n$. Поскольку $p_n^{k_n} < 1$ в силу условия (9) монотонности итерационного процесса (и, более того, выполнено (20)), а $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то найдется такой номер $n = N \geq N_1$, начиная с которого будет $0 < q_n < 1$.

Таким образом, показана выполнимость условия (22), которое гарантирует монотонное убывание в пространстве X нормы погрешности $r_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)} - u^*$ от шага к шагу, а значит, сходимость и вычислительную устойчивость проекционно-итерационного метода (10).

Более того, требование (20) для указанных номеров $n \geq N \geq N_1$ приводит к оценке $q_n \leq 2\gamma_n$ в (22), откуда следует сверхлинейная скорость сходимости проекционно-итерационного метода, так как $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тем самым полностью доказана теорема.

Теорема 3 (о вычислительной устойчивости проекционно-итерационного метода). Пусть выполнены все условия теоремы 2 и условие (20). Тогда проекционно-итерационный метод (10), начиная с некоторого номера $n \geq N > 1$, будет обладать вычислительно устойчивым алгоритмом и сверхлинейной скоростью сходимости

$$\|u_n^{(k_n)} - u^*\| \leq q_n \|u_{n-1}^{(k_{n-1})} - u^*\|, \quad 0 < q_n < 1,$$

где $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Выводы. В данной работе впервые рассмотрен вопрос о вычислительной устойчивости и скорости сходимости общего проекционно-итерационного метода решения линейного операторного уравнения в банаховом пространстве, основанного на применении неявного нестационарного монотонного итерационного процесса первого порядка к решению приближенных уравнений в подпространствах исходного простран-

ства. Сформулирована и доказана соответствующая теорема, получены условия, при которых метод обладает вычислительно устойчивым алгоритмом и сверхлинейной скоростью сходимости.

Библиографические ссылки

1. **Балашова С.Д.** Приближенные методы решения операторных уравнений / С.Д. Балашова. – Д. : ДГУ, 1980. – 112 с.
2. **Балашова С.Д.** Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона / С.Д. Балашова, Л.Л. Тавадзе, Э.Л. Тавадзе. – Д., 1991. – 28 с. – Деп. в ВИНТИ 13.06.91, № 2486 – В 91.
3. **Вайникко Г.М.** Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений / Г.М. Вайникко. – Тарту : Изд-во Тартуского ун-та, 1970. – 192 с.
4. **Габдулхаев Б.Г.** Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б.Г. Габдулхаев. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 112 с.
5. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб. : Невский Диалект, 2004. – 816 с.
6. **Михлин С.Г.** Некоторые вопросы теории погрешностей / С.Г. Михлин. – Ленинград : Изд-во Ленинград. ун-та, 1988. – 334 с.
7. **Самарский А.А.** Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

Надійшла до редколегії 1.05.14.

С.О. Горбонос

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено початково-крайову задачу для параболічної системи з необмеженими коефіцієнтами. Показано, що розв'язок поставленої задачі можна отримати, застосовуючи L^∞ - апроксимацію матриці потоку.

Исследована начально-краевая задача для параболической системы с неограниченными коэффициентами. Показано, что решение поставленной задачи можно получить, применяя L^∞ - аппроксимацию матрицы потока.

The article is devoted to the initial-boundary value problem of parabolical system with unbounded coefficients. It is shown that solutions of considered problem can be attained through L^∞ - approximation of the stream matrix.

Ключові слова: початково-крайова задача, L^∞ - апроксимація, кососиметрична матриця.

Вступ. Досліджується початково-крайова задача для параболічної системи. Характерна особливість даного класу задач полягає в тому, що коефіцієнти матриці потоку є елементами простору $L^2(\Omega)$, як результат наведена задача не є коректною. Таким чином, основною метою роботи було встановити підхід, який дозволив би отримати наближення слабкого розв'язку поставленої задачі.

Постановка задачі. Основним об'єктом дослідження виступає задача

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t - \operatorname{div}(\nabla \mathcal{A}(y)) = f \text{ на } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma \times [0, T], \\ y|_{\partial \Omega} = y \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega, \end{array} \right. \quad (1)$$

де Ω – обмежена множина простору $\mathbb{R}^N$, а Γ – її межа, $f \in L^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ і $u \in L^{22}(0, T; L^2(\Gamma))$ – задані функції, а $A(x)$ – кососиметрична матриця і $A(x) \in L^{21}(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N})$. Тут $L^p(0, T; V)$ – це простір, який наділений нормою

$$\|u\|_{L^p(0, T; V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p},$$

де V – простір Соболева, а u – вимірна функція така, що $u: [0, T] \rightarrow V$ і $1 \leq p < \infty$. Надалі через $C([0, T]; V)$ будемо позначати банахів простір, який складається з усіх неперервних функцій $u: [0, T] \rightarrow V$ таких, що

$$\|u\|_{C([0, T]; V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V.$$

Далі введемо до розгляду таку форму:

$$[y, \phi] = \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, A \nabla \phi)_N dx dt \quad (2)$$

для будь-якого $y \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H_0^1(\Omega))$ і $\phi \in \mathcal{D}^{\infty}(0, T; C_0^\infty(\Omega))$. У зв'язку з тим, що форма (2) необмежена, введемо множину D , яка складається з елементів $y \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H_0^1(\Omega))$, для яких має місце нерівність

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y, A \nabla y)_N dx dt \right| \leq c(y) \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $c(y)$ – стала, яка залежить від y . Тепер введемо поняття слабкого розв'язку задачі (1).

Означення 1. Слабким розв'язком задачі (1) для $A(x) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^N)$, заданих $u \in L^{22}(0, T; L^2(\Gamma))$ і $f \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ будемо називати функцію $y = y(x, t) \in L^{21}(0, T; H_0^1(\Omega))$ таку, що $y_t \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, має місце інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y_t \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla_y \cdot \nabla_y A \nabla_y) \varphi dx dt = \\ = \int_0^T \int_{\Gamma} f \varphi dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} u d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

для будь-якого $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(0, T; C_0(\Omega))$ і виконується умова

$$y(t, 0) = y \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega.$$

Метод розв'язування. Спочатку введемо до розгляду L^∞ -апроксимацію матриці $A(x)$, тобто послідовність кососиметричних матриць

$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega^\infty(\cdot; \mathbb{R}^N)$ таку, що

$$A_k \rightarrow A \text{ сильно в } L^2(\cdot; \mathbb{R}^N).$$

Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ з кожною матрицею A_k пов'яжемо таку початково-крайову задачу:

$$\begin{cases} y_{tk} - \operatorname{div}(\nabla_y A_k(x) \nabla_y) = f \text{ на } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_{A_k}} = u \text{ на } \Gamma \times [0, T], \\ y(t, 0) = y \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Тепер розглянемо послідовність початково-крайових задач (4) щодо розв'язності, для цього застосуємо метод Гальоркіна. Отже, нехай $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність гладких функцій таких, що в просторі $H_0^1(\Omega)$ вони утворюють ортогональний базис, а в просторі $L^2(\Omega)$ – ортонормований. Нехай $V_m = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ – це послідовність скінченно-вимірних підпросторів таких, що

$$V_m \subset V_{m+1} \text{ і } \overline{\bigcup_{m=1}^\infty V_m} = L^2(\Omega).$$

Далі для фіксованого m покладемо

$$y_m(t) = \sum_{k=1}^{mm} c_k(t) w_k, \quad G_m = y_{0k} w_k$$

і розглянемо для будь-якого $1 \leq m \leq \overline{mm}$ і $y_m \in H^{11}(0, T; H_0(\Omega))$ наближену задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^T (y_m, w_s)_{H_0^1(\Omega)} dt + \iint_{0 \leq \Omega} (\nabla w_s, \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_{N-1} dx dt = \\ & = \iint_{0 \leq \Omega} f w_s dx dt + \iint_{0 \leq \Omega} u dx dt, \\ & y_m(0) = G. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Слід відмітити, що задача (5) є розв'язною, про що говорить такий результат:

Лема 1. [3] Для будь-якого m існує єдиний розв'язок $y_{mm} \in H^1(0, T; V)$ задачі (5) і $y_{mm} \in C([0, T]; V)$.

Разом з цим послідовності $\{y_m$ і $\{y_m\}$ будуть обмежені в $L^{21}(0, T; H_0(\Omega))$ і $L^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ відповідно:

Теорема 1. Нехай y_m – єдиний розв'язок задачі (5) тоді для будь-якого $0 \leq t \leq T$ мають місце такі оцінки:

$$\begin{aligned} \|y_{mm}\|_{L^{21}(0, T; H_0(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|y_m(T)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \left(C \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + C \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))} \right) \times \\ &\times \left\{ C \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + C \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))} + \frac{11}{\sqrt{2}} \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}, \\ \|(y_m)_t\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 &\leq 2 \|y_m\|_{L^2(0, T; H_0(\Omega))}^2 + C_P^2 \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ 4 C_P^2 C_f \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))} + C_P \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 \end{aligned}$$

Зауваження 1. Враховуючи теорему 1 і теорему 6.22 [3] про компактність, отримаємо, що

$$\begin{aligned} y_m &= y^k \text{ в } L^{21}(0, T_{H_0}(\Omega)), \\ y_m &= y^k \text{ в } L^{21}(0, T_{H^-}(\Omega)), \end{aligned}$$

де $m \rightarrow \infty$ і y^k – єдиний розв’язок задачі (3).

Беручи до уваги вищесказане, наведемо один із основних результатів:

Теорема 2. Нехай $u \in L^{22}(0, T_L(\Gamma))$ і $f \in \mathcal{E}^{21}(0, T_{H^-}(\Gamma))$. Тоді для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ задача (4) має єдиний розв’язок $y^k \in \mathcal{E}^{21}(0, T_{H_0}(\Omega))$, для якого мають місце оцінки:

$$\begin{aligned} \|y^{kk}\|_{L^2(0, T_{H_0}(\Omega))}^{22} + \frac{1}{2} \|y(T)\|_{H^1(\Gamma)}^2 &\leq \left(C \|f\|_{L^2(0, T_{H^-}(\Gamma))} + C \|u\|_{L^2(0, T_L(\Gamma))} \right) \times \\ &\times \left\{ C \|f\|_{L^2(0, T_{H^-}(\Gamma))} + C \|u\|_{L^2(0, T_L(\Gamma))} + \frac{11}{\sqrt{2}} \|y_0\|_{H^1(\Omega)}^{22} + \frac{1}{2} \|y_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}, \\ \left\| (y^{kk})' \right\|_{L^2(0, T_{H^-}(\Gamma))}^2 &\leq 2 \|y\|_{L^2(0, T_{H_0}(\Omega))}^2 \mathcal{C}_p^2 \|f\|_{L^2(0, T_{H^-}(\Gamma))}^2 \\ &+ 4 C C_f \|f\|_{L^2(0, T_{H^-}(\Gamma))} \|u\|_{L^2(0, T_L(\Gamma))} + C \|u\|_{L^2(0, T_L(\Gamma))}^2 \end{aligned}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує елемент $y^k \in \mathcal{E}^{21}(0, T_{H_0}(\Omega))$, який є розв’язком задачі (4). Слід відмітити, що в задачі (5) можна перейти до границі, коли $m \rightarrow \infty$ за умови, що тестова функція належить простору V_m .

Нехай v – це елемент простору $L^{21}(0, T_{H_0}(\Omega))$, який має вигляд

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kk}(t) w_k$$

і збігається в просторі $H_0^1(\Omega)$ для будь-якого $0 \leq t \leq T$. Далі для фіксованого $N \in \mathbb{N}$, покладемо

$$v_N(t) = \sum_{k=1}^N b_k(t) w_k, \quad (6)$$

очевидно, що $v_{Nm} \in L^2(0, T; V_N)$.

Тепер помножимо (5) на $b_k(\cdot)$ і просумуємо для $1 \leq k \leq N$. У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} (y_m, v_N(t))_{H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} (\nabla v_N(t), \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_N dx = \\ = - \int_{\Omega} f v_N(t) dx - \int_{\Gamma} u v(t) d\Gamma^{N-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Далі проінтегруємо по $(0, T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y_m dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v_N, \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_N dx dt = \\ = - \int_0^T \int_{\Omega} f v_N dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} u v d\Gamma^{N-1} dt \end{aligned}$$

Беручи до уваги зауваження 1 і перейшовши до границі, коли $m \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y^k dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v_N, \nabla y^k + A_k \nabla y^k)_N dx dt = \\ = - \int_0^T \int_{\Omega} f v_N dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} u v d\Gamma^{N-1} dt \end{aligned}$$

Відмітимо, що коли $N \rightarrow \infty$, то $v_N \rightarrow v$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y^k dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla y^k + A_k \nabla y^k)_N dx dt = \\ = - \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} u v d\Gamma^{N-1} dt \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином (8) має місце для всіх $v \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H_0^1(\Omega))$, а значить y^k задовольняє (3). Крім того, з теореми 7.22 [3] випливає, що $y^k \in \mathcal{D}([0, T]; H_0^1(\Omega))$.

Залишилось перевірити початкову умову означення 1. Отже, нехай $v \in \mathcal{D}^{11}([0, T]; H_0^1(\Omega))$ і $v(x) = 0$. Враховуючи те, що

$$\int_0^T \int_{\Omega} y_{NN}^k dx dt = \int_{\Omega} G_{NN}^k(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} y_{NN}^k dx dt$$

і застосувавши теорему 7.22 [3] до (7) і (8) при $m \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\int_{\Omega} y^k(0) v(0) dx = \int_{\Omega} y_{NN}^k(0) dx,$$

а значить

$$y_{NN}^k(0) = 0$$

Єдиність розв'язку y^k випливає із зауваження 7.10 [3]. У свою чергу, враховуючи твердження 7.16 [3] і перейшовши до границі $m \rightarrow \infty$, бачимо, що апіорні оцінки є наслідком теореми 1. *Теорему доведено.*

Тепер розглянемо задачу (1). Враховуючи означення L^∞ - апроксимації матриці $A(x)$, означення 1 і теорему 2, встановлено такий результат:

Теорема 4. Нехай $u \in L^{22}(0, T; L^2(\Gamma))$ і $f \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ – задані функції, а $A(x) \in \mathcal{D}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Нехай для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ $y^k \in \mathcal{D}^{21}(0, T; H_0^1(\Omega))$ – відповідні розв'язки задач (3). Тоді

$$\begin{aligned} y_{NN}^k & \text{ в } L^{21}(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ (y_{NN}^k)_t & \text{ в } L^{21}(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ [y_{NN}^k] & \geq 0. \end{aligned}$$

де y^* – слабкий розв'язок задачі (1).

Висновки. Таким чином, встановлено, що розв'язки вихідної задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач (4), застосовуючи метод Гальоркіна і наближення матриці потоку A матрицями

$$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega^\circ \left(\cdot ; \cdot^N \right).$$

Бібліографічні посилання

1. **Cioranescu D.** An Introduction to Homogenization / D. Cioranescu, P. Donato — New York : Oxford university press, 1999. — 262 p.
2. **Kogut P.I.** On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients / P.I. Kogut, O.P. Kuzenko // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання — 2012. — Вип. 4. — С. 63–82.
3. **Salsa S.** Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory / S. Salsa. — Milan : Springer-Verlag, 2008. — 556 p.
4. **Zhikov V. V.** Remarks on the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms / V.V. Zhikov // Functional Analysis and Its Applications — 2004. — No. 3. — P. 173–183.

Надійшла до редколегії 22.01.2014

В. А. ¹⁰Громов*, А. Д. Фирсов**

**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

***Академия Таможенной службы Украины*

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ ПОСТРОЕНИЯ МУЛЬТИГРАФА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Розглянуто деякі алгоритми побудови мультиграфа за хаотичним часовим рядом, які дозволяють добути «немарківську» частину інформації про ряд. У першому із наведених алгоритмів величина глибини прогнозу є фіксованою, у другому – визначається в процесі побудови алгоритму.

Рассмотрены некоторые алгоритмы построения мультиграфа по хаотическому временному ряду, позволяющие извлечь «немарковскую» часть информации о ряде. В первом из представленных алгоритмов величина глубины прогноза является фиксированной, во втором – определяется в процессе построения алгоритма.

Algorithms to derive multigraph from a chaotic time series in order to extract «non-markovian» portion of information on the series are presented in the paper. For the first algorithm presented, forecasting depth is defined by user whereas, as for the second one, forecasting depth is determined in the course of the algorithm.

Ключевые слова: хаотический временной ряд, мультиграф.

Введение. Постоянный, незатухающий интерес к анализу хаотических временных рядов обусловлен как сложностью теоретического исследования рядов указанного вида, так и важностью хаотических моделей и систем для описания природных и социальных процессов[4].

Особый интерес здесь представляет выделение информации, содержащейся во временном ряде, а также представление указанной информации в виде структур, удобных для дальнейшего использования. Здесь может идти речь как о прогнозировании ряда с помощью извлечённой информации [6], об оценке сложности ряда [2; 8], так и установлении связи между характеристиками временного ряда и свойствами построенных структур.

Одним из возможных способов представления информации о хаотическом временном ряде является построение графа (мультиграфа), отражающего свойства ряда. Так, в работе [1] предлагается методология по-

строения графа по временному ряду и приводятся характеристики полученных графов для некоторых стандартных временных рядов (порождённых логистическим отображением, отображением Икеда, уравнением реакции-диффузии-конвекции и др.).

L. Lacasa вычисляет величину необратимости стационарного временного ряда с помощью графа видимости ряда; в работе [7] указанная методология была применена к оценке величины необратимости «солнечного ветра».

В работе [3] для представления информации, содержащейся во временном ряде, использовалось множество характерных цепочек (для представления «немарковской» части информации) и мультиграф (с помощью которого осуществлялось сжатие «немарковской» части информации в структуру «квазимарковского» типа); в качестве инструмента экстракции информации использовался метод «муравьиных колоний». В настоящей работе представлены несколько модификаций алгоритма построения мультиграфа по временному ряду, позволяющие извлечь «марковскую» часть информации. Открытым, разумеется, остаётся вопрос, насколько «марковская» часть информации отражает природу хаотического ряда.

Следует подчеркнуть, что полученные с помощью вышеуказанных методик представления временного ряда с неизбежностью приводят к утрате части информации, содержащейся в ряде, и потому каждая модель такого рода характеризуется тремя величинами: сложностью ряда, сложностью модели и оценкой количества информации, которая теряется при переходе от ряда к его представлению.

Постановка задачи. Рассматривается одномерный временной ряд x_i , $i=1..N$, нормированный на промежуток $[0,1]$. Предполагается, что либо ряд регулярен, либо имеет хаотическую природу, но в этом случае выполняются условия теоремы Такенса, и, соответственно, динамика ряда есть отражения движения траектории динамической системы в окрестности некоторого странного аттрактора. И в том, и в другом случае во временном ряде будут встречаться подобные участки, отыскание которых, равно как и сжатие информации о данных участках, и составляют суть рассмотренных ниже алгоритмов [3].

Алгоритмы построения мультиграфа. Рассматривается направленный мультиграф $G_M(V, E_k)$ с числом вершин равным числу отрезков, на которые делится область значений нормированного ряда – промежутков $[0,1]$; при этом номера вершин соответствуют промежуткам длины $1/|V|$, на которые делится область значений. Число рёбер, соединяющих две вершины в мультиграфе, – k – выбираем равным максимальной требуемой

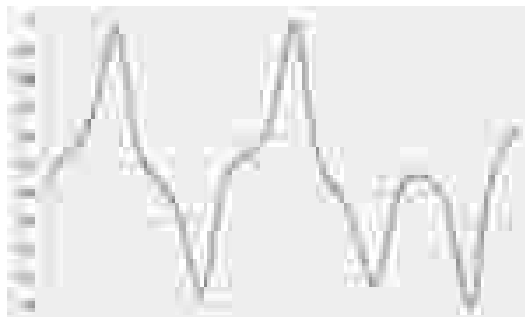
дальности прогноза. Информация о структуре временного ряда кодируется весами вышеописанного мультиграфа.

Рассмотрим, вначале, участок временного ряда длины $k - x_1, \dots, x_k$ и построим первоначальный мультиграф $G_M^0(V, E_k)$, соответствующий данному участку. Для удобства описания алгоритма построения первоначального мультиграфа введём нумерацию его вершин $v_{ij}, i=1, \dots, |V|, j=1, \dots, k$, причём второй индекс отвечает номеру в рассматриваемом отрезке ряда (т. е. устанавливается отображение пар наблюдений (x_i, x_j) во множество вершин мультиграфа), второй индекс указывает на номер промежутка.

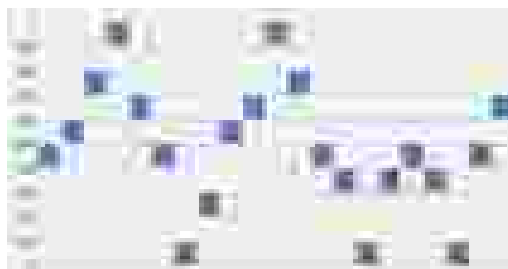
Построение начинается с вершины v_{i_1} , где индекс i_1 соответствует промежутку, в который попадает значение x_1 . Вершина v_{i_1} потенциально может быть соединена с остальными вершинами $(|V|-1) \cdot k$ дугами. Соединим дугой две вершины, если значение второго индекса у первой вершины меньше чем у второй, причём дуга направлена от вершины с меньшим индексом к вершине с большим индексом. Отметим, что такой способ построения мультиграфа эквивалентен заданию отношения порядка на множестве V .

Описанная схема построения далее применяется к каждому последующему отрезку временного ряда, сдвигая начальное наблюдение отрезка на единицу. Для получения искомого мультиграфа первоначальные орграфы объединяются, при этом вершинам, соответствующим каждому ребру, приписывается вес, равный числу орграфов, в которых данное ребро присутствует. Последним шагом алгоритма веса нормируются. Результирующий мультиграф описывает все возможные переходы в соответствии с заданным отрезком временного ряда («марковскую» часть информации).

Рис. 1 иллюстрирует применения указанного алгоритма к участку ряда, полученного интегрированием системы Лоренца. Так, на рис. 1а представлен участок ряда, для которого будет построен мультиграф G_M^0 . В рассматриваемом примере $|V|=10, k=10$. Рис. 1б иллюстрирует переход от исходного ряда к значениям, соответствующим промежуткам, на которые разбита область значений. Для нашего примера $i_1 = 5$. Результат построение первичного орграфа представлен на рис. 1в. На рис. 1г представлен искомый мультиграф.



а)



б)



в)



г)

Рис. 1. Схема построения мультиграфа для случая одной вершины

Конструктивные алгоритмы построения мультиграфа (определения весов) отличаются подходами к величине глубины прогноза, который может быть получен. Так, в алгоритме 1 данная величина фиксирована и равна k . В рамках алгоритма 2 за одну итерацию выполняется фиксированное число шагов, на каждом из которых выполняется переход на случайное число (не превосходящее k) значений исходного ряда вперёд; тем самым здесь максимальная возможная глубина прогноза определяется свойствами самого ряда и, зачастую, может быть весьма значительной.

Для построения алгоритмов и оценки их вычислительной сложности важны следующие свойства мультиграфа.

Свойство 1. Возможная глубина прогноза в мультиграфе задаётся суммой индексов рёбер на любом из путей от начальной вершины мультиграфа, включая циклические переходы.

Свойство 2. Число путей в мультиграфе, начинающихся из начальной вершины, длина которых равна глубине прогноза в мультиграфе равно $((k-1)+k(|V|-1))!$, где k – число рёбер между парой вершин в мультиграфе, $|V|$ – число вершин в мультиграфе, l – длина пути в мультиграфе из начальной вершины до вершины, для которой сумма индексов рёбер равна k .

Исходя из свойства 2, обработка всех возможных путей из начальной вершины представляет собой NP-трудную задачу.

Ниже приведено описание рассматриваемых алгоритмов.

Алгоритм 1:

0. Создаётся трёхмерный массив $G(i,j,k)$ – структура для хранения информации о мультиграфе, при этом первые две размерности равны между собой и равны числу интервалов, на которые разбита область значений ряда – отрезок $[0,1]$, третья – число дуг, соединяющих каждую пару вершин, что соответствует требуемой глубине прогноза. Анализируемый ряд хранится в массиве $A[i]$.
1. Выбирается случайным образом номер m элемента в массиве $A[i]$.
2. Значение элемента массива $A[i]$ преобразуется в номер вершины мультиграфа i_{graf} при помощи функции GetVerticeNumber .
3. Определяется ребро i_{edge} (и соответственно новая вершина i_{graf}) при помощи функции GetEdgeNumber .
4. Если сумма длин дуг, полученных на предыдущих шагах, меньше глубины поиска, то полученные номера заносятся в список S , каждым элементом которого является пара $[i_{\text{graf}}, i_{\text{edge}}]$; переход к пункту 2.
5. Вычисляется сумма квадратов отклонений значений, соответствующих номерам вершин в мультиграфе, выбранных из списка S (вы-

бираются середины соответствующих отрезков) от соответствующих реальных значений ряда, хранящихся в массиве $A[i]$.

6. Полученная величина нормируется на число элементов в списке S .
7. Веса рёбер в мультиграфе изменяются обратно пропорционально величине, полученной в пункте 6.
8. Если не достигнуто заданное число итераций, то переход к пункту 2.

Функция `GetVertexNumber` ставит в соответствие каждому из заданного числа интервалов, на которые разбита область значений, соответствующую вершину мультиграфа.

Функция `GetEdgeNumber` возвращает номер дуги (который используется на следующем шаге алгоритма): выбор осуществляется случайным образом, распределение вероятностей рёбер, исходящих из данной вершины, задаётся множеством весов, связанных с этими рёбрами.

Алгоритм 2:

0. Создаётся трёхмерный массив $G(i,j,k)$ – структура для хранения информации о мультиграфе, при этом первые две размерности равны между собой и равны числу интервалов, на которые разбита область значений ряда – отрезок $[0,1]$, третья – число дуг, соединяющих каждую пару вершин, что соответствует требуемой глубине прогноза. Анализируемый ряд хранится в массиве $A[i]$. Обнуляем счётчик длины пути в мультиграфе $step=0$.

1. Выбирается случайным образом номер m элемента в массиве $A[i]$.
2. Значение элемента массива $A[i]$ преобразуется в номер вершины мультиграфа i_graf при помощи функции `GetVertexNumber`.
3. Определяется ребро i_edge (и соответственно новую вершину i_graf) при помощи функции `GetEdgeNumber`.
4. Если $step < k$, то полученные номера заносятся в список S , каждым элементом которого является пара $[i_graf, i_edge]$, $step=step+1$; переходим на пункт 2.
5. Вычисляется сумма квадратов отклонений значений, соответствующих номерам вершин в мультиграфе, выбранных из списка S (выбираются середины соответствующих отрезков) от соответствующих реальных значений ряда, хранящихся в массиве $A[i]$.
6. Полученная величина нормируется на число элементов в списке S .
7. Веса рёбер в мультиграфе изменяются обратно пропорционально величине, полученной в пункте 6.
8. Если не достигнуто заданное число итераций, то переход к пункту 2.

Функции GetVertexNumber и GetEdgeNumber те же, что и в алгоритме 1.

Подчеркнём, что несмотря на схожесть вышеприведенных алгоритмов, они существенно отличаются: во-первых, глубины прогноза, в алгоритме 1 – k , в алгоритме 2 – определяется самим алгоритмом (теоретический максимум – k^2); во-вторых, вычислительной сложностью (см., свойство 2).

В обоих алгоритмах построение мультиграфа заканчивается, когда норма разности между весами рёбер в мультиграфах на двух последовательных итерациях не превышает заданной точности несколько итераций подряд.

Выводы. В работе представлены разработанные алгоритмы построения мультиграфа по хаотическому временному ряду, позволяющие извлечь «немарковскую» часть информации о ряде. Полученные мультиграфы могут быть использованы для прогнозирования ряда [3] и для оценки сложности ряда. В первом из представленных алгоритмов величина глубины прогноза является фиксированной, во втором – определяется в процессе построения алгоритма.

Библиографические ссылки

1. **Budroni M. A.** On chaotic graphs: A different approach for characterizing aperiodic dynamics / M. A. Budroni, E. Tiezzi, M. Rustici // *Physica A.* – 2010. – Vol. 389. – P. 3883–3891.
2. **Bialek W.** Predictability, complexity and learning / W. Bialek, I. Nemenman, N. Tishby // *Neural Computation.* – 2001. – Vol. 13, № 11. – P. 2409 – 2463.
3. **Gromov V. A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization / V. A. Gromov, A. N. Shulga // *Expert Syst. Appl.* – 2012. – Vol. 39, №9. – P. 8474–8478.
4. **Reichl L. E.** The Transition to Chaos. Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations / L. E. Reichl // Springer-Verlag, New Yor. 2nd Edition. 2004. – 675 p.
5. **Rissanen J.** Information and Complexity in Statistical Modeling / J. Rissanen // Springer. – 2007. – 145 p.
6. **Singh P.** High-order fuzzy-neuro expert system for time series forecasting / P. Singh, B. Borah // *Knowledge-Based Systems.* – 2013. – Vol. 46. – P. 12–21.
7. **Suyal V.** Visibility-Graph Analysis of the Solar Wind Velocity / V. Suyal, A. Prasad, H. P. Singh // *Solar Physics.* – 2014. – Vol. 289, №1. – P. 379–389.
8. **Vapnik V.** The Nature of Statistical Learning Theory / V. Vapnik, A. Chervonenkis // Springer; 2nd edition. – 1999. – 314 p.

Надійшла до редколегії 03.07.2014

В. А. ¹¹Громов, Е. А. Борисенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Розглянуто метод прогнозування хаотичних часових рядів, який базується на кластеризації векторів, побудованих із спостережень часового ряду. В якості алгоритму кластеризації використовувався алгоритм Уішарта. Центри отриманих кластерів використовувалися для побудови багатокрокового прогнозу часового ряду. Метод застосований до модельного часового ряду (отримані хороші результати) і до реального часового ряду (отримані задовільні результати).

Рассмотрен метод прогнозирования хаотических временных рядов, основанный на кластеризации векторов, составленных из наблюдений временного ряда. В качестве алгоритма кластеризации использовался алгоритм Уишарта. Центры полученных кластеров использовались для построения многошагового прогноза временного ряда. Метод применен к модельному временному ряду (получены хорошие результаты) и к реальному временному ряду (получены удовлетворительные результаты).

Wishart algorithm was employed to clusterize vectors composed of chaotic time series observations. The centers of these clusters are used to obtain multi-step ahead prediction for the time series as an exponential prediction error growth (immanent to chaotic time series) is alleviated due to clustering. The method was applied to benchmark time series (with good results) and to real-word time series (with satisfactory results).

Ключевые слова : многошаговое прогнозирование временных рядов, хаотический временной ряд, кластеризация.

Вступление

Постоянный незатухающий интерес к хаотическим системам и моделям [2; 3; 15; 22] связан как с фундаментальной важностью нелинейных явлений для описания природных и социальных процессов, так и со сложностью анализа соответствующих явлений. Особый интерес здесь представляет прогнозирование временных рядов, порождённых хаотическими системами. Математические модели и методы, традиционно применяемые

для прогнозирования временных рядов, предполагают построение единой модели, кроме того, предполагается, что число параметров в модели является настолько малым, насколько позволяют данные [13]. Между тем опыт прогноза реальных временных рядов позволяет прийти к выводу, что такая модель может либо не существовать, либо быть слишком сложной.

При рассмотрении хаотических временных рядов следует отметить, что, поскольку хаотический временной ряд является отражением движения некоторой динамической системы в окрестности странного аттрактора, то различные части указанного странного аттрактора связаны с различными участками ряда, и потому представляется разумным разработать отдельную модель для каждой части странного аттрактора. Следует подчеркнуть, что именно прогнозные модели, явно или неявно учитывающие структуру аттрактора, оказались эффективными при прогнозировании самых сложных хаотических временных рядов.

Существующие на настоящий момент подходы к прогнозированию хаотических временных рядов, учитывающие структуру странного аттрактора, можно разделить на три основные группы в соответствии с теориями искусственного интеллекта, на которые они опираются [25]. К первой группе относятся нейронные сети, которые (будучи универсальными адаптивными аппроксиматорами) способны выявить и аппроксимировать локальные тенденции в поведении хаотического временного ряда [6; 7; 14]. Ко второй группе следует отнести нечёткие и нейро-нечёткие подходы, используемые для построения надёжных и логически прозрачных прогнозных моделей [1; 9; 23]. Наконец, третья группа связана с методами распределённого искусственного интеллекта: генетические алгоритмы [14], интеллект роя [10; 25], метод «муравьиных колоний» [8; 16; 18], другие алгоритмы данного класса [20]. Методы распределённого искусственного интеллекта могут быть применены как для отыскания весов в нейросетевых моделях [5; 26], так и непосредственно для прогнозирования.

Следует подчеркнуть, что в большинстве рассмотренных выше работ методы прогнозирования применялись для прогнозирования на один шаг вперёд (одношаговое прогнозирование), что позволяет в значительном числе случаев получить достаточно хорошие результаты прогнозирования. В частности, для хаотических временных рядов, часто используемых при тестировании методов прогнозирования, — временных рядов, полученных интегрированием системы Лоренца и уравнений Мекки-Гласса, — уровень ошибки прогнозирования составляет менее 0,5 % (при использовании наиболее эффективного из существующих в настоящий момент методов). Ситуация кардинально меняется, если речь идет о многошаговом прогнозе. Экспоненциальный рост ошибки прогнозирования, скорость которого оп-

ределяется значением старшего показателя Ляпунова, приводит к существенному снижению качества прогноза по мере удаления позиции, для которой требуется осуществить прогноз, от позиции последнего известного наблюдения.

Постановка задачи

Совокупность наблюдений хаотического временного ряда $y_0, y_1, \dots, y_t$ используется для прогнозирования значений последующих наблюдений $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+k}$ с абсолютной ошибкой прогнозирования, не превышающей наперед заданного значения.

Предполагается, что все переходные процессы в системе, порождающей рассматриваемый временной ряд, завершены, и поведение временного ряда отражает траекторию движения системы в окрестности странного аттрактора, сколь бы сложной ни была указанная траектория. Также будем предполагать, что рассматриваемый ряд удовлетворяет условиям теоремы Такенса и, следовательно, можно проанализировать структуру аттрактора, используя наблюдения временного ряда.

Поскольку траектории системы неоднократно посещают одну и ту же область аттрактора, то среди наблюдений временного ряда можно встретить аналогичные (подобные) последовательности, связанные с движением траектории в данной области. Если удаётся выделить эти области, описать их и построить простейшую модель прогнозирования для каждой из них, то возможно осуществить прогноз для рассматриваемого временного ряда на весьма значительное число шагов вперёд [8]. Рассмотренный ниже метод кластеризации используется для группировки последовательностей значений временного ряда.

Как правило, чтобы удовлетворить условиям теоремы Такенса, составляются вектора из наблюдений временного ряда [12]. Интересно то, что использование векторов, состоящих из последовательных наблюдений, оказалось менее эффективными для прогнозирования, чем векторов, составленных в соответствии с некоторым шаблоном.

Следует подчеркнуть, что каждая из указанных простейших моделей представляет собой усредненное представление последовательностей наблюдений временного ряда, относящихся к одному кластеру (или, альтернативно, траекторий, проходящих по соответствующей области аттрактора). Указанное усреднение приводит к ухудшению качества многошагового прогноза за счёт использования для прогноза средних значений (прогнозируемые значения получаются с использованием центров кластеров), и одновременно к его улучшению, вызванному уменьшением экспоненци-

ального роста ошибки прогнозирования. Используемый метод кластеризации определяет компромисс между этими тенденциями.

Метод решения

Предлагаемый алгоритм состоит из двух частей. Первая – это анализ временного ряда для кластеризации последовательностей, составленных из наблюдений, соответствующих предопределённым шаблонам, и последующего выявления характерных последовательностей наблюдений, таких как центры кластеров. Вторая часть предусматривает прогнозирование с использованием полученных характерных последовательностей. Предполагается, что ряд нормализован. В качестве алгоритма кластеризации использовался алгоритм Уишарта [27]: метод основывается на аппарате теории графов и непараметрической оценке плотности k ближайших соседей. Выборка формировалась из векторов, составленных из наблюдений по определённому шаблону. Указанный алгоритм кластеризации применялся к выборкам, полученным с помощью нескольких шаблонов. Для каждой такой выборки формировался свой набор кластеров.

Для прогнозирования временного ряда использовались центры полученных кластеров (характерные последовательности), рассчитанные для всех используемых шаблонов. А именно, для позиции, для которой требуется получить прогноз, из предыдущих наблюдений временного ряда составлялись векторы в соответствии с каждым из использованных шаблонов таким образом, чтобы последняя позиция в шаблоне совпадала с позицией, для которой требуется получить прогноз. Далее размерность полученных таким образом векторов и центров кластеров уменьшалась на единицу, и рассчитывалось евклидово расстояние между усечённым вектором наблюдений и усечённым центром кластера. Среди всех кластеров и всех шаблонов отыскивался кластер, для которого данное расстояние было минимальным. Последний элемент центра найденного таким образом кластера использовался в качестве прогнозного значения.

Следует отметить, что методы, использующие кластеризацию для выявления характерных последовательностей и предсказания с их помощью значений временного ряда, обладают следующими ограничениями. Иногда невозможно найти соответствующий кластер для прогнозирования данной позиции (нет центров кластеров, достаточно близких к вектору, составленному из наблюдений временного ряда, который соответствует заданной точке). В дальнейшем такие наблюдения будем называть непрогнозируемыми и их количество, отнесённое к общему количеству наблюдений в выбранном тестирующем множестве, служит мерой качества метода прогнозирования наряду со значением ошибки прогнозирования, ус-

реднённой по всем прогнозируемым наблюдениям тестирующего множества.

Дополнительно, для оценки прогнозной значимости полученных кластеров строится множество такого же размера как тестирующее и рассчитывается качество прогноза кластеров I_k для всего множества. Для каждого кластера (при заданном максимальном допустимом значении погрешности α) указанная величина вычисляется как

$$I_k(\alpha) = \sum_{i \in S_k} \frac{\bar{\epsilon}_i}{\epsilon_{ki}} \frac{1}{|V_i| - 1}, \quad \bar{\epsilon}_i = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in V_k} \epsilon_{ji},$$

где V_i – множество кластеров, которые могут быть использованы для прогнозирования i -го наблюдения с ошибкой меньше заданного значения α ; ϵ_{ji} – ошибка соответствующая прогнозу i -го наблюдения с использова-

нием центра j -го кластера, $j \in V_i$; $\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in V_k} \epsilon_{ji}$ – средняя ошибка прогнозирования для i -го наблюдения по всем кластерам; S_k – множество наблюдений таких, что центр k -го кластера обеспечивает прогноз с ошибкой меньшей, чем заданное значение α .

Анализ полученных результатов

Метод, описанный в прошлом разделе, был применён к временному ряду, полученному интегрированием системы Лоренца [11] (который является типичным примером хаотического временного ряда), а также к температурному временному ряду для города Днепропетровска.

Система Лоренца (со стандартными «хаотическими» параметрами $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, = 28$) интегрировалась с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка (с шагом интегрирования 0.1), в результате чего получен временной ряд, который в дальнейшем будем называть рядом Лоренца. Для ряда Лоренца первые 800 наблюдений отбрасываются, чтобы гарантировать, что движение траекторий происходит в окрестности соответствующего странного аттрактора. Тестирующее множество состоит из 3 тыс. наблюдений, тогда как размер обучающего множества изменяется и является существенным параметром рассматриваемого метода.

Погодный ряд отражает изменения температуры в городе Днепропетровске с 2008 по 2013 год (измеряемые каждые 3 часа) и содержит 15 тыс. наблюдений.

На всех рисунках, представленных в данном разделе, синяя сплошная линия соответствует наблюдаемым данным, в то время как красная пунктирная – прогнозным значениям. Кружки соответствуют непрогнозируемым наблюдениям.

Для обоих рядов использовались 4-точечные шаблоны с максимальным расстоянием между наблюдениями равным 10; таким образом, максимальное число шаблонов равно 1 тыс.

На рис. 1 представлены результаты прогнозирования на 1 шаг вперёд для ряда Лоренца. Размер обучающей выборки – 20 тыс. наблюдений. Количество непрогнозируемых наблюдений составило 10 %, среднеквадратическая ошибка прогнозирования для остальных точек равна 0.82 %.

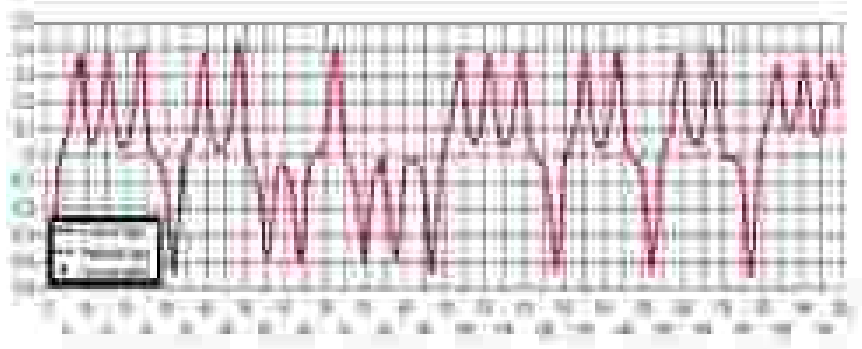


Рис. 1. Одношаговый прогноз для ряда Лоренца

На рис. 2 представлены результаты прогнозирования на несколько шагов вперед для ряда Лоренца (при необходимости прогноз осуществлялся по уже спрогнозированным значениям). Здесь, как и в предыдущем случае, объём обучающей выборки составил 20 тыс. наблюдений. Для участка временного ряда, изображенного на рис. 2, алгоритм позволил получить достоверные значения прогноза до 79 шагов вперед. В среднем по тестирующему множеству, для прогноза на 50 шагов вперед процент непрогнозируемых наблюдений поднимается до 22 %, а среднеквадратическая ошибка прогнозирования для прогнозируемых наблюдений не превышает 1.9 %.

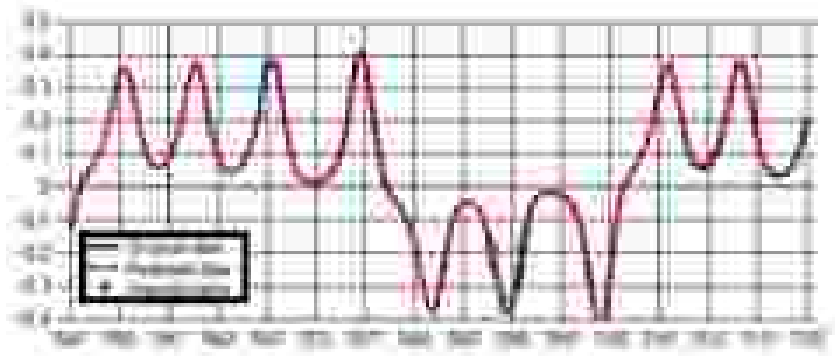
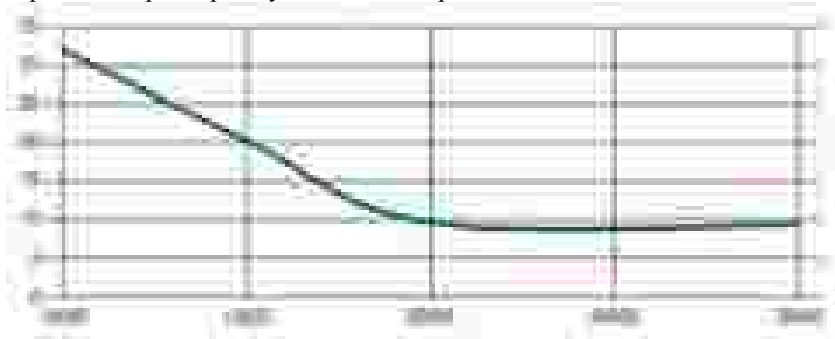
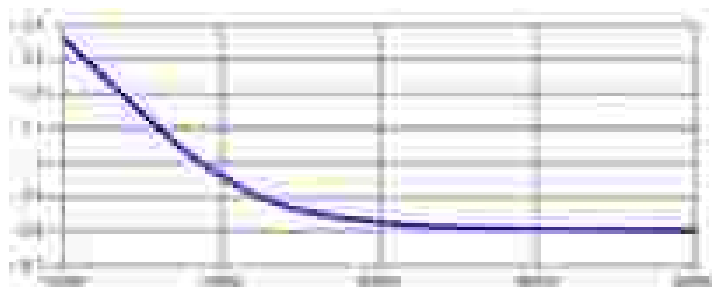


Рис. 2. Многошаговый прогноз для ряда Лоренца

Два следующих рисунка (рис. 3 и рис. 4) отражают тот факт, что с увеличением размера обучающей выборки посещается больше областей странного аттрактора (даже со сравнительно малыми значениями инвариантной меры соответствующей динамической системы), и, соответственно, растёт точность прогноза. На рис. 3а представлен процент непредсказуемых наблюдений в зависимости от размера обучающей выборки для прогноза на один шаг вперед (объём тестирующего множества остаётся постоянным); на рис. 3б – среднеквадратическая ошибка прогнозирования в зависимости от размера обучающей выборки. Рис. 4а и 4б демонстрируют аналогичные зависимости для многошагового прогноза. В обоих случаях характеристики убывают почти монотонно и стремятся к нулю при стремлении размера обучающих выборок к бесконечности.

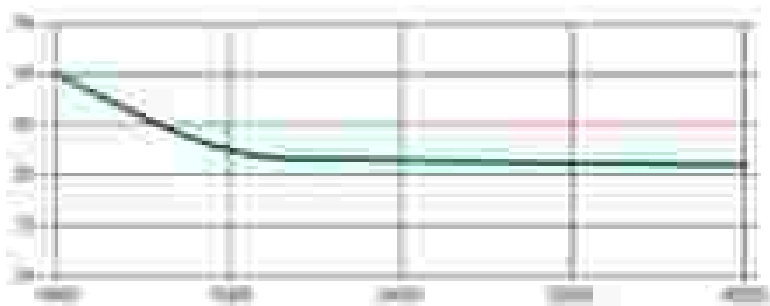


а)

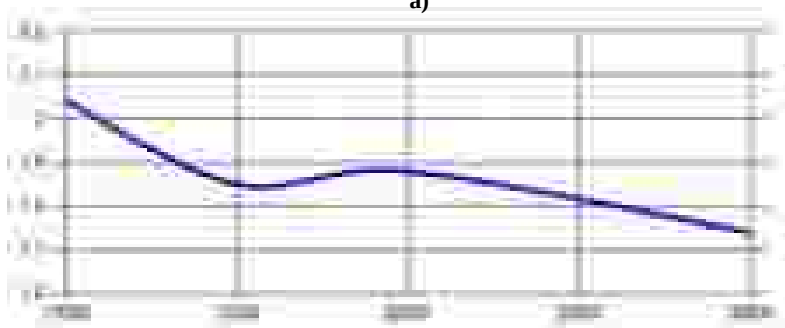


б)

Рис. 3. Зависимость от размера обучающей выборки для одношагового прогноза



а)



б)

Рис. 4. Зависимость от размера обучающей выборки для многошагового прогноза

Описание результатов для погодного временного ряда следует по той же схеме, что и представленное выше описание результатов для ряда Ло-

ренца. Таким образом, на рис. 5 и 6 представлены результаты прогнозирования на один и несколько шагов вперед соответственно. Здесь размер обучающей выборки равен 15 тыс. Процент непрогнозируемых наблюдений – 43.3 %, среднеквадратическая ошибка для прогнозируемых наблюдений – 2.43 %.

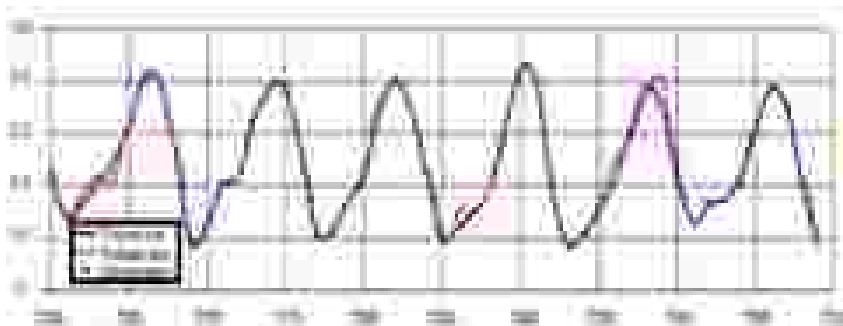


Рис. 5. Прогноз на один шаг вперед для погодного временного ряда

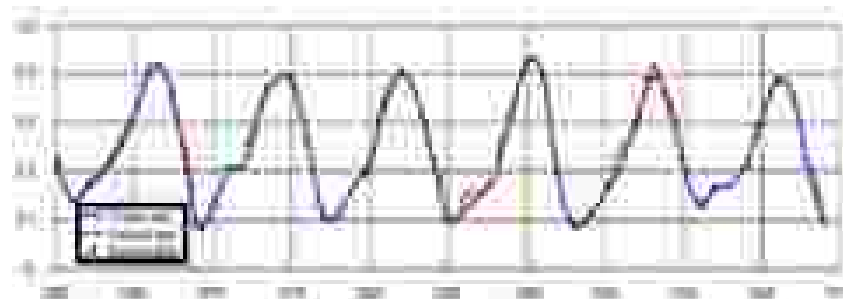
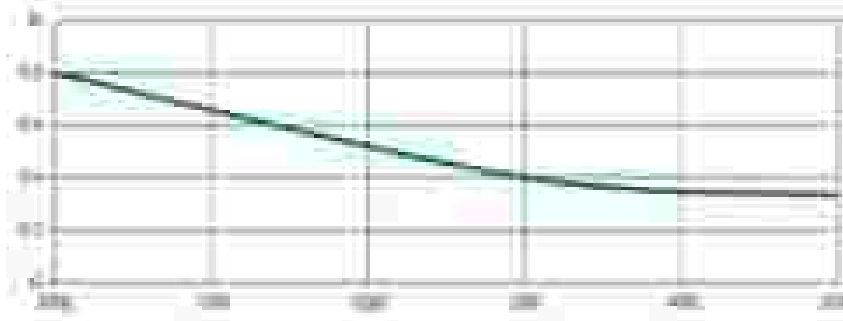
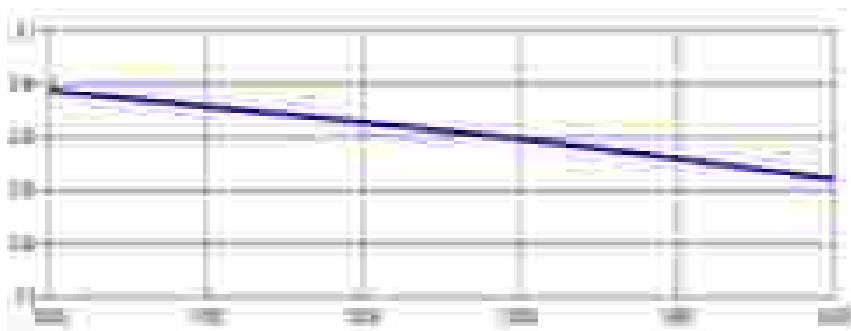


Рис. 6. Прогноз на несколько шагов вперед для погодного временного ряда

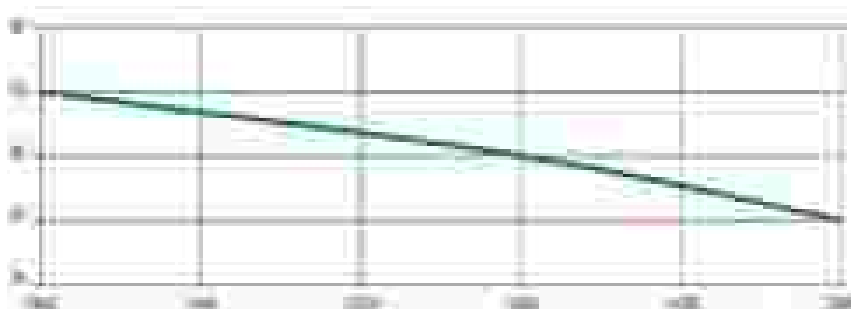


а)

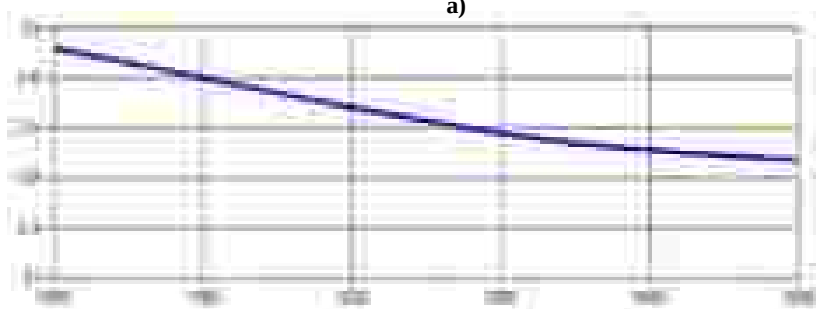


б)

Рис. 7. Зависимость от размера обучающей выборки для прогноза на один шаг вперед



а)



б)

Рис. 8. Зависимость ошибки прогнозирования от размера обучающей выборки для прогноза на несколько шагов вперед

Выводы

1. Представленный метод прогнозирования, базирующийся на методе кластеризации Уишарта, демонстрирует хорошее качество прогнозирования для ряда Лоренца и удовлетворительные результаты для погодного температурного ряда.
2. Как для модельных (ряд Лоренца), так и для реальных данных (температурный ряд) качество прогнозаросло с увеличением размера обучающей выборки.

Библіографічні посилання

1. **Bang Y. K.** Fuzzy time series prediction using hierarchical clustering algorithms / Y. K. Bang, C. K. Lee // *Expert Systems with Applications*. – 2011. – №38(4). – P. 4312–4325.
2. **Barkley J. R.** From Catastrophe to Chaos: A General Theory of Economic Discontinuities, 2nd ed. / J. R. Barkley. – 2000.
3. **Barnett W. A.** Economic Complexity: Non-Linear Dynamics, Multi-Agents Economies, and Learning / W. A. Barnett, C. Deissenberg, G. Feichtinger (Eds.) // *ISETE*. – 2004. – №14. – P. 467.
4. **Bialek W.** Predictability, complexity and learning, *Neural Computation*/ W. Bialek, I. Nemenman, N. Tishby. – 2001. – №13 (11). – P. 2409–2463.
5. **Donate J. P.** Time series forecasting by evolving artificial neural networks with genetic algorithms, differential evolution and estimation of distribution algorithm / J. P. Donate, X. Li, G. G. Sánchez, A. S. de Miguel// *Neural Computing and Applications*. – 2013. – №22(1). – P. 11–20.
6. **Fu Y. Y.** ARFNNs with SVR for prediction of chaotic time series with outliers / Y. Y. Fu, C. Y. Wub, J. T. Jeng, C. N. Ko// *Expert Systems with Applications*. – 2010. – №37. – P. 4441–4451.
7. **Gan M.** A locally linear RBF network-based state-dependent AR model for nonlinear time series modeling / M. Gan, H. Peng, X. Peng // *Information Sciences*. – 2010. – №180. – P. 4370–4383.
8. **Gromov V. A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization / V. A. Gromov, A. N. Shulga // *Expert Systems with Applications*. – 2012. – №39. – P. 8474–8478.
9. **Gu H.** Fuzzy prediction of chaotic time series based on singular value decomposition / H. Gu, H. Wang// *Applied Mathematics and Computation*. – 2007. – №185. – P. 1171–1185.
10. **Hong W. C.** Application of chaotic ant swarm optimization in electric load forecasting / W. C. Hong // *Energy Policy*. – 2010. – №38. – P. 5830–5839.
11. **Jackson E. A.** The Lorenz System: I. The Global Structure of its Stable Manifolds / E. A. Jackson // *Phys. Scr.* – 1985. – №32. – P. 469–475.
12. **Kantz H.** *Nonlinear Time Series Analysis* / Kantz H., Schreiber T. – 2004.
13. **Konishi S.** *Information Criteria and Statistical Modeling* / S. Konishi, G. Kitagawa. – 2008.

14. **Mirzaee H.** Linear combination rule in genetic algorithm for optimization of finite impulse response neural network to predict natural chaotic time series / H. Mirzaee // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2009. – №41. – P. 2681–2689.
15. **Murray J. D.** *Mathematical Biology 1: An Introduction* / J. D. Murray. – 2002.
16. **Niu D.** Power load forecasting using support vector machine and ant colony optimization / D. Niu, Y. Wang, D. D. Wu // *Expert Systems with Applications*. – 2010. – №37. – P. 2531–2539.
17. **Palit A. K.** *Computational Intelligence in Time Series Forecasting. Theory and Engineering Applications* / A. K. Palit, D. Popovic. – 2005.
18. **Pan Y.** Predicting the net heat of combustion of organic compounds from molecular structures based on ant colony optimization / Y. Pan, J. C. Jiang, R. Wang, J. J. Jiang // *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. – 2011. – №24. – 85–89.
19. **Prigogine I.** *The End of Certainty* / I. Prigogine. – 1997.
20. **Qin A. K.** Differential Evolution Algorithm With Strategy Adaptation for Global Numerical Optimization / A. K. Qin, V. L. Huang, P. N. Suganthan // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. – 2009. – №13(2). – P. 398–417.
21. **Rao P. V.** Teaching-learning-based optimization: an optimization method for continuous non-linear large scale problems / P. V. Rao, V. J. Savsani, D. P. Vakharia // *Information Sciences*. – 2012. – №183(1). – P. 1–15.
22. **Reichl L. E.** *The Transition to Chaos. Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* / L. E. Reichl. – 2004.
23. **Singh P.** High-order fuzzy-neuro expert system for time series forecasting / P. Singh, B. Borah // *Knowledge-Based Systems*. – 2013. – №46. – P. 12–21.
24. **Vapnik V.** *The Nature of Statistical Learning Theory* / V. Vapnik, A. Chervonenkis. – 2000.
25. **Wang J.** Chaotic time series method combined with particle swarm optimization and trend adjustment for electricity demand forecasting / J. Wang, D. Chi, J. Wu, H. Lu // *Expert Systems with Applications*. – 2011. – №38. – P. 8419–8429.
26. **Zhao L.** PSO-based single multiplicative neuron model for time series prediction / L. Zhao, Y. Yang // *Expert Systems with Applications*. – 2009. – №36. – P. 2805–2812.
27. **Лапко А. В.** *Непараметрические системы обработки информации* / А. В. Лапко, С. В. Ченцов. – М. : Наука, 2000. – 350 с.

Надійшла до редколегії 17.03.2014

А.С.¹²Дудник, И.С. Тонкошкур

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Розглянуто задачу про просторову безхвилюву плівкову течію в'язкопластичної рідини по поверхні твердого тіла під дією сили тяжіння. За допомогою методу малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки по поверхні тіла обертання.

Рассмотрена задача о пространственном безволновом пленочном течении вязкопластической жидкости по поверхности твердого тела под действием силы тяжести. С помощью метода малого параметра получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности тела вращения.

The problem of spatial waveless film flow of a viscoplastic fluid on a solid surface by gravity. Using the small parameter method to obtain an approximate solution of the equations of the dynamics of a liquid film along a surface of a body of revolution.

Ключевые слова: жидкая пленка, метод малого параметра, тело вращения, вязкопластическая жидкость.

Введение. Математическое моделирование пленочных течений представляет интерес в связи с широким применением жидких пленок в тепло-массообменных аппаратах, при нанесении лакокрасочных и полимерных покрытий на различные поверхности и в других технологических процессах. При этом часто используют реологически сложные жидкости, имеющие особые свойства.

Моделированию течений жидкой пленки по поверхности твердого тела посвящен ряд теоретических исследований (например, [1 ; 5; 6]), но при этом число работ, в которых исследуются трехмерные течения довольно ограничено [2]. В [4] рассматривалась задача о пространственном течении нелинейно-вязкой жидкости по поверхности конических тел с некруговыми поперечными сечениями. В настоящей работе предлагается методика приближенного расчета движения вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения.

Постановка задачи. Рассматривается задача о пространственном безволновом стационарном течении вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения под действием силы тяжести. Предполагается, что ось тела расположена под некоторым углом к вертикали, а пленка жидкости стекает от его вершины вниз. Введем криволинейную ортогональную систему координат (ξ, η, ζ) , связанную с поверхностью тела: координата ξ отсчитывается от вершины тела вдоль образующей, η – полярный угол в плоскости, перпендикулярной оси тела вращения, ζ – расстояние по нормали к поверхности. Уравнение поверхности тела задается в виде $r = r_w(\xi)$, где r_w – расстояние от точки поверхности до оси тела.

Для описания течения жидкой пленки принимается модель вязкой несжимаемой жидкости, основанная на уравнениях импульса и неразрывности. В векторной форме эти уравнения имеют вид

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -\text{grad } p + \text{Div } \bar{\tau} + \rho \bar{g},$$

$$\text{div } \bar{V} = 0, \quad (1)$$

где $\bar{V}$ – вектор скорости движения жидкости, p – давление, ρ – плотность жидкости, $\bar{\tau}$ – тензор вязких напряжений, $\bar{g}$ – интенсивность силы тяжести

В качестве граничных условий используются условие прилипания на поверхности твердого тела, а также условия непрерывности напряжений и нормальной составляющей вектора скорости – на поверхности Γ , разделяющей жидкость и газ.

$$\bar{V} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\tau} \bar{N} - (p - p_0) \bar{N} = 2\sigma \chi \bar{N} + \nabla_{\Gamma} \quad (3)$$

$$\bar{V} \bar{N} = 0 \quad \text{при } \zeta = h. \quad (4)$$

Здесь $h = h(\xi, \zeta)$, p_0 – атмосферное давление в газе, $\bar{N} = \bar{N}(\xi, \eta)$ – единичная нормаль к Γ , χ – средняя кривизна поверхности Γ , σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\nabla_{\Gamma} \sigma$ – поверхностный градиент коэффициента σ . Для замыкания системы уравнений (1) используется реологический закон Шведова-Бингама [1]:

$$\tau_{ij} = 2 \left[\frac{\tau_0}{\sqrt{2I_2}} + \mu_p \right] \dot{e}_{ij} \quad \text{при } |\tau| \geq \tau_0,$$

$$\dot{e}_{ij} = 0 \quad \text{при } |\tau| < \tau_0,$$

где τ_0 – граничное напряжение сдвига, μ_p – пластическая вязкость, I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$.

Метод решения. Для упрощения системы дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2) – (4) применяется метод малого параметра, в качестве которого выбрана относительная толщина пленки $\varepsilon = h_0 / l_0$ (h_0, l_0 – характерные поперечный и продольный размеры).

Введем безразмерные переменные по формулам:

$$\xi = \xi' \eta_0, \eta = \eta', \zeta = \varepsilon l_0 \zeta',$$

$$u = U_0 u', w = U_0 w', v = \varepsilon U_0 v',$$

$$p = \rho U_0^2 p', \sigma = \sigma_0 \sigma', F = \varepsilon l_0 F',$$

где u, w, v – составляющие вектора скорости, соответствующие координатам (ξ, η, ζ) , U_0, σ_0 – характерные значения скорости движения жидкости и коэффициента поверхностного натяжения, $F = F(\xi, \eta)$ – уравнение свободной поверхности. Введем также вспомогательную функцию $P(\xi, \eta, \zeta)$, связанную с давлением p соотношением:

$$p = p_0 - 2\sigma\chi + \rho U_0^2 P.$$

Представим неизвестные функции (составляющие вектора скорости и давление) в виде разложений в ряд по ε

$$A = A^0 + \varepsilon A^1$$

и подставим их в систему полученных уравнений. Предполагается, что число Рейнольдса $Re = \rho U_0 / \mu_p$ имеет порядок единицы, (т. е. $\varepsilon Re \ll 1$). В дальнейшем для сокращения записи знак «'» опущен.

Учитывая главные члены разложений, получим упрощенную систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{r'_w}{r_w} u = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{(\bar{e}\bar{n})}{Fr},$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial \zeta} = -\frac{Re}{Fr}(\bar{e}\bar{e}_1), \quad \frac{\partial \tau_{32}}{\partial \zeta} = -\frac{Re}{Fr}(\bar{e}\bar{e}_2).$$

Граничные условия:

$$u = w = v = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,$$

$$\tau_{31} = \tau_{32} = P = 0, \quad v - u \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{w}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \zeta = F,$$

где $Fr = U_0^2 / (gh_0)$ – число Фруда, $\bar{e}$ – единичный вектор, задающий направление действия силы тяжести, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$ – базисные векторы криволинейной системы координат (ξ, η, ζ) , g – ускорение свободного падения. Поверхность $\zeta = \zeta_0(\xi, \eta)$ разделяет вязкую и пластическую области течения жидкости.

Решение задачи (в нулевом приближении) для составляющих вектора скорости имеет вид:

в вязкой области течения (при $\zeta < \zeta_0$)

$$u = \varphi_1 \left[\frac{\zeta^2}{2} - (F - \bar{S})\zeta \right], \quad w = \varphi_2 \left[\frac{\zeta^2}{2} - (F - \bar{S})\zeta \right],$$

$$v = -\varphi_3 \left[\frac{\zeta^3}{6} - (F - \bar{S}) \frac{\zeta^2}{2} \right] + \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \bar{S}\varphi_5 \right) \frac{\zeta^2}{2},$$

в пластической области (при $\zeta \geq \zeta_0$)

$$u = -\frac{1}{2}\varphi_1(F - \bar{S})^2, \quad w = -\frac{1}{2}\varphi_2(F - \bar{S})^2,$$

$$v = \frac{1}{3}\varphi_3(F - \bar{S})^3 + \frac{1}{2} \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \bar{S}\varphi_5 \right) (F - \bar{S})^2,$$

для функции давления

$$P = \Phi_4(\zeta - F),$$

где $\bar{S} = S / (\Phi_1^2 - \Phi_2^2)^{0.5}$, $S = \tau_0 h_0 / (\mu_p U_0)$ – безразмерный параметр пластичности. Функции Φ_i имеют следующий вид:

$$\Phi_1 = -\frac{\text{Re}}{Fr}(\bar{e}, \bar{e}_1), \quad \Phi_2 = -\frac{\text{Re}}{Fr}(\bar{e}, \bar{e}_2), \quad \Phi_3 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} + \frac{1}{r_w} \frac{dr_w}{d\xi} \Phi_1,$$

$$\Phi_4 = \left(\bar{e}, \bar{n} \right), \quad \Phi_5 = \Phi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \Phi_1 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \Phi_1 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \Phi_2^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}.$$

Неизвестная толщина пленки F определяется в результате решения краевой задачи

$$\Phi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\Phi_3}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{1}{3} \Phi_3 F + \bar{S} \left(\frac{1}{2} \Phi_5 - \frac{1}{3} \Phi_3 \right) = 0, \quad (5)$$

$$F(1, \eta) = 1, \quad F(\xi, 0) = F_0(\xi).$$

Система уравнений (5) решается численно с использованием разностной схемы бегущего счета [3]. Функция $F_0(\xi)$ находится в результате решения задачи на линии растекания $\eta=0$.

Анализ полученных результатов. По описанной методике были проведены расчеты течения пленки по поверхности кругового конуса при различных значениях физических и геометрических параметров. Результаты расчетов для конуса с полууглом раствора $\theta = 30^\circ$ при угле скоса потока $\gamma = 10^\circ$ и значениях физических параметров $\text{Re}=1$, $\text{Fr}=1$, $S=0; 0,1; 0,2; 0,3$ представлены на рис. 1–3.

На рис.1–2 показаны распределения толщины пленки F и вязкого слоя ζ_0 вдоль образующей ($\eta=45^\circ$) и в поперечном сечении конуса ($\xi=1,5$), а на рис.3 – профили продольной составляющей вектора скорости в слое пленки для точки поверхности с координатами ($\xi=1,5; \eta=45^\circ$).

Результаты расчетов показывают, что параметр пластичности S существенно влияет на профиль скорости и распределения толщины пленки и вязкого слоя по поверхности тела.

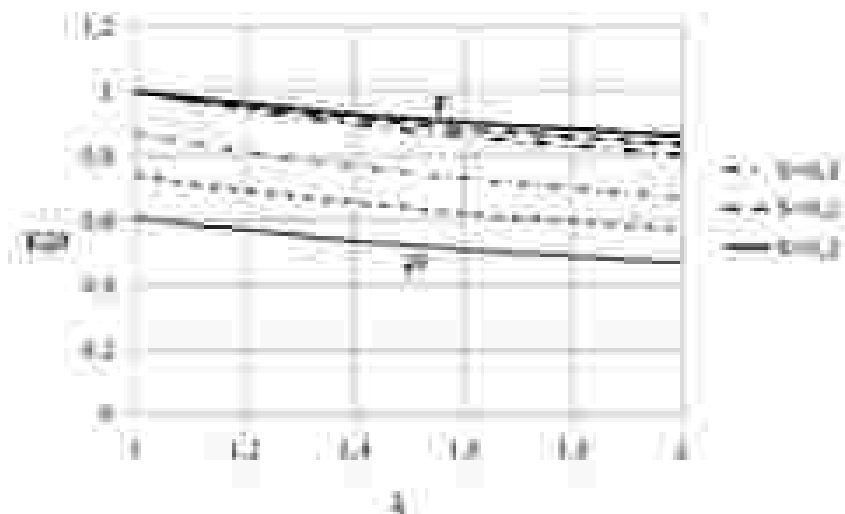


Рис. 1. Распределения толщины пленки F и вязкого слоя ζ_0 вдоль образующей конуса

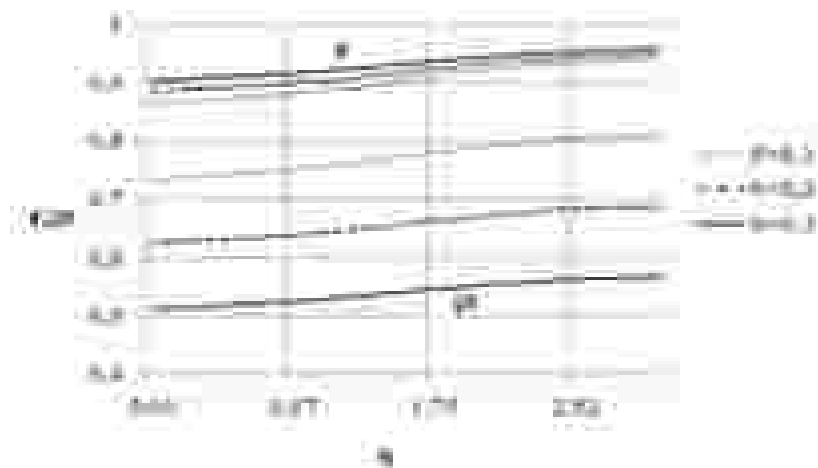


Рис. 2. Распределения толщины пленки F и вязкого слоя ζ_0 в поперечном сечении тела

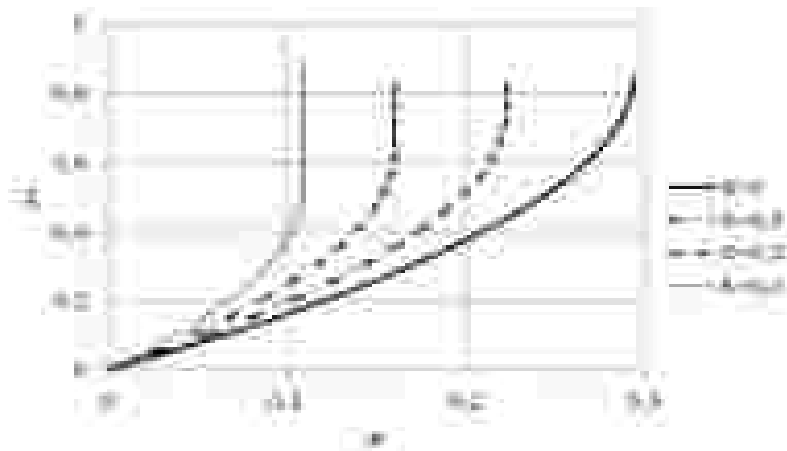


Рис. 3. Профили продольной составляющей вектора скорости в слое пленки при разных значениях параметра пластичности

Выводы. С помощью метода малого параметра разработана методика решения задачи о течении вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения под действием силы тяжести. Приведены примеры численного решения задачи для кругового конуса, которые подтверждают эффективность предложенной методики и возможность ее применения в инженерной практике.

Библиографические ссылки

1. **Бояджиев Х.** Массоперенос в движущихся пленках жидкости / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М. : Мир, 1988. – 137 с.
2. **Волченко Ю.А.** Динамика жидкой пленки на искривленной твердой стенке с учетом фазового превращения на свободной поверхности / Ю.А. Волченко, И.И. Иевлев // Механика жидкости и газа. – 1994. – №4. – С. 42–50.
3. **Калиткин Н.Н.** Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
4. **Тонкошкур И.С.** Математическое моделирование течения жидкой пленки по конической поверхности / И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання, – Д. : ДНУ, 2010. – С. 284–291.
5. **Холпанов Л.П.** Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М. : Наука, 1990. – 271 с.
6. **Шульман З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях / З.П. Шульман, В.Н. Байков. – Минск : Наука и техника, 1979. – 296 с.

Надійшла до редколегії 23.05.2014

М. И. ¹³Зиновеева

Запорожский национальный университет

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В МАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Широке застосування в прикладних задачах економіки, соціології, політології, кібернетики мають матричні гри. Особливий інтерес становлять матричні гри із сідловою точкою та питання: наскільки відрізняється довільна матрична гра від гри із сідловою точкою? У статті запропоновано алгоритм, який по заданій матриці гри дозволяє побудувати найближчу до неї гру із сідловою точкою.

Широкое применение в прикладных задачах экономики, социологии, политологии, кибернетики имеют матричные игры. Особый интерес представляют матричные игры с седловой точкой и вопрос: насколько отличается произвольная матричная игра от игры с седловой точкой? В статье предлагается алгоритм, который по заданной матрице игры позволяет построить ближайшую к ней игру с седловой точкой.

Widespread use in applied economics, sociology, political science, cybernetics have matrix games. Of particular interest are the matrix game with a saddle point. Of interest is the question: how different arbitrary matrix game from the game with a saddle point? The paper proposes an algorithm that for a given matrix game allows you to build the closest to her game with a saddle point.

Ключевые слова: матричные игры, неантагонистические игры, принцип минимакса, седловая точка, чистые стратегии, мера неопределенности, манхеттенская метрика.

Постановка проблемы. Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодной стратегии, доставляющих одному игроку максимальный выигрыш, а другому игроку минимальный проигрыш [2]. Задачей теории игр является выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте, то есть выявление для каждого из них «оптимальной стратегии». В общем случае, в моделях матричных игр поведение игроков трудно прогнозировать. Точное предсказание поведения игроков возможно лишь при условии наличия седловой точки игры. Обычно можно определить только вероятностное распределение для

выбора стратегий [4; 7]. В статье предлагается механизм, позволяющий от задачи, которая не имеет решения в чистых стратегиях, перейти к новой задаче, которая имеет решение в чистых стратегиях. При этом платежная матрица новой задачи «наиболее близка» к платежной матрице исходной задачи по некоторому критерию.

Цель статьи. Целью статьи является во-первых, предложить способ определения меры близости между матричными играми, во-вторых, предложить алгоритм перехода от задачи без седловой точки к «ближайшей» к ней задаче с седловой точкой.

Мера неопределенности в матричных играх с нулевой суммой.

Наиболее простой моделью в теории игр является матричная игра двух лиц [6]. Антагонистической матричной игрой двух лиц будем называть тройку $\Gamma = (X, Y, K)$, где X и Y – непустые множества, и функция $K: X \times Y \rightarrow R$. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются стратегиями игроков 1-го и 2-го соответственно.

Пусть 1-й игрок имеет m стратегий, а 2-й игрок – n стратегий. Установим биекцию между множествами: X и $M = \{1, \dots, m\}$, Y и $N = \{1, \dots, n\}$. Тогда игра Γ полностью задается матрицей $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = K(x_i, y_j)$, $(i, j) \in M \times N$, $(x_i, y_j) \in X \times Y$, $j \in N$, $i \in M$. Пусть каждый игрок при выборе стратегий руководствуется максиминным принципом, то есть функция выигрыша для первого игрока $F_1(x_i) = \min_{j \in N} a_{ij} \rightarrow \max$, а для второго игрока, соответственно, $F_2(y_j) = \max_{i \in M} a_{ij} \rightarrow \min$.

Определение 1. Если в матричной игре имеет место равенство

$$\max_{i \in M} F_1(x_i) = \min_{j \in N} F_2(y_j),$$

то такую матричную игру называют игрой с седловой точкой. При этом существует пара стратегий (i_0, j_0) , для которой выполняется равенство

$$a_{i_0 j_0} = \max_{i \in M} \min_{j \in N} a_{ij} = \min_{j \in N} \max_{i \in M} a_{ij}.$$

Если матричная игра имеет седловую точку, то выбор стратегии игрока не зависит от выбора стратегии другого игрока и поведение игроков становится детерминированным.

Пусть матричная игра не имеет седловой точки. В таком случае матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях [7]. Однако поведение игроков в такой игре уже не является детерминированным, а носит вероятностный характер. Поэтому интересен вопрос, насколько далека заданная матричная игра от матричной игры с седловой точкой.

Будем рассматривать каждую антагонистическую игру с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ как элемент векторного пространства R^{mn} . В этом пространстве введем манхеттенскую метрику, а именно расстояние $\rho(A, B)$ между матрицами $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ будем определять, как

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij} - b_{ij}|. \quad (1)$$

Пусть заданная матричная игра имеет матрицу $A = \{a_{ij}\}$ для которой введем верхнюю и нижнюю оценки игры соответственно формулами $\bar{A} = \min_{i \in M} \max_{j \in N} a_{ij}$ и $\underline{A} = \max_{j \in N} \min_{i \in M} a_{ij}$. Разумеется $\underline{A} \leq \bar{A}$.

Определение 2. Пусть $G \subseteq R^{nm}$ – множество, каждый элемент которого соответствует игре с седловой точкой. Расстояние от заданной игры до множества G будем называть мерой неопределенности матричной игры $\mu(A) = \inf_{B \in G} \rho(A, B)$.

Рассмотрим задачу: каким образом изменить исходную матрицу, чтобы получить «наилучшее» приближение, в смысле описанной выше метрики. Пусть каждый элемент матрицы A изменится на некоторую величину p_{ij} , получим матрицу $A^* = \{a_{ij}^*\} = \{a_{ij} + p_{ij}\}$. Назовем набор величин p_{ij} системой штрафов, а величину $p = \sum |p_{ij}|$ будем называть суммарным штрафом. Задача состоит в отыскании такой системы штрафов p_{ij} , чтобы $A^* \in G$ и $\rho(A, A^*) = \mu(A)$ и при этом суммарный штраф был минимальным:

$$\sum |p_{ij}| \rightarrow \min.$$

Алгоритм перехода от матричной игры к игре с седловой точкой.

Пусть матрица игры без седловой точки имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 j_1} & a_{i_0 j_0} & a_{i_0 n} \\ \dots & a_{i_1 j_1} & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mj_1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где i_0 – оптимальная стратегия для первого игрока, j_1 – оптимальная стратегия для второго игрока, и пусть $a_{i_0 j_0} = A$, $a_{i_1 j_1} = \bar{A}$.

Положим теперь $a_{ij}^* = a_{ij} + p_{ij}$, где

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq i_0, j \neq j_1; \\ \max\{a_{ij} - a_{i_0 j_1}\}, i = i_0, j \neq j_1; \\ \min\{a_{ij} - a_{i_0 j_1}\}, i \neq i_0, j = j_1. \end{cases}$$

Для игры с измененной матрицей $A^* = \{a_{ij}^*\}$ уже существует седловая точка (i_0, j_1) . Причем значение выигрыша в этой точке $a_{i_0 j_1}^* = a_{i_0 j_1}$.

Мера неопределенности в неантагонистических играх.

В игре с ненулевой суммой необязательно, чтобы один из участников выигрывал, а другой проигрывал; напротив, они могут и выигрывать и проигрывать совместно.

Пусть 1-й игрок имеет m стратегий, а 2-й игрок – n стратегий. Игра Γ задается матрицами $C = \{c_{ij}\}$ и $D = \{d_{ij}\}$. Функции выигрышей игроков равны соответственно $F_1(x_i) = \min_{j \in N} c_{ij} \rightarrow \max$ для первого игрока, и $F_2(y_j) = \min_{i \in M} d_{ij} \rightarrow \max$ – для второго игрока.

Игра будет иметь седловую точку, если найдется такая пара стратегий (i_0, j_0) , для которой

$$F_1(x_{i_0}, y_{j_0}) = \max_{i \in M} \min_{j \in N} c_{ij} \text{ и } F_2(x_{i_0}, y_{j_0}) = \max_{j \in M} \min_{i \in N} d_{ij}$$

Определение 3. Пусть $G \subseteq R^{nm} \times R^{nm}$ – множество, каждый элемент которого соответствует игре с седловой точкой. Расстояние от заданной игры с матрицами $C = \{c_{ij}\}$ и $D = \{d_{ij}\}$ до множества G будем называть мерой неопределенности матричной игры $\mu(C, D) = \inf_{(C^*, D^*) \in G} \rho((C, D), (C^*, D^*))$.

Рассмотрим следующую задачу: каким образом изменить исходные матрицы, чтобы получить «наилучшее» приближение, в смысле описанной ранее метрики. Пусть каждый элемент матрицы $C = \{c_{ij}\}$ изменится на некоторую величину ε_{ij} , а матрицы $D = \{d_{ij}\}$ – на величину s_{ij} ; получим матрицы $C^* = \{c_{ij}^*\} = \{c_{ij} + \varepsilon_{ij}\}$ и $D^* = \{d_{ij}^*\} = \{d_{ij} + s_{ij}\}$. Назовем набор величин ε_{ij} и s_{ij} системой штрафов, а величину $p = \sum |\varepsilon_{ij}| + \sum |s_{ij}|$ будем называть суммарным штрафом. Задача состоит в отыскании такой системы штрафов ε_{ij} и s_{ij} , чтобы $C^*, D^* \in G$ и $\rho((C, D), (C^*, D^*)) = \mu(C, D)$ и при этом суммарный штраф был минимальным:

$$p = \sum |\varepsilon_{ij}| + \sum |s_{ij}| \rightarrow \min.$$

Алгоритм перехода от произвольной неантагонистической игры двух лиц к игре с седловой точкой.

Пусть матрицы игры имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & c_{i_0 j_0} & \dots & \dots \\ c_{i_0 1} & \dots & c_{i_0 j_0} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & \dots & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & d_{i_1 j_0} & \dots & \dots \\ \dots & d_{i_0 j_1} & d_{i_0 j_0} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

где i_0 – оптимальная стратегия для первого игрока, $\bar{j}_1$ – оптимальная стратегия для второго игрока, и пусть $c_{i_0 j_0} = A$, $d_{i_0 j_1} = \bar{A}$.

Положим теперь $c_{ij}^* = c_{ij} + \varepsilon_{ij}$ и $d_{ij}^* = d_{ij} + s_{ij}$, где

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq i_0, j \neq j_1; \\ \max \{0, c_{ij_1} - c_{ij}\} & i = i_0, j \neq j_1; \\ \min \{0, c_{i_1j} - c_{ij}\} & i \neq i_1, j = j_1; \end{cases} \quad s_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq i_0, j \neq j_1; \\ \max \{0, d_{ij_1} - d_{ij}\} & i = i_0, j \neq j_1; \\ \min \{0, d_{i_1j} - d_{ij}\} & i \neq i_1, j = j_1. \end{cases}$$

Для игры с измененными матрицами $C^* = \{c_{ij}^*\}$ и $D^* = \{d_{ij}^*\}$ уже существует седловая точка

Заметим, что предложенный алгоритм легко можно распространить на игры 3_х, 4_х и более лиц.

Выводы. В статье рассмотрено понятие меры неопределенности матричной игры и предложен алгоритм перехода от задачи, которая не имеет решения в чистых стратегиях, к ближайшей новой задаче, имеющей решения в чистых стратегиях. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании экономических ситуаций, связанных с поведением экономических агентов в конфликтных и безконфликтных ситуациях, при создании систем с адаптивным управлением.

Библиографические ссылки

1. **Васин А. А.** Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. – М. : Макс.пресс, 2005. – 278 с.
2. **Данилов В.И.** Лекции по теории игр / В.И. Данилов. – М. : Российская эконом. шк., 2002. – 140 с.
3. **Мулен Э.** Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели / Э. Мулен. – М. : Мир, 1991. – 464 с.
4. **Оуэн Г.** Теория игр / Г. Оуэн. – М. : Вузовская книга, 2004. – 216 с.
5. **Протасов И. Д.** Теория игр и исследование операций / И.Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 395 с.
6. **Сурмин Ю.П.** Теория систем и системный анализ : учеб. пособие / Ю.П. Сурмин. – К. : МАУП, 2003. – С. 368.
7. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – Т. 2. – М. : Мир, 1985. – 479 с.
8. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 232 с.

Надійшла до редколегії 24.06.2014

О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, Т.О. ¹⁴Шевченко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ МІЖ ПІДМНОЖИНАМИ

Розглянуто неперервну динамічну задачу оптимального розбиття множин (ОРМ) з рухомими границями між підмножинами, в якій шукане динамічне розбиття має наближатися до деякого заздалегідь відомого розбиття. Запропоновано метод розв'язання задачі. На ряді обчислювальних експериментів прослідковано вигляд оптимального розбиття в залежності від деяких початкових даних.

Рассмотрена непрерывная динамическая задача оптимального разбиения множеств (ОРМ) с подвижными границами между подмножествами, в которой искомое динамическое разбиение должно приближаться к некоторому заранее известному разбиению. Предложен метод решения задачи. На ряде вычислительных экспериментов прослежен вид оптимального разбиения в зависимости от некоторых начальных данных.

We consider the continuous dynamical set partitioning problem (SPP) with moving boundaries between subsets in which the required dynamic partition should be closed to some known beforehand partition. The method for solving this problem is proposed. On a number of computational experiments the view of the optimal partition is traced depending on the some initial data.

Ключові слова: неперервні задачі оптимального розбиття множин, оптимальне керування, динамічне розбиття, принцип максимуму Понтрягіна.

Вступ. У задачах оптимального розбиття множин [4], що виникають у реальному житті, для побудови більш адекватної математичної моделі задачі буває необхідно, щоб оптимальне розбиття множини, за можливостю, мало форму границь, близьку до «бажаної». Наприклад, якщо йдеться про розбиття країни на зони впливу деяких підприємств, закріплених за обласними центрами, то було б зручно, щоб оптимальні границі підмножин наближалися до географічних границь між регіонами країни. Подібну необхідність близькості оптимального розбиття до бажаного можуть викликати особливості рельєфу місцевості або наявність розбиття заданої

області, оптимального за іншим критерієм. Якщо йдеться про багатопро-
дуктову задачу [8; 10], то можливо підприємствам зручніше щоб оптима-
льне розбиття за різними видами товару чи послуги наближалися одне до
одного, щоб обслуговувати одних і тих самих споживачів.

Назване уточнення моделі з [5] викликає у функціоналі появу ще одно-
го доданку – середньоквадратичного відхилу невідомого розбиття від де-
якого наперед заданого. Внесення змін до моделі викликає необхідність у
модифікації методу розв’язання задачі, представленого у [9].

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset E^n$ – обмежена, вимірна за Лебегом
множина; $P_N(\Omega)$ – клас всіляких розбиттів множини Ω на N неперетин-
них підмножин:

$$P_N(\Omega) = \left\{ \bar{\Omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Розглянемо задачу оптимального розбиття множини такого вигляду:

$$J(\bar{\Omega}) \rightarrow \min_{\bar{\Omega} \in P_N(\Omega)}, \quad (1)$$

де

$$J(\bar{\Omega}) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{t \in \Omega_i(t)} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta \int_0^T \int_{\Omega} u_i^2(x, t) dx dt + \\ + \beta_2 \int_0^T \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega_i(t)} dx \int_{\Omega_i(t)} dx \right) dt,$$

$$\bar{P}_N(\Omega) = \{ \bar{\Omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} : \forall t \in [0, T] \bar{\Omega} \in P_N(\Omega) \},$$

за умов

$$\rho(x, t) = (x, t) + u_i(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega, t \in [0, T], i = \overline{1, N}, \\ \rho(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (2)$$

Тут $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 \neq 0$, – константи, які визначають пріоритет ві-
дповідного доданку; $c(x, \tau_i, t)$ – дійсні, обмежені, визначені на
 $\Omega \times \Omega \times [0, T]$, вимірювальні за x і t при довільному фіксованому векторі
параметрів $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, N}$; $T > 0$, $a_i, i = \overline{1, N}$, – задані не-
від’ємні величини; функція $\rho(x, t) \in C([0, T])$ для кожного $x \in \Omega$ є

розв'язком задачі Коші (2); $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$, $i = \overline{1, N}$, – задані функції керування; $\rho_0(x)$ – відома, як правило невід'ємна функція, визначена на Ω ; $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ – відома функція; множини $\hat{\Omega}_1, \dots, \hat{\Omega}_N$ складають заздалегідь задане розбиття $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_1 \cup \dots \cup \hat{\Omega}_N$. Точки $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$ – так звані «центри» підмножин – вважаються також заданими.

Тобто треба знайти таке оптимальне розбиття $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N$, $t \in [0, T]$, множини Ω на N неперетинних підмножин, яке є якомога ближчим до заданого розбиття $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_N$, і при якому функціонал (1) досягав би свого мінімального значення та при цьому виконувалися б умови (2).

У поставленій задачі функція щільності $\rho(x, t)$, яка описує стан системи, заздалегідь не відома, і за рахунок керування швидкістю змінення функції $\rho(x, t)$ можна досягти того, що оптимальне розбиття буде наближуватись до заданого.

Опис методу розв'язання поставленої задачі. Задача (1)–(2) є розширенням динамічної задачі ОРМ, запропонованої в [5]. Ця задача оптимального розбиття, згідно з [9], може бути класифікована як задача оптимального керування системою із зосередженими параметрами. Для цього вводиться до розгляду такий клас функцій:

$$U = \{u(x, t; \bar{\omega}): u(x, t; \bar{\omega}) = u_i(x, t) \text{ для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \bar{\omega} \in \bar{P}(\Omega) \forall t \in [0, T]\}.$$

Нехай функція $\rho(x, t)$, яка описує стан системи, для всіх $x \in \Omega$ задовольняє такій задачі Коші:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}) + f(x, t), \quad u \in U, \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Кожне допустиме розбиття $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N$ визначає функцію $u(x, t; \bar{\omega}) \in U$ таку, що відповідна їй задача Коші (3) має єдиний розв'язок.

Домовимося розв'язок задачі (3), який відповідає функції $u(x, t; \bar{\omega})$, позначати через $\rho(x, t; \bar{\omega})$. Тоді можна сформулювати задачу, яка полягає у відшуванні для кожної точки $x \in \Omega$ такої функції керування $u^*(x, t; \bar{\omega}) \in U$ і відповідної фазової траєкторії $\rho^*(x, t; \bar{\omega})$, $t \in [0, T]$, та оптимального розбиття $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}_N$, щоб

$$J(\bar{\omega}, u(\cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} (c(x, \tau_{ib}(t)) + a) \rho(x, t; \bar{\omega}) dx dt + \\ + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t; \bar{\omega}) dx dt + \beta \int_0^T \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega_i(t)} dx - \int_{\hat{\Omega}_i(t)} dx \right)^2 dt \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \bar{\Omega}_N, u \in U}. \quad (4)$$

Нижче запропоновано метод розв'язання сформульованої задачі, який синтезує основні положення теорії неперервних задач оптимального розбиття, розробленої О.М. Кісельовою [3; 4], і теорії оптимального керування [1; 6; 7].

Уведення до розгляду характеристичних функцій $\lambda_i(x, t)$ підмножин $\Omega_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, дозволяє подати функцію керування у вигляді

$$u(x, t; \bar{\omega}) = \sum_{i=1}^N u_{ii}(x, t) \lambda_i(x, t). \quad (5)$$

Замість задачі (3), (4) розглянемо еквівалентну їй задачу: знайти вектор-функцію $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$, таку що

$$I(\lambda(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} [\beta_0 (c(x, \tau_{ib}(t)) + a) \rho(x, t) + \\ + \beta_1 u_i^2(x, t) \lambda_i(x, t)] dx dt + \beta \int_0^T \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x, t) - \hat{\lambda}_i(x, t))^2 dx dt \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda}, \quad (6)$$

де функція $\rho(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (3), який відповідає функції (5), і

$$\Lambda = \{ \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)): \lambda_i(x, t) = 0 \vee 1, i = 1, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1, \text{ для } x \in \Omega, t \in [0, T] \}.$$

Функції $\hat{\lambda}_i(x_t)$ у (6) – це характеристичні функції підмножин $\hat{\Omega}_i$, які складають заздалегідь відоме розбиття. Третій доданок функціонала (6) можна записати у вигляді

$$I_2(\lambda(\cdot)) = \beta_2 \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x_t) - \hat{\lambda}_i(x_t))^2 dx dt = \beta_2 \iint_{\Omega} \|\lambda_i(x_t) - \hat{\lambda}_i(x_t)\|^2 dx dt.$$

Розглянемо доданок I_2 – він нелінійний за $\lambda(x_t)$. Але, враховуючи структуру множини Λ , можна записати, що $\lambda_i(x_t) = \hat{\lambda}_i(x_t)$, $\forall x \in \Omega, i = 1, N, t \in [0, T]$. Користуючись цією властивістю цільовий функціонал перепишемо у вигляді

$$I(\lambda(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega} [\beta_0(c_i, \tau_{ib} t) + a] \rho(x_t) + \\ + \beta_1 u_i^{22}(x_t) + \beta_2 (1 - 2\hat{\lambda}_i(x_t)) \lambda_i(x_t) dx dt + \beta_2 \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x_t) - \hat{\lambda}_i(x_t))^2 dx dt, \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda}.$$

Далі, у відповідності з методами розв'язання неперервних задач ОРМ [3; 4], занурюємо множину Λ у симплекс:

$$\Lambda_{II} = \{ \lambda(x_t) = (\lambda(x_t), \dots, \lambda_N(x_t)) : 0 \leq \lambda(x_t) \leq 1, i = 1, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_t) = 1, \text{ для } x \in \Omega, t \in [0, T] \},$$

і замість задачі (3), (5), (6) будемо розв'язувати еквівалентну до неї задачу

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda_1}. \quad (7)$$

за умов (3).

Передусім зазначимо, що задача (3), (7) має розв'язок. Легко показати, що множина Λ_1 – замкнута, обмежена, опукла множина з L_2 , а функціонал $I(\lambda(\cdot))$ – лінійний (а тому опуклий), неперервний на цій множині. Тоді за теоремою Вейєрштрасса [2] функціонал $I(\lambda(\cdot))$ досягає на множині Λ_1 своєї нижньої грани.

Розв'язання задачі (3), (7) у відповідності до теореми із [3; 9] зводиться до розв'язання сімейства задач оптимального керування, в яких $\lambda(x) \in \Lambda_{1x}$, де Λ_{1x} – переріз множини Λ_1 площиною $x \in \Omega$. У цих задачах керуючою функцією виступає вектор-функція $\lambda(x) \in \Lambda_{1x}$. Для розв'язання задач з цього сімейства застосовується принцип максимуму

Понтрягіна [1; 6; 7], який, враховуючи властивості функціонала (7) і правої частини диференціального зв'язку із (3), виступає критерієм оптимальності. Умови оптимальності при фіксованому $x \in \Omega$ мають такий вигляд:

а) стаціонарність за $\rho(\cdot)$:

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial \rho} = - \frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad (8)$$

де функція Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} H(\lambda \rho, \Psi_x) &= (\rho(x_t) + \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{N_i} (x_t) \lambda_i(x_t) + f(x_t)) \Psi_x(t) - (\hat{\lambda}_i(x_t))^2 - \\ &- \sum_{i=1}^N (\beta_0(c_k, \tau_i, t) + a_i) \rho(x_t) + \beta_1 u_i^2(x_t) + \beta_2 (1 - 2\hat{\lambda}_i(x_t)) \lambda_i(x_t); \end{aligned}$$

б) трансверсальність за $\rho(\cdot)$:

$$\Psi_x(T) = 0; \quad (9)$$

в) оптимальність за $\lambda(\cdot)$:

$$\lambda^*(x_t): \max_{\lambda \in \Lambda_{1x}} H(\lambda \rho, \Psi_x).$$

Враховуючи структуру множини Λ_{1x} , можна записати: $t \in [0, T]$

$$\lambda_i^*(x_t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, \tau_i, t) = \max_{k \in I_1} q_k(x, \tau_k, t), \\ 0, & \text{в усіх інших випадках}; \end{cases} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} q_i(x, \tau_i, t) &= u_i(x_t) \Psi_x(t) - \beta_0(c_k, \tau_i, t) \rho(x_t) - \\ &- \beta_1 u_{ii}^2(x_t) - \beta_2 (1 - 2\hat{\lambda}_i(x_t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Для чисельного розв'язання отриманої крайової задачі (3), (8), (9) побудовано алгоритм на основі методу Ньютона.

Аналіз результатів обчислювальних експериментів. Для експериментів були обрані такі значення параметрів моделі: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$; $N = 3$ – кількість центрів; $\tau_1 = (0.3, 0.3)$, $\tau_2 = (0.8, 0.2)$, $\tau_3 = (0.75, 0.95)$ – положення центрів; функції $u(x, \tau_i, t) = b_i$ – лінійні за часом, $a_1 = a_2 = a_3 = 0.1$, $b_1 = 0.4$, $b_2 = 0.3$, $b_3 = 0.5$; $T = 2.5$; $h_t = 0.1$, $h_x = 0.01$; $\rho_0(x) = 1$; $c_k, \tau_i, t = \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2}$; $f(x_t) = 1$.

За розбиття множини Ω , до якого має бути близьким оптимальне розбиття, було взято розбиття $\omega_1(t)$, яке для кожного $t \in [0, 1]$ має вигляд, зображений на рис.1, тобто є статичним.

На рис. 2 – 5 наведено результати роботи програми при різних значеннях вагового коефіцієнта β_2 , у моменти часу $t = 0.1$, $t = 0.5$ та $t = 2.5$, відповідно.



Рис. 1. «Бажане» розбиття ω_1 множини Ω

Із рис. 2,а) – 4,а) добре видно, що при $\beta_2 = 0$ на форму границь оптимального розбиття ніяк не впливає форма границь «бажаного» розбиття, тобто розв'язується звичайна динамічна задача ОРМ з рухомими границями між підмножинами [5]. Як видно з цих рисунків, у випадках а) отримали розбиття, близькі до діаграми Вороного, що і треба було очікувати (результати описані у [9]) при обраних функціях $u_i(x,t)$.



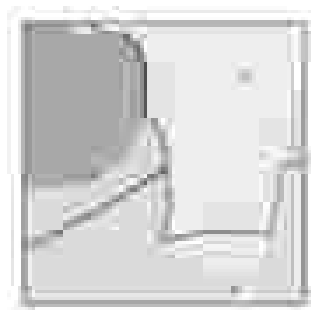
а) $\beta_2 = 0$



б) $\beta_2 = 0.3$



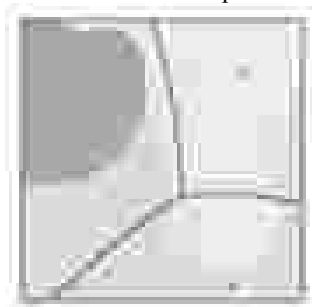
в) $\beta_2 = 1$



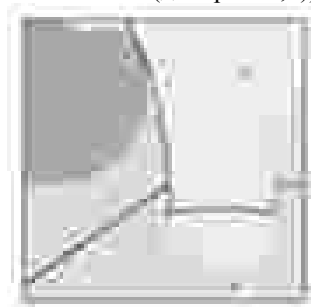
г) $\beta_2 = 1.5$

Рис. 2. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 0.1$

При $\beta_2 = 0.3$ (див. рис. 2,б) – 4,б)) форма границь розбиття ω_1 вже трохи впливає на оптимальне розбиття задачі в деякі моменти (див. рис. 3,б)),



а) $\beta_2 = 0$



б) $\beta_2 = 0.3$



в) $\beta_2 = 1$



г) $\beta_2 = 1.5$

Рис. 3. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 0.5$

проте з часом оптимальне розбиття теж намагається наблизитися до діаграми Вороного (див. рис. 4,б)), і якщо прослідкувати усю динаміку розбиття за весь період часу, то видно, що знайдене розбиття ближче до діаграми Вороного, ніж до $\omega_1(t)$.

Якщо $\beta_2 = 1$ (див. рис. 2,в) – 4,в)), як видно на обраних моментах часу, форма знайденого розбиття більше наближається до форми розбиття $\omega_1(t)$, ніж при $\beta_2 = 0.3$. І якщо вплив третього доданку функціонала ще збільшити і взяти $\beta_2 = 1.5$ (див. рис. 2,г) – 4,г)), то динамічне оптимальне розбиття істотно стає ближчим до «бажаного» і більшу частину моментів часу майже співпадає з $\omega_1(t)$, як у момент $t = 0.5$.

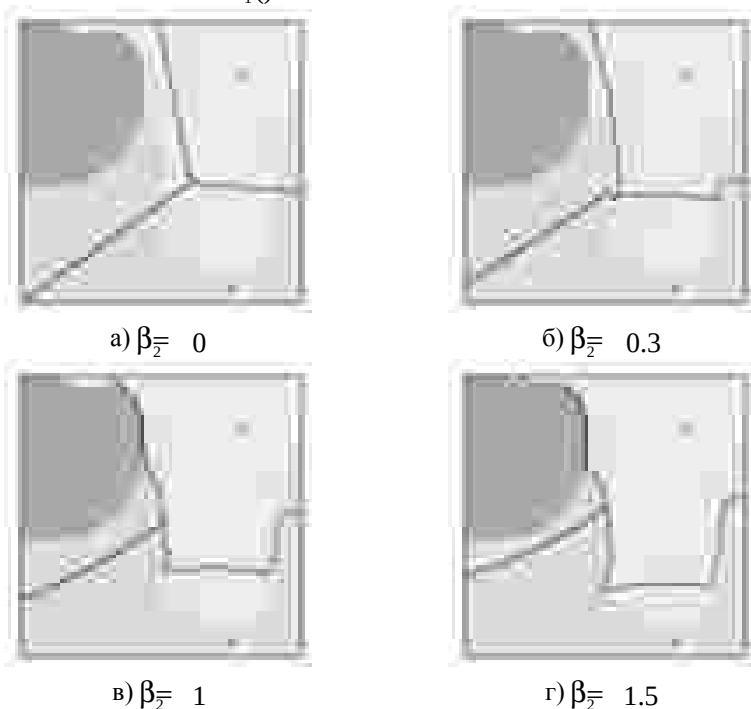


Рис. 4. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 2.5$

У роботу не винесені результати експерименту при $\beta_2 = 2$. Коротко, можна сказати, що знайдене оптимальне розбиття співпадає з бажаним майже весь період функціонування системи.

Аналогічні експерименти були проведені для іншого «бажаного розбиття» $\omega_2(t)$, яке теж не міняється із часом і в кожний момент має вигляд наведений нижче (рис. 5).



Рис. 5. «Бажане» розбиття ω_2 множини Ω



а) $\beta_2 = 0$



б) $\beta_2 = 0.3$



в) $\beta_2 = 1$



г) $\beta_2 = 1.5$

Рис. 6. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 0.1$

Висновки, зроблені з результатів роботи програми для «бажаного» розбиття ω_1 , підтверджуються результатами експериментів і для ω_2 . Вони представлені на рис. 6 – 8 при тих же значеннях параметра β_2 , що були взяті у попередньому експерименті. Чим більше значення цього параметра, тим більше розбиття перетворюється з майже діаграми Вороного (див. результати при $\beta_2 = 0$) на розбиття, що задане заздалегідь.

Обидва експерименти, наведені у роботі, показують наскільки близьким виявилось оптимальне динамічне розбиття до заданого статичного. Аналогічні результати можна отримати, якщо в якості заданого розбиття обрати динамічне (це загальний випадок). Також цікавим є подальше дослідження розширення найпростішої динамічної задачі ОРМ [3; 9] на випадок наявності такого доданку у функціоналі, що відповідає за близькість оптимального розбиття (статичного) до заздалегідь заданого розбиття (статичного).

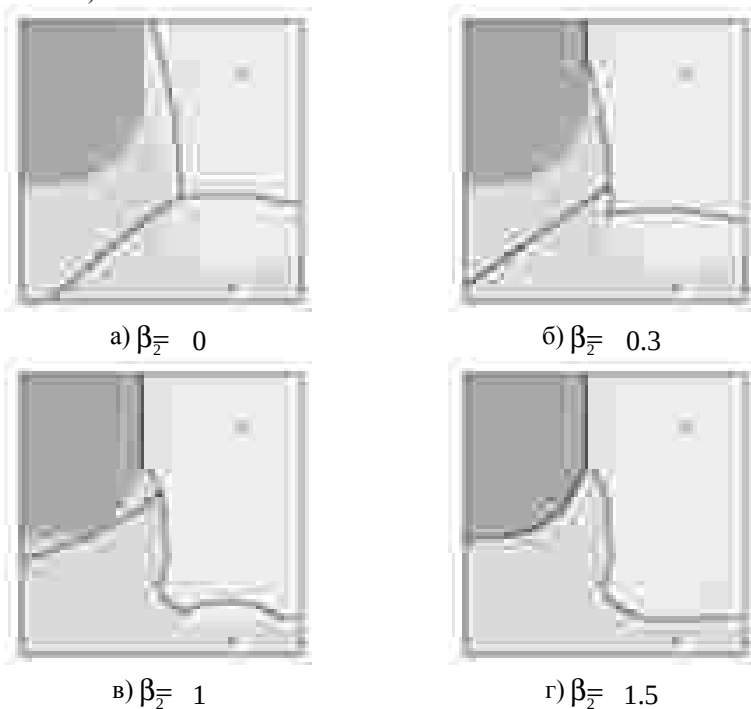


Рис. 7. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 0.5$

Якщо порівняти результати проведених експериментів при обраних за-
здадальних заданих розбиттях ω_1 та ω_2 , то з табл. 1 видно, що при однако-
вих значеннях параметра β_2 оптимальні значення функціонала з точністю
до десятих співпадають, що підтверджує коректність отриманих результатів.

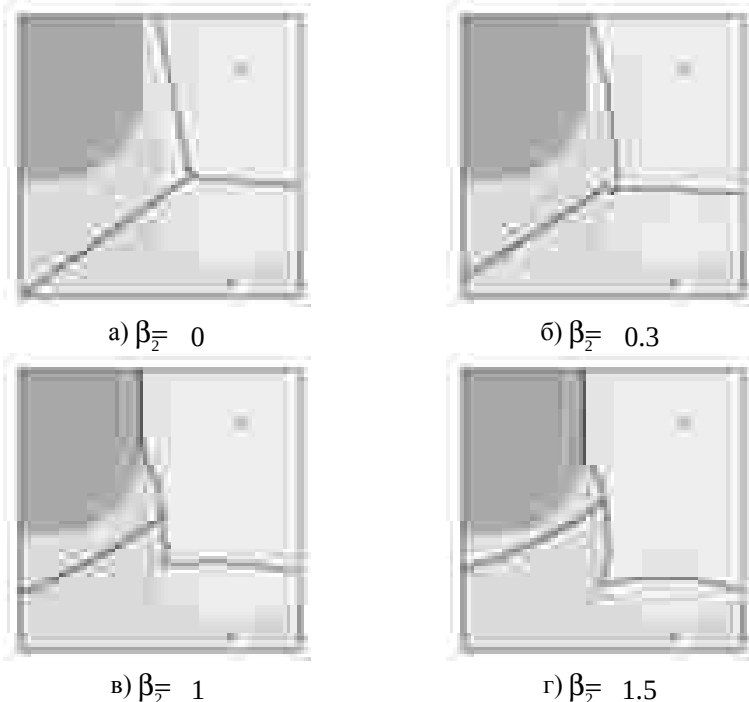


Рис. 8. Оптимальне розбиття в момент часу $t = 2.5$

Таблиця 1

Оптимальні значення функціоналів за двома експериментами

Значення вагово- го коефіцієнта β_2	Оптимальне значення цільового функціо- нала	
	в експерименті №1	в експерименті №2
0	4.871	4.871
0.3	5.324	5.314
1	5.893	5.877
1.5	6.023	6.003
2	6.064	6.041

Слід зазначити, що такі результати отримані при покритті часового проміжку $[0, T]$ сіткою з кроком $h_t = 0.1$. При зменшенні кроку вдається отримати результати більшої точності.

Висновки. У даній роботі запропоновано математичну модель, що є розширенням неперервної динамічної моделі ОРМ з рухомими границями між підмножинами, яка враховує близькість розбиття до деякого заданого. Запропоновано метод розв'язання задачі, заснований на зведенні вихідної задачі до сімейства задач оптимального керування системою із зосередженими параметрами і подальшому застосуванні до їх розв'язання принципу максимуму Понтрягіна. На базі запропонованого методу створено алгоритм розв'язання, заснований на методі Ньютона. Побудований алгоритм програмно реалізовано на мові Delphi. Наведено результати обчислювальних експериментів, проведених при різних значеннях вагового коефіцієнта доданку цільового функціонала, який відповідає за близькість оптимального розбиття до заздалегідь відомого розбиття. Результати експериментів підтверджують адекватність запропонованої математичної моделі та коректність побудованого методу розв'язання.

Бібліографічні посилання

1. **Алексеев В. М.** Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 430 с.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
3. **Киселева Е. М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи : моногр. / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна. – К., 2013. – 606 с.
4. **Киселева Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.
5. **Коряшкіна Л. С.** Дослідження властивостей розв'язку задачі оптимального розбиття множин з рухомими границями між підмножинами / Л. С. Коряшкіна, Т. О. Шевченко // Проблеми математичного моделювання : тези доповідей VI Між. державної наук.-метод. конф., трав. 28–30, Дніпродзержинськ, 2008. – С. 167–178.
6. **Кротов В. Ф.** Основы теории оптимального управления / В. Ф. Кротов и др. – М. : Высш. школа, 1990. – 430 с.
7. **Понтрягин Л. С.** Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1969. – 384 с.
8. **Строева В. О.** Методи та алгоритми розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики» / В. О. Строева. – Д., 2012. – 21 с.

9. **Шевченко Т. О.** Методи та алгоритми розв'язання неперервних динамічних задач оптимального розбиття множин : дис. ... канд. фіз. -мат. наук : 01.05.01 / Шевченко Тетяна Олександрівна. – Д., 2014. – 168 с.

10. **Шевченко Т. А.** О непрерывной динамической многопродуктовой задаче оптимального разбиения множеств / Т. А. Шевченко, О. А. Дубяга // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем : тези доповідей IX Міжнар. наук.-практ. конф., листоп. 23–25, Д., 2011. – С. 290–291.

Надійшла до редколегії 11.06.2014

О.М.¹⁵Кісельова*, Л.І. Лозовська, Л.М. Бандоріна****

**Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

***Національна металургійна академія України*

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КУЛЬОВЕ ПОКРИТТЯ МНОЖИНИ КУЛЯМИ ЗАДАНИХ РАДІУСІВ

Розглянуто неперервну задачу оптимального покриття множини із простору E_n , щільність точок якої змінюється в часі, кулями заданих радіусів. Запропоновано алгоритм розв'язання цієї задачі, який побудовано на основі теорії оптимального розбиття множин.

Рассмотрена непрерывная задача оптимального покрытия множества из пространства E_n , плотность точек которого изменяется во времени, шарами заданных радиусов. Предложен алгоритм решения этой задачи, построенный на основе теории оптимального разбиения множеств.

Consider a continuous problem of optimal covering of the space of E_n , which changes the density of points in time, given the radii of the balls. An algorithm to solve this problem, based on the theory of the optimal partition sets.

Ключові слова: діаграма Діріхле, Вороного, розбиття множини, покриття множини, радіус, алгоритм.

Вступ. Розв'язання численних технічних та економічних задач можуть бути отримані як розв'язання задач оптимального покриття множини заданою кількістю куль з відомими радіусами. Прикладом може слугувати задача розміщення станцій стільникового зв'язку з відомими радіусами їх дії з метою забезпечення максимального охоплення споживачів певного регіону. В даній роботі запропоновано алгоритм розв'язання неперервної задачі оптимального покриття множини кулями заданих радіусів у випадку, коли щільність споживачів, розподілених по множині, нерівномірна і може змінюватися протягом певного періоду часу.

Постановка задачі. Сформулюємо неперервну динамічну задачу про оптимальне c -кульове покриття нерівномірно заповненої множини з E_n заданою кількістю куль визначених радіусів в такому вигляді.

Нехай Ω – компактна, вимірна по Лебегу множина в n -мірному евклідовому просторі E_n .

Задача SA. При заданій кількості куль N і радіусах $R^1, \dots, R^N$ знайти їхнє найкраще розміщення в області Ω , тобто координати центрів куль $\tau_1, \dots, \tau_N$, що здійснюють c -кульове покриття множини Ω , тобто знайти величину $\bar{S}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min$ на заданому проміжку часу і вектор $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E^N$. Функція $\bar{S}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ при цьому має вигляд

$$\bar{S}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \int_0^T S(\tau_1, \dots, \tau_N, t) dt,$$

де

$$S(\tau_1, \dots, \tau_N, t) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_{i0}} c_k(\tau_i, t) \rho(x) dx,$$

$$c_k(\tau_i, t) = \begin{cases} 0, & c_k(\tau_i, t) \leq R_i(t) \\ c_k(\tau_i) - R_i(t), & c_k(\tau_i) > R_i(t) \end{cases},$$

$R_i(t)$ – радіус площі множини, що покривається i -ю кулею, в момент часу t ;

функція $c(x, \tau_i)$ визначається як евклідова метрика.

$$\Omega_{i0} = \{x \in \Omega : c_k(\tau_i, t) \rho(x) = \min_{j \in \overline{1, N}} c_k(\tau_j, t) \rho(x)\}.$$

Функція $\rho(x, t)$ – невід’ємна функція, що задає ваги точок множини, яка покривається, у визначені моменти часу $t \in [0, T]$.

Введемо характеристичну функцію множини Ω_{i0} :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{i0} \\ 1, & x \notin \Omega_{i0} \end{cases}$$

і перейдемо до еквівалентної задачі SB.

Задача SB. При заданій кількості куль N і радіусах $R_1, \dots, R_N$ знайти мінімум функції

$$I(\tau_1, \dots, \tau_N, \lambda(\cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N c_k(\tau_i, t) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt \rightarrow \min,$$

де $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$: $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1$ і $\lambda_i(x) \in \{0, 1\}$.

Очевидно, що $I(\tau_1, \dots, \tau_N, \lambda) = I(\tau_1, \dots, \tau_N) \quad \forall (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ і розв'язки задач SA і SB співпадають.

Розглянемо ще одну задачу.

Задача SC. Знайти вектор-функцію $\lambda_*(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$ і вектор $\tau_* = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ такий, що

$$I(\tau_*, \lambda_*(x)) = \min_{(\tau, \lambda(x)) \in \Omega \times \Omega^N} I(\tau, \lambda(x)),$$

$$\text{де } \Gamma = \left\{ \begin{aligned} &\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \\ &\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ для } x \in \Omega_i, \quad 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right.$$

При цьому точки $\tau_1, \dots, \tau_N$ мають одне і те ж саме положення протягом усього періоду часу. Мінімум функції $I(\tau, \lambda(x))$ буде співпадати із мінімумом функціонала задачі SC в середньому за проміжок часу $[0, T]$.

Відмітимо деякі властивості функції $I(\tau, \lambda(x))$.

Функція $I(\tau, \lambda(x))$ є ліпшицевою на Ω^N , тобто виконується нерівність

$$| \min_{i=1, \dots, N} I(\tau_i, \lambda(x)) - \min_{i=1, \dots, N} I(\bar{\tau}_i, \lambda(x)) | \leq L \cdot \|\tau - \bar{\tau}\|_{E_N},$$

де $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $L > 0$ – константа Ліпшиця, що не залежить від вибору точок τ^N і $\bar{\tau}^N$ із Ω^N .

Лема 1. Множина Γ є випуклою множиною.

Доведення. Нехай $\bar{\lambda} \in \Gamma$. Це означає, що

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) &= 1 \text{ для } x \in \Omega_i, \quad 0 \leq \bar{\lambda}_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}, \\ \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) &= 1 \text{ для } x \in \Omega_i, \quad 0 \leq \bar{\lambda}_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Візьмемо $\lambda^\alpha(x) = \alpha \bar{\lambda}(x) + (1-\alpha) \lambda(x)$. Розглянемо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_{ii}^\alpha(x) &= \alpha \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = \alpha + (1-\alpha) = 1. \end{aligned}$$

Перша властивість для $\lambda^\alpha(x)$ виконана.

Розглянемо другу властивість

$$\lambda_i^\alpha(x) = \alpha \bar{\lambda}_i(x) + (1-\alpha) \underline{\lambda}_i(x).$$

Якщо $\bar{\lambda}_i(x) \geq 0$, то $\lambda_i(x) \geq 0$;

Якщо $\bar{\lambda}_i(x) \leq 1$, то $\lambda_i(x) \leq \alpha + (1-\alpha) = 1$.

Тож, для $\lambda^\alpha(x)$ виконується і друга властивість, тобто ця функція належить множині Γ . А значить, множина Γ – випукла.

Лема 2. При кожному фіксованому $\tau \in \Omega^N$ функціонал $I(\tau \lambda(\cdot))$ є лінійним та неперервним відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ .

Доведення. Лінійність функціонала очевидна в силу лінійності інтеграла Лебега.

Покажемо його обмеженість. Скористаємося нерівністю Гельдера:

$$\begin{aligned} I(\tau \lambda(\cdot)) &= \int_0^T \sum_{i=1}^N c_i(\tau_i(t)) \rho(x(t)) \lambda_i(x(t)) dx dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^N c_i(\tau_i(t)) \rho(x(t)) dx dt \times \int_0^T \lambda(x(t)) dx dt \leq \\ &\leq K \times \sqrt{\int_0^T \sum_{i=1}^N \lambda_i^2(x(t)) dx dt} = K \times \| \lambda(x) \|_{L^{MN}_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Тож, функціонал $I(\tau \lambda(\cdot))$ лінійний та обмежений, а значить і неперервний $\lambda(\cdot)$ на Γ .

Для розв'язання поставленої задачі будемо використовувати один з варіантів методу можливого напрямку.

Для формулювання алгоритму знаходження оптимального покриття множини Ω конкретизуємо в E_2 вид напрямку спуску $g_{\tau_i}(\tau^N, x_i)$ для метрики

$$c(\bar{x}, \tau_i) = \| \bar{x} - \tau_i \|_2 = \sqrt{(\bar{x}_1 - \tau_{i1})^2 + (\bar{x}_2 - \tau_{i2})^2},$$

$$g_{\tau_i}(\tau^N, x_i) = \begin{pmatrix} g_{\tau_i}^{\tau_i^x} & \tau^N, x) \\ g_{\tau_i}^{\tau_i^y} & \tau^N, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x \cdot \tau_i^x}{\|\bar{x} - \tau_i\|_2} \\ \frac{y \cdot \tau_i^y}{\|\bar{x} - \tau_i\|_2} \end{pmatrix},$$

де (x, y) – середньозважені координати точок підмножини Ω_i

Область Ω укладемо в n -мірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вводячи допоміжну функцію $\rho(x)$, визначену на Π , таку, що

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \in \Omega \setminus \\ 1, & \text{для } x \in \Pi \end{cases}.$$

Алгоритм.

Множину Ω поміщаємо в N -вимірний паралелепіпед та покриваємо його прямокутною сіткою із кроком Δh_j , $(j=1, \dots, K)$ та задаємо початкове положення центрів покриття $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$. Розбиваємо множину Ω на N підмножин $\{\Omega(\tau_i^{(0)}), i = 1, \dots, N\} = \{\Omega(\tau_1^{(0)}), \dots, \Omega(\tau_N^{(0)})\}$ за допомогою алгоритму побудови діаграми Діріхле-Вороного з [3]. Обчислюємо умовний градієнт $g_{\tau_i}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ у точці $\tau^{(0)}$.

Перший крок алгоритму здійснюємо за формулою

$$\tau^1 = \tau^{(0)} - h \cdot g_{\tau_i}(\tau^{(0)}).$$

Опишемо $(k+1)$ -й крок алгоритму.

1. Для центрів $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}$ розбиваємо множину Ω на N підмножин $\{\Omega(\tau_i^{(k)}), i = 1, \dots, N\} = \{\Omega(\tau_1^{(k)}), \dots, \Omega(\tau_N^{(k)})\}$ за допомогою алгоритму побудови діаграми Діріхле-Вороного з [3].

2. Обчислюємо значення $g_{\tau_i}(\tau)$ при $\tau = \tau^{(k)}$.

3. Здійснюємо $(k+1)$ -й крок алгоритму, ітераційна формула якого має вигляд

$$\tau^{k+1} = \tau^{(k)} - h \cdot g_{\tau_i}(\tau^{(k)}),$$

де кроковий множник h вибирається методом поділу кроку.

2. Якщо умова

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритму, у протилежному випадку – до п.5.

3. Покладаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова завершення роботи алгоритму.

4. Обчислюємо значення функції $I(\tau_*)$ за формулою

$$I(\tau_1, \dots, \tau_N, \lambda(x)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i(\tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx$$

при $\tau = \tau^*$.

Алгоритм описано.

Розроблений алгоритм був програмно реалізований з використанням середовища візуальної розробки програм MS Visual Studio 2008. Програма написана з використанням об'єктно-орієнтованих технологій, які досить добре реалізовані на мові C#.

Базовим класом при реалізації алгоритму є клас Coverage. Coverage – інструмент, що у доступній формі забезпечує чисельний розв'язок задач задачі оптимального покриття множини, точки якої мають різну вагу, що змінюється з часом, заданою кількістю куль заздалегідь визначених радіусів, а також графічну візуалізацію результатів. Основне діалогове вікно програми зображено на рис.1.



Рис. 1. Основне діалогове вікно програми

Аналіз отриманих результатів. Робота алгоритму та розробленого програмного забезпечення перевірено на модельних прикладах.

Необхідно покрити прямокутник розмірами 500х500 чотирма кулями: $R_1=150, R_2=150, R_3=150, R_4=150$. Щільність точок множини задається

$$\rho(x, y) = e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sigma^2}}$$

При цьому

	t=1	T=2	t=3	t=4
(x_i, y_i)	(1,1)	(500,500)	(0,500)	(500,0)
σ^2	100	200	200	200

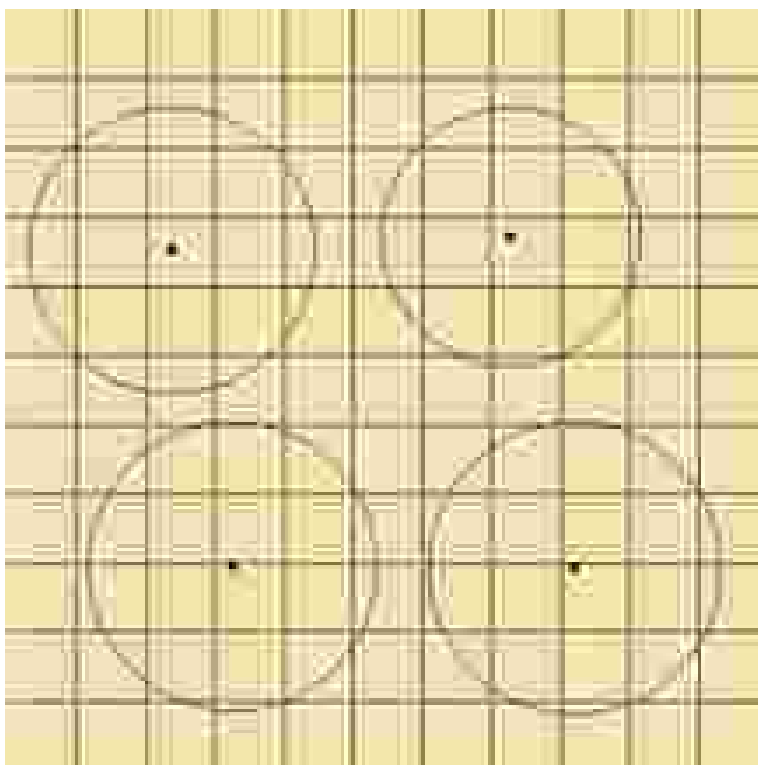


Рис. 2. Оптимальне покриття множини

У результаті роботи алгоритму отримали оптимальне покриття заданої множини (рис. 2); координати центрів куль оптимального покриття $\{(108; 158), (331; 149), (148; 366), (373; 367)\}$; кількість непокритих споживачів 37.24.

Висновки. Для неперервної задачі про оптимальне s -кульове покриття компактної множини $\Omega \subset E_n$ із нерівномірною густиною, що змінюється з часом, кулями заданого радіусу розроблений алгоритм, заснований на використанні алгоритму розв'язання задачі про оптимальне розбиття множини, що використовує ефективний метод оптимізації – метод можливих напрямків спуску.

Запропонований алгоритм можна застосувати для покриття множин з n -мірного евклідового простору довільної розмірності.

Отримані результати також показали, що алгоритм, враховуючи вагу точок множини, розміщає центри куль покриття ближче до областей з вищою вагою. Коли густина множини змінюється, центри розміщуються оптимально, враховуючи всі проміжки часу.

Алгоритм реалізований на мові C# в середовищі MS Visual Studio 2008. У результаті тестування на прикладах було підтверджено простоту задавання початкових даних та високу ефективність алгоритму.

Достовірність отриманих результатів підтверджена геометрично.

Бібліографічні посилання

1. **Киселёва Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселёва, Н.З. Шор / – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.
2. **Киселёва Е.М.** Решение непрерывных задач оптимального покрытия множества шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселёва, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ : Междунар. научно-теорет. журнал. – №3. – К. – 2009. – С. 98–118.
3. **Лозовський О.С.** Алгоритм розв'язання проміжної задачі в одній задачі оптимального покриття множини з нерівномірною вагою / О.С. Лозовський // Тези доп. VII міжнарод. конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» – Д. : ДНУ – 2009. – С. 167–168.

Надійшла до редколегії 06.06.2014

Н. В. ¹⁶Комарова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МЕТОД БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ И ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ РЯДОВ

Запропоновано використання факторного аналізу спільно з методом найближчих сусідів для прогнозування часових рядів, встановлено зв'язок між запропонованим методом та методом найближчих сусідів з нормалізованою евклідовою відстанню.

Предложено совместное использование факторного анализа и метода ближайших соседей для прогнозирования временных рядов, установлена взаимосвязь между предложенным методом и методом ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием.

In the article the conjoint using of the factor analysis and the nearest neighbor method for time series forecasting, there is revealed the relationship between the suggested method and the nearest neighbors' method with normalized Euclidian distance

Ключевые слова: факторный анализ, метод ближайших соседей, нормализованное евклидово расстояние, прогнозирование, временные ряды.

Вступлення

Анализ и прогнозирование временных рядов — важная задача во многих областях исследований. Основными инструментами ее решения являются статистические методы, среди которых наиболее распространены методы авторегрессии и скользящего среднего. Однако зачастую их применение для прогноза нестационарных временных рядов не дает удовлетворительных результатов.

Постановка задачи

При прогнозировании цен на промышленную продукцию возникает задача поиска метода, который можно было бы использовать для широкого класса нестационарных временных рядов. Одним из методов, используемых для прогнозирования нестационарных временных рядов, является метод ближайших соседей, предложенный нелинейной динамикой. В работе предложено совместное использование факторного анализа и метода ближайших соседей для прогнозирования временных рядов цен.

Подход к решению

Метод ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием. В методе ближайших соседей в качестве меры близости между точками фазового пространства, как правило, используют евклидово расстояние. В работе [4] в качестве меры близости рассмотрено нормализованное евклидово расстояние.

Пусть $\{x_i, i=1,2,...,N\}$ – временной ряд. По значениям $x_i, i=1,2,...,M-1$, временного ряда необходимо построить прогноз $\tilde{x}_M$ его значения x_M в момент времени M . Для прогнозирования воспользуемся классическим методом ближайших соседей нулевого порядка с одним ближайшим соседом [2]. Строим фазовую траекторию временного ряда $\{x_i, i=1,2,...,N\}$ – последовательность точек с координатами $\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, ..., x_{i+(m-1)\tau}), i=1,2,...,N-(m-1)\tau; (m, \tau < N)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для точки $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} = (x_{M-1-(m-1)\tau}, x_{M-1-(m-2)\tau}, ..., x_{M-1})$ находим точку $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} = (x_{k-1-(m-1)\tau}, x_{k-1-(m-2)\tau}, ..., x_{k-1})$ фазовой траектории, ближайшую к точке $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}$. Следующей за точкой $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}$ фазовой траектории является точка $\mathbf{x}_{k-(m-1)\tau} = (x_{k-(m-1)\tau}, x_{k-(m-1)\tau+1}, ..., x_{k-1}, x_k)$. Согласно методу ближайших соседей в качестве прогноза $\tilde{x}_M$ значения x_M временного ряда в момент M принимается значение x_k . Если необходимо построить прогноз на несколько точек $x_M, x_{M+1}, ..., x_{M+L}$, то, как правило, в качестве прогнозных значений $\tilde{x}_M, \tilde{x}_{M+1}, ..., \tilde{x}_{M+L}$ рассматривают значения $x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+L}$ временного ряда.

Прогноз можно строить по двум и большему числу ближайших соседей и в этом случае в качестве прогнозных значений рассматривается среднее или средневзвешенное значение прогнозов по каждому из ближайших соседей.

Выбор параметра m фазового пространства $\mathbb{R}^n$ и параметра τ является отдельной задачей. На практике не худшим вариантом оказывается эмпирическая оценка этих параметров.

Пусть

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x}), \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$d_E = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} - \text{евклидова метрика в } \mathbb{R}^n.$$

Нормализованное евклидово расстояние d_{NE} между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определим равенством

$$d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} - \frac{y_i - \bar{y}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|} \right)^2 \right)^{1/2} = d_E \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}, \frac{\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|} \right). \quad (1)$$

Нормализованное евклидово расстояние, хотя и определяется через евклидову метрику, но само на $\mathbb{R}^n$ метрикой не является, уже хотя бы потому, что из $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ не следует равенство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Например, если $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$, то $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Заметим также, что d_{NE} не определено для пары точек, среди которых хотя бы одна имеет вид $\mathbf{c} = (c, c, \dots, c)$. Поэтому далее, когда мы будем говорить о нормализованном евклидовом расстоянии между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, всегда будем предполагать, что они не равны константам, т. е. $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ отличны от $\mathbf{c} = (c, c, \dots, c)$.

Факторный анализ. В ряде работ (например, в [5]) для прогнозирования временных рядов используется метод факторного анализа в той или иной модификации (метод «Гусеница», сингулярный спектральный анализ).

Факторный анализ играет важную роль во многих областях исследований. Он дает возможность сведения обширного числового материала к нескольким независимым факторам, которые сохраняют существенные особенности исходных данных.

Опишем реализацию факторного анализа для матрицы $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-m+1} & x_{N-m+2} & \dots & x_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

построенной из введенных ранее векторов $\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$, $i = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau$; $(m, \tau \ll N)$. Примем $\tau = l$.

Строки матрицы $\mathbf{X}$ обычно нормируются, поэтому будем считать, что в матрице (2) строки нормированы. Далее элементы матрицы $\mathbf{X}$ будем обозначать через x_{ij} , т. е.

$$x_{ij} = x_{i+j-1}, i=1,2,\dots,N-m+1, j=1,2,\dots,m.$$

Целью факторного анализа является представление элемента x_{ij} матрицы $\mathbf{X}$ в виде линейной комбинации нескольких гипотетических переменных или факторов. Предположим, что значение x_{ij} может быть выражено в виде линейной комбинации q факторов [7]

$$x_{ij} = a_{i1} f_{1j} + a_{i2} f_{2j} + \dots + a_{iq} f_{qj},$$

или в матричной форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{F}, \quad (3)$$

где $\mathbf{F} = [f_{ij}]^{q \times m}$, $\mathbf{f}_i = (f_{i1} \dots f_{im})$, $i=1,2,\dots,q$ – система m -мерных ортонормированных векторов,

$\mathbf{A} = [a_{ij}]^{(N-m+1) \times q}$ – матрица коэффициентов преобразования.

Векторы $\mathbf{f}_j$, $j=1,2,\dots,q$, называют факторами, а коэффициенты a_{ij} , $j=1,2,\dots,q$ – факторными нагрузками при векторе исходных данных $\mathbf{x}_i$.

Основное уравнение факторного анализа выводится из записи корреляционной матрицы исходных данных

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m-1} \mathbf{X}\mathbf{X}' \quad (4)$$

Подставим в (4) выражение для матрицы через факторы (3):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m-1} \mathbf{X}\mathbf{X}' = \frac{1}{m-1} \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{A}\mathbf{F})' = \mathbf{A} \left(\frac{1}{m-1} \mathbf{F}\mathbf{F}' \right) \mathbf{A}'.$$

Выражение в скобках – корреляционная матрица факторов, – а поскольку они ортонормированы, она равна единичной матрице.

Тогда получаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}'.$$
 (5)

Из равенства (5) получаем два важных соотношения:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} a_{jk}, i \neq j;$$
 (6)

$$r_{ii} = \sum_{k=1}^q a_{ik}^2 = 1.$$
 (7)

Способ выбора матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$ определяет метод факторного анализа. Мы использовали один из фундаментальных методов – метод главных компонент. Приведем его основную идею, подробное описание приведено, например, в [1].

Уравнение (5) имеет одно решение, если ввести некоторые естественные ограничения на матрицу $\mathbf{A}$. В методе главных компонент последовательно максимизируется сумма квадратов нагрузок первого фактора, затем второго, и так далее до последнего фактора, т. е. последовательно максимизируются функции

$$S_j = \sum_{i=1}^{N-m+1} a_{ij}^2 \rightarrow \max, j = 1, 2, \dots, q.$$

В [1] показано, как данная задача сводится к задаче поиска собственных значений и характеристических векторов матрицы $\mathbf{R}$.

Факторные нагрузки $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N - m + 1, j = 1, 2, \dots, q$, используются для построения прогноза.

Совместное использование факторного анализа и метода ближайших соседей. Рассмотрим совместное использование факторного анализа и метода ближайших соседей с евклидовым расстоянием. Суть предлагаемого подхода заключается в разложении временного ряда на факторы и применении метода ближайших соседей к факторным нагрузкам, соответствующим векторам $\mathbf{x}_i$. Опишем поэтапную реализацию предлагаемого подхода.

1. Для вектора значений ряда $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)}$, после которого строим прогноз, находим ближайшего соседа $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)}$, удовлетворяющего условию

$$\sum_{i=1}^s (a_{N-m+1,i} - a_{j,i})^2 = \min_j \sum_{i=1}^s (a_{N-m+1,i} - a_{j,i})^2, \quad (8)$$

где s – количество факторов, которое мы используем для прогнозирования.

2. Из множества $L_{M-1-(m-1)}$ выбираем точку $\tilde{\mathbf{x}}_M$, ближайшую точку к $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)}$ (в смысле евклидова расстояния):

$$\tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{\alpha} \mathbf{x}_{k-1-(m-1)} + \tilde{\mathbf{b}}.$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{n \left(\sum_{i=1}^L x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot x_{k-1-(m-i)\tau} - \sum_{i=1}^L x_{M-1-(m-i)\tau} \sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau} \right)}{n \sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau}^2 - \left(\sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau} \right)^2},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^L x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot \sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau}^2 - \sum_{i=1}^L x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot x_{k-1-(m-i)\tau} \sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau} \right)}{n \sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau}^2 - \left(\sum_{i=1}^L x_{k-1-(m-i)\tau} \right)^2}.$$

Значение $\tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{\alpha} \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{b}}$ будем рассматривать в качестве прогноза значения x_M временного ряда $\{x_i, i=1,2,...,N\}$.

В случае прогнозирования на $k > 1$ значений в качестве прогноза $x_M, x_{M+1}, ..., x_{M+k-1}$ используются значения $\tilde{x}_M, \tilde{x}_{M+1}, ..., \tilde{x}_{M+k-1}$.

Дадим теперь необходимые определения и рассмотрим важную взаимосвязь, которая существует между описанным подходом и предложенным ранее методом ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием.

Введем расстояние $d_{FA}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которое будем называть факторным расстоянием, равенством

$$d_{FA}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^s (a_{N-m+1,i} - a_{j,i})^2 \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Оказывается, что при $s = q$, то есть при использовании всей информации о факторах и факторных нагрузках, между расстояниями (9) и (1) существует определенная взаимосвязь, которая сформулирована в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ – временной ряд, представленный в виде матрицы (2).

Тогда при $s = q$ имеет место равенство

$$d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - 0.5 \cdot d_{FA}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (10)$$

Доказательство. Для удобства обозначим $a_{N-m+1,i} = a_i^y$, $a_{j,i} = a_i^x$.

Для доказательства (10) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} d_{FA}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2(1 - d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \\ d_{FA}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^q (a_i^x - a_i^y)^2 = \sum_{i=1}^q (a_i^{x^2} - 2a_i^x a_i^y + a_i^{y^2}) = \\ &= \sum_{i=1}^q a_i^{x^2} - 2 \sum_{i=1}^q a_i^x a_i^y + \sum_{i=1}^q a_i^{y^2}. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (6) и (7):

$$\sum_{i=1}^q a_i^{x^2} - 2 \sum_{i=1}^q a_i^x a_i^y + \sum_{i=1}^q a_i^{y^2} = 1 - 2 \sum_{i=1}^q a_i^x a_i^y + 1 = 2 - 2 \sum_{i=1}^q a_i^x a_i^y = 2 - 2r_{xy} = 2(1 - r_{xy}).$$

Из определения нормализованного евклидова расстояния (1) следует, что $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r_{xy}$. Тогда

$$d_{FA}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2(1 - r_{xy}) = 2(1 - d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (11)$$

Выразив $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из (11), получим

$$d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - 0.5 \cdot d_{FA}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Тем самым теорема доказана.

Равенство (10) означает, что использование информации обо всех факторах в совместном методе факторного анализа и ближайших соседей эк-

вивалентно використанню методу найближчих сусідів з нормалізованим евклідовим відстанню.

Однак на практиці часто відбувається, що використання інформації обох факторів є надлишковим.

Висновки

В статті пропонується спільне використання факторного аналізу і методу найближчих сусідів для прогнозування часових рядів і встановлено взаємозв'язок запропонованого методу з запропонованим раніше методом найближчих сусідів з нормалізованим евклідовим відстанню [4].

Бібліографічні посилання

1. **Иберла К.** Факторный анализ / К. Иберла. – М. : Статистика, 1980. – 398 с.
2. **Зульпукаров М.Г.М.** Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга–Макартура. / М.Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (препринт) – 2006. – № 21. – 32 с.
3. **Комарова Н.В.** Некоторые инструменты нелинейной динамики в анализе и прогнозировании временных рядов / Н.В. Комарова // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. – С. 191–199.
4. **Комарова Н.В.** Метод ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием. / Н.В. Комарова // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2012. – С. 178 – 187.
5. **Лоскутов А.Ю.** Временные ряды: анализ и прогноз / А.Ю. Лоскутов, О.Л. Котляров, Д.И. Журавлев // Математика. Компьютер. Образование : сб. тр. XI междунар. конф. – Ижевск, 2004. – С. 9–46.
6. **Малинецкий Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
7. **Малинецкий Г.Г.** Руслы и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов // ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (препринт). – 1998. – № 32. – 20 с.

Надійшла до редколегії 13.06.2014

вивалентно использованию метода ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием.

Однако на практике часто оказывается, что использование информации обо всех факторах является избыточным.

Выводы

В статье предложено совместное использование факторного анализа и метода ближайших соседей для прогнозирования временных рядов и приведена взаимосвязь предложенного метода с предложенным ранее методом ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием [4].

Библиографические ссылки

1. **Иберла К.** Факторный анализ / К. Иберла. – М. : Статистика, 1980. – 398 с.
2. **Зульпукаров М.Г.М.** Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга–Макартура. / М.Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (препринт) – 2006. – № 21. – 32 с.
3. **Комарова Н.В.** Некоторые инструменты нелинейной динамики в анализе и прогнозировании временных рядов / Н.В. Комарова // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д. : Вид.во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. – С. 191–199.
4. **Комарова Н.В.** Метод ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием. / Н.В. Комарова // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д. : Вид.во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2012. – С. 178 – 187.
5. **Лоскутов А.Ю.** Временные ряды: анализ и прогноз / А.Ю. Лоскутов, О.Л. Котляров, Д.И. Журавлев // Математика. Компьютер. Образование : сб. тр. XI междунар. конф. – Ижевск, 2004. – С. 9–46.
6. **Малинецкий Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
7. **Малинецкий Г.Г.** Руслы и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов // ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (препринт). – 1998. – № 32. – 20 с.

Надійшла до редколегії 13.06.2014

Л.С. Чоряшкіна, А.А. Михалева, В.И. Навоєнко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К НЕПРЕРЫВНЫМ ЗАДАЧАМ МНОГОКРАТНОГО ПОКРЫТИЯ

Представлено математичну модель неперервної задачі оптимального багатократного покриття обмеженої множини кулями заданого радіуса. Описано алгоритм розв'язання задачі, розроблений з використанням методів оптимального розбиття множин. Наведено аналіз результатів обчислювальних експериментів.

Представлена математическая модель непрерывной задачи оптимального многократного покрытия ограниченного множества шарами заданного радиуса. Описан алгоритм решения задачи, разработанный с использованием методов оптимального разбиения множеств. Приведен анализ результатов вычислительных экспериментов.

A mathematical model of continuous problem of multiple covering of bounded set in an n -dimensional Euclidean space with balls of the smallest radius is presented. An algorithm for solving the problem, using methods developed by the optimal partitioning sets, is described. An analysis of the results of computational experiments is given.

Ключевые слова: непрерывная задача многократного покрытия, оптимальное k -кратное шаровое покрытие, теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств, недифференцируемая оптимизация.

Непрерывные задачи многократного покрытия ограниченного множества часто возникают при размещении в регионах логистических, распределительных, сервисных центров, служб быстрого реагирования на чрезвычайные ситуации, станций сотовой связи и т. п. Примеры некоторых практических задач многократного покрытия заданной области кругами представлены, например, в [1; 3; 6]. В настоящее время в научной литературе все чаще появляются работы, посвященные методам решения таких задач, что свидетельствует об актуальности исследований в данном направлении.

В данной работе представлены результаты применения математического и алгоритмического аппарата теории оптимального разбиения множеств (ОРМ) [5] к решению непрерывных задач многократного (k -кратного) покрытия. Отметим, что ранее методы ОРМ применялись лишь для решения задач об однократном покрытии ограниченного множества из пространства E_n кругами наименьшего радиуса [4].

Математическая постановка задачи многократного оптимального покрытия. Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n . **с.шаром** радиуса R с центром в точке τ_i из E_n будем называть множество вида $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$, где $c(x, \tau_i)$ – некоторая квазиметрика. Чаще всего используются следующие метрики: евклидова, манхеттенская, метрика Чебышева, взвешенная l_p -метрика, взвешенная l_p -метрика с возможным поворотом осей координат и другие. Выбор метрики зависит от свойств множества и от существующих связей центра с «клиентами».

Будем говорить, что совокупность центров $\tau_1, \dots, \tau_N$ задает **k -кратное шаровое покрытие множества Ω с радиусом R** , если $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R)$ и для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие $x \in \bigcup_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R)$,

$i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, k \leq N$.

Радиус R **k -кратного покрытия множества Ω** , которое задается центрами $\tau_1, \dots, \tau_N$ (вектором τ^N), определяется так:

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (1)$$

при этом для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие $x \in \bigcup_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R)$,

$k \leq N, i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$, где $\tau^N \in E_n^N$ (или, в частном случае, $\tau^N \in \Omega^N$).

k -кратное покрытие множества Ω , задаваемое вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, с радиусом $R(\tau^N)$, который определяется по формуле (1), является **минимальным k -кратным с.шаровым покрытием**, генерируемым вектором τ^N . Это означает, что никакие с.шары меньшего радиуса с центрами в точках $\tau_1, \dots, \tau_N$ k -кратно не покрывают множество Ω . k -кратное покрытие минимального радиуса называется **оптимальным k -кратным покрытием**.

Задача отыскания оптимального k-кратного покрытия формулируется следующим образом: требуется определить величину радиуса оптимального покрытия

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, на котором достигается значение $R(\tau_*^N)$ при условии, что для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется включение

$$x \in \bigcup_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R), \quad k \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Приведем еще одну математическую формализацию задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное шаровое покрытие множества может быть формализована математически следующим образом.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n , $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный на множестве Ω (или в пространстве E_n) набор точек, в дальнейшем называемые центрами. Будем говорить, что точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$ являются **k-ближайшими соседями точки** $x \in \Omega$ из заданных N точек, если

$$\forall j = 1, k \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \quad (2)$$

В частных случаях, например когда множество Ω имеет симметричную структуру, или центры $\tau_1, \dots, \tau_N$ размещены в области Ω с определенной закономерностью, для некоторых точек $x \in \Omega$ знак неравенства в (2) может быть нестрогим, то есть некоторые из заданных центров $\tau_1, \dots, \tau_N$ могут находиться на одинаковом расстоянии от фиксированной точки $x \in \Omega$. Тогда будем считать, что точка $x \in \Omega$ имеет несколько различных наборов из k ближайших соседей. При численной реализации поиска k ближайших соседей фиксированной точки $x \in \Omega$ для однозначности будем полагать, что набор k ближайших соседей образуют точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\forall j = 1, k \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

и имеющие наименьшие возможные индексы.

Введем в рассмотрение множество Λ_N^k N -мерных векторов, координаты которых могут принимать значения 0 или 1, причем в каждом таком векторе единиц может быть ровно k ;

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = 1, N; \sum_{i \in I} \lambda_i = k \right\}.$$

Очевидно, $|\Lambda_N^k| \in \mathbb{C}$.

Тогда для каждой точки $x \in \Omega$ k ближайших соседей из фиксированного набора точек $(\tau_{1N}, \dots, \tau_N)$ можно найти, решая задачу поиска такого вектора $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Lambda$, при котором достигается минимальное значение величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Задача о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие множества состоит в отыскании величины

$$R = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x). \quad (3)$$

Задача о минимальном k -кратном с-шаровом покрытии с разложением центров шаров математически может быть сформулирована так:

Требуется найти величину

$$R(\lambda^*, \tau^*) = \inf_{(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) \quad (4)$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = 1, N; \sum_{i \in I} \lambda_i = k \right\},$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \Lambda_N \quad \forall x \in \Omega$, и вектор $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_N^N$, при которых в (4) достигается нижняя грань.

Заметим, что в задаче (4) вектор-функция $\lambda()$ используется для конструктивной записи математической модели задачи и является промежуточным результатом. Если в задаче не интересоваться, какими именно с-шарами покрывается каждая точка $x \in \Omega$, то вектор-функцию $\lambda^*()$ слева в равенстве (4) можно опустить.

Приближенный алгоритм решения задач многократного покрытия заданного множества. Для решения задачи об отыскании радиуса N кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω ,

генерируемое фиксированным набором предложен подход с использованием алгоритмов сортировки массива расстояний от фиксированной точки $x \in \Omega$ до заданных центров $(\tau_{1N}, \dots, \tau_{nN})$. Опишем численный алгоритм решения задачи (1) или (3) о поиске радиуса R n кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω из E_n .

Область Ω заключим в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (1) под функцией $c(x, \tau_{ij})$ будем понимать функцию $c(x, \tau_{ij}) \cdot \rho(x)$, определенную на Π и совпадающую с $c(x, \tau_{ij})$ на Ω .

Алгоритм 1.

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$; обозначим Π – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Шаг 1. Для каждой точки x сетки Π строим массив расстояний от этой точки до всех центров: $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$.

Шаг 2. Полученный массив расстояний $D(x)$ сортируем по возрастанию элементов.

Шаг 3. В каждом отсортированном массиве отбираем элемент, стоящий на k -м месте (с порядковым номером k), обозначим этот элемент $c^k(x, \tau_{i_k})$.

Шаг 4. Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$R = \max_{x \in \Pi} c^k(x, \tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение R является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках $(\tau_{1N}, \dots, \tau_{nN})$, которые k -кратно покрывают множество Ω .

Алгоритм 2 оптимального многократного покрытия множества шарами, основанный на использовании r -алгоритма Шора. Представим здесь один из возможных численных алгоритмов решения задачи (4) об оптимальном k -кратном покрытии – отыскания координат центров $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и значения радиуса покрытия $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{ii}^{\lambda}) (x),$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = 1, N; \sum_{i \in \overline{1, N}} \lambda_i = k \right\},$$

в предположении, что покрываемое множество – единичный n -мерный куб $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$.

Поскольку функция $R(\tau)$ недифференцируемая, для решения задачи (4) применяется метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательно обобщенных градиентов (алгоритм Шора [7]).

Будем вычислять i -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (5)$$

функции $R(\tau^N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ двумя способами:

1) с применением формул численного дифференцирования:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_{12}^{\tau_j}(\tau^N), g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g_n^{\tau_j}(\tau^N)), \quad (6)$$

где s -ая компонента вычисляется приближенно по формуле

$$g_s^{jN}(\tau) = \frac{R(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \dots, \tau_j^{(s)} + \Delta, \dots, \tau_N) - (\tau_j^{(1)}, \dots, \tau_j^{(s)}, \dots, \tau_j^{(n)}), \dots, \tau)}{\Delta},$$

$s = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, N};$

2) с применением k -кратной диаграммы Вороного. Опишем этот способ вычисления субградиента целевой функции задачи (4) более подробно.

Поскольку для компактного множества Ω из E_n и функции $c(x, \tau_i)$, непрерывной по каждому из своих аргументов, оптимальное k -кратное покрытие множества Ω заданным числом N шаров существует, то задачу (4) можно переписать в виде

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{ii}^{\lambda}) (x) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega}. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что для непустого компактного множества Ω из E_n и $(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ справедливо следующее равенство:

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{\lambda}) (x) = \max_{m=1, \dots, M} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} c(x, \tau_i),$$

где множества $\Omega_m, m = 1, \dots, M, M \leq \frac{k}{N}$ составляют k -кратную диаграмму Вороного для множества Ω , т.е. такое разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, что:

$$\bigcup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega; \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad \forall i, j = \overline{1, M};$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega \mid \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\} \quad (8)$$

где $T_{mk} = \{i_{12}^m, i^m, \dots, i^m\}, m = 1, \dots, M$ – всевозможные k -элементные подмножества множества индексов $\{1, 2, \dots, N\}$.

Поскольку множество Ω_m определяется набором из k центров с индексами $i_{12}^m, i^m, \dots, i_k^m$, иногда Ω_m будем записывать как $\Omega(\bar{T}_m)$, указывая при этом, что данная ячейка Вороного соответствует набору центров $\bar{T}_m = \{\tau_{i_{12}^m}, \tau_{i^m}, \dots, \tau_{i_k^m}\}$. Фактически, обобщенные ячейки Вороного Ω_m определяют точки множества Ω , для которых центры с индексами из соответствующего набора $T_{mk} = \{i_{12}^m, i^m, \dots, i^m\}$ являются k -ближайшими соседями.

Обозначим через V фиксированное разбиение непустого компактного множества Ω на $M \leq \frac{k}{N}$ подмножеств $V_1, \dots, V_m, \dots, V_M$, составляющих k -кратную диаграмму Вороного для Ω , причем V_i – непустые, компактные.

Введем также для каждого $i = 1, \dots, N$ функции

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_{im} \in T} \max_{x \in T_{im}} c(x, \tau_i). \quad (9)$$

Субградиентное множество $G_{R_i}^V(\hat{\tau}^N)$ в точке $\hat{\tau}^N$ функции (9) вычисляется по формуле

$$G_{R_i}^V(\hat{\tau}^{NN}) = \overline{\text{co}}_{x \in T_{im}} G_{c(x, \tau_i)}(\tau_i), \quad (10)$$

где $I(\hat{\tau}^{NN}) = \left\{ x : x \in \bigcup_{m: i \in T_m} V_m : c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}) \right\}$; $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдифференциал функции $c(x, \tau_i)$ по τ_i на E_n при данном $x \in V_i$.

Обобщенный градиент целевой функции задачи (4) имеет вид

$$g_R(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)),$$

i -ая компонента которого является элементом субградиентного множества функции $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, из (9) в точке τ_i , которое записывается так:

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \text{co} \left\{ \tau_i(\bar{x}, \tau), \bar{x}: c(x, \tau_i) = \max_{T_{im} \in T} \max_{x \in T_{im}} c(x, \tau_i) \mid i = \overline{1, N} \right\} \quad (11)$$

где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке

$$\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N), \text{ а } \tau_i = \tau \left(\begin{smallmatrix} (1) \\ ii \end{smallmatrix} \right), \dots, \tau^{(n)}.$$

На рис. 1 представлена двукратная диаграмма Вороного для 8 точек на квадрате, для каждого центра которой указано направление к одному из элементов множества (11).



Рис. 1. Двукратная диаграмма Вороного с указанием возможного направления сдвига центров

Сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного n -мерного куба $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$. Для упр-

рошения обозначений в алгоритме вектор $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ обозначим через $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Алгоритм

Предварительный этап. Куб Ω покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим Ω . Задаем шаг численного дифференцирования Δ . Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Вычисляем по этим центрам величину

$$R(\tau^{(0)}) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} (x, \tau_i^{(0)})$$

используя алгоритм 1 решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω .

По формулам (6), (7) вычисляем вектор -градиент $g_R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точке $\tau^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг r -алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_\Omega(\tau^{(0)} - h_0 \cdot g_R(\tau^{(0)})),$$

где P_Ω – оператор проектирования на множество Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $m, m = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$.

Опишем **(m+1)-й шаг** алгоритма.

1. По центрам $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма 1 вычисляем величину

$$R(\tau^{(m)}) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} (x, \tau_i^{(m)})$$

2. Вычисляем значения $g_R(\tau)$ по формулам (6), (7) при $\tau = \tau^{(m)}$.

3. Проводим $(m+1)$ -й шаг r -алгоритма в N -форме [7], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m+1)} = P_\Pi \left(\tau^{(m)} - \frac{H_{m+1} g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R(\tau^{(m)}), g_R(\tau^{(m)})}} \right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi \xi^T}{(H_m \xi \xi, \xi)_m},$$

$$\xi_m = g_R(\tau^{(m)}) - g_R(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия

$$\min_{h>0} R \left(\tau^{(m)} \right) - \frac{H_{m+1} g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R(\tau^{(m)}), g_R(\tau^{(m)}))}} .$$

4. Если условие

$$\|\tau^{m+1} - \tau^m\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (8)$$

не выполняется, переходим к $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (7.3.8) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$R(\tau_*) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{\lambda_i}^*) (x)$$

с помощью алгоритма 1.

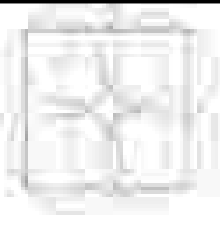
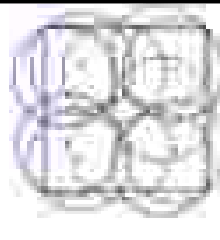
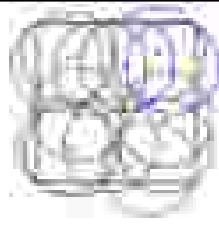
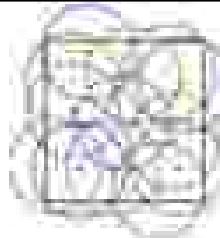
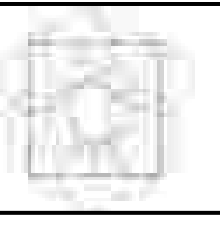
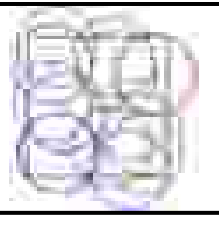
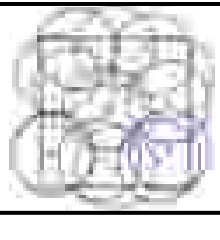
Алгоритм 2 описан.

Результаты вычислительных экспериментов по многократному покрытию единичного квадрата из E_2 с помощью алгоритма 2. Работа алгоритма на основе формул численного дифференцирования целевой функции продемонстрирована в [5]. Там, например, приведены минимальные радиусы однократного покрытия в задаче (4) для $N=2,3,4,5,9,15$, полученные с точностью $\varepsilon=0.0001$ описанным выше алгоритмом, в сравнении с оптимальными решениями, полученными с помощью алгоритма, представленного в [6]. Отмечено также, что результаты согласуются с результатами, описанными в работах [3]. Незначительное расхождение в оптимальных значениях радиусов покрытия объясняется, прежде всего, погрешностью алгоритма (приближенное вычисление компонент обобщенного градиента целевой функции, дискретизация области и т.п.), а также вычислительной погрешностью.

В табл. 1, 2 приведены результаты решения задачи оптимального двукратного покрытия единичного квадрата, полученные в работе [3], и для сравнения – полученные с помощью описанного выше алгоритма как с применением формул численного дифференцирования, так и с использованием многократных диаграмм Вороного.

Таблиця 1

**Сравнительный анализ результатов многократного шарового покрытия
единичного квадрата**

N	k	Оптимальное покрытие, полученное с помощью алгоритма		
		предложенного Галлиевым, Кар- повой [3]	описанного в статье с применением	
			Численного диф- ференцирования	кратных диаграмм Вороного
11	2			
13	2			
15	2			

На рис. 2 представлены результаты двукратного покрытия единичного квадрата 19-ю кругами. На рис. 3 показаны многократные оптимальные покрытия при других N и k .

Как нетрудно заметить, результаты решения некоторых задач оптимального многократного покрытия свидетельствуют о том, что при определенных значениях N и k оптимальное расположение центров $\tau_1, \dots, \tau_N$ таково, что несколько центров могут быть расположены очень близко друг

Таблиця 2

Минимальный радиус двукратного покрытия единичного квадрата, полученный с помощью описанного в статье алгоритма и алгоритма из [3]

N	R(τ_*) (Галлиев, Карпова)	R(τ_*), полученное с применением аппарата	
		численного дифференцирования	кратных диаграмм Вороного
11	0.31280	0.31819	0.3164
13	0.29106	0.29740	0.2970008
15	0.26650	0.28657	0.278076
17	0.25372	0.25927	0.2657
19	0.22766	0.23753	0.236849
21	0.21601	0.21351	0.225

к другу, что на практике не желательно. Поэтому в дальнейшем целевая функция задачи (4) может быть расширена некоторым регуляризующим слагаемым, отвечающим за невозможность слипания центров.

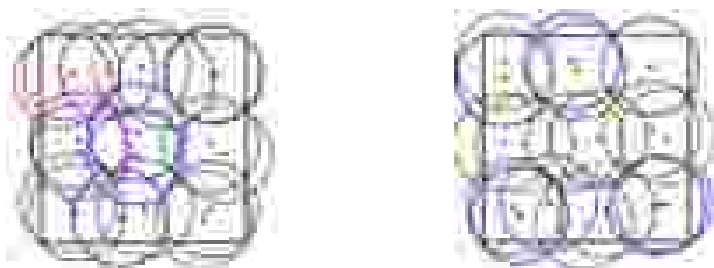


Рис. 2. Двукратное оптимальное покрытие единичного квадрата в случае $\|x\| = \|x\|_2$, $N=19$, полученные: слева – с применением аппарата численного дифференцирования, справа – с применением двукратной диаграммы Вороного

Таким образом, результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что предложенный алгоритм может быть применен к решению задач об оптимальном многократном покрытии заданного множества, хотя и имеет ряд недостатков. И это, прежде всего, зависимость результатов вычислений (величины минимального радиуса шарового покрытия) от исходных данных и параметров алгоритмов – начального приближения координат центров, величины шага пространственной сетки, величины

шага численного дифференцирования при вычислении компонент обобщенного градиента.

Серия вычислительных экспериментов показывает, что для получения радиуса покрытия, близкого к оптимальному радиусу, величину шага численного дифференцирования Δ в соответствующем варианте алгоритма нужно согласовывать с шагом дискретизации области, с количеством центров и кратностью покрытия. Этого недостатка лишен способ вычисления компонент обобщенного градиента целевой функции задачи (4) с помощью k -кратной диаграммы Вороного.

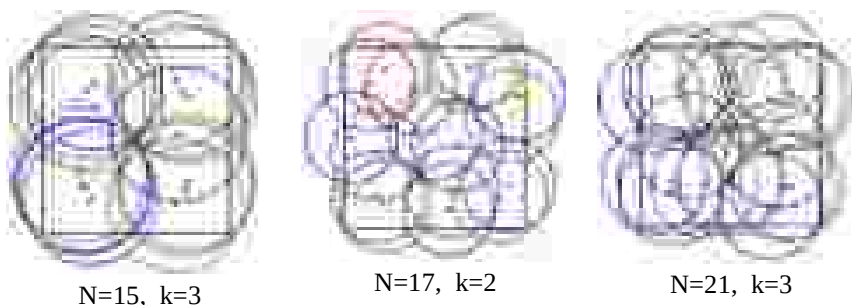


Рис. 3. k -кратное покрытие единичного квадрата, $\|x\| = \|x\|_2$

Дальнейшие исследования моделей и методов решения задач многократного покрытия множества включают:

- теоретическое обоснование предложенного алгоритма решения задачи оптимального многократного покрытия; исследование свойств задачи, таких как липшицевость целевой функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$, а, следовательно, почти всюду дифференцируемость, многоэкстремальность этой функции в зависимости от вида множества Ω и др.;
- оценку точности разработанных алгоритмов;
- разработку рекомендаций относительно выбора функций метрики, подбора ее параметров для отдельных типов станций обслуживания; исследование свойств диаграмм Вороного для выбранной метрики в задачах k -кратного покрытия;
- разработку программного комплекса для решения задач многократного покрытия, включая осуществление подбора функции метрики и ее параметров для заданных множеств с использованием электронных карт или матриц расстояний.

Библиографические ссылки

1. Астраков С.Н. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин // Вычислительные технологии, 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26 – 34.

2. **Брусов В. С.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пиявский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – 11, № 2. – С. 304–312.
3. **Галиев Ш. И.** Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш. И. Галиев, М. А. Карпова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769.
4. **Киселева Е. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр / О. М. Киселева, Н.З. Шор. – К., 2005. – 564 с.
5. **Киселёва Е. М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е.М. Киселёва, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.
6. **Кісельова О. М.** Про моделювання неперервних задач багатократного кулькового покриття множини / О. М. Кісельова, Л. І. Лозовська // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д. : ДНУ, 2013 – С. 174 – 180.
7. **Шор Н.З.** Использование модификации г .алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций / Н.З. Шор, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 28–49.

Надійшла до редколегії 28.05.2014

УДК 519.8

Л.С. ²Коряшкіна, А.П. Череватенко, О.В. Зайченко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ КВАДРАТИЧНИМ ФУНКЦІОНАЛОМ

Представлено наближений алгоритм розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множин з функціоналом, квадратичним за фазовою змінною. Наведено результати обчислювальних експериментів та їх інтерпретація.

Представлен приближенный алгоритм решения динамической задачи оптимального разбиения множеств с функционалом, квадратичным по фазовой переменной. Приведены результаты вычислительных экспериментов и их интерпретация

The numerical algorithm for the solving of the continuous dynamic optimal set partitioning problem with a quadratic functional is presented. The results of computational experiments and their interpretation are considered.

Ключові слова: динамічна задача оптимального розбиття множин, квадратичний функціонал, наближений алгоритм.

Вступ. Робота є послідовним продовженням досліджень неперервних динамічних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) з нелінійними функціоналами. Тут представлено чисельний алгоритм розв'язання динамічної неперервної задачі оптимального розбиття множин, вперше розглянутої в [1]. У вказаній роботі запропоновано підхід до розв'язування таких задач, який базується на зведенні квадратичних задач розбиття до неперервних лінійних задач ОРМ, які є добре вивченими [2]. Саме на такому підході засновано алгоритм розв'язання неперервної нелінійної динамічної задачі ОРМ. Наведено аналіз обчислювальних експериментів з розв'язання різних варіантів задачі: без обмежень, з інтегральними обмеженнями на фазову змінну, з розміщенням центрів підмножин.

Постановка нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множини на її підмножини з розміщенням «центрів підмножин». Нехай Ω – обмежена, вимірювана за Лебегом множина з E^n , $P_N(\Omega)$ – клас всіх розбиттів множини Ω на N підмножин:

$$P_N(\Omega) = \left\{ \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\},$$

де $\text{mes}()$ означає міру Лебега. Нехай $u_i(x, t; \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – задані дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times [0, T] \times \Omega$, вимірювальні за x і t при довільних векторах параметрів $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^{K_i}) \in \Xi_i, i = \overline{1, N}$. В окремому випадку, коли $K = n$, $\Xi_i = \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$, згідно термінології теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, вектори $\tau_i, i = \overline{1, N}$, називаються центрами підмножин, що складають розбиття множини Ω .

Введемо до розгляду клас функцій

$$U = \left\{ u(x, t; \bar{\omega}, \tau) : u(x, t; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, t; \tau_i), \text{ для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega), t \in [0, T] \right\}$$

і функціонал

$$F(\gamma) = \int_0^T \int_{\Omega_0} (\rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)))^2 dx dt, \quad (1)$$

де $\gamma = (\bar{\omega}, u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \rho(x, t))$, $T > 0$ – заданий момент часу; $u(x, t; \bar{\omega}, \tau) \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$, $\tau \in \Xi$, $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$, функція $\rho(x, t) \in C^1([0, T])$ для кожного $x \in \Omega$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \alpha \rho(x, 0) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \phi(x), \end{aligned} \quad (2)$$

причому виконуються нерівності

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де $\alpha, b_1, \dots, b_N$ – задані, як правило, невід'ємні величини.

Потрібно знайти таке розбиття $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^* \in P_N(\Omega)$, набір з N K -вимірних параметрів $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Xi$, відповідне керування $(\tau^*)_{U \in U}$ та фазову траєкторію $\rho^*(x, t)$ (що задовольняє умови (2), (3)), за яких функціонал (1) набував би мінімального значення.

Оптимальним розв'язком задачі (1) – (3) називається допустима четвірка $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, u^*(\cdot), p^*(\cdot))$, що доставляє мінімальне значення функціоналу F .

Зауваження 1. Замість інтегральних обмежень (3) на фазову змінну у сформульованій задачі можуть бути введені обмеження на керуючу функцію у такому вигляді:

$$\iint_{\Omega_i} u(x,t; \tau_i) dx dt \leq \bar{b}_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (3')$$

Тоді задачі мінімізації функціонала $F(\gamma)$ за умов (2) і (3') можна надати таку економічну інтерпретацію. Нехай розглядається співіснування виробників подібних за ціною та якістю товарів, споживачами яких є певний прошарок суспільства з приблизно однаковим рівнем доходів, які живуть в однакових умовах та мають однакову шкалу побажань. Спільним інтересом для фірм «виробників товару є утримання попиту $\rho(x_t)$ на даний товар на певному рівні $\bar{\rho}(x,t)$, який можливо лише дещо збільшувати або зменшувати з часом, зберігаючи при цьому головну тенденцію коливання в області оптимального для виробників попиту, за умов урахування граничного рівня споживання даного товару та виробничих потужностей підприємства. Вважається, що динаміка попиту прямо пропорційно залежить від поточного попиту. Крім того, підвищення попиту на продукцію може здійснюватися за рахунок проведення суб'єктами виробництва певних дій, що пожвавлюють інтерес до продукції, наприклад, незначного скорочення вартості товару за рахунок модернізації виробництва, рекламних акцій тощо. Сила впливу таких дій i -го виробника описується функцією $u_i(x_t; \tau)$, $i = \overline{1, N}$. Оскільки виробники співіснують, немає сенсу кожному з них «вкладати кошти» в кожного споживача. Потрібно лише розподілити споживачів на зони впливу виробників з урахуванням їх спільних інтересів. Інтегральні обмеження враховують можливості самих виробників.

Основні розрахункові формули. Обґрунтування методу розв'язання задачі наведено в роботі [1]. Далі наведемо лише основні розрахункові формули і опишемо наближений алгоритм розв'язання. Задача (1) – (3) формулюється у термінах характеристичних функцій $\lambda(x, \dots, x_N)$ підприємств $\Omega_{1, \dots, N}$ множини Ω : знайти вектор-функцію $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$ і набір векторів $\tau \in \Xi$, що мінімізують функціонал

$$I(\lambda(), \tau) = \iint_{\Omega_0} (\rho(xt; \lambda(x), \tau) - \hat{\rho}(xt))^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda() \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}}, \quad (4)$$

де

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1; \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N} \text{ мовлях } x \in \Omega \right\},$$

а функція $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ задовольняє умови

$$\rho(xt) = \alpha \rho(xt) + \sum_{j=1}^N u_j(xt; \tau_j) \lambda_j(x), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\iint_{\Omega_0} \rho(xt) \lambda_i(x) dx dt \leq b; \quad i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Розв'язок задачі Коші (5) для кожного $x \in \Omega$ записується в такому аналітичному вигляді:

$$\rho(xt; \lambda(x), \tau) = \rho_0(x) \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha \theta_j} u_j(x, \theta \tau_j) d\theta \right) \lambda_j(x), \quad (7)$$

$$x \in \Omega, t \in [0, T].$$

Значення компонент характеристичних функцій підмножин, що складають оптимальне розбиття в задачі (4) – (6), обчислюються за формулою

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Bx_i(\tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k \in \overline{1, N}} Bx_k(\tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (8)$$

де

$$B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \xi_i^* T \rho_0(x) + \int_0^T \phi_i(xt; \tau_i^*) (\phi_i(xt; \tau_i^*) - 2\bar{\rho}(xt) + \xi_i^*) dt,$$

$$\phi_i(xt; \tau_i) = \int_0^t e^{\alpha \theta_j} u_i(x, \theta \tau_j) d\theta, \quad i = \overline{1, N},$$

а в якості $\tau_{11}^*, \dots, \tau_{NN}^*, \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \min_{j \in \{1, \dots, N\}} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}. \quad (9)$$

Зауваження 2. В роботі [1] наведені такі умови, за яких множина допустимих процесів задачі (1) – (3) гарантовано не є порожньою: константи $b_1, \dots, b_N$ мають задовольняти співвідношенню

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} e^{\alpha \theta} \bar{u}(x, \theta) d\theta dx, \quad (10)$$

де $\bar{u}(x, t) = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \max_{\tau_i \in \Xi} u_{ii}(x, t, \tau_i) \forall x \in \Omega, t \in [0, T]$. Зазначимо, що ця оцінка є грубою, тому що з порушення нерівності (10) не завжди випливає той факт, що в задачі (1) – (3) не існує жодного допустимого розбиття.

Для розв'язання задачі максимізації негладкої увігнутої функції (9) на множині $\xi \in \Gamma$ застосовується метод узагальненого градієнтного підйому з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних градієнтів – Γ -алгоритм Шора Н.З. При цьому від задачі (9) відбувається перехід до задачі безумовної максимізації за допомогою введення в цільову функцію негладкою штрафної функції множини Γ :

$$\bar{\chi}(\xi) = \chi(\xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N} \quad (11)$$

де S – достатньо велике додатне число (значно більше за максимальний з множників Лагранжа), а функція $\chi(\xi)$ визначається в такий спосіб:

$$\chi(\xi) = \int_{\Omega} \min_{j \in \{1, \dots, N\}} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j.$$

Наближений алгоритм розв'язання задачі. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що множина Ω є паралелепіпедом Π , сторони якого паралельні осям декартової прямокутної системи координат.

1. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою та задаємо початкове наближення $(\xi, \tau) = (\xi^{(0)}, \tau^{(0)})$. Нехай $\hat{\Pi}$ – множина вузлів просторової сітки.

2. Покриваємо відрізок $[0, T]$ сіткою з кроком h_t , позначимо через $\hat{T} = \{t: t = l h_t, l = 1, n\}$ множину вузлів сітки за часовою змінною.

3. Для кожного вузла $x \in \hat{\Pi}$:

а. Обчислюємо $\lambda_i^{(0)}(x), i = \overline{1, N}$ за формулою (8) при значеннях $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$.

б. Обчислюємо значення фазової змінної $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ в кожному вузлі часової сітки $\hat{T}$ за формулою (7) при $\lambda_i = \lambda_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$.

4. Обчислюємо компоненти $(g_{\bar{x}}^{\tau_{\bar{x}}}, \dots, g_{\bar{x}}^{\tau_{\bar{x}_N}}, g_{\bar{x}}, \dots, g_{\bar{x}})$ узагальненого градієнта функції $\bar{\chi}(\xi, \tau)$ в точці $(\tau_{\bar{x}}^{\xi}) = (\tau_{11}^{(0)}, \dots, \tau_{NN}^{(0)}, \xi^{(0)}, \dots, \xi^{(0)})$ при $\lambda(\tau) = \tau^{(0)}, \xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$.

5. Обираємо початковий крок $h_0 > 0$ г-алгоритму і знаходимо

$$\begin{aligned} \xi_{ii}^{(1)} &= \xi^{(0)} - h_0 g_{\bar{x}}^{\xi}(\xi^{(0)}); \\ \tau_{ii}^{(1)} &= Pr_{\Xi_i} \left[\tau^{(0)} - h_0 g_{\bar{x}}^{\tau}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)}) \right], i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

де Pr_{Ξ_i} – оператор проектування на множину Ξ_i .

Здійснюємо перехід на другий крок.

Нехай в результаті обчислень після $k, k=1, 2, \dots$ кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$.

$(k+1)$ -й крок:

6. Для кожного вузла $x \in \hat{\Pi}$:

а. Обчислюємо $\lambda_i^{(k)}(x), i = \overline{1, N}$ за формулою (8) при значеннях $\xi_i = \xi_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}, i = \overline{1, N}$.

б. Обчислюємо значення фазової змінної $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ в кожному вузлі часової сітки $\hat{T}$ за формулою (7) при $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}, i = \overline{1, N}$.

7. Обчислюємо компоненти $(g_{\bar{x}}^{\tau_{\bar{x}}}, \dots, g_{\bar{x}}^{\tau_{\bar{x}_N}}, g_{\bar{x}}, \dots, g_{\bar{x}})$ узагальненого градієнта функції $\bar{\chi}(\xi, \tau)$ в точці $(\tau_{\bar{x}}^{\xi}) = (\tau_{11}^{(k)}, \dots, \tau_{NN}^{(k)}, \xi^{(k)}, \dots, \xi^{(k)})$ при $\lambda(\tau) = \tau^{(k)}, \xi_i = \xi_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}, i = \overline{1, N}$.

8. Здійснюємо $(k+1)$ -й крок г-алгоритму для розв'язання задачі (11), коротка схема якого записується в такий спосіб:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Gamma_{k+1}} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right),$$

де $B_{k+1}^{\xi}, B_{k+1}^{\tau}$ – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E^N , перерахунок яких здійснюється за такими формулами: $B_{k+1}^{\xi} = B_N^{\xi}, B_{k+1}^{\tau} = B_N^{\tau} (I_N - \text{одинична матриця}),$

$$B_{k+1}^{\xi} = B_N^{\xi} \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right), r_k = g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$$B_{k+1}^{\tau} = B_N^{\tau} \left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \bar{r}_k = g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}).$$

$R_{\alpha}(\xi)$ – оператор розтягнення простору в напрямку ξ з коефіцієнтом розтягнення α , матрична форма цього оператора записується в такий спосіб:

$$R_{\alpha}(\xi) = I_N + (\alpha - 1) \xi \xi^T;$$

$g_{\bar{\chi}}^{\xi} = (B_{k+1}^{\xi})^T g^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\bar{\chi}}^{\tau} = (B_{k+1}^{\tau})^T g^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), h_k$ – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови оптимуму функції за знайденим напрямом.

9. Якщо умова

$$\|(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (12)$$

не виконується, то $k := k+1$ і здійснюємо перехід на крок 6, інакше – перехід на крок 10.

10. Покладаємо $\lambda(\chi) = 0$ для кожної точки $\chi \in \hat{\Pi}$, $\xi^* = \xi^{(l)}, \tau^* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій вектор $(\tau^{(l)}, \xi^{(l)})$ задовольняє умову (12) закінчення ітераційного процесу. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціонала $I(\lambda^*(\cdot), \cdot)$ і, для контролю правильності результату, значення функції (11) при таких параметрах: $\xi = \xi^*, \lambda = \lambda^*, \tau = \tau^*.$

Алгоритм описаний.

Зауваження 3. Наведений алгоритм легко адаптувати для розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин підмножин, в яких відсутні обмеження типу (3). При цьому функція (9) не містить доданки з

двоїстими змінними і, отже, не виникає потреби у максимізації вказаної функції за змінними $\xi_i, i \in \overline{1, N}$, здійснюється лише її мінімізація за параметрами τ_i .

Зауваження 4. Для розв'язання задачі мінімізації функції (11) за набором параметрів $\tau \in \Xi$ не обов'язково застосовувати метод проєкції градієнта. До того ж, у випадку, коли $\tau \in \Omega, 1 \leq N$, а множина Ω має складну форму або не є опуклою, проєкцію точки на Ω знайти складно або неможливо. Тоді доцільно ввести штрафну функцію множини Ω :

$$P\mathcal{G}_i = \begin{cases} 0, & \forall \tau_i \in \Omega \\ \infty, & \forall \tau_i \in R^n \setminus \Omega \end{cases}$$

розширити нею цільову функцію (9) і розв'язувати таку задачу безумовної оптимізації:

$$\bar{\chi}(\bar{\xi}, \tau) = \chi(\bar{\xi}, \tau) - SP \sum_{i \in \overline{1, N}} \max(0, (-\xi_{ii})) + (\tau) \rightarrow \max_{\xi \in R^n} \min_{\tau \in R^n} . \quad (13)$$

Аналіз результатів обчислювальних експериментів. Наведений алгоритм реалізований у вигляді програмного модуля, який включено у комплекс програм DOSPP, орієнтований на розв'язання різноманітних динамічних задач оптимального розбиття множин. Роботу запропонованого алгоритму перевірено на багатьох тестових прикладах. Крім того, представлений алгоритм було адаптовано на випадки:

розв'язання динамічної задачі ОРМ з нелінійним функціоналом без інтегральних обмежень із заданими фіксованими параметрами $\tau_i, 1 \leq N$;

розв'язання задачі розбиття за наявності інтегральних обмежень на фазову змінну і/або на керуючу функцію.

Аналіз результатів обчислювальних експериментів проведемо в напрямі виявлення впливу вихідних даних (кількості вузлів інтегрування за часовою та просторовими координатами, виду функції початкових умов $\rho_0(x)$ та функцій $u_{ii}(x; \tau)$) на структуру оптимального розбиття, а також дослідження форми розбиття залежно від вигляду функцій $\xi(x; \tau)$ та $u_{ii}(x; \tau), i \in \overline{1, N}$.

Далі представлені результати розв'язання деяких тестових прикладів. Загальними даними для тестів № 1 – № 6 (табл. 1, 2) є такі параметри задачі (1) – (3): $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$; $T = 3$; $c_{ii}(\tau, x) = \|x - \tau_i\|^2, \forall \tau \in \Omega$, де $\|\cdot\|$ – евклідова метрика, $\tau \in \Omega, 1 \leq N$ – фіксовані. Для чисельного

розв'язання задач множина Ω покривалася сіткою з кроком $h_t = 0.005$, крок за часовою змінною $h_x = 0.015$. Інші параметри задачі для відповідних експериментів, а також отримані оптимальні розв'язки, наведені в табл. 1, 2.

Для перевірки коректності розрахункових формул і роботи алгоритму в якості вихідних даних, тобто функцій $\rho_0(x)$, $\hat{\rho}(x, t)$ та $u_{ii}(x, t; \tau)$, $i = 1, \dots, m$, обирались такі, щоб структуру оптимального розбиття й значення цільового функціонала можна було б передбачити заздалегідь.

У тесті № 1 функція $\hat{\rho}(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (2) на випадок, коли керуюча функція $u_{ii}(x, t; \tau)$ – кусково-постійна за просторовою змінною. Як видно з табл. 1, отримано оптимальне розбиття і майже ненульове значення цільового функціонала. Похибка обчислень обумовлюється дискретизацією множини Ω і наближеним обчисленням подвійного інтеграла за просторовою змінною у функціоналі. Так само виходить і у тесті № 2, хоча похибка обчислення функціонала задачі значно більша. Результати тесту № 3 демонструють можливість апроксимації функції $u_{ii}(x, t; \tau)$ так, щоб відповідний їй розв'язок рівняння (2) був якомога ближчим до функції $\hat{\rho}(x, t)$, яку, в свою чергу, можна інтерпретувати як спільний вплив на множину Ω джерел, розташованих у точках $\sigma_m \in \Omega$, $m = 1, \dots, M$. На рисунку в табл. 1 ці джерела позначені колами, до того ж, чим більшою є інтенсивність джерела Q_m , тим більший радіус кола, що його зазначає. Зазначимо, що лівий верхній кут рисунків відповідає координатам (0,0), вісь Ox_1 направлена донизу, вісь Ox_2 – вправо.

У табл. 2 представлені результати експериментів з розв'язання динамічних задач ОРМ з інтегральними обмеженнями типу (3). У тестах № 4 – 5 функція, середньоквадратичне відхилення фазової змінної від якої мінімізується, має такий вигляд:

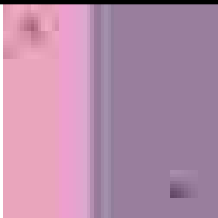
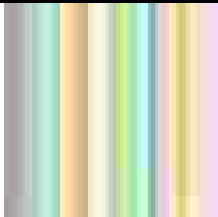
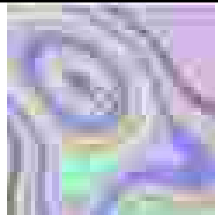
$$\hat{\rho}(x, t) = \begin{cases} 5te^{-10((x_{12}-0.75)^2 + (x - 0.25))}, & -2x_{12}^2 + x \geq 0.3 \\ 5te^{-10((x_{12}-0.3)^2 + (x - 0.7))}, & -2x_{12}^2 + x < 0.3 \end{cases}, \quad (14)$$

а функції $u_{ii}(x, t; \tau)$ відрізняються лише векторами τ_i .

У випадку, коли величини правих частин обмежень нерівностей (3) досить великі – тест № 4, отримано таке оптимальне розбиття, що фазова змінна «майже» збігається з функцією $\hat{\rho}(x, t)$. При зменшенні величин b_1

Таблиця 1.

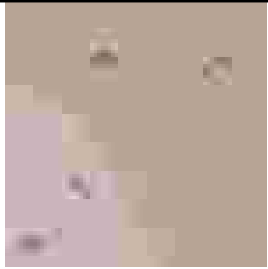
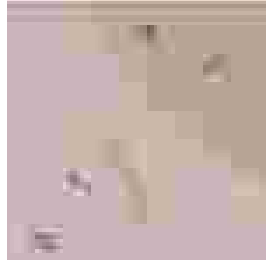
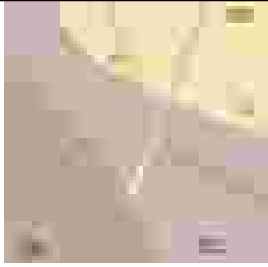
Результати розв'язання тестових динамічних задач ОРМ з квадратичним функціоналом за відсутності інтегральних обмежень на фазову змінну

№ тесту	N; Функції $\rho_0(x)$, $u(x,t; \tau)$, $\hat{\rho}(x,t)$	Оптимальне розбиття / Значення цільового функціонала
1	$N=6; \rho_0(x) = 0; u(x,t; \tau) = a_i,$ $a_1 = 0.14; a_2 = 0.2; a_3 = 0.3;$ $a_4 = 0.4; a_5 = 0.55; a_6 = 0.62;$ $\hat{\rho}(x,t) = \begin{cases} 0.2t, & x_1 \leq 0.4 \\ 0.62t, & x_1 > 0.4 \end{cases}$	 $I^* = 0.00012$
2	$N=20; \rho_0(x) = 0;$ $u(x,t; \tau) = i, \quad i = 1, 20,$ $\hat{\rho}(x,t) = \frac{20}{3} x_1$	 $I^* = 4.4470$
3	$N=20; \rho_0(x) = 3; u(x,t; \tau) = a_i$ $3.4 \leq a_i \leq 9.4, \quad i = 1, 20,$ $\hat{\rho}(x,t) = 2 + e^{-0.8t} \sum_{m \in F} Q_m^{-\gamma_m \ x - \sigma\ ^2}$ $M5; Q(8, 5, 4, 7, 3, 2); \quad \sigma_m - \text{див. рис.}$	 $I^* = 22.1728$

чи b_2 , зменшується підмножина, на якій задається відповідна функція $u(x,t; \tau)$, що відображено на рисунку з тесту № 5.

Таблиця 2.

Результати розв'язання тестових динамічних задач ОРМ з квадратичним функціоналом і інтегральними обмеженнями на фазову змінну

№ тесту	N ; вектор b ; функції $\rho_0(x)$, $u(x,t; \tau)$, $\hat{\rho}(x,t)$	Оптимальне значення па- раметрів ξ	Оптимальне розбиття / Значення функціонала I_1 та функції χ
4	$N=2$; $b_i = 500$, $\rho_0(x) = 0$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (14), $u_i = 5e^{-10\ k - \tau_i\ ^2}$, $\tau_1 = (0.3, 0.7)$, $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	$(0.0004, 0.0036)$	 $\chi^* = 0.059$ $I_1^* = 0.0620$
5	$N=2$; $\rho_0(x) = 0$, $b_{01} = 0.50, b_{02} = 500$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (14), $u_i = 5e^{-10\ k - \tau_i\ ^2}$, $\tau_1 = (0.3, 0.7)$, $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	$(5.228, 2.4E-08)$	 $\chi^* = 2.913$ $I_1^* = 2.914$
6	$N=3$; $\rho_0(x) = 0$; $b_i = 500$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (15), $u_i = 5e^{-10\ k - \tau_i\ ^2}$, $\tau_1 = (0.2, 0.6)$, $\tau_2 = (0.4, 0.2)$, $\tau_3 = (0.9, 0.4)$.	$\xi_1 \approx 1.0E-06$	 $\chi^* = 0.412$ $I_1^* = 0.4199$

Цікавим з точки зору «стійкості» розбиття виявився результат тесту № 6, у якому функція $\hat{\rho}(x,t)$ має такий вигляд:

$$\hat{p}(x,t) = \begin{cases} 5te^{-10((x_{12}-0.2)^2+(x-0.6))}, & -2x_{12}^2 + x \geq 0.3, \\ 5te^{-10((x_{12}-0.4)^2+(x-0.2))}, & -3x_{21}^2 + x < 0.2, \\ 5te^{-10((x_{12}-0.9)^2+(x-0.4))} & \text{для інших } (x_{12}, x), \end{cases}$$

Як можна помітити на рисунку у тесті 6, оптимальне розбиття має зони нестійкості, тобто у підмножинах, що складають розбиття, з'являються деякі вкраплення – множини (майже нульової міри) точок з інших підмножин. Неважко помітити, що зазначені множини є околами границь між клітинками діаграми Вороного, тобто ліній, що описуються рівняннями

$$\|x - \tau_{ij}\|^2 = \|x - \tau\|^2, \quad i \neq j.$$

Можна припустити, що така «нестійкість» оптимального розбиття пов'язана саме з видом функцій $\hat{p}(x,t)$ та $u(x,t; \tau)$ і з обчислювальною похибкою.

Висновки. Отже, в роботі описаний чисельний алгоритм розв'язання динамічної задачі ОРМ з функціоналом, нелінійним за фазовою координатою, в якій функція стану системи, змінюється так, що швидкість її зміни в кожній точці множини Ω залежить від приналежності цієї точки до певної підмножини Ω_i множини Ω . Алгоритм базується на зведенні вихідної нелінійної задачі оптимального розбиття множини до лінійної неперервної задачі ОРМ, яка, в свою чергу, редукується до скінченновимірної задачі максиміну певної негладкої функції. Проведений аналіз результатів розв'язання тестових задач.

Бібліографічні посилання

1. Кісельова О.М. Про зведення однієї нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множин до лінійної неперервної задачі розбиття / О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, О.В. Зайченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д., 2013. – С. 164–173.
2. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.

Надійшла до редколегії 17.02.2014

В.Г. ³Красиленко, Д.В. Нікітович

Вінницький соціально-економічний інститут Університету «Україна»

СУМІЩЕНИЙ ІЗ САМОНАВЧАННЯМ МЕТОД КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ФРАГМЕНТІВ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ СТРУКТУРНО- ТОПОЛОГІЧНИМИ ОЗНАКАМИ ТА ЙОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Запропоновано суміщений із самонавчанням метод кластеризації фрагментів зображень. Для поділу фрагментів використовуються їх структурно-топологічні ознаки та просторово-еквівалентнісіні нелінійні функції. Наведено результати моделювання запропонованого методу. Показано, що метод має хорошу збіжність, є швидкодіючим і легко відображається на матрично-матричні процедури та засоби.

Предлагается совмещенный с самообучением метод кластеризации фрагментов изображений. Для кластерного группирования фрагментов используются их структурно-топологические признаки и пространственно-эквивалентностные нелинейные функции. Наводятся результаты моделирования предложенного метода. Показано, что метод имеет хорошую сходимость, является быстродействующим и легко отображается на матрично-матричные процедуры и средства.

Proposed a method of image fragments cluster grouping. For cluster grouping of fragments used their structural and topological features and spatially ekvivalentnostnye nonlinear functions. Shown simulation results of the proposed method. It is shown that the method has good convergence is fast and easy displayed on the matrix-matrix procedures and tool.

Ключові слова: кластеризація фрагментів зображень, адаптивне самонавчання, просторово-еквівалентнісна нелінійна функція, просторово-інваріантна модель, матрично-матрична процедура.

Вступ, аналіз публікацій та постановка завдань. Важливою складовою при обробці та розпізнаванні цифрових зображень є вибір та виділення текстурно-топологічних ознак. Такі задачі актуальні і характерні для багатьох галузей та сфер, серед яких аналіз зображень різних природних явищ при спостереженні за ними із супутників, кореляційно-екстремальна координатна прив'язка в системах навігації, комп'ютерна діагностика в медицині, розпізнавання та класифікація образів у системах спостереження тощо. Під текстурою розуміють просторову організацію елементів у

межах деякого геометричного фрагмента зображення об'єкта, яка обумовлена визначеним статистичним розподілом інтенсивності елементів – пікселів [1]. У [2] текстуру визначають як матрицю просторових властивостей фрагментів цифрових зображень з однорідними статистичними характеристиками. Топологічні форми зображень теж є просторовим розподілом інтенсивності та характеризуються їх структурно-топологічними ознаками. Виділення структурно-топологічних ознак, наприклад контурів, ліній з різним кутом нахилу, різної товщини, просторово дискретних мікрозображень, подібних до різних геометричних фігур тощо, та їх кластеризація, особливо для процесів автоматичного (без учителя) навчання для подальшого їх застосування при розпізнаванні, є актуальними завданнями. Існують методи кластеризації цілих зображень [3], але не їхніх фрагментів, тим більше з урахуванням їх просторових зміщень.

Тому метою роботи є запропонувати та дослідити паралельний метод кластеризації структурно-топологічних ознак зображень зі суміщеною процедурою адаптивного навчання формування масиву центроїдних ознак.

Основний зміст та результати. Розглянемо метод паралельного навчання для суміщеної з ним кластеризації, що базується на багатопортовій асоціативній пам'яті (АП), за допомогою якої одночасно розраховуються відповідні відстані між всіма кластерними нейронами та всіма навчальними векторами. Нехай є 15 точок, що задані векторами на площині та показані на рис. 1а набором точок 1 – 15, та два кластерних вектора, відображених точками w_0, v_0 . Для кожної точки навчального масиву визначається така кластерна точка (КТ), яка має до неї найменшу відстань. В якості міри близькості ми використовуємо узагальнені нормовані функції еквівалентності (нееквівалентності) [4]. Для визначення нового стану КТ всі навчальні вектори, що стали переможцями для цієї КТ, використовуються для розрахунку їх середнього, що і буде оновленою КТ. Наприклад, точка 8 ближче до КТ w_0 ніж до v_0 . Точка w_1 є знайдене середнє з тих точок, що були переможцями для КТ w_0 . На рис. 1 показана траєкторія зміни координат КТ $w_0 - w_k$, що відповідають кластеру W , та відповідно точок $v_0 - v_3$, відповідних кластеру V . Якщо представляти координати векторів кодами Грея, то, як видно з рис. 1, координати КТ займуть місця, що показані точками WG_k, VG_k . Процедура навчання легко реалізується матрично-матричними процедурами (ММП) з операціями еквівалентності та всього за декілька ітераційних кроків. Для нашого прикладу на рис. 1 процес зміни КТ, тобто навчання, потребує лише 3 – 4 ітерації. Метод дає хорошу збіжність та є швидкодіючим. На рис. 1б показано математичну модель, на основі ММП з нелінійними функціями F_{non} активації, при по -

елементній обробці матриць. Вона демонструє процес навчання, що полягає в обчисленні набору оптимальних КТ при використанні навчальної матриці $\mathbf{TX}$ (набір з $M \cdot N$ -вимірних векторів). Для виставлення міток при кластеризації векторів матриці $\mathbf{TX}$, матриця $\mathbf{TX}$ перемножається на матрицю $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ оптимальних КТ.

Інтерпретація методу на просторово-інваріантний випадок потребує обчислення просторових функцій згорток виду $\mathbf{E}^{mm} = \mathbf{W}^t \mathbf{A}$, де $E_{kl}^{mm} = \frac{1}{n} \text{mean} \left(\text{submatrix}(\mathbf{A}, k, k + r_{00} - 1, l, l + r - 1) - \mathbf{W} \right)$ нелінійної їх обробки за виразом $EN_{kl}^m = G \left(\frac{m}{k_l} \right) = 0.5 \left[1 + (2E_{kl}^m - 1)^a \right]$ та порівняння між собою для визначення, індексування переможців за виразами: $MAX_{kl} = \max_{\text{індекс}} (EN_{kl}^{m=0}, EN_{kl}^{m=1} \dots EN_{kl}^{m=M-1})$ і $EV_{kl}^m = f_{\text{нел}}^{akt} (EN_{kl}^m, MAX_{kl})$. На першому алгоритмічному кроці визначаються всі M матриць

$\mathbf{EV}^{mm} = \mathbf{FF}_{\text{нел}} \left(\mathbf{W}^t \mathbf{A} \right)$, а з урахуванням другого кроку (згортка останніх з матрицею $\mathbf{A}$) модель запропонованого методу матиме вигляд $\mathbf{W}^{mm}(t+1) = \mathbf{FF}_{\text{нел}} \left(\mathbf{FF}_{\text{нел}} \left(\mathbf{W}^t \mathbf{A} \right) \otimes \mathbf{A} \right) \otimes \mathbf{A}$.

На рис. 2 показано результати моделювання процесу формування вагових коефіцієнтів для 8 КВ за перших 4 ітерації (t відповідає номеру ітерації): ліворуч – до і праворуч – після ітерації. Розмір фрагментів був 5×5 пікселів. Аналіз вигляду всіх 8 початкових (до ітерації) матриць $\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}_7$ КВ, всіх 8 сформованих (після чергової ітерації) матриць $\mathbf{W}_{0t} - \mathbf{W}_{7t}$ дозволяє зробити висновок, що всього за 4 ітерації закінчується навчання і формування кластерних векторів, які є центроїдами. Один з кластерних векторів відповідає фрагменту, в якому всі точки є темними («0»), а інший – фрагменту, в якому всі точки є світлими («1»). Інші КВ відображають перепади яскравості з різною кутовою орієнтацією та фрагменти з 3 чи 4 точковими крапками з комплементарною яскравістю. На рис.3 показані результати кластерного поділу фрагментів зображення M_4 на 8 кластерів для розмірності фрагментів рівній (5×5 ел.), на якому: а) – матриця M_4 -зображення (340×610 ел.), просторово зміщені вікна тобто фрагменти (5×5 ел.) якого кластеризувались, б) – всі виділені кластери в різних кольорах та в) – другий виділений кластер $C1$. З урахуванням обмежень інші

кластери у вигляді окремих зображень тут не показано. На рис. 4 показано результати поділу фрагментів того ж зображення M_4 на 8 кластерів, але для розмірності фрагментів рівній 7×7 ел. та для сформованих КВ, процес самонавчання яких показаний на рис. 5. На ньому у вигляді трьох рядів для кожної з трьох ітерацій (першої, п'ятої та сьомої – зверху) показані відповідно у першому, другому та третьому рядках всі 8 початкових (до

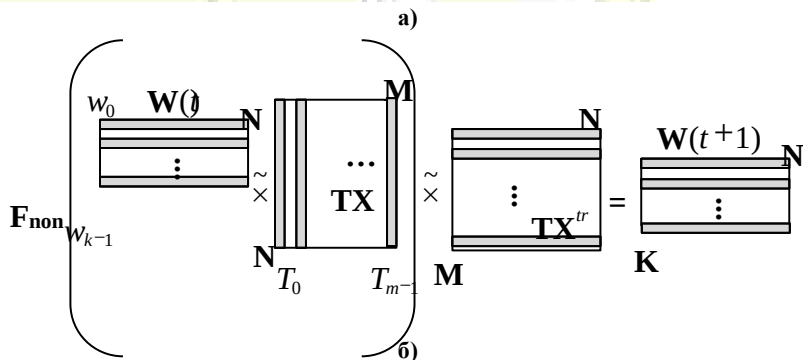
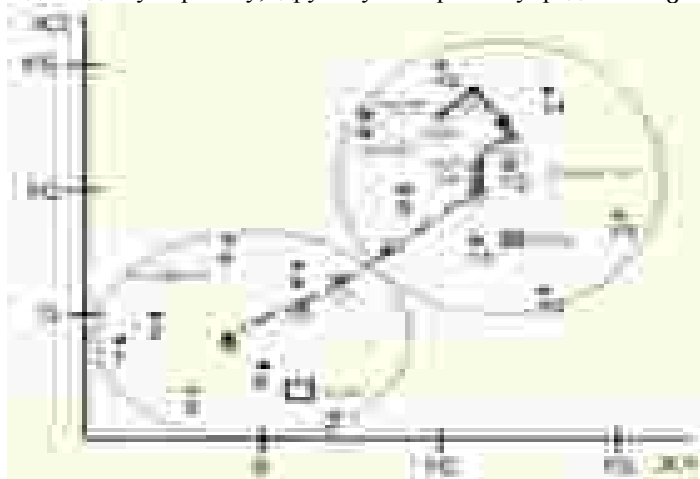


Рис. 1: а) Пояснення принципу навчання неймережевої моделі для пошуку центроїдів кластерних елементів, що базується на багатопортовій АП; б) математична модель ітераційного обчислення вагових коефіцієнтів кластерних векторів (КВ), що використовує ММП з нелінійною обробкою F_{non} для індексації векторів_переможців

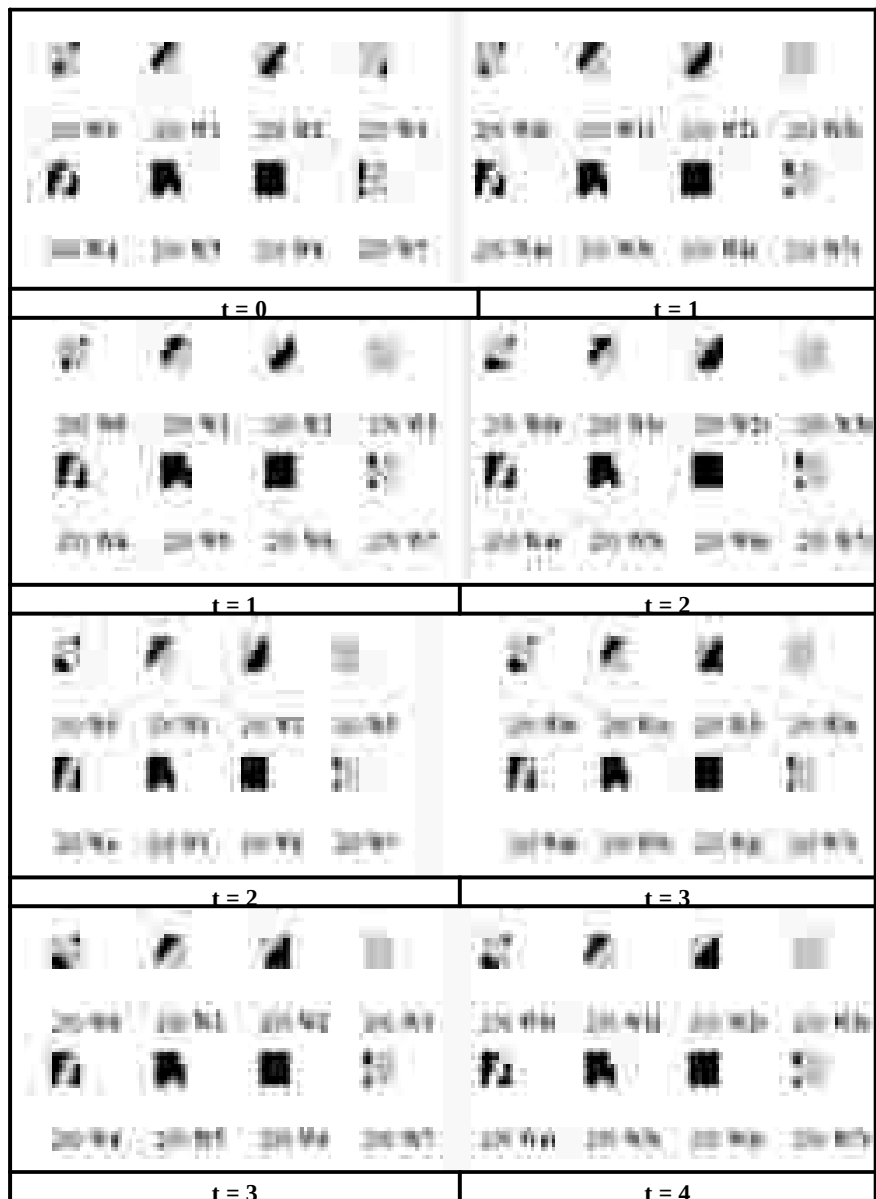


Рис. 2. Результати моделювання процесу формування вагових коефіцієнтів

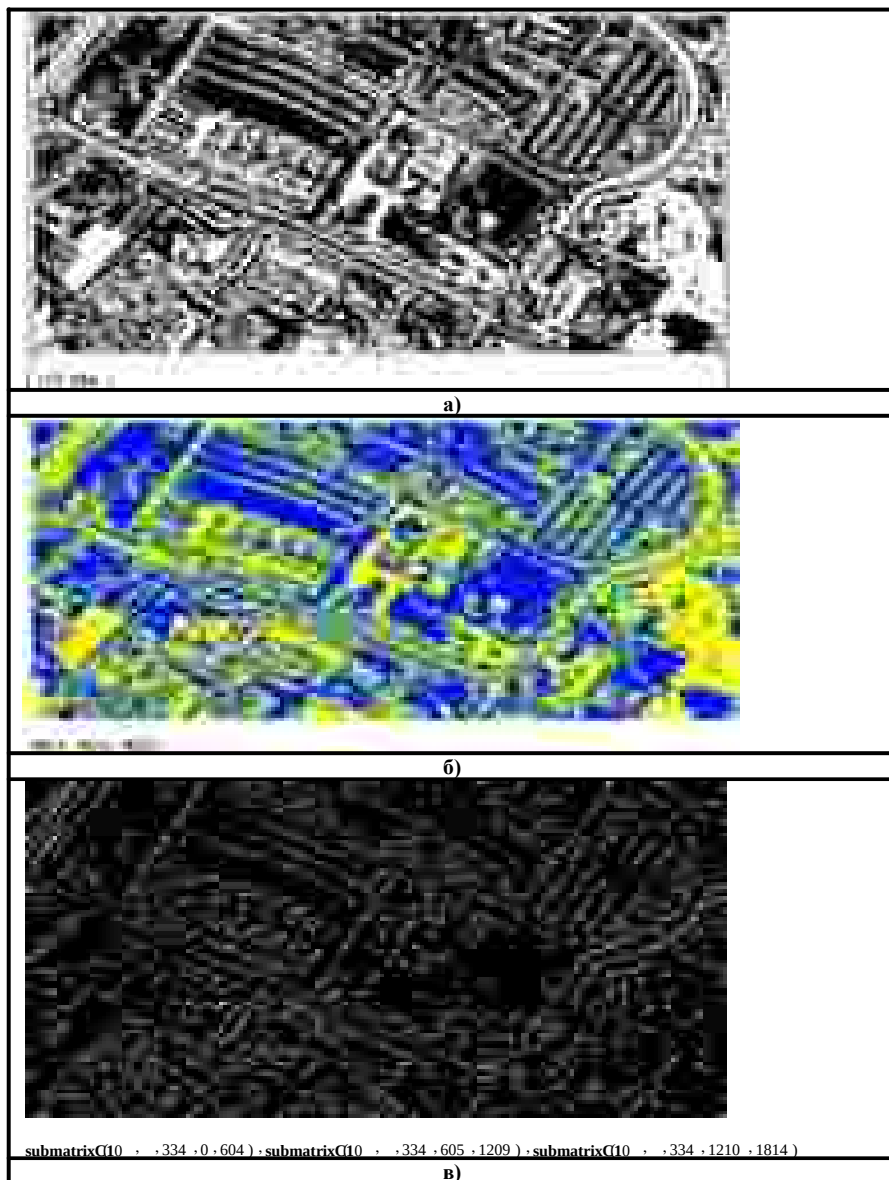


Рис. 3. Результати розбиття зображення на 8 кластерів за схожістю всіх його фрагментів (5*5), що утворюються при просторових зміщеннях

ітерації) матриць $W_0 - W_7$ KB, 8 сформованих (після чергової ітерації) матриць $W_{0t} - W_{7t}$ та 8 різницевих матриць $W_{0R} - W_{7R}$. Останні показують зміни KB при навчанні. На рис. 4 вгорі показані, виділені різними кольорами просторові області зображення M_4 , що мають такі його відповідні

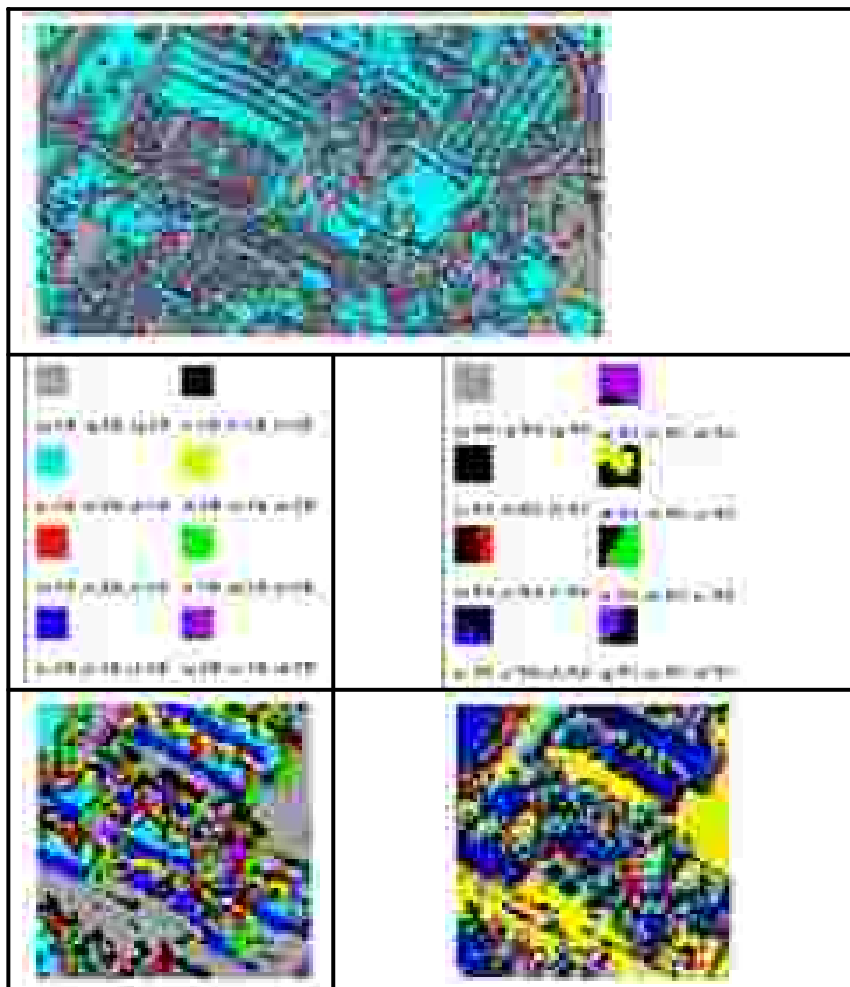


Рис. 4. Результати кластерного поділу зображення на схожі фрагменти (7*7)

фрагменти, які найбільш схожі на відповідний, один з восьми, КВ. Кольори для кластерів та сформовані для них КВ – фрагменти в тій же палітрі показані в середньому ряду. А внизу ліворуч показана при збільшенні одна і та ж частина М4, але при групуванні фрагментів з 7×7 і 5×5 (праворуч) елементів.

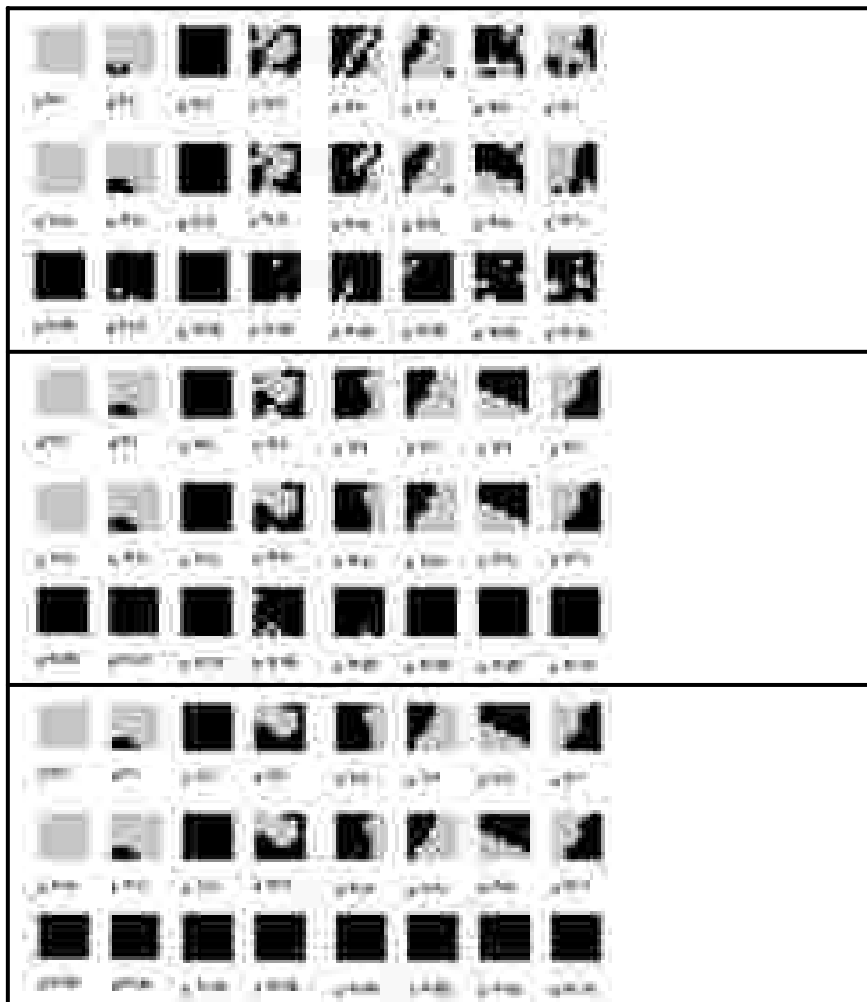


Рис. 5. Моделювання процесу формування КВ (центрів) для розмірності 7×7 ел.

Результати кластерного розбиття за схожістю фрагментів напівтонового (8 біт на піксель) зображення показані на рис. 6 для двох випадків, що відповідають різним розмірам фрагментів, а саме 3×3 та 5×5 пікселів. Вони підтверджують можливість кластеризації запропонованим методом фрагментів за їх структурно-топологічними ознаками не лише бінарних, але й багатоградаційних та кольорових зображень.

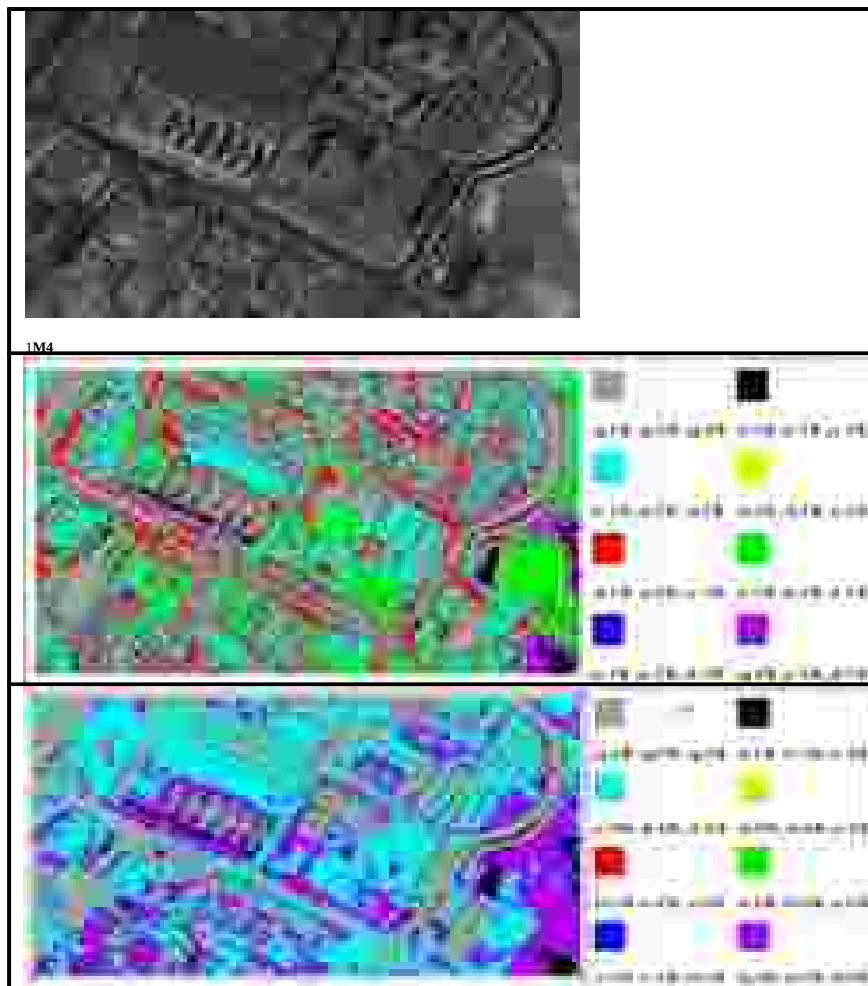


Рис. 6. Результати кластеризації фрагментів напівтонового зображення (вгорі) відповідно для розмірності фрагментів 3×3 (посередині) та 5×5 (внизу)

Висновки. Запропоновано метод кластеризації фрагментів за їх структурно-топологічними ознаками не лише бінарних, але й багатоградаційних та кольорових зображень із суміщеним самонавчанням та формуванням кластерних векторів (центроїд). Побудовано його математична модель та зроблено на її основі алгоритм реалізації. Основою моделі є використання паралельних багатокрокових процедур обчислення просторових нелінійних еквівалентнісних функцій для всіх кластерних векторів. Проведено низку експериментів із використанням програмного середовища Mathcad, наведено результати цих моделювань. Вони показали, що запропонований метод є універсальним, має значну збіжність, малу кількість ітерацій, легко відображається на матрично-матричні структури та підтвердили його перспективність.

Бібліографічні посилання

1. Анализ и синтез случайных пространственных текстур / Г.А. Андреев, О.В. Базарский, А.С. Глауберман и др. // Зарубежная радиоэлектроника. – 1984. – №2. – С. 3–33.
2. Харалик Р.М. Статистический и структурный подходы к описанию текстур / Р.М. Харалик // ТИИЭР. – 1979. – Т.67. – №5. С. 98–118.
3. **Krasilenko V.G.** Using a multi-port architecture of neural-net associative memory based on the equivalency paradigm for parallel cluster image analysis and self-learning / V.G. Krasilenko, A. Lazarev, S. Grabovlyak // Proc. of SPIE, Vol. 8662, (SPIE, Bellingham, WA 2013), 86620S.
4. **Krasilenko V.G.** Application of non-linear correlation functions and equivalence models in advanced neuronets / V.G. Krasilenko, O.K. Kolesnitsky, A.K. Boguhvalsky // Proc. of SPIE, Vol. 3317-32, (SPIE, Bellingham, WA 1997), pp. 211-223.

Надійшла до редколегії 20.12.2013

УДК 681.518.54

Н.А.⁴Лысенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА КОНТРОЛЯ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПОЛИНОМОВ

Запропоновано формування емпіричних вирішальних правил контролю на основі моделей законів розподілу ймовірностей, отриманих з використанням рядів ортонормованих поліномів. Шляхом проведення обчислювальних експериментів отримано оцінки ймовірностей розпізнавання та досліджена їх залежність від об'єму навчальних вибірок вимірювань.

Предлагается формирование эмпирических решающих правил контроля на основе моделей законов распределения вероятностей, полученных с использованием рядов ортонормированных полиномов. Путем проведения вычислительных экспериментов получены оценки вероятностей распознавания и исследована их зависимость от длины обучающих выборок.

The given paper deals with the formation of empirical decision rules of control based on models of probability distribution laws, which are obtained by series of orthonormal polynomials. By realization of computing experiments, estimates of probabilities of recognition are obtained and their dependence on the length of training samples is investigated.

Ключевые слова: ряды ортонормированных полиномов, эмпирические решающие правила контроля, вероятность распознавания.

Введение

В задачах дефектоскопии для построения алгоритмов принятия решений необходимы знания условных законов распределения параметров контролируемых объектов [10]. На практике в лучшем случае могут быть известны выборки измерений для эталонных объектов в состояниях нормы и брака. В такой постановке для решения данной задачи статистическая теория распознавания предлагает формирование решающих правил контроля по выборкам измерений. Пусть, объекты, находящиеся в нормальном состоянии, образуют класс O_1 , а бракованные объекты образуют класс O_2 . Измеряемые признаки являются случайными векторами

$|x_1 x_2 \dots x_m|^T = |x|$ и описываются условными законами распределения:

$$W(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m / O_1) = W(x / O_1),$$

$$W(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m / O_2) = W(x / O_2).$$

Для формирования решающего правила распознавания необходимо записать отношение функций правдоподобия

$$l(x) = \frac{W(x / O_1)}{W(x / O_2)} \quad (1)$$

и сравнить его с порогом $l_0 = P_2 C_{21} / P_1 C_{12}$, где P_1, P_2 – вероятности появления объектов O_1 и O_2 , а C_{12}, C_{21} – стоимости ошибок распознавания. В результате, если $l(x) \geq l_0$, то принять решение «объект O_1 », если $l(x) < l_0$, то принять решение «объект O_2 » [11]. На практике возможность использования этого алгоритма распознавания ограничена, так как в большинстве случаев законы распределения $W(x / O_1)$ и $W(x / O_2)$ неизвестны.

Существуют различные пути решения поставленной задачи. В [3; 4; 8] рассматривается путь оценки логарифма отношения функций правдоподобия на основе метода группового учета аргументов. Также оценку отношения правдоподобия можно получить на основе оценок законов распределения $W^*(x / O_1)$ и $W^*(x / O_2)$. Методам оценивания законов распределения вероятностей по выборкам экспериментальных данных посвящены работы [1; 2; 5; 6; 9; 12].

Одним из методов оценивания законов распределения вероятностей является метод с использованием рядов ортонормированных полиномов [13; 14]. Особенности построения моделей законов распределения на основе рядов ортонормированных полиномов рассмотрены в [9], однако исследований по их применению для формирования решающих правил контроля не проводилось.

Постановка задачи

Пусть, объекты в норме и при наличии брака характеризуются несколькими параметрами $x_1, x_2, \dots, x_m$, которые могут иметь различную физическую природу и размерность. Их условные многомерные законы распределения $W(x / O_1)$ и $W(x / O_2)$ неизвестны, но заданы выборки измерений параметров объектов в норме $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}$ и при наличии

дефектов $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}$. Исходные данные сведены в табл. 1, в качестве примера выбрано $m = 4$.

Таблиця 1

Выборки измерений параметров объектов

Объект O_1				Объект O_2			
Информативные параметры				Информативные параметры			
$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_3^{(1)}$	$x_4^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_3^{(2)}$	$x_4^{(2)}$
$x_{11}^{(1)}$	$x_{21}^{(1)}$	$x_{31}^{(1)}$	$x_{41}^{(1)}$	$x_{11}^{(2)}$	$x_{21}^{(2)}$	$x_{31}^{(2)}$	$x_{41}^{(2)}$
$x_{12}^{(1)}$	$x_{22}^{(1)}$	$x_{32}^{(1)}$	$x_{42}^{(1)}$	$x_{12}^{(2)}$	$x_{22}^{(2)}$	$x_{32}^{(2)}$	$x_{42}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{1n}^{(1)}$	$x_{2n}^{(1)}$	$x_{3n}^{(1)}$	$x_{4n}^{(1)}$	$x_{1n}^{(2)}$	$x_{2n}^{(2)}$	$x_{3n}^{(2)}$	$x_{4n}^{(2)}$

По этим экспериментальным данным необходимо построить эмпирическое решающее правило распознавания на основе моделей законов распределения, сформированных с использованием рядов ортонормированных полиномов. Оценить эффективность полученного решающего правила и сравнить его с оптимальным решающим правилом. Исследовать зависимость эффективности эмпирического решающего правила от длины обучающих выборок.

Метод решения

Рассмотрим алгоритм формирования эмпирических решающих правил с использованием рядов ортонормированных полиномов. Оценка закона распределения вероятностей на основе рядов ортонормированных полиномов имеет вид

$$W^*(x) = A \sum_{i=0}^N b_i^* \sqrt{q(x)} Q_i(x), \quad (2)$$

где $Q_i(x)$ – ортонормированный полином i -го порядка, $q(x)$ – весовая функция, коэффициенты b_i оцениваются по формуле

$$b_i^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{q(x_k)} Q_i(x_k),$$

нормирующий множитель A вычисляется из условия равенства единице площади под кривой $W^*(x)$:

$$A = \left(\sum_{i=0}^N b_i^* q_i \right)^{-1}, \quad q_i = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{q(x)} Q_i(x) dx,$$

количество членов ряда N определяется по правилу «двух нулей»: если для коэффициента b_i^* выполняться неравенство

$$-3\sqrt{D^*[b_i^*]} \leq b_i^* \leq 3\sqrt{D^*[b_i^*]}, \quad (3)$$

то он принимается равным нулю. Каждая оценка b_i^* проверяется «на нуль» в соответствии с правилом (3), а так как структура некоторых рядов предполагает наличие нулевых коэффициентов, то ряд обрывается при обнаружении двух нулей подряд. Таким образом, если коэффициенты b_i^* и b_{i+1}^* удовлетворяют неравенству (3), то число членов ряда следует брать равным $i-1$ (т.е. $N = i-1$).

В зависимости от статистических свойств выборок измерений применяются различные виды ортонормированных полиномов. Так, полиномы Эрмита используются для восстановления симметричных законов распределения типа Гаусса с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Полиномы Эрмита $Q_i(x)$ с весовой функцией

$$q(x) = e^{-x^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

описываются рекуррентной формулой

$$\sqrt{(i+1)2^{i+1}\sqrt{\pi}} Q_{i+1}(x) = 2x\sqrt{i2^i\sqrt{\pi}} Q_i(x) - 2i\sqrt{(i-1)2^{i-1}\sqrt{\pi}} Q_{i-1}(x).$$

Первые три полинома равны:

$$Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Q_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{4\pi}}, \quad Q_2(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}.$$

Полиномы Эрмита рекомендуются для восстановления закона распределения выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$, огибающая гистограммы которой напоминает симметричную колокольную кривую. Для восстановления необходимо определить среднее значение $\bar{x}$, выборочную дисперсию D_x^* и нормировать исходную выборку следующим образом:

$$y_k = \frac{x_k - \bar{x}}{\sqrt{D_x^*}}.$$

При такой нормировке выборка $y_1, y_2, \dots, y_n$ будет иметь близкое к нулю математическое ожидание и почти единичную дисперсию. Оценив закон распределения случайных величин $y_1, y_2, \dots, y_n$ рядом (2), получим

$$W_y^*(y) = A \sum_{i=0}^N b_i^* \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) Q_i(x).$$

Таким образом, восстановленный закон распределения исходной выборки запишется в виде

$$W^*(x/|x|) = W_y^*\left(\frac{x - \bar{x}}{\sqrt{D_x^*}}\right) \frac{1}{\sqrt{D_x^*}}.$$

При восстановлении асимметричных законов распределения вероятностей, похожих на экспоненциальный, применяются полиномы Лагерра

$L^{(0)}_i(x)$ с весовой функцией

$$l(x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Ортонормированные полиномы Лагерра определяются по рекуррентной формуле

$$(i+1)L^{(0)}_{i+1}(x) = (2i+1-x)L^{(0)}_i(x) - i^2(i-1)L^{(0)}_{i-1}(x).$$

Первые три полинома равны:

$$L^{(0)}_0(x) = 1, \quad L^{(0)}_1(x) = 1 - x, \quad L^{(0)}_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2).$$

При восстановлении закона распределения выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ ортонормированными рядами Лагерра $L^{(0)}_i(x)$ необходимо определить среднее значение $\bar{x}$ и нормировать исходную выборку

$$y_k = \frac{x_k}{\bar{x}}.$$

Оценив закон распределения случайных величин $y_1, y_2, \dots, y_n$ рядом (2)

$$W_y^*(y) = A \sum_{i=0}^N b_i^* \exp\left(-\frac{y}{2}\right) L^{(0)}_i(x),$$

запишем восстановленный закон распределения исходной выборки

$$W^*(x/|x|) = W_y^*\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) \frac{1}{\bar{x}}.$$

Для m независимых параметров многомерная модель закона распределения будет иметь вид

$$W^*(x_1, x_2, \dots, x_m / |x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|) = \prod_{i=1}^m W^*(x_i / |x_i|). \quad (4)$$

В отношении (1) будем использовать оценки законов распределения вероятностей (4), полученные на основе ортонормированных полиномов Эрмита или Лагерра, в зависимости от характера экспериментальных данных. Оценка отношения функций правдоподобия запишется в виде

$$l^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{W^*(x_1, x_2, \dots, x_m / |x_1^{(1)}|, |x_2^{(1)}|, \dots, |x_m^{(1)}|)}{W^*(x_1, x_2, \dots, x_m / |x_1^{(2)}|, |x_2^{(2)}|, \dots, |x_m^{(2)}|)}$$

Эмпирическое решающее правило будет иметь вид

$$l^*(x) \geq l_0, \quad (5)$$

где порог выберем из условия неопределенности исходных данных $l_0 = 1$.

Блок-схема алгоритма формирования эмпирических решающих правил распознавания с использованием рядов ортонормированных полиномов представлена на рис. 1.

Эффективность и работоспособность полученных по описанному алгоритму эмпирических решающих правил проверим путем проведения вычислительных экспериментов.

В качестве показателя эффективности выберем вероятности распознавания: P_{11} – вероятность правильного распознавания объектов класса O_1 , P_{22} – вероятность правильного распознавания объектов класса O_2 и P_p – средняя вероятность распознавания

$$P_p = \frac{P_{11} + P_{22}}{2}.$$

Эксперименты предусматривают два режима работы: обучение и проверка. В режиме обучения происходит формирование эмпирического решающего правила непосредственно по имеющимся выборкам измерений в соответствии с вышеописанным алгоритмом, и оптимального решающего правила на основе теоретических законов распределения $W(x/O_1)$ и $W(x/O_2)$. Блок-схема вычислительного эксперимента в режиме обучения представлена на рис. 2.

В режиме проверки генерируются выборки случайных величин, характеризующие объект либо класса O_1 , либо класса O_2 . Эти выборки проходят через сформированные решающие правила и результаты распознавания собираются в блоке оценки эффективности решающих правил.

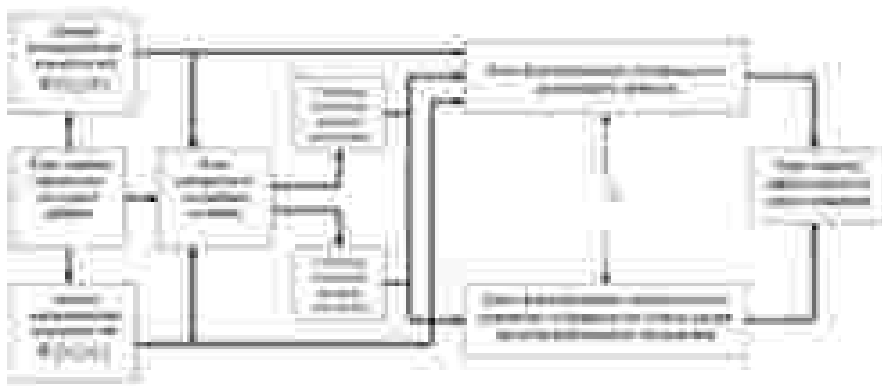


Рис. 2. Блок-схема вычислительного эксперимента (режим обучения)

В соответствии с описанной схемой проведено исследование влияния длины обучающих выборок на эффективность распознавания. Для исследований были сгенерированы выборки четырех параметров: x_1 и x_2 – имеют нормальный закон распределения, x_3 – экспоненциальный закон распределения, x_4 – закон распределения Лапласа.

В эксперименте №1 для оценок законов распределения параметров x_1 , x_2 и x_4 использовались ортонормированные полиномы Эрмита, а для x_3 – ортонормированные полиномы Лагерра; при этом исходные выборки измерений независимые. В результате проведения 1 тыс. опытов оценивались средние значения вероятностей распознавания P_{11} , P_{22} и P_p для обучающих выборок различной длины при длине проверяющих выборок $n_p = 100$. В табл. 2 приведены средние вероятности распознавания и средние значения количества членов ряда, значения отклонения эмпирического решающего правила от оптимального решающего правила в процентах

$$\delta = \frac{(\bar{P}_{opt} - \bar{P}_{эмн})}{\bar{P}_{opt}} 100.$$

На рис. 3 представлены средние значения вероятностей распознавания, полученные при использовании оптимального и эмпирического решающих правил.

В условиях ограниченного объема экспериментальных данных возможны ошибки при выборе вида весовой функции и ортонормированного

полинома, используемых для восстановления условных законов распределения вероятностей информативного параметра.

Таблиця 2

Результаты вычислительного эксперимента №1

Длина выборки $n_{o1} = n_{o2}$	$\bar{P}_{opt\ 11}$	$\bar{P}_{opt\ 22}$	$\bar{P}_{opt}$	$\bar{P}_{эм11}$	$\bar{P}_{эм22}$	$\bar{P}_{эм}$	$\delta, \%$	$\bar{N}$
10	0.939	0.9332	0.936	0.9414	0.8226	0.8822	5.75	0
50	0.9386	0.9332	0.9362	0.8886	0.9246	0.9066	3.16	0.4
100	0.9388	0.9338	0.9362	0.9184	0.9218	0.9204	1.69	0.55



Рис. 3. График зависимостей средних вероятностей распознавания от длины обучающих выборок

В эксперименте №2 исследовались ошибки, возникающие при использовании рассматриваемых эмпирических решающих правил, если неверно выбран вид ортонормированного полинома для одного информативного параметра. Так, для оценки условных законов распределения параметра x_3 были использованы ряды ортонормированных полиномов Эрмита, как и для всех остальных параметров. В табл. 3 представлены средние вероятности распознавания, средние значения количества членов ряда и отклонения δ для различных длин обучающих выборок.

Таблиця 3

Результаты вычислительного эксперимента №2

Длина выборки $n_{o1} = n_{o2}$	$\bar{P}_{opt\ 11}$	$\bar{P}_{opt\ 22}$	$\bar{P}_{opt}$	$\bar{P}_{эм11}$	$\bar{P}_{эм22}$	$\bar{P}_{эм}$	$\delta, \%$	$\bar{N}$
10	0.9388	0.9334	0.9362	0.8908	0.8336	0.8622	7.9	0.15
50	0.9384	0.9338	0.9358	0.8626	0.9264	0.8946	4.4	0.6
100	0.9382	0.9342	0.9362	0.8682	0.9258	0.8962	4.27	1.38

В експерименте №3, отримані оцінки ймовірностей розпізнавання емпіричного рішення правила для випадку, якщо одна пара інформативних параметрів пов'язана коефіцієнтом кореляції (випробки вимірювань x_1 і x_2 коррелювані). Оцінювалися ймовірності розпізнавання P_{11} , P_{22} і P_p для навчальних вибірок різної довжини для різних значень коефіцієнта кореляції r . В табл. 4 наведені середні значення ймовірностей розпізнавання для $r = 0,1; 0,5; 0,9$. В табл. 5 представлені відхилення δ для розглянутих значень коефіцієнта кореляції.

Таблиця 4

Результати вичислювального експерименту №3							
Довжина випробки $n_{o1} = n_{o2}$	$\bar{P}_{opt 11}$	$\bar{P}_{opt 22}$	$\bar{P}_{opt}$	$\bar{P}_{эмп 11}$	$\bar{P}_{эмп 22}$	$\bar{P}_{эмп}$	$\delta, \%$
$r = 0,1$							
10	0.938	0.934	0.936	0.863	0.8944	0.8787	6.12
50	0.9387	0.9335	0.9361	0.914	0.8913	0.9027	3.57
100	0.9388	0.9332	0.936	0.921	0.9173	0.9192	1.8
$r = 0,5$							
10	0.9389	0.9331	0.936	0.861	0.8459	0.8534	8.82
50	0.939	0.933	0.936	0.883	0.8738	0.8784	6.15
100	0.938	0.9344	0.9362	0.888	0.887	0.8875	5.2
$r = 0,9$							
10	0.9386	0.9336	0.9361	0.705	0.695	0.7002	25.19
50	0.9388	0.933	0.9359	0.746	0.751	0.7484	20.03
100	0.9389	0.9331	0.936	0.762	0.758	0.760	18.8

Таблиця 5

Відхилення ефективності емпіричного рішення правила на основі рядів ортонормованих поліномів від оптимального, %

$n_{o1} = n_{o2}$	Без впливу кореляції	З впливом кореляції			
	$r = 0$	$r = 0,1$	$r = 0,5$	$r = 0,9$	
10	5.75	6.12	8.82	25.19	
50	3.16	3.57	6.15	20.03	
100	1.69	1.8	5.2	18.8	

Аналіз отриманих результатів

З аналізу даних табл. 2 випливає, що довжина навчальних вибірок впливає на ефективність емпіричного рішення правила:

чем длиннее выборки, тем выше значения оценок вероятностей распознавания и тем ближе они к оптимальным значениям. На рис. 3 видно, что в условиях коротких обучающих выборок эффективность эмпирического решающего правила заметно снижается (более чем на 5 %).

Из табл. 3 следует вывод об увеличении ошибок распознавания и возрастании количества членов ряда, в случае неверно выбранного вида ортонормированного полинома. А именно: эффективность распознавания эмпирического решающего правила снижается в среднем на 2 %, а количество членов ряда увеличивается в 1,5 – 2,5 раза в зависимости от длины обучающих выборок.

В табл. 4 показано снижение эффективности распознавания эмпирического решающего правила в случае наличия корреляции между информативными параметрами. Из табл. 5 видно, что в условиях сильной коррелированности исходных выборок решающее правило на основе рядов ортонормированных полиномов сильно уступает по эффективности оптимальному решающему правилу, в среднем на 20 %.

Выводы

В ходе вычислительных экспериментов исследованы эмпирические решающие правила контроля, сформированные на основе рядов ортонормированных полиномов. Обнаружены особенности их практического применения в условиях коротких обучающих выборок и при наличии корреляционных связей между информативными параметрами. В результате сделаны следующие выводы:

- эмпирические решающие правила контроля, сформированные с использованием моделей законов распределения на основе рядов ортонормированных полиномов обеспечивают эффективное распознавание объектов контроля, уступая оптимальному решающему правилу от 1,69 % до 5,75 % в зависимости от длины обучающих выборок;

- если в многомерном эмпирическом решающем правиле ($m = 4$) для одного информативного параметра вид весовой функции и ортонормированного полинома будет выбран неверно, то длина ряда вырастет в 1,5 – 2,5 раза в зависимости от длины обучающих выборок и ошибки распознавания увеличится в среднем на 2 %;

- если в многомерном эмпирическом решающем правиле ($m = 4$) между двумя информативными параметрами будет корреляционная связь, то эффективность распознавания снизится в среднем от 3,8 % до 21 % в зависимости от значения коэффициента корреляции.

Рассмотренный алгоритм формирования эмпирических решающих правил может обеспечивать высокую эффективность распознавания, однако для использования его в системах контроля необходима разработка дополнительных практических рекомендаций. В данной работе определе-

на зависимость вероятности распознавания от длины обучающих выборок и получена оценка снижения эффективности при ошибочном выборе вида ортонормированного полинома и при наличии взаимной корреляции информативных параметров. Данный метод формирования эмпирических решающих правил контроля требует проведения дальнейших исследований.

Бібліографічні посилання

1. **Вапник В.Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В.Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 449 с.
2. **Деврой Л.** Непараметрическое оценивание плотности / Л. Деврой, Л. Дёрфи. – М. : Мир, 1988. – 408 с.
3. **Ивахненко А.Г.** Метод группового учета аргументов в задачах прогнозирования / А.Г. Ивахненко. – К., 1976. – 24 с.
4. **Ивахненко А.Г.** Самообучающиеся системы распознавания и автоматического регулирования / А.Г. Ивахненко. – К. : Техника, 1969. – 392 с.
5. **Лысенко Н.А.** Восстановление двумерных плотностей распределения вероятностей рядами сглаженных дельта-функций // Системні технології : регіон міжвуз. зб. наук. пр. – 2003. – Вип. 5 (28) – С. 127–135.
6. **Лысенко Н.А.** Восстановление законов распределения вероятностей рядами сглаженных дельта-функций / Н.А. Лысенко, В.П. Малайчук // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – 2003. – Т. 7. – С. 61–74.
7. **Лысенко Н.А.** Сравнительная оценка эффективности эмпирических решающих правил неразрушающего контроля / Н.А. Лысенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Ракетно-космічна техніка. – Вип. 8. – Д. : ДНУ. – 2004. – С. 66–75.
8. **Лысенко Н.А.** Формирование решающих правил неразрушающего контроля на основе метода группового учета аргументов / Н.А. Лысенко // Космічна наука і технологія. – 2005. – Т. 11, №1. – С. 77–81.
9. **Малайчук В.П.** Восстановление законов распределения вероятностей рядами ортонормированных полиномов / В.П. Малайчук, А.Н. Петренко, Н.А. Лысенко // Системні технології : регіон міжвуз. зб. наук. пр. – 2005. – Вип. 3 (38) – С. 73–88.
10. **Малайчук В. П.** Математическая дефектоскопия : моногр. / В. П. Малайчук, А. В. Мозговой. – Д. : Систем. технологии, 2005. – 180 с.
11. **Малайчук В. П.** Статистична теорія оцінювання: навч. посіб. / В. П. Малайчук, Н.О. Лисенко. – Д. : РВВ ДНУ, 2009. – 84 с.
12. **Надарая Э.А.** Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии / Э. А. Надарая. – Тбилиси : Изд.во ТГУ, 1983. – 194 с.
13. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены Г. Сегё – М. : Физматлит, 1962. – 500 с.
14. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Наука, 1976. – 328 с.

Надійшла до редколегії 21.11.2013

УДК 519.8

М.П. ⁵Пасинков, В.А. Турчина

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО МЕТОДИ РОЗСТАНОВКИ ПРІОРИТЕТІВ ВЕРШИН ГРАФА ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ПАРАЛЕЛЬНОГО ВПОРЯДКУВАННЯ

Розглянуто застосування деяких відомих алгоритмів до задачі паралельного упорядкування вершин графа.

Separate algorithms for construction of parallel graph vertices ordering are considered.

Рассмотрено применения некоторых известных алгоритмов к задаче параллельного упорядочения вершин графа.

Ключові слова: паралельне упорядкування, граф, розстановка пріоритетів.

Задача паралельного впорядкування вершин графа є актуальною в умовах сучасного виробництва, де широкого розповсюдження набувають автоматизовані системи, що керують багатозадачними конвеєрами, оперують багатопроцесорними обчислювальними комплексами з різноманітним складом периферійного устаткування, та процеси, засновані на мережевих графіках.

Постановки задач паралельного впорядкування.

Нехай граф G , що досліджується, має таку структуру : ациклічний і без транзитивних дуг. Тоді наведемо відомі визначення [1].

Визначення 1. Лінійним упорядкуванням S кінцевої множини V , що складається з n елементів, називається розміщення елементів множини S по n місцях, розташованих у лінію так, що кожен елемент знаходиться тільки на одному місці.

Визначення 2. Довжиною l упорядкування S називається число непорожніх місць в упорядкуванні.

Визначення 3. Шириною h упорядкування S називається величина

$$h(S) = \max_i |S[i]|, \quad i = \overline{1, n},$$

де $S[i]$ – множина елементів, що знаходяться в упорядкуванні S на місці i .

Визначення 4. Паралельним упорядкуванням вершин оргграфа $G = (V, U)$ називається таке лінійне упорядкування його вершин, при якому

$$\forall (i, j) \in U: i \in S[p], j \in S[q] \Rightarrow p < q.$$

Задача 1. По заданому графу G і значенню параметра h побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини. Таке упорядкування назовемо оптимальним. Цю задачу позначимо як $S(G, h, l)$.

Щільним назовемо упорядкування, у якому

$$|S| = h \cdot \overline{(l-1)}.$$

У класі задач теорії розкладів велика увага приділяється задачам, у яких одним із заданих параметрів є директивний термін.

Нехай завдання із множини $V = \{1, \dots, n\}$ обслуговуються h паралельними ідентичними приладами. Не втрачаючи загальності, вважатимемо тривалість обслуговування всіх завдань однаковими. Для кожного завдання $i \in V$ задано директивний термін (до якого необхідно завершити його обслуговування).

Заборонено переривання в обслуговуванні завдань. На множині V задане відношення часткового порядку, що визначає деякі обмеження на послідовність обслуговування завдань.

Задача 2. По заданому графу $G(V, U)$, значенню параметра h та вектору директивних термінів $D(d_i)$ побудувати паралельне впорядкування найменшої довжини, в якому виконуються умови задачі $S(G, h, l)$ а також додаткова умова

$$\forall i \in V: i \in S[p] \Rightarrow p \leq d_i.$$

Позначимо цю задачу через $S(G, D, h, l)$.

Задача 3. Нехай час виконання кожного із завдань t_i , взагалі кажучи, є різним. Розглянемо задачу $S(G, h, l)$. Терміни виконання позначимо через вектор $B(b_i)$, в якому кожен елемент b_i відповідає часу виконання завдання i . Побудувати паралельне впорядкування мінімальної довжини. Задачу позначимо через $S(G, B, h, l)$.

Задача 4. Нехай разом з умовами задачі 3 кожному із завдань поставлено у відповідність директивний термін. Побудувати паралельне впорядкування

мінімальної довжини таке, що директивні терміни не порушуються. Задачу позначимо через $S(G, B, D, h, l)$.

Задача 5. Введемо додаткові узагальнюючі параметри. Нехай кожне завдання на кожному з ресурсів має різний час виконання. Введемо до параметрів задачі матрицю часу виконання $C(c_{ij})$, в якій кожний елемент є час виконання i -ї роботи на j -му ресурсі. Необхідно побудувати паралельне впорядкування мінімальної довжини і рівним доступом до ресурсів всіх незалежних процесів. Позначимо задачу як $S(G, C, h, l)$.

Алгоритми розстановки пріоритетів завдань

Розглянемо алгоритм першого найближчого директивного терміну (Earliest deadline first scheduling, EDF)[2], що входить до групи алгоритмів побудови розкладів та упорядкувань за динамічним списком пріоритетів для задачі $S(G, D, h, l)$.

Ця задача може бути зведена до задачі $S(G, l, h)$ для визначення директивних термінів завдань при відомій довжині впорядкування та мінімізованій кількості виробничих ресурсів.

Алгоритм для поставленої задачі:

1. Нехай поточний час $\tau = 0$.
2. Кожній вершині з множини V призначити пріоритет 0.
3. З множини V вибрати підмножину V' завдань таку, що

$$\forall i \in V, \forall j \in V' \Rightarrow (i, j) \in U,$$

де U множина дуг графа G .

4. Кожній вершині $j \in V'$ обчислити пріоритет за формулою

$$p_j = \frac{1}{\max(d_j - \tau, 1)}.$$

5. Вибрати серед вершин з ненульовим пріоритетом h вершин, що мають найбільший пріоритет і поставити їх на поточне місце в упорядкуванні. За наявності кількох вершин з однаковими пріоритетами додати до впорядкування вершину з меншим номером.
6. Виключити занесені в упорядкування вершини з множини V , виключити з множини U всі дуги, що виходять з внесених до упорядкування вершин.
7. $\tau = \tau + 1$.

8. Якщо $|V| \neq 0$, перейти на крок 3, інакше кінець виконання.

Розглянемо приклад застосування алгоритму.

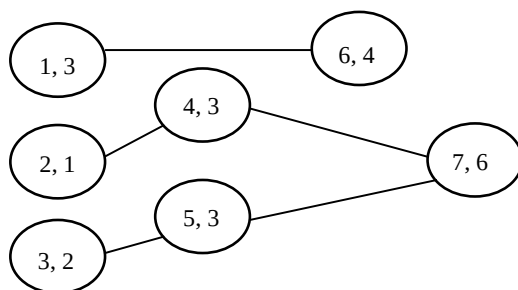


Рис. 1. Граф до прикладу алгоритму EDF. Текст у кожній з вершин: номер вершини, директивний термін

$\tau = 0$. Заносимо до множини V' вершини 1, 2, 3. Пріоритети $p_1 = \frac{11}{32}, p_2 = 1, p_3 = -$. На перше місце в упорядкуванні вибираємо вершини 2 і 3. Виключаємо з множини U дуги (2,4) та (3,5).

$\tau = 1$. Оновлюємо множину V' , додавши до неї вершини 4 та 5. Обчислюємо пріоритети $p_1 = \frac{1}{2}, p_4 = \frac{1}{2}, p_5 = \frac{1}{2}$. Заносимо до упорядкування вершини 1 та 4. Видаляємо з множини U дуги (1, 6) та (4, 7).

$\tau = 2$. Додаємо до множини V' вершину 6. У множині V' всього дві вершини. Заносимо їх до впорядкування без обчислення пріоритетів.

$\tau = 3$. У множині V залишається лише одна не внесена до впорядкування вершина, яку і вносимо на останнє місце в упорядкуванні.

Результуюче паралельне впорядкування буде виглядати так:

2	1	6	7
3	4	5	

Необхідною умовою наявності розв'язку задачі при застосуванні даного алгоритму є

$$\sum_i \frac{1}{d_i - \text{deep}(i)} \leq \text{floor} \left(\frac{|V|}{h} \right),$$

де h – кількість наявних ресурсів, $\text{deep}(i)$ – довжина найбільшого шляху в графі G до вершини i серед усіх вершин, що передують їй, $\text{floor}(a)$ – найменше ціле число, що не менше a .

У розглянутому прикладі 3,42 менше за 4.

Розглянемо алгоритм першої найменшої «слабкості» (Least Laxity First, LLF) [5] для задачі $S(G, B, D, h, l)$.

1. Нехай поточний час $\tau = 0$.
2. Кожній вершині з множини V задамо пріоритет 0.
3. З множини V вибрати підмножину V' завдань таку, що

$$\forall i \in V', \forall j \in V' \Rightarrow (i, j) \in U,$$

де U – множина дуг графа G .

4. Кожному завданню i , яке виконується в даний момент часу τ , покласти найвищий пріоритет $(+\infty)$.
5. Кожному завданню $j \in V'$ присвоїти пріоритет за формулою

$$p_j = \frac{1}{\max(d_{t_j} - \tau, 1)}.$$

6. Якщо наявні ресурси, на яких в даний момент не виконується завдання, вибрати з множини V' завдання з найбільшим пріоритетом. Якщо наявні декілька завдань з однаковим пріоритетом, вибрати з множини таких завдань таке, в якого величина $d_{t_j} - \tau$ є найменшою. При рівності величини для кількох завдань вибрати завдання з найменшим директивним терміном. При рівності директивних термінів вибрати будь-яке із завдань.
7. Вибрані завдання поставити на виконання і виключити із множин V та V' . З множини U виключити всі дуги, що виходять із даних вершин.
8. Занести на місце τ в упорядкуванні номери завдань, що виконуються в даний момент часу.
9. $\tau \leftarrow \tau + 1$.

10. Якщо множина V або V' не пуста, перейти на крок 3, інакше кінець.

Розглянемо приклад застосування алгоритму.

$\tau = 0$. Заносимо до множини V' вершини 1, 2, 3. Пріоритети $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = \frac{1}{2}$. На перше місце в упорядкуванні вибираємо вершини 1 і 2. Виключаємо з множини U дуги (2,4) та (1,6).

$\tau = 1$. Продовжується виконання завдань 1 та 2, вільних потужностей немає.

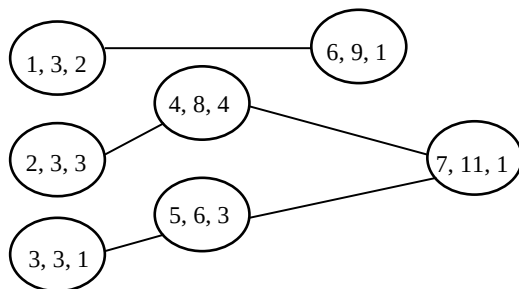


Рис. 2. Граф до прикладу алгоритму LLF. Текст у кожній з вершин: номер вершини, директивний термін, час виконання

$\tau = 2$. Оновлюємо множину V' , додавши до неї вершину 6. Обчислюємо пріоритети $p_6 = 1$. Заносимо до упорядкування вершину 3, оскільки для неї величина $dt_{ij} - \tau$ є меншою. Виключаємо з множини U дугу (3,5).

$\tau = 3$. Оновлюємо множину V' , додавши до неї вершини 4 та 5. Обчислюємо пріоритети $p_4 = 1, p_5 = 1, p_6 = \frac{1}{5}$. Заносимо до упорядкування вершини 4 та 5. Виключаємо з множини U дуги (4,7) та (5,7).

$\tau = 4$. Оновлюємо множину V' , додавши до неї вершини 4 та 5. Обчислюємо пріоритети $p_4 = 1, p_5 = 1, p_6 = \frac{1}{5}$. Заносимо до упорядкування вершину 3, оскільки для неї величина $dt_{ij} - \tau$ є меншою.

$\tau = 5$, 6. Вільні місця в упорядкуванні відсутні. Виконуються завдання 4 та 5.

$\tau = 7$. Кінець виконання завдання 5. Обчислюємо пріоритети:

$p_j = \frac{1}{t_j}$. Заносимо до впорядкування завдання 6.

$\tau = 8$. Кінець виконання завдань 4 та 6. На виконання ставиться завдання 7.

Побудоване впорядкування виглядає так:

1	1	3	4	4	4	4	7
2	2	2	5	5	5	6	

Необхідною умовою застосування підходу є неперервність виконання завдань.

Розглянемо рейтингово-монотонний метод (rate-monotonic scheduling, RMS) [4] зі статичним розподілом пріоритетів для задачі $S(G, B, h, l)$.

1. Нехай поточний час $\tau = 0$.

2. Кожній вершині з множини V призначити пріоритет $\frac{1}{t_i}$.

3. З множини V вибрати підмножину V' завдань таку, що

$$\forall i \in V, \forall j \in V' \Rightarrow (i, j) \notin U,$$

де U множина дуг графа G .

4. Якщо наявні ресурси, на яких в даний момент не виконується завдання, вибрати з множини V' завдання з найбільшим пріоритетом. Якщо наявні декілька завдань з однаковим пріоритетом, вибрати будь-яке з цих завдань.

5. $\tau = \tau + 1$.

6. Якщо множина V або V' не пуста, перейти на крок 3, інакше кінець.

Розглянемо алгоритм на прикладі.

Обчислимо пріоритети для завдань $p_1 = \frac{11}{32}, p_2 = 1, p_3 = -$,
 $p_4 = \frac{1}{3}, p_5 = \frac{1}{3}, p_6 = \frac{1}{4}, p_7 = \frac{1}{3}$.

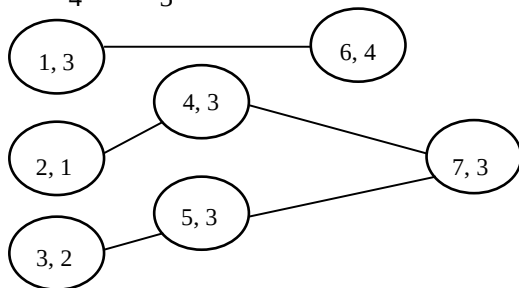


Рис. 3. Граф до прикладу алгоритму RMS. Текст в кожній з вершин: номер вершини, термін виконання

Обчислимо пріоритети для завдань $p_1 = \frac{11}{32}, p_2 = 1, p_3 = -$,
 $p_4 = \frac{1}{3}, p_5 = \frac{1}{3}, p_6 = \frac{1}{4}, p_7 = \frac{1}{3}$.

$\tau = 0$. Заносимо до множини V' вершини 1, 2, 3. Ставимо на виконання завдання 2 та 3. Виключаємо з множини U дуги (2,4) та (3,5).

$\tau = 1$. Заносимо до множини V' вершину 4. Ставимо на виконання завдання 1. Виключаємо з множини U дугу (1,6).

$\tau = 2$. Заносимо до множини V' вершину 5. Ставимо на виконання завдання 4. Виключаємо з множини U дугу (4,7).

$\tau = 4$. Заносимо до множини V' вершину 6. Ставимо на виконання завдання 5. Виключаємо з множини U дугу (5,7).

$\tau = 5$. Ставимо на виконання завдання 6.

$\tau = 7$. Ставимо на виконання завдання 7.

Результуюче впорядкування виглядає так:

2	1	1	1	5	5	5	7	7	7
3	3	4	4	4	6	6	6	6	

Для одночасного просування по всіх ланцюжках завдань, наявних у графі, в останньому алгоритмі може бути застосована стратегія чесного виділення ресурсів (fair-share scheduling) [3]. Тоді пріоритети визначаються за формулою

$$p_i = \frac{1}{b_i * (depth_i + 1)}.$$

Розглянемо також алгоритм найпершого часу закінчення (Heterogeneous Earliest Finish Time)[6] для задачі $S(G, C, h, l)$.

1. Нехай поточний час $\tau = 0$.
2. Обчислити пріоритет для кожного завдання $i \in V$ за формулою

$$p_i = \frac{1}{c_i} \max_{j \in succ(i)} (p_j),$$

де c_i – середній час виконання задачі серед наявних ресурсів (обчислюється як середньозважене значення часу виконання даної задачі серед усіх ресурсів), $succ(i)$ – множина завдань, що безпосередньо залежать від виконання i -го завдання. Пріоритет i -го завдання таким чином залежить від пріоритетів всіх завдань, що постають за ним. Зміна методу обчислення середнього часу виконання може вплинути на результат роботи алгоритму. Обчислення починає з вершин, які не мають вихідних дуг.

3. Із множини V вибрати підмножину V' завдань таку, що

$$\forall i \in V, \forall j \in V' \Rightarrow (i, j) \in U,$$

де U множина дуг графа G .

4. Якщо наявні ресурси, на яких в даний момент не виконується завдання, вибрати з множини V' завдання з найбільшим пріоритетом. Якщо наявні декілька завдань з однаковим пріоритетом, вибрати будь-яке з цих завдань.
5. $\tau = \tau + t_i$.
6. Якщо множина V або V' не пуста, перейти на крок 3, інакше кінець.

Розглянемо приклад використання алгоритму.

Задамо матрицю часу виконання

	1	2	3	4	5	6	7
P1	2	1	3	4	3	2	5
P2	4	1	1	2	3	6	1

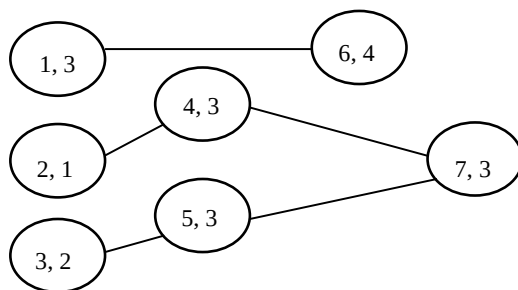


Рис. 4. Граф до прикладу використання алгоритму Heterogeneous Earliest Finish Time. Текст у кожній з вершин: номер вершини, середній термін виконання, обчислений як математичне сподівання при рівновірогідному виборі

Обчислимо пріоритети завдань, починаючи з тих, яким відповідають вершини в графі без вихідних дуг.

Для вершини 6 таким чином пріоритет встановлюється на рівні 4, для вершини 7 – на рівні 3.

Далі розглядаємо вершини, що передують розглянутим. Пріоритет для 1 встановлюється на рівні 7, пріоритети вершин 4 та 5 – по 6 відповідно.

Пріоритет вершини 2 встановлюється на рівні 7. Для вершини 3 – на рівні 8.

Побудова паралельного впорядкування відбувається аналогічно вже розглянутим процедурам.

Висновки. Розглянуто чотири алгоритми, які природним чином можуть бути застосовані до задач паралельного впорядкування вершин графа. Напрями подальших досліджень полягають у комбінуванні алгоритмів і виробленні підходів до формування пріоритетів, виходячи із структурних особливостей графа. Підходи формуються із застосуванням

комбінацій наведених підходів і врахуванням експериментальних даних із подальшим доведенням ефективності.

Бібліографічні посилання

1. **Бурдюк В.Я.** Алгоритмы параллельного упорядочения / В.Я. Бурдюк, В.А. Турчина. – Д. : ДГУ, 1985. – 84 с.
2. **Chetto H.** Some Results of the Earliest Deadline Scheduling Algorithm / H. Chetto, M. Chetto // IEEE Transactions on Software Engineering. – Vol. 15, № 10. – Pp. 1261-1269, Oct. 1989, doi:10.1109/TSE.1989.559777.
3. **Kay J.** (1988). A fair share scheduler / J. Kay, P. Lauder // Communications of the ACM, 31(1), 44-55.
4. **Lehoczky J.** (1989, December). The rate monotonic scheduling algorithm: Exact characterization and average case behavior / J. Lehoczky, L. Sha, Y. Ding // In Real Time Systems Symposium, 1989., Proceedings. (pp. 166-171). IEEE.
5. Real-time scheduling on multithreaded processors / J. Kreuzinger, A. Schulz, M. Pfeffer, T. Ungerer, U. Brinkschulte, C. Krakowski (2000) // In Real-Time Computing Systems and Applications, 2000. Proceedings. Seventh International Conference on (pp. 155-159). IEEE.
6. **Topcuoglu H.** Task scheduling algorithms for heterogeneous processors / H. Topcuoglu, S. Hariri, M.-Y. Wu // Proc. Heterogeneous Computing Workshop, 1999.

Надійшла до редколегії 03.06.2014

О.В. Санто, І.С. Тонкошкур

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЙ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ПОВЕРХНІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Розглянуто задачу про сумісну течію двох взаємно нерозчинних рідких плівок і газу в прямокутному каналі під дією сили тяжіння. За допомогою методу малих збурень одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки вздовж поверхні пластини.

Рассмотрена задача о совместном течении двух взаимно нерастворимых жидких пленок в прямоугольном канале под действием силы тяжести. С помощью метода малых возмущений получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности пластины.

The problem about cooperative courses of two insoluble liquid films in rectangular channel under gravity force was considered. Using method of the small perturbations was received approximate equations' solution of liquid film's dynamic on the surface plate.

Ключові слова: двошарова рідка плівка, газовий потік, метод малого параметра, прямокутний канал.

Вступ. Плівкові течії рідин широко застосовуються в різних технологічних процесах і апаратах, зокрема в хімічних реакторах. Важливою вимогою до цих апаратів є організація течії рідкої плівки таким чином, щоб всі її шари мали певну швидкість відносно нерухомої стінки. Одним зі способів організації такої течії є рух плівки робочої рідини не по поверхні твердої стінки, а по плівці допоміжної рідини, що «змащує» тверду стінку.

Дослідження течій двошарових плівок проводилися в роботах [2–4]. У [2; 3] розглядалися плівкові течії у вузьких щілинах без газового потоку, в [4] – течії на пластині із зустрічним потоком газу, дія якого враховувалася наближено (за допомогою задання дотичного напруження на поверхні розділу «рідина – газ»). У даній роботі пропонується методика наближеного розрахунку трьохфазної течії двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі.

Постановка задачі. Розглядається задача про стаціонарну сумісну течію двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі поперечного розміру $2r$. По обох внутрішніх стінках каналу стікають рідкі плівки. Припускається, що плівки є нерозчинними одна в другій, а хімічні реакції відсутні. На плівки діє сила тяжіння, а також газовий потік усередині каналу, направлений вверх або вниз. Вісь x направлена вертикально вниз, y – в поперечному напрямку.

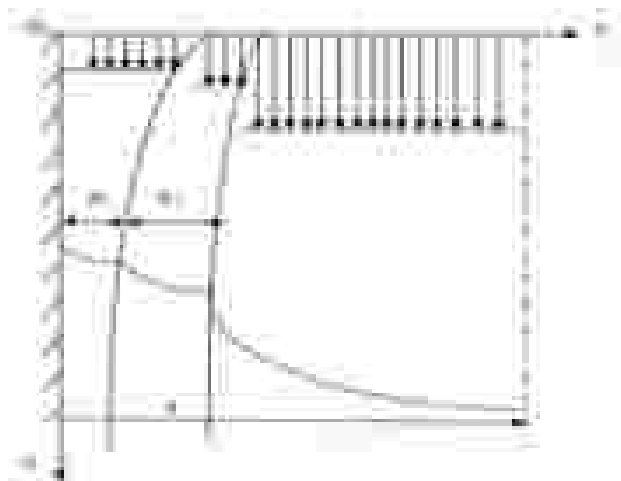


Рис. 1. Схема трифазної течії

Для опису течії рідких плівок застосовується модель в'язкої рідини, яка базується на рівняннях Нав'є-Стокса, нерозривності і макроскопічного балансу:

для рідких плівок

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \nu_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \right) + g, \\ u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} + \nu_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} u_1 dy = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_1+h_2} u_2 dy = 0.$$

для газової фази

$$u_G \frac{\partial u_G}{\partial x} + v_G \frac{\partial u_G}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_G} \frac{\partial p_G}{\partial x} + v_G \left(\frac{\partial^2 u_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$u_G \frac{\partial v_G}{\partial x} + v_G \frac{\partial v_G}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_G} \frac{\partial p_G}{\partial y} + v_G \left(\frac{\partial^2 v_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_G}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u_G}{\partial x} + \frac{\partial v_G}{\partial y} = 0,$$

де u і v – компоненти вектора швидкості, p – тиск, ρ – густина рідини, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, h_1, h_2 – товщини першої і другої плівок відповідно, g – прискорення вільного падіння, $i=1, 2$ (індекси 1, 2 відповідають номеру рідкої плівки, G – газу).

На поверхнях розділу ставляться такі крайові умови:

- 1) на поверхні твердого тіла (при $y=0$) – умова «прилипання»

$$u = v = 0, \quad (3)$$

- 2) на міжфазній поверхні «рідина – рідина» (при $y=h_1$) – умови рівноваги сил і неперервності швидкостей

$$p_{n_1} = p_{\sigma_1} + p_{n_2}, \quad p_{\tau_1} = p_{\tau_2}, \quad u_{n_1} = u_{n_2}, \quad u_{\tau_1} = u_{\tau_2}, \quad (4)$$

- 3) на міжфазній поверхні «рідина – газ» (при $y=h_1+h_2$)

$$p_{n_2} = p_{\sigma_2} + p_{n_G}, \quad p_{\tau_2} = p_{\tau_G}, \quad u_{n_2} = u_{n_G}, \quad u_{\tau_2} = u_{\tau_G}, \quad (5)$$

- 4) на зовнішній межі газового потоку – умова симетрії (або асимптотична умова)

$$\frac{\partial u_G}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=r, \quad (6)$$

$$(u_G \rightarrow \bar{u}_G \quad \text{при } y \rightarrow r),$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини, p_n і p_τ – нормальна і дотична компоненти тензора напруження на міжфазній поверхні, а p_σ – капілярний тиск.

Метод розв'язування. Для спрощення вихідної системи диференціальних рівнянь застосовано метод малого параметра, за який вибрані відносні товщини плівок та газового шару: $\varepsilon = \bar{h}/l$, $\varepsilon_G = r/l$, де l – характерний поздовжній розмір, $\bar{h}$ та r – характерні поперечні розміри в рідких плівках та в газовій фазі. Введемо також характерні поздовжні швидкості в рідині $\bar{u}$ та в газі $\bar{u}_G$. У системі диференціальних рівнянь (1) – (6) перейдемо до безрозмірних змінних за такими формулами:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad U = \frac{u}{\bar{u}}, \quad V_i = \frac{v_i}{\varepsilon \bar{u}}, \quad P_i = \frac{p_i}{\rho \bar{u}^2}, \quad H = \frac{h}{h}, \quad H_G = \frac{h}{r}, \\ X_G &= \frac{x}{l}, \quad Y_G = \frac{y}{r}, \quad U_G = \frac{u_G}{\bar{u}_G}, \quad V_G = \frac{v_G}{\varepsilon_G \bar{u}_G}, \quad P_G = \varepsilon_G \operatorname{Re}_G \frac{p_G}{\rho_G \bar{u}_G^2}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\bar{h}}{r}, \quad \theta_0 = \frac{\rho_G \bar{u}_G^2}{\rho_1 \bar{u}^2}, \quad \theta_1 = \frac{\mu_G \bar{u}_G}{\mu_1 \bar{u}}, \quad \theta_2 = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_G}, \quad \theta_3 = \theta_0 \frac{\operatorname{Re}_1}{\operatorname{Re}_G}, \end{aligned}$$

де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, $Fr = \bar{u}^2 / (gh)$ – число Фруда,

$\operatorname{Re}_i = \bar{u} h / \nu_i$, $\operatorname{Re}_G = \bar{u}_G r / \nu_G$ – числа Рейнольдса для кожної із фаз.

Будемо вважати, що виконують ся такі умови: $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon \operatorname{Re}_i \ll 1$,

$\varepsilon_G^2 \leq \varepsilon_G \operatorname{Re}_G < 1$. У безрозмірному вигляді спрощена система рівнянь для швидкостей має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} &= -\frac{\operatorname{Re}_1}{Fr}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial Y^2} &= -\frac{\operatorname{Re}_2}{Fr}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0, \\ U_G \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + V_G \frac{\partial U_G}{\partial Y_G} &= \frac{1}{\varepsilon_G \operatorname{Re}_G} \frac{\partial^2 U_G}{\partial Y_G^2}, \quad \frac{\partial U_G}{\partial X_G} + \frac{\partial V_G}{\partial Y_G} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Крайові умови:

$$U_1 = V_1 = 0$$

при $Y = 0$,

$$U_1 = U_2, \quad V_1 = V_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\rho_1 \operatorname{Re}_1}{\rho_2 \operatorname{Re}_2} \frac{\partial U_2}{\partial Y}$$

при $Y = H_1$,

$$U_G = \theta_2 U_2, \quad V_G = \varepsilon_1 \theta_2 V_2, \quad \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \theta_1 \varepsilon_1 \frac{\partial U_G}{\partial Y_G} \quad \text{при} \quad Y = H_1 + H_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_G}{\partial Y_G} = 0 \quad \text{при} \quad Y_G = 1.$$

Для розв'язання одержаної крайової задачі використовується метод збурень [1] за малими параметрами $\varepsilon_1 \theta_1$ і θ_2 з урахуванням лінійних добавок. Невідомі функції подавались у вигляді розкладів за малими параметрами

$$A = A^0 + \varepsilon_1 \theta_1 A^1 + \theta_2 A^2.$$

У результаті одержано шість спрощених систем диференціальних рівнянь, дві з яких мають тривіальний розв'язок. При інтегруванні диференціальних рівнянь для газової фази використовувався скінченно-різницевий метод. Розв'язок крайової задачі (для рідких плівок) знайдено у вигляді

$$U_1 = \frac{\text{Re}_1}{Fr} \left[-\frac{Y^2}{2} + \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{H_2}{H_1}\right) H_1 Y \right] \pm \varepsilon_1 \theta_1 \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_G \text{Re}_G}}{X^{1/2}} f_0''(0) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} Y \right\},$$

$$V_1 = \varepsilon_1 \theta_1 \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_G \text{Re}_G}}{4X^{3/2}} f_0''(0) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} Y^2 \right\},$$

$$U_2 = \frac{\text{Re}_1}{Fr} \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{H_2}{H_1} \right) H_1^2 + \frac{\text{Re}_2}{Fr} \left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{H_2}{H_1} \right) H_1^2 + \left(1 + \frac{H_2}{H_1}\right) H_1 Y - \frac{Y^2}{2} \right] \pm \varepsilon_1 \theta_1 \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_G \text{Re}_G}}{X^{1/2}} f_0''(0) \left[Y + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} - 1 \right) H_1 \right] \right\},$$

$$V_2 = \varepsilon_1 \theta_1 \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_G \text{Re}_G}}{4X^{3/2}} f_0''(0) \left[Y^2 + 2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} - 1 \right) H_1 Y + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2}\right) H_1^2 \right] \right\}.$$

За знайденими складовими векторів швидкостей можна знайти безрозмірні товщини рідких плівок H_1, H_2 :

$$H_1 = 1 \mp \varepsilon_1 \theta_1 A X^{-1/2},$$

$$H_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \mp \varepsilon_1 \theta_1 \left[\frac{2B}{C} \right] X^{-1/2},$$

де δ – відносна товщина плівки при відсутності руху газу, $f_0''(0) = 0.332$,

$$A = \frac{\sqrt{\epsilon_G \text{Re}_G} f_0''(0) Fr}{\text{Re}_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{-1},$$

$$B = \frac{\sqrt{\epsilon_G \text{Re}_G}}{4} f_0'''(0) \left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} \left(1 + 2 \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \right],$$

$$C = \frac{\text{Re}_1}{Fr} \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\text{Re}_2}{Fr} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2.$$

Аналіз одержаних результатів. За описаною методикою проведено розрахунки течій двошарової плівки по поверхні пластини у випадках, коли газовий потік спрямований вгору (протитечія), вниз (прямотечія), а також коли рух газу відсутній.

Результати розрахунків при значеннях визначальних параметрів $\text{Re}_1 = \text{Re}_2 = 1$, $\text{Re}_G = 100$, $Fr = 1$, $\rho_1 = \rho_2$, $\delta_1 = \delta_2$ наведені на рис. 2–3. На рис. 2 показані профілі поздовжньої швидкості в рідких плівках, на рис. 3 – розподіли товщина плівок уздовж пластини у випадках прямотечії, протитечії і відсутності течії газу.

Як видно з рисунків, рух газу може призводити до значних змін картини течії. Так, у випадку прямотечії товщини плівок зменшуються, а у випадку протитечії – збільшуються, причому при зростанні координати x вплив газової складової зменшується.

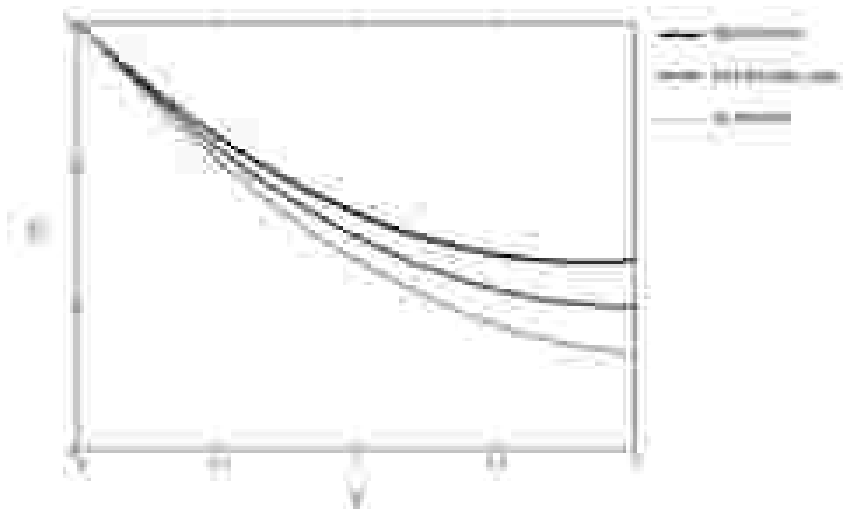


Рис. 2. Профілі поздовжньої швидкості в рідких плівках

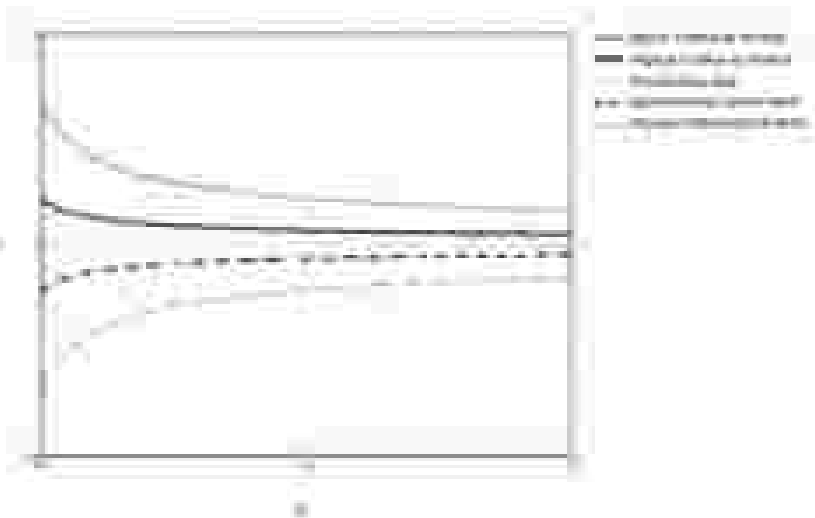


Рис. 3. Розподіл товщин плівок уздовж пластини

Висновки. За допомогою метода малих збурень розроблена методика розв’язання задачі про стаціонарну трифазну течію двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі під дією сили тяжіння. Одержано аналітичні вирази для профілів швидкостей і товщин рідких плівок в залежності від фізичних параметрів задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Бояджиев Х.** Массоперенос в движущихся пленках жидкости / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М. : Мир, 1988. – 137 с.
2. **Захаров М. К.** Совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели / М. К. Захаров, В. Г. Айнштейн // Теоретические основы химической технологии, – 1993, – Т. 27, № 5. – С. 462–467.
3. **Захаров М. К.** Противоточное совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели / М. К. Захаров, В. Г. Айнштейн, Дж. Л. Локшин // Теоретические основы химической технологии, – 2000, – Т. 34, № 3. – С. 261–264.
4. **Захаров М. К.** Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока / М. К. Захаров, А.Ю. Комков, Д. М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008, – №3. – С. 70–74.

Надійшла до редколегії 23.05.2014

М.Є. ⁷Сердюк, Д.О. Челядін

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МЕТОДИ ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ ВІДБИТКІВ ОКА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНЬООЧНОГО ТИСКУ

Розглянуто методи обробки та аналізу цифрового зображення відбитку ока під дією тонометра з метою виділення контурів об'єктів та визначення даних, необхідних для обчислення внутрішньоочного тиску.

Рассмотрены методы обработки и анализа цифрового изображения отпечатка глаза под действием тонометра с целью выделения контуров объектов и определения данных, необходимых для вычисления внутриглазного давления.

Methods for processing and analyzing of digital image of eye under the action of a tonometer are considered. The purpose of processing is edge detection of objects and determination of the data necessary for calculating the intraocular pressure.

Ключові слова: обробка зображень, виділення контурів об'єктів, градієнт яскравості зображення, тонометрія, глаукома, внутрішньоочний тиск.

Вступ. Комп'ютерні технології набувають все ширшого застосування в медицині, зокрема в офтальмології. У методах діагностики корисним виявляється використання комп'ютерної графіки, яка інтегрує різноманітні можливості візуалізації об'єктів на графічних зображеннях та дозволяє проводити аналіз досліджуваного об'єкта за його цифровим знімком. Актуальним питанням у сучасній офтальмології є удосконалення профілактичних та діагностичних заходів з виявлення глаукоми. ТонOMETрія, або вимірювання внутрішньоочного тиску, є необхідним заходом в обстеженні пацієнтів з підозрою на глаукому. Одним із розповсюджених, точних та недорогих методів тонометрії є тонометрія за Маклаковим [3]. Суть цього методу полягає в отриманні зображення відбитку ока під дією тонометра з подальшими вимірюваннями та обчисленнями за цим зображенням. Упровадження комп'ютерних технологій дозволяє удосконалити цю методику. Зокрема, зображення може бути отриманим у цифровому вигляді за допомогою веб-камери чи інших аналогічних засобів, а аналіз та вимірювання може здійснюватися відповідним програмним забезпеченням. Значною проблемою є якість знімків, оскільки нечіткі розмиті контури або їх дуб-

лювання ускладнює процес вимірювання та впливає на точність результатів. У даній статті розглядаються методи обробки та аналізу цифрового зображення відбитку ока під дією тонометра з метою виділення певних контурів, необхідних для обчислення внутрішньоочного тиску.

Постановка задачі. Цифровий знімок відбитку ока містить дані, які використовуються для визначення внутрішньоочного тиску. Приклади знімків наведені на рис. 1а, 2а. Внутрішньоочний тиск у методі тонометрії за Маклаковим обчислюється таким чином [3]:

$$T = \frac{P}{13,6\pi r_m^2},$$

де T – внутрішньоочний тиск (мм рт. ст.), P – вага тонометра, r_m – мінімальний радіус відбитка ока. Вага тонометра відома, є константою та дорівнює 0,01 кг. Отже, використовуючи цифровий знімок ока під дією тонометра, необхідно знайти величину r_m . Як тонометр, так і відбиток ока на зображеннях по формі близькі до кола (рис. 1а, 2а). Радіус тонометра відомий і дорівнює 5,75 мм. Аналізуючи знімок, необхідно виділити на ньому межі тонометра та контури відбитка ока та визначити відповідні радіуси в пікселях. Після цього можна буде обчислити радіус відбитка в одиницях довжини за допомогою простої пропорції

$$r_m = R_t \cdot \frac{r_{pm}}{R_{pt}},$$

де R_t – радіус тонометра в одиницях довжини, r_{pm} і R_{pt} – радіуси відбитка та тонометра у пікселях відповідно.

Отже, ставиться задача обробити цифровий знімок відбитка ока під дією тонометра, виділити на ньому контури тонометра, відбитка ока та знайти радіуси відповідних кіл у пікселях.

Проблема полягає в тому, що якість знімків не завжди задовільна. Тому пропонуються чотири методи виділення меж на вибір користувача офтальмолога. Один із методів повністю автоматичний і не потребує участі користувача у процесі виділення меж. Інші три призначені для випадків неякісних знімків і працюють під контролем та з участю користувача.

Метод автоматичного виділення меж. Детектування контурів тонометра та відбитка ока на зображенні без участі користувача складається з кількох етапів. На першому етапі здійснюється перетворення вихідного зображення у відтінки сірого та виділення на ньому контурів детектором країв Кенні [1]. Алгоритм Кенні базується на обчисленні градієнтів яскравості у пікселях зображення. Краї відмічаються там, де градієнт набуває максимального значення. Для обчислення градієнтів

використовується дискретний диференціальний оператор Собеля. Цей оператор базується на згортці зображення невеликими сепарабельними цілочисельними фільтрами у вертикальному та горизонтальному напрямках. Зазвичай для обчислення наближених значень частинних похідних по горизонталі та вертикалі оператор Собеля використовує ядра розміром 3×3 , з якими згортає зображення. У методі, що розглядається, пропонується використовувати оператор Собеля з розміром 5×5 . Відповідні матриці S_x та S_y мають такий вигляд:

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -4 \\ 6 & 12 & 0 & -12 & -4 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -2 & -8 & -12 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 12 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Використання оператора Собеля з ядром 5×5 приводить до появи набагато більшої кількості «зайвих» країв, але ті краї, які відповідають межам відбитка ока та тонометра, виходять довгими.

Гradient у кожній точці зображення обчислюється за формулою

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2},$$

де G_x та G_y – значення дискретних частинних похідних по x та по y відповідно:

$$G_x = S_x * P_{xy}, \quad G_y = S_y * P_{xy} \quad \forall x = \overline{2, N-2}, y = \overline{2, M-2},$$

де N – ширина зображення в пікселях, M – висота зображення в пікселях. Матриці S_x та S_y наведені вище, P_{xy} – матриця яскравостей пікселів розміру 5×5 , де центральним є піксель з координатами x, y . Значення gradientа для двох рядів зовнішніх точок на зображенні не обчислюється. Краї на зображенні відмічаються в тих пікселях, де gradient набуває найбільші значення. Для виділення країв використовуються два пороги фільтрації: якщо значення gradientа в пікселі вище верхньої межі – він набуває максимальне значення (край вважається достовірним), якщо нижче нижньої – піксель пригнічується, точки зі значенням, що потрапляють в діапазон між порогів, приймають фіксоване середнє значення. У нашому випадку використовуються мінімальні пороги, тобто обидві межі встановлюються в нуль. З одного боку, це також приводить до появи великої кількості «зайвих» країв на зображенні. Але з іншого боку такий вибір надає можливість отримати більш довгі краї, які характеризують саме межі відбитку та межі тонометра. На наступних етапах обробки зображення зайві лінії будуть відфільтровані. Результатом першого етапу методу є бінарне зображення, де кожен піксель позначений як крайовий

або не крайовий (рис.1б). Крайові пікселі утворюють на бінарному зображенні криві, з якими проводяться подальші обчислення.

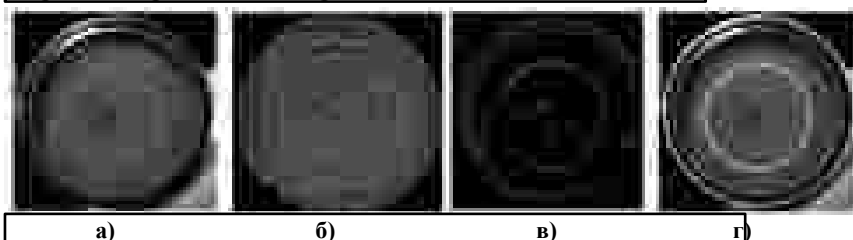


Рис. 1. а – вихідний знімок з відбитком ока; б – результат роботи детектора меж Кенні; в – результат групування та фільтрації контурних точок; г – результат автоматичного виділення контурів тонометра та відбитку ока

На другому етапі методу здійснюється об'єднання зв'язаних крайових точок у групи з подальшою фільтрацією тих груп, які не задовольняють певним умовам. Для об'єднання точок у групи використовується ідея із роботи [4]. Точки контурів об'єднуються в групи за ознакою зв'язності: контурна точка вважається зв'язною з іншою контурною точкою, якщо вони стикаються стороною чи кутами. Треба зазначити, що оскільки для фотографування тонометра було розроблено спеціальний штатив, а тонометри мають однаковий діаметр, то центр фотографії завжди буде співпадати з центром тонометра. Тому можна стверджувати, що контурні точки, які розташовані на відстані, більшій ніж половина меншої сторони зображення, знаходяться за межами тонометра. Тому їх можна виключити з розгляду ще до групування з метою прискорення алгоритму. Групи, які мають невеликі розміри (менше 70 пікселів), розцінюються як шум. Їх теж можна відкинути. Крім того, відкидаються групи, дві крайні точки яких знаходяться від центра зображення (та центра тонометра) на відстанях, які дуже відрізняються. Значення різниці відстаней визначено емпіричним шляхом і дорівнює половині меншої сторони зображення, поділеної на 6. Очевидно, що точки таких груп не можуть належати фрагментам шуканих кіл. Проведена фільтрація значно прискорює роботу подальших етапів обробки зображення при незначних втратах точності. Після групування та фільтрації отримаємо нове зображення з групами (рис. 1в).

На третьому етапі здійснюється почерговий перебір пар груп. По всіх точках кожної пари груп прямим методом найменших квадратів апроксимується еліпс [2]. У залежності від результату апроксимації приймається рішення про те, чи підходить еліпс під можливий результат меж тонометра або під можливий результат меж відбитка. Береться до уваги різниця між довжинами осей та розмірами зображення, відстань центра еліпса до

центра зображення, різниця між довжинами осей еліпса. Вважається, що еліпс підходить як кандидат до меж відбитка ока, якщо виконуються такі умови:

- модуль різниці між осями еліпса не перевищує середньої довжини осей, поділеної на 10, тобто еліпс має бути близьким до кола;

- довжини осей не перебільшують двох третіх довжини меншої сторони зображення. Ця умова потрібна, щоб для меж відбитку не обирались еліпси, які утворені з груп, що відносяться до меж тонометра або внутрішніх контурів між межами тонометра та відбитка;

- відстань від центра еліпса до центра зображення не перевищує розміру меншої сторони зображення, поділеної на 10. Ця умова потрібна, оскільки відомо, що відбиток повинен розташовуватися приблизно в центрі зображення (тонометра).

В якості кандидатів до меж тонометра обираються еліпси, для яких виконуються такі умови:

- модуль різниці між осями еліпса не перевищує середньої довжини осей, поділеної на 75. Це означає, що еліпс має бути майже колом, бо межі тонометра є колом у дійсності;

- довжини осей перебільшують дві треті довжини меншої сторони зображення;

- відстань від центра еліпса до центра зображення не перевищує розмір меншої сторони зображення, поділеної на 10.

Еліпси, які не відповідають вказаним умовам, відкидаються. Усі величини, що використані в наведених умовах, знайдені емпіричним шляхом на основі аналізу значної кількості зображень.

Отже, результатом третього етапу є два набори еліпсів: можливі межі тонометра та можливі межі відбитка ока.

Четвертий етап методу полягає у виборі з кожного набору найбільш прийняттого еліпса (рис. 1г). Серед еліпсів, які є кандидатами на роль меж відбитка, обирається, фактично, той, для якого загальна кількість точок у групах, по яких він був апроксимований, максимальна. Вибір саме цього критерію можна пояснити тим, що серед тих груп, які можуть бути обраними для апроксимації еліпса для відбитка ока, майже завжди реальні краї відбитку є найдовші.

Як межі тонометра обирається найбільший еліпс з усіх інших у наборі. Це можна пояснити тим, що максимальне майже ідеальне коло ми можемо отримати тільки з тими точками, які лежатимуть на краях тонометра.

Отже, в результаті всіх виконаних дій маємо усі необхідні дані про два еліпси, один із яких описує межі тонометра, інший – межі відбитка ока.

Половина довжини меншої осі внутрішнього еліпса приймається за мінімальний радіус відбитка ока у пікселях. За радіус тонометра приймається середнє між довжинами осей великого еліпса. Отже, усі величини для обчислення внутрішньоочного тиску знайдено

Метод автоматичного виділення контурів програмно реалізований та дає цілком прийнятні результати на великій кількості фотографій. Але зустрічаються зображення, на яких дуже погано видно відбиток (рис. 2а). Перепади яскравості в області меж є незначними, тому автоматичне детектування контурів дає незадовільні результати. Але візуально визначити відбиток ока все ж таки можна. Для таких зображень розроблені інші три методи

Методи виділення меж під контролем користувача. Описані нижче методи обробки знімків реалізовано в програмному забезпеченні, яке передбачає інтерактивну участь користувача у процесі виділення меж на цифровому зображенні та контроль з його боку. Такий підхід дозволяє уникнути неточностей, пов'язаних зі складностями обробки нечітких зображень.

Суть першого методу – методу «кіл» – в тому, що користувач за допомогою «миші» повинен розставити два кола на зображенні, маючи можливість змінювати їх розміри та рухати їх таким чином, щоб перше коло збігалось з межами тонометра, а друге – з межами відбитка ока так, щоб радіус відбитка був мінімальним (рис. 2б). Після отримання задовільного візуального результату обидва кола фіксуються, а їх радіуси у пікселях приймаються за радіус тонометра та радіус відбитка відповідно.

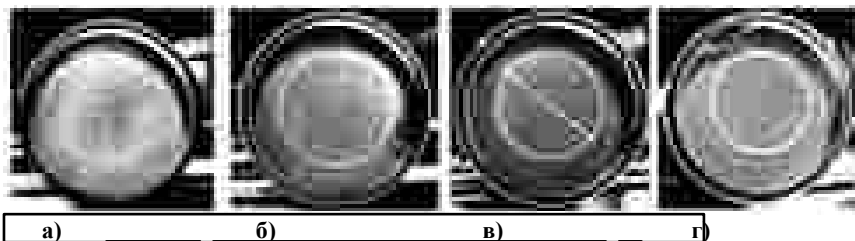


Рис. 2. а – вихідний знімок з відбитком ока; б – метод «кіл»;

в – метод «двох точок»; г – метод апроксимації за набором точок

У другому методі – методі «двох точок» – користувач повинен за допомогою «миші» поставити точку на межі тонометра. Далі від цієї точки до положення курсору формуватиметься коло, яке допомагає користувачеві поставити другу точку на протилежній межі тонометра так, щоб отримане коло було максимально близьким до межі тонометра. Аналогічні дії проводять для меж відбитка ока (рис. 2в). Після фіксації обох кіл визначаються їх радіуси у пікселях.

У третьому методі – методі апроксимації за набором точок – користувач за допомогою «миші» повинен розставити набори із не менш ніж шести точок на межі тонометра та на межі відбитка. По кожному з наборів апроксимується еліпс (рис. 2г). Апроксимація виконується таким же чином, як у автоматичному методі, але набір точок, фактично, задає сам користувач. Половина довжини меншої осі внутрішнього еліпса приймається за мінімальний радіус відбитка у пікселях. За радіус тонометра приймається середнє між довжинами осей великого еліпса.

Аналіз результатів. Усі представлені методи було реалізовано в програмному забезпеченні, яке передбачає, що вимірювання будь-яким методом можна проводити багаторазово. За результатами декількох вимірювань система обчислює середній очний тиск та стандартне відхилення тиску. Практичне застосування системи показало, що усі чотири методи для знімків достатньої якості дають приблизно однакові результати. Так, значення тиску для зображення (рис. 1а) – 22,74; 22,93; 23,09, 22,93 мм. рт. ст. автоматичним методом, методом «кіл», методом «двох точок» та методом апроксимації відповідно. У випадках неякісних знімків автоматичний метод не дає задовільного результату, детектор країв не знаходить межі відбитка ока. У цих випадках потрібно використовувати «ручні» методи. Детектування еліпсів під візуальним контролем користувача та з його участю дозволяє уникнути неточностей, пов'язаних зі складностями автоматичної обробки зображень невисокої якості. Результати вимірювань трьома методами і в цьому випадку мало відрізняються.

Висновки. Запропоновані методи обробки та аналізу цифрового зображення відбитку ока під дією тонометра дозволяють автоматично чи інтерактивно виділити необхідні контури на знімках різної якості і отримати таким чином дані для обчислення внутрішньоочного тиску. Реалізовані програмно, ці методи покращують класичну методику тонометрії за Маклаковим, значно економлять час та зменшують помилки вимірювань.

Бібліографічні посилання

1. **Горбань А.И.** Исследования поля зрения и внутриглазного давления у взрослых и детей / А.И. Горбань, – Ленинград, 1982 – С. 77–89.
2. **Хисамутдинов М.В.** Фильтрация изображений с целью выделения эллипсов / М.В. Хисамутдинов // Штучний інтелект. – 2008. – № 4. – С. 429–437.
3. **Canny J.A** Computational approach to edge detection / J. Canny // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence. – 1986. – Vol. 8, No. 6. – P. 679–698.
4. **Fitzgibbon A.** Direct Least Square Fitting of Ellipses / Andrew Fitzgibbon, Maurizio Pili, Robert B. Fisher // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence – 1999 – Vol. 21, № 5 – p. 476–479.

Надійшла до редколегії 28.03.2014

**В. В. Скалозуб, О. П. Заєць, М. В. Кузнєцов,
С. О. Пирогов, В. В. Чередник**

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
имени академика В. Лазаряна*

ИНТЕЛЕКТУАЛЬНИ СИСТЕМИ GPS-МОНІТОРИНГУ ТА КЕРУВАННЯ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ПРОМИСЛОВОМУ ТРАНСПОРТІ

Розроблено математичне, інформаційне і багатоплатформне програмне забезпечення, призначене для реалізації завдань інтелектуального GPS-моніторингу і оперативного керування рухомими об'єктами залізничного промислового транспорту на основі телематичного терміналу FORT -111.

Разработано математическое, информационное и многоплатформенное программное обеспечение, предназначенное для реализации задач интеллектуального GPS-мониторинга и оперативного управления подвижными объектами железнодорожного промышленного транспорта на основе телематического терминала FORT -111.

In the article the mathematical, information and many platform software designed to meet the objectives of intellectual GPS-monitoring and operational management of moving objects rail transport industry based telematics terminal FORT-111.

Ключові слова: інтелектуальні системи, GPS, моніторинг, залізничний промисловий транспорт, оперативне керування, рухомі об'єкти, математичне і програмне забезпечення, стаціонарні і мобільні пристрої.

Вступ. Залізничний транспорт великих промислових підприємств гірничо-металургійного комплексу України має значні локомотивні та вагонні парки, розгалужене та значної довжини колійне господарство, складні транспортні та відповідні інформаційні технології. Підвищення ефективності експлуатації та управління рухомими залізничними об'єктами цих підприємств шляхом застосування сучасних технологій GPS-моніторингу є одним із пріоритетних завдань. Інноваційним рішенням щодо реалізації

цього завдання є формування, створення і застосування інтелектуальних автоматизованих систем керування. Запровадження таких засобів автоматизації дозволяє суттєво економити транспортні витрати, підвищувати рівень контролю та управління транспортними технологічними процесами. Робота присвячена дослідженню вимог і властивостей засобів створення, а також розробці математичного, інформаційного і багатоплатформного програмного забезпечення із реалізації завдань інтелектуального GPS -моніторингу [8; 10] на основі телематичного терміналу FORT -111 [3; 6] і завдань керування рухомими об'єктами промислового залізничного транспорту, локомотивами. Актуальність роботи визначається потребою підвищення ефективності залізничних транспортних процесів великих промислових підприємств, недостатнім розвитком та застосуванням інтелектуальних систем супутникової навігації, моніторингу та управління, які широко використовуються іншими видами транспорту, в першу чергу – автомобільним.

У статті представлено результати досліджень і програмно -технічних розробок у галузі застосування сучасних інформаційних і телекомунікаційних технологій, у тому числі на основі глобальних навігаційних систем стеження (GPS, ГЛОНАС [6]), для моніторингу та управління залізничними транспортними засобами на великих металургійних підприємствах. Отримані в ході промислових випробувань результати, зазначені в роботі, засвідчили ефективність цих технологій моніторингу, а також потребу подальшого удосконалення для вирішення завдань оперативного планування, з метою раціонального використання тягового рухомого складу (ТПС), контролю експлуатаційних характеристик локомотивів, ефективності використання робочого часу, палива ін.

Об'єктом дослідження є процеси експлуатації локомотивних парків промислових підприємств, а також інформаційні системи їх моніторингу за даними технологій супутникової навігації. Предметом – інтелектуальні багатоплатформні програмні системи моніторингу, оперативного картографічного відображення, а також оптимізації процесів експлуатації локомотивного парку промислових підприємств.

Наукова і технологічна новизна роботи полягає у створенні інтелектуальної кросплатформеної системи моніторингу параметрів залізничних рухомих об'єктів, з метою підвищення ефективності та безпеки транспортних процесів. При цьому також досліджено формати обміну даних у клієнт-серверних системах, картографічні системи мобільних пристроїв та процедури перетворення географічних даних у растрове відображення, що дозволило підвищити точність та поліпшити сприйняття графічних даних.

При розробках проекту використані методи GPS моніторингу, методи інтелектуальних систем, комп'ютерної графіки, технології баз даних, сучасні методи та засоби розробки програмного забезпечення автоматизованих систем [4; 6; 8; 13].

Суттєвий аспект запропонованого вирішення завдань інтелектуального моніторингу полягає у формуванні засобів автоматизації, призначених для різних типів термінальних пристроїв – стаціонарних та мобільних. Також побудовано програмні механізми зворотного зв'язку оператора з локомотивами з метою підвищення безпеки транспортних процесів. Робота виконана за підтримки корпорації «Промтелеком» для дослідного впровадження на ВАТ «Запоріжсталь».

Постановка завдання. Загальна структура системи моніторингу та управління наступна (рис. 1). Передавач GPS рухомого об'єкта (контрольований) формує повідомлення, записані у бінарному форматі, які прив'язані до часу і місця, містять параметри вимірюваних технологічних (технічних та ін.) характеристик. Повідомлення від стаціонарних і мобільних пристроїв надходять у систему моніторингу АСМТРС, контролюються, перетворюються у записи SQL [4 ; 12], далі вони зберігаються на сервері. Для підвищення ефективності процесів експлуатації локомотивних парків металургійних підприємств повинні бути реалізовані процедури передачі, накопичення, аналізу, інтерпретації та моделювання процесів на основі цих даних, а також функції контролю, моніторингу та управління, що використовують методи інтелектуальних систем.

При розробках автоматизованої системи GPS моніторингу експлуатаційних характеристик ТРС підприємств (АСМТРС) виділено кілька основних типів взаємодії як рухомих об'єктів (РО, локомотивів), так і рухомих об'єктів та інфраструктури, що разом формують моделі інформаційної взаємодії в системі. Специфікація цих моделей дозволяє уніфікувати процедури щодо вирішення ряду основних завдань кооперативної взаємодії в інтелектуальних системах залізничного транспорту [8], в першу чергу промислових підприємств. Важливою особливістю управління в АСМТРС є те, що воно, по суті, ведеться за відхиленнями від нормативів, які часто визначаються дослідним шляхом, на основі попередніх даних про результати функціонування керованого об'єкта. Такий тип управління є типовим для телематичних систем транспорту, для інтелектуальних транспортних систем (ІТС).

Застосування методів і технологій ІТС, інструментів телематичного управління [8 ; 10], спрямоване на підвищення ефективності залізничних перевезень або процесів експлуатації ТРС. Відзначимо першорядну роль процедур автоматичного/автоматизованого моніторингу параметрів про-

цесів перевезень (експлуатації), необхідність оперативної взаємодії рухомих об'єктів з інфраструктурою, важливу роль як формування, так і використання баз даних і знань, застосування методів інтелектуального управління (розпізнавання, класифікація, управління за шаблонами та ін.) [7; 9].

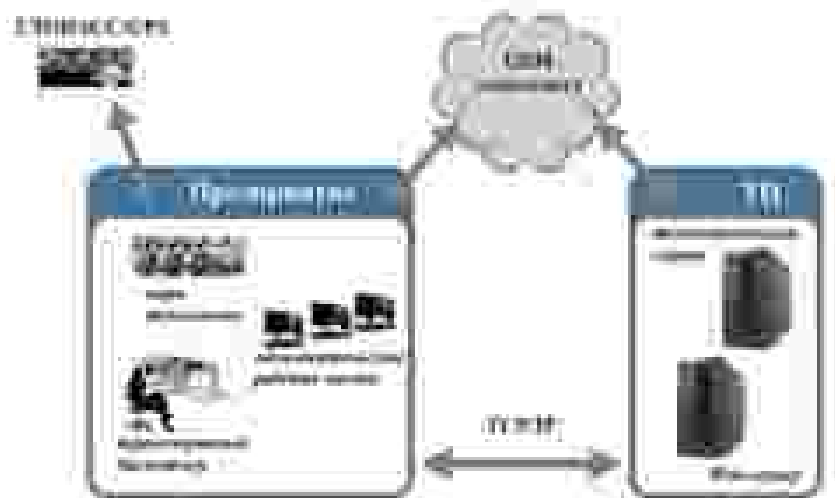


Рис. 1. Загальна схема функціонування системи моніторингу і управління

Комплекс технологічних та експлуатаційних завдань, які виникають , і реалізованих при цьому, а також інтегрованих інформаційно-телекомунікаційних технологій, орієнтованих на формування, інтерпретацію і використання моделей процесів залізничних перевезень і засобів їх раціонального застосування [7; 9 ; 10], дають загальне уявлення про вимоги до змісту інтелектуальних завдань АСМТРС.

Проблеми кооперативної взаємодії у транспортних системах . У даний час сформовано концепції і розвинені засоби кооперативної взаємодії підсистем, в основному, для автомобільного транспорту. Розроблені такі системи взаємодії, що ґрунтуються на видах зв'язку між складовими [17]:

- Vehicle-to-vehicle (V2V) or Car-to-car (C2C);
- Vehicle-to-infrastructure (V2I) or Car-to-infrastructure (C2I);
- Vehicle-to-other participant;
- In general vehicle-to-X communication (V2X).

Відзначимо основні види кооперативних систем: періодичні повідомлення, «маяки», забезпечують отримання інформації, з метою виявлення небезпечного трафіку; системи повідомлень про події (достовірні і ймові-

рні); заданий ступінь поширення інформації від об'єкта; урахування можливості затримки повідомлень [18; 20 – 22].

У Європі реалізовані проекти кооперативних систем: CVIS (2006–2010), SAFESPOT (2006–2010), I-WAY (2006–2009), COOPERS (2006–2010) [11 – 13] ін. При цьому застосовані CALM –принципи, які забезпечують оптимальне використання бездротових телекомунікаційних засобів масової інформації в будь якому конкретному місці (доступ до комунікацій для наземних мобільних телефонів). CALM –станданти перевірені в кооперативному проекті CVIS. Платформа CVIS забезпечує безперервний зв'язок для додатків на основі стандартів ISO CALM. Сімейство міжнародних стандартів, заснованих на CALM –концепції, визначає загальну архітектуру, мережеві протоколи, інтерфейси комунікації для дротового і бездротового зв'язку з використанням різних технологій доступу [20].

У створюваній системі АСМТРС реалізовано кілька видів *завдань інтелектуального аналізу та управління*, які залежать від таких складових:

- числа контрольованих об'єктів, джерел даних (один або багато);
- урахування взаємодії об'єктів між собою;
- присутності об'єкта-джерела, що визначає інфраструктуру;
- можливості перебудови системи передачі повідомлень (зміна числа переданих параметрів по команді від «інфраструктури», від керуючих програм або мікропроцесорної системи на борту, рухомих об'єктів);
- можливості подачі попереджувальних повідомлень у мобільну систему;
- можливості подачі команд управління, блокування, наприклад, при аварійному режимі, який не розпізнається мобільною системою.

Для зазначених класів інтелектуальних завдань сформульовані специфікації щодо їх призначення та побудовані моделі процесів, які реалізовані засобами комунікацій і програмування.

Наведемо приклади основних інтегрованих інтелектуальних технологій транспорту [8; 10]:

- перевезення з властивостями інтелектуальних технологій (містять елементи автоматичного: збору даних про умови перевезень, моделювання процесів, порівняння з шаблонами, розпізнавання нештатних ситуацій або можливостей їх виникнення, планування параметрів процесу перевезень та ін.);
- технології інтелектуального вантажу (вантажу, який в процесі перевезення «автоматично повідомляє про свої властивості», що використовується для моніторингу та управління перевезеннями);
- технології за принципами відстеження логістики вантажів (інформаційні та телепатичні технології та системи, які реалізують загальні вимоги

щодо відстеження вантажів, враховують вимоги інтероперабельності, взаємодії [8];

- автоматичне керування РО (інформування транспортних систем про умови, раціональні маршрути і режими, враховуючи взаємодію між учасниками руху [17]).

Відзначимо, що в АСМТРС реалізовані окремі елементи різних перелічених технологій, з урахуванням специфіки завдань ефективного застосування ТРС для виконання перевезень на підприємствах.

Метод вирішення завдання. Для вирішення комплексних завдань із підвищення ефективності транспортних технологій великих металургійних підприємств запропоновано і розроблено спеціалізовані математичні, інформаційні, а також програмні засоби інтелектуальної системи GPS-моніторингу та керування рухомими залізничними об'єктами промислового транспорту, локомотивами (див. рис. 1). Відмінність системи АСМТРС також полягає у застосуванні широкого спектра методів інтелектуальних систем при реалізації процедур автоматизації для стаціонарних та мобільних пристроїв. Створювана система моніторингу і керування реального часу функціонує на основі даних від телематичних терміналів [13], розташованих у локомотивах підприємства. Зібрана інформація контролюється, використовується для аналізу та моделювання, а також для надання клієнтським додаткам в режимі реального часу, з метою оперативного керування та організації їх взаємодії. Функції програми такі: прийом даних від телематичних терміналів FORT .111 та перевірка їх цілісності; обробка отриманих даних, розкладання у структури даних, збереження у БД (формат MySQL [12]); забезпечення можливості зворотної взаємодії з локомотивами шляхом відправлення керуючих сигналів у формі SMS повідомлень; надання клієнтським додаткам інтерфейсу взаємодії за технологією REST [2] з такими функціями: аутентифікація в системі; отримання координат усіх колій підприємства; отримання опису усіх локомотивів підприємства; отримання усіх оновлень (переміщень), які відбулися із встановленого часу; отримання усіх переміщень за певний проміжок часу; отримання історії усіх переміщень за весь час роботи системи; посилення екстреної команди визначеному локомотиву; графічне відображення технологічних процесів на карті.

Завдання із формування інтелектуальних систем моніторингу і керування на стаціонарних та мобільних пристроях

Галузь GPS моніторингу транспорту дуже швидко розвивається, має безліч готових комплексів з великою функціональністю. При цьому переважна більшість з них орієнтована на автотранспорт, лише одиниці дають підтримку залізничному транспорту [8; 10]. Ціновий діапазон систем , що

мають безліч надлишкових функцій , становить 75 – 150 тис. грн. Часто системи можливо використовувати лише на умовах абонентської плати, у середньому 120 – 150 грн/місяць для одиниці. При цьому вся інформація клієнтів зберігається на серверах компанії постачальника системи моніторингу, який відповідає за її безпеку та конфіденційність. Через можливі значні ризики промислових і транспортних компаній використання подібних систем обмежене. Усі системи моніторингу надаються готовим продуктом «з коробки», де відсутня можливість модифікації комплексу, що обмежує спеціалізацію, гнучке налаштування системи, створення власних модулів. Розробка спеціалізованої системи GPS моніторингу для сучасного залізничного промислового транспорту є актуальною і доцільною.

На відмінність від більшості існуючих систем, призначених для персональних комп'ютерів, у системі АСМТПС передбачено інтеграцію до процесів моніторингу також мобільних пристроїв, забезпечення інтелектуальної підтримки процесів управління рухомими об'єктами, що робить їх ширшими і зручнішими, дозволяє завжди оперативно використовувати всі необхідні дані.

Створювана клієнт-серверна система реалізує технологію організації баз даних на стаціонарних та мобільних пристроях, що використовують операційну систему (ОС) iOS [11], а також фреймворк CoreData як додатковий механізм з оптимізації роботи з SQL-базою даних із специфічним синтаксисом та операторами управління даними [1 6]. При розробках серверної складової проекту було досліджено формати обміну даних між сервером та клієнтом, з метою вибору оптимального. Як показав порівняльний аналіз, перевагу має формат JSON [15].

Досліджено питання щодо ефективності використання карт різних виробників (Apple та Google) у програмі моніторингу на мобільних пристроях, а також технологій інтеграції карт у мобільний додаток. Зараз існує досить велика кількість розробок компаній, які дають можливість інтегрувати карти в мобільні пристрої (Google, Yandex, Apple, Nokia). Сучасна операційна система iOS надає можливість використовувати карти [11] компаній Google, Yandex, а у 2013 році компанією Apple розроблені власні.

У проєкті АСМТПС використані карти Apple через їх відповідність встановленим для підприємства умовам, через відсутність у Google карт можливості накладання власних шарів графічних елементів, а не використання лише заздалегідь реалізованих. Карти Apple випереджають карти Google за характеристиками додаткового розміру проєкту (карти Google – мінімум 5 Мб розміру, карти Apple не збільшують розмір проєкту), продуктивності. Аналіз карт Google та Apple з боку користувача (необхідні фун-

кції) не показав їх суттєвих відмінностей; карти Google дещо кращі в плані масштабування, а карти Apple – в якості супутникових знімків.

Створена підсистема моніторингу і управління для мобільних пристроїв має такі основні функціональні характеристики: обмін даними з використанням HTTP-протоколу та формату JSON; перетворення отриманих даних з JSON-формату в формати логічних структур даних; відображення характеристик рухомих об'єктів, місцезнаходження на карті та детальних характеристик об'єкта після вибору його на карті; реалізація механізму управління як зворотного зв'язку з керуючим пристроєм на об'єкті (терміналом Fort-111 [13]); формування повідомлень в JSON-форматі, відправлення їх на сервер; реалізація механізму побудови звітів щодо динаміки параметрів локомотива; функціонування системи моніторингу на ОС iOS v6.1 і вище [11].

Мобільний додаток розроблений засобами компільованої об'єктно-орієнтованої мови програмування Objective-C, що побудована на основі мови C та парадигм Smalltalk. Середовище розробки XCode [5] можна безкоштовно завантажити з Mac App Store.

На рис. 2 показано приклад інтерфейсу системи управління локомотивами як екрану ввімкнення/вимкнення відображення РО на карті, що складається з тексту, списку локомотивів зі своїми елементами перемикачами, при ввімкненні яких локомотив (і його параметри) зображується на карті. Рис. 3 демонструє приклад процедури контролю параметрів.

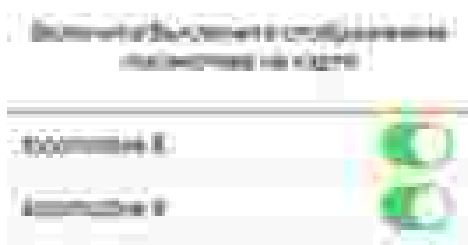


Рис. 2. Екран ввімкнення/вимкнення відображення локомотива на карті

Розроблено регламент, формат і процедури обміну інформацією між телематичним терміналом FORT-111/FORT-111GL та сервером з використанням відповідного комунікаційного протоколу [13]. Також побудовано

програмні засоби екстреного управління локомотивами на основі відправки терміналам керуючих SMS повідомлень.



Рис. 3. Діаграма контролю витрат палива локомотивами

Серверні складові програмного комплексу АСМТРС

Створення комунікаційного протоколу сервера виконано за допомогою стилю програмної архітектури Representational State Transfer (REST [1–6]), що забезпечує: масштабованість взаємодії компонентів, спільність інтерфейсів, незалежне впровадження компонентів, застосування проміжних компонентів для зниження затримки та посилення безпеки. У розробках реалізовані головні обмеження архітектури REST. А саме: технологія «клієнт_сервер» (клієнти відокремлені від сервера єдиним інтерфейсом, сервери можуть бути простішими і більш масштабованими, вони можуть розроблятися і замінюватися незалежно, доки не зміниться інтерфейс); без стану (взаємодія клієнт_сервер обмежується відсутністю збереження контексту клієнта на сервері між запитами; запит від клієнта містить всю необхідну для обслуговування інформацію, будь-який стан сесії зберігається в клієнті; сервер може бути зі станом, який на стороні сервера має бути адресований через URL як ресурс); керованість (клієнти можуть кешувати відповіді; добре кероване кешування частково усуває деякі взаємодії клієнта і сервера, підвищуючи масштабованість і продуктивність); багаторівневність системи (клієнт не може однозначно визначити, підключається він безпосередньо до сервера або до посередника; посередник сервера може поліпшити масштабованість системи, забезпечуючи балансування навантаження); код на вимогу (сервери можуть тимчасово розширити або нала-

штувати функціональність клієнта, передаючи йому виконувану логіку); єдиний інтерфейс (між клієнтами і серверами спрощує і розділяє архітектуру, дозволяючи кожній частині розвиватися самостійно).

Бази даних системи формуються за допомогою багатопотокового сервера MySQL [2; 4; 12], який забезпечує: підтримку необмеженої кількості користувачів, що одночасно працюють з базою даних; число записів у таблицях – до 50 мільйонів; MySQL вважається найшвидшим сервером з існуючих; проста і ефективна система безпеки. Разом з цим у MySQL відсутні: підтримка вкладених запитів і транзакцій, немає підтримки тригерів і збережених процедур. Але такі можливості не є критичними при створенні Web-додатків. Гнучкість СУБД MySQL забезпечується підтримкою великої кількості типів таблиць, а також спеціальним типом таблиць EXAMPLE, що демонструє принципи створення нових типів таблиць.

Дослідження ефективності форматів обміну даними

У теперішній час серед багатьох існуючих форматів обміну даними між сервером та клієнтами найбільш поширені XML та JSON. При створенні програмної системи ці формати досліджено з метою виявлення, який із них найефективніший для проекту: використання формату не приводить до зайвих витрат інтернет-трафіку, обробка не викликає проблем, формат поширений на усі популярні платформи. Це питання важливе через те, що при розробках серверу неможливо знати, які клієнтські додатки будуть застосовуватися (web, Windows, Linux, iOS, Android і т.п.).

Текстовий формат обміну даними JSON (JavaScript Object Notation), вважається незалежним від мови програмування [1 1, 15], для багатьох мов існує код для створення та обробки даних у форматі JSON. У мові PHP, починаючи з версії 5.2.0, підтримка JSON включена в ядро у вигляді функцій `json_decode()` і `json_encode()`, які самі перетворюють типи даних JSON у відповідні типи PHP і навпаки. Результати порівняльного аналізу (число додаткових символів на кодування даних) на різних об'єктах даних наведено у табл. 1 (кодування одного поля даних) та табл. 2 (кодування масиву даних). Також кожному набору XML даних передують рядок `?xml version="1.0" encoding="UTF-8" ?>`, розмір якого = 39 байт.

Таблиця 1

Формат	Представлення	Кількість корисних даних, байт	Кількість додаткових даних, байт
JSON	«speed»: 80,	1	9
XML	<speed>80</speed>	1	15

Таблиця 2

Формат	Представлення	Кількість корисних даних, байт	Кількість додаткових даних, байт
JSON	{«array»: [1, 2, 3, 4, 5]}	5	16
XML	<array>1</array> <array>5</array>	5	15x5 = 75

Обидва формати дуже поширені, усі сучасні мови програмування підтримують роботу з ними, деякі мови мають вбудовану підтримку JSON/XML. Для проекту використання формату JSON є більш доцільним, скоротить інтернет-трафік приблизно в 1,5 рази. Обробка JSON є менш трудомісткою, що дозволить зменшити навантаження на процесори серверу і клієнтів, JSON більш зручний для читання людиною.

Структура серверної складової системи

На рис. 4 наведено діаграму класів серверної частини програми, побудованої з використанням методу CRC-карток для об'єктно-орієнтованого проектування [5 ; 11]. CRC-картки становлять ієрархію класів і форми «співробітництва» об'єктів.

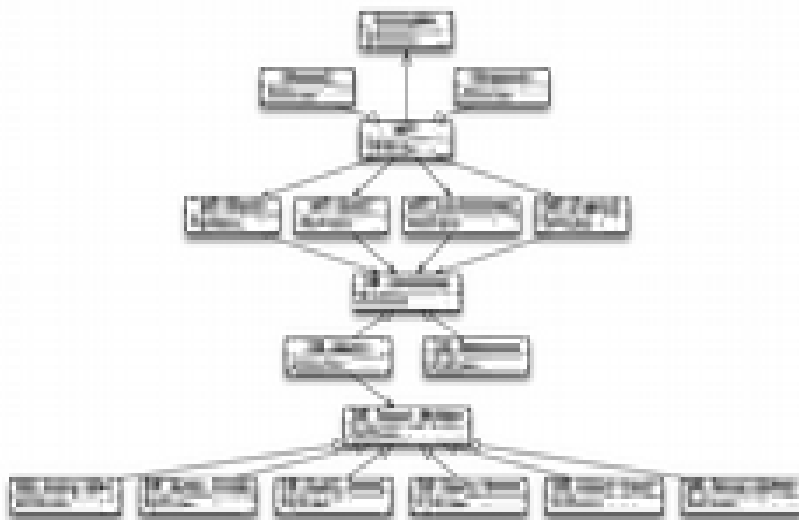


Рис. 4. Діаграма класів серверної частини програми

Для розробки серверного програмного забезпечення застосовані мова PHP і середовище Sublime Text 2 [2; 5], яке має такі переваги: робота в Linux, OS X та Windows; швидкість роботи; наявність гнучких налаштувань; підсвічення синтаксису багатьох мов програмування, в тому числі й PHP; наявність великої кількості плагінів для відлагодження і юніт-тестування; підтримка VIM-режиму.

В якості СКБД застосовано сервер MySQL, який підтримує мову запитів SQL у стандарті ANSI 92; має розширення, відсутні в інших СУБД [2, 12], а мова PHP має вбудовану підтримку цієї СУБД.

Сутності, представлені у БД системи, мають досить розвинену структуру. Початкове представлення сутності Locomotive зображене на рис. 5.

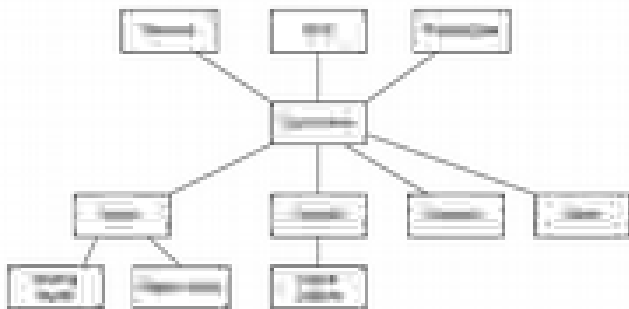


Рис. 5. Інформаційна модель сутності Locomotive

При отриманні даних від телематичних терміналів програма перевіряє їх цілісність для виявлення можливих помилок (під час передачі, збої терміналу ін.). Інформація про параметри транспортного засобу подається у вигляді структурованого символічного рядку, що містить такі параметри: швидкість, пробіг, витрата палива, рівень палива в баку, оберти, температура двигуна та ін. Для контролю структури і цілісності даних повідомлень про параметри об'єктів застосовується LL(1) граматика [1]. У разі невідповідності отриманих від терміналу даних побудованій граматичі, дані вважаються неправильними, формується запис про втрату пакету повідомлень.

Розроблений програмний засіб дозволяє створювати клієнтські програми (web, iOS, Android, Windows, OS X тощо) для моніторингу рухомих об'єктів на промислових підприємствах залізничного транспорту. Наприклад, не змінюючи структуру і навіть код серверної програми, можливе розширення системи додатками на базі ОС Android [1–5], яка є найбільш популярною мобільною операційною системою. Застосування програмного комплексу передбачене у ВАТ «Запоріжсталь»; завдяки гнучкій системі

налаштувань комплекс можна використовувати і на інших промислових підприємствах.

Дослідження картографічних процедур

Для розробки системи моніторингу РО залізничного транспорту важливим є завантаження зображення географічної карти місцевості і прив'язка до географічних координат для відображення на ній місцезнаходження рухомих об'єктів. При відображенні необхідно провести декілька перетворень даних, отриманих від серверу (перетворення географічних координат (широти/довготи) в Декартові координати проекції, проекція Меркатора [7], переведення проекційної позиції об'єкта в позицію на растровому зображенні карти, а також у зворотному порядку). У роботі досліджено методи наведених перетворень координат із однієї системи в іншу.

Дослідження проводилися на зображенні карти ділянки з приблизними розмірами 1300×500 метрів. Вимірювання розбіжностей вихідних даних з кінцевими проводилися за допомогою інструменту Яндекс_карт, що надає можливість вимірювати відстань у метрах між обраними точками. Отримані графічні позиції були перенесені на Яндекс_карти у режимі максимального масштабу з метою мінімізації відхилення відображеного місцезнаходження в програмі та картах веб_сервісу. У ході дослідження оцінювалась точність відображення позиції об'єкта на зображенні карти для різних методів; встановлено, що похибка місцезнаходження об'єкта на Яндекс_картах для методу поліноміальних перетворень – до 1 м. При відображенні рухомих об'єктів ураховуються такі поточні величини: географічні координати місцезнаходження (широта, довгота), висота над рівнем моря, валідність географічних координат, швидкість руху, напрямок руху (відносно півночі), час створення і отримання пакету сервером. Результатом роботи програми є відображення карти місцевості, залізничних шляхів, відображення місцезнаходження рухомих об'єктів на карті місцевості за допомогою спеціальних позначок; шлях руху об'єкта у вигляді контрольних точок, в яких була зафіксована інформація, за вказаний інтервал часу. Також розраховуються такі характеристики, необхідні для управління: таблиця даних про параметри обраного рухомого об'єкта в обраній контрольній точці; таблиця порівняння поточної інформації обраних рухомих об'єктів: швидкість, рівень палива ін.; графіки пройденого шляху, рівня палива для обраних рухомих об'єктів за вказаний інтервал часу; виділення позначки найближчого рухомого об'єкта до вказаної позиції на залізничному шляху.

Реалізована можливість вибору транспортного об'єкта для отримання детальної інформації: місцезнаходження, ключові параметри у контроль-

них точках, місцезнаходження і параметри обраного об'єкта за вказаний період.

Аналіз отриманих результатів і висновки . У результаті виконаних досліджень розроблено математичне, інформаційне і багатоплатформне програмне забезпечення, призначене для реалізації завдань інтелектуального GPS-моніторингу і оперативного керування рухомими об'єктами залізничного промислового транспорту на основі телематичного терміналу FORT-111. Система АСМТРС забезпечує можливості застосування стаціонарних і мобільних клієнтських додатків, в ній реалізовано функції кооперативної взаємодії рухомих об'єктів, формуються їх індивідуальні моделі функціонування. Реалізовано інтелектуальні процедури керування рухомими об'єктами на основі механізму розпізнавання зразків і передачі відповідних SMS-повідомлень.

Ефективність інтелектуальної системи моніторингу і керування АСМТРС локомотивами для ВАТ «Запоріжсталь» визначається підвищенням економічних показників роботи транспортного комплексу підприємства: економія паливо-мастильних матеріалів 18 – 30 %, скорочення терміну простою 10 – 15 %, скорочення невиробничих простоїв до 30 %. Також відзначається автоматизація процесів маршрутизації транспорту і планування робіт, підвищення безпеки та точності руху транспортних засобів.

Бібліографічні посилання

1. **Ахо А.** Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты / А. Ахо, Р. Сети, Дж. Ульман. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2003. – 768 с.
2. **Девис М. А.** Изучаем PHP и MySQL / М. А. Девис, Д. М. Филлипс. – М. : Символ.Плюс, 2008. – 566 с.
3. **Короленко И.А.** // FortMonitor Hosting – система мониторинга транспорта с серверной базой FortTelecom. – 2005. – Режим доступа: <http://www.fort-monitor.ru>.
4. **Крьонке Д. М.** Теория и практика построения баз данных / Д. М. Крьонке – СПб: Питер, 2003. – 800 с.
5. **Ленгсторф Д. С.** PHP и jQuery для профессионалов / Д. С. Ленгсторф. – Apress, 2011. – 401 с.
6. **Петров А. В.** Автоматизация транспортной логистики ГЛОНАСС/GPS мониторинг [Электронный ресурс] / А.В. Петров // Автоматизация транспортной логистики. – 2008. – Режим доступа: <http://www.itob.ru>.
7. Проекция Меркатора [Электронный ресурс] <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
8. **Розенберг Е.Н.** Интеллектуальный железнодорожный транспорт / Е.Н. Розенберг, И.Н. Розенберг // www.ecw.ru/publ.php?publid=2010-05a13
9. **Рутковская Д.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.

10. **Скалозуб В. В.** Интеллектуальные транспортные системы железнодорожного транспорта / В. В. Скалозуб, В. П. Соловьев, И. В. Жуковицкий, К. В. Гончаров – Д. : Изд-во Днепропетр. нац. ун-та ж.д. трансп. им. акад. В. Лазаряна. 2013. – 202 с.
11. **Хиллегасс А.** Objective-C. Программирование для iOS и MacOS / А. Хиллегасс. – Питер, 2012. – 304 с.
12. **Шварц Б. В.** MySQL. Оптимизация производительности / Б. В. Шварц, П. А. Зайцев, В. М. Ткаченко. – Символ, 2010. – 823 с.
13. Fort-Monitor. ГЛОНАСС/GPS мониторинг транспорта и контроль топлива <http://fort-monitor.ru/>
14. GIS-Lab. [Электронный ресурс] <http://gis-lab.info/qa/polynom.html>
15. **Sai Srinivas Sriparasa.** JavaScript and JSON Essentials. – 1999 – 268 с.
16. Webber J. REST in Practice / Jim Webber, Savas Parastatidis, Ian Robinson. – 2010. – 448 с.
17. www.car-to-car.org.
18. www.cvisproject.org.
19. www.esafetysupport.org/download/working_groups/Implementation_Road_Maps/busch1.pdf
20. www.etsi.org/WebSite/document/Technologies/16_Design_Principles_of_CAI_M.pdf
21. www.iway-project.eu/images/Architecture.gif. I-WAY (2006-2009). (Intelligent co-operative system in cars for road safety).
22. www.safespot-eu.org.

Надійшла до редколегії 04.08.2014.

В. В. Скалозуб, О. М. Швець, В. Н. Осовик

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
имени академика В. Лазаряна*

МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПАРКАМИ ОБЪЕКТОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА ПО ТЕКУЩЕМУ СОСТОЯНИЮ

Розроблено методи та інтелектуальну систему управління парками складних залізничних об'єктів на основі параметрів поточного стану. Засобами індивідуальних моделей експлуатації електричних двигунів вирішуються завдання моніторингу, діагностування, прогнозування та визначення черговості ремонтів.

Разработаны методы и интеллектуальная система управления парками сложных железнодорожных объектов с учетом параметров текущего состояния. С помощью индивидуальных моделей эксплуатации электродвигателей решаются задачи мониторинга, диагностирования, прогнозирования и определения очередности ремонтов.

Methods and intelligent management system of complex railway objects based on the parameters of the current state. Means individual operation models of electric motors solved the problem of monitoring, diagnosis, prognosis and prioritize repairs.

Ключевые слова: интеллектуальные системы, мониторинг, диагностирование, парки технических систем, нечетко-статистические экспертные системы, эксплуатация по текущему состоянию.

Введение. Совершенствование процессов эксплуатации парков сложных технических систем железнодорожного транспорта (вагонов, локомотивов, стрелочных переводов, электродвигателей и др.) или составляющих их компонентов, с учетом параметров текущего состояния, является актуальной научно-технической проблемой [7]. Она является чрезвычайно важной для железнодорожных дорог, насчитывающих десятки и сотни тысяч единиц такого рода эксплуатируемых систем [3; 5].

В качестве объектов анализа в работе рассмотрены электродвигатели (ЭД) постоянного тока, используемые в железнодорожных стрелочных переводах – высокоответственных системах управления процессами перевозок. Отмечается, что электродвигатели широко используются в промышленности и на транспорте. Так, несколько лет тому назад только на Приднепровской железной дороге было установлено: стрелочных приводов (СП) – около 8 тыс. шт., автоматических шлагбаумов – около 1,1 тыс. шт., тяговых двигателей и главных тяговых генераторов подвижного состава – около 14 тыс. шт. Электрические машины – это дорогостоящее оборудование при закупке, эксплуатации, ремонте. В настоящее время процессы эксплуатации ЭД осуществляются на основе планово-предупредительного метода, с учетом нормирования. При этом процедуры оценки текущего состояния устройства предусматривают исключение ЭД из реальных процессов, чтобы организовать комплекс измерений значений параметров. Исключение ЭД из процессов эксплуатации, как правило, искажает оценки значений параметров состояний, а также требует существенных дополнительных финансовых, материальных и других видов затрат. В работе представлена интеллектуальная автоматизированная система, которая обеспечивает управление процессами эксплуатации парков ЭД на основе получения оценок параметров их текущего состояния, без исключения устройств из технологических производственных процессов.

Постановка задачи. Задача повышения эффективности эксплуатации парков технологических систем или их компонентов формулируется следующим образом. Рассматривается определенное множество сложных технико-технологических объектов одинакового назначения, парк технических систем, а также процессы их эксплуатации. Объекты парков характеризуются наборами свойств, значения которых указывают на их определенное «текущее» состояние, отражающее ход и возможности дальнейшей эксплуатации каждой из систем. Техническое состояние объекта на данном этапе его эксплуатации определяется по сигналам, снимаемым с него, причем без исключения систем из процессов эксплуатации. Также известны ресурсы (технические, материальные, трудовые и др.), необходимые или же выделенные для эксплуатации парка объектов.

Ставится задача повышения эффективности эксплуатации парка объектов на основе создания интеллектуальной автоматизированной технологии и системы управления процессами эксплуатации парка технических объектов по текущему состоянию. При этом требуется определить текущее техническое состояние компонентов системы (мониторинг технического состояния) без исключения их процессов эксплуатации, а также обеспечить раннее обнаружение скрытых неисправностей. Результатом монито-

ринга является оценка принадлежности объекта к классу исправного или к классу неисправного состояния. Если выявлено неисправное состояние объекта, то требуется определить вид неисправности и получить оценку достоверности. На основе данных мониторинга объектов требуется спрогнозировать возможные изменения технического состояние элементов системы, а также установить рациональную очередность восстановления элементов с учетом требований по безопасности транспортной системы и ограниченных ресурсов процессов эксплуатации.

Решение приведенной выше задачи по автоматизированной эксплуатации парков технологического экономического систем позволит своевременно оценить техническое состояние контролируемых элементов систем, обеспечить возможность повышения безопасности как отдельных объектов, так и транспортной системы в целом. Своевременная диагностика позволит снизить издержки, вызванные простоем элементов системы, и уменьшить затраты на их восстановление. Прогнозирование технического состояния объектов позволит реализовать оптимальное планирование процессов эксплуатации «по текущему состоянию».

Метод решения. Решение вопросов автоматизации процессов эксплуатации парков технических систем выполним на основе методов экспертных систем (ЭС). В работе [7] представлена экспертная система классификации объектов по данным их частотного спектра. Основой ЭС является база нечетко-статистических правил (БНСП) [2] и метод нечеткого управления [1]. Нечеткая компонента БНСП отражает субъективные знания эксперта о частотном спектре объектов. Статистическая составляющая БНСП отображает фактический частотный спектр эталонных объектов классификации и формируется автоматически в процессе адаптации ЭС.

На рис. 1 представлена структура экспертной системы нечетко-статистической классификации объектов по частотному спектру.

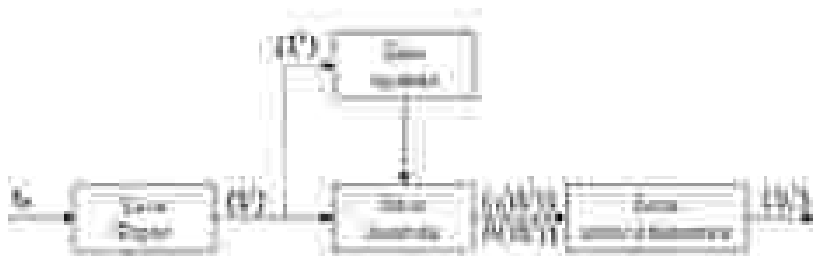


Рис. 1. Структура экспертной системы классификации объектов управления

Экспертная система (рис. 1) выполняет классификацию объектов управления по частотному спектру на основе адаптивной базы нечетко-статистических правил и обобщения метода нечеткого управления [4]. В ЭС блок Фурье реализует быстрое преобразование Фурье (БПФ), а также процедуры фазификации [1; 4] характеристик входных сигналов.

Снятый с объекта сигнал подается на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) для дискретизации. Частотный спектр сигнала объекта получается посредством БПФ, результатом которого является представление объекта множеством гармоник $H = \{h_i\}, i = \overline{1, N_H}$ преобразования Фурье.

Частотное разрешение гармоник Δf при этом составляет $\Delta f = \frac{f_{\max}}{N_H}$ Гц,

где $f_{\max}$ – максимальная частота спектра дискретизированного сигнала исследуемого объекта. Частота h_i гармоники равна $f_i = i * \Delta f, i = \overline{1, N_H}$ Гц. Каждая гармоника в множестве $\{h_i\}$ представляется парой коэффициентов $(\operatorname{Re}_i, \operatorname{Im}_i)$, $i = \overline{1, N_H}$. Для каждой гармоники преобразования Фурье вычисляется интенсивность частоты I_i согласно

$$I_i = \sqrt{\operatorname{Re}_i^2 + \operatorname{Im}_i^2}, \quad i = \overline{1, N_H}. \quad (1)$$

Для построения базы правил ЭС был использован метод нечеткого управления Такаги-Сугено [1] и метод нечетко-статистического управления (НСУ) [3]. В рамках метода НСУ для вычисления принадлежности входной величины нечеткому множеству используется функция плотности ν , построенная на основе обработки статистических данных входной величины.

Для каждого класса состояний объектов c_l существует свое правило, определяющее степень принадлежности объекта b_j к классу c_l . Правила представлены в следующем виде:

$$R^{(l)} : IF \left((I_{12}^j \text{ is } I_{12}^l) \text{ AND } (I^j \text{ is } I^l) \dots \text{ AND } \left(\frac{j}{N_H} \text{ is } I_{N_H}^l \right) \right), \quad (2) \\ THEN \quad S_{jH}^l \mu_{\nu}^{(l)} \left(\left\{ \frac{j}{N_H} \right\}, \left\{ (I_{ii}^j) \right\}, \left\{ (I_{ii}^l) \right\}, i = \overline{1, N_H} \right)$$

где I_i^l – нечеткое множество интенсивности i -ой гармоники l -го класса объектов, представленное функцией принадлежности μ_i^l и функцией

плотности v_i^l ; $f^{(l)}$ – функция вычисления значения степени принадлежности S_j^l объекта b_j к классу c_l .

Для формирования БНСП необходимо задать функции μ_i^l и v_i^l $l = \overline{1, N_{\text{СМ}}}$ $i = \overline{1, N}$. Функции μ_i^l определяются экспертом субъективно на основании его знаний о частотном спектре исследуемых объектов. Для определения функций v_i^l ЭС должна быть «обучена» на множестве обучающих объектов p . Частотный спектр каждого обучающего объекта p_a представляется множеством интенсивностей гармоник $\{I_{ih}^a\}, i = \overline{1, N}$. Диапазон фактических значений I_i^a разбивается на N_T^l равных интервалов. Каждый обучающий объект p_a принадлежит некоторому классу объектов c_l . В свою очередь, каждому c_l соответствует свое значение числа интервалов $N_{T6l}^l = \overline{1, N}$.

Представленная ЭС классификации объектов по частотному спектру на основе адаптивной БНСП была использована для разработки программно-аппаратного комплекса диагностики электродвигателей. Проводилась диагностика ЭД постоянного тока железнодорожных стрелочных переводов моделей ДП 0.18, ДП 0.25, МСП 0.15 и МСП 0.25.

Реализация интеллектуальных информационных технологий – эксплуатация парков электродвигателей железнодорожных стрелочных переводов

В настоящее время электродвигатели постоянного тока широко используются в промышленности и на железнодорожном транспорте, где обслуживание и ремонт ЭД стрелочных переводов выполняется по планово-предупредительному методу. При этом проводится исключение ЭД из эксплуатации, что требует значительных материальных и временных ресурсов. Ремонт и замена стрелочных приводов происходит согласно принятым нормативам, что часто ведет к преждевременному капитальному ремонту двигателя с неиспользованным ресурсом. Для парков ЭД важной и все более актуальной задачей является переход к обслуживанию с учетом текущего технического состояния ЭД. Для автоматизированного решения этой задачи необходимо разработать эффективную технологию, соответствующие модели и методы, а также создать программно-

технические средства для эксплуатации парков ЭД. При этом требуется обеспечить своевременную оценку фактического состояния двигателей, а в случае исчерпания технических ресурсов – указать на необходимость их замены, или определить очередность ремонтов ЭД в условиях ограниченных временных и других ресурсов.

Общая схема разработанной автоматизированной системы управления эксплуатацией (АСУЭ) парка электродвигателей (ПЭД) представлена на рис. 3 [4]. Здесь показано, что кабели, питающие стрелочные двигатели, сводятся в специальное помещение, «релейную», где происходит снятие кривой тока электродвигателей. Это позволяет реализовать постоянный контроль технического состояния всех стрелочных электродвигателей на станции без исключения ЭД из процесса эксплуатации.

На рис. 2 приведены примеры графиков спектров электродвигателя МСП_0,25 для следующих типов неисправностей: а) короткое замыкание пластин коллектора; б) короткое замыкание секции якоря; в) круговой огонь по коллектору; г) обрыв секции якоря.

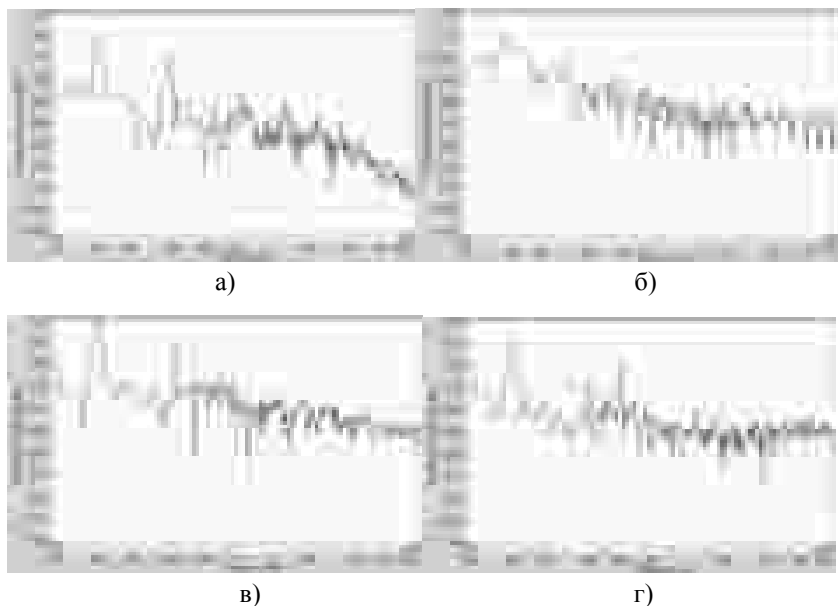


Рис. 2. Спектры токов двигателя модели МСП_0,25

Автоматизированная технология диагностики и управления парком ЭД основана на анализе частотного спектра рабочего тока двигателя. Дискретизация тока электродвигателя реализуется в блоке АЦП, получение спектральных характеристик тока ЭД реализовано с помощью БПФ. Входными данными модуля мониторинга электродвигателей является частотный спектр тока ЭД, рассчитанный в блоке БПФ. Для каждого электродвигателя формируется индивидуальная модель (ИМ), которая хранит спектральные характеристики исправного состояния двигателя.



Рис. 3. Многоуровневая система управления эксплуатацией парка электродвигателей стрелочных переводов

Модуль мониторинга сравнивает спектр, полученный из блока БПФ, со спектром исправного состояния, прочитанного из соответствующей ИМ ЭД. При обнаружении существенных различий в этих спектрах модуль мониторинга передает спектральные характеристики анализируемого ЭД в модуль диагностирования. На выходе модуля диагностирования получаем оценки достоверностей выявляемых неисправностей электродвигателя. Эти оценки сохраняются в ИМ ЭД, формируя временной ряд, который используется для прогнозирования технического состояния электродвигателя. Текущее и прогнозируемое техническое состояние каждого ЭД из модуля диагностирования передается в модуль очередности ремонта электродвигателей, который дает рекомендации о порядке ремонта ЭД.

Разработанная АСУЭ парком ЭД производит измерения характеристик двигателя, находящегося под воздействием номинальных, рабочих значений напряжения, тока, магнитного поля и центробежных сил. Это позво-

ляет выявлять больше неисправностей, чем при использовании статических методов диагностики, и делает возможным замену электродвигателя до его полного выхода из строя. Разработанные модели диагностирования могут автоматически настраиваться для выявления новых видов неисправностей на основе анализа тока двигателей с эталонными неисправностями. Применение системы не требует высококвалифицированного инженера электромеханика как для настройки, так и для эксплуатации.

При управлении парком решается одна из основных подзадач эксплуатации ЭД железнодорожных стрелочных переводов – определение очередности ремонтов тех электродвигателей, при диагностике которых установлены различные скрытые типы неисправностей. Задача установления очередности ремонтов возникает при ограниченности ресурсов, к которым отнесены время ремонта, персонал, запасные части, денежные средства.

Для распознавания кластеров в спектральных характеристиках ЭД использована сеть Кохонена [5]. Выявление кластеров позволяет сопоставить с ними классы технического состояния электродвигателей и использовать SOFM сеть для классификации неисправностей. Анализ взаимного расположения кластеров на топологической карте позволяет выявлять сходства или различия между различными классами неисправностей. Использование сети Кохонена делает возможным выявление новых неисправностей, при этом их входные образцы будут размещены на топологической карте вне известных кластеров.

Входной слой сети Кохонена состоит из 256 элементов, на каждый из которых подаются величины интенсивности гармоник преобразования Фурье тока электродвигателя согласно (2). Выходной слой сети представляет собой топологическую карту. В результате многих экспериментов лучшую способность к кластеризации показала топологическая карта размерностью 3 на 5 элементов. Сеть SOFM отражает пространство входов размерностью 256 в двумерное пространство топологической карты. Радиус окрестности для нейрона победителя при обучении сети уменьшался линейно от 3 до 0. Топологическая карта для кластеризации спектральных характеристик электродвигателей представлена на рис. 4. На этой карте показаны приблизительные границы кластеров технического состояния двигателя. Знаки «+» обозначено положение входных образцов на карте, их близость к центрам нейронов и между собой. Кластеры обозначены следующим образом: исправен – 1, короткое замыкание обмотки – 2, короткое замыкание пластин коллектора – 3, обрыв секции якоря – 4, круговой огонь по коллектору – 5. Входные образцы, соответствующие исправному двигателю, хорошо локализованы, полностью соответствуют одному

нейрону топологической карты. Кластеры других типов неисправностей имеют небольшие перекрытия.

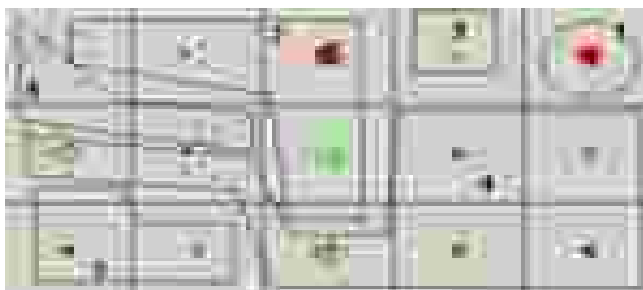


Рис. 4. Топологическая карта для кластеризации спектральных характеристик электродвигателей

Формирование базы правил экспертной системы

Далее представлен пример формирования конкретной базы правил (БП) ЭС для диагностики электродвигателей постоянного тока железнодорожных стрелочных приводов МСП 0.25. При составлении базы правил были исследованы образцы двигателей, имеющие различное техническое состояние: исправен, короткое замыкание обмотки, короткое замыкание пластин коллектора, обрыв секции якоря, круговой огонь по коллектору. Был получен частотный спектр токов этих образцов. Как выше отмечено, частотный спектр двигателя был представлен 256 интенсивностями гармоник быстрого преобразования Фурье.

Для формирования БП были исследованы средние арифметические значения интенсивностей гармоник различных образцов электродвигателей. Далее через $M(i; k)$ будет обозначаться среднее арифметическое интенсивностей гармоник с индексами от i до k ($i < k$). На рис. 5 представлен один из характерных графиков значений $M(1; 64)$, полученных для различных образцов двигателей. Диапазоны номеров образцов соответствовали следующим классам технического состояния электродвигателей: [1; 56] – исправный, [57; 160] – короткое замыкание обмотки, [161; 211] – короткое замыкание пластин коллектора, [212; 283] – обрыв секции якоря, [284; 293] – круговой огонь по коллектору.

Анализ значений величины $M(1; 64)$, в конечном счете, позволил выделять среди множества образцов ЭД два класса электродвигателей: «исправный», «круговой огонь по коллектору» (см. рис. 2). Правила для диагностики образцов ЭД этих категорий имеют следующий вид:

IF ($M(1; 64) < 90$) THEN «Исправен»

IF ($M(1; 64) > 700$) THEN «Круговой огонь по коллектору»

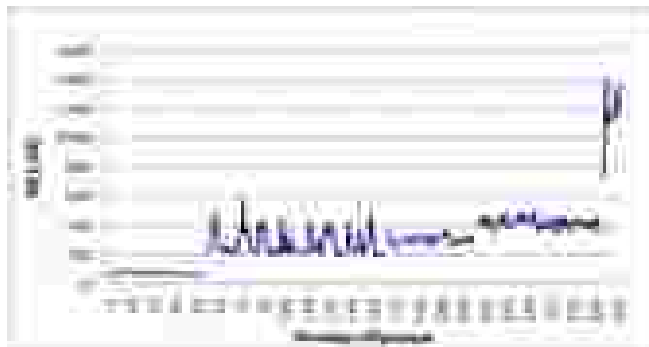


Рис. 5. Значения интенсивностей гармоник $M(1; 64)$ для различных образцов двигателей

Подобным образом выполненные исследования значений величины $M(26; 30)$ дали возможность диагностировать электродвигатели со следующими видами неисправностей: «короткое замыкание обмотки», «короткое замыкание пластин коллектора» и «обрыв секции якоря». Представленные в удобной для изложения форме правила экспертной системы для выявления этих видов неисправностей имеют следующий вид:

IF ([$M(26; 30) > 600$] AND [$M(26; 30) < 1000$])

THEN «Короткое замыкание обмотки»

IF ([$M(26; 30) > 30$] AND [$M(26; 30) < 200$])

THEN «Короткое замыкание пластин коллектора»

IF ([$M(26; 30) \geq 200$] AND [$M(26; 30) < 430$])

THEN «Обрыв секции якоря»

Указанная методика автоматизированной диагностики состояний ЭД модели МСП 0.25 средствами экспертной системы оказалась достаточно эффективной. С учетом некоторых опущенных здесь несущественных деталей формирования БП представленная методика автоматизированной диагностики неисправностей ЭД позволила правильно определять все типы неисправностей для каждого из имеющихся вариантов данных.

Для определения очередности ремонта ЭД в работе предложен показатель и соответствующий критерий, который получил название «стоимость отказа электродвигателя». Оценка стоимости отказа электродвигателя C определяется в следующем виде:

$$C = f(R, F, Z), \quad (3)$$

где R – ожидаемая нормативная стоимость ремонта электродвигателя; F – прогнозируемая стоимость ремонта электродвигателя по ИМ; Z – издерж-

ки, вызванные задержкой поездов в случае отказа электродвигателя и прекращения работы стрелочного перевода. В линейной модели (3) оценка стоимости отказа ЭД представима как

$$C = \gamma_Z Z + \gamma_R R + \gamma_F F, \quad (4)$$

где коэффициенты важности γ_k определяются на основе метода анализа иерархий [6].

Для оценки стоимости R используется значение вероятности неисправности некоторого вида d_i , которые считаются независимыми. С учетом этого оценка ожидаемой стоимости ремонта электродвигателя R представима следующим образом:

$$R = \sum_{i=1}^N d_i c_i, \quad (5)$$

где d_i – достоверность i -ой неисправности, $d_i \in [0;1]$; c_i – нормативная стоимость ремонта i -ой неисправности; N – число неисправностей, выявляемых системой диагностики электродвигателей.

В разработанной технологии управления кроме нормативных значений d_i используются их оценки, получаемые на основе ИД. Для выявления неисправностей в электродвигателях используются искусственные нейронные сети [5], при этом значение достоверности i -ой неисправности d_i определяется значением нейрона выходного слоя многослойного персептрона. Прогнозируемая стоимость ремонта электродвигателя F вычисляется как

$$F = \sum_{i=1}^N d_i^F c_i, \quad (6)$$

где d_i^F – прогнозируемое значение достоверности i -ой неисправности, $d_i^F \in [0;1]$. Методика автоматизированной системы эксплуатации парков ЭД основана на оценке значений достоверностей неисправностей, которые вычисляются системой диагностики электродвигателей на основе ИМ. Система диагностики осуществляет постоянный (по регламенту) контроль технического состояния ЭД, который реализуется без его извлечения из стрелочного привода (оценка «по текущему состоянию»). Мониторинг

технического состояния конкретного двигателя позволяет получить временной ряд оценок достоверностей для каждой i -ой неисправности d_i :

$$D_i = \{d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^k, d_i^{k+1}, \dots, d_i^L\} (i = \overline{1, N}). \quad (7)$$

При работе ЭД его детали стареют и изнашиваются, поэтому можно предположить, что с течением времени каждое последующее значение d_i^{k+1} достоверности i -ой неисправности временного ряда (7) будет не меньше предыдущего $d_i^k : d_{ii}^{kk} \leq d_i^{k+1}, (i = \overline{1, N})$.

Для вычисления оценок F (6) необходимо прогнозировать значение d_i^F на основе данных временного ряда (7), соответствующего i -ой неисправности в индивидуальной модели ЭД. Для расчета оценок значений d_i^F используются методы экстраполяции, параболическая экстраполяция.

Издержки Z , вызванные задержкой поездов в случае отказа электродвигателя и прекращения работы стрелочного перевода, оцениваются как

$$Z = N_p T_v C_z P_z, \quad (8)$$

где N_p – среднее число поездов, проходящих через стрелочный перевод в час; T_v – время, необходимое для возобновления работы стрелочного перевода; C_z – стоимость задержки одного поезда на один час; P_z – вероятность отказа стрелочного перевода.

Если не учитываются взаимные влияния различных типов неисправностей ЭД, вероятность отказа стрелочного перевода P_z может быть оценена на основании достоверностей неисправностей электродвигателя стрелочного перевода согласно $P_z = \max_i (d_i)$.

Задача автоматизации управления процессом эксплуатации парка ЭД решена на основе формирования ИМ средствами двухуровневой нейронно-сетевой модели, средствами карт Кохонена. Мониторинг состояний ЭД и анализ их динамики реализуется в рамках ИМ. Одновременно с использованием модели парка контролируются состояния, соответствующие возникновению различных типов неисправностей. Исходное состояние ЭД принимается исправным (рис. 6, 7). На рис. 6 исправному состоянию соответствует кластер 5 ИМ; в кластере 4 техническое состояние ухудшается. Кластеры 1 и 2 ИМ соответствуют короткому замыканию обмотки. На

модели парка ЭД (рис. 7) показан переход двигателя из исправного состояния (кластер 2) в состояние короткого замыкания обмотки (кластер 3).



Рис. 6. Представление процесса эксплуатации ЭД как перемещения состояний по кластерам индивидуальных моделей

В целом автоматизированная технология и система эксплуатации парков электродвигателей железнодорожных стрелочных переводов позволяет перейти от плановой, установленной нормативами замены двигателей с неиспользованными эксплуатационными ресурсами, к обслуживанию двигателей по их фактическому техническому состоянию.



Рис. 7. Пример перемещения состояний ЭД по кластерам во времени

Анализ полученных результатов и выводы. В работе представлены методы и средства, предназначенные для эффективного мониторинга и управления автоматизированными процессами эксплуатации парков элементов технических систем железнодорожного транспорта. Выполненные исследования и разработки позволяют перейти от планово-предупредительного метода эксплуатации к обслуживанию по фактическому техническому состоянию ЭД. При этом осуществляется прогнозирование технического состояния элементов средствами методов искусственного интеллекта. Эксплуатационные свойства разработанной системы:

- прогнозирование отказа ЭД на основе индивидуальных моделей;
- удаленная диагностика без исключения из процессов эксплуатации;
- самообучение и адаптация моделей объектов;
- простота эксплуатации;
- простота конфигурации для других типов электрических машин;

- применимость к другим элементам технических систем (дизельные тяговые двигатели локомотивов).

Технико-экономические показатели автоматизированной системы управления процессами эксплуатации парков объектов характеризуются следующим: повышение безопасности движения поездов; выявление неисправности за 6 месяцев до отказа двигателя; уменьшение количества задержек в движении поездов; восстановление двигателя с меньшими затратами за счет ранней диагностики; стоимость текущего или среднего ремонта в 4 – 6 раз дешевле нового электродвигателя; разработанная система за год выявляет 10 – 12 неисправных двигателей на каждые 100 эксплуатируемых.

Библиографические ссылки

1. **Рутковская Д.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский; пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с. : ил.
2. **Саати Т.** Метод анализа иерархий/ Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 276 с.
3. **Скалозуб В. В.** Метод и информационные технологии нечетко-статистического управления / В. В. Скалозуб // Системні технології : Регіон, міжвуз. зб. наук. пр. – Вип. 1 (50). – Д., 2008. – С. 120 – 127.
4. **Скалозуб В. В.** Автоматизация мониторинга и управления эксплуатацией парка электродвигателей железнодорожных стрелочных переводов на основе параметров текущего технического состояния / В. В. Скалозуб, О. М. Швец // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д., 2012. – Вип. 40. – С. 60–64.
5. **Скалозуб В. В.** Нейросетевые модели диагностики электродвигателей постоянного тока / В. В. Скалозуб, О. М. Швец // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2009. – № 4. – С. 7–11.
6. **Уоссермен Ф.** Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика / Ф. Уоссерман. – М. : Мир, 1992. – 240 с.
7. **Швец О. М.** Классификация объектов по частотному спектру на основе адаптивной базы нечетко-статистических правил / О. М. Швец // Системні технології : Регіон, міжвуз. зб. наук. пр. – Вип. 3 (68). – Д., 2010. – С. 133–139.

Надійшла до редколегії 14.07.2014.

В.А.¹⁰Турчина, А.К. Підаш

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ДВОХКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ УПОРЯДКУВАННЯ

Запропоновано нову двохкритеріальну модель для задачі паралельного упорядкування і для її розв'язання розроблено алгоритми на основі відомих підходів.

Предложена новая двухкритериальная модель для задачи параллельного упорядочения и для её решения разработаны алгоритмы на основе известных подходов.

A new bicriteria model for the problem of parallel ordering is proposed and for its solution algorithms on the basis of the known approaches are developed.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, паралельні впорядкування, оптимальні впорядкування, метод послідовних поступок, цільове програмування, множина Парето.

Вступ. Ряд прикладних задач, що зводяться до оптимізаційних, для отримання ефективного розв'язку потребують описання цілі декількома критеріями. Задачі теорії упорядкування не виняток. У зв'язку з цим, особливого значення в даний час набуває теорія прийняття рішень за наявності багатьох критеріїв, яка дуже стрімко розвивається.

Сфери застосування задач багатокритеріальної оптимізації є дуже різноманітними, тому потреба в детальному аналізі та дослідженні відповідних математичних моделей постає достатньо гостро. Задачам багатокритеріальної оптимізації присвячено низку робіт Д.І. Батищева, В. О. Ємелічева, Д. І. Когана, М. В. Лейкіна, І.І. Меламеда, В. Д. Ногіна, В. В. Подиновського, Р. П. Шацова та ін.

Актуальність дослідження обумовлена значною потребою і важливістю прикладних проблем, що формуються в рамках багатокритеріальних задач теорії упорядкування.

Стаття присвячена вивченню постановок задач багатокритеріальної оптимізації, різних відомих підходів для їх розв'язання та застосування деяких з них до нової задачі паралельного упорядкування [4]. Крім того, розроблено програмний продукт та проведено порівняльний аналіз алгоритмів розв'язку сформульованих задач. Для побудови множини

ефективних розв'язків використовувалися методи послідовних поступок та цільового програмування. Розглядалося питання адаптації і для побудови множин ефективних розв'язків, що задовольняють деяким додатковим умовам.

Постановка задачі. Введемо до розгляду граф $G = \{V, U\}$, де $V = \{1, \dots, n\}$ – множина вершин, а U – множина дуг.

Впорядкування S множини V вершин графу G назовемо паралельним упорядкуванням вершин орграфу G , якщо з того, що $(i, j) \in U$ випливає, що вершина i розташована в S лівіше за вершину j .

Для існування паралельного впорядкування необхідно і достатньо аби граф G був ациклічним.

Будемо називати впорядкування оптимальним, якщо воно або при заданій довжині має мінімальну ширину, або при заданій ширині має мінімальну довжину [2].

Можна показати, що цим оптимізаційним задачам на графах можна однозначно поставити у відповідність оптимізаційні задачі теорії впорядкувань [6].

Отже, постановка двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування виглядає таким чином:

Задано граф $G = \{V, U\}$, де V – множина вершин, U – множина дуг та h – ширина упорядкування S .

Необхідно знайти оптимальне упорядкування, яке доставляло б мінімум функціоналу F (1), який складається з двох цільових функцій $f_1(S)$ – довжина упорядкування (2) та $f_2(S)$ – середньоквадратичне відхилення потужностей множин тих елементів, які знаходяться на i -му місці в упорядкуванні S (3).

$$F = \{f_1(S); f_2(S)\} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$f_1(S) = l(S), \quad (2)$$

$$f_2(S) = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\|S[i]\| - C)^2}, \quad (3)$$

$$C = \frac{1}{l} (\|S[1]\| + \dots + \|S[l]\|).$$

Алгоритми побудови оптимальних упорядкувань на основі методу послідовних поступок та цільового програмування. Для розв'язання даної багатокритеріальної задачі було запропоновано метод послідовних поступок та метод цільового програмування з деякою модифікацією.

Доцільність обрання методу послідовних поступок обумовлена тим, що зустрічаються випадки, коли користувач готовий на деяке зниження значень важливіших критеріїв, щоб підвищити величину менш важливих. Ідею цього методу можна викласти таким чином.

Процедура вирішення багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок полягає в тому, що всі частинні критерії розташовують і нумерують у порядку їх відносної важливості; мінімізують перший, найбільш важливий критерій; потім призначають величину допустимого відхилення значення цього критерію від оптимального і мінімізують другий за важливістю частинний критерій за умови, що значення першого критерію не повинне відрізнятись від мінімального більше ніж на величину встановленого зниження (поступки). Знову призначають величину поступки, не лише за першим, але і за другим критерієм, та знаходять мінімум третього за важливістю критерію за умови, щоб значення перших двох критеріїв не відрізнялися від раніше знайдених мінімальних значень більше ніж на величини відповідних поступок. Далі подібним чином по черзі використовуються всі інші частинні критерії. Оптимальною зазвичай вважають будь-яку стратегію, яка отримана при розв'язуванні задачі пошуку умовного мінімуму останнього за важливістю критерію [4].

Таким чином, при використанні методу послідовних поступок багатокритеріальна задача зводиться до почергової мінімізації частинних критеріїв і вибору величин поступок.

При розв'язанні двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування методом послідовних поступок спочатку потрібно визначити важливість частинних критеріїв, тобто розташувати частинні критерії в порядку спадання важливості. Таким чином, головним вважається критерій f_1 , менш важливим f_2 . Мінімізується перший за важливістю критерій і визначається його найменше значення $f_{1\min}$. Потім мінімізується другий за важливістю критерій, тобто f_2 при $f_{1\min}$, та знаходимо $f_{2\min}$. Після цього необхідно призначити величину допустимого збільшення поступки $\Delta_T \geq 0$ критерію f_1 і шукається найменше значення

критерію $f_{2\min}^*$ за умови, що значення f_1 повинно бути не більше, ніж $f_{1\min} + \Delta_1$. Отримуваний у результаті розв'язок вважається оптимальним.

Таким чином, оптимальним вважається всякий розв'язок, що є розв'язком останнього завдання з такої послідовності завдань.

1-ий етап:

1) знайти $f_{1\min} = \min f_1(x)$,

2) знайти $f_{2\min} = \min f_2(x)$.

2-ий етап:

1) зробити поступку $f_{1\min} + \Delta_1$,

2) знайти $f_{2\min}^* = \min f_2(x)$,

$$f_1 \leq f_{1\min} + \Delta_1 .$$

3-й етап:

1) обрати оптимальні упорядкування.

Застосування методу показало, що спочатку навіть невеликі величини поступок дозволяють одержати істотний вигравш за другим критерієм; з подальшим збільшенням поступки вигравш росте все повільніше.

Обираючи той чи інший метод для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, неминує постає питання: чи завжди обраний метод приводить до отримання ефективних стратегій. Виявляється, що метод послідовних поступок не завжди приводить до виділення лише ефективних стратегій, тобто розв'язком задачі можуть бути і неефективні стратегії [3].

Таким чином, використання методу послідовних поступок є доцільним для розв'язання тих задач, в яких всі частинні критерії впорядковані за ступенем важливості.

Недоліком методу є труднощі з призначенням і узгодженням величин поступок, що зростають зі зростанням розмірності векторного критерію, а також необхідність формування незмінного для всієї задачі апріорного ранжирування критеріїв. І, мабуть, головним недоліком є те, що метод може призводити до рішень, що не належить множині розв'язків, оптимальних за Парето.

Цільове програмування (ЦП) – це концепція, яка розвиває ідеї лінійного програмування (ЛП) і покликана допомогти в розробці ефек-

тивних розв'язків в умовах багатьох цілей. У ЦП передбачається можливість досяжності всіх цілей і для її відображення вводиться новий тип змінних, що показує ступінь відхилення досягнутого рівня цілей від бажаного (запланованого). Такі змінні будемо називати відхиленнями. Змінні-відхилення в ЦП – ступінь недо- або перевиконання конкретної мети. У ЦП мінімізуються відхилення між бажаними і досягнутими в межах обмежень по ресурсах рівнями багатьох цілей. Звідси і роль відхилень. У ЦП відхилення відіграють вирішальну роль і формують цільову функцію [5].

Для встановлення пріоритетності цілей відхилення в цільовій функції ЦП зважуються за допомогою спеціальних коефіцієнтів. Кожна функція формується за допомогою цільового обмеження, що включає відхилення від оптимального значення. Крім цільових обмежень модель задачі ЦП може містити звичайні, системні обмеження.

Задача двокритеріальної оптимізації в цьому випадку перетворюється на задачу мінімізації суми відхилень з деяким показником $p=2$:

$$y = \sqrt{w_1 \left(\frac{|f_1(S) - \bar{f}_1|}{ff_2} \right)^2 + w_2 \left(|f_2(S) - \bar{f}_2| \right)} \rightarrow \min,$$

де w_k – деякі вагові коефіцієнти, що характеризують важливість того чи іншого критерію.

Додатково було запропоновано модифікований алгоритм розв'язку двокритеріальної задачі паралельного упорядкування, який базується на ідеї цільового програмування. Головна його ідея полягає в тому, що після задання певних значень $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$ цільових функцій $f_1^*(S)$ та $f_2^*(S)$, w_1 та w_2 виконується метод цільового програмування і запам'ятовується значення цільової функції. Далі перевіряється коефіцієнт важливості критерію, і якщо пріоритет віддається другому критерію, то в такому випадку пропонується зробити поступки для першого критерію для можливого покращення загального результату. У кінці, після певної кількості кроків обирається найменше значення цільової функції з усіх знайдених. Можливо, це мінімальне значення було досягнуто саме за допомогою поступки.

Доцільність застосування модифікованого методу можна пояснити необхідністю покращення загального результату за двома критеріями, за умовою «погіршення» найменш важливого критерію.

Висновки. Таким чином, на основі вивчення постановок задач багатокритеріальної оптимізації та деяких підходів, заснованих на ідеї зведення багатокритеріальних задач до однокритеріальних:

- запропоновано нову модель двохкритеріальної задачі упорядкування;
- застосовано два відомих методи для розв'язання поставленої задачі;
- розроблено алгоритми побудови множини Парето для задачі паралельного упорядкування цими методами;
- проведено порівняльний аналіз обраних методів до розв'язання двохкритеріальної задачі паралельного упорядкування;
- створено програмний продукт на основі використаних методів;
- досліджено ефективність застосованих методів на основі програмного продукту до двохкритеріальних задач паралельного упорядкування;
- проведено аналіз отриманих результатів;
- надано практичні рекомендації щодо використання запропонованих методів.

Бібліографічні посилання

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : ИЛ, 1960. – 400 с.
2. Бенайюн Р. Линейное программирование при многих критериях / Р. Бенайюн, О.И. Ларичев, Ж. Тернии // Автоматика и телемеханика. – 1971. – №8. – С. 108–114.
3. Борисов В.И. Проблемы векторной оптимизации / В.И. Борисов. – М. : Наука. – 1972. – 220 с.
4. Бурдюк В.Я. Алгоритмы паралельного упорядочения / В.Я. Бурдюк, В.А. Турчина. – Д. : ДГУ. – 1985. – 84 с.
5. Коффман Э.Г. Введение в теорию расписаний / Э.Г. Коффман. – М. : Наука, 1984. – 333 с.
6. Турчина В.А. Алгоритми перерахування всіх паралельних упорядкувань фіксованої довжини / В.А. Турчина, Ю.С.Зозуля, А.К. Підаш // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д., 2013. – С. 256–261.

Надійшла до редколегії 02.07.2014

УДК 519.8

В.А. ¹¹Турчина, О.Л. Фролова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛЕННЯ В ПАРАЛЕЛЬНІЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ

Розглянуто статичну задачу розподілення в паралельній системі. Наведено класифікацію наближених алгоритмів та розглянуто одну із варіацій генетичного алгоритму для задачі розподілення в паралельній обчислювальній системі. Єдиних концепцій, на яких ґрунтуються генетичні алгоритми, не існує. Тому розробка нових генетичних алгоритмів, що враховують специфіку задач, що розв'язуються, є актуальною.

Рассмотрена статическая задача распределения в параллельной системе. Приведены классификация приближенных алгоритмов и одна из вариаций генетического алгоритма для задачи распределения в параллельной вычислительной системе. Единых концепций, на которых основываются генетические алгоритмы, не существует. Поэтому разработка новых генетических алгоритмов, учитывающих специфику решаемых задач, является актуальной.

The static task distribution in a parallel computing system has been considered. A classification of approximation algorithms and a variation of genetic algorithm for task allocation in parallel computing system also are examined. Common concepts, which are based on genetic algorithms, does not exist. Therefore, the development of new genetic algorithm is relevant.

Ключові слова: задача, розклад, час виконання, паралельна обчислювальна система.

Вступ. Проблема задачі розподілення (Task Scheduling Problem) складається з трьох основних компонент: модель задачі у вигляді графа, обчислювальна паралельна система та алгоритм планування. Граф – це математична модель розділених задач, що отримані в результаті декомпозиції початкової задачі. Паралельна гетерогенна обчислювальна система являє собою повну об'єднану мережу вузлів (процесорів, комп'ютерів чи інших робочих станцій), що мають різні обчислювальні та комунікаційні потужності. Метою алгоритму є ефективне розподілення задач на процесори

таким чином, щоб час виконання всіх задач був мінімальним, або побудова розкладу, довжина якого повинна бути мінімальною.

Як відомо, дана задача розподілення є NP-складною. Оскільки практичні задачі мають велику розмірність, а гетерогенна обчислювальна система високий паралелізм, то розв'язувати їх точними алгоритмами поліноміальної складності неможливо.

Наближені алгоритми, що зазвичай використовуються, виокремлюються в деякі групи, серед яких виділяються такі [2]:

- алгоритми, що засновані на списках (list-based algorithms);
- кластерні алгоритми (clustering algorithms);
- алгоритми дублювання (duplication-based algorithms);
- алгоритми, що основані на направленому пошуку (guided random-based algorithms) – це алгоритми мурашиних колоній, генетичні алгоритми, табу пошук та ін.

Ця класифікація складається з наближених алгоритмів, які мають низьку часову складність та високу ефективність, тобто алгоритми дають розв'язок, який є близьким до оптимального.

Отже, розробка нових алгоритмів для розв'язання задачі розподілення в паралельній обчислювальній системі є актуальним науковим напрямом, де можуть об'єднуватися попередні концепції та розроблятися нові методи, на яких базуються евристичні та метаевристичні алгоритми.

Постановка задачі

Множина задач та обмеження на порядок їх виконання задаються ациклічним орієнтованим графом $G = (V, E)$. Направлене ребро e_{ij} задає відношення передування на виконання задач t_i та t_j . Також зазначимо, що задача t_i повинна завершитися до початку виконання задачі t_j . Вага, що приписана дузі, яка називається комунікаційною вартістю e_{ij} , відповідає кількості даних, що передаються від задачі t_i для задачі t_j .

Множина $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$ відображає множину обчислювальних вузлів або процесорів. Процесори об'єднані в мережу, що має вигляд повної топології, тобто кожний із них зв'язаний зі всіма іншими. Оскільки обчислювальна паралельна система є гетерогенна, то кожна задача на різних обчислювальних вузлах системи має свій час виконання.

Таким чином, мета задачі розподілення полягає в призначенні задач на виконання обчислювальним елементам, щоб загальний час обчислення всіх задач був мінімальним за умови дотримання відношення передування задач, тобто побудові такого розкладу, довжина якого (*makespan or schedule length*) була б мінімальною, або ж знаходженні мінімального часу (*finish time – FT*) виконання останньої задачі t_{exit} :

$$makespan = \min \{ Tt_{exit} \}.$$

Математична модель задачі представлена графом та матрицею обчислювальних вартостей, що зображені на рис. 1.

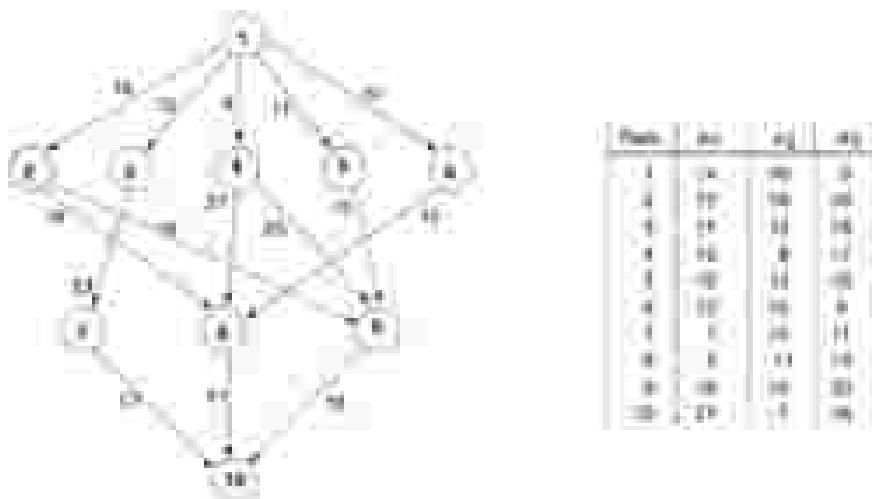


Рис. 1. Математична модель задачі

Метод розв'язання: генетичний алгоритм

Теорія еволюції Дарвіна передбачає, що еволюція природи – це процес оптимізації живих організмів. Відповідно до цієї теорії, природний відбір – це головна умова еволюції в природі.

Суть природного відбору полягає в тому, що більш пристосовані (або адаптовані) біологічні істоти мають більше шансів на виживання та розмноження. Таким чином, потомки «кращих» біологічних індивідів будуть більш пристосовані порівняно зі своїми ровесниками. Отже, через декілька (десятків, сотень, тисяч) поколінь частка адаптованості (пристосованості) збільшується в загальній масі [1].

Цю ідею застосували при розробці нового підходу, на якому засновані генетичні алгоритми. Запозиченими були і деякі терміни з теорії еволюції, що перш за все стосується таких понять:

- особа – відповідає одному можливому розв’язку.
- хромосома – спосіб представлення даного розв’язку. В даному випадку розв’язок являє собою декілька хромосом, що відповідають кожному процесору, на які розподіляються задачі.
- популяція – сукупність осіб, тобто множина допустимих розв’язків.
- кількість поколінь – кількість етапів еволюції (розвитку) даної популяції.
- функція пристосовування – є метрикою, яка застосовується при оцінюванні розв’язку(тобто це довжина розкладу).
- оператор селекції – відбір тих осіб, які беруть участь у створенні наступного покоління.
- оператор схрещування – етап створення нового (наступного) покоління осіб.
- оператор мутації – модифікація деяких осіб у популяції.

Псевдокод генетичного алгоритму має такий вигляд:

Генетичний алгоритм

```
{  
    -ініціалізація;  
    -оцінювання початкової популяції;  
  
    доки (критерій закінчення алгоритму не досягнутий)  
    {  
        - селекція;  
        - схрещування;  
        - мутація;  
    }  
    вибір серед останнього покоління особи, що відповідає найкращому розв’язку задачі.  
}
```

Початкові дані, що необхідні для роботи алгоритму: кількість осіб у початковій популяції та кількість поколінь, що є критерієм зупинки алгоритму (або одним з критеріїв зупинки).

Продемонструємо роботу генетичного алгоритму на прикладі , ілюстрованому рис. 2 та табл.1.

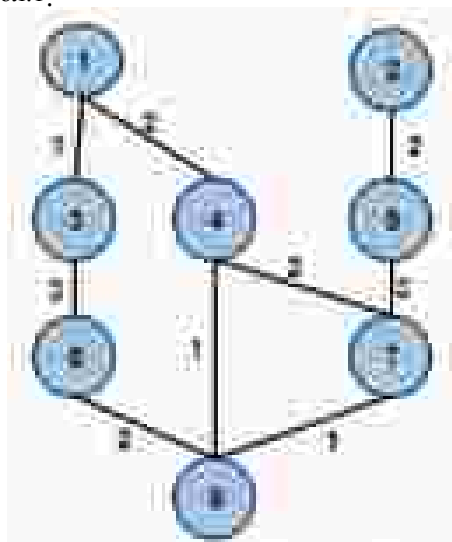


Рис. 2. Оргграф, що містить 8 задач

Таблиця 1

Паралельна обчислювальна система, що складається з двох процесорів

	P1	P2
1	2	3
2	3	2
3	1	3
4	4	5
5	2	4
6	1	3
7	4	1
8	3	2

Етап ініціалізації

На першому етапі формується початкова популяція, тобто множина допустимих розв'язків, що генеруються за допомогою рандомізованого закону.

Введемо поняття висоти вершини в графі $height(t_i)$, що обчислюється за формулою [2]

$$height(t_i) = \begin{cases} 0, & \text{if } pred(t_i) = \emptyset \\ +\max \{height(t_j)\}, & \text{where } t_j \in pred(t_i). \end{cases}$$

Поняття висоти задачі визначає порядок виконання задач. Дійсно, якщо задача t_i є попередником задачі t_j , то задача t_j почне виконуватися після завершення виконання задачі t_i та виконується співвідношення, що $height(t_{ij}) < height(t_i)$. Якщо не існує шляху поміж двох вершин, що відповідають задачам, відповідно, між ними не існує відношення порівнювання, то порядок виконання цих задач є довільним.

Отже, умова генерації початкової популяції така: розв'язки будуть допустимими, якщо вершини на процесорах будуть впорядковані за зростанням значень їх висот.

Наприклад на рис. 3, що являє собою можливий розв'язок, на процесорі 2 маємо:

$$height(T1) < height(T3) < height(T6) \leq height(T7) < height(T8).$$



Рис. 3. Можливий розв'язок задачі

Сформулюємо алгоритм генерації початкової популяції:

Крок 1: задачі групуються в множини, кожна з яких відповідає окремому значенню висоти.

Крок 2: створення однієї хромосоми, що відповідає розв'язку задачі: цикл по всіх процесорах: з кожної множини, яка відповідає значенню висоти, вибирається довільне число, що відповідає кількості задач, які у свою чергу теж обираються з множини довільно. Обрані задачі назначаются на даний процесор. Назначені задачі видаляються з множини.

Крок 3. Процес генерації продовжується доти (крок 2), доки не буде сформована задана кількість хромосом.

Оцінювання хромосом

Після того, як нове покоління осіб (в тому числі і початкове) отримано, необхідно оцінити кожну особу на її пристосованість до навколишнього середовища. Для цього було введено поняття функції пристосованості (fitness function) та її обчислення (або оцінювання).

Функція пристосованості – це цільова функція, яку ми хочемо максимізувати чи мінімізувати в залежності від проблеми, яку вирішуємо. Для задачі оптимального планування в паралельній обчислювальній системі значення функції пристосованості однієї хромосоми дорівнює часу завершення (finish time) виконання всіх задач або, що є тим же, довжиною отриманого розкладу (makespan or length of schedule).

Оператор селекції

Отже, на етапі селекції обираються ті хромосоми серед даної популяції, які будуть брати участь у створенні наступного покоління хромосом. Існують декілька методів селекції в генетичному алгоритмі: метод рулетки, турнірний метод, ранговий метод.

Метод рулетки використовує значення функції пристосованості, що є максимальним. Оскільки задача оптимального планування є задачею мінімізації довжини розкладу, то це значення необхідно переформулювати в максимізаційну форму. Нехай $F(i)$ – значення функції пристосованості для i -хромосоми, де $1 \leq i \leq N$. Та F_{max} – максимальне значення серед даного покоління хромосом. Зробимо перехід до нового значення функції пристосованості за формулою

$$F_{new}(i) = F_{max} - F(i).$$

Отже, отримаємо, що хромосома, якій відповідає найкращий розклад мінімальної довжини, буде мати нове значення функції пристосованості з найбільшим значенням.

Оператор схрещування

На етапі схрещування відбувається такі дії: хромосоми, що належать батьківському пулу, утворюють пари. Потім для двох хромосом, що утворюють пару, задається (рандомно чи враховуючи деяке правило) позиція, що визначає так звану точку схрещування, яка у свою чергу визначає частини двох хромосом, які будуть обмінюватися між собою. У результаті схрещування пара батьківських хромосом генерує нову пару потомків.

Слід зауважити, що задача розподілення в паралельній обчислювальній системі має деякі особливості:

1. Розв'язок являє собою не один, а декілька рядків, що відповідають процесорам.
2. Якщо рандомно обирати позиції точок схрещування по кожному процесору, то є велика ймовірність створення недопустимих розкладів, тобто тих, де порушуються відношення послідовності виконання задач.

Для того щоб уникнути останнє, необхідно обирати позицію точки схрещування, базуючись на обмеженнях постановки задачі.

Позиція точки схрещування обирається, якщо вона задовольняє таким умовам [2]:

1. Значення висот задач, що знаходяться поміж точкою схрещування, є різними
2. Якщо на кожному процесорі значення висот задач, які стоять безпосередньо перед точкою схрещування, є однаковими, тоді нові рядки, що відповідають процесорам, завжди будуть допустимими.

Проілюструємо роботу оператора схрещування, який формує двох нових потомків, на рис. 4 – 7.



Рис. 4. Особа 1, предок. FT=18



Рис. 5. Особа 2, предок. FT=16



Рис. 6. Особа 3, нащадок. FT=13



Рис. 7. Особа 4, нащадок. FT=16

З наведених вище прикладів бачимо, що серед потомків є особа, яка має меншу довжину розкладу $FT=13$, ніж довжини розкладів осіб -батьків: $FT=18$ та $FT=16$.

З прикладу можна помітити, що позиції точок схрещування завжди знаходяться поміж задач, що мають різні значення висот: $height(T5) \neq height(T6)$ $height(T3) \neq height(T7)$.

Оператор мутації

Мутація хромосоми – це незначна модифікація в її структурі. Оскільки в середовищі живих організмів мутація відбувається рідко, то ймовірність мутації хромосом задається доволі малою величиною.

Сформулюємо алгоритм оператора мутації:

Крок 1. У хромосомі, на двох довільно вибраних процесорах, обираються довільні задачі, але які мають однакове значення висоти.

Крок 2. Відбувається обмін задач поміж двома процесорами.

Висновки. У статті наведено математичну модель задачі розподілення в паралельній обчислювальній системі та наближений алгоритм її розв'язання, а саме один із варіантів генетичного алгоритму. Таким чином робота є відправною точкою для подальшого розвитку та модифікації даного методу генетичного алгоритму, точність якого можна б було оцінити апіорі.

Бібліографічні посилання

1. Теорія генетичних алгоритмів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.aiportal.ru/articles/genetic-algorithms/classic-alg-part1.html>.
2. **Hou Edwin S.H.** A Genetic Algorithm for Multiprocessor Scheduling / Edwin S.H.Hou, Nirwan Ansari // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 1994. – Vol. 5, № 2.
3. **Topcuoglu. H.** Performance-Effective and Low-Complexity Task Scheduling for Heterogeneous Computing / H.Topcuoglu, S.Hariri, M.Wu // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2002. – Vol.13, № 3. – P.p. 260–274.

Надійшла до редколегії 01.07.2014

С.А. ¹²Ус, О.Д. Станина
ГВУЗ «Национальный горный университет»

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Розглянуто багатоступену задачу розміщення виробництва. Запропоновано нові математичні моделі континуальної двохетапної задачі та підходи до їх розв'язування.

Рассмотрена многоэтапная задача размещения производства. Предложены новые математические модели континуальной двухэтапной задачи и подходы к их решению.

Multi-stage problem of locating production have been considered. The new mathematical models to continual two-stage problem and approaches to their solution were proposed.

Ключевые слова: многоэтапная задача размещения, оптимальное размещение производства.

Введение. Значительное число работ в области исследования операций посвящено решению проблемы планировки и расположения объектов. Такие задачи широко распространены на практике, поскольку область, в которой производится размещение, может иметь различную структуру, а термин «объект» может трактоваться достаточно широко.

Все задачи размещения можно разбить на два больших класса: задачи размещения взаимосвязанных объектов и задачи размещения распределения (задачи размещения предприятий). К первому классу относятся задачи с заранее заданной структурой связей между объектами: задача Вебера, квадратичная задача о назначениях и т.п. В задачах из второго класса отсутствуют связи между размещаемыми объектами – «поставщиками» и производится распределение фиксированных объектов – «клиентов» между ними: задачи о p -медиане и p -центре, простейшая задача размещения и др [2; 6].

Еще один класс образуют многоэтапные задачи размещения. В этих задачах предполагается, что существует несколько групп размещаемых объектов, каждая из которых имеет свое множество возможных мест разме-

щения (в частном случае эти множества могут совпадать) и регламентированы связи между объектами, например задана определенная иерархия между объектами размещения. Данный класс задач является обобщением многоэтапных транспортно-производственных задач, которые последнее время достаточно активно исследуются.

Под многоэтапными производственно-транспортными задачами будем понимать задачи, отображающие последовательные процессы выпуска одного вида продукции, доставки его в пункты переработки в другую продукцию, производства этой продукции и доставки ее конечным потребителям (рис. 1).

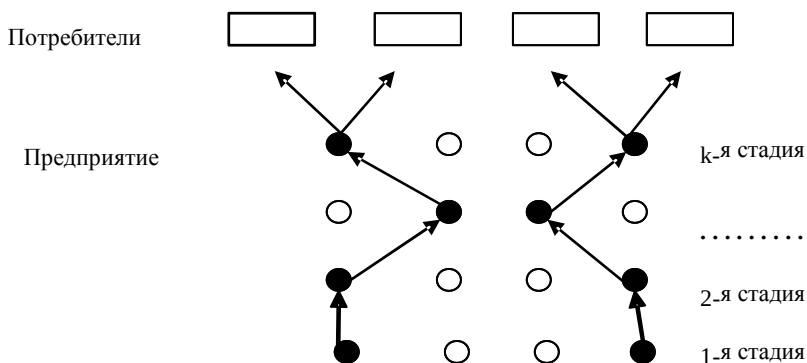


Рис. 1. Задача размещения на цепи

В самых простых постановках таких задач рассматриваются два продукта: «сырье» и «готовый продукт». Возможно и большее число наименований: «сырье», «полуфабрикат», «готовый продукт». Двухэтапные задачи размещения на цепи исследовались в работах [1; 7; 8].

Однако исследования континуальных многоэтапных задач практически не проводится. При этом следует заметить, что существует целый ряд областей, где подобный вид задач имеет место быть. Примерами таких задач являются задачи размещения насосных и распределительных станций в зависимости от горизонта воды и места расположения потребителей, размещение рудников и обогатительных фабрик с учетом мощности залегающего полезного ископаемого и расположения потребителей и др.

В данной работе предложены математические модели непрерывных двухэтапных задач размещения предприятий (задачи размещения-распределения) в случае когда поставщики и/или потребители непрерывно

заполняют данную область и множество возможных мест размещения предприятий одного или обоих этапов также континуально.

Отличие этой задачи от многоэтапной ЗР в том, что предложенные модели позволяют определить не только места расположения предприятий каждого этапа, но и количество продукта, перевозимого от предприятий одного этапа к предприятиям другого этапа и потребителям, при этом связи между предприятиями не являются жестко определенными (отсутствуют наперед заданные цепочки производства). В задачах размещения как правило предполагается, что каждый пункт спроса конечной продукции и каждый пункт производства любого уровня получают продукцию только от одного производителя, при этом предприятие r -го уровня получает продукцию от предприятия $(r+1)$ -го уровня, $1 \leq r \leq R$.

Двухэтапная задача размещения-распределения с континуальным множеством возможных мест размещения предприятий I этапа

Рассмотрим двухэтапную задачу размещения предприятий при следующих предположениях:

- N предприятий первого этапа могут быть размещены в любой точке области Ω и получают ресурс от поставщиков, непрерывно распределенных в ней;
- для предприятий второго этапа задано конечное число возможных мест размещения $J = \{\tau_{12}^II, \tau_{12}^{II}, \dots, \tau_M^{II}\}$;
- затраты на размещение предприятий обоих этапов постоянны и не зависят от точки размещения;
- расположение потребителей конечного продукта известно.

Необходимо разместить предприятия первого и второго этапов, определить зоны их обслуживания и количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа и от предприятий второго этапа потребителям таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

Схематически эту задачу можно изобразить как показано на рис. 2. Поставленной задаче соответствует такая математическая модель.

Задача I.

Минимизировать

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II} \lambda_j + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^M c_{jk}^{II} v_{jk} \lambda_j \quad (1)$$

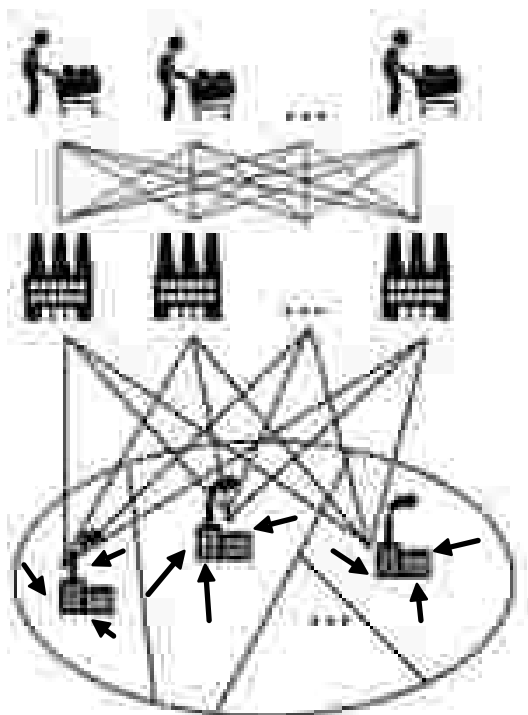


Рис. 2. Схема двухэтапной непрерывной задачи размещения

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \geq b_i^l, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^M v_j^H \lambda_j \leq \beta_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N v_j^H \geq \beta_j^H, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{jk}^H \lambda_j \geq \beta_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (5)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (6)$$

$$\Omega_{ij} = 0, \quad ij \neq, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

$$v_{jk}^{II} \geq 0, \quad v_{ij}^I \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq j \leq M, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (8)$$

$$\lambda_j \in \{0; 1\}, \quad (9)$$

$$\tau^I = (\tau_{12}^I, \tau^I, \tau_N^I), \quad \tau \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь b_i^r – мощность i -го предприятия r -го этапа; A^r – затраты на установку i -го предприятия r -го этапа; $\tau_i^r = (\tau_{i12}^r, \tau_i^r)$ – координаты i -го предприятия r -го этапа; $r = I, II$; $\tau_k = (\tau_{12}, \tau)$ – известные координаты потребителя k ; b_k – спрос k -го потребителя; $c_{ii}^{II}(x) = c(x, \tau)$ – стоимость доставки единицы сырья из точки $x \in \Omega$ к i -му предприятию I этапа; $c_{ij}^I = (\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – стоимость доставки единицы сырья от i -го предприятия I этапа к j -му предприятию II этапа; $c_{jk}^{II} = (\tau_j^{II}, \tau_k)$ – стоимость доставки от j -го предприятия II этапа к k -му потребителю; $\rho(x)$ – количество ресурса в точке x области Ω ; v_{ij}^I – объём продукции доставляемой от i -го предприятия I этапа к j -му предприятию II этапа; v_{jk}^{II} – объём продукции доставляемой от j -го предприятия II этапа к k -му потребителю;

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } j \text{ размещается предприятие II-го этапа,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Целевой функционал (1) описывает суммарные расходы на размещение предприятий, доставку сырья и готовой продукции, ограничения (2) означают требование того, что суммарные запасы ресурса в зоне обслуживания i -го предприятия I этапа не меньше производственной мощности этого предприятия; (3) – количество продукта, вывезенного из i -го предприятия I этапа не больше производственной мощности этого предприятия; (4) – количество продукта, доставленного j -му предприятию II этапа не меньше производственной мощности этого предприятия; (5) – спрос всех потребителей должен быть удовлетворен; ограничения (6), (7) означают требование, что каждый поставщик должен быть отнесен лишь к одному из предприятий I этапа.

Возможные подходы к решению этой задачи, основанные на применении метода ОРМ [3] были предложены в работах [4; 5; 9].

Подход 1.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе определяется некоторое множество N возможных мест размещения предприятий I этапа с учетом распределения ресурса, а затем решается задача размещения в дискретной постановке.

Задача первого этапа – это задача ОРМ, при ограничениях (2), (6), (7), а именно:

Задача 1.1.

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \geq b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$\text{mes}(\Omega_{ij} \cap \Omega_j) = 0, \quad ij \neq, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (14)$$

Задача второго этапа:

Задача 1.2.

$$\sum_{i \in M_1} A_{ij}'' \lambda_j + \sum_{j \in M_2} A_j \lambda_j + \sum_{i \in M_{1k}} \sum_{j \in M_2} c_{ij} y_{ij} + \sum_{j \in M_2} \sum_{k=1}^K c_{jk} v_{kj} \rightarrow \min \quad (15)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} \lambda_j \leq b_{ij}^I, \quad i = \overline{1, 2}, iN, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} \lambda_j \geq b_j'' \lambda_j, \quad i = \overline{1, 2}, jM, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{jk} \lambda_j \geq b_k, \quad k = \overline{1, 2}, kK, \quad (18)$$

$$v_{jk} \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 2}, kK, \quad i = \overline{1, 2}, jM, \quad i = \overline{1, 2}, iN, \quad (19)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, \quad (20)$$

где множество M_1 – полученные на предыдущем этапе возможные места размещения предприятий I этапа.

Заметим, что задача 1.1 отличается от обычной задачи ОРМ [3]. В [3] рассматривались задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств типа « $\leq$ », в данной же задаче ограничения типа « $\geq$ ». Однако если рассматривать задачу в случае, когда ограничения (12) представляют из себя строгие равенства, задача 1.1 будет задачей ОРМ с ограничениями-равенствами, метод решения которой дан в [3]. Для решения задачи второго этапа был предложен комбинированный алгоритм, основанный на эвристическом алгоритме и методе потенциалов. Различное «качество» мест размещения предприятий предлагается учитывать с помощью весовых коэффициентов, введенных в целевую функцию.

Двухэтапная задача размещения-распределения с континуальным множеством возможных мест размещения предприятий I и II этапа

Предположим теперь, что предприятия обоих этапов могут быть размещены в любой точке области. Производство первого этапа получает ресурс от поставщиков непрерывно распределенных в этой области. Число потребителей конечно и их размещение в области известно. Затраты на размещение предприятий постоянны и не зависят от точки размещения. Необходимо разместить предприятия и определить количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа и от предприятий второго этапа потребителям таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

В обозначениях предыдущего раздела математическая модель может быть записана в виде:

Задача II.

Минимизировать

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^I \int_{\Omega_i} \rho(x) dx + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^M c_{jk}^{II} v_{jk}^{II} \quad (21)$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \geq b_i^I, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^{II} \leq b_i^I, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^{II} \geq b_j^{II}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{jk}^{II} \geq b_k^{II}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (26)$$

$$\Omega_{ij} = 0, \quad ij \neq, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

$$v_{jk} \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq j \leq M, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (28)$$

$$\tau^I = (\tau_{12}^I, \tau^I, \tau_N^I), \quad \tau^I \in \Omega^I, \quad (29)$$

$$\tau^{II} = (\tau_{12}^{II}, \tau^{II}, \tau_N^{II}), \quad \tau^{II} \in \Omega^{II}. \quad (30)$$

Для решения этой задачи можно использовать те же подходы, что и для задачи I. Отличие состоит в задаче размещения, получаемой на втором этапе.

Двухэтапная задача размещения-распределения с континуальным множеством возможных мест размещения предприятий I и II этапа и потребителях, непрерывно размещенных в области

Наконец рассмотрим случай, когда предприятия обоих этапов могут быть размещены в любой точке области. Производство первого этапа получает ресурс от поставщиков, непрерывно распределенных в этой области, а предприятия второго этапа транспортируют конечный продукт потребителям, которые непрерывно заполняют заданную область. Затраты на размещение предприятий постоянны и не зависят от точки размещения. Необходимо разместить предприятия в области и определить зоны влияния предприятий первого и второго этапов, а также количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

Тогда математическая модель может быть записана в виде:

Задача III.

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\Omega} c_i(x, \tau_i^I) \rho^I(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^I(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \int_{\Omega^{II}} c_j(x, \tau_j^{II}) \rho^{II}(x) dx \rightarrow \min, \quad (31)$$

$$\int_{\Omega^I} \rho(x) dx \geq b_i^I, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} \leq b_i^I, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} \geq b_j^{II}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^N \Omega_i^I \Omega \quad , \quad (35)$$

$$\Omega_{ii}^I \Omega = 0, \quad ii \neq i', \quad i, i' = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

$$\int_{\Omega_j^I} \rho(x) dx \leq b_j^I, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^M \Omega_j^I \Omega \quad , \quad (38)$$

$$\Omega_{jj}^I \Omega = 0, \quad jj \neq j', \quad j, j' = 1, 2, \dots, M, \quad (39)$$

$$\tau^I = (\tau_{12}^I, \tau_N^I), \quad \tau \in \Omega^I, \quad \tau^I = (\tau_{12}^I, \tau_N^I), \quad \tau \in \Omega^I, \quad (40)$$

где Ω – область, в которой размещаются предприятия; N, M – количество предприятий I и II этапа соответственно; $\tau_i^r = (\tau_{i12}^r, \tau_i^r)$, Ω_i^r , b_i^r – координаты, зона обслуживания и мощность i -го предприятия r -го этапа; $c_{ii}^I = c^I(x, \tau)$ – стоимость доставки единицы сырья из точки $x \in \Omega$ к i -му предприятию I этапа; $c_{ij}^I = (c_{ij}^I, \tau_j^I)$ – стоимость доставки единицы продукции от i -го предприятия I этапа к j -му предприятию II этапа; $c_{jj}^I = c^I(x, \tau^I)$ – стоимость доставки продукции от j -го предприятия II этапа к потребителю, расположенному в точке $x \in \Omega$; v_{ij} – объём продукции, доставляемой от i -го предприятия I этапа к j -му предприятию II этапа; $\rho^I(x)$, $\rho^I(x)$ – количество ресурса и спрос потребителя в точке $x \in \Omega$ соответственно.

Здесь в общем случае $\tau \neq \tau^I$, хотя в частном случае равенство возможно.

Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в том, что последовательно решаются методом ОРМ задачи размещения предприятий I и II-го этапов, а затем на основе полученных данных решается классическая транспортная задача.

Рассмотрим частный случай последней задачи, когда предприятия первого и второго этапов размещаются в одной точке области ($\tau = \tau^I$). Тогда задача приобретает такой вид:

Задача 4.1.

Минимизировать функционал:

$$\sum_{i=1}^N A_i^I + \sum_{j=1}^M A_j^{II} + \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i^I} c_i(x, \tau_i^I) \rho^I(x) dx + \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j^{II}} c_j(x, \tau_j^I) \rho^{II}(x) dx \rightarrow \min \quad (41)$$

при ограничениях

$$\iint_{\Omega_i^I} \rho(x) dx \geq b_i^I, \quad i=1, \dots, N, \quad (42)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^I \subseteq \Omega, \quad (43)$$

$$mes(\Omega_{ii}^{II} \cap \Omega_{i'j'}^{II}) = 0, \quad ii' \neq j', \quad ii', j' = 1, 2, \dots, N, \quad (44)$$

$$\iint_{\Omega_j^{II}} \rho(x) dx \leq b_j^{II}, \quad j=1, \dots, M, \quad (45)$$

$$\bigcup_{j=1}^M \Omega_j^{II} \subseteq \Omega, \quad (46)$$

$$mes(\Omega_{jj}^{II} \cap \Omega_{j'j'}^{II}) = 0, \quad jj' \neq j'j', \quad j, j' = 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

$$\tau^I = (\tau_{12}^I, \tau^I, \tau_N^I), \quad \tau^I \in \Omega^I, \quad \tau^{II} = (\tau_{12}^{II}, \tau^{II}, \tau_N^{II}), \quad \tau^{II} \in \Omega^{II}. \quad (48)$$

Сформулированная задача представляет собой многопродуктовую, точнее двухпродуктовую задачу разбиения с ограничениями, методы решения которой для случая, когда все ограничения вида « = » или « ≤ », представлены в [3].

Заметим, что в случае, если ограничения на мощность предприятий (2) – (5) (соответственно (22) – (25) для задачи II и (32) – (34) для задачи III) сформулированы как ограничения равенства, все подходы приводят к известным дискретным и непрерывным задачам разбиения множеств и размещения [2; 3; 6].

Библиографические ссылки

1. Гимади Э. Х. Эффективный алгоритм для решения многоэтапных задачи размещения на цепи // Дискретный анализ и исследование операций. – ИМ СО РАН. – Новосибирск, 1995. – Т. 2. – С. 13–31.
2. Исследование операций : в 2-х т.; пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – 677 с.
3. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.
4. Ус С.А. Алгоритм решения двухэтапной задачи размещения производства с предпочтениями / С.А. Ус, О.Д. Станина // Системні технології : Регіон, міжвуз. зб. наук. пр. – Вип. 2(91). – Д., 2014. – С. 116–124.

5. **Ус С.А.** Про один підхід до розв'язання задачі оптимального розміщення збагачувального виробництва / С.А. Ус // «Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні «Інфотех -2011» : матеріали міжнар. наук.-практ. конф. (Севастополь, 05–10 вересня 2011 р). С. 118 – 119.

6. Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies // Reza Zanjirani Farahani, Masoud Hekmatfar / Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009.

7. **Fengqi You and Ignacio E. Grossmann** Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management / *Ind. Eng. Chem. Res.* **2008**, 47, PP 7802–7817.

8. **Turan Paksoy, Eren Özceylan, Gerhard-Wilhelm Weber.** A Multi-Objective Mixed Integer Programming Model For Multi Echelon Supply Chain Network Design and Optimization.

9. **Us S.A.** Multi-stage problem of concentration plant location / **S.A. Us, O.D. Stanina** // 6th International Academic Conference of Young Scientists “Computer Science and Engineering 2013” (CSE -2013) : 4th International Youth Science Festival “Litteris et Artibus” November 21–23, 2013 Lviv Polytechnic National University.

Надійшла до редколегії 22.04.2014

ЗМІСТ

Бердник М.Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, що обертается.....	3
Блюсс О.Б., Коряшкіна Л.С., Гранкіна Н.О. Про алгоритми розв'язання задач оптимізації розміщення і поля дії скінченного числа джерел у неперервному середовищі.....	10
Боборикін В.Г., Волошко В.Л., Волошко Л.В. Про один ефективний чисельний розв'язок неоднорідного бігармонічного рівняння та постановки оптимізаційних задач.....	22
Богомаз В.М. Регуляризація фазових обмежень в одному класі задач оптимізації механічних систем.....	30
Божанова Т. А. Про існування узагальнених розв'язків одного класу задач векторної оптимізації з розподіленими параметрами керування на мережі.....	39
Бойко Л.Т., Тогобицька Д.М., Белькова А.І., Промішлянська В.М. Програмна система підтримки прийняття рішень у задачі вибору складу доменної шихти, який забезпечує раціональний шлаковий режим.....	49
Бурдюк В.Я. Знаменитій формулі Ейлера – 273 роки.....	55
Гарт Л.Л. Об устойчивости алгоритма проекционно-итерационного метода решения линейного операторного уравнения.....	61
Горбонос С.О. Про розв'язки одного класу початково-крайових задач із необмеженими коефіцієнтами.....	71
Громов В. А., Фирсов А.Д. О некоторых алгоритмах построения мультиграфа по временному ряду.....	79
Громов В.А., Борисенко Е.А. Использование методов кластеризации в задачах прогнозирования хаотических временных рядов.....	86
Дудник А.С., Тонкошкур И.С. Моделирование течения вязко-пластической жидкости по поверхности тела вращения.....	98
Зиновеева М.И. Неопределенность в матричных играх.....	105
Кісельова О.М., Коряшкіна Л.С., Шевченко Т.О. Метод розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множин з рухомими границями між підмножинами.....	111

Кісельова О.М., Лозовська Л.І., Бандоріна Л.М. Алгоритм розв'язання однієї неперервної задачі про оптимальне кульове покриття множини кулями заданих радіусів.....	1 25
Комарова Н.В. Метод ближайших соседей и факторный анализ в прогнозировании рядов.....	1 33
Коряшкина Л.С., Михалева А.А., Навоенко В.И. Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия.....	1 41
Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П., Зайченко О.В. Чисельний алгоритм розв'язання неперервної динамічної задачі оптимального розбиття множин із квадратичним функціоналом.....	1 55
Красиленко В.Г., Нікітович Д.В. Суміщений із самонавчанням метод кластеризації фрагментів зображень за їх структурно-топологічними ознаками та його моделювання.....	16 7
Лысенко Н.А. Эмпирические решающие правила контроля на основе рядов ортонормированных полиномов.....	17 7
Пасинков М.П., Турчина В.А. Про методи розстановки пріоритетів вершин графа для задачі побудови паралельного впорядкування.....	1 89
Санто О.В., Тонкошкур І.С. Математичне моделювання течій двошарової рідкої плівки по поверхні твердого тіла.....	200
Сердюк М.Є., Челядін Д.О. Методи обробки цифрових зображень відбитків ока для визначення внутрішньоочного тиску.....	20 7
Скалозуб В.В., Засць О.П., Кузнецов М.В., Пирогов С.О., Чередник В.В. Интеллектуальные системы GPS-мониторингу та керування на залізничному промисловому транспорті	2 14
Скалозуб В.В., Швець О.М., Осовик В.Н. Методы интеллектуальных систем в задачах управления парками объектов железнодорожного транспорта по текущему состоянию.....	2 29
Турчина В.А., Підаш А.К. Двохкритеріальні моделі в задачах упорядкування.....	243
Турчина В.А., Фролова О.І. Задача розподілення в паралельній обчислювальній системі.....	249
Ус С.А., Станина О.Д. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий.....	2 58

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

1. У статті мають бути представлені результати нових досліджень автора з повним їх доведенням. Посилання на неопубліковані праці недопустиме. Приймаються статті, викладені українською, російською та англійською мовами. Оптимальний обсяг статті – до 12 сторінок.

2. Рукопис статті повинен мати таку структуру (згідно з вимогами Постанови ВАК України № 7.05/1 від 15 січня 2003 р.):

➤	Анотація трьома мовами (українська, російська, англійська) – не більше 5 рядків. Ключові слова – мовою основного тексту статті.
➤	постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими або практичними задачами, аналіз досягнень і публікацій за тематикою дослідження даної проблеми, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується дана стаття
	(Вступ);
➤	постановка задачі, що розглядається в даній статті (Постановка задачі);
➤	викладення основного матеріалу з повним обґрунтуванням одержаних наукових результатів (Метод розв'язання та Аналіз одержаних результатів);
➤	висновки за проведеними дослідженнями та перспективи подальших досліджень у даному напрямі (Висновки).

3. Вимоги до набору

- ◇ Текст слід набирати в MS Word, **шрифт** Times New Roman.
- ◇ Формат паперу А4 (210x297), альбомна орієнтація.
- ◇ Параметри сторінки (поля):

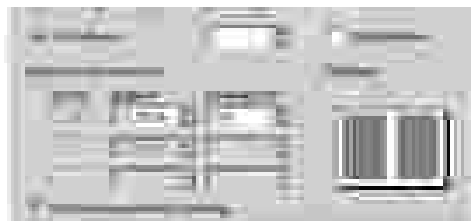
_ верхнє – 15 мм,

_ нижнє – 25 мм,

_ ліве – 20 мм,

_ праве – 20 мм.

- ◇ Колонки



- ◇ Автоматичні переноси, сторінки не нумеруються, «висячих» рядків не повинно бути; абзац (відступ першого рядка): 5 мм.
- ◇ Стил і форматування для елементів статті:

УДК	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 пт
Ініціали і прізвища авторів (прізвище, ім'я, по батькові)	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний;
Місце роботи	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 пт
Назва статті	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 пт
Анотація	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 пт,
Основний текст статті	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 6 пт
Заголовки структурних елементів статті (вступ, постановка задачі, висновки)	<i>Шрифт:</i> Times, 10 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
Заголовок «Бібліографічні посилання»	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 6 пт, <i>інтервал після:</i> 6 пт
Бібліографічні посилання в алфавітному порядку (зразок наведений нижче)	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, (ПІБ – напівжирний, решта ні) прямий, нумерований список; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>відступ:</i> номери – 0 мм, <i>тексту:</i> 5 мм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 6 пт, <i>інтервал після:</i> 6 пт
Дата надходження до редколегії	<i>Шрифт:</i> Times, 9 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал до:</i> 12 пт

Підписи	<i>Шрифт: Times, 9 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; інтервал після: 6 пт</i>
Назва таблиці (перший рядок: слово Таблиця; другий: її назва)	<i>Шрифт: Times, 9 pt, перший рядок: курсив; вирівнювання: за правим краєм; міжрядковий інтервал: одинарний; другий рядок: напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний;</i>

◇ **УВАГА!**

Лакки	« »
Дефіс	-
Тире	—

◇ **УВАГА! Бібліографічні посилання оформлюються за зразком:**

1	Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М., 1955. – 493 С.
2	Белоносов С.М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, И.Л. Черноус. – М., 1985. – 312 С.
3	Евдокимов Д.В. Построение матриц фундаментальных решений для системы уравнений Стокса / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, А.Н. Фетищев // Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. – 2003. – № 3 (19). – С. 127–130.
4	Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамович, И. Стиган. – М., 1979.
5	Остапенко Н.А. Необходимые и достаточные условия существования периодических решений в системах с переменной структурой // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2002. – Вып. 7. – С. 56–58.
6	Перехрест В.І. Новий клас розв'язків гідродинамічних рівнянь Ейлера для осесиметричних вихорових течій / В.І. Перехрест // Доповіді НАНУ. – 2004. – № 3. – С. 35–42.
7	Перехрест В.І. Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності : зб. наук. пр. / В.І. Перехрест, О.А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д. : ДДУ, 2003. – С. 141–148.
8	Кузнецова В.И. О дискретных линейных системах с медленно меняющимися параметрами / В.И. Кузнецова // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 7. – С. 43–48.
9	Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – Ч.1–2. – М., 1982.
10	Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности : в 2 т. / Ю.М. Мацевитый. – Т.1–2. – К., 2003.

- ◇ Рисунки мають бути виконані в будь-якому форматі, що імпортується графічними фільтрами MS Word. Рисунки вставляються в текст статті як окремий незалежний об'єкт (положення — у тексті), при цьому можливо пересування тексту стосовно нього. Під рисунком обов'язково міститься пояснювальний підпис із номером рисунка.
- ◇ Формули мають бути набрані в редакторі Microsoft Equation або MathType; якщо формула з номером, то вирівнюється за правим краєм, якщо ні – за серединою і з такими установками:



4. До редакційної колегії потрібно подати:

- ❖ у роздрукованому вигляді примірник статті, набраний згідно з вимогами стилю й форматування для елементів статті, доданих вище;
- ❖ електронний варіант статті, набраний згідно з вимогами стилю й форматування для елементів статті, доданих вище;
- ❖ витяг із протоколу засідання кафедри (наукового семінару) із рекомендацією до публікації, експертний висновок про можливість публікації статті.

5. Статті, виконані з порушенням правил, до збірника не включаються.

6. Адреса редколегії: Дніпропетровський національний університет, кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики, пр. К. Маркса, 35, корп. №3, м. Дніпропетровськ.