

ISSN 2074-5893



П И Т А Н Н Я
П Р И К Л А Д Н О Г О
М А Т Е М А Т И К И
М А Т Е М А Т И Ч Н О Г О
М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

2013

ISSN 2074-5893

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

*До 95-річчя Дніпропетровського
національного університету
імені Олеся Гончара*

ВИПАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Збірник наукових праць

Дніпропетровськ
Видання Дніпропетровського
національного університету

2013

УДК 004, 336, 338, 512, 517, 519, 534, 539
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431
П 32

*Друкується за ухвалою вченої ради
Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара*

У збірнику вміщені результати фундаментальних досліджень та практичних розробок з проблем математичного і програмного забезпечення інтелектуальних систем. Статті присвячені питанням математичного моделювання складних прикладних систем і розробки ефективних обчислювальних методів та алгоритмів їхнього розв'язання, а також оптимізації, чисельних методів, функціонального аналізу, математичної фізики. Призначений для науковців, викладачів вузів, може бути корисним аспірантам і студентам.

П 32 Питання прикладної математики і математичного моделювання:
зб. наук. пр. / ред. кол. О. М. Кісельова (головн. ред.) та ін. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 268 с.

Сборник содержит результаты фундаментальных исследований и практических разработок по проблемам математического и программного обеспечения интеллектуальных систем. Статьи посвящены вопросам математического моделирования сложных прикладных систем и разработке эффективных вычислительных методов и алгоритмов их решения, а также оптимизации, численных методов, функционального анализа, математической физики. Предназначен для ученых, преподавателей вузов, может быть полезен аспирантам и студентам.

УДК 004, 336, 338, 512, 517, 519, 534, 539
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

Редакційна колегія:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Кісельова** (відп. ред.), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**, д-р техн. наук, проф. **Н. І. Ободац**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян** (НТУУ «КПІ»), д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут**, д-р техн. наук, проф. **О. Г. Байбуз**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. М. Пасічник** (Академія митної служби, м. Дніпропетровськ), д-р техн. наук, проф. **О. І. Михайльов** (НМетА, м. Дніпропетровськ), д-р техн. наук, проф. **В. М. Корчинський**, д-р техн. наук, проф. **В. В. Гнатушенко**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **Л. С. Коряшкіна**, д-р техн. наук, проф. **О. М. Карпов**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. Мельников** (США), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Дейнеко** (Великобританія).

© Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, 2013
© Видавництво ДНУ, оформлення, 2013

УДК 519.233.5(.245)

В. І. ¹Авраменко

Дніпродзержинський державний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ІЗ ЗАДАНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянуті питання статистичного моделювання систем випадкових величин. Реалізовані алгоритми моделювання систем із заданими наперед параметрами.

Рассмотрены вопросы статистического моделирования систем случайных величин. Реализованы алгоритмы моделирования систем с заданными наперед параметрами.

The problems of statistical modelling [collation] of varieties systems [value] are considered in the article. The algorithms of modelling [imagineering] of the systems with beforehand [in advance] preset parameters are realized.

Ключові слова: статистичне моделювання; системи випадкових величин.

Вступ. Вивчення теми дослідження систем випадкових величин у багатьох курсах для економістів пов'язане з досить великою кількістю обчислень. Реальних статистичних даних для отримання навичок виконання статистичного аналізу явно недостатньо, до того ж перевірка правильності їх викликає ускладнення. При виконанні обчислень часто губиться змістовний характер обчислених параметрів і інтерпретація їхнього змісту ускладнена. Тому нами для проведення практичних занять використовуються результати статистичного моделювання систем випадкових величин із заданими наперед статистичними характеристиками, що полегшує перевірку правильності виконання обчислень і дозволяє моделювати спеціальні ситуації.

Постановка задачі. Лінійна система випадкових величин однозначно характеризується кількома параметрами, а саме: трьома векторами, зокрема вектором середніх значень кожного чинника, вектором їхніх середніх квадратичних відхилень і вектором коефіцієнтів лінійної залежності, включаючи вільний член, і однією матрицею парних коефіцієнтів кореляції. При вивченні цієї теми в курсах теорії ймовірностей, економіко -

математичного моделювання чи економетрики постає задача формування банку масивів індивідуальних завдань і перевірки правильності їх виконання. Нижче наводяться алгоритми моделювання таких систем із заданими наперед параметрами, які розглянуто на прикладі системи трьох випадкових величин $f = f(x_1, x_2, x_3)$.

Метод розв'язання. Для моделювання системи трьох випадкових величин з відмінним від одиниці коефіцієнтом детермінації слід використати чотири послідовності псевдовипадкових чисел, що утворюють матрицю V розмірності $n \times 4$, останній стовпець якої використовується як випадкове збурення.

При статистичному моделюванні випадкових послідовностей звичайно використовують комбінації стандартних функцій або процедур генерування випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі $(0, 1)$ або розподілених за нормальним законом. У будь-якому випадку для обмежених вибірок числові характеристики генерованих послідовностей відрізняються від теоретичних, тому слід кожен генеровану послідовність стандартизувати, тобто звести до послідовності з параметрами середнє значення $\bar{V}_j = 0$, середнє квадратичне відхилення $S_j = 1$. Така операція виконується за формулами

$$u_{ij} = \frac{v_{ij} - \bar{V}_j}{S_j}, \quad (1)$$

де
$$\bar{V}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{ij}; \quad S_j^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n v_{ij}^2 - n \cdot \bar{V}_j^2 \right) \quad j=1, \dots, 4.$$

Таким чином, для стовпців матриці U слушні рівняння

$$\sum_{i=1}^n u_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^n u_{ij}^2 = (n-1) \quad j=1, \dots, 4. \quad (2)$$

Унаслідок обмеженої довжини вибірок матриця парних коефіцієнтів отриманої системи чотирьох випадкових величин відрізняється від діагональної. Щоб числові характеристики модельованої системи не відрізнялися від заданих, послідовність збурень u_{i4} має бути лінійно незалежною від кожного чинника системи. Для отримання послідовностей, декорельованих відносно збурення u_{i4} , слід обчислити всі парні коефіцієнти кореляції $\rho_{14}, \rho_{24}, \rho_{34}$ і перейти до нових змінних

$$z_{ij} = \frac{u_{ij} - \rho_{j4} \cdot u_{i4}}{\sqrt{1 - \rho_{j4}^2}} \quad j=1, 2, 3. \quad (3)$$

Після таких перетворень нові парні коефіцієнти кореляції $\rho_{14} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0$, хоч між змінними $z_j, j=1,2,3$ нові парні коефіцієнти кореляції відмінні від нуля і від таких до перетворень за формулами (3). Далі з елементами першого – третього стовпців будуть виконуватися лінійні перетворення, але лінійна комбінація незалежних чинників залишатиметься незалежною від збурення. Дійсно, розглянемо лінійну функцію трьох змінних $f_i = a_0 + a_1 z_{i1} + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3}$, причому $r_{14} = r_{24} = r_{34} = 0$ і $\sum_{i=1}^n u_{i4} = 0$. Обчислимо парний коефіцієнт кореляції між значеннями функції f_i і збурення u_{i4} :

$$\begin{aligned} r_{f4} &= \frac{1}{(n-1) \cdot S_f \cdot S_4} \sum_{i=1}^n (f_i - \bar{F}) \cdot (u_{i4} - \bar{U}_4) = \\ &= \frac{1}{(n-1) \cdot S_f \cdot S_4} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 z_{i1} + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3} - \\ &\quad - (a_0 + a_1 \bar{Z}_1 + a_2 \bar{Z}_2 + a_3 \bar{Z}_3)) u_{i4} = \\ &= \frac{1}{(n-1) \cdot S_f \cdot S_4} \left(a_0 \sum_{i=1}^n u_{i4} + a_1 \sum_{i=1}^n (z_{i1} - \bar{Z}_1) \cdot u_{i4} + \right. \\ &\quad \left. + a_2 \sum_{i=1}^n (z_{i2} - \bar{Z}_2) \cdot u_{i4} + a_3 \sum_{i=1}^n (z_{i3} - \bar{Z}_3) \cdot u_{i4} \right) = 0, \end{aligned}$$

бо перша сума дорівнює нулю, а кожна сума добутків є відповідним парним коефіцієнтом кореляції r_{j4} .

Для отримання системи трьох стандартизованих величин із заданою кореляційною матрицею використовується матриця перетворення трикутного виду [2]:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

причому без втрати загальності можна прийняти $p_{11} = 1$. Якщо модельована система трьох стандартизованих величин Z має парні коефіцієнти кореляції $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$, то для отримання симетричної матриці з парними коефіцієнтами кореляції r_{12}, r_{13}, r_{23} елементи матриці перетворення шукаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} p_{12} + p_{22}p_{12} = r_{12} \\ p_{13} + p_{23}p_{12} + p_{33}p_{13} = r_{13} \\ p_{12}p_{13} + p_{22}p_{23} + (p_{12}p_{23} + p_{22}p_{13}) \cdot p_{12} + \\ + p_{33} \cdot (p_{12}p_{13} + p_{22}p_{23}) = r_{23} \end{cases} \quad (5)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} p_{12}^2 + p_{22}^2 + 2p_{12}p_{22}p_{12} = 1 \\ p_{13}^2 + p_{23}^2 + p_{33}^2 + 2p_{13}p_{23}p_{12} + \\ + 2p_{13}p_{33}p_{13} + 2p_{23}p_{33}p_{23} = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язок першого рівняння з урахуванням першого обмеження має вигляд

$$p_{12} = r_{12} - p_{11} \cdot p_{12} \sqrt{\frac{1-r_{12}^2}{1-p_{12}^2}}; \quad p_{22} = \pm \sqrt{\frac{1-r_{12}^2}{1-p_{12}^2}}. \quad (7)$$

Формули (3) є окремим випадком формул (7) для випадку $r_{12}=0$. Як впливає з формул (7), для системи двох величин існують чотири варіанти матриць перетворення, які забезпечують розв'язання задачі – отримання послідовностей із заданим коефіцієнтом парної кореляції r_{12} . У табл. 1 наведені види матриць для випадку, коли система двох послідовностей має $p_{12}=0,30$, а результативна $r_{12}=0,70$.

Таблиця 1

Види матриць перетворення для $p_{12}=0,30$, $r_{12}=0,70$.

Матриця 1		Матриця 2		Матриця 3		Матриця 4	
1	0.475	1	0.925	-1	0.925	-1	0.475
0	0.749	0	-0.749	0	0.749	0	-0.749

Кінцеві формули для обчислення p_{13} , p_{23} , p_{33} є досить громіздкими, тому друге і третє рівняння системи (5) з другим обмеженням (6) розв'язуються наближеними числовими методами. Залежно від початкових значень для кожної пари (p_{12}, p_{22}) існують два розв'язки системи, кожен з яких забезпечує потрібні значення коефіцієнтів парної кореляції. У

табл. 2 наведені приклади кореляційних матриць вихідної та результативної систем і варіанти матриць перетворення.

Таблиця 2

Приклади матриці перетворення системи трьох величин

Вихідна кореляційна матриця			Матриця перетворення 1			Матриця перетворення 2			Результативна матриця		
1	0.3	0.2	1	0.48	0.41	1	0.48	0.72	1	0.7	0.6
0.3	1	0.1	0	0.75	0.08	0	0.75	0.15	0.7	1	0.5
0.2	0.1	1	0	0	0.81	0	0	-0.81	0.6	0.5	1

Для систем із більшою кількістю випадкових величин матрицю перетворення виду (4) можна шукати з використанням матричних рівнянь [1].

Після знаходження елементів матриці перетворення елементи системи трьох випадкових величин із заданою кореляційною матрицею знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} y_{i1} &= p_{11} \cdot z_{i1} \\ y_{i2} &= p_{12} \cdot z_{i1} + p_{22} \cdot z_{i2} \\ y_{i3} &= p_{13} \cdot z_{i1} + p_{23} \cdot z_{i2} + p_{33} \cdot z_{i3}. \end{aligned} \quad (8)$$

У процесі перетворень за формулами (8) нові чинники у $ij, i=1 \dots n, j=1, \dots, 3$ залишаються стандартизованими.

При дослідженні впливу кожного фактора окремо при незмінних інших факторах використовуються частинні коефіцієнти кореляції q_{kj} , які виражаються через елементи оберненої матриці, яка сама виражається через алгебраїчні доповнення до кореляційної матриці [3]. Так, для системи трьох чинників частинний коефіцієнт кореляції, наприклад q_{23} , обчислюється за формулою

$$q_{23} = \frac{r_{23} - r_{12} \cdot r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}. \quad (9)$$

Як випливає з формули (9), частинний коефіцієнт дорівнює нулю, якщо $r_{23} = r_{12} \cdot r_{13}$, і ніколи не дорівнює одиниці, бо при цьому визначник кореляційної матриці стає рівним нулю і обернена матриця не існує. Отже, задаючи співвідношення між елементами r_{kj} кореляційної матриці, можна отримати потрібні значення частинних коефіцієнтів кореляції.

Елементи системи випадкових величин із заданими параметрами $\bar{X}_j$, S_j – середні значення і середні квадратичні відхилення кожного чинника – обчислюють за формулою

$$x_{ij} = y_{ij} \cdot S_j + \bar{X}_j, \quad (10)$$

а значення f_i функції від цих чинників – за формулою

$$f_i = a_0 + a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + a_3 \cdot x_{i3} + k \cdot u_{i4}, \quad (11)$$

де $\vec{A}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ – вектор заданих параметрів лінійної функції трьох змінних.

Останній доданок у сумі (11) дозволяє отримати функцію регресії із заданим наперед коефіцієнтом детермінації R^2 , який з урахуванням формул (2) дорівнює

$$R^2 = \frac{S_f^2}{S_f^2 + k^2}, \quad (12)$$

де S_f^2 – статистична дисперсія значень функції регресії без випадкових збурень, яку можна знайти або безпосередньо за обчисленими даними, або за формулою

$$S_f^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + 2 \cdot (C_1 \cdot C_2 \cdot r_{12} + C_1 \cdot C_3 \cdot r_{13} + C_2 \cdot C_3 \cdot r_{23}). \quad (13)$$

В останній формулі $C_j = a_j \cdot S_j$, $j = 1, 2, 3$ – добутки відповідних коефіцієнтів регресії та статистичних середніх квадратичних відхилень.

При статистичному аналізі систем випадкових величин додаткову інформацію можна отримати при аналізі розширеної кореляційної матриці, яка включає до себе також парні коефіцієнти кореляції між чинниками і функцією f . Обчислимо, наприклад, парний коефіцієнт r_{3f} :

$$r_{3f} = \frac{1}{(n-1) \cdot S_3 \cdot S_f} \sum_{i=1}^n (f_i - \bar{F})(x_{i3} - \bar{X}_3) = \dots = \frac{C_1 \cdot r_{13} + C_2 \cdot r_{23} + C_3}{S_f}. \quad (14)$$

Якщо r_{3f} дорівнює нулю, це не значить, що коефіцієнт $a_3 = 0$ і відповідний чинник x_3 не впливає на функцію. Цей вплив відбувається опосередковано, через інші чинники і відповідні парні коефіцієнти кореляції. При $r_{3f} = 0$ коефіцієнт регресії

$$a_3 = \frac{-C_1 \cdot r_{13} - C_2 \cdot r_{23}}{S_3}, \quad (15)$$

і відповідною зміною величини S_3 завжди можна знайти потрібне значення a_3 , при якому $r_{3f} = 0$.

З іншого боку, частинні коефіцієнти кореляції $q_{j|f}$ обчислені за розширеною матрицею, можуть дорівнювати нулю тільки у випадку, коли відповідний коефіцієнт регресії $a_{jf}=0$. Обчислимо, наприклад, мінор M_{1f} , через який виражається частинний коефіцієнт кореляції q_{1f} ,

$$M_{1f} = \begin{vmatrix} r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \\ r_{1f} & r_{2f} & r_{3f} \end{vmatrix} =$$

$$= r_{1f} \cdot (1 - r_{23}^2) + r_{2f} \cdot (r_{13} \cdot r_{23} - r_{12}) + r_{3f} \cdot (r_{12} \cdot r_{23} - r_{13}).$$

Після підстановки відповідних виразів, обчислених за формулою (14), отримаємо

$$M_{1f} = \frac{C_1}{S_f} (-r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12} \cdot r_{13} \cdot r_{23}). \quad (16)$$

Вираз у дужках є визначником кореляційної матриці чинників, отже не може дорівнювати нулю. Тому мінор, а отже і відповідний частинний коефіцієнт кореляції розширеної матриці може дорівнювати нулю тільки за умови $a_1=0$.

Таблиця 3

**Приклад моделі системи випадкових величин
із заданими характеристиками**

		Система трьох випадкових величин				Парні коефіцієнти кореляції			
		X_1	X_2	X_3	F	X_1	X_2	X_3	
1	3.59	6.58	3.19	42.8	X_1	1	0.80	0.50	
2	6.67	5.92	6.06	36.8	X_2	0.80	1	0.40	
3	6.71	3.07	6.40	26.5	X_3	0.50	0.40	1	
4	0.81	-0.05	-0.94	5.22	Частинні коефіцієнти				
5	0.42	-0.12	2.08	6.68		X_1	X_2	X_3	
6	8.36	5.51	1.06	68.6	X_1	1	0.75	0.32	
7	7.02	8.49	1.44	49.3	X_2	0.75	1	0.00	
8	2.91	0.16	-0.65	31.8	X_3	0.32	0.00	1	
9	8.53	6.81	2.07	48.2	Розширена матриця				
10	2.60	2.72	2.95	27.7		X_1	X_2	X_3	F
11	4.03	3.40	4.98	32.6	X_1	1	0.80	0.50	0.70
12	9.55	6.71	8.56	29.5	X_2	0.80	1	0.40	0.74

Середні	5.10	4.10	3.10	33.8	X_2	0.50	0.40	1	0.00
Сер. кв. відх.	3.10	3.00	2.90	17.6	F	0.70	0.74	0.00	1

Висновки. Наведені алгоритми легко реалізуються з використанням табличного процесора MS Excel або алгоритмічної мови. У табл. 3 наведено приклад одного з варіантів системи трьох випадкових величин і параметри системи.

У табл. 3 жирним шрифтом виділені задані величини середніх значень чинників X_j і середніх квадратичних відхилень S_j . Матриця парних коефіцієнтів кореляції містить задані значення $r_{12}=0,80$, $r_{13}=0,50$. Оскільки $r_{23} = r_{12} \cdot r_{13}$, відповідно до формули (9) частинний коефіцієнт кореляції $q_{23}=0,00$, тобто при незмінному x_1 величини x_2 та x_3 є незалежними.

У табл. 4 наведені результати роботи стандартної статистичної функції ЛИНЕЙН табличного процесора MS Excel.

У першому рядку таблиці подано задані параметри регресії $a_0=15,0$, $a_1=3,10$ і $a_2=2,90$, а також обчислене за формулою (15) значення $a_3=-2,86$, унаслідок чого в розширеній кореляційній матриці $r_{3f} = 0,00$. Коефіцієнт детермінації рівняння регресії (виділене в табл. 4 жирним шрифтом) дорівнює заданому $R^2=0,750$, для чого в формулі (12) використано значення множника $k^2=8,82$.

Таблиця 4

Результати роботи функції ЛИНЕЙН

	X_3	X_2	X_1	Вільний член
a_j	-2.86	2.90	3.10	15.0
S_{aj}	1.241	1.732	1.774	6.01
R^2	0.750	10.34		
	7.997	8		
	2565	855.3		

Описаний алгоритм використовується при формуванні банку індивідуальних завдань із дисциплін, що читаються у ВНЗ. Перевірка складених за таким алгоритмом завдань не викликає ускладнень, і основна увага при захисті робіт звертається на розуміння змісту отриманих результатів. Крім того, можливість моделювати системи з відомими характеристиками важлива при дослідженні впливу різних методів обробки результатів спостережень і оцінці похибок, які вони привносять, напри-

лад при застосуванні методів зменшення впливу гетероскедастичності даних чи їх мультиколінеарності.

Бібліографічні посилання

1. **Айвазян С. А.** Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М., 1998.
2. **Єрмаков С. М.** Курс статистического моделирования / С. М. Єрмаков, Г. А. Михайлов. – М., 1976.
3. **Назаренко О. М.** Основи економетрики: підручник/ О. М. Назаренко – К., 2004.

Надійшла до редколегії 11.11.2012 р

УДК 338:519.876.5

М.Г. ²Бердник, В.О. Луценко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПОЖИВЧОГО КОШИКА ДЛЯ ОБМЕЖЕНОГО БЮДЖЕТУ

Побудована загальна функція корисності за продуктами споживання; поставлена задача оптимізації знаходження кількості продуктів харчування з урахуванням їх вітамінного складу та обмеженням на бюджет; розроблена програма; знайдена оптимальна кількість продуктів харчування для обраного споживчого кошика.

Построена общая функция полезности по продуктам потребления; поставлена задача оптимизации поиска количества продуктов питания с учетом их витаминного состава и ограничения на бюджет; разработана программа ; найдено оптимальное количество продуктов питания для выбранной потребительской корзины.

The work that was done: a general utility function of the consumer products was built; optimization task of search for food according to their vitamin content and restriction on the budget was set; the program was developed; the optimum amount of food for selected consumer basket was found.

Ключові слова: споживчий кошик, функція корисності, крива Гомперця, вітаміни.

Вступ. Для повноцінного функціонування організму людина потребує цілого комплексу вітамінів. Вітаміни – це органічні речовини, які характеризуються високим рівнем біологічної активності. Багато вітамінів включаються до складу ферментів, що використовуються при перебігу різних біологічних процесів в організмі. Також вітаміни можуть безпосередньо впливати на залози внутрішньої секреції, що є ще одним механізмом регулювання внутрішньої діяльності організму. Нестача вітамінів (авітаміноз) або надлишок (гіпервітаміноз) можуть призводити до порушень діяльності організму, бути причиною зниження імунітету і загальної млявості. Виходячи з цього для нас дуже важливо регулювати кількість вітамінів, яку ми споживаємо за певний проміжок часу. Існуючий розроблений на держав-

ному рівні мінімальний споживчий кошик [6] за харчовими продуктами може бути суттєво вдосконалений без зміни фінансових витрат на нього за рахунок математичного моделювання оптимальної конфігурації продуктів з урахуванням їх складу, добових норм споживання вітамінів людиною.

Соціально-економічні умови, що змінилися, з особливою гостротою підкреслили виняткову роль вітамінологічних знань і досвіду в житті людей. Індустріалізація спричинила збільшення частки рафінованих і консервованих продуктів харчування, що мають меншу вітамінну цінність. Дефіцит вітамінів викликаний багатьма факторами, але найважливішим є невисокий прожитковий мінімум значної частини населення, що впливає на кількість та якість їжі. Особливо складно людині без спеціальних знань визначити свої потреби залежно від свого матеріального стану. Тому впровадження спеціального програмного забезпечення для населення є досить ефективним і швидким вирішенням проблеми.

Можна зазначити, що дослідженням даної проблеми приділяє увагу широке коло науковців та практиків. Зокрема, можна назвати таких дослідників даного питання, як Л. Новосельська, Ю. Цігуш [3], С. Синчук [5]. Активне обговорення даної теми здійснює Федерація профспілок України [7].

У цих наукових працях завдання вибору оптимального харчування зі збалансованим вмістом вітамінів зводилося до задачі лінійного або нелінійного програмування, де невідомими була безпосередньо загальна кількість вітамінів. Особливість представленого методу в даній роботі полягає в тому, що критерієм оптимальності виступає функція корисності вітамінів.

Постановка задачі. Метою роботи є створення математичної моделі та програмного забезпечення для обчислення оптимальної кількості продуктів споживання щодо їхнього вітамінного складу на задану суму грошей та для заданої вікової категорії.

У даній роботі побудуємо математично програмне забезпечення розрахунку кількості продуктів, які можна купити за задану суму грошей і в якій буде міститися оптимальна кількість вітамінів. Для цього знадобиться: побудувати функцію корисності залежно від кількості вітамінів; побудувати загальну функцію корисності за продуктами споживання; сформулювати завдання оптимізації для отримання оптимальної кількості продуктів споживання щодо їх вітамінного складу на задану суму грошей.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглянемо споживача, що купує n видів продуктів (продукти, які входять до споживчого кошика, такі як молоко, м'ясо й ін.) за одиницю часу. Позначимо кількість

купленого i -го продукту за одиницю часу через $x_i, x_i > 0$. Нехай для визначеності $[x_i] = \frac{z}{\partial n}$, де за одиницю часу береться обраний день. На

n -мірному евклідовому просторі R^n виділимо множину точок:

$$R_+^n = \left\{ \vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_i > 0 \right\}. \text{ Точка } \vec{x} - \text{це вектор продуктів, а}$$

координати x_i означають кількість грамів i -го продукту, купленого споживачем за один день. Область R_+^n будемо називати продуктовим простором. Нехай p_i - ціна продукту i -го виду, $p_i > 0$, $[p_i] = \frac{z p_i}{z}$. Споживач

витрачає z гривень за день на придбання продуктів, $[z] = \frac{z p_i}{\partial n}$. Як резуль-

тат отримуємо $\sum_{i=0}^{n-1} p_i x_i = z, z > 0$.

Очевидно, що на суму z можна придбати різноманітні конфігурації продуктів споживчого кошика. Тому зі всіх варіантів закупівель споживач повинен обрати найкращий. Для цього покупець повинен обрати стратегію закупівель. Перед тим як закупити продукти, споживачу необхідно оцінити значущість кожного з них, а також необхідність його придбання, описавши це кількісно. Для цього на просторі R_+^n визначаємо функцію корисності:

$$P\left(\vec{x}\right) = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), P: R_+^n \rightarrow R^1.$$

$$P\left(\vec{x}\right) - \text{корисність набору продуктів } \vec{x} \text{ придбаних споживачем.}$$

Треба знайти таку кількість продуктів, за якої буде отримана максимальна корисність для людини й будуть витрачені всі гроші, які людина збирається витратити. Для цього необхідно максимізувати функцію корисності для продуктів харчування залежно від вмісту вітамінів у них за умови, що всі гроші витрачені на закупівлю необхідної кількості продуктів харчування.

Таким чином, задача зводиться до знаходження вектора $\vec{x}$ продуктів харчування із розв'язку задачі нелінійного програмування.

Знайти $\max P\left(\vec{x}\right)$ за умови $\sum_{i=0}^{n-1} p_i x_i = z$, де $\vec{x} \in R_+^n$. Побудуємо функцію корисності $P\left(\vec{x}\right)$, базуючись на вітамінному складі продуктів харчування і на функції корисності для j -го вітаміну.

У даній роботі сфокусуємося лише на одному виді біоактивних речовин – вітамінах. Серед усіх вітамінів було виділено 11, які споживач повинен вживати щодня [4]: вітамін А, вітамін С, вітамін D, вітамін Е, вітамін В1 (тіамін), вітамін В2 (рибофлавін), вітамін В3 (ніацин, рр), вітамін В6, вітамін В9 (фолієва кислота), вітамін В12, вітамін К.

За базову функцію корисності окремого вітаміну оберемо криву Гомперца [2]. Крива Гомперца використовується в основному для опису процесів із насичення і є дуже поширена в демографії, маркетингу, дослідженні ринку, збуту продукції. Вона має такий вигляд: $y = e^{\alpha\beta^{\vartheta} + \gamma}$, де $0 < \beta < 1$.

Функція корисності P_j для j -го вітаміну має вигляд $P_j = e^{\alpha_j \beta_j^{\vartheta_j} + \gamma_j}$, де $j = 1..11$ – індекси вітамінів (табл. 1), $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ – коефіцієнти кривої Гомперца для j -ого вітаміну, ϑ_j – кількість j -го вітаміну.

Таблиця 1

Індекси вітамінів

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вітамін	A	C	D	E	B1	B2	B3	B6	B9	B12	K

Функція корисності для вітаміну залежить лише від кількості споживання вітаміну за добу. У роботі [2] був описан процес побудови функції корисності по кожному вітаміну.

Використовуючи норму та верхній рівень споживання для кожного вітаміну розрахуємо коефіцієнти $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ для функцій корисності за вітамінами (див. [2]). До розгляду беруться 17 різних категорій населення [4] (див. табл.2).

Таблиця 2

Категорії населення

№ з/п	Категорія
1	0-3 місяці (немовлята)
2	4-6 місяців (немовлята)
3	7-12 місяців (хлопчики та дівчатка)
4	1-3 роки (хлопчики та дівчатка)
5	4-6 років (хлопчики та дівчатка)
6	6 років, учні (хлопчики та дівчатка)
7	7-10 років (хлопчики та дівчатка)
8	11-13 років (хлопчики)
9	11-13 років (дівчатка)
10	14-17 років (хлопці)
11	14-17 років (дівчата)
12	18-59 років (1-4 групи інтенсивності праці), чоловіки
13	60-74 років (чоловіки)
14	75 років (чоловіки)
15	18-54 років (1-4 групи інтенсивності праці), жінки
16	55-74 років (жінки)
17	75 років (жінки)

Протягом доби споживач купує продукти харчування $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, які містять у собі вітаміни $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$. Нехай в одному грамі i -го продукту міститься $a_s^{(i)}$ грамів вітаміну s -го виду; тоді продукт харчування x_i містить $b_{si} = a_s^{(i)} x_i$ грамів s -го вітаміну. Додаючи за всіма видами продуктів харчування, отримуємо кількість вітамінів s -го виду, які містяться в усіх куплених продуктах $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$: $v_s = \sum_{i=0}^{n-1} b_{si} = \sum_{i=0}^{n-1} a_s^{(i)} x_i$. Підставляючи значення v_s , отримуємо функцію корисності s -го вітаміну

для продуктів харчування: $\Pi_s = e^{\alpha_s \beta_s \sum_{i=0}^{n-1} a_s^{(i)} x_i + \gamma_s}$.

Маючи окремі функції корисності для обраної групи вітамінів і беручи до уваги принципи побудови функції корисності [2], побудуємо функцію корисності $\Pi \left(\vec{x} \right)$ для продуктів харчування:

$$\Pi \left(\vec{x} \right) = \sum_{s=0}^{10} \Pi_s = \sum_{s=0}^{10} e^{\alpha_s \beta_s \sum_{i=0}^{n-1} a_s^{(i)} x_i + \gamma_s}.$$

Таким чином, математично задача звелась до знаходження максимуму функції корисності:

$$\Pi \left(\vec{x} \right) = \sum_{s=0}^{10} e^{\alpha_s \beta_s \sum_{i=0}^{n-1} a_s^{(i)} x_i + \gamma_s} \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^n p_i x_i = z \text{ де } \vec{x} \in R_+^n.$$

Для того щоб запобігти перевищенню максимального рівня споживання вітамінів, накладемо додаткові обмеження на функції корисності по вітамінах $\Pi_j < \delta_j$ (δ_j - знаходиться емпіричним шляхом у проміжку 0.5-0.99).

Була розроблена програма, яка використовує надбудову Excel «Поиск решения», за допомогою якої обчислюється раціональний споживчий кошик. Програму може використовувати будь-який користувач, який має

систему Microsoft Windows 2000, 2003, XP, Vista або 7_й чи 8_й встановлений офіс.

Для обраних вітамінів будемо розглядати 13 категорій населення (з 5_ї по 17_ту – перші 4 категорії не будемо використовувати через специфіку продуктів споживання для них). Сума бюджету буде складати 70 грн. За споживчий кошик беремо такий (див. табл. 1), а масову частку вітамінів у продуктах споживання беремо з [1;6].

Таблиця 3

Споживчий кошик	
№ з/п	Продукт
1	Молоко, пастеризоване (3,2%)
2	Яйце (смажене)
3	Яловичина (відварена)
4	Квасоля (відварена)+сіль
5	Рис (каша)
6	Хліб «Бородинський»
7	Картопля (запечена) + сіль
8	Горох
9	Печінка куряча (смажена з невеликою кіль_тю жиру)
10	Яблуко
11	Помідор (консервований, зі шкіркою)
12	Огірок (сирий, зі шкіркою)
13	Масло вершкове (без солі, 81% жиру)
14	Шоколад темний (60-69%)
15	Чай трав'яний, ромашковий

Результати подамо у вигляді діаграм: порівняння кількості вітамінів для різних категорій, порівняння значень функцій корисності та порівняння кількості продуктів залежно від розміру бюджету.

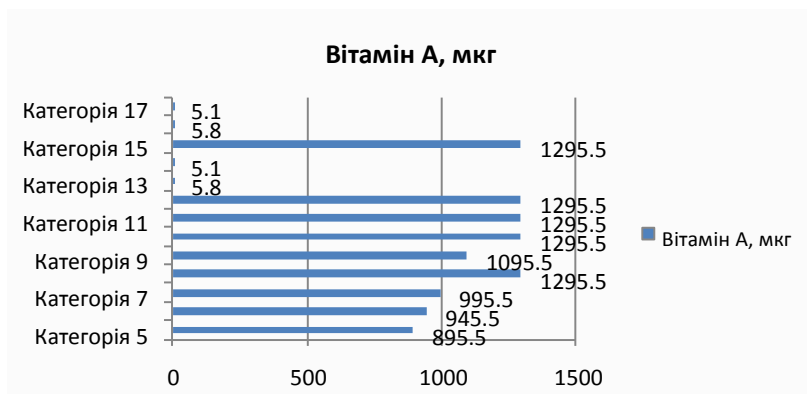


Рис.1. Кількість вітаміну А для 5–17-ї категорій населення



Рис.2. Кількість вітаміну С для 5–17-ї категорій населення

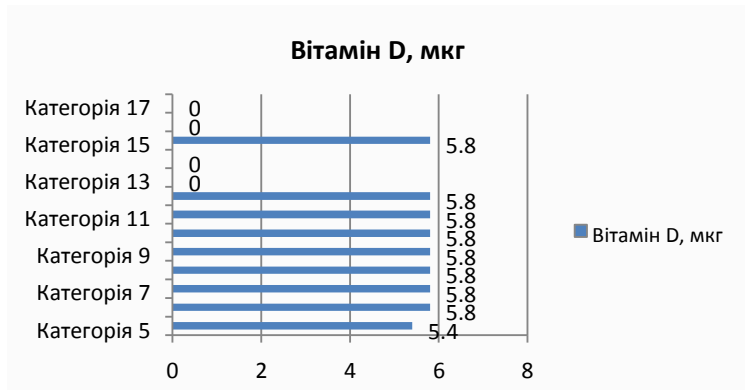


Рис.3. Кількість вітаміну D для 5–17-ї категорій населення

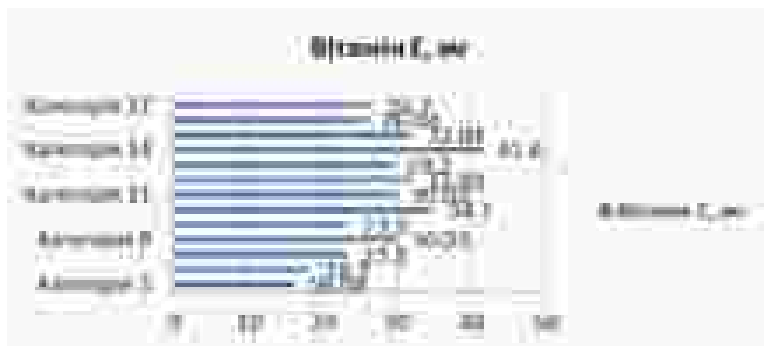


Рис.4. Кількість вітаміну Е для 5–17.ї категорій населення

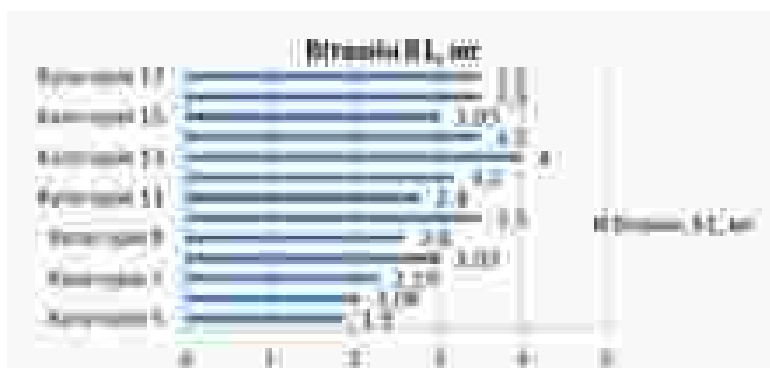


Рис.5. Кількість вітаміну В1 для 5–17.ї категорій населення

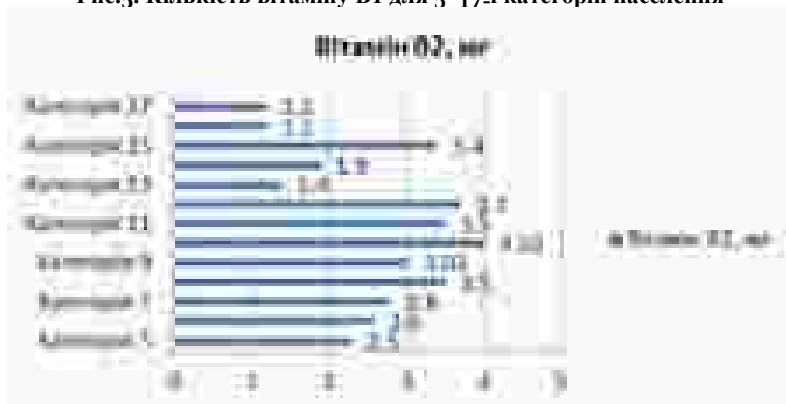


Рис.6. Кількість вітаміну В2 для 5–17.ї категорій населення

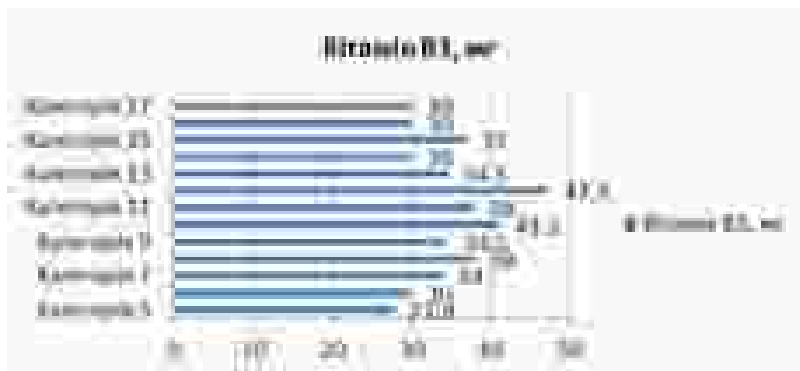


Рис.7. Кількість вітаміну В3 для 5–17-ї категорій населення

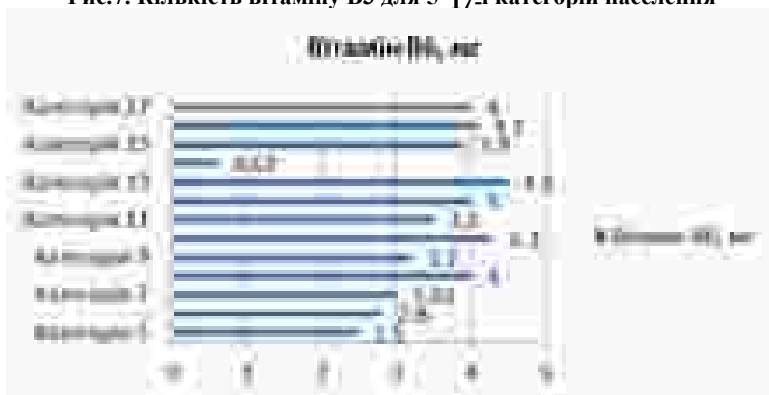


Рис.8. Кількість вітаміну В6 для 5–17-ї категорій населення

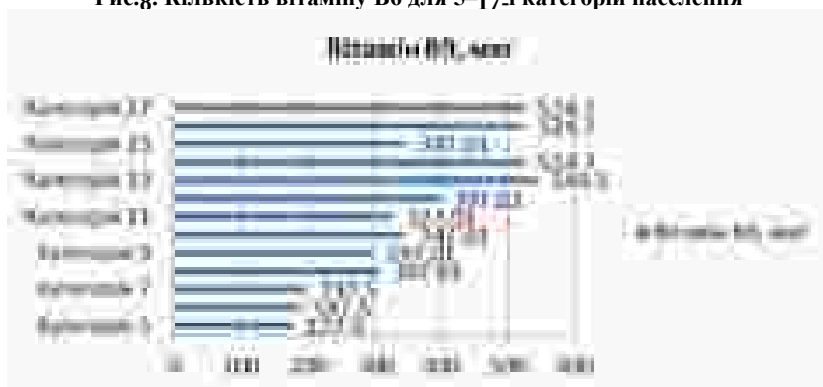


Рис.9. Кількість вітаміну В9 для 5–17-ї категорій населення

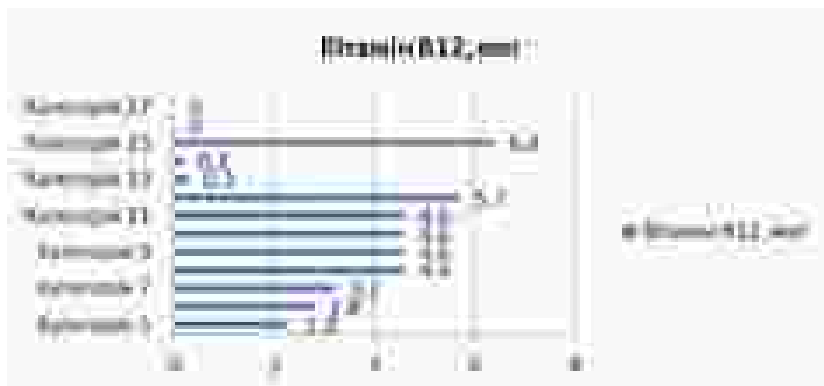


Рис.10. Кількість вітаміну В12 для 5–17-ї категорій населення

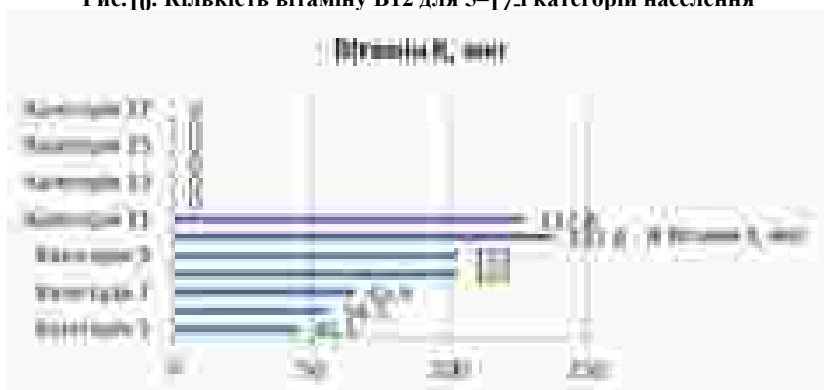


Рис.11. Кількість вітаміну К для 5–17-ї категорій населення



Рис.12. Значення функції корисності для 5–17-ї категорій населення

Тепер покажемо порівняння набору продуктів для різних категорій при зміні бюджету: 30 грн, 40 грн, 50 грн, 60 грн та 70 грн.

Категорія 5

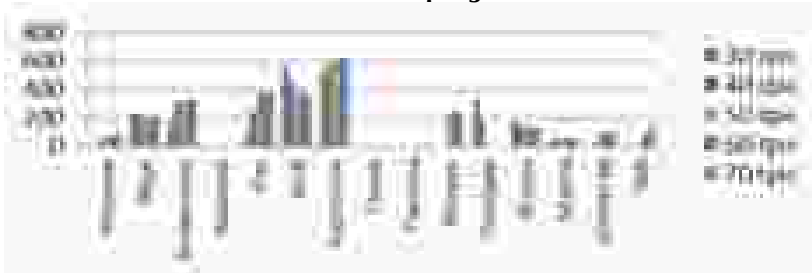


Рис.13. Кількість продуктів харчування для 5-ї категорії населення

Категорія 6

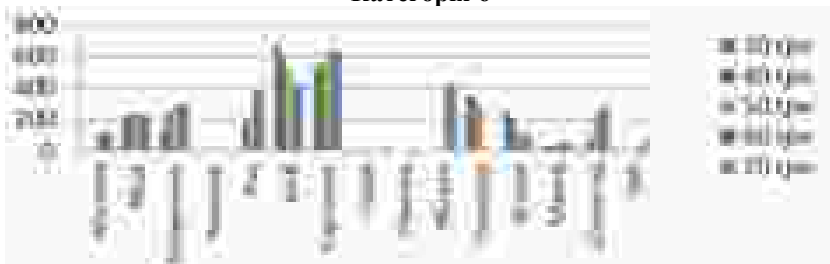


Рис.14. Кількість продуктів харчування для 6-ї категорії населення

Категорія 7

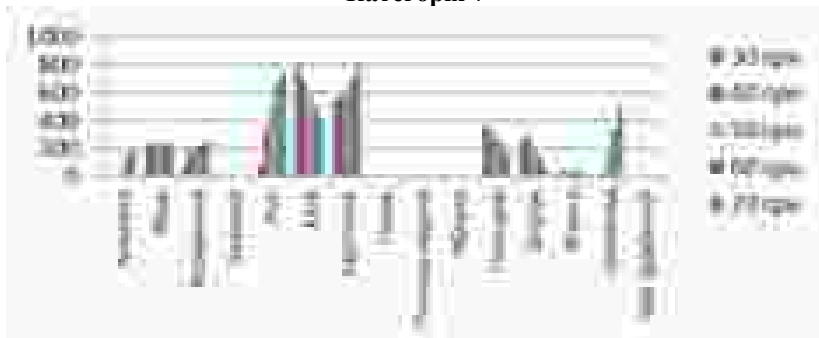


Рис.15. Кількість продуктів харчування для 7-ї категорії населення

Категорія 8

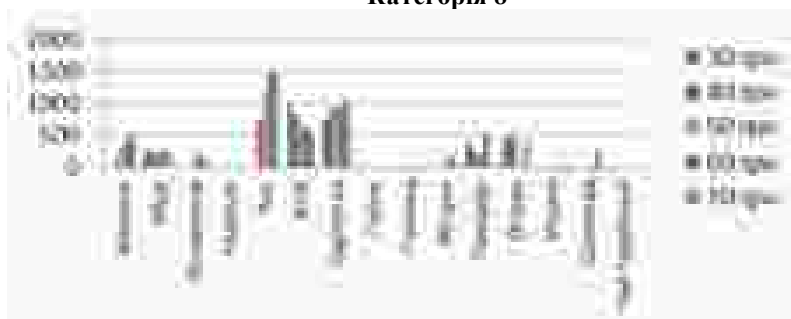


Рис.16. Кількість продуктів харчування для 8-ї категорії населення

Категорія 9

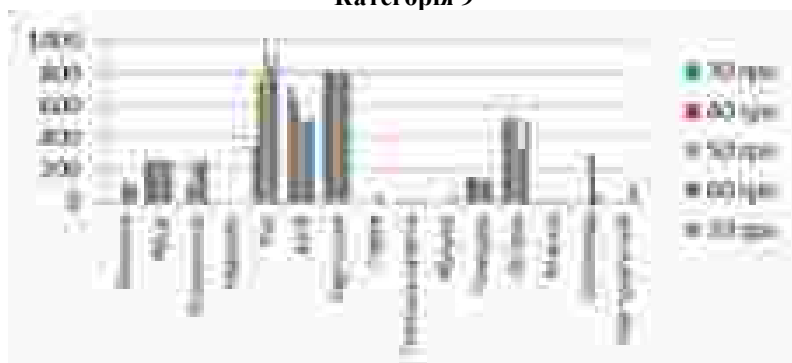


Рис.17. Кількість продуктів харчування для 9-ї категорії населення

Категорія 10

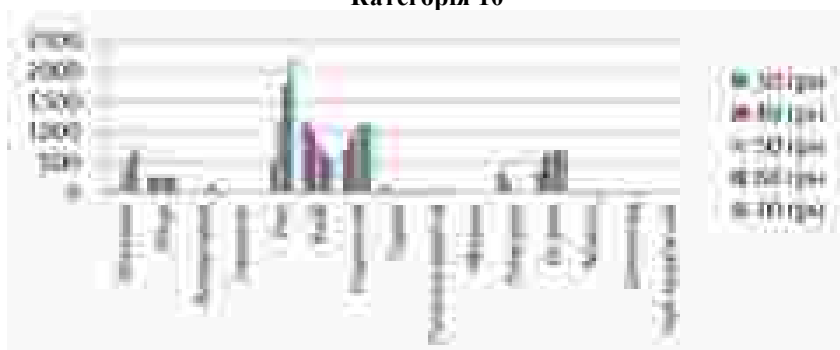


Рис.18. Кількість продуктів харчування для 10-ї категорії населення

Категорія 11

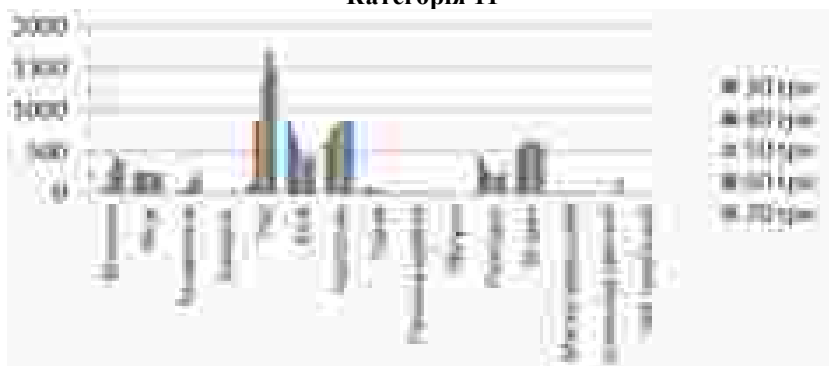


Рис.19. Кількість продуктів харчування для 11-ї категорії населення

Категорія 12

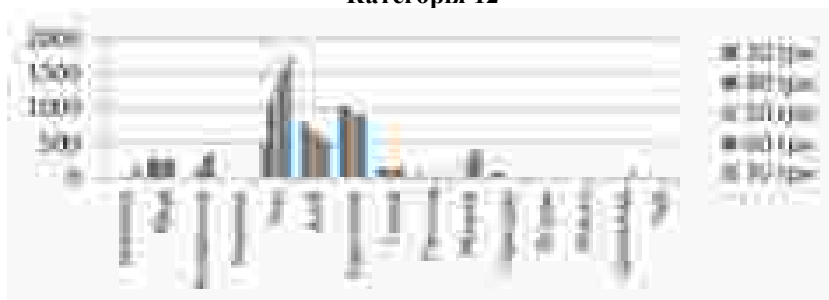


Рис.20. Кількість продуктів харчування для 12-ї категорії населення

Категорія 13

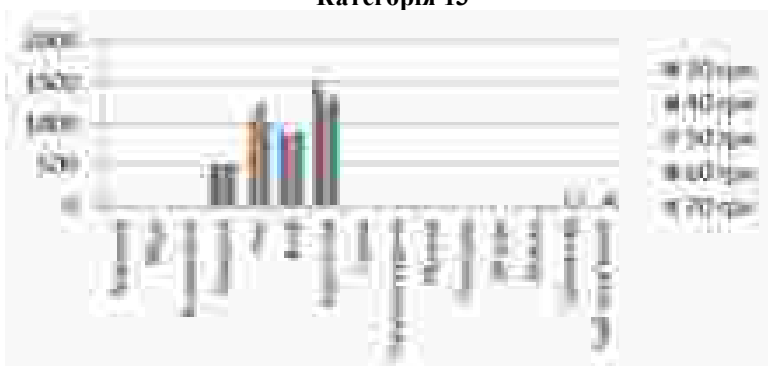


Рис.21. Кількість продуктів харчування для 13-ї категорії населення

Категорія 14



Рис.22. Кількість продуктів харчування для 14.ї категорії населення

Категорія 15

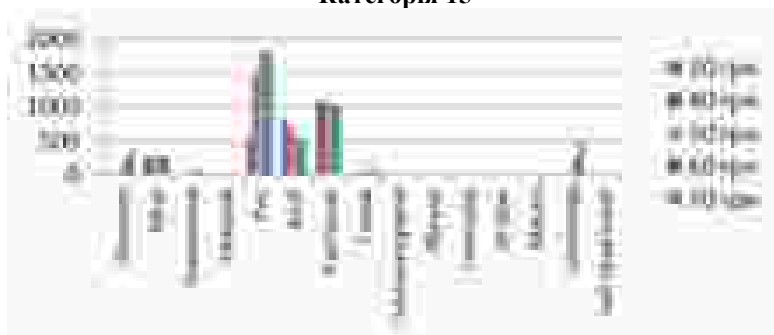


Рис.23. Кількість продуктів харчування для 15.ї категорії населення

Категорія 16

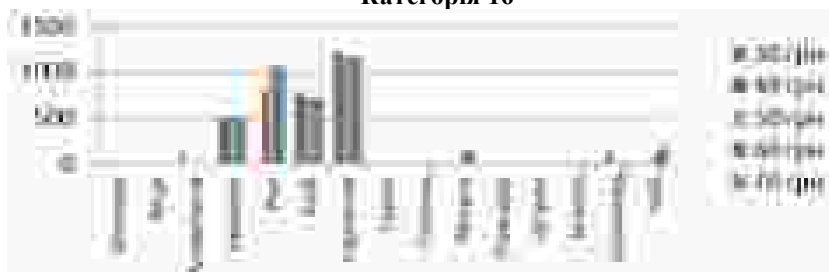
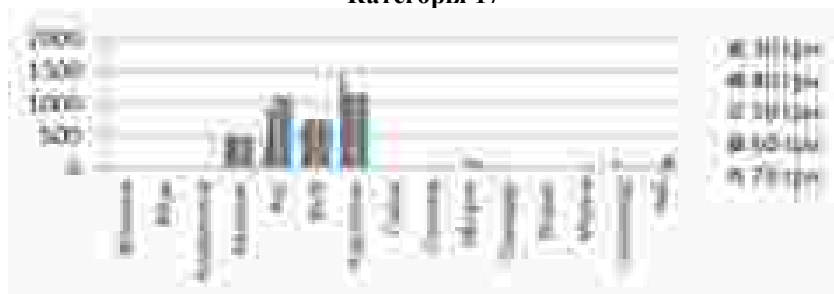


Рис.24. Кількість продуктів харчування для 16.ї категорії населення

Категорія 17



М. Г. ³Бердник, О. С. Сімчак

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО СПОЖИВЧОГО КОШИКА ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ПРІОРИТЕТІВ

Побудовано функції корисності залежно від вікової групи для 13 вітамінів. Сформульовано задачу багатокритеріальної оптимізації для вибраної кількості продуктів. На основі методу пріоритетів розроблено алгоритм розв'язку для отримання оптимального споживчого кошика на досліджуваній групі вітамінів.

Построены функции полезности в зависимости от возрастной группы для 13 витаминов. Сформулирована задача многокритериальной оптимизации для выбранного количества продуктов. На основе метода приоритетов разработан алгоритм решения для получения оптимального потребительской корзины на исследуемой группе витаминов.

This work deals with modeling of rational consumer basket problems, using the utility function, as well as the algorithms of their solution. These algorithms are based on the method of prioritization (multicriteria optimization). There was created a program complex that implements these algorithms for 13 most essential vitamins, selected food products and the given amount of money.

Ключові слова: вітаміни, функція корисності, багатокритеріальна оптимізація, метод пріоритетів, продукти харчування, крива Гомперца, множина Парето.

Вступ. У нашому світі кожна людина бажає бути здоровою та жити довго. На жаль, сучасна екологія, шкідливі звички та надто швидкий темп життя скорочують вік людей, спричиняють хвороби та серйозні проблеми зі здоров'ям, що можуть призвести до фатальних наслідків.

За інформацією ООН, Україна знаходиться на 17-му місці у списку країн, упорядкованих за зниженням загального коефіцієнта смертності.

Існує багато факторів, які впливають на рівень смертності у нашій державі: низький рівень заробітної плати, соціально-політичний статус

людей та інші. Окремо можна виділити фактор неякісного харчування: харчові добавки, генно модифіковані продукти, що містяться у повсякденній їжі, псують здоров'я та вкорочують вік людей.

Щоб уникнути цього та зменшити вплив негативних факторів на організм, кожна людина, незалежно від віку та статі, повинна підтримувати свій імунітет на належному рівні. Одним із найефективніших і найпростіших способів досягнення цієї мети є забезпечення правильного та здорового харчування.

Більшість продуктів харчування містять вітаміни – органічні сполуки, які відіграють дуже важливу роль в обміні речовин в організмі людини. Нестача вітамінів може спричиняти як незначне погіршення самопочуття, так і серйозні захворювання, тому необхідно постійно забезпечувати організм достатньою кількістю вітамінів. Кожен із них має свою добову норму споживання, встановлену Міністерством охорони здоров'я, яку можна забезпечити, вживаючи вітамінні препарати. Але, ураховуючи сучасні ціни на ліки, можна зробити висновок, що не кожна сім'я може дозволити собі постійно виділяти гроші на дані препарати. Вирішити цю проблему можна, оптимізувавши добовий раціон людини таким чином, щоб забезпечити організм потрібною кількістю вітамінів залежно від віку та статі і при цьому не вийти за рамки сімейного бюджету.

Тому постає задача про моделювання раціонального споживчого кошика, який буде містити найбільш уживані продукти харчування за усіма основними вітамінами та на задану суму грошей. Результат розв'язку цієї задачі буде корисним для усіх категорій населення й може стати в нагоді у медичних дослідженнях.

Можна зазначити, що дослідженню даної проблеми приділяє увагу широке коло науковців і практиків. Зокрема, варто відзначити таких дослідників цього питання, як А.К. Писаревська [2], С.К. Кучеренко, Г.П. Шпатаук [1]. Удосконаленням методики визначення споживчого кошика опікується також Національний інститут стратегічних досліджень при Президентіві України [6].

У більшості наукових праць завдання вибору оптимального харчування зі збалансованим вмістом вітамінів зводилися до задачі лінійного або нелінійного програмування, де за невідоме обиралася безпосередньо загальна кількість вітамінів. Особливістю методу, представленого в даній роботі, полягає в тому, що критерієм оптимальності є загальна функція корисності вітамінів, яка, у свою чергу, складається з часткових функцій корисності для кожного вибраного вітаміну.

Постановка задачі. Метою роботи є створення математичної моделі, яка дозволяє обчислювати оптимальну кількість продуктів споживання для отримання максимальної корисності по вітамінах. Необхідно знайти такі продукти із запропонованих у споживчому кошику та їх кількість, які будуть приносити максимальну користь для людини, але водночас відповідатимуть сумі грошей, запланованій на витрати.

Одним із способів вирішення цієї проблеми є постановка такої задачі, яка спирається не тільки на експериментальні дані, але й на точні математичні розрахунки, тобто задачі оптимізації. Оскільки мова йде про максимізацію корисності раціону з огляду на його вітамінний комплекс, то доцільно розглядати оптимізацію харчування не за кожним вітаміном окремо, а за сукупністю всіх необхідних вітамінів, щоб збалансувати їхню кількість у вихідному споживчому кошику і покращити точність результату. Для вирішення даної проблеми пропонується розглянути задачу багатокритеріальної оптимізації, де критеріями будуть функції корисності за кожним вибраним вітаміном.

У даній роботі побудуємо програмно-математичне забезпечення розрахунку оптимальної кількості продуктів, яку можна купити за поставлену кількість грошей і в якій буде міститись найбільш збалансована кількість вітамінів. Для цього знадобиться: побудувати функції корисності для кожного з вибраних вітамінів; сформулювати задачу багатокритеріальної оптимізації для отримання оптимальної кількості продуктів споживання щодо їх вітамінного складу на задану суму грошей; використовуючи метод пріоритетів, розробити алгоритм багатокритеріальної оптимізації. Обчислимо оптимальну кількість продуктів споживання з урахуванням вітамінного складу та обмеженням на бюджет.

Метод розв'язання. Розглянемо споживача, що купує n видів продуктів (продукти, які входять до споживчого кошика, такі як молоко, м'ясо, риба і т.ін.) за одиницю часу. Позначимо кількість придбаного i -го продукту за одиницю часу через x_i , $x_i > 0$. Нехай для визначеності фізична розмірність $[x_i] = \frac{e}{\partial n}$, де за одиницю часу обраний день.

На n -мірному евклідовому просторі R^n виділимо множину точок $R_+^n = \left\{ \vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_i > 0 \right\}$. Точка $\vec{x} \in R_+^n$ позначає вектор

продуктів, а координата $\vec{x}_i$ точки $\vec{x}$ означає кількість грамів i -го продукту, придбаного споживачем за один день. Область $R_+^n \in R^n$ будемо називати продуктовим простором.

Нехай p_i – ціна (грн) продукту i -го виду за 1г, $p_i > 0$. Споживач витрачає z гривень за одиницю часу на придбання продуктів, $[z] = \frac{\partial p_i}{\partial n}$. У

результаті отримаємо $\sum_{i=0}^{n-1} p_i x_i = z, z > 0$. Величина z називається вартістю

набору продуктів $\vec{x}$.

Очевидно, що на суму z можна придбати різноманітні конфігурації продуктів споживчого кошика. Тому зі всіх варіантів закупівель споживач повинен обрати найкращий. Для цього потрібно вибрати стратегію закупівель: перед тим як закупити продукти, споживач повинен оцінити значимість кожного продукту і необхідність його придбання, описавши значимість і необхідність кількісно. Для цього на просторі R_+^n визначимо функцію

корисності $\Pi\left(\vec{x}\right) = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n), \Pi: R_+^n \rightarrow R^1$. $\Pi\left(\vec{x}\right)$ – ко-

рисність набору продуктів $\vec{x}$, придбаного споживачем.

Необхідно знайти таку кількість продуктів, за якої буде отримана максимальна корисність для людини й будуть витрачені всі гроші, які людина збирається витратити. Для цього слід максимізувати функцію корис-

ності $\Pi\left(\vec{x}\right)$ для продуктів харчування залежно від вмісту вітамінів у них за умови, що всі гроші витрачені на закупівлю необхідної кількості продуктів харчування.

Таким чином, задача зводиться до знаходження вектора харчування $\vec{x}$ із розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації. Потрібно для вибраної групи вітамінів, заданої вартості продуктів і заданої кількості грошей на харчування на одну добу, вибрати оптимальну кількість продуктів за умови, що функція корисності за кожним із вітамінів приймає максимальне значення

$$P\left(\begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix}\right) \rightarrow \max,$$

$$\vec{P} = (P_1, \dots, P_{13});$$

$$P_1 \rightarrow \max, \dots P_{13} \rightarrow \max$$

при заданих обмеженнях

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i x_i < Z \quad (1)$$

$$x_i > 0, \quad (2)$$

де p_i – вартість i -го продукту харчування; Z – задана сума грошей.

Обмеження (2) доцільно ввести для того, щоб кожний із заданих продуктів харчування був включений до раціонального споживчого кошика.

Для розв’язання багатокритеріальної задачі оптимізації пропонується метод пріоритетів [1]. Для даного методу була розроблена блок-схема (рис. 1).

Побудуємо функцію корисності $P\left(\begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix}\right)$, базуючись на вітамінному

складі продуктів харчування і на функціях корисності P_j для j -го вітаміну.

Серед усіх вітамінів було виділено 13 основних, згідно з [5]: вітамін А, вітамін С, вітамін D, вітамін Е, вітамін В1 (тіамін), вітамін В2 (рибофлавін), вітамін В3 (ніацин, РР), вітамін В6 (піридоксин), вітамін В9 (фолієва кислота), вітамін В12 (ціанокобаламін), вітамін В5 (пантотенова кислота), вітамін В7 (біотин, Н), вітамін К. Більшість вітамінів характеризується двома величинами – рекомендованою добовою нормою та верхнім рівнем споживання [1]. Деякі вітаміни не є токсичними, тому для них верхній рівень споживання не встановлюється. Ці величини змінюються залежно від вікової групи та статі. Усього було виділено три групи: юнаки та дівчата 11-21 років, дорослі чоловіки та жінки 21-59 років, люди похилого віку 59-79 років [4].

Функції корисності можуть мати різний вигляд, але в більшості випадків вони є нелінійними функціями; отже, кожний із критеріїв багатокритеріальної оптимізації буде являти собою задачу нелінійного програмування з обмеженням на суму грошей.

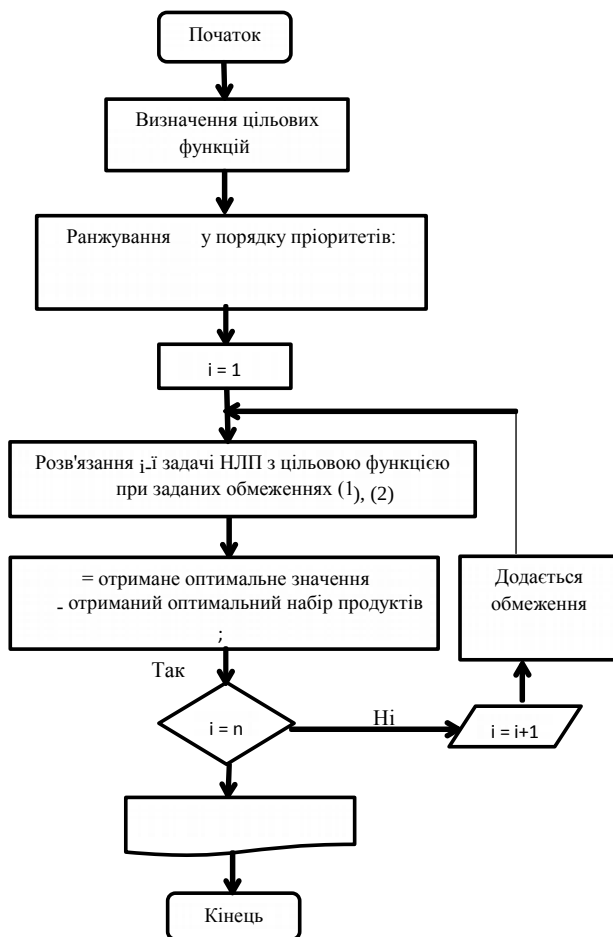


Рис. 1. Блок-схема методу пріоритетів

За функцію корисності оберемо криву Гомперця, яка є S -образною функцією, що належить до класу кривих насичення. Вона має такий вигляд [4]:

$$y = e^{\alpha\beta + \gamma}, \quad (3)$$

де $0 < \beta < 1$, α, β, γ – коефіцієнти кривої Гомперця.

Обґрунтуємо вибір кривої Гомперця для даної задачі. Більшість вітамінів, які необхідні для здоров'я людини, мають так званий поріг насичення. Це означає, що ці вітаміни при споживанні є корисними тільки до певної кількості, а при перевищенні цієї кількості втрачають свої корисні властивості, а деякі з них навіть стають токсичними. Тобто надмірне споживання вітамінів не приведе до збільшення їхнього благотворного впливу на організм людини.

Крива Гомперця наочно відображає цю характерну особливість: на її графіку можна побачити, як функція корисності неперервно зростає, доки не досягне своєї асимптоти (порогу насичення), а потім прямує до нескінченності уздовж цієї асимптоти (корисність вітаміну не перевищує порогу насичення).

Таким чином, згідно з (3) функція корисності Π_j для j -го вітаміну має вигляд

$$\Pi_j = e^{\alpha_j \beta_j \sum_{i=1}^n x_i c_{ij} + \gamma_j}. \quad (4)$$

$j = 1, \dots, 13$ – індекси вітамінів (табл. 1);

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ – коефіцієнти кривої Гомперця для j -го вітаміну;

x_i – кількість i -го продукту харчування, $i = 1, \dots, n$;

c_{ij} – кількість j -го вітаміну в i -му продукті харчування.

Таблиця 1

Індекси вітамінів													
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Вітамін	A	C	D	E	B1	B2	B3	B6	B9	B12	B5	B7	K

Функція корисності для кожного вітаміну залежить лише від кількості споживання вітаміну за добу. Для побудови використаємо такі припущення:

1) для тих вітамінів, для яких визначений максимальний рівень споживання ($\max$), область визначення функції корисності – $[0; \max]$. Для тих

вітамінів, для яких не визначений такий максимальний рівень, область визначення функції корисності – $[0; \infty]$;

2) область значень функції корисності – $[0;1]$;

3) для тих вітамінів, для яких визначений максимальний рівень споживання ($\max$), має виконуватися рівність

$$y(\max) = 1.$$

Для тих вітамінів, для яких не визначений такий максимальний рівень, має виконуватися рівність

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1;$$

4) Для всіх вітамінів визначена рекомендована добова норма ($norm$), для якої має виконуватися рівність

$$y(norm) = 0,5.$$

Для визначення коефіцієнтів функції ми маємо систему з двох рівнянь. Коефіцієнт β ми будемо визначати емпіричним шляхом для кожного вітаміну, щоб виконувалося

$$y(0) \approx 0.$$

Знайдемо формули для визначення коефіцієнтів функції для тих вітамінів, для яких визначений максимальний рівень споживання:

$$\begin{cases} y(\max) = 1 \\ y(norm) = 0,5 \\ \begin{cases} e^{\alpha\beta^{\max} + \gamma} = 1 \\ e^{\alpha\beta^{norm} + \gamma} = 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha\beta^{\max} + \gamma = 0 \\ \alpha\beta^{norm} + \gamma = \ln(0,5). \end{cases} \end{cases}$$

Відніmemo перше рівняння від другого, отримаємо

$$\alpha = \frac{\ln(0,5)}{\beta^{norm} - \beta^{\max}}.$$

Оскільки $0 < \beta < 1$ і $norm < \max$, то $\beta^{norm} > \beta^{\max}$ і $\beta^{norm} - \beta^{\max} > 0$ а $\ln(0,5) < 0$, звідки робимо висновок, що умова $\alpha < 0$ виконується.

Знайдемо формули для визначення коефіцієнтів функції для тих вітамінів, для яких не визначений максимальний рівень споживання:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1 \\ y(norm) = 0,5 \\ \begin{cases} e^{\gamma} = 1 \\ e^{\alpha\beta^{norm} + \gamma} = 0,5 \end{cases} \\ \gamma = 0 \\ \alpha\beta^{norm} + \gamma = \ln(0,5) \\ \alpha\beta^{norm} = \ln(0,5) \\ \alpha = \frac{\ln(0,5)}{\beta^{norm}} \end{cases}$$

Оскільки $\ln(0,5) < 0$, а $\beta^{norm} > 0$, робимо висновок, що умова $\alpha < 0$ виконується.

Аналіз одержаних результатів. Використовуючи інформацію про норми споживання для кожної групи населення, наведену в джерелі [1], розрахуємо коефіцієнти кривої Гомперця для функцій корисності по вітамінах. Результати розрахунків наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Коефіцієнти кривої Гомперця для функцій корисності по вікових групах (мг)

№ з/п	к	A	C	D	E	B1	B2	B3
I	α	-69,32	-36167,9	-3,57	-18,8	-437,35	-1741,11	-608,08
	β	0,01	0,87	0,01	0,79	0,01	0,01	0,7
II	α	-69,32	-50634,4	-3,57	-16,35	-550,59	-2759,5	-608,08
	β	0,01	0,81	0,01	0,81	0,01	0,01	0,7
III	α	-0,7	-90,59	-3,49	-211,9	-1098,6	-1098,6	-68,89
	β	0,01	0,95	0,01	0,7	0,01	0,01	0,72

Продовження табл. 2

№ з/п	к	В6	В9	В12	В5	В7	К
I	α	-16,83	-5,44	-0,7	-78,08	-0,73	-0,7
	β	0,17	0,87	0,11	0,35	0,4	0,91
II	α	-13,45	-6,99	-0,7	-131,97	-0,73	-0,7
	β	0,21	0,87	0,11	0,35	0,4	0,91
III	α	-272,9	-7,14	-0,7	-131,97	-0,73	-0,7
	β	0,15	0,87	0,11	0,35	0,4	0,91

Позначення: I – юнаки та дівчата 11 _21 років, II – дорослі чоловіки та жінки 21_59 років, III – люди похилого віку 59_79 років.

Була розроблена програма на VBA та Microsoft Office Excel 2003, яка використовує надбудову Excel «Пошук розв’язку» й дозволяє знаходити раціональний споживчий кошик при вибраній кількості продуктів і заданій вартості кошика. Програму може використовувати будь_який користувач, який має систему Microsoft Windows 2000, 2003, XP, Vista та програму Microsoft Office 2007-2010.

Як приклад застосування розробленої методики для групи юнаків і дівчат 11 _21 років визначено раціональний споживчий кошик харчових продуктів. На рис. 3 _6 представлені залежності функції корисності від кількості вітамінів обраної категорії населення.

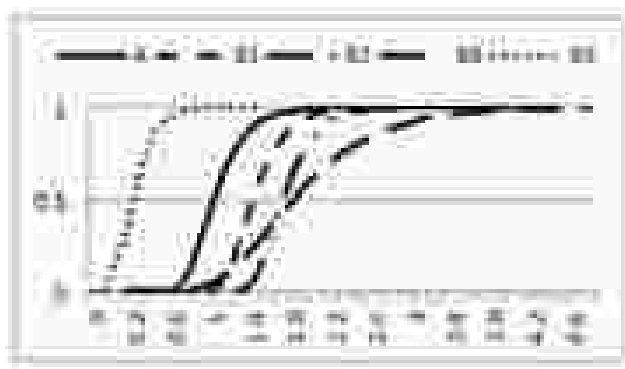


Рис. 2. Графік функцій корисності для вітамінів А, В1, В2, В6, В9

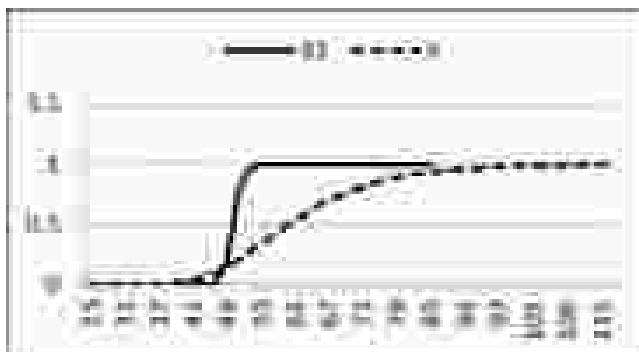


Рис. 3. Графік функцій корисності для вітамінів В7, К

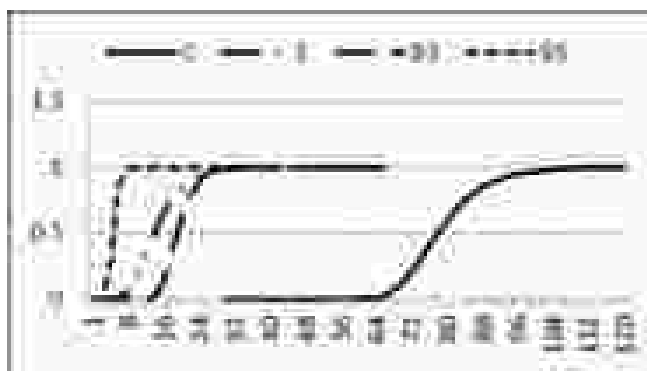


Рис. 4. Графік функцій корисності для вітамінів С, Е, В3, В5

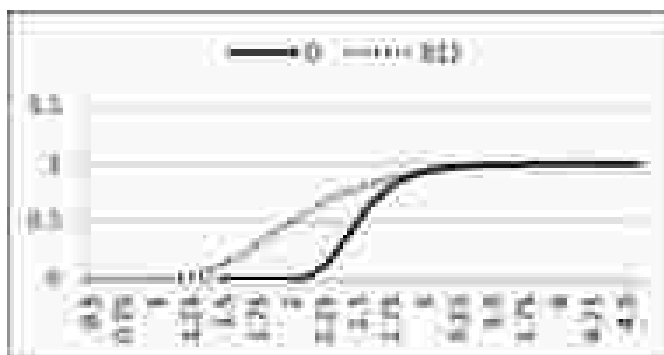


Рис. 5. Графік функцій корисності для вітамінів D, В12

При моделюванні кошика використовувалися дані про рекомендовані продукти для повноцінного харчування людини та їхній вітамінний склад [1; 3; 5]. Вартість кошика була задана в розмірі 100 гривень. Результати моделювання представлені в табл. 3.

Таблиця 3

Кількість кожного продукту в отриманому споживчому кошику

Продукти	Метод пріоритетів		
	I	II	III
Борошно пшеничне	0	0	0
Хліб пшеничний	39	32	33
Рис	0	0	0
Гречана крупа	277	211	271
Картопля	479	514	429
Огірки	0	17	0
Морква	31	30	52
Яблука	0	0	18
Банани	17	0	0
Шоколад молочний	0	0	0
Маргарин вершковий	0	0	0
Яйця	0	0	0
Яловичина	0	0	0
Свинина	0	0	0
Курка домашня	0	0	0
Окунь свіжий	2778	2775	2701
Скумбрія копчена	0	0	0
Молоко незбиране	594	503	574
Сир м'який	0	0	0
Сир твердий	0	0	0

При застосуванні методу пріоритетів ми зіткнулися з такими труднощами: при переході до наступної задачі із цільовою функцією, що має нижчий пріоритет, та введенні нового обмеження досить складно добрати регулюючий коефіцієнт ε таким чином, щоб розв'язок попередніх задач не було погіршено. Ці складнощі призводять до погіршення кінцевого результату розрахунків та зменшення їхньої точності.

Висновки. У роботі були побудовані функції корисності залежно від вікової групи для кожного з 13 вітамінів, із використанням даних про масову частку вітамінів у продуктах харчування. Використовуючи одержані функції корисності, ми сформулювали задачу багатокритеріальної оптимізації для вибраної кількості продуктів. На основі методу пріоритетів було розроблено алгоритм розв'язку для отримання раціонального споживчого кошика на досліджуваній групі вітамінів. За допомогою засобів Excel і VBA було розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє знаходити оптимальну кількість продуктів залежно від заданої кількості грошей з урахуванням можливості зміни цін на продукти. Таким чином, була побудована модель раціонального споживчого кошика по вибраних вітамінах, для вибраних вікових груп та на задану суму грошей.

Бібліографічні посилання

1. Наказ про затвердження Норм фізіологічних потреб населення України в основних харчових речовинах та енергії [Електронний ресурс]; офіц. текст станом на 18 листопада 1999 р. / Міністерство охорони здоров'я України. Режим доступу: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show?nreg=z0834-99>.
2. **Писаревська А.К.** Основні аспекти формування споживчого кошика в Україні. / А.К. Писаревська // Дніпропетровська державна фінансова академія. – 2010. – С.33-39.
3. Постанова про затвердження наборів продуктів харчування, наборів непродовольчих товарів та наборів послуг для основних соціальних та демографічних груп населення [Електронний ресурс]; офіц. текст станом на 14 квітня 2000 р. / Кабмін України. – Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/656-2000-%D0%BF>.
4. **Сімчак О.С.** Моделювання раціонального споживчого кошику з використанням метода пріоритетів. / О.С. Сімчак, М.Г. Бердник // Тези доп. 11-ї Відкритої наукової конференції ІМФН. – Львів: Нац. ун-т «Львівська політехніка», 2013.
5. **Скурихина И.М.** Химический состав пищевых продуктов: справочник / И.М. Скурихина. – М.: ВО «Агропромиздат», 1987. – Кн. 2. – 360 с.
6. Щодо удосконалення методики визначення споживчого кошику / Національний інститут стратегічних досліджень при Президенті України // Аналітична записка [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.niss.gov.ua/articles/1233/>.

Надійшла до редколегії 23.07.2013 р.

УДК 519.17

Olena ⁴Bobyl'ova

*University "G. d'Annunzio" of Chieti-Pescara,
Department of Social Sciences (Italy)*

THE MODEL OF THE RELATIONSHIP FROM THE BANKS AND INSURANCE COMPANIES

Four levels of the relationship from the banks and insurance companies were studied in the work and for each type of report is proposed the mathematical model: building the conditions necessary for creating the financial balance in insurance companies and banks.

Рассматриваются четыре типа возможного сотрудничества между банком и страховой компанией и для каждого типа отношений строится математическая модель: находятся необходимые условия для создания финансового баланса между банком и страховой компанией.

Розглядаються чотири можливих типи співпраці між банком та страховою компанією і для кожного типу в ідносин будується математична модель: знаходяться необх ідні умови для побудови ф інансового балансу м іж банком і страховою компанією.

Key words: bancassurance, insurance rate, load of risk, parameter of attitude to risk, cooperative e non cooperative games.

At first the term "bancassurance" appeared in France in the late of 60's and it meant the sale of insurance services through the banking network [1]. Today this term is used to intensify the involvement of banks in the industry and marketing for spread of insurance products in the banking sector.

The concept of bancassurance can be described as integration from banks and insurance companies for coordinate the sale amalgamate the banking and insurance products, to enter into the customer base and also have access to the financial resources of partner.

The actuality of this report has the following reasons:

1. The bank has the possibility to:

- attracting external resources;

- receiving the commissions from the sale of the policies insurance;
- bettering satisfier the needs of the fixed clients;

- expanding the list of services offered and receive additional benefits for the advancement of own programs;

- forming positive image of the bank;

2. Insurance companies have the possibility to:

- using the data base of the bank's clients;

- reducing the own expenses;

- diffusion the insurance products [3], [5].

In Italy integration from the banks and insurance companies has begun in the 90's and had a rapid development. Today, the big banking groups have control of insurance companies. Some small banks are controlled by the insurance companies. The products offered by insurance company are the insurance of life and insurance from damage [4]. The character of the integration from banks and insurance companies can be presented in four levels.

1. Basic level. This is simply granting of insurance services to bank's clients. These can be insurance for credit or insurance of life. The collaborations of this type make it possible to insure the risks of banks and collocate on the bank's account the resources of insurance companies.



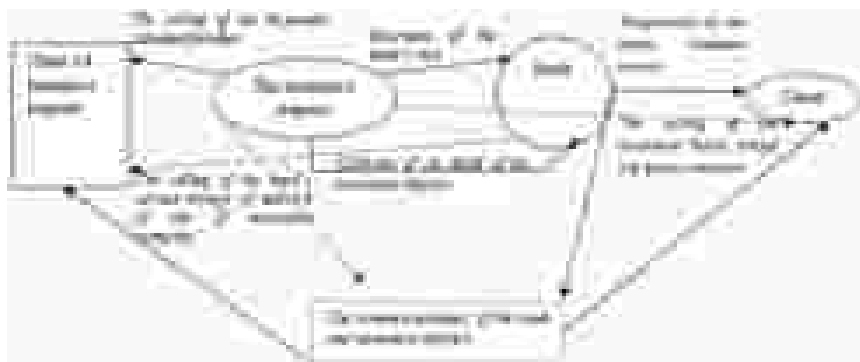
Picture 1. Basic level

2. Average level. It consists of the signing of a relationship which allows spreading the insurance



Picture 2. Average level

3. High level. It is propose of the possibility to create an alliance for cooperation in all fields. In this case it becomes possible to create a common product and diffuse them through a common channel of selling.



Picture 3. High level

There are positive and negative sides in all type of integration from banks and insurance companies. The negative side can create the problems. The first problem is the instability that comes from conflicts of interest and their incompatibility in various aspects. Other problems are given by different cultures, formations and prospects.

There is also the problem of the risks. For insurance companies is important to provide the some eventual compensation of their clients. It's a technical risk for them and it base on the fact that the report from the each party can be solved in another different way from that established in contract. For the banks the prin-

cial risk are risk of credit and market and it connects with the investments of the technical reserves using financial character [2], [4].

The risk can be devised in two groups. The first group is formed by the risks analyzed and it can be insurance risk or risk of credit. The second group is formed by the risks non-analyzed. Exactly these propose to integrate the bank in the insurance sector.

There are two ways to manage risk.

- reduce the possibility of damage (techniques stimulation, taxation, increase of reserves and etc...);
- spread risks for reduce the negative consequences of the damage.

4. Higher level. Here is proposed to create a complete connection from the bank and insurance company, or creating an institute of finance assimilate with one another, which becomes the higher level of integration from the bank and the insurance company. This type of report is presented in picture 4.



Picture 4. Higher level

For example, as a common product may be the bank's card with the information of members. The insurance company defends the bank's cards from falsification and proposes new additional services to their clients. The credit card also can be integrated by insurance service, for example, may be proposed a policy of life that protects the client during a trip abroad.

In Italy, the integration from banks and insurance companies began in the 90's and had a rapid development. Today, the more important banking groups have control of the insurance company. Some banks that have a small size are controlled by the insurance companies. The products they offer are insurance of life and unfortunate situations.

The mathematical models of bancassurance. For each level of the relationship from the banks and insurance companies, which have been studied, we construct a mathematical model and analyze it from the point of view of balance.

The conditions necessary for creating the financial balance in insurance companies are:

- the sum of the insurance payment must guarantee the eventual insurance reimbursement and provide for the profit of the company;
- the reserves must be sufficient for the insurance compensation, considering the probability of the risks [7].

Now we study the process of building of the insurance rate. The insurance rate r consist from clear premium r_0 and load R . The clean premium depends on the probability p of the event insurance and on the sum insured h : $r_0 = ph$.

Regarding the load l , that consist from the commercial load r_c (the cost for maintaining the insurance company), which depends on h : $r_c = \Delta h$ ($0 < \Delta < 1$) and r_r - the load of risk (the minimal guarantee that ensures the insurance impressed by the ruin) and it's a percentage part of the sum insured $r_r = \rho h$. Then $r = r_0 + r_c + r_r = ph + \Delta h + \rho h = h(p + \Delta + \rho)$. If the sum $\rho + \Delta$ define as the common load Ψ we can write definition of the insurance rate: $r = h(p + \Psi)$.

Let s is a maximal sum that a client can deposits for receive a compensation s_0 in the case if damage occurs with probability p . The expected profit is the average: $s^* = ps_0$. There are three categories of persons with regard to the attitude towards risk:

- inclined: the sum $s > ps_0$;
- not inclined: the sum $s < ps_0$;
- neutral: the sum $s = ps_0$

Utility $u(s)$ can be defined as the degree of suitability of the investment s ($0 \leq s \leq s_0$). It's dependence analytic from investment and clean profit. In the case when the subject is a neutral toward risk $u(\sum p_i s_i) = \sum p_i u(s_i)$ and his function u is linear, where $u(\sum p_i s_i)$ - utility of the value determined, $\sum p_i u(s_i)$ - utility expected of a value random. When the subject is not inclined toward the risk his function of utility represents the preference the determined value of the utility at random value, that is, $u(\sum p_i s_i) > \sum p_i u(s_i)$. In this case the function $u(s)$ is concave. If $u(\sum p_i s_i) < \sum p_i u(s_i)$ it's said that the subject is inclined toward risk and its function of utility is convex.



Picture 5.

The picture 5 presents the function of utility of the subject that is inclined towards the risk.

Now we introduce "the concept of the parameter ζ of attitude to risk": This is a report from possible waste u_- and possible profit u_+ : $\zeta = u_-/u_+$.

1. The subject is neutral: $s_0 = ps$: $\zeta = 0$.

2. The subject is not inclined: ($s_0 < ps$), the value minimal of s_0 is 0, that is $\zeta = -p \geq -1 \Rightarrow -1 \leq \zeta < 0$.

3. The subject is inclined ($s_0 > ps$): $\zeta = (s - ps)/s = 1 - p \leq 1 \Rightarrow 0 < \zeta \leq 1$

The insurance company is interested in reducing the probability of occurrence of an undesired event and stimulates his clients to give information more exact. This stimulation is called "the bonus for risk" and is calculated using the formula: $\Delta h = h\zeta$, where h is the standard compensation, ζ is the parameter of the attitude to risk of the insurer. So an insurance compensation can be calculated using this formula

$$h = h + \Delta h = h(1 + \zeta). \quad (1)$$

The bank also tries to ensure its risks, that is distributing them. As has been provide [6], the distribution of the risks is impossible in the case when the insurer is neutral ones and then the bank can be inclined or not to risk. Insurance companies usually are neutral by the risk. The bank's clients, who sign the contract with the impressed insurance may be neutral or not inclined to risk.

At the basic level, the bank offers its clients and its services to insurance impresses. In this case the bank, the insurance company and bank's clients are not inclined to risk.

At the average level (Picture 2) the bank offers its clients and funds for the sale of insurance services through its channels and therefore may be inclined to risk. Advanced level (Picture 3) shows a heterogeneous insurance. The clients of the bank and insurance impress are not inclined to risk when the bank and the insurance sector are inclined.

The contract from the insurance impress and client is a set of strategies of both. A contract is optimal if:

1. The profit of the impress insurance has a maximum value;
2. Signing the contract, the insurer receives a minimum guarantee of usefulness. There are the commercial insurance and no. If insurance is commercial the profit must be positive, otherwise it is zero. In the present study we analyze the problem of commercial insurance.

For the bank the set of its strategies is: $XB = (x1B, x2B)$, where $x1B$ correspond to the conclusion of a contract with the insurance company, $x2B$ - no, the set of the profit is: $YB = (y1B, y2B)$, where $y1B$ is the compensation that the bank receives choosing the action xiB

For the bank's clients the set of their alternatives is: $YC=(x1C, x2C)$, where $x1C$ correspond to the conclusion of a contract with the insurance company, $x2C$ - no, set of the profits is: $YC=(y1C, y2C)$, where $y1C$ is the benefit that the client receives in the case of choosing the action $x1B$.

For insurance impress $XA=\{xiA\}$, $i=1,5$, where:

$x1A$ - the parameters of the contract $h=const$ and $r=const$;

$x2A$ - the parameters of the contract: $\Psi = const$ and $r_j=h(p_j+\Psi)$ (the rate depends on the probability of occurrence of an accident and isn't const);

$x3A$ - the parameters of the contract: the insurance load $r_j=h(p_j+\Psi_j)$, then $\Psi \neq const$, $r \neq const$;

$x4A$ - commercial insurance;

$x5A$ - non-commercial insurance.

The actions of the insurance company can be described with the pair of elements of the set XA : (xiA, xjA) ($i=1,2,3$; $j=4,5$). But as in this study speaks of insurance commercial that XA : $(xiA, x4A)$ ($i=1,2,3$). The set of profit is $YA=\{yiA\}$, $i=1,4$.

Also there is nature, which can change the result of the profit for each participant. It may be favourable or not: $\vartheta=(\vartheta1, \vartheta2)$ are parameters of the nature of undesirable event. Agents with their actions can correct (reduce) the probability of occurrence of damage. These are prognosis which warn about the insurance situation.

At the basic level (Pic. 1) we have a non-cooperative game. There is the centre (the impress insurance) and $N+1$ agents (N are bank's clients, which can sign the contract with the insurance company).

The insurance contract in this model can be described using the set $\{h, r, FA; xB, xCi, pB, pCi\}$, where h, r, FA are the parameters of the centre (the parameters of the insurance mechanism), xB, xCi, pB, pCi - the parameters of the agents. A contract profitable is a composition of numbers $\{h, r, FA\}$, which makes insurance advantageous for all participants.

Problem 1: It's choose optimal system of stimulation (form the insurance payment and compensation), which gives the maximum profit for all participants. We study the case when the set of strategies is $X=(x1B; x1C1, \dots, x1Cn; x1A, x4A; \vartheta2)$. The insurance company establish the same parameters of the contract for all participants. The, compensation and insurance payment are

$$h=\alpha H, r=\beta h (\alpha>0, \beta>0), \quad (3)$$

where H is the profit of the agent in unfavourable situation.

Usefulness of the bank is

$$FB=H_B+p_B(h_B-Q_B)-c_B-r_B, \quad (4)$$

where H_B is the benefit that the bank receives collaboration with its clients (H_{cl}) and the insurance company (H_{as}), c_B are expense for bank's clients, r_B - funds paid for insurance service, p_B is the probability of occurring an accident, h_B - compensation, the insurance company gives the bank in the case of an insured event, Q_B - the loss in the case of a risk.

Signing the contract with the insurance company, the bank's client receives advantage

$$FC_i = H_i + p_i(h_i - Q_i) - c_i - r_i, \quad (5)$$

where H_i is the profit from collaboration with the bank, there is the costs of banking services, r_i - insurance payment, p_i is the probability of an event insured, h_i - compensation in case of accident, Q_i - the losses in the case of a damage.

For insurance company

$$FA = r_B + \sum_{i=1}^n r_i - (p_B h_B + \sum_{i=1}^n p_i h_i). \quad (6)$$

For the bank, the collaboration is an advantageously, when the cost of collaboration don't exceed the compensation which can be received from the insurance company.

$$r_B \leq p_B h_B. \quad (7)$$

$$H_B - c_B - r_B > 0.$$

The bank's client can't pay insurance payment, if it is higher than the compensation.

$$r_i \leq p_i h_i, \quad \forall i.$$

$$H_i - c_i - r_i > 0. \quad (8)$$

For the insurance company its fund may not be less than that required to pay to its clients

$$p_B h_B + \sum_{i=1}^n p_i h_i < r_B + \sum_{i=1}^n r_i. \quad (9)$$

The insurance system also shouldn't encourage the client to be an insured event

$$h_i \leq H_i. \quad (10)$$

Then (4) - (6) can be rewritten

$$\begin{aligned} FB &= H_B + p_B(\alpha H_B - Q_B) - c_B - \alpha \beta H_B; \\ FC_i &= H_i + p_i(\alpha H_i - Q_i) - c_i - \alpha \beta H_i; \\ FA &= \alpha \beta H_B + \sum_{i=1}^n \alpha \beta H_i - (\alpha H_B p_B + \sum_{i=1}^n \alpha H_i p_i). \end{aligned} \quad (11)$$

The conditions (6) - (9) we rewrite

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 1; \\ \alpha\beta &\leq 1 - c_i/H_i; \\ \beta &\leq \min\{p_i\}; \\ \beta &\geq (H_B p_B + \sum_{i=1}^n p_i H_i) / (H_B + \sum_{i=1}^n H_i). \end{aligned} \quad (12)$$

Now we can calculate the profit received by each agent in the case of unfortunate event (ϑ_2): the profit y_{1B} with the strategy x_{1B} : $y_{1B} = H_B + p_B(\alpha H_B - Q_B) - c_B - \alpha\beta H_B$. If the bank chooses the strategy x_{2B} : $y_{2B} = H_B - p_B Q_B - c_B$. The difference from profit in the case of signing the contract or not is

$$\Delta y_B = y_{1B} - y_{2B} = \alpha H_B (p_B - \beta). \quad (13)$$

For bank's customers

$$\Delta y_{iC} = y_{1iC} - y_{2iC} = \alpha H_i (p_i - \beta). \quad (14)$$

For the insurance company the advantage of signing the contract is

$$FA = \alpha H_B (\beta - p_B) - \alpha \sum_{i=1}^n H_i (p_i - \beta) < 0. \quad (15)$$

So we got that for the insurance company the contract with these parameters isn't advantage.

Now the centre takes the strategy x_{2A} and the set of strategies is presented $X = (x_{1B}; x_{1C1}, \dots, x_{1Cn}; x_{2A}, x_{4A}; \vartheta_2)$.

As has been signed the insurance rate consists from the probability p and the load Ψ : $r_i = h(p_i + \Psi)$. With regard to compensation, it is equal to the standard h , which the insurance company sets for each client, and the load $h\zeta_i$.

Then (4) - (6) is rewritten:

for bank

$$FB = H_B + p_B(h_B(1 + \zeta_B) - Q_B) - c_B - (p_B + \Psi)h_B, \quad (16)$$

for bank's clients

$$FC_i = H_i + p_i(h(1 + \zeta_i) - Q_i) - c_i - (p_i + \Psi)h, \quad (17)$$

for insurance company

$$FA = (p_B + \Psi)h_B + \sum_{i=1}^n (p_i + \Psi)h - ((h_B + \zeta_B)p_B + \sum_{i=1}^n p_i(h_i + \zeta_i)). \quad (18)$$

In the case if the bank refuses to sign the contract with the insurance company, it chooses the strategy x_{2B} , utilities for the bank and its customers are:

$$FB = H_B - p_B Q_B - c_B, \quad (19)$$

$$FC_i = H_i - p_i Q_i - c_i. \quad (20)$$

The rate and compensation for each bank's clients depends by the probability of occurrence an incident. The condition (7) - (11) can be rewrite

$$r_B \leq p_B h_B (1 + \zeta_B), \quad (21)$$

$$r_i \leq p_i h_i (1 + \zeta_i), \quad (22)$$

$$p_B h_B (1 + \zeta_B) + \sum_{i=1}^n p_i h_i (1 + \zeta_i) < r_B + \sum_{i=1}^n r_i. \quad (23)$$

But as $r_B = (p_B + \Psi) h_B$ and $r_i = (p_i + \Psi) h_i$ we have

$$0 < \Psi \leq p_i \zeta_i \leq p_B \zeta_B \Rightarrow \Psi \leq \min\{p_i \zeta_i\}.$$

So the load of the insurance rate depends by the parameter of risk of the bank and its clients.

Now we add another condition: stimulation to prevent of occurrence of damage

$$p_B h_B (1 + \zeta_B) \leq Q_B p_B; \quad (24)$$

$$p_i h_i (1 + \zeta_i) \leq Q_i p_i. \quad (25)$$

In case if the insurance company guarantees full compensation for damage the equations (24) - (25) can be rewritten:

$$h_B = Q_B / (1 + \zeta_B), \quad (26)$$

$$r_B = Q_B (p_B + \Psi) / (1 + \zeta_B),$$

$$h_i = Q_i / (1 + \zeta_i),$$

$$r_i = Q_i (p_i + \Psi) / (1 + \zeta_i)$$

From (26) we can see that insurance payment increases with increase of the probability of the event insurance and increases of loss Q of the client or the bank in case if the above happens. The insurance compensation doesn't depend by the insurance load Ψ , but has the linear dependence by the loss and has the non-linear dependence by the parameter of attitude towards risk ζ .

If we replace (24) - (25) in (14) - (16) we the utility can be rewritten

$$FB = H_B - c_B - Q_B (p_B + \Psi) / (1 + \zeta_B) \rightarrow \max, \quad (26)$$

$$FC_i = H_i - c_i - Q_i (p_i + \Psi) / (1 + \zeta_i) \rightarrow \max, \quad (27)$$

$$FA = Q_B \Psi / (1 + \zeta_B) + \sum_{i=1}^n Q_i (\Psi \cdot \zeta_i) / (1 + \zeta_i) \rightarrow \max. \quad (28)$$

For the insurance company to sign a contract with the bank has a sense if the load on the insurance rate is higher than the parameter of the attitude towards risk ζ_i for each bank's client ($\Psi > \zeta_i$).

If we do subtraction (26) from (17) and (27) from (18) we get

$$\Delta FB = Q_B (p_B \zeta_B - \Psi) / (1 + \zeta_B);$$

$$\Delta FC_i = Q_i (p_i \zeta_i - \Psi) / (1 + \zeta_i).$$

$$\Delta y_B = y_{1B} - y_{2B} = h_B(p_B \zeta_B - \Psi);$$

$$\Delta y_{Ci} = h_i(p_i \zeta_i - \Psi);$$

$$y_A = FA.$$

Deduction: in this work were studied several types of the relationship from the bank and insurance company and for each type of report is proposed the mathematical model: were building the conditions necessary for creating the financial balance in insurance companies and banks. Was proposed optimal system of stimulation (form the insurance payment and compensation), which gives the maximum profit for all participants.

Bibliography

1. **Goldman S.** Bancassurance /S. Goldman // European Financial Fact Sheet. L., 2000 – No 7.
2. **Ruozzi R.** Problemi e prospettive della banca – assicurazione in Italia /R. Ruozzi // Il risparmio. 1996 – Vol. 44, No 3.
3. **Раговская А.** Страхование жизни заемщика – гарантия возврата кредита / А. Раговская // Банковский весник. – К., 2006. – С. 59–60; (..... Insurance the life of borrower is a guarantee of return of the credit. – Kiev, 2006. – P. 59-60).
4. **Desiata A.** Le nuove strategie dell'assicurazione e la bancassurance / A. Desiata // Bancaria. 1994. – Vol. 50, No 5.
5. **Desario V.** Il risparmio finanziario in Italia: strumenti, intermediari, mercati / V. Desario // New Economy e riflessi sui sistemi finanziari e assicurativi, Banca d'Italia, Bollettino Economico, 2001 – No 36.
6. **Бурков В. Н.** Механизмы страхования в социально-экономических системах. / В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, О.С. Кулик. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 109 с.
7. **Robbins E.** Ranking agencies under moral hazard / E. Robbins, B. Sarath // Economic Theory. – 1998. – Vol. 11. – P. 129–156.

Надійшла до редколегії 11.11.2013 р.

В.М.⁵Богомаз

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ РЕГУЛЯРИЗАТОРІВ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Робота присвячена проблемі знаходження ефективних регуляризаторів в одному класі задач векторної оптимізації. Запропоновано новий алгоритм побудови таких регуляризаторів.

Работа посвящена проблеме поиска эффективных регуляризаторов в одном классе задач векторной оптимизации. Предложен новый алгоритм построения таких регуляризаторов.

The paper is sanctified to the problem of search of effective regularizers in one class of vector optimization problem. The new algorithm of construction of such regularizers is proposed.

Ключові слова: адаптована скаляризація, ефективний регуляризатор, частково впорядковані простори.

Вступ. Як відомо, при моделюванні багатьох практичних задач оптимального керування нелінійними системами для отримання більш якісного результату виникає необхідність урахування декількох показників якості. Для цього дуже широко залучаються задачі векторної оптимізації. У цій роботі розглядаються задачі векторної оптимізації з такими особливостями: цільове відображення характеризується ослабленою властивістю напівнеперервності знизу, упорядковувальний конус не є тілесним, обмеження на керування та фазові змінні системи. У даному випадку не можна бути впевненим, що множина допустимих пар у задачі векторної оптимізації є не порожньою. Це вимагає розгляду вихідної задачі як нерегулярної. Як було показано в роботі [1], зручним методом побудови ефективних керувань у таких задачах є залучення так званого (Λ, μ) -регуляризатора. Одним із варіантів побудови регуляризаторів такого типу є розгляд послідовності оштрафованих задач векторної оптимізації. У роботі [2] для побу-

дови ефективних регуляризаторів залучався метод лінійної згортки. Але суттєвим недоліком такого методу є відсутність упевненості в тому, що існує хоча б одна лінійна згортка цільового відображення, яка є напівнеперервною знизу відносно певних топологій просторів. У зв'язку з цим виникає проблема існування розв'язків у задачі мінімізації такої згортки. Таким чином, виникає потреба в розробці нових алгоритмів побудови ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів у розглянутому класі задач векторної оптимізації.

Отже, основною метою цієї роботи є доведення можливості залучення адаптивного алгоритму скаляризації, запропонованого авторами в роботі [3] до побудови (Λ, μ) -регуляризаторів в означеному класі задач векторної оптимізації.

Основні поняття та постановка задачі. Нехай U – банахів простір керувань, який є топологічно спряженим до деякого сепарабельного банахового простору, та X є простором фазових змінних системи, який є рефлексивним. Топологічний простір $U \times X$ наділений τ -топологією, за яку було обрано добуток $*$ -слабкої топології в U та слабкої топології в X .

Нехай Z – простір з нульовим елементом θ_Z , який є дуальним до сепарабельного банахового простору V та наділений μ -топологією, з якою будемо пов'язувати $*$ -слабку топологію в ньому. Вважатимемо, що простір V частково впорядкований опуклим замкненим загостреним конусом K з непорожньою алгебраїчною внутрішністю.

Нехай Ξ – деяка підмножина простору $U \times X$ та на ній задано цільове відображення $I : \Xi \rightarrow Z$.

Позначимо частковий порядок у просторі Z , породжений конусом Λ , через $\leq_\Lambda$, що означає таке:

$$z_1 \leq_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \{\theta_Z\}.$$

Означення 1 [1]. Підмножину простору $Z \cup \{\pm \infty\}$ будемо називати Λ_μ -інфімумом відображення $I : U \times X \rightarrow Z$ та позначати $\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x)$, якщо вона є ефективним Λ_μ -інфімумом образу $I(\Xi)$, тобто

$$\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x) = \begin{cases} \min(cl_\mu I(\Xi)), & \min(cl_\mu I(\Xi)) \neq \emptyset, \\ \{-\infty\}, & \min(cl_\mu I(\Xi)) = \emptyset, \end{cases}$$

де $cl_{\mu} I(\Xi)$ – μ -замикання образу цільового відображення $I(\Xi)$.

Нехай $\{u_k, x_k\}_{k \in N}$ – довільна послідовність у Z . Позначимо через $L^{\mu} \{u_k, x_k\}$ множину всіх μ -граничних точок цієї послідовності. Нехай $(u^0, x^0) \in U \times X$ – деякий фіксований елемент; визначимо наступну множину

$$L^{\tau \times \mu}(I, (u^0, x^0)) = \bigcup_{\{u_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Theta_{\tau}(u^0, x^0)} L^{\mu} \{u_k, x_k\},$$

де $\Theta_{\tau}(u^0, x^0)$ – сукупність усіх послідовностей $\{u_k, x_k\} \subset U \times X$ таких, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^0, x^0)$ в $U \times X$.

Означення 2 [4]. Цільове відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ називається епі-напівнеперервним знизу в точці (u_x) , якщо виконується умова $I(u_x) = \inf^{\Lambda \times \tau \mu} (I, (u_x))$, де операція $\inf^{\Lambda} A$ визначається таким чином: для кожного $y \in Z$ виконується умова $\inf_{y \in A}^{\Lambda} A$ тоді і тільки тоді, коли $y \leq_{\Lambda} \forall A \in \mathcal{A}$. Якщо ця властивість виконується в усіх точках $(u_x) \in \Xi$, то відображення I називають епі-напівнеперервним знизу на Ξ .

Означення 3. Відображення $I: Z \rightarrow Z$ будемо називати опуклим, якщо для будь-яких $y_1, y_2 \in \Xi$ та $\lambda \in [0, 1]$ виконується умова $I(\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) = \lambda I(y_1) + (1 - \lambda) I(y_2)$.

У роботі [1] для знаходження ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів у задачах векторної оптимізації множина Ξ розбивається на дві підмножини Ξ_1 та Ξ_2 такі, що $\Xi_1 \neq \emptyset$ та $\Xi_2 \cap \Xi = \emptyset$. Для апроксимації таких регуляризаторів запропоновано розглядати послідовність задач векторної оптимізації зі штрафом:

$$I_{\varepsilon}(u, x) = I(u, x) + \varepsilon^{-1} \beta(u, x) \rightarrow \inf^{\Lambda, \mu}, \quad (1.1)$$

$$(u, x) \in \Xi_1, \quad (1.2)$$

де відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ та $\beta: U \times X \rightarrow Z$ є опуклими епі-напівнеперервними знизу та секвенційно напівнеперервним знизу відносно топологій τ та μ у просторах $U \times X$ та Z відповідно. Відображення

β характеризує відстань від елементів множини Ξ_1 до елементів множини Ξ_2 та задовольняє умовам $\beta(u, x) = z$ при $(u, x) \in \Xi_2$, $\beta(u, x) \geq z$ - в іншому випадку.

Означення 4 [1]. Пару $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ будемо називати (Λ, μ) -регуляризатором множини Ξ_2 , якщо виконується умова

$$\beta(u^*, x^*) \in \inf_{(u, x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} \beta(u, x). \quad (1.3)$$

Позначимо сукупність усіх (Λ, μ) -регуляризаторів множини Ξ_2 через Ω .

Означення 5 [1]. (Λ, μ) -регуляризатор $(\tilde{u}, \tilde{x}) \in \Xi_1$ множини Ξ_2 будемо називати ефективним, якщо виконується умова:

$$I(\tilde{u}, \tilde{x}) \not\leq_{\Lambda} I(u, x), \quad \forall (u, x) \in \Omega \quad (1.4)$$

Нехай множина Ξ_1 є опуклою та замкнутою. За теоремою Мазура [5] вона є τ -компактною.

Означення 6 [3]. При фіксованому $\varepsilon > 0$ пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ називається (Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі (1.1) – (1.2), якщо виконується умова $(I_{\varepsilon}(u^*, x^*) - \Lambda) \cap cl_{\mu} I_{\varepsilon}(\Xi_1) = \{I_{\varepsilon}(u^*, x^*)\}$. Множину всіх (Λ, μ) -ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.2) при фіксованому $\varepsilon > 0$ будемо позначати через $Eff_{\tau \times \mu}(\Xi_1; I_{\varepsilon}; \Lambda)$.

Означення 7 [3]. При фіксованому $\varepsilon > 0$ пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ називається $(\tau \times \mu)$ -узагальненим розв'язком задачі (1.1) – (1.2), якщо існують послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi_1$ та елемент $\xi \in \inf_{(u, x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} I_{\varepsilon}(u, x)$ такі, що виконуються умови $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*)$ в $U \times X$ та $I_{\varepsilon}(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$ в Z при $k \rightarrow \infty$. Через $GenEff_{\tau \times \mu}(\Xi_1; I_{\varepsilon}; \Lambda)$ позначимо множину всіх $(\tau \times \mu)$ -узагальнених розв'язків.

У роботі [3] запропоновано адаптивний алгоритм скаляризації задач векторної оптимізації типу (1.1) – (1.2) для знаходження (Λ, μ) -ефективних розв'язків при фіксованому $\varepsilon > 0$, при залученні якого

розв'язується параметризована квадратична задача мінімізації такого вигляду:

$$F(y) = \|y\|_Y^2 - \inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta\epsilon}} \quad (1.5)$$

$$\Delta_{\eta\zeta\epsilon} = \left\{ y \in Y \mid P_1(y) \in \Xi_1, I_\epsilon(P_1(y)) \leq \Lambda \eta\zeta P_2(y), P_2(y) + s \leq \|y\|_Y^2 \right\} \quad (1.6)$$

де $\eta\zeta \in Z$ - задані елементи; Y - банахів простір; $P_1: Y \rightarrow X$, $P_2: Y \rightarrow R$ - задані оператори. Всюди далі будемо вважати, що виконуються припущення:

а) елементи $\eta\zeta \in Z$ обрані так, що існує хоча б один елемент $(u, x) \in \Xi_1$, який задовольняє умові $I_\epsilon(x) \leq \Lambda \eta\zeta$;

б) оператори $P_1: Y \rightarrow X$ та $P_2: Y \rightarrow R$ є лінійними та такими, що для кожного $c > 0$ існує елемент $y \in Y$ такий, що $P_1(y) = (u, x)$, $\|y\|_Y \geq c$.

У роботі [3] отримано результат, який встановлює відповідність між (Λ, μ) -ефективними розв'язками задачі (1.1) - (1.2) та розв'язками задачі (1.5) - (1.6).

Теорема 1. Нехай Ξ_1 - τ -компактна підмножина простору UX , відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ є локально обмеженим та ері-напівнеперервним знизу на Ξ_1 , $\beta: U \times X \rightarrow Z$ є секвенційно напівнеперервним знизу відносно топологій τ та μ у просторах UX та Z відповідно, Y - простір, що є дуальним до деякого сепарабельного банахового простору, наділений $*$ -слабкою топологією σ . Відображення P_1 та P_2 є неперервними в такому сенсі: $P_1(y_k) \xrightarrow{\tau} P_1(y)$ в UX та $P_2(y_k) \rightarrow P_2(y)$ в R , як тільки $y_k \xrightarrow{\sigma} y$ в Y . Тоді існує константа $s > 0$ така, що $y_0 \in \Delta_{\eta\zeta}$ - єдиний розв'язок задачі (1.5) - (1.6) і при цьому якщо $P_1(y_0) = (u_0, x_0) \in \text{GenEff}_{\tau\mu}(\Xi_1; I; \Lambda)$.

Алгоритм побудови регуляризаторів. Зафіксуємо значення параметру штрафу ϵ . Розглянемо властивості множин $\Delta_{\eta\zeta\epsilon}$.

Твердження 1. Множина $\Delta_{\eta\zeta\epsilon}$ є замкнутою.

Нехай $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$ - довільна послідовність така, що $y_k \rightarrow^* v$ в Y при $k \rightarrow \infty$. Тоді, ураховуючи властивості неперервності оператора P_1 та τ -компактності множини Ξ_1 , маємо $P_1(y_k) \xrightarrow{\tau} P_1(v) \in \Xi_1$. Унаслідок епі-напівнеперервності знизу відображення $I_\varepsilon(u_k)$ та неперервності операторів P_1 та P_2 , маємо

$$I_\varepsilon(P_1(v)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I_\varepsilon(P_1(y_k)) \leq \lim_{\rightarrow \infty} (\eta + P_2(y_k)\zeta) = \eta + P_2(v)\zeta,$$

$$P_2(v) + s = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_2(y_k) + s) \leq \lim_{\rightarrow \infty} \|y_k\|^2 = \|v\|^2.$$

Отже, $v \in \Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$, що підтверджує замкненість множини $\Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$ та справедливність твердження 1.

Твердження 2. Множина $\Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$ є опуклою.

Нехай y_1 та y_2 - довільні елементи множини $\Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$. Для доведення твердження необхідно показати, що виконується включення $\lambda P_1(y_1) + (1-\lambda)P_1(y_2) \in \Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$, для будь-якого $\lambda \in [0,1]$. Унаслідок опуклості множини Ξ_1 та лінійності відображення P_1 маємо $P_1(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda P_1(y_1) + (1-\lambda)P_1(y_2) \in \Xi_1$. Ураховуючи властивості опуклості відображення $I_\varepsilon(u_k)$ та лінійності відображення P_2 , маємо

$$I_\varepsilon(\lambda P_1(y_1) + (1-\lambda)P_1(y_2)) \leq \lambda I_\varepsilon(P_1(y_1)) + (1-\lambda)I_\varepsilon(P_1(y_2)) \leq \lambda \eta + (1-\lambda)\eta + (\lambda P_2(y_1) + (1-\lambda)P_2(y_2))\zeta = \eta + P_2(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\zeta,$$

$$P_2(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) + s = \lambda s + (1-\lambda)s + \lambda P_2(y_1) + (1-\lambda)P_2(y_2) \leq \lambda \|y_1\|_{YY}^2 + (1-\lambda)\|y_1\|^2 \leq \|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\|_Y^2.$$

Отже, $\lambda P_1(y_1) + (1-\lambda)P_1(y_2) \in \Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$, що підтверджує опуклість множини $\Delta_{\eta \zeta \varepsilon}$ та справедливність твердження 2.

Твердження 3. Нехай є заданими $\varepsilon_{\varepsilon_2} \in R_+$ такі, що $\varepsilon_{\varepsilon_2} \geq \varepsilon$. Тоді $\Delta_{\eta\zeta\varepsilon, 21} \subseteq \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$.

Доведення. Нехай $\varepsilon_{\varepsilon_2} \geq \varepsilon$. Тоді $\varepsilon_2^{-1} \beta(P_Y(\cdot)) \leq_{\Lambda} \varepsilon_1 \beta(P_Y(\cdot))$ для всіх $P_Y(\cdot) \in \Xi$. Отже, маємо $I_{\varepsilon_{\varepsilon_2}}(P_Y(\cdot)) \leq_{\Lambda M} (P_Y(\cdot)) \leq \eta \zeta P_2(y)$ $\forall P_Y(\cdot) \in \Xi$. Наслідком цієї нерівності є вкладення $\Delta_{\eta\zeta\varepsilon, 21} \subseteq \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$.

Позначимо через $\Delta_{\eta\zeta}$ множину, елементами якої є σ -граничні точки (при $\varepsilon \rightarrow 0$) послідовностей $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, які задовольняють умові $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$. Існування таких послідовностей пояснюється існуванням мінімізаторів у відповідних задачах $\inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}} \|y\|_Y^2$, що диктується умовами теореми 1.

Теорема 2. Нехай $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ є послідовністю розв'язків задачі (1.5) - (1.6) та ε є малим параметром, який утворює спадну послідовність додатних чисел. Тоді ця послідовність σ -збігається до елементу $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$, образ якого $P_Y(\cdot)^* = (u^*, x^*)$ є ефективним (Λ, μ) -регуляризатором множини Ξ_2 .

Доведення. За теоремою 1 маємо: при всіх $\varepsilon > 0$ існує константа $s > 0$ та єдиний мінімізатор у задачі (1.5) - (1.6) $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$ такий, що

$$P_Y(\cdot)_\varepsilon = (u_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \text{GenEff}_{\tau \times \mu}(\Xi; I_\varepsilon; \Lambda). \quad (2.1)$$

Отже, наслідком існування мінімізаторів $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$ при кожному $\varepsilon > 0$ є обмеженість послідовності $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$. Залучаючи теорему Банаха-Алаоглу, маємо $y_\varepsilon \xrightarrow{\sigma} y^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Розглянемо послідовність пар $\{P_Y(\cdot)_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} = \{(u_\varepsilon, x_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$. Унаслідок τ -компактності множини Ξ_1 із цієї послідовності можна вилучити підпослідовність $\{(u_{\varepsilon_k}, x_{\varepsilon_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ таку, що $(u_{\varepsilon_k}, x_{\varepsilon_k}) \xrightarrow{\tau} (u^{**}, x^{**}) \in \Xi_1$. Доведемо, що $(u^{**}, x^{**}) \in \Omega$. Припустимо, що

це не так. Отже, існує така пара $(v_y) \in \Omega$, що $\beta(v_y) =$. Таким чином, $I_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq I_\varepsilon(v_y) - I(v_y) \forall \varepsilon > 0$. Із цього випливає

$$\beta(u_{\varepsilon, x}) \leq C, \quad (2.2)$$

де C - константа в просторі Z . Переходячи до границі у співвідношенні (2.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ та враховуючи напівнеперервність знизу відображення β , маємо $\beta(u_{x,0}^{**}) =$, що еквівалентно умові $(u_x^{**}) \in \Omega$. От-

же, множина $\Delta_{\eta\zeta}$ має вигляд $\Delta_{\eta\zeta_\varepsilon} = \{y \in Y : P_1(y) \in \Omega, I(P_1(y)) \leq \eta, I(P_2(y)) \leq \zeta\}$.
 $(P_1(y)) \leq \eta + P_2(y), P_2(y) + s \leq \|y\|_Y^2$.

Перевіримо наступну умову $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$. Враховуючи властивості неперервності оператора P_1 та τ -компактності множини Ξ_1 , маємо $P_1(y_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} P_1(y^*) \in \Xi_1$. Унаслідок епі-напівнеперервності знизу відображення $I_\varepsilon(P_1(y))$, неперервності операторів P_1 та P_2 та умови $P_1(y^*) \in \Omega$ маємо

$$I(P_1(y^*)) = I_\varepsilon(P_1(y^*)) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(P_1(y_\varepsilon)) \leq \lim(\eta + P_2(y_\varepsilon)\zeta) = \eta + P_2(y^*)\zeta.$$

Ураховуючи опуклість множин $\Delta_{\eta\zeta_\varepsilon}$ при кожному ε та залучаючи теорему Мазура до послідовності $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, маємо таке: існує послідовність опуклих комбінацій цієї послідовності $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ така, що $y_\varepsilon \rightarrow y^*$ сильне в Y . Тож мають місце такі співвідношення:

$$P_2(y^*) + s^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_2(y_\varepsilon) + s_\varepsilon) \leq \lim \|y_\varepsilon\|_Y^2 = \|y^*\|_Y^2.$$

Отже, $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$. Наступним кроком буде доведення того, що елемент $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$ є розв'язком задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta}} \|y\|_Y^2$. Нехай існує інший елемент

$y \in \Delta_{\eta\zeta}$ такий, що $\|y\|_Y^2 < \|y^*\|_Y^2$. Але, враховуючи умови твердження 3,

маємо $\Delta_{\eta\zeta} \subseteq \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$, для всіх $\varepsilon > 0$, що забезпечує виконання нерівності $\|y_\varepsilon\|_Y^2 < \|y^*\|_Y^2$, $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Залучаючи властивості невід'ємності та напівнеперервності норми в просторі Y відносно σ -збіжності та переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, маємо

$$0 \leq \|y^*\|_Y^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y_\varepsilon\|_Y^2 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta\varepsilon}} \|y\|_Y^2 \leq \|y^*\|_Y^2.$$

Але це суперечить тому, що $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$ є мінімізатором задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta}} \|y\|_Y^2$.

Унаслідок властивості опуклості функціонала $\|y\|_Y^2$, $y^* \in \Delta_{\eta\zeta}$ є єдиним мінімізатором задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta\zeta}} \|y\|_Y^2$. Залучаючи аргументи теореми 1, доходимо висновку:

$P_Y^*(\cdot) = (u^*, x^*) \in \text{GenEff}_{\text{tr}}(\Omega; I; \Lambda)$, тобто пара (u^{**}, x^{**}) є ефективним (Λ, μ) -регуляризатором множини Ξ_2 .

Висновки. Для задач векторної оптимізації з епі-напівнеперервними знизу цільовими відображеннями та нетілесними упорядковувальними конусами запропоновано новий алгоритм знаходження ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів, проблема побудови яких зводиться до розв'язування послідовності квадратичних задач мінімізації. Це дає можливість залучити більш ефективні обчислювальні методи до побудови таких регуляризаторів в означеному класі задач векторної оптимізації.

Бібліографічні посилання

1. **Богомаз В.М.** Про регуляризацию фазовых обмежений в одном классе задач векторной оптимизации / В.М. Богомаз, И.В. Нечай // Системні технології. – Д.: Вид-во НМетАУ, 2012. – №1(78). – С. 18–25.
2. **Богомаз В.Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями / В.Н. Богомаз, П.И. Когут // Проблемы управления и информатики – 2012. – №3. – С. 31–45.
3. **Богомаз В.М.** Про квадратичну скаляризацию одного класу задач векторної оптимізації в банахових просторах / В.М. Богомаз, П.І.Когут // Вісн. ДНУ. Серія «Моделювання» – 2012. – Т.20, №8, вип.4. – С. 39–51.
4. **Довженко А. В.** Епі-напівнеперервні знизу відображення та їх властивості / А. В. Довженко, П. І. Когут // Математичні студії. – 2011. – Т.16, №1. – С.86–96.

5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Надійшла до редколегії: 22.03.2013 р.

В.М. ⁶Богомаз, О.В. Богомаз

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Робота присвячена проблемі знаходження ефективних розв'язків в одному класі задач векторної оптимізації з фазовими обмеженнями. Запропоновано алгоритм апроксимації таких розв'язків.

Работа посвящена проблеме поиска эффективных решений в одном классе задач векторной оптимизации с фазовыми ограничениями. Предложен алгоритм аппроксимации таких решений.

The paper is sanctified to the problem of search of effective solution in one class of vector optimization problem with state constraints. The algorithm of approximation of such solutions is proposed.

Ключові слова: векторна оптимізація, фазові обмеження, апроксимація.

Вступ. Як відомо, динамічні системи є математичними моделями багатьох реальних фізичних процесів та об'єктів (наприклад, нестійкі процеси у вібраційних машинах). Для визначення ефективних технологічних процесів роботи таких систем широко залучаються задачі оптимізації з нескалярним показником якості. Особливий інтерес серед такого класу задач викликають ті, в яких цільове відображення діє у функціональний простір.

У цій роботі розглядаються задачі векторної оптимізації, для яких характерні такі особливості: цільове відображення є напівнеперервним знизу та діє в простір інтегрованих функцій, стан системи описується системою диференціальних рівнянь першого порядку, ефективні розв'язки розглядаються як елементи нерелексивних просторів, наявні фазові обмеження. Як відомо із [2], у таких задачах доречно знаходити (Λ, μ) -ефективні розв'язки, які залучають топологічні властивості простору образів цільового відображення. Основною метою цієї роботи є дослідження питання

побудови (Λ, μ) -ефективних розв'язків в означеному класі задач векторної оптимізації та створення алгоритмів апроксимації таких розв'язків.

Основні поняття та постановка задачі. Розглянемо таку задачу векторної оптимізації з фазовими обмеженнями:

$$I(u_x) = j(t, u(t), x(t)) \longrightarrow \inf_{\Lambda, \mu}, \quad (1.1)$$

$$x = g(u_x) \text{ на } (0, T), \quad (1.2)$$

$$u \in U, \quad (1.3)$$

$$0(x) = 0, \quad (1.4)$$

$$I(x(t)) \leq \alpha(t) \text{ на } (0, T). \quad (1.5)$$

Нехай допустимі керування $u \in U$ є елементами простору $L^1(0, TR^m)$, та позначимо через $x \in W^{1,1}(0, TR^n)$ відповідні їм функції стану. Нехай множина U є непорожньою та слабо компактною. Нехай є заданими початкові умови для розв'язків диференціальних рівнянь (1.2)

$x(0) \in R^n$. Відображення $I: W^{1,1}(0, TR^n) \rightarrow L^1(0, TR^m)$ є нелінійним, не-

перервним та α є заданим елементом простору $L^1(0, T)$. Унаслідок вклада-

ння $W^{1,1}(0, T) \subset C(0, T)$ (див. [1]) розглянемо на просторі

$L^1(0, TR^m) \times W^{1,1}(0, TR^n)$ топологію τ , яка являє собою добуток

слабкої топології в $L^1(0, TR^m)$ та топології рівномірної збіжності в

$W^{1,1}(0, TR^n)$. Для подальшого дослідження припустимо, що

відображення $j: (0, T) \times R \times R \rightarrow R$ задовольняє таким властивостям:

(i) j є вимірним за Лебегом відносно трьох змінних;

(ii) j є напівніперервним знизу на $RR^m \times RR^n$ для майже всіх (t, x) , тобто для кожної послідовності $\{(u_{kk}, x_{kk})\}_{k \in \mathbb{N}}$ такої, що

$(u_{kk}, x_{kk}) \xrightarrow{\tau} (u, x)$, маємо

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (j(t, u_{kk}(t), x_{kk}(t))) \geq j(t, u(t), x(t));$$

(iii) j є опуклим відносно u для всіх x та майже всіх t ;

(iv) j є невід'ємним.

Будемо вважати, що образи цільового відображення $I(u_X)$ належать до простору $L^1(T)$, який наділено слабкою топологією μ . Нехай частковий порядок у просторі $L^1(T)$ введено за допомогою конуса невід'ємних елементів: $\Lambda = \{f \in L^1(0, T) \mid f(t) \geq 0 \text{ м.в.т. } t \in (0, T)\}$. Квазі-внутрішність конуса, спряженого до Λ , має вигляд $\Lambda_0^*: \{f \in L^\infty(0, T) \mid f, y > 0, \langle f, y \rangle = 0, \forall y \in \Lambda \setminus \{0\}\}$.

Нехай праві частини диференціальних рівнянь (1.2) мають загальний вигляд

$$g(t, x) = a(t, x) - b(t, x), \quad (1.6)$$

де відображення $a: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ та $b: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

1) є вимірними за Лебегом відносно t для будь-яких x ;

2) є неперервними за x для майже всіх $t \in (0, T)$;

3) існують такі функції $\alpha, \beta \in L^1(T)$ та константи $c, d > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ виконуються такі нерівності:

$$\|a(t, x_1) - a(t, x_2)\|_n \leq \alpha(t) \|x_1 - x_2\|_n, \quad \|a(t, 0)\|_n \leq \beta(t),$$

$$\|b(t, x_1) - b(t, x_2)\|_n \leq c \|x_1 - x_2\|_n, \quad \|b(t, 0)\|_n \leq d.$$

Введемо до розгляду такі множини:

$$\Xi = \left\{ (u_X) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^{mn}) \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n) \mid x = g(t, u_X), u \in U_X(0) = x_0 \right\} \quad (1.7)$$

$$\Xi_\alpha = \left\{ (u_X) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^{mn}) \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n) \mid x = g(t, u_X), u \in U_X(0) = x_0, l(x) \leq \alpha \right\} \quad (1.8)$$

Наведемо поняття (Λ, μ) -ефективного розв'язку задачі (1.1) – (1.5)

Означення 1 [2]. Пара $(u^*, x^*) \in \Xi_\alpha$ називається (Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі (1.1)–(1.5), якщо виконується умова $(I(u^*, x^*) - \Lambda) \cap \text{cl}_\mu I(\Xi_\alpha) = \{I(u^*, x^*)\}$. Множину всіх (Λ, μ) -ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.5) будемо позначати через $\text{Eff}_{\tau \times \mu}(\Xi_\alpha; I; \Lambda)$.

Алгоритм апроксимації ефективних розв'язків у задачі.

Твердження 1. Нехай Ξ є непорожньою та τ -замкнутою множиною. Тоді підмножина $\Xi_\alpha \in \tau$ -замкнутою.

Доведення. Якщо $\Xi_\alpha = \emptyset$, то умови твердження є очевидними. Отже, припустимо, що $\Xi_\alpha \in \tau$ -замкнутою. Розглянемо довільну послідовність $(u_{n\alpha}) \in \Xi_\alpha$ таку, що $(u_{n\alpha}) \xrightarrow{\tau} (u_\alpha)$. Якщо $\Xi \in \tau$ -замкнутою, то маємо $(u_\alpha) \in \Xi$. Необхідно довести, що виконується обмеження $l(x_\alpha) \leq \alpha$. Внаслідок неперервності відображення l маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} l(x_n) = l(x)$. Таким чином, виконується співвідношення $l(x) \leq \alpha$ та, відповідно, умова $(u_\alpha) \in \Xi_\alpha$. Отже, $\Xi_\alpha \in \tau$ -замкнутою, що завершує доведення твердження 1.

Для подальших досліджень припустимо, що множина Ξ_α є непорожньою.

Для апроксимації (Λ, μ) -ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.5) розглянемо таку послідовність задач векторної оптимізації:

$$F_\varepsilon(u_\alpha) = j(t, u_\alpha) + \frac{1}{\varepsilon} h(x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

$$(u_\alpha) \in \Xi \quad (2.2)$$

де $h(x, \varepsilon) = (l(x) - \alpha)^+ + l(x) - \alpha$, $\varepsilon > 0$ – фіксований параметр штрафу.

Як було доведено в [6], послідовність розв'язків задачі (2.1) – (2.2) збігається до (Λ, μ) -ефективного розв'язку задачі (1.1) – (1.5). Відображення

$F_\varepsilon(u_\alpha)$ є напівнеперервним знизу як сума неперервного та напівнеперервного знизу відображень $h(x, \varepsilon)$ та $I(u_\alpha)$ відповідно. Очевидно, що для всіх $\varepsilon > 0$ виконуються такі співвідношення:

$$F_{\varepsilon\alpha}(u_\alpha) = j(t, u_\alpha) \quad \forall (u_\alpha) \in \Xi \quad \text{та}$$

$$F_{\varepsilon\alpha}(u_\alpha) \geq j(t, u_\alpha) \quad \forall (u_\alpha) \in \Xi_\alpha.$$

Для пошуку (Λ, μ) -ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (1.1)-(1.5) розглянемо задачу мінімізації лінійної згортки відображення $F_\varepsilon(u_\alpha)$:

$$J_{\varepsilon}(u_x) = \langle \Phi, F(u_x) \rangle_{L^1(0, \cdot)} \longrightarrow \inf_{(u_x) \in \Xi}, \quad (2.3)$$

де елемент $\Phi \in \Lambda_0^*$ такий, що $\|\Phi\|_{L^1(0, \cdot)} = 1$.

За вихідними припущеннями, відображення $j(t, u_x)$ задовольняє умовам (i)-(iv). Отже, функціонал $J_{\varepsilon}(u_x)$ є секвенційно напівніперервним знизу відносно τ -топології у просторі $L^1(0, TR^{mn}) \times W^{1,1}(0, TR^n)$ (див. теорему 3 у [3]). Як відомо з теорії диференціальних рівнянь, множина розв'язків рівнянь (1.2)–(1.4) є компактом у просторі $W^{1,1}(0, TR^n)$ відносно топології рівномірної збіжності. Отже, можна стверджувати, що множина $\Xi \in \tau$ -компактною. Розв'язуваність задачі мінімізації (2.3) при кожному $\varepsilon > 0$ є наслідком залучення прямого методу варіаційного числення до неї.

Для фіксованих параметрів $\varepsilon > 0$ та $\gamma \in R$ визначимо таку множину: $\Theta_{\varepsilon\gamma} = \{(u_x) \in \Xi \mid J_{\varepsilon}(u_x) \leq \gamma\}$. Якщо припустити, що $(u_x^{**}) \in \Xi$ є розв'язком задачі мінімізації (2.3) при фіксованому $\varepsilon > 0$ та $\gamma^* = J_{\varepsilon}(u^*, x^*)$, то є очевидним, що $\Theta_{\varepsilon\gamma^*}$ являє собою множину всіх розв'язків задачі (2.3).

Твердження 2. Нехай $\gamma, R_2\gamma \in +$ та $\varepsilon, R_2\varepsilon \in +$ є заданими. Тоді є вірними твердження:

- (a) $\gamma < 0 \Rightarrow \Theta_{\varepsilon\gamma} = \emptyset, \forall \varepsilon > 0$;
- (b) $\gamma_1 \leq \gamma_2 \Rightarrow \Theta_{\varepsilon\gamma_1} \subseteq \Theta_{\varepsilon\gamma_2}, \forall \varepsilon$;
- (c) $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow \Theta_{\varepsilon_1\gamma} \subseteq \Theta_{\varepsilon_2\gamma}, \forall \gamma \in R$;
- (d) якщо $\Xi \in \tau$ -замкненим, то $\Theta_{\varepsilon\gamma}$ також є τ -замкненим.

Доведення. Згідно з припущенням (iv) відображення j є невід'ємним відносно конуса Λ та для кожного $\varepsilon > 0$ виконується вкладення $h(u_x) \subset \Lambda$. Отже, завжди виконується умова $F(u_x) \subset \Lambda$. Таким чином, функціонал $J_{\varepsilon}(u_x)$ є додатним для всіх $\varepsilon > 0$ та $(u_x) \in \Xi$, тобто твердження (a) є вірним.

Умова (b) є очевидною.

Для доведення умови (с) припустимо, що $\varepsilon \varepsilon_2 \leq$. Тоді виконується умова $F_{\varepsilon \varepsilon_2}(u_{\varepsilon}) \geq_{\Lambda} F(u_{\varepsilon})$ для всіх $(u_{\varepsilon}) \in \Xi$, звідки випливає нерівність $J_{\varepsilon \varepsilon_2}(u_{\varepsilon}) \geq J(u_{\varepsilon})$, яка є справедливою для всіх пар (u_{ε}) із множини Ξ . Отже, $\Theta_{\varepsilon_{12}\gamma} \subseteq \Theta_{\varepsilon \gamma}, \forall \gamma \in R$, що підтверджує справедливості твердження (с).

Для доведення твердження (d) припустимо, що $\gamma \geq 0$. Нехай $\{(u_{kk})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Theta_{\varepsilon \gamma}$ така, що $(u_{kk}, x) \xrightarrow{\tau} (u^{**}, x)$. Доведемо, що $(u^{**}, x) \in \Theta_{\varepsilon \gamma}$. Оскільки множина Ξ є τ -замкнутою, то $(u^{**}, x) \in \Xi$. За означенням множини $\Theta_{\varepsilon \gamma}$ послідовність $\{(u_{kk})\}_{k \in \mathbb{N}}$ задовольняє умові $J_{\varepsilon}(u_{kk}, x) \leq \gamma$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Ураховуючи напівнеперервність знизу відображення $J_{\varepsilon}(u^{**}, x)$, маємо $J_{\varepsilon}(u^{**}, x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_{kk}, x) \leq \gamma, \forall \varepsilon > 0$.

Отже, $(u^{**}, x) \in \Theta_{\varepsilon \gamma}$, що і доводить справедливості твердження (d).

Очевидно: якщо послідовність $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є невід'ємною та незростаючою, то при фіксованому $\varepsilon > 0$ виконується вкладення $\Theta_{\varepsilon \gamma_k, k \in \mathbb{N}} \subseteq \Theta_{\varepsilon \gamma}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. За аналогією при фіксованому γ та монотонно незростаючій послідовності $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такій, що $\varepsilon_k \rightarrow 0$, маємо $\Theta_{\varepsilon_k \gamma, k \in \mathbb{N}} \subseteq \Theta_{\varepsilon \gamma}$ (див. умову (с) твердження 2). Позначимо послідовність відповідних множин через $\{\Theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Для подальших досліджень введемо поняття збіжності послідовності множин за Куратовським.

Означення 2. Нехай (X, τ) - довільний топологічний простір та $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ - довільна послідовність його підмножин. Тоді нижньою та верхньою секвенційними границями послідовності множин $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ називають множини

$$K_{\tau} - \liminf \Theta_k = \left\{ x \in X \mid \exists (x_k) \xrightarrow{\tau} x, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, x_k \in \Theta_k \right\},$$

$$K_{\tau} - \limsup \Theta_k = \left\{ x \in X \mid \exists (x_k) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Theta_k, x_k \xrightarrow{\tau} x \right\}$$

відповідно. Кажуть, що послідовність $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ збігається за Куратовським до множини Θ , якщо виконується умова $\Theta = \text{KK-}\liminf_{k \rightarrow \infty} \Theta_{kk} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \Theta$.

Теорема 1

(i) Нехай $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно незростаюча послідовність така, що $\gamma_k \rightarrow 0^*$, $\gamma_k^* > 0$, та $\Theta^* \neq \emptyset$ для заданого параметра $\varepsilon > 0$. Тоді послідовність множин $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ збігається до Θ^* в сенсі Куратовського.

(ii) Нехай $0 \leq \gamma < \infty$ є заданим параметром та послідовність (ε_k) є монотонно незростаючою і такою, що $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Якщо послідовність $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ збігається за Куратовським до $\Theta^* \neq \emptyset$, то множина Ξ_α є непорожньою.

Доведення. Для доведення твердження (i) оберемо послідовність $(u_{kk}) \in \Xi$ таку, що $(u_{kk}, x_k) \in \Theta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ та $(u_{kk}, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^{**}, x)$. Це можливо, оскільки для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується умова $\Theta_{1kk} \subseteq \Theta$ та за вихідними припущеннями $\Theta^* \neq \emptyset$. Оскільки множина Ξ є τ -компактною, то $(u^{**}, x) \in \Xi$. Унаслідок секвенційної напівнеперервності знизу відображення F_ε для кожних обраних $\varphi \in \Lambda_0^*$ та $\varepsilon > 0$ виконуються співвідношення

$$J_{\varepsilon \in \Lambda_0^*}(u^*, x^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k, x_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0^*.$$

Отже, $(u^*, x^*) \in \Theta^*$. З іншого боку, нехай $(u^*, x^*) \in \Theta^*$ є заданою парою. Можна показати, що існує послідовність $\{(u_{kk}, x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi$ така, що $\{(u_{kk}, x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Theta_k$ та $(u_{kk}, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^{**}, x)$. За необхідністю, можна обрати стаціонарну послідовність $(u_{kk}, x_k) = (u^{**}, x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Отже, виконується умова $\Theta = \text{KK-}\liminf_{k \rightarrow \infty} \Theta_{kk} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \Theta$, що доводить твердження (i).

Розглянемо доведення твердження (ii). Нехай $\Theta^* \neq \emptyset$ та до цієї множини входять елементи, які не задовольняють фазовим обмеженням (1.5). Зафіксуємо один із таких елементів (u, x) . Тоді згідно з означенням 2 існує послідовність $(u_k, x_k) \in \Theta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ така, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u, x)$. Таким чином, ця послідовність для фіксованого $0 \leq \gamma < \infty$ задовольняє умові $J_{\varepsilon_k}(u_k, x_k) \leq \gamma$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Ураховуючи подання функціоналу $J_\varepsilon(u, x)$, маємо нерівність

$$\langle \varphi, I(u_k, x_k) \rangle_{L^1(0, \infty)} + \varepsilon_k^{-1} \langle \varphi, h(u_k, x_k) \rangle_{L^1(0, \infty)} \leq \gamma, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Ураховуючи припущення $(u, x) \notin \Xi_\alpha$ та переходячи до границі при $k \rightarrow \infty$ в лівій частині співвідношення (2.4), маємо $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(u_k, x_k) = +\infty$.

А це суперечить умові (2.4). Отже, $\Theta^* \subseteq \Xi_\alpha$ та $\Xi_\alpha \neq \emptyset$, що і доводить твердження (ii).

Теорема 2. Нехай Ξ_α – непорожня та Ξ – τ -компактна множини. Відображення j задовольняє умовам (i) – (iv), тоді для кожної незростаючої послідовності додатних чисел такої, що $\varepsilon_k \rightarrow 0$, існує послідовність $(u_k, x_k) \in \argmin_{(u, x) \in \Xi} J_\varepsilon(u, x)$, яка збігається до (Λ, μ) -ефективного розв'язку задачі (1.1) – (1.5).

Доведення. Нехай $(\varepsilon_k) \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно незростаюча послідовність така, що $\varepsilon_k \rightarrow 0$ та $(u_k, x_k) \in \argmin_{(u, x) \in \Xi} J_\varepsilon(u, x)$. Існування такої послідовності диктується властивістю напівнеперервності функціоналу $J_\varepsilon(u, x)$ та τ -компактності множини Ξ . За τ -компактністю множини Ξ , з точністю до підпослідовності, маємо $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^{**}, x^{**}) \in \Xi$. Оскільки пари (u_k, x_k) є розв'язками задачі (2.3) при відповідних k , то $(u_k, x_k) \in \Theta_k$. Унаслідок умови (ii) теореми 1 послідовність $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ збігається за Куратовським до $\Theta^* \subseteq \Xi_\alpha$. Отже, $(u^{**}, x^{**}) \in \Xi_\alpha$. Доведемо, що $(u^{**}, x^{**}) \in \Xi$.

(Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі (1.1) – (1.5). Для цього припустимо, що існує інша пара $(u, x) \in \Xi_\alpha$ така, що $J(u, x) < J(u^{**}, x)$. Але з іншого боку, маємо такі нерівності:

$$J_\varepsilon(u, x) \equiv J(u, x) \geq \inf_{(u, x) \in \Xi} J_\varepsilon(u, x) = J_\varepsilon(u^{**}, x), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Переходячи до границі при $k \rightarrow \infty$, маємо $J(u, x) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u, x) = J(u^{**}, x)$, що призводить до протиріччя. Отже,

(u^{**}, x) є розв'язком задачі (2.3) та (Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (1.1) – (1.5) (див. теорему 4.1 у [2]).

Висновки. Для означеного класу задач векторної оптимізації в нереліксивних просторах із фазовими обмеженнями запропоновано схему апроксимації ефективних розв'язків, із залученням ідеї методу штрафів. Визначено секвенційні властивості послідовності множин розв'язків скалярних задач мінімізації при монотонно незростаючому параметрі штрафу. Наведено алгоритм побудови послідовності розв'язків відповідних скалярних задач зі штрафом, яка збігається до (Λ, μ) -ефективного розв'язку вихідної задачі векторної оптимізації з фазовими обмеженнями.

Бібліографічні посилання

1. **Буттаццо Дж.** Одномерные вариационные принципы. Введение / Дж. Буттаццо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт. – Новосибирск: Науч. кн., 2002. – 248 с.
2. **Kogut P. I.** Topological Aspects of Scalarization in Vector Optimization Problems / P. I. Kogut, R. Manzo, I. V. Nechay // Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(2)(2010). – P.25–49.
3. **Ioffe A. D.** On Lower Semicontinuity of Integral Functionals, SIAM Journal on Control and Optimization / A.D. Ioffe. – 1977 – Vol. 15, No. 4. – P. 521–538.
4. **Когут О. П.** Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах / О. П. Когут, П. И. Когут, О. А. Рядно // Моногр. – Д.: Вид.во ДДФА, 2010. – 236 с.
5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. **Богомаз В. Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями / В. Н. Богомаз, П. И. Когут // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №3. – С. 31–45.

Надійшла до редколегії 01.04.2013 р.

Я.С. 7Бондаренко, В.М. Турчин

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ РОБОТИ БАНКОМАТУ

Запропоновано імовірнісну модель роботи банкомату, яка , зокрема, дає можливість вибрати оптимальний режим його роботи.

Предложена вероятностная модель работы банкомата, которая , в частности, позволяет выбрать оптимальный режим его работы.

Stochastic model of cost optimization on ATM encashment is offered. The model makes it possible to select the optimal mode of ATM operation.

Ключові слова: банкомат, інкасація, стандарт якості обслуговування клієнтів, накопичена сума знятої готівки, узагальнений розподіл Пуассона, імовірність, щільність розподілу.

Вступ. Сьогодні всі банки використовують широку мережу банкоматів. Наявність такої мережі ставить перед банками різні завдання. Одне з головних завдань: яку суму необхідно завантажити в банкомат? Завантаження великої суми призводить до збільшення недоотриманого прибутку через непрацюючі активи (гроші у вигляді готівки, що знаходяться в банкоматі), завантаження малої суми – до збільшення витрат на інкасацію банкомату.

На сьогодні питання щодо суми завантаження банкомату персонал банків вирішує інтуїтивно – емпірично, спостерігаючи за роботою кожного банкомату в режимі онлайн. Але такий підхід не є ефективним, адже потребує додаткових витрат і залежить від багатьох інших об'єктивно випадкових факторів, як то негаразди зі зв'язком, проблеми з транспортом (затори на дорогах), погодними умовами тощо. А тому для банків необхідна ефективна методика, що дозволить правильно і найбільш зручно як для клієнтів, так і для банків організувати процес забезпечення банкоматів готівкою.

Дослідженням з даної тематики присвячені роботи [1– 6]. Російським економістом М.С. Васінім [1] було запропоновано статистичне моделювання функціонування банкомату. Банкомат розглядався як система масового обслуговування. Моделювалися – як потік клієнтів, так і потік зня-

тої готівки, які істотно залежать від часу доби, дня тижня й місяця. При моделюванні потоку клієнтів передбачалося, що потік клієнтів пуассонів, але його інтенсивність залежить від часу. Для нестационарного потоку Пуассона використано метод введення операційного часу. Тривалість обслуговування клієнтів моделювалася логнормальним розподілом, а величина суми знятої готівки – гама-розподілом. Варіюючи суму завантаження та критичну суму, по досягненню якої подається сигнал про необхідність завантаження банкомату, проводиться оптимізація витрат на інкасацію банкомату. У роботі [2] розв'язується задача оптимізації завантаження банкомату грошовими купюрами різного номіналу. Групою дослідників на чолі з А.А. Риндіним [3] була розроблена модель нейронної мережі для прогнозування сум зняття готівки в банкоматі. У моделі використано такі припущення. Суми знятої готівки в кожний з M наступних днів залежить від того, робочий цей день, передсвятковий або святковий, а також від дня тижня й числа місяця. Суми знятої готівки в кожний з M наступних днів залежать від сум знятої готівки за M попередніх днів і M днів того ж місяця рік потому. Для навчання нейронної мережі застосовувався метод навчання «із вчителем». У результаті отримано нейронну мережу, що може бути використана для прогнозування сум зняття готівки на M днів уперед. У роботі [4] розроблена методика комплексного статистичного аналізу руху готівки й оптимізації витрат на проведення інкасації в регіональній мережі комерційного банку. R. Simutis [5] запропонував два різних підходи до прогнозування щоденного попиту на готівку в банкоматі. Перший підхід – побудова штучної нейронної мережі, другий – використання методу регресії опорних векторів. При порівнянні результатів прогнозування виявилось, що перший підхід має перевагу. Delyno Johannes du Toit [6] скористався адаптивною моделлю Хольта – Вінтерса для прогнозування руху готівки. Дана модель ураховує адитивну сезонність, зокрема річну, місячну, тижневу.

Але в усіх цих роботах не враховувалося головне: робота банкомата має бути організована так, щоб виконувався **стандарт якості обслуговування клієнтів** (зрозуміло, такий, щоб його можна було виконати). На сьогодні в банках прийнято, що до моменту приїзду інкасації принаймні одна купюра має знаходитися в банкоматі (гроші в банкоматі мають бути завжди), а максимальна сума вивантаження має становити не більше 10% від завантаженої суми. Витрати банку на підтримку такого стандарту дуже великі. У даній роботі запропоновано імовірнісну модель роботи банкомату, в якій стандарт якості визначається константою α – ймовірністю відмови клієнту в знятті готівки.

Постановка задачі. Нехай S_3 – сума завантаження банкомата готівкою; Δ – критичний залишок готівки у банкоматі, при досягненні якого необхідно призначати інкасацію банкомату. Якими мають бути S_3 і Δ , щоб за заданого стандарту якості обслуговування клієнтів витрати на інкасацію банкомату були мінімальними?

Стандарт якості обслуговування клієнтів. Позначимо через S накопичену суму знятої готівки до моменту часу t . Нехай

$$S_k = S_3 - \Delta, \quad (1)$$

де S_k – значення накопиченої суми S , за якої необхідно призначати інкасацію банкомату; через $\tau(S_k)$ позначимо момент часу, коли накопичена сума S уперше перевищила рівень S_k (рис. 1).

Стандарт якості обслуговування клієнтів позначимо так: для заданого α на проміжку часу $[\tau(S_k), \tau(S_k) + 24]$ має місце співвідношення

$$P\{S - S_k \geq \Delta\} \leq \alpha. \quad (2)$$

Останнє означає, що якщо вибране α дорівнює, скажімо, 0,01, то за 24 години після моменту $\tau(S_k)$ 99% клієнтів, що звернулися за готівкою до банкомату, отримають її в даному банкоматі.

Чим вищий стандарт якості обслуговування, тим більший залишок готівки має знаходитись у банкоматі за 24 години до інкасації. Рівнем Δ ми регулюємо якість обслуговування. Для розв'язання нерівності (2) необхідно знати розподіл накопиченої суми знятої готівки S .

Нехай потік клієнтів описується стаціонарним пуассоновим процесом з інтенсивністю λ . Тоді число $v(t)$ клієнтів, що відвідали банкомат до моменту часу t , є випадковою величиною з розподілом

$$P\{v(t)=n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

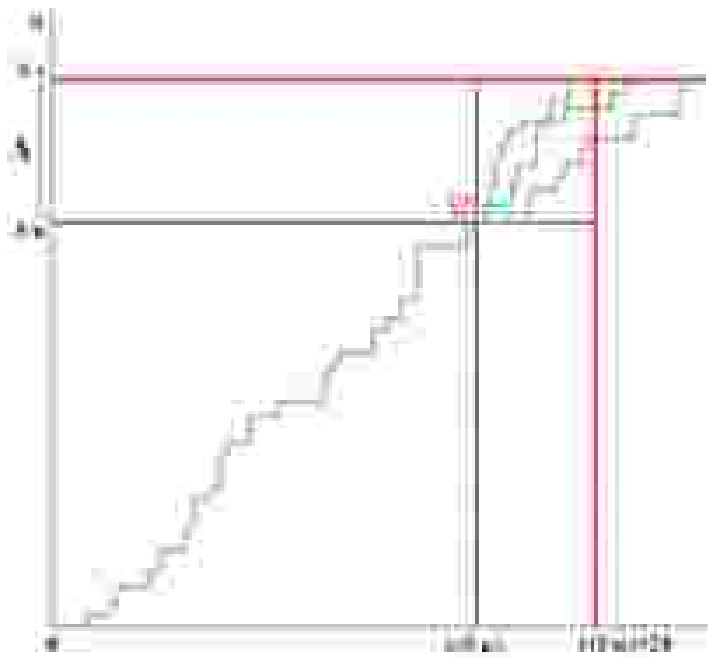


Рис. 1. До визначення залишку готівки Δ (по осі ординат відкладається величина накопиченої суми знятої готівки, по осі абсцис – час)

Позначимо через Y_j суму готівки, знятої j -м клієнтом. Природно припустити, що випадкові величини $Y_1, Y_2, \dots$ – незалежні, однаково розподілені; позначимо їхній розподіл через F . Накопичена сума знятої готівки за час t

$$S_t = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{v(t)} \quad (4)$$

має узагальнений розподіл Пуассона

$$F_{S_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_t)^n}{n!} e^{-\lambda_t} F^{n*}, \quad (5)$$

де F^{n*} – n -кратна згортка розподілу F .

Якщо розподіл F абсолютно неперервний зі щільністю f , то F_{S_t} також абсолютно неперервний розподіл і його щільність дорівнює

$$f_{S_t}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f^{n*}. \quad (6)$$

У випадку, якщо Y_i мають експоненціальний розподіл із параметром μ (часто трапляється на практиці), щільність розподілу $f_{S_t}(x)$ має вигляд

$$f_{S_t}(x) = \exp\{-\lambda t - \mu x\} \sqrt{\frac{\lambda t \mu}{x}} I_1(2\sqrt{\lambda t \mu x}), \quad x > 0, \quad (7)$$

де I_1 – модифікована функція Бесселя першого порядку

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Графік щільності розподілу накопиченої суми наведено на рис. 2.

Згідно з центральною граничною теоремою при великих значеннях часу t накопичена сума S_t знятої готівки за час t має асимптотично нормальний розподіл. Розв'язуючи нерівність (2), здобуємо критичний залишок готівки Δ у банкоматі за 24 години до інкасації, який забезпечує стандарт якості обслуговування 0,99:

$$\Delta = M(S - S_k) + x_{0,99} \sqrt{D(S - S_k)}, \quad (8)$$

де $x_{0,99}$ – квантиль нормального розподілу.

Розподіл моменту $\tau(S_k)$ першого досягнення накопиченою сумою знятої готівки рівня критичної суми. Момент $\tau(S_k)$ – момент часу, коли накопичена сума S уперше перевищила рівень S_k , – є сумою інтервалів часу між моментами зняття готівки

$$\tau(S_k) = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_V, \quad (9)$$

де V – номер клієнта, на якому накопичена сума знятої готівки вперше досягне рівня критичної суми S_k .

Момент $\tau(S_k)$ – випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p_{\tau(S_k)}(t) = \lambda \exp\{-\lambda t - \mu S_k\} \cdot I_0\left(2\sqrt{\lambda t \mu S_k}\right), \quad (10)$$

де I_0 – модифікована функція Бесселя нульового порядку

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Графік щільності розподілу моменту $\tau(S_k)$ наведено на рис. 3.

Згідно з центральною граничною теоремою при достатньо великих значеннях критичної суми S_k момент $\tau(S_k)$ має асимптотично нормальний розподіл із числовими характеристиками

$$M\tau(S_k) = Mv/\lambda,$$

$$D\tau(S_k) = (Mv + Dv)/\lambda^2.$$

У випадку, якщо Y_i мають експоненціальний розподіл із параметром μ (часто має місце на практиці), середнє та дисперсія моменту $\tau(S_k)$ набувають простого вигляду:

$$M\tau(S_k) = \left(S_k/\bar{Y} + 1\right)/\lambda,$$

$$D\tau(S_k) = \left(2S_k/\bar{Y} + 1\right)/\lambda^2,$$

де $\bar{Y}$ – середня сума знятої готівки; λ – інтенсивність потоку клієнтів.

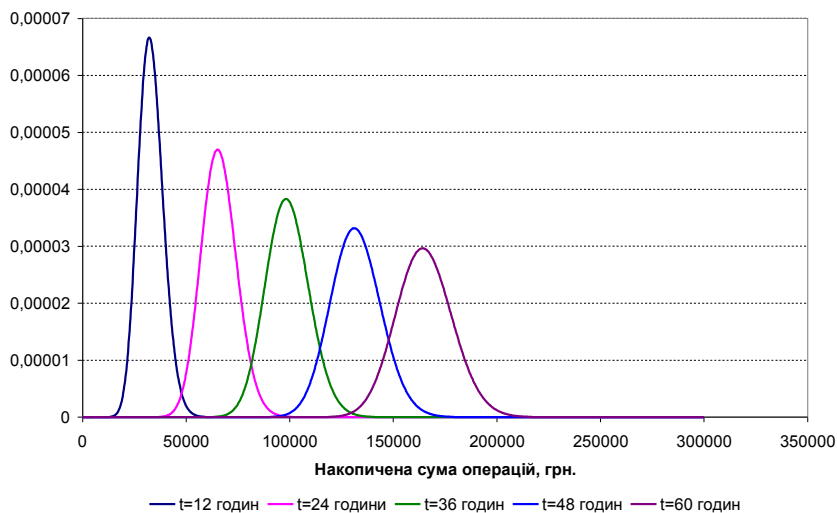


Рис. 2. Щільність розподілу накопиченої суми знятої готівки для $\lambda = 5$ клієнтів/годину, середньої суми знятої готівки $1/\mu = 550$ грн

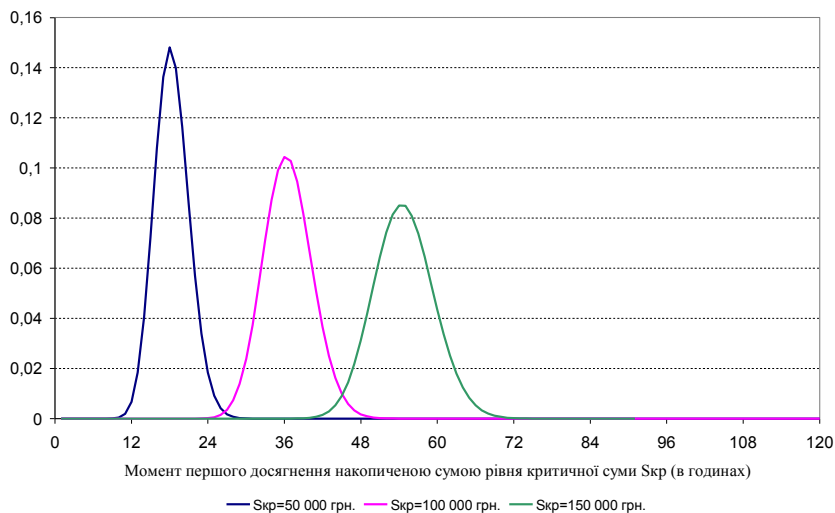


Рис. 3. Щільність розподілу моменту першого досягнення накопиченою сумою рівня критичної суми S_k для $\lambda = 5$ клієнтів/годину, середньої суми знятої готівки $1/\mu = 550$ грн

Витрати банку на інкасацію банкомату. Витрати банку на інкасацію U можна подати у вигляді суми транспортних витрат (це заробітна плата інкасаторів, обслуговування транспорту, пальне, одяг інкасаторів, зв'язок, індивідуальні засоби захисту) та вартості залучених коштів (готівка, яка завантажена в банкомат):

$$U = \left(\frac{365}{M\tau(S_K) + 1} \right) C + \left(\frac{365}{M\tau(S_K) + 1} \right) \sum_{k=1}^{M\tau(S_K) + 1} S(t_k) \left(\frac{j}{365} \right) \quad (14)$$

де $(M\tau(S_K) + 1)$ – проміжок часу між послідовними інкасаціями; $365/(M\tau(S_K) + 1)$ – середнє число інкасацій за рік; C – транспортні витрати на одну інкасацію; $S(t_k)$ – сума готівки в банкоматі в момент часу t_k ; j – річна процентна ставка.

Витрати на інкасацію U як функція від випадкової величини $S(t_k)$ є випадковою величиною. Розподіл випадкової величини U повністю її описує, але знайти його, як правило, не вдається. Уявлення про розподіл дають його моменти, наприклад перший момент

$$MU = \left(\frac{365}{M\tau(S_K) + 1} \right) C + \left(\frac{365}{M\tau(S_K) + 1} \right) \sum_{k=1}^{M\tau(S_K) + 1} MS(t_k) \left(\frac{j}{365} \right). \quad (15)$$

Результати. Модельні вихідні дані складаються з дати спостереження за роботою банкомату, кількості операцій зі зняття готівки за добу, накопиченої суми знятої готівки за добу.

За модельними вихідними даними була перевірена гіпотеза про нормальний розподіл накопиченої суми операцій за днями тижня за допомогою критерію χ^2 (гіпотетичний розподіл залежить від невідомих параметрів). Гіпотези про нормальний розподіл накопиченої суми операцій за днями тижня не відхиляються (рівень значущості критерію дорівнює 0,05).

Оптимальний залишок готівки Δ в банкоматі за 24 години до інкасації, який забезпечує стандарт якості обслуговування 0,99, наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Залишок готівки за 24 години до інкасації банкомату за днями тижня

Стандарт якості обслуговування клієнтів	День тижня	$M(S-S_k)$	Оптимальний залишок готівки Δ за 24 години до інкасації
$\alpha=0,99$ (99%)	Звичайний понеділок	29 109	65 942
	Звичайний вівторок	41 723	86 462
	Звичайна среда	38 619	71 507
	Звичайний четвер	37 615	77 336
	Звичайна п'ятниця	45 018	86 544
	Звичайна субота	45 703	88 544
	Звичайна неділя	27 682	58 641
	Передсвятковий день	44 699	91 159
	Святковий день	36 424	78 082

Розглянемо тиждень, який складається із звичайних днів (протягом тижня немає свят). Нехай готівку завантажено в понеділок. Серед усіх можливих сум завантаження (100 000, 150 000, 200 000, 250 000 і т.д.) обираємо суму, для якої середні витрати банку на інкасацію мінімальні. Вони становлять 57 516 на рік при сумі завантаження 150 000. За такої суми необхідно проводити інкасацію банкомату через день, тобто в середу. При сумі завантаження 200 000 витрати банку не набагато більші (59 334 на рік), але інкасувати банкомат необхідно через два дні, тобто в четвер. Оскільки парк автотранспорту банку обмежений, 200 000 можна вважати оптимальною сумою завантаження в понеділок. Для інших днів тижня результати здобуваємо аналогічно (див. табл. 2).

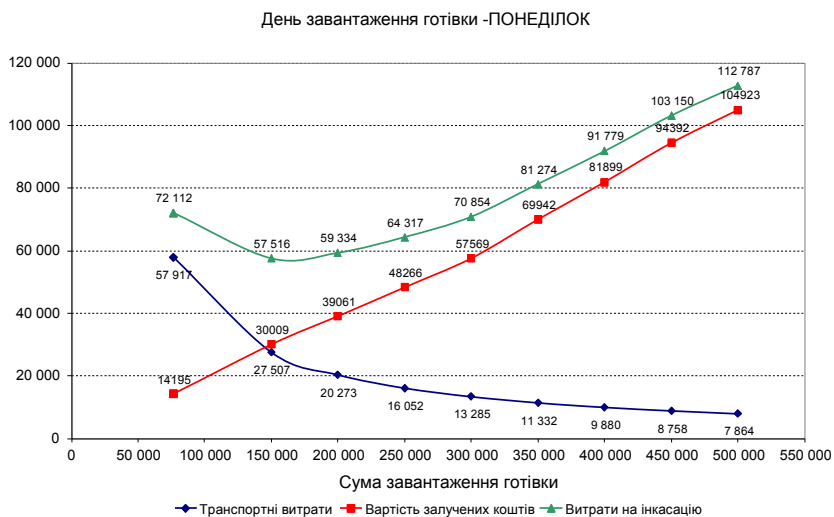


Рис. 4. Витрати на інкасацію банкомату за різних сум завантаження

Таблиця 2

Середні витрати на інкасацію банкомату в звичайний тиждень

Стандарт якості обслуговування клієнтів	День завантаження готівки	Середні витрати за рік	Оптимальна сума завантаження	Період між інкасаціями
$\alpha=0,99$ (99%)	Звичайний понеділок	59 334	200 000	дві доби
	Звичайний вівторок	56 271	200 000	дві доби
	Звичайна середа	56 662	200 000	дві доби
	Звичайний четвер	55 415	200 000	дві доби
	Звичайна п'ятниця	54 859	200 000	дві доби
	Звичайна субота	58 115	200 000	дві доби
	Звичайна неділя	61 974	200 000	дві доби

Висновки. У роботі запропонована загальна ймовірнісна модель оптимізації процесу забезпечення банкоматів готівкою. Починаючи з простих уявлень, поступово ускладнюючи модель, можна більш детально моделювати та досліджувати рух готівки в банкоматі.

Побудова портрета клієнта банкомату вимагає докладного вивчення характеристик нестационарного потоку клієнтів. Необхідно враховувати нерівномірність зняття готівки по днях тижня, нерівномірність зняття готівки протягом доби, режим роботи грошового сховища та служби інкасації, розташування банкомату (у зарплатних банкоматів чітко виражені зарплатні дні, у банкоматів у торговельних центрах виражені сезонні піки та спади). Останнє вимагає докладних вихідних даних, а саме: дати та часу інкасації, суми завантаження, дат та часу зняття готівки клієнтами, сум операцій, видів карт (кредитна, зарплатна, пенсійна, соціальна, персональна), приналежності карти банку (своя/чужа).

Бібліографічні посилання

1. **Васин Н. С.** Анализ и прогнозирование движения денег в банкоматных системах: автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. экон. наук / Н.С. Васин. – Орел, 2007.
2. **Бояршинов М. Г.** Оптимальная загрузка банкомата денежными купюрами / Бояршинов М.Г., Салихова О.С. // Вестник Пермского гос. техн. ун-та. – 2010. – №15.
3. **Рындин А. А.** Формализация оптимизационной модели расчета денежных средств для загрузки в устройства самообслуживания / А.А. Рындин, А.А. Демиденков, С.В. Минаков // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 5., № 3. – С. 124–126.
4. **Господинова Е. А.** Статистический анализ движения наличных денежных средств в региональной сети коммерческого банка: автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. экон. наук. – М., 2009.
5. **Simutis R.** Cash demand forecasting for ATM using neural networks and support vector regression algorithms / R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina // EurOPT' 2008, May 20–23, 2008, Neringa, Lithuania: selected papers. – Vilnius. – P. 416–421.
6. **Delyno Johannes du Toit.** ATM Cash Management for a South African Retail Bank. – Stellenbosch University, 2011.
7. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее применение: в 2 т. / В. Феллер – М.: Мир, 1984. Т. 2. – 738 с.
8. **Кокс Д. Р.** Теория восстановления. / Д.Р. Кокс, В.Л. Смит – М.: Сов. радио, 1967. – 300 с.

Надійшла до редколегії 02.07.2013 р.

В. Я. ⁸Бурдюк

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

НЕАРХІМЕДОВО УПОРЯДКОВАНІ ПАРИ ПОЛІНОМІВ

Запропоновано визначення неархімедово упорядкованої пари елементів упорядкованого моноїда. Сформульовано і доведено необхідні та достатні умови бути неархімедово упорядкованою парою елементів для лінійно упорядкованого кільця поліномів.

Предложено определение неархимедово упорядоченной пары элементов упорядоченного моноида. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия быть неархимедово упорядоченной парой элементов для линейно упорядоченного кольца полиномов.

Definition of the nonarchimedean ordered pair is proposed. All nonarchimedean ordered pairs of the polynomials are discovered.

Ключові слова: упорядкована пара, неархімедове упорядкування, поліноми.

Вступ. Вважається, що елементи a та b упорядкованого моноїда [1] утворюють упорядковану пару (a, b) , якщо $a < b$. Ми називаємо упорядковану пару (a, b) неархімедово упорядкованою, якщо для неї виконується таке:

$$0 < a < b \wedge a + a < b \wedge a + a + a < b \wedge \dots.$$

Упорядкований моноїд є, за означенням, неархімедово упорядкованим, якщо в ньому існують неархімедово упорядковані пари. Природно постає задача про виявлення всіх неархімедово упорядкованих пар елементів неархімедово упорядкованого моноїда. Цю задачу ми розглядаємо для неархімедово упорядкованого кільця поліномів, скориставшись добре відомими результатами [2] щодо неархімедово упорядкованого поля гіпердійсних чисел.

Лінійно упорядковане кільце поліномів

Нехай Z є множиною цілих чисел, а A -- числа надмножина множини Z , замкнена відносно операцій додавання, множення та віднімання,

причому на A зафіксовано лінійний порядок $\leq$, узгоджений з операціями додавання та множення. Множиною A є, наприклад, множина дійсних чисел. Виокремлюємо такі відображення $f: A \rightarrow A$, як:

$$1) a_x, \text{ якщо } \exists a \in A \forall x \in A f(x) = a,$$

тож a_x -- це константні перетворення множини A , такі як $-1_x, 0_x, 1_x$; перетворення 0_x називаємо *нуль_поліномом*;

$$2) x^n, \text{ якщо } \forall x \in A f(x) = x^n, \text{ де } n \text{ -- натуральне число,}$$

тож x^0 -- це ще одне ім'я для перетворення 1_x , а x^1 -- це ім'я тотожного перетворення id_A ;

$$3) P_n(x) = a_{x0} \cdot x^0 + a_{x1} \cdot x^1 + \dots + a_{xn} \cdot x^n, \text{ де } a_{xn} \neq 0_x;$$

зазвичай пишуть $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, маючи на увазі числові коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ та називаючи *старшим одночленом полінома* $P_n(x)$ одночлен a_nx^n , *молодшим* -- одночлен a_mx^m , якщо $a_m \neq 0$ та $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, тож $m \leq n$; у випадку $m = n$ поліном $P_n(x)$ є фактично одночленом a_nx^n . Бачимо, що для кожного значення предметної змінної $x \in A$ обчислення значення поліномів $P_n(x)$ може відбуватися за допомогою операцій, визначених на множині A .

Над поліномами $P(x)$, тобто над нуль_поліномом та поліномами $P_n(x)$, здійснюють операції додавання, множення та віднімання, причому 0_x та 1_x відіграють роль констант нуля та одиниці відповідно. Отже, для поліномів

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$$Q_r(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_rx^r$$

$$\text{маємо } P_n(x) \pm Q_r(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \dots + (a_k \pm b_k)x^k,$$

$$\text{де } k = \max(n, r);$$

множення цих самих поліномів здійснюють так: беруть загальну суму парних добутків одночленів із $P(x)$ та $Q(x)$, а потім приводять подібні члени, тож

$$P_n(x) \cdot Q_r(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)x + \dots + a_n \cdot b_r \cdot x^{n+r}.$$

Майже очевидно є

Теорема 1. Якщо $a_m x^m$, $b_q x^q$ -- молодші одночлени поліномів $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ відповідно, то молодшим одночленом полінома $P_n(x) \cdot Q_r(x)$ буде одночлен $a_m \cdot b_q \cdot x^{m+q}$.

На множині $A[x]$ всіх поліномів, коефіцієнти яких належать множині A , існує природне відношення порядку $\leq$, де

$$P(x) \leq Q(x) \Leftrightarrow \forall z P(z) \leq Q(z).$$

Але це відношення порядку $\leq$ не є лінійним порядком. Тому на $A[x]$ вводять інше відношення порядку $\prec$, яке вже є строгим лінійним порядком, про що і йдеться нижче.

Одночлен $a_m x^m$ називають *від'ємним (додатним)* і пишуть $a_m x^m \prec 0_x$ (відповідно $0_x \prec a_m x^m$), якщо його коефіцієнт a_m є від'ємним (відповідно додатним) числом. Поліном $P_n(x)$ називають *від'ємним (додатним)* і пишуть $P_n(x) \prec 0_x$ (відповідно $0_x \prec P_n(x)$), якщо його молодший одночлен є від'ємним (відповідно додатним), тож лише нуль-поліном 0_x не є ні від'ємним, ні додатним.

Для довільних поліномів $P(x)$ та $Q(x)$ визначають

$$P(x) \prec Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) \prec 0_x.$$

Теорема 2. Відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є строгим лінійним порядком, узгодженим з операціями додавання та множення поліномів.

Доведення. Маємо $P(x) \prec P(x) \Leftrightarrow 0_x \prec 0_x$. Але ж хибним є твердження $0_x \prec 0_x$, а тому твердження $\neg(P(x) \prec P(x))$ буде істинним. Отже, відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є антирефлексивним.

Нехай тепер виконується $P(x) \prec Q(x)$ та $Q(x) \prec R(x)$, а тому

$$P(x) - Q(x) \prec 0_x \text{ та } Q(x) - R(x) \prec 0_x.$$

Звідси отримуємо $(P(x) - Q(x)) + (Q(x) - R(x)) \prec 0_x + 0_x$,

тобто $P(x) - R(x) \prec 0_x$. Отже, відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є і антирефлексивним, і транзитивним, тобто є відношенням строгого порядку, причому цей порядок є лінійним, адже якщо $P(x) \neq Q(x)$, то

$P(x) - Q(x) \neq 0_x$, і тому:

або $0_x \prec P(x) - Q(x)$, тобто $Q(x) \prec P(x)$,

або $P(x) - Q(x) \prec 0_x$, тобто $P(x) \prec Q(x)$.

Порядок $\prec$ буде узгодженим із операцією множення, якщо

$$1) P(x) \prec Q(x) \wedge 0_x \prec R(x) \Rightarrow P(x) \cdot R(x) \prec Q(x) \cdot R(x),$$

$$2) P(x) \prec Q(x) \wedge R(x) \prec 0_x \Rightarrow Q(x) \cdot R(x) \prec P(x) \cdot R(x).$$

Маємо

$$P(x) \cdot R(x) \prec Q(x) \cdot R(x) \Leftrightarrow (P(x) - Q(x)) \cdot R(x) \prec 0_x.$$

Але ж теорема 1 свідчить: добуток поліномів буде *від'ємним* (додатним), якщо і тільки якщо молодші одночлени цих поліномів мають протилежні (відповідно однакові) знаки, тож із $P(x) \prec Q(x)$ випливає таке:

$$P(x) \cdot R(x) \prec Q(x) \cdot R(x) \text{ у випадку } 0_x \prec R(x), \text{ але}$$

$$Q(x) \cdot R(x) \prec P(x) \cdot R(x) \text{ -- у випадку } R(x) \prec 0_x.$$

Узгодженість відношення $\prec$ з операцією додавання перевіряється тривіально. *Кінець доведення.*

Неархімедово упорядковані пари поліномів

За означенням, неархімедово упорядкована пара поліномів $(P(x), Q(x))$ має властивість

$$0_x \prec P(x) \prec Q(x) \wedge \forall k \geq 2 (k \cdot P(x) \prec Q(x)),$$

тож поліномами із цієї пари можуть бути лише $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ із додатними молодшими одночленами $a_m x^m$ та $b_q x^q$ відповідно, тож $0 < a_m$, $0 < b_q$ та

$$0_x \prec Q_r(x) - k \cdot P_n(x) = b_0 + b_1 x + \dots + (b_m - k \cdot a_m) x^m + \dots \quad (*)$$

для кожного $k \geq 2$, і тому при $q < m$ співвідношення (*) виконується, а при $m \leq q$ для виконання співвідношення (*) потрібно вимагати виконання $0 < b_m - k \cdot a_m$ для кожного $k \geq 2$, що, за аксіомою Архімеда, є неможливим у полі дійсних чисел.

Таким чином, нами доведено таку теорему:

Теорема 3. Поліноми $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ утворюють неархімедово упорядковану пару $(P_n(x), Q_r(x))$ в лінійно упорядкованому кільці поліномів, якщо і тільки якщо їх молодші одночлени $a_m x^m$ та $b_q x^q$ мають властивість

$$0 < a_m \wedge 0 < b_q \wedge 0 \leq q < m.$$

Наслідок 1. Для поліномів $Q_r(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r$, що мають додатний вільний член b_0 , такі два твердження є логічно еквівалентними:

- 1) упорядкована пара поліномів $(P_n(x), Q_r(x))$ є неархімедово упорядкованою;
- 2) молодший одночлен $a_m x^m$ полінома $P_n(x)$ є додатним одночленом та $m > 0$.

Наслідок 2. Для кожного $m > 0$ маємо неархімедово упорядковану пару поліномів $(x^m, 1_x)$.

Висновки

1. У роботі запропоновано означення неархімедово упорядкованої пари елементів упорядкованого моноїду, а для лінійно упорядкованого кільця поліномів сформульовано і доведено необхідні та достатні умови бути неархімедово упорядкованою парою його елементів.
2. Побудовано багато конкретних неархімедово упорядкованих пар поліномів.
3. Цікаво було б зробити це ж саме і для інших упорядкованих алгебраїчних систем.

Бібліографічні посилання

1. **Бурдюк В. Я.** Абстрактні множини: моногр . / В. Я. Бурдюк. – Д.: Ліра, 2012. – 160 с.
2. **Успенский В. А.** Что такое нестандартный анализ? / В. А. Успенский. – М.: Наука, 1987. – 128 с.

Надійшла до редакції 22.05.2013 р.

Л. Л. Ґарт

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Досліджується питання про наближене знаходження стійких розв'язків некорректних інтегральних рівнянь із постійними границями інтегрування за допомогою проєкційних і проєкційно-ітераційних регуляризуючих схем, основаних на методі А.Н. Тихонова. Здійснюється порівняльний аналіз відповідних алгоритмів із використанням різних способів вибору параметра регуляризації, демонструється їхня практична збіжність на прикладі розв'язання конкретних задач.

Исследуется вопрос о приближенном нахождении устойчивых решений некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования при помощи проекционных и проекционно-итерационных регуляризующих схем, основанных на методе А.Н. Тихонова. Проводится сравнительный анализ соответствующих алгоритмов с использованием различных способов выбора параметра регуляризации, демонстрируется их практическая сходимость на примере решения конкретных задач.

The problem of approximate finding stable solutions of ill-posed integral equations with constant integration bounds is investigated with applying the projection and projection- iteration regularizing schemes based on Tikhonov's method. A comparative analysis of the corresponding algorithms using various ways of the regularization parameter choice is carried out, the practical convergence of these algorithms for solving concrete problems is demonstrated.

Ключевые слова: некорректное интегральное уравнение, оператор, параметр регуляризации, метод Тихонова, метод квадратур, проекционно-итерационный алгоритм, приближенное решение, последовательность, сходимость, погрешность.

Введение. В настоящее время интегральные уравнения стали широко применяться для решения многих задач моделирования динамических объектов и систем [1]–[4]. Интегральные уравнения позволяют понижать

размерность некоторых задач исследования сплошных сред более компактно, чем дифференциальные уравнения, формулировать краевые задачи, приводят к устойчивым вычислительным процедурам.

Рассмотрение произвольной непрерывной динамической системы как взаимосвязанной совокупности элементов, входы и выходы которых связаны причинными отношениями, приводит к описанию их в общем случае системой интегральных уравнений Вольтерра – Урысона [4]. Объединение объектов, охваченных обратными связями, в систему свидетельствует о том, что задачи их анализа описываются интегральными уравнениями второго рода

$$y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

где $K(x, s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – правая часть уравнения с областью определения Q , λ – числовой параметр, $y(s)$ – искомая функция с областью определения Ω , переменной в случае уравнения Вольтерра или постоянной в случае уравнения Фредгольма, одномерной или многомерной в случае одномерного или многомерного уравнения (1) соответственно. При этом реакция системы на произвольные воздействия представляется искомой функцией $y(s)$ уравнения вида (1) с переменной областью интегрирования, а периодические процессы описываются уравнениями с постоянными пределами интегрирования, равными периоду. Задача отыскания решения уравнения второго рода является в принципе корректной: решение такой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Задачи восстановления внешних воздействий, определения весовых функций, более общие задачи идентификации, интерпретация результатов наблюдений и экспериментов и другие практически важные задачи приводят к уравнениям первого рода

$$\int_{\Omega} K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

которые обладают свойствами некорректности (нарушается хотя бы одно из условий корректности по Адамару) и, строго говоря, не могут быть решены классическими методами в их традиционной форме. Это сделало актуальной разработку эффективных методов их решения.

Базовые понятия и методы решения некорректных задач были введены, как известно, московской школой академика А.М. Тихонова [5] и новосибирской школой академика М.М. Лаврентьева [6]. В частности, было вве-

дено понятие регуляризирующего оператора и сформулирован один из самых эффективных методов решения некорректных задач – метод α -регуляризации Тихонова, дано понятие условной корректности (или корректности по Тихонову), предложен ряд регуляризирующих схем решения, в том числе на компакте, разработаны устойчивые (регулярные, робастные) методы для решения задач в различных областях математики (оптимальное планирование, оптимальное управление, суммирование рядов Фурье, интегральные уравнения первого рода типа свертки, системы линейных алгебраических уравнений, операторные уравнения).

Интегральные уравнения в неразрывной связи с функциональным анализом представлены в богатых по содержанию трудах Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, Л.А. Люстерника и В.И. Соболева, В.А. Треногина, С.Г. Михлина и других авторов. Существенный вклад в разработку различных аспектов решения некорректных задач внесли В.М. Фридман, В.А. Морозов, Ф.П. Васильев, В.Ю. Кудринский, В.В. Васин, В.К. Иванов и другие авторы, которые применили к решению некорректных задач проекционные (аппроксимационные) методы совместно с методами регуляризации, квазирешений и невязки. В работах этих ученых нашел свое строгое обоснование способ невязки решения некорректных задач, идея которого до этого была высказана без доказательства Д.Л. Филлипсом, а также Л.В. Канторовичем.

Устойчивые методы решения некорректных задач изложены во многих монографиях и публикациях, однако их наличие не исключает возможности разработки новых, более эффективных методов, а также усовершенствования уже существующих методов с доведением их до практических алгоритмов, и особенно до машинных программ.

Постановка задачи. Целью данной работы является сравнительный анализ вычислительных схем, основанных на методе регуляризации Тихонова, для приближенного решения линейных и нелинейных некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, а именно одномерного линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A y \equiv \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

и нелинейного интегрального уравнения Урысона первого рода

$$Ay \equiv \int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (4)$$

Предполагается, что ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения (3) – вещественная непрерывная функция в области $G = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, а функция $K(x, s, y(s))$ в уравнении (4) непрерывна в G вместе с производными $K'_y(x, s, y(s))$, $K''_{yy}(x, s, y(s))$ по совокупности переменных $x, s \in [a, b]$, $f(x) \in L_2[a, b]$, $y(s) \in L_2[a, b]$.

В качестве упомянутых регуляризирующих схем приближенного решения уравнений (3) и (4) рассматриваются проекционные и проекционно-итерационные вычислительные схемы, основанные на методе Тихонова в сочетании с методом квадратур для решения регуляризованных уравнений с использованием различных способов выбора параметра регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки).

В данной работе впервые исследуется возможность применения проекционно-итерационного подхода к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, который заключается в модификации классического метода α -регуляризации Тихонова и позволяет заменить регуляризованное интегральное уравнение некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его конечно-мерных задач на совокупности измельчающихся сеток. При этом для каждой из «приближенных» задач с помощью некоторой итерационной процедуры строится лишь несколько приближений к решению, последнее из которых с использованием кусочно-линейной интерполяции принимается за начальное приближение в итерационном процессе для следующей «приближенной» задачи. Последовательность линейных интерполянтов построенных приближенных решений объявляется последовательностью приближений к решению исходного интегрального уравнения.

Следует отметить, что общая идея проекционно-итерационных методов для решения операторных уравнений и задач минимизации в функциональных пространствах принадлежит С.Д. Балашовой [7], в работах которой эти методы нашли свое строгое теоретическое обоснование и применение к решению различных конкретных классов математических задач, а в настоящее время продолжает развиваться в Днепропетровском университете в работах ее учеников.

Задачей данного исследования является анализ вычислительной эффективности проекционных и проекционно-итерационных регуляризи-

рующих схем, основанных на методе А.Н. Тихонова, на примере решения конкретных линейных и нелинейных некорректных задач с точки зрения трудоемкости вычислений и точности получаемых приближенных решений.

Метод решения. Идея метода регуляризации Тихонова для решения некорректных интегральных уравнений (3) и (4) состоит в том [5], что для обеспечения устойчивости решения каждого из этих уравнений вводится условие минимума так называемого сглаживающего функционала

$$\Phi_{\alpha}(y) = \|Ay - f\|_{L_2}^2 + \alpha \|y\|_{L_2}^2 \rightarrow \min_{y \in L_2[a,b]}, \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, для определения которого существуют различные способы [4]. Раскрытие условия (5) с учетом представления интегрального оператора A в уравнениях (3) и (4) приводит соответственно к регуляризованным интегральным уравнениям (уравнениям Эйлера экстремальной задачи (5)) типа Фредгольма второго рода

$$\alpha y_{\alpha}(t) + \int_a^b B(t,s) y_{\alpha}(s) ds = F(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (6)$$

и Урысона второго рода

$$\alpha y_{\alpha}(t) + \int_a^b B(s,t, y_{\alpha}(s), y_{\alpha}(t)) ds = F(t, y_{\alpha}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad (7)$$

задача решения которых уже является корректной [5]. В этих уравнениях

$$B(t,s) = \int_a^b K(x,t) K(x,s) dx, \quad F(t) = \int_a^b K(x,t) f(x) dx; \quad (8)$$

$$B(s,t, y(s), y(t)) = \int_a^b K(x,s, y(s)) K'_y(x,t, y(t)) dx, \quad (9)$$

$$F(t, y(t)) = \int_a^b K'_y(x,t, y(t)) f(x) dx.$$

Наиболее употребляемым способом определения параметра регуляризации α в том случае, когда вместо точной правой части $f(x)$ исходного уравнения (3) (или (4)) задана функция $\tilde{f}(x) \in L_2[a,b]$ такая, что

$\|f - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} \leq \delta$, является способ невязки, согласно которому в качестве искомого значения выбирается такое α , при котором

$$\|A y_\alpha - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} = \delta,$$

где $y_\alpha(t)$ – решение уравнения (6) (или (7)) при соответствующем значении α . Последнее соотношение можно трактовать как уравнение относительно α , которое при определенных условиях [5] имеет единственное решение. На практике во избежание решения этого уравнения часто выбирают ряд значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, связанных соотношением

$$\alpha_i = \theta \alpha_{i-1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (10)$$

для каждого из которых вычисляют решение $y_{\alpha_i}(t)$ уравнения (6) (или (7)) и невязку $\|A y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]}$. В качестве оптимального значения α_{opt} выбирают то α_i , для которого с наибольшей степенью точности выполняется приближенное равенство $\|A y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} \approx \delta$.

Квазиоптимальный способ определения параметра регуляризации α не требует знания погрешности δ правой части $f(x)$. Согласно этому способу в качестве искомого значения выбирают то α_i из ряда значений (10), для которого $\|y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}}\|_{L_2[a,b]}$ принимает наименьшее значение.

Согласно способу относительной поправки в качестве искомого значения параметра регуляризации α выбирают то α_i из ряда значений (10), для которого наименьшее значение в смысле нормы пространства $L_2[a,b]$ принимает величина $\|y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}}\| / \|y_{\alpha_i}\|$.

Одним из наиболее эффективных методов решения интегральных уравнений второго рода вида (6), (7) является метод квадратур (замены интеграла конечной суммой).

Предположим, что правая часть $f(x)$ исходного уравнения (3) (или (4)) задана таблицей своих значений на равномерной x -сетке узлов

$$\bar{\omega}_h = \left\{ \omega_l \in [a,b] : x_l = a + lh, \quad l = \overline{0, M}; \quad h = (b-a)/M \right\} \quad (11)$$

а решение $y_\alpha(s)$ соответствующего регуляризованного уравнения ищется на другой равномерной s -сетке узлов

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ \xi_j \in [a, b] : s_j = a + j\tau, j = \overline{0, N}; \tau = (b-a)/N \right\} \quad (12)$$

причем τ -сетка в уравнении (6) (или (7)) совпадает с s -сеткой.

Если интегралы в (6), (8) расписать, например, с помощью квадратурной формулы Симпсона (в предположении о достаточной гладкости ядра, решения и правой части, а также о чётности чисел $N > 0, M > 0$), то, отбросив погрешность $O(h^4 + \tau^4)$ численного интегрирования и перейдя к обозначениям $y_i \approx y_\alpha(t_i)$, $B_{ij} \approx B(t_i, s_j)$, $F_i \approx F(t_i)$, $i, j = \overline{0, N}$, получим дискретный аналог уравнения (6) (опуская временно индекс α у y):

$$\alpha y_i + \sum_{j=0}^N A_j B_{ij} y_j = F_i, \quad i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

При этом

$$B(t_i, s_j) = \sum_{l=0}^M A_l K(x_l, t_i) K(x_l, s_j) + O(h^4),$$

$$F(t_i) = \sum_{l=0}^M A_l K(x_l, t_i) f(x_l) + O(h^4), \quad i, j = \overline{0, N},$$

A_j и A_l – коэффициенты квадратурной формулы Симпсона. Соотношения (13) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решив которую, найдем приближенные значения $y_0, y_1, \dots, y_N$ решения $y_\alpha(t)$ уравнения (6) в точках τ -сетки. Аналитическое выражение для $y_\alpha(t)$ может быть получено, например, интерполированием. Приближенное решение $\tilde{y}_\alpha(t)$ уравнения (6) на всем отрезке $[a, b]$ может быть также записано по формуле

$$\tilde{y}_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^N A_j B(t, s_j) y_j + F(t) \right), \quad a \leq t \leq b,$$

которая получается путем замены интеграла конечной суммой в уравнении (6).

Применительно к нелинейному интегральному уравнению Урысона второго рода (7), (9) метод квадратур приводит к системе нелинейных относительно $y_0, y_1, \dots, y_N$ уравнений

$$\alpha y_i + \sum_{j=0}^N A_j B(s_j, t_i, y_j, y_i) = F(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, N},$$

решить которую можно любым известным методом [8].

Если же рассмотреть нелинейное интегральное уравнение (7) в операторном виде

$$P y_\alpha = 0, \quad (14)$$

где

$$P y_\alpha \equiv \alpha y_\alpha(t) + \int_a^b B(s, t, y_\alpha(s), y_\alpha(t)) ds - F(t, y_\alpha(t)),$$

и применить к уравнению (14) итерационную формулу Ньютона [9]

$$P'(y_\alpha^{(k)}) \Delta y_\alpha^{(k)} = -P(y_\alpha^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

где $\Delta y_\alpha^{(k)} = y_\alpha^{(k+1)} - y_\alpha^{(k)}$, $y_\alpha^{(0)}$ – некоторое начальное приближение, то, пользуясь определением производной нелинейного оператора [9]

$$\begin{aligned} P'(y_\alpha^{(k)}) \Delta y_\alpha^{(k)} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{P(y_\alpha^{(k)} + v \Delta y_\alpha^{(k)}) - P(y_\alpha^{(k)})}{v} = \\ &= \alpha \Delta y_\alpha^{(k)} + \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \left[\int_a^b (B(t, s, y_\alpha^{(k)}(t) + v \Delta y_\alpha^{(k)}(t), y_\alpha^{(k)}(s) + v \Delta y_\alpha^{(k)}(s)) - \right. \\ &\quad \left. - B(t, s, y_\alpha^{(k)}(t), y_\alpha^{(k)}(s))) dt - F(t, y_\alpha^{(k)}(t) + v \Delta y_\alpha^{(k)}(t)) + F(t, y_\alpha^{(k)}(t)) \right] \end{aligned}$$

можно свести уравнение (7) к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\Delta y_\alpha^{(k)}$ и решить его одним из известных методов [4], в частности уже упомянутым методом квадратур.

Можно показать так же, как в работах [10, 11], что метод квадратур сведения регуляризованных уравнений (6) и (7) к соответствующим конечным системам алгебраических уравнений укладывается в общую схему проекционных (аппроксимационных) методов, предложенных в [7] для решения операторных уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим вопрос о применении проекционно-итерационного подхода к решению нелинейного интегрального уравнения Урысона первого рода (4), основанного на применении итерационного метода Ньютона – Канторовича к решению регуляризованного интегрального уравнения (7) в сочетании с методом квадратур сеточной аппроксимации линеаризованного уравнения на совокупности измельчающихся сеток.

Будем для каждой из аппроксимирующих конечномерных задач, начиная с задачи невысокой размерности, строить при помощи метода Ньютона – Канторовича с подключением процедуры выбора параметра регуляризации лишь несколько приближений $\tilde{y}_\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, k_n$, n – номер конечномерной задачи), последнее из которых будем принимать с использованием кусочно – линейной интерполяции в качестве начального приближения в итерационном процессе для следующей, $(n + 1)$ -й, конечномерной задачи. Критериями остановки описанного процесса могут служить либо заданная точность вычислений, либо конечный порядок дискретизации в аппроксимирующей задаче.

Приведем проекционно – итерационный алгоритм решения некорректного интегрального уравнения Урысона (4), основанный на методе регуляризации Тихонова с квазиоптимальным способом определения параметра регуляризации в сочетании с методом квадратур и итерационным методом Ньютона – Канторовича.

Проекционно – итерационный алгоритм

Подготовительный этап. Задаем точность $\varepsilon > 0$ вычислений в проекционно – итерационном алгоритме, начальный порядок $N = N_1$, $M = M_1$ дискретизации регуляризованного уравнения (7) на сетках (11), (12) на первом шаге алгоритма и рекурсивные формулы

$$N_n = \lambda_1 N_{n-1} + \mu_1, \quad M_n = \lambda_2 M_{n-1} + \mu_2, \quad n > 1, \quad (16)$$

$$\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = 1, 2$$

изменения с ростом n порядка дискретизации. (Под номером шага в проекционно – итерационном алгоритме здесь и в дальнейшем следует понимать номер n конечномерной задачи в последовательности аппроксимирующих интегральное уравнение задач на совокупности измельчающихся сеток.) Кроме того, задаем целое число $m > 1$ как количество значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации α , которые будут использоваться на каждом n -м шаге алгоритма ($n \geq 1$), начальное значение α_0 и ограничительное малое значение α_{lim} для параметра регуляризации.

1. Полагаем шаг алгоритма $n = 1$.
2. Задаем убывающую последовательность значений параметра регуляризации в соответствии с формулами

$$\alpha_i^{(n)} = \theta \alpha_{i-1}^{(n)}, \quad i = 2, m, \quad 0 < \theta < 1; \quad \alpha_1^{(n)} = \alpha_{opt}^{(n-1)}, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_0 \quad (17)$$

так, что $\alpha_i^{(n)} \geq \alpha_{lim}$, $i = \overline{1, m}$. (Если окажется при некотором $i = i_0 = \overline{2, m}$, что $\alpha_{i_0}^{(n)} < \alpha_{lim}$, то полагаем на данном шаге алгоритма $m := i_0 - 1$, и построение ряда значений α завершаем.)

3. Проводим дискретизацию формулы (15) с помощью метода квадратур на t - и s -сетках (12) узлов $s_j = t_j$, $j = \overline{1, N_n}$ и x -сетке узлов x_i , $i = \overline{1, M_n}$, где значения $N_n \geq N_{n-1}$, $M_n \geq M_{n-1}$ определяются формулами (16) и хотя бы одно из последних двух неравенств выполняется строго.

4. Определяем точность $\varepsilon_n > 0$ окончания итерационного процесса на данном шаге по правилу $\varepsilon_n = C(h_n^4 + \tau_n^4)$, где $C = const > 0$, $h_n = (b - a) / M_n$, $\tau_n = (b - a) / N_n$.

5. При $n = 1$ задаем на t -сетке $\bar{\omega}_{\tau_1}$ некоторое начальное приближение $\tilde{y}_\alpha^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_{N_1}^{(0)})$, $y_j^{(0)} \approx y_\alpha(t_j)$, $j = \overline{1, N_1}$ в адаптированном к сеточному виду итерационном процессе (15) приближенного решения регуляризованного уравнения (7). При $n > 1$ выполняем кусочно-линейную интерполяцию приближенного решения $\tilde{y}_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})} = (y_1^{(k_{n-1})}, y_2^{(k_{n-1})}, \dots, y_{N_{n-1}}^{(k_{n-1})})$, полученного на предыдущем шаге на сетке $\bar{\omega}_{\tau_{n-1}}$, по формуле

$$\begin{aligned} y_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})}(t) = & y_i^{(k_{n-1})} - \frac{t - t_i}{2\tau_{n-1}} (3y_i^{(k_{n-1})} - 4y_{i+1}^{(k_{n-1})} + y_{i+2}^{(k_{n-1})}) + \\ & + \frac{(t - t_i)^2}{2\tau_{n-1}^2} (y_i^{(k_{n-1})} - 2y_{i+1}^{(k_{n-1})} + y_{i+2}^{(k_{n-1})}), \quad t_i \leq t \leq t_{i+2}, \quad i = \overline{0, N_{n-1} - 2} \end{aligned}$$

и задаем на t -сетке $\bar{\omega}_{\tau_n}$ с помощью этой формулы начальное приближение $\tilde{y}_\alpha^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_{N_n}^{(0)})$, $y_j^{(0)} = y_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})}(t_j)$, $j = \overline{1, N_n}$ в соответствующем (15) дискретном итерационном процессе.

6. Далее, для каждого значения $\alpha = \alpha_i^{(n)}$, $i = \overline{1, m}$, исходя из начального приближения $\tilde{y}_\alpha^{(0)}$, определенного в п. 5, строим адаптированным итерационным методом (15) несколько ($k_n \equiv k_n(\alpha)$) приближений $\tilde{y}_\alpha^{(k)}$,

$k = 1, 2, \dots, k_n$, решая методом Гаусса при каждом фиксированном k СЛАУ вида (13) относительно $\Delta \tilde{y}_\alpha^{(k)} = \tilde{y}_\alpha^{(k+1)} - \tilde{y}_\alpha^{(k)}$ до достижения в некоторой сеточной норме точности вычислений $\|\Delta \tilde{y}_\alpha^{(k)}\|_{\tau_n} < \varepsilon_n$.

7. Вычисляем поправки $\left\| \tilde{y}_{\alpha_i^{(n)}}^{(k_n)} - \tilde{y}_{\alpha_{i-1}^{(n)}}^{(k_n)} \right\|_{\tau_n}$, $i = \overline{2, m}$. Приближенное решение $\tilde{y}_{\alpha_l^{(n)}}^{(k_n)}$ ($l = \overline{2, m}$) с наименьшей поправкой (или $\tilde{y}_{\alpha_1^{(n)}}^{(k_n)}$, если $m = 1$) и соответствующее значение параметра $\alpha = \alpha_{opt}^{(n)} = \alpha_l^{(n)}$ полагаем оптимальными на данном шаге.

8. Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, то переходим на п. 9. В противном случае увеличиваем номер шага $n := n + 1$ и переходим на п.2.

9. Конец алгоритма.

Анализ полученных результатов и выводы. Практическая сходимость проекционно-итерационного алгоритма решения некорректных интегральных уравнений вида (4) исследовалась на нескольких модельных задачах, в частности на уравнении Гаммерштейна

$$\int_a^b (x+s)(3y(s)+5y^2(s))ds = q+cx, \quad a \leq x \leq b, \quad (18)$$

точное решение которого $y^*(s) = e^s$ при $c = 3(e^b - e^a) + 2,5(e^{2b} - e^{2a})$, $q = 3(e^b(b-1) + e^a(1-a)) + 1,25(e^{2b}(2b-1) + e^{2a}(1-2a))$.

Для решения задачи (18) были рассмотрены различные вычислительные схемы проекционно-итерационного алгоритма, основанного на методе квадратур и методе Ньютона – Канторовича приближенного решения регуляризованного интегрального уравнения (7):

– с использованием трех стратегий выбора параметра регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки);

– с вариацией количества m значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации, начального значения α_0 и величины θ ;

– с различными правилами (16) формирования порядка дискретизации интегрального уравнения на очередном шаге алгоритма;

– с различными критериями остановки проекционно-итерационного процесса (по заданной точности вычислений и по конечному порядку дискретизации в аппроксимирующей задаче).

Результаты реализации проекционно-итерационных вычислительных схем на ЭВМ сравнивались с результатами применения к той же задаче проекционной схемы метода Тихонова, предполагающей решение регуляризованного интегрального уравнения с помощью метода Ньютона – Канторовича и метода квадратур при однократной дискретизации.

Приведем результаты вычислительных экспериментов на примере решения модельной задачи (18) с входными параметрами: $[a, b] = [0, 2]$, $\alpha_0 = 0,5$, $\theta = 0,5$, $m = 40$. В качестве начального приближения в итерационном процессе на первом шаге проекционно-итерационного алгоритма выступала сеточная функция, принимающая в каждом узле t -сетки $\bar{\omega}_{\tau_1}$

значение $0,5(e^a + e^b)$. Критерием остановки алгоритма было выбрано достижение конечного порядка $N_p = M_p$ дискретизации задачи, а именно: вычисления проводились на трех сетках – грубой ($N_1 = 4$), средней (со средним арифметическим значением размерностей N_1 и N_p) и на сетке указанной размерности N_p . Поскольку погрешность полученного приближенного решения в проекционно-итерационном алгоритме определяется точностью $\varepsilon = \varepsilon_p = C\tau_p^4$ вычислений на последней сетке, то для сравнения с проекционным методом было рассмотрено применение его на сетке размерности N_p с точностью вычислений $\varepsilon = \varepsilon_p$, теми же значениями входных параметров и тем же начальным приближением, что и на первом шаге проекционно-итерационного алгоритма. В таблице, содержащей результаты вычислительных экспериментов, использованы, помимо

известных, следующие обозначения: $\tilde{K} = \sum_{n=1}^p k_n$ и K – количество

итераций, $\tilde{r} = \frac{\|y^* - y_{\alpha_{opt}^{(p)}}^{(k_p)}\|_{\tau_p}}{\|y^*\|_{\tau_p}}$ и $r = \frac{\|y^* - y_{\alpha_{opt}^{(K)}}^{(K)}\|_{\tau_p}}{\|y^*\|_{\tau_p}}$ –

относительные погрешности приближенных решений в проекционно-итерационном и проекционном алгоритмах соответственно.

Таблиця

Результаты вычислительных экспериментов

N_p	ε	Проекционно-итерационный алгоритм			Проекционный алгоритм		
		$\alpha_{opt}^{(p)}$	$\tilde{K}$	$\tilde{r}$	α_{opt}	K	r
Квазиоптимальный выбор параметра регуляризации							
16	0.002	5,82E-11	7+6+3	0.0487	9,09E-13	11	0.0526
22	0.0008	5,82E-11	7+15+6	0.0484	9,09E-13	13	0.0509
28	0.0004	2,91E-11	7+10+5	0.0482	4,66E-10	13	0.0500
34	0.0002	1,46E-11	7+11+7	0.0481	9,09E-13	14	0.0492
Способ невязки выбора параметра регуляризации							
16	0.002	0.000977	7+6+3	0.0487	0.000122	11	0.0510
22	0.0008	7,45E-09	7+15+6	0.0484	1,16E-10	13	0.0506
28	0.0004	5,96E-08	7+10+5	0.0482	4,66E-10	13	0.0492
34	0.0002	9,31E-10	7+11+7	0.0478	9,09E-13	14	0.0481

Анализ результатов свидетельствует о том, что проекционно-итерационный подход применительно к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений, поскольку значительная их часть строится для аппроксимирующих задач невысокой размерности, а также обеспечивает большую точность получаемых приближенных решений. Для автора в дальнейшем представляет интерес вопрос применения проекционно-итерационных регуляризирующих алгоритмов к решению некоторых практически важных некорректных задач.

Библиографические ссылки

1. Глушков В.М. О новом классе динамических моделей и его применении в биологии / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко // Кибернетика. 1979. – № 4. – С. 133-141.
2. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд.во ЛКИ, 2009. – 480 с.
3. Гончарский А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизики / А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

6. **Лаврентьев М.М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
7. **Балашова С.Д.** Проекционно-итерационные методы решения уравнений в нормированных пространствах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск: ДГУ, 1974. – 20 с.
8. **Ортега Дж.** Итерационные методы решения нелинейных систем / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
9. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
10. **Гарт Л.Л.** Проекционно-итерационная реализация метода Ньютона – Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений / Л.Л. Гарт, Н.В. Поляков // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 70–78.
11. **Гарт Л.Л.** Проекційно-ітераційний алгоритм розв'язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера / Л.Л. Гарт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – № 1. – С. 101–112.

Надійшла до редколегії 01.05.2013 р.

В.Б. ¹⁰Говоруха, И.В. Петрусенко, Ю.А. Храпач
Академия таможенной службы Украины

МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Наведено огляд існуючих методів генерації випадкових та псевдовипадкових чисел, які є обов'язковим елементом сучасних криптографічних систем. Особливу увагу приділено методам квантової криптографії.

Приведен обзор существующих методов генерации случайных и псевдослучайных чисел, которые являются обязательным элементом современных криптографических систем. Особое внимание уделено методам квантовой криптографии.

This article provides an overview of the existing methods of generating random and pseudo-random numbers that are must-have modern cryptographic systems. Special attention is paid to the methods of quantum cryptography.

Ключевые слова: случайные числа, криптография, генератор случайных чисел, линейно-конгруэнтная функция, квантовая криптография.

Вступление. Для создания паролей и ключей необходимо генерировать случайную величину. Качественный механизм генерации случайных чисел – основа любого безопасного приложения. В связи с этим генератор случайных выборок чисел является необходимым элементом оснащения современных систем защиты информации, в частности систем криптографии. Криптография способна защитить данные от атак, помогает обеспечивать секретность и целостность данных, поэтому на разработку генераторов случайных чисел и исследование закономерностей их работы затрачиваются значительные усилия.

Трудности генерации последовательностей чисел, обладающих заданными статистическими закономерностями, носят фундаментальный характер. В этом нетрудно убедиться, рассматривая три известных подхода к данной проблеме.

Известными подходами к генерации случайных чисел являются методики, основанные на использовании линейно-конгруэнтных функций, а

также применение устройства, в качестве которого принимается какой либо квантовый физический процесс.

Основная часть. В докомпьютерную эру были изданы справочные таблицы случайных чисел (правда, без гарантий, что эти массивы чисел действительно удовлетворяют всем «разумным» статистическим тестам на некоррелированность). Не представляет труда сохранить эти данные в памяти ЭВМ, но немедленно возникает вопрос способа использования такого фиксированного файла. А именно, если пытаться считывать этот файл со случайной позиции, то мы получаем «порочный круг», т. Е. возвращаемся к необходимости генерации случайного числа. В настоящее время этот подход признан бесперспективным.

Второй и наиболее распространенный метод состоит в применении арифметического алгоритма, дающего псевдослучайные числа, равномерно распределенные на единичном интервале. Как правило, алгоритм основан на отображении множества допустимых чисел $X = \{x_m\}$ в себя по рекуррентной формуле $f(x_m) = x_{m+1} \in X$. Так как процесс начинается с заданного числа x_0 , то такие последовательности являются воспроизводимыми, что важно для отладки машинных программ.

Этот подход прошел ряд этапов в своем развитии. Если поначалу функции $f(x_m)$ выбирались как можно более сложные и трудно понимаемые, то затем пришли к простым функциям, свойства которых достаточно хорошо изучены. Чаще всего применяют линейно конгруэнтную функцию вида

$$f(x_m) = ax_m + c \pmod{n}, \quad (1)$$

где $a, c \in X$ и $n = 2^t$ для t -разрядных двоичных целых чисел. Доказана теорема [1], что сгенерированная таким образом последовательность обязательно имеет период (его максимальная длина равна n), при этом наименее значимые двоичные разряды числа $x_{m+1} = f(x_m)$ будут отнюдь не случайными. Конгруэнтные последовательности в конце концов образуют цикл, который повторяется бесконечное число раз.

Доказано также, что общим свойством всех алгоритмов генерации псевдослучайных чисел, использующих рекуррентные соотношения, является корреляция между двумя последовательными числами [2]. Отличие между известными реализациями таких датчиков чисел только в степени, в которой этот эффект проявляется. Например, для генератора псевдослу-

чайных чисел из ранее популярного пакета научных программ SSP фирмы IBM, использующего формулу (1) с величинами $a = 2^{16} + 3$ и $c = 0$, наблюдается крайне высокая корреляция между тремя идущими подряд числами [2]. Этот факт заставляет серьезно сомневаться в достоверности результатов большого числа статистических исследований.

К линейно-конгруэнтным функциям относится известная функция Rand, которая входит в библиотеки многих языков программирования. Такие функции бесполезны для защищенных сред.

Хороший генератор случайных чисел характеризуется тремя свойствами: равномерным распределением генерируемых чисел, непредсказуемостью значений и поддержкой полного цикла. Линейно-конгруэнтные функции обладают только первым свойством.

Самыми известными из атак, основанных на предсказуемости случайных чисел, можно считать атаки на ранние версии браузера Netscape Navigator. Случайные числа, на основании которых генерировались ключи протокола SSL, оказались легко предсказуемыми, что сводило на нет эффективность SSL-шифрования.

В настоящее время развивается такое направление криптографии, как квантовая криптография. Это метод защиты коммуникаций, основанный на принципах квантовой физики. В отличие от традиционной криптографии, которая использует математические методы, чтобы обеспечить секретность информации, квантовая криптография сосредоточена на физике, рассматривая случаи, когда информация переносится с помощью объектов квантовой механики. Процесс отправки и приёма информации всегда выполняется физическими средствами, например при помощи электронов в электрическом токе или фотонов в линиях волоконно-оптической связи. Технология квантовой криптографии опирается на принципиальную неопределённость поведения квантовой системы — невозможно одновременно получить координаты и импульс частицы, невозможно измерить один параметр фотона, не исказив другой.

Квантовая наука зародилась в 1984 году, когда был разработан первый протокол квантового распределения ключей, названный BB84.

В связи с развитием квантовой криптографии наиболее перспективным подходом к генерации случайных чисел считается третий подход, связанный с использованием стохастического устройства, в качестве которого принимается какой-либо квантовый физический процесс. Доказано, что квантовые процессы порождают массивы чисел, которые нельзя вычислить с помощью машины Тьюринга. Это означает, что не существует алгоритма, который генерировал бы в точности ту же последовательность, что и «квантовый» датчик случайных чисел. В недавно опубликованных

математических исследованиях показано, что генераторы случайных чисел, основанные на квантовых процессах, действительно могут выдавать поток случайных чисел [3].

Известны попытки использования закономерностей испускания электронов горячим катодом или излучения лазера. В последнем случае применялся полупроводниковый лазер с короткими и резкими пиками интенсивности. Лазер пропусклся через среду с обратной связью с задержкой, т. е. интенсивность излучения на выходе определялась интенсивностью сигнала на входе и состоянием среды, которое зависело от интенсивности на выходе. Ранее исследователям было известно, что интенсивность подобного луча является процессом квазипериодическим, то есть с течением времени он почти повторяется, поэтому напрямую использовать его в качестве генератора случайных чисел нельзя. Для того чтобы избавиться от квазипериодичности, физики действовали следующим образом. Интенсивность луча замерялась примерно 2,5 миллиарда раз в секунду. Результат каждого измерения записывался в строку длиной в 8 бит. Он вычитался из значения предыдущего измерения, а результат усекался. Таким образом, исследователям удалось избавиться от квазипериодичности и добиться генерации случайного потока нулей и единиц со скоростью примерно 12,5 гигабита в секунду.

Один из недостатков подобных датчиков чисел состоит в том, что результаты измерений могут содержать систематическую, т. е. неслучайную ошибку. Как сообщается, после специальной обработки результатов измерения интенсивности лазерного луча удалось добиться генерации случайного потока нулей и единиц с высокой скоростью.

Другое направление исследований основано на использовании принципа неопределенности (индетерминизма) квантовых систем. Согласно квантовой механике, невозможно точно предсказать, как квантовая частица будет себя вести. Поэтому теоретически истинную случайность системы может обеспечить, например, поведение двух связанных элементарных частиц. В работе [4] исследовался датчик случайных чисел, генерирующий двоичные числа на основе измерений квантовых состояний иона иттербия, который может находиться либо на высоком, либо на низком энергетическом уровне. Чтобы проверить истинность случайности, «спутывались» два таких иона и измерялись их энергетические уровни. Если корреляция полученных значений соответствовала так называемому «ограничению Белла» [4], то случайность полагалась подлинной. Сообщается, что в течение месяца таким образом удалось получить 42 действительно случайных двоичных числа.

В рамках работы [5] проверялась так называемая алгоритмическая случайность потока чисел, выдаваемого «квантовым» датчиком Quantis.

Данный тип случайности является одним из самых сильных: он означает, что для любого алгоритма данный поток будет являться случайным. Сравнение полученного массива проводилось с числами, сгенерированными несколькими компьютерными программами, а также строками цифр из записи числа π . Сообщается, что полученные результаты могут служить подтверждением вывода о том, что квантовые процессы дают действительно случайные числа.

Следует отметить, что метод квантовой криптографии обладает рядом недостатков. Суть уязвимости состоит в несовершенстве аппаратной части «криптографического устройства», а не в возможности влиять каким-либо мифическим образом на законы физики.

Известно, что передаваемое при помощи метода квантовой криптографии сообщение кодируется в последовательности фотонов разной поляризации, движущихся по каналу передачи данных. Некий злоумышленник, желая прочесть сообщение, будет вынужден перехватывать фотоны, чтобы выполнить измерение их поляризационного момента. Однако, как гласит принцип неопределенности квантовых систем Гейзенберга, невозможно измерить какой-либо параметр фотона, не исказив неизбежно другой параметр. Это обстоятельство гарантировало надежность метода квантовой криптографии, потому как получатель сообщения получит измененное сообщение, и факт вмешательства будет обнаружен.

Для объяснения сути уязвимости надо пояснить следующее: при отправке закодированного сообщения его автор выбирает ту или иную поляризацию фотонов, причем выбор поляризационного момента случаен. Получатель сообщения использует некое устройство — «детектор» — чтобы считать моменты поляризации фотонов, причем из-за случайности их выбора автором сообщения результаты считывания будут то верными, то ошибочными.

После того как все акты считывания поляризации выполнены, получатель по открытому каналу отправляет автору сообщения информацию о параметрах считывания, не сообщая самих результатов измерения. Автор отвечает получателю, в каких случаях он ошибся, тоже по открытому каналу. Отбросив результаты неправильных измерений, получатель получит данные о последовательности фотонов, закодированных автором, — эта переданная секретная информация носит название первичного ключа. Чтобы обнаружить факт перехвата сообщений, и автор и получатель по открытому каналу сравнивают результаты считывания поляризации фотонов, — в случае их перехвата эти параметры у автора и получателя совпа-

дать не будут.

Во всей этой сложной системе слабым местом является устройство для считывания поляризационных моментов («детектор»), при помощи которого с фотонами работает получатель. Оказывается, что если «насытить» его фотонами до некоего значения, то детектор утратит способность работать с отдельными квантами света и станет работать как классический прибор. Кроме того, экспериментальная реализация квантовой криптографии натолкнулась на ряд технологических трудностей, наиболее важной из которых является сложность генерации строго однофотонных квантовых состояний.

Выводы. Проанализировав существующие методы генерации случайных и псевдослучайных чисел, можно сделать вывод о том, что алгоритмическая случайность потока чисел, выдаваемого «квантовым» датчиком Quantis, является одной из самых сильных. Заметим, что истинно случайный физический процесс, очевидно, принципиально невоспроизводим, поэтому трудно выявить ошибку в компьютерной программе обработки результатов измерений, которая, согласно известной аксиоме программирования, всегда присутствует в коде.

Библиографические ссылки

1. **Кнут Д.** Искусство программирования на ЭВМ / Д. Кнут. // Получисленные алгоритмы. – Т. 2. – М.: Мир, 1977.
2. **Форсайт Дж.** Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
3. **Cristian S. Calude, Michael J. Dinneen, Monica Dumitrescu, Karl Svozil** Experimental Evidence of Quantum Randomness Incomputability
4. <http://www.nature.com/news/2010/100414/full/news.2010.181.html> .
5. <http://www.idquantique.com/true-random-number-generator/quantis-usb-pcie-pci.html> .

Надійшла до редколегії 11.11.2012 р.

дать не будут.

Во всей этой сложной системе слабым местом является устройство для считывания поляризационных моментов («детектор»), при помощи которого с фотонами работает получатель. Оказывается, что если «насытить» его фотонами до некоего значения, то детектор утратит способность работать с отдельными квантами света и станет работать как классический прибор. Кроме того, экспериментальная реализация квантовой криптографии натолкнулась на ряд технологических трудностей, наиболее важной из которых является сложность генерации строго однофотонных квантовых состояний.

Выводы. Проанализировав существующие методы генерации случайных и псевдослучайных чисел, можно сделать вывод о том, что алгоритмическая случайность потока чисел, выдаваемого «квантовым» датчиком Quantis, является одной из самых сильных. Заметим, что истинно случайный физический процесс, очевидно, принципиально невоспроизводим, поэтому трудно выявить ошибку в компьютерной программе обработки результатов измерений, которая, согласно известной аксиоме программирования, всегда присутствует в коде.

Библиографические ссылки

1. **Кнут Д.** Искусство программирования на ЭВМ / Д. Кнут. // Получисленные алгоритмы. – Т. 2. – М.: Мир, 1977.
2. **Форсайт Дж.** Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
3. **Cristian S. Calude, Michael J. Dinneen, Monica Dumitrescu, Karl Svozil** Experimental Evidence of Quantum Randomness Incomputability
4. <http://www.nature.com/news/2010/100414/full/news.2010.181.html> .
5. <http://www.idquantique.com/true-random-number-generator/quantis-usb-pcie-pci.html> .

Надійшла до редколегії 11.11.2012 р.

В. М. Горбачук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

ОБГРУНТУВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОЦІНЮВАЧІВ ЗМНК ДЛЯ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ ЗА УМОВ ГА- УССА – МАРКОВА

Для простої і множинної лінійної регресії за умов Гаусса – Маркова строго і повно доведено незсуненість (незміщеність) звичайного методу найменших квадратів (ЗМНК) для оцінювання параметрів, знайдено оцінювач дисперсії похибок, доведено незсуненість оцінювача дисперсії похибок, доведено ефективність ЗМНК оцінювача. Подані пояснення та інтерпретації умов Гаусса – Маркова.

Для простой и множественной линейной регрессии в условиях Гаусса – Маркова строго и полно доказана несмещенность обычного метода наименьших квадратов (ОМНК) для оценки параметров, найден оценщик дисперсии ошибок, доказана несмещенность оценщика дисперсии ошибок, доказана эффективность ОМНК оценок. Представлены пояснения и интерпретации условий Гаусса – Маркова.

For linear regression and multiple linear regression under the Gauss-Markov conditions we strictly and fully proved the unbiasedness of ordinary least squares (OLS) for parameters estimating, we found error variance estimator and proved its unbiasedness, we proved effectiveness of OLS estimator. An explanation and interpretation of the Gauss – Markov conditions were presented.

Ключові слова: звичайний метод найменших квадратів, множинна регресія, оцінювач, умови Гаусса – Маркова, незсуненість, ефективність.

Вступ. У прикладній математиці та математичному моделюванні широко застосовується звичайний метод найменших квадратів (ЗМНК) [5], реалізований інструментальними засобами EViews [1] та MS Excel [3; 4]. Оскільки ЗМНК стає стандартним підходом до оцінювання параметрів залежностей між спостережуваними змінними [2; 3; 4], то постає питання повної обгрунтованості ЗМНК, зокрема статистичних властивостей ЗМНК. Наприклад, застосування ЗМНК до даних часових рядів має свої

особливості [3; 7; 8; 10]. Строге і повне обґрунтування методів оцінювання параметрів залежностей нерідко вимагає значних зусиль [5 ; 6; 9; 10].

Мета даної роботи – стисло, строго і повно довести основні статистичні властивості оцінювачів ЗМНК.

Постановка задачі. Аналіз множинної регресії допускає вплив $k > 1$ спостережуваних факторів на y . Наприклад, (погодинна) зарплата $wage$ особи може залежати від її кількості років досвіду на ринку праці $xper$ та кількості років навчання $educ$, від обсягу підготовки на робочому місці, стажу роботи у даного роботодавця, показників здібностей, демографічних змінних (кількості братів і сестер, освіти матері тощо). Витрати на студента $xpend$ можуть залежати від його середнього бала $avgscore$ на стандартизованому тесті рівня середньої школи та середнього сімейного доходу $avginc$, від показників якості вчителів, розміру школи тощо. Оклад керівника фірми $salary$ може залежати від стажу його роботи у фірмі ten та обсягу продажів фірми $sales$.

Умова MLR1) означає, що загальну істинну модель для генеральної сукупності можна записати як лінійну за параметрами регресію

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + u, \quad (1)$$

де: β_0 – перетин; β_i – параметр нахилу, пов'язаний з x_i , $i = 1, 2, \dots, k$; u – неспостережувана змінна похибки (збурення), що включає фактори, відмінні від $x_1, x_2, \dots, x_k$, які впливають на y . Тому рівняння (1) містить $(k+1)$ невідомих параметрів генеральної сукупності (population). У постановці моделі (1) для генеральної сукупності змінні $y, x_1, x_2, \dots, x_k, u$ вважаються випадковими. У залежності споживання сім'ї

$$cons = \beta_0 + \beta_1 inc + \beta_2 (inc)^2 + u \quad (2)$$

від її доходу inc та квадрата доходу $(inc)^2$ (від двох незалежних змінних, але від одного спостережуваного фактора – доходу) окремий параметр β_1 або β_2 не задає *ceteris paribus* впливу доходу на споживання (при зміні

inc також змінюється $(inc)^2$), тобто не задає власне нахил. Проте, з урахуванням наближення

$$\Delta_{cons} = \beta_1 \Delta inc + 2\beta_2 inc \Delta inc,$$

гранична схильність

$$\frac{\Delta_{cons}}{\Delta inc} = \beta_1 + 2\beta_2 inc$$

сім'ї до споживання (нахил) задається *ceteris paribus* доходом inc , β_1 , β_2 разом. Змінна y – це залежна (пояснювана, передбачувана) змінна (відгуку), або регресанд; $x_1, x_2, \dots, x_k$ – це незалежна (пояснююча, передбачуюча) змінна (керування), або регресор.

Коли $k = 3$, $y = \ln(salary)$, $x_1 = \ln(sales)$, $x_2 = \ln(ten)$, $x_3 = \ln(ten)^2$, то

$$\ln(salary) = \beta_0 + \beta_1 \ln(sales) + \beta_2 \ln(ten) + \beta_3 \ln(ten)^2 + u, \quad (3)$$

β_1 – еластичність окладу $salary$ відносно обсягу продажів $sales$ *ceteris paribus*. Якщо $\beta_3 = 0$, процентне зростання окладу $salary$ при збільшенні стажу ten на 1 (рік) *ceteris paribus* задається $100\beta_2$ при $\beta_3 = 0$ і задається складніше при $\beta_3 \neq 0$. Рівняння (3) є лінійним за параметрами $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, але задає нелінійну залежність $salary(sales, ten)$. Багато застосувань множинної лінійної регресії стосується нелінійних взаємозв'язків серед змінних. Статистичні властивості оцінювачів стосуються не однієї окремої вибірки, а властивостей оцінювачів, коли випадковий відбір вибірки здійснюється повторювано.

Умова MLR2) означає, що відбір випадкової вибірки з n спостережень $\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ ($k+1$) змінних $x_1, x_2, \dots, x_k, y$ здійснюється повторювано з моделі (1) для генеральної сукупності; x_{ij} – спостереження i змінної x_j , $j = 1, 2, \dots, k$; y_i – спостереження i змінної y . Таким чином, припускаємо, що дані отримані як випадкова вибірка (не всі крос-секційні вибірки можна вважати результатами випад-

кових вибірок). Для часових рядів використовується інша умова. Запишемо модель (1) у термінах випадкової вибірки:

$$y_i = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де u_i – значення похибки для спостереження i (особи i , підприємства i , регіону i тощо). Отже, u_i містить неспостережувані фактори для спостереження i , які впливають на y_i . При $k = 1$ (у випадку простої регресії) y_i та x_{i1} можуть бути відповідно річними заощадженнями та доходом сім'ї i протягом конкретного року. Матрична форма залежності (4):

$$\bar{y} = X \bar{\beta} + \bar{u},$$

де $\bar{y}$, X , $\bar{\beta}$, $X \bar{\beta}$, $\bar{u}$ мають розмірності $n \times 1$, $n \times (k+1)$, $(k+1) \times 1$, $n \times 1$, $n \times 1$ відповідно. Моделі (1) відповідає оцінюване рівняння (лінія регресії ЗМНК)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_k x_k, \quad (5)$$

де $\hat{\beta}_j$ – оцінка параметра β_j , $j = 0, 1, 2, \dots, k$; оцінки $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ дає ЗМНК – мінімізація середньої суми квадратів залишків (sum of squared residuals, SSR)

$$\tilde{u}_i = y_i - \tilde{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

тобто мінімізація за $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$

$$SSR(\tilde{u}) = \sum_{i=1}^n (\tilde{u}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik})^2. \quad (6)$$

Зазначимо, що залишок (residual) $\tilde{u}_i$ – не похибка (error) u_i . Якщо $k = 2$, $y = wage$, $x_1 = educ$, $x_2 = xper$, то

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 xper + u,$$

$x_{i1} = educ_i$ – кількість років навчання особи i , $x_{i2} = xper_i$ – кількість років досвіду особи i на ринку праці.

Звідси впливають умови першого порядку ЗМНК:

$$0 = \frac{\partial SSR(\tilde{u})}{\partial \beta_0} = (-1) \times 2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}),$$

$$0 = \frac{\partial SSR(\tilde{u})}{\partial \beta_j} = (-x_{ij}) \times 2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

або $(k+1)$ лінійних рівнянь з $(k+1)$ невідомими $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}) = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \tilde{u}_i = x_{ij} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (8)$$

Після отримання оцінюваного рівняння (4) для кожного спостереження $i = 1, 2, \dots, n$ можна отримати підігнане передбачуване значення

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ik},$$

яке зазвичай не збігатиметься зі спостережуваним (фактичним) значенням y_i . Для спостереження i залишок (похибка передбачення) ЗМНК визначається

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i;$$

якщо $\hat{u}_i > 0$ ($\hat{u}_i < 0$), то говорять, що спостереження y_i пояснюваної змінної передбачене недостатньо (надмірно). Деякі важливі властивості ЗМНК переносяться з простої на множинну регресію:

1) вибіркове середнє для залишків ЗМНК $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ дорівнює 0 (у силу рівняння (7)), звідки випливає, що точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{y})$ завжди лежить на лінії регресії ЗМНК (5), де вибіркове середнє для $y_1, y_2, \dots, y_n$

визначається $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$;

2) вибіркова коваріація між кожною незалежною змінною $x_1, x_2, \dots, x_k$ та залишками ЗМНК $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ дорівнює 0 (у силу рівнянь (8)), звідки випливає, що вибіркова коваріація між передбачуваними значеннями ЗМНК $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ та залишками ЗМНК $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ дорівнює 0.

Ключовим припущенням загальної моделі множинної регресії є

$$E(u \mid x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad (9)$$

звідки випливає, що: всі фактори в неспостережуваній змінній похибки некорельовані з пояснюючими змінними; функціональні взаємозв'язки між пояснюваними та пояснюючими змінними враховано правильно. Умова (9) означає, що ЗМНК (ordinary least squares, OLS) є незсуненим. Умова (9) може не виконуватися з різних причин: якщо змінна u корелюється з будь-якою серед незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$, то умова (9) не виконується; якщо функціональні взаємозв'язки між пояснюваними та пояснюючими змінними вказано неправильно (коли для залежності *cons(inc)* не вказано пояснюючу змінну $(inc)^2$, включену в (2); коли для залежності *salary(sales,ten)* не використано логарифми; коли для моделі (1) пропущено якийсь важливий фактор, що корелюється з якоюсь пояснюючою змінною $x_1, x_2, \dots, x_k$; коли існує похибка вимірювання пояснюючої змінної). Якщо умова (9) не виконується, то ЗМНК потребує модифікації. Коли якась ключова пояснююча змінна пропущена у моделі (1), то можна вивести зсув ЗМНК.

Систему (7), (8) на вибірці n спостережень для множинної регресії можна мотивувати методом моментів на генеральній сукупності для простої регресії: за умови (9) маємо $E(\tilde{u}) = 0 = E(x_j \tilde{u})$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Умова MLR3) (про нульове умовне середнє похибки) – це умова (9), тобто варіант властивостей 1) і 2) для генеральної сукупності. Отже, якщо X – це всі спостереження незалежних змінних $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, то

$$E(u \mid X) = 0. \quad (10)$$

При $k = 1$ цю умову можна записати як обмеження на взаємозв'язок між u та x_1 у формі $E(u \mid x_1) = 0$, звідки для випадкової вибірки маємо

$$E(u_i | x_{i1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

де x_{i1} вважається фіксованим у повторюваних вибірках: спочатку обираємо n вибірових значень $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ (які можуть повторюватися), потім отримуємо вибірове значення y_i для y (отримуючи при цьому випадкове вибірове значення u_i); після цього отримуємо інше вибірове значення для y , використовуючи ті ж самі значення $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$, і так далі. Така фіксованість x_{i1} не видається реалістичною; наприклад, не видається реалістичним спочатку вибір значень $educ$, а потім вибір осіб із зазначеними рівнями $educ$. Більшість наборів даних в емпіричному аналізі отримується шляхом випадкового вибору осіб з одночасною реєстрацією їхніх рівнів $educ$ та $wage$. Фіксованість x_{i1} у повторюваних вибірках завжди означатиме, що u_i та x_{i1} є незалежними.

Якщо $E(u) = 0$ для генеральної сукупності, то $Cov(x_1, u) = E(x_1 u) - E(x_1)E(u)$. Для моделі (1) в силу $E(u | x_1) = 0$ маємо

$$0 = E(x_1 u) = E[x_1 (y - \beta_0 - \beta_1 x_1)],$$

а з $E(u) = 0$ –

$$0 = E(u) = E(y - \beta_0 - \beta_1 x_1).$$

Застосовуючи метод моментів, розглянемо вибірові середні замість математичних сподівань та оцінки $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1$ замість невідомих параметрів β_0, β_1 :

$$0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_{i1}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} = \bar{y} - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 \bar{x}_1,$$

$$\tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}_1; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 0 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n [x_{i1}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1})] = n^{-1} \sum_{i=1}^n \{x_{i1}[y_i - (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1) - \beta_1 x_{i1}]\} = \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1}(y_i - \bar{y}) - n^{-1} \beta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}(x_{i1} - \bar{x}_1); \end{aligned}$$

$$X^T(\bar{y} - X\tilde{\beta}) = 0, \quad (X^T X)\tilde{\beta} = X^T \bar{y}, \quad \tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \bar{y},$$

де X^T та X^{-1} – відповідно транспонована (transposed) та обернена матриця X .

Умова MLR4) (про відсутність досконалої колінеарності) означає, що:

а) $x_j \neq \text{const} \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, k$; б) не існує точної лінійної взаємозалежності між $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ (матриця X має ранг $(k+1)$). При $k=1$ ця умова означає, що у вибірці $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ не всі значення дорівнюють одній і тій само константі: коли умова MLR4) не виконується, то статистичний аналіз не потрібен. MLR4) рівносильна нерівності для вибіркової дисперсії:

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 > 0.$$

Тому

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1}(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_{i1}(x_{i1} - \bar{x}_1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_{i1} - \bar{x}_1)}{s_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + u_i)(x_{i1} - \bar{x}_1)}{s_x^2}, \quad (13)$$

де використано властивість суми

$$\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_{i1}(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n y_i(x_{i1} - \bar{x}_1), \quad (14)$$

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i1} - \bar{x}_1) = \sum_{i=1}^n x_{i1}(x_{i1} - \bar{x}_1). \quad (15)$$

Випишемо чисельник виразу (13):

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} (x_{i1} - \bar{x}_1) + \sum_{i=1}^n u_i (x_{i1} - \bar{x}_1) = \beta_1 s_x^2 + \sum_{i=1}^n u_i d_i, \quad (16)$$

де використано відхилення (deviation) $d_i = x_{i1} - \bar{x}_1$ від середнього, рівність (15) та властивість

$$\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) = n \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \right) - n \bar{x}_1 = n \bar{x}_1 - n \bar{x}_1 = 0.$$

Таким чином, із співвідношень (13) і (16) випливає

$$\check{\beta}_1 = \frac{\beta_1 s_x^2 + \sum_{i=1}^n u_i d_i}{s_x^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n u_i d_i}{s_x^2}, \quad (17)$$

де за умови реалізації $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ відповідні змінні $d_1, d_2, \dots, d_n$ є не випадковими, як не випадковою є s_x^2 .

Основні результати – це стисле, строге і повне доведення лем 1–4 для простої регресії і відповідних теорем 1–4 для множинної регресії.

Лема 1. За умов MLR1)–MLR4) при $k=1$ оцінювач (12) $\check{\beta}_0$ (на всіх можливих вибірках) для β_0 та оцінювач (17) $\check{\beta}_1$ для β_1 є незсуненими випадковими змінними:

$$E(\check{\beta}_0 | X) = \beta_0, \quad E(\check{\beta}_1 | X) = \beta_1 \quad \forall \beta_0, \beta_1.$$

Дійсно, зі співвідношень (17) та (11) маємо

$$\begin{aligned} E(\check{\beta}_1 | X) &= \beta_1 + \left(s_x^2 \right)^{-1} E \left(\sum_{i=1}^n u_i d_i | X \right) = \beta_1 + \left(s_x^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n E(u_i d_i | X) = \beta_1 + \left(s_x^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n d_i E(u_i | \\ &X) = \beta_1 + s_x^2 \sum_{i=1}^n d_i E(u_i | X) = \beta_1 \end{aligned}$$

звідки, ураховуючи співвідношення (12) та (10), отримуємо

$$\begin{aligned} E(\beta_0 | X) &= E(\bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 | X) = E(\beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \bar{u} - \beta_1 \bar{x}_1 | X) = \beta_0 + E(\bar{u} | X) + E[x_1(\beta_1 X) + E[\bar{x}_1(\beta_1 - \beta)]] = \\ &= \beta_0 + \bar{x}_1 E(\beta_1 - \beta | X) = \beta_0 + \bar{x}_1 [\beta_1 - E(\beta_1 | X)] = \beta_0. \end{aligned}$$

Перейдемо до випадку $k > 1$. Слід припустити, що з системи (7), (8) однозначно визначаються $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ (система (7), (8) є добре визначеною). Застосовуючи ЗМНК до залежності $x_1(x_2, x_3, \dots, x_k)$, де x_1 – пояснювана змінна, $x_2, x_3, \dots, x_k$ – пояснюючі змінні, отримуємо

$$x_{i1} = \hat{x}_{i1} + \hat{r}_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $\hat{x}_{i1}$ – передбачуване значення x_1 , $\hat{r}_{i1}$ – відповідний залишок ЗМНК (для спостереження i). Тоді з рівнянь (8) при $j = 1$ маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{i1} + \hat{r}_{i1})(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{x}_{i1}(x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik}) \times \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \times \hat{u}_i. \end{aligned}$$

Оскільки $\hat{x}_1(x_2, x_3, \dots, x_k)$ – це лінійна залежність, то $\hat{x}_{i1}(x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik})$ – лінійна функція. Тому, ураховуючи рівняння (8) при $j = 2, 3, \dots, k$, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_{i1} \hat{u}_i = 0,$$

звідки випливає

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} - \beta_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} - \dots - \beta_k \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{ik}. \end{aligned}$$

У силу властивості 1)

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} = 0, \quad (18)$$

а в силу властивості 2) –

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{ij} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, k, \quad (19)$$

звідки випливає

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\hat{x}_{i1} + \hat{r}_{i1}) = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \hat{x}_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2.$$

Знову використовуючи лінійність функції $\hat{x}_{i1}(x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik})$ і властивість 2), дістаємо

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2. \quad (20)$$

Теорема 1. Якщо виконуються умови MLR1)–MLR4), то ЗМНК-оцінювачі $\hat{\beta}_j$ є незсуненими оцінювачами параметрів генеральної сукупності:

$$E(\hat{\beta}_j | X) = \beta_j, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Доведемо теорему 1 для $j = 1$; доведення для $j = 2, 3, \dots, k$ аналогічне. Співвідношення (20) за умови MLR4) означає, що $\hat{r}_{i1} \neq 0$ принаймні для

деякого $i = 1, 2, \dots, n$, звідки випливає $\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 > 0$ і вираз

ЗМНК-оцінювача для β_1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i)}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} + \beta_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{ik} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i =$$

$$\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2$$

Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д., 2013

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} y_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i)}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2}$$

$$= \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} + \beta_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{ik} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} =$$

$$= \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} + \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2}, \quad (21)$$

де використано умову MLR1), співвідношення (18) і (19).

У силу визначення маємо

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} x_{i1} = \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} (\hat{x}_{i1} + \hat{r}_{i1}) = \sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} \hat{x}_{i1} (x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik}) + \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2, \quad (22)$$

де використано лінійність функції $\hat{x}_{i1}(x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik})$ і співвідношення (19). Тоді з рівнянь (21) і (22) випливає

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} \\ &= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \hat{x}_{i1}) u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \times u_i - \sum_{i=1}^n \hat{x}_{i1} (x_{i2}, \dots, x_{ik}) \times u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$E(\hat{\beta}_1 | X) = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n E(x_{i1} \times u_i | X) - \sum_{i=1}^n E[\hat{x}_{i1}(x_{i2}, \dots, x_{ik}) \times u_i | X]}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} = \beta_1,$$

де використано умови MLR2), MLR3), (9) і лінійність функції $\hat{x}_{i1}(x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ik})$. Теорема 1 доведена.

Щоб отримати дисперсію ЗМНК оцінювача, потрібно вимірювати розкид його вибіркового розподілу. Так само як і для простої регресії, введемо припущення гомоскедастичності, яке дозволяє спрощувати викладки та обґрунтовувати властивість ефективності ЗМНК оцінювача.

Умова MLR5) (гомоскедастичності) – це $Var(u_i | X) = \sigma^2 = const \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, тобто дисперсія змінної похибки u є однаковою для будь-яких спостережень пояснюючих змінних. У матричній формі це означає $Var(\bar{u} | X) = \sigma^2 I_n$, де I_n – це одинична матриця $n \times n$. Якщо умова MLR5) не виконується, то модель (1) виявляє гетероскедастичність. Припущення MLR1)–MLR5) відомі як умови Гаусса – Маркова для крос-секційних (cross-section) регресій (структурованих даних).

Лема 2. За умов MLR1)–MLR5) при $k = 1$ умовні дисперсії оцінювачів визначаються

$$Var(\beta_1 | X) = \sigma^2 \left(\sum_{x=1}^n \right)^{-1},$$

$$Var(\beta_0 | X) = \sigma^2 \left(\sum_{x=1}^n \right)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{i1})^2.$$

Дійсно, зі співвідношень (17), (11), (15) маємо

$$Var(\beta_1 | X) = \left(\sum_{x=1}^n \right)^{-2} Var\left(\sum_{i=1}^n u_i d_i | X \right) = \left(\sum_{x=1}^n \right)^{-2} \sum_{i=1}^n (d_i)^2 Var(u_i | X)$$

$$= \left(\sum_{x=1}^n \right)^{-1} \sigma^2,$$

де використано властивість $Var(ax + b) = a^2 Var(x)$ для будь-яких констант a, b .

Тоді, ураховуючи співвідношення (12) і (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \text{Var}(\beta_0 | X) &= \text{Var}(\bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 | X) = \text{Var}(\beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \bar{u} - \beta_1 \bar{x}_1 | X) = \\ &= (\beta_1)^2 \text{Var}\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} | X\right) + \text{Var}(\bar{u} | X) + \text{Var}\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \beta_1 | X\right) = \\ &= n^{-2} \sum_{i=1}^n (x_{i1})^2 n \text{Var}(\beta_1 | X) = n^{-1} \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2\right)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{i1})^2. \end{aligned}$$

Перейдемо до випадку $k > 1$. Аналогічно до простої регресії, загальна сума квадратів (total sum of squares, SST) – це пояснена сума квадратів (explained sum of squares, SSE)

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

плюс сума квадратів залишків $SSR(\hat{u})$, що визначається співвідношенням (6):

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SST = SSR(\hat{u}) + SSE.$$

Звідси

$$1 = \frac{SSR(\hat{u})}{SST} + \frac{SSE}{SST}.$$

Аналогічно до простої регресії частка мінливості у спостереженнях $y_1, \dots, y_n$, пояснювана лінією регресії ЗМНК, інтерпретується коефіцієнтом

$$\begin{aligned} R^2 = \frac{SSE}{SST} &= 1 - \frac{SSR(\hat{u})}{SST} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right) \left(\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2\right)} \in [0, 1], \\ \frac{SSR(\hat{u})}{SST} &= 1 - R^2, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 = SSR(\hat{u}) = SST (1 - R^2). \quad (24)$$

Оскільки $\hat{y}_i = y_i - \hat{u}_i$, то $\bar{\hat{y}} = \bar{y}$ в силу властивості 1).

Аналогічно до співвідношення (24)

$$\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 = SST_1(1 - R_1^2), \quad (25)$$

де SST_1 – загальна сума квадратів похибок при пояснюваній змінній x_1 ; R_1^2 – коефіцієнт детермінації при регресії x_1 за рештою незалежних змінних $x_2, \dots, x_k$. Подібним чином визначаються $SST_j, R_j^2, j = 2, \dots, k$.

Теорема 2. За умов Гаусса – Маркова MLR1)–MLR5) умовна дисперсія кожної оцінки $\hat{\beta}_j$ має вигляд

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Доведемо теорему 2 для $j = 1$; доведення для $j = 2, 3, \dots, k$ аналогічне. Зі співвідношення (23) випливає

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1 | X) = \text{Var}\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} \middle| X\right) = \frac{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i \middle| X\right)}{\left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2\right)^2}, \quad (26)$$

де використано невинпадковість змінних $\hat{r}_{i1} = x_{i1} - \hat{x}_{i1}(x_{i2}, \dots, x_{in})$ за умови реалізації $X, i = 1, 2, \dots, n$.

У силу умови MLR2) похибки u_i є незалежними, звідки

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \hat{r}_{i1} u_i \middle| X\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\hat{r}_{i1} u_i | X) = \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \text{Var}(u_i | X) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2, \quad (27)$$

де використано умову MLR5).

Тоді зі співвідношень (25) – (27) випливає

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1 | X) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2} = \frac{\sigma^2}{SST_1(1 - R_1^2)}. \quad (28)$$

За теоремою 2, щоб отримати незсунені оцінювачі для $\text{Var}(\hat{\beta}_j | X)$, $j = 1, 2, \dots, k$, необхідно знайти незсунений оцінювач для $\sigma^2 = E(u_i | X)$. Вибіркове середнє $n^{-1} \sum_{i=1}^n (u_i)^2$ є незсуненим оцінювачем для σ^2 , але не є справжнім (true) оцінювачем, бо не спостерігаються величини $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, а тому не спостерігаються

$$u_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Замінюючи невідомі величини $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ їхніми ЗМНК-оцінювачами $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$, замінюємо u_i на

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik} =$$

$$= u_i + (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i1} + \dots + (\beta_k - \hat{\beta}_k) x_{ik}. \quad (29)$$

Хоча $E(\hat{u}_i | X) = E(u_i | X)$ в силу теореми 1, неспостережувана похибка u_i та спостережуваний залишок $\hat{u}_i$ – це різні речі: при $k = 1$ оцінювач $n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 = n^{-1} SSR(\hat{u})$ для σ^2 є справжнім (дає обчислюване правило для будь-яких вибірових даних x_1, y), але дещо зсуненим (асимптотично незсуненим при $n \rightarrow \infty$) через неврахування двох обмежень (7), (8) ЗМНК. Знаючи $(n - 2)$ залишків $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n-2}$, два залишки $\hat{u}_{n-1}, \hat{u}_n$ завжди можна отримати за допомогою цих двох обмежень (7), (8) ЗМНК. Тому залишки ЗМНК $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ мають $(n - 2)$ ступенів свободи, а похибки

$u_1, \dots, u_n$ – n ступенів свободи. Тоді незсуненим оцінювачем для σ^2 при $k=1$ є $\hat{\sigma}^2 = (n-2)^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 = (n-2)^{-1} SSR(\hat{u})$, а у множинній регресії незсуненим оцінювачем для σ^2 є

$$\hat{\sigma}^2 = (n-k-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 = (df)^{-1} SSR(\hat{u}) = (df)^{-1} \vec{u}^T \vec{u}, \quad (30)$$

де $df = n - (k+1)$ – число ступенів свободи (degrees of freedom).

Лема 3. За умов MLR1)–MLR5) при $k=1$ оцінювач (30) для σ^2 є незсуненим: $E(\hat{\sigma}^2 | X) = \sigma^2$.

Із рівнянь (28) і (7), ураховуючи рівність (14), випливає

$$0 = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = \sum_{i=1}^n u_i + n(\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{i=1}^n x_{i1},$$

$$0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i + (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} = \bar{u} + (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \bar{x}_1,$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = u_i - 0 &= u_i + (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i1} - [\bar{u} + (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \bar{x}_1] = \\ &= (u_i - \bar{u}) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)(x_{i1} - \bar{x}_1), \end{aligned}$$

$$(\hat{u}_i)^2 = (u_i - \bar{u})^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + 2(u_i - \bar{u})(\beta_1 - \hat{\beta}_1)(x_{i1} - \bar{x}_1),$$

$$SSR(\hat{u}) = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + 2(\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{i=1}^n u_i (x_{i1} - \bar{x}_1),$$

$$\begin{aligned} E[SSR(\hat{u}) | X] &= E\left(\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2\right) + \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 E(\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \\ &\quad - 2s_x^2 E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 = \end{aligned}$$

$$= (n-1)\sigma^2 + \sigma^2 - 2s_x^2 \sigma^2 \left(\frac{2}{s_x^2}\right)^1 = (n-1)\sigma^2 + \sigma^2 - 2\sigma^2 = (n-2)\sigma^2,$$

де використано: вибірккову дисперсію

$$\hat{\sigma}^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2$$

як незсунений оцінювач для $Var(u) = \sigma^2$,

$$E \left((n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 \right) = Var(u);$$

леми 1, 2

$$E(\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 = E\{[\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)]^2\} = Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \left(\frac{2}{s_x} \right)^2; \quad (31)$$

рівняння (29), (7), (8), (15)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i (x_{i1} - \bar{x}_1) &= \sum_{i=1}^n [\hat{u}_i - (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i1}] (x_{i1} - \bar{x}_1) = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{u}_i (x_{i1} - \bar{x}_1) - (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{i=1}^n x_{i1} (x_{i1} - \bar{x}_1) = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{u}_i x_{i1} - \bar{x}_1 \sum_{i=1}^n \hat{u}_i - (\beta_1 - \hat{\beta}_1) s_x^2 = (\hat{\beta}_1 - \beta_1) s_x^2, \end{aligned}$$

а також рівність (31).

Теорема 3. За умов Гаусса – Маркова (MLR1)–(MLR5) при $k > 1$ оцінювач (30) для σ^2 є незсуненим.

У матричному вигляді

$$\vec{u} = \vec{y} - X \vec{\beta} = \vec{y} - X (X^T X)^{-1} X^T \vec{y} = M \vec{y} = M \vec{u} + M X \vec{\beta} = M \vec{u},$$

де $M = I_n - X (X^T X)^{-1} X^T$ – симетрична ($M^T = M$) та ідемпотентна ($M M = M$) матриця; $M X = 0$. Звідси

$$\vec{u}^T \vec{u} = (M \vec{u})^T M \vec{u} = \vec{u}^T M^T M \vec{u} = \vec{u}^T M \vec{u} = tr(\vec{u}^T M \vec{u}),$$

де $tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – (скалярний) слід (trace) квадратної матриці A розмірності $n \times n$;

$$E[tr(\bar{u}^T M \bar{u}) | X] = tr[M E(\bar{u}^T \bar{u} | X)] = tr(M \sigma^2 I_n) = \sigma^2 tr(M) = \sigma^2 [tr(I_n) - tr(X M)] = \sigma^2 [tr(I_n) - tr(X(X^T X)^{-1} X^T)] = (n - k - 1)$$

Виникає питання: чи існує незсунений оцінювач, відмінний від ЗМНК-оцінювача, який має меншу дисперсію? Можна показати, що ЗМНК-оцінювач – це найкращий лінійний незсунений оцінювач (best linear unbiased estimator, BLUE). Оцінювач передбачає правило, яке можна застосувати до будь-якої вибірки даних для отримання оцінки. Оцінювач β_j^e для β_j є незсуненим оцінювачем для β_j , якщо $E(\beta_j^e) = \beta_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Оцінювач β_j^e для β_j є лінійним тоді й тільки тоді, коли β_j^e можна виразити як лінійну функцію даних $y_1, \dots, y_n$ залежної змінної y :

$$\beta_j^e = \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i, \quad (32)$$

де w_{ij} може бути функцією вибірових даних усіх незалежних змінних $x_1, \dots, x_n$. Незсунений ЗМНК-оцінювач $\hat{\beta}_j$ є кращим, ніж незсунений оцінювач β_j^e , коли $Var(\hat{\beta}_j) < Var(\beta_j^e)$.

Теорема 4 (теорема Гаусса – Маркова). За умов Гаусса – Маркова (MLR1)–(MLR5) (для крос-секційних даних) ЗМНК-оцінювач $\hat{\beta}_j$ – це найкращий лінійний незсунений оцінювач для β_j , умовний за реалізації X , $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Доведемо теорему 4 для $j = 1$; доведення для $j = 2, 3, \dots, k$ аналогічне. Використовуючи умову (1) MLR1)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

у рівнянні (32), отримуємо

$$\begin{aligned}\beta_1^e &= \sum_{i=1}^n w_{i1} y_i = \sum_{i=1}^n w_{i1} (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i) = \\ &= \beta_0 \sum_{i=1}^n w_{i1} + \beta_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{i1} + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{ik} + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i.\end{aligned}$$

Тоді в силу незсуненості й умови MLR3) маємо

$$\begin{aligned}\beta_1 &= E(\beta_1^e | X) = \beta_0 \sum_{i=1}^n w_{i1} + \beta_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{i1} + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{ik} + \sum_{i=1}^n w_{i1} E(u_i | X) = \\ &= \beta_0 \sum_{i=1}^n w_{i1} + \beta_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{i1} + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{ik},\end{aligned}$$

звідки отримуємо такі рівності:

$$\sum_{i=1}^n w_{i1} = 0; \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^n w_{i1} x_{i1} = 1; \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^n w_{i1} x_{ij} = 0, \quad j = 2, \dots, k. \quad (35)$$

У силу рівняння (34) впливає

$$1 = \sum_{i=1}^n w_{i1} [\hat{x}_{i1}(x_{i2}, \dots, x_{ik}) + \hat{r}_{i1}] = \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} + \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{x}_{i1}(x_{i2}, \dots, x_{ik}) = \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1}, \quad (36)$$

де використані рівності (35). Оскільки рівності (33)–(35) дають

$$\beta_1^e = \beta_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} x_{i1} + \sum_{i=1}^n w_{i1} u_i,$$

$$\text{Var}(\beta_1^e | X) = \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2 \text{Var}(u_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2,$$

то в силу рівняння (28) отримуємо

$$\frac{\text{Var}(\beta_1^e | X)}{\text{Var}(\hat{\beta}_1 | X)} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2}{\sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1}} = \frac{\sum_{i=1}^n (w_{i1})^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1}}, \quad (37)$$

де використано рівність (36). Різниця між чисельником і знаменником відношення (37) дорівнює

$$\sum_{i=1}^n (w_{i1})^2 - \left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1} = \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2 \geq 0, \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right) \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1} : \\ \sum_{i=1}^n (w_{i1} - \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1})^2 &= \sum_{i=1}^n [(w_{i1})^2 + (\hat{\gamma}_1)^2 (\hat{r}_{i1})^2 - 2 w_{i1} \hat{\gamma}_1 \hat{r}_{i1}] = \\ &= \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-2} - 2 \hat{\gamma}_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2 + \left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1} - 2 \hat{\gamma}_1 \sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (w_{i1})^2 - \left(\sum_{i=1}^n w_{i1} \hat{r}_{i1} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{r}_{i1})^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

У силу співвідношення (20) права частина рівняння (38) – це сума квадратів залишків простої регресії, де $w_{11}, \dots, w_{n1}$ – спостереження залежної змінної w_1 , а $\hat{r}_{11}, \dots, \hat{r}_{n1}$ – спостереження незалежної змінної $\hat{r}_1$, які задовольняють рівності (18). Теорема 4 обґрунтовує використання ЗМНК замість будь-якого іншого оцінювача.

Бібліографічні посилання

1. **Горбачук В. М.** Економетричне програмування TSP та EVIEWS. Препр. 96-14. / В. М. Горбачук. – К.: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 1996. – 24 с.
2. **Горбачук В. М.** Макроекономічні методи. / В. М. Горбачук. – К.: Альтер-прес, 1999. – 263 с.
3. **Горбачук В. М.** Особенности регрессионного анализа временных рядов / В. М. Горбачук, Ю.Г. Кривонос // Комп'ютерна математика. – 2012. – № 2. – С. 3–12.
4. **Горбачук В. М.** Причинно-следственная связь по Грейнджеру / В. М. Горбачук, Г.А. Шулинок // Теорія оптимальних рішень. – 2012. – С. 119–125.
5. **Горбачук М. Л.** Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов / М. Л. Горбачук. // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. – Т. 39, Вып. 1. – С. 85–90.
6. **Кнопов П. С.** Методи моделювання та прогнозування в економетриці. / П. С. Кнопов, З. В. Некрилова – К.: КНУ імені Т. Шевченка, 2008. – 304 с.
7. **Gorbachuk V. M.** Regression analysis of time series and Granger causality // 14-та міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Т. 3. – К.: НТУУ „КПІ”, 2012. – С. 11.
8. **Gorbachuk V.** Causality in time series analysis // Nonlinear analysis and applications. – Kyiv: NTUU “KPI”, 2012. – p. 30.
9. **Knopov P. S., Korkhin A. S.** Regression analysis under a priori parameter restrictions. – Springer, 2012. – 234 p.
10. **Wooldridge J. M.** Introductory econometrics: a modern approach. 4-th ed. – Mason, OH: Cengage Learning, 2009. – 865 p.

Надійшла до редколегії 07.11.2012 р.

В. А. ²Громов, А. И. Комиссарова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА К ОТЫСКАНИЮ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Розглядається новий підхід до побудови розв'язку крайової задачі в частинних похідних, який базується на використанні представлення невідомих функцій задачі (функцій багатьох змінних) за допомогою суперпозиції функцій однієї змінної. Такий підхід дозволяє звести початкову крайову задачу, для системи рівнянь у частинних похідних, до сімейства одновимірних крайових задач для рівнянь із аргументом, що запізнюється: кожне з рівнянь сімейства в подальшому розв'язується за допомогою методу зведення крайової задачі до еквівалентної задачі Коші. Подаються розрахункові співвідношення і результати розрахунків для рівняння Пуассона.

Рассматривается новый подход к построению решений краевых задач в частных производных, основанный на использовании представления неизвестных функций задачи (функций многих переменных) с помощью суперпозиции функции одной переменной. Подход позволяет свести исходную краевую задачу, для системы уравнений в частных производных, к семейству одномерных краевых задач, для уравнений с запаздывающим аргументом: каждое из уравнений семейства далее разрешается с помощью метода сведения краевой задачи к эквивалентной задаче Коши. Представлены разрешающие соотношения и результаты расчётов для уравнения Пуассона.

The novel approach to solve boundary problem for partial differential equations system based on unknown functions (that are functions of several variables) representation with employment of single-variable functions superposition (Kolmogorov's superposition) is considered in the present paper. The approach reduces the initial boundary problem to single-dimensional delay differential equations series; then, each single-dimensional problem is reduced to equivalent Cauchy problem. The governing equations and numerical data obtained is presented for Poisson equations.

Ключевые слова: уравнения в частных производных; теорема Колмогорова; сведение краевой задачи к эквивалентной задаче Коши; уравнения с запаздывающим аргументом.

Вступление. Несмотря на многообразие существующих численных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных, задача отыскания решения краевых задач (особенно нелинейных) для различных типов граничных условий остаётся далёкой от своего окончательного разрешения. В настоящее время в расчётной практике обычно используется метод конечных элементов, однако трудности, связанные с его применением, обусловили появление ряда численных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных.

Так, в статье [6] рассматривается подход, базирующийся на аппроксимации неизвестных функций нелинейной краевой задачи с помощью базисных функций с конечными носителями; там же приводятся результаты применения метода к решению нелинейной краевой задачи теории тонкостенных оболочек. Указанный метод близок к непараметрической регрессии и к нейронным сетям на основе радиальных базисных функций [4].

Другой подход основывается на применении обобщённого метода Канторовича [5]: обобщённый метод Канторовича, будучи применённым к линейной краевой задаче позволяет получить аналитическое решение, тогда как его применение к нелинейной задаче приводит к итерационному процессу [8; 9]. Указанный процесс в сочетании с методом продолжения по параметру делает возможным построение ветвей решения рассматриваемой краевой задачи.

В настоящей работе рассматривается метод решения краевой задачи, который основывается на использовании представления неизвестных функций задаче с помощью суперпозиции функций одной переменной (теорема Колмогорова).

Постановка задачи. Знаменитая теорема Колмогорова о представлении функции многих переменных утверждает, что каждую непрерывную функцию f_n переменных, определённую на n -мерном единичном гиперкубе, можно представить в виде суперпозиции функций одной переменной. Следствие из теоремы Колмогорова, сформулированное Шпрехером [10], позволяет записать указанное представление в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^n \Phi_q(y_q), \quad (1)$$

$$y_q = \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p + q\alpha). \quad (2)$$

Здесь функция $\boxed{\psi(\cdot)}$ и константы α_p, a одинаковы для всех непрерывных функций, в то время как функции $\Phi_q(\cdot)$ зависят от представляемой функции $\boxed{f}$. Оригинальное доказательство теоремы Колмогорова доказывает существование «внутренней» функции $\boxed{\psi(\cdot)}$, но не приводит алгоритма её построения. Указанные алгоритмы могут быть найдены в статьях [3; 11]. Следует подчеркнуть, что функция $\boxed{\psi(\cdot)}$ непрерывна, но не дифференцируема. Представленный в статье [11] численный метод также позволяет найти константы α_p, a . В частности, для двумерного случая $\boxed{a}$ может быть выбрано как $a = 1/30$ и, таким образом, является естественным малым параметром.

Разложение функции $\Phi_q(\cdot)$ в ряд Тейлора по данному параметру позволяет получить следующее представление:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) \approx & \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left(\sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right) + \\ & + a \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi'(x_p) \sum_{q=1}^{2n} q \Phi'_q \left(\sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right) + O(a^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь функция $\boxed{\psi(\cdot)}$ вычислена с помощью указанного алгоритма, а $\boxed{\psi'(\cdot)}$ представляет собой дифференцируемую аппроксимацию $\boxed{\psi(\cdot)}$ (может использоваться несимметричная сигмоидальная функция).

Для построения разрешающих соотношений используется вариационная постановка рассматриваемой краевой задачи. Подстановка представления (3) в функционал вариационной постановки вместе с переходом к новым переменным с помощью

$$z = \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p); x_p = x_p, p = \overline{2, n}; \quad (4)$$

$$dz = \frac{dx_1}{\psi' \left(\psi^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(z - \sum_{p=2}^n \alpha_p x_p \right) \right) \right)}; dx_p = dx_p, p = \overline{2, n} \quad (5)$$

позволяет получить функционал, зависящий от функций одной переменной $\Phi_q(z)$; от переменных $x_p = x_p, p = \overline{2, n}$ функционал зависит как от параметров.

Уравнения Эйлера – Пуассона для данного функционала представляют собой дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом от функций $\Phi_q(z), q = \overline{0, 2n}$ с параметрами $x_p = x_p, p = \overline{2, n}$.

Указанные системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом должны быть дополнены граничными условиями, полученными в результате преобразования граничных условий для исходной n -мерной краевой задачи. В частности, граничные условия, определённые на границах вида $x_1 = \text{const}$, преобразуются в граничные условия, сформулированные в начале и конце промежутков определения полученных одномерных краевых задач; условия, сформулированные на границах вида $x_p = \text{const}, p \neq 1$, приводят к интегральным условиям, зависящим от функций $\Phi_q(z)$ с запаздывающим аргументом.

Решения одномерных краевых задач непрерывно дифференцируемы для фиксированных значений параметров; дифференцируемость решения исходной краевой задачи гарантируется непрерывной дифференцируемостью решений одномерных задач по параметру.

Метод решения одномерных краевых задач

При заданных значениях параметров $x_p = x_p^*, p = \overline{2, n}$ применение указанного подхода даёт двухточечную краевую задачу для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Унифицированное описание таких задач имеет следующий вид:

$$\frac{d\Phi}{dz} = G(\Phi(z), \Psi(z - \beta^*)\lambda)_z \in [z_{\min}^*, z_{\max}^*] \quad (6)$$

где $\Phi(z) = \{\Phi_j(z)\}$ – вектор-функция, составленная из $\Phi_q(z), q = \overline{0, 2n}$ и их производных соответствующих порядков ($\dim \Phi(z) = \overline{1, 3(2n+1)}$ для уравнения Пуассона);

$\Psi(z)$ – вектор-функция, включающая $\Psi(z)$ и производные от её непрерывного аналога $\tilde{\Psi}(z)$;

$$\beta^* = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{p=2}^n \alpha_p \psi(\xi_p^*);$$

$G(\cdot)$ – вектор-функция правых частей;

$$z_{\min} = \sum_{p=2}^n \alpha_p \psi(\xi_p^*) \quad z_{\max} = \alpha_1 + \sum_{p=2}^n \alpha_p \psi(\xi_p^*).$$

Граничные условия задачи (6) принадлежат к двум различным классам. Первый класс соответствует граничным условиям, определённым в точках $z_{\min}, z_{\max}$, второй содержит интегральные условия, зависящие от $\Phi(\cdot - \beta^*)$. Обозначив вектор граничных условий (принадлежащих как первому, так и второму классу) как S , получим описание граничных условий данной краевой задачи в виде

$$S = 0. \quad (7)$$

Отсутствие прямых методов интегрирования для нелинейных одномерных краевых задач обуславливает необходимость сведения такого рода задачи к эквивалентной задаче Коши, которая может быть решена прямым интегрированием. В частности, для численного интегрирования задач Коши для уравнений с запаздывающим аргументом в [2] приведен ряд методов, основывающихся на непрерывном методе Рунге – Кутты.

Поскольку решение $\Phi(z)$ полностью определяется вектором $\Phi^0 \equiv \Phi(z_0)$, заданным в некоторой точке промежутка интегрирования $z_0 \in [z_{\min}(\xi_p^*), z_{\max}(\xi_p^*)]$ граничные условия могут рассматриваться как функции от Φ^0 :

$$S = S(\Phi(\Phi^0)) \equiv S(\Phi^0). \quad (8)$$

Вид зависимости $S = S(\Phi^0)$ остаётся неизвестным, но алгоритм вычисления значения S для данного вектора Φ^0 может быть указан. Такой алгоритм представляет численное интегрирование задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, начиная с точки z_0 , в точки $z = z_{\min}$ и $z = z_{\max}$, в которых определены граничные условия первого класса. Невязки по граничным условиям второго класса могут быть вычислены после завершения процедуры интегрирования.

Таким образом, проблема определения начального вектора Φ^0 сводится к решению системы трансцендентных уравнений (8), для решения которой может быть применён метод Ньютона [9]:

$$\Phi^{0(l+1)} = \Phi^{0(l)} - J^{-1} S(\Phi^{0(l)}). \quad (9)$$

Здесь $\Phi^{0(l)}$ обозначает первое приближение к решению, J - матрицу Фреше системы уравнений (8) посчитанный для $\Phi^0 = \Phi^{0(l)}$.

Разрешающие уравнения для уравнений Пуассона.

В частности, для уравнений Пуассона вариационная постановка даётся функционалом (10):

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u(x_1, x_2) \rightarrow \text{extr}. \quad (10)$$

Применение приведенного выше метода позволяет сформулировать следующие разрешающие соотношения относительно функций $\Phi_q(z), q = 0..4$:

$$\Phi_p^{IV} = F_p + \sum_{q=p}^4 \sum_{k=1}^3 \alpha_{pqk} \Phi_q^k$$

и граничными условиями

$$\alpha_1 \Psi(0) + \alpha_2 \Psi(x_2),$$

$$\alpha_1 \Psi(1) + \alpha_2 \Psi(x_2),$$

где

$$F_p = a_p + \sum_{j=p+1}^4 \theta_{jp} F_j,$$

$$F_4 = a_4,$$

$$a_p = \left(-f(k, x_2) \left(1 + \frac{dg}{dz} \frac{n}{g} pa \right) + \right. \\ \left. + f'(k, x_2) k_z \frac{1}{\alpha_1} (g+n) pa \right) \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)},$$

$$\theta_{jp} = \left((g^2 + gn)^2 pja^2 + (n^2 + ng)^2 pja^2 \right) \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)},$$

$$\alpha_{pq1} = \begin{cases} c_p, p = q \\ c_{qp} + \sum_{j=p+1}^q \theta_{jp} \alpha_{jq1}, p \neq q, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_p = & \left(-2 \frac{db_p}{dz} b_p - \frac{(b_p^2 + m_p^2)}{g} \frac{dg}{dz} + \left(b_p g - \frac{m_p n^2}{g} \right) \frac{d^2 g}{dz^2} p a + \right. \\ & + \left(3b_p + \frac{2nm}{g} + \frac{2b_p n}{g} + \frac{2m_p n^2}{g^2} \right) \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 + \\ & + \frac{dg}{dz} \frac{db_p}{dz} (3g + 2n) p a + \frac{d^2 b_p}{dz^2} (g^2 + gn) p a \Big) \times \\ & \times \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{qp} = & \left(\frac{db_p}{dz} b_q - b_p \frac{db_q}{dz} + \frac{b_p b_q}{g} \frac{dg}{dz} + \frac{m_p m_q}{g} \frac{dg}{dz} + \right. \\ & + 2 \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 \left(2b_q + \frac{n}{g} b_q + \right. \\ & \left. \left. + \frac{n}{g} m_q + \frac{n^2}{g^2} m_q \right) \right) p a + \\ & + (g^2 + ng) \left(gb_p + \frac{m_p n^2}{g} \right) \frac{d^2 b_q}{dz^2} \Big) \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{pq2} = \begin{cases} d_p, p = q \\ d_{qp} + \sum_{j=p+1}^q \theta_{jp} \alpha_{jq2}, p \neq q, \end{cases}$$

$$d_p = \left(-(b_p^2 + m_p^2) - \frac{db_p}{dz}(g^2 + gn)pa + \right. \\ \left. + \frac{dg}{dz} \left(\frac{m_p n^2}{g} - gb_p \right) pa + \frac{d^2 g}{dz^2} p^2 a^2 \left(3g^3 + 4g^2 n + 2gn^2 - \frac{n^4}{g} \right) + \right. \\ \left. + 2p^2 a^2 \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 \left(\frac{7g^2 + 8gn + 4n^2}{4n^2 + \frac{2n^3}{g} + \frac{n^4}{g^2}} \right) \right) \times \\ \times \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)},$$

$$d_{qp} = \left(\frac{db_p}{dz}(g^2 + gn)qa - b_p b_q - m_p m_q + \left(gb_p + \frac{m_p n^2}{g} \right) \frac{dg}{dz} + \right. \\ \left. + qpa^2 \left(\frac{d^2 g}{dz^2} (7g^3 + 10g^2 n + 4n^2 - \frac{n^4}{g}) \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 \left(3g^2 + 4gn + 2n^2 + \frac{2n^3}{g} + \frac{n^4}{g^2} \right) \right) \times \\ \times \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)},$$

$$\alpha_{pq3} = \begin{cases} 0, & p = q \\ w_{qp} + \sum_{j=p+1}^q \theta_{jp} \alpha_{jq3}, & p \neq q, \end{cases}$$

$$w_{qp} = (g^2 + gn)(b_q pa - b_p qa) + \\ + (n^2 + ng)(m_q pa - m_p qa) \frac{1}{p^2 a^2 (g^4 + 2g^3 n + 2g^2 n^2 + 2gn^3 + n^4)},$$

$$\begin{aligned}
 g &= \alpha_1 \Psi'(k) \\
 b_p &= \alpha_1 \Psi'(k) + \alpha_1 \Psi''(k) pa \\
 b_j &= \alpha_1 \Psi'(k) + \alpha_1 \Psi''(k) ja \\
 m_p &= \alpha_2 \Psi'(x_2) + \alpha_2 \Psi''(x_2) pa \\
 m_j &= \alpha_2 \Psi'(x_2) + \alpha_2 \Psi''(x_2) ja \\
 n &= \alpha_2 \Psi'(x_2) \\
 k &= \Psi^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_1} (z - \alpha_2 \Psi'(x_2)) \right) \\
 \frac{dg}{dz} &= \Psi''(k) k_z \\
 \frac{db_p}{dz} &= \Psi'''(k) k_z + \Psi''''(k) k_z pa \\
 \frac{db_j}{dz} &= \Psi'''(k) k_z + \Psi''''(k) k_z ja \\
 k_z &= \left(\Psi^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_1} (z - \alpha_2 \Psi'(x_2)) \right) \right)'.
 \end{aligned}$$

Выводы. На основании приведенных выше результатов можно сформулировать следующие выводы.

1. Применение теоремы Колмогорова о суперпозиции к решению краевых задач для уравнений в частных производных позволяет свести решение рассматриваемой краевой задачи к параметрическому семейству одномерных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для каждого фиксированного значения набора параметров порядок системы конечен и определяется только структурой исходной краевой задачи.
2. Для решения указанных одномерных краевых задач применялся метод редукции краевой задачи к эквивалентной задаче Коши в сочетании с модификацией метода Рунге – Кутты для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.
3. Применение данного метода к модельному уравнению – уравнению Пуассона – продемонстрировало хорошее совпадение с аналитическим решением.

Библиографические ссылки

1. **Aghdam M. M.** Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method / M. M. Aghdam, M. Mohammadi, V. Erfanian // *Thin-Walled Structures*. – 2007. – №12(45). – P. 983–990.
2. **Bellen A.** Numerical Methods for Delay Differential Equations / A. Bellen, M. Zennaro // Oxford University Press. – 2003.
3. **Braun J.** On a constructive proof of Kolmogorov's superposition theorem / J. Braun, M. Griebel // *Constructive approximation*. – 2009. – №3(30). – P. 653–675.
4. **Haykin S. S.** Neural Networks and Learning Machines / S. S. Haykin // Prentice Hall. – 2009.
5. **Kantorovich L. V.** Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov // Interscience. – 1958.
6. **Liew K. M.** A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells / K. M. Liew, X. Zhao, A. J. M. Ferreira // *Composite Structures*. – 2011. – №8 (93). – P. 2031–2041.
7. **Lord G. J.** Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling / G. J. Lord, A. R. Champneys, G. W. Hunt // *SIAM J Sci Comp*. – 1999. – №2 (21). – P. 591–619.
8. **Obodan N. I.** Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure / N. I. Obodan, V. A. Gromov // *J of Engrg Math*. – 2013. – №1 (78). – P. 239–248.
9. **Obodan N. I.** Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-walled Shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedeyev, V. A. Gromov // Springer. – 2013. 178 P.
10. **Sprecher D. A.** On the structure of continuous functions of several variables / D. A. Sprecher // *Trans Am Math Society*. – 1965. – №3 (115). – P. 340–355.
11. **Sprecher D. A.** A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions / D. A. Sprecher // *Neural Networks*. – 1996. – №5 (9). – P. 765–772.
12. **Vorovich I. I.** Nonlinear Theory of Shallow Shells/ I. I. Vorovich // Springer. – 1999.

Надійшла до редколегії: 06.06.2013 р.

В. А. Громов¹, А. Д. Фирсов²

¹Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

²Академия Таможенной Службы Украины

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ О ХАОТИЧЕСКОМ ВРЕМЕННОМ РЯДЕ

Розглядається подання хаотичного часового ряду за допомогою графа відстаней і гістограми розподілу відстаней між z -векторами, що дозволяє представити інформацію про ряд у зручному для візуалізації вигляді. Аналіз гістограм розподілу відстаней дає змогу виділити характерні розміри z -векторів і порогові значення відстаней між ними.

Рассматривается представление хаотического временного ряда с помощью графа расстояний и гистограммы распределения расстояний между z -векторами, что позволяет представить информацию о ряде в удобном для визуализации виде. Анализ гистограмм распределения расстояний дает возможность выделить характерные размеры z -векторов и пороговые значения расстояний между ними.

Chaotic time series representation with employment of distance graph and distribution histogram for z -vectors is considered in the paper in order to visualize information about the series. The distribution histograms allow determining typical z -vector dimensions and threshold values for distances between these vectors.

Ключевые слова: хаотический временной ряд, представление информации о временном ряде.

Введение. Важность задачи прогнозирования хаотических временных рядов и анализа лежащих в их основе природных и социальных процессов побуждает исследователей к построению и анализу различного рода прогнозных моделей, позволяющих извлечь информацию, содержащуюся в наблюдениях рассматриваемого временного ряда, и представить её в виде, удобном для последующего анализа.

Анализ существующей литературы дает возможность сделать вывод, что в отличие от «классических» прогнозных моделей, позволяющих прогнозировать регулярные временные ряды (ARIMA, DHR и др.), где информация о ряде могла быть сжата до весьма ограниченного числа коэф-

фициентов модели, для «хаотических» прогнозных моделей объём информации, необходимый для адекватного представления модели, существенно выше; более того, по «видимому», в большинстве случаев единая модель в «классическом» смысле просто не существует или не может быть построена.

Здесь возможна постановка вопроса о связи между качеством прогнозирования и объёмом информации, необходимым для обеспечения такого качества. Также в литературе рассматривается вопрос о простоте и удобстве визуализации информации о временном ряде. Наряду с известными в литературе способами представления информации о временном ряде с помощью ляпуновского спектра или спектра размерностей соответствующего странного аттрактора [1] в последнее время появился ряд работ, посвящённых альтернативным способам представления информации о хаотическом временном ряде.

Так, в работах [9 ; 10] для построения прогнозной модели использовались различные модели в рамках парадигмы искусственных нейронных сетей; известные алгоритмы обрезки (прюнинга) сетей позволяют представить экстрагированную информацию в логически прозрачном виде.

В работе [2] для построения прогнозной модели использовался аппарат статистической физики для восстановления системы дифференциальных уравнений, лежащих в основе рассматриваемого временного ряда ; соответственно, информация о ряде представлялась в виде последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В монографии [3] рассматривается аппарат символической динамики временных рядов, позволяющий в тех случаях, когда это возможно, описать динамику временного ряда с помощью порождающей его формальной грамматики. В рамках метода S SA (singular spectrum analysis) [8] представление информации осуществляется с помощью специальным образом конструируемой матрицы.

В работе [4] для описания временного ряда использовался специальный граф, авторы дали ему название хаотического; в работах [5; 6] для построения графов, характеризующих ряд, использовались методы рекуррентного анализа; в работе [7] для представления информации использовался специальный мультиграф, для построения мультиграфа применялся метод муравьиных колоний.

В настоящей работе для представления информации об исследуемом временном ряде использовался специальным образом построенный граф связей, а также распределение расстояний между z -векторами, построенными по рассматриваемому хаотическому временному ряду.

Метод предполагает, что переходные процессы в рассматриваемой динамической системе завершены, ряд отвечает движению системы в окре-

стности странного аттрактора; также предполагается выполнение условий теоремы Такенса [1].

Построение графа связей и гистограммы распределения расстояний. Рассматривается одномерный временной ряд x_i , $i=1..N$, нормированный на промежуток $[0,1]$. По наблюдениям рассматриваемого временного ряда строится ряд, составленный из z -векторов [1]: j -й z -вектор z_j^k (здесь k – число компонент вектора) составляется из элементов исходного ряда x_i с номерами i , где $i=j..j+k-1$.

По векторам z_j^k строится полный взвешенный граф $G_k(V,E)$ $k=3,..,N/2$, где V – множество вершин графа ($|V|=N-k$) (здесь вектору z_j^k ставится в соответствие вершина v_j); E – множество рёбер; вес дуги e_{st} определён как евклидово расстояние между векторами с номерами s и t .

Гистограмма распределения расстояний между z -векторами (весов рёбер). Для построения гистограммы распределения весов рёбер разобьём промежуток $[0,1]$ на промежутки длины $\epsilon=1/a$, где a – общее число указанных промежутков. В дальнейшем будет использоваться обозначение ϵ_m^k , где k – номер графа (т. е. число компонент z -вектора), m – номер промежутка на интервале $[0,1]$, $m=1..a$.

Число a , определяющее длины отрезков ϵ_m^k , определяется необходимостью детализации гистограммы.

Указанные представления были применены к ряду, полученному интегрированием системы Лоренца [1], а именно: ряд состоял из 10 000 наблюдений, полученных интегрированием указанной системы методом Рунге – Кутта 4-го порядка с шагом интегрирования 0.005; взята первая компонента решения. Полученная гистограмма (для случая $\epsilon^{15}=0,01$) представлена на рис 1.

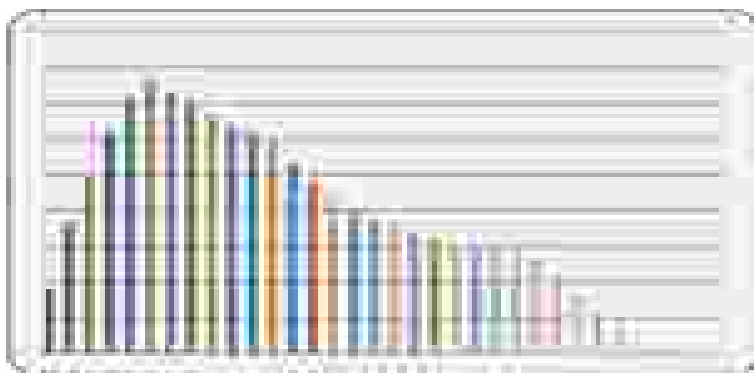
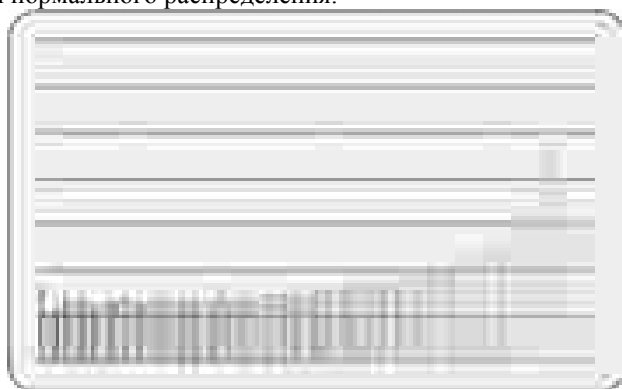


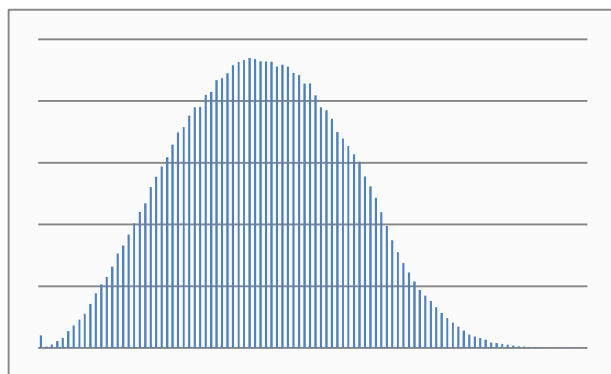
Рис. 1. Гистограмма распределения весов рёбер - $\epsilon^{15}=0,01$

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что в случае больших ε (выше 0,1) информация о структуре распределения теряется, в случае малых ε (ниже 0,001) можно получить детальное представление о распределении, но требуются существенные вычислительные затраты, в то же время промежуточные значения позволяют сохранить характеристики распределения и ограничиться приемлемыми вычислительными затратами (как видно из примера $\varepsilon=0,01$).

Следующий пример (рис. 2) демонстрирует распределения весов графа $G_3(V,E)$ для периодического ряда (рис. 2, а) и белого шума (2, б). Гистограмма, соответствующая белому шуму, имеет ярко выраженный характер плотности нормального распределения.



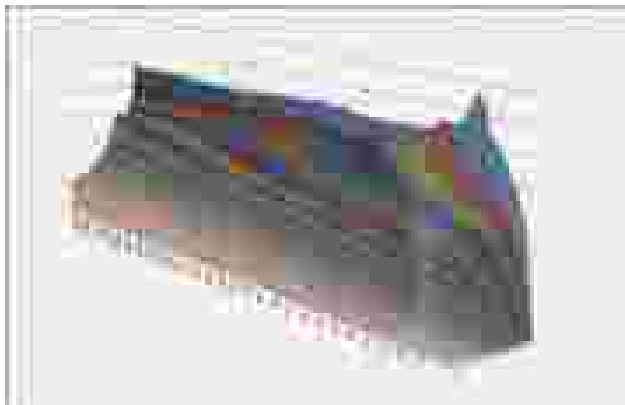
а



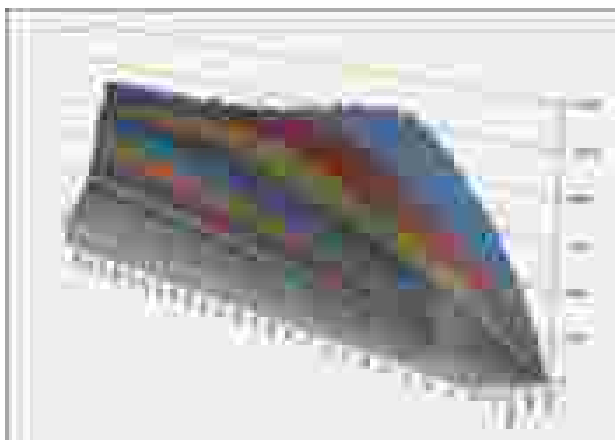
б

Рис. 2. Гистограммы $\varepsilon^3=0,01$; а – ряд $f(x_i)=\sin(2x_i)$, $i=1..10^4$; б – ряд 10^4 значений нормально распределённой случайной величины на интервале $[0,1]$

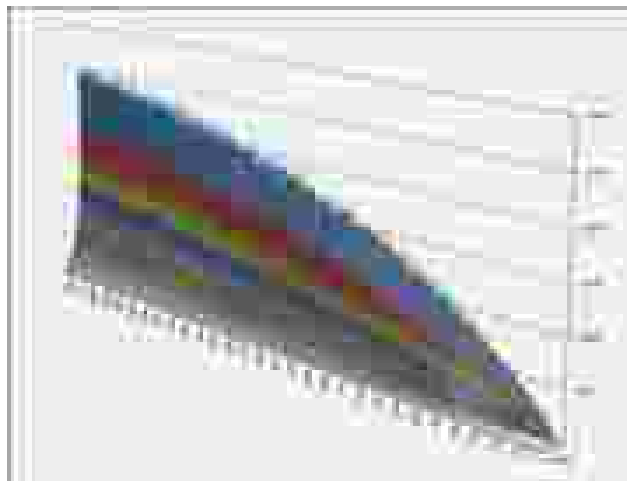
Далее рассмотрим для исследуемого динамического ряда все гистограммы из диапазона $k=3..N/2$. На рис. 3 приведены примеры полученного распределения для ряда Лоренца при различных шагах дискретизации.



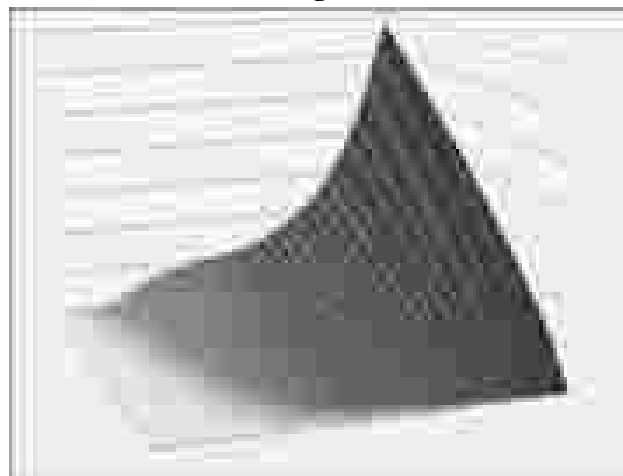
а



б



В



Г

Рис. 3. Распределения весов графов $G_k(V,E)$, построенных по ряду Лоренца для 500 первых интервалов $k=3, \dots, 33$, построенному с шагом: а) 0,001; б) 0,002; в) 0,01 и г) для $k=3, \dots, 103$ с шагом 0,002

Из рис. 3 следует, что можно выделить две области, в которые попадают большинство весов графов $G_k(V,E)$ (расстояний между z -векторами). Первая - это область, в которой число попаданий в промежуток быстро

растет с ростом номера промежутка, вторая – где число попаданий с ростом номера промежутка плавно уменьшается.

Для ряда Лоренца первая область ярко выражена и зависит от частоты дискретизации самого ряда. Величина данной области может служить оценкой при использовании алгоритмов типа «подсчёт ячеек при вычислении размерностей аттрактора». В частности, для ряда Лоренца этот промежуток составляет $[0,01, 0,05]$. Подчеркнём, что размеры данной области слабо зависят от k (размерности z -векторов).

Гистограмма, представленная на рис. 3, также позволяет сделать вывод о диапазоне размерностей z -векторов, для которых сохраняется структура распределения и число значений близких весов попадает в некоторый интервал δ . Для ряда Лоренца это набор $k=10, \dots, 100$. Это может служить косвенной оценкой для определения оптимальной размерности z -вектора для алгоритмов нелинейной динамики.

Аналогичные гистограммы получены по ряду, полученному интегрированием системы Ресселера (рис. 4), и ряду, построенному по системе уравнений, описывающей финансовую систему.

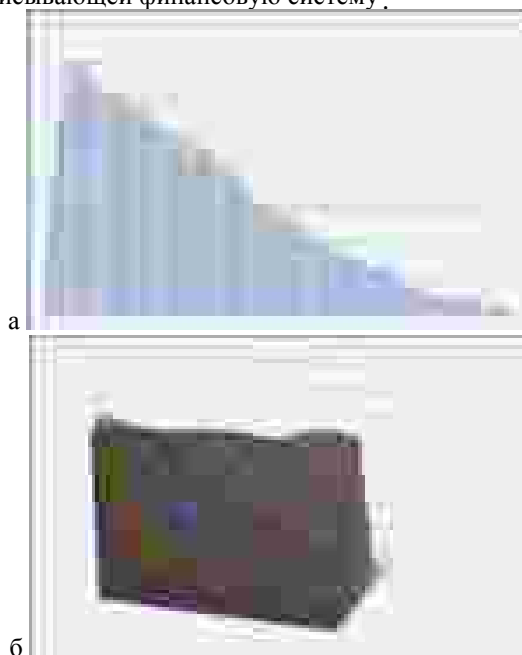


Рис.4. Распределения для ряда Ресселера, для 50 первых промежутков (шаг 0,02): а) $k=17$; б) $k=3, \dots, 33$

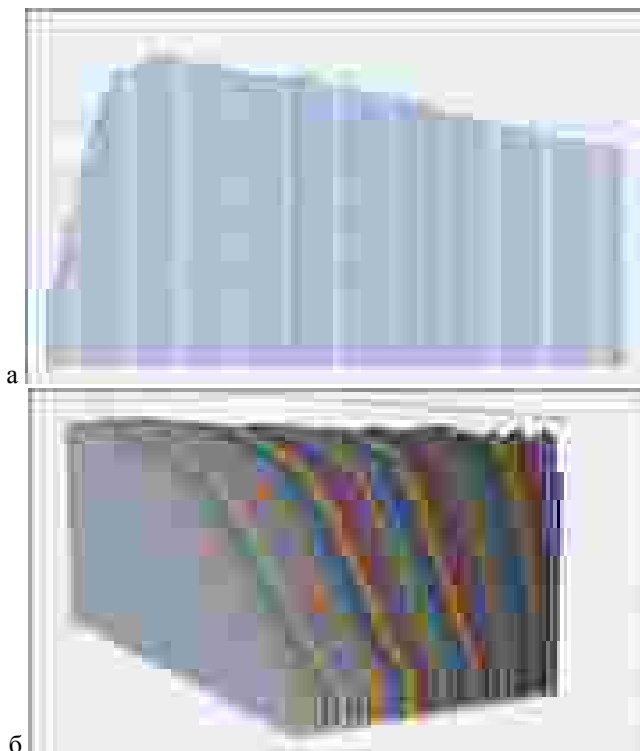


Рис. 5. Распределения для ряда ΓA , для 10^0 первых промежутков, (шаг 0,02):
а) $k=10$; б) $k=3, \dots, 33$

Как видно из рисунков, для приведенных рядов и соответствующих гистограмм также существует область роста и максимальных значений на гистограммах распределений, величина которой однозначно показывает величину ϵ для любой размерности z -вектора.

Выводы

1. Использование графа расстояний и гистограммы распределения расстояний между z -векторами позволяет представить информацию о ряде в удобном для визуализации виде.
2. Анализ гистограмм распределения расстояний позволяет выделить характерные размеры z -векторов и пороговые значения расстояний между ними, что является важной проблемой в задачах нелинейной динамики.

3. Анализ результатов при различных значениях параметра ε позволяет получать статистически обоснованные значения усредненных параметров для всего набора z -векторов.

Бibliографические ссылки

1. **Малинецкий Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
2. **Орлов Ю.Н.** Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков / Ю.Н. Орлов, К.П. Осминин 2011. Эдиториал УРСС. – 384 с.
3. **Badii R.** Complexity: Hierarchical structures and scaling in physics / R. Badii, A. Politi // Cambridge University Press, – 1997. – 332 p.
4. **Budroni M. A.** On chaotic graphs: A different approach for characterizing aperiodic dynamics / M. A. Budroni, E. Tiezzi, M. Rustici. – Physica A. – 2010, – Vol. 389, P. 3883–3891.
5. Geometric detection of coupling directions by means of inter-system recurrence networks/ Feldhoff J. H., Donner R. V., Donges J. F., Marwan N., Kurths J. // Physics Letters A, 376(46), 3504–3513 (2012)
6. Node-weighted measures for complex networks with spatially embedded, sampled, or differently sized nodes/ Heitzig J., Donges J. F., Zou Y., Marwan N., Kurths J. // The European Physical Journal B, 85(1), 38 (1–22) (2012)
7. **Vasilii A. Gromov** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization / Vasilii A. Gromov, Artem N. Shulga // Expert Systems with Applications, Volume 39, Issue 9, July 2012, Pages 8474–8478
8. **Elsner J. B.** (1996). Singular spectrum analysis: A new tool in time series analysis (1st ed.). / J. B. Elsner, A. A. Tsonis Springer.
9. A locally linear RBF network-based state-dependent AR model for nonlinear time series modeling / Gan M., Peng H., Peng X., Chen X., Inoussa G. // Information Sciences, 180, 2010. P. 4370–4383.
10. **Wong, W. K.** Adaptive neural network model for time series forecasting/ W. K. Wong, M. Xia, W. C. Chu // European Journal of Operational Research, 207, 2010. P. 807–816.

Надійшла до редколегії 01.08.2013 р.

Н.А. ⁴Маслова, Е.А. Маслова

Донецкий национальный технический университет

МЕТОДОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИИ

Особливістю викладеної методології є комплексний підхід , застосування методів інтелектуального аналізу , швидкодіючих алгоритмів, уніфікація інструментарію захисту складних систем та оцінка його ефективності.

Особенностью изложенной методологии является комплексный подход, применение методов интеллектуального анализа , быстродействующих алгоритмов, унификация инструментария защиты сложных систем и оценка эффективности.

Feature of the methodology set out a comprehensive approach, the application of mining techniques, high-speed algorithm, unification of security tools of complex systems and an evaluation of its effectiveness

Ключевые слова: интеллектуальный анализ , защита информации , комплексный подход.

Вступление. Интеллектуальный анализ данных используется в различных областях деятельности современного общества, помогая решать всевозможные задачи. Среди таких областей можно выделить страхование, банковское дело, маркетинг, анализ финансовых рисков, мониторинг оборудования и технологических процессов, телекоммуникации, компьютерную безопасность и т.д.

Наиболее сложными современными информационными структурами, ориентированными на крупные компании, являются корпоративные системы. Базы данных корпоративных систем содержат огромные объемы информации и обладают всеми признаками сложной системной организации. Для этих систем характерны использование множества компьютеров, специализация серверов и разветвленная система приема -передачи данных. Особенностью многих корпоративных систем, эксплуатируемых в настоящее время, является то, что системы безопасности изначально в их состав не входили и должны подбираться и приобретаться отдельно. Это

приводит к дополнительным затратам, требует разработки согласований при интеграции двух разнородных систем.

Особенностью систем защиты информации (СЗИ) в корпоративных системах является комбинация как минимум трех проблем: защита информации в компьютерных сетях; обеспечение безопасности баз данных; гарантия работоспособности узлов ввода, обработки и хранения информации [1]. Организовать бесперебойную работу сложной структуры, защитить ее от внешних и внутренних угроз в современном информационном пространстве традиционными методами весьма сложно. Одним из перспективных направлений является применение интеллектуальных алгоритмов, и в частности интеллектуального анализа данных (ИАД). Подтверждением применимости интеллектуальных систем в корпоративном управлении являются следующие примеры.

Microsoft SQL Server 2008 предоставляет интегрированную среду для создания моделей интеллектуального анализа данных и работы с ними. Эта среда называется Microsoft SQL Server Analysis Services и состоит из набора специальных инструментов (Business Intelligence Development Studio, SQL Server Management Studio, Microsoft SQL Server 2008 Integration Services, BI Development Studio). Среда включает алгоритмы интеллектуального анализа данных и средства, облегчающие разработку комплексного решения, примененного в рамках самых разных проектов. Microsoft заявляют о применении «технологии активной защиты», основанной на оценке поведения программ с точки зрения их потенциальной опасности. В частности, СЗИ корректируют средства защиты компьютера при изменении его статуса или блокируют его, если возникает подозрение в заражении вирусом или проникновении злоумышленника.

В апреле 2010 г. фирма IBM представила системы интеллектуального анализа и обработки транзакций, помогающие извлекать знания из больших массивов данных. Эти системы позволяют определять скрытые возможности и выполнять анализ систем на поведенческом уровне.

Компания ISS (Internet Security Systems) разработала модель адаптивного управления безопасностью, получившую название ANS (Adaptive Network Security). Адаптивный компонент ANS позволяет модифицировать процесс анализа защищенности, предоставляя актуальную информацию о вновь возникающих уязвимостях систем. Он также модифицирует компонент обнаружения атак, дополняя его последней информацией о подозрительных действиях и атаках.

Семейство продуктов SAFEsuite, разработанное ISS, в настоящий момент является наиболее мощным комплексом систем, включающим в себя

такие компоненты модели интеллектуального адаптивного управления безопасностью сети, как:

- систему анализа защищенности на уровне сети Internet Scanner ;
- системы анализа защищенности на уровне операционной системы и прикладного ПО System Scanner и Online Scanner;
- систему анализа защищенности на уровне СУБД Database Scanner;
- системы обнаружения атак RealSecure (Network Sensor, Appliance, OS Sensor, Server Sensor);
- систему поддержки принятия решения и прогнозирования в области безопасности SAFESuite Decisions.

Российская компания «Информзащита» сообщает о разработке концепции и реализации подсистемы адаптивной безопасности и противодействия внешним атакам ОАО «Вымпелком» . Примером интеллектуального компонента служит механизм обновления баз данных антивирусных программ, которые являются частным случаем систем обнаружения атак.

В Eset NOD32 используется патентованная технология ThreatSense, предназначенная для выявления возникающих угроз в реальном времени путём анализа выполняемых программ на наличие вредоносного кода, что позволяет предупреждать действия вредоносных программ. Наряду с использованием баз вирусов NOD32 применяет эвристические методы, что позволяет обнаруживать новые неизвестные вирусы и проводить их нейтрализацию. Большая часть кода антивируса написана на языке ассемблера, что дает возможность эффективно использовать системные ресурсы и обеспечивать высокую скорость проверки настроек по умолчанию.

Постановка задачи. Перечисленные технологии будут активно работать, если продукт приобретается в полной комплектации. А что делать тем предприятиям, которые имеют налаженную систему, эксплуатируемую длительный период, в которой накоплены значительные объемы данных и которые считают переход на новую платформу нерентабельным ? Им приходится применять совокупность методов защиты, не объединенных единой концепцией безопасности , и продолжать поиски лучших с точки зрения соотношения эффективность – затраты решений. В этом случае необходима методология применения интеллектуального анализа для обеспечения безопасного функционирования сложной распределенной структуры, единая методика, которая обеспечит защиту сетей, баз данных и систем обработки от постоянно совершенствующихся угроз.

Необходимость использования инструментария интеллектуального анализа данных в СЗИ корпоративных систем проистекает из разнородности структур информационных пространств этих систем; сложности полу-

чения аналитической информации из баз данных значительного объема; большого числа пользователей, одновременно работающих в системе; требований постоянного контроля функционирования и принятия обоснованных управленческих решений, зависящих от множества факторов.

Предпосылками использования ИАД является клиент _серверная технология, распределенные базы данных, наличие хранилищ информации, применение современных сетевых технологий и инструментария, используемого для сбора, анализа и визуализации данных. ИАД может работать с различными источниками и типами данных, помогает реализовать в системе защиты эволюционные свойства адаптации, самоорганизации, обучения, наследования и представления опыта экспертов информационной безопасности в виде доступной для анализа системы нечетких правил .

Сегодня администратору системной безопасности недостаточно иметь средства управления учетными записями и ресурсами либо механизмы защиты от какой _то конкретной выявленной угрозы. Ему необходим механизм прослеживания тенденций и прогнозирования событий в сфере безопасности. Поэтому решение проблем безопасности корпоративных информационных систем требует поиска эффективных механизмов, которые должны работать в режиме реального времени, обладать высокой чувствительностью к изменениям в информационной инфраструктуре, включать базу знаний, содержать элементы ИАД и позволять генерировать решение в соответствии с заданной целевой функцией в постоянно изменяющихся условиях внешней среды.

Ввиду вышесказанного разработка методологии применения интеллектуального анализа в защите информации актуальна и перспективна.

Целью работы является описание методологии построения интеллектуальной адаптивной системы защиты информации, основанной на применении принципов интеллектуального анализа данных.

В качестве математической модели, с помощью которой можно описать процессы, происходящие в интеллектуальной системе, можно принять следующие соотношения:

$$T \times X \times S \xrightarrow{a_1} M \times T; \quad T \times M \times X \xrightarrow{a_2} C \times T;$$

$$C \times T \times X \times S \xrightarrow{a_3} R \times T; \quad T \times X = \{A \times T\} X \times T + \{B \times T\} U \times T;$$

$$T \times Y = \{D \times T\} X \times T; \quad T \times R \times Y \xrightarrow{a_4} C \times T,$$

где T – множество моментов времени; $\{A\}$, $\{B\}$ и $\{D\}$ – матрицы параметров. X , S , M , R – это множества, характеризующие систему, среду, моти-

вации и цели соответственно. Интеллектуальные операторы преобразования обозначены a_1 - a_4 .

Современные компьютерные системы и сети находятся в состоянии постоянного развития и модификации, а объемы анализируемых данных в мире удваиваются ежегодно. Поэтому для обеспечения требуемого уровня защиты информации необходимо гибко и оперативно реагировать на изменяющиеся условия, обеспечивать надежную защиту с учетом постоянного изменения входных воздействий, предупреждать действия злоумышленников, т.е. иметь систему защиты, построенную с использованием элементов интеллектуальности, оперативно реагирующую на постоянно совершенствующиеся внешние угрозы.

Особенностью систем защиты информации в корпоративных системах является комбинация как минимум трех проблем: защита информации в компьютерных сетях; обеспечение безопасности баз данных; обеспечение безопасной работы систем автоматической обработки информации.

Наиболее актуальными угрозами информационной и сетевой безопасности корпоративных систем являются:

- угрозы, связанные с злонамеренной модификацией параметров функционирования системы внутренними нарушителями;
- угрозы несанкционированного доступа к информации с целью ознакомления, модификации или блокирования;
- угрозы, связанные с разграничением прав доступа и сложностью администрирования в распределенной системе;
- угрозы, связанные с вирусной атакой на рабочую станцию пользователя, локальную или корпоративную сеть предприятия;
- угрозы, связанные с передачей информации по каналам связи и работой в сети Internet.

К традиционным средствам обеспечения информационной безопасности (ИБ) корпоративных компьютерных сетей относят антивирусы, детекторы уязвимостей, межсетевые экраны и детекторы вторжений. Они решают отдельные задачи обеспечения ИБ корпоративной сети и, как правило, могут быть преодолены при командной работе квалифицированной группы нарушителей.

К часто используемым в компьютерных сетях интеллектуальным средствам относят базы знаний в составе экспертных систем, системы на основе байесовского метода, нечеткие логические системы, нейронные сети, эволюционные методы и гибридные интеллектуальные системы. Основными задачами, решаемыми интеллектуальными средствами обеспечения информационной безопасности компьютерной сети, являются классификация и кластеризация.

Нейронные сети используются для контроля трафика защищаемой локальной сети, поиска скрытых закономерностей в массивах первичных данных, своевременного выявления вторжений. Для предсказания значения целевого показателя используются наборы входных переменных, математических функций активации и весовых коэффициентов входных параметров. Выполняется итеративный обучающий цикл, нейронная сеть модифицирует весовые коэффициенты до тех пор, пока предсказываемый выходной параметр соответствует заданному значению. После обучения нейронная сеть становится моделью, используемой при прогнозировании.

Механизмы классификации применяются на первоначальном этапе, например, для систематизации способов защиты (нечеткие заключения) по вектору нечетких признаков угроз. Если достоверность классификации по известным угрозам меньше некоторого уровня, то при наличии признаков проведенной атаки классификация расширяется за счет введения новой градации в классификацию – решается задача кластеризации угроз. Ассоциации выявляют причинно-следственные связи и определяют вероятности (коэффициенты достоверности), позволяя делать соответствующие выводы.

Защита баз данных является одной из самых сложных задач систем защиты информации в корпоративных системах. Наиболее распространенными угрозами, характерными для баз данных, являются хищение, утрата, уничтожение, модификация данных и отказ от подлинности.

С интеллектуальными средствами обеспечения безопасности баз данных можно ознакомиться в [2]. Система информационной безопасности баз данных должна использовать средства и объекты применяемой системы управления базами данных (СУБД) и базы данных, набор правил и событий, характеризующих действия пользователей.

К средствам обеспечения безопасной работы систем обработки информации относятся механизмы предотвращения вторжений, авторизация, разграничение прав доступа, криптозащита (на носителях информации, в сетях, парольная защита), управление полномочиями пользователей. С целью контроля состояния системы используют базы сигнатур известных атак, а в качестве основных источников информации — системные журналы и файлы, анализируют содержимое сетевого трафика и файлов. Фиксация событий позволяет определить интересы каждого из пользователей, составить перечень регистрируемых событий.

В основном публикации о применении интеллектуальных систем для обеспечения безопасной работы систем обработки информации посвящены системам обнаружения атак, основанных на модели, предложенной

Деннингом. Модель содержит набор профилей для легальных пользователей, сравнивает текущие действия с соответствующим профилем, обновляет профиль и сообщает о любых обнаруженных аномалиях.

При традиционном подходе к построению системы защиты с применением инструментария ИАД используются искусственные нейронные сети, деревья решений и алгоритмы классификации, методы нечеткой кластеризации, ассоциативные правила, алгоритмы ограниченного перебора, кластерный анализ.

Недостатками традиционного подхода являются следующие:

- базы знаний формируются экспертами, т.е. принцип включения в них ситуаций субъективен;
- базы знаний периодически обновляются, упорядочиваются, систематизируются, что является трудоемкой и дорогостоящей процедурой;
- существует задержка во времени между появлением атаки и средств защиты (запаздывающее противодействие);
- атаки видоизменяются, совершенствуются, «маскируются» под стандартные процедуры, что требует модификации средств защиты.

Перейдем к описанию особенностей построения адаптивной саморазвивающейся системы. В табл. 1 приведен перечень основных источников данных.

Таблица 1

Источники анализируемых данных

Источник данных	Анализируемая информация
log-файлы работающих подсистем	Время, тип, сущность операций, соответствие пароля, сбои при установке связи с удаленной машиной, диагностика аварийных остановов
Сетевые трафики	Загрузка сетевого оборудования, использование каналов связи, сетевая активность
Справочники и журналы регистрации пользователей и событий	ID-коды пользователей, корректность паролей, выполняемые действия
Перечни функциональных задач	Цепочки взаимосвязанных вызовов задач и процессов
Информация о правах доступа	Соблюдение регламента обращений к ресурсам
Сведения о работе почтовой системы	Статистика, объемы и адреса рассылок и почтовых поступлений, тематика сообщений
Текстовые файлы	Тематическая направленность

Окончание табл.1

Книги Excel	Безопасность, наличие/отсутствие макросов
Таблицы с атрибутами исполняемых файлов	Типы файлов, даты изменения, авторы изменений и их права, контроль «неизменности», адреса эталонных модулей, контрольные суммы

Рабочие гипотезы:

- активность пользователей, целевые обращения к ресурсам системы и происходящие в системе процессы можно зафиксировать и построить их адекватную модель;
- событие (последовательность событий), соответствующее обобщенной модели атаки, действительно является атакой, и применение алгоритмов опережающего или одновременного противодействия является обоснованным;
- система может отследить работу программного обеспечения системы и, обнаружив повреждение, восстановить защиту, выполнить автоматическую докачку потерянных или поврежденных файлов.

Механизм применения ИАД для адаптивной саморазвивающейся СЗИ можно разбить на ряд этапов.

Этап 1. Составление перечня основных источников данных и выбор информации, подлежащей анализу.

Этап 2. Постановка задачи. Выполняется анализ требований, определяются проблемы, которые будут решаться, метрики, по которым выполняется оценка модели, а также определяются задачи для проекта интеллектуального анализа данных. Здесь же исследуются уровни конфиденциальности данных, потребности и права пользователей в отношении доступных данных, методы идентификации и аутентификации, традиционно используемые на предприятии.

При этом риски информационной безопасности системы могут быть определены как функция трех переменных:

- вероятности существования угроз (потенциально возможных событий, преднамеренных или случайных, которые могут оказать нежелательное воздействие на корпоративную систему или её части либо на информационные активы и, как следствие, на бизнес-процессы компании);
- вероятности существования уязвимостей (недостатков) в системе, из-за которых возможно нежелательное воздействие на нее;
- потенциальных убытков, которыми являются потенциально возможные прямые и косвенные финансовые потери, полученные вследствие реализации угроз и наличия уязвимостей.

Этап 3. Сортировка и очистка данных. Данные упорядочиваются, удаляются недопустимые и ошибочные комбинации, определяются первоисточники данных, строятся согласования, подбираются, например, столбцы, данные из которых в дальнейшем могут быть использованы при анализе. При этом данные могут находиться в разных подразделениях компании и храниться в различных форматах, что потребует применения механизмов интеграции систем.

Алгоритмы сортировки оцениваются по скорости выполнения и эффективности использования памяти. Если алгоритм сортировки использует только абстрактную операцию сравнения ключей, то его вычислительная сложность составит $O(n \log n)$ операций сравнения. При параллельном вычислении n ситуаций можно отсортировать за $O(\log^2 n)$ операций, а худшим вариантом являются алгоритмы, вычислительная сложность которых соответствует $O(n^2)$ операций. Требуемый объем памяти при реализации алгоритмов, как правило, составляет $O(\log n)$ ячеек.

Методы сортировки, рекомендуемые для использования в системе: сортировка вставками (может сортировать список по мере его получения), блочная сортировка (относится к классу быстрых алгоритмов с линейным временем исполнения $O(N)$).

Этап 4. Классификация регистрируемых событий, например угроз по вектору признаков атак и механизмов защиты по вектору угроз, выделение кластеров. При этом используются:

- средства, упрощающие разделение данных на набор данных для обучения и проверочный набор данных;
- сортировка и очистка данных (упорядочение, удаление недопустимых и ошибочных комбинаций, согласование данных);
- формирование матриц адаптируемых экспертных оценок и на их основе создание исходных систем нечетких правил и классификаторов;
- классификация регистрируемых событий (например, угроз по вектору признаков атак и механизмов защиты по вектору угроз, выделение кластеров, упрощающие разделение данных на обучающий и проверочный наборы);
- предварительный статистический анализ данных, получение контрольных метрик и закономерностей;
- создание структуры интеллектуального анализа данных.

В дальнейшем эти данные могут использоваться несколькими подсистемами интеллектуального анализа, например уже упоминаемыми ранее

подсистемой нерегламентированных действий пользователей или системой анализа вторжений, модели которых построены по одной структуре.

Результаты предыдущих пунктов представляются в виде систем нечетких правил, которые реализуются в виде специализированных структур; осуществляется подбор классификаторов, формирование признака структуры (Ps). Анализ данных и формирование признаков происходят постоянно и независимо от дальнейшей работы алгоритма. Изменение параметра Ps свидетельствует об изменении условий внешней среды (появление, например, нового вида атаки и необходимости выбора иной модели процесса либо обучения прежней на новом наборе данных).

Правила представляются в виде «если» – «то» и используются для прогнозирования. На основе частоты встречаемости логических закономерностей делается вывод о возможном событии. Например, цепочка MD—COPPA3—ARH—WWW—DEL ассоциируется с копированием информации из конфиденциального источника и передачей его по Internet-каналам.

Этап 5. Построение модели. На этом этапе модель представляет собой математическое выражение, контейнер, еще не наполненный данными. При этом, если данные изменяются, необходимо обновить структуру и модель интеллектуального анализа данных, изменить признак Ps.

Построение модели интеллектуального анализа данных является частью процесса, в который входят все задачи – от выбора и определения данных, создания модели до развертывания модели в рабочей среде. Для построения модели используют математические основы скрытых Марковских цепей, интеллектуальные мультиагентные технологии, аппарат нечетких множеств и семиотического моделирования и т.д. Однако главным процессом построения адаптивной системы с учетом требований и методологии защиты информации.

Перед развертыванием модели в рабочей среде проверяется эффективность её работы. При этом создается несколько моделей с различной конфигурацией, анализируются все модели, определяется, какая из них обеспечивает лучшие результаты.

Этап 6. Передача опыта адаптивной СЗИ (наследование) по обеспечению информационной безопасности.

Этап 7. Обучение классификаторов на обучающей выборке – подмножестве входных векторов, формирование информационных полей четких классификаторов.

Этап 8. Адаптация системы к реальным условиям.

Этап 9. Коррекция матриц экспертных оценок и систем нечетких правил по результатам адаптации.

При этом решение о расширении классификаций атак и механизмов защиты производится в соответствии с системой оценок достоверности нейтрализации угроз в разрезе отдельных механизмов защиты. Обосновать целесообразность использования механизма защиты в составе многоуровневой СЗИ можно, например, по матрице достоверности использования механизмов защиты для нейтрализации угроз [3]:

$$x_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n me_{ij}}, i = 1, \dots, m,$$

где me_{ij} – элементы матрицы достоверности «угрозы – защита».

Этап 10. Формулирование новых нечетких правил в случае расширения классификации, разработка спецификации на создание нового механизма защиты. Формирование комплекса оценок защищенности системы.

Этап 11. Анализ структуры классификаторов и выявление недостатков в системе защиты, оценка эффективности системы, включение в нее дополнительных механизмов защиты.

Этап 12. Контроль целостности данных и программных модулей, при необходимости – восстановление программной среды, изменение структуры системы информационной безопасности.

Порядок действий согласно методу проектирования адаптивных СЗИ может изменяться, но обязательными являются [3]:

- формирование многомерных матриц адаптируемых оценок и создание исходных систем нечетких правил и классификаторов (на нижних уровнях защиты — классификаторов «признаки атаки — угрозы», на верхних уровнях защиты — классификаторов «угрозы — механизмы защиты»);
- идентификация выявленной угрозы и при расширении поля угроз – кластеризация их с последующей адаптацией информационных полей путем обучения алгоритма ИАД;
- коррекция и расширение системы нечетких правил, вызванная изменением поля угроз;
- модификация систем нечетких правил и матриц экспертных оценок в результате обучения классификаторов уровней защиты;
- описание нового механизма защиты и формулировка спецификации на создание этого механизма;
- анализ защищенности ИТ-системы.

Одной из наиболее важных задач при обеспечении безопасности системы является сбалансированность уровня её защищенности и производи-

тельности. Применение средств защиты информации в корпоративной системе снижает ее производительность. Уровень защищенности и производительность находятся в обратно пропорциональной зависимости друг от друга. Поэтому построение интеллектуальных систем защиты невозможно без быстродействующих алгоритмов. Например, как было указано выше, одним из недостатков традиционного подхода является задержка во времени между появлением новой атаки и средств защиты от нее.

В теории СЗИ различают одновременное, опережающее и запаздывающее противодействия. Запаздывающее противодействие — когда реакция системы защиты начинается к моменту завершения угрозы или после нее. Одновременное противодействие — то, что начинает действовать с появлением угрозы. И, наконец, противодействие, носящее опережающий характер, — реакция системы защиты начинается до реализации угрозы.

Идеальным вариантом, конечно, является опережающее противодействие, однако для него необходимо не только наличие методик, позволяющих своевременно обнаружить возникновение угрозы безопасности системе, но и применение алгоритмов, способных выполнить анализ ситуации и своевременно ликвидировать результаты вторжения.

Существует несколько подходов к решению данной задачи, использующих такие алгоритмы, как деревья принятия решений, нейронные сети, логистическая регрессия, метод опорных векторов, дискриминантный анализ, ассоциативные правила. Одним из эффективных алгоритмов в этой области является так называемый наивный (упрощенный) алгоритм Байеса. С точки зрения скорости обучения, стабильности на различных данных и простоты реализации, алгоритм Байеса превосходит практически все известные алгоритмы. Обучение алгоритма производится путем определения относительных частот значений всех атрибутов входных данных при фиксированных значениях атрибутов класса.

Классификация осуществляется путем применения правила Байеса для вычисления условной вероятности каждого класса для вектора входных атрибутов. Входной вектор приписывается классу, условная вероятность которого при данном значении входных атрибутов максимальна. Алгоритм строится на предположении, что входные атрибуты условно (для каждого значения класса) независимы друг от друга [4].

Эффективность функционирования СЗИ зависит от множества действующих взаимосвязанных между собой элементов и, как правило, оценивается совокупностью критериев, находящихся в сложных конфликтных взаимоотношениях. Отсутствие общего подхода к решению задач данного класса закономерно влечет за собой многообразие различных не- взаимосвязанных методов оценки качества.

Простейшей схемой построения защиты, устраняющей 20–30% угроз, является схема *Безопасность = Традиционные средства защиты*.

Более надежной схемой построения защиты, по данным «Компьютер-Пресс», обеспечивающей 40–60% эффективности, является комплексный подход, наличие четко сформулированных и действующих политик безопасности, использование разветвленного перечня традиционных средств защиты, постоянный контроль ситуации и безотлагательное применение мер защиты. При этом схема защиты выглядит следующим образом:

$$\text{Безопасность} = \text{Политика безопасности} + \text{Традиционные средства защиты} + \text{Анализ риска} + \text{Реализация контрмер}.$$

И, наконец, модель адаптивного управления безопасностью тот же источник предлагает описывать формулой

$$\text{Безопасность} = \text{Анализ риска} + \text{Политика безопасности} + \text{Традиционные средства защиты} + \text{Реализация контрмер} + \text{Аудит} + \text{Мониторинг} + \text{Реагирование}.$$

Процесс определения эффективности систем защиты начинают с выбора и обоснования показателей (критериев) оценки эффективности системы защиты, а затем переходят к подбору или разработке методик расчета этих показателей. В [5] приведен перечень распространенных подходов к выбору критериев и оценке параметров, показатели эффективности систем защиты и методики их расчета.

Одним из способов оценки эффективности СЗИ является оптимизационный, или комбинаторный, подход. При этом решается задача оптимизации вида: максимизировать некую функцию при заданных ограничениях. В случае адаптивных систем указанную методику предлагается расширить параметром k , характеризующим этапы адаптивного процесса.

Введем следующие обозначения:

$U = \{u_j\}$ — множество угроз безопасности, $j=1, \dots, m$;

$A^k = \{a_i^k\}$ — множество механизмов безопасности, используемых на k -м этапе адаптивного процесса;

$X = \{x_i\}$ — множество требований безопасности, $i=1, \dots, n$; $k=0, \dots, R$;

$C^k = \{c_i^k\}$ — допустимые затраты на создание защиты (объем затрат на сопровождение системы с учетом реализации k -го этапа адаптивного процесса), причем c_i^1 — это затраты на начальную разработку, обучение и первоначальный запуск адаптивной системы;

$d^k(i, j)$ — эффективность нейтрализации i -м механизмом безопасности j -й угрозы на k -м этапе.

Для построения математической модели вводят переменную $p(i,j)$, равную 1, если j -я угроза устраняется с помощью i -го механизма, и нулю – в противном случае. Также вводится переменная q , такая, что

$$q(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{– если } i\text{-й механизм безобасности} \\ & \text{используется для устранения } j\text{-й угрозы,} \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Если информационные угрозы между собой не связаны, то требуется найти максимальный эффект от нейтрализации множества информационных угроз U с помощью задекларированных в системе средств защиты A при ограничениях на общий объем затрат C .

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d^k(i, j) p(i, j) \Rightarrow \max \quad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{i=1}^n c(i) * \text{sign} \sum_{uj \in U} p(i, j) \leq C, \quad p(i, j) \in (1,0), \quad j=1, \dots, m; \quad i=1, \dots, n).$$

Видоизменив постановку задачи и введя понятие функции принадлежности $\mu^A(x_i)$ в соответствии с [6], получим вариант оценки эффективности информационной системы защиты в случае нечётких показателей.

Пусть W – счётное множество показателей $W = \{w_i\}, i = 1, \dots, n$, n – количество показателей. Принадлежность к определённому уровню безопасности определяем на заданном промежутке, например $[0, T]$. Тогда множество значений V , определяющих выполнение требований безопасности, определяется как

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\mu^A(x_i)}{x_i},$$

где $\frac{\mu^A(x)}{x_i}$ – пара «функция принадлежности / элемент».

Разные состояния безопасности системы выделяются в виде подмножеств нечёткого множества, а вероятность взлома оцениваемой системы может соответствовать кардинальному числу (мощности) нечёткого множества. Интерпретация вышесказанного приведена в табл. 2.

Таблица 2

Соответствие требований безопасности состояниям системы безопасности

	Требование безопасности	Состояние безопасности системы
1	1	Абсолютно незащищённая
2	2	Недостаточно защищённая
3	3	Защищённая
4	4	Достаточно защищённая
5	5	Абсолютно защищённая

При таком подходе для оценки эффективности системы защиты необходимы данные о требованиях защищённости и данные о полноте выполнения этих требований. Подобный подход позволяет добиться постоянного мониторинга состояния информационной безопасности системы, выполнить прогноз возможности атак, провести изменение требований к переменным безопасности.

Выводы. Особенностью систем защиты информации в сложных современных информационных структурах, ориентированных на крупные компании, является комбинация как минимум трех проблем: защита информации в компьютерных сетях; обеспечение безопасности баз данных; гарантия работоспособности узлов ввода, обработки и хранения информации. Организовать бесперебойную работу сложной структуры, защитить ее от внешних и внутренних угроз традиционными методами сложно. Одним из перспективных направлений является применение интеллектуальных алгоритмов и, в частности, интеллектуального анализа данных.

Целью работы является описание методики построения интеллектуальной адаптивной системы защиты информации, основанной на применении принципов интеллектуального анализа данных.

Приведены основные источники данных, подлежащих анализу, выдвинуты рабочие гипотезы, сформулированы и охарактеризованы этапы построения интеллектуальной системы. Важным моментом является использование быстродействующих алгоритмов.

Принципы интеллектуального анализа могут использоваться как при защите блоков самой системы, так и при обеспечении целостности баз данных, анализе сетевого трафика распределенной сети с целью более раннего выявления сетевых атак, в процессе контроля приема и передачи данных и т.д. И именно комплексный подход, использование единой методики анализа и применение ее к данным, полученным из различных источников, составляют новизну разработки и делают методику удобной в реальном применении.

Библиографические ссылки

1. **Шаньгин В.Ф.** Защита информации в распределенных корпоративных сетях и системах. / В.Ф. Шаньгин, А.В. Соколов. – М., – 2002. – 134 с.
2. Базы данных: интеллектуальная обработка информации / В.В. Корнеев, А.Ф. Гареев, С.В. Васютин, В.В. Райх. – М.: Нолидж, 2000. – 352 с.
3. **Нестерук Ф.Г.** Основы организации адаптивных систем защиты информации; учеб. пособие / Ф.Г. Нестерук, Г.Ф. Нестерук, Л.Г. Осовецкий. – СПб.: СПбГУ ИТМО 2008. – 112 с.
4. **Гончаров М.** Модифицированный древовидный алгоритм Байеса для решения задач классификации / М. Гончаров // Spellabs. – 2007.
5. **Маслова Н.А.** Методы оценки эффективности систем защиты информационных систем / Н.А. Маслова // Штучний інтелект – Донецьк: ППШ. – 2008, – № 4 – С.253–264.
6. **Щербаков А.Ю.** Компьютерная безопасность. Теория и практика / А. Ю. Щербаков, – М.: Нолидж, 2001. – 352 с.

Надійшла до редколегії 04.12.2012 р.

О. М. ⁵Кісельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Зайченко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ЗВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ДО ЛІНІЙНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ

Розглядається динамічна задача оптимального розбиття множин із функціоналом, квадратичним за фазовою координатою. Запропонований підхід до її розв'язання базується на зведенні вихідної задачі до лінійної неперервної задачі оптимального розбиття множин. Характеристичні функції підмножин, що відповідають оптимальному розбиттю, вдається отримати в аналітичному вигляді.

Рассматривается динамическая задача оптимального разбиения множеств с функционалом, квадратичным относительно фазовой координаты. Предложенный подход к ее решению базируется на редукции исходной задачи к линейной непрерывной задаче оптимального разбиения множеств. Характеристические функции подмножеств, соответствующих оптимальному разбиению, удается получить в аналитическом виде

The dynamic optimal set partitioning problem with a quadratic functional is considered. The suggested approach to its solving is based on a reduction of the original problem to a linear continuous optimal set partitioning problem. The characteristic functions of subsets, corresponding to the optimal partition, are possible to obtain in an analytic form.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, динамічна задача, квадратичний функціонал.

Вступ. У роботі представлена математична модель нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множин (ОПМ), у якій функція стану системи змінюється так, що швидкість її зміни в кожній точці множини Ω , яка розглядається, залежить від приналежності цієї точки до певної підмножини Ω_i множини Ω . Задача полягає у знаходженні такого розбиття множини Ω на підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, яке забезпечує мінімаль-

не значення середньоквадратичного відхилення стану системи, що змінюється з часом, від бажаного. Наведений підхід до розв'язання таких задач базується на зведенні квадратичних задач розбиття до неперервних лінійних задач оптимального розбиття множин, які є добре вивченими [1]. Невідомими в задачі також можуть бути і деякі коефіцієнти диференціального оператора. Тоді задача зводиться до так званої лінійної задачі ОРМ із розміщенням «центрів» підмножин.

Робота є послідовним розвитком теорії неперервних задач оптимального розбиття множин [1] у напрямі досліджень властивостей динамічних задач розбиття [2–4], розробки й теоретичного обґрунтування методів їх розв'язування.

Постановка динамічної задачі ОРМ із лінійним диференціальним зв'язком і функціоналом, квадратичним відносно фазової змінної. Статичне розбиття. Нехай Ω – обмежена, вимірювана за Лебегом множина з E^n ; $P_N(\Omega)$ – клас всіляких розбиттів множини Ω на N підмножин:

$$P_N(\Omega) = \left\{ \omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\},$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега. Нехай $u_i(x, t; \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – задані дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega \times [0, T]$, вимірювальні за x при відповідних довільних векторах параметрів $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^K) \in \Xi_i$, $\Xi_i \subseteq R^K$, $i = \overline{1, N}$. Далі, використовуючи термінологію теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, вектори τ_i , $i = \overline{1, N}$ будемо називати «центрами підмножин», хоча дійсно інтерпретувати ці точки як центри відповідних підмножин, що складають розбиття множини Ω , можна лише в окремому випадку, коли $K = n$, $\Xi_i \equiv \Omega$, $i = \overline{1, N}$.

Введемо до розгляду клас функцій:

$$U = \left\{ u(\cdot; \bar{\omega}, \tau) : u(x, t; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, t; \tau_i), \text{ м. в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega), [0, T] \right\}$$

Введемо до розгляду функціонал

$$F(\gamma) = \iint_{\Omega_0}^T (\rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)) - \hat{\rho}(x, t))^2 dt dx, \quad (1)$$

де $\gamma = (\bar{\omega}, \tau, u(\cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot; \cdot))$, $T > 0$ – заданий момент часу;
 $u(\cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$, $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$, $\tau \in \Xi$, $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$, функція
 $\rho(x, \cdot) \in C^1([0, T])$ для кожного $x \in \Omega$ є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T] \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

причому

$$\iint\limits_{0 \leq t \leq T} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де $\alpha, b_1, \dots, b_N$ – задані, як правило, невід'ємні величини.

Під нелінійною динамічною задачею оптимального розбиття множини $\Omega \subseteq E^n$ на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні) з розміщенням «центрів підмножин» будемо розуміти таку задачу:

Задача. Потрібно знайти таке розбиття $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in P_N(\Omega) \in P_N(\Omega)$, набір з N K -вимірних параметрів $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Xi$, відповідне керування $u^*(\cdot; \cdot) \in U$ та фазову траєкторію $\rho^*(x, t)$ (задовольняючи умови (2), (3)), за яких функціонал (1) набував би мінімального значення.

Коротко задача записується в такий спосіб:

$$\begin{aligned} F(\bar{\omega}, \tau, u(\cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot; \cdot)) &\rightarrow \min_{(u(\cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot; \cdot)) \in \Phi}, \quad (4) \\ \Phi = \{ &(\bar{\omega}, \tau, u(\cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot; \cdot)): \bar{\omega} \in P_N(\Omega), \tau \in \Xi, u(\cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U; \\ &\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T] \\ &\rho(x, 0) = \rho_0(x); \iint\limits_{0 \leq t \leq T} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \} \end{aligned}$$

Оптимальним розв'язком задачі (4) будемо називати допустиму четвірку $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot; \cdot), \rho^*(\cdot; \cdot))$, що доставляє мінімальне значення функціоналу F .

Зауваження 1. Кожне допустиме розбиття $\overline{\omega} \in P_N(\Omega)$ і вектор $\tau \in \Xi$ визначають функцію $u(\cdot; \overline{\omega}, \tau) \in U$ таку, що відповідна задача Коші (2) має єдиний розв'язок $\rho(x, t)$ у такому сенсі: $\forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$, функція $\rho(x, t)$ – неперервна за часовою змінною $t \in [0, T]$ і задовольняє рівність

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t (\alpha \rho(x, t) + u_i(x, t; \tau_i)) dt, \quad t \in [0, T]$$

Зауваження 2. Задачі (4) можна надати таку економічну інтерпретацію. Нехай розглядається співіснування виробників подібних за ціною та якістю товарів, споживачами яких є певний прошарок суспільства з приблизно однаковим рівнем доходів, які мешкають в однакових умовах та мають однакову шкалу потреб. Виробники товарів іншої якості співіснують в іншій ринковій ніші. Спільним інтересом для фірм «виробників товару є утримання попиту $\rho(x, t)$ на даний товар на певному рівні $\xi(x, t)$, який можливо лише дещо збільшувати або зменшувати з часом, зберігаючи при цьому головну тенденцію коливання в межах оптимального для виробників попиту, за умов урахування граничного рівня споживання даного товару та виробничих потужностей підприємства. Вважається, що динаміка попиту прямо пропорційно залежить від кількості населення, що належить до вказаного прошарку суспільства. Крім того, підвищення попиту на продукцію може здійснюватися за рахунок проведення суб'єктами виробництва певних дій, що пожвавлюють попит, наприклад незначного скорочення вартості товару за рахунок модернізації виробництва, рекламних акцій тощо. Сила впливу таких дій i -го виробника описується функцією $u_i(x, t; \tau_i), i = \overline{1, N}$. Оскільки виробники співіснують, немає сенсу кожному з них «вкладати кошти» в кожного споживача. Потрібно лише розподілити споживачів на зони впливу виробників з урахуванням їхніх спільних інтересів. Інтегральні обмеження враховують потужності самих виробників.

Для коректності поставленої задачі мають бути накладені деякі обмеження на праві частини нерівностей (3), за яких задача завжди мала б розв'язок. Ці умови отримаємо в процесі розробки і обґрунтування методу розв'язання задачі (1) – (3).

Обґрунтування методу розв'язання задачі. Згідно з теорією перших задач оптимального розбиття множин [1] для розв'язання задачі (4) спочатку вводяться характеристичні функції $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ і від задачі (4) здійснюється перехід до задачі нескінченновимірної оптимізації з булевими змінними: знайти вектор функцію $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$ і набір векторів $\tau \in \Xi$, що мінімізують функціонал

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \iint_{\Omega_0} (\rho(x, t; \lambda(x), \tau) - \hat{\rho}(x, t))^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}}, \quad (4)$$

де

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1; \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N} \text{ м. в. для } x \in \Omega \right\},$$

а функція $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ задовольняє умовам

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, \tau_j, t) \lambda_j(x), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\iint_{0 \Omega}^T \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Розв'язок задачі Коші (5) для кожного $x \in \Omega$ легко отримати в аналітичному вигляді:

$$\rho(x, t; \lambda(x), \tau) = \rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \tau_j, \theta) d\theta \right) \lambda_j(x), \quad x \in \Omega, t \in [0, T]. \quad (7)$$

Ураховуючі вираз (7), задачу (4) – (6) можна переписати в такий спосіб:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \iint_{\Omega_0}^T \left(\sum_{i=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta \right) \lambda_i(x) - \bar{\rho}(x, t) \right)^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (8)$$

за умов

$$\iint_{\Omega_0}^T \left(\rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \tau_j, \theta) d\theta \right) \lambda_j(x) \right) \lambda_i(x) dt dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N},$$

(9)

де $\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_0(x)$.

Скористаємося властивістю множини Λ :

$$\lambda_i^2(x) = \lambda_i(x), \quad \lambda_i(x) \lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i(x), & i = j \end{cases}, \quad \forall x \in \Omega, i, j = \overline{1, N}$$

для того, щоб спростити і функціонал (8), і співвідношення (9). Задача (8)–(9) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} I_1(\lambda(\cdot), \tau) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left[\int_0^T \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta \right)^2 - 2\bar{\rho}(x, t) \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta \right] dt \lambda_i(x) dx + \\ & + \iint_{\Omega_0}^T (\bar{\rho}(x, t))^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \end{aligned}$$

(10)

за умов

$$\int_{\Omega} \left(T \rho_0(x) + \iint_{00}^{Tt} e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

(11)

Отже, від динамічної задачі оптимального розбиття множини з квадратичним функціоналом (1) – (3) вдається перейти до еквівалентної лінійної задачі ОРМ з обмеженнями – нерівностями. Отримана задача (10) – (11) є неперервною задачею оптимального розбиття з обмеженнями і розміщенням центрів підмножин. Для оптимального розв’язку задачі (10) – (11) неважко отримати такі розрахункові формули:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=\overline{1, N}} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках, } i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

(12)

де

$$B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \xi_i TP_0(x) + \int_0^T \varphi_i(x, t; \tau_i^*) (\varphi_i(x, t; \tau_i^*) - 2\bar{p}(x, t) + \xi_i) dt,$$

$$\varphi_i(x, t; \tau_i) = \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta, i = \overline{1, N},$$

а за $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) \rightarrow \max_{\xi \in I}. \quad (13)$$

Нелінійну задачу (4) – (6) можна також звести до лінійної неперервної задачі ОРМ, базуючись на такому представленні задачі Коші (5):

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t; \lambda(x), \tau), \quad (14)$$

де функція $\rho_1(x, \cdot)$ для кожного $x \in \Omega$ є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(x, t) &= \alpha \rho_1(x, t), \quad t \in [0, T] \\ \rho_1(x, t) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (15)$$

а функція $\rho_2(x, \cdot; \lambda(x), \tau)$ – задовольняє задачі Коші:

$$\dot{\rho}_2(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j(x, \tau_j, t) \lambda_j(x), \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

$$\rho_2(x, t) = 0.$$

Задача (15) розв'язується однозначно:

$$\rho_1(x, t) = \rho_0(x) e^{\alpha t}, \quad x \in \Omega, t \in [0, T].$$

Розв'язок задачі (16) записується в такий спосіб:

$$\rho_2(x, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x, t; \tau_j) \lambda_j(x), \quad x \in \Omega, t \in [0, T]$$

$$\text{де } \varphi_j(x, t; \tau_j) = \int_0^t u_j(x, \tau_j, \sigma) d\sigma, \quad j = \overline{1, N}.$$

Задача (4) – (6) з урахуванням представлення (14) і властивості множини Λ записується в такий спосіб:

$$I_2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (17)$$

за умов

$$\int_{\Omega} \left(A_0(x) + \int_0^T \varphi_i(x, t; \tau_i) dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (18)$$

де

$$I_2(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^T [\varphi_i(x, t; \tau_i)^2 - 2\bar{\rho}(x, t)\varphi_i(x, t; \tau_i)] \lambda_i(x) dx + \int_{\Omega_0}^T (\bar{\sigma}(x, t))^2 dt dx, \quad (19)$$

$$\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_1(x, t), \quad A_0(x) = \rho_0(x) \int_0^T e^{\alpha_t} dt, \quad x \in \Omega.$$

Далі, користуючись методикою розв'язування неперервних лінійних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями у формі нерівностей і з розташуванням центрів підмножин, можна отримати такі розрахункові формули для характеристичних функцій підмножин, що складають оптимальне розбиття в задачі (1) – (3):

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \int_0^T [\varphi_i(x, t; \tau_i^*)^2 - (2\bar{\rho}(x, t) - \xi_i^*) \varphi_i(x, t; \tau_i^*)] dt + \xi_i^* A_0(x) = \\ & = \min_{k=1, N} \int_0^T [\varphi_k(x, t; \tau_k^*)^2 - (2\bar{\rho}(x, t) - \xi_k^*) \varphi_k(x, t; \tau_k^*)] dt + \xi_k^* A_0(x), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (20)$$

де за $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$\chi(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Xi}, \quad (21)$$

де

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \left[\min_{k=1, N} \int_0^T [\varphi_k(x, t; \tau_k^*)^2 - (2\bar{\rho}(x, t) - \xi_k^*) \varphi_k(x, t; \tau_k^*)] dt + \xi_k^* A_0(x) \right] dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right)$$

Має місце таке твердження.

Твердження. Якщо константи $b_1, \dots, b_N$ задовольняють співвідношенню

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} e^{\alpha(t-\theta)} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx, \quad (22)$$

де $\bar{u}(x, t) = \max_{i=1, N} \max_{\tau_i \in \Xi_i} u_i(x, \tau_i, t) \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T]$, то множина допустимих процесів задачі (1) – (3) не є порожньою.

Оцінку (22) можна записати, використовуючи розклад (14), і в такий спосіб:

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) \rho_0(x) + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx.$$

Для розв'язання задачі максимізації негладкої увігнутої функції (21) на множині $\xi \in \Gamma$ може бути застосований будь-який відомий метод, наприклад методи типу субградієнтних, еліпсоїдів та ін. Далі наведений чисельний алгоритм розв'язання задачі ОРМ, у якому для розв'язання задачі (21) використовується метод узагальненого градієнтного підйому з розтягуванням простору в напрямі різниці двох послідовних градієнтів – Γ -алгоритм Н.З. Шора. При цьому від задачі (21) відбувається перехід до задачі безумовної максимізації за допомогою введення в цільову функцію негладкої штрафної функції множини Γ :

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \quad (23)$$

де S – достатньо велике додатне число (значно більше за максимальний із множників Лагранжа), а функція $\chi_1(\tau, \xi)$ визначається в такий спосіб:

$$\chi_1(\tau, \xi) = \int \left[\min_{k=1, N} \int_0^T [\rho_k(x, t; \tau_k^*)^2 - (2\bar{\rho}(x, t) - \xi_k^*) \rho_k(x, t; \tau_k^*)] dt + \xi_k^* A_0(x) \right] dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j.$$

Про можливість переходу від задачі (21) до задачі (23) йдеться в [5].

Висновки. Отже, у роботі описаний підхід до розв'язання динамічної задачі ОРМ із функціоналом, нелінійним за фазовою координатою, який базується на зведенні вихідної нелінійної задачі оптимального розбиття множини до лінійної неперервної задачі ОРМ, що, у свою чергу, може бути зведена через функціонал Лагранжа до скінченновимірної задачі ма-

ксимізації (максиміну) певної негладкої функції. При цьому характеристичні функції, що відповідають оптимальному розбиттю, вдається отримати в аналітичному вигляді. Слід наголосити, що перехід від задачі ОРМ із квадратичним функціоналом до лінійної неперервної задачі ОРМ вдається здійснити лише в тих випадках, коли розв'язок задачі Коші (2) може бути отриманий в аналітичному вигляді. Достатньо в правій частині диференціального рівняння з'явиться нелінійному доданку – і описаний підхід, заснований на зведенні вихідної задачі до лінійної неперервної задачі ОРМ, не спрацює.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.
2. **Киселева Е.М.** О решении и свойствах простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств / О.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 3. – С. 102–112.
3. **Коряшкіна Л.С.** Нові підходи до розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин: зб. наук. пр. / Л.С. Коряшкіна, Т. О. Шевченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д., 2009. – С. 220–231.
4. **Кісельова О.М.** Про одну задачу оптимального розбиття множини з недиференційовним функціоналом: зб. наук. пр. / О. М. Кісельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Зайченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання, 2009. – С. 165–173.
5. **Васильєв Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Надійшла до редколегії 25.06.2013 р.

О. М. ⁶Кісельова, Л. І. Лозовська

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ МНОЖИНИ

Обґрунтована актуальність та значимість неперервних задач про оптимальне k -кратне c -кульове покриття компактної множини Ω з E_n . Побудовані математичні моделі основних типів задач про оптимальне k -кратне покриття множини.

Обоснованы актуальность и значимость непрерывных задач об оптимальном k -кратном c -шаровом покрытии компактного множества Ω из E_n . Построены математические модели основных типов задач об оптимальном k -кратном покрытии множества.

Topicality and significance of the continuous optimal k -fold c -sphere covering problems of compact sets Ω of E_n is substantiated. Mathematical models for the principal types of the optimal k -fold covering problems are constructed.

Ключові слова : діаграма Діріхле – Вороного, розбиття множини, оптимальне покриття множини, багатократне покриття, радіус покриття.

Вступ. Робота присвячена розгляду та формулюванню деяких задач багатократного покриття множини. Численні технічні та економічні задачі зводяться до задач оптимального покриття заданої області зонами обслуговування (кулями). Прикладами можуть бути задачі розміщення різноманітних станцій технічного обслуговування, станцій стільникового зв'язку, безпроводного Інтернету, що є задачами оптимального покриття обмеженої області. Розв'язанню таких задач присвячена велика кількість публікацій. Огляд задач та аналіз методів їх розв'язання було проведено авторами даної роботи [1; 2]. Для неперервної задачі про оптимальне c -кульове покриття компактної множини Ω з E_n заданою кількістю куль з мінімальним радіусом та задачі про покриття множини мінімальною кількістю куль заданих радіусів запропоновані та обґрунтовані алгоритми, що базуються на використанні теорії оптимального розбиття множин та g -алгоритм Шора. Розроблені авторами статті алгоритми одночасно знаходять всі центри оптимального покриття; їх можна використовувати для покриття множин із n -вимірною евклідового простору довільної розмірності; їх реалізація

не пов'язана з геометричними особливостями множини, що покривається; можуть бути використані для покриття як випуклих, так і невивуклих множин, для розв'язання дискретних задач оптимального покриття, а також для розв'язання задачі покриття множини мінімальною кількістю куль заданих радіусів; можуть бути використані для покриття множин, точки яких мають різну вагу.

Розроблені алгоритми дозволяють отримати результати для довільної кількості куль покриття. Але, як встановлено в результаті обчислювальних експериментів, зі збільшенням кількості куль покриття може збільшуватися й відносна похибка, з якою отримані розв'язки.

Задачі багатократного покриття є не менш цікавими й важливими. Так, наприклад, навігаційні системи GPS, Глонасс використовують багатократне покриття зон обслуговування. У даній роботі запропоновано огляд можливих варіантів неперервних задач багатократного оптимального покриття множини та шляхів

Постановка задачі. Необхідно провести аналіз та відібрати практичні задачі, що зводяться до неперервних задач багатократного оптимального C -кульового покриття обмеженої множини з E_n , а також побудувати математичні моделі для основних типів задач про багатократне покриття множин.

Результати. Розглянемо як конкретний приклад багатократною задачі оптимального покриття таку задачу. Припустимо, необхідно розташувати відеокамери протипожежної системи спостереження за лісовими масивами. Дистанційно керована або працююча в автоматичному режимі поворотна відеокамера може обертатися на 360 градусів та передавати інформацію оператору в режимі реального часу. У цьому випадку можна вважати, що зоною спостереження окремої відеокамери є коло. Для надійності системи та точного визначення координат можливих осередків загоряння необхідно покривати такими колами вказану область дворазово.

При розміщенні логістичних, а також розподільних центрів зоною обслуговування буде «коло», в якому відстань від центру до споживача вимірюється по існуючих дорогах, а не як довжина відрізка, що поєднує їх. При цьому відстань можна оцінювати, використовуючи певну метрику на заданій області. До цього класу згаданих задач можна віднести задачу розміщення центрів служб надзвичайних ситуацій, що користуються існуючими дорогами.

Також такою являється, наприклад, задача визначення місцезнаходження пунктів зберігання хімічних реагентів для нафто- й газопромислів. Важливо розмістити ці пункти таким чином, аби швидше доставляти реа-

генти в необхідну точку. При цьому, якщо в найближчому пункті необхідний реагент буде відсутній, то бажано, щоб інший пункт знаходився не дуже далеко. У результаті маємо задачу двократного покриття заданої множини зонами обслуговування окремими центрами зберігання реагентів. Як двократну задачу оптимального покриття множини можна також розглядати задачу розміщення місцезнаходження банкоматів. Їх бажано розмістити так, щоб споживач міг дістатися до банкомату якнайшвидше. При цьому, якщо в найближчому банкоматі немає в наявності необхідної суми або він не працює, то бажано, щоб інший банкомат знаходився не дуже далеко. У результаті маємо задачу двократного покриття заданої множини зонами обслуговування окремими банкоматами.

При плануванні розміщення станцій стільникового зв'язку стандарту GSM передбачається, що кожен абонент має знаходитися в зоні обслуговування щонайменше трьох базових станцій; хоча він і обслуговується найближчою до нього, але у випадку її перевантаженості його обслуговування передається іншій, менш завантаженій станції. Таким чином, маємо трикратну задачу оптимально покриття.

При визначенні відстаней можна використовувати готові матриці відстаней, геоінформаційні системи або функції оцінки відстаней. Матриці відстаней та геоінформаційні системи складно використовувати для якісного аналізу областей обслуговування окремих станцій – діаграм Діріхле – Вороного. Тому доцільніше для неперервних задач багатократного покриття множини використовувати функції для оцінки відстаней, які є деякою метрикою в просторі з E_n , якому належить множина. У літературі використовуються різні метрики: евклідова, метрика Чебишева, зважена $1p$ -метрика, зважена $1p$ -метрика з можливим поворотом осей координат, манхеттенська, московська та ряд інших метрик. Вибір метрики залежить від властивостей множини та від існуючих зв'язків центру з клієнтами.

Оптимізації розміщення різноманітних станцій обслуговування присвячені спеціальні монографії та велика кількість наукових статей, у яких як досліджуються загальні питання, так і розв'язуються задачі для вибраних конкретних множин. Наприклад, у ряді робіт розглядається оптимізація розміщення станцій для окремих країн [3; 4; 5], і навіть їхніх окремих частин [6].

Будемо використовувати такі поняття.

Нехай Ω – обмежена, замкнена множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Будемо називати s -кулею радіуса R із центром у точці τ_i з E_n множину вигляду $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$, де $c(x, \tau_i)$ – деяка квазиметрика [7].

Будемо говорити, що сукупність центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ задає k -кратне кульове покриття множини Ω із радіусом R , якщо

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R),$$

та для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcup_{j=1}^k B(\tau_{i_j}, R)$,

$$i_j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Зрозуміло, що радіус R покриття множини Ω , що задається центрами $\tau_1, \dots, \tau_N$ (вектором τ^N), має вигляд

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (1)$$

при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcup_{j=1}^k B(\tau_{i_j}, R)$, $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$,

де $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_{nn} \times \dots \times E_{nn}$. $E = E_n^N$ (або, в окремому випадку, $E = E_n^N$).

$$\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega \times \dots \times \Omega = \Omega^N.$$

Зрозуміло, що k -кратне покриття множини Ω , задане вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, із радіусом $R(\tau^N)$, який визначається за формулою (1), є мінімальним k -кратним кульовим покриттям, що генерується вектором τ^N , тобто ніякі c -кулі меншого радіуса із центрами в $\tau_1, \dots, \tau_N$ k -кратно не покривають Ω .

k -кратне покриття мінімального радіуса будемо називати *оптимальним*.

Таким чином, для визначення оптимального k -кратного покриття потрібно знайти величину

$$R(\tau^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i),$$

що називається *радіусом оптимального покриття*, і вектор $\tau^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, при яких досягається значення, що дорівнює нижній грані

та при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcup_{j=1}^k B(\tau_{i_j}, R)$,
 $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Розглянемо деякі постановки неперервних задач про k -кратне s -кульове покриття, виходячи з [1].

Задача 1 із фіксованими центрами.

Для заданої системи центрів $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ з E_n^N (або з Ω^N) знайти мінімальне k -кратне s -кульове покриття множини Ω , тобто знайти величину (1).

Розглянемо тепер більш складну задачу про оптимальне k -кратне покриття, в якій на відміну від задачі 1 центри $\tau_1, \dots, \tau_N$ не фіксовані, а повинні розміститися в множині Ω так, щоб отримати k -кратне s -кульове покриття мінімального радіуса (тобто оптимальне покриття).

Задача 2 про оптимальне обмежене k -кратне s -кульове покриття.

При заданій кількості N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ знайти їх розміщення в області Ω , що здійснює k -кратне покриття множини Ω з мінімальним радіусом, тобто знайти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (2)$$

і вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subseteq E_n^N$, при яких у (2) досягається значення, що дорівнює нижній грані та при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcup_{j=1}^k B(\tau_{i_j}, R)$, $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Сформулюємо задачу про оптимальне k -кратне покриття, що відрізняється від задачі 2 тим, що центри $\tau_1, \dots, \tau_N$ можуть розміщуватися не лише в множині Ω , але і в усьому просторі E_n .

Задача 3 про оптимальне k -кратне s -кульове покриття.

При заданій кількості N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ знайти їх розміщення в E_n , що здійснює k -кратне покриття множини Ω з мінімальним радіусом, тобто знайти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau \in E_n^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3)$$

і вектор $\tau^N_* = (\tau^*_1, \dots, \tau^*_N) \in E^N_n$, при яких у (3) досягається значення, що дорівнює нижній грані та при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcup_{j=1}^k B(\tau_{i_j}, R), i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Сформулюємо також задачу про k -кратне покриття, що відрізняється від перших трьох задач тим, що кількість N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ наперед не задано.

Задача 4 про знаходження мінімальної за кількістю сукупності центрів k -кратного покриття.

При заданому радіусі покриття R знайти мінімальну за кількістю N сукупність центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$, що генерує k -кратне покриття компактної множини Ω .

Аналіз отриманих результатів. Можна сформулювати такі задачі дослідження задач багатократного покриття множини:

- побудувати та уточнити математичні моделі неперервних задач багатократного покриття множини;
- з'ясувати властивості математичних моделей неперервних задач багатократного покриття множини, умови існування їх розв'язку;
- обґрунтувати методи розв'язання задач багатократного покриття множини, що базуються на теорії оптимального розбиття множин;
- розробити алгоритми розв'язання задач оптимізації кількості куль або (і) їх розміщення для k -кратного ($k > 1$) покриття заданих множин, що базуються на теорії оптимального розбиття множини;
- розробити алгоритми розв'язання задач оптимізації радіуса куль, при відомій їх кількості, та їх розміщення для k -кратного ($k > 1$) покриття заданих множин, що базуються на теорії оптимального розбиття множини;
- отримати оцінки точності розроблених алгоритмів;
- розробити рекомендації щодо вибору функцій метрики, підбору її параметрів для окремих типів станцій обслуговування. дослідити властивості множин Діріхле – Вороного для вибраної метрики в задачах k -кратного покриття;
- розробити програмний комплекс для розв'язання задач багатократного покриття, у тому числі здійснити підбір функції метрики та її параметрів для заданих множин із використанням електронних карт або матриць відстаней.

Висновки. Обґрунтовано актуальність та значимість неперервних задач про оптимальне k -кратне s -кульове покриття компактної множини Ω з E_n . Побудовано математичні моделі основних типів задач про оптималь-

не k -кратне покриття множини, сформульовано задачі їх подальшого дослідження, обґрунтування методів розв'язання задач багатократного покриття множини, що базуються на теорії оптимального розбиття множин та розробки відповідних алгоритмів.

Бібліографічні посилання

1. **Киселёва Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монограф. / Е.М. Киселёва, Н.З. Шор / – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.
2. **Киселёва Е.М.** Решение непрерывных задач оптимального покрытия множества шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств : междунар. науч.-теорет. журн. / Е.М. Киселёва, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – К. 2009, – №3. – С. 98–118.
3. **Beasley J. E.** Enhancing an algorithm for set covering problems / J.E. Beasley, K. Jornston // Europ. J. Oper. Res. – 1992. – Vol. 58. – P. 293-300.
4. **Farahani R. Z.** Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer-Verlag. / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar (eds.). – Berlin; Heidelberg. – 2009. – 530 p.
5. **Galinier P.** Solution techniques for the large set covering problem / P. Galinier, A. Hezti // Discrete applied Mathematics. – 2007. – Vol. 155. – Issue 3. – P. 312–326.
6. **Chen L.** Solving a minimum-power covering problem with overlap constraint for cellular network design / L. Chen, D. Yuan // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 203. – P. 714–723.
7. **Сухарев А.Г.** Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа / А.Г. Сухарев. – М.: Наука, 1989. – 300 с.

Надійшла до редколегії 01.07.2013 р.

О. М. ⁷Кісельова*, В. О. Стросва **

**Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

***Дніпродзержинський державний технічний університет*

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОПРОДУКТОВИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Розроблено програмний продукт реалізації алгоритмів розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини Ω з n -вимірною евклідовою простору на її неперетинні підмножини при обмеженнях, який дозволяє розв'язувати різні класи задач із різних предметних областей, що зводяться у математичній постановці до розглянутих.

Разработан программный продукт реализации алгоритмов решения нелинейных непрерывных многопродуктовых задач оптимального разбиения множества Ω из n -мерного евклидова пространства на его непересекающиеся подмножества при ограничениях, применяемый для решения разных классов задач из различных предметных областей, сводящихся в математической постановке к рассмотренным.

Created software that implements algorithms of the decision of a non-linear continuous multigrocery problem of a set Ω from n -dimensional Euclidean space on its not crossed subsets with its limitations. software solves the different classes of problems, including a simpler and tasks from different areas.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача, задачі розміщення.

Вступ. Велика кількість актуальних теоретичних та прикладних оптимізаційних задач може бути зведена в математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ). Розробці методів розв'язання задач оптимального розбиття, що належать до маловивченого класу задач нескінченновимірною математичного програмування з булевими значеннями змінних, їх модифікаціям та узагальненням, присвячені чисельні публікації Дніпропетровської наукової школи. У цих публікаціях сформульовано нові класи математичних моделей оптимального розбиття множин. Серед таких:

- детерміновані лінійні та нелінійні, однопродуктові та багатопродуктові задачі ОРМ при обмеженнях, як із заданим розміщенням центрів підмножин, так і з відшукуванням варіанта їх розміщення;

- задачі ОРМ в умовах невизначеності;

- динамічні задачі з критеріями оптимальності;

- неперервні задачі про кулькове покриття, які зводяться до задач ОРМ.

До розв'язання сформульованих класів задач розбиття запропоновано єдиний підхід. Його основна ідея полягає у переході від початкових нескінченновимірних задач оптимізації, через функціонал Лагранжа, до допоміжних скінченновимірних недиференційовних задач максимізації або недиференційовних максимінних задач, для чисельного розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації, а саме, різні модифікації r -алгоритму Шора.

У роботах [1–4] побудовані нові математичні моделі нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини на підмножини як з фіксованими центрами, так і з розміщенням центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей, розроблено та обґрунтовано методи та алгоритми їх розв'язання.

Метою цієї роботи є розробка програмного продукту, який реалізовує всі алгоритми, розроблені для задач з [1–4], дозволяє розв'язувати задачі, що розглядалися раніше в межах досліджень Дніпропетровської наукової школи, а також задачі з різних предметних областей, що зводяться в математичній постановці до розглянутих.

Постановка задачі. Розробити програмний продукт для розв'язання різних класів неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ, а саме:

- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_2 на NM підмножин, що не перетинаються з фіксованими центрами $\tau_1, \dots, \tau_N$ цих підмножин без обмежень, де M – кількість продуктів;

- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_2 на NM підмножин, що не перетинаються з розміщенням центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ цих підмножин без обмежень;

- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_2 на NM підмножин, що не перетинаються з фіксованими центрами $\tau_1, \dots, \tau_N$ цих підмножин з обмеженнями;

– нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_2 на NM підмножин, що не перетинаються з розміщенням центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ цих підмножин з обмеженнями.

При цьому обмеження у вищевизначених задачах можуть бути таких видів:

- обмеження – рівності;
- обмеження – нерівності.

В усіх перелічених задачах функції попиту та метрики допускаються різними для різних видів продуктів, а саме:

- функція метрики задається різною для різних видів продуктів;
- функція попиту задається різною для різних видів продуктів;
- функції метрики та попиту задаються різними для різних видів продуктів.

Програмний продукт складається із двох модулів. Перший – програмний модуль – у частині програмування математичних методів та чисельних процедур реалізовано у середовищі Microsoft Visual Studio мовою Visual Fortran 6.5, а другий – графічний модуль ORMDrawer – мовою C++ у середовищі Borland Builder C++6 для операційної системи Windows, у частині графічної візуалізації.

Розв’язання модельних задач. Розроблений програмний продукт реалізовано для таких модельних нескінченновимірних транспортних задач.

У заданій області дев’ять підприємств виробляють однорідну продукцію трьох видів для розміщеного в цій області із заданою щільністю споживача, з обмеженнями на потужність підприємств у вигляді рівностей та нерівностей. Вартість транспортування одиниці продукції до споживача задається у вигляді евклідової, манхетенської або метрики Чебишева, залежно від виду продукції. Функція попиту на продукцію дорівнює одиниці або задається аналітично для кожного продукту. Наведемо результати розв’язання розглянутої задачі, а саме багатопродуктової задачі ОРМ із фіксованими центрами підмножин та аналогічної багатопродуктової задачі ОРМ із розташуванням центрів підмножин, та порівняємо їх.

Модельна задача А.1. Задано множину $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$ споживачів трьох видів продукції, яка може виготовлятися дев’ятьма підприємствами. Вартість транспортування одиниці продукції з i -го підприємства $i = \overline{1, 9}$ до споживача (x, y) задається відповідно до виду продукції:

$$c^j(xy, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & \text{якщо } j=1; \\ \max \{ |x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}| \}, & \text{якщо } j=2; \\ |x - \tau_i^{(1)}| + |y - \tau_i^{(2)}|, & \text{якщо } j=3. \end{cases}$$

Попит $\rho^j(xy)$ на продукцію кожного виду розподілений в області Ω з відповідними щільностями:

$$\rho^1(xy) = \frac{1}{\ln((xy)^2 - 110.003)}, \quad \rho^2(xy) = \frac{0.4}{|\lg x - y - 110.003|}, \quad \rho^3(xy) = \frac{50}{|xy + 110.003|}.$$

Функції $\varphi_{ii}^{jj}(y)$, які описують залежність вартості виробництва j -го виду продукції на i -му підприємстві від його потужності, мають вигляд

$$\varphi_i^j(y_i^j) = (y_i^j)^2, \quad i = \overline{1, 9}, \quad j = \overline{1, 3},$$

де потужність y_i^j i -го підприємства з виробництва j -го виду продукції визначається за формулою

$$Y_i^{jj} = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(xy) dx dy.$$

Потужність i -го пункту виробництва за всіма видами продукції визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i^j , $i = \overline{1, 9}$, та для пунктів виробництва $i = 1, 2, 4, 5, 7, 9$ не повинна перевищувати задані обсяги, тобто на потужності підприємств накладені такі обмеження:

$$0 \leq \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(xy) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 7, 9,$$

$$b_1 = 100, \quad b_2 = 60, \quad b_4 = 80, \quad b_5 = 17, \quad b_7 = 100, \quad b_9 = 12,$$

а для пунктів виробництва з номерами $i = 3, 6, 8$ повинна дорівнювати заданому обсягам:

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(xy) dx dy = b_i, \quad i = 3, 6, 8,$$

$$b_3 = 36, \quad b_6 = 5, \quad b_8 = 15.$$

Необхідно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування дев'ятьма підприємствами за кожним видом продукції, тобто на підмножини Ω_i^j , $i = \overline{1, 9}$, $j = \overline{1, 3}$, так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача:

$$F(\{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_9^1, \Omega_1^2, \dots, \Omega_9^2, \Omega_1^3, \dots, \Omega_9^3\}\}) = \\ = \sum_{j \in \overline{1,3}} \sum_{i \in \overline{1,9}} \left[\Phi_{ij}^j \left(\iint_{\Omega_{ij}^j} \rho^j(xy) dx dy \right) + \iint c^j(xy, \tau) \rho^j(xy) dx dy \right].$$

Не є виключенням той випадок, коли деякі з підмножин Ω_{ij}^j , $i=1, 9$, $j=1, 3$, опиняться порожніми.

Множина Ω покривалася сіткою з вузлами (ij) , $i=1, \dots, 21$, $j=1, \dots, 21$.

Як початкові значення двоїстих змінних задано $\psi_i^{(0)} = 0$, $i=1, 9$; початкові значення потужностей: $Y_1^{j(0)}=10$, $Y_2^{j(0)}=100$, $Y_3^{j(0)}=10$, $Y_4^{j(0)}=10$, $Y_5^{j(0)}=100$, $Y_6^{j(0)}=10$, $Y_7^{j(0)}=10$, $Y_8^{j(0)}=100$, $Y_9^{j(0)}=10$, а також задані координати розміщення підприємств:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 0.7; 1.4; 4.8; 8.7; 5.1; 8.9; 2.5; 5.8; 8.5 \\ 2.4; 5.6; 4.2; 2.5; 7.5; 8.3; 9.1; 1.5; 5.7 \end{pmatrix}.$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності

$$\left\| (Y^{(k)}, \Psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \Psi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

За 146 ітерацій отримано:

– оптимальне розбиття множини споживачів Ω ;

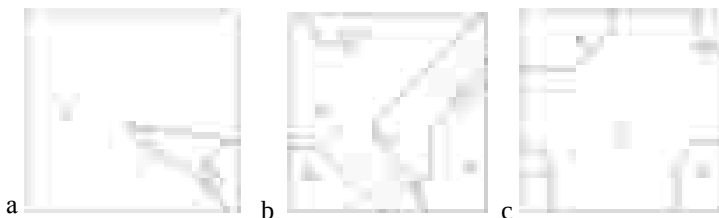


Рис. А.1. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із фіксованими центрами по трьох видах продукції для модельної задачі А.1

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4646.87$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4668.40$;
- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств мають відповідні значення 24.82; 20.81; 35.93; 24.41; 16.98; 4.95; 24.23; 14.65; 11.89.

Модельна задача А.2. У постановці першої модельної задачі задамо функцію попиту $\rho^j(xy) \equiv 1$, $j=1, 2, 3$. За таких умов, після 204-ї ітерацій, отримали такі результати:

- оптимальне розбиття множини споживачів Ω ;

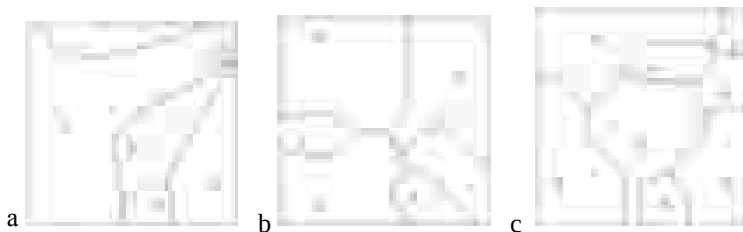


Рис. А.2. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із фіксованими центрами по трьох видах продукції для модельної задачі А.2

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 14254.00$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 14241.49$;
- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств відповідно дорівнюють: 53.65; 52.89; 35.93; 54.46; 16.94; 4.95; 54.02; 14.91; 11.98.

За результатами розглянутих модельних задач А.1 – А.2 можна зробити такі висновки:

1) для кожної із задач виконуються умови розв'язуваності задачі, тобто загальна оптимальна потужність дев'яти підприємств, яка отримана за алгоритмом розв'язку (для задачі А.1 це 178.67, а для задачі А.2 це 299.73) не перевищує $S = 425$ – суми заданих обсягів потужностей підприємств;

2) отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го та 8-го підприємства у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме $Y_3^* \approx 36$, $Y_6^* \approx 5$, $Y_8^* \approx 15$;

3) у задачі А.1 функція попиту $\rho^j(x_j) \equiv 1, j = \overline{1, 3}$, тому деякі з підмножин, за рахунок вигляду функції ρ^j , виявилися порожніми, що не суперечить постановці вихідної задачі. Так, наприклад, на рис. А.1, а порожніми є підмножини з номерами 1, 5, 6, 7, 8, 9 і т.п.

Модельна задача А.3. У постановці модельної задачі А.1 задамо умову розмістити підприємства. Тоді, якщо початкові координати розміщення підприємств $\tau_i^{(0)} = (0; 0)$, $i = \overline{1, 9}$, то після 431-ї ітерації отримаємо такі результати:

- оптимальне розбиття множини споживачів Ω на дев'ять зон обслуговування кожним із дев'яти підприємств по трьох видах продукції представлено на рис. А.3;

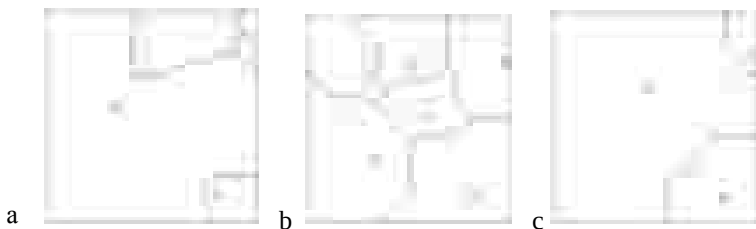


Рис. А.3. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із розміщенням їх центрів по трьох видах продукції для модельної задачі А.3

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4558.92$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4304.83$;
- оптимальні координати розміщених підприємств:

$$\tau_1^* = (3.01; 3.45), \quad \tau_2^* = (2.99; 5.63), \quad \tau_3^* = (4.16; 7.02),$$

$$\tau_4^* = (9.5; 8.35), \quad \tau_5^* = (2.21; 2.45), \quad \tau_6^* = (4.86; 8.07),$$

$$\tau_7^* = (7.86; 1.76), \quad \tau_8^* = (5.57; 5.79), \quad \tau_9^* = (2.88; 7.92);$$

- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств: 22.7; 19.5; 35.98; 22.43; 16.92; 4.93; 22.33; 14.91; 11.99.

Модельна задача А.4. У постановці модельної задачі А.3 задамо функцію попиту однаковою для кожного виду продукції, а саме $\rho^j(x) \equiv 1, j = 1, 2, 3$, тоді після 282-ї ітерації отримаємо такі результати:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 14125.5$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 14113.44$;
- оптимальні координати розміщених підприємств:

$$\tau_1^* = (2.59; 7.32), \quad \tau_2^* = (2.96; 5.14), \quad \tau_3^* = (7.36; 8.37),$$

$$\tau_4^* = (7.25; 1.61), \quad \tau_5^* = (1.58; 0.96), \quad \tau_6^* = (8.17; 9.2),$$

$$\tau_7^* = (7.78; 5.38), \quad \tau_8^* = (1.32; 3.54), \quad \tau_9^* = (3.75; 2.66);$$

- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств: 54; 52.96; 35.98; 54.06; 16.83; 4.96; 53.96; 14.97; 11.99.

Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на дев'ять зон обслуговування кожним із дев'яти підприємств по трьох видах продукції представлено на рис. А.4.

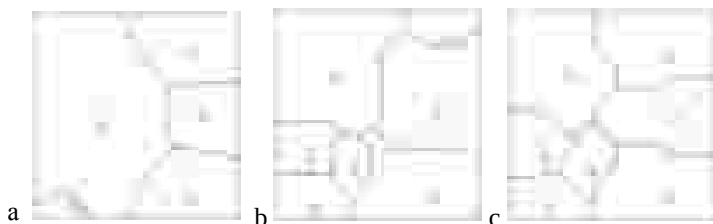


Рис. А.4. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із розміщенням їх центрів по трьох видах продукції для модельної задачі А.4

За результатами розглянутих модельних задач А.3 - А.4 можна зробити такі висновки:

1) для кожної із задач виконуються умови розв'язуваності, тобто загальна оптимальна потужність дев'яти підприємств, яка отримана за алгоритмом розв'язку (для задачі А.3 це 171.69, а для задачі А.4 це 299.71), не перевищує $S = 425$ – суми заданих потужностей підприємств;

2) отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го та 8-го підприємства у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме $Y_3^* \approx 36$, $Y_6^* \approx 5$, $Y_8^* \approx 15$;

3) у задачі А.3 для $\rho^j(x_j) \neq 1, j = \overline{1,3}$ деякі з підмножин, за рахунок вигляду функції ρ^j , виявилися порожніми, що не суперечить постановці вихідної задачі. Так, наприклад, на рис. А.4, а порожніми є підмножини з номерами 1, 5, 6, 8, 9 і т.п.

Отже, у загальному підсумку розглянутих модельних задач А.1 - А.4 зазначимо таке:

1) кількість ітерацій у задачах із різним попитом на продукцію кожного з видів (модельні задачі А.1, А.3) більша за кількість ітерацій, отриманих при розв'язанні відповідних задач з однаковим попитом $\rho^j(x_j) \neq 1, j = \overline{1,3}$, (модельні задачі А.2, А.4);

2) оптимальне значення функціоналів прямої та двоїстої задач із розміщеними підприємствами (модельні задачі А.1, А.2) більше за відповідні значення у випадку з умовою розміщення центрів підприємств (модельні задачі А.3, А.4).

Висновки. На основі розроблених раніше методів та алгоритмів розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ створено програмний продукт. Наведено результати його застосування до розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ, а са-

ме до задач розміщення підприємств із одночасним розбиттям регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, а також до задач розбиття з фіксованими центрами підприємств. Функції попиту та вартості транспортування одиниці продукції можуть бути різними для різних видів продукції. Нелінійність критерію оптимальності досліджуваних задач дозволяє більш адекватно моделювати певні реальні процеси, тому розроблений програмний продукт може бути застосований до розв'язання прикладних задач із різних предметних областей, що зводяться в математичній постановці до розглянутих.

Бібліографічні посилання

1. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строева // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2010. – С. 155–164.
2. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строева // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С. 151–166.
3. **Киселёва Е.М.** Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е.М. Киселёва, В.А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40–53.
4. **Кісельова О.М.** Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання (Network sharing) декількома операторами мобільного зв'язку підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строева // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2012. – С. 143–154.

Надійшла до редколегії 21.08.2013 р.

О.М.⁸Кісельова, П.В. Сьомчина

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

НЕПЕРЕРВНА НЕЧІТКА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ НЕОПУКЛОЇ МНОЖИНИ

Представлені деякі результати експериментів вирішення неперервної задачі оптимального розбиття неопуклої множини без обмежень із відшукуванням центрів в умовах невизначеності. Як невизначеність розглядається нечітке розбиття. Реалізовано алгоритм розв'язання задачі, наведено приклади.

Представлены некоторые результаты экспериментов решения непрерывной задачи оптимального разбиения невыпуклого множества без ограничений с отысканием центров в условиях неопределенности. Как неопределенность рассматривается нечеткое разбиение. Реализован алгоритм решения задачи, приведены примеры.

We present some experimental results for solving continuous optimal partitioning nonconvex sets without restrictions with nonfixed centers under uncertainty. As uncertainty we considered fuzzy partition. An algorithm for solving this problem is implemented, examples are cited.

Ключові слова: оптимальне розбиття, нечітке розбиття, невизначеність, функція приналежності.

Вступ. Вимога знаходження однозначного (чіткого) розбиття елементів множини Ω з E_N може виявитися досить грубою і жорсткою при вирішенні задач із погано або слабко структурованою вихідною інформацією, тобто задач, у яких невизначеність має нечітко-ймовірносну природу. Ослаблення цієї вимоги здійснюється за рахунок введення в розгляд нечітких підмножин множини і відповідних їм функцій приналежності, що приймають значення з відрізка $[0,1]$ [1; 4; 8].

Постановка задачі. Введемо на множині можливих нечітких розбиттів цільовий функціонал $(F: \mathfrak{R}_{\Omega}^{N1} \rightarrow R)$ у вигляді

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx.$$

де функції $c(x, \tau_i)$ – задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i=1, \dots, N$; $\rho(x)$ – задана, обмежена, вимірна на Ω функція; $a_1, \dots, a_n$ – задані невід’ємні числа.

Під неперервною однопродуктовою задачею оптимального нечіткого розбиття множини з n -мірного евклідового простору E_N на нечіткі підмножини із заданим положенням «центрів» підмножин без обмежень будемо розуміти таку задачу.

Нехай заданий початковий вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $\tau_i \in \Omega \forall i=1, \dots, N$, який будемо інтерпретувати як вектор центрів N нечітких підмножин деякого нечіткого розбиття з $\mathcal{R}_\Omega^N$. Знайти таке нечітке розбиття $\mathcal{R}(\Omega) = \{\Omega_i \subseteq \Omega, \forall i=1, \dots, N\}$ множини Ω із безлічі розбиттів $\mathcal{R}_\Omega^N$, яке є рішенням такої задачі оптимального нечіткого розбиття:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \mathcal{R}_\Omega^N}.$$

Тут під мінімізацією будемо розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому сенсі найкраще нечітке значення цільового функціонала.

Для того щоб мати можливість ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ множини Ω , потрібно знати вектор-функцію приналежності виду

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad x \in \Omega.$$

Переформулюємо задачу в термінах функцій приналежності.

Знайти пару елементів $(\mu^*(x), \tau^*)$ таку, що

$$I(\mu_1(x), \dots, \mu_N(x), \tau_1, \dots, \tau_N) = \int \sum_{k=1}^N (\mu_k(x))^m (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx \rightarrow \min_{\mu(x) \in M, \tau_k \in \Omega}, \quad (1)$$

де

$$\sum_{k \in F} \mu_k(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$$

m – параметр, який називається експоненціальною вагою. Чим більше m , тим кінцева матриця нечіткого розбиття стає більш «розмазаною», і при $m \rightarrow \infty$ вона прийме вигляд $\mu = [1/N]$, що є дуже поганим рішенням, тому що всі об'єкти належать до всіх підмножин з однаковим ступенем. На сьогодні не існує теоретично обгрунтованого правила вибору значення експоненціальної ваги. Зазвичай встановлюють $m=2$.

Для інтерпретації отриманих результатів, а саме віднесення кожного вузла сітки до якоїсь підмножини або до нечіткого кордону, введемо таке допоміжне поняття ступеня недовіри СН.

Ступінь недовіри $CH \in [0,1]$ – це мінімальне значення функції приналежності деякої нечіткої множини, при якому дана точка може бути з упевненістю віднесена до цієї нечіткої множини, іншими словами, при якому ми вважаємо, що дана точка належить даній множині [2, 3, 6].

Очевидно,

$$I(\mu_1(x), \dots, \mu_N(x), \tau_1, \dots, \tau_N) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\mu \in M} I(\mu(\bullet), \tau) \right). \quad (2)$$

Зауважимо, що зовнішня задача (2) є кінченновимірною задачею по τ , у той час як внутрішня задача з (2) – нескінченновимірною по μ .

Підводячи підсумки, зазначимо, що рішення для першої компоненти $\mu_*(\bullet)$ оптимального рішення $(\mu_*(\bullet), \tau_*)$ задачі A_2 отримано для кожного фіксованого τ (див. рис. 1). Для відшукування ж другої компоненти $\tau_* = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$ оптимального рішення будемо розв'язувати задачу кінченновимірної оптимізації, цільова функція якої є в загальному випадку багатоекстремальною недиференційовною функцією.

Формула для розрахунку градієнта по τ для випадку, коли Ω – двовимірний простір:

$$grad_{\tau} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \rho(x) \frac{-(x - \tau_1^x)}{\sqrt{(x - \tau_1^x)^2 + (y - \tau_1^y)^2}} \mu_1^m(x) \\ \dots \\ \int_{\Omega} \rho(x) \frac{-(y - \tau_N^y)}{\sqrt{(x - \tau_N^x)^2 + (y - \tau_N^y)^2}} \mu_N^m(x) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Результати роботи. Опишемо результати чисельних експериментів рішення задачі A_2 для деяких неопуклих множин. Алгоритм було реалізо-

вано на мові програмування C++, графічна інтерпретація результатів виконана засобами Matlab [7].

На рисунках, наведених нижче, центр підмножини, який було знайдено, позначений «+».

Приклад 1. Розбиття неопуклої множини, яка представлена на рис. 1:

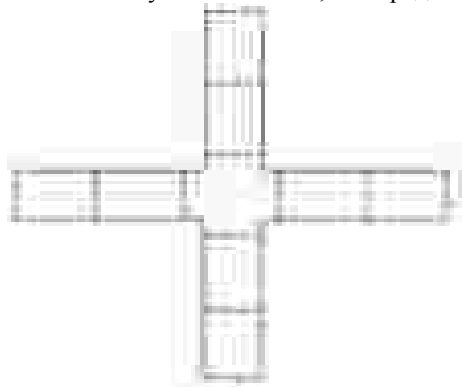


Рис. 1. Множина у вигляді плоского хреста та її чітке оптимальне розбиття

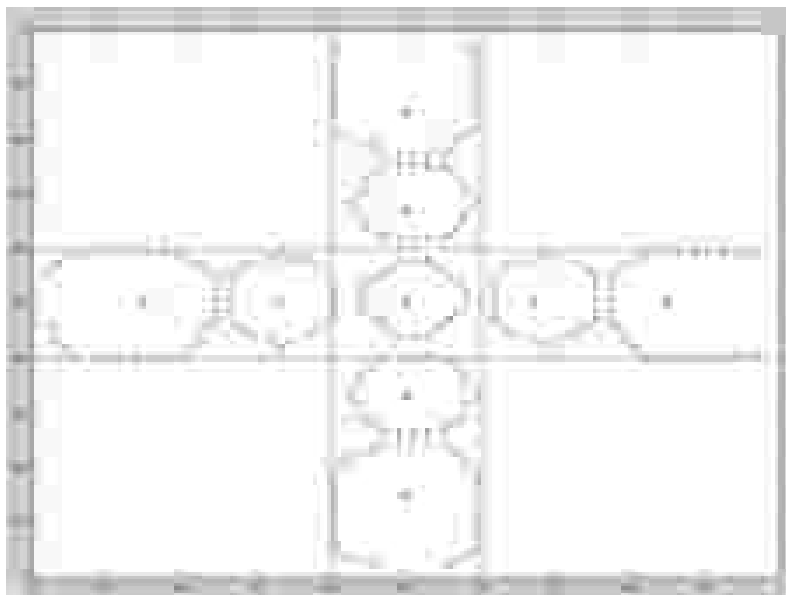


Рис. 2. Результати нечіткого розбиття на 9 підмножин

Приклад 2. Розбиття неопуклої множини, яка представлена на рис. 3:

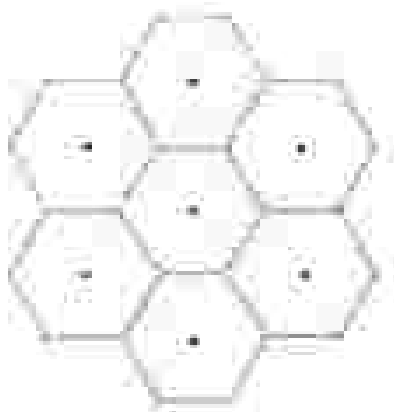


Рис. 3. Неопукла множина, межа якої складена із зовнішніх кордонів шестикутників, які утворюють правильну шестикутну мозаїку

Для $N = 7$ така область зображена на рис. 3. Знайдені алгоритмом чіткого розбиття центри підмножин відзначені «•». Ці результати узгоджуються з відомими результатами, що полягають у тому, що оптимальним розбиттям такої області має бути правильна шестикутна мозаїка, причому центри підмножин повинні збігатися з центрами правильних шестикутників, складових мозаїки.

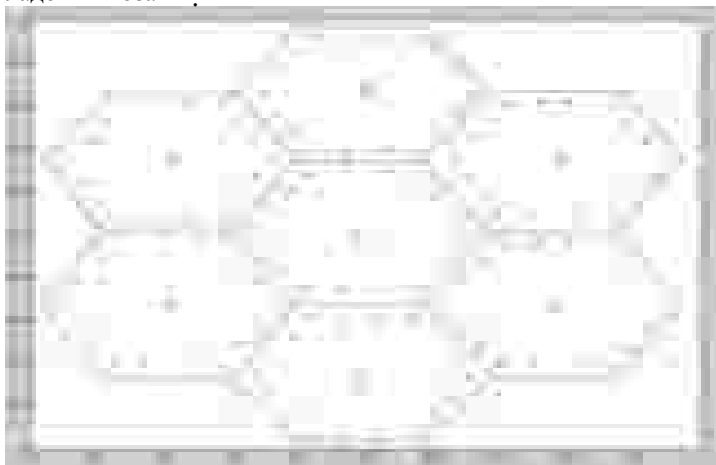


Рис.4. Результати нечіткого розбиття на 7 підмножин при $CH=0,2$

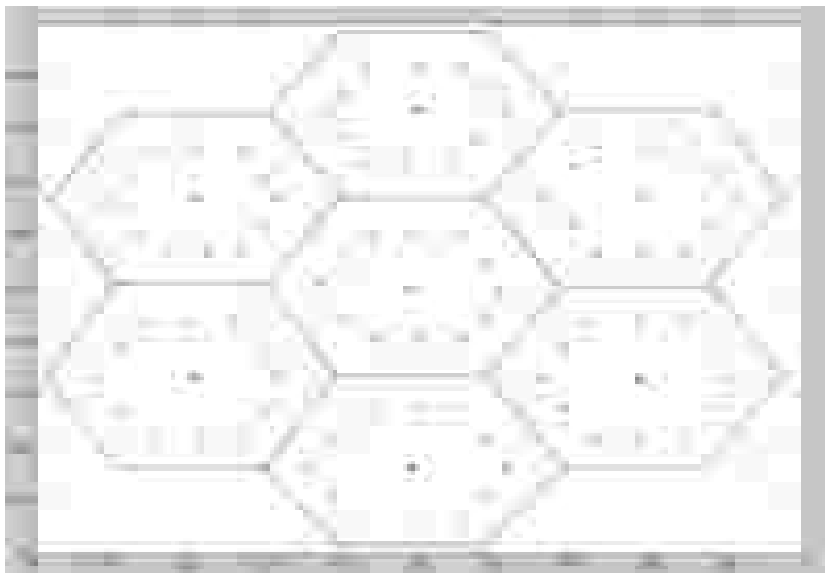


Рис. 5. Результати нечіткого розбиття на 7 підмножин при $CH=0,3$

Висновки. Реалізовано алгоритм рішення неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини без обмежень із відшукуванням центрів. Проведені чисельні експерименти чіткого та нечіткого розбиттів неопуклих множин.

При підвищенні ступеня недовіри рамки нечіткого кордону розширюються.

При досить низькому ступені недовіри першими в область нечіткого кордону потрапили точки, що знаходяться між усіма множинами відразу.

Таким чином, на прикладах ми продемонстрували можливість використання методу опису геометричних об'єктів, заснованого на використанні апарату R-функцій, для розв'язання задач оптимального нечіткого розбиття плоских областей, що мають складну форму.

Бібліографічні посилання

1. Бочарников В.П. Fuzzy-технология: математические основы. Практика моделирования в экономике / В. П. Бочарников, – СПб.: Наука РАИ, 2001. – 328 с.
2. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев, – М.: МГУ, 1974. – 376 с.

3. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. **Заде Л.А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. /Л.А. Заде. – М.: Мир, 1976, – 167 с.
5. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
6. **Киселева Е.М.** Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств и их приложения: автореф. дис... д-ра физ.-мат.наук: 01.01.09 // Ин-т кибернетики АН Украины им. В.М. Глушкова / Е.М. Киселева. – К., 1991. – 33 с.
7. **Леоненков А.В.** Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH / А.В. Леоненков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
8. **Орловский С.А.** Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 206 с.

Надійшла до редколегії 11.06.2013 р.

И. В. ⁹Козин

Запорожский национальный университет

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЧИСЛА БЛОКОВ

Представлені результати дослідження фрагментарної та еволюційної моделі задачі мінімізації числа одиничних блоків у рядках прямокутної булевої матриці. Показано, що ця задача може розглядатися як оптимізаційна задача на фрагментарній структурі. Запропоновано еволюційно-фрагментарну модель задачі на множині перестановок із геометричним оператором кросовера. Метод протестований на наборі індивідуальних задач різних розмірностей.

Представлены результаты исследования фрагментарной и эволюционной модели задачи минимизации числа единичных блоков в строках прямоугольной булевой матрицы. Показано, что эта задача может рассматриваться как оптимизационная задача на фрагментарной структуре. Предложена эволюционно-фрагментарная модель задачи на множестве перестановок с геометрическим оператором кроссовера. Метод протестирован на наборе индивидуальных задач разных размерностей.

The results of research fragmentary and evolutionary model the problem of minimizing the number of single blocks in rows of rectangular Boolean matrix. It is shown that this problem can be seen as an optimization problem on a fragmented structure. We propose an evolutionary-fragmentary model of the problem on the set of permutations with geometric crossover operator. Method is tested on a set of individual tasks of different dimensions.

Ключевые слова: задача минимизации числа блоков, фрагментарная структура, эволюционная модель, геометрический кроссовер.

Введение. В ряде задач комбинаторной оптимизации отыскание точного решения представляет собой сложную проблему. Во многих случаях единственным методом, гарантирующим желаемый результат, является лишь полный перебор всех допустимых решений. Такая проблема возникает при отыскании точного решения многих задач распознавания и упа-

ковки, в частности при отыскании решения задач, для которых доказано свойство NP -полноты.

Обычно для поиска приближенных оптимальных решений подобных задач используются приближенные и эвристические алгоритмы. Большинство таких алгоритмов не гарантирует качества получаемого решения, однако их применение оказывается оправданным по ряду причин. В частности, эти алгоритмы достаточно быстры и, кроме того, достаточно просты в реализации.

В статье рассматривается задача о минимизации числа блоков булевой матрицы, которая часто возникает при сжатии больших массивов информации.

Одним из эвристических подходов к поиску решений подобных задач является подход, основанный на применении фрагментарных алгоритмов [1]. Такой подход удалось успешно применить для решения ряда практических задач симметричного размещения [2] и некоторых задач теории расписаний. [1]. Однако использовать фрагментарный алгоритм для поиска оптимального решения задач с четко определенным формальным критерием вряд ли разумно. Фрагментарный алгоритм останавливается при отыскании первого максимального по включению фрагмента и, следовательно, не гарантирует качества решения с точки зрения критерия. Для поиска более точного приближенного решения рассматриваемой комбинаторной задачи предлагается подход, основанный на сочетании эволюционного и фрагментарного алгоритмов.

Постановка проблемы. Пусть задана прямоугольная матрица $A = (a_{ij})$ размерности $n \times m$, каждый элемент которой равен либо 0, либо 1. Задача состоит в отыскании такой перестановки столбцов матрицы A , после которой число непрерывных блоков, состоящих из единиц в строках матрицы A , будет минимальным.

Для булевой матрицы $a = (a_{ij})_{i=1, n}^{j=1, m}$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ определим функцию переходов следующим образом:

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{m-1} (1 - a_{im}) a_{i+1, m}.$$

Эта функция в точности равна числу непрерывных единичных блоков в строках матрицы a .

Таким образом, задача о минимизации числа блоков может рассматриваться как задача отыскания перестановки $s = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ k_{12} k \dots, k_n \end{pmatrix}$, для которой значение функции

$$F(s) = \sum_{i \neq j} \sum_{k=1}^m a_{ik_{11}} + \dots + (1 - a_{ik_{jj}}) a_{ik_{k+}}$$

минимально. Эта задача является NP-трудной [3], и потому для нее оправдано применение эвристических алгоритмов. В настоящей работе для задачи о минимизации числа блоков предлагается использовать эволюционно-фрагментарный алгоритм, описание которого дается ниже.

Фрагментарные структуры и их свойства

Определение 1. Фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, \dots, E_n\}$, где $E_i \subseteq X$, где X такое, что

$$\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists E_j \in E, E_j \setminus \{e\} \in E.$$

Элементы из множества E будем называть допустимыми фрагментами. Таким образом, для любого допустимого фрагмента E_i существует нумерация его элементов $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is_i}\}$ такая, что $\forall k = 1, 2, \dots, s_i \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\} \in E$.

Определение 2. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами.

Определение 3. Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Очевидны следующие свойства фрагментов:

Свойство 1. Пустое множество является фрагментом, $\emptyset \in E$.

Свойство 2. Пусть $\max_{i \in I} |E_i| = M$. Тогда в E найдутся элементы, мощности которых составят $M-1, M-2, \dots, 0$.

Любая фрагментарная структура может быть описана в виде ациклического ориентированного графа с одной корневой вершиной. Вершины в

этом графе соответствуют фрагментам , и любые две смежные вершины отличаются на один элемент.

Определение 4. Две фрагментарные структуры (X, E') и (X, E'') на одном и том же множестве X будем называть равными, если $E' = E''$.

Определение 5. Две фрагментарные структуры (X, E') и (X, E'') на одном и том же множестве X будем называть изоморфными, если изоморфны ориентированные графы, которые их представляют.

У любого конечного множества X элементы можно занумеровать. Тем самым исследование фрагментарной структуры на этом множестве можно с точностью до изоморфизма свести к исследованию фрагментарной структуры на конечном множестве натуральных чисел $\{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 1. Если (X, E) – фрагментарная структура на множестве X , то для любого непустого множества $A \subseteq E$ существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ такая, что $\forall k \in \overline{1, n}$ множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in E$.

Доказательство. Пусть $A_0 = A \cap E \in E$ и $|A_0| = n > 0$. Выберем элемент $x_1 \in A_0$ таким образом, чтобы $A_1 = A_0 \setminus \{x_1\} \in E$. Повторив эту процедуру $n-1$ раз по отношению ко множествам $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, получим требуемую нумерацию элементов множества A .

Из теоремы 1 вытекает, что всякий допустимый фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы так, чтобы на каждом шаге такой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом.

Максимальный фрагмент может быть построен с помощью следующего «жадного» алгоритма:

- а) элементы множества X линейно упорядочиваются;
- б) на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \emptyset$;
- в) на шаге с номером $k+1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$ такой, что $X_k \cup \{x\} \in E$;

г) алгоритм завершает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Приведенный выше алгоритм построения максимального фрагмента во фрагментарной структуре будем называть фрагментарным алгоритмом. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве X . Таким образом, любой максимальный фрагмент может быть описан некоторой перестановкой элементов множества X . Пусть $A \in E$. Условие для элемента $x \in X$, при котором $A \cup \{x\} \in E$, будем называть условием присоединения элемента x .

Теорема 2. Если $\forall A \in E$ и $\forall x \in X$ существует алгоритм полиномиальной трудоемкости по числу элементов множества X для проверки условия присоединения, то задача построения максимального фрагмента является полиномиально разрешимой.

Доказательство. Пусть трудоемкость проверки условия присоединения составляет $O(n^k)$, где k – натуральное число. Трудоемкость упорядочения элементов может быть оценена величиной $O(n \ln n)$. Тогда для фрагментарного алгоритма построения максимального фрагмента трудоемкость оценивается величиной $O(n \ln n + n^{k+1})$, то есть $O(n^{k+1})$.

Задача о минимизации числа блоков может рассматриваться как задача на фрагментарной структуре. Здесь в качестве элементарных фрагментов выступают столбцы матрицы A . Каждый допустимый фрагмент – это некоторый упорядоченный набор столбцов матрицы A . Максимальный фрагмент – это матрица, полученная из A некоторой перестановкой столбцов.

Эволюционная модель

Эволюционные (генетические) алгоритмы подробно рассматривались в многочисленных публикациях [4.6]. Для ряда оптимизационных задач удалось предложить достаточно эффективные процедуры поиска оптимальных решений, основанные на применении эволюционных алгоритмов. Для реализации эволюционного алгоритма необходимо выделить ряд объектов и процедур, совокупность которых будем называть эволюционной моделью. Основные составляющие эволюционной модели следующие:

- базовое множество решений – множество допустимых решений X , на котором ищется оптимальное решение задачи;

- оператор построения начальной популяции: процедура, которая позволяет выделить на множестве всех допустимых решений его подмножество $Y \subseteq X$ для последующей эволюции;

- критерий селекции – алгоритм, который позволяет сравнивать по качеству решения в рамках заданной популяции;

- оператор кроссовера $KX \times X \rightarrow X$, позволяющий по двум допустимым решениям-родителям построить новое решение-потомок из множества допустимых решений;

- оператор мутации $MX \rightarrow X$;

- оператор отбора, который выделяет множество пар в Y для выполнения операции кроссовера;

- оператор эволюции, позволяющий строить новые популяции из множества родителей и потомков;

- правило остановки, которое определяет условие остановки эволюционного алгоритма.

Опишем кратко принцип работы эволюционного алгоритма. На начальном шаге с помощью оператора начальной популяции строится множество решений Y_0 . На каждом очередном шаге предполагается заданным некоторое множество допустимых решений – текущая популяция.

На первом шаге это множество $Y \leftarrow Y_0$. Для каждого из элементов множества Y вычисляется значение критерия селекции. Далее с помощью оператора отбора в текущей популяции Y выбирается множество пар для кроссовера. К каждой паре из выбранного множества пар применяется оператор кроссовера, а затем к результату кроссовера применяется оператор мутации. Таким путем находится множество элементов – потомков Y' . К промежуточной популяции $Y \cup Y'$, которая является объединением текущей популяции и множества потомков, применяется оператор эволюции, который выделяет на этом множестве новую текущую популяцию.

Процесс эволюции повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки эволюционного алгоритма. Блок-схема эволюционного алгоритма приведена на рисунке.

Свойства фрагментарных структур позволяют построить особый класс эволюционных алгоритмов на фрагментарных структурах – ЭВФ-алгоритмы.

ЭВФ-алгоритм является комбинацией эволюционного и фрагментарного алгоритмов. Опишем эволюционную модель и принцип действия такого алгоритма.

В качестве множества допустимых решений рассматривается подмножество максимальных (квазimaxимальных) фрагментов на заданной фрагментарной структуре. Каждый фрагмент из этого множества определяется как результат работы фрагментарного алгоритма при некоторой заданной перестановке элементарных фрагментов. Таким образом, любому допустимому решению соответствует определенная перестановка чисел $1, 2, \dots, N$, где N – количество элементарных фрагментов. Для каждого допустимого решения определено значение целевой функции.

Базовое множество X эволюционной модели – это множество $S_{NN} = \{i_1 i_2 \dots i_N\}$ всех перестановок чисел $1, 2, \dots, N$. Оператор построения начальной популяции выделяет произвольное подмножество заданной мощности q из множества X .

Правило вычисления критерия селекции построено следующим образом: по заданной перестановке фрагментов с помощью фрагментарного алгоритма строится максимальный допустимый фрагмент. Вычисляется значение целевой функции задачи для этого фрагмента.

Опишем теперь оператор кроссовера. Пусть $U = (u_1, \dots, u_N)$ и $V = (v_1, \dots, v_N)$ – две произвольные перестановки. Перестановка-потомок строится следующим образом: последовательности U и V просматриваются с начала. На k -м шаге выбирается наименьший из первых элементов последовательностей и добавляется в новую перестановку-потомок. Затем этот элемент удаляется из двух последовательностей-родителей. Например,

$$K((2,3,4,7,8,1,6,5),(3,4,6,2,1,5,8,7)) = (2,3,4,6,1,5,7,8).$$

Оператор мутации M выполняет случайную транспозицию (замену местами двух элементов) в перестановке.

Оператор селекции выбирает случайным образом набор пар из заданного числа пар во множестве перестановок текущей популяции.

Оператор эволюции элементы промежуточной популяции упорядочивает в последовательность по убыванию значения критерия селекции. В качестве новой текущей популяции выбираются первые q элементов последовательности.

Обычное правило остановки – количество поколений достигло предельной границы L . Лучшая по значению критерия селекции перестановка из последней построенной популяции определяет приближенное решение задачи.

Предложенный подход является универсальным и позволяет применять один и тот же эволюционный алгоритм к любым оптимизационным задачам на конечных фрагментарных структурах.



Рис. Блок-схема эволюционного алгоритма

Результаты тестирования

Разумным представляется сравнение работы ЭВФ-алгоритма с другими известными алгоритмами. Конечно, хотелось бы получить численные оценки сходимости алгоритма, сравнение по скорости и точности получаемого решения. Однако, как правило, для NP -трудных задач, в которых применяется ЭВФ-алгоритм, это не представляется возможным.

Описание эксперимента:

Входными параметрами при описании серии случайных задач являются: размерность матрицы $n \times m$, где n -число строк матрицы; m - число столбцов; вероятность появления единицы в одной позиции; количество задач в серии S .

Рассматривались 4 серии задач. Серия А – задачи малой размерности с матрицей размерности $n \times m = 10 \times 10$; серия Б – с матрицей размерности $n \times m = 50 \times 20$; серия В – с матрицей размерности $n \times m = 50 \times 50$; серия Г – с матрицей размерности $n \times m = 100 \times 100$. В каждой серии генерировалось 100 задач. Вероятность появления 1 в любой позиции одна и та же и равна 0,5.

Задачи решались с помощью приближенного алгоритма – минимального прироста, методом случайного поиска и ЭВФ-алгоритмом.

Сравнение алгоритмов осуществлялось по следующим направлениям:

Рекорд – количество задач в серии, где алгоритм оказывался лучшим среди тестируемых. Рейтинг по Борда – сумма числа баллов, набранных на каждой задаче серии. За первое место в сравнении назначалось 5 баллов, за второе – 4, за третье – 3.

Результаты сравнения алгоритмов на сериях задач приведены в ниже-следующей таблице.

Таблиця

Серия	Число задач	Приблиз. алгоритм		Случайный поиск		ЭВФ-алгоритм	
		Рекорд	Рейтинг	Рекорд	Рейтинг	Рекорд	Рейтинг
А 10x10	100	44	277	100	400	100	400
Б 50x100	100	10	221	54	348	100	400
В 50x50	100	11	280	0	204	91	391
Г	100	48	347	0	201	54	354

100x100							
---------	--	--	--	--	--	--	--

Результаты применения различных подходов

Выводы. Теоретические результаты и результаты численных экспериментов показывают, что ЭВФ-алгоритм может достаточно эффективно использоваться как эвристический алгоритм при решении оптимизационных задач линейного булева программирования. В отличие от классических эвристических алгоритмов ВЭФ-алгоритм является управляемым, и качество его работы может возрастать при увеличении ряда параметров алгоритма таких, как величина популяции, число пар для селекции, количество поколений, количество эволюций и т.д.

Библиографические ссылки

1. **Козин И. В.** Фрагментарные алгоритмы в системах поддержки принятия решений /И.В.Козин// Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. ДНУ. – Д., 2006. – С. 131–137.
2. **Козин И. В.** Фрагментарный алгоритм для задачи симметричного размещения /И.В.Козин// Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2005, – №1. – С. 76–83.
3. **Касьянов В. Н.** Графы в программировании: обработка визуализация и применение: науч. изд. / В.Н.Касьянов, В.А.Евстигнеев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
4. **Holland J. H.** Adaptation in Natural and Artificial Systems / J. H. Holland. – Boston, MA : MIT Press. –1992. – 288 p.
5. **Курейчик В. М.** Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы / В. М. Курейчик // Изв. РАН. ТиСУ. – 1999, – №1. – С. 144–160.
6. **Скобцов Ю. А.** Основы эволюционных вычислений: учебное пособие / Ю. А. Скобцов. – Донецк: ДонНТУ, 2008. – 326 с.

Надійшла до редколегії 23.11.2012 р.

УДК 519.85

Л.С. ¹⁰Коряшкіна, О. О. Сазонова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗАГРУЗКИ УСТАТКУВАННЯ І ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЯ

Представлена математична модель задачі оптимізації загрузки устаткування при виконанні плану виробництва залізничних коліс із метою мінімізації часу простою обладнання. Розглянута також задача максимізації сумарного прибутку від реалізації продукції, випущеної за обмежений час.

Представлена математическая модель задачи оптимизации загрузки оборудования при выполнении плана производства железнодорожных колес с целью минимизации времени простоя оборудования. Рассмотрена также задача максимизации суммарной прибыли от реализации продукции, выпущенной за ограниченное время.

It is suggested the mathematical model of the optimal loading equipment problem for implementation of railway wheels plan in order to minimize downtime. The problem of maximizing the total profits from the sale of products manufactured for a limited time is also considered.

Ключові слова оптимізація виробництва, загрузка устаткування, математична модель, лексико-графічний перебір.

Вступ. В [1] зазначено, що у сучасних умовах розвитку металургійної галузі ключовим завданням для будь-якого металургійного підприємства стає пошук внутрішніх резервів для зниження витрат, розробка енерго- та ресурсозберігаючих технологічних режимів. Складовою господарської діяльності будь-якого підприємства стає розробка виробничих програм, у яких велика увага приділялася б збільшенню виробничих потужностей за рахунок зниження питомих витрат сировинних та енергетичних ресурсів. Актуальним напрямом наукових досліджень у галузі прикладної математики є системний аналіз технологічних і фінансових процесів на підприємстві, застосування методів обчислювальної математики й оптимізації для кількісного обґрунтування вибору програми функціонування підприємства [2].

Дана робота присвячена розробці математичного та програмного забезпечення процесу оптимальної загрузки обладнання при виробництві різних марок залізничних коліс. Технологічний процес випуску коліс передбачає послідовне використання декількох типів устаткування. Різні марки коліс обробляються на одному й тому ж обладнанні протягом різного часового інтервалу, що призводить до простою виробничого обладнання. Розглядаються два варіанти задачі. В одній потрібно знайти послідовність обробки різних марок коліс, яка б забезпечувала мінімальний час простою обладнання при виробництві продукції за заданим планом або, що те ж саме, мінімізувала час виконання заданого плану виробництва продукції. Якщо цей мінімальний час виробництва запланованого обсягу продукції перевищує час, відведений директивно, то постає задача пошуку такого плану виробництва, який забезпечив би максимальний прибуток від реалізації продукції, випущеної за обмежений час.

Постановка задачі оптимізації загрузки устаткування при виробництві залізничних коліс. Вихідні дані для задачі можна умовно поділити на дві категорії:

1) від замовника: марки коліс, які потрібно виготовити, їхня кількість, термін виконання замовлення (у разі необхідності);

2) від виконавця: дані про сортамент:

- марки коліс, що виготовляються, класифіковані за типом;
- технологічний процес виробництва кожного типу коліс, який включає до себе:
 - етапи виробництва, через які проходить кожен із типів продукції, тип обладнання, що використовується;
 - час, який витрачається на кожному етапі виробництва одиниці кожного типу продукції;
 - прибуток, який отримує підприємство при виготовленні одиниці кожної марки продукції.
- час, який відводиться на виконання плану.

Необхідно: визначити таку послідовність загрузки обладнання, яка б дозволяла виконати (за можливістю) заданий план виробництва продукції, мінімізуючи час простою верстатів.

У разі неможливості виконання плану в повному обсязі за виділений обмежений час необхідно визначити кількість продукції кожного типу, що може бути вироблена за відведений час, а також послідовність її проходження на відповідному обладнанні, яка б дозволила максимізувати сумарний прибуток від реалізації виробленої продукції.

Побудова математичної моделі. Введемо такі позначення вхідних даних:

- 1) N – кількість типів коліс, що виготовляються;
- 2) K – загальна кількість марок коліс, що виготовляє підприємство;
- 3) M – кількість верстатів (типів обладнання), на яких виробляється продукція;
- 4) $T = (t_{nm})$, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$ – матриця часу, який витрачається при виготовленні кожного типу коліс на кожному етапі виробництва;
- 5) $P = (p_1, p_2, \dots, p_K)$ – замовлення на випуск продукції, де p_i – кількість i -ї марки коліс; $p_i \geq 0, i = \overline{1, K}$;
- 6) $r = p_1 + p_2 + \dots + p_K$ – загальна кількість коліс, яку необхідно виготовити за планом;
- 7) $A = (a(1), a(2), \dots, a(K))$ – прибуток, який отримує підприємство від реалізації одиниці продукції кожної з марок коліс;
- 8) $T_{\max}$ – час, який відведено на виконання поточного плану (якщо цей час лімітований).

Позначимо через $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ упорядкований вектор змінних, кожна компонента якого приймає ціле значення із множини $X = \{1, 2, \dots, N\}$ і вказує на тип колеса, який буде вироблятися, а її номер – на чергу у процесі виробництва продукції за заданим планом.

Кожному вектору x поставимо у відповідність величину $c(x)$ – час виконання плану (алгоритм розрахунку цієї величини з урахуванням матриці T буде наведений нижче).

Якщо потрібно лише мінімізувати час простою виробничого обладнання, то задача запишеться в такий спосіб:

$$c(x) \rightarrow \min_{x \in X} \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^r (-\text{sign}|x_i - n|) = P_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2)$$

де $X^r = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_r$ – декартів добуток; $P_n = \sum_{j \in K_n} p_j$, $n = \overline{1, N}$.

Умова (2) у задачі означає, що у послідовності номерів, заданих вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, кількість елементів із значенням n має дорівнювати загальній кількості коліс, що належать до n -го типу і які потрібно виробити за планом.

Очевидно, що сумарний прибуток від реалізації випущеної за планом продукції, – фіксований і дорівнює $B = \sum_{k=1}^K a(k)p_k$.

Якщо час $T_{\max}$, виділений на виконання заданого плану, обмежений, і менший за величину $C^* = \min_{x \in X^r} C(x)$, то постає задача знаходження такого плану виробництва, який би забезпечував максимум прибутку від реалізації за таких умов на час роботи обладнання. Побудуємо математичну модель такої задачі.

Поряд із наведеними вище позначеннями будемо використовувати такі:

- 1) $Y = \{1, 2, \dots, K\}$ – множина індексів усіх марок коліс, що виготовляються на підприємстві;
- 2) K_n – множина індексів марок коліс, що належать до n -го типу і яку виготовляє металургійне виробництво; так що $\bigcup_{n=1}^N K_n = \{1, 2, \dots, K\}$.

Введемо до розгляду вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ – упорядкований вектор змінних, кожна компонента якого приймає ціле значення із множини $Y = \{1, 2, \dots, K\}$ і вказує на марку колеса, яка має вироблятися, а її порядковий номер – на чергу у процесі виробництва продукції за шуканим планом.

Кожному вектору y поставимо у відповідність:

- величину $B(y) = \sum_{i=1}^r a(y_i)$ – загальну вартість плану випуску продукції;

- вектор $x(y) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, компоненти якого обчислюються за формулою

$$x_i(y) = n, \quad \text{де } n \in X : y_i \in K_n, i = \overline{1, r}. \quad (3)$$

Тоді задача пошуку плану випуску продукції, який би забезпечував максимальний прибуток від реалізації при обмеженому часі роботи обладнання, математично може бути сформульована в такий спосіб:

знайти таку кількість r коліс і відповідний впорядкований вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$, що

$$B(y_1, \dots, y_r) \rightarrow \max, \quad y \in Y^r \quad (4)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^r (-\text{sign}|y_j - k|) \leq p_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5)$$

$$c(x(y)) \leq T_{\max}, \quad (6)$$

де вектор $x(y) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ визначається за формулою (3).

Дана задача належить до задач теорії розкладів – розділу дискретної математики, що займається проблемами впорядкування. Є різні варіанти задач теорії розкладів: частина з них є NP-повними, частина належить до класу поліноміальних задач, а для деяких задач так і не вдалося довести їх відповідність певному класу складності. Існує гіпотеза, що задача, що допускає переривання, не складніша, ніж задача без переривань. Вона стосується більшості задач, крім однієї, де для варіанта без переривання доведена його приналежність до класу поліноміальних задач, у той час як для аналогічної задачі з перериваннями не існує доказів приналежності до якого-небудь класу складності.

Із дисципліни виконання робіт на машинах можна виділити чотири основних класи завдань:

- 1) Open shop, відкрита лінія – для кожної вимоги задана своя підмножина машин, на кожній з яких вони мають обслуговуватися деякий час. Порядок обслуговування на цих машинах довільний. Задаються різноманітні цільові функції;
- 2) Job shop, робочий цех – для кожної вимоги задана своя впорядкована підмножина машин (маршрут), на яких вони мають обслуговуватися в заданому порядку. Задаються різноманітні цільові функції;

3) Flow shop, потокова лінія – всі машини впорядковані $M_1, M_2, \dots, M_m$, і кожна вимога проходить всі машини в цьому порядку. Розклад задано перестановкою вимог. Як правило, мінімізується загальний час обслуговування вимог;

4) завдання з директивними термінами – для кожної вимоги заданий момент надходження, час обслуговування і директивний термін закінчення обслуговування. Порядок обслуговування на приладах довільний. Необхідно знайти розклад із дотриманням директивних термінів. При існуванні такого розкладу можна ставити завдання мінімізації числа переривань.

Остання задача називається одностадійною, три перші – багатостадійними, оскільки для кожної вимоги задано декілька стадій або операцій обслуговування на різних приладах. Можливі різноманітні комбінації обмежень і дисциплін обслуговування, але поліноміальні за часом виконання алгоритми відомі тільки для найпростіших завдань із цих класів.

Задача, яка розглядається, поєднує в собі задачі двох класів: Job shop (робочий цех) та Flow shop (потокова лінія). Задача належить до класу задач комбінаторної оптимізації, і для її розв'язання застосовано два підходи: повний перебір можливих варіантів і генетичний алгоритм.

Алгоритм розрахунку тривалості виготовлення коліс для довільного допустимого плану. Нехай $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_r^{(s)})$ – можливий впорядкований план реалізації плану виробництва продукції. Позначимо через V матрицю, елемент V_{ij} якої відображає час, через який буде закінчено виробництво на i -му етапі для кожного типу $x_j^{(s)}$ коліс, який зазначено у плані. Алгоритм визначення елементів цієї матриці такий.

Заповнюємо перший елемент матриці V_{ij} , який дорівнює часу, що витрачається на першому етапі виробництва для першого елемента плану:

$$V(1,1) = T(x_1^{(s)}, 1).$$

Заповнюємо перший рядок матриці V_{ij} , крім першого елемента:

$$V(1, j) = T(x_1^{(s)}, j), \quad j = \overline{2, M}.$$

Заповнюємо перший стовпчик матриці V_{ij} , крім першого елемента:

$$V(i,1) = V(i-1,1) + T(x_i^{(s)}, 1), \quad i = \overline{2, r}.$$

Заповнюємо всі інші елементи матриці V_{ij} , обчислюючи їх як максимум між лівим та верхнім елементом плюс час, який витрачається на j -му етапі виробництва для i -го типу коліс. При цьому, якщо попередня за планом марка коліс не передбачає обробку на цьому етапі виробництва, то рухаємося вгору ($i := i - 1$), доки не знайдемо ту марку i^* з плану, яка задіяна на цьому ж j -му етапі виробництва (тобто для якої відповідний елемент матриці T не дорівнює 0). Якщо такий елемент існує, то для порівняння у формулі розрахунку чергового елемента матриці V беремо не лівий і верхній елементи, а лівий і $V(i^*, j)$. Якщо останній не знайдений, то беремо лише лівий елемент. Запишемо цей етап заповнення матриці V алгоритмічною мовою:

$$tmp = i - 1,$$

доки ($tmp > 1$ та $T(x_{tmp}^{(s)}, j) = 0$) виконуй $tmp = tmp - 1$

якщо $T(x_i^{(s)}, j) = 0$, то

$$V(i, j) = V(i, j - 1),$$

інакше

якщо ($tmp = 1$ та $T(x_{tmp}^{(s)}, j) = 0$), то

$$V(i, j) = V(i, j - 1) + T(x_i^{(s)}, j),$$

інакше

$$V(i, j) = \max\{V(i, j - 1); V(tmp, j)\} + T(x_i^{(s)}, j).$$

Знаходимо максимум серед усіх елементів останнього стовпця матриці V , – це і є час, який витрачається на виконання плану $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_r^{(s)})$.

$$c(x^{(s)}) = \max_{i=1, r} V_{iM}, \quad s = 1, \overline{|X^r|}. \quad (7)$$

Алгоритм розв'язання задачі максимізації прибутку з урахуванням обмежень на час виконання плану. Далі наведемо алгоритм пошуку кількості r коліс, яку можна виробити за відведений час $T_{\max}$ так, щоб сумарний прибуток був максимальним. Введемо нові позначення:

$$u(n) = \sum_{m=1}^M t_{nm}, \quad n = \overline{1, N} \quad - \text{сумарний час виробництва для кожного}$$

типу коліс;

tmp – кількість коліс, на яку можна зменшувати заплановану кількість r виробництва;

$z = (z_{ij}), i = \overline{1, w}, j = \overline{1, tmp}$ – матриця з усіх *можливих* комбінацій з r типів коліс по tmp , які можна видалити з плану;

$q = (q_{ij}), i = \overline{1, w}, j = \overline{1, r - tmp}$ – матриця, що містить усі варіанти *можливих* планів;

$h = (h_{ij}), i = \overline{1, v}, j = \overline{1, tmp *}$ – матриця з усіх v *можливих* комбінацій $tmp *$ марок коліс, які можна видалити з плану;

$\hat{r} = r - tmp *$ – максимальна кількість коліс, що може бути виготовлена за обмежений час;

$C(\hat{r})$ – мінімальний час виготовлення $\hat{r}$ коліс за поточним планом.

Алгоритм.

Ініціалізація: $C = c^*$,

$tmp = 0$;

доки $(C(r) - T_{\max}) > 0$, виконуй

$$\{ tmp = tmp + \min_n \{ (C(r) - T_{\max}) \bmod u(n) \} + 1 .$$

Генеруємо матрицю $z(w, tmp)$.

Генеруємо матрицю $q(w, r - tmp)$.

Запускаємо алгоритм пошуку мінімального часу виробництва за формулою (7). }

Знаходимо ті вектори масиву $\hat{z}_m = (z_{m1}, \dots, z_{m, tmp})$, для яких час виробництва $C(r - tmp)$ у відповідному рядку матриці q мінімальний.

Формуємо масив $h(v, tmp *)$, елементи якого дорівнюють типам коліс з $\hat{z}_m$, яким відповідають ненульові елементи вектора p і найменші значення прибутку у векторі A . При цьому кількість таких елементів має бути узгоджена із планом виробництва.

Серед усіх векторів $y = (y_1, y_2, \dots, y_{r-tmp*}) = (q_{v1}, q_{v2}, \dots, q_{v, r-tmp*})$

нової матриці q знаходимо той, для якого прибуток $B(y) = \sum_{i=1}^{r-tmp*} a(y_i)$

максимальний (якщо таких декілька, то виводимо перший).

Алгоритм описаний.

Результатом роботи наведеного алгоритму є: час виробництва; максимальне значення прибутку; марки коліс, які не будуть вироблятися за планом, їхня кількість; новий упорядкований план виробництва, що містить номери марок у послідовності, в якій має бути виконаний план.

Систематизація вхідних даних. Аналіз результатів. Роботу наведених алгоритмів продемонструємо на прикладі розв'язання задачі, в якій $N = 3$; $K = 38$, $M = 9$. Для кожної з марок коліс відома інформація про прибуток, який отримує підприємство від реалізації одиниці продукції, та один із трьох типів («д = 957», «чорн. колеса», «м/о експорт»), до якого вона належить (рис. 1).

Схема, на якій відображаються етапи, через які послідовно проходять усі типи коліс під час виробництва, представлена на рис. 2.

Тип	Марка	Прибуток за одиницю товару
1	1	1.0
1	2	1.0
1	3	1.0
1	4	1.0
1	5	1.0
1	6	1.0
1	7	1.0
1	8	1.0
1	9	1.0
1	10	1.0
1	11	1.0
1	12	1.0
1	13	1.0
1	14	1.0
1	15	1.0
1	16	1.0
1	17	1.0
1	18	1.0
1	19	1.0
1	20	1.0
1	21	1.0
1	22	1.0
1	23	1.0
1	24	1.0
1	25	1.0
1	26	1.0
1	27	1.0
1	28	1.0
1	29	1.0
1	30	1.0
1	31	1.0
1	32	1.0
1	33	1.0
1	34	1.0
1	35	1.0
1	36	1.0
1	37	1.0
1	38	1.0
2	1	1.0
2	2	1.0
2	3	1.0
2	4	1.0
2	5	1.0
2	6	1.0
2	7	1.0
2	8	1.0
2	9	1.0
2	10	1.0
2	11	1.0
2	12	1.0
2	13	1.0
2	14	1.0
2	15	1.0
2	16	1.0
2	17	1.0
2	18	1.0
2	19	1.0
2	20	1.0
2	21	1.0
2	22	1.0
2	23	1.0
2	24	1.0
2	25	1.0
2	26	1.0
2	27	1.0
2	28	1.0
2	29	1.0
2	30	1.0
2	31	1.0
2	32	1.0
2	33	1.0
2	34	1.0
2	35	1.0
2	36	1.0
2	37	1.0
2	38	1.0
3	1	1.0
3	2	1.0
3	3	1.0
3	4	1.0
3	5	1.0
3	6	1.0
3	7	1.0
3	8	1.0
3	9	1.0
3	10	1.0
3	11	1.0
3	12	1.0
3	13	1.0
3	14	1.0
3	15	1.0
3	16	1.0
3	17	1.0
3	18	1.0
3	19	1.0
3	20	1.0
3	21	1.0
3	22	1.0
3	23	1.0
3	24	1.0
3	25	1.0
3	26	1.0
3	27	1.0
3	28	1.0
3	29	1.0
3	30	1.0
3	31	1.0
3	32	1.0
3	33	1.0
3	34	1.0
3	35	1.0
3	36	1.0
3	37	1.0
3	38	1.0

Рис. 1. Тип, марка коліс та прибуток за одиницю товару

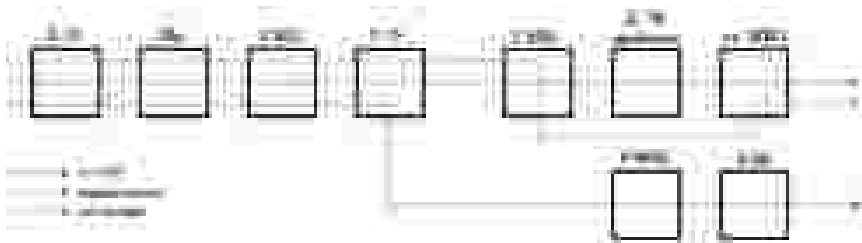


Рис. 2. Етапи, через які проходять усі типи коліс під час виробництва

Матриця $T = (t_{nm})$, $n = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,9}$ часу, який витрачається при виготовленні кожного типу коліс на кожному етапі виробництва, представлена в табл. 1.

Примітка: існують й інші типи коліс, а також марки коліс, які не належать до жодного з типів, але час, що витрачається на виготовлення й етапи, через які проходять ці колеса упродовж виробництва, збігаються з часом і етапами, що відповідають одному з трьох вище зазначених типів.

Таблица 1

Час виготовлення коліс на кожному етапі виробництва

[illegible]

На прикладі однієї плавки розглянемо час простою та правильність роботи алгоритму підрахунку часу виконання планового завдання. Порядком, за яким виготовлялися колеса : $x = (x_1, x_2, \dots, x_r) = (2323132)$. На рис. 3 представлена часова сітка, на якій відображається час, через який починається і закінчується кожний етап виробництва для кожного елемента плану. По осі x відкладений час, що вимірюється в годинах, по осі y – тип марки, що виготовляється. Із рисунка видно, що тривалість виробництва продукції за заданим планом становить 72 години.

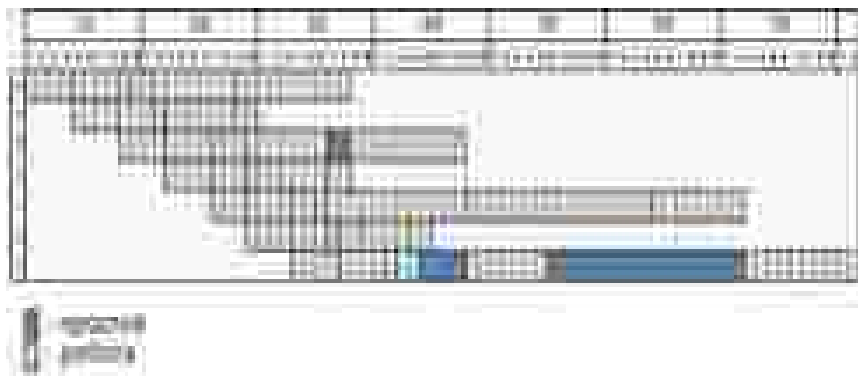


Рис. 3. Тривалість виконання плану на часовій прямій

На рис. 4 представлені результати розрахунку тривалості виконання заданого плану за допомогою запропонованого алгоритму.

The figure shows a screenshot of a software application window titled 'Результати розрахунку тривалості виконання плану'. The window contains a table with 10 columns and 10 rows of data. The columns are labeled: '№ завдання', 'Назва завдання', 'Тривалість (хв)', 'Початок виконання (хв)', 'Кінець виконання (хв)', 'Початок виконання (год)', 'Кінець виконання (год)', 'Початок виконання (хв)', 'Кінець виконання (хв)', and 'Початок виконання (год)'. The data is organized into a grid, with the first row representing the start of the plan and subsequent rows showing the duration of individual tasks and their completion times.

№ завдання	Назва завдання	Тривалість (хв)	Початок виконання (хв)	Кінець виконання (хв)	Початок виконання (год)	Кінець виконання (год)	Початок виконання (хв)	Кінець виконання (хв)	Початок виконання (год)
1	Введення даних	10	0	10	0	0	0	10	0
2	Вибір варіанта	10	10	20	0	0	10	20	0
3	Введення даних	10	20	30	0	0	20	30	0
4	Вибір варіанта	10	30	40	0	0	30	40	0
5	Введення даних	10	40	50	0	0	40	50	0
6	Вибір варіанта	10	50	60	0	0	50	60	0
7	Введення даних	10	60	70	0	0	60	70	0
8	Вибір варіанта	10	70	80	0	0	70	80	0
9	Введення даних	10	80	90	0	0	80	90	0
10	Вибір варіанта	10	90	100	0	0	90	100	0

Рис. 4. Час виконання плану, розрахований за допомогою розробленого алгоритму

Отримані результати збігаються, тож можна зробити висновок про коректність роботи запропонованого алгоритму розрахунку часу виконання плану в заданій послідовності.

Приклад. Візьмемо за вихідні дані план, за яким працювало підприємство протягом трьох місяців. Наведемо порядок, у якому виготовлялися колеса за типом:

(332222323233323233331111111111111111332222323233323233
2333111111111111111111332222323233323232333311111111111111113322
222323233323232333311111111111111111332222323233323232333111
1111111111113322223232333232323331111111111111111111133222232323
333232323333111111111111111133222232323332323233311111111111
1111)

Час, який було витрачено на виготовлення усіх коліс, становив 2122 години. Зауважимо, що простежується залежність у порядку, який використовують для виготовлення плану (33222223232333323233233311111111111111111).

Результати розрахунку оптимального часу виконання цього плану, а також послідовність, відповідно до якої продукція певного типу має вироблятися, отримані під час програмної реалізації розробленого алгоритму, наведені на рис. 5.



Рис. 5. Розрахунок порядку виготовлення коліс

Отже, мінімальний час виробництва продукції за заданим планом може скоротитися до 2 036 годин за рахунок зміни порядку проходження продукції за типами марок.

Результати цього і багатьох інших прикладів демонструють економію приблизно в 4– 7% порівняно з часом, який витрачається на виконання плану виготовлення коліс на підприємстві із використанням лише людського досвіду. Результати обчислювальних експериментів свідчать про адекватність побудованої моделі, про доцільність застосування запропонованого в роботі підходу щодо прийняття рішення про раціональну загрузку устаткування під час виробництва залізничних коліс.

У табл. 2 наведений порівняльний аналіз роботи генетичного алгоритму та алгоритму повного перебору. Аналіз здійснений за такими параметрами: обсяг продукції, що виробляється; час роботи програмного продукту; знайдена мінімальна тривалість виробництва продукції за планом. При цьому для генетичного алгоритму розглядаються варіанти, різні за кількістю епох та розміром популяції.

Таблиця 2

**Порівняльний аналіз алгоритму лексикографічного перебору
і генетичного алгоритму**

№ з/п	Алгоритм	Обсяг продукції	Кількість епох / популяцій	Час роботи програмного продукту	Час, який бу- де витрачено на виконання плану, год.
1	ГА	4 од.	100 / 2000	0:00:01	65
	ГА		250 / 6000	0:00:04	65
	Повного перебору		-	0:00:01	65
2	ГА	15 од.	100 / 2000	0:00:11	139
	ГА		250 / 6000	0:01:12	139
	Повного перебору		-	0:04:13	138

Зайнчення табл. 2

3	ГА	35 од.	100 / 2000	0:01:03	249
	ГА		250 / 6000	0:09:24	248
	Повного перебору		-	0:29:52	247
4	ГА	250 од.	100 / 2000	0:18:03	2130
	ГА		250 / 6000	1:04:31	2125
	Повного перебору		-	2:48:07	2124

Отже, якщо необхідно швидко прийняти рішення про порядок виготовлення марок коліс, то можна використовувати генетичний алгоритм, але слід пам'ятати, що даний метод не завжди знаходить глобальний мінімум. Генетичний алгоритм дає ефективний результат щодо малих обсягів продукції, яка виготовляється, та при збільшенні кількості епох та популяції, але останнє призводить до зростання часу роботи програмного продукту.

Якщо ж немає обмежень у часі, за який можна знайти оптимальний розв'язок задачі раціональної загрузки устаткування при виконанні плану виробництва, то слід використовувати алгоритм повного лексикографічного перебору усіх можливих варіантів. Даний алгоритм гарантовано знайде найкраще рішення.

Висновки. У роботі розглянутий технологічний процес виробництва різних марок залізничних коліс, здійснена систематизація даних про марки та відповідні їм типи коліс, етапи виробництва кожного типу коліс; прибуток, що отримує підприємство від реалізації одиниці кожної марки коліс. Побудована математична модель процесу оптимальної загрузки обладнання при виробництві різних марок коліс із метою мінімізації часу простою обладнання. Розроблено програмне забезпечення у вигляді системи підтримки прийняття рішень про оптимальну загрузку обладнання при виробництві різних марок коліс за заданим планом у відведений час. У разі, коли цей мінімальний час виробництва запланованого обсягу продукції перевищує час, відведений директивно, система спроможна знайти такий план виробництва, який забезпечував би максимальний прибуток від ре-

лізації випущеної продукції за умов обмеженого часу виробництва. Використання даного програмного продукту гарантує зменшення часу простою устаткування під час виробництва, що сприяє економії енергетичних і матеріальних витрат на виробництво залізничних коліс.

Бібліографічні посилання

1. **Минаев А.А.** Концептуальные пути решения основных проблем металлургического комплекса Украины / А.А. Минаев, В.В. Кисиль // Науч. тр. Донец. нац. техн. ун-та. – Серия «Металлургия». – 2011. – Вып. 13.
2. **Коряшкіна Л.С.** Системний аналіз та оптимізація витрат оборотного лому при виробництві сталі: зб. наук. пр. / Л.С. Коряшкіна, О.О. Сазонова // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д., 2012. – С. 188 – 197.

Надійшла до редколегії 25.06.2013 р.

Р. В. ¹¹Рузич

Хмельницький національний університет

КОЛИВАННЯ В МОДЕЛІ РОЗІМКНЕНОГО ГІПЕРЦИКЛУ ЕЙГЕНА

Розглянуто тривимірну модель розіmkненого гіперциклу Ейгена. Визначено умови, при виконанні яких у системі можливі коливання. Показано здатність популяцій вибирати ціну боротьби.

Рассмотрена трехмерная модель разомкнутого гиперцикла Эйгена. Определены условия, при выполнении которых в системе возможны колебания. Показана способность популяций выбирать цену борьбы.

We consider the three-dimensional model of open Eigen's hypercycle. It was defined the conditions under which there are fluctuations in the system. The ability of populations to choose the price struggle was shown.

Ключові слова: екосистема, гіперцикл, коливання, граничний цикл.

Вступ. Швидкий розвиток технократичного суспільства поставив перед людством гострі екологічні проблеми, що зумовило необхідність моделювання біосферних процесів. Основним об'єктом тут постає біогеоценоз [1; 6; 11] як макросистема, що складається з біотичних та абіотичних елементів, розмішених на певній території та об'єднаних кругообігом речовин та енергії. Розуміння процесів, що відбуваються всередині екосистеми, взаємозв'язків її елементів дозволить не лише здійснювати ефективну та оперативну екологічну політику, а й трохи відкрити таємницю виникнення та розвитку різноманіття біологічних форм.

Одним із підходів до моделювання біогеоценозів є використання теорії гіперциклів. Серед властивостей моделі, розробленої Ейгеном та Шустером [14], є те, що вона описує ієрархічну структуру системи, де наявність представників вищих рівнів визначається належним функціонуванням нижчих. Проте слід зазначити, що в екологічних системах, на відміну від мікробіологічних, зв'язок між різними рівнями не є циклічним. Це нашто-

вхує на ідею використовувати для опису екологічних сукцесій розімкнений гіперцикл [13].

Зауважимо, що існує досить багато праць із дослідження різних модифікацій гіперциклів. Так, у [14; 19] здійснено дослідження класичної моделі. Важливі результати щодо стійких станів у моделях із дифузійно розподіленою початковою концентрацією елементів були отримані в роботах [17; 18]. Щодо моделі розімкненого гіперциклу, зазначимо, що вона мало досліджена. Так, у [9; 13] розглянуто двовимірний випадок, а в роботі [10] визначено стійкість особливих точок тривимірної системи.

Постановка проблеми. Розглянемо динаміку трьох популяцій, що описується розімкненим гіперциклом Ейгена:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \left(F_1(x) - \frac{1}{S_0} (x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \left(F_2(x) - \frac{1}{S_0} (x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \left(F_3(x) - \frac{1}{S_0} (x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_3, \end{cases} \quad (1)$$

де $F_1(x) = N - x_1$, $F_2(x) = a_1 x_1 - x_2$, $F_3(x) = a_2 x_2 - x_3$, $a_1 > 0, a_2 > 0, N > 0, S_0 > 0$, x_1, x_2, x_3 – чисельність (біомаса) популяцій (тут і надалі розумітимемо залежність змінних від часу); N – коефіцієнт, що задає значення чисельності рівноваги для першої асоціації, при відсутності другої; a_1 – коефіцієнт, що описує ступінь залежності другої асоціації від попередньої; S_0 – ємність середовища. Слід зазначити, що $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ відомі як функції Аллена [16] і відображають характер зв'язку, при якому в систему може бути включена нова популяція лише у випадку відповідного розвитку косного середовища.

Для аналізу динаміки системи важливим питанням є дослідження коливань. У роботі виділимо область, де можливе знаходження граничних циклів, визначимо умови виникнення коливальних рухів біля особливих точок та спробуємо дати інтерпретацію отриманих результатів.

Перш ніж перейти до розгляду основної частини, введемо поняття граничного циклу.

Означення 1. Граничним циклом автономної системи звичайних диференціальних рівнянь називається ізольована замкнена траєкторія.

Автоколивання

Згідно з А.А. Андроном [2; 3] головною ознакою встановлення в системі періодичних коливань є наявність граничного циклу. Зазначимо, що цикл є граничною траєкторією в тому сенсі, що для такої траєкторії існує її окіл, з якого всі інші траєкторії прямують до неї при $t \rightarrow +\infty$ чи при $t \rightarrow -\infty$. Відповідно до сказаного можемо стверджувати, що граничний цикл обмежує область фазового простору, в якому знаходиться принаймні одна особлива точка.

Також слід зауважити, що згідно з теоремою про існування та єдиність розв'язків граничний цикл не може перетинати інші інтегральні криві. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = S_0$ – інтегральні площини системи (1).

Доведення. Нехай неявна функція $F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 0$ є частинним розв'язком системи (1). Тоді виконується така рівність:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} + \\ & + \frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_3(t)} \frac{dx_3(t)}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Легко показати, що перші три функції теореми задовольняють рівності (2). Запишемо цю рівність для функції $x_1 + x_2 + x_3 = S_0$ (для спрощення запису не позначатимемо явно залежність змінних від часу):

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3 - S_0)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a_1 x_1 x_2 - a_2 x_2 x_3 - N x_1)}{S_0} = 0.$$

Урахувавши, що $x_1 + x_2 + x_3 - S_0 = 0$, отримаємо тотожність. Таким чином, теорему доведено.

Покажемо, що в системі (1) не може існувати замкнених інтегральних поверхонь. Для цього використаємо узагальнений критерій Бендиксона –

Дюлака для тривимірної системи диференціальних рівнянь [7]. Розглянемо вираз

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1}(P\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Q\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(R\Phi), \quad (3)$$

де $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ – праві частини системи (1), причому $P(x_1, x_2, x_3)$ відповідає першому рівнянню, $Q(x_1, x_2, x_3)$ – другому, $R(x_1, x_2, x_3)$ – третьому; $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ – неперервно диференційована функція.

Шукатимемо функцію $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ у формі

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^k x_2^m x_3^n (x_1 + x_2 + x_3 - S_0).$$

Якщо прийняти $k = \frac{N - S_0(2 + a_1 + a_1 a_2)}{S_0}$, $m = -(a_2 + 2)$, $n = -2$,

$v = \frac{S_0(1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2) - N}{S_0}$, то вираз (3) запишеться як

$$D = N(S_0(1 + a_1 + a_1 a_2) - N)\Phi(x_1, x_2, x_3).$$

Як можна побачити, вираз D дорівнює нулю лише на інтегральних площинах, указаних у теоремі 1. Отриманий результат запишемо у формі теореми.

Теорема 2. У фазовому просторі системи (1) немає замкнених інтегральних поверхонь.

Коливання біля особливих точок

Відомо, що ознакою наявності коливань біля особливої точки є комплексні власні значення матриці Якобі в ній [4; 15]. Таким чином, потрібно проаналізувати характеристичні рівняння матриць Якобі у відповідних особливих точках. Легко показати, що біля точок $(0,0,0)$; $(N,0,0)$;

$$(N, a_1 N, 0); \quad (S_0, 0, 0); \quad (0, S_0, 0); \quad \left(\frac{N + S_0}{a_1 + 2}, \frac{S_0(a_1 + 1) - N}{a_1 + 2}, 0 \right); \quad (0, 0, S_0);$$

$\left(\frac{S_0 + N}{2}, 0, \frac{S_0 - N}{2} \right); \quad \left(0, \frac{S_0}{a_2 + 2}, \frac{S_0(a_2 + 1)}{a_2 + 2} \right)$ коливні рухи відсутні. Тому

основну увагу приділимо дослідженню точок $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ та $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$.

Використавши теорему Безу [8], запишемо характеристичне рівняння матриці Якобі в точці $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ таким чином:

$$\left(\lambda + \frac{N(1 + a_1 + a_1 a_2) - S_0}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3} \right) (\lambda^2 + a\lambda + c) = 0, \quad (3)$$

$$\text{де } a = \frac{(a_1 + a_1 a_2 + a_2 + 2)S_0^2 + (a_1 a_2 + a_1)NS_0 - (a_2 + 2)N^2}{S_0(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3)},$$

$$c = \frac{1}{S_0(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3)^2} ((a_1 + 1)(a_1 a_2 + 1 + a_2)S_0^3 + (a_2^2 + 3a_2 - 1)a_1^2 + (2a_2^2 + 4a_2 + 1)a_1 + a_2^2 + a_2)NS_0^2 + (a_2^2 + a_2 - 3)a_1^2 - (a_2^2 + 4a_2 + 2)a_1 - 2a_2^2 - 5a_2 - 3)N^2 S_0 + (a_2 + 2)(a_1 - 1)(a_1 + a_2 + 1)N^3.$$

Очевидно, що існуватиме пара комплексних власних значень, якщо дискримінант квадратичного полінома в рівнянні (3) буде від'ємний:

$$\begin{aligned} & \frac{S_0^4}{N^4} (a_1 a_2 - a_1 + a_2)^2 + \frac{S_0^3}{N^3} (-2(a_2^2 + 4a_2 - 3)a_1^2 - 2(3a_2^2 + 5a_2)a_1 - 4a_2^2 - 4a_2) + \\ & + \frac{S_0^2}{N^2} (-3a_2^2 + 2a_2 - 13)a_1^2 + 2(a_2^2 + 5a_2 + 2)a_1 + 6a_2^2 + 12a_2 + 4 + \frac{S_0}{N} ((4a_2 + 8)a_1^2 + \\ & + (2a_2^2 + 2a_2 - 4)a_1 - 4a_2^2 - 12a_2 - 8) + (a_2 + 2)^2 < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, біля точки, що розглядається, існуватимуть коливання, якщо параметри моделі (1) задовольнятимуть умові (4).

Як приклад розглянемо траєкторії біля точки $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ при $\frac{S_0}{N} = 1$, $a_1 = 30$, $a_2 = 20$. Зазначимо, що при вказаних значеннях параметрів поліном у лівій частині нерівності (3) дорівнює -1558800 , а корені характеристичного рівняння $\lambda_1 \approx -0.965$, $\lambda_2 \approx -0.965 + 0.956i$, $\lambda_3 \approx -0.965 - 0.956i$. Для відображення фазового простору біля даної точки використаємо метод Рунге – Куты четвертого порядку [5] (рис. 1). На рис. 1, а та 1, б можна помітити явні коливання.

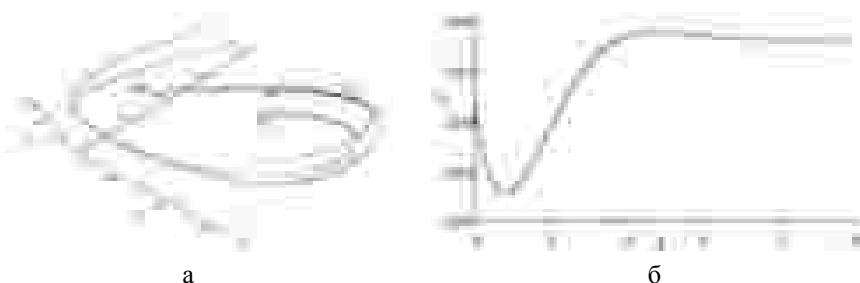


Рис. 1. Динаміка біля точки

$\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ при $\frac{S_0}{N} = 1$, $a_1 = 30$, $a_2 = 20$: а) фазовий портрет; б) динаміка асоціації x_1 .

Характеристичне рівняння матриці Якобі в точці $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ можна записати як

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } a = \frac{N(S_0(1+a_1+a_1a_2)-N)}{S_0}, \quad b = \frac{N^2a_1(S_0(1+a_2+a_1a_2)-N(1+a_1+a_2))}{S_0},$$

$$c = \frac{N^3a_1^2a_2(S_0-N(1+a_1a_2+a_1))}{S_0}.$$

Лема 1 [12]. Рівняння $x^3 + px + q = 0$ має пару комплексних коренів при виконанні умови

$$-4p^3 - 27q^2 < 0. \quad (6)$$

Заміною змінних $\bar{\lambda} = \lambda - \frac{N(S_0(1+a_1+a_1a_2)-N)}{3S_0}$ приведемо характеристичне рівняння (5) до вказаної форми:

$$\bar{\lambda}^3 + \frac{N^2}{3S_0^2}(S_0^2(-a_1^2a_2^2+a_1^2a_2+a_1a_2-a_1^2+a_1-1)-NS_0(a_1a_2+3a_1^2+a_1-2)-N^2)\bar{\lambda} +$$

$$+ \frac{N^3}{27S_0^3}(S_0^3(a_1a_2+a_1-2)(a_1a_2-2a_1+1)(a_1a_2-a_1-1)+NS_0^2((-27a_1^3+3a_1^2)a_2^2 -$$

$$-6a_1(a_1+1)(a_1-1)a_2+9a_1^3+12a_1^2+6a_1-6)-3N^2S_0(3a_1^2+a_1(a_2+1)-2)-2N^3)=0.$$

Тоді умова (6) запишеться як

$$\frac{S_0^4}{N^4}(a_1a_2-1)(a_1-1)(a_2-1)^2 + \frac{S_0^3}{N^3}(-4a_1^4a_2^5+2(a_1^4+2a_1^3+a_1^2)a_2^4 +$$

$$+(14a_1^4-14a_1^3+10a_1^2-6a_1)a_2^3 + (-6a_1^4-12a_1^3-8a_1^2+2a_1+4)a_2^2 +$$

$$+(-2a_1^4+8a_1^3+14a_1^2+4a_1-8)a_2+2a_1^3-6a_1^2-4a_1+4)-\frac{S_0^2}{N^2}((27a_1^4-6a_1^3-a_1^2)a_2^4 +$$

$$+(36a_1^4+16a_1^3-14a_1^2+6a_1)a_2^3 + (-10a_1^4-4a_1^3-2a_1^2+6a_1+6)a_2^2 +$$

$$+(-8a_1^4-18a_1^3-22a_1^2+12)a_2-a_1^4+8a_1^3+14a_1^2-6)-\frac{S_0}{N}((6a_1^2-2a_1)a_2^3 +$$

$$+(18a_1^3+4a_1^2-10a_1+4)a_2^2 + (8a_1^3+10a_1^2-4a_1-8)a_2-4a_1^4-10a_1^3-6a_1^2+4a_1+4)-$$

$$+(4a_1-1)a_2^2-2(a_1+1)a_2+(a_1+1)^2) < 0.$$

(7)

Як і для попередньої точки, розглянемо фазовий простір біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ при $\frac{S_0}{N} = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ (рис. 2). Зазначимо, що при вказаних значеннях параметрів поліном у лівій частині нерівності (7) дорівнює -852012 , а корені характеристичного рівняння (5) такі: $\lambda_1 \approx 0.26$, $\lambda_2 \approx -3.53 + 1.173i$, $\lambda_3 \approx -3.53 - 1.173i$. Для побудови розв'язку біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$, як і в першому випадку, використаємо метод Рунге – Кута четвертого порядку. Зазначимо, що на рис. 2, а важко виділити траєкторії, що утворюють спіраль. Проте на рис. 2, б помітний слабо виражений коливний характер динаміки популяції x_2 .

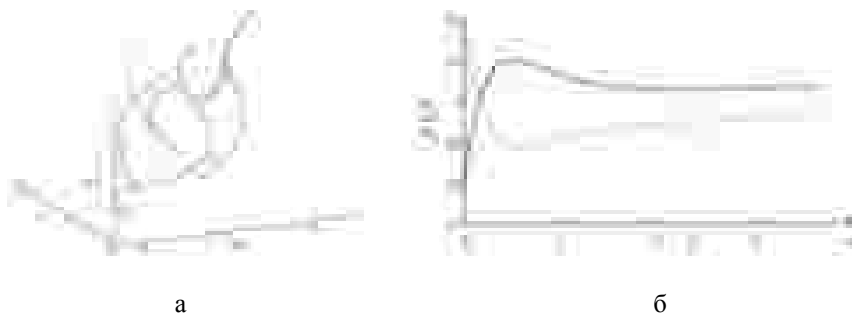


Рис. 2. Динаміка біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ при $\frac{S_0}{N} = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$:

а) фазовий портрет; б) динаміка популяцій x_2 та x_3

Визначимо значення параметрів, при яких дійсна частина власних значень дорівнює нулю, що дасть нам можливість говорити про існування чи відсутність біля особливої точки спірального центра (тривимірний аналог центра у двовимірному просторі).

Теорема 3. Біля точки $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$,

$\left(\frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ не існує спірального центра при додатних значеннях параметрів.

Доведення. Запишемо умову комплексних коренів із нульовою дійсною частиною квадратичного полінома в рівнянні (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, \\ c > 0, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{S_0}{N} = \frac{a_2 + 2}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 2}, \\ a_1 \in (0; 1), \\ \frac{S}{N} \in \left(0; \frac{1 - a_1}{a_1 + 1} \right) \cup \left(\frac{a_1 + a_2 + 1}{a_2 + a_1 a_2 + 1}; +\infty \right), \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_0}{N} = \frac{a_2 + 2}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 2}, \\ a_1 \in [1; +\infty), \\ \frac{S}{N} \in \left(\frac{a_1 + a_2 + 1}{a_2 + a_1 a_2 + 1}; +\infty \right), \end{array} \right\},$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Урахуємо обмеження,} \\ \text{накладені на параметри} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{S_0}{N} \in \emptyset,$$

де $\emptyset$ – пуста множина.

Таким чином, квадратичний поліном у рівнянні (3) не має комплексних коренів із нульовою дійсною частиною, а це, у свою чергу, означає, що біля точки, яка досліджується, не може бути спірального центра, що й потрібно було довести.

Теорема 4. Біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ не існує спірального центра при додатних значеннях параметрів.

Доведення. Запишемо загальний поліном третього степеня, коренями якого є комплексні числа з нульовою дійсною частиною:

$$(\lambda^2 + d)(\lambda - h) = \lambda^3 - h\lambda^2 + d\lambda - hd. \quad (8)$$

Проаналізувавши перетворення (8), запишемо умову наявності комплексних коренів із нульовою дійсною частиною характеристичного рівняння (5):

$$\begin{cases} b > 0, \\ ab = c, \end{cases} \quad (9)$$

де a, b, c – аналогічні коефіцієнтам рівняння (5).

Випишемо умову виконання нерівності в системі (9):

$$b > 0 \Rightarrow \frac{S_0}{N} \in \left(\frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}; +\infty \right). \quad (10)$$

Розглянемо рівняння в системі (9):

$$\begin{aligned} ab = c &\Rightarrow ab - c = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{N^3 a_1}{S_0^2} ((a_1 + a_2 + 1)N^2 + (a_1^2 a_2^2 - a_1^2 - a_1 a_2^2 - 2a_1 a_2 - 2a_1 - 2a_2 - 2)NS_0 + \\ + (a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)S_0^2) &= 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Випишемо корені рівняння (11):

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_0}{N} \right)_1 &= \frac{2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 + 2a_2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 + a_1 \sqrt{D}}{2(a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)}, \\ \left(\frac{S_0}{N} \right)_2 &= \frac{2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 + 2a_2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 - a_1 \sqrt{D}}{2(a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)}, \end{aligned}$$

де $D = a_1^2 a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 2a_1 a_2^4 - 4a_1 a_2^3 - 6a_1 a_2^2 + 4a_1 + a_2^4 - 4a_2^3 - 8a_2^2 + 4$.

Порівняємо ліву межу проміжку (10) із більшим коренем $\left(\frac{S_0}{N} \right)_1$:

$$\left(\frac{S_0}{N} \right)_1 < \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2},$$

$$(a_1 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2) \sqrt{D} < a_1^3 a_2^3 + 2a_1^3 a_2^2 + a_1^3 a_2 + 2a_1^2 a_2^3 + 5a_1^2 a_2^2 + 3a_1^2 a_2 + a_1^2 + a_1 a_2^3 + a_1 a_2^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1.$$

Вважатимемо, що дискримінант додатний ($D > 0$); у протилежному випадку корені рівняння (11) будуть комплексними, що суперечить обмеженням (додатність, дійсність), накладеним на параметри. Тоді матимемо

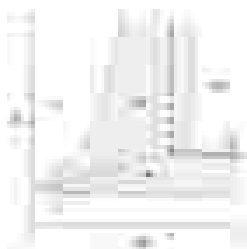
$$-4a_1^2 a_2^2 (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_1 a_2 + 1)(a_1 + a_2 + 1)(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3) < 0.$$

Отже, отримали, що найбільший корінь рівняння (11) менший за ліву межу проміжку (10), що означає, що система (9) не має розв'язку при на-

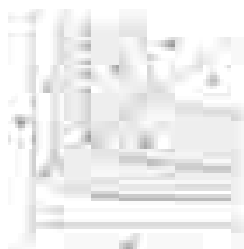
кладених на параметри умовах. Таким чином, біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ не може бути спірального центра, що й потрібно було довести.

Аналіз. За результатами дослідження стійкості особливих точок тривимірної моделі розімкненого гіперциклу Ейгена [9] та коливань біля особливих точок побудуємо перерізи поверхонь, що обмежують області параметрів, при яких точки стійкі і при яких існують коливання, при $a_1 = 0.1$ (рис. 3, а), $a_1 = 0.5$ (рис. 3, б), $a_1 = 3$ (рис. 3, в). Сірим кольором заливо область параметрів, при яких точки стійкі та біля яких існують коливні рухи. При значеннях параметрів з області I стійкими є точка $(S_0, 0, 0)$ або $\left(\frac{N + S_0}{a_1 + 2}, \frac{S_0(a_1 + 1) - N}{a_1 + 2}, 0 \right)$, з областей II, III, IV – точка $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$, з областей V, VI, VII – точка $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$. Пунктирна лінія розмежовує область параметрів, при яких чисельність третьої асоціації менша за чисельність першої (область зліва від лінії), та область параметрів, при яких чисельність третьої асоціації більша за чисельність першої (область справа від лінії). Слід зазначити, що при збільшенні параметра a_1 описана лінія зсувається ліворуч, що можна пояснити тим, що залежність третьої асоціації від першої здійснюється через посередництво другої асоціації, залежність якої від першої визначається даним параметром.

Із рис. 3 видно, що при досить малій ємності (область I) середовища коливні рухи відсутні, проте при її збільшенні і досягненні того рівня, при якому можливе існування трьох асоціацій, у системі з'являються коливання. Таким чином, можна говорити, що третя асоціація вносить у систему коливання.



а) $a_1 = 0.1$



б) $a_1 = 0.5$



в) $a_1 = 3$

Рис. 3. Області параметрів, що відповідають різній динаміці популяцій

Спробуємо проаналізувати рис. 3. При досить малих значеннях параметра a_2 (області II та V) домінантом виступає перша асоціація, яка при гнічує дві інші. При збільшенні параметра a_2 в системі з'являються коливання (слід зазначити, що при збільшенні параметра a_1 вони з'являються раніше), що можна пояснити загостренням боротьби за ресурси і намаганням другої та третьої асоціацій отримати лідерство. Проте відсутність переваги проявляється в коливаннях при незначних змінах чисельності асоціацій. При подальшому збільшенні параметра a_2 домінантом стає друга або третя асоціація (залежно від співвідношення параметрів a_1 та a_2).

Розглянемо ситуацію з обмеженими ресурсами (область параметрів II, III, IV). Зафіксуємо параметр a_2 таким чином, щоб точка з області параметрів II (позначимо її т. А для полегшення подальшого викладення) була якнайближче до області III. Як можна побачити, при русі т. А в напрямку збільшення ємності середовища S_0 при зафіксованому значенні a_2 вона потрапляє в область III (біля особливої точки з'являються коливання). Звідси можна припустити, що при збільшенні ємності середовища асоціації починають активніше боротися за ресурси.

Розглядаючи випадок із надлишком ресурсів (область параметрів V, VI, VII), тепер зафіксуємо точку (т. В) з області параметрів VI якнайближче до області V. При русі цієї точки в напрямку зростання ємності середовища S_0 при фіксованому a_2 т. В переходить з області параметрів VI в область V. Тут асоціації відмовляються від боротьби при збільшенні надлишку ресурсів. Із вищерозглянутого можливе припущення, що асоціації здатні обирати ціну боротьби.

Розглянемо знову ж точку (т. С) з області параметрів VI якнайближче до області VII. Зафіксуємо параметр a_2 і рухатимемо точку в напрямку збільшення ємності середовища. Як можна побачити з рисунків 3, при збільшення ємності S_0 т. С переходить з області VI в область VII (тобто, як вище зазначалося, з області «відсутності переваги» в область «домінування»). У даній ситуації проявляється «жадібність» асоціацій, коли при досить великому значенні параметра a_2 при збільшенні надлишку ресурсів асоціації починають активніше боротися за останні.

Висновки. Таким чином, у роботі визначено, що в системі (1) трьох гіперциклічно пов'язаних популяцій можливі коливання (затухаючі або

такі, що збільшуються) навколо положень рівноваги $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ та $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$.

Показано, що при додатних значеннях параметрів системи у фазовому просторі не може існувати спіральний центр. Також доведено, що у фазовому просторі системи немає замкнених інтегральних поверхонь.

Бібліографічні посилання

1. **Авдин В. В.** Математическое моделирование экосистем: учеб. пособие / В. В. Авдин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2004. – 80 с.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 568 с.
3. **Андронов А. А.** Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 920 с.
4. **Баутин Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости: 2-е изд., доп. / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
5. **Березин И. С.** Методы вычислений. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Глав. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – Т. 2. – 620 с.
6. **Бузыкин А. И.** Моделирование элементов лесных биогеоценозов / А. И. Бузыкин. – Красноярск: Ин-т леса и древесины им. В. Н. Сукачева СО АН СССР, 1985. – 166 с.
7. **Буриев Т. Э.** Исследование периодических режимов в вольтерровских моделях сообщества трех популяций / Т. Э. Буриев, В. Э. Эргашев // Исследования по математической биологии: сб. науч. тр., посв. памяти А. Д. Базыкина. – Пушкино, 1996. – С. 70–74.
8. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры: 9-е изд. / А. Г. Курош. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 431 с.
9. **Рузич Р. В.** Розімкнений гіперцикл як модель фітоценогенезу / Р. В. Рузич // XIV всеукр. (9-та міжнар.) студ. наук. конф. з прикл. мат. та інформ. СНКПМІ–2011, 5-6 травня 2011 р.: тези доп. – Львів: ЛНУ, 2011. – С. 150–152.
10. **Рузич Р. В.** Стійкість особливих точок трьохвимірного випадку однієї моделі екологічної макросистеми / Р. В. Рузич // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2012. – Т. 17, вип. 3. – С. 45–51.
11. **Сукачев В. Н.** Основы лесной типологии и биогеоценологии / В. Н. Сукачев // Изб. тр.: в 3 т. – Л.: Наука, 1972. – Т. 1. – 420 с.
12. **Фаддеев Д. К.** Сборник задач по высшей алгебре: 10-е изд. / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М.: Наука; Глав. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 304 с.

13. **Чернышенко С. В.** Нелинейные методы динамики лесных биогеоценозов / С. В. Чернышенко. – Днепропетровск: Изд.во ДНУ, 2005. – 512 с.
14. **Эйген М.** Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул / М. Эйген, П. Шустер; пер. с англ. В. М. Андреева. – М.: Мир, 1982. – 270 с.
15. **Эрроусмит Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс; пер. с англ. Т. Д. Вентцель. – М.: Мир, 1986. – 243.
16. **Allen P. M.** Evolution, population dynamics, and stability / P. M. Allen // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1976. – Vol. 73, No. 3. – P. 665–668.
17. **Bratus' A. S.** Stationary solutions in a closed distributed Eigen-Schuster evolution system / A. S. Bratus', V. P. Posvyanskii // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42, No. 12. – P. 1762–1774.
18. **Bratus' A. S.** Stability and the limit behavior of the open distributed hypercycle system / A. S. Bratus', E. N. Lukasheva // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45, No. 11. – P. 1564–1576.
19. **Hofbauer Josef** A difference equation model for the hypercycle / Josef Hofbauer // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 44, № 4. – P. 762–772.

Надійшла до редколегії 16.04.2013 р.

УДК 004.08

К.А. ¹²Ручкин, Е.А. Шевченко, В.А. Акчурин

Институт информатики и искусственного интеллекта, ДонНТУ

РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОГО КЛИЕНТСЕРВЕРНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ РАСШИРЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ

Розглянуто проблему інтерактивних додатків розширеної реальності. Проаналізовано додатки розширеної реальності у різних сферах людської активності. Наведена архітектура клієнтського та серверного додатків багатозадачної платформи на основі клієнт_серверної технології.

Рассмотрена проблема многозадачных платформ расширенной реальности. Проанализированы приложения расширенной реальности в различных сферах человеческой деятельности. Приведена архитектура клиентского и серверного приложений многозадачной платформы на основе клиент_серверной технологии.

In this work the problem of interactive applications of augmented reality is investigated. Augmented reality applications in various fields of human activity are being analyzed. Architecture of client and server applications of multitask platform based on client-server technology is represented as result of research.

Ключевые слова: расширенная реальность, интерактивность, маркер, манипулятор, платформа, распознавание.

Введение. Одним из перспективных направлений в программном обеспечении (ПО) на сегодняшний день являются естественные интерфейсы. Цель данного направления – разработка интерфейсов приложений, отличных от стандартных двухмерных интерфейсов. К ним относятся речевые интерфейсы, виртуальная реальность, а также расширенная реальность.

Расширенной реальностью является наложение дополнительных ощущений (чаще всего зрительных) на естественное окружение. Для этого используются системы распознавания изображений и графические средства для добавления дополнительного графического контента. Контент может быть как статическим, так и динамическим, интерактивным.

Архитектура приложения расширенной реальности (рис. 1) имеет следующий вид. В систему распознавания поступает видео с камеры, в кото-

ром присутствуют предварительно установленные изображения – маркеры. Маркерами могут быть двухмерные черно-белые изображения, цветные изображения или окружающие объекты. Система распознавания находит позицию маркеров относительно камеры и передает в графическую библиотеку, где видео, на основе позиций маркеров, дополняется графическим контентом и выводится на экран.

Таким образом, с точки зрения распознавания имеется, с одной стороны, система распознавания, обладающая алгоритмами, работающими с некоторой точностью, а с другой стороны – система маркеров, выделяющихся на фоне окружающей среды.

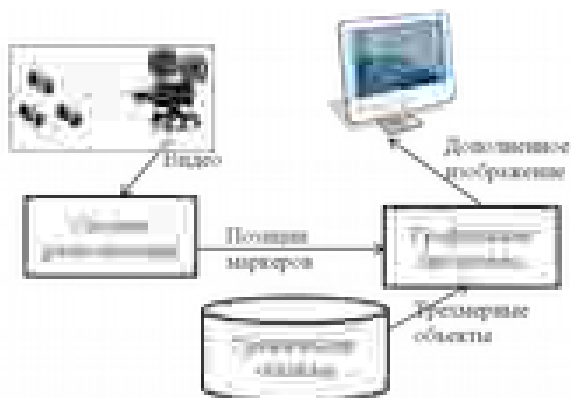


Рис. 1. Архитектура приложений расширенной реальности

По данным компании Adventure Design, расширенная реальность активно используется в таких сферах человеческой деятельности, как образование, реклама, презентации, компьютерные игры.

В последние десятилетия было проведено много исследований, посвященных изучению эффекта 3D компьютерных технологий в сфере обучения с положительными и обнадеживающими результатами. Есть уже много AR систем с функциями, которые допускают двустороннее взаимодействие между пользователем и системой, разработанных для образовательных целей [5]. Примером такой системы является проект «Магическая книга солнечной системы», созданный Недимом Слайджепчевичем и Ванджу Хавнгом. Он представляет собой книгу, снабженную черно-белыми маркерами. При попадании маркера в поле камеры, на экране появляется планета с ее описанием [5].

Еще одним проектом является “Physics playground”. Он использует последние физические ядра, разработанные для рынка компьютерных игр с

целью имитации физических экспериментов. Студенты получают возможность строить собственные эксперименты и изучать их [6].

Примером игровых проектов является расширение виртуальным контентом настольных игр. С помощью простой веб-камеры и методов компьютерного зрения стандартные фишки настольной игры преобразуются в игру с расширенной реальностью. Эти объекты используются как маркеры и дополняются визуальными эффектами [7].

Проекты, представленные выше, как и основная часть проектов расширенной реальности, не предусматривают многопользовательскую, клиент-серверную архитектуру. Однако в этой области также имеются разработки. В рамках проектов ARTag [4] и Studierstube [3] были проведены разработки локальных и удаленных многопользовательских проектов расширенной реальности. Примером таких проектов являются телеконференции с использованием расширенной реальности. С помощью видеокamеры и очков расширенной реальности пользователь может видеть собеседников на маркерах с их именами [2].

Каждый проект имеет свои преимущества, однако общим их недостатком является «жесткое» встраивание системы распознавания в приложение на этапе его создания. Одно приложение предлагает один описанный набор функций, не подлежащий расширению. *Однако при использовании очков расширенной реальности необходимо изменять набор функций, предлагаемых приложением в зависимости от окружения, а также потребностей пользователя, то есть работать с несколькими приложениями расширенной реальности по очереди или одновременно. Таким образом, одной из недостаточно исследованных актуальных задач в данный момент является разработка платформ расширенной реальности, поддерживающих многозадачность.*

Постановка задачи. Целью данной работы является разработка интерактивной многозадачной платформы расширенной реальности. Для обеспечения многозадачности была выбрана клиент-серверная технология, проведено исследование различных инструментов взаимодействия пользователя с приложением расширенной реальности.

Проект расширенного рабочего стола, рассматриваемый в данной статье, предлагает многозадачную платформу, на основе которой могут запускаться различные клиентские приложения расширенной реальности. Она берет на себя все функции распознавания изображений, позиционирования и вывода графической информации на экран. Клиентское приложение реализует только логику, а также операции с графическим контентом (трехмерным интерфейсом программы).

Целью данного исследования является также проектирование и реализация интерактивного приложения расширенной реальности на основе клиент_серверной технологии. Данная технология позволит ему обмениваться информацией с другими приложениями и, таким образом, сделает возможным существование нескольких приложений в одном дополненном пространстве.

Практическим применением данной разработки может быть расширенный рабочий стол – платформа, аналогичная рабочему столу Windows, однако работающая в расширенной реальности. Таким образом, пользователь в расширенной реальности может одновременно работать с текстовыми документами, играть и т.д.

Для реализации клиент_серверной технологии в полной мере (не только локального сервера) проект предусматривает многопользовательскую технологию, а также сетевую прозрачность. В результате с одним рабочим столом могут работать сразу несколько пользователей, в том числе и удаленно.

Метод решения. Разработка многозадачной интерактивной платформы расширенной реальности имеет следующие этапы:

- 1) исследование различных методов взаимодействия и разработка интерфейса для данной работы;
- 2) разработка архитектуры платформы;
- 3) разработка механизмов взаимодействия клиентского и серверного приложений.

Если говорить об обеспечении взаимодействия пользователя с приложением, на наиболее простом уровне это происходит с помощью поворота камеры или маркера. Дополнительное изображение поворачивается вместе с маркером. Однако для более сложных взаимодействий используются дополнительные инструменты.

В качестве дополнительных манипуляторов может использоваться лист с нанесенными управляющими маркерами (рис. 2,а). Некоторые из них закрываются рукой, представляя механизмы интерактивности.

Еще одним средством обеспечения интерактивности являются специальные предметы, манипуляторы с нанесенными маркерами (рис. 2,б). Система распознавания может определить его позицию в расширенном пространстве. Таким образом, можно определить его взаимодействие с виртуальными объектами.

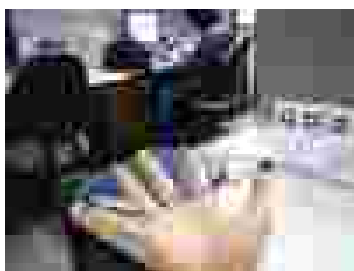
Наиболее сложным инструментом взаимодействия является тело человека, к примеру человеческие руки (рис. 2,в). Данное направление еще разрабатывается, так как стабильное распознавание рук представляет проблему для систем распознавания.



а



б



в

**Рис. 2. Инструменты взаимодействия пользователя с приложением:
а – закрытие маркеров; б – манипулятор «ручка»; в – распознавание руки**

Пользовательский интерфейс взаимодействия состоит из плоского предмета, снабженного маркерами (расширенный рабочий стол), и манипулятора (рис. 3).

Дизайн и разметка расширенного рабочего стола определяются отдельно для особенностей запроса каждого пользователя. Это может быть скатерть с нанесенными на нее маркерами либо лист бумаги разного размера.

Маркеры служат для позиционирования рабочего стола в пространстве, а разметка прямыми линиями – для формирования переднего плана изображения. Расширенный рабочий стол задает систему координат, в которой рисуются трехмерные объекты. К объектам, если это необходимо, привязываются физические сущности, которые после этого регистрируются в физическом мире и в серверном приложении. В физическом мире обрабатываются их взаимодействия, а серверное приложение посылает со-

общение клиентскому о взаимодействии манипулятора и объекта приложения. Манипулятор основан на разработке Studierstube.

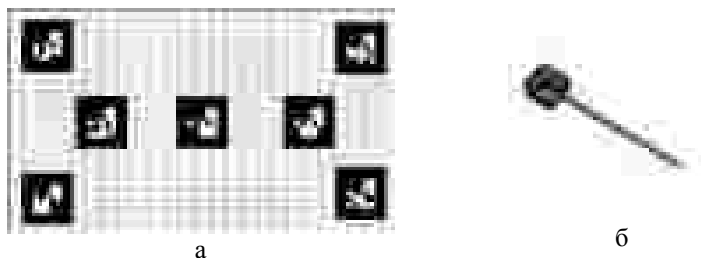


Рис. 3. Элементы взаимодействия:
а – расширенный рабочий стол; б – манипулятор

Проблема перекрытия расширенной трехмерной сцены различными предметами решается разработками расширенной реальности по-разному. В проекте Studierstube трехмерная сцена делается полупрозрачной, таким образом показывая руки пользователя. В технологии YVision разработано глубинное компьютерное видение. В данной разработке предлагается формирование переднего плана изображения (рис. 4). Оболочка чужеродного элемента, попавшего на фон расширенного рабочего стола, «обрисовывается» с помощью поиска точек разрыва линий разметки (рис. 4,а). После этого из камеры направляются лучи к точкам разрыва и вычисляются точки пересечения лучей с плоскостью, параллельной плоскости рабочего стола, но находящейся ближе к камере (рис. 4,б).



Рис. 4. Формирование переднего плана:
а – выделение оболочки; б – перенос оболочки

Архитектура платформы (рис. 5) состоит из серверного и набора клиентских приложений, обменивающихся информацией.

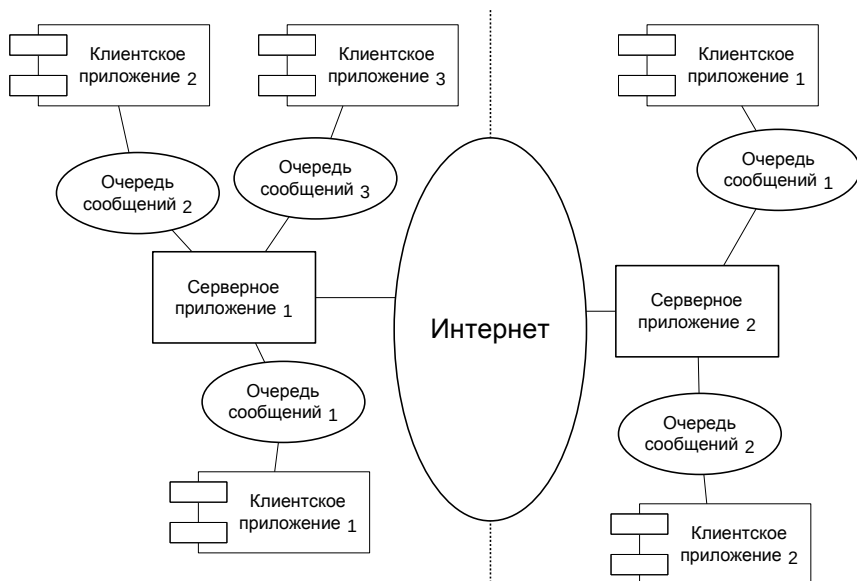


Рис. 5. Архитектура платформы расширенного рабочего стола

Серверное приложение выполняет следующий набор функций:

- 1) запуск и закрытие клиентских приложений ;
- 2) позиционирование глобальной системы координат в соответствии с набором маркеров расширенной реальности;
- 3) позиционирование манипулятора;
- 4) обработка взаимодействий манипулятора с объектами расширенной реальности;
- 5) обмен информацией о положении и взаимодействиях манипулятора, нажатиях клавиш на клавиатуре и т.д. с клиентскими приложениями;
- 6) вывод на экран пространства расширенной реальности и всех его объектов.

Каждое клиентское приложение, кроме реализации своей своей логики, выполняет следующий набор функций :

- 1) создание и преобразование трехмерных объектов своей трехмерной сцены;
- 2) обработка информации, поступающей от серверного приложения.

Исходя из функциональности платформы , можно заметить, что клиентское и серверное приложения должны обмениваться большими объе-

мами информации о трехмерных объектах. Так как серверное приложение также имеет большую вычислительную сложность, связанную с распознаванием маркеров, желательно избежать копирования этой информации из участка памяти клиентского приложения в серверное или сделать его максимально быстрым.

На основании этих требований было решено использовать библиотеки динамической линковки в качестве клиентских приложений.

При использовании данного метода клиентские приложения будут компилироваться в библиотеки динамической линковки [1] (dll для ОС Windows) и динамически загружаться и выгружаться серверной программой. Данный подход не требует копирования или какого-либо другого обновления разделяемого графического контента, является кроссплатформенным. Минусом является некоторая незащищенность сервера от вредоносных программ. Данный подход был выбран как наиболее подходящий и удобный.

Каждая клиентская программа компилируется в библиотеку динамической линковки, имеющую точку входа – функцию “mainFn”, запускаемую серверным приложением в отдельном потоке. В качестве параметров данная функция должна принимать объект, хранящий в себе данные, необходимые для клиент-серверного взаимодействия, и представляющий функциональность обмена информацией между клиентским и серверным приложениями.

Объект должен содержать следующий набор данных:

- 1) идентификатор (хендл) загруженного приложения;
- 2) путь к приложению;
- 3) идентификатор потока, в котором выполняется загруженное приложение;
- 4) очередь сообщений приложения;
- 5) физический мир, обрабатывающий взаимодействие манипулятора и виртуальных объектов, создаваемых приложением;
- 6) указатель на локальную систему координат приложения.

Из схемы взаимодействия серверного и клиентского приложений (рис. 6) видно, что серверное приложение обменивается с клиентским сообщениями с помощью очереди сообщений, аналогичной очереди Windows с некоторыми исключениями. Каждое приложение имеет свою очередь сообщений, и каждое сообщение имеет два параметра: идентификатор вида сообщения и указатель на класс, содержащий дополнительные параметры сообщения. Каждый вид сообщения имеет свой набор параметров.

Серверное приложение состоит из трех основных модулей: разделяемый мир расширенной реальности, очередь сообщений серверного приложения и ядро. Клиентское приложение также имеет свою очередь сообщений и ядро, где реализована его логика. Серверное приложение при запуске клиентского приложения создает локальный мир для данного приложения, очередь сообщений для него, а после этого запускает само приложение.

При инициализации клиентское приложение вносит изменения в разделяемый трехмерный мир, с которым взаимодействует напрямую, а именно в свою локальную трехмерную сцену. Клиентское приложение также имеет основной цикл, в котором происходит считывание сообщений из очереди и обработка их.

Одним из вариантов завершения работы программы является посылка сообщения M_CLOSE в соответствующую очередь. При закрытии клиентское приложение удаляет динамические объекты, свои трехмерные объекты из разделяемого мира, освобождает ресурсы и т.д. После этого посылается сообщение M_POSTCLOSE в очередь сообщений сервера, по которому серверное приложение очищает память, занятую клиентским приложением, удаляет соответствующую очередь сообщений и локальную трехмерную сцену.

Взаимодействие по сети происходит между двумя серверными приложениями. Так как передача по сети всей трехмерной сцены является очень затратным процессом, между двумя серверными приложениями передаются только сообщения в очередях сообщений. Все перемещения объектов происходят локально.

Были спроектированы следующие виды сообщений и следующие наборы параметров:

- 1) закрытие программы (M_CLOSE);
- 2) активация программы (M_ACTIVATE);
- 3) программа становится неактивной (M_DEACTIVATE);
- 4) перемещение манипулятора (M_MAN_MOVE). Параметром является матрица локальной системы координат манипулятора;
- 5) взаимодействие манипулятора с виртуальным объектом (M_COLLISION). Параметрами являются: матрица локальной системы координат манипулятора; ссылка на виртуальный объект взаимодействия; массив точек взаимодействия;
- 6) нажатие клавиши на клавиатуре (M_KEYPRESSED). Параметром является нажатый символ.

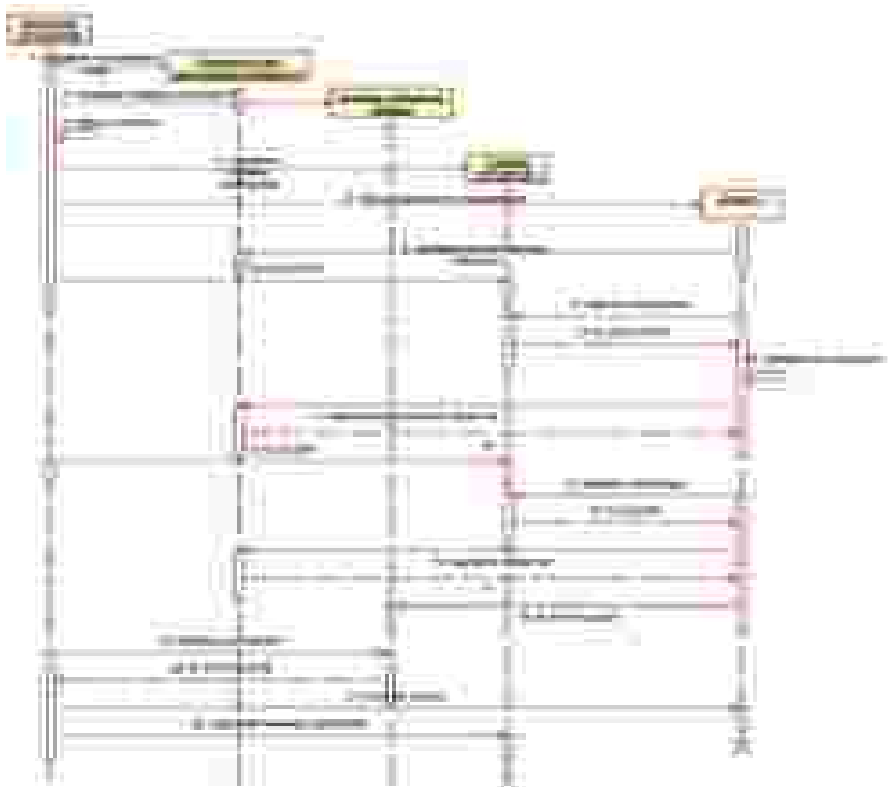


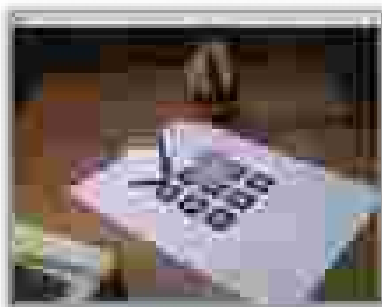
Рис. 6. Схема взаємодії клієнтського і серверного додатків

Аналіз результатів. На основі схеми платформи реалізовано тестове серверне додаток і клієнтське, яке змінює колір кубика в залежності від положення маніпулятора (рис. 7).

Додаток було протестовано кількома користувачами: їм було запропоновано спробувати стабільність виявлення колізії, розпізнавання маніпуляторів і стола. В результаті тестування були виявлені недоліки програмного забезпечення.

Перевагами інтерфейсу є легкість в його використанні, природна форма маніпулятора. Недоліки пов'язані з недосконалістю алгоритмів розпізнавання відеопотока. Розв'язком цієї проблеми є реалізація платформи на основі більш точних систем розпізнавання, наприклад бібліотеки SmartAR, анонсованої компанією Sony.

Данная платформа будет способна распознавать даже быстро движущиеся маркеры.



а



б

**Рис. 7. Демонстрация работы тестового приложения:
а – без коллизии; б – с коллизией**

Выводы. В результате исследования была разработана многозадачная платформа для интерактивных приложений расширенной реальности, обладающая набором достоинств по сравнению с аналогами:

- 1) возможность различных разработчиков создавать приложения расширенной реальности;
- 2) возможность нескольких приложений функционировать и обмениваться информацией в одном и том же расширенном пространстве;
- 3) отсутствие ограничений на формы создаваемых окон приложений.

Проект позволяет в полной мере реализовывать трехмерные интерфейсы, а также работать с набором приложений расширенной реальности одновременно (изменять несколько текстовых документов, работать в интернете и т.д).

Дальнейшими перспективными направлениями являются:

- 1) подключение других видов манипуляторов (человеческие руки);
- 2) создание интерфейсов межсетевого взаимодействия;
- 3) реализация набора клиентских приложений для данной платформы.

Библиографические ссылки

1. **Рихтер Дж.** Windows для профессионалов: создание эффективных Win32 приложений с учетом специфики 64-разрядной версии Windows / Дж. Рихтер – М., 2008.

2. **Billinghurst M.** Real World Teleconferencing / M. Billinghurst Cheok A., H. Kato, S. Prince // CHI EA'99 – 1999. – P. 194 – 195.

3. **Schmalstieg D.** The Studierstube Augmented Reality Project /D. Schmalstieg // Presence: Teleoperators and Virtual Environments. – 2007. – No 11 – P. 33– 54.
4. **Fiala M.** Artag, a fiducial marker system using digital techniques. / M. Fiala // CVPR'05 - IEEE Computer Society, San Diego. – 2005. – No 1 – P. 590 – 596.
5. **Gebriel Z.** Innovative Learning of Solar System using Augmented Reality for Primary School Children / Z. Gebriel, K. Ah-Choo, Y. May-Chan, B. Parhizkar // ICEMT2012. – 2012. – No 41 – P. 156–160.
6. **Kaufmann H.** Physics Playground: Physics Education in Virtual Reality / H. Kaufmann // Virtual Reality Systems for Psychology – 2006. – P. 227 – 240.
7. **Molla E.** Augmented Reality for Board Games / E. Molla, V. Lepetit // Mixed and Augmented Reality (ISMAR) – Seoul, Korea. – 2010. – No 9.

Надійшла до редколегії 26.02.2013 р.

Ю.В. ¹³Турбал

Національний університет водного господарства та природокористування

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ СОЛІТОННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Пропонується метод знаходження солітонних розв'язків систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, що ґрунтується на використанні представлень спеціального типу. На основі цього методу для рівняння Кортевега – де Вріза знайдено узагальнення відомих солітонних розв'язків.

Предлагается метод нахождения солитонных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных, который базируется на использовании представлений специального типа. На основании предложенного метода для уравнения Кортевега – де Вриза находятся обобщения известных солитонных решений.

In this paper we present a new approach to finding the solitone solutions for systems of differential equations in partial derivatives. We find solutions of the Kortevæg – de Vries equation in the form of solitary waves, which allows to extend the class of known soliton solutions.

Ключові слова: солітон, відокремлена хвиля, рівняння руху, рівняння Кортевега – де Вріза.

Вступ. Сьогодні відомо багато диференціальних рівнянь у частинних похідних та систем, що мають солітонні розв'язки. Це насамперед рівняння Кортевега – де Вріза, Буссинеска, Бюргерса, синус-Гордон, Шредингера та ряд інших. У рамках структурно-феноменологічного підходу розглядають, зокрема, пошкоджене середовище з мікроструктурою, континуум Коссера з обмеженим рухом, середовище з деформаціями [1], зернисте середовище, які допускають солітонні розв'язки рівнянь руху. При цьому часто більш складні моделі зводяться до одновимірного випадку. Так, наприклад, β -модель Фермі – Паста – Улама [1] приводить до модифікованого рівняння Буссинеска.

Останнім часом з'явився ряд робіт, присвячених солітоноподібним розв'язкам рівнянь руху для анізотропних пружних тіл. Зокрема, у роботі

[5] здійснено аналіз анізотропії пружних тіл, для яких виконується узагальнений закон Гука з точки зору існування особливих відокремлених структурно-стійких хвиль типу δ -солітонів. Показано, що існують такі типи анізотропії, при яких рівняння руху допускають розв'язки у формі δ -солітонів. У роботі [5] знайдено необхідні та достатні умови їх існування. Зауважимо, що в роботах [5; 6] розглядається тривимірна відокремлена хвиля деформації.

Зазначимо, що знаходження солітонних розв'язків є досить складною задачею навіть в одновимірному випадку. Особливо це стосується дослідження взаємодії кількох солітонів. Використання ж представлень типу δ -солітонів дозволяє дещо спростити процедуру знаходження розв'язків, що мають характер відокремлених хвиль, а також знаходити наближені солітоноподібні розв'язки. У даній роботі пропонуються деякі узагальнення останнього підходу а також для рівняння Кортевега – де Вріза знаходяться клас розв'язків, частковим випадком якого є класичні солітонні розв'язки КдВ.

Суть методу знаходження розв'язків систем диференціальних рівнянь, що мають характер відокремлених хвиль

Нехай маємо деяку систему диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$F_i(t, x_1, \dots, x_n, u_t^{(1)}, u_{x_1}^{(1)}, \dots, u_{x_n}^{(1)}, \dots, u_t^{(m)}, u_{x_1}^{(m)}, \dots, u_{x_n}^{(m)}, u_{x_1 x_1}^{(1)}, u_{x_1 x_2}^{(1)}, \dots) = 0 \quad (1)$$

$i = \overline{1, k}.$

Розв'язок системи будемо знаходити у вигляді

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})^T = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_m(t))^T W(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (2)$$

де $W(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \exp(-\mu((x_1, x_2, \dots, x_n), (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)))) / \epsilon$,

$\mu(a, b)$ – довільна міра, визначена на множині інтервалів $\{[a, b], a, b \in R^n\}$, $(\mu(\alpha, \beta) = 0 \text{ при } \alpha = \beta)$, $\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_m(t)$ – функції, які визначають компоненти амплітуди відповідного збурення, ϵ – параметр, що визначає локалізацію збурення, $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ – функції, що визначають траєкторію максимального збурення.

Очевидно, що розв'язок у формі (2) визначає локалізоване збурення, максимум якого знаходиться в точці $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$.

Зауважимо, що в силу довільності міри μ у формі (2) можемо записати будь-який розв'язок, що має характер унімодалної відокремленої хвилі

незмінної в часі форми. При цьому функція міри μ визначає форму збурення в кожному конкретному випадку.

Розв'язок у формі (2) є узагальненням часткових розв'язків, зокрема рівнянь руху для анізотропного пружного тіла, які розглядалися у роботі [6].

У роботі [6] було знайдено клас точних часткових розв'язків системи рівнянь руху для анізотропного пружного середовища, яка має вигляд

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ((c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \Theta_u) + ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \Theta_v) + ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \Theta_w), \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{66} + c_{12}, c_{56} + c_{14}, c_{25} + c_{46}), \Theta_u) + ((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 2c_{46}, 2c_{24}), \Theta_v) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta_w), \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \Theta_u) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \Theta_v) + ((c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \Theta_w), \quad (5)$$

де u, v, w – зміщення вздовж відповідних осей у декартовій системі координат,

$$\Theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right), C = \|c_{ij}\|_{i,j=1,6} - \text{матриця пружних}$$

сталей, $\rho(x_1, x_2, x_3)$ – густина.

Розв'язок системи (3) – (5) шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} u(x_1, x_2, x_3, t) \\ v(x_1, x_2, x_3, t) \\ w(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_u(t) \\ \Psi_v(t) \\ \Psi_w(t) \end{pmatrix} W(x_1, x_2, x_3, t), \quad (6)$$

де $W(x_1, x_2, x_3, t) = e^{\frac{g(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} + \frac{g(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \frac{g(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}}$, $g(x)$ – довільна додатня неперервно-диференційовна функція, яка має мінімум у точці 0, $g(0) = 0$, $\Psi_u(t)$, $\Psi_v(t)$, $\Psi_w(t)$ – функції, які визначають компоненти амплітуди відповідного збурення, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, що визначають

локалізацію збурення. У роботі [5] були знайдені необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти пружні сталі, щоб розв'язок у формі (6) існував.

Розв'язок рівняння Кортевега – де Вріза у формі (2).

Розглянемо рівняння Кортевега – де Вріза [3]:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (7)$$

Це рівняння описує широкий клас нелінійних хвиль у середовищах зі слабкою дисперсією. Зокрема, це хвилі на мілкій воді, іонно-звуківі хвилі, хвильові процеси при передачі сигналів у трансмембранному нервовому волокні та ін. На сьогоднішній день знайдено багато точних розв'язків, які являють собою стаціонарні нелінійні хвилі. Зокрема, відомі солітонні розв'язки виду

$$u(x, t) = 2\chi^2 ch^{-2}\chi(x - 4\chi^2 t - \varphi), \quad (8)$$

де χ – константа, що визначає параметри локалізації солітона та його швидкість, φ – параметр, що визначає точку відліку.

Будемо знаходити розв'язки рівняння (7) у вигляді

$$u(x, t) = \Psi(x, t) \exp(-\mu(x, \tilde{x}(t)) / \varepsilon), \quad (9)$$

де $x \in R^3$, $\Psi(x, t)$ – функція, що визначає амплітуду хвилі, $\mu(x, \tilde{x}(t))$ – деяка міра, $\tilde{x}(t)$ – функція, що визначає траєкторію відокремленої хвилі, ε – деякий малий параметр, що визначає просторову локалізацію.

Нехай $\mu(x, \tilde{x}) = g(x - \tilde{x})$, $g(\cdot) \in G$, де G – клас додатно-визначених, унімодальних, двічі неперервно-диференційовних функцій, які мають мінімум у точці 0 і для яких другі похідні відмінні від констант, $g(0) = 0$. Легко показати, що умови, які визначають клас G , не обмежують усі можливі унімодальні розв'язки рівняння (3). Функцію $\Psi(x, t)$ будемо знаходити як константу. Отже, знаходимо розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = \Psi \exp(-g(x - \tilde{x}(t))), \quad (10)$$

де, $\tilde{x}(t)$ – функція, що визначає характер руху хвилі.

Похідні функції $u(x, t)$ мають вигляд

$$u_x = -g'(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))u;$$

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= -g''(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))^2 u + g'(x - \tilde{x}(x, t))\tilde{x}_{xx}(x, t)u + \\
 &+ (g'(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t)))^2 u; \\
 u_{xxx} &= -g'''(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))^3 u + 3g''(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))\tilde{x}_{xx}(x, t)u + \\
 &+ 3g''(x - \tilde{x}(x, t))g'(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))^3 u - 3(g'(x - \tilde{x}(x, t)))^2 \tilde{x}_{xx}(x, t) \times \\
 &\times (1 - \tilde{x}_x(x, t))u + g'(x - \tilde{x}(x, t))\tilde{x}_{xxx}(x, t)u - (g'(x - \tilde{x}(x, t)))^3 (1 - \tilde{x}_x(x, t))^3 u; \\
 u_t &= g'(x - \tilde{x}(x, t))\tilde{x}_t(x, t)u.
 \end{aligned}$$

Підставляємо отримані співвідношення в рівняння (8). Отримуємо

$$\begin{aligned}
 &g'(x - \tilde{x}(x, t))\tilde{x}'(x, t) - 6g'(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))u + \\
 &+ (-g'''(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))^3 + 3g''(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))\tilde{x}_{xx}(x, t) + \\
 &+ 3g''(x - \tilde{x}(x, t))g'(x - \tilde{x}(x, t))(1 - \tilde{x}_x(x, t))^3 - 3(g'(x - \tilde{x}(x, t)))^2 \tilde{x}_{xx}(x, t) \times \\
 &\times (1 - \tilde{x}_x(x, t)) + g'(x - \tilde{x}(x, t))\tilde{x}_{xxx}(x, t) - (g'(x - \tilde{x}(x, t)))^3 (1 - \tilde{x}_x(x, t))^3) = 0.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Співвідношення (11) визначає функції $g(\cdot) \in G$ та $\tilde{x}(x, t)$, які описують усі можливі розв'язки рівняння (3), що мають характер відокремленої хвилі незмінної в часі форми.

Нехай $\tilde{x}(t) = bt + \varphi$, де b, φ – деякі сталі. Тоді останнє співвідношення запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
 &g'(x - bt - \varphi)b - 6g'(x - bt - \varphi)\Psi e^{-g'(x - bt - \varphi)} - (g'''(x - bt - \varphi) - \\
 &- 3g''(x - bt - \varphi)g'(x - bt - \varphi) + (g'(x - bt - \varphi))^3) = 0.
 \end{aligned}$$

Звідси, зробивши очевидну заміну $x - bt - \varphi = y$, отримуємо рівняння

$$g'''(y) - 3g''(y)g'(y) + (g'(y))^3 - bg'(y) + 6\Psi g'(y)e^{-g(y)} = 0. \quad (12)$$

Припустимо, що $g'(y) = p(g(y))$, де $p(\cdot)$ – деяка диференційована функція, відмінна від тотожного нуля. Тоді $g''(y) = pp'$ та $g'''(y) = (p''p + (p')^2)p$. Рівняння (12) із урахуванням останньої заміни запишеться у вигляді

$$-(p''p + (p')^2)p + 3p^2 p' - (p)^3 + bp - 6\Psi p e^{-g} = 0.$$

Звідси

$$p''p + (p')^2 - 3pp' - (p)^3 - b + 6\Psi e^{-g} = 0. \quad (13)$$

Зробимо заміну: $w = p^2$, знаходимо $w' = 2pp'$ та $w'' = 2p'p' + 2pp''$. Тоді з рівняння (13) отримуємо лінійне рівняння вигляду

$$w''/2 - 3w'/2 + w - b + 6\psi e^{-g} = 0. \quad (14)$$

Частковий розв'язок знаходимо у вигляді $w = k + l e^{-g}$. Тоді отримуємо співвідношення $l e^{-g} / 2 + 3l e^{-g} / 2 + k + l e^{-g} = b - 6\psi e^{-g}$, звідки знаходимо $k = b, l = -2\psi$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд $w = b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g$, де C_1, C_2 – сталі інтегрування. Звідси

$p = \pm \sqrt{b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g}$. Тоді з урахуванням позначення $g'(y) = p(g(y))$ отримуємо $g'(y) = \pm \sqrt{b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g}$.

Нехай сталі інтегрування C_1, C_2 такі, що виконується умова

$$b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g \geq 0. \quad (15)$$

Тоді, ураховуючи властивості функцій, що належать класу G , маємо $g(0) = 0, g(x) \geq 0, g'(0) = 0$, а отже має виконуватись співвідношення

$$b - 2\psi + C_1 + C_2 = 0. \quad (16)$$

Зауважимо, що $C_1 \geq 0$. У протилежному випадку існує таке значення функції $g(y)$, при якому $b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g < 0$. Таким чином, функцію $g(y)$ можемо визначити таким чином:

при $y > 0$ вона є розв'язком задачі Коші

$$g'(y) = \sqrt{b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g}, g(0) = 0, \quad (17)$$

при $y < 0$

$$g'(y) = -\sqrt{b - 2\psi e^{-g} + C_1 e^{2g} + C_2 e^g}, g(0) = 0,$$

де сталі інтегрування C_1, C_2 задовольняють умовам (15), (16). Легко переконатися, що визначена таким чином функція буде неперервно-диференційовною до 2-го порядку включно. Очевидно, що можемо записати: $g(y) = \tilde{g}(|y|)$, де $\tilde{g}(y)$ є розв'язком задачі (17).

Зв'язок розв'язку рівняння КдВ (9) та класичного солітонного розв'язку (8).

Покажемо, що відомий розв'язок (8) є частковим випадком розв'язку (10). Дійсно, нехай $C_1 = C_2 = 0$. Тоді із співвідношення (16) отримуємо $b = 2\psi$. З урахуванням останнього співвідношення задача (17) матиме вигляд:

$$g'(y) = \sqrt{b - be^{-g}}, g(0) = 0. \quad (18)$$

Прирівнюючи співвідношення (8) та (9), отримуємо

$$2\chi^2 ch^{-2}(\chi(x - 4\chi^2 t - \Phi)) = b \exp(-g(x - bt - \Phi)) / 2.$$

Прологарифмувавши останнє співвідношення, отримуємо $g(x - bt - \Phi) = 2 \ln ch(\chi(x - bt - \Phi))$. Введемо позначення: $x - bt - \Phi = y$. Тоді отримуємо в явному вигляді функцію $g(y)$:

$$g(y) = 2 \ln ch(\chi y). \quad (19)$$

Нехай $b = 4\chi^2$. Тоді легко показати, що функція (19) є розв'язком задачі (18). Дійсно, похідна функції $g(y)$ має вигляд $g'(y) = \frac{2\chi sh(\chi y)}{ch(\chi y)}$. Під-

ставивши співвідношення (19) у праву частину рівняння (18), отримуємо

$$\begin{aligned} \sqrt{b - be^{-g}} &= 2\chi \sqrt{1 - e^{-2 \ln ch(\chi y)}} = 2\chi \sqrt{1 - ch^{-2}(\chi y)} = \\ &= 2\chi \sqrt{(ch^2(\chi y) - 1) / ch^2(\chi y)} = 2\chi \sqrt{sh^2(\chi y) / ch^2(\chi y)} = \\ &= 2\chi sh(\chi y) / ch(\chi y) = g'(y). \end{aligned}$$

Приклади розв'язків рівняння КдВ

Розглянемо, якими є функції $u(x, t)$ представлення (10) при деяких значеннях параметрів. Нехай, наприклад, $C_1 = 0.9, C_2 = -0.901, b = 0.201, \psi = 0.1$. При таких параметрах виконується співвідношення (16). На рис.1 зображено графік функції $u(x, 50)$, на рис. 2 – графік класичного солітонного розв'язку, що визначається за допомогою співвідношення (8).

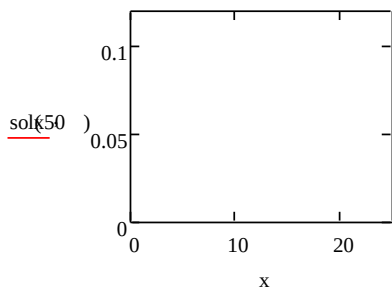


Рис.1. Графік функції, що є відомим солітонним розв'язком рівняння КдВ

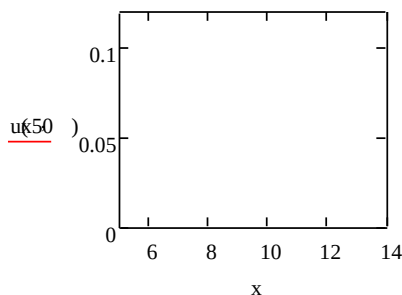


Рис.2. Графік функції $u(x, 50)$

Параметри підбрані так, щоб максимальні амплітуди хвиль (8) та (9) були однаковими.

Як бачимо, при таких значеннях параметрів розв'язки (10) та (8) суттєво відрізняються.

Висновки. Запропоновано метод знаходження розв'язків систем диференціальних рівнянь, що мають характер відокремлених структурно-стійких хвиль. На основі запропонованого представлення розв'язку (2) знайдено новий клас точних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза, що є відокремленими хвилями, частковим випадком якого є відомі солітонні розв'язки. Також отримано співвідношення, що визначає всі можливі розв'язки, які мають характер відокремлених хвиль незмінної в часі форми.

Зауважимо, що отримані в даній статті результати стосуються односолітонного розв'язку. Багатосолітонний випадок вимагає додаткового вивчення в контексті узагальнень, знайдених у цій роботі.

Бібліографічні посилання

1. **Ерофеев В.И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В.И. Ерофеев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
2. **Турбал Ю.В.** Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає необхідні та достатні умови існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл / Ю.В. Турбал, М.Ю. Турбал // Волин. мат. вісн. – 2013. – №1. – С. 99–109.
3. **Самойленко В.Г.** Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2008, №1. – С. 388–397.
4. **Турбал Ю.В.** Часткові розв'язки рівнянь газової динаміки галактик із збуреннями типу δ -солітонів / Ю.В. Турбал // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. «Фізико-математичні науки». – 2009, № 1. – С. 67–75.
5. **Турбал Ю.В.** О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа δ -солитонов / Ю.В. Турбал // Проблемы прикладной математики и математического моделирования. – 2012. – С. 78–86.
6. **Турбал Ю.В.** Дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів / Ю.В. Турбал // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 18. – С. 76–90.

Надійшла до редколегії 11.11.2013 р.

УДК 519.8

В.А. ¹⁴Турчина, Ю.С. Зозуля, А.К. Підаш

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

АЛГОРИТМИ ПЕРЕРАХУВАННЯ ВСІХ ПАРАЛЕЛЬНИХ УПОРЯДКУВАНЬ ФІКСОВАНОЇ ДОВЖИНИ

Запропоновані нові алгоритми направленої перебору для побудови множини всіх допустимих паралельних впорядкувань заданої довжини.

Предложены новые алгоритмы направленного перебора для построения множества всех допустимых параллельных упорядочений заданной длины.

New algorithms of the directed search for construction of the set of all possible parallel orderings of desired length are proposed.

Ключові слова: паралельні впорядкування, теорія розкладів, оптимальні впорядкування.

Вступ. Серед задач дискретної оптимізації особливе місце належить задачам теорії впорядкувань. Оптимальні розв'язки спеціальних дискретних задач на графах дозволяють економити ресурси у системах, моделі яких являють собою завдання, на послідовність виконання яких накладено умови часткового порядку. Прикладами таких систем є послідовності робіт, послідовності операцій, які виконуються ЕОМ. У зв'язку з активним розвитком багатопроцесорних ЕОМ та багатоядерних процесорів задачі теорії впорядкувань стають дедалі більш затребуваними. Розв'язання оптимізаційних задач теорії впорядкувань дозволяє суттєво економити ресурси (кількість робітників, процесорів, ядер процесора) або ж суттєво скорочувати час, необхідний для виконання всіх робіт. Якщо говорити про ЕОМ, то, розв'язавши задачу теорії впорядкувань, ми можемо збільшити швидкодію, а це сприятиме більш ефективній роботі людини за комп'ютером. То ж ми можемо досягти більшої продуктивності праці. Також стає можливим оптимальне використання наявних ресурсів. Так, у випадку ЕОМ, для того щоб завдання виконалося швидше, не обов'язково збільшувати кількість процесорів або ядер процесора, часто

достатньо скласти розклад виконань завдань так, аби відповідне впорядкування було оптимальним.

Задачі теорії впорядкувань мають для дослідників як теоретичний інтерес, оскільки вдається отримати цікаві математичні результати, що стосуються дослідження моделей, множин допустимих розв'язків, оригінальні підходи до методів розв'язання цих задач, так і практичний, оскільки багато реальних задач можна звести до задач теорії впорядкувань.

За допомогою алгоритмів зможемо побудувати всі допустимі впорядкування для заданого графа, і після цього, за необхідності, серед них обрати саме ті, що задовольняють нас за деякими критеріями.

Постановка задачі. Введемо до розгляду граф $G = \{V, U\}$, де $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – множина вершин, а U – множина дуг.

Впорядкування S множини V вершин графа G назвемо паралельним впорядкуванням вершин орграфа G , якщо з того, що $(i, j) \in U$ випливає, що вершина i знаходиться в S лівіше за вершину j .

Для існування паралельного впорядкування необхідно й достатньо, щоб граф G був ациклічним.

Будемо називати впорядкування оптимальним, якщо воно або при заданій довжині має мінімальну ширину, або при заданій ширині – мінімальну довжину [1].

Можна показати, що цим оптимізаційним задачам на графах можна однозначно поставити у відповідність оптимізаційні задачі теорії розкладів. Надалі будемо будувати оптимальні розклади за допомогою вирішення відповідних оптимізаційних задач на графах.

Класичні методи пошуку розв'язків. Загальна задача паралельного впорядкування належить до класу NP -повних задач, тому виникає необхідність побудови та дослідження не лише точних, а й наближених алгоритмів.

Для даної задачі найбільш поширені є такі точні методи: метод гілок та меж, зведення задачі до задачі про умовний максимальний потік, а також відомий підхід, що зводить дану задачу до задачі цілочисельного лінійного програмування [3].

Точні алгоритми, що мають поліноміальну складність, відомі лише для дуже обмежених класів задач (граф G – це кореневе дерево, граф G – без транзитивних дуг та $h=2$).

Тому для розв'язання практичних задач, що мають велику розмірність, доцільно використовувати наближені алгоритми, а особливо ті, точність

яких можна встановити апріорно. Використання наближених методів дозволяє скоротити час або ресурси (наприклад, пам'ять), необхідні для побудови впорядкувань.

Крім того, заслуговують на увагу відомості про множину всіх допустимих упорядкувань заданої довжини, а також множини всіх оптимальних упорядкувань заданої довжини. Алгоритмам побудови цих множин і присвячена дана робота.

При побудові цих множин допоміжними виступають упорядкування $S, \bar{S}$, довжини яких рівні й дорівнюють критичній довжині. В упорядкуванні S крайнє ліве допустиме місце позначимо $\underline{\mu}_i$, а крайнє праве – $\bar{\mu}_i$. Тоді допустимі місця μ_i для вершини i в допустимому впорядкуванні належать проміжку $[\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i]$ [2].

Алгоритми перерахування всіх паралельних упорядкувань фіксованої довжини. Алгоритми засновані на комбінаторному аналізі елементів кінцевої множини інтервалів. Загальною ідеєю алгоритму є рекурсивний обхід вершин графа, розміщених у певному порядку, «вперед» і «назад». Йдучи «вперед», ми аналізуємо, наскільки були максимально «зміщені» всі пов'язані з поточною вершиною вершини, які знаходяться у списку вершин раніше, та з множини допустимих місць вершини в упорядкуваннях μ_i видаляємо цю кількість вершин. Записуємо в результат

перше «вільне» значення з цілочисельного проміжку μ_i для даної вершини і відразу видаляємо це значення з допустимого проміжку для даної вершини. Якщо це не остання вершина, – йдемо далі.

Якщо поточна вершина – це остання вершина в нашому списку вершин, то заносимо поточне впорядкування в «головний результат» і йдемо «назад» до тих пір, поки не зустрінемо вершину, в якій її μ не пусте. Тепер вважаємо, що йдемо «вперед», видаляємо всі входження наступних за списком вершин із впорядкування, а також для цих вершин присвоюємо їх μ_i такі значення, які були на початку виконання алгоритму.

Алгоритм

1. Відомий граф. Обираємо форму представлення даних про граф у пам'яті (матриця суміжності, списки ребер, матриця інцидентності). Задаємо довжину впорядкування l (якщо вона не задана, то довжина буде дорівнювати критичній, тобто l_0).

Будуємо допоміжні впорядкування $S, \bar{S}$.

Для кожної вершини орграфа визначаємо множину її допустимих місць в упорядкуваннях. Для i -ї вершини це значення визначається формулою

$$\mu_i \in [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i + l - l_0]$$

де $\underline{\mu}_i$ – місце вершини i в упорядкуванні S ; $\bar{\mu}_i$ – місце вершини i в упорядкуванні $\bar{S}$.

2. Формуємо список вершин у потрібному нам порядку, а саме:

$k:=1$.

До списку вершин заносимо вершини з k -го місця в упорядкуванні

S .

Якщо k менше за кількість місць у впорядкуванні S , то $k:=k+1$,

інакше – список вершин побудовано.

3. За поточну вершину вважаємо першу вершину у списку вершин. Вважаємо, що йдемо «вперед».

4. Якщо допустимий проміжок для поточної вершини пустий, то:

– якщо поточна вершина – це перша вершина у списку вершин, то йдемо на пункт 6;

– інакше поточною вважаємо попередню до поточної вершину з списку вершин; йдемо на пункт 5.

Інакше, якщо це шлях назад, то:

– вважаємо, що йдемо вперед;

– із результату видаляємо всі значення, що відповідають наступним після поточної вершини у списку вершин;

– допустимі проміжки, що відповідають наступним після поточної вершини у списку вершин, робимо такими, як були сформовані в пункті 1.

5. Для всіх вершин, які зв'язані з поточною та які знаходяться в списку вершин раніше поточної, знаходимо різницю між її місцем знаходження та першим значенням із допустимого проміжку, яке було знайдене на кроці 1. Обираємо максимальну різницю. Якщо для поточної вершини перше значення з її допустимого проміжку менше, ніж відповідне значення, знайдене на першому кроці, то за допустимий проміжок для даної вершини беремо зсунутий на максимальну різницю початковий проміжок. До результату додаємо поточну вершину на місце, що відповідає першому значенню з поновленого допустимого проміжку.

Обчислюємо величину Δ як різницю між першим значенням із допустимого проміжку поточної вершини і відповідним першим значенням, знайденим на кроці 1.

Із допустимого проміжку для поточної вершини видаляємо перше значення.

Знаходимо всі вершини, що пов'язані з поточною , та видаляємо з їх допустимих проміжків перші Δ значень.

Якщо поточна вершина – остання, то записуємо в «головний результат» отримане упорядкування та за поточну обираємо попередню вершину в списку вершин; вважаємо, що йдемо шляхом «назад». Йдемо на пункт 4. Інакше – як поточну обираємо наступну вершину у списку вершин.

6. Результатом роботи алгоритму вважаємо «головний результат». Якщо він пустий, то алгоритм не знайшов допустимих упорядкувань. Кінець.

Алгоритм побудови всіх упорядкувань фіксованої довжини і мінімальної ширини є частинним випадком задачі побудови множини всіх допустимих паралельних впорядкувань. Головна ідея алгоритму будується на рекурсивній функції перебору всіх можливих позицій для вершини i на кожному кроці. За допомогою рекурсивної функції обробляємо всі вершини, доки не перевищимо h , отримане з попереднього кроку, шляхом рекурсивного перебору всіх можливих позицій для кожної вершини з наступним кроком. Функція спочатку робить прямий хід, обробляючи від 1 до n_i вершини. Далі алгоритм робить зворотний хід. Обчислює всі можливі позиції n_i вершини згідно з умовами, що задовольняють позиціям інших $(n-1)$ вершин та ураховуючи результат упорядкування мінімальної ширини, обчислений на попередньому кроці; якщо ширина менша, то змінюємо значення h та припиняємо хід або йдемо далі. Потім рекурсивна функція переходить на вершину $(n-1)$ і таким самим чином обробляє всі можливі позиції для вершин $(n-2)$ і для n_i вершини. Продовжуємо алгоритм, поки не перелічимо всі позиції для першої вершини.

Алгоритм

1. За матрицею суміжності перевіряємо граф на ациклічність; якщо є цикли, – тоді кінець.

2. Обробляємо матрицю суміжності і будуємо $S, \bar{S}$.

3. З отриманих $S, \bar{S}$ будуємо допустимі місця μ_i ; i – номер вершини.

μ_i – множина можливих позицій в упорядкуванні для i вершини, тобто $\mu_i \in [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i + l - l_0]$

4. За допомогою певного алгоритму обираємо ті i вершин, які не лежать на критичному шляху, а також відповідні їм μ_i .

5. За допомогою рекурсивної функції обробляємо всі i вершин, отримані з попереднього кроку з відповідними μ_i , шляхом рекурсивного перебору всіх можливих позицій для кожної i -ї вершини з наступним кроком.

Функція спочатку робить прямий хід, обробляючи від 1 до n -ї вершини.

Далі алгоритм робить зворотний хід, обчислює всі можливі позиції n -ї вершини згідно з умовами, що задовольняють позиціям інших $(n-1)$ - вершин. Потім рекурсивна функція переходить на вершину $(n-1)$ і таким самим чином обробляє всі можливі позиції для вершин $(n-2)$ і для n -ї вершини. Продовжуємо алгоритм, поки не перелічимо всі позиції для першої вершини.

6. Виведення результатів. Кінець.

Висновки. У даній роботі було запропоновано нові алгоритми направленого перебору для побудови множини всіх допустимих паралельних упорядкувань заданої довжини. Вони засновані на аналізі структури графів, які моделюють послідовності операцій в обчислювальних і технологічних процесах.

Має інтерес також задача побудови множини всіх допустимих упорядкувань для задач, у яких вершини графа мають різні помітки, що відповідають різному часу виконання операцій.

Бібліографічні посилання

1. **Коффман Э.Г.** Введение в теорию расписаний / Э.Г. Коффман. – М.: Наука, 1984. – 333 с.
2. **Бурдюк В.Я.** Алгоритмы паралельного упорядочения / В.Я. Бурдюк, В.А. Турчина. – Днепропетровск, 1985. – 84 с.
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование / Р. Беллман – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.

Надійшла до редколегії 25.06.2013 р.