ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2012

ISSN 2074-5893

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

ВИПАДКИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Збірник наукових праць

Дніпропетровськ
Видавництво Дніпропетровського
національного університету

2012

УДК 001, 004, 007, 512, 517, 519, 534, 539, 616, 631, 681
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431
П 32

Друкується за ухвалою вченої ради
Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара

Уміщені результати фундаментальних досліджень та практичних розробок з проблем математичного та програмного забезпечення інтелектуальних систем. Статті присвячені питанням математичного моделювання складних прикладних систем і розробки ефективних обчислювальних методів та алгоритмів їхнього розв'язання, а також оптимізації, чисельних методів, функціонального аналізу, математичної фізики. Для науковців, викладачів вузів, може бути корисним аспірантам і студентам

П 32 **Питання прикладної математики і математичного моделювання**: зб. наук. пр. / ред. кол. … О. М. Кісельова (голов. ред.) та ін. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2012. – 276 с.

Содержатся результаты фундаментальных исследований и практических разработок по проблемам математического и программного обеспечения интеллектуальных систем. Статьи посвящены вопросам математического моделирования сложных прикладных систем и разработке эффективных вычислительных методов и алгоритмов их решения, а также оптимизации, численных методов, функционального анализа, математической физики. Для ученых, преподавателей вузов, может быть полезен аспирантам и студентам

УДК 001, 004, 007, 512, 517, 519, 534, 539, 616, 631, 681
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

Редакційна колегія:
д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.М. Кісельова** (головний редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.О. Кочубей** (заст. відп. редактора), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Є. Бєлозьоров**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А.М. Пасічник**, д-р техн. наук, проф. **А. А. Босов,** д-р техн. наук, проф. **О. І. Михальов**, д-р техн. наук, проф. **Н. І. Ободан**, д-р техн. наук, проф. **О. І. Федякін**, канд. фіз.-мат. наук, проф. **В. Д. Ламзюк**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **Л. С. Коряшкіна** (відп. секретар)

© Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 2012
© Видавництво ДНУ, оформлення, 2012

УДК 519.8

В.Е. Белозеров[1]
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ДИНАМИКЕ РАЗВИТИЯ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Розглянуто випадок біологічної популяції, яка складається з декількох субпопуляцій (різних типів «соціальних» груп популяцій: родин, зграй і т. ін.). Запропоновано модель «відкритого гіперциклу Ейгена» для опису нетривіальних взаємодій цих груп. Проведено однопараметричний біфуркаційний аналіз. Розглянуто біологічну інтерпретацію результатів.

Рассмотрен случай биологической популяции, которая состоит из нескольких субпопуляций (разных типов «социальных» групп популяций: семей, стай и т.п.). Предложена модель «открытого гиперцикла Эйгена» для описания нетривиальных взаимодействий этих групп. Проведен однопараметрический бифуркационный анализ. Обсуждена биологическая интерпретация результатов.

The case of biological population which consists of a few subpopulations (of different types of «social» populations' groups: families, flocks etc.) is considered. The model of «opened Eigen hypercycle» for description of nontrivial interactions of these groups is proposed. One-parameter bifurcation analysis was conducted. Biological interpretation of results was discussed.

Ключевые слова: биологическая популяция, открытый гиперцикл Эйгена, динамическая система.

Введение. Большое число математических моделей биологических структур популяций (напр. [1 – 7]) разработаны для описания их динамики, где в расчет принимались психологические различия между индивидуумами (по возрасту, полу, размеру и т. п.). В то же время математические модели социальной структуры популяций известны не так широко. Это не очень естественно, потому что такая форма гетерогенной популяций хорошо известна и её исследование является актуальным в современной биологии [8; 9].

Известно несколько фундаментальных описаний социальных структур для ряда интересных видов [9; 12; 13]. В некоторых случаях (к примеру

© *В.Е. Белозеров, 2012*

УДК 519.8

О.В. [2]Богомаз
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Исследуется существование решений задачи оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области.

Досліджується існування розв'язків задачі оптимального керування в коефіцієнтах еліптичних варіаційних нерівностей з умовами Неймана на межі області.

The work is devoted to the researching the factual solutions to the optimal control problem in coefficients of elliptic variotional inequalities with Neyman's boundary conditions.

Ключевые слова: вариационные неравенства, соленоидальные управления, условия Неймана.

Введение. В данной работе рассматриваются проблемы существования решений для задач оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области. Как показал Ф.Мюра в 1970 г. [1; 2] задача оптимального управления в коэффициентах соответствующих нелинейных уравнений не имеет решения в общем случае, что доказывает актуальность рассмотрения таких проблем.

Подобные задачи рассматривались в [4], но для краевой задачи с условиями Дирихле. Существенным отличием данной задачи от рассмотренной в [4] является специфика функциональных пространств, которым принадлежат допустимые решения таких задач. Базовым пространством будет декартово произведение $L^{\infty\times}(\Omega, R^{NN}) \times H^1(\Omega)$, где Ω является открытым подмножеством R^N с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Как

© *О.В. Богомаз, 2012*

известно, пространство $\left(H^1(\Omega)\right)^*$ не вложено в пространство $H^{-1}(\Omega)$, поскольку оно представляет собой прямую сумму $H^{-1}(\Omega) \oplus \left(\quad\right)^{1/2}(\partial\Omega)^*$. Здесь через $H^{1/2}(\partial\Omega)$ обозначено пространство следов функций из $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$. Таким образом, целью данной работы является доказательство разрешимости задачи оптимального управления в коэффициентах для эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе на множестве обобщенно соленоидальных управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(y, U) = \|y - z_\partial\|_{L^2(\Omega)} \to \inf, \tag{1}$$

$$U \in L^\infty(\Omega, R^{NN}), U \in M_\alpha^\beta(\Omega), y \in K, \tag{2}$$

$$\langle -div(U(x)\nabla y) + yy - y \rangle_{VV} \geq \langle f, v - y \rangle, \quad \forall v \in K, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \upsilon_B}\right|_{\partial\Omega} = g, \tag{4}$$

где $V = H^1(\Omega)$, K – замкнутое выпуклое подмножество пространства V, $z_\partial \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ – заданные распределения, $f \in L^2(\Omega)$ – фиксированная функция, $\frac{\partial y}{\partial \upsilon_B} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{}{x} \cos(\upsilon, x_i)$, υ – вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.

Пусть α и β – постоянные, такие что: $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$. Множество $M_\alpha^\beta(\Omega)$ является совокупностью всех симметричных матриц $U(x) = \{a_{ij}(x)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ в пространстве $L^\infty(\Omega, R^{NN})$ таких, что выполняются следующие условия:

$$|a_{ij}(x)| \leq \beta \quad \text{п.в. в } \Omega, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5}$$

$$(U(x)(\zeta - \eta), \zeta - \eta)_{R^N} \geq 0, \quad \text{п.в. в } \Omega, \forall\, \zeta, \eta \in R^N, \tag{6}$$

$$(U(x)\zeta,\zeta)_{R^N} \geq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\zeta_j\zeta_i \geq \alpha\|\zeta\|_2^2 \text{ п.в. в } \Omega, \|\zeta\|_2^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2\right) \quad (7)$$

Введем в рассмотрение связанный с задачей (3) – (4) оператор

$$B:\ M_\alpha^\beta(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)^* = H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

где

$$B(U)y = B_1(U)y \oplus B_2(U)y, \quad (8)$$

$$B_1(U)y = -\operatorname{div}(U(x)\nabla y) + y \quad (9)$$

$$B_2(U)y = (U(x)\gamma_0 y, \gamma_0 v)_{R^N}, \quad (10)$$

и соответствующую ему форму

$$\langle B(U)y, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (U(x)\nabla y, \nabla v)_N dx + \int_\Omega yv dx, \ \forall y, v \in H^1(\Omega). \quad (11)$$

Здесь через $\gamma_0 y$ обозначен след функции $y \in H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

Тогда исходную задачу оптимального управления (1) – (4) можно представить в следующем виде:

$$I(U, y) = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^2 dx \longrightarrow \inf, \quad (12)$$

$$\langle B_1(U)y, v - y\rangle_V \geq \langle f, v - y\rangle_V \text{ на } \Omega, \quad (13)$$

$$B_2(U)y = g, \quad (14)$$

$$U \in M_\alpha^\beta(\Omega), \ y \in H^1(\Omega). \quad (15)$$

Предварительные результаты и вспомогательные факты. Приведем некоторые известные результаты, которые будут использоваться далее.

Лемма 1 [5] Для заданного управления $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ оператор $B_U : V \to V^*$, определенный как

$$\langle B_U(y), v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[(U(x)\nabla y, \nabla v)_N + yv\right] dx, \quad (16)$$

является строго монотонным, коэрцитивным и деминепрерывным.

Теорема 1 [3] *Пусть V – гильбертово пространство, $K \subset V$ – замкнутое выпуклое подмножество. Предположим, что $A : K \to V^*$ –*

нелинейный оператор и f *является заданным элементом* V^*, *где* V^* – *пространство, сопряженное с* V. *Тогда вариационное неравенство*

$$\langle A(y), v - y\rangle_{VV} \geq \langle f, v - y\rangle \quad , \quad \forall v \in K, \tag{17}$$

имеет хотя бы одно решение $y \in K$ *при выполнении следующих условий:*

1. оператор A *является псевдомонотонным, т. е. выполняются условия:*

а) оператор A *является ограниченным;*

б) из того, что $y_k \to y$ *слабо в* V, $y_k, y \in K$ *и* $\limsup_{k\to\infty} \langle A(y_k), y_k - y\rangle_V \leq 0$, *следует выполнение неравенства*

$$\liminf_{k\to\infty} \langle A(y_k), y_k - v\rangle_V \geq \langle A(y), y - v\rangle_V, \quad \forall v \in V;$$

2. *оператор* A *является коэрцитивным, т. е. существует элемент* $v_0 \in K$ *такой, что выполняется условие*

$$\frac{\langle A(v), v - v_0\rangle_V}{\|v\|_V} \to \infty \text{ при } \|v\|_V \to \infty, \ v \in K.$$

Теорема 2 [3] *Если оператор* $A: K \to V^*$ *в теореме 1 является строго монотонным на* K, *тогда вариационное неравенство (17) допускает не более одного решения.*

Следуя Лионсу [3], сделаем следующие предположения.

Предположение 1 Существует рефлексивное банахово пространство X, такое что $X \subset V^*$ непрерывно и X плотно в V^*.

Предположение 2 Найдется дуальное отображение $J: X^* \to X$ такое что $\forall y \in K$, $\forall \varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in K$ такое, что $A(y_\varepsilon) \in K$ и $y_\varepsilon + \varepsilon J(A(y_\varepsilon)) = y$.

Теорема 3 [3] *Пусть выполняются предположения 1 и 2. Пусть оператор* $A: V \to V^*$ *монотонен, полунепрерывен, ограничен и удовлетворяет условию 1 теоремы 1. Тогда включение* $f \in X$ *влечет за собой выполнение условия* $A(y) \in X$ *для любого решения* y *вариационного неравенства (17).*

Лемма 2 [4] Пусть $\{f_k\}_{k\in N} \in L^2(\Omega)$, $\{g_k\}_{k\in N} \in L^2(\Omega)$ – последовательность вектор-функций таких, что $f_k \to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$ и $g_k \to 0$

слабо в $L^2(\Omega)$. Предположим, что определенные последовательности удовлетворяют условиям:

1. $\{divf_k\}_{k\geq 1}$ – ограниченная последовательность в $L^2(\Omega)$;

2. $rot\ g_k = 0,\ \forall k = \overline{1,N}$.

Тогда, выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\Omega\Omega} \Phi(f_k, g_k)_{R^{NN}} dx = \Phi(f_0, g_0)\ dx,\ \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (18)$$

Введем в рассмотрение следующий класс вектор-функций:

$$X(\Omega) = \left\{U \in L^2(\Omega) \mid divU \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Как известно, для произвольной пары функций $(U, v) \in X(\Omega) \times H^1(\Omega)$ справедливо соотношение (формула Стокса)

$$\int_\Omega \left[(U, \nabla v)_{R^n} + v divU\right] dx = \langle \gamma_U, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \quad (19)$$

Разрешимость задачи оптимального управления. Пусть ξ_1, ξ_2 – заданные функции из $L^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям:

(i) $0 < \beta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x)$ п.в. в Ω;

(ii) $\alpha = \|\xi_2\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Пусть $\{Q_1, Q_2, ..., Q_N\}$ - множество непустых компактных подмножеств в $H^{-1}(\Omega)$. Определим множество допустимых управлений как

$$U_{ad} = U_b \cap U_{sol} \subset L^\infty(\Omega, R^{NN}),$$

где

$$U_b = \left\{U = [a_{ij}] \in M_\alpha^\beta(\Omega) \mid \xi_1(x) \leq a_{ij}(x) \leq \xi_2(x)\ \text{п.в. в}\ \Omega, \forall i, j = \overline{1,N}\right\}, \quad (20)$$

$$U_{sol} = \left\{U = [a_1, ..., a_N] \in M_\alpha^\beta(\Omega) \mid diva_i \in Q_i,\ \forall i = \overline{1,N}\right\}. \quad (21)$$

Всюду далее предположим, что $U_{ad} \neq \varnothing$.

Определение 1 Будем говорить, что матрица $U_{ad} = [a_{ij}]$ является допустимым управлением в задаче (12) – (15), если $U \in U_{ad}$.

Отметим, что U_{ad} не вложено ни в $W^{1,\infty}(\Omega)$, ни в $H^1(\Omega)$, но равномерно ограничено в $L^\infty(\Omega)$.

Обозначим через Ξ совокупность пар $(U, y) \in L_\infty^{N\times N}(\Omega) \times H^1(\Omega)$ таких, что $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, $y = y(U)$ – функция из $H^1(\Omega)$, причем y и U связаны соотношениями (13) и (14). Далее Ξ будем называть множеством допустимых решений задачи оптимального управления (12) – (15).

Определение 2 Пару (U^0, y^0) будем называть оптимальной для задачи (12) – (15), если $(U^0, y^0) \in \Xi$ и $L(U^0, y^0) = \inf_{(U,y)\in\Xi} L(U, y)$.

Определение 3 Задача оптимального управления (12) – (15) называется регулярной, если множество допустимых пар Ξ непусто.

Покажем, что задача (12)-(15) регулярна.

Пусть $U = [a_{ij}(x)]_{1\le i,j\le n} \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ - произвольная матрица. Свяжем с ней следующее множество:

$$W_U(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \mid div[U(x)\nabla y] \in L_2(\Omega)\}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$B_U : W_U(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*,$$

где $B_U(\cdot) = B(U, \cdot)$.

Применяя формулу Стокса (19) на $W_U(\Omega) \times H^1(\Omega)$, приходим к следующим преобразованиям:

$$\langle B_U(y), v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle B_{1,U}(y), v\rangle_{H^1(\Omega)} + \langle B_{2,U}(y), \gamma_0 v\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega [-v div(U(x)\nabla y) + yv]dx + \langle (U(x)\nabla y)_{R^N}, \gamma_0 v\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} =$$

$$= \iint_{\Omega\Omega} (U(x)\nabla y, \nabla v)_{R^N} dx - \langle \gamma_{U\nu}\gamma_0 y, \gamma_0 v\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_\Omega yv dx + \langle \gamma_{U\nu}\gamma_0 y, \gamma_0 v\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega [(U(x)\nabla y, \nabla v)_{R^N} + yv]dx$$

для произвольных $y \in W_U(\Omega)$ и $v \in H^1(\Omega)$.

В результате, для заданного управления $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ и произвольных $y, v \in W_U(\Omega)$ справедливо представление

$$\left\langle B_U(y), v\right\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(U(x)\nabla y, \nabla v\right)_{R^n} + yv \right] dx . \qquad (22)$$

Лемма 3 [4] Для заданного управления $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ оператор $B_U : V \to V^*$, имеющий представление (22), строго монотонен, коэрцитивен и деминепрерывен.

Утверждение 1 Для произвольных $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$ задача оптимального управления (12) - (15) является регулярной.

Доказательство. Покажем, что Ξ является непустым множеством пространства $L^\infty(\Omega; R^{N\times N}) \times H^1(\Omega)$, то есть существует хотя бы одна пара $(U, y) \in \Xi$. Поскольку первое предположение теоремы 1 выполнено, то покажем справедливость второго.

Пусть $v_0 \in K$ - фиксированный произвольный элемент и матрица $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$. Для всех $y \in K$ имеем:

$$\left\langle B_U(y), y - v_0\right\rangle_V \ge \left\langle B_U(y), y\right\rangle_V - \left|\left\langle B_U(y), v_0\right\rangle_V\right| = I_1 - |I_2| . \qquad (23)$$

Используем следующие оценки:

$$I_1 = \int_\Omega \left(U(x)\nabla y, \nabla y\right)_{R^n} dx + \int_\Omega y^2 dx \ge \xi(x)\|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta\|y\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \beta\|y\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$|I_2| = \left|\int_\Omega \left(U(x)\nabla y, \nabla v_0\right)_{R^n} dx + \int_\Omega y v_0 dx\right| \le \{из\ (5)\} \le \left|\int_\Omega y v_0 dx\right| +$$

$$+\beta\left|\int_\Omega \left(\nabla y, \nabla v_0\right)_{R^N} dx\right| \le \beta\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla y|^2 dx\right)^{1/2} + \|y\|_{L^2(\Omega)}\|v_0\|_{L^2(\Omega)} \le \qquad (24)$$

$$\le \beta\|y\|_{L^2(\Omega)}\left(\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}\right) + \|y\|_{L^2(\Omega)}\left(\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}\right) \le$$

$$\le \beta\|v_0\|_V\|y\|_V + \|v_0\|_V\|y\|_V \le \max\{\beta, 1\}\|v_0\|_V\|y\|_V$$

Из (23) и (24) следует выполнение условия:

$$\frac{\langle B(Uy,\ ),y-v_0\rangle_V}{\|y\|_V} \geq \beta\|y\|^2_{VV} - \max\{\ ,1\}\|v_0\|_V\|y\| \ =$$

$$= \|y\|_V\left(\min\{\alpha,1\} - \frac{\max\{\beta,1\}\|v_0\|_V}{\|y\|_V}\right) \to\infty,$$

при $\|y\|_V \to\infty$. Таким образом, для каждого допустимого управления существует решение задачи (13) – (15).

Теперь необходимо проверить будет ли это решение элементом множества $W_U(\Omega)$. Учитывая, что $f\in\Omega^2(\ )$ и, применяя теорему 3, имеем: $B(y,\ )\in\Omega^2(\ )$. Отсюда следует, что решение задачи (13) – (15) будет всегда элементом множества $W_U(\Omega)$. Следовательно, $(Uy\ )\in\Xi\subset U_{ad}\times W_U(\Omega)$, что и необходимо было показать.

Утверждение 2 [4] Множество U_{sol} – секвенциально компактно относительно *-слабой топологии пространства $L^{\infty\times}(\Omega,\ ^{NN}\ )$.

В пространстве $L^{\infty\times}(\Omega,\ ^{NN}\ )\times H^1(\Omega)$ обозначим через топологию τ произведение *-слабой топологии $L_\infty^{NN}(\Omega)$ и топологии слабой сходимости в $H^1(\Omega)$.

Согласно утверждения 1 множество допустимых пар в задаче (12) – (15) удовлетворяет условию $\Xi\subset L^{\infty\times}(\Omega;R^{NN}\ )\times W_U(\Omega)$, тогда для каждого управления $U\in\Omega_\alpha^\beta(\ )$ дуальное спаривание $\langle B_U(y),v\rangle_{H^1(\Omega)}$ может быть представлено в виде (22). Применяя теорему 4.1 из [4], получим следующий результат.

Теорема 4 *Пусть* $K\subset V$ *выпуклое замкнутое подмножество пространства* $H^1(\Omega)$, *тогда для произвольных* $f\in\Omega^2(\ )$, $g\in\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$ *множество* Ξ *задачи (12) – (15) является секвенциально* τ *-замкнутым в пространстве* $L^{\infty\times}(\Omega,\ ^{NN}\ )\times H^1(\Omega)$

Теорема 5 *Задача оптимального управления (12) – (15) допускает, по крайней мере, одно решение* $\left(U^{opt},y^{opt}\right)\in\Xi\subset L^{\infty\times}\left(\Omega\ R^{NN}\right)\times H^1(\Omega)$ *для любых* $f\in\Omega^2(\ )$ *и* $g\in\left(\right)^{*}$ $^{1/2}(\partial\Omega)$.

Доказательство. Учитывая, что $\Xi\neq\varnothing$, имеем: существует минимизирующая последовательность $\left\{(U_k,\ y_k)\in\Xi\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ т. е.

$$\lim_{k\to\infty}L(U_k,\ y_k)=\inf_{(U,\ y)\in\Xi}L(U,\ y)<+\infty\ .$$

Учитывая, что последовательность допустимых управлений $\left\{U_k\in U_{ad}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в пространстве $L^{\infty\times}\left(\Omega,\ R^{NN}\right)$ и следуя теореме 4.1 из [4] можно показать, что минимизирующая последовательность $\left\{(U_k,\ y_k)\right\}$ ограничена в $L^{\infty\times}\left(\Omega,\ R^{NN}\right)\times H^1(\Omega)$. Применяя теорему Банаха-Алаоглу и переходя к подпоследовательности в случае необходимости, имеем: $U_k\to U$ *-слабо в $L^{\infty\times}\left(\Omega,\ R^{NN}\right)$ и $y_k\to y$ * слабо в $H^1(\Omega)$. Согласно теоремы 4, пара $\left(U^{**},y\right)$ является допустимой в задаче (12) – (15). Вследствие свойства полунепрерывности снизу функционала L относительно топологии τ в пространстве $L^{\infty\times}\left(\Omega,\ R^{NN}\right)\times H^1(\Omega)$ имеем:

$$L(U^{**},y)\le\liminf_{k\to\infty}L(U_k,y_k)\ \inf_{(U,\ y)\in\Xi}L(U,\ y).$$

Откуда немедленно следует оптимальность пары $\left(U^{**},y\right)$ в задаче (12) – (15). Теорема доказана.

Выводы. Используя методы вариационного исчисления и лемму о компенсированной компактности Тартара, получены условия, гарантирующие разрешимость задачи оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области в классе обобщенных соленоидальных управлений.

Библиографические ссылки

1. **Murat F.** Un contre-exemple pour le prolème de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Ser. A 273 (1971), 708-711.

2. **Murat F.** Téorèmes de non_existence pour des prolème de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Ser. A 274 (1972), 395-398.

3. **Lions J.-L**. Some methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.

4. **Kogut O. P.** On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities /O.P.Kogut// Вісник Дніпропетр. ун_ту, Серія: «Моделювання» – 2011. – Т.19, № 8. – С. 86-99.

5. **Когут О.П.** Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах Монографія / О.П. Когут, П.І. Когут, О.А. Рядно. – Дніпропетровськ, 2010. – 236 с.

Надійшла до редколегії 6.06.2012

УДК 519.6

Л.Т. Бойко
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

СПОСІБ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ В МЕТОДІ ТИХОНОВА

На конкретних прикладах систем лінійних алгебраїчних рівнянь у некоректній постановці продемонстрована ідея способу підвищення точності наближених розв'язків, добутих методом регуляризації Тихонова.

На конкретных примерах систем линейных алгебраических уравнений в некорректной постановке продемонстрирована идея способа повышения точности приближенных решений, полученных методом регуляризации Тихонова.

On concrete examples of ill-posed systems of the linear algebraic equations the idea of a way of increase of accuracy of the approximate decisions received by a method of regularization of Tikhonov is shown.

Ключові слова: некоректно поставлена задача, метод регуляризації Тихонова, підвищення точності наближеного розв'язку.

Вступ. У більшості практичних задач, де виникає необхідність розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), коефіцієнти матриці та вектора вільних членів добуваються експериментально, а значить наближено, при цьому, підвищити точність вихідних даних для таких СЛАР, як правило, неможливо.

Розв'язувати некоректно поставлені СЛАР можна методом регуляризації Тихонова, який дозволяє будувати стійкі наближені розв'язки у відповідності з похибками вихідних даних. Актуальним стає питання: «Як, користуючись методом Тихонова, підвищити точність розв'язку, не підвищуючи точності вихідних даних?»

Математична постановка задачі. У практичних задачах часто матриця A та вектор u відомі лише наближено. В цих випадках замість СЛАР

$$Az = u \tag{1}$$

маємо справу з деякою іншою СЛАР

$$Az = u, \quad z \in \mathbb{R}^{nm}, \quad u \quad R \quad , \tag{2}$$

такою, що

© *Л.Т. Бойко, 2012*

$$\|A - \tilde{A}\| \le h, \qquad \|u - \tilde{u}\| \le \delta. \tag{3}$$

Про точну СЛАР (1), розв'язок якої треба знайти, відомо лише те, що для A та u виконуються нерівності (3). Але систем з такими даними існує безліч, і в межах відомих нам похибок даних (3) ці системи між собою не розрізняються. Отже, мова може йти лише про побудову наближеного нормального розв'язку системи (1) на основі наближеної СЛАР (2) та похибок (3). Наближені розв'язки повинні бути стійкими до малих збурень у коефіцієнтах матриці та вектора вільних членів.

За методом регуляризації Тихонова наближення до нормального розв'язку – це розв'язок такої задачі [1]

$$\begin{cases} M^{\alpha} \equiv \|Az - u\|^2 + \alpha \|z\|^2 \to \min, & \alpha > 0, \\ B(\alpha, \delta) \equiv \|Az^{(\alpha)} - u\| - \delta_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Мінімізуючи функціонал M^{α} в задачі (4), приходимо до СЛАР

$$\left(A^T A + \alpha E\right) z^{(\alpha)} = A^T u. \tag{5}$$

Розв'язком СЛАР (5) буде вектор $z^{(\alpha)}$, на якому функціонал M^{α} досягає мінімального значення. Параметр регуляризації $\alpha > 0$ знаходимо з умови $B(\alpha, \delta_1) = 0$, при чому число δ_1 в (4) обчислюємо за формулою

$$\delta_1 = \begin{cases} 2\left(h \|z^{(\alpha)}\| + \delta\right) + \mu, & \text{якщо } \mu \neq 0, \\ h \|z^{(\alpha)}\| + \delta + \mu & \text{якщо } \mu = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Тут $\mu = \inf\limits_{z \in R^n} \|Az - u\|$.

Такий алгоритм дозволяє будувати множину розв'язків $z(h, \delta)$, таких, що

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \delta \to 0}} z(h, \delta) = z(0,0), \tag{7}$$

де $z(0,0)$ – це розв'язок, або псевдорозв'язок, або нормальний розв'язок системи (1) залежно від того, чи розв'язується ця система однозначно, чи має множину розв'язків, чи не має жодного розв'язку.

Залежність (7) показує, що наближений розв'язок $z(h, \delta)$ тим краще апроксимує точний розв'язок $z(0,0)$, чим меншими є похибки h, δ. Таким

чином, метод Тихонова дає алгоритм для конструювання стійкого до збурень вихідних даних наближеного розв'язку системи (2) загального вигляду, включаючи погано обумовлені системи.

Оскільки в реальних практичних задачах похибки h, δ, як правило, не можна як завгодно зменшувати, то задача полягає в розробці алгоритму уточнення розв'язку $z(h,\delta)$ при ненульових похибках h, δ, які не можна зменшувати (але збільшувати можна).

Метод розв'язування задачі. Приймаючи до уваги (7) та вважаючи похибки h, δ задачі (2), (3) малими, розкладемо розв'язок $z(0,0)$ точної задачі (1) у ряд Тейлора в околі точки (h,δ)

$$z(0,0) = z(h,\delta) - h\left.\frac{\partial z}{\partial h}\right|_{(h,\delta)} - \delta\left.\frac{\partial z}{\partial \delta}\right|_{(h,\delta)} + O\left(h^2+\delta^2\right). \tag{8}$$

У розкладанні (8) $z(h,\delta)$ – це розв'язок задачі (2), (3), добутий методом регуляризації Тихонова при відомих похибках h, δ. Для обчислення частинних похідних першого порядку зробимо перерахунок задачі (2), (3) при інших (більших) значеннях похибок h, δ. Для цього позначимо $h_2 > h_1 = h > 0$, $\delta_2 > \delta_1 = \delta > 0$ та скористаємось різницевими формулами для похідних

$$\left.\frac{\partial z}{\partial h}\right|_{(h_1,\delta_1)} = \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{h_1 - h_2} + O(h_1),$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \delta}\right|_{(h_1,\delta_1)} = \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} + O(\delta_1). \tag{9}$$

Підставимо (9) до (8) та зберемо перші три доданки у правій частині розкладання (8), які і будуть утворювати уточнений розв'язок задачі (2), (3)

$$\bar{z}(h_1,\delta_1) = z(h_1,\delta_1) - h_1\frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{h_1 - h_2} - \delta_1\frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} =$$
$$= z(h_1,\delta_1) + \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{\frac{h_2}{h_1} - 1} + \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1}. \tag{10}$$

Якщо $h_2 = 2h_1$, $\delta_2 = 2\delta_1$, то вигляд формули (10) дещо спроститься

$$\bar{z}(h_1,\delta_1) = 3z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1) - z(h_1,\delta_2). \tag{11}$$

З формул (10), (11) бачимо, що для того, щоб уточнити наближений розв'язок задачі (2), (3), добутий методом Тихонова при заданих значеннях похибок $h=h_1$, $\delta=\delta_1$, потрібно ще додатково двічі застосувати метод Тихонова при інших (більших) варіантах похибок h, δ.

Якщо в СЛАР (2) матриця A відома точно ($h = 0$), а вектор вільних членів – наближено ($\delta > 0$), то формули (10), (11) для уточнення наближеного розв'язку можна спростити.

Для цього розкладання (8) запишемо у вигляді

$$z(0) = z(\delta) - \delta \cdot z'(\delta) + \frac{\delta^2}{2} z''(\delta) + O\left(\delta^3\right). \tag{12}$$

Для обчислення похідних першого та другого порядків у розкладанні (12) зробимо перерахунок задачі (2), (3) при більших значеннях похибки δ. Для цього позначимо $\delta_3 > \delta_2 > \delta_1 = \delta > 0$ та скористаємось різницевими формулами для похідних.

Якщо обчислені наближені розв'язки $z(\delta_1, \delta_1)$, $z(\delta_2, \delta_1)$ задачі (2), то формула для уточнення наближеного розв'язку $z(\delta_1)$ стане такою

$$\bar{z}(\delta_1) = z(\delta_1) + \frac{z(\delta_2, \delta_1) - z(\delta_1)}{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1}. \tag{13}$$

Якщо крім розв'язків $z(\delta_1, \delta_1)$, $z(\delta_2, \delta_1)$ задачі (2), відомо ще $z(\delta_3)$, то можна побудувати більш точний варіант формули для уточнення наближеного розв'язку $z(\delta_1)$, а саме

$$\bar{\bar{z}}(\delta_1) = z(\delta_1) - \frac{z(\delta_2) - z(\delta_1)}{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_3 - \delta_2} + \frac{z(\delta_3) - z(\delta_1)}{\frac{\delta_3}{\delta_1} - 1} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_3 - \delta_2}. \tag{14}$$

Якщо $\delta_2 = 2\delta_1$, $\delta_3 = 3\delta_1$, то вигляд формул (13), (14) спроститься.

$$\bar{z}(\delta_1) = 2z(\delta_1) - z(\delta_2). \qquad \bar{\bar{z}}(\delta_1) = 3z(\delta_1) - 3z(\delta_2) + z(\delta_3). \tag{15}$$

Формули (10), (13), (14) та їхні частинні випадки за ідеєю побудови та виглядом нагадують формули Рунге, за допомогою яких, уточнюється наближене значення похідної після проведення двох, або трьох додаткових перерахунків з різними (більшими) кроками [2].

Модельні приклади та аналіз результатів

Приклад 1. Розглянемо одне рівняння з двома невідомими. У рівнянні всі коефіцієнти відомі наближено

$$az_1 + bz_2 \approx c\,. \tag{16}$$

Перепишемо рівняння (16) у матричному вигляді

$$Az = u\,,$$

де $A = [a \quad b]$, $u \approx c$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $\|A - A\| \le h$, $\|u - u\| \le \delta$.

Тут h, δ – відомі числа, A, u – невідомі матриця та вектор.

Простота прикладу дозволила за алгоритмом Тихонова (4), (5), (6) побудувати розв'язок $z(h, \delta)$ задачі (16) у вигляді формули

$$z(h, \delta) = \frac{c}{\left(a^2 + b^2\right) + h\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)}} \left(1 \quad \frac{\delta}{|c|}\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Якщо $h \to 0$, $\delta \to 0$, то наближене рівняння (16) прямує до точного рівняння

$$az_1 + bz_2 = c\,, \tag{18}$$

а вектор (17) прямує до нормального розв'язку $z(0,0)$ рівняння (18).

$$z(0,0) = \frac{c}{a^2 + b^2} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Для проведення розрахунків виберемо конкретний числовий приклад.

$$z_1 + 7z_2 = 5\,. \tag{20}$$

Вважаючи коефіцієнти рівняння (20) відомими точно, знаходимо за формулою (19) нормальний розв'язок цього рівняння

$$z(0,0) = \frac{5}{1 + 49} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Далі розглянемо варіанти наближеного завдання рівняння (20).

Варіант 1. $0{,}95\,z_1 + 7{,}05\,z_2 \approx 4{,}95$.

У цьому прикладі та всюди далі користуємось спектральною нормою матриці та евклідовою нормою вектора. Знаходимо

$$h = \|A - A\| = 0{,}052; \quad \delta = \|u - u\| = 0{,}05; \quad z(h, \delta) = \begin{bmatrix} 0{,}0910816 \\ 0{,}6759213 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Варіант 2. $0{,}90\ z_{12}+=7{,}10\quad 4{,}95$. Знаходимо

$$h=\ _{21}=0{,}102;\quad \delta=\ =0{,}05;\quad z(h\ _{21}\delta)=\begin{bmatrix}0{,}0844308\\0{,}6660652\end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Варіант 3. $0{,}95\ z_{12}+=7{,}05\quad 4{,}90$. Знаходимо

$$h=\ _{12}=0{,}052;\quad \delta=\ =0{,}10;\quad z(h\ _{12}\delta)=\begin{bmatrix}0{,}0892227\\0{,}6621266\end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Для кожного варіанта наближеного рівняння вектор $z(h,\delta)$ обчислювався двома способами: за допомогою комп'ютерної програми, в якій реалізовувався алгоритм методу Тихонова (4), (5), (6), та (для контролю) за допомогою формули (17). Результати збіглися до сьомого розряду після коми, так вони і представлені векторами (22), (23), (24).

Як видно, найближчим до вектора (21) є вектор (22). Менш точні результати (23), (24) використаємо для того, щоб за формулою (11) підвищити точність вектора (22).

$$z(h\ _{11}\delta)=\begin{bmatrix}0{,}0995913\\0{,}6995721\end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Як видно, вектор (25) є ближчим до вектора (21), ніж вектор (22).

Приклад 2. Система двох рівнянь з одним невідомим.

$$\begin{cases} z= \ _1,\\ z= \ _2. \end{cases} \qquad (26)$$

Перейдемо до матричного запису системи (26)

$$Az=u, \qquad (27)$$

де $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,, $u=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ $\|u-u\|\le\delta$.

Матриця A системи (27) відома точно, а вектор u з похибкою δ, вектор u (вектор точної СЛАР) вважаємо невідомим.

Простота прикладу 2 дозволила за алгоритмом методу Тихонова (4), (5), (6) побудувати розв'язок $z(\delta)$ задачі (27) у вигляді формули

$$z(\delta)=\frac{b_1+b_2}{2}-\sqrt{2\delta\mu\ +\delta)},\ \text{де}\ \mu=\frac{|b_1-b_2|}{\sqrt{2}}. \qquad (28)$$

Формулою (28) визначається наближення до нормального розв'язку системи (26) залежно від похибки δ. Якщо $\delta \to 0$, то наближена система рівнянь (26) прямує до точної системи рівнянь

$$\begin{cases} z = b_1, \\ z = b_2, \end{cases} \tag{29}$$

а наближений розв'язок (28) прямує до нормального розв'язку $z(0)$ системи (29)

$$z(0) = \frac{b_1 + b_2}{2}. \tag{30}$$

Для проведення розрахунків виберемо конкретний числовий приклад

$$\begin{cases} z = 2, \\ z = 1. \end{cases} \tag{31}$$

Нормальний розв'язок системи (31) знаходимо за формулою (30)

$$z(0) = 1{,}5.$$

Тепер розглянемо три варіанти наближеного завдання рівнянь (31):

Варіант 1. $\begin{cases} z = 2{,}1; \\ z = 1{,}1. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_{11} = 0{,}1^2$; $z(\delta) = 1{,}110100$. (32)

Варіант 2. $\begin{cases} z = 2{,}2; \\ z = 1{,}2. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_{22} = 0{,}2^2$; $z(\delta) = 0{,}951668$. (33)

Варіант 3. $\begin{cases} z = 2{,}3; \\ z = 1{,}3. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_{33} = 0{,}3^2$; $z(\delta) = 0{,}820202$. (34)

Для кожного варіанта наближених рівнянь розв'язок $z(\delta)$ обчислювався двома способами: за допомогою комп'ютерної програми, в якій був реалізованим алгоритм методу Тихонова (4), (5), (6), та (для контролю) за допомогою формули (28). Результати збіглися до шостого розряду після коми, так вони і представлені в (32), (33), (34).

За допомогою формул (15) уточнимо результат (32), використовуючи менш точні результати (33), (34):

$$z(\delta_T) \approx 1{,}268532; \qquad z(\delta_T) \approx 1{,}295498.$$

Як бачимо, формули (15) дозволяють підвищити точність результату (32), не підвищуючи точності наближених рівнянь.

Приклад 3. Як модельний приклад була також розглянута система, в якій число обумовленості є більшим, ніж 39600 [3]

$$\begin{cases} z_1 + 0{,}99\, z_2 = 1{,}99; \\ 0{,}99\, z_1 + 0{,}98\, z_2 = 1{,}97. \end{cases} \qquad (35)$$

Як видно, точним розв'язком системи (35) є вектор $z = [1;1]^T$, але цей розв'язок є нестійким.

Розглянемо три варіанти наближеного завдання системи (35).

Варіант 1. $\begin{cases} 0{,}99\, z_1 + 0{,}98\, z_2 = 1{,}97; \\ 0{,}98\, z_1 + 0{,}97\, z_2 = 1{,}95. \end{cases}$ $\delta = \delta_{11} = 0{,}02\sqrt{2}$, $h = \tau = 0{,}02$.

$$z(h_{11}, \delta) = [0{,}964873;0{,}955078]^T \qquad (36)$$

Варіант 2. $\begin{cases} 0{,}98\, z_1 + 0{,}97\, z_2 = 1{,}97; \\ 0{,}97\, z_1 + 0{,}96\, z_2 = 1{,}95. \end{cases}$ $\delta = \delta_{12} = 0{,}02\sqrt{2}$, $h = \tau = 0{,}04$.

$$z(h_{21}, \delta) = [0{,}955370;0{,}945571]^T \qquad (37)$$

Варіант 3. $\begin{cases} 0{,}99\, z_1 + 0{,}98\, z_2 = 1{,}95; \\ 0{,}98\, z_1 + 0{,}97\, z_2 = 1{,}93. \end{cases}$ $\delta = \delta_{21} = 0{,}04\sqrt{2}$, $h = \tau = 0{,}02$.

$$z(h_{12}, \delta) = [0{,}934722;0{,}925232]^T \qquad (38)$$

Вектори (36), (37), (38) обчислювались методом Тихонова за допомогою комп'ютерної програми. Для уточнення наближеного розв'язку (36) була використана формула (11)

$$\bar{z}(h_{11}, \delta) = [1{,}004527;0{,}994431]^T. \qquad (39)$$

Як бачимо, вектор (39) є ближчим до точного розв'язку системи (35), ніж вектор (36).

При проведенні чисельних розрахунків у наведених трьох прикладах була використана програмна реалізація алгоритму методу Тихонова, виконана студентом групи ПС-09-1 О.М. Жело.

Висновок. Розглянуті приклади підтверджують, що розроблений спосіб дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку некоректної СЛАР, добутого методом Тихонова, використовуючи менш точні результати, добуті при різних (більших) похибках завдання СЛАР. Це, у свою чергу, підвищує ефективність застосування чисельних методів при розв'язуванні практичних задач.

Бібліографічні посилання

1. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М., 1979. – 288 с.
2. **Турчак Л.И.** Основы численных методов: учеб. пособие /Л.И. Турчак. – М., 1987. – 320 с.
3. **Бойко Л.Т.** Основи чисельних методів: навч. посібник /Л.Т. Бойко. – Дніпропетровськ, 2009. – 244 с.

Надійшла до редколегії 18.05.2012

УДК 519.2+616.345–007.272.1

Я.С. Бондаренко[*], О.О. Пугач[*], А.В. Гапонов[**], В.В. Гапонов[**]
[*]Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
[**]Дніпропетровська державна медична академія

ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТЕЙ СТУПЕНІВ ТОВСТОКИШКОВОЇ НЕПРОХІДНОСТІ

Запропоновано методику оцінювання ймовірностей ступенів кишкової непрохідності залежно від вектора показників стану хворого, яка дає можливість хірургові дійти рішення щодо невідкладного оперативного втручання.

Предложена методика оценивания вероятностей степеней кишечной непроходимости в зависимости от вектора показателей состояния больного, которая дает возможность хирургу принять решение относительно неотложного оперативного вмешательства.

The method for estimation the probability of degrees of intestinal obstruction, depending on the vector indices of the patient, is offered. This technique will enable the surgeon to accept decision about urgent operative intervention.

Ключові слова: товстокишкова непрохідність, ступінь непрохідності, мультиноміальний розподіл, номінальна логістична регресія, імовірність, критерій.

Вступ. Товста кишка є одним з найбільш розповсюджених місць локалізації злоякісного процесу. Незважаючи на можливості сучасних діагностичних методів, кількість ускладнених форм раку товстої кишки залишається високою. У структурі ускладненого раку товстої кишки провідне місце займає товстокишкова непрохідність [2; 5]. Розрізняють три ступеня товстокишкової непрохідності [1]. *Компенсований ступінь* – це ранній ступінь непрохідності. *Субкомпенсований ступінь* характеризується частковим порушенням проходження вмісту травного каналу, зумовленим пухлиною. *Декомпенсований ступінь* характеризується повним порушенням проходження вмісту травного каналу внаслідок пухлини.

Наявність декомпенсованого ступеня непрохідності є показанням до невідкладного хірургічного втручання. Наявність субкомпенсованої або компенсованої товстокишкової непрохідності дозволяє належним чином

© *Я.С. Бондаренко, О.О. Пугач, А.В. Гапонов, В.В. Гапонов, 2012*

підготувати хворого до оперативного втручання, а головне, дає можливість одночасно провести додаткові обстеження (маючи дані цих обстежень планування характеру майбутнього оперативного втручання стає більш детальним) [1].

Розподіл кишкової непрохідності на компенсовану, субкомпенсовану та некомпенсовану, з клінічної точки зору, є досить складним. Такий розподіл підтверджується в основному не при клініко-інструментальному обстеженні, а більше візуально під час самої операції [4; 7].

Постановка задачі. Існують певні уявлення в якісному відношенні безумовно правильні, але в кількісному – вельми неоднозначні щодо диференціації ступеню кишкової непрохідності у хворих з гострою обструктивною непрохідністю товстої кишки, а саме диференціації компенсованого ступеню непрохідності (відповідну групу хворих позначатимемо через А), субкомпенсованого ступеню непрохідності (групу хворих позначатимемо через В) та декомпенсованого ступеню непрохідності (група хворих С).

Тому виникає задача знаходження показників, за значеннями яких можна було б диференціювати стан хворого як декомпенсований або як субкомпенсований або як компенсований ступінь непрохідності. Такими показниками можуть виступати показники загального аналізу крові, індекси реактивності та інтоксикації крові тощо.

У роботі запропоновано статистичний критерій диференціації ступеня кишкової непрохідності залежно від вектора показників стану хворого.

Модель номінальної логістичної регресії. *Мультиноміальний розподіл.* Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких з однаковою ймовірністю, що не залежить від результатів інших випробувань, відбувається одна з подій $A_1, A_2, ..., A_J$. Імовірність того, що в даному випробуванні відбудеться подія A_k дорівнює π_k, $k = 1,2,...,J$, $\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_J = 1$. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A_k відбудеться n_k разів, $k = 1,2,...,J$, $n_1 + n_2 + ... + n_J = n$, дорівнює

$$P_{n_1 n_2 ... n_J} = C_n(n_1, n_2, ..., n_J)\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}...\pi_J^{n_J}. \qquad (1)$$

Набір ймовірностей (1) визначає розподіл J -вимірної дискретної випадкової величини ξ, який називають мультиноміальним з параметрами $(n,\pi_1,\pi_2,...,\pi_J)$:

$$P\{\xi=(n_1,n_2,...,n_J)\}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_J!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}...\pi_J^{n_J},\ n_1+n_2+...+n_J=n.$$

У подальшому, за подію A_k розглядатимемо подію «об'єкт належить класу k», $P(A_k)=\pi_k$, $k=1,2,...,J$.

Номінальна логістична регресія. Нехай кожен об'єкт характеризується вектором $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_p)$ значень p показників та належить до одного з J класів. За результатами стохастичного експерименту об'єкти з одним і тим самим вектором показників $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_p)$ віднесено до класу k у n_k випадках, $k=1,2,...,J$, при цьому $n_1+n_2+...+n_J=n$. Тоді випадкова величина $\xi=(n_1,n_2,...,n_J)$ мультиноміально розподілена з параметрами $(n,\pi_1,\pi_2,...,\pi_J)$. Знайдемо зв'язок між значеннями показників $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_p)$ та ймовірностями $(\pi_1,\pi_2,...,\pi_J)$ приналежності об'єкта до класів $1,2,...,J$.

Оберемо клас J за референтний. Тоді ймовірності π_j приналежності об'єкта до класу j пов'язані з імовірністю π_J приналежності об'єкта до класу J співвідношеннями

$$\ln\left(\frac{\pi_j}{\pi_J}\right)=\mathbf{x}^T\beta_j,\ j=1,2,...,J-1,\ \pi_1+\pi_2+...+\pi_J=1. \qquad (2)$$

Імовірності приналежності об'єкта до класів $1,2,...,J$ набувають вигляду

$$\pi_j=\frac{\exp(\mathbf{x}^T\beta_j)}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp(\mathbf{x}^T\beta_j)},\ j=1,2,...,J-1,\ \pi_J=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp(\mathbf{x}^T\beta_j)}, \qquad (3)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_J = 1 \ .$$

При $J = 2$ модель номінальної регресії є моделлю бінарною логістичної регресії.

Оцінювання невідомих параметрів. Невідомі параметри $\beta_j = (\beta_{j1},..., \beta_{jp})$, $j = 1,2,..., J-1$ оцінюються за вибіркою згідно з методом максимальної правдоподібності. Функція максимальної правдоподібності вибірки $\xi_1,...,\xi_m$ набуває вигляду

$$L(\beta_1, \beta_2,..., \beta_{J-1}) = P(\xi_1,..., \xi_m; \beta_1, \beta_2,..., \beta_{J-1}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{n_i!}{n_{i1}!\, n_{i2}!...n_{iJ}!} \pi_{i1}^{n_{i1}} \pi_{i2}^{n_{i2}} ... \pi_{iJ}^{n_{iJ}} \ .$$

Логарифм функції максимальної правдоподібності дорівнює

$$\ln L(\beta_1,..., \beta_{J-1}) = \sum_{i=1}^{m} \ln \left(\frac{n_i!}{n_{i1}! n_{i2}!...n_{iJ}!} \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \ln \pi_{ij} \, .$$

Здиференціюємо функцію $\ln L(\beta_1,..., \beta_{J-1})$ за параметрами β_{js} та прирівняємо нулеві.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_{js}} = \sum_{i=1}^{m} x_{is} (n_{ij} - n_i \pi_{ij}) = 0, \quad j = 1,2,..., J-1, \quad s = 1,2,..., p \, ,$$

або, що теж саме,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{is} \left(n_{ij} - n_i \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_j)}{1 + \sum_{k=1}^{J-1} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_k)} \right) \right) = 0, \quad j = 1,..., J-1, \quad s = 1,..., p \, .$$

Задача знаходження максимуму логарифма функції максимальної правдоподібності зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь відно-

сно невідомих параметрів $\beta_j = (\beta_{j1},...,\beta_{jp})$, $j = 1,2,...,J-1$ чисельним методом Ньютона_Рафсона.

Визначення показників тяжкості стану хворого. Досліджуються 295 хворих: 103 належить до групи А, 107 – до групи В, 85 – до групи С. Кожному хворому ставиться у відповідність низка показників, які описують його стан. Виходячи з досвіду хірургів, які працюють у сфері невідкладної абдомінальної хірургії, показниками, що можуть характеризувати ступінь тяжкості стану хворого були вибрані: *вік хворого* ($x_в$) та параметри загального аналізу крові: *гемоглобін* ($x_{гем}$), *еритроцити* ($x_{ер}$), *кольоровий показник* ($x_{кол}$), *гематокрит* ($x_{гемат}$), *лейкоцити* ($x_{лейк}$), *швидкість осідання еритроцитів* ($x_{шое}$), *еозинофіли* ($x_{еозин}$), *нейтрофіли паличкоядерні* ($x_{н/п}$), *нейтрофіли сегментоядерні* ($x_{н/с}$), *лімфоцити* ($x_{лімф}$), *моноцити* ($x_{мон}$).

При дослідженні перерахованих показників виявилося, що показники $x_{лімф}$ і $x_{лейк}$, $x_{лімф}$ і $x_{н/п}$, $x_{лімф}$ і $x_{н/с}$ не є незалежними (гіпотези про незалежність показників перевірялися за допомогою критерію χ^2 незалежності ознак на рівні значущості 0,05). Показник $x_{лімф}$ виключимо з дослідження.

Для хворих груп А, В, С була виявлена суттєва відмінність таких показників: нейтрофіли паличкоядерні, лейкоцити, гемоглобін (гіпотези про незалежність ступенів непрохідності та кожного показника перевірялися за допомогою критерію χ^2 незалежності ознак на рівні значущості 0,05).

Статистичний критерій диференціації ступеню кишкової непрохідності. Вибірку хворих розділимо на дві частини: 15 % залишимо для контролю отриманих результатів, а решта – вибірка, за якою будемо вести розрахунки (251 хворий). Контрольна вибірка одержана простим випадковим відбором і складається з 44 хворих (15 – у ступені компенсації, 13 – у ступені субкомпенсації, 16 – у ступені декомпенсації).

Нейтрофіли палочкоядерні $x_{н/п}$ вимірюються у процентах. Норму $[1-6]$ будемо кодувати одиницею, інтервал значень (6–9] будемо кодувати двійкою, значення вище 9 кодуватимемо трійкою. Лейкоцити $x_{лейк}$ вимірюються в одиницях 10^9/л. Норму [4–9] будемо кодувати одиницею, інтервал значень (9–13] будемо кодувати двійкою, значення вище 13 кодуватимемо

трійкою. Гемоглобін $x_{гем}$ вимірюється в одиницях 10^9/л. Для чоловіків норму [130–160] будемо кодувати одиницею, інтервал значень [85–130) будемо кодувати двійкою, значення нижче 85 кодуватимемо трійкою. Для жінок норму [120–140] будемо кодувати одиницею, інтервал значень [80-120) будемо кодувати двійкою, значення нижче 80 кодуватимемо трійкою.

Кожного хворого будемо характеризувати вектором показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$. Установимо зв'язок між значеннями показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ і ймовірністю диференціації ступеню кишкової непрохідності. За референтний клас оберемо захворювання з найменшим ризиком – компенсований ступінь кишкової непрохідності.

Будемо виходити з того, що ймовірності диференціації субкомпенсованого та декомпенсованого ступенів пов'язані з імовірністю диференціації компенсованого ступеня рівностями

$$\ln\left(\pi_j / \pi_3\right) = \mathbf{x}^T \beta_j, \quad j = 1,2, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \tag{4}$$

$$x_1 = \begin{cases} 1, & якщо\ н/п = 2 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}, \quad x_2 = \begin{cases} 1, & якщо\ н/п = 3 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1, & якщо\ лейкоцити = 2 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}, \quad x_4 = \begin{cases} 1, & якщо\ лейкоцити = 3 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}$$

$$x_5 = \begin{cases} 1, & якщо\ гемоглобін = 2 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}, \quad x_6 = \begin{cases} 1, & якщо\ гемоглобін = 3 \\ 0, & у\ супротивному\ разі \end{cases}$$

Оцінки невідомих параметрів, знайдені за вибіркою, виявилися такими:

$$\tilde{\beta}_2 = (-0{,}773;\ 0{,}773;\ 1{,}016;\ -0{,}323;\ 1{,}563;\ 0{,}672;\ 0{,}544),$$

$$\tilde{\beta}_3 = (-1{,}129;\ 1{,}19;\ 1{,}953;\ 0{,}698;\ 2{,}414;\ -0{,}527;\ -0{,}965).$$

Імовірність віднесення хворого з вектором показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ до групи A дорівнює

$$\pi_1 = \frac{1}{1+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_2\}+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_3\}}, \qquad (5)$$

імовірність віднесення хворого з вектором показників $x = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ до групи В дорівнює

$$\pi_2 = \frac{\exp\{\mathbf{x}^T \beta_2\}}{1+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_2\}+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_3\}}, \qquad (6)$$

імовірність віднесення хворого з вектором показників $x = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ до групи С дорівнює

$$\pi_3 = \frac{\exp\{\mathbf{x}^T \beta_3\}}{1+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_2\}+\exp\{\mathbf{x}^T \beta_3\}}, \qquad (7)$$

при цьому $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$.

Оцінимо внесок кожного показника в імовірності диференціації ступеню кишкової непрохідності за наступним правилом: фіксуємо значення двох показників та послідовно змінюємо значення третього показника. Для кожної комбінації показників обчислюємо ймовірності віднесення хворого до груп A, B, C (див. рис. 1, 2).

Очікувана та фактична кількість випадків диференціації заданого ступеню непрохідності. Для з'ясування того, наскільки добре погоджується запропонована модель залежності ймовірностей π_j, $j = 1,2,3$ від показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$, вибірка хворих була розбита на 81 групу ризику за значеннями нейтрофілів паличкоядерних, лейкоцитів та гемоглобіну. Для кожної групи пораховано очікуване число хворих із заданим ступенем непрохідності (знайдені оцінки ймовірностей помножено на загальну кількість хворих у заданій групі) та фактичне число хворих, що спостерігається. Згідно з критерієм χ^2 (гіпотетичний розподіл не залежить від невідомих параметрів) очікуване і фактичне число хворих добре погоджуються.

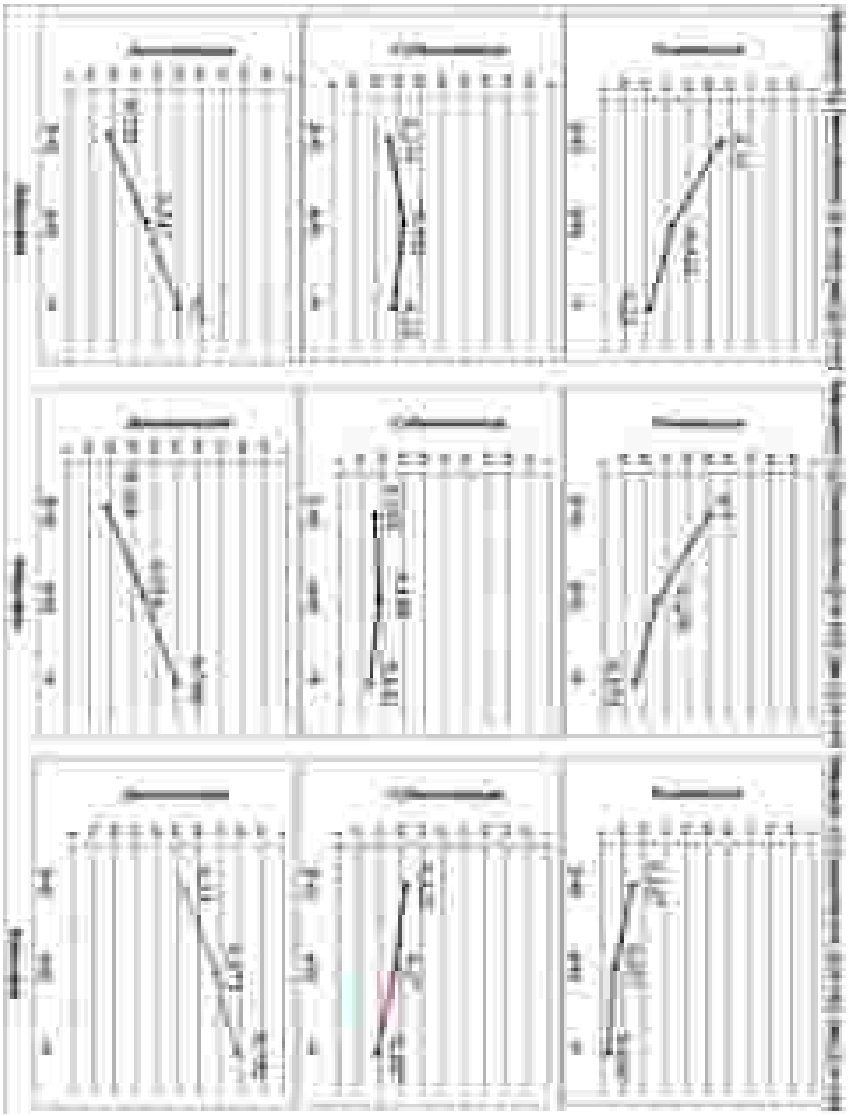


Рис. 1. Внесок показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ в імовірність диференціації ступеню кишкової непрохідності

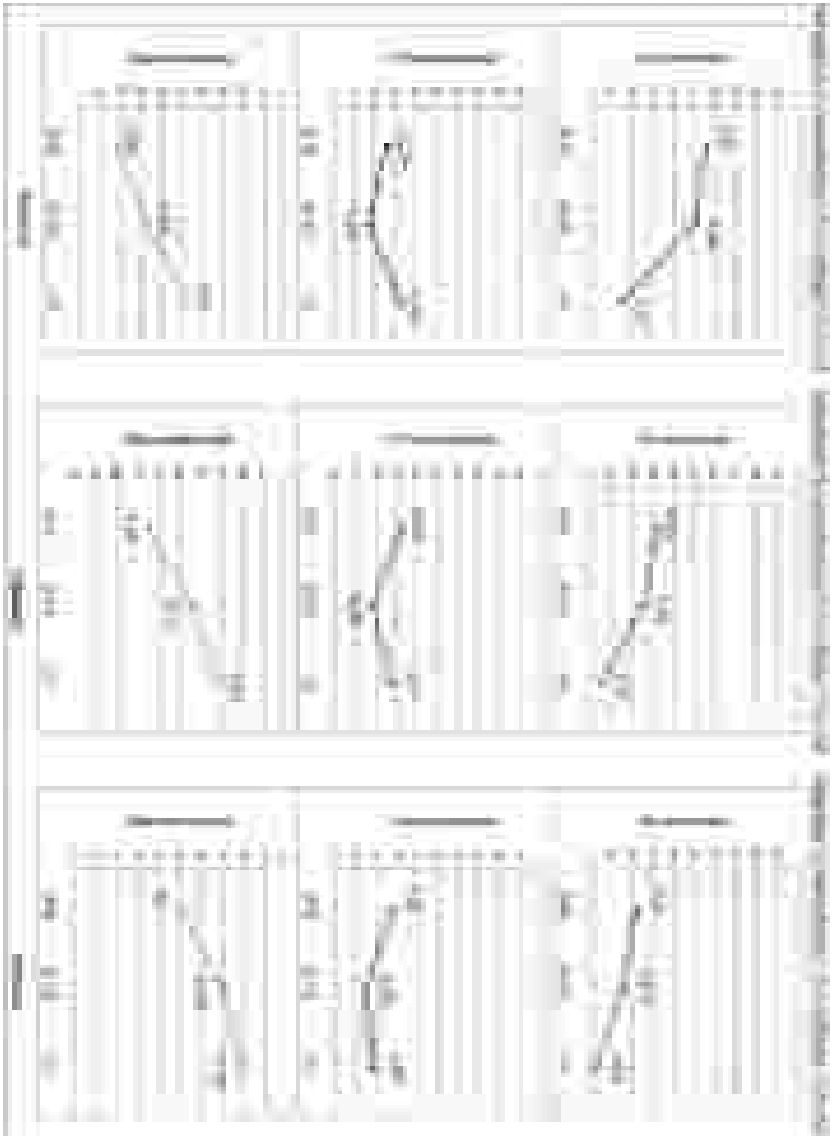


Рис. 2. Внесок показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ в імовірність диференціації ступеню кишкової непрохідності

Запропонована модель залежності ймовірностей π_j, $j = 1,2,3$ від показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ була перевірена на даних контрольної вибірки . Для кожного хворого відомі значення вектора показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ та ступінь кишкової непрохідності: компенсований (А), субкомпенсований (В), декомпенсований (С).

За вектором показників $\mathbf{x} = (x_{лейк}, x_{н/п}, x_{гем})$ кожного хворого контрольної групи обчислено ймовірності віднесення хворого до груп А, В, С (за формулами (5) -(7)). Фактична ступінь кишкової непрохідності хворих контрольної групи добре погоджується з обчисленими ймовірностями диференціації ступеню кишкової непрохідності (ці значення наведено в трьох останніх стовпцях таблиці 1).

Таблиця 1

Значення ймовірностей віднесення хворих контрольної групи до груп А, В, С

Спостеріга-ється ступінь непрохід-ності	$x_{лейк}$	$x_{н/п}$	$x_{гем}$	Імовірність диференціації компенсов. ступеню π_1	Імовірність диференціації субкомпенсов. ступеню π_2	Імовірність диференціації декомпенсов. ступеню π_3
компенсація	1	1	1	**0.560**	0.259	0.181
компенсація	1	2	1	**0.504**	0.168	0.328
компенсація	1	2	2	**0.491**	0.321	0.188
компенсація	1	2	3	**0.548**	0.316	0.136
компенсація	1	1	3	**0.521**	0.415	0.064
субкомпенсація	2	1	3	0.320	**0.551**	0.129
субкомпенсація	2	1	2	0.279	**0.546**	0.175
субкомпенсація	1	1	3	0.521	**0.415**	0.064
субкомпенсація	3	3	2	0.036	**0.426**	0.538
субкомпенсація	1	1	2	0.477	**0.432**	0.091
декомпенсація	3	3	1	0.031	0.187	**0.782**
декомпенсація	3	2	1	0.154	0.142	**0.704**
декомпенсація	3	3	2	0.036	0.426	**0.538**
декомпенсація	3	1	1	0.220	0.280	**0.500**
декомпенсація	3	2	2	0.181	0.328	**0.491**

Висновки. У роботі розроблена методика оцінювання ймовірностей диференціації ступеню кишкової непрохідності залежно від вектора показників стану хворого, яка дає можливість хірургові дійти рішення щодо невідкладного оперативного втручання.

Знайдені показники, за якими можна диференціювати ступені кишкової непрохідності, ними виявилися: лейкоцити, нейтрофіли паличкоядерні, гемоглобін.

Бібліографічні посилання

1. Современные аспекты лечения рака толстой кишки, осложненного непроходимостью кишечника. Ч.1. Классификация, хирургическая тактика, результаты лечения / [Бондарь Г.В., Башеев В.Х., Псарас Г.Г. и др.] // Клінічна хірургія. – 2000. – №8. – С. 48-49.
2. Лечение больных с осложнениями злокачественных опухолей ободочной кишки / [В.В. Дарвин, А.Я. Ильканич, С.В. Онишенко и др.] // Хирургия. – 2007. – №6. – С. 8-12.
3. **Ивченко Г.И.** Математическая статистика: Учеб. пособие для втузов / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев Ю.И. – М., 1984. – 248 с.
4. **Ковальчук В.С.** Лечение больных с острой непроходимостью толстой кишки опухолевого генеза в отделении общехирургического профиля / В.С. Ковальчук, В.Г. Васильченко, М.А. Койко // Клінічна хірургія. – 2000. – №2. – С. 46-48.
5. **Помазкин В.И.** Тактика оперативного лечения при опухолевой обтурационной толстокишечной непроходимости / В.И. Помазкин, Ю.В. Мансуров // Хирургия. – 2008. – №9. – С.15-18.
6. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин Под ред. С.А. Айвазяна. – М., 1989. – 607 с.
7. **Топузов Э.Г.** Диагностика и лечение острой кишечной непроходимости при раке толстой кишки / Э.Г.Топузов // Вестник хирургии. 1989. – №12. – С. 76-78.
8. **Турчин В.Н.** Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. / В.Н. Турчин – Днепропетровск, 2008. – 656 с.

Надійшла до редколегії 17.06.2012

УДК 512.562; 519.17

В. Я. [5]Бурдюк, І. В. Бурдюк
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ПРО ДУАЛЬНІ АВТОМОРФІЗМИ

Досліджуються характеризація та поведінка дуальних автоморфізмів скінченних орієнтованих графів. Сформульовано проблему.

Исследуется характеризация и поведение двойственных автоморфизмов конечных ориентированных графов. Сформулирована проблема.

Characterization and behavior of dual automorphizms of finite oriented graphs are investigated. The problem was formulated.

Ключові слова: простір, бінарне відношення, орграф, дуальний автоморфізм, група.

Вступ. Розглядаємо багатоточковий простір (X, R) непорожнього бінарного відношення $R \subseteq X^2$, або ж орграф (X, R), в якому для множини вершин виконується $|X| \geq 2$, а для множини дуг – $|R| \geq 1$. Якщо $(a,b) \in R$, то пишемо aRb, а також $bR^{-1}a$.

Дуальним автоморфізмом простору (X, R) називають кожну таку бієкцію $f : X \to X$, яка має властивість

$$\forall a,b \in X \left(aRb \Leftrightarrow f(a) R^{-1} f(b)\right). \qquad (1)$$

Якщо ж бієкція f має властивість $(aRb \Leftrightarrow f(a) R\, f(b))$ при будь-яких значеннях $a, b \in X$, то її називають *автоморфізмом* простору (X, R). Отже, автоморфізм f перейменовує вершини оргафу (X, R) так, щоб кожній дузі $(a,b) \in R$ відповідала, причому взаємно однозначно, дуга $(f(a), f(b)) \in R$; в той же час дуальний автоморфізм f, якщо він існує, перейменовує вершини оргафа (X, R) так, щоб кожній дузі $(a,b) \in R$

© *В.Я. Бурдюк, І.В. Бурдюк, 2012*

взаємно однозначно відповідала дуга $(f(b), f(a)) \in R$. Нехай $Aut(X, R)$ та $Tua(X, R)$ – класи всіх автоморфізмів та, відповідно, дуальних автоморфізмів простору (X, R). Відомо, що $Aut(X, R)$ для кожного орграфа (X, R) – це *група* з бінарною операцією композиції бієкцій, з унарною операцією зворотньої бієкції $f \to f^{-1}$ та нульарною операцією тотожньої бієкції id_X. Але клас $Tua(X, R)$ може бути порожнім, а в непорожньому $Tua(X, R)$ – не завжди присутня бієкція id_X.

Дослідженням класу $Aut(X, R)$ присвячено [4 та 5], а класу $Tua(X, \leq)$ [2 та 3].

Постановка задачі. Дослідити характеризацію та поведінку класу $Tua(X, R)$ для довільних R, а також для транзитивних R.

Характеризація дуальних автоморфізмів; приклади

Теорема 1. *Клас $Tua(X, R)$ для даного R буде непорожнім, якщо і тільки якщо R та R^{-1} є ізоморфними бінарними відношеннями.*

Доведення. Твердження «клас $Tua(X, R)$ є непорожнім» означає, що існує бієкція f з властивістю (1). Але ж бієкція f з такою властивістю є ізоморфним відображенням просторів (X, R) та (X, R^{-1}). Це означає, що R та R^{-1} є ізоморфними бінарними відношеннями. Кінець.

Отже, орграф (X, R) має дуальні автоморфізми, якщо і тільки якщо він є ізоморфним оберненому орграфу (X, R^{-1}) (див. [7, с.234]).

Теорема 2. *Для кожної бієкції $f : X \to X$ і для кожного відношення $R \subseteq X^2$ такі два твердження є логічно еквівалентні:*

1) $f \in Tua(X, R)$;

2) f є ізоморфізмом просторів (X, R) та (X, R^{-1}).

Доведення. Нехай виконується 1). Це означає, що бієкція f має властивість (1), а отже, бієкція f є ізоморфним відображенням просторів (X, R) та (X, R^{-1}). Отже, маємо 1) $\Rightarrow$ 2).

Навпаки, бієкції f з властивістю 2) є, за означенням, дуальним автоморфізмом простору (X, R), і тому маємо 2) $\Rightarrow$ 1).

Приклад 1. Для $X = \{1, 2, \dots, n\}$, де $n \geq 2$, нехай $R = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, а тому (X, R) -- це орієнтований шлях. Тоді (X, R^{-1}) – також орієнтований шлях. Маємо ізоморфні відношення R та R^{-1}, причому існує лише один ізоморфізм f орграфу (X, R) на орграф (X, R^{-1}), а саме: $f(j) = n + 1 - j$ для $j = 1, 2, \dots, n$. Звідси отримуємо $|Tua(X, R)| = 1$. Між іншим, $|Aut(X, R)| = 1$, причому $Aut(X, R) = \{id_X\}$.

Приклад 2. Для $X = \{1, 2, \dots, n\}$, де $n \geq 2$, нехай $R = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$, а тому (X, R) – це орієнтований цикл. Тоді (X, R^{-1}) – також орієнтований цикл. Маємо ізоморфні відношення R та R^{-1}, причому у випадку $n = 2$ виконується $R = R^{-1}$. За теоремою 1, клас $Tua(X, R)$ є непорожнім. Покажемо, що $|Tua(X, R)| = |Aut(X, R)| = n$. Для кожного $i \in X$ будуємо бієкцію $f_i : X \to X$, а саме: $f_i(1) = i$, $f_i(2) = i + 1$, … , $f_i(i) = n$, $f_i(i + 1) = 1$, … , $f_i(n) = i - 1$. Бачимо, що бієкція f_i перейменовує вершини орцикла (X, R) так, що по цьому орциклу відбувається рух у напрямку $i \to i + 1 \to \dots \to n \to 1 \to \dots \to i - 1 \to i$, і тому бієкція f_i є автоморфізмом. Тож отримуємо $|Aut(X, R)| = n$. Дуальний автоморфізм $g : X \to X$ повинен перейменовувати вершини орцикла (X, R) так, що, починаючи з вершини $g(1)$, рух по орциклу (X, R) повинен здійснюватись у зворотному напрямку, тобто проти орієнтації дуг,

тож якщо $g_i(1) = i$ для $i \in X$, то $g_i(2) = i-1$, $g_i(3) = i-2$, …, $g_i(i) = 1$, $g_i(i+1) = n$, … , $g_i(n) = i+1$, тож $|Tua(X, R)| = n$.

Для кожної вершини $x_1 \in X$ орграфа (X, R) визначаємо, як і в [6, с. 314], множини $D(x_1)$ та $D^{-1}(x_1)$ за такими правилами:

1) $x_1 \in D(x_1) \cap D^{-1}(x_1)$; 2) для кожної послідовності x_1, x_2, … , x_n попарно неоднакових вершин орграфу (X, R) повинно виконуватись:

a) $x_n \in D(x_1)$ у випадку $\forall i\,(x_i\ R\ x_{i+1})$;

b) $x_n \in D^{-1}(x_1)$ у випадку $\forall i\,(x_i\ R^{-1}\ x_{i+1})$.

Отже, множина $D(x_1)$ складається із вершини $x_1 \in X$ та із всіх тих вершин x_n, кожну з яких можна досягути із вершини x_1, рухаючись по дугам (x_1, x_2), … , (x_{n-1}, x_n) орграфу (X, R). Аналогічно, множина $D^{-1}(x_1)$ складається із вершини $x_1 \in X$ та із всіх тих вершин x_n, з яких можна досягнути вершини x_1, рухаючись по дугам (x_n, x_{n-1}), … , (x_2, x_1) орграфу (X, R).

Приклад 3. Розглянемо $X = \{a_1, \cdots, a_k, b, c_1, \cdots, c_k\}$ та $R = \{(a_1, b), \cdots, (a_k, b), (b, c_1), \cdots, (b, c_k)\}$, тож орграф (X, R) має: вершин $2k+1$, дуг $2k$, $D(b) = \{b, c_1, \cdots, c_k\}$, $D^{-1}(b) = \{b, a_1, \cdots, a_k\}$. Покажемо, що виконується таке:

$$|Tua(X, R)| = |Aut(X, R)| = (k!)^2.$$

Дійсно, відношення R та R^{-1} є ізоморфні, тож клас $Tua(X, R)$ є непорожнім. Для елемента $f \in Tua(X, R)$ з цього класу повинно виконуватись $f(b) = b$, і тому для вершини $a_i \in X$ повинно виконуватись $f(a_i) = c_j$, тож отримуємо $k!$ варіантів для побудови $f \in Tua(X, R)$. Незалежно від цього для вершини $c_i \in X$ повинно виконуватись $f(c_i) = a_j$, тож отримуємо $k!$ варіантів для побудови

$f \in Tua(X, R)$. Для автоморфізму f також повинно виконуватись $f(b) = b$, але для вершини $a_i \in X$ повинно виконуватись $f(a_i) = c_j$, тож отримуємо $k!$ варіантів для побудови автоморфізму f. Незалежно від цього для вершини $c_i \in X$ повинно виконуватись $f(c_i) = c_j$, і тому отримуємо $k!$ варіантів для побудови $f \in Aut(X, R)$.

Теорема 3. *Якщо виконується твердження А:* $f \in Tua(X, R)$, *то для кожної точки* $x \in X$ *буде виконуватись і твердження* B:

$$f(D(x)) = D^{-1}(f(x)) \wedge f(D^{-1}(x)) = D^{-1}(f(x)),$$

а якщо відношення R – *транзитивне, то* A *та* B *логічно еквівалентні.*

Доведення. Маємо $f(D(x_1)) = \{f(x) : x \in D(x_1)\}$. Звідси та з твердження A випливає, що множина $f(D(x_1))$ складається з вершини $f(x_1)$ та всіх тих вершин $f(x_n)$, для яких існує послідовність $x_1, x_2, \cdots, x_n$ попарно неоднакових вершин орграфу (X, R) таких, що $x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} R x_n$, тож

$$f(x_1) R^{-1} f(x_2) \wedge \cdots \wedge f(x_{n-1}) R^{-1} f(x_n). \qquad (*)$$

З іншого боку, множина $D^{-1}(f(x_1))$ складається з вершини $f(x_1)$ та всіх тих вершин $f(x_n)$, з кожної з яких можна досягнути вершини $f(x_1)$, йдучи за дугами $(f(x_n), f(x_{n-1}))$, … , $(f(x_2), f(x_1))$, тобто для яких виконується співвідношення (*). Бачимо, що має місце рівність $f(D(x_1)) = D^{-1}(f(x_1))$. Аналогічно перевіряється рівність $f(D^{-1}(x_1)) = D(f(x_1))$. Отже, отримали потрібне: якщо A, то B. Нехай тепер відношення R – транзитивне. Потрібно довести, що із B випливає A. З істинності твердження B та виконання aRb отримуємо $b \in D(a)$ та $f(b) \in f(D(a))$, і тому $f(b) \in D^{-1}(f(a))$, адже $f(D(a)) = D^{-1}(f(a))$. Тепер з $f(b) \in D^{-1}(f(a))$ маємо: з вершини $f(b)$ орграфу (X, R) можна досягнути вершини $f(a)$, йдучи за дугами

(x_n, x_{n-1}), … , (x_2, x_1) орграфу (X, R), де $x_n = f(b)$ та $x_1 = f(a)$. Звідси, застосувавши транзитивність відношення R, отримуємо: існує дуга $(f(b), f(a))$ орграфу (X, R), і тому $f(a)R^{-1}f(b)$. Таким чином, якщо aRb, то $f(a)R^{-1}f(b)$. Якщо ж $f(a)R^{-1}f(b)$, то $f(b)\in D^{-1}(f(a))$, а отже, $f(b)\in f(D(a))$, і тому $f^{-1}(f(b))\in f^{-1}(f(D(a)))$, тобто $b\in D(a)$. Останнє означає, що з вершини $a\in X$ орграфу (X, R) можна досягнути вершину $b\in X$, йдучи за дугами (a_1, a_2), … , (a_{n-1}, a_n), де $a_1 = a$ та $a_n = b$. Тепер, застосувавши транзитивність відношення R, отримуємо: орграф (X, R) має дугу (a, b). Отже, із $f(a)R^{-1}f(b)$ випливає aRb. Висновок: якщо R – транзитивне відношення, то з твердження B випливає твердження A, тож A та B логічно еквівалентні.

Приклад 4. Для $k \geq 2$ нехай $X = \{a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k\}$ та $R = \{(a_i, b_j): 1 \leq i, j \leq k\}$. Тоді (X, R) та (X, R^{-1}) -- ізоморфні простори, причому їх ізоморфізмами будуть всі такі бієкції $f: X \to X$, що $f(a_i) = b_j \wedge f(b_j) = a_k$, і тому маємо $|Tua(X, R)| = (k!)^2 = ((n/2)!)^2$, де $n = 2k$.

Приклад 5. Для $n \geq 3$ нехай $X = \{a, b_1, \cdots, b_{n-2}, c\}$ та $R = \{(a, b_1), \cdots, (a, b_{n-2}), (b_1, c), \cdots, (b_{n-2}, c)\}$. Тоді простори (X, R) та (X, R^{-1}) -- ізоморфні, причому їх ізоморфізмами будуть всі такі бієкції $f: X \to X$, що $f(a) = c \wedge f(c) = a$, але $f(b_i) = b_j$ для всіх i та j, тож $|Tua(X, R)| = (n-2)!$.

Дуальні автоморфізми скінченних упорядкованих просторів

Рефлексивне, антисиметричне і транзитивне бінарне відношення позначають $\leq$, а простір $(X, \leq)$ називають у_простором, тобто упорядкованим простором. Для кожної точки a у_простору $(X, \leq)$ визначають (див. [1])

верхній та нижній напівконуси $a^{\vee} = \{x \in X : a \le x\}$ та $a^{\wedge} = \{x \in X : x \le a\}$. Маємо $a^{\vee} = D(a)$, $a^{\wedge} = D^{-1}(a)$.

Теорема 4 ([2]). *Для кожної бієкції $f : X \to X$ і для кожного y-простору $(X, \le)$ такі два твердження є логічно еквівалентні:*

1) $f \in Tua(X, \le)$;

2) $\forall a \in X \; f(a^{\vee}) = (f(a))^{\wedge} \wedge f(a^{\wedge}) = (f(a))^{\vee}$.

Доведення. Відношення $\le$ є транзитивним, а тому, використовуючи теорему 3 і співвідношення $a^{\vee} = D(a)$ та $a^{\wedge} = D^{-1}(a)$, отримуємо теорему 4. Кінець.

Для n-вершинного орграфу (X, R) маємо $|Tua(X, R)| \le n!$, причому $|Aut(X, =)| = |Tua(X, =)| = n!$, адже у $(X, =)$ присутні лише петлі, і тому кожна бієкція $f : X \to X$ буде і автоморфізмом, і дуальним автоморфізмом простору $(X, =)$. Отже, має місце

Теорема 5. *На класі n-точкових y-просторів з ізольованими точками максимльна кількість дуальних автоморфізмів дорівнює $n!$, і ця кількість реалізується на просторі $(X, =)$.*

Теорема 6 ([2]). *На n-точкових y-просторах ($n \ge 3$) без ізольованих точок максимльну кількість дуальних автоморфізмів мають:*

a) у випадку $n \ne 4$ та $n \ne 6$ – y-простори з діаграмою Хассе з прикладу 5, і ця кількість дорівнює $(n-2)!$;

b) у випадку $n = 4$ та $n = 6$ – y-простори з діаграмою Хассе з прикладу 4, і ця кількість дорівнює $((n/2)!)^2$.

Доведення цієї теореми є у роботі [2], але воно занадто ускладнене, тож пропонуємо бажаючим побудувати більш просте доведення.

Теорема 7 ([3]). *Якщо $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, n > 1$, то*

$$|Aut(2^X, \subseteq)| = |Tua(2^X, \subseteq)| = |X|!.$$

Доведення. Для елементів $x_1, x_2, \cdots, x_j \in X$ виконується

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \cdots \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_j\} \subset \cdots \subset X \ . \ (2)$$

Якщо бієкція f – автоморфізм простору $(2^X, \subseteq)$, то з (2) отримуємо $f(\{x_1\}) \subset f(\{x_1, x_2\}) \subset \cdots \subset f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$. Звідси маємо $|f(x_1, x_2, \cdots, x_j)| = j$ для кожного $j = 1, 2, \cdots, n$. Отже, при автоморфізмі f образом довільної одноелементної множини $\{x_1\}$ є одноелементна множина $f(\{x_1\})$. Для двоелементної множини $f(\{x_1, x_2\})$ маємо $f(\{x_1\}) \subset f(\{x_1, x_2\})$, а також $f(\{x_2\}) \subset f(\{x_1, x_2\})$. Звідси, враховуючи, що $x_1 \neq x_2$, отримуємо $f(\{x_1, x_2\}) = f(\{x_1\}) \cup f(\{x_2\})$. Маємо аналогічно: $f(\{x_1, \cdots, x_j\}) = f(\{x_1\}) \cup \cdots \cup f(\{x_j\})$. Отже, автоморфізм f однозначно визначається своїми значеннями $f(\{x_i\})$ для елементів $x_i \in X$, а тому кількість автоморфізмів дорівнює $n!$.

Зрозуміло, що простори $(2^X, \subseteq)$ та $(2^X, \supseteq)$ є ізоморфними, а тому, за теоремою 2, простір $(2^X, \subseteq)$ має дуальні автоморфізми, тож для дуального автоморфізму g цього простору із (2) отримаємо

$$g(\{x_1\}) \supset g(\{x_1, x_2\}) \supset \cdots \supset g(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

а також $g(\{x_2\}) \supset g(\{x_1, x_2\})$, причому для $i = 1, 2, \cdots, n$ маємо $|g(x_1, x_2, \cdots, x_i)| = n - i$. Звідси маємо $g(\{x_1, x_2\}) = g(\{x_1\}) \cap g(\{x_2\})$. І взагалі,

$$g(\{x_1, \cdots, x_j\}) = g(\{x_1\}) \cap \cdots \cap g(\{x_j\}).$$

Отже, дуальний автоморфізм g однозначно визначається своїми значеннями $g(\{x_i\}) = X - \{x_k\}$ для елементів $x_i, x_k \in X$, а тому кількість дуальних автоморфізмів дорівнює $n!$.

Аналіз одержаних результатів. Усі одержані результати щодо кількості дуальних автоморфізмів скінченних орграфів підтверджують **таку гіпотезу:** якщо скінченний орграф має дуальні автоморфізми, то їх кількість є такою ж, як і кількість автоморфізмів. **Проблема** полягає у доведенні сформульованої гіпотези.

Бібліографічні посилання

1. **Бурдюк В. Я.** Простори дискретної математики: Монографія / В.Я. Бурдюк. – Дніпропетровськ, 2008. – 156 с.
2. **Бурдюк В. Я.** Конечные частично упорядоченные множества с максимальным числом дуальных автоморфизмов / В. Я. Бурдюк, И. В. Бурдюк – М., деп. Рук. 7497 – В89 от 19.12.1989. – 9 с.
3. **Бурдюк В. Я.** О дуальных изоморфизмах упорядоченных множеств / В. Я. Бурдюк, Г. А. Коцюба // Решение прикл. задач матем. физики и дискр. матем.: сб. научн. тр.. – Днепропетровск, 1987. – С. 40 – 42.
4. **Великович Л. Л.** Структура графа, определяемая группой автоморфизмов : дисс. … канд. физ-мат. наук/Л.Л. Великович. – Гомель, 1989. – 131 с.
5. **Давыдов Э. Г.** О конечных графах и их автоморфизмах /Э.Г. Давыдов // Проблемы кибернетики. – М., 1966. -- № 17. – С. 27 – 39.
6. **Зыков А. А.** Теория графов /А.А. Зыков. – М., 1987. – 384 с.
7. **Харари Ф.** Теория графов /Ф. Харари. – М., 1973. – 304 с.

Надійшла до редколегії 17.04.2012

УДК 539.3

Л.В. Волошко
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗВОРОТНОЇ КОЕФІЦІЄНТНОЇ ЗАДАЧІ

Розроблено ефективний алгоритм розв'язку крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами і запропоновано зворотну коефіцієнтну задачу для подальшого розв'язування.

Разработан эффективный алгоритм решения граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения с неоднородными граничными условиями и предложена обратная коэффициентная задача для дальнейшего решения.

An efficient algorithm is developed for solution of boundary-value problems for inhomogeneous biharmonic equation subject to inhomogeneous boundary conditions, and a possible setup of inverse problem is proposed for further treatment.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, крайова задача, неканонічна форма області, зворотна коефіцієнтна задача.

Вступ. Для постановки і розв'язування складних задач оптимізації [6], механіки [2], теорії керування [7] необхідні ефективні обчислювальні алгоритми розв'язку крайових задач рівнянь математичної фізики. Далі розглядається метод потенціалу для розв'язку задач для неоднорідного бігармонічого рівняння з однорідними та неоднорідними крайовими умовами.

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з однорідними крайовими умовами. Фізичний приклад. Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{q}{D}, \quad (1) \qquad w(x,y)\big|_{\Gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

© *Л.В. Волошко, 2012*

де $w = w(x,y)$ – невідома функція згину серединної точки (x,y) пластини; Γ – контур пластини, який обмежує її область Ω; $q/D = const$, де q – інтенсивність поперечного навантаження; D – циліндрична жорсткість пластини. Крайові умови (2) означають, що пластина має жорстко закріплені краї. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що одним з розв'язків рівняння (1) буде

$$w_1(x,y) = (q(x^2+y^2)^2)/D. \qquad (3)$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами:

$$\Delta\Delta w_2(x,y) = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad (4)$$

$$w_2(x,y)\big|_\Gamma = -w_1(x,y)$$
$$\frac{\partial w_2(x,y)}{\partial n}\bigg|_\Gamma = -\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial n}, \qquad (5)$$

тобто при формуванні крайових умов (5) ми фактично обчислюємо на контурі Γ відому функцію $w_1(x,y)$ та її нормальну похідну. В [3; 5] викладений алгоритм розв'язування задачі (4) – (5), відповідно до якого розв'язок задачі (1) – (2) маємо у вигляді суми бігармонічних потенціалів з відомими функціями щільності μ_1, μ_2,

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y)$$

або

$$w(x,y) = \frac{q(x^2+y^2)^2}{64D} + \int_\Gamma \left(r^2 \ln r\right)\mu_1(\xi,\eta)d\Gamma(\xi,\eta) +$$
$$+ \int_\Gamma \left[-r(2\ln r + 1)\right]\cdot \mu_2(\xi,\eta)d\Gamma(\xi,\eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, а (x,y) – внутрішня точка області Ω.

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами.

$$\Delta\Delta w(x,y) = f \quad \text{в } \Omega, \qquad (6)$$

$$w|_{\Gamma} = \varphi, \quad \left.\frac{dw}{dn}\right|_{\Gamma} = \psi, \tag{7}$$

де $w = w(x,y)$ – невідома функція, f, φ, ψ – задані неперервні функції, Γ – контур, який обмежує область Ω [2; 10].

За теоремою Гілберта [1] розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$w_1(x,y) = \frac{1}{8\pi D}\iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi,\eta)d\Omega(\xi,\eta), \tag{8}$$

тобто $w_1(x,y)$ знайдена через подвійний інтеграл задовольняє рівняння (6), але не задовольняє крайовим умовам (7). Отже, $\Delta\Delta w_1(x,y) = f(x,y)$.

Для того, щоб задовольнити крайові умовам формулюємо таку задачу:

$$\Delta\Delta w_2(x,y) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{9}$$

$$w_2|_{\Gamma} = (\varphi - w_1)_{\Gamma}, \quad \left.\frac{dw_2}{dn}\right|_{\Gamma} = \left(\psi - \frac{\partial w_1}{\partial n}\right)_{\Gamma}, \tag{10}$$

де при формуванні крайових умов (10) треба знайти різницю значень фун - кцій φ, ψ та $w_1(x,y)$ та її нормальної похідної на границі Γ відповідно. Для знаходження функції $w_1(x,y)$ та її нормальної похідної треба обчислити відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур Γ. Цю область, покриваємо прямокутною сіткою. Алгоритм розв'язку задачі (9) – (10) є відомим [3; 5]. А остаточним розв'язком задачі (6) – (7) буде

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y)$$

або

$$w(x,y) = \frac{1}{8\pi D}\iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi,\eta)d\Omega(\xi,\eta) + \int_{\Gamma}\left(r^2 \ln r\right)\mu_1(\xi,\eta)d\Gamma(\xi,\eta) +$$

$$+ \int_{\Gamma}\left[-r(2\ln r + 1)\right]\cdot \mu_2(\xi,\eta)d\Gamma(\xi,\eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, а (x,y) – тепер внутрішня точка області Ω.

Наведемо приклади модельних функцій та різних форм областей Ω, які ілюструють ефективність методу. Для перевірки достовірності розв'язку обираємо деяку модельну функцію $g(x,y)$. Подіявши на цю функцію бігармонічним оператором отримаємо $f(x,y)$, тобто $\Delta\Delta g(x,y) = f(x,y)$. Знайшовши значення $g(x,y)$ та її нормальної похідної в точках контуру визначимо крайові умови $\varphi(x,y), \psi(x,y)$. Таким чином, у силу єдності розв'язку, значення функції $g(x,y)$ мають співпадати з розв'язком $w(x,y)$.

Приклад 1. Нехай $g(x,y) = x^2 y^4 / 24$ - розв'язок задачі. Тоді задамо $f \equiv x^2 + y^2$, $\varphi = x^2 y^4 / 24$, $\psi = xy^4 \cos(n\hat{}x)/12 + x^2 y^3 \cos(n\hat{}y)/6$.

Таблиця 1

Розрахунки для круга $R = 1$

(x,y)	w (наближ.)	w (точне)	Похибка
(0; 0)	10.00184	10	0.00184
(0.5; 0)	10.00235	10	0.00235
(1; 0)	10.00234	10	0.00234
(0.5; 0.2)	10.00238	10.00001	0.00236
(0.5; 0.5)	10.00308	10.00065	0.00243

Відносна похибка складає 0,02 %.

Таблиця 2

Розрахунки для гіпоциклоїди з параметрами $R = 1,\ r = 0{,}6,\ d = 0{,}2$

(x,y)	w (наближ.)	w (точне)	Похибка
(0.7; 0)	10.00258	10	0.00258
(0.2; 0.1)	10.02561	10.00000	0.02561
(0.2; 0.2)	9.986467	10.00000	0.01353
(0.9; 0.2)	10.00218	10.00005	0.00212
(0.2; 0.4)	9.984118	10.00004	0.01592

Відносна похибка – 0,2 %.

Приклад 2. Нехай $g(x,y) = x^6 + y^4$ – розв'язок задачі. Тоді задамо $f \equiv 360x^2 + 24$, $\varphi = x^6 + y^4$, $\psi = 6x^5 \cos(n\hat{}x) + 4y^3 \cos(n\hat{}y)$.

Таблиця 3

Розрахунки для овала Кассіні з параметрами $a = 1.2, \quad c = 1$

(x,y)	w (наближ.)	w (точне)	Похибка
(0.5; 0)	0.01294	0.01562	0.00267
(0.6; 0)	0.04607	0.04665	0.00058
(1; 0)	1.02286	0.99999	0.02286
(0.7; 0.1)	0.12029	0.11774	0.00254
(0.8; 0.2)	0.27020	0.26374	0.00645

Відносна похибка складає 0,2 %.

Таблиця 4

Розрахунки для квадрата зі стороною $a = 1,$

(x,y)	w (наближ.)	w (точне)	Похибка
(0.4; 0)	0.00418	0.00409	9.06768E-5
(0; 0.1)	0.00018	0.0001	8.71697E-5
(0.4; 0.2)	0.00582	0.00569	0.00013
(0.2; 0.3)	0.00827	0.00816	0.00011
(0.5; 0.3)	0.02230	0.02372	0.00142

Відносна похибка – 0,01 %

Аналіз одержаних даних свідчить про обчислювальну ефективність алгоритму розв'язку задачі, тому він може бути основою для розв'язування складних задач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів та дослідження їх збіжності.

Як приклад, розглянемо задачу статичного згину жорстко закріпленої по краям тонкої пружної пластини в лінійній постановці:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \tag{12}$$

$$w(x,y)\big|_{\Gamma} = 0, \qquad \left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{13}$$

з додатковою умовою, яка не виводить задачу за межі лінійної постановки,

$$w(x^*, y^*) = w^*. \tag{14}$$

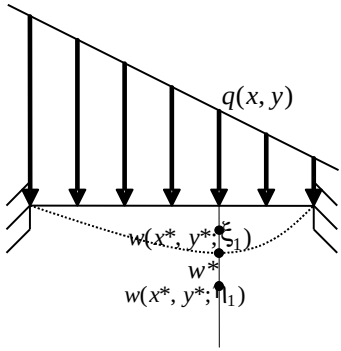


Рис. 1

Вважаємо, що $q(x, y)$ змінюється за лінійним законом, тобто $q(x, y) = ax + by + c$, або, іншими словами, маємо гідростатичне навантаження на пластину. При цьому b, c – задані коефіцієнти, а a – коефіцієнт, який необхідно визначити (відновити). Таким чином, отримали зворотну коефіцієнтну задачу [4; 8] по ідентифікації правої частини рівняння (12). Вона має такий фізичний зміст: за заданим у додатковій умові (14) прогином у точці (x^*, y^*) частково відтворимо закон (знаходимо лише коефіцієнт a) гідростатичного навантаження пластини.

Для цього використовуємо метод ділення навпіл. Будемо позначати $w(x^*, y^*; a)$ розв'язок задачі (12) – (13) для параметра a. Знайдемо проміжок, якому належить шукане a. Для цього обираємо ξ_1 і η_1, такі що $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$ (рис. 1), тобто $a \in [\xi_1, \eta_1]$. Розбиваємо відрізок навпіл точкою

$$a_1 = \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}.$$

З двох відрізків $[\xi_1, a_1]$ та $[a_1, \eta_1]$ обираємо той, для якого виконується одна з нерівностей $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; a_1)$ або $w(x^*, y^*; a_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$ і позначаємо його $[\xi_2, \eta_2]$, і далі

$$a_2 = \frac{\xi_2 + \eta_2}{2}, \quad \dots \quad a_k = \frac{\xi_k + \eta_k}{2},$$

використавши умову закінчення ітераційного процесу $|w(x^*, y^*; a_k) - w^*| < \varepsilon$, де ε - задана точність. Очевидно, що $a \in [\xi_i, \eta_i], \quad i = 1, 2, \dots k$, і за лемою про вкладені відрізки числові послідовності збігаються до шуканого a.

Модельна задача: для перевірки розв'язуємо пряму задачу (12) – (13) для відомого коефіцієнта a знаходимо $w(x^*, y^*) = w^*$. Потім, використав-

ши цю додаткову умову, за допомогою викладеного алгоритму розв'язуємо задачу (12) – (14). Знайдене a повинно співпадати з наперед заданим.

У зв'язку з високою точністю розв'язування лінійної задачі, а також ефективністю і обґрунтованістю застосування методу ділення навпіл, припускаємо, що отримаємо вірний і достатньо точний розв'язок поставленої задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Арсенін В. Я**. Методи математичної фізики і спеціальні функції / В.Я. Арсенін. М., 1984.
2. **Бобориkін В. Г**. Про розв'язування задачі пружного згину пластини зі змішаними граничними умовами / В.Г. Бобориkін // International applied mechanics 2006. Т.42, №5.
3. **Волошко Л. В.** Обчислювальна ефективність бігармонічного потенціалу / Л.В. Волошко, Л.С. Коряшкіна // Тези доповідей VII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)». – Дніпропетровськ, 25 – 27 листопада 2009 року. С.132 – 133.
4. **Денисов А. М.** Введення в теорію зворотних задач. / А.М. Денисов – М., 1994, 208 с.
5. **Кисельова О. М.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми / О.М. Кисельова, В.Д. Ламзюк, Л.В. Волошко //ВІСНИК Дніпропетр. ун-ту, Серія: «Моделювання», – 2011. – Вип. 3, №8, – С 20 – 28.
6. **Кисельова О. М.** Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, додатки / О.М. Кисельова, Н.З. Шор. МонографіяК., 2005, – 564 с.
7. **Коряшкіна Л. С**. Розв'язок однієї задачі керування параболічною системою / Л.С. Коряшкіна // Проблеми керування і інформатики 1998. С. 94 – 102.
8. **Самарський А. А.** Чисельні методи розв'язку зворотних задач математичної фізики / А.А. Самарський, П.Н. Вабищевич. – М., 2009, 480 с.
9. **Самуль В. І**. Основи теорії пружності і пластичності / В.І. Самуль . – М., 1970, 287 с.
10. **Melnikov Yu. A.** Influence Functions and Matrices. – New York-Basel, 1999.

Надійшла до редколегії 20.02.2012

УДК 519.6

Л.Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Досліджується питання про існування, область розташування та наближене відшукання розв'язку нелінійного параметричного рівняння у банаховому просторі за допомогою проекційно-ітераційного методу, основаного на методі Ньютона-Канторовича при проектуванні у простори, ізоморфні підпросторам вихідного простору. Доведено відповідну теорему, отримано оцінки похибки.

Исследуется вопрос о существовании, области расположения и приближенном нахождении решения нелинейного параметрического уравнения в банаховом пространстве при помощи проекционно-итерационного метода, основанного на методе Ньютона-Канторовича при проектировании в пространства, изоморфные подпространствам исходного пространства. Доказана соответствующая теорема, получены оценки погрешности.

The problem of existence, a location domain and approximate finding solution of a nonlinear equation with parameter in Banach space is investigated with applying the projection-iteration method based on Newton-Kantorovich method and projecting in spaces which are isomorphic to the subspaces of initial space. Corresponding theorem is proved, error estimates are obtained.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, оператор, параметр, решение, метод Ньютона-Канторовича, проекционно-итерационный метод, изоморфные пространства, последовательность, приближение, сходимость, погрешность.

Введение. Метод Ньютона-Канторовича решения функциональных уравнений, а также некоторые его модификации являются в настоящее время одними из немногих, применяемых на практике для фактического нахождения решения нелинейного уравнения. Важно отметить и теоретическое значение метода, так как с его помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения уравнения, не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем факти-

© *Л.Л.Гарт, 2012*

ческое знание решения. Исследованию метода Ньютона – Канторовича и его модификаций посвящены работы Л.В. Канторовича [1, 2], И.П. Мысовских [3], Б.А. Вертгейма, С. Фенга и других авторов.

Для решения нелинейных функциональных уравнений применяются и другие методы, относящиеся к классу итерационных, а также группа проекционных (аппроксимационных) методов, обзор которых можно найти, например, в [4]. Там же проведены исследования методов, получивших название проекционно-итерационных, для решения операторных уравнений первого рода, основанных на следующей идее. Уравнение вида

$$A x = f , \qquad (1)$$

с нелинейным оператором A, действующим в банаховом пространстве X, аппроксимируется последовательностью приближенных уравнений

$$A_n x_n = f_n , \quad n = 1,2,... , \qquad (2)$$

где A_n – нелинейный оператор, действующий в подпространстве X_n исходного пространства ($X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n \subset ... \subset X$). К решению этих уравнений применяется некоторый итерационный метод, причем для каждого из приближенных уравнений находится по указанному методу лишь несколько приближений $x_n^{(k)}$ ($k = 1,2,...,k_n$), последнее из которых полагается равным начальному приближению в итерационном процессе для следующего, ($n+1$)-го приближенного уравнения. В качестве последовательности приближений к решению уравнения (1) принимается последовательность $\left\{ x_n^{(k_n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Такой подход к нахождению приближенного решения того или иного уравнения естественно устраняет трудности, возникающие при решении того же уравнения обычным проекционным методом, и облегчает выбор подходящего начального приближения (особенно в нелинейном случае) по сравнению с решением исходного уравнения итерационным методом.

В [5] при помощи описанного подхода проведен анализ нелинейного параметрического уравнения

$$A x(\mu) \equiv T x + \mu Q x = f , \qquad (3)$$

где T и Q – дифференцируемые по Фреше операторы, действующие в банаховом пространстве X, μ – линейный оператор в X, в частности, μ может быть числовым множителем.

В настоящей работе рассматривается случай, когда приближенные уравнения, аппроксимирующие (3), задаются не в подпространствах $X_n \subset X$, а в некоторых пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных этим подпро-

странствам (именно этот случай чаще всего встречается при решении практических задач).

Постановка задачи. Пусть задано уравнение (1) с нелинейным оператором A, дифференцируемым по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)}, R) = \{x \in X : \|x - x_N^{(0)}\| \le R\}$ банахова пространства X ($x_N^{(0)} \in X$).

Аппроксимируем уравнение (1) последовательностью приближенных уравнений:

$$\tilde{A}_n \tilde{x}_n = \tilde{f}_n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

где $\tilde{A}_n$ – нелинейный оператор, действующий в пространстве $\tilde{X}_n$, изоморфном подпространству $X_n \subset X$.

Обозначим через Φ_n линейный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $x_n \in X_n$ элемент $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_n$; Φ_n^{-1} – оператор, осуществляющий обратное отображение. Введем также оператор $\overline{\Phi}_n$, являющийся расширением оператора Φ_n на все пространство X. В роли $\overline{\Phi}_n$ может выступать, например, оператор $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n$, где P_n – оператор ортогонального проектирования X на X_n. Не ограничивая общности, будем считать, что пространства X_n и $\tilde{X}_n$ изометричны, откуда следует, что $\|\Phi_n\| = \|\Phi_n^{-1}\| = 1$. (При указанном выборе оператора $\overline{\Phi}_n$ выполняется также условие $\|\overline{\Phi}_n\| = 1$.) В противном случае в пространствах $\tilde{X}_n$ можно ввести новую метрику, обеспечивающую указанную изометричность [6].

Заметим, что, если $\tilde{f}_n = \overline{\Phi}_n f$, то от уравнения (4) легко перейти к уравнению (2), заданному в подпространстве X_n, и наоборот, при этом $A_n = \Phi_n^{-1} \tilde{A}_n \Phi_n$, $f_n = P_n f$.

Обозначим через $\tilde{\Omega}_n$ образ множества $\Omega_n = X_n \cap S(x_N^{(0)}, R)$ при отображении Φ_n, то есть $\tilde{\Omega}_n = \{\tilde{x}_n \in \tilde{X}_n : \tilde{x}_n = \Phi_n x_n, \ x_n \in \Omega_n\}$.

Относительно оператора $\tilde{A}_n$ предположим, что для всех $n \ge N$ ($N \ge 1$) он дифференцируем по Фреше на множестве $\tilde{\Omega}_n$ и его производ-

ная $\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с константой $\tilde{L} > 0$:

$$\left\|\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n) - \tilde{A}_n'(\tilde{y}_n)\right\| \le \tilde{L}\left\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\right\|_{\tilde{X}_n}, \quad \tilde{x}_n, \tilde{y}_n \in \tilde{\Omega}_n, \tag{5}$$

а также существует непрерывный линейный оператор $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n) = \left[\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n)\right]^{-1}$ для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$.

Предположим, что выполнены условия близости

$$\left\|\tilde{A}_n\,\tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n A \Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n\right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\alpha}_n, \quad \left\|\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n) - \overline{\Phi}_n\, A'(\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n)\Phi_n^{-1}\right\| \le \tilde{\alpha}_n', \tag{6}$$

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n A\,x - A\,x\right\|_X \le \beta_n, \quad \left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n A'(x) - A'(x)\right\| \le \beta_n', \tag{7}$$

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n f - f\right\|_X \le \gamma_n \tag{8}$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $x \in S(x_N^{(0)}, R)$, причем $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_n', \beta_n, \beta_n', \gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для приближенного решения каждого из уравнений (4), начиная с номера $n \ge N$, применим итерационный метод Ньютона –Канторовича и построим проекционно–итерационную последовательность приближений $\left\{\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$ по формулам:

$$\tilde{x}_n^{(k+1)} = \tilde{x}_n^{(k)} - \left[\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n^{(k)})\right]^{-1}\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)} - \tilde{f}_n\right), \quad \tilde{x}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)} \tag{9}$$

$$(k = 0,1,\ldots,k_n - 1; \quad n \ge N; \quad \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N).$$

Теорема о существовании решения x^* уравнения (1), области его расположения, а также сходимости процесса (9) содержится в [7].

Приведем здесь обобщение упомянутой теоремы, когда вместо обратных операторов $\Gamma(x) = [A'(x)]^{-1}$ в шаре $S(x_N^{(0)}, R)$ и $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n) = \left[\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n)\right]^{-1}$ на множестве $\tilde{\Omega}_n$ требуется существование лишь операторов $D(x)$ и $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$, близких к $\Gamma(x)$ и $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)}, R) \subset X$, а оператор $\tilde{A}_n$ для всех $n \ge N$ дифференцируем на множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$ и его производная $\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет на $\tilde{\Omega}_n$ условию Липшица (5). Пусть выполнены условия близости (6) –(8), а*

также существуют линейные непрерывно обратимые операторы $D(x)$, *обладающий свойствами:*

$$\|D(x)\| \le b, \tag{10}$$

$$\|D(x)A'(x) - I\| \le \delta < 1 \tag{11}$$

для всех $x \in S(x_N^{(0)}, R)$, *и* $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$ *такие, что*

$$\left\|\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)\tilde{A}_n'(\tilde{x}_n) - I\right\| \le \tilde{\delta}_n < 1 \tag{12}$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $n \ge N$, I *– тождественный оператор. Если начальное приближение* $\tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$ *удовлетворяет условиям*

$$\left\|\tilde{A}_N \tilde{x}_N^{(0)} - \tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N} \le \tilde{\eta}_N^{(0)}, \tag{13}$$

$$\tilde{h}_N^{(0)} = \tilde{b}_N^2 \tilde{\eta}_N^{(0)} \tilde{L} < 2, \quad \tilde{r}_N = \tilde{b}_N \tilde{\eta}_N^{(0)} \tilde{H}_N \le R, \quad \tilde{b}_N = \frac{b}{1 - b(\tilde{\alpha}_N' + \tilde{\beta}_N') - \delta},$$

где

$$\tilde{H}_N = \tilde{G}_N + \sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2} \right)^{2^{Z_i} - 1} < 2\tilde{G}_N, \quad \tilde{G}_N = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2} \right)^{2^i - 1}, \tag{14}$$

$Z_i = \sum_{m=N}^{i} (k_m - 1)$, *то уравнение (1) имеет в шаре* $S(x_N^{(0)}, \tilde{r}_N) \subset X$ *радиуса* $\tilde{r}_N$ *с центром в точке* $x_N^{(0)} = \Phi_N^{-1} \tilde{x}_N^{(0)}$ *решение* x^*, *к которому сходится процесс последовательных приближений* $\left\{ \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n^{(k_n)} \right\}_{n=N}^{\infty}$, *определяемый формулами (9), с оценкой погрешности*

$$\left\|\Phi_n^{-1} \tilde{x}_n^{(k_n)} - x^*\right\|_X \le \tilde{\rho}_n = \tilde{b}_N \tilde{\eta}_N^{(0)} \tilde{V}_n \left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2} \right)^{2^{Z_n} - 1},$$

где

$$\tilde{V}_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2} \right)^{2^{Z_n}(2^i - 1)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2} \right)^{2^{Z_i} - 2^{Z_n}} < 2\tilde{G}_N. \tag{15}$$

Если к тому же выполнено условие

$$\left\|\Phi_n^{-1} \bar{\Phi}_n x^* - x^*\right\|_X \le \sigma_n, \tag{16}$$

где $\sigma_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то сама последовательность* $\left\{\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$ *сходится к элементу* $\overline{\Phi}_n x^*$ *с оценкой погрешности*

$$\left\| \tilde{x}_n^{(k_n)} - \overline{\Phi}_n x^* \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\beta}_n + \sigma_n .$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [4]. Там же сформулированы условия, на основании которых можно судить о разрешимости уравнения (1) по решению уравнения

$$A x \equiv T x + Q x = f ,$$

близкого к нему, но уже более простого (также, вообще говоря, нелинейного), где T и Q – некоторые дифференцируемые по Фреше операторы, действующие в X.

Такая ситуация является частным случаем более общей, когда левая часть уравнения (1) зависит от числового или иного параметра, причем при одном значении параметра решение уравнения известно и требуется установить существование решения для значений параметра, близких к начальному. Предположим, что упомянутый параметр входит в уравнение линейно, то есть будем рассматривать операторное уравнение вида (3)

$$A x(\mu) \equiv T x + \mu Q x = f ,$$

где μ – числовой множитель.

Метод решения. Аппроксимируем уравнение (3) последовательностью приближенных уравнений

$$\tilde{A}_n \tilde{x}_n(\mu) \equiv \tilde{T}_n \tilde{x}_n + \mu \tilde{Q}_n \tilde{x}_n = \tilde{f}_n , \quad n = 1,2,\ldots , \qquad (17)$$

заданных в пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных подпространствам $X_n \subset X$. Будем предполагать, что начиная с некоторого номера $n \ge N$, операторы $\tilde{T}_n$ и $\tilde{Q}_n$ дифференцируемы по Фреше на множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$ и выполняются условия близости

$$\left\| \tilde{T}_n \tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n T \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\tau}_n , \quad \left\| \tilde{Q}_n \tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n Q \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\theta}_n , \qquad (18)$$

$$\left\| \tilde{T}_n'(\tilde{x}_n) - \overline{\Phi}_n T'(\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n)\Phi_n^{-1} \right\| \le \tilde{\tau}_n' , \quad \left\| \tilde{Q}_n'(\tilde{x}_n) - \overline{\Phi}_n Q'(\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n)\Phi_n^{-1} \right\| \le \tilde{\theta}_n'$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, причем $\tilde{\tau}_n, \tilde{\tau}_n', \tilde{\theta}_n, \tilde{\theta}_n' \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$\left\| \Phi_n^{-1} \overline{\Phi}_n T x - T x \right\|_X \le \chi_n , \quad \left\| \Phi_n^{-1} \overline{\Phi}_n Q x - Q x \right\|_X \le \lambda_n , \qquad (19)$$

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, T'(x)-T'(x)\right\| \le \chi_n',\quad \left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, Q'(x)-Q'(x)\right\| \le \lambda_n'$$

для всех $x \in S(x_N^{(0)},R)$, причем $\chi_n,\ \chi_n',\ \lambda_n,\ \lambda_n' \to 0$ при $n \to \infty$.

Условия существования и область расположения решения $x^* \equiv x^*(\mu)$ уравнения (3), а также условия сходимости к нему проекционно-итерационной последовательности приближений, основанной на методе Ньютона-Канторовича, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть операторы* T *и* Q *дифференцируемы по Фреше в некотором шаре* $S(x_N^{(0)},R) \subset X$, *а операторы* $\tilde{T}_n$ *и* $\tilde{Q}_n$ *для* $n \ge N$ *дифференцируемы на множестве* $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$ *и их производные* $\tilde{T}_n'(\tilde{x}_n)$ *и* $\tilde{Q}_n'(\tilde{x}_n)$ *удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с константами* $\tilde{K}$ *и* $\tilde{M}$ *соответственно. Пусть выполняются условия близости (8), (18), (19), для всех* $x \in S(x_N^{(0)},R)$ *существует непрерывный линейный оператор* $[T'(x)]^{-1}$, *причем*

$$\left\|[T'(x)]^{-1}\right\| \le b, \qquad (20)$$

$$\left\|Q'(x)\right\| \le \nu, \qquad (21)$$

а для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $n \ge N$ *существуют непрерывные линейные операторы* $\left[\tilde{T}_n'(\tilde{x}_n)\right]^{-1}$ *такие, что*

$$\left\|\left[\tilde{T}_n'(\tilde{x}_n)\right]^{-1}\tilde{Q}_n'(\tilde{x}_n)\right\| \le \tilde{\nu}_n. \qquad (22)$$

Пусть элемент $\tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$ *является решением уравнения* $\tilde{T}_N\,\tilde{x}_N = \tilde{f}_N$, *т. е.*

$$\tilde{A}_N\,\tilde{x}_N^{(0)}(0) \equiv \tilde{T}_N\,\tilde{x}_N^{(0)} = \tilde{f}_N, \qquad (23)$$

и удовлетворяет условию

$$\left\|\tilde{Q}_N\,\tilde{x}_N^{(0)}\right\|_{\tilde{X}_N} \le \tilde{\zeta}_N^{(0)}. \qquad (24)$$

Тогда, если μ *таково, что*

$$|\mu|\, b\nu < 1,\quad |\mu|\tilde{\nu}_n < 1,\quad \tilde{h}_N^{(0)} = \tilde{b}_N^2\,|\mu|\,\tilde{\zeta}_N^{(0)}(\tilde{K}+|\mu|\,\tilde{M}) < 2, \qquad (25)$$

$$\tilde{r}_N = \tilde{b}_N\,|\mu|\,\tilde{\zeta}_N^{(0)}\tilde{H}_N \le R,\quad \tilde{b}_N = \frac{b}{1-b(\tilde{\tau}_N'+\chi_N'+|\mu|(\tilde{\theta}_N'+\lambda_N'+\nu)},$$

где $\widetilde{H}_N$ *определено в (14), то уравнение (3) имеет в шаре* $S(x_N^{(0)}, \widetilde{r}_N) \subset X$ *радиуса* $\widetilde{r}_N$ *с центром в точке* $x_N^{(0)} = \Phi_N^{-1}\widetilde{x}_N^{(0)}$ *решение* $x^* \equiv x^*(\mu)$, *к которому сходится процесс последовательных приближений* $\left\{\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$, *определяемый формулами (9), с оценкой погрешности*

$$\left\|\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu) - x^*\right\|_X \le \widetilde{\rho}_n = \widetilde{b}_N |\mu| \widetilde{\zeta}_N^{(0)} \widetilde{V}_n \left(\frac{\widetilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}-1},$$

где $\widetilde{V}_n$ *дается формулой (15),* $Z_n = \sum_{m=N}^{n}(k_m - 1)$. *Если к тому же выполнено условие (16), то сама последовательность* $\left\{\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$ *сходится к элементу* $\overline{\Phi}_n x^*$ *с оценкой погрешности*

$$\left\|\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu) - \overline{\Phi}_n x^*\right\|_{\widetilde{X}_n} \le \widetilde{\rho}_n + \sigma_n .$$

Доказательство. Утверждение настоящей теоремы получается непосредственно из теоремы 1, если положить в ней $D(x) = [T'(x)]^{-1}$, $\widetilde{D}_n(\widetilde{x}_n) = [\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)]^{-1}$ ($n \ge N$). Проверим выполнимость условий теоремы 1.

По свойствам производных [2], из дифференцируемости операторов T и Q в шаре $S(x_N^{(0)}, R) \subset X$ следует дифференцируемость оператора $A = T + \mu Q$ в том же шаре, а из дифференцируемости для всех $n \ge N$ операторов $\widetilde{T}_n$ и $\widetilde{Q}_n$ на множестве $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{X}_n$ следует дифференцируемость на $\widetilde{\Omega}_n$ оператора $\widetilde{A}_n = \widetilde{T}_n + \mu \widetilde{Q}_n$, при этом

$$A'(x) = T'(x) + \mu Q'(x), \quad x \in S(x_N^{(0)}, R),$$
$$\widetilde{A}_n'(\widetilde{x}_n) = \widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n) + \mu \widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n), \quad \widetilde{x}_n \in \widetilde{\Omega}_n .$$

Поэтому для произвольных $\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ будем иметь:

$$\left\|\widetilde{A}_n'(\widetilde{x}_n) - \widetilde{A}_n'(\widetilde{y}_n)\right\| = \left\|\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n) + \mu \widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n) - \widetilde{T}_n'(\widetilde{y}_n) - \mu \widetilde{Q}_n'(\widetilde{y}_n)\right\| \le$$
$$\le \left\|\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n) - \widetilde{T}_n'(\widetilde{y}_n)\right\| + |\mu| \left\|\widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n) - \widetilde{Q}_n'(\widetilde{y}_n)\right\| \le (\widetilde{K} + |\mu| \widetilde{M}) \|\widetilde{x}_n - \widetilde{y}_n\|_{\widetilde{X}_n},$$

то есть выполняется условие Липшица (5) с константой $\widetilde{L} = \widetilde{K} + |\mu| \widetilde{M}$.

Легко видеть также, что выполнимость условий близости (18), (19) влечет выполнимость условий (6), (7) соответственно, при этом

$\alpha_n = \tau_n + |\mu|\theta_n$, $\alpha'_n = \tau'_n + |\mu|\theta'_n$, $\beta_n = \chi_n + |\mu|\lambda_n$, $\beta'_n = \chi'_n + |\mu|\lambda'_n$ $(n \geq N)$.

Далее с учетом (20), (21) и первого из условий (25) получаем

$$\|D(x)A'(x) - I\| = \left\|[T'(x)]^{-1}(T'(x) + \mu Q'(x)) - I\right\| =$$

$$= |\mu| \left\|[T'(x)]^{-1} Q'(x)\right\| \leq |\mu| b\nu < 1$$

для всех $x \in S(x^{(0)}, R)$, то есть выполняется условие (11) с константой $\delta = |\mu| b\nu$. Аналогично, с учетом (22) и второго из условий (25) получаем

$$\left\|\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n) - I\right\| = |\mu| \left\|[\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n)]^{-1} \tilde{Q}'_n(\tilde{x}_n)\right\| \leq |\mu|\tilde{\nu}_n < 1$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $n \geq N$, то есть условие (12) выполняется с константой $\tilde{\delta}_n = |\mu|\tilde{\nu}_n$.

Что касается условия (13) для начального приближения $\tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$, то оно с учетом представления $\tilde{A}_N = \tilde{T}_N + \mu \tilde{Q}_N$, очевидно, выполняется с константой $\tilde{\eta}_N^{(0)} = |\mu| \tilde{\zeta}_N^{(0)}$ на основании выполнимости условий (23), (24)

$$\left\|\tilde{A}_N \tilde{x}_N^{(0)} - \tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N} \equiv \left\|\tilde{T}_N \tilde{x}_N^{(0)} + \mu \tilde{Q}_N \tilde{x}_N^{(0)} - \tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N} \leq |\mu| \tilde{\zeta}_N^{(0)}.$$

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, из чего следует справедливость утверждений настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Выводы. Заметим, что в формулировке теоремы 1 оценки норм (10), (11) для оператора $D(x)$, с помощью которых могут быть установлены на основании теоремы Банаха об обратном операторе [8] факт существования оператора $\Gamma(x) = [A'(x)]^{-1}$ и оценка $\|\Gamma(x)\| \leq \dfrac{b}{1-\delta}$ его нормы, предполагаются известными не только в точке $x_N^{(0)}$, но и во всем шаре $S(x_N^{(0)}, R) \subset X$. Кроме того, оценка нормы (12) для оператора $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$, из которой по тем же соображениям вытекает факт существования оператора $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n) = [\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)]^{-1}$ при каждом $n \geq N$ и оценка его нормы $\left\|\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n)\right\| \leq \dfrac{b}{1 - \delta - b(\alpha'_n + \beta'_n)}$, предполагается известной не только в точке $\tilde{x}_n^{(0)} \in \tilde{\Omega}_n$, но и во всем множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$. Такая замена условий типа

Канторовича условиями типа Коши позволила ослабить ограничения, накладываемые на выбор начального приближения $\tilde{x}_N^{(0)} = \Phi_N x_N^{(0)}$ в формулах (9). Это обстоятельство является чрезвычайно важным, поскольку при решении итерационными методами нелинейных задач выбор подходящего начального приближения – один из наиболее сложных моментов.

Сформулированная и доказанная в данной работе теорема 2 может быть применена к исследованию конкретных функциональных уравнений, в частности, нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений, а также операторных уравнений, возникающих в теории возмущений и задачах приближенного построения конформных отображений.

Следует отметить, что для автора в дальнейшем представляет интерес обоснование сходимости к точному решению x^* уравнения (1) процесса приближений $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$, определяемого формулами

$$\tilde{x}_n^{(k+1)} = \tilde{x}_n^{(k)} - \tilde{D}_n(\tilde{x}_n^{(k)})\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)} - \tilde{f}_n\right), \quad \tilde{x}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)}$$

$$(k = 0,1,\ldots,k_n - 1; \quad n \geq N; \quad \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N),$$

а также обоснование сходимости к точному решению $x^* \equiv x^*(\mu)$ уравнения (3) процесса $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$,

$$\tilde{x}_n^{(k+1)}(\mu) = \tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \left[\tilde{\Gamma}_n'(\tilde{x}_n^{(k)}(\mu))\right]^{-1}\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \tilde{f}_n\right),$$

$$\tilde{x}_{n+1}^{(0)}(\mu) = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)$$

$$(k = 0,1,\ldots,k_n - 1; \quad n \geq N; \quad \tilde{x}_N^{(0)}(\mu) = \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N),$$

и соответствующего ему модифицированного процесса $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$,

$$\tilde{x}_n^{(k+1)}(\mu) = \tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \left[\tilde{\Gamma}_n'(\tilde{x}_n^{(0)}(\mu))\right]^{-1}\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \tilde{f}_n\right),$$

$$\tilde{x}_{n+1}^{(0)}(\mu) = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)$$

$$(k = 0,1,\ldots,k_n - 1; \quad n \geq N; \quad \tilde{x}_N^{(0)}(\mu) = \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N).$$

Этот последний процесс имеет то достоинство, что в нем используется обратный оператор, соответствующий при каждом $n \geq N$ лишь начальной точке $\tilde{x}_n^{(0)}(\mu) \in \tilde{\Omega}_n$ (а при $n = N$ – еще и начальному значению параметра $\mu = 0$), что, очевидно, приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений.

Библиографические ссылки

1. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Канторович // УМН. – 1948. – Т. 3, № 6. – С. 89-85.
2. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – СПб., 2004. – 816 с.
3. **Мысовских И.П.** О сходимости метода Л.В. Канторовича для решения нелинейных уравнений и его применениях / И. П. Мысовских // Вестник ЛГУ.– 1953.– № 11.– С. 25-48.
4. **Тавадзе Л.Л.** Проекционно_итерационные методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа: дисс. … канд. физ. -мат. наук / Л. Л. Тавадзе – Д., 1995. – 152 с.
5. **Гарт Л.Л.** О численном моделировании решения нелинейного параметрического уравнения проекционно_итерационным методом / Л. Л. Гарт // Питання прикладної математики і математич-ного моделювання. – Д., 2011. – С. 66-75.
6. **Балашова С.Д.** О дальнейшем применении проекционно_итерационных методов к решению задач минимизации / С. Д. Балашова – Днепропетровск, 1991.– 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.91, № 2487 – В 91.
7. **Гарт Л.Л.** Проекционно_итерационная реализация метода Ньютона_Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений. / Л. Л. Гарт, Н.В. Поляков // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 70-78.
8. **Люстерник Л.А.** Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В. И. Соболев. – М., 1965. – 520 с.

Надійшла до редколегії 1.05.2012.

УДК 004.021

В. А. Громов, А. Ю. Миняйло
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ КАК ЗАДАЧА КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Розглянуто новий метод прогнозування хаотичних часових рядів. Метод використовує алгоритм кластерізації, що спирається на застосування спеціальним чином адаптованого генетичного алгоритму, для аналізу топологічної структури атрактора динамічної системи, що визначає поведінку часового ряду, що розглядається, та виділення характерних послідовностей, які відповідають різним частинам цього атрактора. Зазначені характерні послідовності використовуються для прогнозу значень часового ряду. Метод було застосовано для прогнозу часового ряду, побудованого за системою Лоренца, та температурного ряду для м. Львів.

Рассматривается новый метод прогнозирования хаотических временных рядов. Метод использует алгоритм кластеризации, основанный на применении специальным образом адаптированного генетического алгоритма, для анализа топологической структуры аттрактора динамической системы, определяющей поведение рассматриваемого временного ряда и выделения характерных последовательностей, отвечающим различным частям данного аттрактора. Указанные характерные последовательности используются для прогноза значений временного ряда. Метод был применён для прогноза временного ряда, построенного по системе Лоренца, и температурного ряда для г. Львов.

In this study, the novel method to predict chaotic time series is proposed. The method employs clusterization technique based on specific genetic algorithm to analyze topological structure of the attractor behind the given time series and to single out the typical sequences corresponding to the different part of the attractor. The typical sequences are used to predict the time series values. The method was applied to time series generated by the Lorenz system, and a weather time series for Lvov-city.

Ключевые слова: прогнозирование, хаотические временные ряды, кластеризация, генетический алгоритм.

© *В. А. Громов, А. Ю. Миняйло, 2012*

Введение. Постоянный интерес к хаотическим моделям и системам со стороны исследователей самых различных научных направлений и специализаций [1; 2; 4–6] обуславливается как фундаментальной ролью, которую играют такого рода системы в описании природных и социальных процессов, так и сложностью их анализа и прогноза. Отдельной значимой и сложной задачей здесь является прогнозирование хаотических временных рядов.

В дальнейшем анализе будем предполагать, что переходные процессы в наблюдаемой динамической системе завершены, и система движется в окрестности некоторого странного аттрактора, что собственно и определяет хаотичность динамики системы. Также будем считать, что наблюдаемый временной ряд удовлетворяет условиям теоремы Такенса, т. е. ряд отражает внутреннюю динамику системы, определяемую структурой странного аттрактора.

Оценкой сверху для промежутка, на который может быть осуществлён прогноз, в задачах прогноза хаотических рядов является величина горизонта прогнозирования [4], т. е. промежутка времени необходимого для того, чтобы погрешность данных, малая в начальный момент времени, превысила некий порог (определяемый исследователем) вследствие экспоненциального расхождения близких траекторий. Эта же причина – экспоненциальное накопление погрешности – обуславливает невозможность применение классических прогнозных моделей (ARIMA-модель, DHR-модель и др.).

Другой причиной, которая обуславливает невозможность применения указанных моделей к прогнозированию хаотических рядов, как нам представляется, является то, что большинство существующих подходов к прогнозированию предполагают построение одной модели для всего наблюдаемого ряда: тем самым игнорируется внутренняя структура аттрактора. Те, модели, в которых указанная структура явным или неявным образом учитывается, оказываются успешными при прогнозировании. В качестве примера здесь можно привести нейросетевые и нейронечёткие модели [10; 22] − обзор существующих моделей, применяемых для прогнозирования хаотических временных рядов, представлен в следующем разделе.

Движение системы в окрестности странного аттрактора приводит к тому, что в исследуемом временном ряде наблюдаются похожие участки, которые отвечают движению системы в окрестности одной и той же области странного аттрактора. Выделение данных участков, характеризация указанных областей и построение элементарных прогнозных моделей для выделенных областей приводит к возможности прогнозирования хаотиче-

ского временного ряда на промежутки времени, сравнимые с горизонтом прогнозирования [3; 11].

При этом каждая из построенных таким образом элементарных моделей представляет собой усреднённую характеристику соответствующей области, и, таким образом, качество прогноза, полученного с помощью данной модели, определяется некоторым компромиссом между потерей информации вследствие усреднения и отсутствием экспоненциального «хаотического» накопления погрешности вследствие того же усреднения. Указанная особенность позволяет осуществлять прогнозирование по прогнозным значениям, чем и объясняется и эффективность прогнозирования с использованием данного подхода на промежутки времени, сравнимые с горизонтом прогнозирования.

Отметим, что в [3; 11] вышеописанная методология была реализована для прогноза хаотических рядов с использованием метода «муравьиных колоний». В настоящей работе для решения вышеописанной задачи кластеризации использовался специальным образом адаптированный генетический алгоритм [14].

Обзор литературы. В последнее время было предложено значительное число моделей и методов, посвящённых восстановлению структуры странного аттрактора по временному ряду и прогнозированию данного ряда с использованием полученной при восстановлении информации. Их можно условно разделить на три группы в соответствие с теми теориями искусственного интеллекта, на которые опирается тот или иной метод при реконструкции фазового пространства [20] и анализе соответствующих временных рядов.

К первой группе можно отнести нейросетевые модели, которые являясь по природе своей универсальными адаптивными аппроксиматорами, способны выделять различные локальные тренды, присутствующие в анализируемом временном ряде, и аппроксимировать их [9; 15]. Здесь следует также упомянуть метод сингулярного спектрального разложения, использующий информацию о сингулярных значениях дисперсионно-ковариационной матрицы временного ряда для извлечения информации об указанных локальных трендах [7].

Ко второй группе следует отнести нечёткие и нейронечёткие подходы, которые используются для создания робастных и логически прозрачных прогнозных моделей [8; 10].

Наконец, третья группа включает в себя системы, основанные на подходах распределённого искусственного интеллекта, как, например, генетические алгоритмы [15], интеллект роя, метод «муравьиных колоний» [3; 11; 16; 18] и другие. Данные подходы могут использоваться как для на-

стройки параметров нейросетевых моделей [17], так и собственно для прогнозирования. Отметим также ряд работ, в которых указанные подходы применяются для прогнозирования реальных природных или технологических процессов [12; 13; 19].

Постановка задачи. Рассматривается последовательность наблюдений хаотического временного ряда $y_t, y_{t-1},..., y_{t-s}$. Предполагается, что выполнены оба сформулированных выше предположения: о завершённости переходных процессов в динамической системе и о выполнении условий теоремы Такенса [4]. Необходимо построить прогнозные значения для последующих наблюдений данного временного ряда $\hat{y}_{t+1}, \hat{y}_{t+2},..., \hat{y}_{t+K}$, с тем, чтобы наблюдаемые значения не уклонялись от прогнозных больше чем на заданную величину:

$$\left|\hat{y}_{t+i} - y_{t+i}\right| < \varepsilon,\ i = \overline{1,K}\ .$$

Метод решения. Предложенный алгоритм прогнозирования состоит из двух частей: первая – анализ временного ряда с целью кластеризации последовательностей наблюдений временного ряда и выделения характерных последовательностей, вторая – собственно прогнозирования динамики временного ряда на основе выделенных последовательностей.

Обратимся вначале к краткому изложению генетического алгоритма, адаптированного к решению задач кластеризации. В изложении мы будем следовать [14]. Отметим, прежде всего, что указанный алгоритм самостоятельно определяет оптимальное число кластеров.

Рассматривается множество из N векторов, подлежащих кластеризации. В этом случае каждая хромосома, используемого генетического алгоритма, будет представлять собой $N+1$-мерный целочисленный вектор. Последний, $N+1$-й, компонент вектора кодирует число кластеров, соответствующих данному решению. Целое число, содержащееся в произвольной, i-й $i \le N$, компоненте хромосомы отвечает номеру кластера, которому в этом решении принадлежит i-й вектор из множества кластеризируемых данных.

Функция приспособленности (фитнесса) хромосомы в рамках данного алгоритма базируется на понятии силуэта:

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\{b(i), a(i)\}},$$

где $a(i)$ - среднее расхождение между i-м вектором и всеми остальными векторами, отнесёнными к тому же кластеру A, что и i-й вектор, согласно решению, закодированному в данной хромосоме. $b(i) = \min_{B \neq A} a(i)$, т. е. под $b(i)$ понимается минимальное расхождение между i-м вектором и всеми остальными кластерами, кроме кластера A. Легко видеть, что $-1 \leq s(i) \leq 1$. Чем больше величина $s(i)$, тем выше уровень принадлежности i-го вектора к соответствующему классу. Если кластер состоит из одного элемента, то величина $s(i)$ не определена, и самый разумный вариант положить $s(i) = 0$. Таким образом, функция приспособленности определяется как среднее значение:

$$f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s(i).$$

Необходимость соблюдения соответствия между числом классов, хранящимся в последней компоненте хромосомы, и числом классов, определяемых из решения, хранящегося в первых N компонентах хромосомы, накладывает определённые ограничения на операторы мутации и скрещивания.

Оператор скрещивания работает следующим образом. Сначала выбираются 2 генотипа (G1 и G2). Далее, считая, что G1 включает в себя k1 кластеров, алгоритм случайным образом выбирает $c \in \{1,2,...,k1\}$ кластеров и копирует их в G2. Неизмененные кластеры G2 остаются, а те, что изменились, перемещаются в ближайший из кластеров (ближайший относительно центров кластеров). Таким образом, потомок G3 получен. Такая же процедура используется для получения потомка G4, но теперь изменённые кластеры G2 копируются в G1. Для иллюстрации этой процедуры, рассмотрим следующие два генотипа:

G1 - 1123245125432533424;
G2 - 1212332124423221321.

Например, предположим, что кластеры 2 и 3 в генотипе G1 были случайным образом выбраны (отмечены жирным шрифтом ниже):

G1 - 11**232**451**2**54**32**5**33**42**4**.

Когда эти кластеры копируются в G2, они изменят кластеры {1, 2, 3} в G2, в то время как кластер 4 не меняется:

G2 - **1223232**1244**32233**21.

Подчёркнутые позиции, которые соответствуют генам, на которые косвенно влияют кластеры 2 и 3 с G1, теперь изменены на 0 (ноль):

G3 - 0023200024432033020.

Гены равные нулю затем будут помещены соответственно в ближайшие из кластеров (согласно их центров тяжести). Такая же процедура используется для получения потомка G4, за исключением того, что выбранные кластеры будут копироваться в G1.

Следует обратить внимание, что такая процедура скрещивания может привести как к увеличению числа кластеров, так и их уменьшения.

В генетическом алгоритме используются два оператора для мутации. Первый оператор работает только для генотипов, которые кодируют более чем два кластера. Он устраняет один из случайно выбранных кластеров путём размещения его в ближайший из оставшихся кластеров (в соответствии с их центрами тяжести). Второй оператор делит случайно выбранный кластер на два новых. Первый кластер формируется из последовательностей, которые находились ближе к исходному центру тяжести. Второй кластер – из тех последовательностей, которые находились ближе к самой дальней последовательности исходного кластера.

Для применения вышеописанного алгоритма кластеризации к прогнозированию временных рядов вводится понятие шаблона $(k_1, k_2, ..., k_l)$ длины $l+1$ как набора элементов временного ряда вида $y_t, y_{t+k_1}, ..., y_{t+k_l}$. Множество векторов, составленных из элементов временного ряда, номера которых удовлетворяют некоторому шаблону, составляют множество кластеризируемых данных.

Центры кластеров, полученных при кластеризации векторов, отвечающих всем возможным шаблонам всех возможных длин, и образуют множество характерных последовательностей.

Для каждой из полученных таким образом характерных последовательностей вычисляется её прогностическая ценность как величина обрат-

ная средней ошибке прогноза, полученного с помощью данной характерных последовательности. Для вычисления прогностической ценности характерных последовательностей использовалась та часть рассматриваемого временного ряда, которая не участвовала в формировании данных для алгоритма кластеризации. При прогнозе используются лишь те характерные последовательности, прогностическая ценность которых высока.

Отметим, что существенно важным параметром данного алгоритма является максимально допустимое число кластеров M. Увеличение данного числа до некоторого предела (равного теоретически возможному числу для регулярных рядов) приводит к улучшению работы алгоритма, но, естественно, замедляет скорость его работы.

Анализ полученных результатов. Работа приведенного выше алгоритма вначале была протестирована на зашумлённых регулярных рядах. В частности рассматривался временной ряд вида $y_t = \cos t + \alpha\varepsilon_t$, где случайные составляющих ε_t удовлетворяют условиям Гаусса_Маркова, а параметр α, определяющий уровень шума, менялся. Размер ряда составлял 1000 наблюдений, шаг дискретизации был равен $\Delta t = 0.01$.

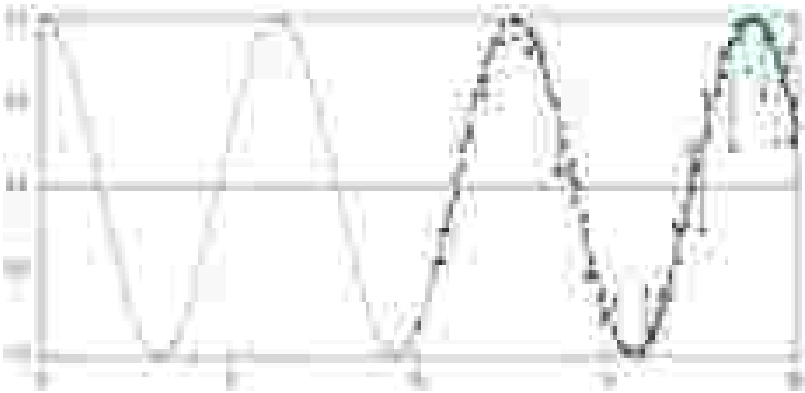


Рис. 1. Результаты применения алгоритма прогнозирования к регулярному временному ряду

На рис. 1 представлен результат прогноза для случая $\alpha = 0.01$. Максимально допустимое число кластеров составляло 50% (420 кластеров) от теоретически возможного. Сплошной линией представлен график $y_t = \cos t$, точками отмечены прогнозные значения. На рис. 2а для этих же значений параметров представлена зависимость средней ошибки прогноза от числа раз, которое последовательно применялся данный алгоритм к уже спрогнозированным с его помощью значениям. На рис 2б приведена аналогичная зависимость для случая $M = 100\%$ (840 кластеров). Представленные зависимости позволяют сделать вывод, что

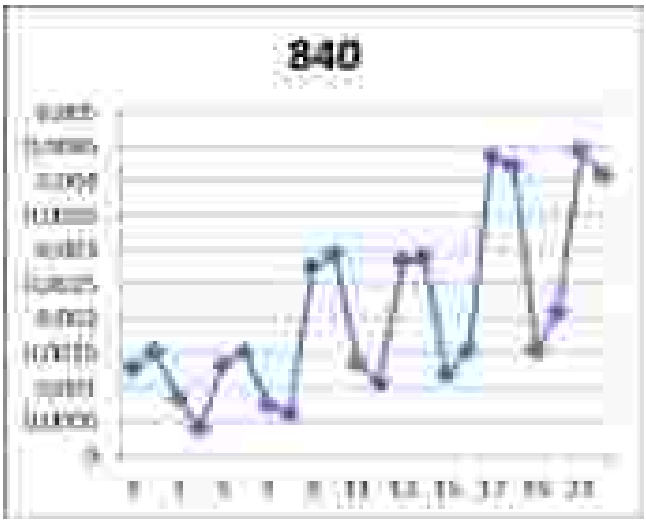


Рис. 2. Зависимость средней ошибки прогноза от числа раз, которое последовательно применялся данный алгоритм к уже спрогнозированным с его помощью значениям

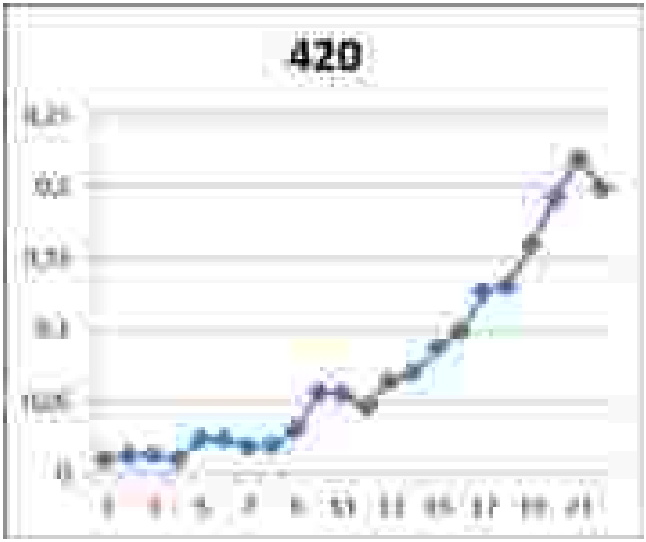


Рис. 2а. Зависимость средней ошибки прогноза от числа раз, которое последовательно применялся данный алгоритм к уже спрогнозированным с его помощью значениям. $M = 50\ \%$

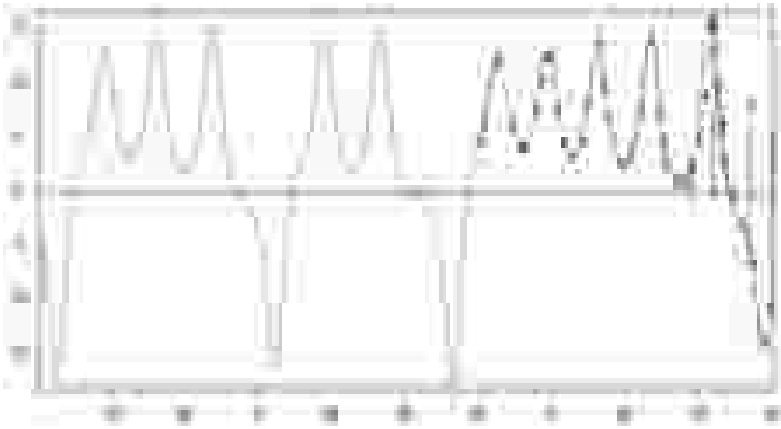


Рис. 3. Результаты применения алгоритма прогнозирования к временному ряду, порождённому системой Лоренца

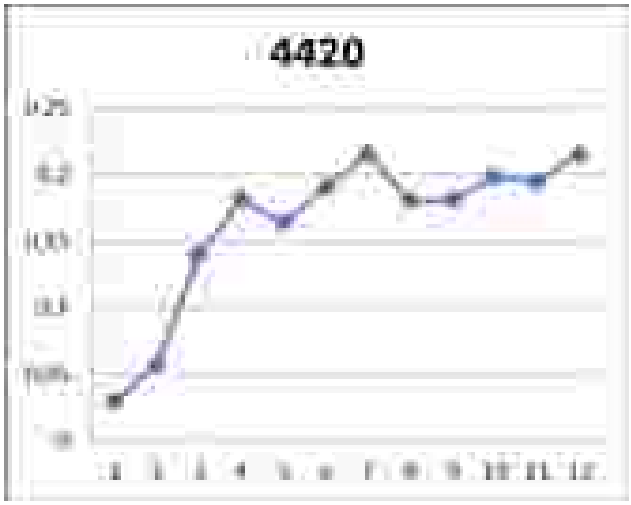


Рис. 4. Ряд Лоренца. Зависимость средней ошибки прогноза от числа раз, которое последовательно применялся алгоритм

алгоритм позволяет осуществлять прогноз на значительное число шагов вперёд, при сохранении приемлемой точности прогноза.

Предложенный алгоритм был применён для прогнозирования временного ряда, полученного интегрированием системы Лоренца.

Система Лоренца является классическим примером для проверки работоспособности прогнозных алгоритмов. Для получения временного ряда система интегрировалась методом Рунге_Кутта 4_го порядка, размер полученного таким образом ряда составил 1000 наблюдений.

На рис. 3 представлен временной ряд, построенный по системе Лоренца, (сплошная линия) и результаты применения алгоритма (точки). Представленный случай соответствует случаю _ 50 % от теоретически возможного числа кластеров.

На рис. 4 для указанных значений параметров представлена зависимость средней ошибки прогноза от числа раз, которое последовательно применялся данный алгоритм к уже спрогнозированным с его помощью значениям.

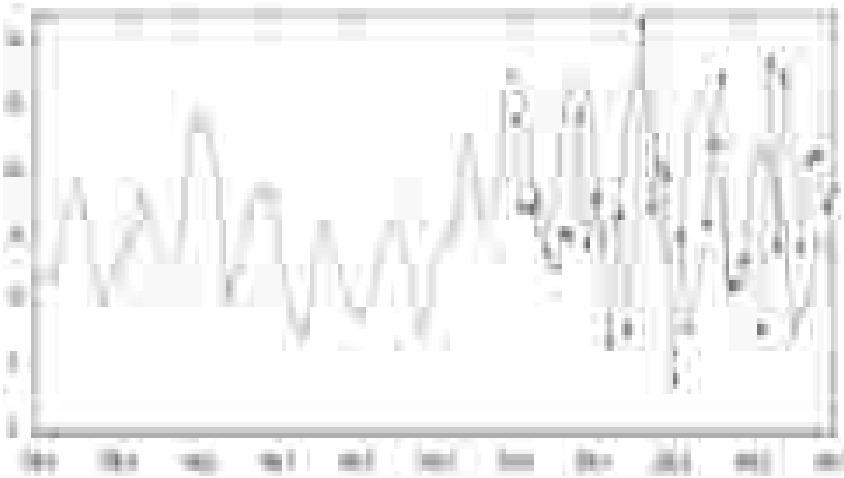


Рис. 5. Результаты применения алгоритма прогнозирования к температурному временному ряду

Наконец, обратимся к исследованию качества прогноза, полученного с помощью данного алгоритма для температурных временных рядов. В качестве примера был выбран временной ряд, описывающий температурный режим г. Львов за последние семь лет; таким образом, общее число наблюдений составило 20000. На рис. 5 представлены наблюдаемые значения (сплошная линия) и прогнозные (точки) для данного ряда.

Выводы.

1. В настоящей работе предлагается новый метод прогнозирования хаотических временных рядов. Метод базируется на выделении характерных последовательностей в рассматриваемом временном ряде с помощью кластеризации на множестве всех возможных последовательностей, наблюдаемых в данном временном ряде. При этом прогноз осуществляется по центрам полученных кластеров, что позволяет избежать накопления погрешности, естественного для хаотических рядов. Кластеризация осуществляется с помощью специальным образом модифицированного генетического алгоритма.

2. В работе анализируется качество работы метода, определяется набор оптимальных параметров.
3. Метод был протестирован на слабозашумлённых регулярных рядах и применён к прогнозированию хаотических рядов . В частности, были рассмотрены «классический» хаотический ряд – ряд Лоренца – и температурный ряд для г. Львов. Метод продемонстрировал хорошие результаты прогноза для зашумлённых регулярных рядов и удовлетворительные – для хаотических.

Библиографические ссылки

1. **Анищенко В.С.** Сложные колебания в простых системах. – М., 2009.
2. **Глазунова О.И.** Синергетика творчества. – М., 2012.
3. **Громов В.А.** Применение метода “муравьиных колоний” для прогнозирования хаотических временных рядов / В.А. Громов, А.Н. Шульга // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наукових праць. – 2011. – С. 74-84.
4. **Малинецкий Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М., 2000.
5. **Милованов В.П.** Синергетика и самоорганизация. Общая и социальная психология. – М., 2010.
6. **Мюррей Дж.** Математическая биология. Введение. – Ижевск, 2009.
7. **Elsner J.B.** Singular spectrum analysis: A new tool in time series analysis (1st ed.) / J.B. Elsner, A.A. Tsonis. – N.Y, 1996.
8. **Fu Y.Y.** ARFNNs with SVR for prediction of chaotic time series with outliers / Y.Y. Fu, C.Y. Wub, J.T. Jeng, C.N. Ko // Expert Systems with Applications. – 2010. – №37. – P. 4441–4451.
9. **Gan M.** A locally linear RBF network-based state-dependent AR model for nonlinear time series modeling / M. Gan, H. Peng, X. Peng, X. Chen, G. Inoussa // Information Sciences. – 2010. – №180. – P. 4370–4383.
10. **Gu H.** Fuzzy prediction of chaotic time series based on singular value decomposition / H. Gu, H. Wang // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – №185. – P. 1171–1185.
11. **Gromov V.A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization / V.A. Gromov, A.N. Shulga // Expert Systems with Applications. – 2012. – №39. – P. 8474-8478.
12. **Hong W.C.** Application of chaotic ant swarm optimization in electric load forecasting. Energy Policy. – 2010. – №38. – P. 5830–5839.
13. **Hong W.C.** Forecasting urban traffic flow by SVR with continuous ACO / W.C. Hong, Y. Dong, F. Zheng, C.Y. Lai // Applied Mathematical Modeling. – 2011. – №35. – P. 1282–1291.

14. **Hrushka E.R.** Extracting rules from multilayer perceptrons in classification problems: A clustering-based approach / E.R. Hrushka, N.F.F. Ebecken // Neurocomputing. – 2006. – №70. – P. 384-397.

15. **Mirzaee H.** Linear combination rule in genetic algorithm for optimization of finite impulse response neural network to predict natural chaotic time series // Chaos, Solitons and Fractals. – 2009. – №41. – P. 2681–2689.

16. **Niu D.** Power load forecasting using support vector machine and ant colony optimization / D. Niu, Y. Wang, D.D. Wu // Expert Systems with Applications. – 2010. – №37. – P. 2531–2539.

17. **Pan Y.** Predicting the net heat of combustion of organic compounds from molecular structures based on ant colony optimization / Y. Pan, J.C. Jiang, R. Wang, J.J. Jiang // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. – 2011. – №24. – P. 85–89.

18. **Toskari M.D.** Estimating the net electricity energy generation and demand using the ant colony optimization approach. Energy Policy. – 2009. – №37. – P. 1181–1187.

19. **Unler A.** Improvement of energy demand forecasts using swarm intelligence: The case of Turkey with projections to 2025. Energy Policy. – 2008. – №36. – P. 1937–1944.

20. **Wang J.** Chaotic time series method combined with particle swarm optimization and trend adjustment for electricity demand forecasting / J. Wang, D. Chi, J. Wu, H. Lu // Expert Systems with Applications. – 2011. – №38, – P. 8419–8429.

Надійшла до редколегії 18.04.2012

УДК 539.3

Н. А. Гук[9]
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

КОРРЕКТНОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Розглядається умовно-коректна постановка оберненої задачі теорії тонкостінних систем. Доведено існування відображення множини розв'язків оберненої задачі на множину розв'язків прямої задачі. При наявності результатів вимірювань та існування неособливого розв'язку прямої задачі доведена єдиність розв'язку оберненої задачі на компактній множині.

Рассматривается условно-корректная постановка обратной задачи теории тонкостенных систем. Доказано существование отображения множества решений обратной задачи на множество решений прямой задачи. При наличии результатов измерений и существовании неособого решения прямой задачи доказана единственность решения обратной задачи на компактном множестве.

Conditionally-correct formulation of the inverse problem of the theory of thin-walled systems is considered. The existence of the mapping set of solutions of the inverse problem on the set of solutions of direct problem is proved. The uniqueness of the solution of the inverse problem on a compact set is proved in the presence of measurement results and the existence of a nonsingular solution of the direct problem.

Ключевые слова: обратная задача, прямая задача, вариационная постановка, функционал-невязка, компактное множество.

Решение обратной задачи предполагает определение неизвестных свойств объекта исследования или процесса по его наблюдаемым косвенным характеристикам. Особенностью большинства обратных задач является их некорректность [7], которая связана либо с невозможностью обращения оператора математической модели – обратный оператор является неограниченным, либо с влиянием погрешности измерений на погрешность восстановления свойств объекта – полученные решения оказываются неустойчивыми. Для построения устойчивых решений, как правило, используется управление классическими алгоритмами решения некорректно поставленных задач (регуляризирующие алгоритмы) или условно -

© *Н.А. Гук, 2012*

корректная постановка обратной задачи, основанная на привлечении дополнительной информации об искомом решении [7].

Одним из способов условно-корректной постановки обратной задачи является ее формулировка на основе метода квазиобращения [7] как вариационной. Применение такого подхода позволяет свести обратную задачу к задаче минимизации среднеквадратического уклонения между расчетными, полученными с использованием математической модели прямой задачи, и наблюдаемыми значениями характеристик объекта [1; 5; 6].

В настоящей работе эффективность вариационной формулировки для решения обратной задачи теории оболочек обеспечивается выполнением определенных ограничений на свойства оператора прямой задачи и заданием свойств множества, на котором отыскивается решение обратной задачи.

Постановка задачи. Рассматривается обратная задача теории тонкостенных систем, в которой необходимо определить неизвестную вектор-функцию $H(X)$ по известным (измеренным) значениям деформаций оболочки в некоторых точках γ_r, расположенных на ее граничных поверхностях:

$$\sigma_{\gamma_r} = \sigma^*_{\gamma_r},\ r = \overline{1, N}, \qquad (1)$$

здесь $\sigma = \{\varepsilon_{il\,r}, \chi_{il\,r}\}$, $i, l = 1,2$ – вектор-функция, компонентами которой являются тангенциальные и изгибные деформации срединной поверхности оболочки; σ^* – измеренные значения этой же функции; N – число точек наблюдения.

В качестве неизвестных вектор-функций $H(X)$ обратной задачи теории оболочек могут выступать функции, характеризующие действующие в системе нагрузки, условия закрепления граничного контура оболочки, геометрические характеристики объекта, физико-механические и теплофизические свойства материала.

Математическая модель прямой и обратной задачи. Для определения расчетных значений деформаций $\sigma(H)\big|_{\gamma=\gamma_r} = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$ в точках γ_r поверхности используются геометрические соотношения теории оболочек:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i}\right] + B_{ij} w + \frac{1}{2} w_{,\xi_i} w_{,\xi_j};$$
$$\chi_{ij} = -\left(w_{,\xi_i}\right)_{,\xi_j};\ i, j = 1,2. \qquad (2)$$

и линеаризованные соотношения обобщенного решения, сформулированные для приращения функции перемещений $U(X,H)$ [2]:

$$(\Delta U,\Phi)_{\Psi_{t\chi}} = \int_{\Omega}\Big[(B_{kl}(H_0)\Delta w - \frac{1}{2}w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l})C_1^{ijkl}(H_0)\nabla_i\varphi_j + \\ + C_1^{ijkl}(H_0)(\varepsilon_{kl0}+\Delta\varepsilon_{kl})\big(B_{ij}(H_0)\varphi - \Delta w_{,\xi_i}\varphi_{,\xi_j}\big)\Big]d\xi_1 d\xi_2 + P(\Delta H, U_0), \qquad (3)$$

где $\Delta U(X,H)\equiv(\Delta u_1,\Delta u_2,\Delta w)$ – приращение к функции $U(X,H)$, вызванное изменением функции обратной задачи $H(X)$ на величину $\Delta H(X)$; $\Delta u_i(X,H)$ – приращения тангенциальных перемещений точек срединной поверхности оболочки в продольном и окружном направлениях; $\Delta w(X,H)$ – приращения нормальных перемещений точек срединной поверхности оболочки; ξ_1,ξ_2 – продольная и окружная координаты, $0\le\xi_1\le L$; $0\le\xi_2\le 2\pi R$; L, R – длина и радиус оболочки; $U_0(X,H_0)$ – некоторое неособое решение прямой задачи, характеризующее известное состояние оболочки; B_{ij} – кривизна срединной поверхности оболочки; $C_1^{ijkl}(H), C_2^{ijkl}(H)$ – функции, описывающие жесткость оболочки на растяжение-сжатие и изгибную жесткость; φ – комплекс, учитывающий изменение нагрузки, геометрические свойства тонкостенной системы, а также граничные условия; $\Delta\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}\big(\Delta u_{k,\xi_l}+\Delta u_{l,\xi_k}\big)+w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l}$; $\Phi(\phi(\varphi_1,\varphi_2),\varphi)$ – произвольная вектор-функция; $i,j,k,l=1,2$.

Для сравнения возможных различных деформированных состояний оболочки, формирующихся в результате оказанного внешнего воздействия, вводятся специальные энергетические пространства Ψ_χ и Ψ_t со скалярными произведениями:

$$(w_1,w_2)_{\Psi_\chi} = \int_{\Omega}\varepsilon\, C_2^{ijkl}\chi_{ij}(w_1)\chi_{kl}(w_2)d\xi_1 d\xi_2;$$

$$(\omega_1,\omega_2)_{\Psi_t} = \int_{\Omega} C_1^{ijkl}\varepsilon_{ij}(\omega_1)\varepsilon_{kl}(\omega_2)d\xi_1 d\xi_2$$

и функциональное пространство $\Psi_{t\chi}$, представляющее собой прямую сумму пространств Ψ_t и Ψ_χ ($\Psi_{t\chi}=\Psi_t\oplus\Psi_\chi$), со скалярным произведением:

$$(U_1,U_2)_{\Psi_{t\chi}} = (w_1,w_2)_{\Psi_\chi} + (\omega_1,\omega_2)_{\Psi_t}.$$

Для определения неизвестной вектор -функции $H(X)$ обратная задача формулируется в вариационной постановке и сводится к задаче минимизации целевого функционала, задающего среднеквадратическое уклонение значений деформаций $\sigma(X,H)$, вычисленных с использованием геометрических соотношений (2) путем подстановки в них значений функции перемещений, полученных из соотношения обобщенного решения (3), от значений σ^*, измеренных в точках γ_r:

$$J(H)=\rho_{L_2\Omega}(\sigma(X,H),\sigma^*),\ H\in\overline{H},\ \sigma^*\in\overline{U}. \qquad (4)$$

Тогда решение обратной задачи может быть представлено в виде:

$$H_*=\arg\inf_{H\in H}\rho_{L_2\Omega}(\sigma(X,H),\sigma^*),\ \ H\in\overline{H},\ \sigma^*\in\overline{U},$$

где $\rho_{L_2\Omega}(\sigma(X,H),\sigma^*)$ – функционал-невязка; $\overline{H}$ – область изменения неизвестных функций обратной задачи, которая определяется их физическим смыслом; $\overline{U}$ – множество возможных деформируемых состояний оболочки.

Для обеспечения корректности решения сформулированной обратной задачи теории оболочек необходимо:

1) исследовать вопрос о непрерывности зависимости решения прямой задачи $\sigma(H)=\{\varepsilon_{ij},\chi_{ij}\}^T$ от решения обратной задачи $H(X\in\overline{H})$;

2) определить множества $\overline{U}$ и $\overline{H}$, на которых отыскиваются решения прямой и обратной задач;

3) показать, что из сходимости последовательности возможных деформированных состояний оболочки к результату наблюдений ($\rho_{L_2\Omega}(\sigma(X,H),\sigma^*)\to 0$) следует сходимость последовательности возможных решений обратной задачи к решению обратной задачи ($\rho_{L_2\Omega}(H,H_*)\to 0$).

Обоснование корректности вариационной формулировки обратной задачи теории оболочек. Будем предполагать, что для нормы приращения неизвестной функции $H(X)$ в пространстве Соболева $W_{2\Omega}^1$ выполняется соотношение [2]

$$\|\Delta H(X)\|_{W_{2\Omega}^1}\le\mu;\quad \mu<1, \qquad (5)$$

где $\Delta H(X) = H(X) - H_0(X)$; $H_0(X)$ – фиксированная функция неизвестных обратной задачи, при которой решение прямой задачи $U_0(X, H_0)$ является неособым решением.

Для исследования непрерывности зависимости решения прямой задачи от решения обратной задачи $H(X)$ определим билинейную форму, соответствующую обобщенному решению для приращения $\Delta U(X, H)$, следующим образом

$$(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi) = (P, \Phi), \tag{6}$$

где $A(U_0, \Delta H)\Delta U = (\Delta U, \Phi)_{\Psi_{t\chi}} - (Q(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi)_{\Psi_{t\chi}}$;

$$(Q(U_0, H_0)\Delta U, \Phi)_{\Psi_{t\chi}} = \int_\Omega \left[C_1^{ijkl}(\varepsilon_{kl0} + \Delta\varepsilon_{kl})\left(B_{ij}\varphi - \Delta w_{,\xi_i}\varphi_{,\xi_j}\right)\right] +$$

$$+ \left(B_{kl}\Delta w - \frac{1}{2} w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l} \right) C_1^{ijkl}\nabla_i\varphi_j d\xi_1 d\xi_2; \tag{7}$$

$P = P(U_0, \Delta H)$.

Учитывая ограниченность функционала, соответствующего обобщенному решению, в силу теоремы Риса [3], сформулируем линеаризованное операторное уравнение, решение которого характеризует состояние оболочки в окрестности известного неособого решения $U_0(X, H_0)$

$$A(U_0, \Delta H)\Delta U = P \tag{8}$$

с соответствующими граничными условиями, накладываемыми на ΔU.

Используя результаты работы И.И. Воровича [2] определим порядок приращения неизвестной функции $\Delta U(X, H_0 + \Delta H)$ по сравнению с известным неособым решением $U_0(X, H_0)$. На основании теорем вложения Соболева и неравенства Гельдера оценим слагаемые в правой части соотношения (7) и получим оценку для оператора $A(U_0, \Delta H)$ в (8) в виде:

$$\left|(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi)\right| \le \nu \left\|\Delta U\right\|_{\Psi_{t\chi}} \left\|\Phi\right\|_{\Psi_{t\chi}}. \tag{9}$$

Кроме того, поскольку $U_0(X, H_0)$ – неособое решение, то интегро-дифференциальное уравнение (3), описывающее обобщенное решение для

приращения, не имеет собственных векторов [2], поэтому справедлива оценка:

$$\left|(A(U_0,\Delta H)\Delta U,\Phi)\right| \geq V\left\|\Delta U\right\|_{\Psi_{t\chi}}\left\|\Phi\right\|_{\Psi_{t\chi}}. \qquad (10)$$

Отметим, что ввиду произвольности выбора функции Φ билинейная форма (6), связанная с оператором $A(U_0,\Delta H)$, является симметрической. Учитывая оценки (9), (10), билинейная форма (6) является коэрцитивной.

Для линейного самосопряженного коэрцитивного оператора $A(U_0,\Delta H)$, удовлетворяющего условиям

$$V\left\|\Delta U\right\|^2_{\Psi_{t\chi}} \leq \left(A(U_0,\Delta H)\Delta U,\Delta U\right) \leq v\left\|\Delta U\right\|^2_{\Psi_{t\chi}},\ v,V = const,\ v > V > 0, \qquad (11)$$

определим множество

$$\Lambda(V,v) = \left\{A(U_0,\Delta H) \mid A(U_0,\Delta H): \Psi_{t\chi} \to \Psi^{-1}_{t\chi};\ V\left\|\Delta U\right\|^2_{\Psi_{t\chi}} \leq \left(A(U_0,\Delta H)\Delta U,\Delta U\right) \leq v\left\|\Delta U\right\|^2_{\Psi_{t\chi}}\right\}.$$

Если, аналогично [4] определить последовательность линейных коэрцитивных операторов $A^m(U_0,\Delta H)$ такую, что $\Psi_{t\chi} \to \Psi^{-1}_{t\chi}$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\left(g_1, A^{m^{-1}}(U_0,\Delta H)g_2\right) = \left(g_1, A^{-1}(U_0,\Delta H)g_2\right)$, то указанная последовательность сходится к линейному коэрцитивному оператору $A(U_0,\Delta H)$.

Рассмотрим последовательность систем уравнений

$$A^m(U_0,\Delta H)\Delta U = P, \qquad (12)$$

которая сходится к системе (8), если для любого $P \in \Psi^{-1}_{t\chi}$ последовательность решений задач (12) в пространстве $\Psi_{t\chi}$ сходится к решению задачи (8).

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задана последовательность систем уравнений вида (12), принадлежащая классу* $\Lambda(V,v)$, *тогда последовательность операторов, порождающая возможные решения прямой задачи, сходится к оператору прямой задачи*.

Приближенное решение $\Delta U_n(H)$ прямой задачи будем определять из итерационного процесса(n – номер шага итерационного процесса), сформулированного для некоторого состояния оболочки в виде:

$$A(U_0, \Delta H)\Delta U_n(H) = P\,. \tag{13}$$

При фиксированном значении n оператор $A(U_0, \Delta H)$ уравнения (13) будет линейным и коэрцитивным.

Полученные оценки (9), (10) доказывают корректность введенного интегро-дифференциального соотношения (3), описывающего обобщенное решение для приращения $\Delta U(X, H_0 + \Delta H)$, поскольку правая часть (7) является линейным ограниченным функционалом в пространстве $\Psi_{t\chi}$ относительно вектор-функции $\Phi(\phi(\varphi_1, \varphi_2), \varphi)$. Кроме того, приращение к решению прямой задачи ΔU непрерывно зависит от приращения к решению обратной задачи ΔH.

Рассмотрим последовательность возможных решений обратной задачи $\{H^m\} \subset \overline{H}$, характеризующую возможные m-ые состояния оболочки. Определим структуру множества, на котором будем отыскивать решение обратной задачи, в виде:

$$\overline{H} = \left\{ H(X):\ A \le H(X) \le B; \quad a \le \frac{\partial H(X)}{\partial U_l} \le b; \quad \frac{\partial^2 H(X)}{\partial U_l^2} \ge 0 \right\}, \tag{14}$$

где a, b, A, B – заданные константы. Функции, принадлежащие этому множеству, являются равномерно ограниченными, монотонными, выпуклыми, следовательно, множество является компактом. Согласно известному результату о компактности [7] имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Из любой последовательности $\{H^m\} \subset \overline{H}$ компактного множества можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность, которая сходится к некоторому элементу $H_* \in \overline{H}$.

Рассмотрим последовательность систем уравнений, определяющих последовательность приближенных решений прямых задач, порожденных последовательностью возможных решений обратных задач, в виде:

$$A^m(U_0,\Delta H^m)\Delta U_n(H^m)=P, \qquad (15)$$

где $H^m(X)=H_0(X)+\Delta H^m(X)$, тогда справедлива теорема.

Теорема 2. *Если* $\{H^m\}\subset\overline{H}$ *– произвольная последовательность элементов компакта* $\overline{H}$ *в* $L_{2\Omega}$, *то при* $\{H^m\}\to H_*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *последовательность приближенных решений* $\{\Delta U_n(H^m)\}$ *задачи (15) в* $\Psi_{t\chi}$ *сходится к приближенному решению прямой задачи* $\Delta U_n(H_*)$. *Кроме того, последовательность* $\{\sigma_n(H^m)\}$ *порожденная последовательностью приближенных решений прямой задачи, в пространстве* $\Psi_{t\chi}$ *сходится к элементу* $\sigma_n(H_*)$.

Доказательство. Оператор $A^m(U_0,\Delta H^m)\in\Lambda(V,\nu)$ при условии, что $\{H^m\}\subset\overline{H}$ для $\forall m=1,2,3,\ldots$. С другой стороны, поскольку $\overline{H}$ является компактным множеством, то существует элемент $H_*\in\overline{H}$, такой, что $\{H^m\}\to H_*$.

Тогда из теоремы 1 следует, что последовательность операторов $A^m(U_0,\Delta H^m)\Delta U_n(H^m)$ сходится к оператору $A(U_0,\Delta H^m)\Delta U_n(H_*)$. Это означает сходимость $\{\Delta U_n(H^m)\}\to\Delta U_n(H_*)$ в $\Psi_{t\chi}$; сходимость $\{\sigma_n(H^m)\}\to\sigma_n(H_*)$ в $\Psi_{t\chi}$. Теорема доказана.

Для $\forall g(X)\in L_{2\Omega}$ рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega\{\sigma(H_*)-\sigma_n(H^m)\}g(X)d\Omega=$$
$$\int_\Omega\{\sigma(H_*)-\sigma_n(H_*)\}g(X)d\Omega+\int_\Omega\{\sigma_n(H_*)-\sigma_n(H^m)\}g(X)d\Omega. \qquad (16)$$

Первый интеграл правой части (16) стремится к нулю при $n\to\infty$, поскольку имеет место сходимость последовательности $\sigma_n(H_*)\to\sigma(H_*)$ в норме пространства $\Psi_{t\chi}$ при $n\to\infty$. Второй интеграл стремится к нулю в силу теоремы 2.

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{H^m\} \subset \overline{H}$. *Тогда*:

1. $\exists H_* \in \overline{H}$, *такое, что* $\{H^m\} \to H_*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$;
2. *последовательность возможных решений прямой задачи* $\{\Delta U(H^m)\}$ *при* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *в норме пространства* Ψ_{α} *сходится к решению прямой задачи* $\Delta U(H_*)$;
3. *последовательность приближенных значений функции* $\{\varphi(H^m)\}$, *порожденная последовательностью решений обратной задачи* H^m, *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *сходится к элементу* $\sigma(H_*)$, *отвечающему решению обратной задачи, т. е.* $\{\varphi(H^m)\} \to \sigma(H_*)$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$;
4. *последовательность приближенных значений функции* $\{\sigma(H^m)\}$, *вычисленных в точках наблюдений* γ_j, *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *сходится к измеренным значениям* σ^*, *т. е.* $\sigma(H^m) \to \sigma^*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$.

Далее перейдем к исследованию свойств функционала (4)В [2] показано, что функционал обобщенного решения (3) является непрерывным, следовательно, и функционал, сформулированный в (4), будет являться непрерывным.

Теорема 4. *Пусть множество* $\overline{H}$ *введено соотношением (14). Тогда функционал_невязка обратной задачи, определенный в (4), является непрерывным, т. е. если последовательность* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *сходится к элементу* $H_* \in \overline{H}$, *то числовая последовательность* $\{\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)\}$ *сходится к элементу* $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H_*),\sigma^*)$.

Исследуем вопрос о существовании решения задачи минимизации функционала $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)$ на множестве $\overline{H}$. Учитывая, что правая часть интегро_дифференциального тождества (3), описывающего обобщенное решение прямой задачи для приращения, является линейным ограниченным функционалом, можно утверждать, что функционал обобщенного решения, а, следовательно, и функционал $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)$ являются конечными.

С другой стороны, поскольку множество $\overline{H}$ является компактным множеством, то в соответствии с теоремой Вейерштрасса [3] имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *При выполнении условий теоремы 4 задача минимизации функционала* $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)$ *на множестве* $\overline{H}$ *имеет, по крайней мере, одно решение, и любая минимизирующая последовательность сходится на множестве*

$$H = \left\{ H^m \in \overline{H} \mid \rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H_*),\sigma^*) = \min_{H\in H} \rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*) \right\}$$

в норме пространства $L_{2\Omega}$.

Далее покажем, какой точности приближения к искомому решению обратной задачи можно достичь при минимизации функционала (4).

Рассмотрим операторное уравнение, описывающее обратную задачу

$$Z\sigma(H) = \sigma^*, \qquad H \in \overline{H}_k,\ \sigma^* \in \overline{U}. \tag{17}$$

Здесь оператор Z задает отображение элемента $H \in \overline{H}$ на элемент $\sigma^* \in \overline{U}$. Покажем, что отображение, даваемое оператором Z, является взаимно однозначным.

Лемма 2. Пусть правая часть операторного уравнения (17) задана. Тогда отображение $Z : \overline{H} \to \overline{U}$ является взаимно однозначным, здесь $\overline{U} = Z\overline{H}$.

Доказательство. Учитывая геометрические соотношения теории оболочек (2) можно утверждать, что операторы ε_{ij}, χ_{ij} являются однородными операторами, действующими в пространстве $\Psi_{t\chi}$, относительно компонент вектор-функции перемещений $U(X,H)$.

Следовательно, если взять различные функции H_1, H_2 ($H_1 \neq H_2$), то учитывая геометрические соотношения теории оболочек, можно утверждать, что $\varepsilon_{ij}(H_1) \neq \varepsilon_{ij}(H_2)$ эквивалентно тому, что $ZH_1 \neq ZH_2$. Следовательно, при отображении $Z : \overline{H}_k \to \overline{U}$ компоненты тензора тангенциальной деформации, соответствующие функциям перемещений $U(H_1)$ и $U(H_2)$, отличны друг от друга, а значит, отображение $Z : \overline{H} \to \overline{U}$ является взаимно однозначным. Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения проведем с использованием топологической леммы [7].

Лемма 3 [7]. Пусть метрическое пространство $\overline{H}$ отображается на метрическое пространство $\overline{U}$, и элемент $U_* \in \overline{U}$ является образом элемента $H_* \subset \overline{H}$ при этом отображении. Тогда, если отображение $\overline{H} \to \overline{U}$ непрерывно и взаимно однозначно, а множество $\overline{H}$ компактно, то обратное отображение множества $\overline{U}$ на множество $\overline{H}$ ($\overline{U} \to \overline{H}$) также непрерывно.

На основании лемм 1, 2, 3, а также теоремы 4 сформулируем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть правая часть операторного уравнения (17) задана, а последовательность* $\{\Xi_n\}$, *где* $\Xi_n = ZH^m$, *сходится к некоторому пределу* Ξ_*, *где* $\Xi_* = ZH_*$. *Тогда последовательность* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *сходится к элементу* $H_* \in \overline{H}$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$. *Здесь предполагается, что* $\Xi_n \in \overline{U}$, $\Xi_* \in \overline{U}$, $\overline{U} = Z\overline{H}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\Xi_n\}$, где $\Xi_n = ZH^m$, которая сходится к некоторому пределу $\Xi_* = ZH_*$.

Следовательно,

$$\exists \delta_n > 0 \quad \rho(\Xi_n, \Xi_*) \equiv \inf_{H' \in H_k} |\Xi_n - \Xi_*| < \delta_n \tag{18}$$

и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Предположим обратное: пусть выполняется условие (18), в то время когда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \rho(H^m, H_*) = \left\| H^m - H_* \right\|_{L_{2\Omega}} \geq \varepsilon_0, \ \forall n. \tag{19}$$

Так как множество $\overline{H}$ является компактом, то из последовательности $\{H^m\} \subset \overline{H}$ можно выбрать подпоследовательность $\{H_k^m\} \subset \{H^m\} \subset \overline{H}$, которая сходится к некоторому элементу $H \in \overline{H}$, причем $H \neq H_*$ по предположению (18).

Обозначим $ZH_k^m = \Xi_k$. Так как $\{H_k^m\} \subset \{H^m\}$, то $\{\Xi_k\} \subset \{\Xi_n\}$, следовательно, подпоследовательность $\{\Xi_k\}$ также сходится к пределу $\Xi_* = ZH_*$:

$$\exists \tilde{\delta}_n > 0 \quad \rho(\Xi_n, \Xi_0) < \tilde{\delta}_n, \ \tilde{\delta}_n \to 0, \ n \to \infty. \tag{20}$$

Тогда из соотношений (18), (20) следует, что $ZH_* = \Xi_* = ZH$.

С другой стороны, в силу взаимной однозначности отображения $Z : \overline{H} \to \overline{U}$ при $H_* \neq H$ имеем $ZH_* \neq ZH$. Полученное противоречие приводит к тому, что $H_* = H$. Теорема доказана.

На основании этой теоремы можно сделать вывод, что при минимизации функционала (4) возможно сколь угодно близко приблизиться именно к решению обратной задачи H_*.

На основании приведенных результатов можно сформулировать следующее окончательное утверждение.

Теорема 7. *Если результаты наблюдения* σ^* *известны, то обратная задача теории оболочек имеет единственное решение, если соответствующая прямая задача имеет неособое решение. Множество* $\overline{H}$ *является классом корректности обратной задачи теории оболочек.*

Выводы. Обратная задача теории оболочек допускает формулировку в вариационной постановке. Показано, что решение прямой задачи непрерывно зависит от решения обратной задачи; установлена непрерывность функционала обратной задачи, сформулированного для приращения неизвестной функции; показано существование решения задачи минимизации функционала невязки; описаны множества, на которых решения прямой и обратной задач являются устойчивыми.

Библиографические ссылки

1. **Ватульян А.О.** О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел / А.О. Ватульян // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 422, № 2. – С. 182-184.
2. **Ворович И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М., 1989. – 373 с.
3. **Ворович И.И.** Функциональный анализ / И.И. Ворович, Л.П. Лебедев. – М., 2000. – 316 с.
4. **Гасанов А.И.** Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов / А.И. Гасанов // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1-32.
5. **Ободан Н.И.** Идентификация теплофизических свойств твердых тел при неоднородном нагреве с использованием экспериментальной информации / Н.И. Ободан, А.Г. Пацюк, Н.А. Гук // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Мат. моделирование физ. процессов». – 2011. – Вып. 1. – С. 81-89.
6. **Постнов В.А.** Использование метода Ньютона для решения задач идентификации балочных систем / В.А. Постнов, Г.А. Тумашик // Проблемы прочности и пластичности. – 2006. – № 68. – С. 86-94.
7. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М., 1979. – 386 с.

Надійшла до редколегії 18.06.2012

УДК 517:519.816

В.А. Ивченко[1]
Гос. агентство по вопросам науки, инноваций и информатизации Украины

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ АГРАРНОГО СЕКТОРА АР КРЫМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Запропоновано методологію адаптивного стратегічного планування розвитку складної економічно-соціально-політичної системи. Використовуючи цю методологію та експертні судження, знайдено найбільш важливі політики основних акторів для зближення поточного стану аграрного сектору з бажаним «модернізаційним» сценарієм розвитку АР Крим.

Предложена методология адаптивного стратегического планирования развития сложной экономическо-социально-политической системы. Используя эту методологию и экспертные суждения, найдены наиболее важные политики органов исполнительной власти АР Крым, центральных органов государственной власти краины и хозяйствую их суб ектов (бизнеса) для сближения теку его состояния аграрного сектора с желаемым «модернизационным» сценарием развития АР Крым.

Methodology of adaptive strategic planning of development of complex economic-social-political system is proposed. The most important policies of main actors for convergence current state of agrarian sector with desired «modernizational» scenario of the Crimea Autonomous Republic development were founded using this methodology and expert judgments.

Ключевые слова: сценарий, планирование, аграрный сектор Автномной Республики Крым, политика, метод анализа иерархий.

Введение. В соответствии со Стратегией экономического и социального развития Автономной Республики (АР) Крым на 2011 – 2020 годы [1], основной целью развития АР Крым является достижение устойчивого роста уровня и качества жизни на основе сбалансированной социально-экономической системы инновационного типа, достижение экологической безопасности, динамичного развития экономики и реализацию стратегических интересов Украины в Черноморском регионе.

© *В.А. Ивченко, 2012*

Достижение поставленной цели развития АР Крым требует проведения долгосрочного планирования, которое в условиях неопределенности имеет некоторые особенности, связанные с тем, что некоторые факторы неизвестны на момент принятия решения, а проявляются на протяжении будущих периодов времени. Поэтому возникает необходимость в использовании инструментария адаптивного стратегического планирования – процесса проектирования наиболее вероятного исследовательского сценария на желаемый сценарий [2]. Такой процесс позволяет выявить знания для приближения так называемого исследовательского будущего к желаемому. Обратный процесс планирования направлен на определение приоритетов желаемых состояний изучаемой системы, возможностей и препятствий, выбор эффективных политик для достижения желаемого будущего.

В данной работе предлагается методология решения задачи адаптивного стратегического планирования развития аграрного сектора АР Крым с использованием метода анализа иерархий [2 – 8].

Традиционный метод анализа иерархий (МАИ) разработан для структуризации задачи принятия решений в виде иерархии и определения весовых коэффициентов элементов этой иерархии. Таким образом, в результате определяются коэффициенты важностей критериев (целей) решений, веса и приоритеты альтернативных вариантов решений.

Позже МАИ стал применяться для решения задач распределения ресурсов, оценивания соотношения доходы_затраты, планирования [9].

МАИ имеет три важнейшие функции, которые состоят в структуризации сложности окружающего мира, осуществлении измерений важности элементов иерархии в шкале отношений и синтезе (агрегировании) весов по уровням иерархии.

С этими функциями связаны три принципа МАИ: декомпозиция задачи принятия решений на уровни, сравнительные суждения, иерархическая композиция. В соответствии с принципом декомпозиции проблема принятия решений представляется в виде доминантной иерархии факторов, влияющих на главную цель принятия решения. Уровни иерархии образуют критерии, подкритерии, цели, подцели, политики. На последнем уровне доминантных иерархий в большинстве практических задач находятся альтернативы решений.

В соответствии с принципом сравнительных суждений, основной информацией для определения преобладания одного элемента иерархии над другим являются экспертные оценки. Элементы одного уровня иерархии попарно сравниваются экспертом относительно их влияния на общий элемент соседнего родительского уровня. Используя специальную фундаментальную шкалу, эксперт определяет вербальную оценку интенсивности

преобладания одного элемента над другим элементом того же уровня. На основе этого принципа вычисляются веса элементов иерархии, приоритеты альтернатив решений.

Согласно принципа иерархической композиции рассматриваются полные и неполные иерархии и строится аддитивная функция веса элемента иерархии относительно ее вершины (главной цели принятия решения).

В основе МАИ лежат несколько аксиом. Аксиома однородности означает, что сравниваемые элементы не должны отличаться между собой более чем на порядок величины. В противном случае будут иметь место значительные ошибки в суждениях экспертов, уменьшение точности, увеличение несогласованности оценок.

Согласно аксиоме обратной симметричности, если $P_C(A,B)$ – результат парного сравнения элементов A и B относительно общего для них родительского элемента (свойства) C и означает во сколько раз больше элемент A владеет свойством по сравнению с элементом B, то $P_C(A,B)=1/(P_C(A,B))$.

Аксиома независимости элементов иерархии от элементов нижних уровней требует представления проблемы в виде иерархии без обратных связей и петель.

МАИ был использован для решения задач оценивания направлений развития социально -экономических систем [7] и приоритетных технологий по направлениям научно -технологического развития [7, 8]. Рассмотрим постановку задачи адаптивного стратегического планирования сложной системы.

1. Постановка задачи

Дано:

- главная цель принятия решений (фокус);
- множество факторов, влияющих на разные аспекты исследуемой проблемы в некоторый момент времени;
- предварительные сценарии.

Необходимо определить:

- субъективные вероятности предварительных сценариев (оценивание исследовательского будущего);
- приоритеты политик акторов для достижения желаемого сценария.

2. Решение задачи с помо ью прямого и обратного процессов анализа иерархий

В данной работе решение задачи оценивания вероятностей предварительных сценариев и определения приоритетов политик акторов для дос-

тижения желаемого сценария предлагается осуществлять с использованием итерационного процесса последовательного применения прямого и обратного процессов МАИ. Этот итерационный процесс состоит из следующих этапов:

1 Прямой процесс МАИ:

1.1 Построение доминантной иерархии прямого процесса, которая содержит следующие уровни:

1.1.1 Вершина – это общая цель (фокус).

1.1.2 Факторы, влияющие на достижение общей цели (экономические, технические, социальные, политические и др.).

1.1.3 Акторы – это лица, влияющие на реализацию общей цели.

1.1.4 Цели акторов.

1.1.5 Политики достижения целей акторов.

1.1.6 Предварительные сценарии и результаты реализаций целей акторов.

1.2 Оценивание иерархии прямого процесса, используя модифицированные МАИ [4], в результате – определение субъективных вероятностей предварительных сценариев:

1.2.1 Вычисление коэффициентов относительных важностей факторов, акторов, их целей.

1.2.2 Вычисление эффективностей политик акторов.

1.2.3 Вычисление вероятностей возможных результатов/предварительных сценариев.

2 Обратный процесс МАИ:

2.1 Построение иерархии обратного процесса, в результате – определение политик достижения желаемого сценария. Иерархия обратного процесса содержит следующие уровни:

2.1.1 Обобщенный желаемый сценарий (фокус).

2.1.2 Частные желаемые сценарии.

2.1.3 Проблемы и возможности.

2.1.4 Акторы.

2.1.5 Цели акторов.

2.1.6 Политики акторов, влияющие на реализацию желаемого будущего.

2.2 Оценивание иерархии обратного процесса, используя модифицированные МАИ, в результате – определение приоритетов политик:

2.2.1 Вычисление коэффициентов относительных важностей частных желаемых сценариев.

2.2.2 Вычисление коэффициентов относительных важностей проблем, возможностей, акторов.

2.2.3 Вычисление приоритетов целей и политик акторов.

3 *Переход на п.1. Построение второго прямого процесса*:

3.1 Построение иерархии второго прямого процесса с добавлением на уровень политик наиболее приоритетных политик, найденных на этапе 2.2.3 первого обратного процесса.

3.2 Оценивание иерархии второго прямого процесса, начиная с уровня целей, используя модифицированные МАИ:

3.2.1 Вычисление эффективностей целей и политик акторов.

3.2.2 Вычисление вероятностей возможных результатов/ предварительных сценариев.

4 Сравнение вероятностей возможных результатов/ предварительных сценариев второго прямого процесса, найденных на этапе 3.2.2, и приоритетов желаемых сценариев, найденных на этапе 2.2.1. Переход на этап 2 или конец.

Рассмотрим как описанная выше методология может быть применена к определению субъективных вероятностей предварительных сценариев и выбору приоритетных политик достижения желаемого сценария устойчивого развития аграрного сектора АР Крым.

3. Оценивание сценариев и выбор политик достижения желаемого сценария устойчивого развития аграрного сектора АР Крым

В соответствии со Стратегией экономического и социального развития АР Крым на 2011 – 2020 годы, утвержденной Постановлением Верховного Совета АР Крым 22 декабря 2010 года №121-6/10 [1], одним из наиболее важных направлений социально-экономического развития АР Крым (после реформирования санаторно-курортного и туристического сектора) есть развитие ее аграрного сектора.

Лиц, влияющих на принятие решения, и лиц, в интересах которых принимаются решения, объединяют под общим названием акторов. В задаче оценивания сценариев реформирования аграрного сектора АР Крым целесообразно рассматривать следующих акторов:

- центральные органы государственной власти Украины (Гос. власть Украины);
- органы исполнительной власти и органы местного самоуправления АР Крым (Исп. власть АР Крым);
- хозяйствующие субъекты, а также региональные отраслевые ассоциации и объединения предпринимателей и хозяйствующих субъектов (Бизнес);
- население, рекреанты – пользователи продукции аграрного сектора.

Для развития АР Крым в общем и ее аграрного сектора, в частности, возможны следующие предварительные *сценарии* [1]:

- «инерционный»: сохранение «status quo» ;
- «мобилизационный»: ставка на внешние источники развития;
- «модернизационный»: успешный Крым в успешной Украине.

Мы не приводим здесь детальное описание каждого из сценариев, его можно найти в [1].

Наиболее желателен «модернизационный» сценарий, он базируется на эффективном использовании существующего в АР Крым ресурсного потенциала на принципах интенсивного типа экономического роста. Этот сценарий предполагает повышение конкурентоспособности АР Крым, социально_сбалансированную и экологически ориентированную политику опережающего развития, создание на территории АР Крым комфортной и безопасной среды для проживания.

Рассмотрим решение задачи оценивания сценариев и выбора политик достижения желаемого сценария развития аграрного сектора АР Крым, используя приведенную выше методологию последовательного применения прямого и обратного процессов МАИ. В соответствии с этой методологией на первом этапе строится и оценивается иерархия прямого процесса при существующих на текущий момент времени мотивациях акторов и наявных ресурсах. Вычисляются важности целей акторов, эффективности политик акторов и в результате – оценки вероятностей сформулированных сценариев при полученных важностях целей и эффективностях политик акторов.

3.1. Построение иерархии первого прямого процесса. Иерархия прямого процесса представляет собой доминантную иерархию в виде дерева, вершиной которого есть общая цель или фокус, на следующем уровне расположены факторы, влияющие на достижение этой общей цели, на последующих уровнях – акторы, цели акторов, политики достижения целей акторов и возможные сценарии.

В данной задаче фокусом есть оценивание будущего аграрного сектора АР Крым. Цели и политики каждого из акторов приведены на рис.1.

3.2. Оценивание иерархии первого прямого процесса по МАИ. Построенная иерархия прямого процесса оценивается по модифицированным МАИ:

- экспертами выполняются парные сравнения элементов на одном уровне иерархии относительно каждого элемента соседнего более высокого уровня, используя фундаментальную шкалу относительной важности (табл.1); формируются положительные обратно симметричные матрицы парных сравнений,
- вычисляются локальные веса элементов одного уровня иерархии, используя несколько разных методов,

- вычисляются несколько показателей согласованности матриц парных сравнений,
- выполняется синтез (агрегирование) локальных весов элементов всех уровней иерархии, вычисляются глобальные веса элементов иерархии, используя несколько разных методов.

По результатам экспертного оценивания в МАИ формируются положительные обратно симметричные матрицы парных сравнений.

Квадратные матрицы $A=(a_{ij})$, для которых $a_{ij}>0$, $a_{ij}=1/a_{ji}$, $i,j=1,...,n$, называются положительными *обратно симметричными матрицами*.

Положительные обратно симметричные матрицы $A=(a_{ij})$, для элементов которых выполняется соотношение $a_{ik}=a_{ij}a_{jk}$ для всех $i,j=1,...,n$ называются *согласованными*.

При сравнении явлений, для которых предусмотрена сформированная с помощью приборов система измерений (например, при измерении весов грузов, длин изделий и т. д.), элементами МПП будут отношения измеренных величин (веса, длины и т. д.). В случае слабоструктурированных задач, для которых отсутствует в полном объеме количественная информация, необходимо привлечение экспертных суждений про относительную важность элементов иерархии. Эксперты предоставляют оценки в вербальном виде, затем эти суждения выражаются в числовой форме по специальной фундаментальной шкале относительной важности (табл.1) [6]. Выбор этой шкалы обусловлен следующими соображениями:

- чем больше количество градаций шкалы, тем больше точность экспертной оценки;
- поскольку провести одновременные точные сравнения более чем девяти объектов затруднительно для человека (закон Миллера 7±2), то чтобы различить объекты достаточно девяти градаций.

Эффективность фундаментальной шкалы доведена теоретически сравнением со многими другими шкалами [2].

При заполнении матрицы парных сравнений определяется насколько один элемент важнее другого. При сравнении элемента с самим собой отношение равно единице. Если первый элемент важнее второго, то используется целое число со шкалы, в противном случае используется обратная величина. Таким образом, обратные между собой величины заносятся в симметричные позиции матрицы: если $a_{ij}=\alpha$ то $a_{ji}=1/\alpha$, $\alpha\neq 0$. Поэтому для заполнения матриц парных сравнений необходимо выполнить $n(n-1)/2$ суждений, где n - число сравниваемых элементов.

Таблица 1

Фундаментальная шкала

Интенсивность важности	Вербальная оценка
1	Одинаковая важность
3	Слабое превосходство
5	Сильное превосходство
7	Очень сильное превосходство
9	Абсолютное превосходство
2,4,6,8	Промежуточные оценки

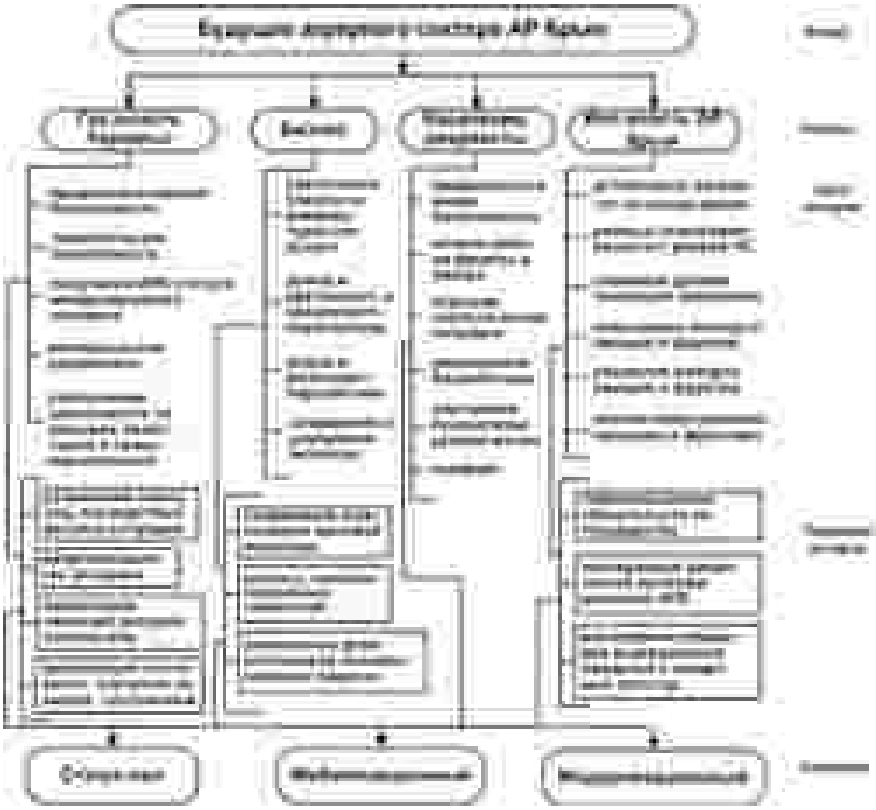


Рис.1. Иерархия первого прямого процесса

Для выполнения парных сравнений элементов иерархии первого прямого процесса (см. рис.1) эксперту предъявлялись опросные формы (рис.2). Например, на уровне акторов эксперту ставились вопросы вида: «Какой актор имеет большее влияние на перспективные методы развития аграрного сектора АР Крым? Какова степень преобладания актора слева над актором справа (используйте фундаментальную шкалу)?». Ответы экспертов отмечены на опросной форме.

Матрица парных сравнений, построенная по ответам экспертов (см. рис.2), а также вычисленные по этой матрице локальные веса акторов представлены в табл.2.

Локальный вес элемента иерархии показывает важность этого элемента относительно непосредственного родительского элемента в иерархии.

Особенность предложенного выше подхода с прямым и обратным процессами состоит в том, что для вычисления локальных весов используются несколько методов. Эти методы будут кратко описаны ниже.

Аналогичные формы предъявлялись эксперту для парных сравнений целей каждого актора и парных сравнений политик относительно каждой цели. При этом, ставились вопросы вида: «Какой является взаимосвязь между 1) «продовольственной» и 2) «экологической безопасностью» с точки зрения органов государственной власти Украины ?». И так для каждой пары целей и для каждого актора.

При сравнении политик бизнеса, например, относительно достижения цели «доход в долгосрочной перспективе», ставились вопросы вида: «Какая из политик бизнеса 1) «использование экологически безопасных технологий» или 2) «увеличение доли источников возобновляемой энергии» больше влияет на достижение цели «доход в долгосрочной перспективе? Какова степень преобладания одной политики над другой?»

Мы не будем приводить здесь все матрицы парных сравнений, которые были построены для иерархии первого прямого процесса. Перейдем к этапу вычисления локальных весов элементов этой иерархии и анализу полученных результатов.

На этапе вычисления локальных весов элементов иерархии предлагается использовать несколько методов. Обозначим n количество попарно сравниваемых элементов.

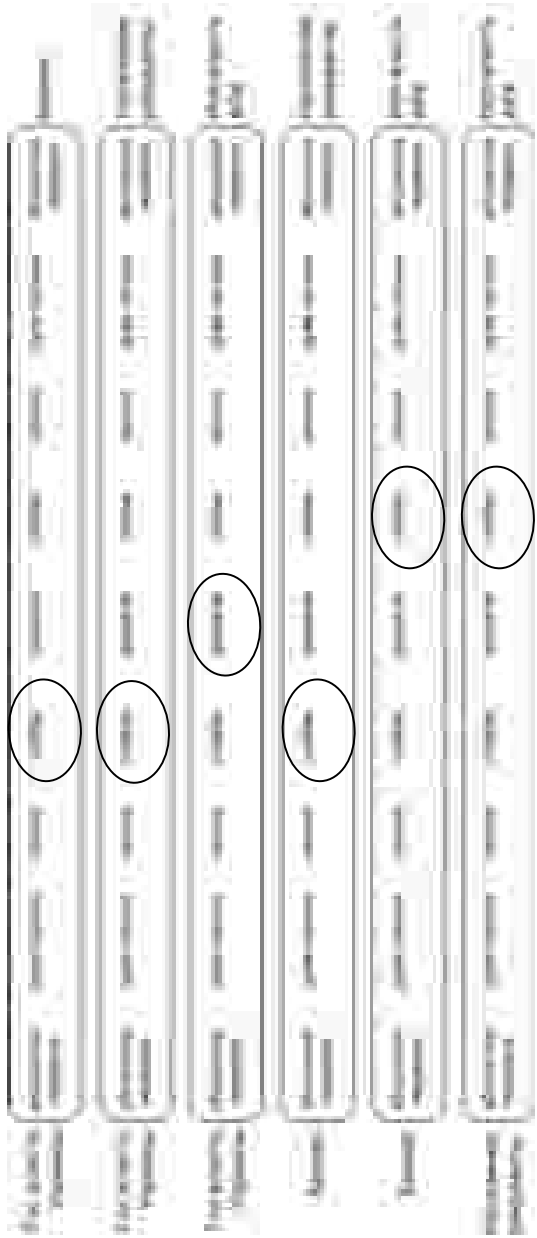


Рис.2. Опросные формы для выполнения парных сравнений акторов иерархии первого прямого процесса

Таблица 2

Матрица парных сравнений акторов и их локальные веса

	Матрица парных сравнений				Локальные веса		
	Гос.власть Украины	Бизнес	Население, рекреанты	Исп.власть АР Крым	Метод гл.собств. вектора	Метод геометр. средней	Метод арифм. нормализац.
Гос.власть Украины	1	3	3	1	0,368	0,371	0,375
Бизнес	1/3	1	3	1/3	0,169	0,163	0,136
Население, рекреанты	1/3	1/3	1	1/3	0,096	0,094	0,100
Исп.власть АР Крым	1	3	3	1	0,368	0,371	0,375

Метод главного собственного вектора. Вектор локальных весов w есть главный собственный вектор матрицы парных сравнений (МПС) A, т. е. удовлетворяет уравнению

$$Aw=\lambda_{\max} w,$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное число МПС.

Отношение согласованности МПС

$$CR = CI / MRCI,$$

где $CI = (\lambda_{\max} - n)/(n -)$ – индекс согласованности, $MRCI$ – среднее значение индексов согласованности для случайным образом заполненных МПС (табличная величина).

МПС согласована тогда и только тогда когда $CR = CI = 0$. Если $CR \le CR^{порог}$, то несогласованность МПС A допустима и экспертным оценкам можно доверять.

Метод геометрической средней по строкам. Элемент вектора локальных весов w вычисляется по формуле

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}, \; i = 1,\ldots,n.$$

Геометрический индекс согласованности МПС

$$GCI = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ i} \left(\ln e_{ij}\right)^2 / \left((n-1)(n-2)\right),$$

где $e_{ij} = a_{ij} w_j / w_i$, величины w_i, w_j вычисляются по методу геометрической средней.

МПС согласована тогда и только тогда когда $GCI = 0$. Если $GCI \le GCI^{порог}$, то несогласованность МПС A допустима.

Метод арифметической нормализации. Элемент вектора локальных весов w вычисляется по формуле

$$w_j = \left(s_j\right)^{-1},\ s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ j = 1,...,n.$$

Гармоническое отношение согласованности МПС

$$HCR = HCI / MRHCI,$$

где $HCI = (HM - n)(n+1)/(n(n-1))$ – гармонический индекс согласованности, $HM = n\left(\sum_{j=1}^{n}(s_j)^{-1}\right)^{-1}$ – средняя гармоническая величин s_j, $MRHCI$ – среднее значение индексов HCI для случайным образом заполненных МПС (табличная величина). МПС согласована тогда и только тогда когда $HCR = HCI = 0$. Если $HCR \le HCR^{порог}$, то несогласованность МПС A допустима.

Рассмотрим результаты, полученные описанными выше тремя методами в табл.2. Локальные веса разными методами задают одинаковое ранжирование акторов, а именно Гос. власть Украины = Исп. власть АРК ≥ Бизнес ≥ Население, рекреанты.

Одинаковое ранжирование, полученное разными методами, объясняется хорошей согласованностью выполненных экспертами парных сравнений. Действительно, отношение согласованности МПС из табл.2 CR=0,058 не превышает порогового значения 0,08 для n=4, что свидетельствует о допустимой несогласованности этой матрицы по показателю CR. Значения других коэффициентов согласованности GCI=0,201, HCR=0,026 этой матрицы также не превышают своих пороговых значений 0,3526 и 0,08 соответственно. Поэтому найденные локальные веса акторов допустимо несогласованны по всем вычисленным показателям и могут использоваться в дальнейшем для проведения синтеза.

В табл. 3 и 4 приведены вычисленные по МПС веса целей и политик акторов. Предоставленные экспертом суждения важности целей имеют достаточно высокий уровень согласованности. Так, для результатов табл. 3а значения показателей согласованности равны CR=0,019, GCI=0,068, HCR=0,007 и намного меньше соответствующих пороговых значений 0,1, 0,3526 и 0,1 для n=5. Локальные веса целей, полученные разными методами (см.табл.3а), можно считать совпадающими в пределах практической точности. В табл.3б – 3г приведены локальные веса только методом главного собственного метода, поскольку результаты по остальным двум методам совпадают с ними в пределах практичной точности аналогично табл.3а. Для подтверждения здесь достаточно будет указать значения показателей согласованности: для табл.3б они равны CR=0,017, GCI=0,061, HCR=0,013, для табл.3в CR=0,017, GCI=0,064, HCR =0,018, для табл.3г CR=0,075, GCI=0,070, HCR =0,123. Все эти показатели намного меньше своих порогов (за исключением последнего значения HCR).

Глобальные веса целей акторов в табл.3 получены умножением локальных весов целей на соответствующие веса самих акторов. Поскольку оценивание политик проводится по их воздействию на каждую цель, то вычисление глобальных весов в табл.4 требует применения методов синтеза. Эти методы описаны ниже.

Определим пороговое значение на глобальный вес цели равным 0,05. Цель с глобальным весом, превышающим данный порог, будет считаться наиболее важной при дальнейшем рассмотрении. Таким образом, *наиболее важные цели* акторов:

- продовольственная и экологическая безопасности,
- получение АР Крым статуса международного значения;
- для бизнеса: доход в краткосрочной и среднесрочной перспективах и увеличение спроса на рекреационно_туристические услуги;
- со стороны органов исполнительной власти АР Крым: уменьшение рисков чрезвычайных ситуаций техногенно_экологического характера, устойчивый результат за минимальное время, снижение уровня тенизации экономики.

Глобальными весами элементов иерархии называются веса относительно вершины иерархии (главной цели). Для вычисления глобальных весов по множеству показателей (целей, критериев и проч.) в данной методологии предлагается использовать несколько методов: дистрибутивный, идеальный и мультипликативный. Первые два представляют линейную свертку, третий – мультипликативную. Обозначим $w_i^{глоб}$ – элемент вектора глобальных весов, w_j^C – вес j_го критерия, $\sum_{j=1}^{M} w_j^C = 1$.

Дистрибутивный синтез: $w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C r_{ij}$, $i = 1,...,N$, где $r_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^{N} a_{kj}$ – нормированные значения локальных весов a_{ij} альтернатив относительно критериев, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1$, $j = 1,...,M$, N – количество альтернатив, M – количество критериев.

Идеальный синтез:

$$v_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C r_{ij}, \; r_{ij} = a_{ij} / \max_{k=1,...,n} a_{kj}, \; i = 1,...,N.$$

Мультипликативный синтез:

$$v_i^{глоб} = \prod_{j=1}^{M} (a_{ij})^{w_j^C}, \; i = 1,...,N.$$

Результирующие глобальные веса в методах идеального и мультипликативного синтеза получаются после нормировки

$$w_i^{глоб} = v_i^{глоб} / \sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}.$$

В табл.4 приведены глобальные эффективности политик акторов, вычисленные методом дистрибутивного синтеза. Эффективности политик по идеальному и мультипликативному методам совпадают с приведенными в пределах практической точности. Результаты табл.4 показывают, что *наиболее эффективными политиками* акторов для достижения действу_ющих на текущий момент целей этих акторов являются (в порядке убывания важности):

- сохранение агрессивной ценовой политики бизнесом на продукцию аграрного сектора АР Крым,
- расширение площадей выращивания плодово_овощных культур,
- перекладывание обязательств исполнительной властью АР Крым на государственную власть Украины,
- устранение отрицательных социальных последствий кризисных ситуаций.

Таблица 3

Локальные и глобальные веса целей акторов

а) Государственная власть краины

		Продовол. безопасность	Экологич. безопасность	АРК статуса международн~	Антикризисное управление	Уменьш. завис. от внешн.инв~
Локальный вес	метод главного собств. вектора	0,321	0,321	0,165	0,113	0,080
	метод геометрической средней	0,324	0,324	0,162	0,111	0,079
	метод арифметич. нормализации	0,324	0,324	0,158	0,111	0,077
Глобальный вес		0,118	0,118	0,061	0,042	0,029

б) Бизнес

	Увеличение спроса на рекреац.-туристич. услуги	Доход в краткосрочнойи средне-срочной перспективе	Доход в долгосрочной перспективе	Сохранение и улучшение экологии
Локальный вес (метод главного собст. вектора)	0,342	0,383	0,168	0,107
Глобальный вес	0,058	0,065	0,028	0,018

в) Население, рекреанты

	Продоволь-ственная безопаность	Низкие цены на продукцию	Хорошая экологич. ситуация	Уменьш. безработицы	Улучшение показателей уровня жизни	Комфорт
Локальный вес (метод глав. собст. вектора)	0,089	0,217	0,229	0,072	0,164	0,229
Глобальный вес	0,009	0,021	0,022	0,007	0,016	0,022

г) Исполнительная власть АР Крым

	Устойч. результ. за минимальное врмя	Уменьш. рисков ЧС техногенно-экологическ~	Снижение уровня теницац~	Повышение экспорта продукц.	Снижение импорта продукц.	Обеспеч. ранней продукции
Локальный вес (метод главного собств. вектора)	0,272	0,289	0,224	0,053	0,105	0,056
Глобальный вес	0,100	0,106	0,082	0,020	0,039	0,021

Таблица 4

Локальные и глобальные веса политик акторов относительно целей акторов а) Государственная власть краины

	Локальный вес					Глобальный вес
	Продовол. безопасность	Экологич. безопасность	АРК статуса медунар ~	Антикризис. управление	Уменьш. зависим. от внеш. инвест.	
Устранение отрицательных социальных ~	0,168	0.556	0.103	0,342	0,250	0,290
Реорганизация гос. аппарата ~	0,107	0.333	0.233	0,383	0,250	0,232
Вовлечение ресурсн ~	0,383	0.111	0.364	0.107	0,250	0,247
Организация сист. контроля ~	0,342	0.111	0.300	0,168	0,250	0,230

б) Бизнес

	Локальный вес				Глобальный вес
	Увеличение спроса на рекреац.-туристич. услуги	Доход в краткосрочной и среднесрочной перспективе	Доход в долгосрочной перспективе	Сохранение и улучшение экологии	
Сохранение агрессивной ценовой ~	0,333	0,778	0,540	0,143	0,518

Окончание таблицы 4, б)

Использование экологически безопасных техн~	0,333	0,111	0,297	0,429	0,252
Увеличение доли возобн. энергии	0,333	0,111	0,163	0,429	0,230

в) Исполнительная власть АР Крым

	Локальный вес						Глобальный вес
	устойчивый результат за миним. время	уменьш. рисков ЧС техн.экол~	снижение уровня тенизац~	повышение экспорта продукции	снижение импорта продукции	обеспечен. ранней продукцией	
Перекладыв. обязател ~	0,2	0,333	0,55	0,149	0,149	0,149	0,306
Консервация проблем ~	0,2	0,333	0,24	0,066	0,066	0,066	0,219
Расширение площадей выращиван~	0,6	0,333	0,21	0,785	0,785	0,785	0,475

3.3. Вычисление вероятностей сценариев первого прямого процесса. Исследуются следующие три сценария: «инерционный»: сохранение «status quo»; «мобилизационный»: ставка на внешние источники развития; «модернизационный»: успешный Крым в успешной Украине. Для определения субъективных вероятностей этих сценариев в соответствии с предлагаемой методологией были проведены парные сравнения сценариев относительно каждой политики акторов. При этом эксперту были заданы вопросы вида: «Какой из сценариев 1)«инерционный» или 2)«модернизационный» более вероятен при реализации политики «расширение площадей выращивания овощных и плодовых культур»? Какова степень преобладания одного сценария над другим?» Такой вопрос ставился для каждой пары сценариев по каждой политике акторов.

Были построены матрицы парных сравнений сценариев, вычислены локальные веса (вероятности) сценариев методами главного собственного вектора, геометрической средней и арифметической нормализации аналогично табл.2. Экспертные суждения имели допустимый уровень несогласованности. После этого был выполнен синтез найденных локальных вероятностей сценариев с учетом эффективностей политик и важностей акторов, используя дистрибутивный, идеальный и мультипликативный методы. Веса (вероятности) по разным методам совпали в пределах практической точности.

В результате получено, что *наиболее вероятным при текущих важностях целей и политик акторов является «мобилизационный» сценарий* Этот сценарий не требует сложной реорганизации государственного аппарата, позволяет эффективно использовать имеющийся кадровый потенциал и отработанную культуру государственного управления. Этот сценарий эффективен в качестве антикризисной тактики, однако создает иллюзию достижения необходимого устойчивого результата, поскольку развитие основано на минимальных затратах времени и ресурсов. Международная конкурентоспособность АР Крым будет отставать, а секторальная зависимость от внешних инвесторов будет сохраняться и усиливаться.
Текущие важности целей и политик акторов, таким образом, не приводят к желаемому «модернизационному» сценарию развития АР Крым. Выполним обратный процесс оценивания сценариев развития аграрного сектора АР Крым и покажем как изменение важностей целей акторов и добавление политик приводят к достижению желаемого сценария.

3.4. Построение иерархии первого обратного процесса. В соответствии с описанной в п.2 методологией, иерархия обратного процесса отличается от иерархии прямого процесса. Вершиной иерархии обратного процесса есть наиболее желаемый сценарий, на следующем уровне описываются проблемы достижения желаемого сценария, далее – акторы, их цели и политики акторов для достижения желаемого сценария (рис.3). В задаче оценивания развития аграрного сектора АР Крым выделим следующие *проблемы достижения «модернизационного» сценария*:

П1: неэффективное использование орошаемых земель;

П2: сокращение производства в виноградарстве, плодоводстве, овощеводстве, эфиромасличном производстве;

П3: преобладание в производстве сельскохозяйственной продукции АР Крым вклада хозяйств населения;

П4: ухудшение материально технического обеспечения сельского хозяйства АР Крым;

П5: низкий уровень развития селекции и семеноводства;

П6: сокращение поголовья сельскохозяйственных животных и производства животноводческой продукции;

П7: затруднение доступа сельскохозяйственной продукции на рынки сбыта, ее чрезмерные потери;

П8: низкий уровень развития социальной инфраструктуры в сельской местности.

Задача обратного процесса состоит в пересмотре приоритетов целей и политик акторов и выборе приоритетных политик для решения выявленных проблем и достижения желаемого сценария.

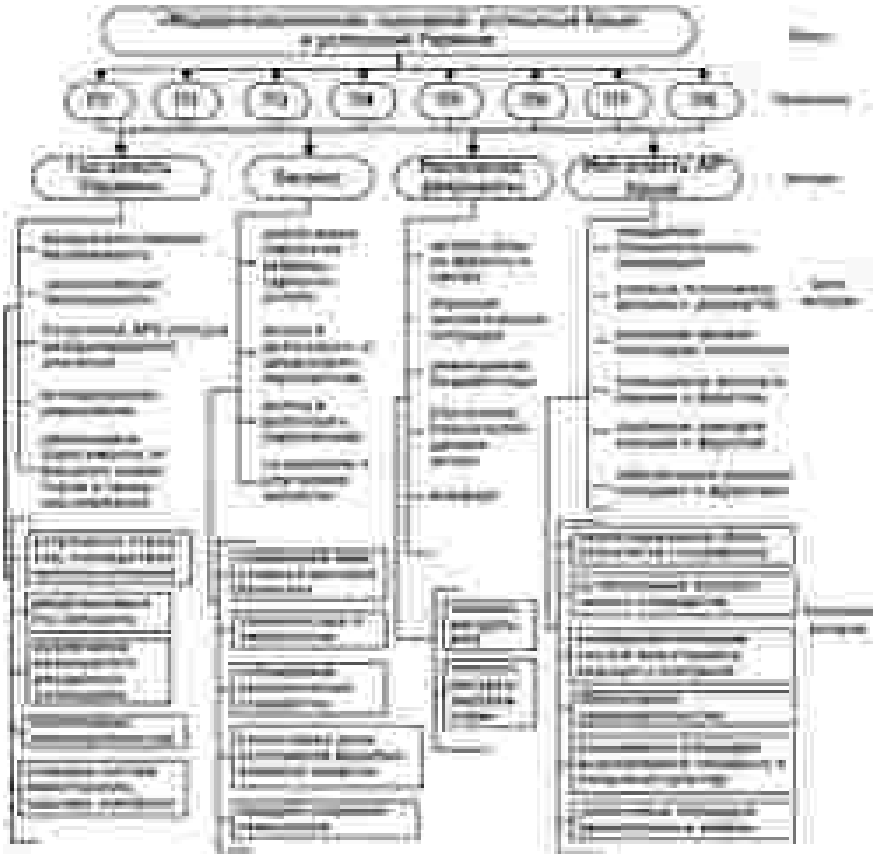


Рис. 3. Иерархия первого обратного процесса

Отметим, что в данной задаче оценивания развития аграрного сектора АР Крым множество целей и множество политик акторов были изменены экспертами (по сравнению с прямым процессом), поскольку для обратного процесса характерно большее понимание проблемы по сравнению с предыдущим прямым процессом.

3.5. Оценивание иерархии первого обратного процесса выполнено согласно методологии, описанной в п.2.

При проведении парных сравнений элементов каждого уровня иерархии эксперту предъявлялись опросные формы, аналогичные приведенным выше. Так, при парном сравнении проблем П1 – П8 эксперту ставились вопросы вида: «Какая из проблем 1) «неэффективное использование орошаемых земель» или 2) «преобладание в производстве сельскохозяйственной продукции АР Крым вклада хозяйств населения» в большей степени сдерживает реализацию «модернизационного» сценария? Какова степень преобладания одной проблемы над другой?». При парном сравнении акторов относительно каждой проблемы ставились вопросы о степени влияния актора на решение проблемы.

По результатам выполненных экспертом парных сравнений элементов всех уровней иерархии рис.3 построены положительные обратно симметричные матрицы парных сравнений. На их основе тремя методами вычислены локальные веса (приоритеты) всех элементов иерархии:

- проблем реализации желаемого «модернизационного» сценария;
- акторов по влиянию на каждую проблему;
- целей каждого актора;
- политик каждого актора относительно целей.

Для иллюстрации здесь приведем только локальные веса проблем П1 – П8 (табл.5), из которых можно сделать вывод о хорошей согласованности суждений экспертов (показатели согласованности CI=0,038, GCI=0,139, HCR=0,031 намного меньше своих пороговых значений) и совпадении в пределах практической точности локальных весов проблем, вычисленных разными методами. Как оказалось, реализацию «модернизационного» сценария наиболее сдерживают, по мнению экспертов, следующие проблемы, упорядоченные в порядке убывания важности:

- П1: «неэффективное использование орошаемых земель» и П2: «сокращение производства в виноградарстве, плодоводстве, овощеводстве, эфиромасличном производстве» (ранг равен 1);
- П5: «низкий уровень развития селекции и семеноводства» и П6: «сокращение поголовья сельскохозяйственных животных и производства животноводческой продукции» (ранг равен 2).

Таблица 5

Локальные веса проблем достижения «модернизационного» сценария

		П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Локальный вес	метод главного собст. вектора	0,224	0,243	0,043	0,087	0,153	0,168	0,041	0,043
	метод геометри-ческой средней	0,228	0,237	0,042	0,086	0,154	0,166	0,042	0,044
	метод арифметич. норма-лизации	0,245	0,253	0,043	0,071	0,139	0,126	0,043	0,045

Синтез (агрегирование) локальных весов политик каждого актора относительно целей этого актора с учетом весов этих целей, весов актора относительно проблем и весов самих проблем был выполнен по трем рассмотренным выше методам синтеза. В результате получено, что наиболее важными (приоритетными) политиками акторов для достижения фокуса – желаемого «модернизационного» сценария являются:

- вовлечение в аграрный сектор имеющегося ресурсного потенциала АР Крым;
- реорганизация государственного аппарата АР Крым;
- обеспечение соответствующего законодательства исполнительной властью АР Крым, включая введение экологических стандартов;
- усовершенствование систем разного рода мониторинга, надзора и контроля исполнительной властью АР Крым за выполнением законодательства;
- расширение площадей выращивания овощных и плодовых культур;
- внедрение технологических инноваций;
- увеличение доли нетрадиционных источников возобновляемой энергии.

3.6. Построение и оценивание иерархии второго прямого процесса. На следующей итерации наиболее важные цели и политики первого обратного процесса включаются в иерархию второго прямого процесса. Таким образом, иерархия второго прямого процесса аналогична приведенной

на рис. 2 с тем отличием, что на уровни целей и политик добавляются наиболее важные цели и политики первого обратного процесса. Веса элементов иерархии второго прямого процесса вычисляются аналогично предыдущим иерархиям с использованием экспертных суждений.

В результате, при введении в прямой процесс политик акторов, которые имеют наибольший вес при обратном процессе, желаемый «модернизационный» сценарий получил больший глобальный вес, т. е. вероятность появления желаемого сценария стала выше. Поэтому на второй итерации прямого процесса получаем некоторую сходимость к желаемому «модернизационному» сценарию развития АР Крым.

Заключение. В работе предложена методология последовательного применения прямого и обратного процессов метода анализа иерархий для решение задачи оценивания субъективных вероятностей предварительных сценариев и определения приоритетов политик акторов для достижения желаемого сценария развития сложной экономическо-социально-политической системы.

Используя предложенную методологию и экспертные суждения, найдены наиболее важные политики органов исполнительной власти АР Крым, центральных органов государственной власти Украины и хозяйствующих субъектов (бизнеса) для сближения текущего состояния развития аграрного сектора с желаемым «модернизационным» сценарием развития АР Крым.

Библиографические ссылки

1. Стратегия экономического и социального развития Автономной Республики Крым (АРК) на 2011 – 2020 годы, утвержденная Постановлением ВР АР Крым 22 декабря 2010 года – №121-6/10.
2. **Саати Т.** Аналитическое планирование. Организация систем. / Т. Саати, К. Кернс – М., 1991. – 224 с.
3. **Згуровский М.З.** Системный анализ: проблемы, методология, приложения. / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова – 2-е издание. – К., – 2011. – 726 с.
4. **Панкратова Н.Д.** Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська: Навчальний посібник. – К., 2010. – 372 с.
5. **Ивченко В.А.** К созданию стратегии устойчивого развития Крыма / В.А. Ивченко // Системні дослідження та інформаційні технології, – 2008, № 3. – С. 31-43.

6. **Ивченко В.А.** Методология решения проблемы устойчивого развития Крыма / В.А. Ивченко // Системні дослідження та інформаційні технології, – 2008, № 4. – С. 21-32.

7. **Недашківська Н.І.** Адаптивне стратегічне планування розвитку підприємства з використанням нечіткого методу аналізу ієрархій / Н.І. Недашківська // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали XII міжнародної науково-технічної конференції «САИТ» (25–29 травня 2010 р., м. Київ).–К., 2010.– С.123.

8. **Панкратова Н.Д.** Оцінювання пріоритетних технологій за напрямами науково-технологічного розвитку на основі системної методології передбачення / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // Матеріали VII міжнародної науково-практичної конференції «Інформація, аналіз, прогноз – стратегічні важелі ефективного державного управління» (12 – 15 жовтня 2010 р., м. Київ). – К., 2010. – С. 130 – 131.

9. **Vaidya O.S., Kumar S.** Analytic hierarchy process: An overview of applications // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol.169, №1. – P.1 – 29.

Надійшла до редколегії 25.06.2012

УДК 681.5.015

Р. Н. Квєтний, Я. А. Кулик
Вінницький національний технічний університет

АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЗИС ОРТОГОНАЛЬНИХ Ф НКЦІЙ

Розглянута задача аналізу дискретного сигналу в базисі ортогональних функцій. Теоретичні засади їх використання розроблені лише для лінійних систем управління і лише у випадку неперервних сигналів. На сьогоднішній день реалізуються, в основному, дискретні комп'ютерні системи різного функціонального призначення з, відповідно, дискретними сигналами. Запропоновано використання методів спектрального аналізу з використання вейвлет-функцій для дискретних систем з дискретними сигналами.

Рассмотрена задача анализа дискретного сигнала в базисе ортогональных функций. Теоретические основы их использования разработанны только для линейных систем управления и только в случае непрерывных сигналов. На сегодняшний день реализуются, в основном, дискретные компьютерные системы разного функционального назначения с, соответственно, дискретными сигналами. Предложено использование методов спектрального анализа с использованием вейвлет-функций для дискретных систем с дискретными сигналами.

The problem of analysis of discrete signal in the basis of orthogonal functions is considered. Theoretical basis of its usage was developed only for linear control systems and only in the continuous signals' case. Nowdays basically discrete computer systems with different functional purpose with respective discrete signals are realized. Spectral analysis methods using wavelet-functions for discrete systems with discrete signals were proposed.

Ключові слова: спектральний аналіз, кореляційний аналіз, ортогональні функції.

Вступ. На даний час існує багато різних базисів ортогональних функцій, але найбільш ефективні серед них вейвлет-функції. Через те, що вейвлети з'явились порівняно недавно, їх особливості та перспективи з точки зору практичного використання вивчені недостатньо. Вейвлет-аналіз більш інформативний, ніж аналіз з використанням перетворення Фур'є, оскільки останній не дає інформації про часове розташування спек-

© *Р.Н. Квєтний, Я. А. Кулик, 2012*

тральних складових. Але не для всіх випадків розроблені теоретичні засади для використання вейвлет -перетворень. Зокрема їх використання розроблене лише для лінійних систем управління з неперервними сигналами. Але на сьогоднішній день через свою простоту і універсальність набагато більше використовуються комп'ютерні системи, які дискретні за своєю природою і завжди використовують дискретні сигнали. Якщо на певному етапі використовуються аналогові сигнали (наприклад – збір інформації з датчиків), то вони обов'язково перетворюються в дискретні, після чого їх може обробити комп'ютерна система. Тому доцільно розширити область використання методів спектрального аналізу в базисі ортогональних функцій для дискретних систем з, відповідно, дискретними сигналами.

Сигнал розглядається як випадковий, оскільки в процесі передавання на нього накладається випадкова складова. У такому випадку найбільш ефективними методами для аналізу сигналу будуть кореляційні та спектральні методи.

Завдяки можливості локалізації сигналу одночасно в частотному і часовому просторі, вейвлети використовуються для забезпечення розв'язку задач апроксимації, регресії, прогнозування, фільтрації, ідентифікації тощо [1-3].

Спектральний аналіз широко використовується у сейсмології, акустиці, медицині, зв'язку, оброблюванні сигналів та зображень і тому багато праць присвячено його застосуванню в окремих галузях [4]. Для цих самих задач існує також широко выдомий метод кореляційного аналізу.

Вейвлет-аналіз може використовуватись для всіх тих задач, для яких використовується звичайний спектральний аналіз у базисі Фур'є. При цьому вейвлети мають кращу часову і частотну локалізацію: звичайне перетворення в базисі Фур'є не дає відповіді про часову локалізацію складових спектру, а віконне перетворення Фур'є дає часткову відповідь про часову локалізацію (рис. 1).

Співвідношення точності частотної і часової локалізації підкоряється принципу невизначеності Гейзенберга.

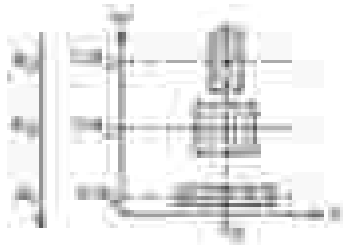


Рис. 1. Співвідношення частотної і часової локалізації вейвлетів

Зараз широко досліджуються як теоретичні, так і практичні аспекти вейвлет_перетворень [1].

Метою роботи є підвищення ефективності передавання дискретних сигналів шляхом підвищення достовірності аналізу сигналів на приймальній стороні завдяки використанню методів кореляційного та спектрального аналізу.

Визначення основних характеристик. Якщо заданий певний вейвлет_базис $\{\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$, то будь_яку функцію $x(\tau)$ можна охарактеризувати коефіцієнтами [2]:

$$s_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\varphi_{j,k}(\tau)d\tau; \tag{1}$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\psi_{j,k}(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Ця функція може бути відновлена зворотнім перетворенням за формулою

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{j_n,k}\varphi_{j_n,k}(\tau) + \sum_{j=j_n}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(\tau). \tag{3}$$

В інтервальному вигляді незалежно від базису |цей запис буде мати вигляд |одержув

$$g_{h,m}^{n}(\tau) = \begin{cases} \varphi_{n,m}(\tau) \quad \text{при } h = 0; \\ \psi_{n+j,k+m}(\tau) \quad \text{при } h = 2^{j} + k; \\ k = 0,1,...,2^{j} - 1; \quad j = 0,1,2,...; \\ m, n \in Z. \end{cases} \tag{4}$$

Кратномасштабною| спектральною характеристикою по інтервальному ортонормованому вейвлет_базису є ||накликатимемо|є функція, ординатами якої, при постійному параметрі масштабування, є|з'являються| коефіцієнти Фур'є_перетворення функції у заданому вейвлет_базисі

$$\underset{g}{S_m}[x] = \underset{g}{X_m}(h,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_m^*(h,t,\theta)x(\theta)d\theta \ . \tag{5}$$

Цю характеристику зручно представляти у вигляді|уявляти| матриці_стовпця

|

$$X = X(t) = [..., X_{-1}(t), X_0(t), X_1(t),...]^T. \qquad (6)$$

Кратномасштабна спектральна характеристика представляться нескінченною клітинною матрицею_стовпцем коефіцієнтів у заданому вище базисі (4). Кратномасштабну базисну систему функцій (4) можна представити матрицею_рядком

$$G(\tau) = G(\tau, t) = [..., G_{-1}(\tau, t), G_0(\tau, t), G_1(\tau, t),...]. \qquad (7)$$

Тоді формули прямого і оберненого вейвлет _перетворення| (5) – (7) можна представити|уявляти|

$$\underset{G_m}{X_m} = \underset{G_m}{S_m}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_m^*(\tau) x(\tau) d\tau. \qquad (8)$$

Обернене перетворення описується

$$x(\tau) = S^{-1}[\underset{g}{X}] = G(\tau)\underset{g}{X} = \sum_{mh=0}^{\infty}\sum \underset{G_m}{X_m}(h) g_{h,m}(\tau). \qquad (9)$$

Для функцій двох змінних кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика має вигляд|вид|

$$X_{n,m}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_h^*(h,t,\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} p_m(i,t,\tau) x(\theta,\tau) d\tau d\theta. \qquad (10)$$

Цю характеристику можна представити у вигляді нескінченної|нескінченною| квадратної клітинної|клітковою| матриці

$$X_{n,m} = \begin{bmatrix} X_{n,m}(0,0) & X_{n,m}(0,1) & \cdots & X_{n,m}(0,i) & \cdots \\ X_{n,m}(1,0) & X_{n,m}(1,1) & \cdots & X_{n,m}(1,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n,m}(h,0) & X_{n,m}(h,1) & \cdots & X_{n,m}(h,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

кожна комірка якої є|з'являються| коефіцієнтом у заданому вище інтервальному вейвлет_базисі (4)|.

Формула обернення |звертання| для характеристики (10), записана в матричній формі, має вигляд [5]

$$S^{-1}[\underset{qp}{X_*}] = x(\theta,\tau) = Q(\theta) \cdot \underset{qp}{X_*} \cdot P^T(\tau). \qquad (12)$$

Метод спектрального аналізу в базисі ортогональних функцій. В основі спектрального методу лежить поняття спектральної характеристики, яке дає цілий ряд характеристик, використовуваних для опису сигналів і систем.

Отримання спектральних зв'язків вхід_вихід системи базується на відомому співвідношенні в часовій області

$$x(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\theta,\tau) g(\tau) d\tau, \qquad (13)$$

де $k(\theta,\tau)$ – імпульсна перехідна функція неперервної системи, визначена на всій області дійсних значень.

Після обчислення інтегралу (13) і від нього кратномасштабної спектральної характеристики за формулою (5), можна отримати|одержуватимемо|

$$X_n(h) = \sum_{mi}\sum W_{n,m}(h,i) G_m(i), \qquad (14)$$

де $W_{n,m}(h,i)$ – кратномасштабна двовимірна перехідна функція системи управління з|із| імпульсною перехідною функцією $k(\theta,\tau)$; $G_m(i)$ – кратномасштабна спектральна характеристика відповідно вхідного сигна-

лу $g(\tau)$; $X_n(h)$ – кратномасштабна спектральна характеристика відповідно вихідного сигналу $x(\tau)$.

Спектральні зв'язки вхід _вихід при випадкових впливах знаходяться усередненням по безлічі реалізацій правої і лівої частини|частини| виразу|виразу| (14) з урахуванням властивості кратномасштабної спектральної щільності, що описується формулою

$$S_x = M[X], \tag{15}$$

де *M*|м_код| – символ операції обчислення|підрахунку| математичного сподівання|чекання|.

Усереднюючи по безлічі реалізацій праву і ліву частини|частини| отриманого|одержувати| виразу|виразу| і враховуючи властивість кратномасштабної спектральної характеристики, що описується формулою

$$S_x = M\left[X_{сл} \cdot X_{сл}^T\right], \tag{16}$$

можна отримати|одержуємо| алгоритм, який встановлює зв'язок між нестаціонарною кратномасштабною спектральною щільністю вхідного і вихідного випадкових сигналів через кратномасштабну двовимірну перехідну функцію шуканої системи

$$S_x = W \cdot S_g \cdot W^T. \tag{17}$$

Кратномасштабна двовимірна перехідна функція і кратномасштабна спектральна щільність дозволяють знайти взаємну кратномасштабну спектральну щільність вхідного і вихідного випадкових сигналів шуканої системи за формулою

$$S_{xg} = W \cdot S_g. \tag{18}$$

Спектральні перетворення для кореляційного аналізу. Спектральна характеристика математичного сподівання|чекання| випадкової функції однієї змінної *x*

$$S_x(i,t) = \int_0^t p^*(i,t,\theta) m_x(\theta) d\theta. \tag{19}$$

Спектральна щільність кореляційної функції $R_{xx}(\theta,\tau)$ випадкового в загальному|загальному| випадку сигналу x

$$S_{\substack{x \\ pp^*}}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta)\int_0^t p(i,t,\tau)R_{xx}(\theta,\tau)d\tau d\theta . \quad (20)$$

Спектральна щільність взаємної кореляційної функції $R_{xg}(\theta,\tau)$ випадкових сигналів x і g

$$S_{\substack{xg \\ pp^*}}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta)\int_0^t p(i,t,\tau)R_{xg}(\theta,\tau)d\tau d\theta . \quad (21)$$

Першою величиною кратномасштабної спектральної щільності випадкового в загальному|загальному| випадку сигналу буде кратномасштабна спектральна характеристика його математичного сподівання

$$S_{\substack{x \\ g}}^{n}(i) = S_{\substack{n \\ g}}[m_x] . \quad (22)$$

Другою величиною кратномасштабної спектральної щільності або просто кратномасштабною спектральною щільністю випадкового в загальному|загальному| випадку сигналу буде|накликатимемо| кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика його кореляційної функції

$$S_{\substack{x \\ pp^*}}^{m,k}(h,i) = S_{\substack{m,k \\ pp^*}}[R_{xx}] . \quad (23)$$

Під кореляційною функцією тут можна розуміти як центровану миттєву| функцію випадкового сигналу, так і початкову миттєву | функцію випадкового сигналу.

Кратномасштабною взаємною спектральною щільністю $S_{xg}^{n,k}(h,i)$ випадкових сигналів x, g буде кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика взаємної кореляційної функції цих сигналів R_{xg}

$$\underset{qp}{S_x^{n,k}}{}^{*}(h,i) = \underset{pp}{S_{n,k}}{}^{*}[R_{xx}]. \qquad (24)$$

Обернений перехід від нестаціонарної кратномасштабної спектральної щільності (22) – (24) до початкових|вихідних| характеристик випадкового сигналу здійснюються за формулами обернення|звертання| (8), (12):

$$m_x = S^{-1}\underset{g}{[S_x]} \qquad (25)$$

для математичного сподівання;

$$R_{xx} = S^{-1}\underset{pp}{[S_x]}^{*} \qquad (26)$$

для автокореляційної функції;

$$R_{xg} = S^{-1}\underset{qp}{[S_{xg}]}^{*} \qquad (27)$$

для функції взаємної кореляції.

Знайдені зв'язки (19) – (24) вирішують задачу визначення характеристик вихідних сигналів лінійних систем управління при детермінованих і випадкових вхідних сигналах. Вирази (22) – (24) можуть використовуватись для |лише|аналізу сигналів у рамках|у рамках| кореляційної теорії [5].

Кореляційний аналіз сигналів. Вищеописані перетворення дозволяють здійснити кореляційний аналіз сигналів. Кореляційний аналіз сигналів полягає у порівнянні сигналу з еталонним через кореляційну та автокореляційну функцію

$$R_{xx}(\omega,\tau) = \int_0^t x(t)x(t-\tau)e^{-j\omega}dt\,, \qquad (28)$$

де ω і τ - відповідно частотне і часове зміщення сигналу $x(t)$

$$R_{xy}(\omega,\tau) = \int_0^t x(t)\,y(t-\tau)e^{-j\omega}dt\,, \qquad (29)$$

де ω і τ - відповідно частотне і часове зміщення сигналу $x(t)$ відносно $y(t)$.

Приклад авто кореляційної функції показаний на рис.3. При розрахунку кореляційних функцій для зручності порівняння енергії зв'язку між двома сигналами (коефіцієнт кореляції) потрібно виконати умову нормування. Ця умова записується у вигляді [6]:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 1 \qquad (30)$$

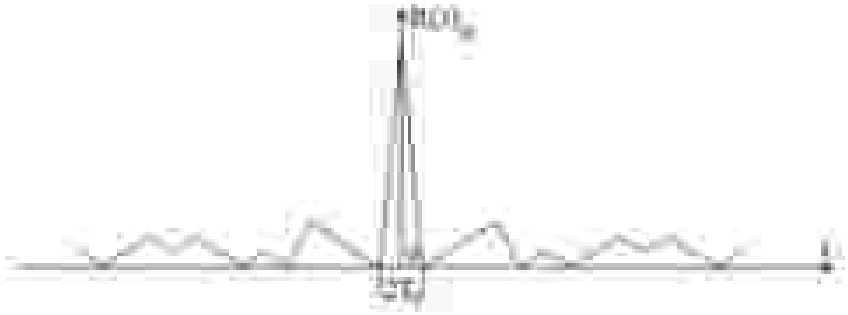


Рис. 2. Приклад автокореляційної функції

Знайшовши автокореляційну функцію сигналу, її порівнюють з автокореляційними функціями можливих інформативних сигналів (порівняння можна проводити за критерієм мінімум середньоквадратичного відхилення (31), і якщо автокореляційні функції майже повністю співпадають (різниця не перевищує 10 %), робиться висновок, що прийнятий сигнал є той, з автокореляційною функцією якого найбільше співпадіння.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\int_0^T (R^*(t) - R(t))^2\,dt}\,, \qquad (31)$$

де $R^*(t)$ – оцінка кореляційної функції прийнятого сигналу, $R(t)$ – оцін-

ка кореляційної функції еталонного сигналу, n – кількість відрахунків.

Також в якості критерію для висновку, що прийнятий і еталонний сигнал однакові, можна використовувати критерій Фішера [8].

Кореляційні функції мають вигляд подібний до автокореляційних функцій, зображених на рис. 2. У випадку, якщо точно відомий момент приходу сигналу, то вершина отриманої від нього кореляційної функції буде проходити через вісь ординат [7]. З (29) зрозуміло, що кореляційна функція завжди буде симетрична. Аналіз сигналів через кореляційні функції проводиться шляхом порівняння максимального значення $max(R(\tau))$ (це вершина кореляційної функції) серед кореляційних функцій, отриманих згорткою з кожним із можливих сигналів. Якщо точно відомий момент приходу сигналу, то

$$max(R(\tau))= R(0). \tag{32}$$

Іноді кореляційна функція визначається через центровану функцію

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - m_x)(y(t-\tau) - m_y)dt, \tag{33}$$

або якщо $\tau = 0$, то

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - m_x)(y(t) - m_y)dt. \tag{34}$$

Аналіз швидкодії методів. Як аналоговий, так і дискретний сигнал можна задати у вигляді набору значень. Так, наприклад, зберігаються сигнали в пам'яті пристроїв – оскільки пам'ять завжди обмежена, безперервний сигнал зберігається у вигляді набору значень. Ці значення отримуються після дискретизації сигналу після аналогово -цифрового перетворення. Якщо є потреба – таку саму процедуру можна зробити з дискретним сигналом. Якщо сигнал задається у вигляді набору значень, тобто масивом, то всі операції, такі як (8) – (10) зручніше робити чисельно. В них операції інтегрування замінені операцією суми. Тобто фактично операції будуть виконуватись з матрицями. Таким чином , окремим питанням є – як буде залежати час на виконання методу, тобто час обчислень від розміру вхідних даних. Результати дослідження часу виконання обрахунків від розміру вхідних даних показана на рис. 3.

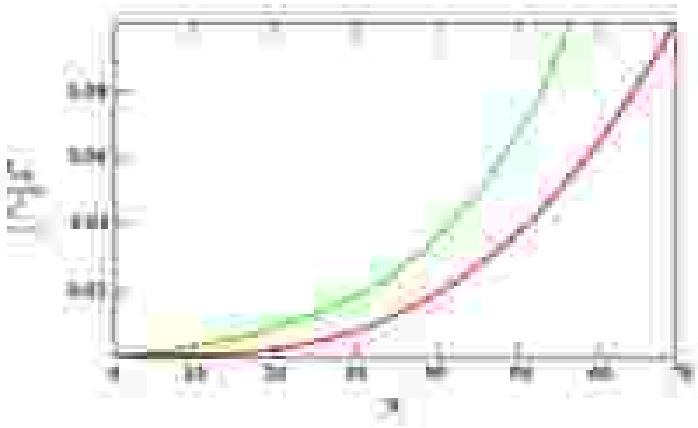


Рис. 3. Залежність часу на виконання обчислень від розміру вхідних даних

Якщо порівняти спектральний метод з кореляційним, то стане зрозуміло, що для кореляційного аналізу потрібно буде значно менше обчислювальних ресурсів, ніж для спектрального, оскільки весь математичний апарат для нього значно простіший.

Для операцій з матрицями складність складає $O(n^3)$, але існують методи для зменшення кількості операцій. Для розріджених матриць ця складність буде ще менша. Для порівняння поряд з графіком експериментальних даних показаний графік кубічної параболи. Як видно з рисунка час обчислення менше, ніж для кубічної залежності і зі збільшенням розмірності цей розрив зростає – залежність стає все далі від кубічної. Це наслідок того, що при великих об'ємах даних матриці часто розріджені, тобто мають багато нулів, і що дозволяє програмі виконати оптимізацію за параметром швидкодії.

Висновки. У даній статті запропоновано використання методів спектрального аналізу з використання вейвлет _функцій для дискретних систем з дискретними сигналами.

Ці методі достатні для повного аналізу сигналу. Вони дозволяють чітко і майже повністю розділити сигнал та випадкову складову (шум).

Хоча методи оперують однаковими характеристиками, вони є незалежними. Для підвищення ефективності аналізу сигналу рекомендується використовувати обидва методи. Це особливо потрібно, коли важлива висока надійність передавання інформації. Використання послідовно цих двох

методів може замінити не завжди ефективний метод повторного передавання інформації.

З практичної точки зору, дані методи дозволяють розширити діапазон роботи при складних умовах передавання інформації інформаційно-вимірювальних системах, підвищити завадозахищеність та достовірність аналізу сигналів на приймальній стороні (повна працездатність системи без додаткових витрат зберігається при співвідношенні сигнал/шум $h = 5$ при нормативних вимогах $h = 100$).

Недоліком даних методів може бути низька швидкодія через велику кількість обчислювальних операцій з матрицями. Теоретично складність обчислень наближається до кубічної, з використанням методів швидких обчислень – дещо нижча, що видно з графіків на рис. 3.

Бібліографічні посилання

1. **Зверев В.А.** Выделение сигналов из помех численными методами / В.А. Зверев, А.А. Стромков. – Нижний Новгород, 2001. – 188 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск, 2001. – 464 с.
3. **Чуи К.** Введение в вэйвлеты: пер. с англ. /К. Чук – М., 2001. – 412 с.
4. **Рогозинский Г.Г.** К выбору оптимального вейвлета для перцепционного кодирования звуковых сигналов // Тр. 12-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение (DSPA-2010)» [Електронний ресурс] / Г.Г. Рогозинский – С.-Пб. – 2010. – Режим доступу: http://www.autex.spb.ru/dspa2010-1.pdf.
5. **Рыбин В. В.** Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах // труды МАИ. – М. – 2003. [Електронний ресурс] / В.В. Рыбин – Режим доступу: http://www.mai.ru/science/trudy/index.htm.
6. **Сысун В.И.** Теория сигналов и цепей [Електронний ресурс] / В.И. Сысун, П.П. Борисков, А.А. Величко / Режим доступу: http://dee.karelia.ru/files/circuit/Ps15.htm.
7. Идентификация объектов управления методом корреляционного анализа [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.promtehsnab.net/theoryt5r7part1.html.
8. **Кулик А.Я.** Побудова приймача з використанням дискримінантної процедури на засадах критерію Фішера / А.Я. Кулик, С.Г. Кривогубченко, Я.А. Кулик // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – №6. – Харків, 2007. – С. 221-224.

Надійшла до редколегії 12.12.2011

УДК 519.85

О.М. Кісельова*, В.О. Строєва **
**Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*
***Дніпродзержинський державний технічний університет*

ОПТИМАЛЬНЕ РОЗМІЩЕННЯ БАЗОВИХ СТАНЦІЙ С МІСНОГО ВИКОРИСТАННЯ (NETWORK SHARING) ДЕКІЛЬКОМА ОПЕРАТОРАМИ МОБІЛЬНОГО ЗВ'ЯЗК

Приведено результати застосування алгоритмів розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини до ряду прикладних задач оптимального розмі ення базових станцій мережі мобіль-ного зв'язку сумісного використання з одночасним розбиттям заданої області абонентів на зони обслуговування з метою мінімізації загальної вартості виробничих витрат та витрат на доставку трафіку до абонентів.

Приведены результаты применения алгоритмов решения непрерывных нелинейных многопродуктовых задач оптимального разбиения множества к ряду прикладных задач оптимального разме ения базовых станций сети мобильной связи совместного использования с одновременным разбиением заданной области абонентов на зоны обслуживания с целью минимизации об- ей стоимости производственных расходов и расходов на доставку трафика к абонентам.

The results of application of algorithms of decision of continuous nonlinear multigrocery problems of optimal set partition to the row of the applied tasks of the optimum placing of the base stations of mobile communication of sharing network with the simultaneous set partition area of subscribers on the areas of service with the purpose of minimization of total worth of production charges and charges on delivery of traffic to the subscribers.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача, базові станції, трафік, сумісне використання мережі.

Вступ. Основною складовою мобільного зв'язку є базові станції (БС) , які представляють собою системний комплекс приймально -передавальної апаратури, що здійснює централізоване обслуговування групи кінцевих абонентських пристроїв. БС утворюють зони покриття, в яких абоненти можуть одержувати послуги від операторів мобільного зв'язку. До цих послуг входять *телефонні розмови, текстові повідомлення, MMS, локальні послуги, Інтернет* і т. ін.

© *О.М. Кісельова, В.О. Строєва, 2012*

У [1; 2] та в багатьох інших розглядаються задачі оптимального розміщення БС у деякій області абонентів, що користуються послугами деякого одного оператора мобільного зв'язку. В свою чергу, як відомо, так звані капітальні та операційні, або виробничі витрати на кожну БС є досить дорогими та складаються з устаткування майданчика, будівництва, радіо устаткування, експлуатації та обслуговування і т. ін. Разом з цим оператори використовують різні частотні діапазони, що дозволяє їм працювати не впливаючи один на одного, а самим дієвим інструментом скорочення виробничих витрат БС, що довів високу ефективність у багатьох країнах Євросоюзу, Азії, Австралії, Великій Британії та активно впроваджується у Росії, є бізнес -модель "Сумісне використання мереж" (Network sharing), яка визначає колективне володіння та експлуатацію єдиної інфраструктури мережі БС або її частин двома та більше операторами [3].

Отже, у вирішенні сучасних проблем ефективності капіталовкладень операторів, забезпеченні мережевого покриття за порівняно короткі терміни без зниження якості послуг, що надаються абоненту, та зменшенні числа антен мобільного зв'язку, яке сприятиме покращенню екологічного середовища, приведені далі постановки задач є досить актуальними.

Дослідження цієї роботи присвячене розгляду прикладних задач оптимального розміщення БС мережі мобільного зв'язку сумісного використання з одночасним розбиттям заданої області абонентів на зони обслуговування. Метою роботи є приведення результатів застосування алгоритмів, побудованих в [4; 5], до поставлених задач.

Постановка задач. У області обслуговування (абонентів) Ω довільної форми, необхідно розмістити п'ять БС сумісного використання (Network sharing) трьома операторами мобільного зв'язку, з метою оптимізації загальної вартості виробничих витрат та витрат на доставку трафіку від БС до абонентів з урахуванням розподілу їх попиту на послуги операторів.

Трафік – це об'єм електронних даних, що передається по мобільній мережі. Базовою одиницею вимірювання трафіка є мегабайт.

Для побудови математичної моделі сформульованої вище задачі розглянемо мапу правобережної частини м. Дніпродзержинськ, введемо декартову систему координат з нулем у нижньому лівому куті (рис. 1).

Рис. 1. Мапа місцевості, в якій необхідно розмістити БС систем мобільного зв'язку

Модельна задача 1. Задано множину $\Omega = \{(xy):0 \le x \le 14,\ 0 \le y \le 7\}$ абонентів мобільного зв'язку, які можуть користуватися послугами трьох операторів ($j = \overline{1,3}$), що сумісно використовують інфраструктуру п'яти БС $(i = \overline{1,5})$.

Вартість транспортування одиниці трафіка j-им оператором від i-тої БС до абонента з координатами (xy) задається відповідно до виду оператора:

$$c^j(xy,\tau_i) = \begin{cases} \sqrt{\left(x-\tau_i^{(1)}\right)^2+\left(y-\tau_i^{(2)}\right)^2}, & \text{якщо } j=1; \\ \max\left\{\left|x-\tau_i^{(1)}\right|,\left|y-\tau_i^{(2)}\right|\right\}, & \text{якщо } j=2; \\ \left|x-\tau_i^{(1)}\right|+\left|y-\tau_i^{(2)}\right|, & \text{якщо } j=3. \end{cases}$$

$\tau_1, \tau_2, \ldots,$ – пункти можливого розміщення БС; $\rho^j(xy)$ – попит абонента (xy) у пропускній спроможності j-го оператора ($j = \overline{1,3}$).

Передбачається, що прибуток оператора залежить від його витрат, які є сумою виробничих витрат (устаткування майданчика, будівництво, радіоустаткування, експлуатація і обслуговування) і витрат на доставку трафіку. Для кожної i-тої БС задана функція $\varphi_i^j(Y)$, що описує залежність вартості виробництва від її потужності Y_i^j, яка визначається за формулою

$$Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho(xy)\,dx\,dy \quad ,$$

і приведені капітальні витрати на реконструкцію i-тої БС з метою збільшення її потужності від існуючої до проектної Y_i^j.

Множину Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i^j абонентів i-тою БС послугами j-того оператора, причому потужність i-тої БС, що сумісно використовується трьома операторами, визначається сумарною активністю абонентів, що належить Ω_i^j, $j=\overline{1,3}$, і не повинна перевищувати заданих об'ємів:

$$0 \le \sum_{j=1}^{3} \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dx\,dy \le b_i, \quad i=1,3,4.$$

$$b_1 = 75, \; b_3 = 150, \; b_4 = 70,$$

а для БС з номерами $i=2,5$ повинна дорівнювати заданим об'ємам:

$$\sum_{j=1}^{3} \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dx\,dy = b_i, \; i=2,5, \; b_2 = 35, \; b_5 = 20,$$

при чому виконуються умови розв'язності задачі:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{35} \rho^j(x)\,dx \le b_{ii}, \; 0 \le b \le S, \; i=1,2,3,4,5. \tag{1}$$

Не виключається, що деякі з підмножин Ω_i^j, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,3}$ виявляться порожніми.

Необхідно розбити множину абонентів Ω на їх зони обслуговування Ω_i^j п'ятьма БС системи мобільного зв'язку окремо по кожному з трьох операторів, так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i^j = \Omega, \; j=\overline{1,3}, \; mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \; i \ne k, \; i, \; k=\overline{1,5}, j=\overline{1,3},$$

з метою мінімізації функціоналу сумарних витрат операторів:

$$F\left(\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_5^1\}, \{\Omega_1^2,\ldots,\Omega_5^2\}, \{\Omega_1^3,\ldots,\Omega_5^3\}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{35} \left[\varphi_{ii}^j \left(\iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dx + \iint_{\Omega_i^j} c^j(x,y,\tau)\rho^j(x,y)\,dx\,dy \right) \right].$$

Слід зазначити, що в різних точках області Ω попит абонентів на послуги операторів буде різним. Це обумовлено тим, що існують площі зелених насаджень, водойми, крім того, враховуючи поверховість будинків, різні райони мають різну щільність населення, а також існуванням різних операторів мобільного зв'язку.

При розв'язанні задачі будемо розглядати наступні випадки:

1) попит вважаємо рівномірно розподіленим по всій області Ω, якщо за кількісну характеристику попиту прийнято середню щільність населення за всіма районами правобережної частини міста Дніпродзержинська. У незаселених районах міста попит вважатимемо рівним досить маленькому значенню. Тоді попит абонентів на послуги операторів можна представити у вигляді наступної мапи, зображеної на рис. 2.

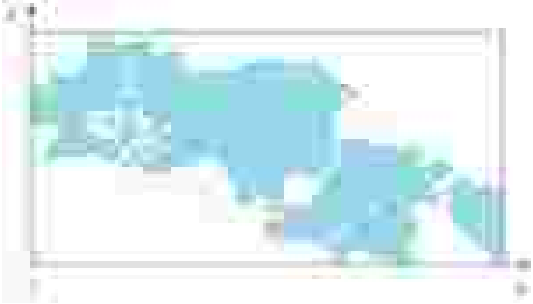


Рис. 2. Рівномірно розподілений попит в області Ω

2) Попит вважаємо нерівномірно розподіленим в області Ω, якщо в кожному районі попит дорівнюватиме середній щільності населення з урахуванням промислових зон, а на незаселених районах міста вважатимемо рівним досить маленькому значенню. У цьому випадку мапа попиту може мати наступний вигляд (рис. 3).

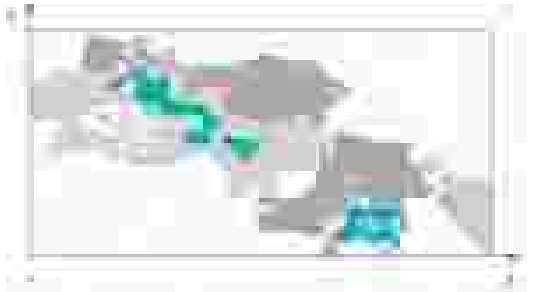


Рис. 3. Нерівномірно розподілений попит в області Ω

Множина Ω покривалася сіткою з вузлами (ij), $i=1,...,150, j=1,...,80$.

В якості початкових значень двоїстих змінних задано $\psi_i^{(0)} = 0$, початкові координати розміщення БС:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 3.2; 6.3; 8.4; 9.3; 13.5 \\ 5.2; 3.6; 6.1; 1.4; 2.1 \end{pmatrix}.$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності

$$\left\|\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)-\left(Y^{(k+1)},\psi^{(k+1)}\right)\right\|\le\varepsilon,\quad \varepsilon=10^{-4}.$$

Попит на послуги операторів вважаємо розподіленим нерівномірно.

За *108* ітерацій отримано:

- оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування п'ятьма БС окремо по кожному з трьох операторів мобільного зв'язку представлено на рис. *4*

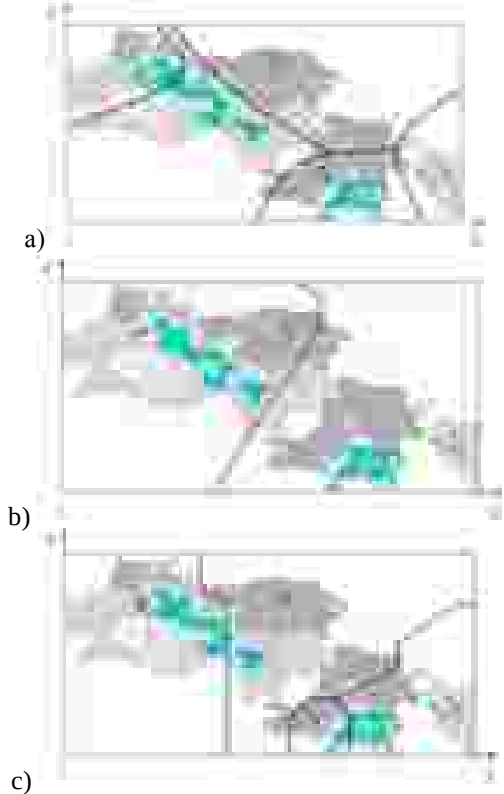


Рис. 4. Оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування кожною з п'яти БС з фіксованими центрами трьома операторами мобільного зв'язку для модельної задачі 1:
a) для I_го оператора; b) для II_го оператора; c) для III_го оператора

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4861.11$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4849.08$;

- оптимальні потужності кожної з п’яти БС:

$$Y_1^* = 28.35;\ Y_2^* = 34.97;\ Y_3^* = 24.42;\ Y_4^* = 30.08;\ Y_5^* = 19.77.$$

Модельна задача 2. У постановці першої модельної задачі попит на послуги операторів задамо рівномірно розподіленим по всій області Ω. За таких умов, після 50 ітерації, отримано наступні результати:

- оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування п'ятьма БС окремо по кожному з трьох операторів мобільного зв’язку представлено на рис. 5

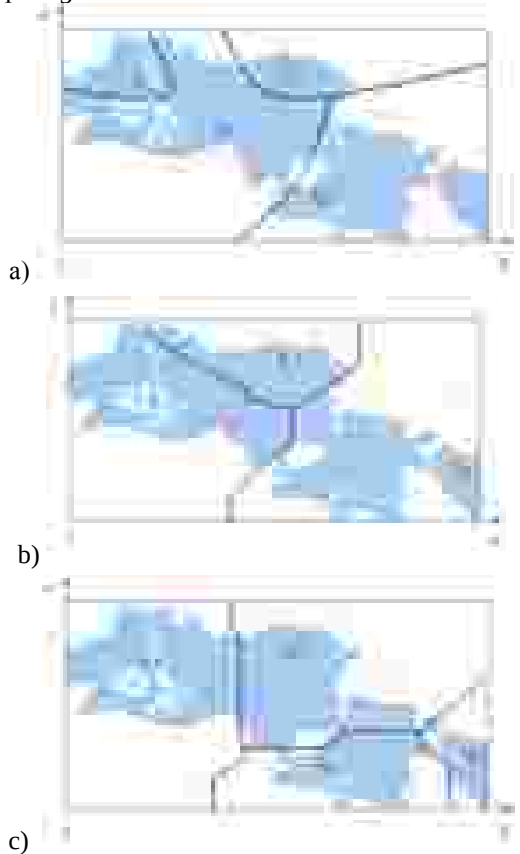


Рис. 5. Оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування кожною з п'яти БС з фіксованими центрами трьома операторами мобільного зв’язку для модельної задачі 2:
a) для I_го оператора; b) для II_го оператора; c) для III_го оператора

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4455.84$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4439.16$;
- оптимальні потужності кожної з п'яти БС:

$$Y_1^* = 26.02;\ Y_2^* = 34.91;\ Y_3^* = 22.48;\ Y_4^* = 26.46;\ Y_5^* = 19.98.$$

Модельна задача 3. У постановці модельної задачі *1* задамо умову розмістити БС. У цьому випадку цільовий функціонал сумарних витрат операторів набуває вигляду:

$$F\left(\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_5^1\},\{\Omega_1^2,\ldots,\Omega_5^2\},\{\Omega_1^3,\ldots,\Omega_5^3\},(\tau_1,\ldots,\tau_5)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{35}\sum_{i=1}^{5}\left[\phi_i^j\left(\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x,y)dxdy\right) + \iint_{\Omega_i^j} c^j(x,y,\tau_i)\rho^j(x,y)dxdy\right].$$

Якщо початкові координати розміщення БС $\tau_i^{(0)} = (0;0)$, $i = \overline{1,5}$, то після *86* ітерації отримаємо наступні результати:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4715.03$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4724.81$;
- оптимальні потужності кожної з п'яти БС:

$$Y_1^* = 28.11;\ Y_2^* = 34.96;\ Y_3^* = 25.58;\ Y_4^* = 29.37;\ Y_5^* = 19.96;$$

- оптимальні координати розміщених БС:

$$\tau_1^* = (10.4;\ 0.91),\ \tau_2^* = (5.44;\ 3.7),\ \tau_3^* = (9.65;\ 0.91),$$

$$\tau_4^* = (3.25;\ 5.13),\ \tau_5^* = (4.34;\ 4.39);$$

- оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування п'ятьма БС окремо по кожному з трьох операторів мобільного зв'язку представлено на рис. 6.

Модельна задача 4. У постановці *модельної задачі 3* попит на послуги операторів задамо рівномірно розподіленим по всій області Ω, тоді після *80* ітерації отримаємо наступні результати:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4326.32$;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4304.48$;
- оптимальні потужності кожної з п'яти БС:

$$Y_1^* = 25.80;\ Y_2^* = 34.99;\ Y_3^* = 22.94;\ Y_4^* = 26.19;\ Y_5^* = 19.95;$$

- оптимальні координати розміщених БС:

$$\tau_1^* = (7.2;\ 3.17),\ \tau_2^* = (7.95;\ 3.16),\ \tau_3^* = (11.62;\ 1.53),$$

$$\tau_4^* = (2.94;\ 4.76),\ \tau_5^* = (3.58;\ 4.49);$$

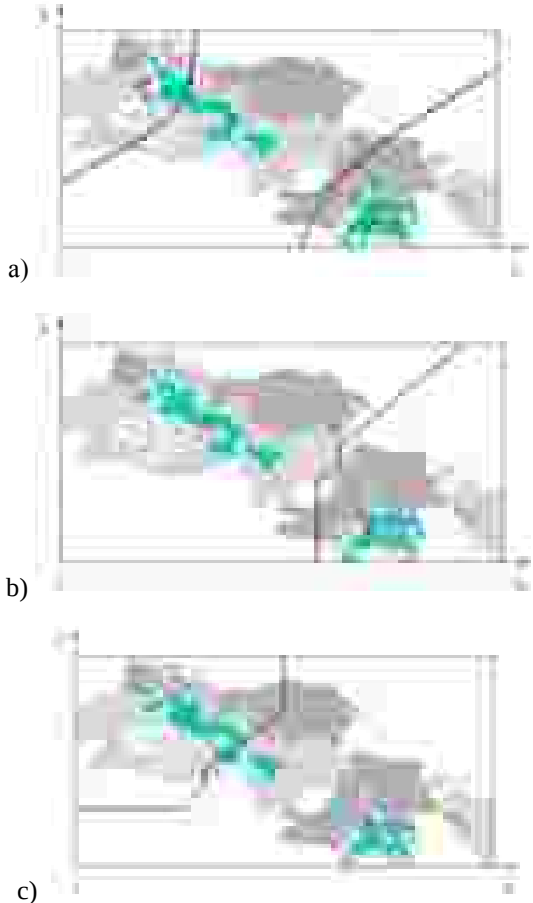


Рис. 6. Оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування кожною з п'яти БС з розмі енням їх центрів трьома операторами мобільного зв'язку для модельної задачі 3:
a) для I_го оператора; b) для II_го оператора; c) для III_го оператора

– оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування п'ятьма БС окремо по кожному з трьох операторів мобільного зв'язку представлено на рис. 7.

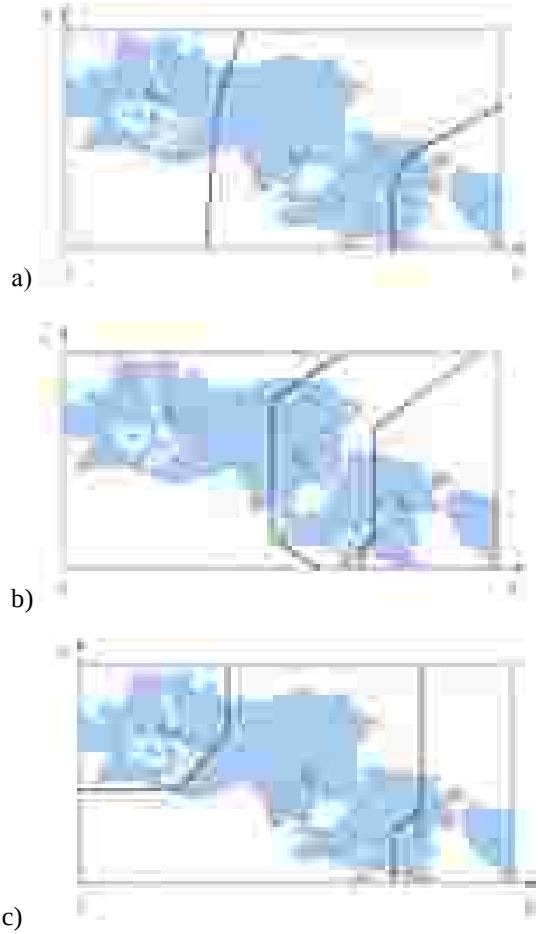


Рис. 7. Оптимальне розбиття множини абонентів Ω на зони обслуговування кожною з п'яти БС з розмі енням їх центрів трьома операторами мобільного зв'язку для модельної задачі 4:
a) для I-го оператора; b) для II-го оператора; c) для III-го оператора

Отже, за результатами розглянутих модельних задач *1-4* випливає наступне:

1. для кожної із задач виконуються умови розв'язності (1), тобто загальна оптимальна потужність п'яти БС, яка отримана за алгоритмами розв'язання (для *задачі 1* це 137.59, для *задачі 2* це 129.85,

для *задачі 3* це 137.98, а *для задачі 4* це 129.87) не перевищує $S = 350$ – суми заданих потужностей БС;

2. отримані оптимальні потужності 2-ї та 5-ї БС у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме $Y_2^* \approx 35$, $Y_5^* \approx 20$;
3. кількість ітерацій у задачах з нерівномірним попитом на послуги операторів мобільного зв'язку (*модельні задачі 1, 3*) більша за кількість ітерацій, отриманих при розв'язанні відповідних задач з рівномірним попитом (*модельні задачі 2, 4*);
4. оптимальне значення функціоналів прямої та двоїстої задач з розміщеними підприємствами (*модельні задачі 1, 2*) більше за відповідні значення у випадку з умовою розміщення базових станцій (*модельні задачі 3, 4*).

Попит на послуги операторів мобільного зв'язку	Задачі з розміщеними БС			Задачі з розміщенням БС		
	кількість ітерацій	*Оптимальні значення функціоналів*		кількість ітерацій	*Оптимальні значення функціоналів*	
		прямого, F_*	двоїстого, G^*		прямого, F_*	двоїстого, G^*
Нерівномірний в області Ω	*модельна задача 1*			*модельна задача 3*		
	108	4849,08	4861,12	86	4724,81	4715,03
Рівномірний в області Ω	*модельна задача 2*			*модельна задача 4*		
	50	4439,16	4455,84	80	4304,85	4326,32

Висновки. Приведено результати оптимального розміщення базових станцій сумісного використання декількома операторами мобільного зв'язку, які надають послуги абонентам з певної області та її розподіл на зони обслуговування кожною базовою станцією для кожного з операторів залежно від попиту абонентів на їх послуги. За допомогою розробленого програмного продукту одержано графічну візуалізацію числових результатів. Проведено аналіз отриманих результатів.

Бібліографічні посилання

1. **Betroni H.L.** UNF Propagation Predict for Wireless Personal Communications / H.L. Betroni, W. Honcharenko, L.R. Maciel, X.L. Xia // Proceedings of IEEE – 1994. – Vol. 82, № 9.
2. **Маковеева М.М.** Системы связи с подвижными объектами / М.М.Маковеева, Ю.С. Шинаков // – М., 2002. – 440 с.
3. **Волкова Н.Б.** Бизнес-модель «совместное использование сетей» как элемент посткризисной стратегии операторов мобильной связи / Н.Б. Волкова // Вестник связи. – 2010. – № 7. – С. 15–17, № 8. – С. 9–15.

4. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – Д., 2011. – С. 151-166.
5. **Киселёва Е.М.** Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е.М. Киселёва, В.А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40 – 53.

Надійшла до редколегії: 21.05.2012

УДК 519.8

О.М. Кісельова, П.В. Сьомчина
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

НЕПЕРЕРВНА НЕЧІТКА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ З РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ

Представлена неперервна задача оптимального розбиття множини без обмежень з відшуканням центрів в умовах невизначеності. В якості невизначеності розглядається нечітке розбиття. Реалізовано алгоритм розв'язання задачі, наведено приклади.

Представлена непрерывная задача оптимального разбиения множества без ограничений с отысканием центров в условиях неопределенности. В качестве неопределенности рассматривается нечеткое разбиение. Реализован алгоритм решения задачи, приведены примеры.

The continuous set partitioning problem without constrains and with centers' searching in conditions of uncertainty was presented. Fuzzy partition was considered as an uncertainty. Algorithm solving this problem was implemented, examples were shown.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, функція приналежності, нечітке розбиття.

Вступ. Вимога знаходження однозначного (чіткого) розбиття елементів множини Ω з E_N може виявитися досить грубою і жорсткою при вирішенні задач з погано або слабо структурованою вихідною інформацією, тобто задач, в яких невизначеність має нечітко-ймовірносну природу. Ослаблення цієї вимоги здійснюється за рахунок введення в розгляд нечітких підмножин множини і відповідних їм функцій приналежності, що приймають значення з відрізка [0; 1] [1; 4; 8].

Постановка задачі. Нехай Ω з E_N – обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина. Через $\Re^N_\Omega$ позначимо клас усіх можливих нечітких розбиттів $\Re^N_\Omega$ чіткої множини Ω на N нечітких підмножин. Введемо на множині можливих нечітких розбиттів цільовий функціонал $(F: \Re^{N1}_\Omega \quad R)$ у вигляді

© *О.М. Кісельова, П.В. Сьомчина, 2012*

$$F(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx,$$

де функції $c(x, \tau_i)$ – задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)},\ldots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1,\ldots, N$; $\rho(x)$ – задана, обмежена, вимірна на Ω функція; $a_1,\ldots, a_n$ – задані невід'ємні числа.

Під неперервною однопродуктовою задачею оптимального нечіткого розбиття множини з n -мірного евклідового простору E_N на нечіткі підмножини із заданим положенням «центрів» підмножин без обмежень будемо розуміти таку задачу.

Нехай заданий початковий вектор $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N)$, $\tau_i \in \Omega \forall\ i=\overline{1,N}$, який будемо інтерпретувати як вектор центрів N нечітких підмножин деякого нечіткого розбиття з $\Re_\Omega^N$. Знайти таке нечітке розбиття $\Re(\Omega) = \{\Omega_i | \Omega_i \subseteq \Omega,\ \forall i=\overline{1,N}\}$ множини Ω з безлічі розбиттів $\Re_\Omega^N$, яке є рішенням наступної задачі оптимального нечіткого розбиття:

$$F(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx \to \min_{(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}.$$

Тут під «мінімізацією» будемо розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому сенсі найкраще нечітке значення цільового функціонала.

Для того, щоб мати можливість ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)$ множини Ω, потрібно знати вектор-функцію приналежності виду:

$$\mu(x)=(\mu_1(x),\ldots,\mu_N(x)),\quad x \in \Omega.$$

Переформулюємо задачу в термінах функцій приналежності.

Знайти пару елементів $(\mu^*(x),\tau^*)$, таку, що:

$$I(\mu_1(x),\ldots,\mu_N(x),\tau_1,\ldots,\tau_N)=$$

$$=\int_\Omega\sum_{k=1}^{N}(\mu_k(x))^m(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx \to \min_{\mu(x)\in M,\tau_k\in\Omega}, \qquad (1)$$

де

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k(x)=1 \quad \forall x \in \Omega$$

m – параметр, який називається експоненціальною вагою. Чим більше m, тим кінцева матриця нечіткого розбиття стає більш «розмазаною», і при $m \to \infty$ вона прийме вигляд $\mu = [1/N]$, що є дуже поганим рішенням, тому що всі об'єкти належать до всіх підмножин з однаковим ступенем. На сьогодні не існує теоретично обгрунтованого правила вибору значення експоненціальної ваги. Зазвичай встановлюють m=2.

Для інтерпретації отриманих результатів, а саме віднесення кожного вузла сітки до якої-небудь підмножини, або до нечіткого кордону, введемо наступне допоміжне поняття ступеня недовіри СН.

Ступінь недовіри $CH \in [0;1]$ – це мінімальне значення функції приналежності деякої нечіткої множини, при якому дана точка може бути з упевненістю віднесена до цієї нечіткої множини, іншими словами, при якому ми вважаємо, що дана точка належить даній множині [2; 3; 6].

Очевидно,

$$I(\mu_1(x),...,\mu_N(x),\tau_1,...,\tau_N) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\mu(\bullet) \in M} I(\mu(\bullet),\tau) \right). \qquad (2)$$

Зауважимо, що при кожному фіксованому $\tau \in \Omega^N$, внутрішня задача – це задача A_1, яка, як встановлено в [6], може бути глобально вирішена (M – замкнута, обмежена й опукла множина гільбертого простору L_Ω^2, функціонал $F(\mu(x)) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} (\mu(x))^m (c(x,\tau_k) + a_k) \rho(x) dx$ – безперервний і для m=2 опуклий на M, тоді в силу узагальненої теореми Вейєрштрасса F досягає на M своєї нижньої межі) [5].

Зауважимо, що зовнішня задача (2) є кінченновимірною задачею по τ, в той час, як внутрішня задача з (2) - нескінченновимірна по μ.

Підводячи підсумки, рішення для першої компоненти $\mu_*(\bullet)$ оптимального рішення $(\mu_*(\bullet), \tau_*)$ задачі A_2 отримано для кожного фіксованого τ (див. рис. 1). Для відшукання ж другої компоненти $\tau_* = (\tau_{*1},...,\tau_{*N})$ оптимального рішення будемо вирішувати задачу кінченновимірної оптимізації, цільова функція якої є в загальному випадку багатоекстремальною недиференційною функцією.

Сформулюємо алгоритм рішення однопродуктової нечіткої задачі оптимального розбиття множини (ОРМ) без обмежень з відшуканням центрів підмножин, тобто задачу A_2, в основі якої лежать алгоритм вирішення безперервної нечіткої задачі ОРМ з фіксованими центрами і один з

варіантів методу узагальнених градієнтів (або так званий r-алгоритм), орієнтований у загальному випадку на відшукання локальних мінімумів недиференційної багатоекстремальної цільової функції задачі A_2.

Формула для розрахунку градієнта по τ для випадку, коли Ω - двовимірний простір

$$grad_\tau = \begin{pmatrix} \int\limits_\Omega \rho(x) \dfrac{-(x-\tau_1^x)}{\sqrt{(x-\tau_1^x)^2+(y-\tau_1^y)^2}} \mu_1^m(x) \\ \dots \\ \int\limits_\Omega \rho(x) \dfrac{-(y-\tau_N^y)}{\sqrt{(x-\tau_N^x)^2+(y-\tau_N^y)^2}} \mu_N^m(x) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

На рисунках 1, 2 представлено алгоритми розв'язання задач A_1 та A_2.

Результати роботи. Опишемо результати чисельних експерементів рішення задачі A_2 для одиничного квадрата з E_2 з евклідовою метрикою, з сіткою 50 х 50. Алгоритм було реалізовано на мові програмування С++, графічна інтерпретація результатів виконана засобами Matlab [7].

На рисунках, наведених нижче, центр підмножини, який було знайдено, позначений «+».

Приклад 1. Розбиття одиничного квадрата на три нечітких підмножини при рівних між собою a_i, i = 1, 2 та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 1

Початкові дані для розбиття на дві підмножини

№ підмножини	a_i	Точність
1	0	0,001
2	0	

Таблиця 2

Результати розбиття на дві підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0.25	0.5	0,1884	26
0.75	0.5		

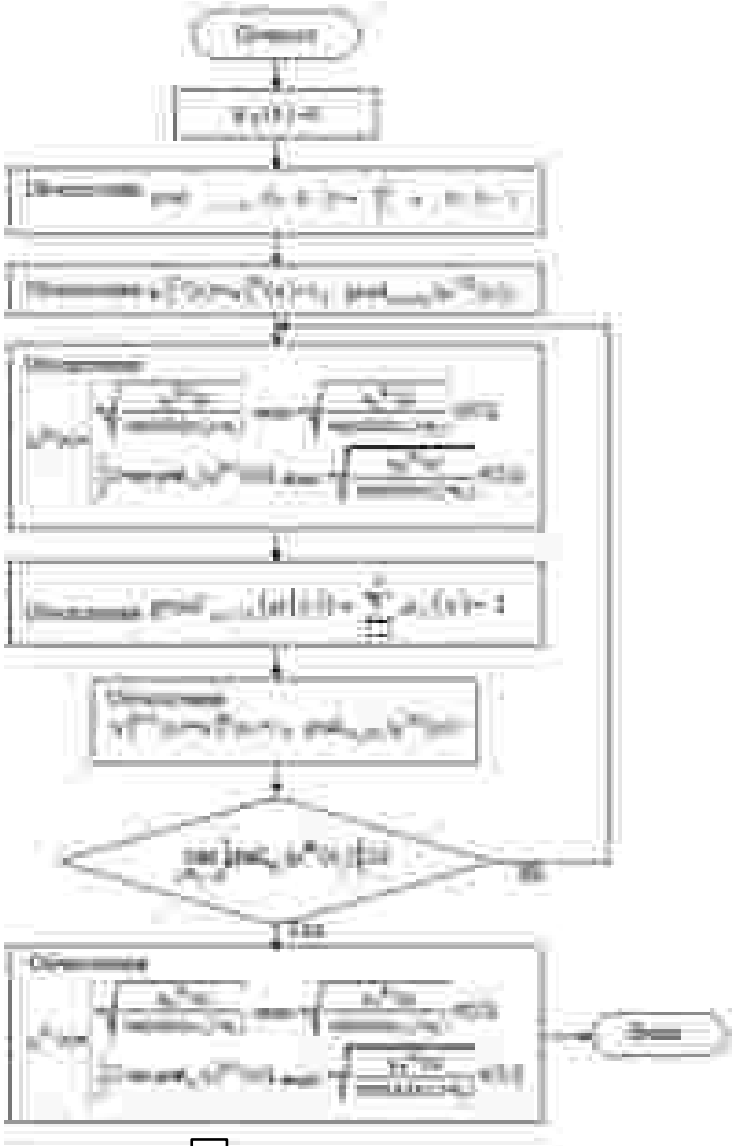


Рис. 1. Алгоритм розв'язання неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини з фіксованими центрами підмножин

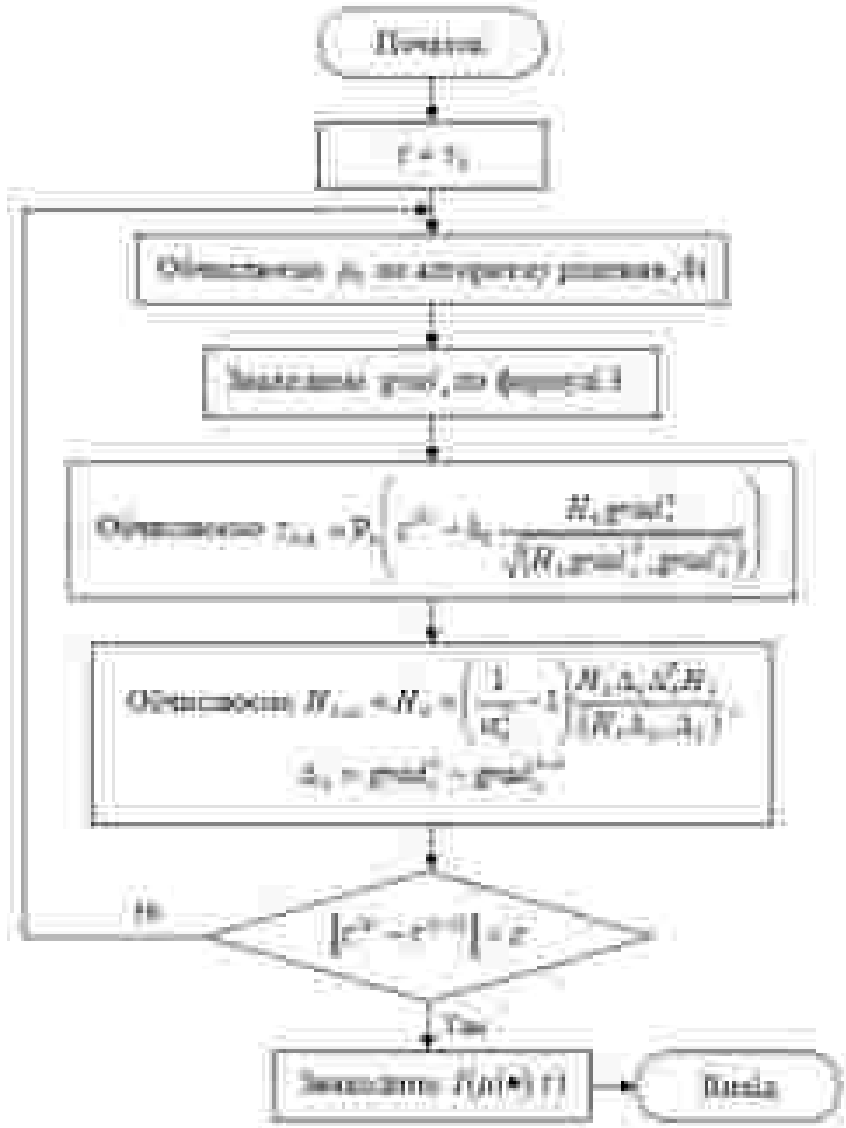


Рис. 2. Алгоритм розв'язання неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини з відшуканням центрів підмножин

Графічна ілюстрація:

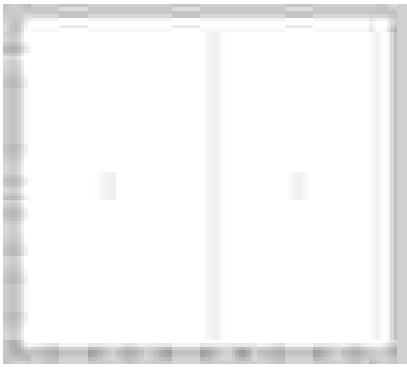


Рис. 3. Нечітке розбиття на дві підмножини (CH=0,0)

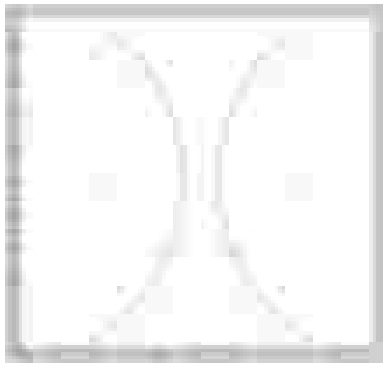


Рис. 4. Нечітке розбиття на дві підмножини (CH=0,6)

Як видно з рисунка 3, нечітке розбиття при CH=0,0 співпадає з чітким. При підвищенні ступеня недовіри (рис. 4) рамки нечіткого кордону розширюються, форма чітких областей наближається до кола. Це можна пояснити логічно: чим ближче вузол до центру, тим з більшою ймовірністю його можна віднести до даної підмножини. Ця думка підтверджується тим, що знайдені значення функцій приналежності дійсно збільшуються за мірою наближення до центру.

Приклад 2. Розбиття одиничного квадрата на три нечітких підмножини при нерівних між собою a_i, $i = 1, 2, 3$ та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 3

Початкові дані для розбиття на три підмножини

№ підмножини	a_i	Точність
1	0	0,001
2	0,2	
3	0	

Таблиця 4

Результати розбиття на дві підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0,503	0,206	0,1512	40
0,766	0,694		
0,229	0,691		

Графічна ілюстрація:

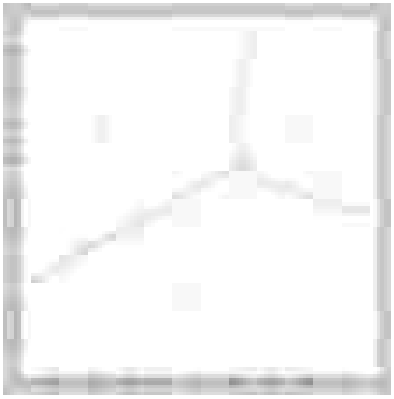


Рис. 5. Нечітке розбиття на три підмножини (CH=0,0)

Рис. 6. Нечітке розбиття на три підмножини (CH=0,45)

Цікавими є відозміни форми областей підмножин. Тепер на їх конфігурацію впливає дві криві: коло та гіпербола одночасно.

Приклад 3. Розбиття одиничного квадрата на десять нечітких підмножин при нерівних між собою $a_i=0$, $i = 1, \ldots, 10$, $a_2=0{,}2$, $a_9=0{,}25$ та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 5

Результати розбиття на три підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0.839	0.500	0,0414	121
0.500	0.628		
0.500	0.362		
0.499	0.883		
0.840	0.165		
0.160	0.500		
0.840	0.835		
0.161	0.165		
0.160	0.834		
0.500	0.112		

Графічна ілюстрація:

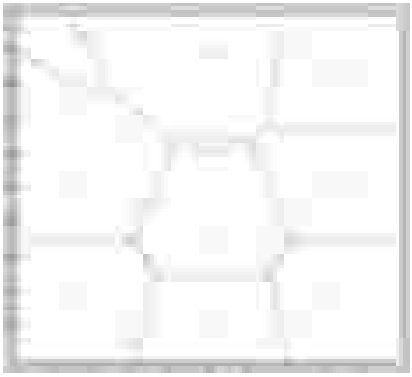


Рис. 7. Нечітке розбиття на десять підмножин (CH=0,0)

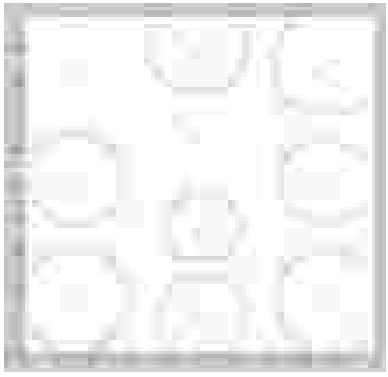
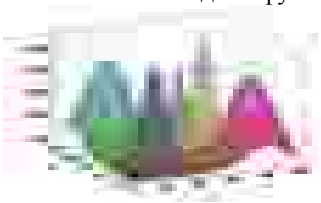


Рис. 8. Нечітке розбиття на десять підмножин (CH=0,3)

Як видно з рисунка 8, при підвищенні ступеня недовіри до підмножин 2 та 9 не увійшло жодної точки, що можна пояснити значеннями параметра a.

Приклад 4. Розбиття одиничного квадрата на п'ятнадцять нечітких підмножин при рівних між собою a_i, i = 1, ..., 15 та нерівномірному попиті ρ.

Попит задано функцією:



$$\rho(x) = K_0 + \frac{920623413}{2000000}\sum_{t=1}^{5} K_{1t}\exp[-\frac{1}{1000}\times$$
$$\times\left(K_{2t}\|x - x_t\| - K_{3t}\right)\|x - x_t\|]$$
$$K_0 = 5, K_1 = [10,10,8,8,8], K_3 = [20,30,10,10,10]$$
$$x_t = [(75,75),(25,25),(50,50),(20,80),(80,20)].$$

Таблиця 6

Результати розбиття на п'ятнадцять підмножин

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
1	2	3	4
0,87	0,294	15,55	164
0,352	0,834		
0,715	0,281		
0,111	0,891		

Закінчення таблиці 6

1	2	3	4
0.242	0.911		
0.872	0.134		
0.088	0.762		
0.162	0.649		
0.212	0.269		
0.715	0.128		
0.212	0.788		
0.303	0.695		
0.75	0.75		
0.5	0.499		
0.291	0.23		

Графічна ілюстрація:

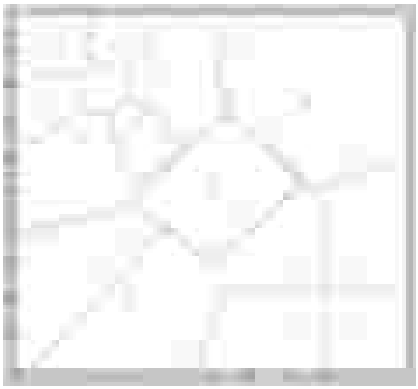


Рис. 9. Нечітке розбиття на п'ятнадцять підмножин (CH=0,0)

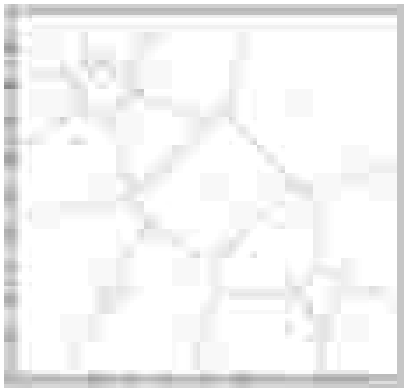


Рис. 10. Нечітке розбиття на п'ят- надцять підмножин (CH=0,06)

Висновки. Реалізовано алгоритм рішення неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини без обмежень з відшуканням центрів. Для різних значень коефіцієнтів a_i проведені чисельні експерименти. Також представлені результати для рівномірного та нерівномірного попиту ρ.

При підвищенні ступеня недовіри рамки нечіткого кордону розширюються, форма чітких областей наближається до кола.

Розбиття, представлені на рис. 3, 5, 7, 9 (ступінь недовіри дорівнює 0), повторює результат, отриманий для випадку чіткого розбиття. Відзначимо, що це досить вагомий результат, адже ні метод рішення, ні сам функціонал, який є нелінійним, не повторюють ідейно задання і методів для

чіткого розбиття. При підвищенні ступеня недовіри області підмножин деформуються.

При досить низькому ступеню недовіри, першими в область нечіткого кордону потрапили точки, що знаходяться між всіма множинами відразу.

Коефіцієнт a впливає на нечітке розбиття: чим більше значення коефіцієнта a_i, тим менша область належить даній підмножині.

Попит ρ впливає на положення шуканих центрів: скупчення цетрів під-множин відповідають максимальним значенням ρ.

Бібліографічні посилання

1. **Бочарников В.П.** Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике / В.П. Бочарников. – СПб., 2001. – 328 с.
2. **Васильев Ф.П.** Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М., 1974. – 376 с.
3. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М., 1981. – 400 с.
4. **Заде Л.А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений /Л.А. Заде. – М., 1976. – 167 с.
5. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М., 1977. – 742 с.
6. **Киселева Е.М.** Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств и их приложения: автореф. дис. на здобуття наукового ступеня д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Е.М. Киселева // Ин-т кибернетики АН Украины им. В.М. Глушкова. – К. – 1991. – 33 с.
7. **Леоненков А.В.** Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH /А.В. Леоненков. – СПб., 2003. – 736 с.
8. **Орловский С.А.** Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации /С.А. Орловский. – М., 1981. – 206 с.

Надійшла до редколегії 25.04.2012

УДК 519.8

И.В. [5]Козин, С.И. Полюга
Запорожский национальный університет

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СТР КТ РЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Розглянуто задачу опису бінарних операцій, о зберігають певні властивості елементів множини. Доведено зв'язок цієї задачі з властивостями метрики і метричною опуклістю, введено поняття геометричної операції. Досліджено спадкові властивості геометричних операцій для різних метричних просторів. Показано зв'язок спадкових операцій з еволюційними моделями .

Рассмотрена задача описания бинарных операций, сохраняю их определенные свойства элементов множеств. Доказана связь этой задачи со свойствами метрики и метрической выпуклостью, введено понятие геометрической операции. Исследованы наследственные свойства геометрических операций для разных метрических пространств. Показана связь наследственных операций с эволюционными моделями.

The problem of describing of binary operations which save certain properties of sets' elements is considered. The relationship between this problem and metric's properties and metric convexity was proven; the notion of geometric operation was introduced. Inharitance properties of geometric operations were investigated for the various metric spaces. The relationship between inharitance operations and evolutionary models was shown.

Ключевые слова: наследственное свойство, геометрическая операция, метрический отрезок, метрическая выпуклость, эволюционная модель, кроссовер.

Введение. Постановка проблемы. Пусть задано произвольное непустое множество X и бинарная операция $Kr : X \times X \to X$ на этом множестве. Свойством ε на множестве X будем называть произвольное отображение $\varepsilon : X \to \{0,1\}$. Будем говорить, что элемент $x \in X$ обладает свойством ε в том и только в том случае, когда $\varepsilon(x) = 1$. Свойство ε называется невырожденным, если $\{x \in X : \varepsilon(x) = 1\} \neq \varnothing$ и $\{x \in X : \varepsilon(x) = 0\} \neq \varnothing$. В дальнейшем будем рассматривать лишь невырожденные свойства.

© *И.В. Козин, С.И. Полюга, 2012*

Определение 1. Свойство ε будем называть наследственным относительно бинарной операции Kr, если

1) из условий $\varepsilon(x)=1$, $\varepsilon(y)=1$ следует, что $\varepsilon(Kr(x,y))=1$;
2) из условий $\varepsilon(x)=0$, $\varepsilon(y)=0$ следует, что $\varepsilon(Kr(x,y))=0$.

Другими словами, свойство является наследственным для операции Kr, если из того что оба аргумента x,y бинарной операции Kr обладают свойством ε вытекает, что результат $Kr(x,y)$ также обладает этим свойством. Наоборот, если оба аргумента отображения Kr не обладают свойством ε, то и результат применения бинарной операции не обладает этим свойством.

Интересен следующий вопрос: при каких условиях на бинарную операцию Kr заданное свойство (или система свойств) является наследственным. Наоборот, можно ли для заданного отображения Kr указать систему наследственных свойств. В частности, этот вопрос возникает при построении эволюционных моделей и тесно связан с проблемой накопления свойств [1].

Наследственные структуры

Определение 2. Наследственной структурой будем называть пару (X,Θ), где X – множество, а Θ – функция, которая каждой паре точек $xy \in X$, ставит в соответствие подмножество $\Theta_{xy} \subseteq X$, причем:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall xy \in X,\ x \in \Theta_{xy}, y \in \Theta_{xy};\\ &2)\ \forall xy \in X,\ \Theta_{xy}=\Theta_{yx};\\ &3)\ \forall xy \in X,\ \forall z \in \Theta_{xy},\ \Theta_{xy} \supseteq \Theta_{xz} \cup \Theta_{zy}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Множество Θ_{xy} называется множеством потомков точек $xy \in X$. Таким образом, наследственная структура определяется совокупностью множеств потомков $\{\Theta_{xy}\}_{xy \in X}$ со свойствами (1).

Приведем теперь некоторые свойства наследственных структур.

Теорема 1. *Пусть задана наследственная структура* (X,Θ). *Тогда для любого точки* $x \in X$ *и любой точки* $y \in \Theta_{xx}$ *справедливо равенство* $\Theta_{xx}=\Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $y \in \Theta_{xx}$. Тогда, в соответствии с определением (1), получаем, что и $\Theta_{xy} \cup \Theta_{yx} \subseteq \Theta_{xx}$ и, соответственно, $\Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xx}$. С другой стороны, в соответствии с тем же определением, $\Theta_{xx} \cup \Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xy}$. Следовательно, $\Theta_{xx} = \Theta_{xy}$.

В частности, $\forall y \in \Theta_{xx}$ выполняется равенство $\Theta_{yy} = \Theta_{xx}$.

Теорема 2. *Пусть задана наследственная структура* (X, Θ). *Тогда для любого множества потомков* Θ_{xy} *и для любой точки* $z \in \Theta_{xy}$ *из условия* $y \in \Theta_{xz}$ *следует, что* $\Theta_{xz} = \Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $z \in \Theta_{xy}$. Тогда, в соответствии с (1), получаем, что и $\Theta_{xz} \subseteq \Theta_{xy}$. Если точка $y \in \Theta_{xz}$, то $\Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xz}$. Следовательно, $\Theta_{xz} = \Theta_{xy}$.

Заметим, что наличие наследственной структуры на множестве X позволяет определить на этом множестве структуры выпуклости [2].

Выпуклым подмножеством называется подмножество в X, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит множество потомков этих точек. Пустое множество , по определению , считается выпуклым. Очевидно следующее утверждение: пересечение любого числа выпуклых подмножеств выпукло.

Определение 3. Пусть задана наследственная структура (X, Θ). Выпуклой оболочкой подмножества $Y \subseteq X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств множества X, содержащих подмножество Y.

Другими словами – выпуклая оболочка подмножества $Y \subseteq X$ это наименьшее по включению выпуклое подмножество в X, содержащее Y.

Один из тривиальных примеров наследственной структуры – это разбиение множества. Пусть множество X разбито на k подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k$, причем:

$$1) \bigcup_{i=1}^{k} X_i = X;$$

$$2) \forall i, j, \ i \neq j \ X_i \cap X_j = \varnothing;$$

$$3) \forall i \ X_i \neq \varnothing.$$

Каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно одному элементу разбиения, который будем обозначать X_x. Множество всевозможных объединений элементов разбиения является наследственной структурой. Причем $\forall xy \in X \quad [xy] = X_{xy} \cup X$.

Наследственные структуры и метрика

В метрическом пространстве $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ с канонической эвклидовой метрикой естественным образом определяется наследственная структура. А именно: множествами потомков являются обычные (геометрические) отрезки в этом пространстве. Оказывается, наследственную структуру можно определить на любом метрическом пространстве.

Напомним, что метрическим пространством называется пара (X, ρ), где X – множество, $\rho : X \times X \to R^1$ – функция, со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall xy \in X,\ \rho(xy) \geq 0;\quad (xy) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ &2)\ \forall xy \in X,\ \rho(xy) = (yx); \\ &3)\ \forall xyz, \in X,\ \rho(xy) \leq \rho(xz) + \rho(zy). \end{aligned} \tag{2}$$

Метрическим отрезком (в дальнейшем – отрезком), соединяющим две точки x и y метрического пространства X, будем называть множество $[xy] = \{z \in X \mid \rho(xy) = \rho(xz) + \rho(zy)\}$.

Теорема 3. *Множество отрезков метрического пространства* (X, ρ) *образуют наследственную структуру.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) определения 2 для метрических отрезков с очевидностью вытекают из определения метрики. Докажем теперь свойство 3) наследственных структур. Пусть x, y – две произвольные точки пространства X. Возьмем произвольную точку $z \in [xy]$. Покажем, что $[xy] \supseteq [xz] \cup [zy]$. Пусть $u \in [xz]$. В соответствии с определением отрезка $\rho(xz) = \rho(xu) + \rho(uz)$. По определению расстояния $\rho(xy) \leq \rho(xu) + \rho(uy)$. С другой стороны имеем $\rho(xy) = \rho(xz) + \rho(zy) = \rho(xu) + \rho(uz) + \rho(zy) \geq \rho(xu) + \rho(uy)$. Таким образом $\rho(xy) = \rho(xu) + \rho(uy)$ и, следовательно, $[xz] \subseteq [xy]$.

Аналогично можно показать, что $[zy] \subseteq [xy]$ и потому $[xz] \cup [zy] \subseteq [xy]$.

Свойства 1) и 2) определения 2 для метрических отрезков с очевидностью вытекают из определения метрики. Докажем теперь свойство 3) наследственных структур. Пусть x, y – две произвольные точки пространства X. Возьмем произвольную точку $z \in [xu]$. Покажем, что $[xy] \supseteq [xz] \cup [zy]$. Пусть $u \in [xz]$. В соответствии с определением трезка $\rho(xu) + \rho(uz) = \rho(xz)$ $\rho(zu) + \rho(uy) = \rho(zy)$. По определению расстояния $\rho(xy) \le \rho(xu) + \rho(uy)$ С другой стороны, имеем соотношения $\rho(xy) = \rho(xz) + \rho(zy) = \rho(xu) + \rho(uz) + \rho(zy) \ge \rho(xu) + \rho(uy)$. Таким образом $\rho(xy) = \rho(xu) + \rho(uy)$ и, следовательно, $[xz] \subseteq [xy]$. Аналогично можно показать, что $[zy] \subseteq [xy]$ и потому $[xz] \cup [zy] \subseteq [xy]$.

Таким образом, на метрическом пространстве всегда определена наследственная структура, состоящая из всего множества отрезков.

Многочисленные примеры метрических пространств и их свойства подробно исследованы в [3]. Рассмотрим лишь некоторые из этих примеров и опишем отрезки в соответствующих метрических пространствах.

Эвклидово пространство с канонической метрикой

В векторном пространстве $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ стандартная (эвклидова) метрика задается следующим равенством:

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$$

$$\rho_{эвкл}(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

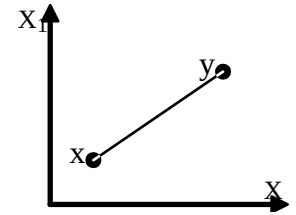


Рис.1. Отрезок между двумя точками в R^n

В этой метрике отрезок между точками выглядит как обычный отрезок прямой (рис.1). Выпуклые множества определяются обычным образом – это множества, которые вместе с каждыми своими двумя точками содержат отрезок, соединяющий эти точки.

Пространство с манхеттенской метрикой

Приведем другой пример метрики в векторном пространстве R^n. Манхеттенская метрика (метрика городских кварталов) определяет расстояние между точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ формулой

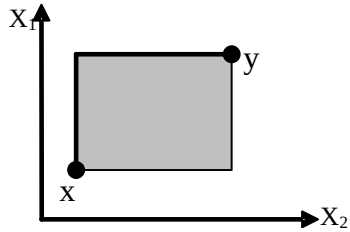


Рис.2. Отрезок между двумя точками в R^n в манхеттенской метрике

$$\rho_{manh}(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + ... + |y_n - x_n|.$$

Пример отрезка $[x, y]$ в этой метрике изображен на рис.2. Интересно, что выпуклыми множествами в такой метрике являются прямоугольные параллелепипеды различных размерностей и только они.

Бинарное n-мерное пространство и метрика Хэмминга

Рассмотрим теперь бинарное n-мерное пространство $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$, где $x_i \in \{0,1\}$ $\forall i = 1,2,..., n$. Стандартная метрика в этом пространстве – метрика Хэмминга. Расстояние между точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется, как количество позиций, в которых различаются координаты этих точек

$$\rho_{Hem}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|.$$

Например, расстояние Хэмминга между точками (1,0,1,1,0,1) и (0,1,1,0,1,0) в шестимерном бинарном пространстве равно 5.

Определение 4. Схемой Холланда [1] называется слово вида $s = s_1 s_2 ... s_N$, где $s_i \in \{0,1,*\}$. Каждая схема определяет некоторое подмножество $A_{sN} = \{a_1, a_2, ..., a_N\} \subset \{0,1\}^N$,

где $a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } s_i = 0; \\ 1, & \text{если } s_i = 1; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } s_i = *. \end{cases}$

Это подмножество также будем называть схемой. Таким образом, схема – это определенный шаблон для бинарных последовательностей. Если N=6, то примерами схем будут следующие строки: 1**1**, **101*, 1001*0 и так далее. Знаки схемы, отличные от «*» называются значащими.

Теорема 4. *Любой отрезок между двумя точками бинарного пространства – является схемой Холланда. Наоборот, всякая невырожденная (имеющая значащие знаки) схема Холланда является отрезком.*

Доказательство. Пусть x,y – две произвольные точки пространства B^n. Построим схему s следующим образом: на месте с номером i в схеме ставится значащий элемент (0 или 1), если этот элемент присутствует на месте с номером i как в x, так и в y. В противном случае в схеме ставится знак «*». Расстояние от любого элемента z этой схемы до элемента x равно числу отличий между x и z в позициях соответствующих знаку «*» в схеме. Но если в позиции i знаки в x и z различны, то в этой же позиции знаки в y и z совпадают (по определению схемы s). Таким образом, $\rho_{Hem}(xy) = \rho_{Hem}(xz) + \rho_{Hem}(zy)$ и, следовательно, схема s содержится в отрезке $[x,y]$. С другой стороны, в соответствии с определением расстояния Хемминга, для каждой точки отрезка $z \in [xy]$ в позиции каждого значащего знака схемы s знак z совпадает со знаками x и y. Таким образом, отрезок $[x,y]$ содержится в схеме s и, следовательно, совпадает с этой схемой.

Пример: Для точек (1,0,1,1,0,1) и (0,1,1,0,1,0) отрезок между ними задается схемой (*,*,1,*,*,*).

Отметим одно из свойств схем Холланда. Объединение любых двух схем также является схемой. Из этого очевидного свойства вытекает, что в бинарном пространстве выпуклыми множествами являются отрезки и только они.

Пространство перестановок

Следующий интересный пример метрического пространства это пространство перестановок S_n. Каждый элемент этого пространства описывается перестановкой $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, где все координаты попарно различные числа из множества $\{1,2,\ldots,n\}$.

Расстояние между точками пространства S_n может быть определено различными способами. Приведем некоторые из них.

1) расстояние Хэмминга – расстояние между перестановками определяется как количество позиций перестановок, в которых элементы перестановок различаются;

2) метрика Кэли – минимальное количество транспозиций элементов,

которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую;

3) метрика Кэндалла – минимальное количество транспозиций соседних элементов, которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую.

Пусть $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ S. Запись $ij <_s$ будет означать, что в перестановке s элемент i предшествует элементу j. Определим порядковую матрицу (a_{ij}^s) перестановки s следующим образом:

$$a_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{если } ij <_s ; \\ -1 & \text{если } j <_s ; \\ 0 & \text{если } ij = . \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть* $u = u_1 u_2 ... u_n$ *и* $v = v_1 v_2 ... v_n$. *Расстояние Кэндалла между перестановками* u *и* v *определяется формулой*

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij}^{v} - a_{ij}^{u} | . \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $u \neq v$. Тогда в перестановке v найдутся два соседних элемента i, j такие, что

$$i <_v j \text{ и } j <_u i . \qquad (4)$$

Действительно, пусть таких элементов в перестановке v нет. Выберем в перестановке v наиболее близкие элементы i, j обладающие указанным свойством. Выберем элемент k между элементами j и i в перестановке v. Тогда имеем $i <_u j$, $j <_v k <_v i$. Но это означает, что в перестановке u либо $ki <_u$, либо $jk <_u$. В любом случае i, j не являются ближайшими, обладающими свойством (4), в перестановке v. Следовательно, обязательно найдутся соседние элементы i, j в перестановке v, обладающие свойством (4). Последовательно меняя местами в перестановке v соседние элементы, обладающие свойством (4) можно перейти к перестановке u за минимальное число шагов, равное $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij}^{v} - a_{ij}^{u} \|$. Это и будет расстояние Кэндалла между перестновками.

Попытаемся теперь описать отрезок межу двумя перестановками в метрике Кэндалла.

Теорема 6. *В метрике Кэндалла отрезком, соединяющим перестановки, является множество всех перестановок, сохраняющих относительный порядок между элементами в u, и v, а именно:* $[uv] = \{w \in S_n : i <_u j \text{ и } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$.

Доказательство. Обозначим через $W = \{w \in S_n : i <_u j \text{ и } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$. Тогда, в соответствии с (3), для всякой перестановки $w \in W$ имеет место равенство $\rho(uv) = \rho(uw) + \rho(wv)$ и потому $W \subseteq [ab]$. Пусть перестановка w принадлежит отрезку $[uv]$, соединяющему перестановки $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ и $v = v_1 v_2 \ldots v_n$. Тогда если $ij <_u$ и $ij <_v$, то этот же порядок элементов i, j присутствует и в перестановке w. В противном случае удалось бы уменьшить число транспозиций соседних элементов, позволяющих перейти от u к v. Следовательно, $[ab] \subseteq W$ и теорема доказана.

Можно показать, что любое выпуклое множество в метрике Кэндалла является отрезком. Отметим одно интересное свойство: шар в этой метрике, т. е. множество элементов вида $\{u \in S_n \mid (u_0, u) \le r\}$ вообще говоря, не является выпуклым множеством [4]

Геометрические операции

Пусть множество X является метрическим пространством с метрикой $\rho : X \times X \to R^1_+$. Рассмотрим бинарную операцию $Kr : X \times X \to X$.

Определение 5. Бинарная операция на метрическом пространстве (X, ρ) называется геометрической, если для любых $xy \in X$ результат этой операции $Kr(x, y)$ принадлежит отрезку $[x, y]$, соединяющему точки x и y. Другими словами, $\forall xy \in X \quad \rho(xy) = \rho(x, Kr(x, y)) + \rho(Kr(x, y), y)$.

Напомним, что на метрическом пространстве определена структура наследственности, которая состоит из множества всех отрезков пространства. Таким образом, для геометрической операции имеют место свойства наследования. Наследуется принадлежность элементов одному отрезку.

В [5] доказан ряд необходимых условий геометричности операции. Приведем их с небольшими изменениями в виде теорем.

Теорема 7. (Свойство чистоты) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr : X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $\forall x \in X \quad Kr(x, x) = x$.

Теорема 8. (Свойство конвергенции) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr: X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $\forall x,y,z \in X$ и $z = Kr(Kr(x,y),y)$ *из условия* $z \neq x$ *следовало, что* $Kr(x,y) = x$.

Теорема 9. (Свойство делимости) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr: X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $z \in [x,y]$ и $w \in [x,z] \cap [z,y]$ *следовало, что* $z = x$ *или* $z = y$.

Полные системы наследственных свойств

Определение 6. Система свойств $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ называется полной системой свойств, если эти свойства попарно различны, то есть

$$\forall x,y \in X \ \exists k \in \{1,2,...,s\} \ \varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y).$$

Заметим, что в соответствии с определением, полные системы наследственных свойств могут существовать лишь на конечных множествах. Однако это понятие легко обобщается и на случай бесконечных множеств.

Теорема 10. *Для того чтобы существовала полная система наследственных свойств* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ *на конечном множестве X с бинарной операцией* $Kr: X \times X \to X$, *необходимо и достаточно, чтобы на множестве X существовала метрика, в которой операция* Kr *была бы геометрической.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ - полная система наследственных свойств на множестве X. Определим метрику

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{s} |\varepsilon_k(y) - \varepsilon_k(x)|. \qquad (5)$$

Свойства метрики (2) проверяются непосредственно.

Для произвольных элементов $x,y \in X$ обозначим $z = Kr(x,y)$. Так как операция Kr является наследственной по отношению к свойствам ε_k $k = 1,2,...$, то $\varepsilon_k(z) = \varepsilon_k(x)$, при $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k(y)$ и $|\varepsilon_k(x) - \varepsilon_k(y)| = |\varepsilon_k(x) - \varepsilon_k(z)| + |\varepsilon_k(y) - \varepsilon_k(z)|$, в том случае, когда $\varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y)$. Таким образом, $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$ и, следовательно, кроссовер является геометрическим в метрике (5).

Достаточность. Для каждой пары точек $a,b \in X$ определим свойство P_{ab} – принадлежит выпуклой оболочке отрезка, соединяющему точки a

и b. Эта система свойств является полной. Действительно, если $x \neq y$, то элемент x обладает свойством P_{xx}, а элемент y свойством P_{xx} не обладает.

Покажем, что свойство P_{ab} является наследственным для геометрической операции. Пусть два элемента $x, y \in X$ обладают свойством P_{ab}. Обозначим $z = Kr(x, y)$. В силу геометричности операции, точка z принадлежит отрезку $[xy]$ и, следовательно, точка z обладает свойством P_{ab}. Таким образом, любое из свойств P_{ab} является наследственным.

Использование в эволюционных моделях

Среди эвристических подходов к поиску приближенных решений оптимизационных задач достойное место занимают эволюционные модели [1; 6–8]. На сегодня особенно актуальным является вопрос о сходимости эволюционного алгоритма и оценки качества приближенных решений, получаемых с его помощью. Одним из немногих значимых результатов в этой области является классическая теорема схем для эволюционной модели на бинарном пространстве [1; 8]. Теорема схем показывает, что при работе генетического алгоритма происходит накопление элементов тех схем, для которых среднее значение критерия отбора выше среднего значения критерия для всего множества решений. Это, в какой-то степени, дает теоретическое обоснование сходимости эволюционного алгоритма. Однако вопрос о более точных оценках и гарантиях сходимости остается открытым. Теорема схем может быть легко обобщена на другие эволюционные модели с другими пространствами поиска при наличии наследственных свойств для операции кроссовера. Имеет место следующая теорема, с очевидностью вытекающая из вышеизложенных результатов.

Теорема 11. *Для того, чтобы эволюционная модель обладала наследственными свойствами достаточно, чтобы оператор кроссовера для этой модели был геометрическим.*

Таким образом, можно рекомендовать следующую методику построения эволюционных моделей прикладных задач: на первом шаге выбирается подходящее базовое пространство, элементы которого кодируют решения оптимизационной задачи, далее выбирается метрика в этом пространстве, определяются отрезки и выпуклые множества, после этого строится оператор кроссовера, который является геометрическим в выбранной метрике. Такой подход гарантирует сходимость в среднем для

эволюционного алгоритма и позволяет получать решения задачи близкие к оптимальным. На первом этапе эволюционного моделирования можно сформировать покрытие базового пространства выпуклыми множествами и строить начальные популяции в рамках элементов этого покрытия. Это позволяет значительно расширить пространство поиска и, соответственно, улучшить качество эволюционной модели.

Выводы. В работе доказано, что наследственные структуры на произвольном множестве могут быть построены с помощью задания метрики на этом множестве. При этом, наследственная структура задается семейством выпуклых оболочек отрезков в заданной метрике. Показано, что наличие полной системы наследственных , относительно некоторой бинарной операции на конечном множестве , определяет метрику на этом множестве, в которой операция является геометрической. Наоборот, наличие геометрической бинарной операции на множестве автоматически определяет полную систему наследственных свойств. Показано, как полученные результаты могут быть применены при построении эволюционных моделей для поиска оптимальных решений в прикладных задачах. В частности, доказано достаточное условие наличия наследственных свойств в эволюционных моделях – геометричность операции кроссовера.

Библиографические ссылки

1. **Holland J. H**. Adaptation in Natural and Artificial Systems / J. H. Holland. – Boston, – 1992. – 288 p.
2. **Солтан В.П.** Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / В.П.Солтан. – Кишенев, 1984. – 224 с.
3. **Деза Е. И**. Энциклопедический словарь растояний. / Е. И. Деза, М. М. Деза – М., 2008. – 432 с.
4. **Козин И. В**. Об оценке мощности шарового покрытия пространства перестановок/ И. В. Козин, А. С. Бондаренко, С. И. Полюга // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. с 009. – № 1. – С. 134 – 138
5. **Moraglio A.** Inbreeding Properties of Geometric Crossover and Non-geometric Recombinations / A. Moraglio, R. Poli //Foundations of Genetic Algorithms, 2007, P. 114.
6. **Mitchel M**. An Introduction to Genetic Algorithms / M. Mitchel. – Cambridge, 1998. – 158 p.
7. **Емельянов В. В**. Теория и практика эволюционного моделирования./ В. В. Емельянов, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – М., 2003. – 432 с.
8. **Скобцов Ю.А.** Основы эволюционных вычислений : учеб. пособ. / Ю.А. Скобцов. – Донецк, 2008. – 326 с.

Надійшла до редколегії 21.05.2012

УДК 519.246.8

Н.В. Комарова

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

МЕТОД БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ С НОРМАЛИЗОВАННЫМ ЕВКЛИДОВЫМ РАССТОЯНИЕМ

Пропонується використання нормалізованої евклідової відстані у методі найближчих сусідів для прогнозування часових рядів, приводиться порівняльний аналіз застосування методу до прогнозу цін на метали та металопродукцію.

Предлагается использование нормализованного евклидового расстояния в методе ближайших соседей для прогнозирования временных рядов, приводится сравнительный анализ результатов применения метода для прогноза цен на металлы и металлопродукцию.

In the article the using of normalized Euclidian distance is considered in the nearest neighbor method for time series forecasting; the results of the method application to metal and steel product prices forecasting are analyzed in comparison with the results of other methods.

Ключевые слова: нормализованное евклидово расстояние, метод ближайших соседей, прогнозирование, временные ряды.

Вступление. Анализ и прогнозирование временных рядов – важная задача во многих областях исследований. Основными инструментами ее решения являются статистические методы, среди которых наиболее широкое распространение получили методы авторегрессии и скользящего среднего. Однако их применение для прогноза многих временных рядов, описывающих сложные системы, не дает удовлетворительных результатов.

Новый подход предложила нелинейная динамика, изучающая структуру и свойства эволюционных процессов в нелинейных динамических системах.

Постановка задачи. Нестационарные временные ряды встречаются довольно часто. Известно, что классические методы авторегрессии, сколь-

© *Н.В. Комарова, 2012*

зящего среднего и индексов сезонности часто не являются адекватным инструментом их прогнозирования. Поэтому возникает задача поиска метода прогнозирования, который можно было бы использовать для широкого класса нестационарных временных рядов. Одним из методов, используемых для прогнозирования нестационарных временных рядов, является метод ближайших соседей, предложенный нелинейной динамикой. Зачастую в методе используется евклидово расстояние, однако результаты прогноза при этом не всегда удовлетворительны, в частности, когда ряд имеет ярко выраженный тренд. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

Подход к решению

Метод ближайших соседей прогнозирования временных рядов. В последнее время при решении задачи прогнозирования временных рядов широко используется метод ближайших соседей, предложенный нелинейной динамикой (нелинейная динамика изучает структуру и свойства эволюционных процессов в нелинейных динамических системах).

Пусть $\{x_i,\ i=1,2,...,N\}$ – временной ряд. По значениям $x_i,\ i=1,2,...,M-1,$ временного ряда необходимо построить прогноз $\tilde{x}_M$ его значения x_M в момент времени $M.$ Для прогнозирования воспользуемся классическим методом ближайших соседей в его простейшем варианте одного ближайшего соседа нулевого порядка [1]. Строим фазовую траекторию временного ряда $\{x_i,\ i=1,2,...,N\}$ – последовательность точек с координатами $\mathbf{x}_i=(x_i, x_{i+\tau},..., x_{i+(m-1)\tau}),$ $i=1,2,...,N-(m-1)\tau;\ (m,\tau<<N)$ в пространстве IR^m. Для точки $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}=(x_{M-1-(m-1)\tau}, x_{M-1-(m-2)\tau},..., x_{M-1})$ находим точку $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}=(x_{k-1-(m-1)\tau}, x_{k-1-(m-2)\tau},..., x_{k-1})$ фазовой траектории, ближайшую к точке $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}$. Следующей за точкой $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}$ фазовой траектории является точка $\mathbf{x}_{k-(m-1)\tau}=(x_{k-(m-1)\tau}, x_{k-(m-1)\tau+1},..., x_k).$ Согласно методу ближайших соседей в качестве прогноза $\tilde{x}_M$ значения x_M временного ряда в момент M принимается значение x_k. Если необходимо построить прогноз на несколько точек $x_M, x_{M+1},.., x_{M+L}$, то, как правило, в

качестве прогнозных значений $\tilde{x}_M, \tilde{x}_{M+1}, ..., \tilde{x}_{M+L}$ рассматривают значения $x_k, x_{k+1}, .., x_{k+L}$ временного ряда.

Прогноз можно строить по двум и большему числу ближайших соседей, и в этом случае в качестве прогнозных значений рассматривается среднее или средневзвешенное значение прогнозов по каждому из ближайших соседей.

Выбор параметров m фазового пространства IR^m и параметра и τ является отдельной задачей. На практике не худшим вариантом оказывается подбор этих параметров.

Нормализованное евклидово расстояние. В методе ближайших соседей в качестве меры близости между точками фазового пространства, как правило, используют евклидово расстояние. В настоящей работе в качестве меры близости предложено использовать так называемое нормализованное евклидово расстояние.

Введем обозначения:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x})$, $\|x\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, d_E – евклидова метрика в IR^n.

Определим нормализованное евклидово расстояние d_{NE} между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{IR}^n$ равенством

$$d_{NE}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} - \frac{y_i - \bar{y}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|} \right)^2 \right)^{1/2} = d_E\left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}, \frac{\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|} \right). \quad (1)$$

Нормализованное евклидово расстояние, хотя и определяется через евклидову метрику, но само на IR^n метрикой не является, уже хотя бы потому, что из $d_{NE}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ не следует равенство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Например, если $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + \mathbf{b}$, то $d_{NE}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Заметим также, что d_{NE} не определено

для пары точек, среди которых хотя бы одна имеет вид $\mathbf{c} = (c, c, ..., c)$. Поэтому далее, когда мы будем говорить о нормализованном евклидовом расстоянии между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, всегда будем предполагать, что они не равны константам, т. е. $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ отличны от $\mathbf{c} = (c, c, ..., c)$.

Нормализованное евклидово расстояние d_{NE} обладает следующими свойствами:

1. $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.
2. $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$.
3. $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{NE}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
4. $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_{NE}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Свойство 1 очевидно.

Свойство 2. Из $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ очевидно следует $d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ таковы, что

$$d_{NE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_E\left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}, \frac{\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}\right) = 0,$$

тогда $\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} = \frac{\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}$. Из последнего равенства для $\mathbf{y}$ получаем представление

$$\mathbf{y} = \frac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} \cdot \mathbf{x} + \left(\bar{\mathbf{y}} - \frac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} \cdot \bar{\mathbf{x}}\right) = a\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где $a = \dfrac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}$, $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}} - \dfrac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|} \cdot \bar{\mathbf{x}}$.

Свойство 3 следует из определения (1) d_{NE} .

Свойство 4 следует из соотношений

$$d_{NE}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_E\left(\frac{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\|}, \frac{\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}\|}\right) \le$$

$$\le d_E\left(\frac{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\|}, \frac{\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}\|}\right) + d_E\left(\frac{\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}\|}, \frac{\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}\|}\right) = d_{NE}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_{NE}(\mathbf{z},\mathbf{y}).$$

Метод ближайших соседей с нормализованным евклидовым рассто янием. Для построения прогноза $\tilde{x}_M$ значения x_M временного ряда $\{x_i,\ i = 1,2,...,N\}$ сначала для точки $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} = (x_{M-1-(m-1)\tau}, x_{M-1-(m-2)\tau}, ..., x_{M-1})$ находим ближайшего соседа $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}$, принадлежащего фазовой траектории в IR^m (ближайшего в смысле нормализованного евклидового расстояния). Ближайший сосед в смысле нормализованного евклидового расстояния существует (выбор производится из конечного множества), но, вообще говоря, не единственный.

Точки вида $\mathbf{y}_{k-1-(m-1)\tau} = a\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \mathbf{b}$ из пространства IR^m имеют такое же расстояние (в смысле нормализованного евклидового расстояния) до точки $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}$, как и точка $\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}$. Действительно,

$$d_{NE}(a\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \mathbf{b}, \mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}) =$$

$$= d_E\left(\frac{a\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \mathbf{b} - a\bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau} - \mathbf{b}}{\|a\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \mathbf{b} - a\bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau} - \mathbf{b}\|}, \frac{\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}}{\|\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}\|}\right) =$$

$$= d_E\left(\frac{a(\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau})}{a\left\|\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau}\right\|}, \frac{\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}}{\left\|\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}\right\|}\right) =$$

$$= d_E\left(\frac{\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau}}{\left\|\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1-(m-1)\tau}\right\|}, \frac{\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}}{\left\|\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau} - \bar{\mathbf{x}}_{M-1-(m-1)\tau}\right\|}\right) =$$

$$= d_{NE}(\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau}, \mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}).$$

Обозначим $L(\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}) = \{\mathbf{y}_{k-1-(m-1)\tau} = a\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \mathbf{b} : a \in \mathrm{IR}^1 \backslash \{0\}, \mathbf{b} = (b, b, ..., b) \in \mathrm{IR}^m\}$.

Из множества $L(\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau})$ выбираем точку $\tilde{\mathbf{x}}_M$, ближайшую точку к $\mathbf{x}_{M-1-(m-1)\tau}$ (в смысле евклидового расстояния):

$$\tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{a}\mathbf{x}_{k-1-(m-1)\tau} + \tilde{\mathbf{b}}.$$

$$\tilde{a} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{L} x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot x_{k-1-(m-i)\tau} - \sum_{i=1}^{L} x_{M-1-(m-i)\tau} \sum_{i=1}^{L} x_{k-1-(m-i)\tau}\right)}{n\sum_{i=1}^{L} x^2_{k-1-(m-i)\tau} - \left(\sum_{i=1}^{L} x_{k-1-(m-i)\tau}\right)^2};$$

$$\tilde{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot \sum_{i=1}^{L} x^2_{k-1-(m-i)\tau} - \sum_{i=1}^{L} x_{M-1-(m-i)\tau} \cdot x_{k-1-(m-i)\tau} \sum_{i=1}^{L} x_{k-1-(m-i)\tau}\right)}{n\sum_{i=1}^{L} x^2_{k-1-(m-i)\tau} - \left(\sum_{i=1}^{L} x_{k-1-(m-i)\tau}\right)^2}.$$

Значение $\tilde{x}_M = \tilde{a}x_k + \tilde{b}$ будем рассматривать в качестве прогноза значения x_M временного ряда $\{x_i,\ i = 1,2,..., N\}$.

Сравнение различных методов прогнозирования цен. Метод ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием был применен

для прогноза цен на металлы. Прогноз строился на 6 месяцев – июль-декабрь 2010 г. В качестве прогноза значений $x_M, x_{M+1}, \ldots, x_{M+5}$ брались значения $\tilde{x}_M, \tilde{x}_{M+1}, \ldots, \tilde{x}_{M+5}$.

Интерес представляет сравнение прогнозов, построенных методом ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием и другими методами (в частности, методом ближайших соседей с евклидовым расстоянием).

На рис. 1 приведены исторические (март 2001 г – июнь 2010 г) значения очищенных от инфляции цен (в $/тонну) на стальной г/к рулон, алюминий и цинк. Для этих показателей далее разными методами строились прогнозы на 6 месяцев (июль – декабрь 2010 г).

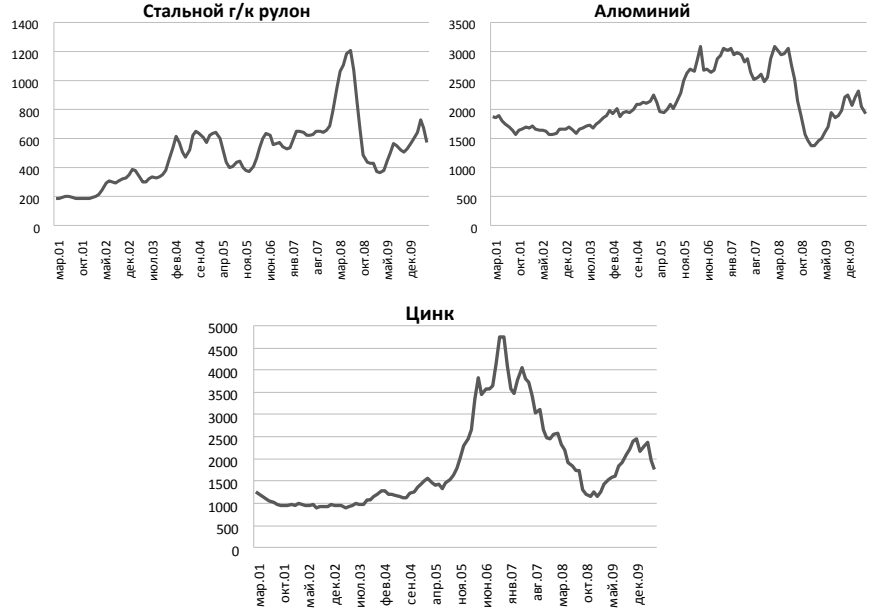


Рис. 1. Динамика цен на различные виды металлов (очи енных от инфляции), март 2001 – июнь 2010, $/т

Были применены следующие методы прогноза: метод ближайших соседей с использованием евклидового расстояния (БСЕ), и метод ближай-

ших соседей с использованием нормализованного евклидового расстояния (БСН$_{\text{E}}$); метод авторегрессии и скользящего среднего (АРСС); метод индексов сезонности (ИС). В случае метода ближайших соседей были построены прогнозы при m=9 и τ=3.

Для каждого показателя с помощью перечисленных методов прогнозирования построены по два прогноза: первый, когда значения цен в 2008 г, соответствующие периоду кризиса, не использовались для построения прогноза (с исключением кризиса), и второй, когда использовались (без исключения кризиса). Для метода АРСС в первом случае использовалась модель с интервенциями.

Результаты прогнозирования показаны на графиках (см. рис. 2 – 4).

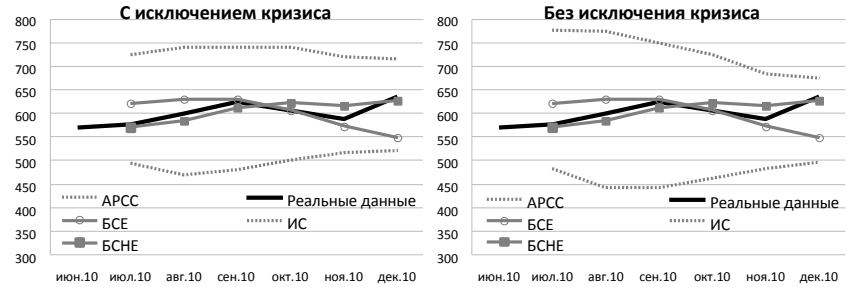


Рис. 2. Реальные значения цены на г/к рулон и прогноз на июль–декабрь 2010 г., полученный методами АРСС, БСЕ, БСНЕ, ИС

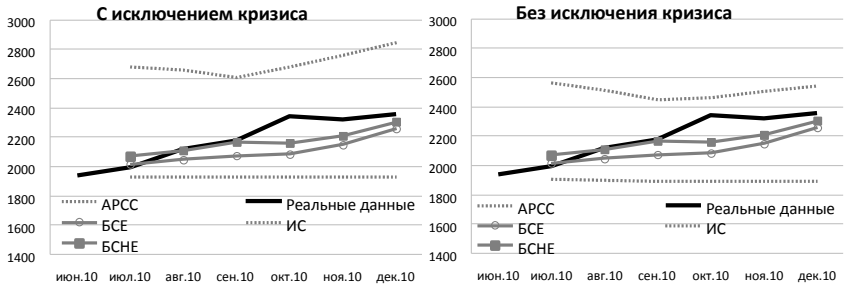


Рис. 3. Реальные значения цены на алюминий и прогноз на июль–декабрь 2010 г., полученный методами АРСС, БСЕ, БСНЕ, ИС

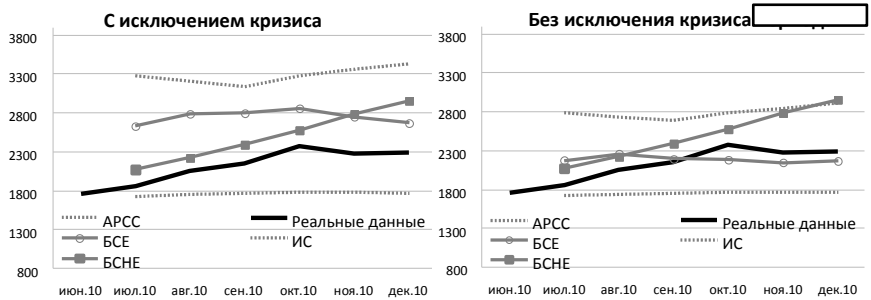


Рис. 4. Реальные значения цены на цинк и прогноз на июль–декабрь 2010 г., полученный методами АРСС, БСЕ, БСНЕ, ИС

В табл. 1 приведены средние погрешности прогнозирования цен:

$$\Delta_1 = 100\% \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{5} (\tilde{x}_{M+i} - x_{M+i}) / x_{M+i};$$

и средние абсолютные погрешности:

$$\Delta_2 = 100\% \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{5} | \tilde{x}_{M+i} - x_{M+i} | / x_{M+i}.$$

Таблица 1

Погрешности прогнозов, полученных различными методами

Показатель	Метод	Погрешность			
		С исключением кризиса		Без исключения кризиса	
		Δ_1	Δ_2	Δ_1	Δ_2
Цена на г/к рулон	БСЕ	− 0,4 %	5 %	− 0,4 %	5 %
	БСНЕ	0,1 %	2 %	0,1 %	2 %
	ИС	21 %	21 %	21 %	21 %
	АРСС	− 18 %	18 %	− 23 %	23 %
Цена на алюминий	БСЕ	− 5 %	5 %	− 5 %	5 %
	БСНЕ	− 2 %	3 %	− 2 %	3 %
	ИС	22 %	22 %	13 %	13 %
	АРСС	− 13 %	13 %	− 14 %	14 %
Цена на цинк	БСЕ	28 %	28 %	2 %	8 %
	БСНЕ	15 %	15 %	15 %	15 %
	ИС	52 %	52 %	30 %	30 %
	АРСС	− 18 %	18 %	− 19 %	19 %

Во всех рассмотренных случаях лучшие прогнозы давал метод ближайших соседей с использованием нормализованного евклидова расстояния.

Замечание. Предложенный метод также апробировался для прогноза цен на г/к рулон на периоды продолжительностью в 6 мес. начиная с периода [июнь 09, июль 09,…, дек. 09] и заканчивая периодом [июнь 10, июль 10,…, дек. 10]. При этом погрешности имеют такой же порядок, как и приведенные в таблице.

Выводы. В статье показаны преимущества метода ближайших соседей с нормализованным евклидовым расстоянием при прогнозировании нестационарных временных рядов на примерах нестационарных рядов цен на металлы и металлопродукцию.

Библиографические ссылки

1. **Зульпукаров М.Г.М.** Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга–Макартура. / М.Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (препринт) – 2006. – № 21.
2. **Лоскутов А.Ю.** Временные ряды: анализ и прогноз. / А.Ю. Лоскутов, О.Л. Котляров, Д.И. Журавлев // Математика. Компьютер. Образование. Сборник трудов XI международной конференции. – Ижевск, 2004. – С. 9-46.
3. **Малинецкий Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики. / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М., 2000.
4. **Малинецкий Г.Г.** Русла и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем. / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. // ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (препринт). – 1998. – № 32.
5. **Комарова Н.В.** Некоторые инструменты нелинейной динамики в анализе и прогнозировании временных рядов. / Н.В. Комарова // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Зб. наукових праць. – Д., 2011. – С. 191-199.

Надійшла до редколегії 08.06.2012

УДК 519.85

Л.С. Коряшкіна, О.О. Сазонова
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ВИТРАТ ОБОРОТНОГО ЛОМ ПРИ ВИРОБНИЦТВІ СТАЛІ

Запропонована математична модель процесу оптимального розподілу наявного оборотного лому на виконання плану виробництва сталі з метою мінімізації витрат енергоресурсів.

Предложена математическая модель процесса оптимального распределения имею егося в наличии оборотного лома на выполнение плана производства стали с целью минимизации затрат энергоресурсов.

It is suggested the mathematical model of optimal admeasurement of the available scrap for execution of production plan in order to minimize energy costs.

Ключові слова: виробництво сталі, оптимізація, технологічний процес, оборотний лом.

Вступ. У [1] зазначені основні проблеми гірничо-металургійного комплексу України, серед яких високий рівень енерговитрат при виробництві металопродукції. Дійсно, енергетичні витрати виробництва української сталі на 20 – 25 % перевищує загальносвітовий рівень. Майже половина металургійного виробництва в Україні сьогодні використовує енергозатратну мартенівську технологію виплавки сталі. Нові ефективні рішення для економії енергоресурсів у металургії України впроваджуються поки що повільно. Причина цього в тому, що, незважаючи на технічне й технологічне відставання ряду металургійних підприємств, у їхніх власників нерідко відсутня мотивація для проведення реконструкції й модернізації виробництва, для вкладання в цей напрямок значних фінансових ресурсів.

Тому за сучасних умов розвитку металургійної галузі ключовою задачею для будь-якого металургійного підприємства стає пошук внутрішніх резервів для зниження витрат, розробка енерго- і ресурсозберігаючих технологічних режимів. Важливою складовою господарської діяльності підприємства стає розробка таких виробничих програм, в яких велика увага приділялася б збільшенню видобутку й споживання власної сировини; зниженню питомих витрат сировинних й енергетичних ресурсів; макси-

© *Л.С. Коряшкіна, О. О. Сазонова, 2012*

мальному використанню запасів сировини, матеріалів, запасних частин. У цьому зв'язку актуальним напрямком наукових досліджень в області прикладної математики є системний аналіз технологічних і фінансових процесів на підприємстві, застосування методів обчислювальної математики й оптимізації для кількісного обґрунтування вибору тієї або іншої програми функціонування підприємства.

Шихта складається з багатьох складових, залежно від виду сталі, що виготовляється. Основними складовими шихти, як правило [2], є: оборотний лом – лом, що утворюється на різних стадіях технологічного процесу при виробництві металевої продукції, і вторинні чорні метали (ВЧМ) – сталевий або чавунний лом і їх відходи.

Оборотний лом є найціннішою складовою металошихти плавильних агрегатів і печей, його доцільно використати для виплавки сталі більш відповідального призначення, але на сьогодні його запаси обмежені, а в перспективі будуть ще меншими. Крім того, від кількості оборотного лома в шихті залежить час виплавки сталі, що, у свою чергу, визначає витрати енергетичних ресурсів і, як наслідок, собівартість продукції.

Дана робота присвячена розробці математичного і програмного забезпечення задачі мінімізації енерговитрат на виробництво запланованої кількості сталі за рахунок оптимального розподілу по шихтах оборотного лому, який виділено на виконання плану.

Постановка задачі оптимізації технологічного процесу виробництва сталі. Вихідні дані: 1) статистичні дані, що містять наступну інформацію: день; марка сталі, номенклатурний номер сталі, що виплавляється; час початку плавки і час її закінчення; вага шихти, вага оборотного лому, ВЧМ, чавуну, антрациту, інших складових; 2) план, в якому зазначена кількість та найменування марок сталі, які необхідно виготовити; 3) кількість оборотного лому, яку виділяють на виконання цього плану.

Необхідно:

1) Побудувати для кожної марки сталі функціональну залежність, на основі якої можна було б обчислити тривалість плавки за даними про вміст оборотного лому у ковші (час виробництва тієї чи іншої марки сталі залежить від співвідношення кількості оборотного лому до загальної кількості лому у ковші).

2) Розподілити оборотний лом, виділений на виконання виробничого плану, між плавками певних марок сталі так, щоб сумарний час, витрачений на усі плавки, був мінімальним.

Побудова математичної моделі. Введемо такі позначення:

1) K – кількість видів марок сталі, яку виготовляє металургійне підприємство;
2) $P = (p_1, p_2, ..., p_K)$ – план випуску продукції, де p_k – кількість плавок k-ой марки, $k = \overline{1, K}$;
3) $I = p_1 + p_2 + p_K$ – загальна кількість плавок, які необхідно здійснити за планом;
4) M – кількість оборотного лому, яка виділяється на виробництво запланованої кількості сталі різних типів;
5) S_i – максимальна кількість вмісту лому в ковші, що визначається нормативами технологічного процесу для i плавки, $i = \overline{1, I}$;
6) z_i – доля оборотного лому (від M) у шихті на i плавку, $i = \overline{1, I}$;
7) x_i – доля оборотного лому у ковші i плавки. Очевидно, що змінні x_i та z_i пов'язані функціональною залежністю: $x_i = \dfrac{Mz_i}{S_i}$, $i = \overline{1, I}$.

Нехай $f_i(x_i)$ – час, який витрачається на виплавку певної кількості i-ої марки сталі і залежить від частки оборотного лому у шихті. Вид функції $f_i(x_i)$ може бути отриманий, виходячи з результатів обробки статистичної інформації про проведені виплавки. Тоді критерієм якості задачі може бути адитивна функція $F = \sum_{i=1}^{I} f_i(x_i)$, яка описує сумарний час, витрачений на виробництво запланованої продукції. Мінімізація сумарної тривалості виплавки сталі у кількості, передбаченої за планом, еквівалентна мінімізації витрат енергоносіїв, і, як наслідок, собівартості продукції.

Таким чином, математична модель задачі оптимального розподілу оборотного лому з метою зменшення витрат на енергоресурси записується в такий спосіб :

$$F = \sum_{i=1}^{I} f_i\left(\frac{Mz_i}{S_i}\right) \to \min_{z \in \Omega},$$

$$\Omega = \left\{ z \in R^I : \; z_1 + z_2 + ... + z_I = 1, \; Mz_i \le S_i, \; z_i \ge 0, \; i = \overline{1, I} \right\}$$

Результати обчислювальних експериментів. В якості досліджуваних даних вибиралася інформація про здійснені виплавки у середньому за півроку. За цими даними:

1) Проаналізовано частоту виплавки сталі всіх марок, виявлені ті марки , що найчастіше здійснюються. Проведене сортування даних за марками сталі.
2) Аналізуючи отримані дані було виявлено, що тривалість плавки суттєво залежить від частки оборотного лому у шихті. Була висунута гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності. За допомогою методу спрямлених діаграм ця гіпотеза була підтверджена. Знайдена оцінка генеральної середньої (математичного сподівання) і середньо квадратичного відхилення. Було виявлено, що абсолютна величина відхилення майже усіх спостережуваних даних від їх середньої не перевищує потрійного середньо квадратичного відхилення, що за правилом 3-х сігм також свідчить про нормальний розподіл вибіркової сукупності. Спостереження, що не задовольняють вказаному правилу, були відкинуті й у подальших дослідженнях не враховувалися. Слід зауважити, що інформація про всі ті плавки, що були відкинуті, проаналізована з огляду на причини виникнення таких даних (вивчалися рапорти сталеварів про процес певної плавки).
3) За відібраними даними, по кожному типу сталі, побудована лінія тренду у вигляді поліному, обчислені коефіцієнти кореляції. Тим самим отримано функціональну залежність тривалості плавки від частки оборотного лому у плавці. Знайдені коефіцієнти кореляції підтверджують суттєву залежність цих величин (рис. 1, 2).

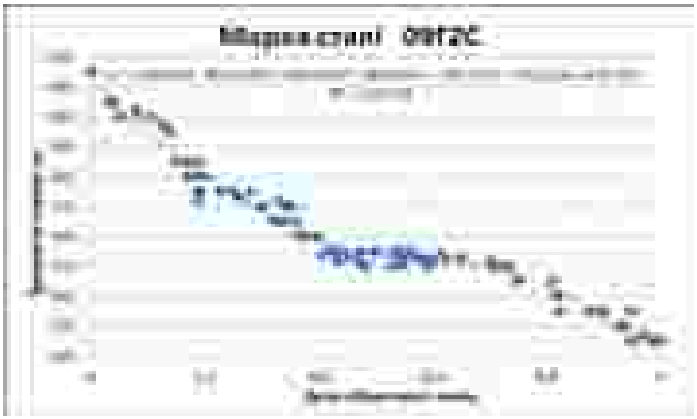


Рис. 1. Лінія тренду та коефіцієнт кореляції, розраховані для марки 09Г2С

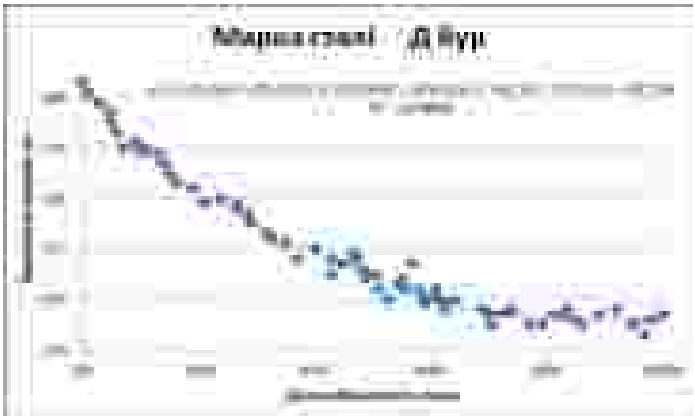


Рис. 2. Лінія тренду та коефіцієнт кореляції, розраховані для марки Д бур

Таким чином можна вважати, що залежність тривалості плавки від частки оборотного лому поліноміальна. Степінь полінома може бути різною для різних марок сталі, але не перевищує 6. Тому в процесі побудови математичної моделі задачі оптимізації розподілу оборотного лому по шихтах тривалість плавки будемо описувати поліномами порядку l, але не вище шостого. І, отже, функціонал побудованої моделі можна записати в такий спосіб:

$$F = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\left(\frac{Mz_i}{S_i}\right)^j \to \min_{z\in\Omega},$$

де $A = \{a_{ij}\}\, i = \overline{1, I}\;\; j = \overline{1, l}$ – матриця, що складається з коефіцієнтів многочлена степеня l, апроксимуючих залежність тривалості плавки від долі оборотного лому у шихті.

Після уточнення математичної моделі за рахунок визначення вище зазначеної функціональної залежності здійснюється перехід від задачі умовної нелінійної оптимізації до наступної задачі на безумовний мінімум:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}\left(\frac{Mz_i}{S_i}\right)^j + B\cdot\sum_{i=1}^{I}\max^2(Mz_i - S_i, 0) + B\cdot\left(\sum_{i=1}^{I} z_i - 1\right)^2 +$$

$$+ B\cdot\max^2(-z_i, 0) \to \min_{z\in R^I},$$

де B – дуже велике додатне число. Ця задача в розробленому програмному забезпеченні розв'язується за допомогою r-алгоритму Н.З. Шора [3] з оглядом на недиференційовність цільової функції.

Далі наведемо результати деяких обчислювальних експериментів.

Приклад 1. Візьмемо усі плавки, що виплавлялися за 7 січня (рис. 3). Кількість оборотного лому, яка виділялася на ці плавки, складала 145. До плану було внесено 4 плавки, такі як: «R 7/8», «32Г2», «Д», «09Г2С». Розподілили їх таким чином: «R 7/8» – 106,6 тон, «32Г2» – 12,44 тон, «Д» – 12,8 тон, «09Г2С» – 13,88 тон. Загальний час, який було витрачено на всі плавки, складав 2401 хвилину.

Рис. 3. План й розподілення оборотного лому на 07.01.2011

Результати розрахунків оптимального розподілу оборотного лому по шихтах, отримані під час програмної реалізації побудованої математичної моделі, наведені на рис. 4 та зведені у порівняльну таблицю 1.

Рис. 4. Розрахований розподіл оборотного лому між плавками на 07.01.2011

Якби виробництво використовувало програмний продукт, то час затрачений на виплавку скоротився б до 2304 хвилин.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця

Дата	План	Фактичний розподіл оборотного лому	Розподіл оборотного лому за отриманою моделью	Тривалість плавки		
				фактична	обчислена на основі функціональної залежності за фактичним розподіленням	обчислена на основі математичної моделі
07.01.11	R7 КП	106.6	0.4	516	516	555
07.01.11	32Г2 12"	12.44	77.03	695	695	592
07.01.11	Д 12"	12.08	16.46	585	585	582
07.01.11	09Г2С 11"	13.88	51.25	605	604	574
Сумарний час плавок				**2401**	**2399**	**2303**

Приклад 2. Візьмемо всі плавки, що виплавлялися за 12 березня (рис. 5). Кількість оборотного лому, яка виділялася на ці плавки, складала 320 тон. Лом між плавками було розподілено наступним чином: «R 7/8» – 76, 4 тон, «32Г2» – 73,2 тони, «ст 35, 45» – 52,61 тон, «Д бур» – 59, 49 тон, «GrB» – 58,36 тон, «32Г2» – 0 тон. У результаті загальний час, який витратили на плавки склав 3548 хвилин.

Рис. 5. Розрахований розподіл оборотного лому між плавками на 12.03.2011

Результати розрахунків оптимального розподілення оборотного брухту по шихтах, отриманого за допомогою побудованої математичної моделі, наведені на рис. 6 і зведені у таблицю 2.

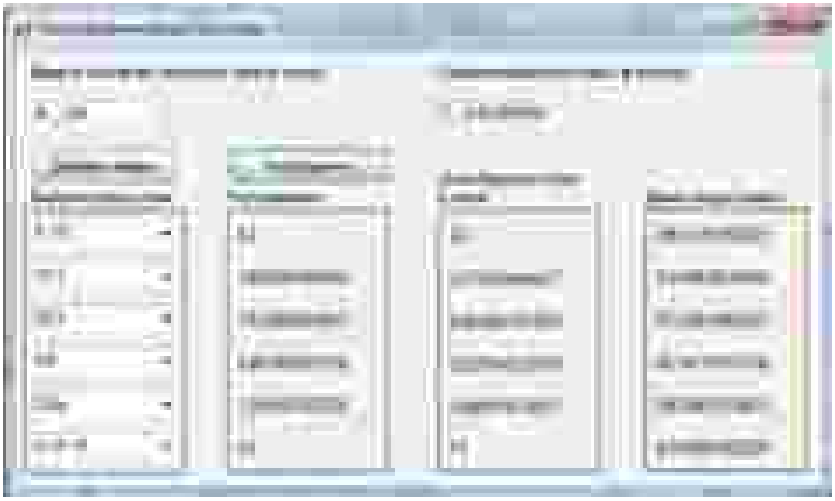


Рис. 4. Розрахований розподіл оборотного лому між плавками на 12.03.2011

Таблиця 2

загальнююча таблиця результатів за прикладом 2

Дата	План	Фактичний розподіл оборотного лому	Розподіл оборотного лому за моделлю	Тривалість плавки		
				факт	обчислена за отриманою функц. залежністю за фактичним розподілом	обчислена за моделлю
12.03.11	R8 КП	76,400	19,75	530	528	555
12.03.11	32Г2 12"	0,000	85,87	695	694	533
12.03.11	32Г2 11"	73,200	172,18	595	595	533
12.03.11	ст 45 9"	52,610	15,55	590	588	608
12.03.11	GrB 12"	58,46	26,91	579	578	586
12.03.11	ДбурFeV	59,49	0	559	558	602
				3548	3540	3418

Розглянуті приклади демонструють суттєву економію, враховуючи ціни на енергоносії. Результати обчислювальних експериментів свідчать про доцільність застосування запропонованого в роботі підходу щодо прийняття рішення про раціональну загрузку шихт для виплавки сталі.

Висновки. Таким чином, у роботі здійснена систематизація даних про плавки, які відбувалися за період у півроку на металургійному підприємстві; на основі цих даних відновлено функціональну залежність тривалості процесу виплавки сталі кожного типу, що виробляється, від вмісту оборотного лому у відповідній шихті; побудована математична модель процесу оптимального розподілу наявного оборотного лому на виконання плану виробництва з метою мінімізації витрат енергоресурсів; розроблено програмне забезпечення у вигляді системи підтримки прийняття рішень про оптимальну загрузку шихт під час виробництва необхідної кількості сталі.

Бібліографічні посилання

1. **Минаев А.А.** Концептуальные пути решения основных проблем металлургического комплекса Украины / А.А. Минаев, В.В. Кисиль // Научные труды Донецкого Национального Технического Университета, 2011. – Серия металлургия. – Выпуск 13 (194).
2. **Никольский Л.Е.** Тепловая работа сталеплавильных печей / Л.Е. Никольский, В.Д. Смоляренко, Л.К. Кузнецов. – М., 1981.
3. **Шор Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. / Н.З. Шор – К., 1977.

Надійшла до редколегії 17.06.2012

УДК 519.711.3

Л.Ю. Малафєєва[8]
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ»

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФОРМУВАННЯ УЗГОДЖЕНИХ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК НА ОСНОВІ МЕТОДУ ДЕЛФІ

Розроблено методологію застосування методу експертного оцінювання на основі методу Делфі з урахуванням компетентності та впевненості експертів. Наводиться застосування запропонованої формалізації для виявлення логістичних проблем металургійного комбінату.

Разработана методология применения метода экспертного оценивания на основе метода Дельфи с учетом компетентности и уверенности экспертов. Приводится применение предложенной формализации для выявления логистических проблем металлургического комбината.

The methodology of applying the expert assessment method based on the Delphi method with taking into account the experts competence and confidence is constructed. The application of the proposed formalization of logistical problems to identify the metallurgical plant is presented.

Ключові слова: метод експертного оцінювання, метод Делфі, формування узгоджених експертних оцінок, інтервальні експертні оцінки, функціонал якості.

Вступ. Досвід використання методу Делфі при розв'язанні задач передбачення у більшості розвинених країн світу на протязі десятиріч свідчить про цінність та актуальність методу, що обумовлено виявленням можливих масштабів та глибин тих або інших подій у певний період часу, з одного боку, та питань про можливі рушійні сили, обмеження та чинники, економічні та соціальні наслідки певних тенденцій, з іншого [1].

Метод Делфі – це процес опитування експертів, що складається з двох або більше турів з метою отримання відповідей з питань, що релевантні для майбутнього та характеризуються невизначеними неповними знаннями.

За останні двадцять років створено та реалізовано різні варіації та модифікації методу Делфі, що зберегли головні його ознаки, наприклад,

© *Л.Ю. Малафєєва, 2012*

багатотуровий характер опитування. Однак, більшість з них не враховує експертні індивідуальні чинники – досвід, навички, компетентність експерту, впевненість у поставленній відповіді, та ін., що значно впливають на хід процесу опитування, аналіз результатів, узгодженості оцінок у групах та на подальший етап процесу прийняття рішення [2].

З метою підвищення рівня обґрунтованості експертних суджень та зниження рівня суб'єктивізму індивідуальних думок пропонується розглянути процес формування узгоджених експертних оцінок, як головного етапу методу Делфі, з урахуванням компетентності та впевненості експертів у поставлених відповідях.

Продемонструємо можливості його застосування на основі процедури експертного оцінювання при розв'язанні логістичної проблеми металургійного комбінату.

Постановка задачі. Головна ціль дослідження: пошук ефективної логістики, що буде сприяти головній меті комбінату – підвищення об'єму виплавки сталі.

Розглядаємий напрямок дослідження передбачає проведення визначених робочою групою **заходів** $O = \{O_n \mid n = 1,5\}$, компоненти якої націлені на підтримку та розширення виробничої інфраструктури комбінату. При цьому аналіз можливостей, переваг та недоліків кожного заходу оцінюється різними кількісними та якісними **показниками** або **критеріями** $I_n = \{I_{np} \mid p = 1,4\}, \forall O_n \in O$ (таблиця 1).

Таблиця 1

Вихідні данні для оцінювання логістики комбінату

Об'єкти	Показники
$O = \{O_n \mid n = 1,5\}$	$I_n = \{I_{np} \mid p = 1,4\}$
O_1 = Заміна застарілих локомотивів на нові	I_1 = Ефективність
O_2 = Капітальний ремонт існуючих локомотивів	I_2 = Здійсненність
O_3 = Скорочення парку локомотивів	I_3 = Ступінь довіри
O_4 = Впровадження нових технологій чистки вагонів	I_4 = Ступінь відношення до проблеми
O_5 = Використання у вантажних фронтах електроштовхачів і лебідок замість локомотивів	

Закінчення таблиці 1

Апріорно задані коефіцієнти:	
$K = 0{,}8$	коефіцієнт врахування ваги показників впевненості експертів
$S^* = 0{,}7$	граничний рівень узгодженості
$R^{T_1} = 0{,}5$	радіус довірчого інтервалу

У процесі розв'язання задачі необхідно:

- згенерувати опитувальну форму;
- сформувати компетентну групу експертів;
- провести перший раунд експертного оцінювання;
- провести аналіз узгодженості експертних оцінок для кожного показника кожного об'єкта з урахуванням компетентності та впевненості експертів та апріорно заданим радіусом довірчого інтервалу R^{T_1}, приймаючи рівень узгодженості оцінок не менш ніж S^*;
- визначити експертну узгоджену оцінку для кожного показника кожного об'єкта;
- визначити пріоритетність впровадження кожного з заходів та проранжувати їх, враховуючи ваги показників;
- на основі проведеного аналізу надати об'єктивну інформацію щодо заходів для досягнення цілі та відповідні рекомендації.

Розв'язок задачі. Автоматична генерація опитувальних форм в режимі on-line для методів експертного оцінювання має велике практичне значення для уточнення та доповнення важливих пластів інформації з бази знань технологічного передбачення, усунення протиріч, виявлення довгострокових проблем та оцінки альтернатив заходів [3].

На основі сформованої бази знань даної предметної області згенеровані головні тематичні розділи опитувальних форм, що орієнтовані на оцінку досягнення головної цілі дослідження [4]. Один з розділів такої опитувальної форми – «Інфраструктура» наведено нижче у таблиці 2.

Таблиця 2

Опитувальна форма. Тематичний розділ: «Інфраструктура»

Захід: / Критерій:			Заміна застарілих локомотивів на нові	Капітальний ремонт існуючих локомотивів	Скорочення парку локомотивів	Впровадження нових технологій чистки вагонів	Використання у вантажних фронтах електроштовхачі в і лебідок замість локомотивів
			μ_{1ps} ν_{1ps}	μ_{2ps} ν_{2ps}	μ_{3ps} ν_{3ps}	μ_{4ps} ν_{4ps}	μ_{5ps} ν_{5ps}
Ефективність	Надзвичайно не Е	1					
	Дуже не Е	2					
	Не Е	3					
	Середня Е	4					
	Е	5					
	Дуже Е	6					
	Надзвичайно Е	7					
Здійсненність	Повна не З	1					
	Не З	2					
	Можлива не З	3					
	Середній рівень З	4					
	Можлива З	5					
	З	6					
	Повна З	7					
Ступінь відношення до проблеми	Надзвичайно низька	1					
	Дуже низька	2					
	Низька	3					
	Середня	4					
	Висока	5					

Закінчення таблиці 2

	Дуже висока	6										
	Надзвичайно висока	7										
Ступінь довіри до пропозиції	Надзвичайно низька	1										
	Дуже низька	2										
	Низька	3										
	Середня	4										
	Висока	5										
	Дуже висока	6										
	Надзвичайно висока	7										

Для забезпечення достовірності експертного оцінювання на рівні не менше 0,7, необхідно сформувати групу з не менш ніж 16 експертів $E = \{E_k \mid k = 1{,}16\}$, для кожного з якого обґрунтовано отримано показник компетентності $\chi = \{\chi_k \mid k = 1{,}16\}$ у предметній області (таблиця 3).

Таблиця 3

Компетентність експертів

Експерт	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15	№16
χ_k	1	0,8	0,75	0,6	0,9	1	1	0,8	0,5	0,65	0,5	0,7	0,65	0,9	0,8	1

На основі статистичних досліджень, наявних джерел інформації за обраною темою та оглядів, що запропоновані кожному експерту $E_k \in E$, в кожній клітині опитувальної форми експерт ставить у межах інтервалу [0; 1]:

μ_{npk} – оцінку того, що критерій прийме вказане значення з відповідного рівня $s = 1{,}7$;

ν_{npk} – ступінь впевненості експерта у кожній поставленій відповіді.

Експерти заповнюють кожний розділ опитувальної форми незалежно один від одного (анонімно), не маючи інформації про оцінки інших експертів.

У зв'язку з великим обсягом отриманих результатів у таблиці 4 представлені результати експертного оцінювання у вигляді точкових оцінок тільки одного заходу *«Заміна застарілих локомотивів на нові»* за критерієм «Ефективність».

Таблиця 4

Точкові оцінки експертів одо ефективності заходу «Заміна застарілих локомотивів на нові» за показником «Ефективність»

№ Експерта	Ефективність													
	1		2		3		4		5		6		7	
	Надзвичайно не ефективно		Дуже не ефективно		Не ефективно		Середня ефективність		Ефективно		Дуже ефективно		Надзвичайно ефективно	
	μ_{11k1}	ν_{11k1}	μ_{11k2}	ν_{11k2}	μ_{11k3}	ν_{11k3}	μ_{11k4}	ν_{11k4}	μ_{11k5}	ν_{11k5}	μ_{11k6}	ν_{11k6}	μ_{11k7}	ν_{11k7}
1	0.55	1.00	0.75	0.70	0.40	1.00	0.30	1.00	0.20	1.00	0.15	1.00	0.05	1.00
2	0.55	1.00	0.60	1.00	0.80	1.00	1.00	0.70	0.80	0.80	0.75	1.00	0.35	0.70
3	0.65	1.00	0.70	0.90	0.90	1.00	1.00	0.50	0.95	1.00	0.70	0.80	0.45	0.50
4	0.45	0.90	0.80	0.50	1.00	0.90	1.00	0.80	0.50	0.50	0.45	0.50	0.55	0.80
5	0.55	0.90	0.75	0.70	0.90	0.90	1.00	0.90	0.50	1.00	0.55	0.70	0.30	0.90
6	0.25	0.90	0.60	0.80	1.00	0.90	0.80	0.80	0.45	0.70	0.35	0.80	0.80	0.80
7	0.50	0.50	0.75	0.80	0.45	0.90	0.30	0.80	0.25	0.70	0.10	0.60	0.05	0.50
8	0.25	0.90	0.60	1.00	1.00	0.90	1.00	1.00	0.80	1.00	0.50	1.00	0.40	1.00
9	0.70	0.90	0.85	1.00	0.80	0.90	0.95	0.80	0.70	0.90	0.60	1.00	0.50	0.80
10	0.60	1.00	0.80	0.80	0.95	1.00	1.00	0.80	0.80	1.00	0.60	0.80	0.45	0.80
11	0.70	0.90	0.75	1.00	0.70	0.90	0.45	0.90	0.50	1.00	0.25	1.00	0.10	0.90
12	0.45	0.90	0.70	0.90	0.50	1.00	0.35	0.90	0.25	0.90	0.20	0.80	0.10	0.90
13	0.15	0.80	0.50	1.00	0.90	0.80	0.85	1.00	0.35	0.80	0.25	0.90	0.05	1.00
14	0.70	1.00	0.90	1.00	0.85	1.00	0.50	1.00	0.55	1.00	0.30	1.00	0.20	1.00
15	0.75	1.00	0.90	1.00	0.80	1.00	0.55	1.00	0.45	1.00	0.35	1.00	0.25	1.00
16	0.20	1.00	0.50	0.50	1.00	1.00	0.90	1.00	0.85	1.00	0.75	1.00	0.65	1.00

У таблиці 5 надано ваги W_{np} за обраними критеріями.

Таблиця 5

Ваги показників об'єктів

	Ефективність	Здійсненність	Ступінь відношення до проблеми	Ступінь довіри до пропозиції
W_{np}	0,20	0,25	0,40	0,15

Структуру алгоритму формування узгоджених експертних оцінок на основі методу Делфі представлено на рис. 1.

Розглянемо процедуру формування узгоджених експертних оцінок на прикладі показника I_{11} – *«Ефективність»* заходу O_1 – *«Заміна застарілих локомотивів на нові»*.

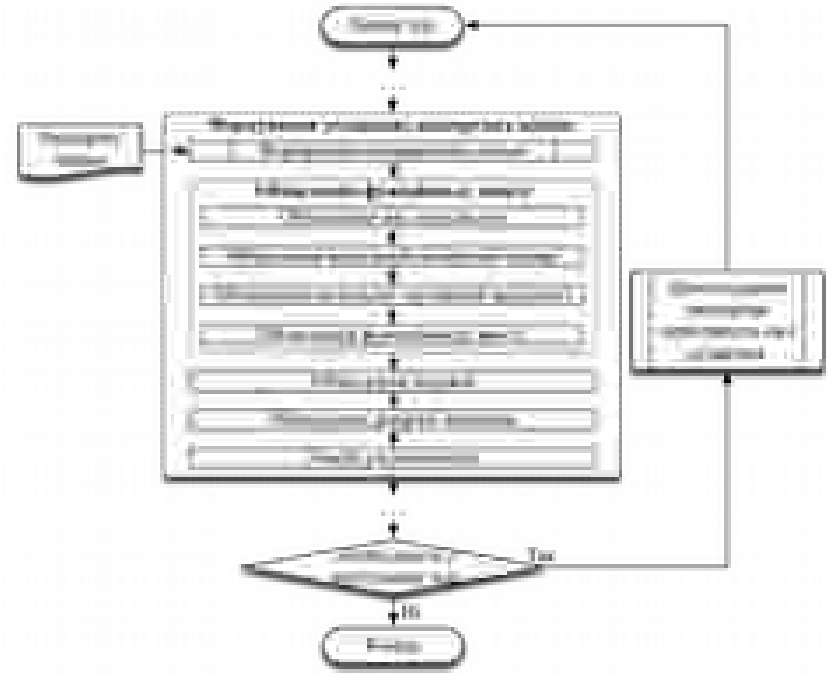


Рис. 1. Структура алгоритму формування узгоджених експертних оцінок

Формування результуючої оцінки критерію досліджуваного заходу виконаємо за допомогою побудови інтервальних оцінок для відповіді кожного експерту.

Інтервальні оцінки. На основі точкових оцінок, наведених у таблиці 4, побудуємо інтервальні оцінки $\overline{Q}_{np}$ (таблиця 6) з урахуванням впевненості експертів ν_k у відповідях, враховуючи коефіцієнт $K = 0{,}8$, за формулою:

$$d_{npk} = [d^{-}_{npk}; d^{+}_{npk}] = \\ = [\max(0, |\mu_{npks} - \mu_{npks}(1-\nu_{npks})K|); \min(1, |\mu_{npks} + \mu_{npks}(1-\nu_{npks})K|)]. \quad (1)$$

Наприклад, для Експерта №6 інтервальна оцінка за рівнем $s = 1$

обчислюється наступним чином:

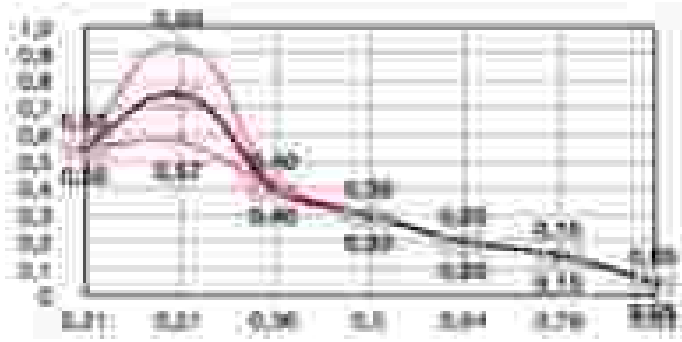
$$d_{1161} = [\max(0,|0{,}25-0{,}25(1-0{,}9)0{,}8|);\ \min(1,|0{,}25+0{,}25(1-0{,}9)0{,}8|)] = \\ = [0{,}23;0{,}27]$$

Таблиця 6

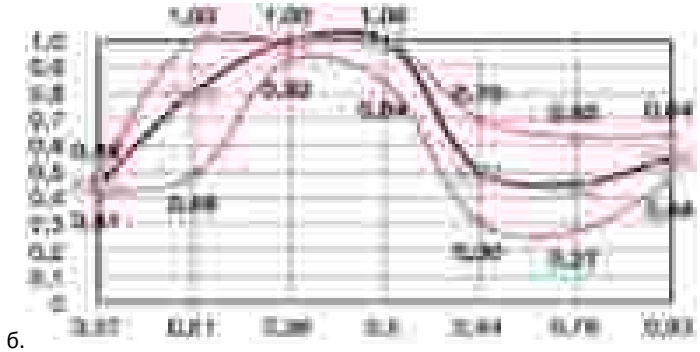
Інтервальні оцінки за кількісними параметрами експертів

1			**2**			**3**			**4**			**5**			**6**			**7**		
d_{k1}^-	μ_{k1}	d_{k1}^+	d_{k2}^-	μ_{k2}	d_{k2}^+	d_{k3}^-	μ_{k3}	d_{k3}^+	d_{k4}^-	μ_{k4}	d_{k4}^+	d_{k5}^-	μ_{k5}	d_{k5}^+	d_{k6}^-	μ_{k6}	d_{k6}^+	d_{k7}^-	μ_{k7}	d_{k7}^+
0,55	**0,55**	0,55	0,57	**0,75**	0,93	0,40	**0,40**	0,40	0,30	**0,30**	0,30	0,20	**0,20**	0,20	0,15	**0,15**	0,15	0,05	**0,05**	0,05
0,55	**0,55**	0,55	0,60	**0,60**	0,60	0,80	**0,80**	0,80	0,76	**1,00**	1,00	0,67	**0,80**	0,93	0,75	**0,75**	0,75	0,27	**0,35**	0,43
0,65	**0,65**	0,65	0,64	**0,70**	0,76	0,90	**0,90**	0,90	0,60	**1,00**	1,00	0,95	**0,95**	0,95	0,59	**0,70**	0,81	0,27	**0,45**	0,63
0,41	**0,45**	0,49	0,48	**0,80**	1,00	0,92	**1,00**	1,00	0,84	**1,00**	1,00	0,30	**0,50**	0,70	0,27	**0,45**	0,63	0,46	**0,55**	0,64
0,51	**0,55**	0,59	0,57	**0,75**	0,93	0,83	**0,90**	0,97	0,92	**1,00**	1,00	0,50	**0,50**	0,50	0,42	**0,55**	0,68	0,28	**0,30**	0,32
0,23	**0,25**	0,27	0,50	**0,60**	0,70	0,92	**1,00**	1,00	0,67	**0,80**	0,93	0,34	**0,45**	0,56	0,29	**0,35**	0,41	0,67	**0,80**	0,93
0,30	**0,50**	0,70	0,63	**0,75**	0,87	0,41	**0,45**	0,49	0,25	**0,30**	0,35	0,19	**0,25**	0,31	0,07	**0,10**	0,13	0,03	**0,05**	0,07
0,23	**0,25**	0,27	0,60	**0,60**	0,60	0,92	**1,00**	1,00	1,00	**1,00**	1,00	0,80	**0,80**	0,80	0,50	**0,50**	0,50	0,40	**0,40**	0,40
0,64	**0,70**	0,76	0,85	**0,85**	0,85	0,74	**0,80**	0,86	0,80	**0,95**	1,00	0,64	**0,70**	0,76	0,60	**0,60**	0,60	0,42	**0,50**	0,58
0,60	**0,60**	0,60	0,67	**0,80**	0,93	0,95	**0,95**	0,95	0,84	**1,00**	1,00	0,80	**0,80**	0,80	0,50	**0,60**	0,70	0,38	**0,45**	0,52
0,64	**0,70**	0,76	0,75	**0,75**	0,75	0,64	**0,70**	0,76	0,41	**0,45**	0,49	0,50	**0,50**	0,50	0,25	**0,25**	0,25	0,09	**0,10**	0,11
0,41	**0,45**	0,49	0,64	**0,70**	0,76	0,50	**0,50**	0,50	0,32	**0,35**	0,38	0,23	**0,25**	0,27	0,17	**0,20**	0,23	0,09	**0,10**	0,11
0,13	**0,15**	0,17	0,50	**0,50**	0,50	0,76	**0,90**	1,00	0,85	**0,85**	0,85	0,29	**0,35**	0,41	0,23	**0,25**	0,27	0,05	**0,05**	0,05
0,70	**0,70**	0,70	0,90	**0,90**	0,90	0,85	**0,85**	0,85	0,50	**0,50**	0,50	0,55	**0,55**	0,55	0,30	**0,30**	0,30	0,20	**0,20**	0,20
0,75	**0,75**	0,75	0,90	**0,90**	0,90	0,80	**0,80**	0,80	0,55	**0,55**	0,55	0,45	**0,45**	0,45	0,35	**0,35**	0,35	0,25	**0,25**	0,25
0,20	**0,20**	0,20	0,30	**0,50**	0,70	1,00	**1,00**	1,00	0,90	**0,90**	0,90	0,85	**0,85**	0,85	0,75	**0,75**	0,75	0,65	**0,65**	0,65

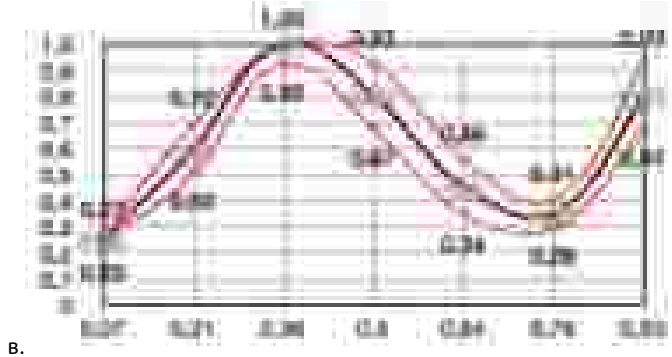
Графічна інтерпретація інтервальних оцінок для кількісних параметрів експертів №1, №4, №6, №7 представлені на рис. 2.



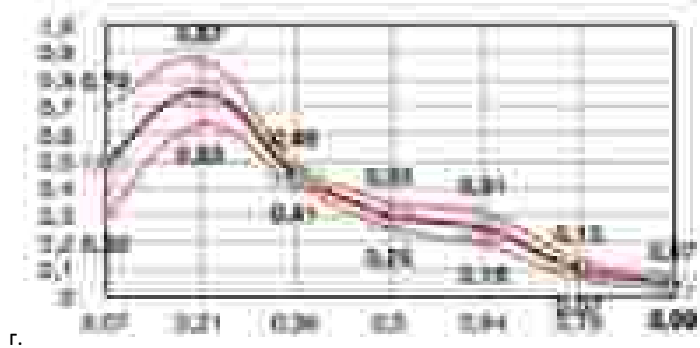
а.



б.



в.



г.

Рис. 2. Інтервальні оцінки для кількісних параметрів експертів: а Експерт №1; б Експерт №4; в Експерт №6; г Експерт №7

Обчислення функціонала якості. На даному етапі процедури формування узгоджених експертних оцінок потрібен механізм оцінки якості індивідуальних відповідей експертів, виражений у кількісному вигляді. Таким механізмом є функціонал якості, який вводимо наступним чином [2]:

$$\omega_{np}(\overline{Q}_{npk}) = (1 - \rho(\overline{Q}_{npk}, \tilde{Q}))\chi_{npk}, k = 1, K_{np}, \qquad (2)$$

де χ_{npk} – це показник компетентності k-го експерта стосовно p-го показника n-го об'єкта, $\tilde{Q}$ – інтервальна оцінка, отримана шляхом дискретизації **гауссівської щільності**. Для формалізації п. 2.2 введемо математичне середнє, інтегровну оцінку, гауссівську щільність.

Математичне середнє. Для побудови інтервальної інтегровної оцінки та розрахунку гауссівської щільності знайдемо математичне середнє інтервальних експертних оцінок для кожного s-рівня за формулами:

$$\overline{M}^{-}_{nps} = M\overline{Q}^{-}_{nps} = \frac{1}{K}\sum_{k=1,K}\overline{Q}^{-}_{npks}\ ;\ \overline{M}^{+}_{nps} = M\overline{Q}^{+}_{nps} = \frac{1}{K}\sum_{k=1,K}\overline{Q}^{+}_{npks}\ . \qquad (3)$$

Наприклад, для рівня $s = 1$ значення математичного очікування буде наступним:

$$M\overline{Q}^{-}_{111} = \frac{1}{16}(0{,}55 + 0{,}55 + \cdots + 0{,}2) = 0{,}47\ ;$$

$$M\overline{Q}^{-}_{111} = \frac{1}{16}(0{,}55 + 0{,}55 + \cdots + 0{,}2) = 0{,}54\ .$$

Аналогічно з урахуванням інших рівнів отримуємо (рис. 3):

$M\overline{Q}_{11} = ([0{,}47;0{,}53],[0{,}63;0{,}79],[0{,}77;0{,}83],[0{,}66;0{,}77],[0{,}51;0{,}60],$
$[0{,}39;0{,}47],[0{,}28;0{,}37])$.

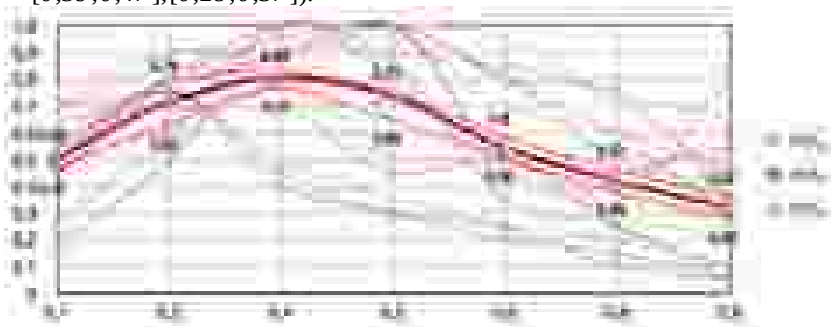


Рис. 3. Математичне середнє інтервальних експертних оцінок

Інтервальна інтегровна оцінка. Побудуємо інтервальну найбільш вірогідну інтегровну експертну оцінку, приймаючи на кожному s-рівні експертну оцінку, що найменш віддалена від обчисленного математичного середнього:

$$\overline{\overline{Q}}_{nps}^{-} = \arg\min_{\overline{Q}_{npks}^{-}}(|\overline{Q}_{npks} - \overline{M}_{npks}^{-}|); \quad \overline{\overline{Q}}_{nps}^{+} = \arg\min_{\overline{Q}_{npks}^{+}}(|\overline{Q}_{npks} - \overline{M}_{npks}^{+}|). \tag{4}$$

Наприклад, значення нижньої границі інтервалу для рівня $s=1$ модельної експертної оцінки буде наступним:

$$\overline{\overline{Q}}_{nps}^{-} = \arg\min_{\overline{Q}_{npks}^{-}}(|0{,}55-0{,}47|,|0{,}55-0{,}47|,\dots|0{,}2-0{,}47|) =$$

$$= \arg\min_{\overline{Q}_{npks}^{-}}(0{,}04) = 0{,}50.$$

Аналогічно з урахуванням інших рівнів отримуємо:

$$\overline{\overline{Q}}_{11} = ([0{,}50;0{,}55],[0{,}63;0{,}76],[0{,}76;0{,}85],[0{,}67;0{,}85],[0{,}56;0{,}60],[0{,}50;0{,}47],$$
$$[0{,}40;0{,}37]).$$

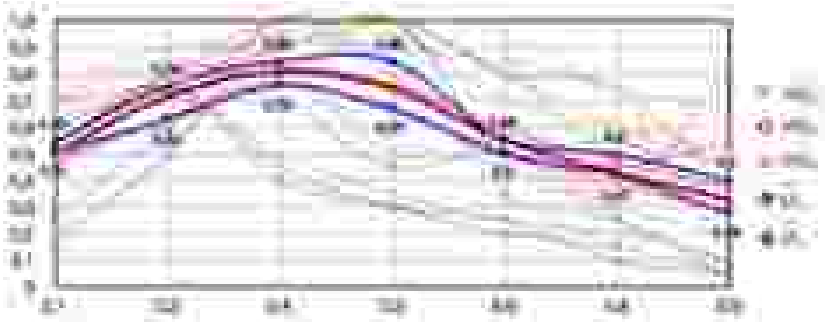


Рис. 4. Інтервальна інтегровна оцінка

Як можна бачити з рис. 4 інтервальна інтегровна оцінка - це математичне середнє скориговане на реальні експертні оцінки, за яким далі будемо будувати дискретизовану гауссівську щільність.

Гауссівська ільність. Для побудови гауссівської щільності обчислимо коефіцієнт нормування побудованої модельної експертної оцінки за формулою

$$K_{np}^{-} = \frac{1}{S(\overline{\overline{Q}}_{np}^{-})}; \qquad K_{np}^{+} = \frac{1}{S(\overline{\overline{Q}}_{np}^{+})}. \tag{5}$$

У нашому випадку, з урахуванням відповідних рівнів $x_s \in [0{,}07;0{,}21;0{,}36;0{,}5;0{,}64;0{,}79;0{,}93]$, отримаємо:

$$K_{11}^{-} = \frac{1}{(0{,}07 \cdot 0{,}50/2) + \cdots + ((1-0{,}93)\cdot 0{,}28/2)} = 1{,}96;$$

$$K_{11}^{+} = \frac{1}{(0{,}07 \cdot 0{,}55/2) + \cdots + ((1-0{,}93)\cdot 0{,}40/2)} = 1{,}66$$

Інтервальну дискретизовану гауссівську щільність необхідно будувати таким чином, щоб відстанm від неї до модельної експертної оцінки була мінімальною, тобто: $\sum_{s=1}^{S} \rho(\tilde{Q}_{nps}; \overset{=}{Q}_{nps}) \to \min$.

З урахуванням функції щільності нормального розподілу

$$\tilde{Q}_{nps}^{-} = \frac{1}{K_{np}^{-}\sqrt{2\pi\tilde{D}^{-}}} e^{\frac{-(x_s-\tilde{M}^{-})^2}{2\tilde{D}^{-}}}, \quad \tilde{Q}_{nps}^{+} = \frac{1}{K_{np}^{+}\sqrt{2\pi\tilde{D}^{+}}} e^{\frac{-(x_s-\tilde{M}^{+})^2}{2\tilde{D}^{+}}}, \tag{6}$$

задача оптимізації зводиться до наступної задачі

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{S}\left(\left|\frac{1}{K_{np}^{-}\sqrt{2\pi\tilde{D}^{-}}} e^{\frac{-(x_s-\tilde{M}^{-})^2}{2\tilde{D}^{-}}} - \overset{=-}{Q}_{nps}\right|\right) \to \min \\ \sum_{s=1}^{S}\left(\left|\frac{1}{K_{np}^{+}\sqrt{2\pi\tilde{D}^{+}}} e^{\frac{-(x_s-\tilde{M}^{+})^2}{2\tilde{D}^{+}}} - \overset{=+}{Q}_{nps}\right|\right) \to \min \end{cases},$$

тобто до пошуку таких математичного сподівання та дисперсії гауссівської щільності, щоб задовольнялась вказана умова.

Поставлену задачу оптимізації можна розв'язувати декількома способами. Один з найпростіших шляхів розв'язання – це побудова дискретизованої гауссівської щільності методом рівномірного пошуку. Таким чином, отримуємо наступні значення математичного очікування та дисперсії:

$$M\tilde{Q}_{111}^{-} = 0{,}38\,; \quad D\tilde{Q}_{111}^{-} = 0{,}073\,; \quad M\tilde{Q}_{111}^{+} = 0{,}38\,; \quad D\tilde{Q}_{111}^{+} = 0{,}078\,,$$

$$\tilde{Q}_{111}^{-} = \frac{1}{1{,}96\sqrt{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}073}}\, e^{\frac{-(0{,}05-0{,}38)^2}{2 \cdot 0{,}073}} = 0{,}03\,,$$

$$\tilde{Q}_{111}^{+} = \frac{1}{1{,}66 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}078}}\, e^{\frac{-(0{,}05-0{,}38)^2}{2 \cdot 0{,}078}} = 0{,}47\,.$$

Інтервальна гауссівська щільність, що побудована на інтервальній інтегровній оцінці, з урахуванням знайдених математичного очікування та дисперсії, буде наступною (рис. 5):

$\tilde{Q}_{11} = ([0{,}39;0{,}47],[0{,}62;0{,}72],[0{,}74;0{,}86],[0{,}86;0{,}79],[0{,}47;0{,}56],[0{,}25;0{,}30],$
$[0{,}10;0{,}13])$

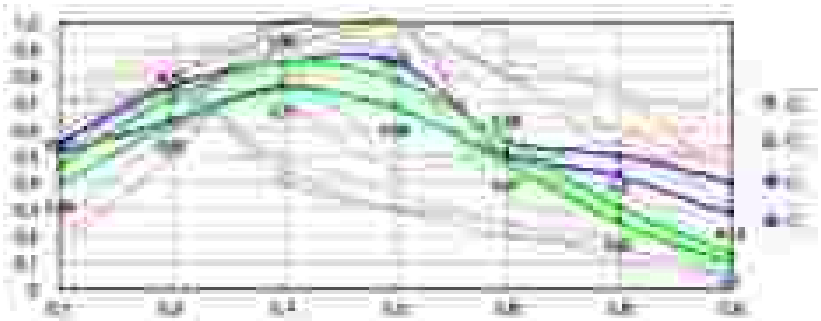


Рис. 5. Інтервальна модельна дискретизована гауссівська ільність

Обчислення функціонала якості. Таким чином, з урахуванням проведених вище обчислень отримуємо функціонали якості для кожного експерта з урахуванням компетентності за формулою (2).

За проведеними у теоретичній частині формулами обчислюємо відстань між побудованою гауссівською щільністю та кожною оцінкою експерта:

$$\rho(\overline{Q}_{npks}, \tilde{Q}_{npks}) = \max(|\,\overline{Q}_{npks}^{-} - \tilde{Q}_{npks}^{-}\,|, |\,\overline{Q}_{npks}^{+} - \tilde{Q}_{npks}^{+}\,|)\,;$$

$$\rho(\overline{Q}_{npk}, \tilde{Q}_{npk}) = \frac{1}{S}\sum_{s} \rho(\overline{Q}_{npks}, \tilde{Q}_{npks})\,. \qquad (7)$$

Наприклад, знайдемо відстань між гауссівською щільністю та

інтервальною оцінкою Експерта №1 і отримуємо наступне значення її функціоналу якості:

$$\omega_{11}(Expert\,1) = (1 - (\max(|\ 0{,}55 - 0{,}39\ |, |\ 0{,}55 - 0{,}47\ |) + \ldots +$$
$$+ \max(|\ 0{,}20 - 0{,}10\ |, |\ 0{,}20 - 0{,}13\ |)) / 7) \cdot 1 = 0{,}73 \quad .$$

Аналогічно отримуємо значення функціоналів якості для оцінки кожного експерта:

$$\omega_{11}(Expert\,1) = 0{,}73\ \ \omega_{11}(Expert\,2) = 0{,}60\ \ \omega_{11}(Expert\,3) = 0{,}52$$
$$\omega_{11}(Expert\,4) = 0{,}45\ \ \omega_{11}(Expert\,5) = 0{,}73\ \ \omega_{11}(Expert\,6) = 0{,}76$$
$$\omega_{11}(Expert\,7) = 0{,}75\ \ \omega_{11}(Expert\,8) = 0{,}60\ \ \omega_{11}(Expert\,9) = 0{,}37$$
$$\omega_{11}(Expert\,10) = 0{,}47\ \ \omega_{11}(Expert\,11) = 0{,}43\ \ \omega_{11}(Expert\,12) = 0{,}58$$
$$\omega_{11}(Expert\,13) = 0{,}55\ \ \omega_{11}(Expert\,14) = 0{,}74\ \ \omega_{11}(Expert\,15) = 0{,}65$$
$$\omega_{11}(Expert\,16) = 0{,}64$$

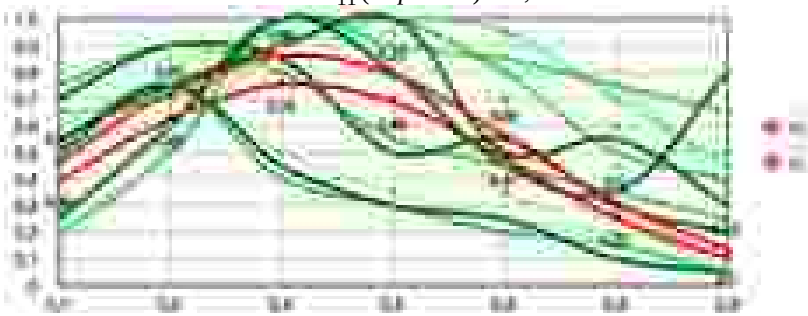


Рис. 6. Оцінки експертів за найви ими та найнижчими функціоналами якості

Звернемо увагу, що оцінка Експерта № 7 найбільш наближена, а № 9 найбільш віддалена від модельної гауссівської щільності. Оцінки Експертів №9, №4, №10 найбільш віддалені від модельної гауссівської щільності (рис. 6), тому необхідно знизити вплив вказаних оцінок на результати експертизи на етапі обчислення довірчого інтервалу. На рис. 6 представлено ранжування експертних оцінок за значенням функціонала якості. Експертні оцінки з найвищим функціоналом якості, тобто ті, що знаходяться найближче до модельної гауссівської щільності, позначені більш темним кольором.

Обчислення медіани . Для обчислення медіани побудуємо спочатку матрицю відстаней між інтервальними оцінками за метрикою $d_{npk_1k_2} = \rho(Q_{npk_1}, Q_{npk\,2})$. Для кожного рівня відстань обчислюється наступним чином:

$$d_{npk_1k_2s} = \max(|\, d^{-}_{k_1s} - d^{-}_{k_2s} \,|, |\, d^{+}_{k_1s} - d^{+}_{k_2s} \,|)\,, \qquad (8)$$

наприклад, для рівня $s = 4$ отримаємо: $d_{124} = \max(\,0{,}3 - 0{,}8\,|, |\,0{,}3 - 1{,}0\,|) = 0{,}7$.

Відстань між оцінками експертів №1 та №2 за формулою: $\rho_{d_{npk_1}, d_{npk_2}} = \frac{1}{s}\sum_{s=1}^{S} \rho_{d_{npk_1k_2s}}$, становитиме

$$d_{12} = \frac{1}{7}(0 + 0{,}33 + 0{,}4 + 0{,}7 + 0{,}728 + 0{,}6 + 0{,}384) = \frac{3}{7} = 0{,}45\,.$$

Таким чином, матриця відстаней всіх експертних оцінок у загальному випадку має наступний вигляд

$$D = \begin{bmatrix} Expert\,1 & 0{,}00 & 0{,}45 & \cdots & 0{,}26 & 0{,}52 \\ Expert\,2 & 0{,}45 & 0{,}00 & \cdots & 0{,}29 & 0{,}22 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Expert\,15 & 0{,}26 & 0{,}29 & \cdots & 0{,}00 & 0{,}41 \\ Expert\,16 & 0{,}52 & 0{,}22 & \cdots & 0{,}41 & 0{,}00 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо вектор, кожна координата якого дорівнює сумі всіх елементів відповідної строки матриці за формулою

$$S_{np} = \{S_{npk} \mid S_{npk} = \sum_{k_1=1}^{K_{np}} d_{npk_1k_2}, k = 1, K_{np}\}$$

$$S_{np} = \begin{bmatrix} Expert\,1 & 0{,}00 + 0{,}45 + \cdots + 0{,}26 + 0{,}52 \\ Expert\,2 & 0{,}45 + 0{,}00 + \cdots + 0{,}29 + 0{,}22 \\ \cdots & \cdots \\ Expert\,11 & 0{,}20 + 0{,}33 + \cdots + 0{,}12 + 0{,}47 \\ \cdots & \cdots \\ Expert\,15 & 0{,}26 + 0{,}29 + \cdots + 0{,}00 + 0{,}41 \\ Expert\,16 & 0{,}52 + 0{,}22 + \cdots + 0{,}41 + 0{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Expert\,1 & 6{,}79 \\ Expert\,2 & 7{,}09 \\ \cdots & \cdots \\ Expert\,11 & 6{,}14 \\ \cdots & \cdots \\ Expert\,15 & 6{,}31 \\ Expert\,16 & 8{,}06 \end{bmatrix}.$$

Медіана $M_{np} = \arg\min_{k=1,K}(S_{npk})$ – це висновок експерта, що найменш віддалений від оцінок інших експертів, у нашому випадку – це оцінка Експерта№11:

$$M_{11} = \arg\min_{k=1,K}(6{,}789 \quad 7{,}088 \quad \cdots \quad 8{,}060) = Expert\,11(6{,}140)\,.$$

Нижче приведена медіана інтервальних оцінок з урахуванням впевненості експертів у відповідях:

M_{11} = ([0,64;0,76],[0,75;0,75],[0,64;0,76],[0,41;0,49],[0,5;0,5],[0,25;0,25], [0,092;0,11]) .

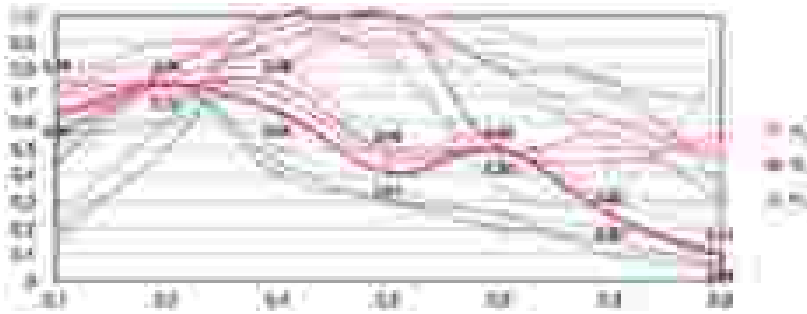


Рис. 7. Медіана інтервальних оцінок

Як показано на рис. 7 оцінка Експерта № 11 найменш віддалена від оцінок інших експертів та у випадку збіжності експертних думок дана оцінка буде груповою узгодженою для показника оцінюємого об'єкта .

Формування довірчого інтервалу. Обчислюємо довірчий інтервал використовуючи формулу $\rho(Q_{npk}, M_{np})(2-\omega_{npk}) \le R^{T_0}$:

$$\rho(Q_{111}, M_{11})(2-\omega_{111}) = 0{,}2 \cdot (2-0{,}73) = 0{,}25 < 0{,}5 .$$

Таким чином, Експерт №1 не увійшов до довірчого інтервалу. За аналогією отримуємо:

$\rho(Q_{111}, M_{11})(2-\omega_{111}) = 0{,}25 < 0{,}5$ $\rho(Q_{112}, M_{11})(2-\omega_{112}) = 0{,}46 < 0{,}5$

$\rho(Q_{113}, M_{11})(2-\omega_{113}) = 0{,}53 > 0{,}5$ $\rho(Q_{114}, M_{11})(2-\omega_{114}) = 0{,}54 > 0{,}5$

$\rho(Q_{115}, M_{11})(2-\omega_{115}) = 0{,}31 < 0{,}5$ $\rho(Q_{116}, M_{11})(2-\omega_{116}) = 0{,}46 < 0{,}5$

$\rho(Q_{117}, M_{11})(2-\omega_{117}) = 0{,}26 < 0{,}5$ $\rho(Q_{118}, M_{11})(2-\omega_{118}) = 0{,}47 < 0{,}5$

$\rho(Q_{119}, M_{11})(2-\omega_{119}) = 0{,}42 < 0{,}5$ $\rho(Q_{1110}, M_{11})(2-\omega_{1110}) = 0{,}51 > 0{,}5$

$\rho(Q_{1111}, M_{11})(2-\omega_{1111}) = 0 < 0{,}5$ $\rho(Q_{1112}, M_{11})(2-\omega_{1112}) = 0{,}22 < 0{,}5$

$$\rho(Q_{1113}, M_{11})(2-\omega_{1113}) = 0{,}37 < 0{,}5$$

$$\rho(Q_{1114}, M_{11})(2-\omega_{1114}) = 0{,}13 < 0{,}5$$

$$\rho(Q_{111}, M_{115})(2-\omega_{1115}) = 0{,}16 < 0{,}5$$

$$\rho(Q_{111}, M_{116})(2-\omega_{1116}) = 0{,}63 > 0{,}5$$

Отримуємо довірчий інтервал T_{11} з інтервальними оцінками Експертів №1, №2, №5, №6, №7, №8, №9, №11, №12, №13, №14, №15 (рис. 8):

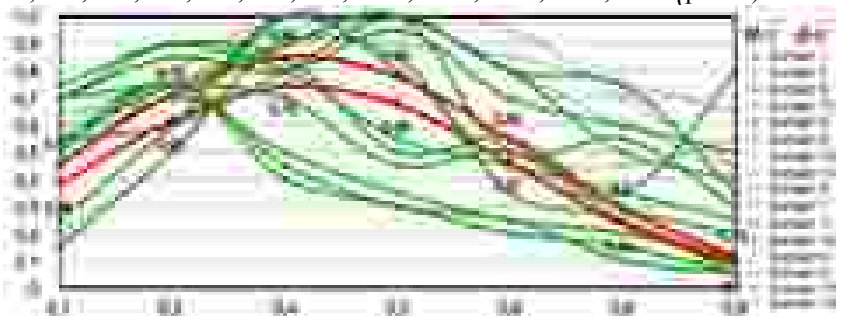


Рис. 8. Експертні оцінки, о увійшли до довірчого інтервалу

Аналіз узгодженості оцінок. Критерієм закінчення процедури експертизи обрано перевищення показником $S^{T_{np}} = Card\,(T_{np}) / Card\,(E_{np})$ апріорно заданого рівня $S^* = 0{,}7$. У нашому випадку: $S^{T_{11}} = 12/16 = 0{,}75 > S^* = 0{,}7$ – оцінки узгоджені.

Узгоджена експертна оцінка – це оцінка експерта, що відповідає медіані та має найбільше значення оцінки серед s рівнів з максимальним рівнем впевненості у поставленій відповіді:

$$s(\hat{Q}_{np}) = s(M_{np}) = \arg\max_{s=1,S}(M_{nps}) \wedge \min(|\, M^{+}_{nps} - M^{-}_{nps}\,|)\,;$$

$$\hat{Q}_{np} = (M^{+}_{nps(\hat{Q}_{np})} + M^{-}_{nps(\hat{Q}_{np})})/2\,.$$

Визначимо узгоджену експертну оцінку в нашому випадку:

$$s(\hat{Q}_{np}) = s(M_{np}) = \arg\max_{s=1,7}(0{,}7 \quad 0{,}75 \quad \cdots \quad 0{,}1) \wedge \arg\min_{s=1,7}(0{,}11 \quad 0 \quad \cdots \quad 0{,}02) =$$

$$= \arg\max_{s=2}(0{,}75) \wedge \arg\min_{s=2,5,6}(0) = 2$$

$$\hat{Q}_{np} = (0{,}750 + 0{,}756)/2 = 0{,}753\,.$$

Узгоджена експертна оцінка дорівнює 0,753 (рис. 9) та вказує за думкою експерта за медіаною, на найбільшу можливість прийняття показником значення, що відповідає 2 -у рівню з найвищою впевненістю експерта у поставленій відповіді. Це означає, що за узгодженою думкою багатьох експертів захід *«Заміна застарілих локомотивів на нові»* буде дуже не ефективним по відношенню до головної цілі дослідження.

Рис. 9. згоджена експертна оцінка

Аналіз отриманих результатів. Аналогічним чином проаналізувавши результати експертних відповідей маємо наступні результати за кількістю експертів, що потрапили у довірчу множину – $T_{пр}$, їх процентне відношення до загальної кількості – %, медіана – $M_{пр}$, коефіцієнт узгодженості оцінок – $S^{T_{пр}}$, значення узгодженої оцінки – $\hat{Q}_{пр}$, номер рівня, якому відповідає узгоджена оцінка – s (таблиця 7).

Таблиця 7

Результати аналізу експертного оцінювання методом Делфі

	Захід		Ефективність	Здійсненність	Ступінь відношення до проблеми	Ступінь довіри до пропозиції
1	Заміна застарілих локомотивів на нові	T_{1p}	12	14	16	16
		%	75	87,5	100	100
		M_{1p}	Експерт №11	Експерт №7	Експерт №15	Експерт №1
		$S^{T_{1p}}$	0,75	0,88	1,00	1,00
		$\hat{Q}_{1p}$	**0,753**	**0,776**	**0,657**	**0,734**
		s	**2**	**4**	**5**	**6**
2	Капітальний ремонт існу-ючих локомотивів	T_{2p}	14	9	15	14
		%	87,5	56,25	93,75	87,5
		M_{2p}	Експерт №8	Експерт №10	Експерт №2	Експерт №12

Закінчення таблиці 7

	Захід		Ефективність	Здійсненність	Ступінь відношення до проблеми	Ступінь довіри до пропозиції
		$S^{T_{2p}}$	0,8	0,7	0,75	0,9
		$\hat{Q}_{2p}$	**0,83**	**0,58**	**0,98**	**0,75**
		s	**6**	**4**	**7**	**5**
В	Скорочення парку локомотивів	T_{3p}	5	14	8	9
		%	31,25	87,5	50	56,25
		M_{3p}	Експерт №6	Експерт №14	Експерт №12	Експерт №5
		$S^{T_{3p}}$	0,8	0,7	0,75	0,9
		$\hat{Q}_{3p}$	**0,34**	**0,88**	**0,29**	**0,62**
		s	**2**	**7**	**1**	**5**
Д	Впровадження нових технологій чистки вагонів	T_{4p}	16	5	12	16
		%	100	31,25	75	100
		M_{4p}	Експерт №5	Експерт №7	Експерт №1	Експерт №3
		$S^{T_{4p}}$	0,8	0,7	0,75	0,9
		$\hat{Q}_{4p}$	**0,95**	**0,24**	**0,85**	**0,94**
		s	**7**	**2**	**6**	**7**
Б	Використання у вантажних фронтах електроштовхачів і лебідок замість локомотивів	T_{5p}	11	10	10	13
		%	68,75	62,5	62,5	81,25
		M_{5p}	Експерт №11	Експерт №8	Експерт №9	Експерт №4
		$S^{T_{5p}}$	0,8	0,7	0,75	0,9
		$\hat{Q}_{5p}$	**0,47**	**0,57**	**0,6**	**0,7**
		s	**3**	**5**	**5**	**6**

З урахуванням значень середин інтервалів за рівнями шкали Міллера $x_s \in (0,07;0,21;0,36;0,5;0,64;0,79;0,93)$ можемо представити кількісні значення результатів експертного оцінювання (таблиця 8) [5].

Врахування вагових коефіцієнтів критеріїв з таблиці 8 відбуваються наступним чином:

$$W_n = \frac{1}{P} \sum_{p=1,P} W_{np} \hat{Q}_{np} \ . \qquad (9)$$

Наприклад для першого заходу «*Заміна застарілих локомотивів на нові*» загальна зважена оцінка буде дорівнювати:

$$W_1 = \frac{1}{4}(0{,}2 \cdot 0{,}21 + \cdots + 0{,}15 \cdot 0{,}79) = 0{,}208 \ .$$

Отже, замовнику даного експертного опитування можна дати деякі поради та рекомендації щодо впровадження заходів за їх пріоритетом.

На основі проаналізованої ситуації представлені заходи можна проранжувати за пріоритетом ефективності впровадження наступним чином:

№1 – Капітальний ремонт існуючих локомотивів.

№2 – Впровадження нових технологій чистки вагонів.

№3 – Використання у вантажних фронтах електроштовхачів і лебідок замість локомотивів.

№4 – Заміна застарілих локомотивів на нові.

№5 – Скорочення парку локомотивів.

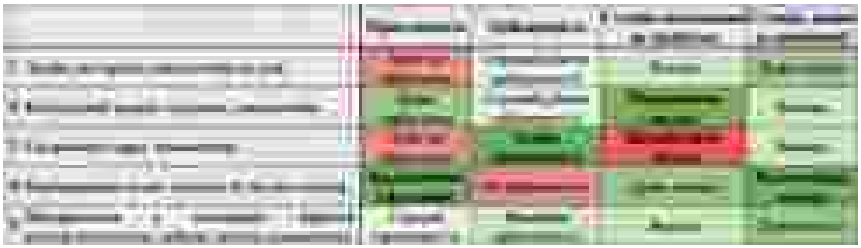
Таблиця 8

згоджені кількісні оцінки експертного опитування методом Делфі

За одним з напрямків досягнення головної мети дослідження: виявлення найбільш ефективних шляхів модернізації інфраструктури металургійного комбінату із прийнятним рівнем достовірності оцінювання не менше 0,7 узгоджені результати представлені у таблиці 9.

Таблиця 9

згодженні якісні оцінки експертного оцінювання на основі методу Делфі



На рис. 10 графічно зображено пріоритетність заходів за головними критеріями з урахуванням кількісних узгоджених експертних оцінок.

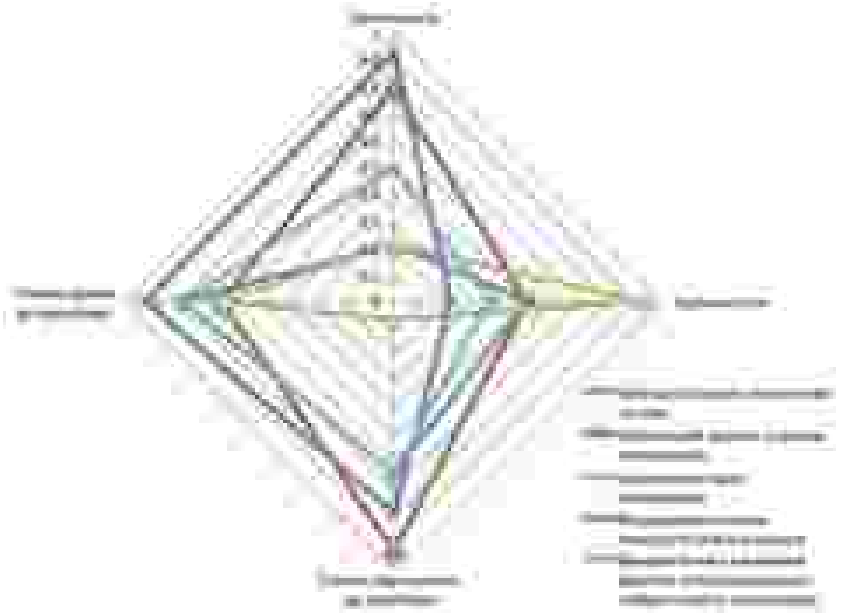


Рис. 10. Пріоритетність заходів за головними критеріями

Висновок. Розглянутий у прикладі захід «*Заміна застарілих локомотивів на нові»* виявився самим неефективним та малоздійсненним, що, можливо, пов'язано із дороговизною даного заходу або іншими об'єктивними умовами.

Більшість експертів вважає, що у приведених контекстних умовах майбутнього один з заходів переоснащення та модернізації комбінату –

«Капітальний ремонт існуючих локомотивів» з метою зниження витрат і ресурсоємності виробництва має найбільшу ступінь відношення до проблеми та буде мати високу ефективність. Експертні оцінки свідчать про високу ступінь довіри до даної пропозиції. Щодо здійсненності даного заходу у представленному контексті ситуації експертні думки розходяться. Однак сумнів експертів стосовно здійсненності не завадив отримати даному заходу найбільшу зважену оцінку на відміну від заходу *«Впровадження нових технологій чистки вагонів»*.

Проаналізувавши отримані результати з урахуванням компетентності та впевненості експертів були виявлені наступні переваги методу експертного оцінювання на основі методу Делфі:

- зменшення впливу рішень менш компетентних експертів на рівень узгодженості;
- згладження великих викидів;
- підвищення рівня узгодженості експертів;
- врахування компетентності та впевненості експертів у поставленних відповідях може заощадити кошти на проведення другого туру опитування, у випадку досягнення узгодженості у першому турі;
- процедура опитування надає змогу експертам висловити свою думку більш інформативно вказуючи впевненість у відповіді.

На основі проведеної роботи виконана програмна реалізація модулю експертного опитування на основі методу Делфі в режимі on line у складі Інформаційної платформи сценарного аналізу [6].

Бібліографічні посилання

1. **Згуровский М.З.** Технологическое предвидение / М. З. Згуровский, Н.Д. Панкратова – Киев, 2005. – 165 с.
2. **Згуровский М.З.** Системный анализ. Проблемы, методология, приложения. / М. З. Згуровский, Н.Д. Панкратова – Киев, 2011. – 744 с.
3. Искусственный интеллект. Справочник в трех томах / Под ред. В.Н. Захарова, Э.В. Попова, Д.А. Поспелова, В.Ф. Хорошевского. –М., 1990. – 464 с., 304 с., 368 с.
4. **Малафеева Л.Ю.** Реализация процедуры экспертного оценивания на основе метода Делфи / Л.Ю. Малафеева // Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології», SAIT 2009. – Киев, 2009. – С.142.
5. **Miller G.A.** The magical number seven plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information // Psychological Review. – 1956, Vol. 63. – P. 81-97.
6. **Згуровский М.З.** Информационная платформа сценарного анализа в задачах технологического предвидения / М. З. Згуровский, Н.Д. Панкратова // Кибирнетика и системный анализ. – 2003, № 4. – С. 112-125.

Надійшла до редколегії 08.12.2011

УДК 631.164.001.573

С.А. [9]Нужна
Дніпродзержинський державний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ ПІДПРИЄМСТВ ТА ОБ'ЄДНАНЬ

Показана необхідність використання системних характеристик при оптимізації функціонування та розвитку сільськогосподарських підприємств і запропоновано підходи математичного моделювання та управління маневреністю та інерційністю.

Показана необходимость использования системных характеристик при оптимизации функционирования и развития предприятий сельского хозяйства и предложены подходы математического моделирования и управления маневренностью и инерционностью.

In this article need of use system characteristics is shown by optimization of functioning and development of agriculture enterprises and approaches of mathematical modeling and management of maneuverability and a lag effect are offered.

Ключові слова: сільське господарство, математичне моделювання, системні характеристики, оптимізація, маневреність, інерційність, економічний ризик.

Вступ. Оптимальний план, розрахований за адекватною економіко - математичною моделлю, може бути проаналізований на основі двоїстих оцінок. Однак такий аналіз є неглибоким. Практика досліджень соціально - економічних систем підтверджує необхідність використання системних характеристик, які характеризують основні їх властивості. Головними системними характеристиками планів є: стійкість, маневреність, гнучкість, інерційність, надійність, напруженість, еластичність, ентропійний характер, невизначеність, яка породжує економічний ризик тощо. Ці системні характеристики необхідно враховувати при дослідженні економічних систем, їх плануванні та аналізі.

Можна погодитися з авторами роботи [1, с. 48], котрі стверджують: «Планове рішення в умовах невизначеності має характеризуватися висо-

© *С.А. Нужна, 2012*

ким рівнем надійності за мінімальної чи допустимої ризикованості його виконання, застосування можливих способів та засобів для забезпечення достатнього рівня адаптивності планових рішень, що здійснюються за рахунок високої маневреності плану.

Розроблений таким чином план (прогноз) функціонування та розвитку виробництва дасть змогу суттєво знизити економічний ризик, підвищити економічну ефективність».

Постановка задачі. Системними характеристиками можна і треба керувати. З цією метою використовують низку способів, серед яких найбільш ефективними є:

1) створення оптимальних (раціональних) обсягів ресурсів і продукції;

2) підвищення маневрених якостей плану;

3) оптимізація структури системи;

4) підвищення рівня достовірності техніко-економічної інформації в процесі складання плану;

5) використання досягнень НТП (підвищення ефективності та якості сільськогосподарської техніки, виведення нових сортів рослин і порід тварин, пристосованих до природнокліматичних умов кожного із регіонів країни, раціонального використання потенційних генетичних можливостей рослин і тварин, створення інформаційних технологій) [1, с. 48].

Керування системними характеристиками аграрно-промислових систем має певні особливості, наприклад, гнучкість. Автори роботи [1, с. 48-49] обґрунтовано гнучкість економічних систем інтерпретують таким чином: «Існування різних форм власності спонукає створення різних форм господарювання, готуючи простір для можливостей прийняття оптимальних рішень. Це і визначає гнучкість розвитку галузей й економіки загалом.»

Гнучка технологія має в собі деяке стійке ядро, яке може розвиватись увесь час стабільно, незалежно від впливу випадкових чинників і невизначеності інформації. Поряд із цим ядром існує зона еластичності, яка буде реагувати на збурення, тим самим забезпечуючи існування стійкого ядра. В ядрі мають сконцентруватися великі спеціалізовані підприємства. Зона гнучкості включатиме невеликі і середні виробництва з гнучкими технологіями. У сільськогосподарському виробництві неможливо виділити стійке ядро, яке може розвиватись увесь час стабільно, оскільки на нього впливають космічні чинники, які щорічно міняються у значних границях, наприклад, погодні умови. У результаті урожайності сільського сподар-

ських культур є випадковими величинами, відповідно тваринницькі галузі також є нестабільними, продуктивності тварин постійно змінюються. У результаті техніко-економічні показники щорічно змінюються у досить широких границях. Це стосується окремих підприємств сільськогосподарської галузі та всього АПК.

Велика латифундія зовсім не є кращою організаційною формою сільськогосподарського виробництва. Закон переваги великого господарства не є абсолютним. У малих господарствах краще вдається створювати раціональні умови для біологічного процесу росту рослин. Тому створення холдингів у АПК є безперспективними як з точки зору технології, так із точки зору соціально-економічної доцільності. Однак сказане вище не протирічить доцільності формування гнучкості планів. Саме цей приклад підтверджує необхідність при формуванні планів функціонування та розвитку сільського господарства, а також всього АПК, враховувати системні характеристики, особливості їх взаємодії.

Результати. Кожна із розглянутих вище системних характеристик може приймати відповідний оптимальний рівень, який необхідно враховувати при формуванні раціонального плану. Ці показники взаємозалежні. Навіть при незначній зміні внутрішніх і зовнішніх умов у процесі практичної реалізації оптимального плану, як найбільш економічно ефективного, його показники ефективності виробництва можуть різко знижуватися. У засушливих районах, наприклад у Степу, в сприятливих умовах (достатня кількість опадів) отримують високі врожаї пшениці. Однак дисперсія цього показника досить велика, тобто стійкість валових зборів низька. У Лісостепу України урожайність пшениці нижча, але її дисперсія також нижча, а значить виробництво цієї культури є більш стійким. Дослідження показують, що стійкість сільського господарства значно впливає на рівень валового внутрішнього продукту. Однак керування ступенем стійкості є досить складною задачею. Оскільки системні характеристики взаємопов'язані майже функціонально, особливо стійкість, надійність, економічний ризик, тому в подальшому будемо здійснювати дослідження економічної ефективності виробництва від економічного ризику, який формується під дією невизначеності. Одночасно звернемо увагу, що невизначеність (економічний ризик) суттєво залежить від інерційності та маневрених можливостей економічної системи. Маневреність виробництва рослинницьких продуктів і сировини залежать від площ посіву сільськогосподарських рослин та їх урожайності, остання залежить від сортів і погодних умов, які суттєво впливають на урожайність культур. Тому у процесі планування рослинництва, як пропонується у нашому дослідженні, необхідно врахо-

вувати погодні стани та їх імовірності. Необхідно враховувати повний спектр можливих подій, особливо ті, що можуть з'явитися з малою ймовірністю, але ведуть до значних збитків, нерідко до «економічних катастроф».

Існує широка гама можливостей маневрування, а саме: ресурсами, продукцією, способами функціонування та їх інтенсивністю. По кожному із приведених напрямків можливі два способи маневрування: зміна об'ємних характеристик у межах існуючих можливостей – технологій. Маневрування способами функціонування інтерпретується як перехід від одного набору способів у базисі планів до іншого. Можливість варіювання інтенсивністю способів визначається технологічними умовами або задається, як правило, у вигляді двосторонніх обмежень

$$\overline{Д}_j \le X_j \le Д_j, \qquad (j \in J), \tag{1}$$

де X_j - обсяг j-ої діяльності; $\overline{Д}_j, Д_j$ - відповідно нижня і верхня допустимі границі j-ої діяльності.

У сільському господарстві маневрування діяльності обмежується структурою сівозмін. У цьому випадку кілька культур є попередником для однієї або кількох видів рослин. Наприклад, попередником озимої пшениці є однорічні та багаторічні трави, горох тощо.

Міра маневреності M системи є керованою категорією та виступає дуже важливим чинником знаходження оптимального (раціонального) розв'язку в ситуаціях, коли є суттєві зміни внутрішніх і зовнішніх умов реалізації планів.

Другою важливою системною характеристикою агропромислових систем є інерційність. Прийняття, а особливо вже реалізовані плани, мають відповідну інерційність, так як зроблена відповідна надбудова. Кожному інерційному плану відповідає інерційний результат. Важливим завданням математичного моделювання є врахування на стадії розробки і прийняття плану його інерційності та наслідок.

Важливим чинником маневреності та інерційності у рослинництві є той факт, що засобом та предметом праці є земельні ресурси, які можливо відновлювати. З цією метою їх треба правильно використовувати, строго дотримуватися сівозмін, розроблених технологій. Відомо, що на світовому ринку значно підвищилися ціни на насіння соняшника і ріпаку. Орендатори земельних ресурсів різко збільшили площу посіву під цими культурами, що призвело до необхідності повторні посіви здійснювати на цих

площах через три – чотири роки. Результатом порушення сівозмін є виснаження ґрунту. Відновлення його потребує десятки років, досить багато матеріальних затрат, які можуть перевищувати обсяги отриманих прибутків.

Інерційність діяльності задається для рослинницьких культур та маточного поголів'я тварин. Оскільки неможливо досить точно передбачити стан погоди чи інші випадкові величини на наступні роки, то недоцільно орієнтуватися на один з обраних варіантів випадкової величини (навіть якщо він є найбільш ймовірним) а, отже, треба враховувати всі їх можливі варіанти. Нехай θ – номер погодного стану $(\theta \in \Theta)$. При цьому треба врахувати ймовірність настання кожної типової погодної умови, інерційність посівних культур, тобто посівні площі під кожною культурою при всіх θ-та повинні бути рівними. Отже, інерційність сільського сподарських культур запишеться таким чином

$$\sum_{i \in I} X_{ij,1} = \sum_{i \in I} X_{ij,2} = \ldots \sum_{i \in I} X_{ij,\Theta} \quad (j \in J). \qquad (2)$$

Також виникає задача визначення раціональної кількості корів, тобто в неврожайні роки кормів невистачить, а в роки високоврожайні – буде їх надлишок. У неврожайні роки зменшення поголів'я корів недоцільно, оскільки на ринку ціни на них знизяться. Крім цього існує відповідна ймовірність, що наступний рік буде високоврожайний, а значить, що надлишок кормів значно збільшиться. Треба враховувати той факт, що вирощування корови потребує 4–5 років. Отже, кількість корів для кожного погодного стану повинна бути однаковою, або, якщо це передбачається перспективним планом, зростати на наперед заданий відсоток, тобто має місце інерційність по поголів'ю корів.

Однак одночасно існує можливість маневрувати продуктивністю корів. Наприклад, корову потенційної продуктивності 5000 кг, яка споживає 57 центнерів кормових одиниць, можна годувати як корову продуктивністю 4500 або 4000 кг, які споживають відповідно 55 і 53 ц. кор. одиниць. Подальше зниження продуктивності корів недопустиме, наприклад, до 3500, 3000, 2500 кг, бо в урожайний рік, корова потенційної продуктивності 5000 кг, яка давала у попередній рік 3000 кг молока, навіть при найкращому годуванні не може досягти продуктивності 5000 кг.

Інерційність здійснюється за кожною тваринницькою галуззю та стат-

тево_віковою групою. Однак є можливість маневрувати продуктивністю тварин. Наприклад, за умов найнижчої урожайності кормових культур корови продуктивністю 5000 кг можна утримувати (годувати) як корів продуктивністю 3500 кг. А це значить, що в рамках інерційності є можливість збільшувати міру маневреності (за продуктивністю тварин). Дуже важливо, щоб при розробці економіко _математичних моделей міра маневреності *M* була максимальною.

Спосіб математичного моделювання інерційності та маневреності розглянуті у [2, с. 84 – 94]. Однак у цій роботі мають місце певні неточності. Якщо планується структура стада [2, с. 87] при дуже низькій урожайності кормових культур, то в оптимальний план ввійдуть, наприклад, змінні X_1 і X_5. На практиці це неможливо, бо якщо корови у попередньому році мали продуктивність 2500 і 3000 кг молока, то в наступному при найкращій годівлі вони не можуть досягти продуктивності 4500 або 5000 кг. Підтвердимо це на реальних розрахунках двома способами моделювання (перший – взятий із [2], другий – запропонований нами), тобто інерційність і маневреність, описані нерівностями (2.40), (2.41) і (2.42) [2, с. 105], запишемо таким чином. Обмеження мають вид:

a) за структурою стада

$$\sum_{f\in F} Y_{j+1,\,f\,k\theta} - B_{jk\theta}\cdot\sum_{f\in F} Y_{j\,f\,k\theta} \le 0, \quad (j\in J-1; k\in K; \theta\in\Theta), \tag{3}$$

де $Y_{j\,f\,k\theta}$ – кількість планового поголів'я j-*ої* статево_вікової групи $(j\in J)$ f-ої продуктивності $(f\in F)$ k-ої $(k\in K)$ тваринницької галузі за θ-та погодних умов $(\theta\in\Theta)$; $B_{jk\theta}$ – частка збереження тварин j-ої статево_вікової групи k-ої тваринницької галузі за θ-та погодних умов;

b) за структурою статево _вікових груп у розрізі продуктивності тварин

$$\sum_{m=1}^{f} Y_{jmk\theta} - \sum_{m=1}^{f} B_{jmk\theta}\cdot\sum_{f\in F} Y_{j\,f\,k\theta} \le 0, \quad (j\in J; f\in F; k\in K; \theta\in\Theta), \tag{4}$$

де $B_{jmk\theta}$ – частка тварин m-ої продуктивності в j-ій статево_віковій групі

k-ої тваринницької галузі за θ -та погодних умов; $Y_{j\,m\,k\theta}$ – кількість планового поголів'я j-*ої* статево -вікової групи m-ої продуктивності k-ої тваринницької галузі за θ-та погодних умов;

с) за інерційністю тваринницьких галузей

$$\sum_{f\in F} Y_{j\,f\,k\theta} = \sum_{f\in F} Y_{j\,f\,k,\theta+1}, \quad (j\in J; k\in K; \theta\in\Theta-1). \tag{5}$$

Другому способу моделювання інерційності та маневреності відповідають обмеження:

1) врахування маневреності структури стада

$$\sum_{m\in M}\sum_{f\in F} Y_{j\,m\,f\,k\theta} - B_{j\,k\theta}\sum_{j\in J}\sum_{m\in M}\sum_{f\in F} Y_{j\,m\,f\,k\theta} \le 0, \quad (j\in J; k\in K; \theta\in\Theta) \tag{6}$$

де $B_{j\,k\theta}$ – частка тварин j-ої статево -вікової групи k-ої тваринницької галузі за θ -та станом погодних умов; $Y_{j\,m\,f\,k\theta}$ – планове поголів'я j-*ої* статево-вікової групи f-ої потенційної продуктивності k-ої тваринницької галузі, які вирощують за m-тою технологією та утримують за θ -та погодних умов;

2) врахування інерційності тваринницьких галузей

$$\sum_{m\in M}\sum_{f\in F} Y_{j\,m\,f\,k\theta} = \sum_{m\in M}\sum_{f\in F} Y_{j\,m\,f\,k,\theta+1}, \quad (j\in J; k\in K; \theta\in\Theta-1); \tag{7}$$

3) врахування маневрування продуктивністю шляхом переведення тварин з групи даної продуктивності у групу двох нижчих рівнів

$$\sum_{m\in M_n} Y_{j\,m\,f\,k\theta} - Y_{j\,m\,f\,k\theta} = 0, \quad (j\in J, m\in M, f\in F, k\in K, \theta\in\Theta) \tag{8}$$

де $M_n \in M$, M_n – підмножина технологій, яка відповідає утриманню тварин з групи даної продуктивності у групу двох нижчих рівнів.

Необхідна інформація для формування матриць економіко-математичних моделей приведена у табл. 1.

Таблиця 1

Споживання кормів однією коровою і прибуток від неї

Показник		Споживання кормів		Прибуток від однієї корови в кожному з погодних станів, грн				
Змінна	Продуктивність корів, кг	Ц. корм. одиниць	Пер. протеїну кг	θ=1	θ=2	θ=3	θ=4	θ=5
X_6	5000	57	671,4	1548	1750	1939	2118	2286
X_{56}	4500	55	645,15	1098	1298	1486	1662	1827
X_{46}	4000	53	618,51	786	976	1154	1321	1477
X_5	4500	55	645,15	1098	1298	1486	1662	1827
X_{45}	4000	53	618,51	786	976	1154	1321	1477
X_{35}	3500	51	586,5	509	688	854	1010	1156
X_4	4000	53	618,51	786	976	1154	1321	1477
X_{34}	3500	51	586,5	509	688	854	1010	1156
X_{24}	3000	48	542,4	272	436	589	732	866
X_3	3500	51	586,5	509	688	854	1010	1156
X_{23}	3000	48	542,4	272	436	589	732	866
X_{13}	2500	45	502,65	78	226	364	491	610
X_2	3000	48	542,4	78	436	589	732	866
X_{12}	2500	45	502,65	272	226	364	491	610
X_1	2500	45	502,65	78	226	364	491	610

Результати оптимізації структури стада корів по продуктивності приведені у табл. 2 та табл. 3.

З табл. 2 маємо, що при моделюванні структури стада за продуктивністю першим способом при θ=1 (найнижча урожайність кормових культур) необхідно утримувати 398 голів продуктивністю 2500 кг. Якщо у наступному році погодна ситуація буде θ=5 (найкраща урожайність кормових культур), то неможливо перейти до відповідної структури стада. Із 398 корів продуктивністю 2500 кг можна перевести 159 корів у стадо продуктивністю 3500 кг, а це значить, що 398–159=239 корів, тобто ці корови згідно прийнятої технології не можуть бути переведеними до стада продуктивністю 4000, 4500 або 5000 кг. Отже, перший спосіб моделювання точно не описує технологію переведення корів з однієї в іншу групу .

Таблиця 2

Оптимальна структура корів за продуктивністю *(перший спосіб моделювання)*

Показник	Перший спосіб моделювання				
	Погодні стани				
	$\theta=1$	$\theta=2$	$\theta=3$	$\theta=4$	$\theta=5$
Ц. кормових одиниць	33000	36500	40000	43500	47000
Перетравного протеїну, кг	200400	278700	357000	488700	620400
Кількість корів	398	398	398	398	398
Прибуток, тис. грн	31	387	457	522	584
X_6	0	40	40	40	40
X_{66}	0	0	0	0	0
X_{56}	0	0	0	0	0
X_{46}	0	0	0	0	0
X_5	0	40	40	40	40
X_{55}	0	0	0	0	0
X_{45}	0	0	0	0	0
X_{35}	0	0	0	0	0
X_4	0	159	159	159	159
X_{44}	0	0	0	0	0
X_{34}	0	0	0	0	0
X_{24}	0	0	0	0	0
X_3	0	159	159	159	159
X_{33}	0	0	0	0	0
X_{23}	0	0	0	0	0
X_{13}	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0
X_{22}	0	0	0	0	0
X_{12}	0	0	0	0	0
X_1	398	0	0	0	0

Таблиця3

Оптимальна структура корів по продуктивності *(другий спосіб моделювання)*

Показник	Другий спосіб моделювання				
	Погодні стани				
	θ=*1*	θ=*2*	θ=*3*	θ=*4*	θ=*5*
Ц. кормових одиниць	33000	36500	40000	43500	47000
Перетравного протеїну, кг	200400	278700	357000	488700	620400
Кількість корів	372	372	372	372	372
Прибуток, тис. грн	160	361	426	488	545
X_6	0	37	37	37	37
X_{66}	0	37	37	37	37
X_{56}	0	0	0	0	0
X_{46}	0	0	0	0	0
X_5	0	37	37	37	37
X_{55}	0	37	37	37	37
X_{45}	0	0	0	0	0
X_{35}	0	0	0	0	0
X_4	37	149	149	149	149
X_{44}	37	149	149	149	149
X_{34}	0	0	0	0	0
X_{24}	0	0	0	0	0
X_3	0	149	149	149	149
X_{33}	0	149	149	149	149
X_{23}	0	0	0	0	0
X_{13}	0	0	0	0	0
X_2	149	0	0	0	0
X_{22}	149	0	0	0	0
X_{12}	0	0	0	0	0
X_1	149	0	0	0	0

Дані табл. 3 підтверджують, що другий спосіб моделювання структури стада таку можливість забезпечує. Наприклад, структуру стада корів, яку отримуємо для θ=1, легко перевести у ситуацію погодного стану θ=5. Тобто, 149 корів продуктивністю 2500 переводяться у корови продуктивністю 3500 кг, відповідно корови продуктивністю 3000 кг переходять до стада

продуктивністю 4500 кг, а корови продуктивності 3500 кг – у 4500 кг, продуктивності 4000 кг – у 5000 кг. Неважко переконатися, що із погодної ситуації $\theta=1$ стадо корів легко перевести у ситуації $\theta=2$, $\theta=3$ і $\theta=4$. Відповідно можна здійснити перехід з будь-якої нижчої погодної ситуації у вищу. Отже, другий спосіб моделювання структури стада забезпечує виконання заданих технологій.

Відповідним чином описують маневреність та інерційність по великій рогатій худобі на відгодівлі та відтворенні стада.

Звернемо увагу, що міра маневреності M має бути максимальною, однак інерційність зменшує цю множину. Не важко бачити, що економічний, у тому числі підприємницький ризик, значною мірою залежить від маневреності та інерційності економічних систем.

Висновки. Недолік багатьох існуючих економіко-математичних моделей у тому, що системні характеристики формуються поза моделлю. Автори показали необхідність включати ці характеристики в модель, з метою отримання їх оптимальних значень.

У статті запропоновано підходи моделювання маневреності та інерційності сільськогосподарських систем. Автор виправив неточність маневрування тваринницькими галузями, яка мала місце у роботі [2].

Бібліографічні посилання

1. **Вітлінський В.В.** Ризикологія в економіці та підприємництві: моногр. / В.В. Вітлінський, Г.І. Великоіваненко – К., 2004. – 480 с.

2. **Наконечний С.І.** Погодний ризик АПК: адаптивне моделювання, економічне зростання та прогнозування / С.І. Наконечний, С.С. Савіна – К., 1998. – 162 с.

Надійшла до редколегії 10.05.2012

УДК 519.8

М.П. [10]Пасинков, В.А. Турчина
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ПРО ПАРАМЕТРИ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗ ВАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Проведено ряд експериментів розв'язування задачі комівояжера за допомогою еволюційних алгоритмів.

Проведен ряд экспериментов по решению задачи коммивояжера при помо и эволюционных алгоритмов.

A number of experiments to address the traveling salesman problem using evolutionary algorithms were run.

Ключові слова: генетичний алгоритм, задача комівояжера.

Вступ. Задача комівояжера є однією з класичних задач дискретної оптимізації. Простота її постановки приваблює дослідників, а належність її до класу NP -повних задач ставить перед ними ряд цікавих питань. Як оптимізаційна задача на графах, вона полягає у пошуку гамільтонового циклу найменшої довжини. До таких задач можуть зводитись проблеми пов'язані з розробкою логістичних маршрутів, комп'ютерних мереж, архітектури електронно -обчислювальних вузлів тощо. Для розв'язування задачі комівояжера виконано ряд експериментів із застосуванням еволюційних алгоритмів генетичного типу. Експерименти проводились із графами спеціального вигляду. Отримано оцінки ймовірності знаходження точного розв'язку залежно від розміру графу та критерію виходу з еволюційного процесу.

Постановка задачі. Агенту необхідно обійти n міст і повернутися у вихідний пункт відвідуючи кожне місто лише по одному разу та вибрати маршрут з мінімальною вартістю [6].

Дано: повнозв'язний граф $G = (V, U)$, де V – множина вершин графу, $|V| = n$ – кількість міст; U – множина ребер (характеризує шляхи між

© *М.П. Пасинков, В.А. Турчина, 2012*

містами); матриця суміжності R(i, j), де i, j = 1,2, …, n, що характеризує відстані між містами.

Цільова функція для задачі має наступний вигляд:

$$Z(\varphi) = R(\varphi[n], \varphi[1]) + \sum_{i=1}^{n-1} R(\varphi[i], \varphi[i+1]) \rightarrow \min .$$

Класичні методи пошуку розв'язків. Класичним точним методом пошуку розв'язків задачі комівояжера є метод гілок та меж [3; 8], що полягає у побудові дерева пошуку розв'язків та підрахунку оцінок. Обчислювальна складність алгоритму гілок та меж росте з експоненціальною швидкістю. Оцінка складності методу гілок та меж є верхнею межею при проектуванні алгоритмів розв'язку задачі.

Існують наближені методи розв'язування поставленої задачі. Найвідомішими наближеними методами розв'язування є методи найближчого сусіднього міста, включення найближчого міста та метод найдешевшого включення. Алгоритми не є досконалими і не гарантують оптимальності маршруту.

Також для знаходження розв'язків застосовуються технології нейронних мереж, наприклад мережа Хопфілда [2; 7]. Широкого вжитку набули алгоритми на основі знаходження найменшого остовного дерева [5] та алгоритм імітації відпалу [4].

Генетичні алгоритми. Теорія еволюційних алгоритмів дала поштовх для створення нових підходів до розв'язування класичних задач. Не стала винятком і задача комівояжера. Існує безліч реалізацій генетичних алгоритмів та алгоритмів типу рою часток для згаданої задачі.

Для даної конкретної реалізації було використано OpenSource бібліотеку методів реалізації генетичних алгоритмів Genetic Algorithm Library Младена Янковіча [1].

Опис фреймворку. Використана бібліотека дозволяє конструювати генетичні алгоритми специфічного вигляду та виконувати обчислення у режимі кількох потоків команд.

Структура бібліотеки виділяє три великих блоки класів: класи для конструювання алгоритмів, класи хромосом та класи популяції.

До класу хромосоми включаються структури, що реалізують операції кросоверу і мутації, порівняльний оператор для фітнес-функцій та власне визначення вигляду хромосоми.

Клас популяції являє сукупність структур відбору, вибору особин для схрещування, формування нової популяції на наступному етапі еволюції.

Клас алгоритму включає критерій виходу з еволюційного процесу та власне алгоритм.

Бібліотека включає до себе не лише інтерфейси для конструювання алгоритму. Реалізовано також частовживані структури, такі як, наприклад, бінарна хромосома для класичного генетичного алгоритму (Binary-coded GA, BGA) та хромосома для генетичного алгоритму на дійсних числах (Real-coded GA, RGA); реалізовано ряд шаблонів для операцій кросоверу, мутації, шаблони поведінки , визначення часу , виходу з ітераційного процесу, селекції та формування популяції.

Опис алгоритму. Для пошуку оптимального маршруту задачі комівояжера використано генетичний алгоритм з критерієм виходу за незмінною впродовж деякої кількості епох найкращою хромосомою. Критерій відбору хромосом – менша фітнес функція.

Хромосома конструюється специфічним чином і являє собою маршрут комівояжера.

Для того, щоб уникнути некоректних маршрутів, що виникають із застосуванням класичних одноточкових чи багатоточкових кросоверів, що може суттєво вплинути на швидкість роботи алгоритму, використовується специфічно створений кросовер. Із хромосоми одного з батьків, вибирається випадковим чином місто і далі в хромосомах батьків вибирається те, яке є найближчим серед міст, пов’язаних з поточним. Якщо таке місто вже присутнє у маршруті нащадку, то вибирається наступне, з найменшою відстанню. Якщо всі пов’язані міста вже присутні у маршруті, то вибирається випадкове місто, із тих, що до маршруту нащадку ще не увійшли.

Алгоритм використовує оператор мутації, що міняє місцями міста у маршруті.

Розмір популяції 100 осіб. Вісім найкращих у кожній епосі потрапляють до наступної без операції відбору.

Результати експериментів. Було проведено ряд експериментів на графах специфічного вигляду. Граф формувався за мапою міст, що рівномірно розміщуються в квадраті. Відстань між сусідніми містами, що знаходяться на одній лінії (горизонтальній чи вертикальній) у квадраті складає дві одиниці виміру.

Таким чином, при парній кількості міст довжина оптимального маршруту складає $2^* n$ одиниць довжини, де n – кількість міст у заданій мапі. При непарній кількості міст оптимальна довжина маршруту визначається попередньо за допомогою методу гілок та меж.

Оскільки критерієм виходу з еволюційного процесу є досягнення певної кількості епох без зміни найкращого значення фітнес -функції, а відповідно і найкращої хромосоми, то необхідно визначитися з тою кількістю ітерацій, що мінімально необхідна для знаходження оптимального маршруту при заданій кількості міст.

Експеримент послідовно проводився для всіх квадратів починаючи від чотирьох міст і до ста. У циклі конструювалися еволюційні процеси з різними критеріями виходу. Виконувалась одна тисяча запусків алгоритму при кожній комбінації параметрів.

Після проведення експериментів для кожної кількості міст було побудовано графік на осі абсцис якого відкладається кількість епох, зазначена у критерії виходу, а на осі ординат – кількісний вираз відношення кількості успішних експериментів до неуспішних. Успішним називається експеримент, у ході якого було досягнуто оптимальної довжини маршруту для заданої кількості міст, неуспішним – експеримент за ходом якого було отримано довжину маршруту, що відрізняється від оптимальної.

Усі експерименти проводилися без використання багатопоточності.

Окрім зміни параметрів виходу з еволюційного процесу було також використано декілька конфігурацій оператора мутації. Для задачі комівояжера в даній конструкції алгоритму мутація має два основних параметри: ймовірність мутації та максимальна кількість позицій у маршруті, що можуть бути зміщені. Наведено результати експериментів для ймовірності мутації 0.3 та максимальної кількості позицій – 2 (рис. 1) та параметрів 0.5 та 5 відповідно (рис. 2).

Результати експериментів показують, що із збільшенням кількості міст генетичний алгоритм із більшою ймовірністю мутації має гіршу збіжність і гірше відношення успішних експериментів до неуспішних. Окрім того збільшується час обчислень. Це відбувається за рахунок того, що часта мутація виводить популяцію за межі досягнутого мінімуму.

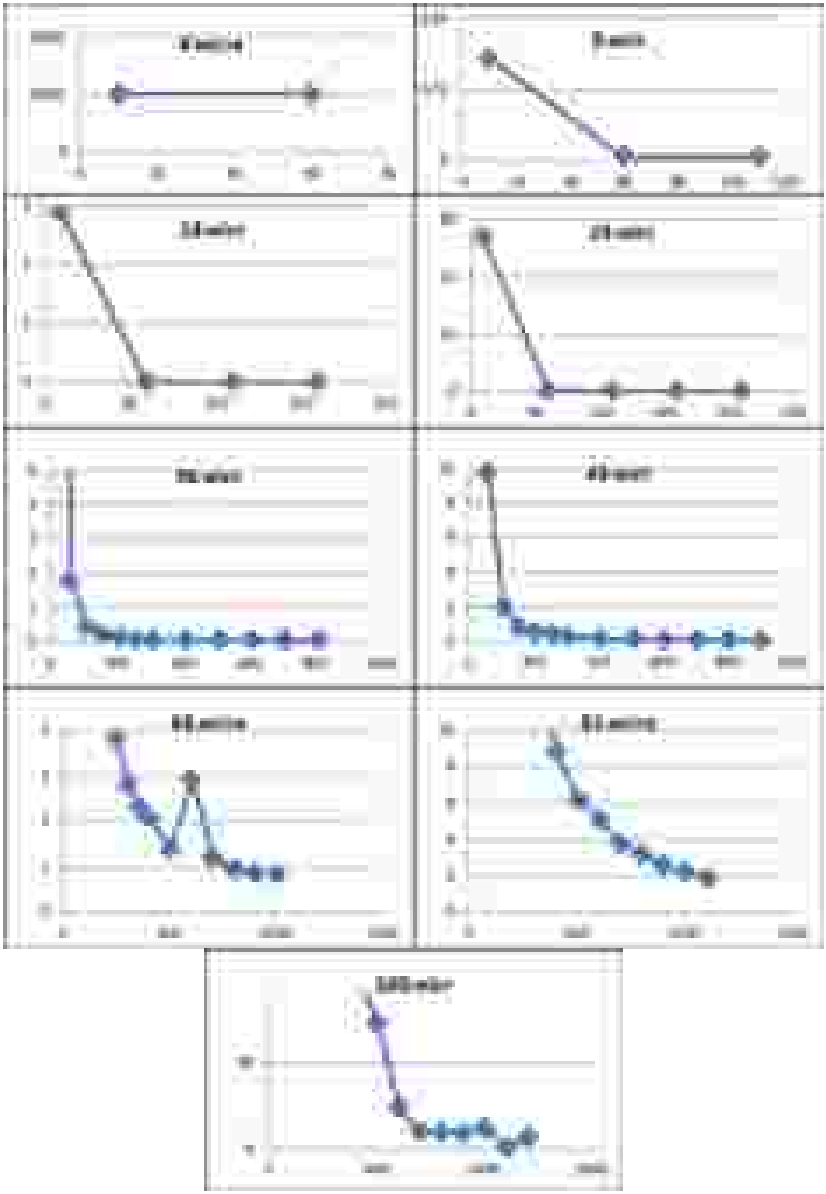


Рис. 1. Результати експерименту для параметрів мутації (0.3; 2)

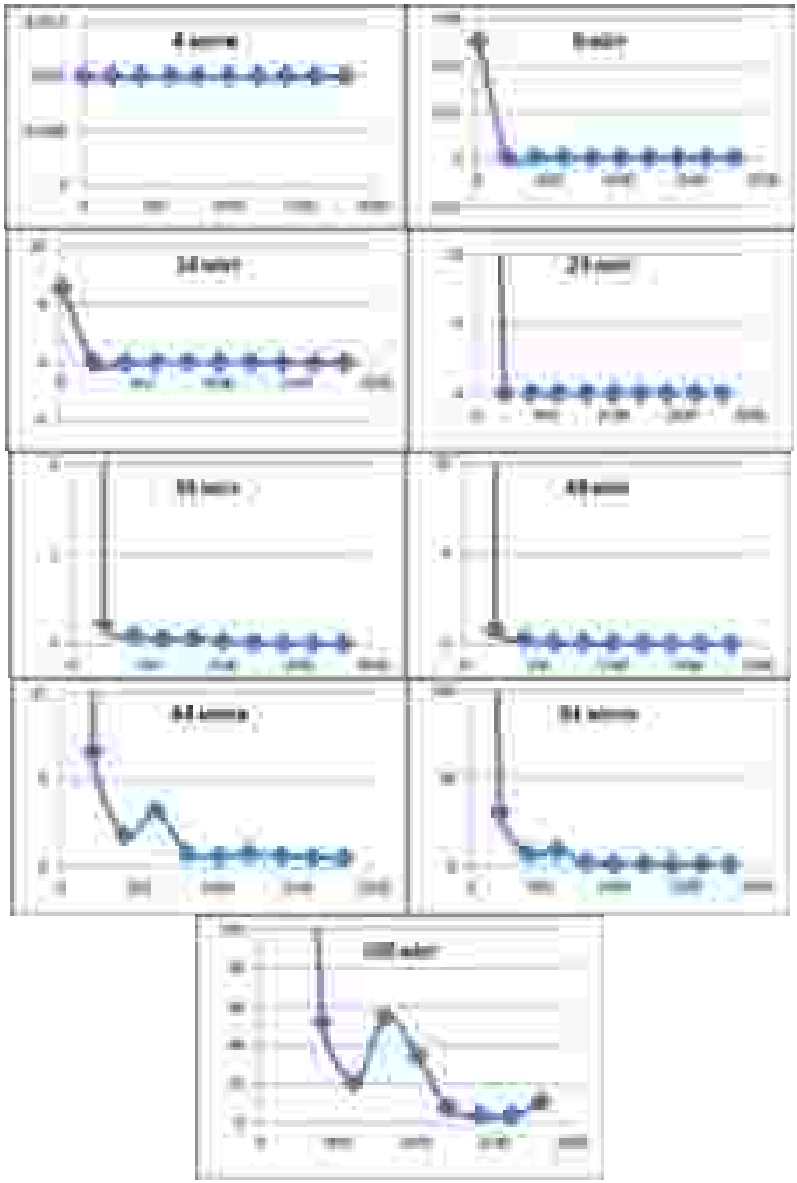


Рис. 2. Результати експерименту для параметрів мутації (0.5; 5)

Було проведено ще один експеримент: при зазначених вище параметрах оператора мутації було виконано вимірювання часу виконання еволюції для мап від чотирьох до 1225 міст. На графіку (рис. 3) по горизонтальній осі відкладено кількість міст, по вертикальній – час перебігу еволюції у секундах. Кількість ітерацій при незмінному найкращому значенні фітнес_функції вибрано 15000.

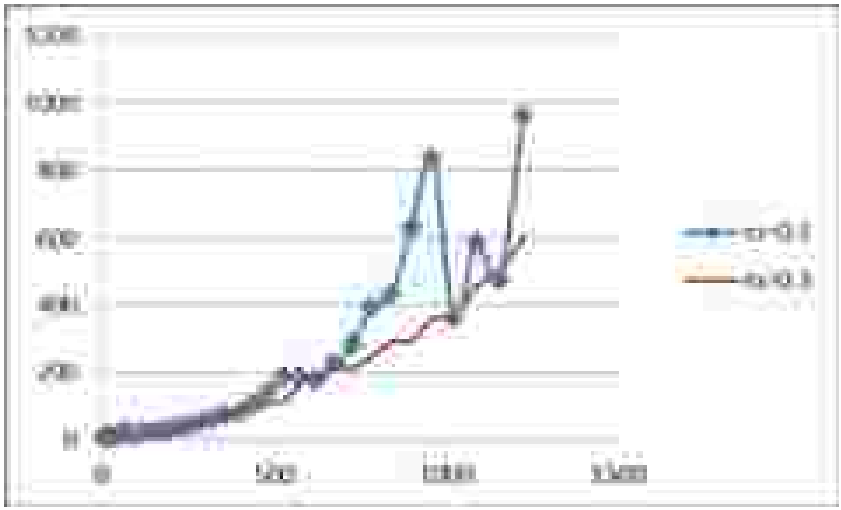


Рис. 3. Порівняння швидкості алгоритму при параметрах мутації (0.3; 2) та (0.5; 5)

Як результат, можна побачити, що при невеликій кількості міст час виконання еволюції майже не відрізняється, незалежно від параметрів мутації, проте із збільшенням кількості міст алгоритм із меншими параметрами мутації починає показувати кращий час.

Час перебігу еволюції з параметрами мутації (0.3; 2) складає від 8.192 сек. для чотирьох міст на мапі до 602.44 сек. для 1225 міст на мапі. Для параметрів (0.5; 5) аналогічні результати складають від 8.7 сек. до 962.047 сек.

Висновки. У генетичних алгоритмах при використанні критерію виходу з еволюційного процесу за кількістю ітерацій без зміни найкращого представника популяції, варто коригувати цей показник залежно від зміни кількості шуканих параметрів задачі, оскільки при збільшенні кількості параметрів кількість неоптимальних розв'язків збільшується.

Збалансований оператор мутації для задачі комівояжера дозволяє покращити швидкість збіжності алгоритму за рахунок відсутності виходів еволюційного процесу за межі глобального мінімуму.

Бібліографічні посилання

1. Genetic Algorithm Library by Mladen Janković : http://www.codeproject.com/Articles/26203/Genetic-Algorithm-Library
2. **Hopfield J.J** and Tank D.W. Neural computation of decisions in optimization problems.
3. **Land, A.H.** und A.G. Doig (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. In: Econometrica 28. S. 497-520.
4. **Левитин А.В.** Глава 3. Метод грубой силы: Задача коммивояжера / А.В. Левитин // Алгоритмы: введение в разработку и анализ М., 2006 – С. 159-160.
5. **Мудров В.И.** Задача о коммивояжере / В.И. Мудров. – М., 1969. – С. 62.
6. **Кормен, Т.** Минимальные остовные деревья/ Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн // Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms – 2-е изд. – М., 2005. – 1296 с.
7. **Хайкин С**. Нейронные сети: полный курс. Издание 2./ С. Хайкин; пер. с англ. – М., 2006. – 1104 с.
8. **Кузнецов Ю.Н**.. Математическое программирование: учебное пособие. 2-е изд. перераб. и доп./ Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М., 1980, 300 с.

Надійшла до редколегії 11.06.2012

УДК 004.942

М.Е. Сердюк, В.Ю. Иванов
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

Розглянуто адаптивний алгоритм просторової інтерполяції статичних растрових зображень, в основі якого лежить локальне відтворення ліній рівня з використанням дискретного диференційного оператора Собеля.

Рассмотрен адаптивный алгоритм пространственной интерполяции статических растровых изображений, в основе которого лежит локальное восстановление линий уровня с использованием дискретного дифференциального оператора Собеля.

An adaptive algorithm of space interpolation of still raster images is considered. The main point of this approach is a local restoration of the level lines with discrete differential operator of Sobel employment .

Ключевые слова: интерполяция цифровых изображений, каркас изображения, топографическая карта рисунка, оператор Собеля.

Вступление. Широкое использование компьютерной графики во многих областях, таких как медицина, техническая диагностика, мультимедийные и образовательные приложения и др., делает актуальными задачи обработки графической информации. Одной из основных операций в таких задачах является операция «zooming» или изменение пространственных размеров изображения. Обычно такие преобразования сопровождаются появлением визуальных артефактов и потерей качества в масштабируемом изображении. Кроме того, применение операции «zooming» в цифровых видеотехнологиях и видеосистемах выдвигает определенные требования и к скорости выполнения преобразований. Поэтому актуальной является разработка и усовершенствование алгоритмов интерполяции растровых изображений.

Сущность проблемы интерполяции состоит в отыскании яркости изображения в некоторых промежуточных точках между известными его элементами при осуществлении преобразований. Известные алгоритмы интерполяции можно разделить на два типа: адаптивные и неадаптивные.

© *М.Е. Сердюк, В.Ю. Иванов, 2012*

Неадаптивные методы всегда используют одинаковый алгоритм интерполирования по всему пространству, независимо от обрабатываемого изображения, т. е. все пиксели обрабатываются одинаково. Наиболее известными методами этого вида являются метод ближайшего соседа, билинейная, бикубическая интерполяция, интерполяция сплайнами, метод Ланцоша и другие. Для интерполяции в них используются группы смежных пикселей. В зависимости от требуемой точности и сложности они могут использовать от одного ближайшего до нескольких значений соседних пикселей. Неадаптивные алгоритмы интерполяции всегда сталкиваются с компромиссом между тремя дефектами: ступенчатостью, размытием изображения и появлением дублирующих контуров. Чем больше смежных пикселей такие алгоритмы используют, тем более точными могут оказаться результаты, но это достигается за счёт значительного прироста времени обработки.

Адаптивные методы учитывают характер восстанавливаемого изображения и корректируют способы интерполяции в зависимости от условий (резкие границы, гладкая текстура). Такая гибкость позволяет получить намного более четкие изображения с меньшим числом дефектов, чем это было бы возможно для неадаптивного метода. Но объем вычислений в этих алгоритмах существенно больше, и они требуют большего времени обработки.

В данной статье рассматривается адаптивный алгоритм интерполяции изображений, в основе которого лежит локальное восстановление линий уровня в окрестности каждого пикселя изображения, и предлагается модификация его с целью сокращения времени работы.

Постановка задачи. Известно, что в задачах интерполяции целесообразно рассматривать изображение как распределение (или функционал), определенное на широком классе тестовых функций, а цифровой рисунок – как результат действия соответствующего распределения на специальным образом подобранную совокупность тестовых функций [1]. Т. е. понятия «цифровое изображение» и «цифровой рисунок» несут различную смысловую нагрузку: какой-либо рисунок – это компактное подмножество выбранного векторного линейного пространства, а какое-либо изображение – линейный ограниченный функционал на множестве непрерывных функций с компактными прямоугольными носителями в R^2.

Пусть $\Delta = [0, W] \times [0, H]$ (W и H – положительные действительные числа такие, что $W>>1, H>>1$) – некоторое непустое множество в R^2. Пусть I – произвольное изображение, для которого $\mathrm{supp} I = \Delta$. Отметим, что I может принимать действительные значения из диапазона [0, 1], если рассматривается изображение в шкале серых оттенков, или целые значения из ди-

апазона [0, 255], если речь идет о кодировании интенсивности пикселей или их R, G, B − характеристик. Для определенности будем рассматривать изображение в шкале серых оттенков. Обозначим через Δ^{WH} дискретную сетку на Δ

$$\Delta^{WH} = \{(i, j) : i = 1,2,..., N \le W,\ j = 1,2,..., M \le H\}.$$

Тогда цифровой рисунок $P(I) = \{P_{ij}\}_{i=1,N}^{j=1,M}$ изображения I – это образ I на пиксельную сетку Δ^{WH}, т. е. $P(I)$ – это совокупность значений, которые принимает распределение I на соответствующей системе тестовых функций. Задача состоит в том, чтобы по значениям рисунка $P(I)$ на пиксельной сетке восстановить исходное изображение. В общем случае такая задача имеет множество решений. Восстанавливая каким-либо способом изображение по рисунку P, мы получим некоторый образ $\tilde{I}$ исходного изображения I. Очевидно, что $\tilde{P}(\tilde{I}) = P(I)$, где $\tilde{P}(\tilde{I})$ – рисунок восстановленного изображения $\tilde{I}$ на той же самой пиксельной сетке.

Целью данной работы является метод восстановления рисунка $P(I)$ (и, следовательно, соответствующего ему изображения $\tilde{I}$) после изменения размеров исходного изображения по известным его значениям в точках пиксельной сетки, основанный на построении топографической карты рисунка и интерполяции вдоль полученных линий уровня. В связи с этим рассмотрим топографическое представление рисунка и некоторые его геометрические характеристики.

Топографическое представление рисунков. Пусть λ – значения, которые может принимать рисунок $P(I)$. Множеством λ-уровня рисунка $P(I)$ будем называть подмножество множества Δ вида:

$$X_\lambda(P) = \{(x, y) \in \Delta : P(x, y) \ge \lambda\},$$

а его границу $\partial X_\lambda(P) = \{(x, y) \in \Delta : P(x, y) = \lambda\}$ – линией уровня или топографической кривой. Топографическим представлением рисунка $P(I)$ на заданной системе пороговых величин $\{\lambda_k \in [0,1], k = 1,..., K\}$, где $0 \le \lambda_1 < ... < \lambda_k < \lambda_{k+1} < ... < \lambda_K \le 1$, будем называть следующую совокупность множеств его λ-уровней

$$\{X_{\lambda_k}(P)\ \forall k = 1,..., K\}.$$

В основе такого определения лежат следующие рассуждения. Восстановление рисунка $P(I)$, а значит и соответствующего ему изображения $\tilde{I}$ становится возможным, если при каждом значении $\lambda \in [0, 1]$ (речь идет об

изображениях в шкале серых оттенков) известно множество соответствующего уровня. Действительно, в этом случае имеем следующее соотношение

$$P(x,y) = \sup\{\lambda \in [0,1] : (x,y) \in X_\lambda(P)\}.$$

В соответствии с основным постулатом математической морфологии основная геометрическая информация о каком-либо рисунке содержится в совокупности его λ-уровней [3], или точнее, в совокупности связных компонент каждого из множеств $X_\lambda(P)$. Границами $\partial X_\lambda(P)$ таких множеств являются линии уровней, т. е. контурные кривые, инвариантные к изменению интенсивности изображения. В общем случае вопрос о величине периметра множеств уровня для произвольного рисунка остается открытым [2]. Более того, можно привести примеры изображений и соответствующих им рисунков, для которых множества уровней будут иметь периметры, стремящиеся к $+\infty$ при уплотнении пиксельной сетки. Однако известно, что для класса функций с ограниченной вариацией $f \in BV(\Delta)$ их множества уровней имеют конечный периметр, т. е. принадлежат к классу множеств Caccioppoli [5]. Поэтому допустимыми в задачах интерполяции будем считать изображения, порождающие функции которых являются функциями с ограниченной вариацией.

Описание метода интерполяции. Суть интерполяции состоит в вычислении значений цифрового рисунка в неизвестных пикселях, которые появляются в результате изменения его размеров. В [6] рассмотрен алгоритм, основанный на принципе каркасной интерполяции. Алгоритм имеет двухэтапную схему реализации. На первом этапе восстанавливается та часть топографической карты изображения, которая содержит все пиксели исходного рисунка. Результатом этого шага есть некоторое перфорированное множество, которое является подмножеством носителя исходного изображения Δ и представляет собой некоторое приближение его топографической карты. Такое множество называется каркасом изображения. Далее осуществляется восстановление порождающей функции изображения на построенном каркасе. Второй этап алгоритма предполагает восстановление порождающей функции в оставшихся пикселях, т. е. за пределами каркаса.

Построение каркаса в [6] осуществляется следующим образом. Для каждого пикселя строится цепочка из шести звеньев, в которой данный пиксель является центральным. Формирование такой цепочки осуществляется с помощью построения шеститочечных сплайнов минимальной кривизны [7] на системе пикселей, которые выбираются определенным образом среди ближайших к рассматриваемому пикселю, и сравнения зна-

чений сплайна со значением P в данном пикселе. Основной проблемой этого этапа является то, что построение каркаса изображения осуществляется методом целенаправленного перебора с большим количеством вычислений, что существенно влияет на скорость алгоритма. В связи с этим предлагается модифицировать этот этап на основе следующих рассуждений.

Пусть $u(x,y)$ – порождающая функция восстанавливаемого изображения, $(x, y) \in \Delta$. Тогда $u(x,y)$=const – линии уровня изображения в R^2. Пусть $u(i,j)$ – значение изображения в точке (i,j) пиксельной сетки Δ^{WH}. Рассмотрим градиент функции $u(x,y)$: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$. Как известно, градиент – это вектор, направление которого указывает направление скорейшего возрастания функции. Значит $\nabla u(i, j)$ – направление наибольшего изменения u в точке (i,j). Тогда поворот этого вектора на 90 $^\circ$ дает вектор $\nabla^{\perp} u(i, j)$ наименьшего изменения u, т. е. направление линии уровня в окрестности данного пикселя. Используем этот факт для построения остова каркаса изображения.

Под остовом каркаса будем понимать связный граф на R^2, множеством вершин которого является дискретная сетка Δ^{WH}, а множество всех его ребер состоит из прямолинейных отрезков, концами которых являются пиксели, в которых значения функции изображения мало отличаются. Каркас изображения получается утолщением его остова. При этом допустимым является каркас, не содержащий ребер, которые пересекаются не в пикселе. Каркас представляет собой некоторое приближение топографической карты изображения и содержит те фрагменты линий уровня, которые проходят через точки пиксельной сетки.

Для вычисления дискретного градиента в точке (i,j) будем использовать оператор Собеля [4] – дискретный дифференциальный оператор, который хорошо зарекомендовал себя в алгоритмах выделения контуров изображения. Для вычисления дискретных производных функции яркости изображения применяются маски свертки вида

$$M_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; M_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

первая из которых учитывает изменение яркости изображения в горизонтальном направлении, вторая – в вертикальном. Дискретные частные производные определяются следующим образом

$$G_x = M_x * A,\ G_y = M_y * A,$$

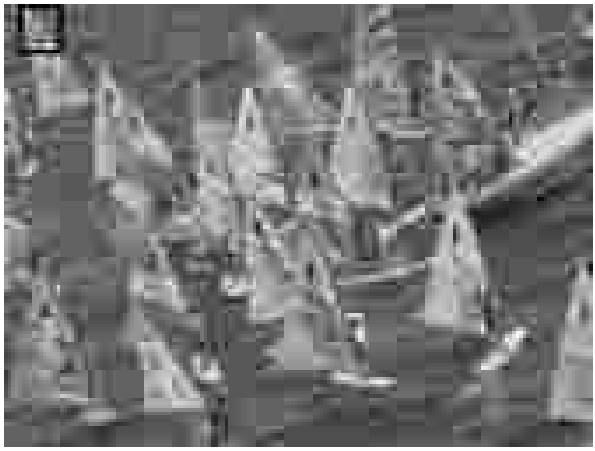
где $*$ означает двумерную операцию свертки, A –матрица значений яркости изображения. Тогда направление градиента $\theta = arctg\dfrac{G_y}{G_x}$, его величина $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$, $\theta + 90^\circ$ – угол, определяющий направление линии уровня в данном пикселе.

Предлагаемый алгоритм построения каркаса состоит в следующем. Сначала выделяем участки изображения с постоянным цветом, т. е. для каждого пикселя пытаемся построить цепочку из соседних пикселей такого же цвета. Если это удается, то два центральных звена цепочки добавляем к остову каркаса. Для остальных пикселей определяем направления линий уровня в их окрестностях на основе вычисления направления градиента и поворота его на 90°. Далее, для каждого пикселя строим цепь из шести звеньев, в которой данный пиксель является центральным, а значения цвета в остальных пикселях цепи мало отличаются от значения в центральном пикселе. Добавление новых пикселей в цепь осуществляется с учетом найденных направлений линий уровня в окрестностях крайних пикселей уже построенной части цепи. Таким образом, полученная цепь является некоторым приближением линии уровня, проходящей через рассматриваемый пиксель. Два центральных звена найденной цепи добавляем к остову каркаса. А сами цепи в дальнейшем будем использовать для построения шеститочечных сплайнов минимальной локальной кривизны и вычисления с их помощью значений изображения на каркасе. Далее, на полученном остове каркаса строим направленные окрестности каждого пикселя [6]. Объединение таких окрестностей всех пикселей образует каркас.

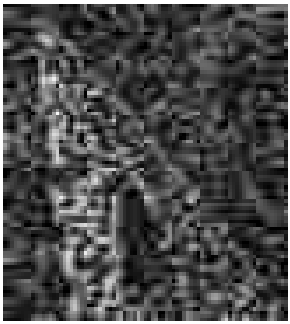
Следующим шагом является восстановление цвета на каркасе. В результирующем изображении для каждого нового пикселя, принадлежащего каркасу, цвет определяется с использованием сплайнов, построенных на пикселях исходного изображения, входящих в найденные ранее цепи. Завершающим этапом является реконструкция изображения за пределами каркаса. Подробнее см. [6].

Анализ результатов. Практическая реализация данного алгоритма показала, что предлагаемая модификация метода построения каркаса изо-

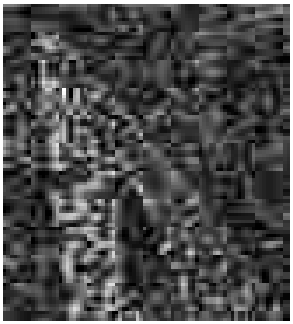
бражения позволила увеличить скорость обработки изображений в 1,5– 2,5 раза при сохранении качества результирующего изображения. При этом следует отметить, что метод целенаправленного перебора [6] и предлагаемый метод с использованием градиентов функции изображения для нахождения линий уровня дают визуально идентичные результаты построения каркаса и интерполяции на нем. Это видно на рис.1, где приведены результаты построения каркаса двумя указанными методами при увеличении изображения в 5 раз.



а)



б)



в)

Рис. 1. Пример увеличения изображения в 5 раз: а) исходное изображение; б) фрагмент каркаса, полученного методом перебора; в) фрагмент каркаса, построенного с использованием градиента функции изображения

Выводы. Рассмотренный подход , по своей сути , является адаптивной схемой интерполяции цифровых изображений. Характерной чертой такого подхода является следование основному постулату математической морфологии, в соответствии с которым основная геометрическая информация о каком-либо рисунке содержится в совокупности его множеств λ-уровней. Предлагаемый алгоритм осуществляет локальное восстановление линий уровня цифровых рисунков в окрестности каждого пикселя на основе вычисления в нем дискретного градиента. Практическая реализация данного подхода показала увеличение скорости обработки изображений при сохранении качества результирующих изображений.

Библиографические ссылки

1. **Barnsley M.F.** Fractal Image Compression / M.F. Barnsley, L.P. Hurd // Wellesley: AK Peters Ltd. – 1993.
2. **Casseles V.** Topographic maps and local contract changes in natural images / V. Casseles, B. Coll, J.M. Morel // Int. J. of Computer Vision. – 1999. – Vol. 33. – P.5-27.
3. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. – New York, 1982.
4. **Гонсалес Р.** Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс — М., 2005.
5. **Джусти Э.** Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации: пер. с англ. / Э. Джусти. – М., 1989.
6. **Когут П.І.** Задачі каркасної інтерполяції статичних зображень / П.І. Когут, М.Є. Сердюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007. – № 2(28). – С.153–157.
7. **Сердюк М.Є.** Про аналітичне конструювання інтерполяційного сплайну мінімальної локальної кривини та його застосування для каркасної інтерполяції цифрових зображень / М.Є. Сердюк // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. – Д., 2010. – С. 252–259.

Надійшла до редколегії 29.03.2012

УДК 539.3:534.222

Ю.В. [12]Турбал
Международный экономико-гуманитарный университет им. С. Демьянчука

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ СЛОВИЯХ С ЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ РАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПР ГИХ ТЕЛ В ВИДЕ ЕДИНЕННЫХ ВОЛН ТИПА δ -СОЛИТОНОВ

Розглядаються необхідні та достатні умови існування розв'язків системи диференціальних рівнянь руху для анізотропного пружного середови а у вигляді відокремлених структурно-стійких хвиль типу δ -солітонів.

Рассматриваются необходимые и достаточные условия су ествования решений системы дифференциальных уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде уединенных структурно -устойчивых волн определенного типа.

In this paper we consider necessary and sufficient conditions for the existence of motion equations solution for the anisotropic elastic bodies in the form of structurally stable solitary waves.

Ключевые слова: солитон, уединенная волна, уравнения движения, упругая среда.

Введение. Уединенные волны, способные сохранять свою форму и характеристики при распространении на значительные расстояния, находять, в последнее время , свое применение во многих областях теоретических и прикладных исследований. Решения в виде уединенных волн, обладающие особыми частицеподобными свойствами, получены для множества моделей, имеющих важное прикладное значение. Например, хорошо известно уравнение КдВ, допускающее солитонные решения . В последнее время найдено ряд новых многосолитонных его решений [6]. Солитоны в твердых телах исследуются в рамках так называемого структурно-феноменологического похода [2]. В рамках его, например, рассматривается поврежденная среда с микроструктурой, континуум Коссера с ограниченным движением, среда с деформациями [1; 2], для которых соответствующие модели допускают солитонные решения .

Заметим, что солитоны часто возникают на границе сред с разными

© *Ю.В. Турбал, 2012*

физическими характеристиками. Например, известны солитоны в слоистых жидкостях (возникают на границах слоев), на поверхностях жидкостей (граница жидкость–воздух), солитоны в гравитирующих газовых дисках галактик (граница газ–вакуум [7]), ионозвуковые и магнитозвуковые солитоны в плазме, солитоны, представляющие собой краевые дислокации в кристаллах [4].

В ряде работ рассмотрены в некотором смысле простейшие уединенные волны, названные волнами типа δ -солитонов, представляющие собой некоторые локализированные в пространстве движущиеся возмущения . Такие волны рассматривались как приближенные решения уравнений газовой динамики гравитирующих газовых дисков галактик [7 ; 9], уравнений типа мелкой воды . В [8] найдены точные решения в аналогичной форме для уравнений движения в случае анизотропии упругих свойств твердых тел . При этом показано, что соответствующие решения существуют лишь при определенных типах анизотропии упругих свойств. В [8] получены достаточные условия существования частных решений системы уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде δ -солитонов. В данной работе покажем, что эти условия являются и необходимыми.

Необходимые условия су ествования решений уравнений движения типа δ -солитонов. В [8] рассматривались частные решения системы уравнений движения для анизотропной упругой среды , которая имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}\right), \Theta u) + ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + \\ + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \Theta v) + \left((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \Theta w\right), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{66} + c_{12}, c_{56} + c_{14}, c_{25} + c_{46}), \Theta u\right) + ((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, \\ 2c_{46}, 2c_{24}), \Theta v) + \left(c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta w\right), \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \Theta u\right) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, \\ c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \Theta v) + \left(c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \Theta w\right), \quad (3)$$

где u , v , w – смещения вдоль соответствующих осей в декартовой системе координат; $\Theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\right)$; $C = \left\| c_{ij} \right\|_{i,\, j=\overline{1,6}}$ – матрица упругих постоянных; $\rho(x_1, x_2, x_3)$ – плотность.

Решения системы (1)-(3) предложено находить в виде:

$$\begin{pmatrix} u(x_1, x_2, x_3, t) \\ v(x_1, x_2, x_3, t) \\ w(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u(t) \\ \psi_v(t) \\ \psi_w(t) \end{pmatrix} W(x_1, x_2, x_3, t), \tag{4}$$

где $W(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-\frac{g(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} - \frac{g(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} - \frac{g(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}}$, $g(.) \in G$, $\psi_u(t)$, $\psi_v(t)$, $\psi_w(t)$ – произвольные, непрерывно-дифференцируемые функции, определяющие амплитуду возмущения ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметры, определяющие локализацию возмущения; G – класс положительно-определенных, унимодальных, дважды непрерывно-дифференцируемых функций, которые имеют минимум в начале координат равный 0 и для которых вторые производные отличные от констант. Очевидно, что такое возмущение в каждый фиксированный момент времени t имеет единственную точку экстремума – $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t))$.

Подставляя представление (4) в систему (1)-(3), получаем:

$$\rho\psi_u G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_u \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) =$$
$$= \psi_u \left((c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \tilde{\Theta} \right) +$$
$$+ \psi_v \left((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \tilde{\Theta} \right) +$$
$$+ \psi_w \left((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \tilde{\Theta} \right) \tag{5}$$

$$\rho\psi_v G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_v \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) =$$
$$+ \psi_v \left((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 2c_{46}, 2c_{24}), \tilde{\Theta} \right) +$$
$$+ \psi_w \left((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \tilde{\Theta} \right) \tag{6}$$

$$\rho\psi_w G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_w \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) =$$
$$= \psi_u \left((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \tilde{\Theta} \right) +$$
$$+ \psi_v \left((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \tilde{\Theta} \right) +$$
$$+ \psi_w \left((c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \tilde{\Theta} \right), \tag{7}$$

где

$$\tilde{\Theta} = (\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t)}{\varepsilon_1}, \frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2},$$
$$\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t)}{\varepsilon_3}, \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}, \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3},$$
$$\frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}), G(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i'(t).$$

Рассматриваем случай $\psi_u(t) = \psi_u = const$, $\psi_v(t) = \psi_v = const$, $\psi_w(t) = \psi_w = const$, $\rho = const$. Группируя в уравнениях (5) -(7) слагаемые, содержащие соответствующие функции $g(.)$ с их производными и приравнивая к нулю соответствующие коэффициенты, получаем систему уравнений (более детально все выкладки можно найти в [8]):

$$\begin{cases} \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = 2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v + (c_{14} + c_{56})\psi_w, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t) + (c_{14} + c_{56})\psi_v, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = 2c_{56}\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \rho\psi_v \tilde{x}_1'^2(t) = c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v + (c_{46} + c_{25})\psi_w, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{56} + c_{14})\psi_u + 2c_{46}\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w. \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{25} + c_{46})\psi_u + 2c_{24}\psi_v + (c_{23} + c_{44})\psi_w. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \rho\psi_w \tilde{x}_1'^2(t) = c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_2'^2(t) = c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_3'^2(t) = c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{14} + c_{56})\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + 2c_{45}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\psi_v + 2c_{35}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{36} + c_{45})\psi_u + (c_{23} + c_{44})\psi_v + 2c_{34}\psi_w \end{cases} \quad (10)$$

Система (8)-(10) определяет условия, которым должны удовлетворять упругие постоянные, амплитуды а также компоненты скорости для существования решений вида (4). Заметим, что эти условия достаточные. Покажем, що система (8)-(10) определяет и необходимые условия существования решений вида (4).

Действительно, пусть система (8)-(10) совместна, $x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R, t \in [t_0, T]$. Рассмотрим уравнение (5). Учитывая свойства функций класса G, имеем: $g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0$, $g''(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0$ при $x_1 = \tilde{x}_1(t)$. Таким образом, рассматривая последовательно случаи $x_2 = \tilde{x}_2(t), x_3 = \tilde{x}_3(t)$; $x_1 = \tilde{x}_1(t), x_3 = \tilde{x}_3(t)$; $x_1 = \tilde{x}_1(t)$, $x_2 = \tilde{x}_2(t)$ с уравнения (5) получаем соотношения:

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}_1''(t) \right) =$$

$$(\psi_u c_{11} + \psi_v c_{16} + \psi_w c_{15} - \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t))\left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\right), \quad (11)$$

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \tilde{x}_2''(t) \right) =$$

$$(\psi_u c_{66} + \psi_v c_{26} + \psi_w c_{46} - \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t))\left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t)}{\varepsilon_2}\right), \quad (12)$$

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_3''(t) \right) =$$

$$(\psi_u c_{55} + \psi_v c_{45} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t))\left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t)}{\varepsilon_3}\right). \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение (13). Пусть $\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) \neq 0$ для некоторого значения t, причем $\tilde{x}_3''(t) \neq 0$. Зафиксируем такое значение t. Тогда соотношение (13) представляет собой обычное дифференциальное уравнение для функции g относительно переменной x_3. Общее решение такого уравнения легко найти, введя замену: $\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = y(x)$. Получаем дифференциальное уравнение вида:

$$y'(x) = y^2(x) - \rho\psi_u \tilde{x}_3''(t) y(x) / (\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t)).$$

Общее решение такого уравнения имеет вид: $y(x) = \frac{C}{1 - e^{C(x - C_1)}}$, где C, C_1 – произвольные константы. Отсюда $\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = \frac{C}{1 - e^{C(x_3 - \tilde{x}_3(t) - C_1)}}$. Но в таком случае получим противоречие с условием $g'(0) = 0$, которое должны удовлетворять функции класса G. Пусть $\tilde{x}_3''(t) = 0$. Тогда после аналогичной замены уравнение (13) запишется в виде $y^2(x) - y'(x) = 0$. Его общее решение имеет вид $y(x) = \frac{1}{x - C}$, где C – произвольная константа. Отсюда $\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = \frac{1}{x_3 - \tilde{x}_3(t) - C}$. Снова получаем противоречие с условием $g'(0) = 0$.

Таким образом, выполняется уравнение

$$\psi_u c_{55} + \psi_v c_{45} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = 0. \qquad (14)$$

Аналогично, рассматривая уравнения (11) и (12) получаем соответственно перове и второе уравнеие системы (8). Если выполняется соотношение (14), то с уравнения (13) получаем $\rho\psi_u W\left(\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_3''(t)\right) = 0$. Отсюда $\tilde{x}_3''(t) = 0$ или $g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) = 0$. Если $\tilde{x}_3''(t) \neq 0$, то $g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) = 0$ для любых значений x_3, что невозможно для функций класса G.

Учитывая соотношения (11)-(13), из уравнения (5) получаем:

$$\rho\psi_u\left(\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t)+\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t)\right)=\psi_u\left(2c_{16},2c_{15},2c_{56}\right),\hat{\Theta}\Big)+$$
$$+\psi_v((c_{12}+c_{66},c_{14}+c_{56},c_{46}+c_{25}),\hat{\Theta})+\psi_w\left(c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{36}+c_{45}\right),\hat{\Theta}\Big), \tag{15}$$

где $\hat{\Theta}=\left(\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2},\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3},\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\right)$.

Пусть $x_1=\tilde{x}_1(t)$. Тогда с (15) получаем уравнение

$$\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t)=(\psi_u 2c_{56}+(c_{46}+c_{25})\psi_v+$$
$$+(c_{36}+c_{45})\psi_w)W\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}. \tag{16}$$

При $x_2=\tilde{x}_2(t)$ и $x_3=\tilde{x}_3(t)$ получаем, соответственно, уравнения:

$$\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t)=((c_{13}+c_{55})\psi_w+2c_{15}\psi_u(t)+$$
$$+(c_{14}+c_{56})\psi_v)W\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \tag{17}$$

$$\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t)=(2c_{16}\psi_u+(c_{12}+c_{66})\psi_v+$$
$$+(c_{14}+c_{56})\psi_w)W\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}. \tag{18}$$

Видим, что уравнения (16), (17) и (18) эквивалентны трем последним уравнениям системы (8) для функций $g(.)\in G$. Таким образом, получили систему (8). Проведя аналогичные рассуждения, можем получить из уравнений (6) и (7) системы (9) и (10) соответственно.

Следовательно, система (11)-(13) определяет необходимые и достаточные условия существования частных решений уравнений движения (1)-(3) в форме (4). Детальный анализ системы (8)-(10) для разных кристаллографических классов проведен в [8].

Выводы. Таким образом, в работе получена система уравнений, содержащая упругие постоянные, компоненты скорости, амплитуды и плотность, представляющая собой необходимые и достаточные условиясущест-

вования частных решений уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде уединенных волн типа δ -солитонов. Важность этой системы для практических приложений состоит в том, что она позволяет определять, какими упругими свойствами должны обладать материалы, для которых уравнения движения имеют частные решения вида (4).

В [8] показано, что система (8) -(10) несовместна для всех типов сингоний выше орторомбической . И лишь при наличии триклинной или моноклинной сингонии система (8) -(10) совместна и имеет решения, для которых положительно определена квадратичная форма, определяющая упругий потенциал. Полученные теоретические результаты интересно сравнить с экспериментальными работами по определению упругих постоянных поликристаллов, например, гранитоидов , в которых показано, что такие материалы имеют высокую анизотропию упругих совойств (исследуемые в [6] гранитоиды имеют анизотропию упругих свойств приближающуюся к аксиальной орторомбической или триклинной сингонии) .

Библиографические ссылки

1. **Быков В.Г.** Уединенные сдвиговые волны в зернистой среде / В.Г. Быков // Акустический журн. –1999.– Т.45, № 2.– С. 169-173.
2. **Ерофеев В.И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой /В.И. Ерофеев – М., 1999.
3. **Кольский Г.**Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский.–М., 1955.
4. **Порубов А.В.** Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах: дисс. … докт. физ.-мат. наук / А.В. Порубов – СПб, 2006.–313 с.
5. **Продайвода Г.Т.** Исследования упругих постоянных гранитоидов и анизотропии распространения обьемных упругих волн в них / Г.Т. Продайвода, К.С. Александров, С.А. Выжва //Геофизический журнал.–2001.– №2,т.23.–С.31-42
6. **Самойленко В.Г.** Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега -де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журнал -2008.-80, №1.-С. 388-397.
7. **Турбал Ю.В.** Часткові розвязки рівнянь газової динаміки галактик із збуреннями типу δ -солитонів / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. Серія «Фізико-математичні науки».– 2009.– № 1.– С. 67-75.
8. **Турбал Ю.В.** Дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів / Ю.В. Турбал // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. Вип.18, –С.76-90.
9. **Turbal Y.** The trajectories of self-reinforsing solitary wave in the gas disc of galaxies//Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic. – Kharkov.– 2010.– P.112-118

Надійшла до редколегії 5.06.2012

УДК 519.85:

С.А. [13] с
Национальный горный университет

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ЦЕЛЕВЫМ Ф НКЦИОНАЛОМ

Сформульвано нову постановку задачі оптимального розбиття множин (ОРМ) із інтеральним цільовим функціоналом та запропоновано підхід до її розв'язання, на основі зведення до багатокритерійної задачі ОРМ, доведено розв'язність отриманої багатокритерійної задачі.

Сформулирована новая постановка задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) с интервальным целевым функционалом и предложен подход к ее решению, основаный на сведении к многокритериальной задаче ОРМ, доказана разрешимость полученной многокритериальной задачи.

It was stated a new formulation of set patitioning problem with interval objective functional and a new approach suggested for solving it which is based on data by information about the multi-criteria set patitioning problem, the solubility of the resulting multi-criteria problem was proved.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, неполная информация, метод редукции, неопределенность

Введение. В настоящее время большой интерес вызывают задачи принятия решений в условиях неполной информации. Это вызвано тем, что в реальных условиях часто не возможно получить полную информацию об объекте и условиях его существования, а использование приближенных данных сильно огрубляет модель. Поэтому многие задачи рассматриваются в условиях неполной или нечеткой информации. Исключением не стала и задача оптимального разбиения некоторого континуального множества на его непересекающиеся подмножества (ОРМ), поскольку многие практически важные задачи могут быть рассмотрены в рамках этой математической модели [2]. Задачи ОРМ в условиях непопределенности исследовались в работах [2;3;4]. В [5] были предложены различные математические модели задач ОРМ в нечетких условиях, в работах [6;7] предложен метод решения задачи ОРМ с множественнозначным целевым функционалом и подход для решения задачи ОРМ с интервальным целевым функ-

© *С.А. Ус, 2012*

ционалом, основанный на ее сведении к задаче с множественнозначным функционалом. В данной работе рассмотрен подход к решению такой задачи, основаный на сведении ее к многокритериальной задаче ОРМ с дополнительными ограничениями.

Постановка задачи. Под бесконечномерной задачей оптимального разбиения с интервальным целевым функционалом будем понимать такую задачу.

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в заданных изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_N$. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, и стоимость доставки продукции $c_i(x)$, $i=\overline{1,N}$ – из пункта производства τ_i в пункт потребления x, причем значения функции $c_i(x)$ в каждой точке x области Ω, представляют собой некоторый интервал: $c_i(x)=\left[c_i^1(x), c_i^2(x)\right]$. Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность i-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т.е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

Поставленной задаче соответствует следующая математическая модель.

Задача А. Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$, так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i(x)\rho(x)dx$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{1,N}$$

$$\text{mes}\,(\Omega_i \cap \Omega_j)=0,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,N},$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,$$

Здесь $c_i(x)=[c_i^1(x), c_i^2(x)]$, $i=\overline{1,N}$, причем $c_i^1(x)$, $c_i^2(x)$ – заданные действительные, ограниченные, измеримые на Ω функции, такие что $c_i^1(x)\le c_i^2(x)$ для всех $x\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$; $\rho(x)$ действительная неотрицательная интегрируемая функция, заданная на Ω; b_i, $i=\overline{1,N}$ заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \ge S,\ S=\int_{\Omega}\rho(x)dx \qquad (1)$$

Метод решения. Для решения сформулированной задачи введем в рассмотрение характеристические функции подмножеств Ω_i, $i=\overline{1,N}$:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in\Omega_i,\\ 0, \text{если } x\in\Omega\setminus\Omega_i,\end{cases}$$

и перепишем задачу А в следующем виде.

Задача В. Найти вектор-функцию $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}c_i(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i(x)=0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x\in\Omega, i=1,2,\cdots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ п.в. } x\in\Omega,$$

Очевидно, что задачи А и В эквивалентны.

Особенностью рассматриваемой задачи является интервальный целевой функционал. В некотором смысле такую задачу можно считать многокритериальной задачей с бесконечным числом критериев. Одним из возможных подходов к ее решению является сведение к многокритериальной задаче с конечным набором критериев. Заметим, что при этом возникает необходимость каким-либо образом оценить качество полученного решения. В случае конечномерных задач нечеткого математического программирования этот подходописан в [1]. Применим его для решения задачи В.

Рассмотрим задачи ОРМ целевые функционалы которых соответствуют нижним и верхним границам функций $c_i(x)=[c_i^1(x), c_i^2(x)]$, $i=\overline{1,N}$. А именно:

Задача В1. Найти вектор-функцию $\lambda(x)=(\lambda_1(x), \lambda_2(x),..., \lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I_1(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i(x)=0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x\in\Omega, i=1, 2, \cdots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ п.в. } x\in\Omega,$$

Задача В2. Найти вектор-функцию $\lambda(x)=(\lambda_1(x), \lambda_2(x),..., \lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I_2(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i(x)=0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x\in\Omega, i=1, 2, \cdots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

При выполнении условия (1) обе эти задачи разрешимы [2]. Пусть $\lambda^1(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_2^1(x), ..., \lambda_N^1(x))$ и $\lambda^2(x) = (\lambda_1^2(x), \lambda_2^2(x), ..., \lambda_N^2(x))$ – оптимальные решения задач B1 и B2 соответственно.

Обозначим:

$$l_1 = I_2(\lambda^1(x)) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx, \quad l_2 = I_1(\lambda^2(x)) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx,$$

и рассмотрим задачу

Задача B3. Найти вектор_функцию $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_N(x))$, такую что

$$I_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \to \min$$

$$I_2(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \to \min$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i = \overline{1, N} \tag{6}$$

$$\lambda_i(x) = 0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x \in \Omega, i = 1, 2, \cdots N, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п.в.} \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \le l_1, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \le l_2 \ . \tag{10}$$

Рассмотрим условия разрешимости этой задачи.

тверждение. Множество допустимых решений задачи B3 не пусто.

Доказательство. Согласно [2] условие (5) обеспечивает существование допустимого решения в задачах B1, B2. Рассмотрим ограничения (9), (10). Вектор-функция $\lambda^1(x)=\left(\lambda_1^1(x),\lambda_2^1(x),...,\lambda_N^1(x)\right)$ является оптимальным решением задачи B1 и допустимым решением задачи B2, а $\lambda^2(x)=\left(\lambda_1^2(x),\lambda_2^2(x),...,\lambda_N^2(x)\right)$ – допустимым решением задачи B1 и оптимальным решением задачи B2, поэтому будут иметь место такие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx \le \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx \le \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx.$$

Таким образом, область допустимых решений задачи B3 содержит по меньшей мере две точки: $\lambda^1(x)=\left(\lambda_1^1(x),\lambda_2^1(x),...,\lambda_N^1(x)\right)$ и $\lambda^2(x)=\left(\lambda_1^2(x),\lambda_2^2(x),...,\lambda_N^2(x)\right)$. Утверждение доказано.

Решение многокритериальной задачи B3 будет одним из компромиссных решений исходной задачи. Для того чтобы оценить качество этого решения введем в рассмотрение функционалы

$$f_1(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{l_1-I_1(\lambda)}{l_1-I_1^*}, & I_1(\lambda)\le l_1,\\ 0, & I_1(\lambda)>l_1,\end{cases}\qquad f_2(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{l_2-I_2(\lambda)}{l_2-I_2^*}, & I_2(\lambda)\le l_2,\\ 0, & I_2(\lambda)>l_2.\end{cases}$$

где а $I_1^*=I_1\left(\lambda_1^1,\lambda_2^1,...,\lambda_N^1\right)$, $I_2^*=I_2\left(\lambda_1^2,\lambda_2^2,...,\lambda_N^2\right)$ – оптимальные значения целевых функционалов задач B1 и B2.

Легко видеть, что функционалы $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ принимают значения в интервале [0; 1], и, очевидно, близки к 1 в случае, когда их значения близки к оптимальным значениям целевых функционалов задач B1, B2. Таким образом, их можно использовать для оценивания качества полученного решения $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_N(x))$. А именно величина $\alpha=\min\{f_1(\lambda), f_2(\lambda)\}$ может служит мерой удовлетворенности лица принимающего решения достигнутыми значениями целевого функционала.

Выводы. Применение метода редукции к задаче ОРМ с интервальным целевым функционалом дает возможность свести исходную интервальную задачу к двукритериальной задаче ОРМ с дополнительными ограничениями и оценить качество полученного решения.

Библиографические ссылки

1. **Зайченко Ю.П**. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: учеб. пособие / Ю.П. Зайченко – К., 1991. – 191 с.
2. **Киселева Е.М**. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К., 2005. – 564 с.
3. **Кісельова О.М.** Метод розв'язання задачі нечіткого розбиття множин / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.– 2010. – С.139 –145.
4. **Кісельова О.М**. Методи розв'язання задач нечіткого розбиття множин із нечіткими параметрами у функціоналі / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.– 2007. – С.115 –123.
5. **с С.А.** О моделях оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности / С.А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць. 2010. – С. 320-326.
6. **с С.А.** Задача оптимального разбиения множеств с множественнозначным целевым функционалом / С.А. Ус //Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць. – 2011, С. 269–279.
7. **с С.А.** Задача оптимального розбиття множин із нечітким цільовим функціоналом // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ -2011) Матеріали Всеукраїнського наукового семінару 26-27 серпня 2011 року. С.107–109.

Надійшла до редколегії 15.05.2012

УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

П.С. Янчук[14]
Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. Дем'янчука

ПРО СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗ ВАННЯ РІВНЯННЯ П АССОНА

Побудовано явну формулу наближеного розв'язку неоднорідної задачі Діріхле для рівняння Пуассона у вигляді алгебраїчного полінома. Встановлена апріорна оцінка апроксимації означає, о порядок похибки наближення точного розв'язку співпадає з порядком похибки середньоквадратичного наближення розв'язку.

Построено приближенное решение неоднородной задачи Дирихле для урав нения Пуассона в прямоугольнике в форме алгебраического полинома. становленная априорная оценка аппроксимации означает, что построенные полиномы сходятся к точному решению со скоростью сходимости среднеквадратичного приближения.

We construct an approximate solution of the inhomogeneous Dirichlet problem for Poisson's equation in a rectangle in the form of an algebraic polynomial. Established a priori estimate of the approximation means that the constructed polynomials converge to the exact solution at a rate of convergence of the mean-square approximation.

Ключові слова: ряд Фур'є, ортогональний поліном, спектральний метод, рівняння Пуассона.

Вступ і постановка задачі. Численні статті і монографії присвячені обчислювальним методам на основі методу Гальоркіна є, наприклад, у списку літератури, наведеному в [2,3]. Квазі -спектральні поліноми $K_X(\ )$ вивчались і застосовувались до побудови наближеного розв'язку диферен - ціальних рівнянь зокрема в [6 – 8]. У роботі [6] розглядалося наближення розв'язку задачі Діріхле з однорідними умовами, у [8] – з неоднорідними умовами, у [7] розглянуті крайові задачі для звичайних диференційних рівнянь з неоднорідними умовами. В даній роботі досліджується зв'язок між рядом Фур'є за квазі -спектральними поліномами розв'язку та рядами Фур'є відомих з умови задачі функцій і на цій основі суттєво покращена формула наближеного розв'язку і одержано нові оцінки апроксимації наближеного розв'язку. Характерною рисою реалізації одержаної формули є

© *П.С. Янчук, 2012*

економія машинної пам'яті, висока швидкодія та відмінна якість наближення. З точки зору машинних обчислень дане наближення практично нічим не відрізняється від середньоквадратичного наближення рядом Фур'є–Лежандра.

Наближені розв'язки в загальному випадку задачі Діріхле:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \tag{1}$$

$$u(x, -1) = \varphi_1(x), \; u(x, 1) = \varphi_2(x), \quad u(-1, y) = \psi_1(y), \; u(1, y) = \psi_2(y) \tag{2}$$

подаватимемо у вигляді алгебраїчного полінома степеня $n = 2m + 1$:

$$u^n = \sum_{i,j=0}^{2m+1} u_{i,j} K_i(x) K_j(y), \; u_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x, y) K_i(x) K_j(y) dx dy, \tag{3}$$

де $K_i(x)$, $i = 1, ..., 2n$ 2 ортонормовані на відрізку $[-1, 1]$ алгебраїчні поліноми. Припустимо, що нам відомі розвинення правої частини рівняння (1) подвійними рядами Фур'є та крайових умов (2) одномірними рядами Фур'є за квазі–спектральними поліномами і знайдемо розвинення (3), що зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є розв'язку u задачі (1), (2) через коефіцієнти Фур'є функцій $f, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, які позначатимемо через $f_{i,j}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \psi_{1j}, \psi_{2j}$.

Основні означення і властивості квазі–спектральних поліномів [6–8]. Через $J = J_x$ позначимо операцію інтегрування $(Ju)(x) = \int_{-1}^{x} u(t) dt$, а через $J_{xx} = J_x(J_x)$ повторне застосування цієї операції. Через M_k^m позначимо множину всіх алгебраїчних поліномів, які є лінійними комбінаціями поліномів Лежандра P_i, $i = k, ..., m$, $P(1) = 1$. Через π_k^m позначимо операцію проектування $(\pi_k^m u)(x) = \sum_{i=k}^{m} c_i P_i(x)$, де $u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x) \in L_2[-1, 1]$ – ряд Фур'є–Лежандра функції u. Оператор $-\pi_1^{2n} J_{xx} : M_1^{2n} \to M_1^{2n}$ є симетричним і додатно визначеним, тому існують $2n$ таких поліномів $K_i = K_i(x) \in M_1^{2n}$ і $2n$ таких додатних чисел λ_i (характеристичних чисел), для яких справджуються рівності

$$-\pi_1^{2n} J_{xx} K_i = \lambda_i K_i, \quad i = 1, ..., 2n \tag{4}$$

Звідси дістаємо, що для заданого фіксованого натурального n квазі-спектральні поліноми $K_{ii} = Kx(\ )$ задовольняють квазі -спектральне інте - гральне рівняння

$$\begin{aligned} &-\pi_1^{\infty} J_{xx} K_i = \lambda_i K_i + \tau_i \bar{P}_{2ii-} -, \quad \bar{i} = i \bmod 2, \\ &\bar{P}_{ii}(\ ) = \left(1/\sqrt{i(i+1)}\right) Px(\ ), \quad i = 1,...,2n \end{aligned} \tag{5}$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_{ii}\tau$, причому їх парність співпадає з парністю їх індексів. Для уникнення двозначності звернемо увагу, що $\bar{i} = 0$ для парних i та $\bar{i} = 1$ для непарних. Через $K_i = \sqrt{\lambda_i}\, JK_i$, $\lambda_i = 1/\lambda_i$, $i = 1,...,2n$ позначимо поліноми, які, очевидно, перетворюються в нуль у точках $x = \pm 1$, а парність яких є протилежною парності їх індексів. Квазі -спектральні поліноми $K_{ii} = K\ (x)$ задовольняють квазі-спектральне диференціальне рівняння

$$-\frac{d^2}{dx^2} K_i = \lambda_i \tau K_i + {}_i \bar{P}'_{2ii-} -, \quad i = 1,...,2n \tag{6}$$

де, $\tau_i = \lambda_i \sqrt{\lambda_i \tau}_i$.

Зазначимо, що для поліномів Лежандра $\bar{P}_{m,1}$ $= 1,2,...$ та їх похідних $\bar{P}'_{mm} = \frac{d}{dx}\bar{P}_{mm}$ справджуються рівності

$$\begin{aligned} &\int_{-11}^{11} \left(\bar{P}'_{mm}(x)\right)^{22} dx = 1, \quad \left(\bar{P}\ (x)\right) dx = 2/\left(mm(m+1)(2m+1)\right), \\ &\bar{P}_{mm}(1) = 1/\sqrt{mm(m+1)}\ \bar{P}'(1) = \sqrt{mm(m+1)}/2. \end{aligned} \tag{7}$$

Поліноми K_i та K_i утворюють ортонормовані системи поліномів:

$$\begin{aligned} &\int_{-11}^{11} K_i(x) K_j(x) dx = K_i(x) K_j(x) dx \quad \begin{cases} 0, & ij \neq \ , \\ 1, & ij = \ , \end{cases} \\ &i = 1,...,2n \quad j \quad 1,...,2n \end{aligned} \tag{8}$$

причому, з точністю до множника, поліноми K_i є похідними поліномів K_i.

Добавляючи до описаних тільки що внутрішніх поліномів Ki, $= 1,...,2n$ поліноми $K_{2n+1} = \frac{dd}{dx}\bar{P}_{2n+2}$, K_{2n+1} $\frac{}{dx}\bar{P}_{2n+1}$, які ми називаємо

крайовими і одержимо потрібний нам скінченовимірний базис із $2n+2$ квазі_спектральних поліномів. Для функцій двох змінних поліноми $K_{ij}(x,y)=K_i(x)K_j(y), (i,j=1,...,2n-2)$ утворюють ортонормований базис. Коефіцієнти Фур'є $u_{ij}, (i,j=1,...,2n)$ за квазі_спектральними поліномами $K_{ij}(x,y)=K_i(x)K_j(y), (i,j=1,...,2n-2)$ назвемо внутрішніми, а всі інші крайовими.

Внутрішні коефіцієнти Фур'є частинних похідних функцій за системою квазі_спектральних поліномів. Знайдемо вираження для коефіцієнта Фур'є похідної $u_{xx}=\dfrac{d^2u}{dx^2}$ функції $u=u(x,y)$ двох змінних. Двічі інтегруючи частинами і враховуючи рівності $K_i(\pm1)=0, \quad i=1,...,2n$, а потім використовуючи формулу (6) дістанемо

$$(u_{xx})_{i,j}=-\lambda_i u_{i,j}+d_i\left(\psi_{2j}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}\right)+N_i\tau_i(u_x)_{2n+2-i,j} \tag{9}$$

де

$$(u_x)_{2n+2-i,j}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_x K_j(y)\hat{P}_{2n+2-i}(x)dx,$$

$$d_i=-\left(\lambda_i\tau_i^{-1}K_i(1)+\hat{P}_{2n+2-i}(1)\right),$$

$$N_i=-\left((2n+2-i)(2n+3-i)(4n+5-2i)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Тут і далі $\hat{P}_k$ ортонормовані поліноми Лежандра. Аналогічно,

$$(u_{yy})_{i,j}=-\lambda_i u_{i,j}+d_j\left(\varphi_{2i}+(-1)^{i+1}\varphi_{1i}\right)+N_j\tau_j(u_y)_{i,2n+2-j} \tag{11}$$

Вираження внутрішніх коефіцієнтів Фур'є розв'язку рівняння Пуассона через коефіцієнти Фур'є правої частини та крайових значень. Застосовуючи формули (9), (11) до рівності (1), дістанемо

$$\begin{aligned}f_{i,j}&=(u_{xx}+u_{yy})_{i,j}=\\&=-(\lambda_i+\lambda_j)u_{i,j}+d_i\left(\psi_{2j}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}\right)+d_j\left(\varphi_{2i}+(-1)^{j+1}\varphi_{1i}\right)+\\&+N_i\tau_i(u_x)_{2n+2-i,j}+N_j\tau_j(u_y)_{i,2n+2-j}\quad (i=1,...,2n;j=1,...,2n).\end{aligned} \tag{12}$$

Звідси легко знаходимо $u_{ij}, i,j=1,...,2n: u_{i,j}=U_{i,j}+\varepsilon_{i,j}$, де

$$U_{i,j}=-\left(f_{i,j}+d_i\left(\psi_{2j}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}\right)+d_j\left(\varphi_{2i}+(-1)^{j+1}\varphi_{1i}\right)\right)/(\lambda_i+\lambda_j), \tag{13}$$

$$\varepsilon_{i,j} = \left(N_{\bar{i}j}\tau_i\left(u_x\right)_{2n+2\bar{i},j} + N_{\bar{i}}\tau_j\left(u_y\right)_{i,2n+2\bar{j}}\right)\Big/\left(\lambda_i + \lambda_j\right). \qquad (14)$$

Крайові коефіцієнти Фур'є функцій $u \in W\Pi_2^1(\ )$. У певному сенсі ці коефіцієнти виражаються лише через крайові значення функції u. Інтегруючи частинами у формулах для коефіцієнтів Фур'є

$$u_{2n+2\bar{i},j} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u\bar{P}'_{2n+2\bar{i}}(x)K_j(y)dxdy$$

дістанемо

$$u_{2n+2\bar{i},j} = U_{2n+2\bar{i},j} + \varepsilon_{2n+2\bar{i},j},$$

$$U_{2n+2\bar{i},j} = \bar{P}_{2n+2\bar{i}}(1)\left(\psi_{21j} + (-1)^{i+1}\psi_j\right), \varepsilon_{2n+2\bar{i},j} = N_{\bar{i}}\left(u_x\right)_{2n+2\bar{i},j}. \qquad (15)$$

Аналогічно, обчислюємо $u_{i,2n+2\bar{j}}$. Залишилось знайти ще чотири коефіцієнти Фур'є з крайових умов. Інтегруючи частинами, одержимо

$$u_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}} = U_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}} + \varepsilon_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}},$$

де

$$U_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}} = \bar{P}_{2n+2\bar{i}}(1)\bar{P}_{2n+2\bar{j}}(1)$$

$$\times\left(u(1,1) + (-1)^{i+1}u(-1,1) + (-1)^{j+1}u(1,-1) + (-1)^{i+j}u(-1,-1)\right),$$

$$\varepsilon_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}} = -\bar{P}_{2n+2\bar{i}}(1)N_{\bar{i}}\left((\psi''_{21})_{2n+2\bar{j}} - (\psi)_{2n+2\bar{j}}\right) -$$

$$-\bar{P}_{2n+2\bar{j}}(1)N_{\bar{j}}\left((\varphi''_{21})_{2n+2\bar{i}} - (\ )_{2n+2\bar{i}}\right) + N_{\bar{i}}N_{\bar{j}}\left(u_{xy}\right)_{2n+2\bar{i},2n+2\bar{j}} \qquad (16)$$

Тут штрих означає похідну відповідної функції, $(\psi''_{11})_j = \int_{-1}^{1}(y)\hat{P}_j(y)dx$, $(u_{xy})_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u_{xy}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)dxdy$ і т.д.

Загальний вигляд наближеного розв'язку задачі Діріхле. З доведених формул (13) − (16) для коефіцієнтів Фур'є за системою квазі-спектральних поліномів випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Часткова сума ряду Фур'є-Лежандра загального розв'язку* u *задачі Діріхле (1), (2) має вигляд*

$$u^n = U^n + \varepsilon^n, \qquad (17)$$

де

$$U^{nn} = \sum_{i,j=1}^{2n+2}\sum U_{i,j}K_i(x)K_j(y), \varepsilon\varepsilon^{2}_{i,j}\sum_{1}^{2} {}_{ij}K_i(x)K_j(y) \qquad (18)$$

а числа $U_{i,j}, \varepsilon_{ij}$ *знаходяться за формулами (13)-(16).*

Оцінка полінома ε^n покаже, якою є величина відхилення полінома U^n від часткової суми $u^n = \pi_0^{2n+1} u$ ряду Фур'є–Лежандра точного розв'язку u задачі Діріхле. Для того, щоб одержати необхідну оцінку знадобиться наступна лема.

Лема 1. Для чисел τ_i, λ_i справедлива оцінка

$$\left(N_{\bar i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\tau_{2i-\bar i} / \lambda_{2i-\bar i}\right)^2 < \left(2n+1\right)^{-2} / 2, \quad \bar i = 0,1. \qquad (19)$$

Доведення. Припустимо, що поліном K_i парний і помножимо обидві частини рівності (6) на поліном Лежандра $\bar P_{2n} = \bar P_{2n}(x)$, зінтегруємо знайдену рівність по x і дістанемо

$$-\int_{-1}^{1} \bar P_{2n} \frac{d^2}{dx^2} K_i dx = \lambda_i \int_{-1}^{1} \bar P_{2n} K_i dx + \tau_i \int_{-1}^{1} \bar P_{2n} \frac{d}{dx} \bar P_{2n+1} dx, \quad i = 1,...,2n$$

(20)

Степінь парних поліномів K_i (i – не парне) не перевищує $2n$. Внаслідок ортогональності поліномів Лежандра інтеграл у лівій частині рівності дорівнює нулеві. Інтегруючи частинами в другому доданку справа дістанемо

$$\int_{-1}^{1} \bar P_{2n} \frac{d}{dx} \bar P_{2n+1} dx = 2 \bar P_{2n}(1) \bar P_{2n+1}(1) = \frac{2}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}}. \qquad (21)$$

Підставивши (21) в (20), матимемо

$$\int_{-1}^{1} \bar P_{2n} K_i dx = -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}} \frac{\tau_i}{\lambda_i}, \quad i = 1,3...,2n-1. \qquad (22)$$

Із рівностей (21),(22) випливає формула розкладу полінома Лежандра в ряд Фур'є за ортонормованою системою квазі–спектральних поліномів

$$\bar P_{2n} = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}} \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_{2i-1}}{\lambda_{2i-1}} K_{2i-1} + \frac{d}{dx} \bar P_{2n+1} \right). \qquad (23)$$

Норма полінома $\bar P_{2n}$ дається формулою (7), а тому із ортонормованості квазі–спектральних поліномів випливає справедливість леми для парних поліномів K_i. Для непарних поліномів лема встановлюється аналогічно.

Ортонормовані поліноми Лежандра $\hat P_{ij} = \hat P_i(x) \hat P_j(y), i, j = 0,1,...$ дають у просторі функцій $L_2(\Pi), \Pi = [-1,1]^2$ повну ортонормовану систему функ-

ції, часткова сума ряду Фур'є–Лежандра $u^{nn}=\pi_{0,}^{21+}u \sum_{ij0=}^{2n+} u_{ij}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)$ є поліномом середньоквадратичного наближення степеня $2n+$, а

$$E_m(u)^2 = \left\|u-\pi_{0,}^{2n+}u\right\|^2 = \sum_{\max(i,j)>2n\ 1} u_{ij}^{\ 2}, \qquad (24)$$

де $u_{ij} = \iint_{-11}^{11} u\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)dxdy$ – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є–Лежандра, є величиною середньоквадратичного відхилення у випадку функцій двох змінних $u = u(x, y)$.

Завдяки ортонормованості квазі–спектральних поліномів

$$\varepsilon\varepsilon = \sum_{ij1=}^{2n+} u_{ij}^{\ 2}.$$

Тому із явних формул (14) - (16) для коефіцієнтів Фур'є $\varepsilon_{,ij}$, а також формул типу (24), застосовуючи скінчену нерівність Коші–Буняковського після простих обчислень одержимо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай розв'язок задачі Діріхле, $u\in W_2^2(\Pi)$, а його слід $u|_{\partial\Pi}\in W_2^{1}(\partial\Pi)$. Тоді, для відхилення $\varepsilon^n = u - U^n$ полінома U^n від полінома u^n найкращого наближення розв'язку задачі Діріхле в метриці гільбертового простору $L_2(\Pi)$ справджується оцінка*

$$\left\|\varepsilon\right\|^2 < \left(24^{-1}N^{-2}+O(N^{-3})\right)\left(E_N(u_x)^2+E_N(u_y)^2\right)+ N^{-5}\left\{\left(E_N(\ _1')\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(E_N(\varphi_2')\right)^2+\left(E_N(\psi_1')\right)^2+\left(E_N(\psi_2')\right)^2+\left(E_N(u_{xy})\right)^2\right\} \qquad (25)$$

де c деяке число, залежне від k, але не залежне від n.

Із прямих теорем L_2–наближення [4,5] (теореми Джексона) випливає наступна теорема

Теорема 3. *Нехай розв'язок задачі Діріхле (1),(2) $u\in W_2^k(\Pi)$, а його слід $u|_{\partial\Pi}\in W_2^{k-1}(\partial\Pi)$. Тоді для відхилення полінома U^n від розв'язку задачі Діріхле в метриці гільбертового простору $L_2(\Pi)$ справджується оцінка*

$$\left\|u-U^n\right\|_\Pi \le c\left(\max_{|i|=k}\left\|D^i u\right\|_\Pi + \max_{|i|=k-1}\left\|D^i u\right\|_{\partial\Pi}\right) N^{-k}, \qquad (26)$$

де c деяке число, залежне від k, але не залежне від n.

Висновок. Для середньоквадратичного наближення $u = U^n + \varepsilon^n$ розв'язку $u \in W_2^k(\Pi)$ неоднорідної задачі Діріхле порядок наближення дорівнює $O(N^{-k})$ відносно степеня полінома $n = N+1$. Установлена в роботі оцінка для наближеного розв'язку U^n має такий самий порядок наближення і відрізняється від середньоквадратичного наближення доданком ε^n порядку $O(N^{-k})$, який виник із-за апроксимації диференційного рівняння та крайових умов. У цьому сенсі одержано таке явне наближення розв'язку задачі Діріхле алгебраїчними поліномами, яке має максимально можливий порядок швидкості збіжності в просторі $L_2(\Pi)$. Такі наближення можна назвати майже середньоквадратичними наближеннями.

Відомо, що коли $f \in L_2(\Pi)$, а крайові умови достатньо гладкі: $u|_{\partial\Pi} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Pi)$, то $u \in W_2^2(\Pi)$. У цьому випадку середньоквадратична похибка одержаного наближення U^n розв'язку задачі Діріхле є величиною порядку $O(N^{-2})$, де $n = N+1$ степінь наближеного полінома.

Бібліографічні посилання

1. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. / С. Пашковский. – М., 1983, 384 с.
2. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. / К. Ректорис. – М., 1985, 590 с.
3. **Флетчер К.** Численные методы на основе метода Галеркина. / К. Флетчер – М., 1988, 352с.
4. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. / К.И. Бабенко – М., 1986, 744 с.
5. **Михлин С.Г.** Некоторые вопросы теории погрешностей. / С.Г. Михлин – Л., 1988, 333с.
6. **Янчук П.С.** Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П.С. Янчук //Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: 1989. – С.112-121.
7. **Янчук П.С.** Квазіспектральні многочлени та крайові задачі. – / П.С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С.183-187.
8. **Янчук П.С.** Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П.С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С.193-208.

Надійшла до редколегії 2.07.12