ВСТУП

Програма вивчення вибіркової навчальної дисципліни "Теорія операторів" складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 Математика.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є основні положення і методи теорії операторів..

Міждисциплінарні зв'язки: вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих при вивченні курсів математичного і функціонального аналізу. Ця дисципліна є базовою для вивчення дисциплін «Сучасні питання теорії наближень», «Прикладні питання теорії наближення».

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

1.1. Мета.

Мета дисципліни – ознайомити студентів з важливим розділом функціонального аналізу − теорією операторів, виробити навички застосування теорії операторів до розв'язку теоретичних і прикладних задач.

1.2. **Задачі навчальної дисципліни:**

Завдання дисципліни – надати студентам знання, які допоможуть орієнтуватися у теоретичних і прикладних роботах, пов'язаних з теорією операторів, навчити користуватись апаратом теорії операторів для розв'язку теоретичних та прикладних задач.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати :

- загальні поняття теорії операторів;
- методи застосування теорії операторів в прикладних з задачах.

вміти :

- розв'язувати задачі, пов'язані з тематикою теорії операторів;
- розв'язувати прикладні задачі за допомогою методів теорії операторів

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 162 години / 4,5 кредити ECTS.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Тема 1. Поняття самоспряженого оператора, властивості самоспряжених операторів, необходна і достатня умови для того, щоб добуток самоспряжених операторів був самоспряженим оператором. Збіжність (слабка, у кожній точці, за нормою) послідовності самоспряжених операторів. Тотожність для скалярного добутку (Ax,y). Необхідна і достатня умови для того, щоб лінійний оператор був самоспряженим оператором.

Тема 2. Додатні оператори у гільбертовому просторі, приклади та їх властивості. Нерівність Коші-Буняковського для додатних операторів. Теорема про границю монотонної послідовності самоспряжених операторів. Поняття квадратного кореня із додатного оператора, теорема про існування квадратного кореня із додатного оператора. Єдиність квадратного кореня. Необхідна і достатня умови для того, щоб добуток додатних операторів був додатним оператором.

Тема 3. Поняття проектора гільбертового простору на підпростір. Означення ортогональності проекторів. Норма проектора. Необхідна і достатня умови для того, щоб оператор був проектором і щоб проектори були ортогональними. Необхідна і достатня умови для того, щоб сума проекторів була проектором. Нехай P_1 і P_2 - проектори гільбертового простору H на підпростори H_1 і H_2 відповідно. Довести, що, якщо $P_1 > P_2$, то $H_1 \supset H_2$. Необхідна і достатня умови для того, щоб різниця проекторів була проектором.

Тема 4. Зображення норми обмеженого самоспряженого оператора через скалярний добуток. Властивості власних значень самоспряженого цілком неперервного оператора. Необхідна і достатня і умови для того, щоб число λ було регулярним числом самоспряженого оператора. Регулярність множини комплексних чисел $\lambda = \alpha + i\beta,$ де $\beta \neq 0$, самоспряженого оператора. Необхідна і достатня і умови для того, щоб число λ було точкою спектра самоспряженого оператора. Довести, що границі m і M самоспряженого оператора є точками спектра. Існування власних значень у самоспряженого цілком неперервного оператора

Тема 5. Означення проекторів P_{λ_k} та їх властивості. Зображення самоспряженого цілком неперервного оператора A у вигляді суми проекторів. Лема про існування і властивості проектора на підпростір нулів оператора $A-B,$ де A і $B-$ самоспряжені перестановочні оператори. Теорема про існування і властивості проектора на підпростір нулів оператора $A-B,$ де $B-$ квадратний корень із A^2.

Тема 6. Означення і існування розкладання одиниці, що породжувана самоспряженим оператором. Означення і існування розкладання одиниці, що породжувана самоспряженим оператором. Довести властивість: $P_\lambda \le P_\mu$, якщо $\lambda < \mu$. Означення і існування розкладання одиниці, що породжувана самоспряженим оператором. Довести властивість: існує $P_{\mu-0}$ і має місце рівність $P_{\mu-0} = P_\mu$. Означення і існування розкладання одиниці, що породжувана самоспряженим оператором. Довести властивість: $P_\lambda = 0$, якщо $\lambda < m$. та $P_\lambda = I$, якщо $\lambda > M$. Означення і існування розкладання одиниці, що породжувана самоспряженим оператором. Довести властивість: $\lambda P_{\lambda,\mu} \le AP_{\lambda,\mu} \le \mu P_{\lambda,\mu}$, якщо $\lambda < m.$

Тема7. Інтегральне зображення самоспряженого оператора A. Означення інтеграла $\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)dP_\lambda$, де $F(\lambda)-$кускова-стала функція. Функція оператора $F(A),$ що визначається кускова-сталаю функцією $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda).$ Функція оператора $F(A),$ що визначається кускова-сталаю функцією $F(\lambda) = F_1(\lambda)F_2(\lambda)..$ Спряжений оператор до функції оператора $F(A)$. Оцінка норми оператора $F(A)$, де $F(\lambda)$ – кускова-стала функція. Обчислення функції оператора від характеристичної функції півінтервалу $[\lambda,\mu)$. Означення інтеграла $\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)dP_\lambda$, де $F(\lambda)$ – неперервна функція. Достатні умови для того, щоб число $\lambda \in [m, M]$ було регулярним числом самоспряженого оператора. Необходна умова для того, щоб число $\lambda \in [m, M]$ було регулярним числом самоспряженого оператора. Необходна і достатня умови для того, щоб число $\lambda \in [m, M]$ було точкою спектра самоспряженого оператора.

3. Рекомендована література

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П, Функциональний анализ. М. : Наука, 1977. 742 с.
2. Бурбаки Н., Спектральная теория. М. : Мир, 1972. 184 с.
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1966. 543 с.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М. : Наука, 1965. 520 с.

4. Форма підсумкового контролю успішності навчання: залік

5. Засоби діагностики успішності навчання: контрольне опитування, письмова перевірка знань.