

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

ЗАТВЕРДЖУЮ

УЗГОДЖЕНО



Ректор

М.В. Поляков

20 р.

Проректор

з науково-педагогічної роботи

В.А. Куземко

« » 20 р.

**ПРОГРАМА  
ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ**

для вступу на навчання за освітнім рівнем магістра  
на основі освітнього ступеня бакалавра (освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліста)  
за спеціальністю 111 Математика  
(Освітня програма - Математика)

Розглянуто на засіданні вченої ради  
механіко-математичного факультету  
від «19» 03 2019 р. протокол № 8

Голова вченої ради \_\_\_\_\_ (Хамініч О.В.)

Дніпро  
2019

Укладачі програми:

1. Баланенко І.Г., доцент кафедри диференціальних рівнянь;
2. Біліченко Р.О., доцент кафедри математичного аналізу і теорії функцій;
3. Пипка О.О., доцент кафедри геометрії і алгебри.

Програма ухвалена

- на засіданні кафедри (кафедр):

1. Математичного аналізу і теорії функцій

від «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ р. протокол № \_\_  
Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ (Парфінович Н.В.)  
(підпис) (прізвище та ініціали)

2. Геометрії і алгебри від «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ р. протокол № \_\_

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ (Курдаченко Л.А.)  
(підпис) (прізвище та ініціали)

3. Диференціальних рівнянь від «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ р. протокол № \_\_

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ (Когут П.І.)  
(підпис) (прізвище та ініціали)

- на засіданні науково-методичної ради за спеціальністю (напрямом підготовки) 111 Математика (6.040201 – Математика)

від «19» 03 2019 р. протокол № 8

Голова \_\_\_\_\_ (Курдаченко Л.А.)  
(підпис) (прізвище та ініціали)

## I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

Додаткове випробування – оцінювання підготовленості вступника до здобуття вищої освіти за освітнім ступенем магістра, що проводиться у формі фахового випробування.

Додаткове вступне випробування складають вступники, які здобули освітній ступінь бакалавра, магістра (освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліста) за іншою спеціальністю (напрямом підготовки). Приймальна комісія університету допускає до участі у конкурсному відборі осіб, які за результатом додаткового вступного випробування отримали не менше 75 балів за шкалою від 0 до 100 балів, що відповідає оцінці «зараховано» за шкалою «зараховано»/«не зараховано».

Програма додаткового вступного випробування для вступу на навчання за освітнім рівнем магістра за спеціальністю 111 Математика (Освітня програма - Математика) містить питання з таких *нормативних* навчальних дисциплін природничо-наукової та професійної підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 – Математика:

1. Функціональний аналіз, теорія міри та інтеграла;
2. Топологія;
3. Елементи криптографії;
4. Рівняння математичної фізики;
5. Методи оптимізації та варіаційне числення.

## II ПЕРЕЛІК ТЕМ, З ЯКИХ ВІДБУВАЄТЬСЯ ОЦІНЮВАННЯ ВСТУПНИКА

### 1. Функціональний аналіз, теорія міри та інтеграла

Тема 1. Метричний простір. Аксиоми і основні поняття. Простори  $C_{[a,b]}$ ,

$R^n$ ,  $s$ ,  $S$ ,  $l_p$ ,  $L^p_{[a,b]}$ ,  $M_{[a,b]}$ . Характер збіжності у просторі  $M_{[a,b]}$ .

Тема 2. Нерівності Гельдера та Мінковського для сум і для інтегралів.

Тема 3. Сепарабельні простори. Приклади сепарабельних просторів, приклад несепарабельного метричного простору.

Тема 4. Повні і неповні метричні простори. Означення і приклади. Теорема про поповнення. Принцип стискаючих відображень

Тема 5. Нормовані простори. Основні поняття і приклади. Теорема про еквівалентність скінченномірних нормованих просторів.

Тема 6. Лінійні простори зі скалярним добутком. Приклади. Нерівність Коші-Буняковського. Гільбертові простори.

Тема 7. Ортогональні і ортонормовані системи елементів. Процес ортогоналізації Шмідта.

Тема 8. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя, рівність Парсеваля. Збіжність рядів Фур'є. Замкнені ортонормовані системи.

Тема 9. Лінійні обмежені оператори в нормованих просторах і їх властивості. Норма лінійного обмеженого оператора. Формули для обчислення норми лінійного обмеженого оператора.

Тема 10. Простір лінійних обмежених операторів і його повнота. Спряжений простір і його повнота. Теореми Банаха-Штейнгауза. Теореми Банаха про існування і обмеженість оберненого оператора.

Тема 11. Оператори, що залежать від параметру. Власні значення і власні елементи обмеженого оператора. Спектр і множина регулярних чисел.

Тема 12. Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала (випадок дійсного сепарабельного простору). Загальний вид лінійного функціонала у просторах  $R_p^n$ ,  $l_p$ ,  $C_{[a,b]}$ , гільбертовому просторі.

Тема 13. Поняття спряженого оператора до оператора, що перетворює нормований простір у нормований і його властивості. Норма спряженого оператора. Приклади спряжених операторів.

Тема 14. Компактні множини. Приклади і властивості компактних множин. Критерій компактності (теорема Хаусдорфа).

Тема 15. Цілком неперервні оператори і їх властивості. Альтернатива Фредгольма. Спектр цілком неперервного оператора.

Тема 16. Зчислені множини та їх властивості, критерій зчисленості множини. Приклади зчислених множин.

Тема 17. Незчисленність множини точок відрізка  $[0;1]$ . Поняття потужності континуум. Приклади множин потужності континууму. Теорема про необмеженість потужностей.

Тема 18. Поняття відкритих і замкнених множин та їх властивості. відкритих множин. Структура відкритих і замкнених множин в  $R^1$ . Канторова відкрита множина. Канторова досконала множина.

Тема 19. Означення вимірності обмеженої множини в  $R^1$ , міра вимірної множини. Вимірність доповнення до вимірної множини. Вимірність об'єднання і перетину вимірних множин.

Тема 20. Поняття вимірної функції. Властивості вимірних функцій.

Тема 21. Збіжність майже скрізь і збіжність за мірою. Зв'язок між збіжністю майже скрізь і збіжністю за мірою. Приклад послідовності функцій, яка збігається за мірою, але не збігається ніде.

Тема 22. Теорема Рісса.

Тема 23. Поняття інтеграла Лебега та його властивості. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.

Тема 24. Теорема Лебега (про граничний перехід під знаком інтеграла).

Тема 25. Теореми Леві та Фату.

Тема 26. Порівняння інтеграла Рімана і Лебега.

Тема 27. Монотонні функції і їх властивості. Функції обмеженої варіації і їх властивості. Необхідна і достатня умови того, щоб функція була функцією обмеженої варіації.

Тема 28. Поняття невизначеного інтеграла і його властивості. Теорема про диференційованість невизначеного інтеграла.

Тема 29. Абсолютно неперервні функції і їх властивості. Приклади абсолютно неперервних функцій і функцій, які не є абсолютно неперервними.

Тема 30. Інтеграл Рімана-Стільтьєса і його властивості. Існування інтеграла Рімана-Стільтьєса.

## **2. Топологія**

Тема 1. Метричні простори. Приклади.

Тема 2. Відкриті множини метричного простору. Приклади відкритих множин.

Тема 3. Теорема про властивості відкритих множин метричного простору.

Тема 4. Топологія, топологічні простори. Приклади.

Тема 5. Замкнені множини топологічного простору. Теорема про властивості замкнених множин.

Тема 6. Теорема про введення топології за допомогою системи замкнених множин.

Тема 7. Внутрішні точки та внутрішність підмножин топологічного простору.

Тема 8. Точки дотику та замикання підмножин топологічного простору. Теорема про властивості операції замикання.

Тема 9. Ізольовані, граничні та межові точки.

Тема 10. База топології. Критерій бази. Приклади бази.

Тема 11. Властивості бази.

Тема 12. Теорема про введення топології за допомогою бази.

Тема 13. Неперервні відображення топологічних просторів.

Тема 14. Неперервні відображення топологічних просторів. Твердження про суперпозицію неперервних відображень.

Тема 15. Гомеоморфізми, відкриті та замкнені відображення топологічних просторів.

## **3. Елементи криптографії**

Тема 1. Предмет вивчення криптографії

Тема 2. Основні задачі криптографії. Поняття криптосистеми.

Тема 3. Відкритий текст і криптограма.

Тема 4. Принципова різниця між термінами «розшифрування» і «дешифрування».

Тема 5. Криптографічна стійкість шифру. Три типи стійкості шифру.

Тема 6. Цифровий підпис.

Тема 7. Симетричні шифри. Два основні типи симетричних шифрів.

Тема 8. Які шифри відносять до шифрів заміни?

Тема 9. Які шифри відносять до шифрів перестановки?

Тема 10. Які шифри відносять до композиційних шифрів?

Тема 11. Який шифр називають блоковим?

Тема 12. Предмет вивчення еліптичної криптографії.

#### **4. Рівняння математичної фізики**

Тема 1. Канонічні види лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку від двох незалежних змінних.

Тема 2. Задача Коші для рівняння теплопровідності в шарі  $R^n \times [0, T]$ , розв'язання за методом інтегрального перетворення Фур'є.

Тема 3. Принцип максимуму для оператора теплопровідності в шарі  $R^n \times [0, T]$  та просторово-часовому циліндрі  $S_R^n \times [0, T]$ .

Тема 4. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння теплопровідності в стрижні скінченної довжини; розв'язання за методом розділення змінних.

Тема 5. Задача Коші для рівняння коливань струни в смузі  $R \times [0, T]$ ; розв'язання за методом характеристик та інтегрального перетворення Фур'є.

Тема 6. Задача Коші для хвильового рівняння в шарі  $R^3 \times [0, T]$ ; розв'язання за методом сферичних середніх Кірхгофа.

Тема 7. Задача Коші для хвильового рівняння в шарі  $R^2 \times [0, T]$ ; розв'язання за методом спуску Адамара, інтегральна формула Пуассона.

Тема 8. Інтеграл енергії для рівняння коливань струни в смузі  $R \times [0, T]$ , коректність задачі Коші в смузі  $R \times [0, T]$ .

Тема 9. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння коливань струни; розв'язання за методом розділення змінних.

Тема 10. Постановки крайових задач Діріхле, Неймана та Робена для рівняння Лапласа в скінченій області в  $R^n$ ; принцип максимуму для рівняння Лапласа.

Тема 11. Формула Гаусса – Остроградського, перша та друга допоміжні формули Гріна, основна формула Гріна в скінченій області в  $R^n$ ; умова розв'язності задачі Неймана.

Тема 12. Теореми про середні значення гармонічної функції в кулі та на сфері в  $R^n$ , про нескінчену диференційовність гармонічної функції в скінченій області в  $R^n$ .

Тема 13. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в колі; розв'язання за методом розділення змінних.

Тема 14. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в кільці; розв'язання за методом розділення змінних.

Тема 15. Зовнішня крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в колі; розв'язання за перетворенням інверсії Кельвіна.

## **5. Методи оптимізації та варіаційне числення**

Тема 1. Опуклі функції: означення, властивості.

Тема 2. Нерівність Йенсена. Критерій опуклості диференційовних функцій.

Тема 3. Теорема Куна – Такера. Умова Слейтера.

Тема 4. Варіація за Лагранжем. Означення. Приклади.

Тема 5. Похідна за Гато. Означення. Приклади.

Тема 6. Теорема про диференційовність за Фреше суперпозиції відображень.

Тема 7. Постановка загальної задачі умовної мінімізації. Теорема Ферма.

Тема 8. Приклади, застосування теореми про диференційовність суперпозиції відображень.

Тема 9. Теорема Моро–Рокафелара. Теорема Дубовицького–Мілютіна. Приклади.

Тема 10. Поняття похідної за напрямом. Приклади, властивості.

Тема 11. Задача Дідони. Якісний аналіз.

Тема 12. Рівняння Ейлера – Пуассона. Приклади його застосування.

Тема 13. Застосування леми Дюбуа – Реймона до розв'язання задачі Лагранжа. Необхідні умови в задачі Ейлера.

Тема 14. Задача варіаційного числення з нерухомими кінцями. Необхідні умови оптимальності.

Тема 15. Інтегрування рівнянь Ейлера. Перші інтеграли.

Тема 16. Приклад Діріхле.

Тема 17. Ізопараметричні задачі. Постановка, необхідні умови оптимальності.

Тема 18. Задача Больца. Постановка, необхідні умови оптимальності.

## **ІІІ ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

**До навчальної дисципліни №1 Функціональний аналіз, теорія міри та інтеграла**

### *Основна*

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982.

### *Додаткова*

1. Очан Ю.С. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980.
2. Великін В.Л., Пічугов С.О. Теорія міри та інтеграла Лебега – Дніпропетровськ, РВВ ДНУ, 2003.
3. Пасько А.М. Практикум із курсу «Функціональний аналіз». – Дніпропетровськ, РВВ ДНУ, 2008....

### **До навчальної дисципліни №2 Топологія**

### *Основна*

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры, М., 1968.
4. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология, М., 2012.

### *Додаткова*

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и функций, М., 1948.
2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Задачи по топологии, Л., ЛГУ, 1988.

### **До навчальної дисципліни №3 Елементи криптографії**

### *Основна*

1. Яценко В.В. Введение в Криптографию, М., МЦМНО, 2012.
2. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии, М., Гелиос АРВ, 2002.
3. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика, М., Наука, 1983.

### *Додаткова*

1. Нечаев В.И. Элементы криптографии. Основы теории защиты информации, М., Высшая школа, 1999.
2. Ростовцев А., Маховейко Е. Введение в криптографию с открытым ключом, СПб, Интерлайн, 2001.

### **До навчальної дисципліни №4 Рівняння математичної фізики**

### *Основна*

1. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — 3-е изд., дополн. — М.: Физматлит, 1961. — 400 с.
2. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964. — 208 с.
3. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 444 с.
4. Михлин С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 576 с.
5. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 416 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. — 391 с.

#### *Додаткова*

1. Годунов С. К., Золотарева Е. В. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука. Сиб. отделение, 1974. — 75 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд., исправл. и дополн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 512 с.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие. — 3-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 688 с.

#### **До навчальної дисципліни №5 Методи оптимізації та варіаційне**

#### **числення**

#### *Основна*

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: УРСС, 2002.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
4. Когут О. П., Когут П. І., Рядно О. А. Оптимізація в еліптичних крайових задачах. — Дніпропетровськ: ДДФА, 2010. — 238 с.
5. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974.

#### *Додаткова*

1. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.
2. Алексеев В.М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. — М.: Наука, 1984.

#### IV СТРУКТУРА ВАРІАНТУ ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ

Кожний варіант додаткового вступного випробування містить **25** тестових питань, зміст яких стає відомим вступнику лише при отриманні варіанту випробування.

Варіант складається із завдань таких форм:

- 1) Питання на обрання вірної відповіді – до кожного питання надаються чотири варіанти відповіді, з яких вступник має обрати одну, зробивши відповідну позначку;

Розподіл питань у кожному варіанті:

- за формою завдань

| № з/п | Форма завдання                      | Кількість одиниць у варіанті |
|-------|-------------------------------------|------------------------------|
| 1     | Питання на обрання вірної відповіді | 25                           |
|       | Усього                              | 25                           |

- за темами навчальних дисциплін

| № з/п | Зміст питання                                                                         | Кількість одиниць у варіанті |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| 1     | За темами навчальної дисципліни №1<br>Функціональний аналіз, теорія міри та інтеграла | 9                            |
| 2     | За темами навчальної дисципліни №2<br>Топологія                                       | 4                            |
| 3     | За темами навчальної дисципліни №3<br>Елементи криптографії                           | 4                            |
| 4     | За темами навчальної дисципліни №4<br>Рівняння математичної фізики                    | 4                            |
| 5     | За темами навчальної дисципліни №5<br>Методи оптимізації та варіаційне числення       | 4                            |
|       | Усього                                                                                | 25                           |

#### V КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ВІДПОВІДЕЙ

Оцінка за відповідь на кожне питання варіанту додаткового вступного випробування може набувати одного з двох значень:

максимального значення кількості балів – за вірної відповіді,  
мінімального значення (0 балів) – за невірної відповіді.

Розподіл максимальної кількості балів за відповіді на завдання різної форми наведений у таблиці:

| № з/п | Форма завдання                         | Максимальне значення, кількість балів | Максимальна кількість балів, яка може бути набрана за виконання завдань певної форми |
|-------|----------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Питання на обрання<br>вірної відповіді | 4                                     | $25 \cdot 4 = 100$                                                                   |
|       | Усього                                 |                                       | 100                                                                                  |