

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Механіко-математичний факультет

**УЗГОДЖЕНО**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Проректор з науково-педагогічної  
роботи

Ректор

" 1 " 02 20 16 р.

" 2 " 02 20 16 р.

 Є.О. Чернецький

 М.В. Поджков  


**ПРОГРАМА ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО  
ВИПРОБУВАННЯ  
За спеціальністю 111- Математика  
для вступу на навчання для отримання ступеня магістр**

Затверджено на засіданні  
Вченої ради механіко-математичного  
факультету

" 23 " 02 20 16 р.,

протокол № 06

декан ММФ  О.В. Хамініч

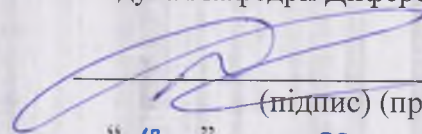
Дніпропетровськ – 2016

ПРОГРАМА додаткового вступного випробування зі спеціальності 8.04020101 «Математика».

Програма фахового вступного випробування затверджена на засіданні кафедри **Диференціальних рівнянь**

Протокол від " 12 " 02 2016 року № 52

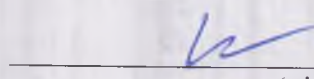
Завідувач кафедри Диференціальних рівнянь

 ( Козум Н.І. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
" 12 " 02 2016 року

Програма додаткового вступного випробування затверджена на засіданні кафедри **Геометрії та алгебри**

Протокол від " 18 " 02 2016 року № 6

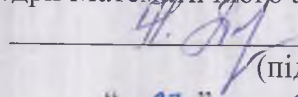
Завідувач кафедри Геометрії та алгебри

 ( Курдаченко Л.А. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
" 18 " 02 2016 року

Програма додаткового вступного випробування затверджена на засіданні кафедри **Математичного аналізу і теорії функцій**

Протокол від " 26 " 01 2016 року № 11

Завідувач кафедри Математичного аналізу і теорії функцій

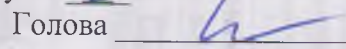
 ( Парфінович Н.В. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
" 27 " 01 2016 року

Схвалено науково-методичною комісією за напрямом підготовки/спеціальністю

8.040201 Математика

(шифр, назва)


Протокол від " 26 " 01 2016 року № 1

Голова  ( Курдаченко Л.А. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
" 27 " 01 2016 року

Схвалено Вченою радою факультету Механіко-математичного

(шифр, назва)

Протокол від " 23 " 02 2016 року № 06

Голова  ( Хамініч О.В. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
" 23 " 02 2016 року

## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою додаткового іспиту з вибірових дисциплін є перевірка відповідності знань, умінь та практичних навичок студентів даним вимогам. У ході додаткових вступних випробувань оцінюється рівень знань по додатковим дисциплінам, викладення яких передбачено навчальним планом підготовки бакалаврів за напрямом підготовки 6.040201 «Математика».

На додаткові вступні випробування виносяться питання з таких навчальних дисциплін:

1. Функціональний аналіз
2. Теорія міри та інтеграла
3. Топологія
4. Елементи криптографії
5. Рівняння математичної фізики
6. Методи оптимізації та варіаційне числення.

## ЗМІСТ ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ

### Функціональний аналіз

1. Метричний простір. Аксиоми і основні поняття. Простори  $C_{[a,b]}$ ,  $R^n$ ,  $s$ ,  $S$ ,  $l_p$ ,  $L^p_{[a,b]}$ ,  $M_{[a,b]}$ . Характер збіжності у просторі  $M_{[a,b]}$ .
2. Нерівності Гельдера для сум і для інтегралів.
3. Нерівності Мінковського для сум і для інтегралів.
4. Сепарабельні простори. Приклади сепарабельних просторів, приклад несепабельного метричного простору.
5. Повні і неповні метричні простори. Означення і приклади. Теорема про поповнення.
6. Принцип стискаючих відображень і застосування принципу стискаючих відображень.
7. Нормовані простори. Основні поняття і приклади. Теорема про еквівалентність скінченномірних нормованих просторів.
8. Лінійні простори зі скалярним добутком. Приклади. Нерівність Коші-Буняковського. Гільбертові простори.
9. Ортогональні і ортонормовані системи елементів. Процес ортогоналізації Шмідта.
10. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя, рівність Парсеваля. Збіжність рядів Фур'є. Замкнені ортонормовані системи.
11. Лінійні обмежені оператори в нормованих просторах і їх властивості. Норма лінійного обмеженого лінійного оператора. Формули для обчислення норми лінійного обмеженого оператора.
12. Простір лінійних обмежених операторів і його повнота. Спряжений простір і його повнота.
13. Теореми Банаха-Штейнгауза.
14. Теореми Банаха про існування і обмеженість оберненого оператора.
15. Оператори, що залежать від параметру. Власні значення і власні елементи обмеженого оператора. Спектр і множина регулярних чисел.
16. Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала (випадок дійсного сепарабельного простору).

17. Загальний вид лінійного функціонала у просторі  $R_p^n$ ,  $1 < p < \infty$ .
18. Загальний вид лінійного функціонала у просторі  $l_p$ ,  $1 < p < \infty$ .
19. Загальний вид лінійного функціонала у гільбертовому просторі.
20. Загальний вигляд лінійного функціонала в просторі  $C_{[a,b]}$ .
21. Поняття спряженого оператора до оператора, що перетворює нормований простір у нормований і його властивості. Норма спряженого оператора. Приклади спряжених операторів.
22. Компактні множини. Приклади і властивості компактних множин.
23. Критерій компактності (теорема Хаусдорфа).
24. Цілком неперервні оператори і їх властивості. Приклади цілком неперервних операторів і операторів, що не є цілком неперервним.
25. Теореми про розв'язок рівняння з цілком неперервним оператором. Альтернатива Фредгольма.
26. Спектр цілком неперервного оператора.

### Теорія міри та інтеграла

1. Основні поняття теорії множин. Приклади. Співвідношення двоїстості.
2. Зчислені множини та їх властивості, критерій зчисленості множини. Приклади зчисленних множин.
3. Незчисленність множини точок відрізка  $[0;1]$ . Поняття потужності континууму. Приклади множин потужності континууму.
4. Теорема про необмеженість потужностей.
5. Поняття граничної точки множини. Критерій граничної точки множини. Похідна множина.
6. Поняття відкритих і замкнених множин та їх властивості. Відкритих множин. Структура відкритих і замкнених множин в  $R^1$ .
7. Канторова відкрита множина. Канторова досконала множина.
8. Означення вимірності обмеженої множини в  $R^1$ , міра вимірної множини. Вимірність доповнення до вимірної множини. Вимірність об'єднання і перетину вимірних множин.
9. Поняття вимірної функції. Властивості вимірних функцій.
10. Збіжність майже скрізь і збіжність за мірою. Зв'язок між збіжністю майже скрізь і збіжністю за мірою.
11. Приклад послідовності функцій, яка збігається за мірою, але не збігається ніде.
12. Теорема Рісса.
13. Поняття інтеграла Лебега та його властивості.
14. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.
15. Нерівність Чебишева і наслідок з нерівності Чебишева.
16. Теорема Лебега (про граничний перехід під знаком інтеграла).
17. Теорема Леві.
18. Теорема Фату.
19. Порівняння інтеграла Рімана і Лебега.
20. Монотонні функції і їх властивості. Функції обмеженої варіації і їх властивості.
21. Необхідна і достатня умови того, щоб функція була функцією обмеженої варіації.
22. Поняття невизначеного інтеграла і його властивості.

23. Теорема про диференційованість невизначеного інтеграла.
24. Абсолютно неперервні функції і їх властивості. Приклади абсолютно неперервних функцій і функцій, які не є абсолютно неперервними.
25. Теорема про розв'язок рівняння  $\varphi'(x) = 0$  на множині абсолютно неперервних функцій (без доведення).
26. Зображення абсолютно неперервної функції інтегралом від своєї похідної (формула Ньютона-Лейбніца).
27. Інтеграл Рімана-Стільтьєса і його властивості. Існування інтеграла Рімана-Стільтьєса.

### Топологія

1. Метричні простори. Приклади.
2. Відкриті множини метричного простору. Приклади відкритих множин.
3. Теорема про властивості відкритих множин метричного простору.
4. Топологія, топологічні простори. Приклади.
5. Закриті множини топологічного простору. Теорема про властивості закритих множин.
6. Теорема про введення топології за допомогою системи закритих множин.
7. Внутрішні точки та внутрішність підмножин топологічного простору.
8. Точки дотику та замикання підмножин топологічного простору. Теорема про властивості операції замикання.
9. Ізольовані, граничні та межові точки.
10. База топології. Критерій бази. Приклади бази.
11. Властивості бази.
12. Теорема про введення топології за допомогою бази.
13. Неперервні відображення топологічних просторів.
14. Неперервні відображення топологічних просторів. Твердження про суперпозицію неперервних відображень.
15. Гомеоморфізми, відкриті та закриті відображення топологічних просторів.

### Елементи криптографії

1. Що є предметом вивчення криптографії?
2. Сформулювати основні задачі криптографії.
3. Що називають криптосистемою?
4. Що називають відкритим текстом і що називають криптограмою?
5. В чому полягає принципова різниця між термінами «розшифрування» і «дешифрування»?
6. Що розуміють під криптографічною стійкістю шифру?
7. Вказати три типи стійкості шифру.
8. Що називають цифровим підписом?
9. Які шифри називають симетричними?
10. Вказати два основних типи симетричних шифрів.
11. Які шифри відносять до шифрів заміни?
12. Які шифри відносять до шифрів перестановки?
13. Які шифри відносять до композиційних шифрів?
14. Який шифр називають блоковим?

15. Що є предметом вивчення еліптичної криптографії?

### Рівняння математичної фізики

1. Канонічні види лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку від двох незалежних змінних.
2. Задача Коші для рівняння теплопровідності в шарі  $R^n \times [0, T]$ , розв'язання за методом інтегрального перетворення Фур'є.
3. Принцип максимуму для оператора теплопровідності в шарі  $R^n \times [0, T]$  та просторово-часовому циліндрі  $S_R^n \times [0, T]$ .
4. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння теплопровідності в стрижні скінченної довжини; розв'язання за методом розділення змінних.
5. Задача Коші для рівняння коливань струни в смузі  $R \times [0, T]$ ; розв'язання за методом характеристик та інтегрального перетворення Фур'є.
6. Задача Коші для хвильового рівняння в шарі  $R^3 \times [0, T]$ ; розв'язання за методом сферичних середніх Кірхгофа.
7. Задача Коші для хвильового рівняння в шарі  $R^2 \times [0, T]$ ; розв'язання за методом спуску Адамара, інтегральна формула Пуассона.
8. Інтеграл енергії для рівняння коливань струни в смузі  $R \times [0, T]$ , коректність задачі Коші в смузі  $R \times [0, T]$ .
9. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння коливань струни; розв'язання за методом розділення змінних.
10. Постановки крайових задач Діріхле, Неймана та Робена для рівняння Лапласа в скінченій області в  $R^n$ ; принцип максимуму для рівняння Лапласа.
11. Формула Гаусса – Остроградського, перша та друга допоміжні формули Гріна, основна формула Гріна в скінченій області в  $R^n$ ; умова розв'язності задачі Неймана.
12. Теореми про середні значення гармонічної функції в кулі та на сфері в  $R^n$ , про нескінчену диференційовність гармонічної функції в скінченій області в  $R^n$ .
13. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в колі; розв'язання за методом розділення змінних.
14. Крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в кільці; розв'язання за методом розділення змінних.
15. Зовнішня крайова задача з межовими умовами Діріхле для рівняння Лапласа в колі; розв'язання за перетворенням інверсії Кельвіна.

### Методи оптимізації та варіаційне числення

1. Опуклі функції: означення, властивості.
2. Нерівність Йенсена. Критерій опуклості диференційовних функцій.
3. Теорема Куна – Такера. Умова Слейтера.
4. Варіація за Лагранжем. Означення. Приклади.
5. Похідна за Гато. Означення. Приклади.
6. Теорема про диференційовність за Фреше суперпозиції відображень.
7. Постановка загальної задачі умовної мінімізації. Теорема Ферма.
8. Приклади, застосування теореми про диференційовність суперпозиції відображень.

9. Теорема Моро–Рокафелара. Теорема Дубовицького–Мілютіна. Приклади.
10. Поняття похідної за напрямом. Приклади, властивості.
11. Задача Дідони. Якісний аналіз.
12. Рівняння Ейлера – Пуассона. Приклади його застосування.
13. Застосування леми Дюбуа – Реймона до розв’язання задачі Лагранжа. Необхідні умови в задачі Ейлера.
14. Задача варіаційного числення з нерухомими кінцями. Необхідні умови оптимальності.
15. Інтегрування рівнянь Ейлера. Перші інтеграли.
16. Приклад Діріхле.
17. Ізопараметричні задачі. Постановка, необхідні умови оптимальності.
18. Задача Больца. Постановка, необхідні умови оптимальності.

#### **Перелік рекомендованої літератури**

1. Зорич В.А. Математический анализ. М., Наука, 1981.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. М., Физматлит, 2000.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967-1968.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1972.
5. Доронін В. Г., Лигун А. О., Моторний В.П., Моторна О.В. Комплексний аналіз. Навчальний посібник, Дніпропетровск , Ч. 1 – 1997, Ч. 2 – 1999.
6. Александров Д. В. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1969.
8. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Физматгиз, 1956.
9. Сборник задач по дифференциальной геометрии (под ред. Феденко). М.: Наука, 1979.
10. Кострикин А. И. Введение в алгебру, М., «Наука», 1977.
11. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, М., «Наука», 1970.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. М.: Физматлит, 2007.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
14. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
15. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: РУДН, 1997.

#### **КРИТЕРІЙ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ**

Екзаменаційний білет складається з тестових питань закритого типу загальною кількістю 25 по 4 бали кожний.

До кожного із тестів пропонується чотири варіанти відповіді, з яких лише один правильний. Завдання вважається виконаним, якщо у бланку відповідей вибрано і позначено правильну відповідь.

Загальна оцінка додаткового державного вступного випробування за 100-бальною шкалою визначається шляхом додавання усіх оцінок.

Загальний час виконання роботи – 90 хвилин.


Питання, що входять до складу білету, відображають всі розділи програми додаткового вступного випробування .

## СТРУКТУРА ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТУ


| Номер розділу    | Назва розділу                             | Кількість питань |   | Максимальна кількість балів, що нараховується за одну правильну відповідь |
|------------------|---|------------------|---|---|
| I частина білету |   |                  |   |   |
| 1.               | Функціональний аналіз                     | 5                | 9 | 4 бали  |
|                  | Теорія міри та інтеграла                  | 4                |   |   |
| 2.               | Топологія                                 | 4                | 8 | 4 бали  |
|                  | Елементи криптографії                     | 4                |   |   |
| 3.               | Рівняння математичної фізики              | 4                | 8 | 4 бали  |
|                  | Методи оптимізації та варіаційне числення | 4                |   |   |

**Затверджено Вченою Радою ММФ**

протокол від 23 02 2016 року № 06

Зав. каф. математичного аналізу і теорії функцій  доц. Парфінович Н.В.

Зав. каф. геометрії та алгебри  проф. Курдаченко Л.А.

Зав. каф. диференціальних рівнянь  проф. Когут П.І.