

ISSN 2409 - 4056

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

# **В і с н и к**

**Дніпропетровського  
університету**

Науковий журнал

Заснований у 1993 р.

---

**№ 4**

**Том 24**

**2016**

---

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

---

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); ст. наук. співроб., проф. **В. І. Карплюк** (*заст. голови*); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгалоук**; чл.-кор. НАПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. НАПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Носенко**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **В. С. Савчук**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Свігленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлеєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун**.

---

**Серія:**  
**РАКЕТНО-КОСМІЧНА  
ТЕХНІКА**

**Випуск 19**

Дніпропетровський національний університет  
імені Олеся Гончара

УДК 629.78

*Друкується за рішенням вченої ради  
Дніпропетровського національного університету  
імені Олеся Гончара згідно з планом видань на 2016 рік*

### **Рецензенти:**

д-р техн. наук, проф. А. П. Алпатов;  
д-р техн. наук, проф. М. Д. Коваленко.

Вісник фізико-технічного факультету Дніпропетровського національного університету містить оглядові статті з матеріалами наукових досліджень, виконаних у 2015–2016 рр.

Вестник физико-технического факультета Днепропетровского национального университета содержит обзорные статьи с материалами научных исследований, выполненных в 2015–2016 гг.

### **Редакційна колегія:**

д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун** (відп. редактор), д-р техн. наук, проф. **В. П. Малайчук** (заст. відп. редактора), д-р техн. наук, проф. **В. В. Авдєєв**, д-р техн. наук, проф. **Є. О. Джур**, д-р техн. наук, проф. **С. О. Давидов**, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь**, д-р техн. наук, проф. **О. М. Петренко**, д-р техн. наук, проф. **О. В. Січевий**, д-р техн. наук, проф. **В. С. Хорошилов** (ДКБ "Південне", м. Дніпропетровськ), д-р техн. наук, проф. **А. С. Кулик** (Національний аерокосмічний університет "ХАІ", м. Харків), д-р фіз.-мат. наук, проф. **К. С. Бактибеков** (Євразійський національний університет ім. Л. М. Гумільова, Інститут космічних досліджень, м. Астана, Казахстан), д-р техн. наук, проф. **О. М. Капулкін** (Ізраїльський політехнічний університет, НДІ "Техніон", м. Хайфа, Ізраїль), канд. техн. наук, проф. **О. А. Шинкаренко** (Федеральний Університет Бразилії, м. Бразилія, Бразилія), канд. техн. наук, доц. **О. О. Манойленко** (відп. секретар).

© Дніпропетровський національний  
університет ім. Олеся Гончара, 2016

УДК 629.78.001

**В. В. Авдєєв, В. В. Капцова**

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ РОЗРОБКИ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ КУТОВОГО ПОЛОЖЕННЯ СУПУТНИКА**

З метою обґрунтованого вибору показників системи встановлено зв'язок у вигляді нескладних аналітичних співвідношень коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу при дії лінійного збурення із запасом стійкості, коефіцієнтами похибок, швидкодією і необхідною приведеною потужністю виконавчого пристрою для випадку плоского обертального руху в інерційній системі координат.

*Ключові слова:* перехідний процес, критерій якості, похибки, швидкодія.

С целью обоснованного выбора показателей системы установлена связь в виде несложных аналитических соотношений коэффициентов критерия качества переходного процесса при воздействии линейного возмущения с запасом устойчивости, коэффициентами ошибок, быстродействием и необходимой приведенной мощностью исполнительного устройства для случая плоского вращательного движения в инерциальной системе координат.

*Ключевые слова:* переходный процесс, критерий качества, погрешности, быстродействие.

**In order of grounded choice of systems indices, relationship as simple analytical expressions for coefficients of a performance criterion of transient process by a linear disturbance impact with stability factor, error quotient, response speed and a necessary normalized power of execution unit for case of a plane rotary motion in inertial coordinate system is established.**

*Keywords:* transient process, performance criterion, stabilization errors, operating speed.

Необхідне для функціонального призначення супутника забезпечення заданого обертального руху має багато специфічних особливостей, тому цьому питанню присвячено десятки робіт, зокрема, [2–5]. Описано методи визначення фактичного куткового положення з використанням таких орієнтирів як лінія горизонту Землі, її магнітне поле, Сонце, інші небесні світила, а також сигналів навігаційних космічних апаратів. Визначено джерела збурювальних кутових прискорень та проведено їхню оцінку залежно від параметрів супутника і орбіти. Для вісесиметричного супутника, якому надається обертальний рух навколо певної осі в інерційному просторі, складено диференціальні рівняння еволюційного руху, отримано кінцеві кінематичні параметри і встановлено положення рівноваги відповідно до еліпсоїда інерції [7]. Проведено аналіз динамічних характеристик процесів орієнтації і стабілізації з використанням різних видів виконавчих пристроїв, описано способи забезпечення асимптотичної стійкості і компенсації зовнішніх та параметричних збурень. Проведено дослідження нелінійної системи стабілізації заданого режиму обертального руху мікросупутника в орбітальній системі координат з використанням магнітного поля Землі. Шляхом моделювання визначено кількісні характеристики точності та швидкодії. Коефіцієнти закону регулювання вибираються виходячи із умови бажаної швидкості переходу до заданого режиму руху.

© В.В. Авдєєв, В.В. Капцова, 2016

У лінійних системах управління для визначення закону регулювання переважно знайшли використання перетворення Лапласа, передатні функції, частотні характеристики, кореневі годографи і аналітичні методи, де за основу береться критерій якості перехідного процесу. При проектуванні системи стабілізації (СС) кутового положення супутника для забезпечення заданих показників нерідко виникає необхідність прийняття компромісних рішень, зокрема, у процесі визначення параметрів контуру корекції – закону регулювання.

До основних показників СС прийнято відносити коефіцієнти помилок при дії збурювальних факторів, запас стійкості та якість перехідних процесів, яку кількісно оцінюють інтегральним критерієм.

У даній роботі ставиться задача встановлення зв'язку між коефіцієнтами критерію якості перехідного процесу та його тривалістю, запасом стійкості і коефіцієнтами похибок стабілізації кутового положення супутника при дії постійного та лінійно зростаючого збурювального прискорення. Наявність такого зв'язку дасть можливість приймати обґрунтовані компромісні рішення про призначення різних показників СС.

З метою можливості отримання в аналітичному вигляді оцінки показників СС, модель її об'єкта управління (обертальний рух супутника в одній із площин) прийнято в найбільш простому вигляді:

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u + c \cdot m, \quad (1)$$

де координати вектора  $x$  – це кут повороту та кутова швидкість;  $u, m$  – кутові прискорення, що створюються виконавчим пристроєм (ВП) і дією збурень відповідно;

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

У задачах стабілізації критерій якості перехідного процесу приймається у вигляді [1; 6]:

$$I = \int_t^{t+T_p} x^T(\tau) \cdot \beta \cdot x(\tau) \cdot d\tau + \int_t^{t+T_p} u^T(\tau) \cdot k^{-1} \cdot u(\tau) \cdot d\tau, \quad (3)$$

де  $t$  – поточний час,  $T_p$  – тривалість інтервалу оцінки якості перехідного процесу,

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Оптимальне управління  $u$ , яке забезпечує мінімум критерію (3), визначається методом аналітичного конструювання регуляторів [1] при умові повної керованості системи (1), спираючись на матриці  $a, b, \beta$ , коефіцієнт  $k$  та матрицю  $S$ , елементи якої знаходяться шляхом розв'язку матричного диференційного рівняння Ріккати у зворотному часі. Необхідна і достатня умова повної керованості об'єкта управління, за Калманом [6], для прийнятої в цій роботі моделі є такою: ранг блочної матриці  $[b : ab]$  повинен дорівнювати порядку системи (1), тобто

$$\text{rank}[b : ab] = 2 = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Як видно з (4), детермінант матриці (4) не дорівнює нулю, отже умова повної керованості виконується.

Матричне диференціальне рівняння Ріккати у зворотному часі має вигляд:

$$\dot{S} - S \cdot a - a^T \cdot S + S \cdot b \cdot k \cdot b^T \cdot S = \beta, \quad (5)$$

його розв'язок відносно матриці  $S$  при нульових початкових значеннях дає можливість визначити оптимальне управління

$$u = -k \cdot b^T \cdot S \cdot x = -k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k \cdot \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k \cdot (S_{21} \cdot x_1 + S_{22} \cdot x_2). \quad (6)$$

Із урахуванням (2) матричне рівняння (5) еквівалентне системі з трьох нелінійних диференціальних рівнянь ( $S_{12} = S_{21}$ ):

$$\dot{S}_{11} = \beta_{11} - k \cdot S_{12}^2, \quad \dot{S}_{12} = S_{11} - k \cdot S_{12} \cdot S_{22}, \quad \dot{S}_{22} = \beta_{22} - k \cdot S_{22}^2 + 2S_{12}. \quad (7)$$

Розв'язок диференціальних рівнянь (5), (7) при зростанні інтервалу інтегрування, тривалість якого залежить від елементів матриці  $\beta$  критерію (3), наближається до усталених значень  $\bar{S}$ . Вони можуть бути знайдені з алгебраїчного матричного рівняння Лур'є:

$$\bar{S} \cdot a + a^T \cdot \bar{S} - \bar{S} \cdot b \cdot k \cdot b^T \cdot \bar{S} = -\beta. \quad (8)$$

Беручи до уваги, що  $\bar{S}_{12} = \bar{S}_{21}$ , з рівнянь (8) знаходимо:

$$\bar{S}_{11} = \sqrt{\beta_{11} \cdot (2\sqrt{\beta_{11}/k} + \beta_{22})}, \quad \bar{S}_{12} = \sqrt{\beta_{11}/k}, \quad \bar{S}_{22} = \sqrt{(2\sqrt{\beta_{11}/k} + \beta_{22})/k}, \quad (9)$$

але для математичної моделі (1) в управління  $u$  (6) входить тільки друга і третя із величин (9), при цьому диференціальне рівняння СС матиме вигляд:

$$\dot{x} = a^* \cdot x + c \cdot m, \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cdot \bar{S}_{12} & -k \cdot \bar{S}_{22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Від матриці  $a^*$  залежать такі динамічні характеристики системи як запас стійкості  $\eta$ , тривалість перехідного процесу  $T_p$  та коефіцієнти помилок.

Як відомо, під запасом стійкості  $\eta$  мається на увазі відстань від уявної осі на площині коренів характеристичного полінома (ХП) матриці  $a^*$  до найближчого кореня.

Для випадку дійсних коренів ХП, коли має місце нерівність

$$\beta_{22} \cdot \sqrt{k} - 2\sqrt{\beta_{11}} > 0, \quad (11)$$

після нескладних перетворень отримуємо залежність запасу стійкості СС від коефіцієнтів критерію (3)  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $k$ :

$$\eta_d = \left[ \frac{\beta_{22} \cdot k}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta_{11}}{\beta_{22}^2 \cdot k}} \right) \right]^{0.5}. \quad (12)$$

Коли нерівність (11) не виконується (комплексні корені ХП), то запас стійкості

$$\eta_k = \left[ \sqrt{k} \cdot (\beta_{22} \sqrt{k} + 2\sqrt{\beta_{11}}) / 4 \right]^{0.5}. \quad (13)$$

Порівняння залежностей (12) і (13) показує, що більший запас стійкості має місце, коли нерівність (11) не виконується, тобто для співвідношення коефіцієнтів критерію (3), при якому корені ХП будуть комплексними (рис. 1).

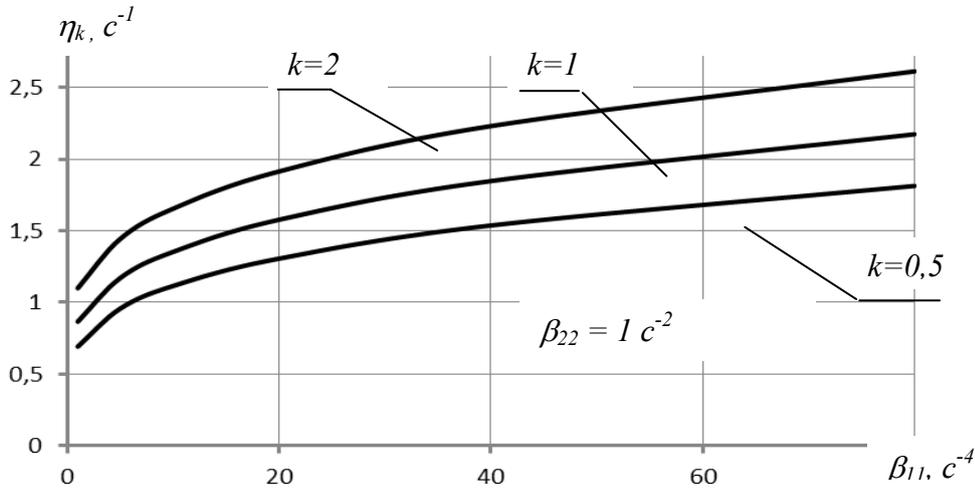


Рис. 1. Запас стійкості на площині коренів ХП

Якщо за тривалість перехідного процесу  $T_p$  прийняти інтервал часу від початку дії збурення до досягнення 95 % усталеного значення, то визначена чисельним шляхом похибка відомої оцінки  $T_p = 3/\eta_k$  знаходиться у діапазоні  $-35 \dots +35 \%$  (рис. 2).

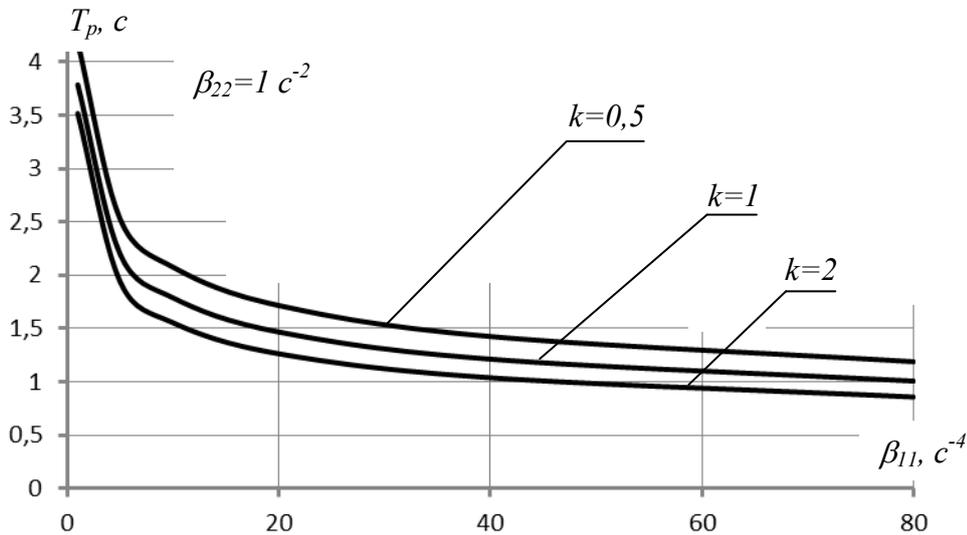


Рис. 2. Тривалість перехідного процесу

Залежність векторів коефіцієнтів помилок СС від коефіцієнтів критерію (3) встановимо для випадку, коли у рівнянні (1) збурювальне прискорення залежить від часу лінійно:

$$m = m_0 + \dot{m}_0 \cdot t. \quad (14)$$

При цьому визначаються тільки два вектори коефіцієнтів помилок, які залежать від матриць, що входять у рівняння (2), (10):

$$ER_0 = -(a^*)^{-1} \cdot c, \quad ER_1 = -(a^*)^{-2} \cdot c. \quad (15)$$

Коли на СС діє збурювальне прискорення (14), то вектори (15) визначають її стан  $x_k$  після закінчення перехідного процесу:

$$x_k = \dot{m}_0 \cdot (ER_0 \cdot t + ER_1) + ER_0 \cdot m_0.$$

З урахуванням (9) після нескладних перетворень встановлюємо залежність векторів (15) від коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу (3):

$$ER_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k \cdot \beta_{11}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ER_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta_{11}} \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta_{11}} + \beta_{22}\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}}} \\ 1 \\ \sqrt{k \cdot \beta_{11}} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Як видно з (16), похибки стабілізації кутового положення супутника обернено пропорційні коефіцієнтам  $\beta_{11}$  та  $k$  критерію (3) та пропорційні коефіцієнту  $\beta_{22}$  (рис. 3, 4).

Якщо пріоритетним показником СС є статична похибка  $\Delta\varphi$  компенсації постійного збурювального прискорення  $m_0$ , то, виходячи із умови кратних коренів ХП матриці (10), при яких має місце найбільший запас стійкості  $\eta_{\max}$  на площині коренів, можна встановити зв'язок  $\eta_{\max}$  з коефіцієнтом похибки  $ER_{01}$  (16) і, відповідно, з величиною кута повороту супутника при дії збурення  $m_0$ , а також з коефіцієнтами  $\beta_{11}$ ,  $k$  критерію якості перехідного процесу:

$$\eta_{\max} = \sqrt{1/ER_{01}} = \sqrt{m_0/\Delta\varphi} = (k \cdot \beta_{11})^{0.25}. \quad (17)$$

Встановимо залежність потужності ВП, необхідної для забезпечення заданої орієнтації супутника, від коефіцієнтів критерію якості перехідного процесу (3). Елементарна робота ВП дорівнює добутку його обертального моменту на елементарний кут повороту, тому приведена поточна потужність  $P$  в перерахунку на одиницю моменту інерції та одиницю початкового відхилення  $x_{10}$  від заданої орієнтації визначається добутком обертального прискорення (6), яке створює ВП, на кутову швидкість (координата  $x_2$  вектора стану):

$$P = -k \cdot (\bar{S}_{12} \cdot x_1 + \bar{S}_{22} \cdot x_2) \cdot x_2. \quad (18)$$

Розв'язок системи (1) при початковій умові  $x_{10} \neq 0$  для випадку комплексних коренів ХП  $-\alpha \pm j \cdot \beta$ , ( $j^2 = -1$ ), коли має місце більший запас стійкості у порівнянні з дійсними коренями, такий:

$$x_1(t) = x_{10} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t\right); \quad x_2(t) = -x_{10} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t. \quad (19)$$

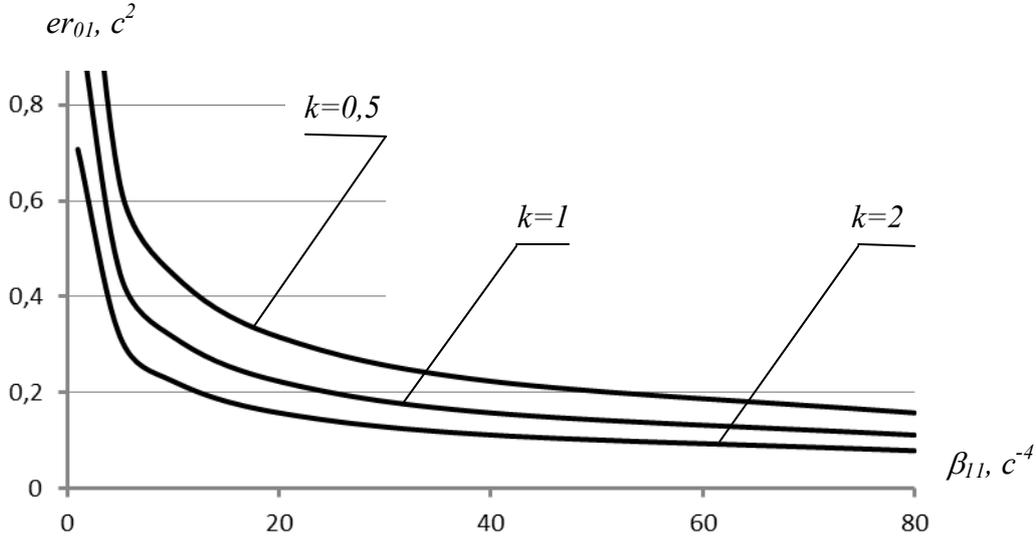


Рис. 3. Коефіцієнт похибки при постійному збурювальному прискоренні

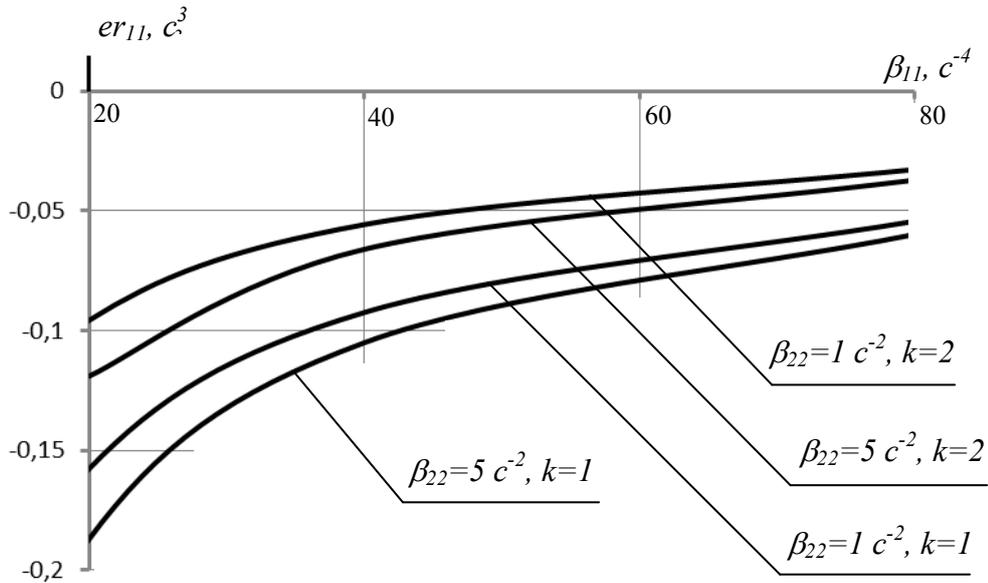


Рис. 4. Коефіцієнт похибки при лінійному збуренні

Відповідно до поняття запасу стійкості на площині коренів ХП  $\alpha = \eta_k$  (13),  $\beta = (2\sqrt{k\beta_{11}} - \beta_{22}k) / 2$ . Беручи до уваги, що  $\alpha^2 + \beta^2 = k \cdot \bar{S}_{12}$

і  $\alpha = k \cdot \bar{S}_{22} / 2$  з урахуванням (18), (19) приведену потужність ВП отримаємо у вигляді:

$$P = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\beta} e^{-2\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \cdot \sin \beta t. \quad (20)$$

Співвідношення (20) показує, що максимальне значення потужності матиме місце на початковому інтервалі часу компенсації відхилення і його величина, відповідно до (9), є пропорційною коефіцієнтам  $k$ ,  $\beta_{11}$  критерію (3) та обернено пропорційною коефіцієнту  $\beta_{22}$  (рис. 5).

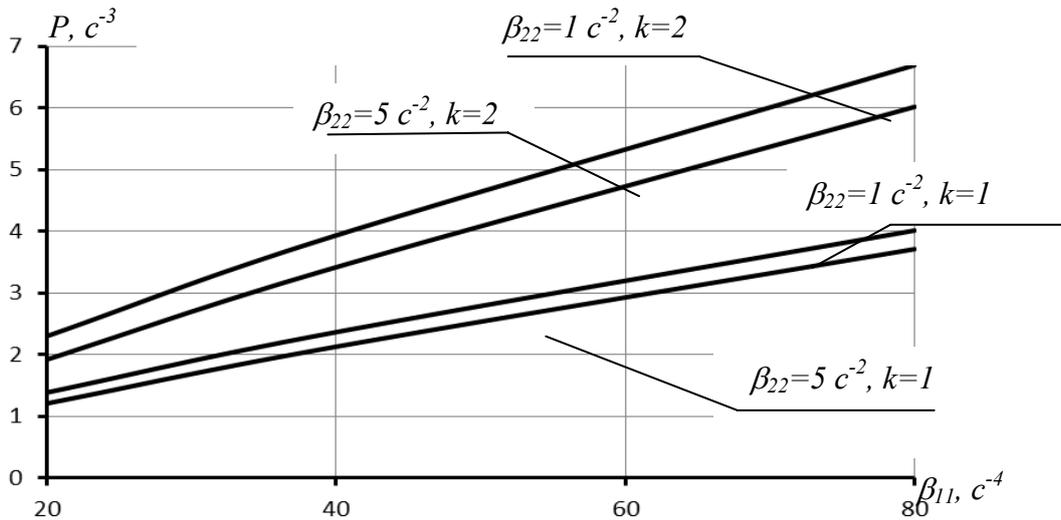


Рис. 5. Приведена потужність виконавчого пристрою

**Висновки.** Методом аналітичного конструювання контурів управління – шляхом розв’язку матричного алгебраїчного рівняння Лур’є – отримано залежність обертального прискорення (6), (9), що створюється виконавчим пристроєм СС, від коефіцієнтів  $\beta_{11}, \beta_{22}, k$  критерію (3), який кількісно характеризує якість перехідного процесу.

Встановлено зв’язок між коефіцієнтами  $\beta_{11}, \beta_{22}, k$  критерію (3) і запасом стійкості (12), (13), тривалістю перехідного процесу, векторами коефіцієнтів похибок (16) та приведеною потужністю виконавчого пристрою (9), (20), необхідною для компенсації відхилення положення супутника від зданої орієнтації. Показано, що запас стійкості пропорційний коефіцієнтам  $\beta_{11}, k$ , відповідно, тривалість перехідного процесу обернено пропорційна цим коефіцієнтам; абсолютні величини похибок пропорційні коефіцієнту  $\beta_{22}$  і обернено пропорційні коефіцієнтам  $\beta_{11}, k$ ; отримано обмеження зверху запасу стійкості на площині коефіцієнтів характеристичного полінома (17), коли пріоритетним показником СС є статична похибка при дії постійного збурювального обертального моменту.

Результати можуть бути використані для обґрунтування вибору показників системи управління обертальним рухом супутника на початку її розробки.

Наступний етап дослідження – це встановлення зв'язку між показниками СС для моделі об'єкта управління, у якій повніше враховано особливості його роботи.

### Бібліографічні посилання

1. **Красовский А.А.** Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А. А. Красовский. – М. : Машиностроение, 1969. – 240 с.
2. **Лебедев Д. В.** Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов / Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко. – К., Наук. думка, 2006. – 300 с.
3. **Павловський М.А.** Системи керування обертальним рухом космічних апаратів: підручник / В. П. Горбулін, О. М. Клименко. – К., Наук. думка, 1997. – 200 с.
4. **Пятак И.А.** Проектирование систем ориентации и стабилизации космических аппаратов : уч. пособ. / И. А. Пятак. – Дніпропетровськ, Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2005. – 60 с.
5. **Раушенбах Б.В.** Управление ориентацией космических аппаратов / Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь. – М. : Наука, 1974. – 600 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.
7. **Ovchinnikov M. Ju.** New one-axis magnetic attitude control in absence of magnetometer readings / M. Ju. Ovchinnikov, D. Roldugin, S. Tkachev, S. Karpenko. – International astronautically congress. – С 1.3.1. – 2014. – 8 p.

Надійшла до редколегії 05.02.2016

УДК 519.8

**В. Л. Волошко, Л. В. Волошко**

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

### ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПЛАСТИНИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Досліджено задачу знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння, для розв'язування якої використовується один з варіантів градієнтного методу. На кожному кроці ітераційного процесу розв'язується лінійна крайова задача, яка за допомогою методу потенціалу зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Ефективність алгоритму підтверджується високою точністю отриманих чисельних результатів.

*Ключові слова:* бігармонічне рівняння, метод потенціалу, градієнтний метод, оптимальне керування.

Исследована задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения, для решения которой используется один из вариантов градиентного метода. На каждом шаге итерационного процесса решается линейная граничная задача, которая с помощью метода потенциала сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эффективность алгоритма подтверждается высокой точностью полученных численных результатов.

*Ключевые слова:* бигармоническое уравнение, метод потенциала, градиентный метод, оптимальное управление.

**Problem of optimal right-hand side function finding for inhomogeneous biharmonic equation has been investigated. It was solved with one of the gradients methods. Linear problem was solved on every step of the iterative process. With the help of potential method this linear problem has been reduced to the system of Fredholm first kind integral equations. The effectiveness of algorithm was confirmed by high accuracy of obtained calculations.**

*Keywords:* biharmonic equation, potential method, gradient method, optimal control.

У машинобудуванні пластини складної форми використовуються як силові елементи конструкцій. Процес проектування та виробництва виробів у галузі ракетно-космічної техніки призводить до побудови математичних моделей складних фізичних явищ.

По суті, це постановка та розв'язування задач оптимального керування параметрами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Обране рівняння разом з граничними та початковими умовами зазвичай складають основу математичної моделі об'єкта, що підлягає аналізу [4]. За допомогою різних варіантів градієнтних методів успішно розв'язуються задачі керування параметрами диференціальних рівнянь та оптимального розбиття множин [2]. У роботі [3] наведено типи та характеристика основних обернених задач, вказано на некоректність як основну їх математичну особливість. У цій же роботі розглянуто способи оптимізації параметрів цих задач разом з усуненням їх некоректності. Проте задачі оптимального керування системами, які описані бігармонічними рівняннями, для областей складної форми є мало вивченими. Тому в роботі розглянуто коефіцієнтну задачу оптимізації правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Одним із факторів, який істотно її ускладнює, є неканонічність форми області визначення шуканих функцій. Зрозуміло, що така задача може бути розв'язана лише із застосуванням методів обчислювальної математики.

Без точного розв'язку лінійної задачі, неможливо застосувати градієнтний метод, побудувати збіжний ітераційний процес, з потрібною точністю отримати розв'язок оптимізаційної задачі.

Успішно подолати цю проблему дозволяє алгоритм розв'язування лінійної крайової задачі за допомогою граничних інтегральних рівнянь. Аналіз отриманих розв'язків, їх точність, простота алгоритму, затрачений машинний час свідчать про перспективність застосування цього підходу до інших граничних задач математичної фізики.

**Постановка основної задачі.** Розглянемо неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

з граничними умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де замкнутий контур  $\Gamma$  оточує область  $\Omega \in R^2$ , функції крайових умов  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in L^2(\Gamma)$  задані на контурі  $\Gamma$ ,  $n$  – внутрішня нормаль у точці  $(x, y) \in \Gamma$ . Функція правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння

$f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$  задана в області  $\Omega$ , де  $\bar{B}$  – деяка, обмежена певними умовами, замкнена підмножина функціонального простору. Функція  $w(x, y) \in C^4(\bar{\Omega})$  є розв’язком задачі (1) – (2). В [7] доведено існування і єдиність розв’язку цієї задачі.

Очевидно, що розв’язок задачі (1) – (2) залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. У припущенні, що функції  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  задані, поставимо задачу знаходження такої функції  $f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$ , яка доставляє мінімум функціоналу

$$I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy,$$

де  $w(x, y; f(x, y))$  – розв’язок крайової задачі (1) – (2), який відповідає функції правої частини рівняння (1).

Скорочено задача записується таким чином:

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}}. \tag{3}$$

*Зауваження.* Частинним випадком задачі (1) – (2) є наведена нижче задача теорії пластин:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega \\ w = \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{dw}{dn} &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \\ I(f(\cdot, \cdot)) &= \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}}, \end{aligned}$$

де  $\Omega$  – серединна площина пластини, обмежена контуром  $\Gamma$ ,  $q(x, y)$  – поперечне навантаження на пластину,  $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$  – циліндрична жорсткість пластини,  $h$  – товщина пластини,  $E$  – модуль пружності першого роду і  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови означають, що точки контура пластини не переміщуються  $\varphi(x, y) = 0$ , а кут нахилу їх закріплення визначений, тобто  $tg(\alpha(x, y)) = \psi(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$ . Задача полягає у відшуванні такого навантаження  $q(x, y)$ , щоб згин у кожній точці пластини був якомога меншим з урахуванням заданих крайових умов (рис. 1).

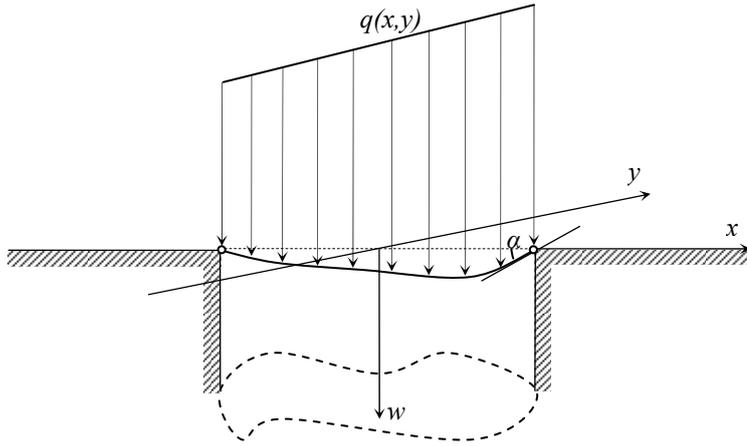


Рис. 1. Згин пластини під дією навантаження  $q(x,y)$

Важливою складовою розв’язку задачі (1) – (3) є лінійна задача (1) – (2). Тому спочатку розглянемо алгоритм її розв’язування із застосуванням методу потенціалу.

**Метод розв’язування лінійної крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння.** Згідно з [4], розв’язок задачі (1) – (2) будемо шукати у вигляді

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y), \tag{4}$$

Функція  $w_1(x, y)$  є частинним розв’язком неоднорідного бігармонічного рівняння

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \tag{5}$$

де  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ,  $(x, y)$  – точка спостереження,  $(\xi, \eta)$  – змінна інтегрування і функція  $w_2(x, y)$  є розв’язком задачі для однорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta w_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{6}$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} w_2 &= \varphi(x, y) - w_1(x, y), \\ \frac{dw_2}{dn} &= \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y), \end{aligned} \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{7}$$

Розв’язок задачі (6) – (7) є сумою бігармонічних потенціалів [7]

$$w_2(x, y) = \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma, \tag{8}$$

де  $\mu_1, \mu_2 \in L^2$  – поки що довільні і невідомі функції щільності,  $\nu$  – внутрішня нормаль у точці  $(\xi, \eta) \in \Gamma$ .

Розв’язок (8) має задовольняти крайовим умовам (7), що призводить до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} r^2 \ln r \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) = \\ \quad = \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n \partial v} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) = \\ \quad = \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

звідки будуть знайдені  $\mu_1(\xi, \eta)$ ,  $\mu_2(\xi, \eta)$ . Цю систему запишемо в матричному вигляді

$$\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) \Big|_{(x,y) \in \Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де матричне ядро

$$A(\xi, \eta; x, y) = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \\ \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) & \frac{\partial}{\partial n \partial v} (r^2 \ln r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 \\ \partial \tilde{G}_1 & \partial \tilde{G}_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v} (r^2 \ln r) \end{pmatrix} = (\tilde{G}_1 \quad \tilde{G}_2).$$

Наявність в ядрах системи рівнянь (9) логарифмічних особливостей дозволяє досягти регуляризуючого ефекту їх розв’язування прямими обчислювальними методами. Їх суть полягає в тому, що систему інтегральних рівнянь (9) за допомогою формул типу Сімпсона зведемо до системи алгебраїчних. Для цього контур  $\Gamma$  розбиваємо на елементарні дуги, на кожній з яких обираємо серединну точку. Систему інтегральних рівнянь наближено, заміною інтегралів по елементарних дугах, представляємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних відносно  $\mu_1(\xi, \eta)$ ,  $\mu_2(\xi, \eta)$  на ділянках контура [1].

Тепер наведемо розв’язок (4) у детальному вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (\tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta), \tilde{G}_2(x, y; \xi, \eta)) \Big|_{(x,y) \in \Omega} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta). \quad (11)$$

Далі, розв’язок (11) запишемо таким чином, щоб у явному вигляді були присутні функції  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$ .

Для інтегрального оператора  $\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) d\Gamma(\xi, \eta)$  існує обернений, оскільки

головна діагональ матричного ядра (10) має логарифмічну особливість, а недиагональні елементи неперервні [6]. Тому запишемо розв’язок системи інтегральних рівнянь (9) у вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \tilde{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(\xi, \eta; x, y) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta).$$

Позначивши

$$G(x, y; \xi, \eta) = (G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)) = \tilde{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(x, y; \xi, \eta),$$

остаточно отримаємо розв’язок задачі (1) – (2) в такому вигляді:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta), \tag{12}$$

де  $G(x, y; \xi, \eta)$  – називають контурною функцією Гріна.

Таким чином, було отримано аналітичний розв’язок задачі (1) – (2) у вигляді (12), який покладено в основу побудови обчислювального алгоритму розв’язування цієї задачі методом потенціалу, детально описаного в [1]. Далі розглянемо конкретні приклади, які дозволяють оцінювати ефективність такого підходу.

**Чисельний розв’язок лінійної задачі методом потенціалу.** Розглянемо такі крайові задачі (1) – (2), для яких розв’язок відомий заздалегідь. Для перевірки достовірності розв’язку наведемо приклади різних модельних функцій  $g(x, y)$ , визначивши  $f(x, y)$  таким чином:  $\Delta g(x, y) = f(x, y)$ , а також розглянемо різні форми областей  $\Omega$ . Визначивши значення  $g(x, y)$  і її нормальної похідної в точках контура, визначимо крайові умови  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$ . Таким чином, у силу єдиності розв’язку прямої задачі, має місце  $g(x, y) \equiv w(x, y)$  для внутрішніх точок області, тобто  $(x, y) \in \Omega$ .

**Приклад 1.** Нехай модельна функція  $g(x, y) = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6$ , тоді  $\Delta g = 361x^2 + 2y^2$ ,

тобто  $f \equiv 361x^2 + 2y^2$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\varphi = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6$ ,

$$\psi = \left( \frac{xy^4}{12} + 6x^5 \right) \cos(n^{\wedge} x) + \frac{x^2 y^3}{6} \cos(n^{\wedge} y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Обираємо неканонічний контур  $\Gamma$  – овал Касіні (рис. 2), який задається рівнянням

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi},$$

де  $(\rho, \varphi)$  – полярні координати, а розрахунки зроблено для параметрів  $a = 1.2$ ,  $c = 1$ . Чисельний розв’язок наведено в табл. 1.

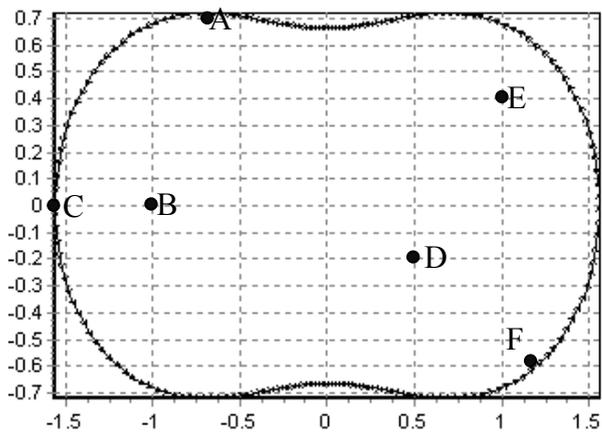


Рис. 2. Область  $\Omega$  і точки, в яких наведено розв’язок

Таблиця 1

**Порівняння обчислень модельної і знайденої функцій в деяких точках області  $\Omega$**

Точка $(x,y)$	Наближене $w(x,y)$	Точне $w(x,y)$	Похибка
A (-0,7; 0,7)	0,12134	0,12255	0,00121
B (-1,0; 0,0)	1,00195	0,99998	0,00197
C (-1,5; 0,0)	11,39234	11,39063	0,00171
D (0,5; -0,2)	0,01511	0,01564	0,00053
E (1,0; 0,4)	1,00249	1,00107	0,00142
F(1,2; -0,6)	2,99920	2,99376	0,00544

Відносна похибка складає 0,05 %.

**Приклад 2.** Тепер розглянемо класичну задачу лінійної теорії пластин.

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x,y)}{D}, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x,y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma.$$

У монографії [5] наведено розв’язок задачі для випадку, коли жорстко закріплена пластина має форму квадрата зі стороною  $a$  і навантаженням, розподіленим за гідростатичним законом  $q(x,y) = \left( \frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a} \right)$ .

Нехай  $a = 4$ ,  $q_0 = 175000$  н/м.кв. Відповідно до [5] згин у центрі симетрії квадратної пластини знаходиться за формулою  $w(0;0) = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$ , де  $\alpha = 0,00063$  – емпіричний коефіцієнт. У результаті обчислень за цією формулою маємо  $w(0;0) = 0,0114$ . Точний розв’язок, отриманий викладеним методом потенціалу  $w(0;0) = 0,0115$ . Відносна похибка складає 0,8 %.

Аналіз отриманих даних свідчить про високу точність розв’язку задачі (1) – (2), в тому числі для області складної форми. Тому цей метод будемо застосовувати для розв’язування поставленої задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння.

**Опис методу розв’язування основної задачі (1) – (3) знаходження оптимальної правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння.** Повернемося до постановки задачі (1) – (3):

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}},$$

де  $I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy,$

а стан керованого об’єкта описується диференціальним рівнянням

$$\Delta \Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

з крайовими умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Більш детально, з урахуванням аналітичного розв’язку (12) лінійної крайової задачі (1) – (2), функціонал  $I(f(\cdot, \cdot))$  представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f(\cdot, \cdot)) = & \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \left( \varphi(x, y) - w_1(x, y) \right) \cdot \left( \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \right) d\Gamma(\xi, \eta) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in L^2(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Функціонал (13) – опуклий напівніперервний знизу на  $\bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$ , тому, в силу теореми Вейерштраса, досягає своєї нижньої грані в єдиній точці  $f^*(\cdot, \cdot) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$ .

Опишемо алгоритм розв’язування задачі (1) – (2), (13), побудований на основі градієнтного методу з дробленням кроку [8]. Попередньо запишемо аналітичний вигляд похідної Фреше функціоналу (13) в кожній точці  $(\xi, \eta) \in \Omega$

$$\frac{\partial \tilde{I}(f(\hat{\xi}, \hat{\eta}))}{\partial f(\hat{\xi}, \hat{\eta})} = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \bar{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \bar{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta}) - \bar{G}_1(x, y; \xi, \eta) \int_{\Gamma} G_1(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) - \frac{\partial \bar{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta})}{\partial n} \int_{\Gamma} G_2(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right) \right] dx dy. \quad (14)$$

**Алгоритм**

*Початковий етап*

Крок 1. Обрати довільне початкове наближення  $f^0(x, y)$  і початковий крок градієнтного методу  $\alpha^0 > 0$ , задати сітку, яка розіб'є область  $\Omega$  на  $N \times M$  точок  $(\xi, \eta)$ , встановити лічильник ітерацій  $k = 0$  та точність  $\varepsilon > 0$ .

Крок 2. Обчислити наближено  $\tilde{I}(f^0(x, y))$ . Перейти до основного етапу.

*Основний етап*

Крок 1. Обчислити наближено похідну Фреше (14) в кожній точці  $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$  області  $\Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ .

Крок 2. Знайти  $k + 1$  наближення функції  $f(x, y)$  за правилом

$$f^{k+1}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = P_{\bar{B}} \left( f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij}) - \alpha^k \frac{\partial \tilde{I}(f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij}))}{\partial f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij})} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де  $P_{\bar{B}}$  – проекція наближення функції  $f(x, y)$  на замкнену множину  $\bar{B}$ . Обчислити значення функціоналу  $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y))$ .

Крок 3. Перевірити умову монотонності спадання значень функціоналу (13)  $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y)) < \tilde{I}(f^k(x, y))$ . Якщо вона виконується, покласти  $\alpha^{k+1} = \alpha^k$  і перейти до кроку 4, у протилежному випадку – величину кроку  $\alpha^k$  поділити навпіл і повернутися до кроку 2. Виконувати дроблення кроку  $\alpha^k$  до тих пір, поки не відновиться монотонність.

Крок 4. Здійснити перевірку умови завершення ітераційного процесу  $\sqrt{\frac{1}{N \cdot M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |f^{k+1}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) - f^k(\xi_{ij}, \eta_{ij})|^2} < \varepsilon$ . У випадку її невиконання заміняємо  $k$  на  $k + 1$  і повертаємося до кроку 1. Алгоритм описано.

Таким чином, розв'язок задачі (1) – (3) зводиться до побудови мінімізуючої послідовності  $\{f^k(x, y)\}$  за формулою (15), при цьому на кожній ітерації розв'язується лінійна задача (1) – (2) за допомогою методу потенціалу.

**Обчислювальний експеримент.** Для перевірки достовірності роботи описаного вище алгоритму складемо таку модельну задачу. Розглянемо функцію

$$g(x, y; \lambda) = (\lambda^2 + 1) \cdot (1 - (x^2 + y^2))^2 + (1 - (x^2 + y^2)), \quad \lambda \in [0; 1], \quad (16)$$

в області  $\Omega$ , яка обмежена контуром  $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ . Аналогічно до використання модельної функції для лінійної задачі (1) – (2), задачу (1) – (3) представимо у вигляді:

$$I(g) \rightarrow \min_{f \in L^2(\Omega)}, \quad (17)$$

де  $I(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; \lambda) dx dy$ ,

$$\Delta g = f(x, y) \equiv 64(\lambda^2 + 1), \quad (x, y) \in \Omega \quad (18)$$

$$g(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\left( \frac{dg}{dn}(x, y; \lambda) \right) = \psi(x, y) \equiv (-4x(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2x) \cos(n^{\wedge} x) + \quad (19)$$

$$+ (-4y(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2y) \cos(n^{\wedge} y) = 2, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Функція  $g(x, y; \lambda)$  підібрана таким чином, щоб параметр  $\lambda$  був відсутній у правій частині другої крайової умови (19) і при цьому виконувалася перша. З аналізу (16) і (18) випливає, що при значенні параметра  $\lambda = 0$

$$I_{\min}(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; 0) dx dy$$

і при цьому права частина неоднорідного бігармонічного рівняння  $f(x, y) \equiv 64$ ,  $(x, y) \in \Omega$ . В якості початкового наближення функції  $f(x, y)$  можна взяти, наприклад, функцію (18) при різних  $\lambda \neq 0$ . Згідно з ітераційною формулою (15), функціональна послідовність збігається до розв'язку  $f(x, y) = 64$ , а значення функціоналу досягає мінімуму.

**Висновок.** Таким чином, у роботі викладено спосіб розв'язування задачі оптимального керування правою частиною рівняння та схема обчислювального експерименту для практичної перевірки достовірності отриманих результатів. Для цього було використано градієнтний метод, на кожній ітерації якого методом потенціалу розв'язувалася лінійна крайова задача. Результати аналогічних обчислювальних експериментів для оптимізації крайових умов у відповідній задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння дозволяють зробити висновок про ефективність викладеного підходу. Практична програмна реалізація свідчить про можливість застосування цього підходу для визначення оптимальних параметрів конструкцій, елементами яких служать пластини складної форми.

### Бібліографічні посилання

1. **Волошко В.Л.** Зворотна задача для пластини складної форми з гідростатичним навантаженням / В.Л. Волошко, Л.В. Волошко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-космічна техніка. – 2012. – Т. 20. – С. 44–48.
2. **Киселева Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
3. **Ободан Н.І.** Обернені задачі ідентифікації моделей / Н.І. Ободан, Н.А. Гук. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2013. – 47 с.

4. **Сергієнко І.В.** Наукові ідеї В.М. Глушкова та розвиток актуальних напрямів інформатики. – К. : Наук. думка, 2013. – 288 с.
5. **Тимошенко С.П.** Пластинки и оболочки Theory of plates and shells / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : USSR, 2009. – 635 р.
6. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 287 с.
7. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.
8. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко, – М.: Наука, 1978. – 487 с.

Надійшла до редколегії 01.06.2016

УДК 629.764

**А. В. Голубек**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **АНАЛИЗ СБЛИЖЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ С КАТАЛОГИЗИРОВАННЫМИ КОСМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ В ПРОЦЕССЕ ВЫВЕДЕНИЯ НА ОРБИТЫ С НАКЛОНЕНИЕМ 45°**

Получены распределения основных параметров сближения ракеты-носителя с каталогизированными космическими объектами. Определена аналитическая зависимость средней концентрации космических объектов в районе траектории ракеты-носителя от наклона и высоты полёта. Проведена оценка средней вероятности сближения в запуске на предельные расстояния.

*Ключевые слова:* ракета-носитель, каталогизированные космические объекты, совместное движение, вероятность сближения, относительная скорость сближения, относительное расстояние сближения, угол встречи, концентрация космических объектов.

Одержано розподіл основних параметрів зближення ракети-носія із каталогізованими космічними об'єктами. Визначено аналітичну залежність середньої концентрації космічних об'єктів у районі траєкторії ракети-носія від нахилу і висоти польоту. Оцінено середню імовірність зближення в запуску на граничні відстані.

*Ключові слова:* ракета-носіє, каталогізовані космічні об'єкти, сумісний рух, імовірність зближення, відносна швидкість зближення, відносна відстань зближення, кут зустрічі, концентрація космічних об'єктів.

**Distributions of key parameters of approach of the launch vehicle with the catalogued space objects are received. Analytical dependence of average concentration of space objects around a trajectory of the launch vehicle from an inclination and flight altitude is defined. The estimation of average probability of rendezvous in launch on limit distances is carried out.**

*Keywords:* launch vehicle, catalogued space objects, mutual motion, probability of rendezvous, relative velocity of approach, relative distance of approach, angle of meeting, spatial density of space objects.

**Введение.** На основании приведенных в [2; 3] результатов моделирования совместного движения ракеты-носителя (РН), выводящей полезную нагрузку на солнечно-синхронные и экваториальные орбиты можно сделать вывод о том, что космический мусор уже представляет реальную угрозу полётам РН на участке выведения космического аппарата.

При этом характеристики опасных сближений, средняя концентрация космических объектов (КО) в районе траектории РН и вероятность столкновения для рассмотренных значений наклона целевой орбиты разнятся, что говорит о возможном существовании между ними функциональной зависимости.

В данной статье исследованы процессы сближения РН и группировки каталогизированных КО в процессе выведения на орбиты с промежуточным наклоном между экваториальными и солнечно-синхронными орбитами, составляющим  $45^\circ$ .

**Постановка задачи.** Даны:

- основные характеристики РН в составе аэродинамических и массово-инерционных характеристик, характеристик двигательной установки, компоновочной схемы, циклограммы работы системы управления и угловых программ полёта;

- характеристики целевой экваториальной орбиты РН;
- характеристики точки старта РН;
- суточное окно запуска от 00:00:00 21.06.13 до 00:00:00 22.06.13;
- каталогизированная космическая обстановка.

Необходимо для траекторий полёта легкого класса РН на целевые орбиты наклоном  $45^\circ$  и высотой от 500 до 2100 км с точкой старта на экваторе и каталога космической обстановки NORAD от 20.06.13:

- определить распределение основных характеристик опасных сближений;
- определить зависимость средней концентрации КО в районе траекторий полёта РН от высоты полёта;
- исследовать распределение опасных сближений РН с КО в пределах окна запуска;
- оценить среднюю вероятность сближения РН с КО в запуске на критические расстояния (1 м, 10 м, 100 м).

**Основной материал исследований.** Введённые предположения, а также используемая математическая модель совместного движения РН и группировки КО приведены в [3].

В результате проведенного моделирования полёта РН и группировки каталогизированных КО получены полигоны частот относительного расстояния сближения (рис. 1), относительной скорости сближения (рис. 2), орбитоцентрической долготы (рис. 3), орбитоцентрической широты (рис. 4), угла встречи (рис. 5) и момента времени опасного сближения (рис. 6). Статистические характеристики основных параметров опасных сближений приведены в табл. 1.

Как можно видеть из полученных результатов, наибольшее количество опасных сближений наблюдается на скоростях более 9 км/с с углами встречи порядка  $80-130^\circ$ . Размах распределения составляет  $0-14,8$  км/с для относительной скорости и  $0-154^\circ$  для угла встречи. Сближения, в основном, происходят встречно или попутно при движении КО относительно плоскости орбиты РН с углами порядка  $30-90^\circ$  (по модулю), при этом большее количество сближений наблюдается сверху. Распределение опасных сближений по времени запуска РН в пределах рассматриваемого окна (рис. 6) близко к равномерному, но согласно критерию  $\chi^2$  [5] таковым не является.

Таблиця 1

Статистические характеристики параметров опасных сближений

Параметр сближения	Статистическая характеристика	Математическое ожидание	Среднее квадратическое отклонение	Минимальное значение	Максимальное значение
Минимальное относительное расстояние, м		3207	1157	15	5000
Относительная скорость, км/с		10,591	2,787	0,870	14,831
Орбитоцентрическая долгота, °		124,630	99,358	0,011	359,991
Орбитоцентрическая широта, °		13,791	63,153	- 89,956	89,932
Угол встречи, °		95,607	31,736	6,758	153,542

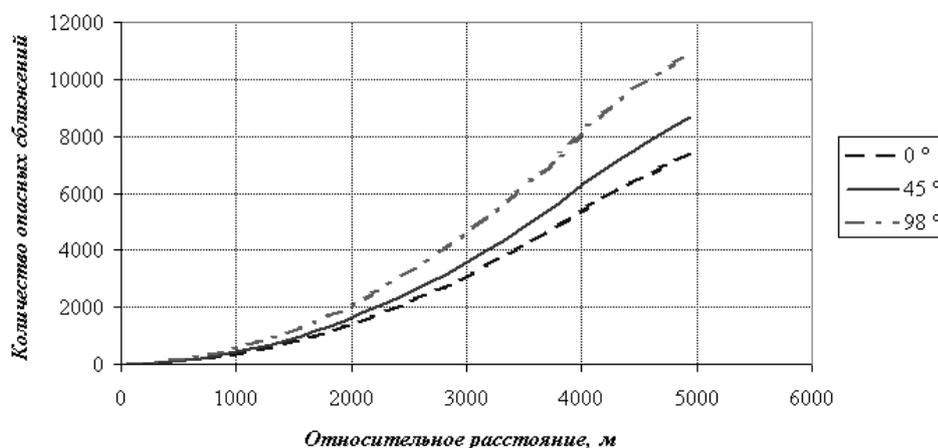


Рис. 1. Полигон частот распределения опасных сближений по относительному расстоянию

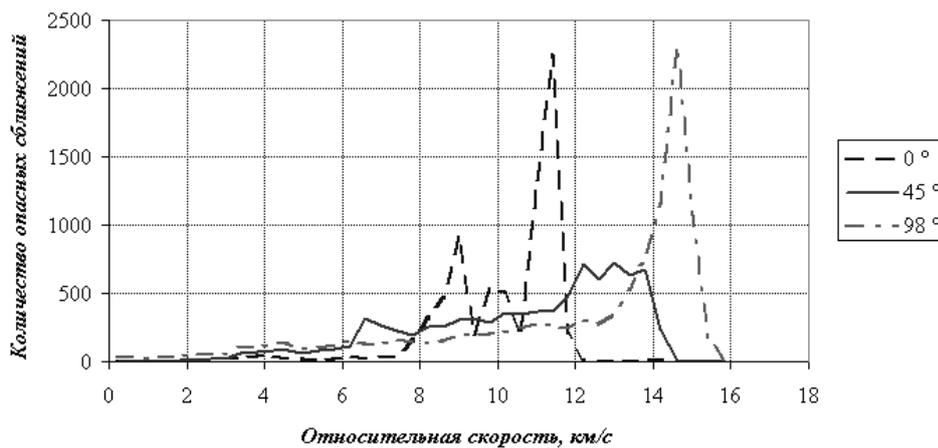


Рис. 2. Полигон частот распределения опасных сближений по относительной скорости

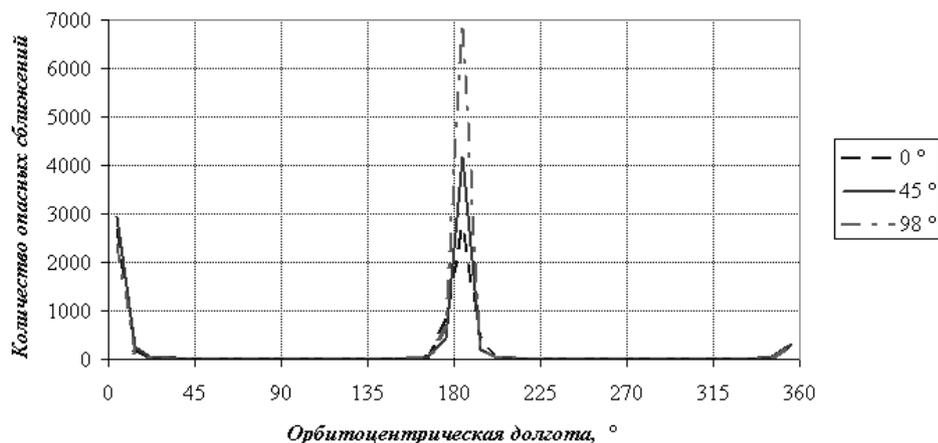


Рис. 3. Полигон частот распределения опасных сближений по орбитальной долготе

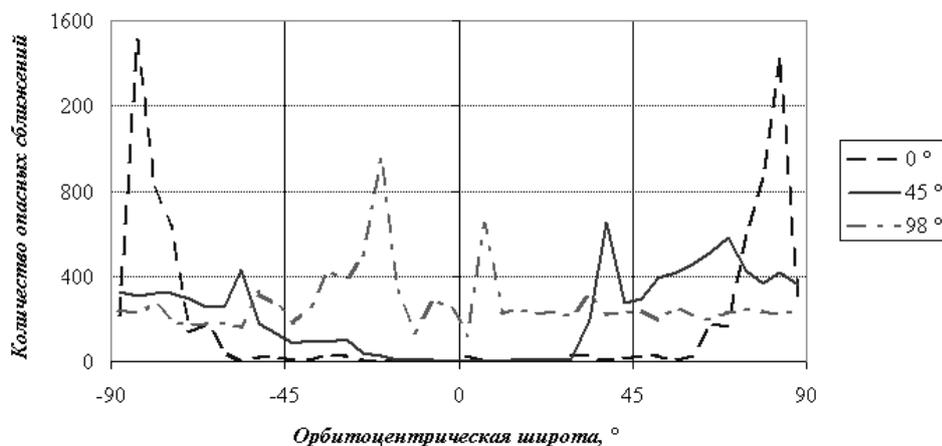


Рис. 4. Полигон частот распределения опасных сближений по орбитальной широте

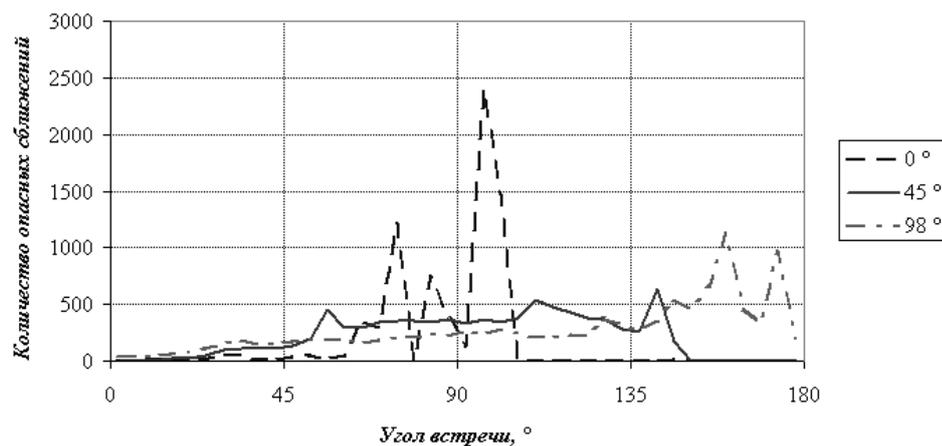


Рис. 5. Полигон частот распределения опасных сближений по углу встречи

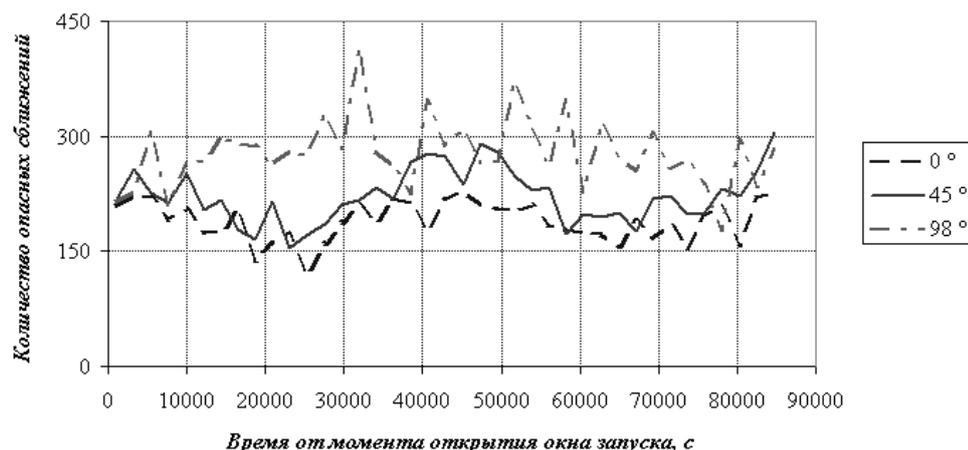


Рис. 6. Полигон частот распределения опасных сближений по времени сближения

Проверим гипотезу о наличии зависимости распределений основных параметров опасных сближений от наклона целевой орбиты РН. Для этого проведём корреляционный анализ параметров распределений, приведенных в табл. 1 и работах [2; 3], результаты которого приведены ниже (табл. 2).

Таблица 2

**Корреляция между параметрами распределений опасных сближений  
и наклоном целевой орбиты РН**

Параметр опасного сближения	Математическое ожидание	Среднее квадратическое отклонение	Размах распределения
Минимальное относительное расстояние, м	- 0,74	- 0,73	0,23
Относительная скорость, км/с	0,98	0,99	1,00
Орбитоцентрическая долгота, °	0,92	- 0,96	0,69
Орбитоцентрическая широта, °	- 0,19	- 1,00	0,67
Угол встречи, °	0,98	1,00	1,00

Из данных табл. 2 следует, что распределения относительной скорости и угла встречи опасных сближений функционально зависят от наклона целевой орбиты РН. Кроме того, отмечается функциональная зависимость математического ожидания и среднего квадратического отклонения орбитоцентрической широты от наклона орбиты при невысокой зависимости размаха распределения от наклона, составляющей 0,67.

Для орбит с наклоном 45°, как и для орбит с наклоном 0° и 98°, наблюдается функциональная зависимость относительной скорости от угла встречи, что косвенно подтверждается данными табл. 2. Зависимость между относительной скоростью и наклоном орбиты опасных КО, а также углом

встречи и наклоном орбиты опасных КО, в отличие от орбит с наклоном 0 ° [2], слабая.

В результате проведенного моделирования получены три опасных сближения на относительное расстояние менее 100 м, параметры которых приведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры сближения РН с КО на расстояние менее 100 м

Минимальное относительное расстояние, м	15	56	84
Относительная скорость, км/с	13,811	11,448	12,687
Угол встречи, °	181,408	192,080	184,472
Орбитоцентрическая широта, °	39,172	- 79,854	65,437
Орбитоцентрическая долгота, °	140,807	99,919	114,484
Высота полёта, км	828	925	651

Рассмотрим зависимость средней концентрации КО от высоты полёта в районе траектории РН (рис. 7). Полученные оценки близки с результатами предыдущих исследований [1; 6; 8–12].

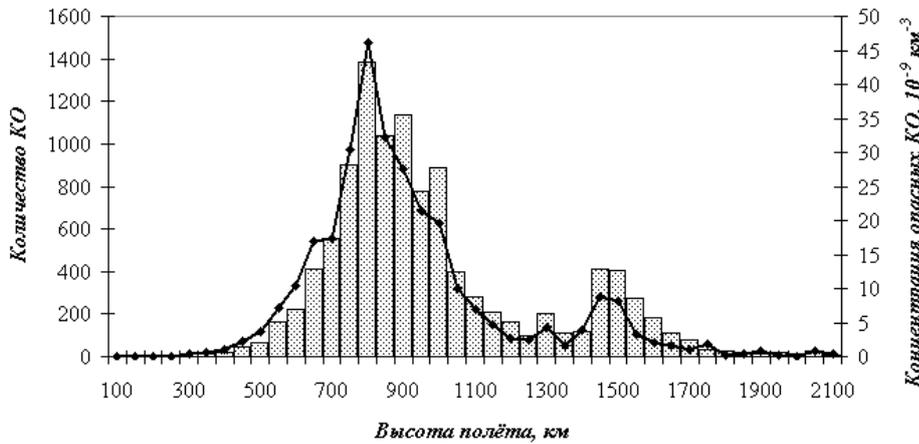


Рис. 7. Гистограмма распределения КО по высоте орбиты и зависимость средней концентрации опасных КО в районе орбиты РН

Согласно [3] средняя концентрация является функцией высотного распределения КО по околоземной орбите:

$$\rho = \frac{n_\rho}{\sqrt{2\pi}} \left[ 839 \exp\left(-\frac{(h-1494)^2}{5832}\right) + 336 \exp\left(-\frac{(h-1195)^2}{326432}\right) + 2796 \exp\left(-\frac{(h-846)^2}{33800}\right) \right],$$

где  $n_\rho$  – весовой коэффициент.

В результате аппроксимации функции (рис. 7) с использованием метода наименьших квадратов [4] получено значение весового коэффициента, равное  $2,89 \cdot 10^{-11} \text{ км}^{-3}$ .

Рассмотрим зависимость весового коэффициента концентрации опасных КО от наклона орбиты (рис. 8).

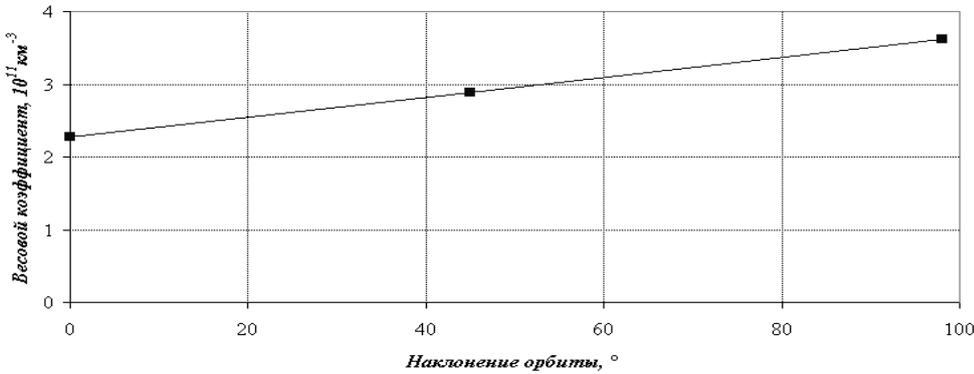


Рис. 8. Зависимость коэффициента концентрации от наклона целевой орбиты

Как можно видеть, зависимость близка к линейной, кроме того, корреляционный анализ показывает наличие функциональной зависимости между этими двумя параметрами (корреляция равна 1,00). Аппроксимируем её линейным уравнением вида:

$$n_{\rho} = 1,38 \cdot 10^{-13} i + 2,27 \cdot 10^{-11}.$$

С учётом полученного выражения средняя концентрация КО ( $\text{км}^{-3}$ ) от высоты полёта (км) и наклона целевой орбиты ( $^{\circ}$ ) будет описываться уравнением:

$$\rho = \frac{1,38 \cdot 10^{-13} i + 2,27 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 839 \exp\left(-\frac{(h-1494)^2}{5832}\right) + 336 \exp\left(-\frac{(h-1195)^2}{326432}\right) + 2796 \exp\left(-\frac{(h-846)^2}{33800}\right) \right].$$

Проведём оценку вероятности опасных сближений в запуске на предельные расстояния 1 м, 10 м и 100 м. Для этого определим параметры распределения относительного расстояния сближения РН с КО в запуске, которое в соответствии с [2] определяется зависимостью:

$$\Delta R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\sigma} \int_0^{\Delta R_{MIN}} \exp\left(-\frac{(R-M)^2}{2\sigma^2}\right) dR,$$

где  $M$  – математическое ожидание;  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение;  $i$  – нормирующий коэффициент;  $\Delta R_{MIN}$  – минимальное относительное расстояние сближения.

Параметры распределения, соответствующие двум характерным точкам 100 м и 4000 м (рис. 1), приведены ниже (табл. 4).

Таблица 4

**Параметры распределения относительного расстояния между РН и КО**

Параметр	Значение
Математическое ожидание, м	9690
Среднее квадратическое отклонение, м	2353
Нормирующий коэффициент, б/р	0,999981

Вероятность сближения на относительные расстояния 1 м, 10 м и 100 м, соответствующая распределению, приведенному в табл. 4, составляет  $3,6 \cdot 10^{-8}$ ,  $3,6 \cdot 10^{-7}$  и  $3,9 \cdot 10^{-6}$  соответственно, что сопоставимо с результатами для солнечно-синхронных орбит [2] и в три раза больше, чем для экваториальных орбит [3].

**Выводы.** В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- сближения РН и КО наблюдаются со скоростями от 0 до 14,8 км/с и углами встречи от  $0^\circ$  до  $154^\circ$ , размах распределений меньше, чем для солнечно-синхронных орбит [2], но больше, чем для экваториальных [3];
- сближения, в основном, происходят в плоскости орбиты РН встречно или попутно, а относительно плоскости орбиты – под углами  $30-90^\circ$  (по модулю);
- корреляция между относительной скоростью сближения и наклоном орбиты опасных КО, а также углом встречи РН с КО и наклоном орбиты опасных КО слабая, что говорит об отсутствии функциональной зависимости между ними;
- показано, что распределения количества опасных сближений по относительной скорости и углу встречи функционально зависят от наклона орбиты РН;
- показано, что средняя концентрация опасных КО в районе орбиты РН зависит не только от высоты полёта, но и от наклона орбиты РН, определена аналитическая зависимость между ними;
- распределение опасных сближений по времени запуска РН близко к равномерному;
- вероятность сближения РН с КО в запуске на расстояние менее 100 м составляет  $3,9 \cdot 10^{-6}$ , что сопоставимо с вероятностью для солнечно-синхронных орбит [2] и превышает в три раза вероятность для экваториальных орбит [3].

**Библиографические ссылки**

1. **Вениаминов С. С.** Космический мусор – угроза человечеству: монография / С. С. Вениаминов. – М. : ИКИ РАН, 2013. – 207 с.
2. **Голубек А. В.** Исследование взаимных сближений ракеты-носителя на активном участке траектории с космическими объектами / А. В. Голубек // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-косм. техніка. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 26–35.

3. **Голубек А. В.** Анализ характеристик сближения ракеты-носителя с космическими объектами в процессе выведения на экваториальные орбиты / А. В. Голубек // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Ракетно-косм. техніка. – 2015. – Т. 23, № 4. – С. 32–41.
4. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений / Б. Ф. Жданюк. – М. : Сов. радио, 1978. – 384 с.
5. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
6. **Назаренко А. И.** Моделирование космического мусора: монография / А. И. Назаренко. – М. : ИКИ РАН, 2013. 216 с.
7. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений / П. Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
8. **Firooz A.** Safety Design For Space Operations / A. Firooz, I. Rongier, P. D. Wilde, T. Sgobba. – Oxford: Elsevier Ltd., 2013. – 1081 p.
9. **Klinkrad H.** Space Debris Models and Risk Analysis / H. Klinkrad. – Chichester: Praxis Publishing Ltd., 2006. – 430 p.
10. **Liou J.-C.** «Stability of the Future LEO Environment»: status review / J.-C. Liou // 28th IADC Meeting. – 8–12 Mar. 2010. – Trivandrum.
11. Current Debris Environment in Low Earth Orbit // Orbital Debris Quarterly News. NASA. – 2009. – June – Vol. 13, iss. 3. – P. 7.
12. **Steel D.** The Orbital Debris Collision Hazard for Proposed Satellite Constellations [Electronic resource] / D. Steel. – Access mode: <http://www.duncansteel.com/archives/1515>. – 30.04.2015. – Title from the screen.

Надійшла до редколегії 28.04.2016

УДК 519.258

**С. В. Клименко, В. Д. Халипова**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАНЖИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ВЫБОРОК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

**Разработаны математические модели ранжирования экспериментальных и теоретических выборок и проведено исследование возможности использования ранжирования измерений в условиях отсутствия знаний о статистических закономерностях в задачах сравнения и обнаружения изменений параметров и их законов распределения вероятностей.**

*Ключевые слова:* измерения, математическая модель, выборка, закон распределения, вероятность.

**Розроблено математичні моделі ранжування експериментальних і теоретичних вибірок і проведено дослідження можливості використання ранжування вимірювань в умовах відсутності знань про статистичні закономірності в задачах порівняння і виявлення змін параметрів і їх законів розподілу ймовірностей.**

*Ключові слова:* вимірювання, математична модель, вибірка, закон розподілу, ймовірність.

**The mathematical models ranging experimental and theoretical sampling and investigated the possibility of using measurements of ranking in the absence of knowledge about the statistical patterns in the problems of comparison and the detection of changes of parameters and their probability distribution laws.**

*Keywords:* measuring, mathematical model, selection, law of distribution, probability.

В процессе разработки и модернизации ракетно-космической техники информация о ее состоянии и качестве при проведении испытаний содержится в выборках экспериментальных измерений с неизвестными как причинно-следственными связями, так и статистическими закономерностями. При исследовании экспериментальных выборок используются различные методы непараметрической статистики сравнения сдвигов, масштабов, коррелированности, стационарности. Сравнение выборок как систем заменяется сравнением их параметров [1].

Известен еще один метод изучения экспериментальных выборок случайных величин путем их ранжирования и исследования их собственных рангов [2]. Любую выборку случайных величин  $x(k)$  можно представить в виде упорядоченной (ранжированной) выборки  $x^*(i)$ . Это тоже случайные величины  $x(k)$ , но заданные в порядке их увеличения

$$x^*(1) < x^*(2) < \dots < x^*(i) < \dots < x^*(n-1) < x^*(n),$$

где  $x^*(1) = x(i/\min)$ , а  $x^*(n) = x(i/\max)$  – минимальная и максимальная случайная величина этой выборки. В табл. 1 представлена выборка случайных величин ( $n = 10$ )  $x(k)$ , ее упорядоченная выборка  $x^*(i)$  и ранги исследуемой выборки  $R(x(k)) = r(k)$ .

Таблица 1

Выборка случайных величин, упорядоченная выборка и ранги исследуемой выборки

$k, i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(k)$	3,1	13,5	19,2	11,7	7,2	15,3	12,1	2,2	8,6	18,1
$x^*(i)$	2,2	3,1	7,2	8,6	11,7	12,1	13,5	15,3	18,1	19,2
$r(k)$	2	7	10	5	3	8	6	1	4	9

Ранги вычисляются по сравнительно простой формуле

$$R^*(x(k)) = r^*(k) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}[x(k) - x^*(i)], \tag{1}$$

где  $\text{sgn}(z)$  – функция единичного скачка, равная единице, если  $z \geq 0$  и равная нулю, если  $z < 0$ .

Любая выборка дискретных или непрерывных случайных величин после преобразования (1) представляется как выборка целых чисел от 1 до  $n$ . Эти числа называются рангами случайных величин  $x(k)$ . В первой выборке случайными являются их числовые показатели  $x(k)$ , их измерения. В выборке рангов  $r(k)$  случайными являются их номера и равно числу их перестановок в упорядоченной выборке. Число вариантов упорядочивания выборки равно размеру выборки. Статистические закономерности описываются функцией распределения, математическую модель которой можно получить из выражения (1). Полагая  $x(k)$  как непрерывную случайную величину, рассмотрим функцию

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sgn}[x(k) - x^*(i)] = F^*(x / |x|) \tag{2}$$

где  $|x|$  – упорядоченная выборка случайных величин  $x^*(i)$ . В выражении (2) справа математическая модель эмпирической функции распределения вероятностей случайной величины  $x$  в интервале  $x_{\min} - x_{\max}$ . Если функция распределения случайных величин известна  $F(x)$ , то из (2) следует, что ранжирование можно моделировать путем преобразования случайных величин по формуле

$$R^*(x) = nF(x). \quad (3)$$

Таким образом, теоретическое значение ранга  $r(k)$  случайной величины  $x(k)$  – это результат преобразования случайной величины  $x$  в случайную величину  $r = nF(x)$  и если известен закон распределения  $W(x)$ , то можно определить закон распределения  $W(r)$ . Полагая ранжирование безинерционным процессом, запишем закон сохранения вероятности

$$W(r)dr = W(x)dx.$$

Если известна функция  $\Psi(r/k)$ , обратная функции  $F(x)$ , то математическая модель закона распределения вероятности рангов  $W(r)$  запишется в виде

$$W(r) = W_x(\Psi(r)) \left| \frac{dx}{dr} \right| = W_x(\Psi(r)) \Psi'(r). \quad (4)$$

Используя (4), можно исследовать статистические закономерности не только собственных рангов, но и рангов случайных величин, преобразованных на других выборках, которые называются опорными. Выборки рангов на опорных выборках содержат данные об однородности или неоднородности исследуемых выборок случайных величин, о влиянии на ранжирование видов их законов распределения вероятностей, параметров и размеров выборок. Математическое моделирование ранжирования позволяет получать априорную информацию о статистических закономерностях экспериментальных рангов путем проведения вычислительных экспериментов и факторного анализа их результатов.

**Математическое моделирование ранжирования выборок случайных величин.** Исследуем законы распределения рангов двух выборок  $x_1(k)$  и  $x_2(k)$  экспоненциальных случайных величин размером  $n_1$  и  $n_2$ , полагая известными их законы и функции распределения

$$W(x_i) = \frac{1}{\lambda_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\lambda_i}\right), \quad F(x_i) = 1 - \exp\left(-\frac{x_i}{\lambda_i}\right), \quad i = 1, 2.$$

По двум выборкам случайных величин можно сформировать две выборки  $r_{11}$  и  $r_{22}$  однородных рангов и две выборки  $r_{12}$  и  $r_{21}$  рангов на опорных выборках. Обратные функции и их производные экспоненциальных случайных величин равны

$$\Psi(r/n) = \lambda \ln\left(\frac{n}{n-r}\right), \quad \frac{d\Psi}{dr} = \Psi'(r) = \frac{\lambda}{n-r}.$$

Полагая опорной выборку  $x_2(k)$ , процесс ранжирования  $x_1(k)$  запишется в виде

$$R_1(x_1) = r_{12} = n_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda_2}\right)\right), \quad \Psi(r_{12}) = \lambda_2 \ln\left(\frac{n_2}{n_2 - r_{12}}\right),$$

$$\frac{d\Psi}{dr_{12}} = \Psi'(r_{12}) = \lambda_2 (n_2 - r_{12})^{-1}.$$

В результате получим

$$W(r_{12}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1(n_2 - r_{12})} \left(\frac{n_2 - r_{12}}{n_2}\right)^{\lambda_1}, \quad W(r_{21}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2(n_1 - r_{21})} \left(\frac{n_1 - r_{21}}{n_1}\right)^{\lambda_2}. \quad (5)$$

Если выборки однородные, то  $\lambda_2 = \lambda_1$  и законы распределения вероятностей рангов равномерные в интервалах от 0 до  $n_1$  и  $n_2$ .

Ранги по опорным выборкам с различными параметрами и законами распределения вероятностей существенно отличаются друг от друга. Отличаются их математические ожидания и дисперсии. В рассматриваемом случае они равны

$$M[r_{12}] = \frac{n_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad M[r_{21}] = \frac{n_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (6)$$

$$D[r_{12}] = \frac{n_2^2 \lambda_2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (2\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad D[r_{21}] = \frac{n_1^2 \lambda_1^2 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (2\lambda_2 + \lambda_1)}. \quad (7)$$

Математические ожидания и дисперсии собственных и опорных экспериментальных рангов равны [3]:

$$M[r_{11}] = 0,5(n + 1), \quad D[r_{11}] = \frac{1}{12}(n^2 + 1),$$

$$M[r_{12}] = 0,5n_2, \quad D[r_{12}] = \frac{1}{12}(n_2^2 + n_2).$$

Ранги взаимно коррелированы и их коэффициент корреляции зависит от размеров выборок и равны для собственных рангов  $\rho = -(n + 1)^{-1}$ , для опорных рангов  $\rho = (n_2 + 2)^{-1}$ .

Законы распределения рангов по опорным выборкам отличаются от равномерных, если исследуемые выборки отличаются только видом своих распределений даже при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях. Например, закон распределения рангов лапласовских случайных величин на опорной выборке случайных величин с логистическим распределением

$$W(x_1) = \frac{2}{\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad F(x_2) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi x_2}{\sqrt{3D}}\right)\right)^{-1}$$

записывается в виде

$$W(r) = \frac{2\sqrt{3D}}{\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{3D}}{\pi\lambda} \left|\ln\left(\frac{n-r}{r}\right)\right|\right). \quad (8)$$

Из анализа (8) следует, что хотя их дисперсии равны ( $D = 2\lambda^2$ ), но закон распределения рангов существенно отличается от равномерного распределения.

Исследованы опорные ранги выборок случайных величин с асимметричными распределениями Релея и экспоненциальным. Их законы распределения записываются в виде

$$W_1(r) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma[n-r]}} \exp\left(-\frac{\lambda^2 \ln^2\left(\frac{n}{n-r}\right)}{2\sigma^2}\right),$$

$$W_2(r) = \frac{\lambda^2 \ln\left(\frac{n}{n-r}\right)}{b^2(n-r)} \exp\left(-\frac{\lambda^2 \ln^2\left(\frac{n}{n-r}\right)}{2b^2}\right). \quad (9)$$

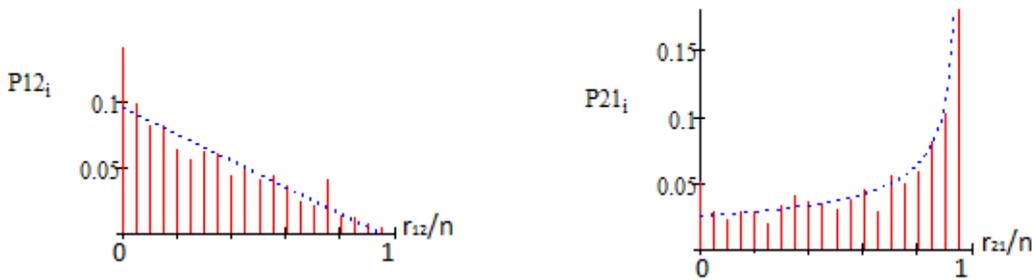
Эти законы распределения отличаются друг от друга, если у них одинаковые или математические ожидания, или дисперсии.

Теоретические модели собственных рангов сравнивались с экспериментальными путем проведения компьютерных вычислительных экспериментов. Экспериментальные  $r_3(k)$  и теоретические  $r_T(k)$  значения рангов

$$r_3(k) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x(k) - x(i)), \quad r_T(k) = nF(x(k)) \quad (10)$$

отличаются друг от друга и при  $n \rightarrow \infty$  ранжирование асимптотически эквивалентно преобразованию (3). Исследовались среднеквадратические значения разностей рангов  $\Delta r(k) = r_T(k) - r_3(k)$  выборок  $x(k)$  различного размера с экспоненциальными законами распределения вероятностей. При  $n = 25$  для собственных рангов их значения равны 0,06 и 0,027 при  $n = 100$ .

Адекватность статистических моделей законов распределения теоретических и экспериментальных рангов исследована путем проведения вычислительных экспериментов. На рис. 1 показаны дискретные гистограммы относительных рангов  $\frac{r}{n}$  и их законы распределения на опорных выборках измерений  $x_1(k)$  и  $x_2(k)$  с экспоненциальным законом распределения ( $\lambda = 1$  и  $\lambda = 2$ ,  $n = 20$ ).



**Рис. 1. Гистограммы рангов экспериментальных измерений**

На рис. 1 видно, что статистические закономерности экспериментальных рангов существенно влияют на параметры опорных выборок исследуемых измерений.

По результатам проведенных исследований можно сделать вывод о возможности использования ранжирования измерений в условиях полного незнания их статистических закономерностей в задачах их сравнения, обнаружения изменений не только параметров, но и законов распределения вероятностей, а также, используя их математические модели, проведен факторный анализ

влияния на выборки рангов тех или иных изменений параметров и статистических закономерностей исследуемых измерений.

### Библиографические ссылки

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных сотрудников / А.И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
2. Гаек Я. Теория ранговых критериев / Я. Гаек, Е. Шидак // Главная редакция физико-математической литературы изд-во «Наука». – М. – 1971. – 376 с.
3. Лапий В.Ю. Устройства ранговой обработки информации / В.Ю. Лапий, А.Я. Калужный, Л.Г. Красный // Техніка. – Киев. – 1986. – 120 с.

Надійшла до редколегії 17.06.2016

УДК 629.78.533.6.013:621.45

Т. А. Коваленко<sup>1</sup>, Ю. Д. Шептун<sup>2</sup>, Н. П. Сироткина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт технической механики Национальной академии наук Украины  
и Государственного космического агентства Украины*

<sup>2</sup> *Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ КОСМИЧЕСКОЙ СТУПЕНИ РАКЕТЫ–НОСИТЕЛЯ ТИПА «ЦИКЛОН-3» ПРИ ИЗМЕНЯЕМОЙ В ПОЛЕТЕ МАССОВОЙ АСИММЕТРИИ

Бифункциональная система управления вектором тяги, основанная на совместном использовании управляющих выхлопных сопел турбины и газодинамической системы управления вектором тяги, позволяет расширить диапазон регулирования вектора тяги двигателя при сохранении качества управления полетом ступени и ее габаритно-массовых характеристик.

*Ключевые слова:* система управления вектором тяги, совместное использование, диапазон регулирования, надежность работы, функциональные возможности.

Біфункціональна система управління вектором тяги, яка основана на сумісному використанні управляючих вихлопних сопел турбіни та газодинамічної системи управління вектором тяги, дозволяє розширити діапазон регулювання вектора тяги двигуна при збереженні якості управління польотом ступені та її габаритно-масових характеристик.

*Ключові слова:* системи управління вектором тяги, сумісне використання, діапазон регулювання, надійність роботи, функціональні можливості.

Bifunctional control system by the vector of traction, based on sharing of managing exhaust nozzles of turbine and gas-dynamic control system allows to extend the range of adjusting of vector of traction of engine the vector of traction at maintenance of management quality by flight of the stage and her overall-mass descriptions.

*Keywords:* control system by the vector of traction, sharing, range of regulation, reliability of work, functional possibilities.

© Т.А. Коваленко, Ю.Д. Шептун, Н.П. Сироткина, 2016

**Вступление.** Особенностью современных и перспективных верхних ступеней ракет-носителей, разгонных блоков и космических буксиров является то, что они должны последовательно выводить на околоземные орбиты в разные точки пространства несколько космических аппаратов разной массы. При этом массово-центровочные характеристики и динамические качества космической ступени как объекта управления могут изменяться в широком диапазоне в течение времени полета. Обозначенные ступени ракеты в большинстве случаев имеют большой диаметр и малую длину.

Такого типа космические ступени как объекты управления характеризуются собственной динамической и структурной неустойчивостью, при этом резко возрастают требования к быстрдействию исполнительных органов системы управления (ИОСУ), к точности величины и времени действия управляющих усилий [1–3]. В подавляющем большинстве основные функции системы управления (СУ) полетом отмеченных объектов (1 – ведение ступени по заданной траектории; 2 – стабилизация параметров полета при действии на ступень случайных и детерминированных возмущающих факторов) выполняет один ИОСУ, который входит в состав двигателя и обеспечивает создание управляющих сил путем регулирования вектора тяги (ВТ) двигателя [1; 3].

При периодически возникающей в полете ступени массовой асимметрии расширяется необходимый диапазон регулирования ВТ, возрастают потери энергии двигателя на управление полетом ступени ракеты, при этом требуются более мощные приводы регуляторов ВТ, усложняется алгоритм и в целом вся система управления движением.

Известные способы регулирования ВТ двигателя становятся неспособными с достаточной надежностью выполнять дополнительные функциональные задачи [3–6]. В результате проектно-поисковых исследований предложено [7–10] совокупное (совместное) использование двух типов систем управления вектором тяги (СУВТ) с рациональным распределением функциональных задач: в настоящей статье они объединены общим названием «бифункциональные системы управления вектором тяги» (БФСУВТ) двигателя.

**Постановка задачи.** Отмеченное выше ставит задачу выбора оптимальных параметров и режимов работы автономных СУВТ, их работы в составе БФСУВТ двигателя как ИОСУ движением ступени; выбора оптимальной совокупности двух типов систем регулирования ВТ двигателя, базирующегося на распределении между ними функциональных задач управления движением ЛА в описанных выше экстремальных (нетипичных) условиях, при котором обеспечивается оптимальное управление ВТ двигателя при решении задач управления и стабилизации полета, а также оптимальное управление ВТ двигателя в обеспечение парирования детерминированных больших возмущающих факторов, обусловленных массовой асимметрией ступени без существенного снижения энергомассовых характеристик ЛА.

На начальном этапе полета ступень ГРН-XXI содержит (рис. 1): блок полезного груза (1) (платформу с последовательно отделяемыми грузами разной массы); приборный отсек (2) системы контроля и управления полетом ступени; блок двигательной установки (ДУ), содержащий конусообразный (3) и торовый (4) топливные баки и однокамерный жидкостной ракетный двигатель (5) с турбонасосным агрегатом (6) подачи топлива в камеру сгорания с турбиной активного типа; выхлопные сопла (7), снабженные газораспределителем с приводом (8), служащие ИОСУ полетом ступени, которые обеспечивают создание

управляющих усилий в плоскостях тангажа и рыскания. Двигатель содержит сверхзвуковое сопло (9) большой степени расширения, нижняя часть которого, с целью обеспечения его работоспособности, соединена сегментами с нижним фланцем торового бака ДУ.

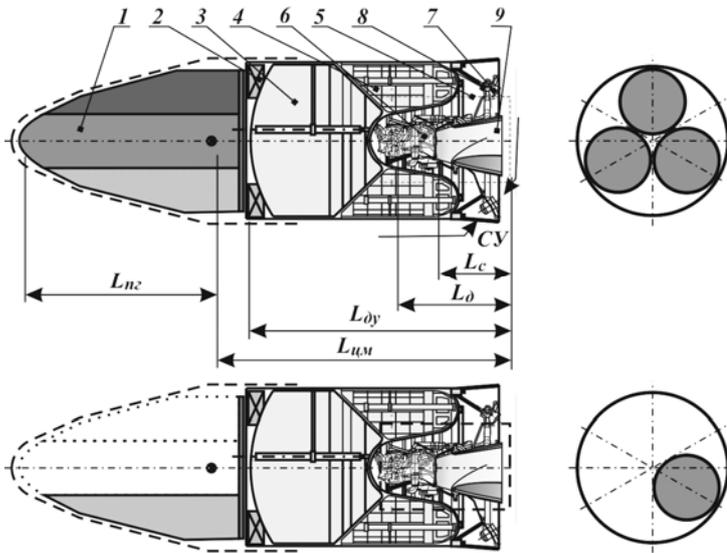


Рис. 1.

В работах [5; 11] применительно к модификации третьей ступени ракеты-носителя «Циклон-4М» рассмотрены совокупности механической СУВТ (МСУВТ), основанной на повороте двигателя в карданном подвесе, совместно с газодинамической СУВТ (ГСУВТ): в работе [5], основанной на впрыске в сопло жидкого окислительного компонента топлива, а в работе [11] для стабилизации ступени используются системы вдува выхлопного турбинного газа в сверхзвуковую часть сопла. Отмечаются высокие динамические качества БФСУВТ и малые затраты энергии на отработку возмущений от массовой асимметрии ступени.

Практический интерес представляют верхние космические ступени ракет с неподвижным маршевым двигателем типа «Циклон-3М», в котором ИОСУ полетом применяют управляющие сопла, работающие на выхлопном газе турбины.

**Методы и способы исследований.** В качестве космической ступени ракеты для дальнейшей разработки БФСУВТ с управляющими выхлопными соплами принята третья ступень некоторой гипотетической ракеты-носителя ГРН-XXI, описанной в работах [2; 4; 5]; конструктивно-компоновочная схема, габаритно-массовые характеристики и назначение которой близки третьей ступени ракеты «Циклон-4М», содержащей ДУ типа применяемой на ракете «Циклон-3». С этим двигателем ступень обозначим ГРН-XXIM.

Как показали результаты расчетных исследований, сообщаемых в [4], эта ступень характеризуется собственной динамической и структурной неустойчивостью, и потому на этапе проектирования исследуется как объект управления в сочетании с альтернативными вариантами ИОСУ полетом ступени.

В процессе полета ступени комплектующие полезного груза (постепенно по заданной программе) отделяются от ступени. Будем считать, что отделение полезного груза происходит при неработающем маршевом двигателе.

При каждом следующем включении маршевого двигателя степень характеризуется измененными массовой асимметрией и осевым смещением центра масс, обусловленными отделением части полезного груза и выработкой компонентов топлива. Таким образом, на управляемый полет ступени на разных участках полета ступени действует разная совокупность случайных и детерминированных возмущающих факторов; случайные составляющие изменяются в узком диапазоне, их изменения обусловлены изменениями координаты центра масс и инерционными характеристиками ступени; детерминированная (от массовой асимметрии) составляющая изменяется в широком диапазоне и может в несколько раз превышать максимальную суммарную от действия случайных факторов.

При парировании таких возмущающих факторов одним исполнительным органом будут возникать большие потери импульса тяги двигателя либо снижение динамических качеств ИОСУ. Процесс стабилизации полета летательного аппарата будет происходить при разных «нулевых» положениях ОИСУ, при этом характеристики их режимов стабилизации могут существенно отличаться от первоначальных. Выполненные исследования [2; 5] показали, что упомянутые потери энергии двигателя и некоторые изменения динамических характеристик режимов стабилизации могут оказаться не только нежелательными, но и неприемлемыми.

**Результаты и их обсуждение.** Ниже приведены результаты исследований по выбору оптимальной совокупности двух известных СУВТ, рассмотрены динамические, энергомассовые и эксплуатационные характеристики известных СУВТ при автономном их использовании и в составе БФСУВТ.

Из обобщения результатов исследований и разработок, сообщаемых в [5; 7; 11], следует, что известные способы и устройства регулирования ВТ ЖРД, основанные на повороте камеры (или двигателя в целом), могут обеспечить широкий диапазон регулирования ВТ двигателя при сохранении высокой экономичности ДУ, однако они имеют низкие и нестабильные динамические характеристики. Следует еще отметить, что при разных эксцентриситетах масс они устанавливаются в другое нулевое положение, следовательно, могут обладать измененными характеристиками для решения задач стабилизации полета. Негативным фактором является то, что они не могут быть надежно отработаны в наземных условиях. Для высокой скорости качания двигателя приводы должны иметь большие запасы мощности и сложные гидравлические системы для их работы, это делает невозможным обеспечение высокой надежности режимов стабилизации полета [3; 4].

Вполне очевидно, что МСУВТ, основанная на качании двигателя, неприемлема при использовании выхлопных управляющих сопел; использование СУВТ, основанной на механическом отключении автономно от камеры двигателя, вполне приемлемо при создании новых ступеней ракет, в котором они решают задачи компенсации возмущений от массовой асимметрии ступени. При этом ухудшаются габаритно-компоновочные характеристики ступени ракеты.

Известные газодинамические способы и системы управления вектором тяги камеры двигателя путем несимметричной инжекции в сверхзвуковую часть сопла компонентов топлива или продуктов их сгорания [3–6] обладают высокими динамическими качествами и габаритно-массовыми характеристиками. Однако для создания больших управляющих усилий требуются большие расходы топлива на вторичную инжекцию и при продолжительном действии возмущающего момента

необходимые запасы топлива на управление становятся недопустимо большими. Исследования модификаций упомянутых типов СУВТ показали, что ни одна из известных не может в полной мере решать упомянутые новые задачи без снижения (в большинстве случаев недопустимого) характеристик ДУ или качества управления полетом ступени. Следовательно, ГСУВТ, основанная на впрыске в сопло компонентов топлива, может быть эффективно использована для решения задач управления и стабилизации движения ступени в полете и мало приемлема (неэкономична) для компенсации детерминированных возмущений от массовой асимметрии ступени; при наличии в двигателе штатной системы выхлопных сопел эта ГСУВТ не конкурентноспособна.

ГСУВТ при использовании крупногабаритных твердых интерцепторов с впрыском через них компонентов топлива может создать большие управляющие усилия кратковременные или продолжительные с приемлемыми энергетическими затратами. Эти ГСУВТ должны решать задачи парирования дискретных больших возмущающих факторов, однако они теряют свои высокие динамические качества.

Известные СУВТ, использующие для управления ВТ выхлопные сопла турбины, обладают высокими динамическими качествами, однако имеют ограниченные возможности по созданию больших управляющих усилий при оптимальном расходе газа на привод турбины. Как показано ниже, при увеличении расхода выхлопного газа до величины, необходимой для парирования детерминированных возмущающих факторов, в частности от массовой асимметрии ступени, резко увеличивается необходимый расход выхлопного газа и потери удельного импульса тяги маршевого двигателя. Следовательно, рассмотренные выше управляющие сопла успешно решают задачу управления и стабилизации движения ступени и неприемлемы для компенсации возмущений от массовой асимметрии ступени.

На основании результатов выполненного анализа для дальнейшей разработки БФСУВТ описанной выше ступени ракеты ГРН-XXIM принимается как оптимальная следующая совокупность СУВТ: МСУВТ – система управляющих реактивных сопел, работающих на выхлопном газе турбины штатной системы подачи топлива в камеру сгорания и ГСУВТ, основанная на выдвигании в сопло твердого интерцептора с впрыском через него компонента топлива.

Выхлопные сопла турбины на многих ЖРД используются для управления ВТ. Применяются системы с качающимися и неподвижными соплами. В системах с качающимися соплами газ из выхлопного коллектора по газовадам направляется к двум парам сопел (оси которых параллельны оси камеры двигателя), управляющих ВТ по тангажу и рысканию; каждое сопло снабжено приводом качания, соединенным с СУ. Системы управления ВТ с неподвижными управляющими соплами (рис. 2) содержат две пары диаметрально противоположно расположенных под некоторым углом к оси параллельной оси камеры двигателя; каждая пара сопел соединена газовадом с газораспределителем, снабженным приводом, соединенным с СУ полетом ступени.

Выбор типа, конструктивно-компоновочной схемы и оптимальных параметров системы управляющих выхлопных сопел является большой комплексной задачей проектирования ступени ракеты, двигателя и системы управления ВТ. Не вдаваясь в детали научно-технической базы по этому кругу задач, для разрабатываемой БФСУВТ принята система неподвижных управляющих выхлопных сопел, применяемая в двигателе третьей ступени РН «Циклон-3».

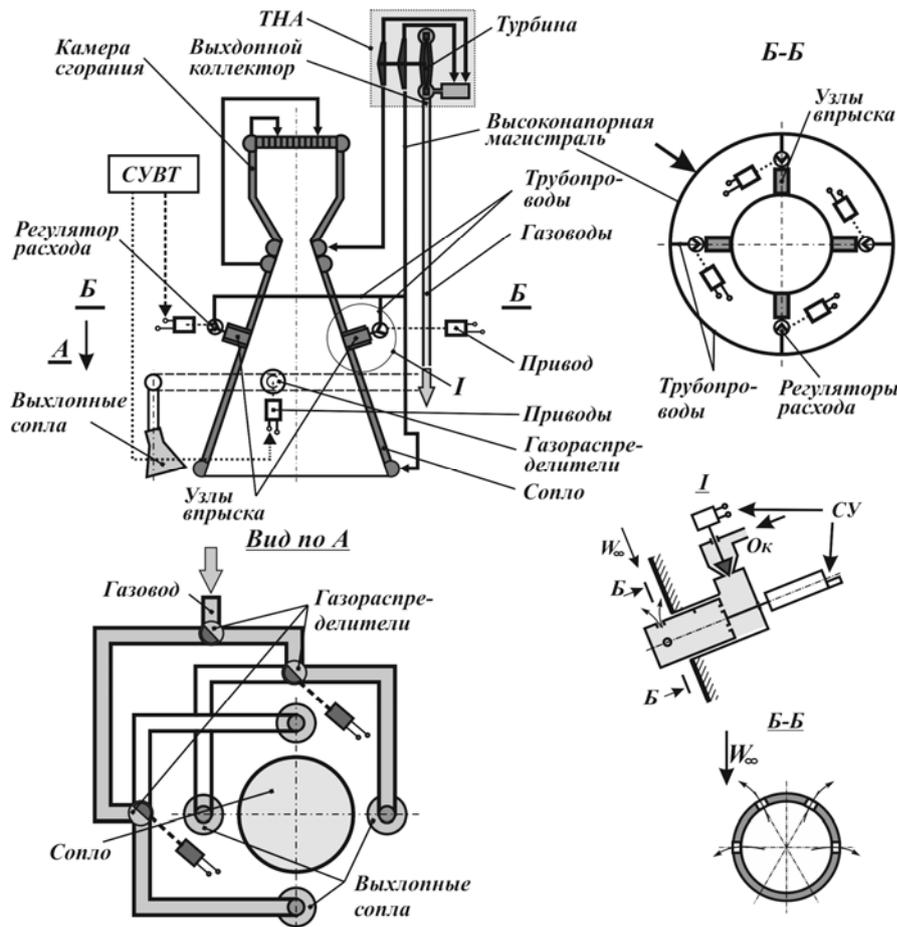


Рис. 2.

Требуемые управляющие усилия создаются расходом выхлопного газа, поступающего из выхлопного коллектора турбины в два газохода, и газораспределителями, каждый из которых снабжен приводом, направляющим газ требуемыми порциями в два диаметрально противоположных сопла в соответствии с командами СУ полетом ступени ракеты.

При одинаковой загрузке каналов тангаж и рыскание максимальный расход газа через каждое управляющее сопло  $\dot{m}_{упрс\max} = 0,5\dot{m}_T$  (одно из двух диаметрально противоположных) равен половине расхода газа турбины  $\dot{m}_0$  и регулируется газораспределителем от максимального значения до нуля; при нулевом положении заслонки газораспределителя  $\varphi_{Гр} = 0^\circ$  выхлопной газ распределяется равномерно во все сопла

$$\dot{m}_{упрс} = f(\varphi_{Гр}) = 0 \div 0,5\dot{m}_T; \quad \dot{m}_{упрс\ тан} + \dot{m}_{упрс\ рыск} = \dot{m}_T.$$

Величина реактивной тяги сопла, создающего управляющее усилие ( $P_{упр}$ ), зависит от расхода газа через сопло  $\dot{m}_{упрс}$ , энергосодержания выхлопного газа,

характеризуемого імпульсом тиску  $I_{р\text{,в.в.хл.газа}}$  , і ефективністю його використання в сопелі, характеризуемою коефіцієнтом тяги сопла  $K_{р\text{,в.в.хл.сопла}}$  ,

$$P_{упр} = \dot{m}_{упр.с} I_{р\text{,в.в.хл.газа}} K_{р\text{,в.в.хл.сопла}} .$$

При установці третього газорозподільця (Гр-ф – газорозподільць форсаж) з приводом в головному газопроводі можна змінити розподілення вихлопного газу між каналами тангажа і рыскання, тем самим можна кратковременно форсировать управляющие усилия в одном из каналов.

Величина витрати газу через турбину залежить від вимогової потужності насосів турбонасосного агрегату ( $N_{н\text{,тгн}}$ ) двигача і досконалства турбіни, характеризуемого удельною потужністю турбіни

$$\dot{m}_T = \dot{m}_{\text{в.в.хл.сопла}} = N_{н\text{,тгн}} / N_{уд\text{,т}} .$$

Один из наиболее совершенных двигателей современности РД861К [1; 5] содержит высокоэкономичную газовую турбину (двухвенечный ротор, профилированные газовые каналы), удельная мощность которой  $N_{уд} = 641,8$  л/с.

При давлении в камере сгорания  $P_K = 90,5$  кгс/см<sup>2</sup> и тяге двигателя  $P_{дв} = 7916$  кгс расход высокоэкономичного генераторного газа для привода турбины составил  $\dot{m}_T = 0,798$  кг/с , отнесенный к расходу в камеру сгорания  $\dot{m}_T / \dot{m}_K = \bar{m}_T = 0,034$ .

Для рассматриваемой ступени ракеты (типа «Циклон-3») и применяемого двигателя максимальное управляющее усилие при первом включении двигателя составляет  $P_{упр} = 0,02 P_{дв}$  . При тяге двигателя  $P = 8000$  кгс имеем  $P_{упр} = 160$  кгс, расход газа  $\dot{m}_T$  через однодисковую турбину, отнесенный к расходу камеры  $\dot{m}_K$  , составляет  $\dot{m}_T / \dot{m}_K = 0,092$  . При этом потери удельного импульса тяги двигателя  $\Delta \bar{P}_{уд} = 0,05$  , определяемые по формуле

$$\begin{aligned} \Delta \bar{P}_{удк} &= P_{уд} - \frac{P_K + P_{в.с}}{\dot{m}_K + \dot{m}_{сo}} = P_{удк} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{P_{уд.в.с}}{P_{уд.к}} \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_K}}{1 + \frac{\dot{m}_{в.с}}{\dot{m}_K}} \right] = P_{удк} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{P_{уд.р}}{P_{уд.к}} \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_K} \right) \left( 1 + \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_K} \right)^{-1} \right] = \\ &= P_{удк} \left[ 1 - \left( 1 + 0,5 \bar{m}_T \right) \left( 1 + \bar{m}_T \right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

и отнесенные к удельной тяге камеры сгорания, составляют  $\Delta P_{уд.в.хл} = \Delta P_{уд.в.хл} / P_{уд.к} = 0,034$  .

Оптимальный (по энергомассовому критерию для турбины) расход на турбину  $\bar{m}_T = 0,094$  вполне достаточный для режимов стабилизации ступени ракеты в полете.

Повышение максимальных управляющих усилий до уровня, необходимого для парирования детерминированных возмущений, требует практически пропорционального повышения расхода турбинного газа, что влечет за собой недопустимое снижение удельного импульса тяги двигателя.

В рабочем диапазоне угла поворота заслонки газораспределителя  $\varphi_{згр}$ , характеризуемого углом поворота вала привода, зависимости управляющего усилия  $P_{упр}$  и момента сил  $M_{упр}$  на плече от среза сопла до центра масс  $X_{ц.м.}$  можно считать линейными, зоны нечувствительности пренебрежительно малы.

$$M_{упр}^{ср}(\varphi_{згр}) = P_{упр} X_{ц.м.}^{ср} = P_{удвд} \dot{m}_{вд}(\varphi_{згр}) X_{вд}^{ср},$$

$$M_{упр}^{мех} = \frac{P_{упр}(\delta_{отк}) X_{упр}^{мех}}{I_{инер}}, \delta_{отк} = f(\varphi_{мех}).$$

Физические основы формирования больших управляющих усилий в ГСУВТ состоят в том, что в сверхзвуковой поток вводится прерыватель (возмутитель) потока (твердый или струйный интерцептор цилиндрической или другой формы), в результате чего в сверхзвуковом потоке формируются скачки уплотнения и возникает неуравновешенная сила  $P_{упр}$ , которую представляют в виде двух составляющих: боковой  $P_{упрz}$ , перпендикулярной продольной оси камеры двигателя, и осевой  $P_{упрx}$ , параллельной продольной оси камеры (рис. 3), смещенной от оси сопла на половину диаметра сопла в месте выдвижения интерцептора.

Области возмущенного давления ограничиваются криволинейной ударной волной 1 (скачок уплотнения), которая пересекается с поверхностью сопла по кривой, близкой к параболе (рис. 3а). Возмущения давления  $\bar{p}' = (p - p_{\infty})/p_{\infty}$ , где  $p$  и  $p_{\infty}$  – давления в возмущенном и невозмущенном потоке на обтекаемой поверхности, весьма неравномерны как вдоль поверхности сопла (рис. 3 б), так и в поперечных сечениях (рис. 3в).

Управляющие усилия по оси  $Z$  и  $X$  определяются как интеграл возмущенного давления по всей поверхности сопла

$$p_{упрz}^{\Gamma} = \iint_S \bar{p}' p_{\infty} dz dx, \quad p_{упрx}^{\Gamma} = \iint_S \bar{p}' p_{\infty} dy dx.$$

На рис. 3 изображены управляющие силы, создаваемые в сопле камеры РД газодинамической СУВТ и приняты следующие обозначения: а) – возмущения давления вдоль оси сопла; б) – эпюра элементарных боковых сил вдоль оси сопла; в) – возмущения давления в поперечных сечениях сопла; 1 – скачок уплотнения; 2 – граница области возмущенного давления; ЦМ – центр масс ЛА;  $L_{цм}^P$  – расстояние линии действия бокового усилия и смещения осевых сил впрыска от центра масс изделия;  $\bar{p}'$  – возмущения давления;  $P_{упрx}^{\Gamma}$  – осевая неуравновешенная сила параллельная продольной оси камеры;  $P_{упрz}^{\Gamma}$  – боковая неуравновешенная сила перпендикулярная продольной оси камеры двигателя;  $P_{zi}^{\Gamma}$  – элементарные боковые силы вдоль сопла в плоскости симметрии возмущенной зоны.

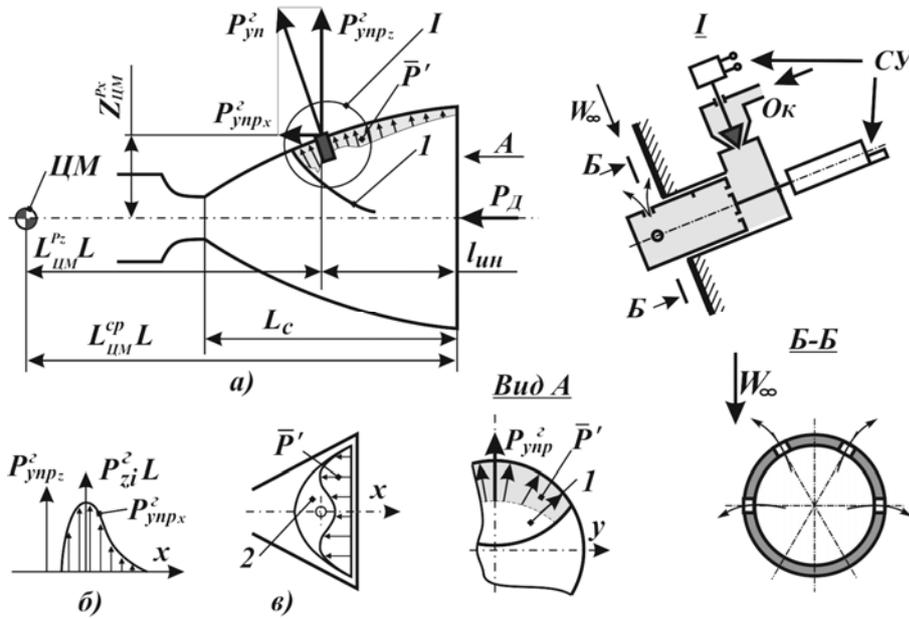


Рис. 3

Координаты точки приложения боковых и осевых сил определяются интегрированием элементарных боковых сил вдоль оси сопла по координатам  $X$  и  $Z$ , заданным уравнением  $y = f(x, z)$

$$X_{P_{упр\ x}} = \frac{\int_0^{xz} \int_0^{xz} x_i z_i \bar{p}' p_{\infty} dx dz}{\int_0^{xz} \int_0^{xz} \bar{p}' p_{\infty} dx dz}.$$

Эпюра элементарных сил вдоль оси сопла имеет крутой максимум в районе инжектора и в первом приближении, достаточном для проектных расчетов в задачах по управлению ЛА, линию действия управляющего усилия можно принять проходящей через точку, где выдвигается инжектор.

К рассматриваемому летательному аппарату (большой мидель и малая длина) при газодинамическом регулировании ВТ управляющий момент формируется указанными боковыми и осевыми силами, согласно рис. 3 а, имеем

$$M_{упр}^{\Gamma} = P_{упр\ z}^{\Gamma} L_{ц.м}^x + P_{упр\ x}^{\Gamma} L_{ц.м}^z.$$

Для практических расчетов удобно пользоваться равнодействующей боковых и осевых сил, расположив ее в плоскости среза сопла

$$P_{упр}^z = P_{упр}^{\Gamma} \left[ 1 - \frac{X_{P_x}}{L_{ц.м}^x} + \frac{P_{упр\ x}^{\Gamma}}{P_{упр\ z}^{\Gamma}} \cdot \frac{Z_{ц.м}^x}{L_{ц.м}^z} \right].$$

Для практических задач по управляемости полетом ступени ракеты координаты линии действия управляющего усилия удобно представить в зависимости от формулярных габаритных параметров двигателя

$$X_{P_z} = 0,8 \bar{l}_{вп} L_c; \quad Z_{P_x} = 0,5 (D_{вс} - \bar{l}_{вп} L_c \text{tg} \theta_{вс}),$$

где  $L_c$  – длина сверхзвуковой части сопла;  $D_{вс}$ ,  $\theta_{вс}$  – диаметр и угол конусности в выходном сечении сопла;  $\bar{l}_{вп} = l_{вп} / L_c$  – относительное расстояние отверстий

впрыска от выходного сечения сопла;  $l_{\text{вп}}$  – расстояние отверстий впрыска от выходного сечения сопла.

Величина боковых и осевых сил при введении в сверхзвуковой поток твердого интерцептора в наибольшей мере зависит от степени загромождения поперечного сечения сопла твердым интерцептором. В первом приближении на основании обобщения экспериментальных данных эти зависимости можно принять линейными и аппроксимировать уравнениями вида

$$\bar{P}_{\text{уин}} = P_{\text{уин}} / P_{\text{кдв}} = K_{\text{ин}} \bar{F}_{\text{ин}} = K_{\text{ин}} F_{\text{ин}} / F_{\text{с}}, \quad P_{\text{х}} = 0,22P_{\text{у}},$$

где  $K_{\text{ин}}$  – экспериментально полученный коэффициент, который находится в диапазоне от 0,9 до 0,95 и зависит от формы интерцептора и места установки его по длине сопла;  $\bar{F}_{\text{ин}}$  – степень загромождения интерцептором поперечного сечения сопла камеры;  $F_{\text{ин}}$ ,  $F_{\text{с}}$  – соответственно площадь поперечного сечения интерцептора и площадь поперечного сечения сопла в месте ввода интерцептора.

Для обеспечения работоспособности интерцептора создается тепловая защита его рабочих поверхностей. В рабочем его положении (выдвинут в сверхзвуковой поток) производится впрыск через него жидкого компонента через струйные форсунки, выполненные в теле интерцептора под некоторым углом навстречу набегающему потоку, таким образом, чтобы распыленная жидкость омывала боковые и торцевые рабочие части поверхности. В закрытом (нерабочем) состоянии интерцептор утоплен заподлицо с обтекаемой поверхностью сопла в свой корпус, выполненный на наружной поверхности сопла; в этом положении по каналам интерцептора подается в сопло некоторый расход компонента топлива, который в режиме испарения защищает торцевую поверхность рабочей части интерцептора от перегрева.

Интерцептор может быть выполнен двухпозиционным или плавно выдвигаемым в сверхзвуковой поток на требуемую глубину, для этих целей интерцептор снабжен соответствующим приводом, соединенным с системой управления полетом ступени.

Впрыскиваемая через интерцептор жидкость создает некоторую добавку осевой тяги (величина которой мала и ею можно пренебречь) и некоторую боковую силу, которую следует учитывать как составную часть управляющего усилия.

Величина боковых и осевых управляющих усилий, создаваемых твердым интерцептором и впрыскиваемой жидкостью, определяется суперпозицией интерцепторной и «жидкостной» составляющей. Первая – является следствием взаимодействия сверхзвукового потока с выдвигаемым над поверхностью сопла твердым интерцептором, вторая – вызвана дополнительным возмущением сверхзвукового потока впрыскиваемой жидкостью, которая по мере испарения и сгорания в потоке соплового газа создает дополнительную преграду на пути основного потока сопла.

Схема габаритной интерцепторной ГСУВТ показана на рис. 2.

Для рассматриваемой в этой статье БФСУВТ высокие требования по динамическим характеристикам ГСУВТ не предъявляются, приоритетными требованиями следует считать обеспечение минимального расхода топлива на управление ВТ. В этих условиях основной вклад в создание боковых и осевых управляющих усилий вносится твердым интерцептором, жидкий компонент топлива подается в сопло для тепловой защиты интерцептора.

Для разрабатываемой в этой СУВТ системы газодинамического парирования возмущений от ступенчатого изменения массовой асимметрии может быть использовано ступенчатое и плавное регулирование ВТ. При ступенчатом регулировании ВТ приводы и система управления будут проще, однако такая ГСУВТ обладает меньшими функциональными возможностями и ориентирована на раздельное управление.

Для повышения эффективности управления через интерцептор в сопло впрыскивают окислительный компонент навстречу набегающему потоку и в боковые стороны над обтекаемой выхлопным газом поверхностью сопла. Для этого в лобовой и боковых стенках интерцептора на той рабочей части, что вводится в сверхзвуковой поток, изготовлены струйные форсунки, объединенные внутренними каналами и соединенные с полостью узла впрыска.

**Выводы.** Разработана БФСУВТ маршевого ЖРД верхних ступеней ракет-носителей типа «Циклон-3М», позволяющая в несколько раз расширить диапазон регулирования ВТ двигателя при сохранении высоких статических и динамических характеристик ИОСУ полетом ЛА, расширить область устойчивости режимов стабилизации полета, повысить надежность работы и уменьшить энергозатраты на управление полетом ЛА. Предложен ряд схемных и конструктивных решений по рациональной реализации системы, рекомендации по оптимальному функционированию, выбору режимов работы отдельных составляющих системы.

Механическая и газодинамическая СУВТ могут функционировать автономно и могут быть объединены механически или электрически для совместной работы.

### Библиографические ссылки

1. Шестьдесят лет в ракетостроении и космонавтике / под общ. ред. А. В. Дегтярева. – Днепропетровск : Арт-пресс, 2014. – 540 с.
2. **Коваленко Т.А.** Космические ступени как объект управления / Т. А. Коваленко, Ю.Д. Шептун // Информационные технологии в управлении сложными системами: сб. докл. науч. конф. – Днепропетровск : Изд-во «Свидтер А.Л.», 2011. – С. 210 – 213.
3. Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и их космических ступеней / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. С. Н. Конюхова. – Днепропетровск : Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2010. – 254 с.
4. **Шептун Ю.Д.** Управление ступенью ракеты с массовой асимметрией / Ю.Д. Шептун, Н.Д. Коваленко, Т.А. Коваленко // Космические технологии: настоящее и будущее: матер. Междунар. науч. конфер., 19 – 21 мая 2015 г., Днепропетровск.. – Днепропетровск, 2015. – С. 57–60.
5. **Коваленко Т.А.** Бифункциональная система управления вектором тяги космической ступени ракеты-носителя / Т.А. Коваленко, Н.Д. Коваленко, Н. П. Сироткина // Техническая механика. – 2015. – № 1. – С. 42–54.
6. **Коваленко Н.Д.** Ракетный двигатель как исполнительный орган системы управления полетом ракет / Н. Д. Коваленко. – Днепропетровск : ИТМ НАН и НКА Украины, 2003. – 412 с.
7. Патент на винахід 103528 Україна, МПК F02K 9/00. Спосіб регулювання вектора тяги рідинного ракетного двигуна та рідинний ракетний двигун для його здійснення / Коваленко М.Д., Шептун Ю.Д., Стрельников Г.О., Коваленко Т.О., Сироткіна Н.П.; заявник і патентоволодар ІТМ НАНУ і НКАУ. – а 2011 14384; заявл. 05.12.2011; опубл. 25.10.2013, Бюл. № 20. – 11 с.
8. Патент на винахід 105214 Україна, МПК F02K 9/56, F02K 9/82. Спосіб регулювання вектора тяги рідинного ракетного двигуна та рідинний ракетний двигун для його здійснення / Коваленко М.Д., Шептун Ю.Д., Коваленко Т.О., Сироткіна Н.П.;

- заявник і патентоволодар ІТМ НАНУ і НКАУ. – а 2011 12467; заявл. 24.10.2011; опубл. 25.04.2014, Бюл. № 8. – 10 с.
9. Патент на винахід 107270 Україна, МПК F02K 9/00. Спосіб керування вектором тяги рідинного ракетного двигуна з турбонасосним агрегатом подачі компонентів палива в камеру згоряння та рідинний ракетний двигун з його застосуванням / Коваленко М.Д., Стрельников Г.О., Шептун Ю.Д., Коваленко Г.М., Коваленко Т.О., Сироткіна Н.П.; заявник і патентоволодар ІТМ НАНУ і ДКАУ. – а 2013 06211; заявл. 20.05.2013; опубл. 10.12.2014, Бюл. № 23. – 11 с.
10. Патент на винахід 108677 Україна, МПК F02K 9/00. Спосіб керування вектором тяги рідинного ракетного двигуна та рідинний ракетний двигун з його застосуванням / Коваленко М.Д., Стрельников Г.О., Шептун Ю.Д., Коваленко Г.М., Коваленко Т.О., Сироткіна Н.П.; заявник і патентоволодар ІТМ НАНУ і ДКАУ. – а 2013 08511; заявл. 08.07.2013; опубл. 25.05.15, Бюл. № 10. – 9 с.
11. **Коваленко Т. А.** Управление вектором тяги ЖРД космической ступени ракеты-носителя при возникновении массовой асимметрии / Т.А. Коваленко, Г.Н. Коваленко, Н.П. Сироткина // Техническая механика. – 2016. – № 1. – С. 51–59.
12. Особенности отработки системы управления вектора тяги высотных ЖРД / Н.Д. Коваленко, Г.А. Стрельников, Ю.Д. Шептун, Г.Н. Коваленко, А.Д. Игнатьев // Вестник ДНУ. Ракетно-космическая техника. – 2008. – № 14/1. – С. 49–63.
13. **Шептун Ю. Д.** Сравнение органов управления космической ступени носителя / Ю. Д. Шептун // Вестник ДНУ. Ракетно-космическая техника. – 2011. – № 14/1. – С. 64–71.
14. **Шептун Ю. Д.** Релейное управление космической ступенью ракеты-носителя / Ю. Д. Шептун, Н. Д. Коваленко, Т. А. Коваленко // Вестник ДНУ. Ракетно-космическая техника. – 2015. – № 1. – С. 41–46.

Надійшла до редколегії 19.04.2016

УДК 629.78

**П. В. Кустов, А. М. Кулабухов, В. А. Масальский, А. В. Тищенко**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **АВТОМАТИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ И ПРИЕМА СПУТНИКОВОЙ ИНФОРМАЦИИ**

**Предложен способ автоматического дистанционного управления наземной станцией приема информации со спутников дистанционного зондирования Земли.**

*Ключевые слова:* спутниковая связь, наземный комплекс, автоматизация приема.

**Запропоновано спосіб автоматичного дистанційного керування наземною станцією прийому інформації зі супутників дистанційного зондування Землі.**

*Ключові слова:* супутниковий зв'язок, наземний комплекс, автоматизація прийому.

**A method of ground station automatic remote control is proposed for receiving information from remote sensing satellites.**

*Keywords:* satellite communications, ground station, receiver automation.

**Введение.** Для всех спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) необходимо планировать сеансы съемки, а также прием информации в моменты нахождения спутника в зоне видимости наземной станции.

Спутники ДЗЗ, как правило, находятся на низкоорбитальных, солнечно-синхронных орбитах для того, чтобы проводить съемку одних и тех же участков приблизительно при одной и той же освещенности и максимально получать энергетику для космического аппарата (КА) [2].

Существенным недостатком данных орбит является малая длительность сеансов связи. Максимальное время сеанса связи для приема информации составляет 16 минут и не превышает 4 сеансов связи в сутки для наземной станции, расположенной в Днепропетровске. Общая продолжительность сеансов связи в сутки составляет около 30 минут. При этом спутник может находиться в зоне видимости наземной станции в любое время суток.

Так как требование к качеству снимков с каждым годом растет, увеличивается и общий объем информации, необходимый для передачи. Чтобы увеличить общее время связи со спутником, арендуют наземные станции, находящиеся в приполярных широтах. Общее количество сеансов связи с наземной станцией в приполярных широтах для спутников, находящихся на солнечно-синхронных орбитах, достигает 12 сеансов в сутки и время приема информации составляет порядка 1,5 часа. Один из вариантов решения данной проблемы – аренда наземных станций приема на Шпицбергене, что является достаточно дорогой услугой [1].

В Днепропетровском национальном университете в корпусе физико-технического факультета установлена по программе TEMPUS наземная станция приема информации со спутников.

**Постановка задачи.** Для доступа к станции приема информации в любое время суток предлагается автоматизировать процесс приема информации со спутников без участия оператора, а управление станцией осуществлять через Интернет.

**Решение.** Рассмотрим задачу автоматизации процесса приема со спутников группировки NOAA с ограниченным доступом персонала и возможностью удаленного доступа к наземной станции через Интернет.

Прием информации осуществляется со следующими характеристиками: частота 137 МГц, максимальная скоростью приема 9,6 кбит/с, оборудование: трансивер Icom IC-910H, предусилитель входного сигнала AG-25, антенна Wimo X-quard, азимутально-угломестное поворотное устройство Yaesu G-5500, контроллер управления EA4XT.

Для решения задачи предлагается структурная схема общего комплекса автоматического приема информации, которая изображена на рис. 1. На данной схеме изображено удаленное операторское место (далее – клиент) и серверы наземных станций приема, управление которыми осуществляется через Интернет.

Для расчета времени сеансов связи и длительности каждого сеанса используется международный стандарт для определения положения космических объектов, разработанный для спутниковой группировки NORAD – «Two-line element set», или «Двухстрочный набор элементов».

Этот стандарт содержит в себе следующие данные для расчета орбиты: номер строки, номер спутника в базе данных NORAD, наклонение в градусах, долгота восходящего узла в градусах, эксцентриситет, аргумент перигея в градусах, средняя аномалия в градусах, частота обращения в день, номер витка на момент эпохи, контрольная сумма по модулю 10.

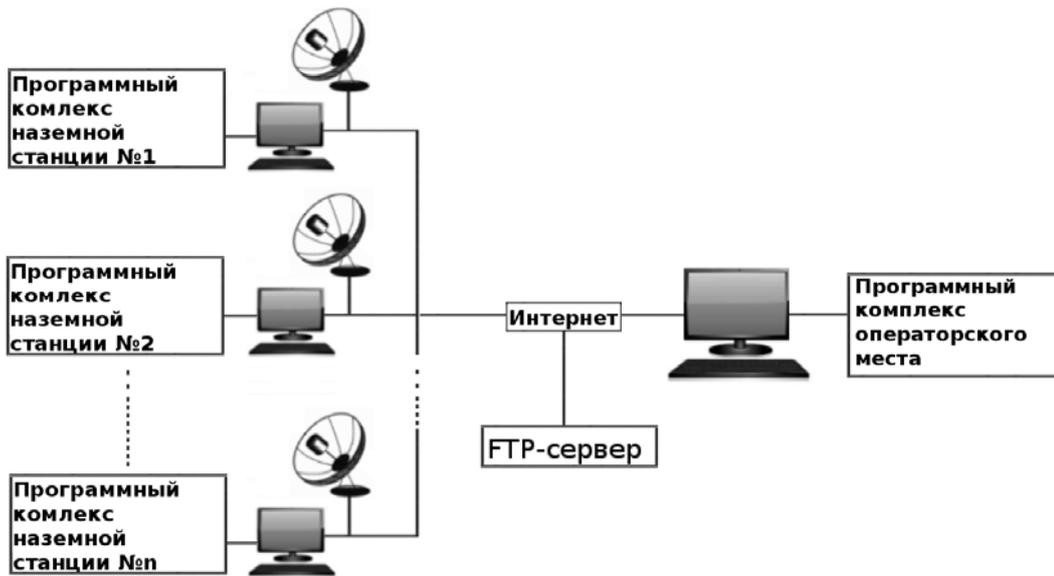


Рис. 1. Структурная схема удаленного управления наземными станциями приема информации

Структура исходных данных для спутника NOAA 18 [3]:

```
1 28654U 05018A 16131.93921184 .00000049 00000-0 52153-4 0 9991
2 28654 99.1977 137.9018 0015307 117.6216 242.651 14.12283255565389.
```

**Результаты.** Программный комплекс оператора планирует сеансы связи и управление поворотным устройством антенны для приёма данных со спутников на клиенте и осуществляет его на сервере (наземной станции).

Этапы работы разработанного программного комплекса оператора:

- 1) Запуск программы;
- 2) Обновление файлов TLE;
- 3) Выбор спутников, с которых будет осуществляться приём данных;
- 4) Задание промежутка времени, в пределах которого будет проведён расчёт сеансов связи для каждой наземной станции;
- 5) Расчёт сеансов связи, включая данные о спутниках (положение, частота приёма с учётом эффекта Доплера) для каждой секунды;
- 6) Выбор нужных сеансов связи;
- 7) Задание параметров формирования плана связи (шаг по частоте, азимуту и углу места);
- 8) Создание файлов плана связи;
- 9) Отправка плана на сервер.

Этапы работы разработанного программного комплекса для сервера:

- 1) Обнаружение плана связи;
- 2) Обработка плана;
- 3) Направление поворотного устройства антенны по заранее рассчитанному направлению на место появления спутника;

- 4) Сопровождение спутника путём управления частотой радиостанции с точностью 100 Гц и положением поворотного устройства антенны с точностью в 1 градус;
- 5) Построчное декодирование сигнала в изображение и запись его в формате jpg;
- 6) Автоматическая загрузка изображений через Интернет на удаленный FTP-сервер.

Примеры графиков изменения азимута, угла места и частоты приёма данных для одной сессии приёма информации со спутника NOAA 18 изображены на рис. 2–4.

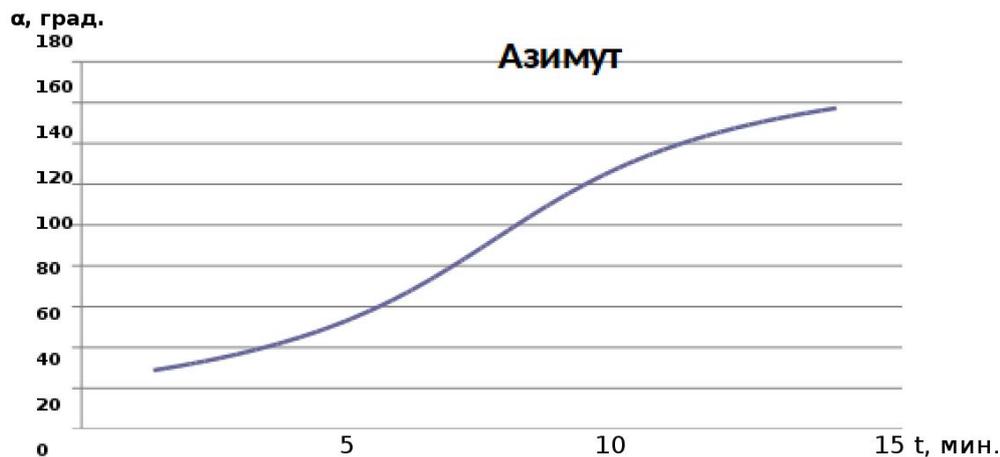


Рис. 2. Изменение азимута во времени за один сеанс связи

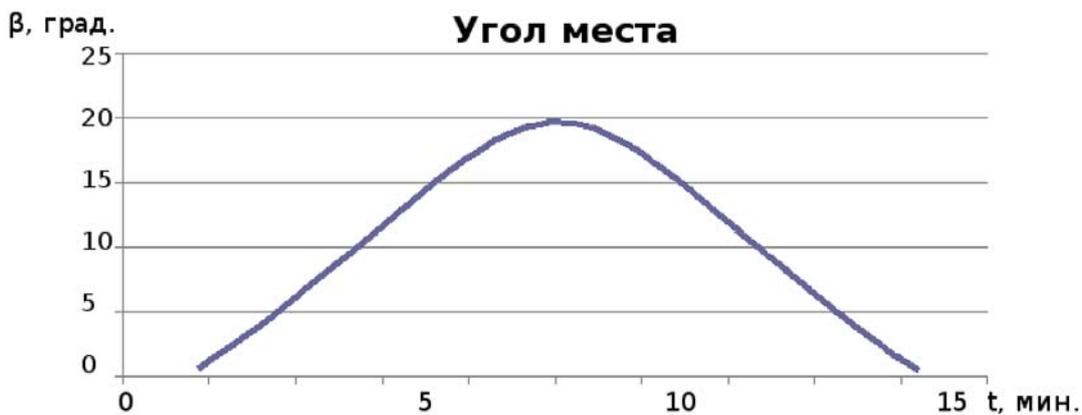


Рис. 3. Изменение угла места во времени за один сеанс связи

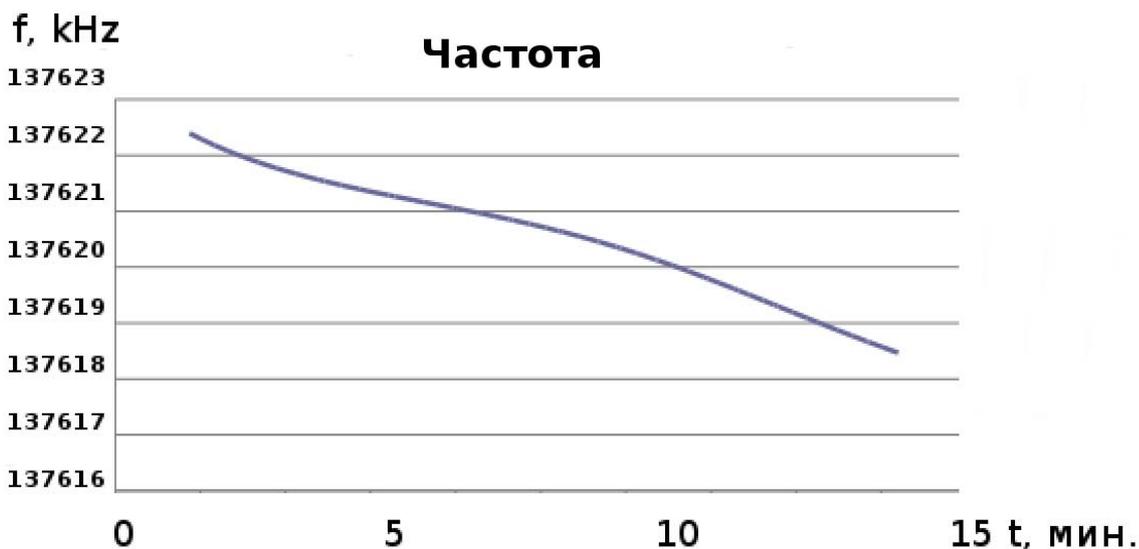


Рис. 4. Изменение частоты во времени за один сеанс связи

Автоматическое управление наземным комплексом дает следующие преимущества:

- 1) возможность использования наземного комплекса круглосуточно;
- 2) отсутствие персонала, что актуально для вузов и других бюджетных организаций;
- 3) управление наземным комплексом удаленно, через Интернет.

Снимок, принятый в автоматическом режиме со спутника NOAA 18, изображен на рис. 5.

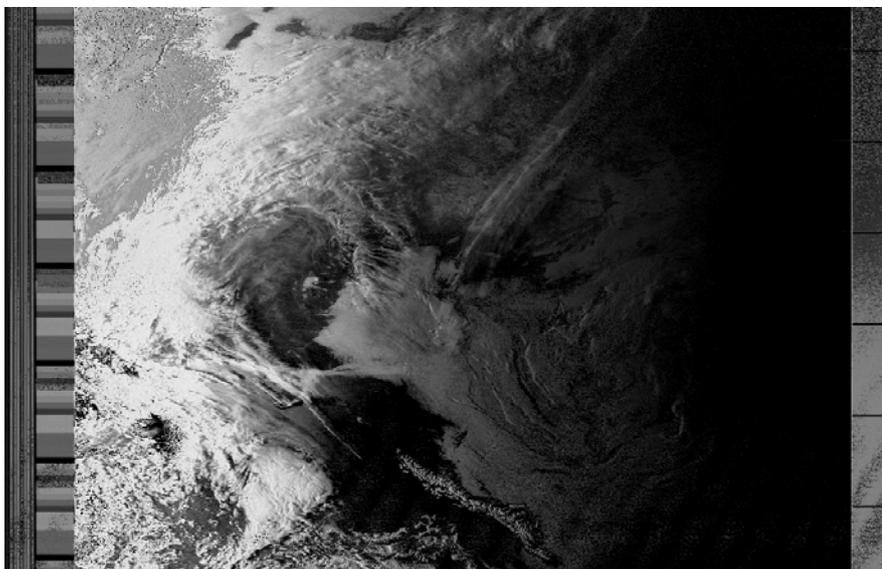


Рис. 5. Снимок со спутника NOAA 18

**Выводы.** Разработан способ автоматического дистанционного управления наземной станцией приема информации через Интернет, который позволяет получать в течение суток информацию со спутников дистанционного зондирования Земли без участия человека.

Разработано алгоритмическое обеспечение для автоматического планирования сеансов связи, приема и записи информации со спутников группировки NOAA, позволяющее автоматически управлять несколькими наземными станциями.

По предложенным алгоритмам создан программно-аппаратный комплекс, апробированный на удаленном операторском месте и наземной станции ДНУ, позволяющий принимать круглосуточно снимки со спутников группировки NOAA.

### Библиографические ссылки

1. **Баженов В.И.** Моделирование основных характеристик и процессов функционирования космических аппаратов / В.И. Баженов, М.И. Осин, Ю.В. Захаров. – М. : Машиностроение, 1985. – 240 с.
2. **Кашкин В.Б.** Дистанционное зондирование Земли из космоса. Цифровая обработка изображений / В.Б. Кашкин, А.И. Сухинин. – М. : Логос, 2001. – 264 с.
3. <https://www.space-track.org/>

Надійшла до редколегії 24.05.2016

УДК 629.7.063.6 + 681.518.22

**В. Б. Мазуренко**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ДОЗИРОВАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ МОРСКОГО БАЗИРОВАНИЯ

Рассмотрен вопрос практической реализации вычислительных методов обработки сигналов от датчиков уровня заправки ракеты-носителя морского базирования, которые позволяют снизить влияние качания стартовой платформы на величину погрешности дозирования топливных баков.

*Ключевые слова:* ракета-носитель, система контроля заправки, фильтр Калмана.

Розглянуто питання практичної реалізації обчислювальних методів обробки сигналів від датчиків рівня заправки ракети-носія морського базування, що дозволяють знизити вплив коливання стартової платформи на величину похибки дозування паливних баків.

*Ключові слова:* ракета-носій, система контролю заправки, фільтр Калмана.

The article is devoted to implementation issue for digital signal processing methods aimed for treatment of signals produced by level sensors of sea based launch vehicle that permit to lower impact of launch platform swing to a propellant tanks loading error.

*Keywords:* launch vehicle, level monitoring system, Kalman filter.

**Введение.** Космический ракетный комплекс (КРК) «Морской старт» является первым и до настоящего времени единственным проектом, использующим морские суда для запуска ракет-носителей (РН). В процессе его функционирования выполняется ряд уникальных технологических операций, одной из которых является проведение дозирования топливных баков РН в условиях морской качки. Стартовая платформа (СП), на которую при подготовке к пуску вертикально устанавливается ракета, представляет собой самоходное плавучее сооружение, подверженное качанию вследствие постоянного воздействия морских волн. Во время заправки компонентами ракетного топлива (КРТ) ракета-носитель качается вместе с СП и отклоняется от вертикали на те же углы, что и платформа от горизонтальной плоскости. Соответственно, поверхность жидкого топлива в баках РН периодически отклоняется от номинального, перпендикулярного продольной оси бака, положения. Уровень КРТ в баках РН «Зенит» измеряется датчиками уровня заправки (ДУЗ), и дозирование проводится по их показаниям. Поскольку в отдельных баках РН «Зенит» датчики установлены на значительном расстоянии от продольной оси бака, то колебания зеркала жидкости, возникающие вследствие качания СП, искажают показания ДУЗ. Практика запусков РН «Зенит» КРК «Морской старт» показывает, что наличие описанных выше явлений не приводит к нарушению работы средств дозирования, тем не менее качка СП отрицательно влияет на точность дозирования баков РН.

Она приводит к появлению специфичной составляющей погрешности дозирования (иначе – «погрешности заправки»), характерной исключительно для КРК морского базирования. Основываясь на данных о конструкции РН «Зенит» [1] и углах наклона СП [2] предельные значения этой составляющей для баков горючего могут быть оценены величиной порядка двухсот – трехсот литров.

Негативным последствием является то, что появление дополнительных составляющих и соответствующее увеличение погрешности заправки приводит к необходимости увеличения свободного газового объема в баке [3], а это при соблюдении условия неизменности конструкции РН может быть выполнено только за счет уменьшения дозы заправки. В то же время существует и обратный эффект, что может быть с успехом использовано: располагая средствами уменьшения погрешности заправки, можно уменьшить газовую подушку и, соответственно, увеличить дозу КРТ в баках. Поэтому задача снижения влияния качания стартовой платформы на величину погрешности заправки топливных баков РН морского базирования является актуальной на любом этапе жизненного цикла КРК, ее решение позволяет повысить энергетические характеристики ракеты-носителя.

**Методы снижения влияния колебаний поверхности жидкости на процесс измерения уровня.** В технике измерения уровня общепринятым способом снижения влияния колебаний поверхности жидкости на погрешность измерения уровня является помещение чувствительных элементов (ЧЭ) датчика в гидроуспокоитель (ГУ), представляющий собой кожух, полностью отделяющий чувствительные элементы от жидкой среды. Жидкость в кожух поступает через демпфер, в качестве демпфера могут применяться трубы или специальные ячейки. Применение гидроуспокоителя позволяет заметно снизить амплитуду колебаний поверхности жидкости в районе расположения ЧЭ, если частота этих колебаний составляет 0,8–1,0 Гц и выше. Такую частоту имеют колебания, развивающиеся на поверхности жидкости внутри бака вследствие ветровых воздействий на корпус РН. В случае же наличия на поверхности жидкости квазистатических колебаний с периодом 10–15 с, который соответствует периоду прихода морской волны, то есть

– періоду качання РН, коефіцієнт успокоєння ГУ знижується на порядок і застосування гідроуспокоєтеля стає неефективним. Тому для зменшення величини погрешності заправки топливних баків РН морського базирования потрібно застосування інших методів. Такі методи були запропоновані, і інформація про них представлена в наступних абзацах.

В роботі [4] для рішення розглядаваної задачі було запропоновано застосувати чисельні методи обробки сигналу від датчика рівня заправки. В частині, для зменшення погрешності вимірювань рекомендується проводити фільтрацію сигналу, попередньо перетвореного в цифрову форму, за допомогою дискретного фільтра Калмана (ФК). Дане запропоноване дозволяє виключити чисельними методами знизити величину погрешності, пов'язаної з качанням СП і дискретністю ДУЗ, на 60 відсотків.

В статті [5] запропоновано підхід, оснований на попередньому методі і являючий його розвитком. В разі його реалізації вимірювання рівня КРТ в баках РН можуть стати інваріантними до нахилів СП. Ідея полягає в тому, щоб одночасно з застосуванням фільтра Калмана для оцінки рівня КРТ додатково використовувати показання навігаційних пристроїв судна, вимірюючих кути крена і диференціалу СП. В наведеному дослідженні теоретично обґрунтовано можливість застосування запропонованого методу, побудовано дискретний фільтр Калмана, на вхід якого надходять вихідні сигнали датчика рівня заправки і показання гіроскопічних пристроїв (ГП) стартової платформи, визначені параметри фільтра, а також наведено загальні дані про ефективність його застосування.

Настояща стаття ґрунтується на результатах теоретичних досліджень, представлених в роботах [4; 5], і присвячена питанням практичної реалізації запропонованих методів. В частині, розглядаються шляхи впровадження рішень, оснований на застосуванні дискретного фільтра Калмана, в проєкт «Морський старт». Також проводиться порівняння одного і іншого методів обробки інформації з точки зору технічної складності реалізації і ефективності застосування.

**Способи реалізації запропонованих методів на практиці.** Метою впровадження запропонованих чисельних методів обробки інформації від датчиків рівня заправки на основі застосування фільтрації Калмана є підвищення точності дозування баків РН. Механізм практичного застосування даних методів в додатку до КРК «Морський старт» виглядає наступним чином.

**Баки горючого.** Заправка баків зазвичай проводиться в певній послідовності. До досягнення рівнем КРТ нижніх рівнів ДУЗ заправка проходить в режимі швидкості. Коли КРТ досягає нижньої межі діапазону вимірювання ДУЗ, формується команда на зменшення витрати палива в бак, після чого заправка проводиться на малій витраті до досягнення потрібного рівня заправки (заданого рівня ДУЗ). В цей момент формується команда на припинення заправки і подача палива в бак припиняється.

В разі впровадження запропонованих методів одночасно з формуванням команди переходу на малий витрати заправки повинен бути запущений чисельний алгоритм фільтра Калмана. На вхід фільтра Калмана повинні надходити дані поточних вимірювань ДУЗ (або ДУЗ і ГП), а на виході фільтра в якості оцінки буде отримано значення висоти рівня КРТ в баку. Отриману оцінку слід постійно порівнювати з уставкою – заданим рівнем заправки

бака – и по результатам сравнения формируют команду на прекращение заправки. Поскольку используемая для выработки команды оценка ближе к истинному значению высоты уровня КРТ, чем показания ДУЗ, то и точность дозирования бака окажется выше.

**Баки окислителя.** В качестве окислителя в двигательных установках РН «Зенит» используется жидкий кислород (ЖК), который является криогенной жидкостью, поэтому после завершения заправки баков окислителя малым расходом начинается их подпитка для возмещения потерь компонента из-за испарения. В системах заправки с релейным управлением заправочными клапанами управление процессом подпитки сводится к следующему. Расход подпитки устанавливается на уровне среднестатистической скорости испарения компонента из бака. Реальная скорость испарения несколько отличается от среднестатистической. Поэтому при достижении поверхностью жидкости некоторого заданного уровня ДУЗ (верхняя граница диапазона подпитки) подача компонента в бак прекращается; при падении уровня окислителя ниже определенного, ниже лежащего, уровня ДУЗ (нижняя граница диапазона подпитки) подача возобновляется. Команды на управление подпиткой формируются по сигналам от ДУЗ. В определенный циклограммой подготовки и пуска момент времени поступает команда на прекращение процесса подпитки. В этот момент уровень кислорода может находиться в пределах нескольких дискретных уровней ДУЗ. Именно это состояние в момент прекращения подпитки (а не состояние в момент окончания заправки малым расходом, как это имеет место для баков горючего) формирует погрешность дозирования бака окислителя. При релейном управлении из-за наличия колебаний поверхности жидкости сигналы о достижении уровней и, соответственно, команды на начало подачи и на прекращение подачи кислорода в бак поступают несколько раньше, то есть всегда реализуется односторонняя погрешность измерения, направленная внутрь диапазона. Поэтому действительный диапазон подпитки оказывается несколько уже, чем заданный. Так как ФК дает более точную оценку с симметричной относительно истинного уровня погрешностью, то введение фильтрации приведет к расширению действительного диапазона, то есть к фактическому ухудшению точности заправки. Поэтому при релейном управлении процессом подпитки введение предлагаемых методов с практической точки зрения следует признать нецелесообразным.

Тем не менее точность дозирования баков окислителя при помощи предлагаемых методов может быть повышена в той же степени, что и точность дозирования баков горючего. Существуют, по меньшей мере, два способа достижения этой цели.

**Первый способ** состоит в том, чтобы перейти к непрерывному способу управления процессом подпитки. Для этого при помощи фильтра Калмана, использующего информацию об углах наклона СП (как более точным), необходимо вырабатывать оценку высоты уровня КРТ в баке и использовать эту оценку для формирования пропорционального воздействия на управляющие органы клапанов непрерывного действия для регулирования расхода подачи ЖК в бак. К сожалению, этот способ следует рассматривать исключительно с теоретической точки зрения, поскольку переход к непрерывному управлению расходом подпитки потребует проведения значительного объема доработок технологического оборудования и соответствующего объема экспериментальной отработки, что на нынешнем этапе глубокой эксплуатации КРК следует признать практически нереализуемым.

**Второй способ** не требует доработки заправочного оборудования, но требует некоторого изменения технологии заправки. В этом случае должна производиться первичная заправка бака окислителя до некоторого предварительного уровня. Этот предварительный уровень должен назначаться существенно ниже (на 6–7 дискретных уровней датчика), чем заданный окончательный уровень заправки. Подпитка бака также должна производиться в районе этого предварительного уровня. Затем, непосредственно перед известным моментом времени прекращения подпитки должна быть проведена дозаправка бака малым расходом уже до необходимого, окончательного уровня заправки с применением метода фильтрации, аналогично тому, как это было описано выше применительно к баку горючего. В ходе дозаправки на основе выполняемой ФК оценки должна быть сформирована команда на прекращение заправки, и после ее исполнения поступление ЖК в бак должно быть полностью прекращено. Этим способом может быть реализован любой из двух предлагаемых методов снижения погрешности дозирования.

**Внедрение предложенных методов в КРК «Морской старт».** Далее перейдем к рассмотрению технических мероприятий, которые следует выполнить для внедрения предлагаемых методов обработки сигналов от ДУЗ в такой проект как «Морской старт», для чего приведем краткие сведения о КРК «Морской старт» в объеме, необходимом для последующего изложения.

В состав КРК «Морской старт» входит два судна: стартовая платформа и сборочно-командное судно (СКС). Ракета стартует с СП, на платформе также проходит весь цикл подготовки к пуску, для чего на СП имеется все необходимое технологическое оборудование. На заключительном этапе предпусковой подготовки персонал на СП отсутствует, и управление комплексом производится с СКС в автоматическом режиме. Управление системами ракетного сегмента КРК «Морской старт» обеспечивает комплекс автоматизированных систем управления подготовкой и пуском (КАСУ ПП) [6]. Информация от датчиков систем, участвующих в технологических операциях, поступает в КАСУ ПП, в КАСУ ПП выполняются алгоритмы обработки информации и законы управления (ЗУ) технологическими операциями. Законы управления привязаны к определенному процессу и системе. Поскольку задача измерения уровня КРТ в баках РН и формировании команд на управление заправкой традиционно выполняется системой контроля заправки (СКЗ) РН [6], то законы управления этими процессами могут рассматриваться как законы управления СКЗ РН.

Для внедрения методов обработки информации на основе фильтров Калмана в законы управления КАСУ ПП должны быть введены соответствующие алгоритмы. Для компьютеризированных систем проведение корректировки (при условии соблюдения жестких требований по отработке – подтверждению корректности проведенных доработок ЗУ) само по себе не представляет особой сложности. Рассмотрим содержание этой корректировки с точки зрения минимизации требований к объемам дополнительно выделяемых ресурсов.

Дискретный фильтр Калмана, который предлагается ввести в ЗУ КАСУ ПП, представляет собой рекуррентный алгоритм [4; 5], который на каждом  $k$ -том шаге своей работы выполняет текущую оценку отслеживаемых величин на основе предыдущей оценки этих же величин (полученной на предыдущем шаге  $k-1$ ) и текущих показаний датчиков (полученных на шаге  $k$ ). Алгоритм выражается в матричном виде и требует выполнения матричных операций сложения и умножения. На каждом шаге должны быть последовательно, одна за другой,

рассчитаны пять матричных формул. Наибольший размер матриц для обоих вариантов фильтра составляет  $7 \times 7$ .

Данные моделирования по эффективности обоих видов фильтра показывают, что при выбранном шаге дискретизации в одну секунду их работоспособность полностью обеспечивается, и меньший шаг дискретизации не требуется. С другой стороны, системы автоматического управления технологическими процессами, подобные КАСУ ПП, обычно работают с временным тактом на порядок выше – 0,1 секунды. Это обстоятельство может быть использовано для снижения нагрузки на вычислительные ресурсы КАСУ ПП. Вычислительные операции фильтра Калмана можно распределить по нескольким тактам работы КАСУ ПП в пределах одного шага оценивания. Так, например, на каждом такте можно рассчитывать только одну из пяти матричных формул и, если предположить наличие двух каналов измерения и обработки информации (основной и дублирующий), то за десять тактов работы системы будет полностью выполнен один шаг оценивания высоты уровня топлива в одном баке. А учитывая то, что применение фильтра Калмана необходимо только на конечном этапе заправки бака (после перехода на малый расход) и при этом моменты окончания заправки разных баков, как правило, разнесены во времени, то следует ожидать, что внедрение фильтра Калмана для обработки сигналов от датчиков уровня заправки по указанной схеме приведет к минимальному увеличению потребностей в вычислительных ресурсах КАСУ ПП. Можно также добавить, что матрицы седьмого порядка в формулах ФК (за исключением одной из них) – разреженные, доля нулевых элементов составляет 70–80 %. Это позволяет применять соответствующие способы уменьшения объема вычислений и существенно сократить как процессорное время, так и объем оперативной памяти, которые должны быть дополнительно выделены в случае реализации предложенных методов.

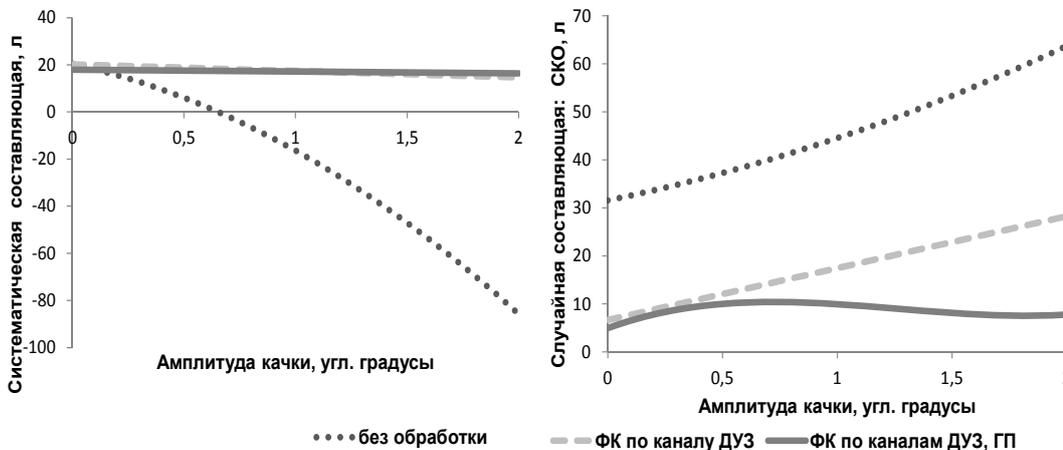
Важно отметить, что в данном случае речь идет исключительно об алгоритме фильтра Калмана. Базовые алгоритмы ввода информации от датчиков уровня заправки должны выполняться, то есть считывание показаний датчиков уровня заправки и их первичная обработка должны производиться на каждом такте работы КАСУ ПП. Однако эти показания в прямом виде, до обработки, не должны использоваться для выработки команды на прекращение заправки – для этого предназначена оценка высоты уровня КРТ в баке на выходе ФК. Показания датчиков уровня без их обработки фильтром Калмана должны напрямую использоваться для выработки аварийных команд, команд перехода на малый расход и проведения самодиагностики.

При внедрении ФК с двумя входами, кроме доработок программной части в виде корректировки ЗУ КАСУ ПП, необходимо также провести некоторые доработки материальной части. Для того чтобы обеспечить ввод в КАСУ ПП информации об углах наклона СП, необходимо выполнить сопряжение оборудования КАСУ ПП с навигационным оборудованием стартовой платформы. Очевидно, что сопряжение между двумя информационными системами целесообразно выполнить посредством локальной вычислительной сети. Опыт подобного сопряжения систем ракетного и морского сегментов в КРК «Морской старт» существует. В свое время была разработана система расчета прогнозируемой нагрузки [7]. Данная система работает в течение всего времени подготовки пуска. Функционирование системы предусматривает трансляцию параметров качки от датчиков, измеряющих отклонение платформы от

горизонтального положення [8]. Аналогічну трансляцію необхідно здійснити і для цілей рішення розглядаваної задачі.

**Ефективність пропонуємих методів.** Далі розглянемо ефективність пропонуємих методів обробки поточних вимірювань, а також фактори, які на неї впливають. Приведені нижче дані отримані на основі виконаного автором моделювання, окремі результати досліджень були представлені раніше [4; 5; 9]. В якості прикладу при моделюванні був обраний бак горючого другої ступені РН «Зеніт» КРК «Морської старт». Необхідно відзначити, що моделювання проводилося на розрахунковому прикладі, вихідні дані для якого сформовані на основі опублікованої інформації про КРК «Морської старт» і РН «Зеніт», а в випадках відсутності такої інформації – за аналогією з іншими відомими зразками, і є орієнтовними. Основним принципом проведення досліджень було дотримання ідентичності режимів і умов моделювання для різних методів обробки сигналів (включаючи і відсутність обробки). Тому представлені нижче дані в першу чергу слід розглядати з точки зору порівняння пропонуємих методів обробки сигналів на фоні відсутності такої обробки при проведенні дозування баків РН. Точні значення можуть бути отримані шляхом використання представленої в роботах [4; 5; 10] методики при підстановці конкретних вихідних даних, які характеризують конструкцію бака, датчик рівня, а також технологічний процес заправки.

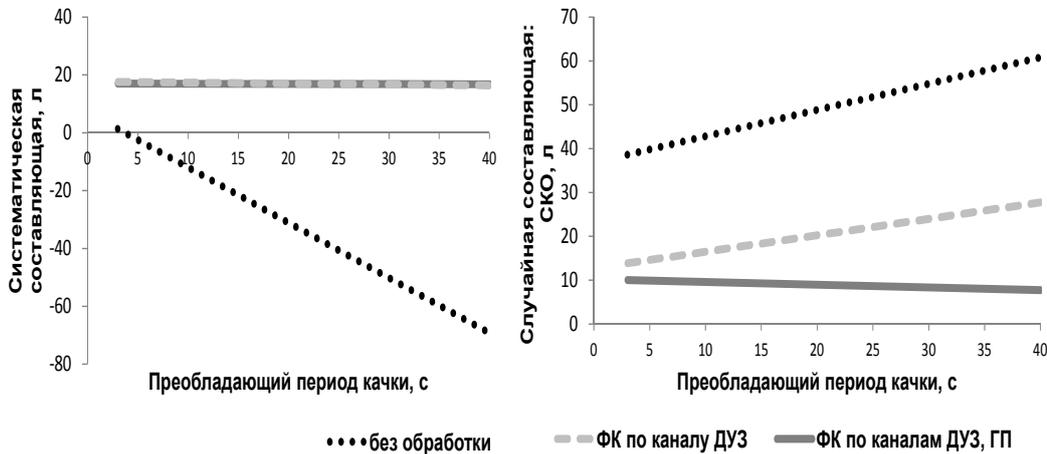
**Ефективність.** Як показують дані моделювання на розрахунковому прикладі [9], при заданих умовах експлуатації [2] величина випадкової складової погрешності заправки (середньоквадратичне відхилення – СКВ), пов'язаної з качанням СП і дискретністю датчика рівня, може бути зменшена (рис. 1) удвічі з половиною разів при використанні ФК з одним входним сигналом (від ДУЗ) і в чотири з половиною разів в разі використання ФК з двома входними сигналами (від ДУЗ і ГП).



**Рис. 1. Залежність складової погрешності дозування, пов'язаної з качанням СП і дискретністю датчика, від амплітуди качки**

**Вплив параметрів качки на ефективність.** В умовах качки ефективність методу з використанням показань навігаційних приборів об кутах нахилу СП помітно вище. Ураховуючи те, що погрешність оцінки рівня рідини на виході фільтра за даним методом не залежить від амплітуди качання

СП (рис. 1), то ефективність метода підвищується з ростом величини возмущення. Необхідно також додати, що оцінка, получаемая от ФК с использованием показаний ГП, обладает свойством инвариантности не только по отношению к амплитуде, но и по отношению к преобладающему периоду качки СП. На графиках (рис. 2) в виде аппроксимирующих прямых представлены результаты моделирования, подтверждающие данное положение. Диапазон изменения периодов качки СП охватывает значения от минимальных периодов волн, зафиксированных при наблюдениях [11], до периодов собственных колебаний крупных морских судов [12].

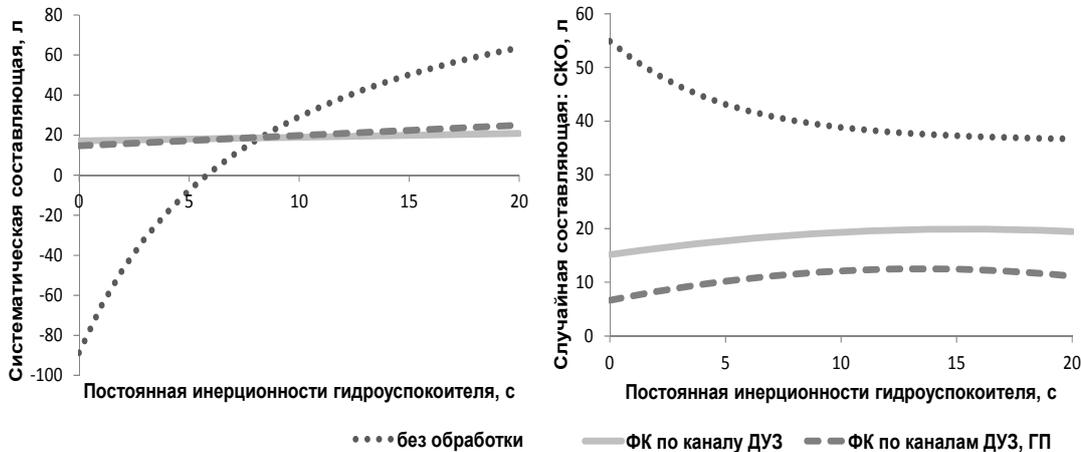


**Рис. 2. Зависимость погрешности дозирования, связанной с качанием СП и дискретностью датчика, от периода качки**

**Эффективность в отсутствие качки.** В случае отсутствия качки эффективность обоих предлагаемых методов одинакова. В результате применения этих методов в данных условиях фактически происходит уменьшение погрешности, обусловленной только дискретностью ДУЗ, и эта погрешность уменьшается в пять-шесть раз. То есть для датчика с 20 дискретными уровнями погрешность из-за его дискретности составит менее 1,5 %. Это позволит при проведении заправки практически уравнивать точность дискретного и непрерывного датчиков уровня. Известно [13], что для измерения уровня топлива в баках РН, в основном, используются датчики двух типов: емкостные и поплавковые с индуктивной связью поплавок с измерительной схемой. Емкостные ДУЗ обычно непрерывные, а поплавковые с индуктивной связью – только дискретные, их минимальная дискретность составляет 10–12 мм. Таким образом, используя фильтр Калмана для обработки выходного сигнала датчика, можно практически устранить основной недостаток поплавкового индуктивного датчика уровня, состоящий в его дискретности. Учитывая то, что этот тип датчиков обладает рядом преимуществ по сравнению с датчиками емкостного типа, применение предложенных методов обработки информации существенно расширяет возможности применения поплавковых датчиков уровня с индуктивной связью поплавок с измерительной схемой.

**Влияние демпфирования на эффективность.** Как уже отмечалось выше, в случае проведения измерений уровня жидкости, поверхность которой подвержена колебаниям, датчики оснащаются гидроуспокоителями. Гидроуспокоитель, по

существо, представляет собой фильтр низких частот. Автором проведено моделирование в целях определения взаимосвязи параметров гидроуспокоителя датчика, представляемого апериодическим звеном первого порядка, и эффективностью предлагаемых вычислительных методов обработки сигналов. Результаты моделирования, аппроксимированные соответствующими прямыми линиями и экспонентой, представлены на графиках (рис. 3).



**Рис. 3. Зависимость погрешности дозирования, связанной с качением СП и дискретностью датчика, от постоянной инерционности ГУ**

Как следует из графиков, в случае применения вычислительных методов обработки сигналов от датчика наличие гидроуспокоителя для устранения влияния качки не требуется. Более того, использование в конструкции датчика ГУ с большой постоянной времени приводит к снижению эффективности предлагаемых методов.

**Выбор метода.** Окончательный выбор того или иного способа усовершенствования любой системы проводится в сравнении эффективности нововведений и объема затрат на внедрение. Это положение справедливо и в отношении выбора одного из двух представленных выше методов. Показатели эффективности предложенных методов в своих точных значениях определяются путем использования методики моделирования, представленной в настоящей статье и в упомянутых ранее работах, при подстановке конкретных исходных данных. Однако экономические аспекты внедрения выходят за рамки проведенных исследований. Тем не менее общие рекомендации по выбору метода, основанные на сравнительном техническом анализе, могут быть представлены, и они сводятся к следующему. В КРК «Морской старт» амплитуда наклонов СП ограничена значением в один градус. В случае расширения пределов эксплуатации или построения новых КРК морского базирования с более широким диапазоном углов наклона платформы метод с использованием информации от ГП становится более предпочтительным, поскольку обладает существенным преимуществом по эффективности. Этот же метод должен быть реализован также в том случае, если в момент окончания дозирования имеются статические углы наклона СП, поскольку он формирует оценку уровня КРТ в баках, инвариантную к наклонам СП. Метод, основанный на использовании фильтра Калмана с одним входом, целесообразно

применять в случае проведения измерений датчиком уровня дискретного типа при малых углах наклона (до 0,5 градуса) или при их полном отсутствии. Внедрение этого метода позволит заметно снизить составляющую случайной погрешности дозирования, связанную с дискретностью датчика.

**Выводы.** Результатом выполненных исследовательских работ, основные положения которых представлены в настоящей статье, является следующее:

Рассмотрены вопросы практической реализации вычислительных методов обработки сигналов от датчиков уровня заправки ракеты-носителя морского базирования, которые позволяют снизить влияние качания стартовой платформы на величину погрешности дозирования топливных баков. Представлен механизм практического применения указанных методов в приложении к КРК «Морской старт», а также предложены конкретные технические мероприятия, которые следует выполнить для внедрения предлагаемых методов.

Представлены сравнительная оценка эффективности предлагаемых методов обработки сигналов и результаты исследования влияния отдельных факторов на величину эффективности. Выработаны общие рекомендации по выбору одного из предложенных методов обработки сигналов для внедрения.

### Библиографические ссылки

1. Ракеты и космические аппараты конструкторского бюро «Южное» / под общей ред. С. Н. Конохова – Днепропетровск : ГКБ «Южное» им. М.К. Янгеля, 2001. – 240 с.
2. Sea Launch Company, LLC. User's Guide, Revision C. 2003. D688-10009-1.
3. **Мазуренко В.Б.** Повышение энергетических характеристик ракет-носителей методом модификации критерия полноты использования объема топливных баков // Вісник Дніпропетровського університету. Серія "Ракетно-космічна техніка". – 2013. – Вип. 16. – С. 61–68.
4. **Мазуренко В.Б.** Применение дискретного фильтра Калмана для решения задачи измерения уровня жидкого топлива в условиях качки // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2014. – Вип. 6 (95). – С. 95–106.
5. **Мазуренко В.Б.** Использование информации об углах наклона платформы при обработке дискретным фильтром Калмана данных измерений уровня жидкого топлива // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2015. – Вип. 3 (98). – С. 85–96.
6. Технологические объекты наземной инфраструктуры ракетно-космической техники : инженерное пособие : в 2 кн. / под общей ред. И. В. Бармина. – М. : Полиграфикс РПК, 2006. – Кн. 1. – 416 с.
7. **Дегтярев А. В.** Определение нагрузок в опорном сечении РН при стоянке на пусковом столе морской стартовой платформы в условиях действия ветра и качки / А.В. Дегтярев, А.А. Василенко // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – Дніпропетровськ : Дніпропетровський нац. ун-т ім. Олеся Гончара, 2011. – Т. XI. – С. 16–28.
8. **Дегтярев А. В.** О критерии на разрешение пуска ракеты-носителя с морской платформы / А. В. Дегтярев, А. Э. Кашанов, И. А. Василенко // Вісник НУК імені адмірала Макарова. – Миколаїв : Нац. ун-т кораблебудування імені адмірала Макарова, 2012. – № 2. – С. 36–40.
9. **Мазуренко В.Б.** Эффективность применения информационно-измерительной технологии на основе дискретного фильтра Калмана в процессе дозирования баков качающейся ракеты // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2016. – Вип. 2 (103). – С. 79–86.

10. Мазуренко В.Б. Модель процесса измерения уровня жидкого топлива в условиях качки // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2014. – Вип. 5 (94). – С. 25–36.
11. View Climatic Summary Plots : Station 51028 - Christmas Island [Электронный ресурс] // National Data Buoy Center, – Режим доступа: [http://www.ndbc.noaa.gov/view\\_climplot.php?station=51028&meas=wp](http://www.ndbc.noaa.gov/view_climplot.php?station=51028&meas=wp)
12. Максимаджи А.И. Капитану о прочности корпуса судна : справочник / А. И. Максимаджи. – Л. : Судостроение, 1988. – 223 с.
13. Мазуренко В.Б. Обзор применяемых методов измерения уровня жидкого топлива в баках нижних ступеней ракет-носителей // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – Дніпропетровськ.: Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 2013. – Т. XVI. – С. 82–95.

Надійшла до редколегії 04.04.2016

УДК 519.246.3

В. П. Малайчук<sup>1</sup>, А. М. Потапов<sup>2</sup>, И. А. Гусарова<sup>2</sup>, И. И. Деревянко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

<sup>2</sup>Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» имени М. К. Янгеля»

## ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ РАБОТОСПОСОБНОСТИ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ СТАЦИОНАРНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНО-ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ КОНТРОЛЯ

Рассмотрены основы теории оценки стационарности и независимости измерений выборки нормальных случайных величин. Исследована возможность их применения для выборки случайных величин с разными законами распределения вероятностей, значениями автокорреляции и ограничениями на объем измерений. При факторном анализе оценены условия работоспособности исследуемых критериев.

*Ключевые слова:* стационарность, независимость, модель измерений, разность выборки, среднее значение, разброс.

Розглянуто основи теорії оцінки стаціонарності і незалежності вимірювань вибірок нормальних випадкових величин. Досліджено можливість їх застосування для вибірок випадкових величин з різними законами розподілу ймовірностей, значеннями автокореляції і обмеженнями на обсяг вимірювань. При факторному аналізі оцінено умови працездатності досліджуваних критеріїв.

*Ключові слова:* стаціонарність, незалежність, модель вимірювань, різниця вибірки, середнє значення, розкид.

The bases of evaluation theory and stationary measurements independent samples of normal random variables. The possibility of their use for the sampling of random variables with different probabilities distribution laws, the autocorrelation values and restrictions on the volume measurement. When factor analysis assessed the conditions of the test criteria of efficiency.

*Keywords:* stationary, independent, measurement model, the difference between the sample, the mean value, scatter.

**Постановка задачі.** Статистические закономерности экспериментальных выборок ультразвукового контроля несколько отличаются от теоретических. Это, прежде всего, искажения помехами, автокоррелированность и асимметричность законов распределения вероятностей. Путем проведения вычислительных экспериментов можно исследовать их влияние на эффективность оценок стационарности и независимости измерений линейно-протяженных объектов. Результаты обработки экспериментальных выборок измерений информативных параметров необходимы для принятия решений о состоянии и качестве контролируемой техники. Визуально-аналитические данные для поддержки принятия решений готовятся информационно-аналитической подсистемой менеджмента [1; 2]. Эти данные должны представляться в виде, удобном для визуального рассмотрения и анализа на экранах персональных компьютеров (краткие описания, графики, схемы, таблицы, рисунки, видеозаписи, объемные изображения).

Кроме наглядности данных, очень важное значение имеет их верность и точность. Если заданы требования к физико-техническим показателям проектируемых объектов в виде интервалов «от и до», то верность характеризуется вероятностью того, что оценки, как случайные величины, этих показателей, рассчитанные по экспериментальным измерениям, находятся в пределах этого интервала, а точность зависит от приборных ошибок измерителей и размеров выборок измерений.

Измерения параметров, как правило, искажены помехами различного происхождения. Это случайные изменения контакта чувствительных элементов измерителей с поверхностью объекта контроля, это их электронные шумы и ошибки аналого-цифровых преобразователей. Выборки измерений запоминаются и затем обрабатываются специальными компьютерными программами. Это выборки дискретных случайных величин с неизвестными статистическими закономерностями. Такие измерения могут быть получены при ультразвуковом и магнитометрическом контроле линейно-протяженных объектов. Обобщенная математическая модель измерений линейно-протяженных объектов описывается уравнением

$$x(k) = m(k)[S(k) + \Delta S(k)] + n(k) \quad (1)$$

где  $m(k)$  – контактная помеха;  $n(k)$  – измерительный шум;  $S(k)$  – медленно меняющийся стохастический или детерминированный сигнал, содержащий информацию о дефектности объекта контроля;  $\Delta S(k)$  – автокоррелированная составляющая информативного сигнала, содержащая информацию о его качестве;  $k$  – номер измерения точечных объектов или номер координат линейно-протяженных объектов.

Для их описания используются модели в виде разностных уравнений типа Маркова и Юла [3]

$$S(k) = \alpha S(k-1) + \beta \xi(k), \quad \Delta S(k) = \alpha_1 \Delta S(k-1) - \alpha_2 \Delta S(k-2) + \beta \xi(k), \quad (2)$$

где  $\xi(k)$  – последовательность независимых случайных величин с экспоненциальным законом распределения вероятностей [4].

Первичная обработка выборки измерений  $x(k)$  имеет своей целью оценку стационарности  $S(k)$ . Эту задачу, учитывая наличие неизвестных помех  $m(k)$ ,

$n(k)$  и автокоррелированность  $\Delta S(k)$ , решим следующим образом. Размер  $N$  выборки  $x(k)$  значительно (в десятки и сотни раз) превышает интервал корреляции  $\Delta k$  последовательности  $\Delta S(k)$ . Если этот интервал известен, то сформируем, используя выборку  $x(k)$ , выборку частных средних

$$z(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=n(i-1)+1}^{in} x(k), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad m = N/n, \quad (3)$$

где  $i$  – номер элементарного участка;  $n = \Delta k$  – количество измерений в элементарном участке;  $m$  – размер преобразованной выборки.

Очевидно, что  $z(i)$  – это последовательность независимых случайных величин с законом распределения вероятности, близким к закону Гаусса. Их стационарность является свидетельством стационарности исходной выборки  $x(k)$ . Чтобы проверить гипотезу о стационарности выборок  $z(i)$ , используем метод анализа разностей независимых случайных величин [5].

**Основы теории оценки стационарности измерений выборки нормальных случайных величин.** Рассмотрим выборку нормальных случайных величин  $z(i)$  с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ , полагая  $z(i) = a + \sigma \xi(i)$ , где  $\xi(i)$  – последовательность нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда первая и вторая разности равны

$$\Delta z_1(i) = z(i) - z(i-1), \quad \Delta z_2(i) = \Delta z_1(i) - \Delta z_1(i-1) \quad (4)$$

и, следовательно, для  $j$ -ой разности справедливо равенство

$$\Delta z_j(i) = \Delta z_{j-1}(i) - \Delta z_{j-1}(i-1), \quad (5)$$

где  $j$  – номер разности. Вторую и последующие разности можно определить

$$\begin{aligned} \Delta z_2(i) &= z(i) - 2z(i-1) + z(i-2), \\ \Delta z_j(i) &= z(i) - C_j^1 z(i-1) + C_j^2 z(i-2) + \dots + C_j^{j-1} z(i-j+1) + (-1)^j z(i-j), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_n^m$  – число сочетаний  $m$  по  $n$ .

Так как  $z(i)$  – независимые случайные величины, то дисперсия  $\Delta z_j(i)$  равна

$$D[\Delta z_j(i)] = \left( 1 + (C_j^1)^2 + (C_j^2)^2 + \dots + (C_j^{j-1})^2 + 1 \right) \sigma^2. \quad (7)$$

Учитывая свойство суммы  $\sum_{t=0}^j (C_j^t)^2 = C_{2j}^j$ , получим связи дисперсии разности  $D[\Delta z_j(i)]$  и дисперсии  $D[z(i)]$

$$D[\Delta z_j(i)] = C_{2j}^j D[z(i)], \quad j = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

такая связь имеет место, если  $z(i)$  – последовательность нормальных случайных величин и это свойство разностей можно использовать для контроля стационарности выборки по экспериментальным измерениям.

Располагая выборками  $z(i), \Delta z_1(i), \dots, \Delta z_j(i)$  с размерами  $m, m-1, m-j$ , определим их средние  $\bar{z}$  и  $\overline{\Delta z_j}$  и выборочные дисперсии

$$D^*[z(i)] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (z(i) - \bar{z})^2, \quad D^*[\Delta z_j(i)] = \frac{1}{m-j} \sum_{i=1}^{m-j} (\Delta z_j(i) - \overline{\Delta z_j})^2. \quad \text{Оценив}$$

выборочные дисперсии  $D^*[z(i)]$  и  $D^*[\Delta z_j(i)]$ , сформируем экспериментальный показатель стационарности

$$V_j = \frac{C_{2j}^j D^*[z(i)]}{D^*[\Delta z_j(i)]}. \quad (9)$$

его теоретические математические ожидания  $M[V_j]$  и дисперсии  $D[V_j]$  равны

$$M[V_j] = \frac{m-j}{m-2-j}, \quad D[V_j] = \frac{2(m-j)^2(2m-2-j)}{m(m-2-j)^2(m-4-j)}, \quad (10)$$

Показатель стационарности – случайная величина с законом распределения вероятности Фишера с параметрами  $n_1$  и  $n_2$  [5]. С вероятностью  $P$  гипотеза о стационарности подтверждается, если

$$V_j \leq V_{jo} = \Psi_\phi\left(\frac{P}{n_1 n_2}\right), \quad n_2 = m, \quad n_1 = m - j, \quad (11)$$

где  $\Psi_\phi\left(\frac{P}{n_1 n_2}\right)$  – функция, обратная функции вероятности Фишера (аппроксимация Полсона)

$$\Psi_\phi\left(\frac{P}{n_1 n_2}\right) = 9n_2 \left[ \frac{\frac{n_2}{n_1} \left[ (9n_1 - 2)(9n_2 - 2) + 3\Psi_\Gamma(P) \left( 2n_1(9n_2 - 2)^2 - 3n_1 n_2 \Psi_\Gamma^2(P) \right)^2 \right]}{(9n_2 - 2)^2 - 18n_2 \Psi_\Gamma^2(P)} \right], \quad (12)$$

здесь  $\Psi_\Gamma(P)$  – аппроксимация обратной функции Гаусса

$$\Psi_\Gamma(p) = 4,91 \left[ p^{0,14} - (1-p)^{0,14} \right]. \quad (13)$$

Значения обратной функции Фишера при  $P = 0,95$  приведены в табл. 1. Если по выборке получены оценки  $V_1^*, V_2^*, V_3^*, \dots, V_j^*$  и выполняется неравенство  $V_j^* \leq \Psi_\phi(0,95/n_1, n_2)$ , то принимается решение о стационарности выборки  $z(i)$ .

Таблица 1

Значения обратной функции Фишера при  $P = 0,95$

$j$	0	1	2	3	4	5	6
$\Psi_{\Phi}(10-j)$	2,97	3,13	3,34	3,63	4,06	4,74	5,96
$\Psi_{\Phi}(20-j)$	2,12	2,15	2,19	2,23	2,28	2,33	2,39
$\Psi_{\Phi}(30-j)$	1,84	1,85	1,87	1,88	1,9	1,92	1,94
$\Psi_{\Phi}(50-j)$	1,6	1,605	1,61	1,615	1,62	1,625	1,63
$\Psi_{\Phi}(100-j)$	1,51	1,51	1,515	1,515	1,52	1,52	1,525

**Основы теории оценки независимости измерений выборки нормальных случайных величин.** Для решения этой задачи воспользуемся методом проверки гипотезы о независимости путем анализа средних оценок коэффициентов корреляции первого  $r_1^*$  и второго  $r_2^*$  порядка [5]

$$r_{12}^* = \frac{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (z(i) - \bar{z})(z(i+1) - \bar{z}) + \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^{m-2} (z(i) - \bar{z})(z(i+2) - \bar{z})}{\frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (z(i) - \bar{z})^2} \quad (14)$$

При  $m > 20$  критерий  $r_{12}^*$  почти нормальная величина. Если измерения не автокоррелированы, то математическое ожидание  $M[r_{12}^*]$  и дисперсия  $D[r_{12}^*]$  равны

$$M[r_{12}^*] = \frac{2m-3}{2m(m-1)}, \quad D[r_{12}^*] = \frac{2m^4 + 13m^3 - 15m^2 + 28m - 34}{64m^2(m-1)(m+1)} \quad (15)$$

Решающее правило проверки гипотезы о независимости записывается в виде

$$\frac{5|r_{12}^* - M[r_{12}^*]|}{\sqrt{D(r_{12}^*)}} \leq \Psi_2(P) \quad (16)$$

Если неравенство выполняется, то с вероятностью 0,95 – это выборка независимых случайных величин.

**Факторный анализ работоспособности критериев оценки стационарности и независимости измерений.** Для определения условий, при которых критерии оценки стационарности и независимости измерений являются работоспособными, проведем вычислительные эксперименты. Для некоррелированных и автокоррелированных марковских выборок с различными законами распределения, разными размерами и дисперсиями сформируем разности (6)  $j = 1, 3, 5$ , определим их выборочные дисперсии и оценим показатель  $V_j^*$  (9) и показатель  $r_{12}^*$  (14). В процессе проведения факторного анализа проведем по 500 экспериментов и построим гистограммы оценок  $V_j^*(w)$  и  $r_{12}^*$ , где  $w$  – номер эксперимента, и определим их статистические параметры: средние значения  $\overline{V_j^*}$  и

$\overline{r_{12}}^*$ , дисперсии  $D^*(V_j)$  и  $D^*(r_{12})$  и эффективность оценивания по вероятности принятия правильного решения  $P^*(V_j)$  (согласно порогам табл. 1) по формулам [6]:

$$\begin{aligned} \overline{V_j}^* &= \frac{1}{500} \sum_{w=1}^{500} V(w), & D^*(V_j) &= \frac{1}{500} \sum_{w=1}^{500} \left( V(w) - \overline{V_j}^* \right)^2, \\ P^*(V_j) &= \frac{1}{500} \sum_{w=1}^{500} \text{sgn}(\Psi_\phi - V(w)), & & (17) \\ \overline{r_{12}}^* &= \frac{1}{500} \sum_{w=1}^{500} r_{12}(w), & D^*(r_{12}) &= \frac{1}{500} \sum_{w=1}^{500} \left( r_{12}(w) - \overline{r_{12}}^* \right)^2. \end{aligned}$$

Согласно теории, основной показатель, который оказывает влияние на работоспособность критериев – ограничение длины исследуемой выборки. Проведем эксперимент для некоррелированного нормального шума с параметрами  $M = 10$  и  $\sigma = 1$  при различных длинах выборки от 10 до 100. Результаты показаны в табл. 2, при этом в ней представлены теоретические значения, рассчитанные по формулам (10). Гистограммы при длинах выборок 10, 30 и 50 для показателя  $V_j^*$  представлены на рис. 1 (длина интервала гистограмм  $\Delta V = 0,025$ ), для показателя  $r_{12}^*$  – на рис. 2 (длина интервала  $\Delta r_{12} = 0,05$ ).

Как видно из табл. 2 и рис. 1, 2, критерии оценки стационарности и независимости работоспособны при исследовании некоррелированных выборок. Чем выборка короче, тем дисперсии определения показателей  $V_j^*$  и  $r_{12}^*$  больше, соответственно точность определения меньше, но даже при длине выборки  $n = 10$  эффективность оценивания по вероятности правильного решения для оценки стационарности не менее 0,9.

Таблица 2

Влияние длины выборки на работоспособность критериев

M	V <sub>1</sub>			V <sub>3</sub>			V <sub>5</sub>			R <sub>12</sub>		
	$\overline{V_1}^*$	$\sqrt{D}^*$	P <sub>1</sub> <sup>*</sup>	$\overline{V_3}^*$	$\sqrt{D}^*$	P <sub>3</sub> <sup>*</sup>	$\overline{V_5}^*$	$\sqrt{D}^*$	P <sub>5</sub> <sup>*</sup>	$\overline{r_{12}}^*$	$\sqrt{D}^*$	P <sup>*</sup>
Теоретические												
10	1,286	1,060	0,95	1,400	1,400	0,95	1,667	2,687	0,95	0,094	0,224	0,95
30	1,074	0,418		1,080	0,431		1,087	0,446		0,033	0,194	
50	1,043	0,307		1,044	0,310		1,047	0,315		0,020	0,188	
100	1,021	0,207		1,021	0,210		1,022	0,210		0,0099	0,183	
Экспериментальные												
10	1,129	0,440	0,90	2,283	2,560	0,82	9,179	19,51	0,61	- 0,087	0,193	0,35
30	1,034	0,202	0,97	1,176	0,440	0,90	1,344	0,709	0,82	- 0,018	0,122	0,73
50	1,020	0,152	0,98	1,091	0,290	0,94	1,165	0,401	0,88	- 0,020	0,097	0,90
100	1,005	0,095	0,99	1,035	0,167	0,97	1,060	0,219	0,95	- 0,037	0,072	0,97

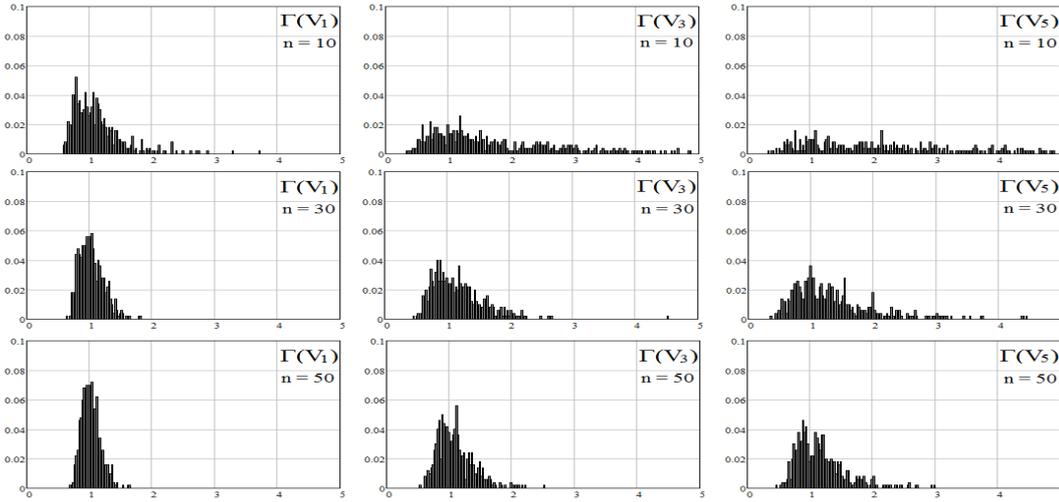


Рис. 1. Гистограммы показателя  $V_j^*$  для шума при  $N = 10, 30$  и  $50$

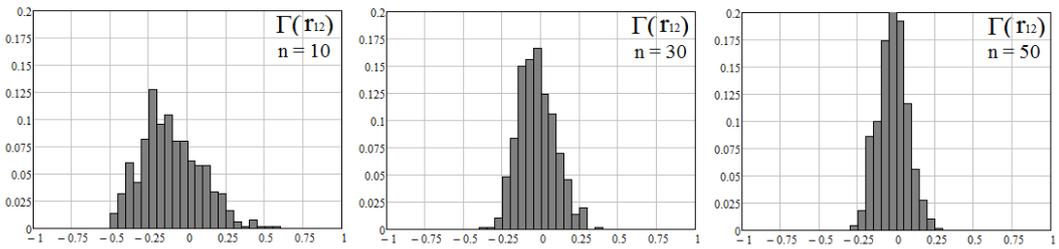
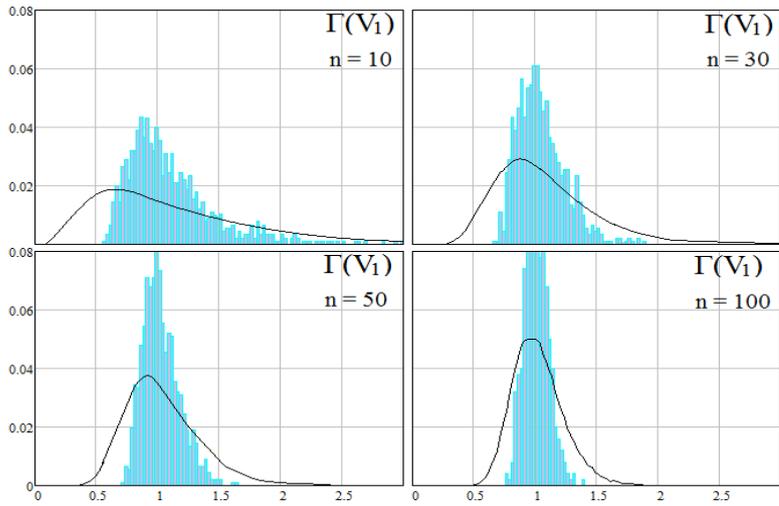


Рис. 2. Гистограммы показателя  $r_{12}^*$  для шума при  $N = 10, 30$  и  $50$

Проведем визуальный сравнительный анализ (рис. 3) гистограмм показателя  $V_j^*$  первой разности при длинах выборок 10, 30, 50 и 100, полученных по экспериментальным данным, и их теоретических графиков законов распределения Фишера

$$W(V/n_1 n_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} V^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} V\right)^{-\frac{n_1 + n_2}{2}}, \quad (18)$$

$$n_1 = m - j, \quad n_2 = m.$$



**Рис. 3. Сравнительный анализ гистограмм показателя  $V_j^*$  и их теоретических графиков законов распределения Фишера**

Как видно из рис. 3, гистограммы экспериментальных значений незначительно отличаются от теоретических графиков, при этом средние значения близки, а главное различие заключается в разбросах.

Теория оценки стационарности разработана для нормальных последовательностей. Второй вычислительный эксперимент имеет своей целью оценить работоспособность метода для измерений с другими законами распределений вероятностей. Модель измерений (1) описывается нормальным, экспоненциальным и бета распределениями. Они и выбраны для проведения этого эксперимента.

*Условия проведения эксперимента.* Оценим показатели (17) для некоррелированных выборок со стандартным нормальным распределением при  $\sigma = 1$ , экспоненциальным при  $\lambda = 1$  и бета-распределением при  $\alpha = 5$  и  $\beta = 1$ , если размер выборок составляет 100 измерений. Результаты эксперимента представлены в табл. 3.

**Таблица 3**

**Сравнение оценок стационарности измерений выборок с нормальным, экспоненциальным и бета-распределением**

	$V_1$			$V_3$			$V_5$			$r_{12}$		
	$\bar{V}_1^*$	$\sqrt{D^*}$	$P_1^*$	$\bar{V}_3^*$	$\sqrt{D^*}$	$P_3^*$	$\bar{V}_5^*$	$\sqrt{D^*}$	$P_5^*$	$\bar{r}_{12}^*$	$\sqrt{D^*}$	$P^*$
Теор.	1,021	0,207	0,95	1,021	0,210	0,95	1,022	0,210	0,95	0,0099	0,182	0,95
Норм.	1,005	0,095	0,99	1,035	0,167	0,97	1,060	0,219	0,95	-0,037	0,072	0,97
Эксп.	1,013	0,105	0,98	1,048	0,192	0,97	1,079	0,253	0,94	-0,027	0,075	0,98
Бета	1,001	0,105	0,99	1,025	0,184	0,98	1,048	0,228	0,95	-0,031	0,069	0,97

Из анализа результатов табл. 3 следует вывод, что оценки стационарности измерений рассматриваемых законов распределения близки. Учитывая, что экспоненциальное распределение имеет наибольшие различия с нормальным распределением, можно утверждать, что критерий оценки стационарности работоспособен не только для распределений, представленных в таблице, но, очевидно, и для других.

Эффективность оценивания по вероятности правильного решения  $P^*(V)$  близка к единице, соответственно, значения, представленные в таблице, можно принимать как эталонные для рассматриваемого критерия, с ними можно сравнивать и отличающиеся от них стоит рассматривать как аномальные.

Важным вопросом при исследовании работоспособности критерия оценки стационарности является качество оценок, получаемых при каждой последующей разности. Цель данного эксперимента – выбор количества разностей, необходимых для максимальной информативности критерия, и выбор номеров этих разностей. Исследуются выборки некоррелированного нормального шума длиной 100 и параметрами  $M = 0$  и  $\sigma = 1$  для номеров разностей 1–20. Экспериментальные результаты  $\bar{V}_j^*$  и  $D^*(V_j)$  и теоретические  $M[V_j]$  и  $D[V_j]$ , рассчитанные по формулам (11), в точках 1, 3, 5, 10, 15, 20 представлены в табл.4.

Таблица 4

Зависимость показателей  $\bar{V}_j^*$  и  $\sqrt{D^*(V_j)}$  от  $j$ 

	V1	V3	V5	V10	V15	V20
$M[V_j]$	1,021	1,021	1,022	1,023	1,024	1,026
$\bar{V}_j^*$	1,005	1,035	1,06	1,122	1,201	1,312
$\sqrt{D[V_j]}$	0,207	0,210	0,210	0,214	0,217	0,221
$\sqrt{D^*(V_j)}$	0,095	0,167	0,219	0,285	0,375	0,557

Как видно из табл. 4, каждая последующая рассматриваемая разность характеризуется увеличением дисперсии показателя  $V_j^*$  и, как следствие, из-за ненормальности закона распределения оценок, среднего значения. В ходе проведения эксперимента отмечена зависимость между оценками показателя  $V_j^*$ , полученными при разных номерах разностей: каждая оценка, полученная при последующей разности, всегда больше. Если оценка  $V_j^*$ , полученная по выборке первой разности, выходит за пороги табл. 1, то и все оценки, полученные при последующих разностях, также будут выходить за порог. Учитывая эту особенность и то, что оценки показателя  $V_j^*$ , полученные на первой разности, имеют наименьшую ошибку оценивания, является целесообразным при использовании исследуемого критерия оценки стационарности применять лишь оценки показателя  $V_j^*$ , полученные по первой разности, все остальные оценки показателя  $V$  являются неинформативными.

Согласно теории оценки стационарности измерений, метод работоспособен для неавтокоррелированных последовательностей. Теоретически рассмотрим влияние автокорреляции измерений на результаты оценок стационарности. Легко убедиться, что если выборки случайных величин автокоррелированы, то, несмотря на их стационарность, дисперсии разностей зависят от коэффициента корреляции.

Например, если последовательность Маркова  $z(i) = rz(i-1) + \sqrt{1-r^2}\xi(i)$ , то дисперсии первой и второй разности равны

$$D[\Delta z_1(i)] = 2 - 2r, \quad D[\Delta z_2(i)] = 6 - 8r + 2r^2. \quad (19)$$

Для анализа этого вопроса сформируем табл. 5 со сравнением теоретических показателей дисперсий, полученных по формуле (19), и показателей стационарности  $V_j$  по формуле (9) с экспериментальными для марковских выборок различной автокорреляции.

Таблица 5

Сравнение теоретических показателей дисперсий и стационарности с экспериментальными

R	Разность 1						Разность 2					
	D[z(i)]		D[Δz <sub>j</sub> (i)]		M[V]		D[z(i)]		D[Δz <sub>j</sub> (i)]		M[V]	
	теор	Экс	теор	Экс	теор	экс	теор	Экс	Теор	экс	Теор	Экс
0		0,991	2,00	1,957	1,00	1,013		0,991	6,00	5,750	1,00	1,034
0,1	1,00	0,989	1,80	1,790	1,11	1,105	1,00	0,989	5,22	5,025	1,15	1,181
0,3		0,987	1,40	1,382	1,43	1,428		0,987	3,78	3,591	1,59	1,649
0,5		0,984	1,00	1,020	2,00	1,930		0,984	2,50	2,426	2,40	2,434
0,7		0,981	0,60	0,607	3,33	3,231		0,981	1,38	1,406	4,35	4,186
0,9		0,908	0,20	0,219	10,0	8,308		0,908	0,42	0,430	14,3	12,673

Как видно из табл. 5, теоретические показатели дисперсий и стационарности полностью подтверждаются экспериментальными значениями. Следовательно, в случае автокоррелированности измерений решающее правило проверки стационарности (11) нельзя использовать, не убедившись в независимости измерений.

Рассмотрим подробнее условия работоспособности показателей стационарности и независимости для автокоррелированных выборок. Проведем следующий вычислительный эксперимент: рассматривается марковская последовательность случайных величин с экспоненциальным законом распределения вероятностей (2), описывает ΔS(k) модели (1), длиной 100 при различных значениях автокорреляции. Результаты представлены в табл. 6. Гистограммы для случая r = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 представлены на рис. 4 (длина интервала гистограмм ΔV = 0,05).

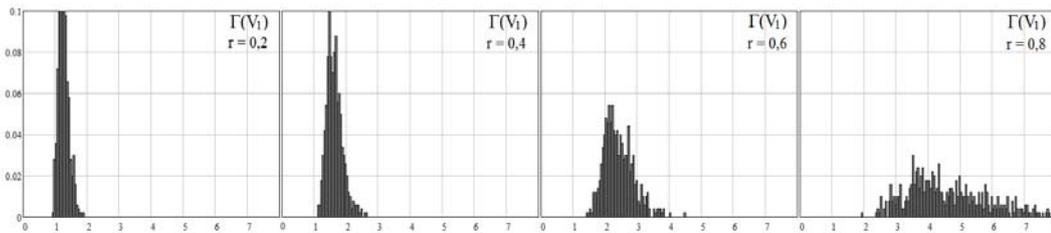


Рис. 4. Гистограммы V для автокоррелированных измерений

Таблиця 6

**Влияние автокоррелированности измерений  
на работоспособность критериев оценки стационарности и независимости**

R	V <sub>1</sub>			V <sub>3</sub>			V <sub>5</sub>			r <sub>12</sub>		
	$\overline{V_1^*}$	$\sqrt{D^*}$	P <sub>1</sub> <sup>*</sup>	$\overline{V_3^*}$	$\sqrt{D^*}$	P <sub>3</sub> <sup>*</sup>	$\overline{V_5^*}$	$\sqrt{D^*}$	P <sub>5</sub> <sup>*</sup>	$\overline{r_{12}^*}$	$\sqrt{D^*}$	P <sup>*</sup>
0	1,005	0,095	0,99	1,035	0,167	0,97	1,060	0,219	0,95	-0,037	0,065	0,97
0,1	1,105	0,122	0,98	1,18	0,210	0,94	1,229	0,266	0,85	0,036	0,075	0,90
0,2	1,254	0,158	0,93	1,441	0,285	0,65	1,534	0,377	0,55	0,099	0,081	0,65
0,3	1,428	0,192	0,71	1,709	0,365	0,35	1,844	0,477	0,27	0,181	0,084	0,36
0,4	1,635	0,251	0,37	2,063	0,482	0,09	2,243	0,637	0,08	0,253	0,087	0,07
0,5	1,93	0,307	0,04	2,538	0,610	0,01	2,754	0,818	0,01	0,351	0,091	0
0,6	2,412	0,464	0,01	3,359	0,904	0	3,656	1,124	0	0,446	0,092	0
0,7	3,231	0,754	0	4,832	1,605	0	5,339	2,020	0	0,556	0,091	0
0,8	4,632	1,314	0	7,281	2,542	0	8,012	2,998	0	0,678	0,086	0
0,9	8,308	3,804	0	13,78	7,008	0	15,34	8,333	0	0,792	0,073	0

Анализ полученных результатов показал, что автокоррелированность измерений значительно влияет на работоспособность метода оценки стационарности. Причем при автокорреляции  $r = 0,35$  эффективность оценивания по вероятности правильного решения составляет лишь 0,5. На рис. 4 видно, что среднее значение и дисперсия показателя  $V_j^*$  при значениях автокорреляции  $r < 0,6$  увеличивается незначительно, при автокоррелированности измерений выборки  $r = 0,7-0,8$  значения резко увеличиваются. Соответственно, можно судить о том, что при условии  $r > 0,8$  использовать рассматриваемый метод оценки стационарности невозможно. В свою очередь, оценки показателя  $r_{12}^*$  практически не зависят от автокоррелированности измерений. Об этом свидетельствуют незначительные изменения дисперсии показателя  $r_{12}^*$ . Важно отметить, что показатели стационарности и независимости между собой высококоррелированы  $r_{ст-нез} \approx 0,8-0,9$ .

**Выводы.** По результатам визуально-аналитического факторного анализа работоспособности критериев оценки стационарности и независимости измерений, используя гистограммы оценок измеряемого параметра и их статистические характеристики (средние значения и разбросы), представленные в виде графиков и таблиц, можно сделать следующие выводы и рекомендации.

Критерии оценки стационарности и независимости работоспособны при исследовании некоррелированных выборок. Единственным фактором, влияющим на точность их оценок, является ограничение длины исследуемой выборки. Чем выборка короче, тем дисперсии определения показателей  $V_j^*$  и  $r_{12}^*$  больше, соответственно – точность определения меньше. Из сравнения гистограмм показателя  $V_j^*$  первой разности, полученных по экспериментальным данным, и их теоретических графиков видно, что они незначительно отличаются, при этом средние значения близки, а главное различие заключается в разбросах.

Каждая последующая рассматриваемая разность характеризуется увеличением дисперсии показателя  $V_j^*$  и среднего значения. Отмечено зависимость между оценками показателя  $V_j^*$ , полученными при разных номерах разностей: каждая оценка, полученная при последующей разности, всегда больше. Учитывая эту особенность и то, что оценки показателя  $V_j^*$ , полученные на первой разности, имеют наименьшую ошибку оценивания, считается целесообразным при использовании исследуемого критерия оценки стационарности применять лишь оценки показателя  $V_j^*$ , полученные по первой разности, все остальные оценки показателя  $V$  являются неинформативными.

Анализ показал, что автокоррелированность измерений значительно влияет на работоспособность метода оценки стационарности. При автокорреляции  $r = 0,35$  эффективность оценивания по вероятности правильного решения составляет лишь 0,5, при  $r > 0,35$  использовать рассматриваемый метод оценки стационарности невозможно. Теоретические показатели дисперсий и стационарности полностью подтверждаются экспериментальными значениями. В свою очередь, оценки показателя  $r_{12}^*$  практически не зависят от автокоррелированности измерений. Важно отметить, что показатели стационарности и независимости между собой высококоррелированы  $r_{ст-нез} \approx 0,8-0,9$ .

### Бibliографические ссылки

1. **Дегтярев А.В.** Состояние и задачи совершенствования методологических основ неразрушающего контроля и технической диагностики ракетно-космической техники / А.В. Дегтярев, А.Э. Кашанов, В.П. Малайчук // ISSN 1727-7337 Авиационно-космическая техника и технология. – № 5 (122). – 2015. – С. 27–34.
2. **Бондарь М.А.** Математическое обеспечение системы менеджмента качества ракетно-космической продукции / М.А. Бондарь, А.Э. Кашанов, В.П. Малайчук // ISSN 1727-7337 Авиационно-космическая техника и технология. – № 3 (120). – 2015. – С. 94–101.
3. **Малайчук В.П.** Математическая дефектоскопия: монография / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой. – Днепропетровск : Системные технологии, 2005. – 180 с.
4. **Малайчук В.П.** Математическое моделирование марковских гамма-последовательностей / В.П. Малайчук, А.И. Федорович // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 6 (77). – 2011. – С. 12–19.
5. **Кобзарь А.И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с. – ISBN 5-9221-0707-0.
6. **Малайчук В.П.** Інформаційно-вимірвальні технології НК : навч. посібник / В.П. Малайчук, О.В. Мозговой, О.М. Петренко. – Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2001. – 240 с.

Надійшла до редколегії 15.06.2016

УДК 629.78

А. А. Маноїленко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***МЕТОД ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

**Предложен метод оценки и проведен анализ точности угловой ориентации и стабилизации малого космического аппарата, оснащенного электромагнитными органами управления, с учетом влияния случайных возмущающих факторов.**

*Ключевые слова:* космический аппарат, система ориентации, угловое движение, точность.

**Запропоновано метод оцінки і проведено аналіз точності кутової орієнтації і стабілізації малого космічного апарату, оснащеного електромагнітними органами керування, з урахуванням впливу випадкових збурюючих факторів.**

*Ключові слова:* космічний апарат, система орієнтації, кутовий рух, точність.

**The method of assessment and the analysis of the accuracy of the angular orientation and stabilization of small spacecraft, equipped with electromagnetic controls, taking into account the influence of random disturbing factors.**

*Keywords:* spacecraft, attitude control system, angular motion, accuracy.

**Введение.** Рассмотрим в качестве объекта управления малый космический аппарат (КА), оснащенный тремя управляющими электромагнитами (УЭМ). Заданы следующие требования к точности угловой ориентации и стабилизации: в режиме поддержания трехосной ориентации в орбитальной системе координат (ОСК) точность должна быть не хуже  $\pm 5$  град (по крену, тангажу и рысканию) при угловых скоростях в связанной системе координат (ССК) не хуже  $\pm 0,01$  град / с.

При этом продолжительность режима гашения угловых скоростей, получаемых КА при отделении от ракеты-носителя (РН), и режима первоначального построения трехосной ориентации КА в ОСК, должна быть минимально возможной, но не более 250 мин (~ 3 орбитальных витка).

Величины проекций вектора угловой скорости КА на оси ССК после отделения от РН, обусловленные ошибками стабилизации и возмущениями за счет процесса отделения, могут составлять:

- в канале крена и тангажа  $|\omega_{x,y}| \leq 4$  град / с;
- в канале рыскания  $|\omega_z| \leq 2$  град / с.

**Постановка задачи.** Требуется оценить точность угловой ориентации и стабилизации КА с учетом влияния случайных возмущающих факторов, вызывающих воздействие на КА возмущающих моментов сил.

**Внешние моменты сил, действующих на КА.** Вектор-момент внешних сил, действующих на КА в полете, определяется по формуле:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_Г + \bar{M}_M + \bar{M}_a + \bar{M}_C, \quad (1)$$

где  $\bar{M}_\Gamma$ ,  $\bar{M}_M$ ,  $\bar{M}_a$ ,  $\bar{M}_C$  – векторы гравитационного момента, момента от взаимодействия корпуса КА с МПЗ, аэродинамического момента и момента сил солнечного давления соответственно.

1. **Гравитационный момент.** Вектор-момент гравитационных сил в проекциях на оси ССК определяется выражением:

$$M_\Gamma = \frac{3\mu}{r^3} \cdot \bar{k} \times \bar{I} \cdot \bar{k}, \quad (2)$$

где  $\bar{I} = \begin{vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix}$  – тензор инерции КА, определенный относительно его

центра масс;

$\bar{r}$  – радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс КА;  $\bar{k}$  – единичный вектор, направленный по радиус-вектору  $\bar{r}$ ;  $\mu = 0.3986 \cdot 10^{15} \frac{M^3}{c^2}$  – гравитационная постоянная Земли.

Для круговых орбит КА при оценке проекций вектора гравитационного момента  $M_\Gamma = (M_x^z, M_y^z, M_z^z)$  применяются следующие формулы:

$$\begin{aligned} M_x^z &= 3\omega_0^2 (I_{yy} - I_{zz}) a_{23} a_{33}, \\ M_y^z &= 3\omega_0^2 (I_{zz} - I_{xx}) a_{13} a_{33}, \\ M_z^z &= 3\omega_0^2 (I_{xx} - I_{yy}) a_{13} a_{23}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$  – средняя орбитальная угловая скорость КА;  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  – направляющие косинусы оси  $Z_0$  ОСК в ССК (третий столбец матрицы перехода от ОСК к ССК).

2. **Момент от взаимодействия корпуса КА с МПЗ.** Вектор-момент от взаимодействия корпуса КА с МПЗ в проекциях на оси ССК определяется выражением:

$$\bar{M}_M = (\bar{m} + \bar{K} \cdot \bar{B}) \times \bar{B}, \quad (4)$$

где  $\bar{B}$  – вектор магнитной индукции МПЗ, компоненты которого измеряются бортовым магнитометром;  $\bar{m} \leq |300 \ 300 \ 300|^T$  ед. CGSM – вектор магнитного момента корпуса КА в ССК;  $\bar{K} = \{k_{ij}\}$  – матрица индукционных коэффициентов корпуса КА в ССК, элементы которой равны следующим значениям:  $k_{ii} \leq 700$  ед. CGSM/Эрстед,  $i = 1 \dots 3$ ,  $k_{ij} \leq 70$  ед. CGSM/Эрстед,  $i \neq j = 1 \dots 3$ .

Компоненты вектора  $\bar{m}$  и недиагональные элементы матрицы  $\bar{K}$  могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Диагональные элементы матрицы  $\bar{K}$  имеют только положительные значения и, как правило, не равны между собой.

**Примечание.** При расчетах момента в системе измерений СИ принимаются следующие размерности величин, входящих в (4):  $[m] = [A \cdot m^2]$ ,  $[K] = [A \cdot m^2 / Tл]$ ,  $[B] = [Tл]$ .

3. **Аэродинамический момент.** Вектор-момент аэродинамических сил в проекциях на оси ССК определяется выражением:

$$\bar{M}_a = \left( \bar{m}_a + \left( \frac{\bar{r}}{l_k} \right) \times \bar{c}_a \right) \cdot A_k l_k q, \tag{5}$$

где  $\bar{m}_a = |m_x \ m_y \ m_z|^T$  – вектор моментных коэффициентов;  $\bar{c}_a = |c_x \ c_y \ c_z|^T$  – вектор силовых коэффициентов;  $\bar{r} = -|x_{цм} \ y_{цм} \ z_{цм}|^T$  – радиус-вектор, соединяющий центр масс КА с началом  $O_K$  конструкторской системы координат, м;  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор, кгс / м<sup>2</sup>;  $\rho$  – плотность атмосферы на высоте полета КА, кг/м<sup>3</sup> (кгс · с<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>);  $V$  – линейная скорость КА относительно вращающейся атмосферы Земли, м/с;  $A_k = 0,580 \text{ м}^2$  – характерная площадь КА;  $l_k = 0,767 \text{ м}$  – характерная длина КА.

4. **Момент сил солнечной радиации.** Вектор-момент сил солнечной радиации в проекциях на оси ССК определяется выражением:

$$\bar{M}_C = \left( \bar{m}_C + \left( \frac{\bar{r}}{l_k} \right) \times \bar{c}_C \right) \cdot A_k l_k q_S, \tag{6}$$

где  $\bar{m}_C = |m_x \ m_y \ m_z|^T$  – вектор моментных коэффициентов;  $\bar{c}_C = |c_x \ c_y \ c_z|^T$  – вектор силовых коэффициентов;  $q_S = 2.36 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кгс}}{\text{м}^2}$  – световой напор на высоте полета КА.

**Управляющие моменты, создаваемые электромагнитами.** Вектор механического управляющего момента, действующего на КА, за счет взаимодействия подсистемы управляющих электромагнитов с МПЗ определяется по формуле:

$$M^y = (M_x^y, M_y^y, M_z^y) = P \times B, \tag{7}$$

где  $B$  – вектор магнитной индукции МПЗ в проекциях на оси ССК, измеряемой магнитометром,  $H / (A \cdot м)$ ;  $P$  – вектор магнитного управляющего момента подсистемы УЭМ, учитывающий магнитные моменты отдельных электромагнитов и формируемый по алгоритмам управления ориентацией и стабилизацией [5; 7; 10] на основе данных об углах ориентации и угловых скоростях КА в ОСК и ССК соответственно,  $A \cdot м^2$ .

Компоненты вектора магнитной индукции МПЗ определяются по формулам:

$$(B_x, B_y, B_z)^T = \mu_0 (H_x, H_y, H_z)^T, \tag{8}$$

$$(H_x, H_y, H_z)^T = A \cdot (H_{x_0}, H_{y_0}, H_{z_0})^T, \tag{9}$$

$$H_{x_0} = \frac{\mu}{r^3} \sin i \cos u, H_{y_0} = \frac{\mu}{r^3} \cos i, H_{z_0} = -2 \frac{\mu}{r^3} \sin i \sin u, \tag{10}$$

где  $B_x, B_y, B_z$  – проекции вектора магнитной индукции МПЗ на оси ССК,  $H / (A \cdot m)$ ;  $H_x, H_y, H_z$  – проекции вектора напряженности МПЗ на оси ССК,  $A / m$ ;  $H_{x_0}, H_{y_0}, H_{z_0}$  – проекции вектора напряженности МПЗ на оси ОСК,  $A / m$ ;  $A$  – матрица перехода от ОСК к ССК;  $\mu_0 = 1,256637 \cdot 10^{-6}$  – магнитная постоянная,  $H / A^2$ ;  $\mu = 0,3 \cdot R_3^3 \cdot 79,6$  – константа,  $см^3 \cdot A / m$ ;  $i$  – наклонение орбиты КА,  $рад$ ;  $u = \omega_0 t$  – аргумент широты (полярный угол),  $рад$ ;  $R_3$  – радиус Земли,  $см$ ;  $r$  – расстояние от центра Земли до центра масс КА,  $см$ .

В табл. 1 приведены диапазоны изменения номинальных значений перечисленных выше моментов, действующих на КА, в проекциях на оси ССК, полученные в ходе расчетов.

Таблица 1

Диапазоны изменения номинальных значений моментов сил, действующих на КА

Наименование, размерность	Значение
Гравитационный момент, кгс·м	$M_x = \pm 4,8 \cdot 10^{-7}; M_y = \pm 3,0 \cdot 10^{-7}; M_z = \pm 1,8 \cdot 10^{-7}$
Момент от взаимодействия корпуса КА с МПЗ, кгс·м	$M_x = \pm 1,6 \cdot 10^{-6}; M_y = \pm 1,6 \cdot 10^{-6}; M_z = \pm 0,8 \cdot 10^{-6}$
Момент аэродинамических сил, кгс·м	$M_x = \pm 2,3 \cdot 10^{-7}; M_y = \pm 2,4 \cdot 10^{-7}; M_z = \pm 1,9 \cdot 10^{-8}$
Момент сил солнечной радиации, кгс·м	$M_x = \pm 5,1 \cdot 10^{-7}; M_y = \pm 5,2 \cdot 10^{-7}; M_z = \pm 3,5 \cdot 10^{-8}$
Управляющий момент, создаваемый электромагнитами, кгс·м	$M_x = \pm 4,8 \cdot 10^{-5}; M_y = \pm 4,9 \cdot 10^{-5}; M_z = \pm 2,6 \cdot 10^{-5}$

Из табл. 1 следует, что управляющий момент, создаваемый электромагнитами, существенно больше всех остальных моментов, действующих на КА, что обуславливает достаточно большой запас по управляемости КА.

**Возмущающие факторы.** Анализ математических моделей углового движения КА [1–12] показывает, что точность ориентации и стабилизации КА относительно заданного базиса (орбитальной системы координат) зависит от точности определения параметров орбиты КА, характеристик КА и МПЗ, применяемого закона и алгоритмов управления угловым движением КА, и обусловлена влиянием следующих случайных возмущающих факторов:

- 1) для параметров орбиты КА:
  - погрешностью  $\Delta r$  определения модуля радиус-вектора, соединяющего центр Земли и центр масс КА, получаемого в результате решения на борту КА навигационной задачи или измерений с помощью средств глобальных систем спутниковой навигации;
  - погрешностью  $\Delta i$  определения величины наклонения орбиты КА;

- погрешностью  $\Delta\omega_0$  определения величины орбитальной угловой скорости КА;
- погрешностью  $\Delta u$  определения аргумента широты текущей точки нахождения КА на орбите (полярного угла  $u = \omega_0 t$ );
- погрешностями определения углового положения осей ОСК относительно осей выбранной инерциальной системы координат (ИСК);

2) для характеристик КА:

- случайными разбросами  $\Delta I_x, \Delta I_y, \Delta I_z$  величин моментов инерции КА;
- случайными разбросами  $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z$  величин собственных магнитных моментов, создаваемых управляющими электромагнитами;
- случайными разбросами величин проекций вектора-момента аэродинамических сил;
- случайными разбросами величин проекций вектора-момента сил солнечного давления;
- случайными разбросами величин проекций вектора магнитного момента КА, обусловленного взаимодействием его корпуса с МПЗ;
- погрешностями  $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$  измерения проекций вектора угловой скорости КА на оси ССК с помощью датчика угловых скоростей;
- погрешностями  $\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\theta$  определения углового положения осей ССК относительно осей ОСК (углов ориентации КА по крену  $\varphi$ , рысканию  $\psi$  и тангажу  $\theta$  соответственно);

3) для характеристик МПЗ:

- погрешностями  $\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z$  измерения с помощью магнитометра проекций вектора магнитной индукции МПЗ на оси ССК.

С учетом этого выделим следующие случайные возмущающие факторы и оценочные значения погрешностей и разбросов, связанных с ними, которые приведены в табл. 2.

Величины погрешностей и разбросов, приведенные в табл. 2, как следствие, влияют на величину суммарного возмущающего момента, действующего на КА.

**Таблица 2**

**Погрешности и случайные разбросы, влияющие на точность ориентации и стабилизации КА**

	Наименование, размерность	Значение
1	Погрешность определения модуля радиус-вектора $r$ , соединяющего центр Земли с центром масс КА, м	$\pm 5000$
2	Погрешность определения наклона $i$ орбиты КА, град	$\pm 1,0$
3	Погрешности определения углового положения осей ССК относительно осей ОСК (углов ориентации КА по крену $\varphi$ , рысканию $\psi$ и тангажу $\theta$ ), град	$\pm 0,1$
4	Погрешности измерения проекций $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора угловой скорости КА на оси ССК, град / с	$\pm 0,001$
5	Погрешности измерения проекций $B_x, B_y, B_z$ вектора магнитной индукции МПЗ на оси ССК с помощью магнитометра, %	$\pm 10$
6	Разбросы величин моментов инерции КА $I_x, I_y, I_z$ , %	$\pm 10$
7	Разбросы величин проекций вектора-момента аэродинамических сил, %	$\pm 20$
8	Разбросы величин проекций вектора-момента сил солнечного давления, %	$\pm 20$

**Метод оценки точности угловой ориентации и стабилизации КА.**

Для оценки точности угловой ориентации в ОСК и угловых скоростей относительно осей ССК в установившемся режиме орбитального движения КА предлагается следующий *метод*, учитывающий погрешности и случайные разбросы, приведенные в табл. 2:

1. Моделируют номинальное угловое движение КА вокруг центра масс с использованием *линеаризованной* математической модели для одного канала управления (тангаж, рыскание, крен). При этом учитывают только лишь номинальные величины возмущающих моментов сил (гравитационных, аэродинамических, солнечного давления, от взаимодействия корпуса КА с МПЗ) и применяют упрощенный алгоритм управления электромагнитами. То есть не учитывают действие возмущающих факторов (*номинальный случай*; табл. 1). В результате получают «номинальную» оценку  $\Delta_{\text{ном}}$  точности угловой ориентации и стабилизации КА.

2. Моделируют серию возмущенных угловых движений КА. При этом в математической модели поочередно учитывают величины погрешностей и случайных разбросов каждого отдельного возмущающего фактора. То есть оценивают влияние каждого из возмущающих факторов (*возмущенные случаи*; табл. 2). В результате получают «возмущенные» оценки  $\Delta_{\text{возм},i}$  точности угловой ориентации и стабилизации КА за счет влияния каждого отдельного возмущающего фактора.

3. Для оценки влияния отдельного возмущающего фактора на точность угловой ориентации и стабилизации КА в ОСК и ССК относительно номинального случая вводят в рассмотрение дискретную случайную величину  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , для которой затем определяют математическое  $M$  ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО)  $\sigma$ . Значение  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , характеризует степень ухудшения «номинальной» оценки точности ориентации и стабилизации КА за счет влияния  $i$ -го случайного возмущающего фактора (в процентном выражении).

4. Для определения предельной ( $3\sigma$ ) оценки точности ориентации КА  $\Delta_{\text{пред}}$  корректируют «номинальную» оценку  $\Delta_{\text{ном}}$  точности угловой ориентации и стабилизации КА в соответствии с формулой

$$\Delta_{\text{пред}} = \Delta_{\text{ном}} + \Delta_{\text{ном}} (M + 3|\sigma|) / 100. \quad (12)$$

Предложенный метод можно также распространить и на каналы управления по крену и рысканию для оценки точности угловой ориентации и стабилизации КА.

**Математическая модель углового движения КА.** В качестве *линеаризованной* математической модели углового движения КА для одного канала управления (например, канала тангажа) с учетом внешних возмущающих моментов и с использованием упрощенного алгоритма управления КА примем следующую:

$$I_y \dot{\omega}_y = -(M_y^y + M_y^z + M_y^a + M_y^c + M_y^k); \quad \dot{\theta} = \omega_y - \omega_0. \quad (13)$$

Величины действующих на КА моментов сил определяются по следующим формулам:

– требуемого управляющего момента

$$A_y = K_1\theta + K_2\dot{\theta}, \quad (14)$$

– располагаемого управляющего момента

$$M_y^y = -\frac{K_y}{B^2} \cdot A_y (B_x^2 - B_z^2), \quad (15)$$

– гравитационного момента

$$M_y^z = 3\omega_0^2 (I_z - I_x) \sin \theta \cos \theta, \quad (16)$$

– момента от взаимодействия корпуса КА с МПЗ

$$M_x^{МПЗ} = 0,3 + 7000B_x + 700B_y + 700B_z, \quad (17)$$

$$M_z^{МПЗ} = 0,3 + 700B_x + 700B_y + 7000B_z,$$

$$M_y^k = M_z^{МПЗ} B_x - M_x^{МПЗ} B_z, \quad (18)$$

– аэродинамического и солнечного моментов  $M_y^a, M_y^c$  – в соответствии с формулами (5), (6).

В (12) – (18) приняты следующие обозначения:  $I_x, I_y, I_z$  – осевые моменты инерции КА;  $\theta$  – угол ориентации КА в ОСК по тангажу;  $\dot{\theta}, \omega_y, \omega_0$  – угловые скорости КА в ОСК, ССК соответственно и орбитальная угловая скорость;  $K_1, K_2, K_y$  – коэффициенты усиления системы ориентации КА;  $B_x, B_y, B_z$  – компоненты вектора магнитной индукции МПЗ в проекциях на оси ССК;  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ .

**Результаты моделирования.** С учетом изложенного проведено моделирование номинального и возмущенного управляемого углового движения КА в канале тангажа для следующих исходных данных и величин погрешностей, приведенных в табл. 2:

– собственный магнитный момент каждого УЭМ, не более  $10 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ;

$$I_x = 1,443 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; I_y = 1,550 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; I_z = 1,270 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$K_y = -0,1; k_1 = 0,005; k_2 = 1,0; \theta(0) = 30 \text{ град}; \dot{\theta}(0) = 4 \text{ град/с}; \omega_0 = 0,0612 \text{ град/с};$$

$$M_y^a = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ кгс} \cdot \text{м}; M_y^c = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ кгс} \cdot \text{м}; M_y^k = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ кгс} \cdot \text{м}.$$

Из результатов моделирования номинального углового движения КА (номинальный случай, без учета влияния возмущающих факторов) следует, что предельная ( $3\sigma$ ) точность угловой ориентации КА в ОСК по тангажу в установившемся режиме не хуже  $\Delta_{ном} = \pm 0,476$  град.

В табл. 3 приведены результаты моделирования возмущенного углового движения КА (возмущенный случай, с учетом влияния возмущающих факторов) – величины, характеризующие степень влияния каждого возмущающего фактора на точность угловой ориентации КА в ОСК, полученную для номинального случая.

При этом предельная ( $3\sigma$ ) точность стабилизации КА в ССК по угловой скорости не хуже  $\pm 0,001$  град / с.

Таблица 3

## Влияние возмущающих факторов на точность угловой ориентации КА

Наименование возмущающего фактора, значение	Предельная ( $3\sigma$ ) точность угловой ориентации КА в ОСК по тангажу за счет влияния случайного возмущающего фактора (возмущенный случай), град	Значения случайной величины $\xi$ , характеризующие степень ухудшения номинальной точности ориентации КА за счет влияния случайного возмущающего фактора, %
Разброс величины момента инерции КА, $\Delta I_x = \pm 10\% I_x$	$\pm 0,478$	0,4
Разброс величины момента инерции КА, $\Delta I_y = \pm 10\% I_y$	$\pm 0,478$	0,4
Разброс величины момента инерции КА, $\Delta I_z = \pm 10\% I_z$	$\pm 0,478$	0,4
Разброс величины аэродинамического момента, $\Delta Ma = \pm 20\% Ma$	$\pm 0,504$	5,9
Разброс величины момента сил солнечного давления, $\Delta Mc = \pm 20\% Mc$	$\pm 0,536$	12,6
Погрешность измерения проекции вектора магнитной индукции, $\Delta B_x = \pm 10\% B_x$	$\pm 0,491$	3,2
Погрешность измерения проекции вектора магнитной индукции, $\Delta B_y = \pm 10\% B_y$	$\pm 0,477$	0,2
Погрешность измерения проекции вектора магнитной индукции, $\Delta B_z = \pm 10\% B_z$	$\pm 0,561$	17,8
Погрешность определения модуля радиус-вектора положения КА, $\Delta r = \pm 5000$ м	$\pm 0,478$	0,4
Погрешность определения наклона орбиты КА, $\Delta i = \pm 1$ град	$\pm 0,479$	0,6
Погрешность определения углового положения осей ССК относительно осей ОСК (угла ориентации КА в ОСК по тангажу), $\Delta\theta = \pm 0,1$ град	$\pm 0,575$	20,8
Погрешность измерения проекции вектора угловой скорости КА на ось y ССК, $\Delta\omega_y = \pm 0,001$ град / с	$\pm 0,679$	42,6

**Выводы.** С учетом полученных значений математического ожидания и СКО  $M = 8,8\%$ ,  $\sigma = \pm 12,4\%$  для случайной величины  $\xi$  и формулы (12), предельная ( $3\sigma$ ) точность угловой ориентации КА в ОСК по тангажу будет не хуже:

$$\Delta_{\text{пред}} = \Delta_{\text{ном}} + \Delta_{\text{ном}} (M + 3|\sigma|) / 100 = \pm 0,476 (1 + (8,8 + 37,2) / 100) = \pm 0,695 \text{ град.}$$

### Библиографические ссылки

1. **Алексеев К.Б.** Управление космическими летательными аппаратами / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин. – М. : Машиностроение, 1974. – 344 с.
2. **Алпатов А.П.** Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления / А.П. Алпатов, В.И. Драновский, Ю.Д. Салтыков, В.С. Хорошилов. – М. : Машиностроение, 1978. – 200 с.
3. **Бебенин Г.Г.** Системы управления полетом космических аппаратов / Г.Г. Бебенин, Б.С. Скребушевский, Г.А. Соколов ; под ред. Г.Г. Бебенина. – М. : Машиностроение, 1978. – 270 с.
4. **Белецкий В.В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белецкий. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
5. **Боевкин В.И.** Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях / В.И. Боевкин, Ю.Г. Гуревич. – М. : Наука, 1976. – 304 с.
6. **Каргу Л.И.** Системы угловой стабилизации космических аппаратов / Л.И. Каргу. – М. : Машиностроение, 1980. – 170 с.
7. **Коваленко А.П.** Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами / А.П. Коваленко. – М. : Машиностроение, 1975. – 248 с.
8. **Лебедев Д.В.** Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. / Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко. – К. : Наук. думка, 2006. – 298 с.
9. **Павловський М.А.** Системи керування обертальним рухом космічних апаратів / М.А. Павловський, В.П. Горбулін, О.М. Клименко. – К. : Наук. думка, 1997.– 196 с.
10. **Попов В.И.** Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов / В.И. Попов. – М. : Машиностроение, 1986. – 184 с.
11. **Разыграев А.П.** Основы управления полетом космических аппаратов / А.П. Разыграев. – М. : Машиностроение, 1977. – 472 с.
12. **Раушенбах Б.В.** Управление ориентацией космических аппаратов / Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь. – М. : Наука, 1974. – 600 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2016

УДК 004.9

**Д. К. Мозговой, В. В. Васильев**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **АНАЛИЗ МНОГОЛЕТНЕЙ ЗАСУХИ ПО ДАННЫМ LANDSAT 8**

**Выполнен анализ спутниковых снимков со спутника Landsat 8 (съёмочный прибор OLI) с целью оценки влияния засухи 2011–2015 гг. на крупные пресноводные водоемы штата Калифорния. Выявлены существенные смещения береговой линии озер Оровиль и Фолсом.**

*Ключевые слова:* мониторинг засухи, спутниковые снимки, индексные изображения, смещения береговой линии.

**Виконано аналіз супутникових знімків із супутника Landsat 8 (знімальний прилад OLI) з метою оцінки впливу посухи 2011–2015 рр. на великі прісноводні водойми штату Каліфорнія. Виявлено істотні зсуви берегової лінії озер Оровіль і Фолсом.**

*Ключові слова:* моніторинг посухи, супутникові знімки, індексні зображення, зсуви берегової лінії.

**The executed analysis of the Landsat 8 satellite images for the reason estimations of the influence of the drought 2011–2015 on large freshwater lakes in California. Will Revealled essential coast line offsets for Orovili and Folsom lakes.**

*Keywords:* monitoring of the drought, satellite picture, indexed images, offsets of coast line.

**Введение.** По данным ООН, рост потребления пресной воды, вызванный увеличением численности населения и последствиями изменений климата, ведет к растущей нехватке водных ресурсов. В последние 40 лет количество пресной воды на каждого человека в мире уменьшилось на 60 %. В течение последующих 25 лет предполагается дальнейшее уменьшение еще в 2 раза. Вместе с этим резко увеличился расход воды населением на бытовые нужды, особенно в развитых странах, в частности, в США. При ежегодной потребности на выращивание пищи на каждого человека в год, равной 400 000 литров, в США используется 1 700 000 литров. При минимальной потребности в воде для бытовых нужд (в том числе в питьевой воде) 50 литров в день, в США потребляется воды в 8 раз больше, т. е. 400 литров в день. В США запасы воды, накопленные еще со времени ледникового периода, выкачиваются со скоростью, на 25 % большей, чем скорость их возобновления. В некоторых районах превышение расхода над восстановлением достигает 160 %. Как и почва, грунтовые воды восстанавливаются очень медленно - примерно 1 % в год.

**Постановка проблемы.** Штат Калифорния является в США одним из наиболее малообеспеченных пресной водой при высоком водопотреблении – засуха в этом штате достигла катастрофических масштабов. Январь 2015 г. стал самым засушливым месяцем в Калифорнии за все время наблюдений с 1895 года.

От централизованного снабжения водой зависят две трети населения штата – это около 25 млн человек и более 400 тыс. гектаров сельскохозяйственных земель. Рекордно низкими стали уровень грунтовых вод и высота снежного покрова – это можно объяснить выкачиванием подземных вод для ирригации сельскохозяйственных угодий. Уровень воды в водохранилищах Калифорнии приблизился к критически низкой отметке. Власти штата вынуждены ужесточать меры по экономии воды, которой не хватает порой на первоочередные нужды граждан.

**Необходимость проведения исследований.** Решение проблемы рационального использования и охраны водных ресурсов возможно только на основе комплексного системного подхода к изучению пространственно-временных закономерностей влияния природных и антропогенных факторов на качество и объем поверхностных вод с использованием спутниковых и наземных данных. При изучении водного режима суши одним из важных входных параметров гидрологических моделей является площадь поверхности водоемов.

Регулярное получение информации об этом параметре по наземным данным является сложной задачей и требует большого объема работ. Использование спутниковых данных позволяет существенно упростить эту задачу и выполнять ее с большей оперативностью и периодичностью при меньших затратах.

**Исходные данные для исследований.** Для количественной оценки последствий засухи 2013–2015 гг. в Калифорнии были выбраны крупные пресноводные водоемы – озеро Оровиль и озеро Фолсом (рис. 1). Источниками информации о состоянии данных водоемов за указанный период были многоспектральные снимки среднего пространственного разрешения со спутника Landsat 8 (съемочный прибор OLI).

**Методология исследований.** Для определения динамики изменения площади водной поверхности озер Оровиль и Фолсом был выполнен поиск и обработка снимков спутника Landsat 8, которая включала следующие этапы: – предварительные операции (выбор области интереса, поиск снимка по дате);

- спектральний синтез в натуральних и в искусственных цветах;
- создание индексных изображений NDWI и MNDWI;
- пороговая бинаризация индексного изображения;
- морфологическая фильтрация бинарного изображения;
- векторизация бинарного изображения и расчет площади водной поверхности;
- визуализация изменений на цифровой карте и экспорт векторного слоя в kml-файл.

Индексные изображения NDWI (Normalized Difference Water Index) и MNDWI (Modified NDWI) позволяют выделить на спутниковом снимке водные объекты по спектральным каналам ближнего ИК (NIR), коротковолнового ИК (SWIR) и видимого (Green) диапазонов.

Они рассчитываются по формулам:

$$NDWI = (Green - NIR) / (Green + NIR); MNDWI = (Green - SWIR) / (Green + SWIR).$$

Данные формулы используют существенное различие коэффициентов отражения (альбедо) в спектральных каналах ближнего ИК, коротковолнового ИК и видимого диапазонов, соответствующих водной поверхности и суше.

**Результаты исследований.** На рис. 1 показаны результаты основных этапов обработки снимка озера Оровиль от 3 июня 2013 г. со спутника Landsat 8.

На рис. 2 показаны результаты основных этапов обработки снимка озера Оровиль от 12 августа 2015 г. со спутника Landsat 8.

На рис. 3 показаны изменения озера Оровиль между 3 июня 2013 г. и 12 августа 2015 г. по данным спутника Landsat 8. Уменьшение площади водной поверхности составило 2112 га.

Приведенные выше катастрофические последствия многолетней засухи наблюдались практически на всем участке береговой линии озера Оровиль.

Благодаря широкой полосе захвата съемочного прибора OLI спутника Landsat 8 был проведен аналогичный мониторинг изменений для озера Фолсом по тем же снимкам.

На рис. 4 показаны результаты основных этапов обработки снимка озера Фолсом от 3 июня 2013 г. со спутника Landsat 8.

На рис. 5 показаны результаты основных этапов обработки снимка озера Фолсом от 12 августа 2015 г. со спутника Landsat 8.

На рис. 6 показаны изменения озера Фолсом между 3 июня 2013 г. и 12 августа 2015 г. по данным спутника Landsat 8. Уменьшение площади водной поверхности составило 1840 га.

Приведенные катастрофические последствия многолетней засухи наблюдались практически на всем участке береговой линии озера Оровиль.

Благодаря широкой полосе захвата съемочного прибора OLI спутника Landsat 8 был проведен аналогичный мониторинг изменений для озера Фолсом по тем же снимкам.

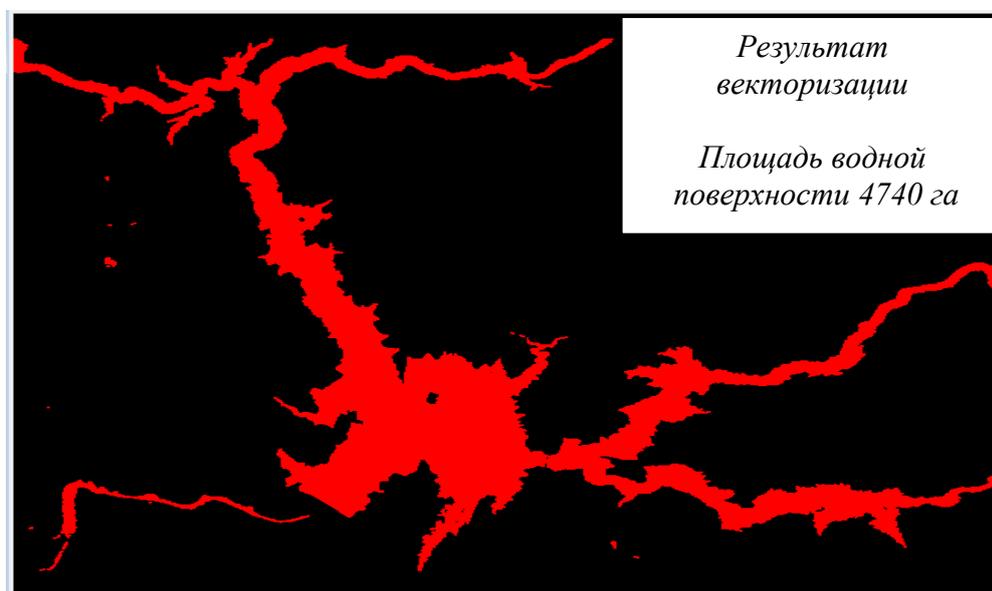
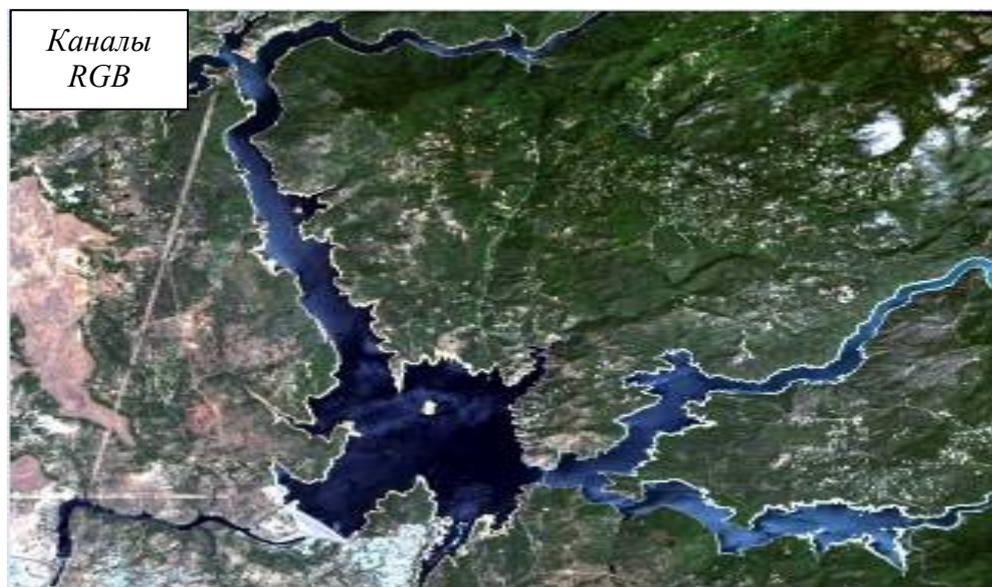


Рис. 1. Результаты обработки снимка озера Оровиль от 3 июня 2013 г.

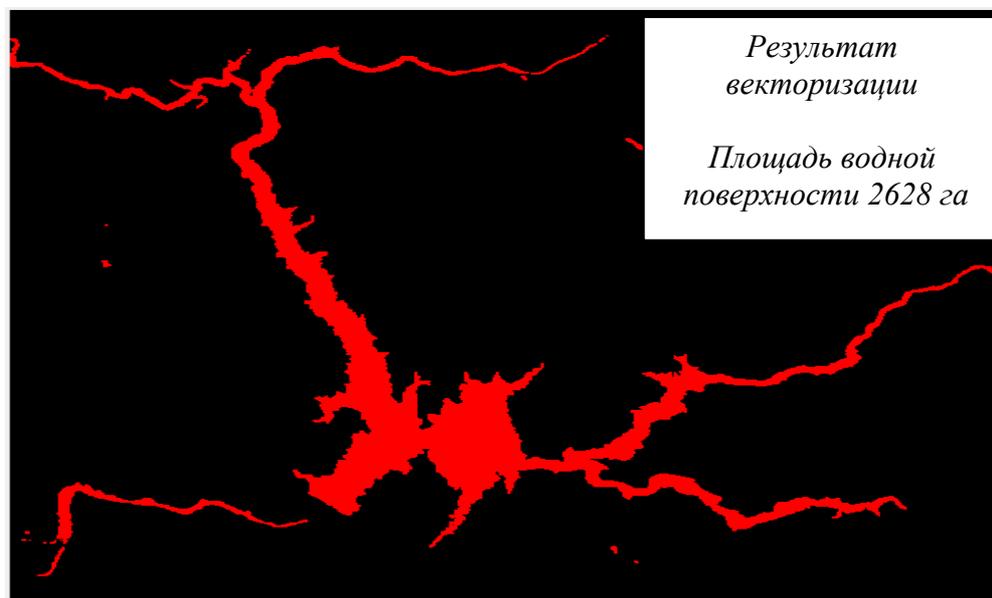
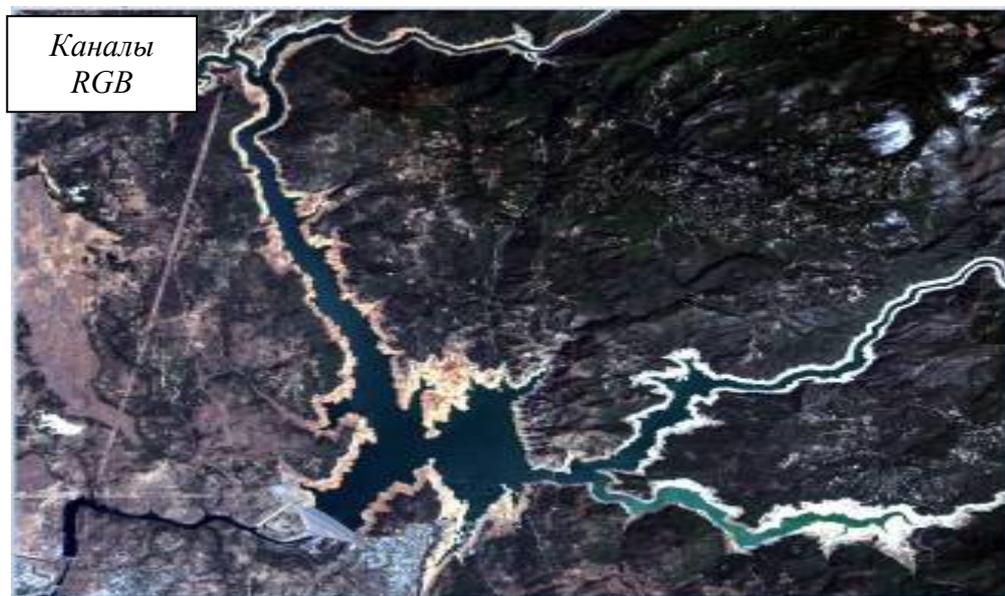


Рис. 2. Результаты обработки снимка озера Оровиль от 12 августа 2015 г.

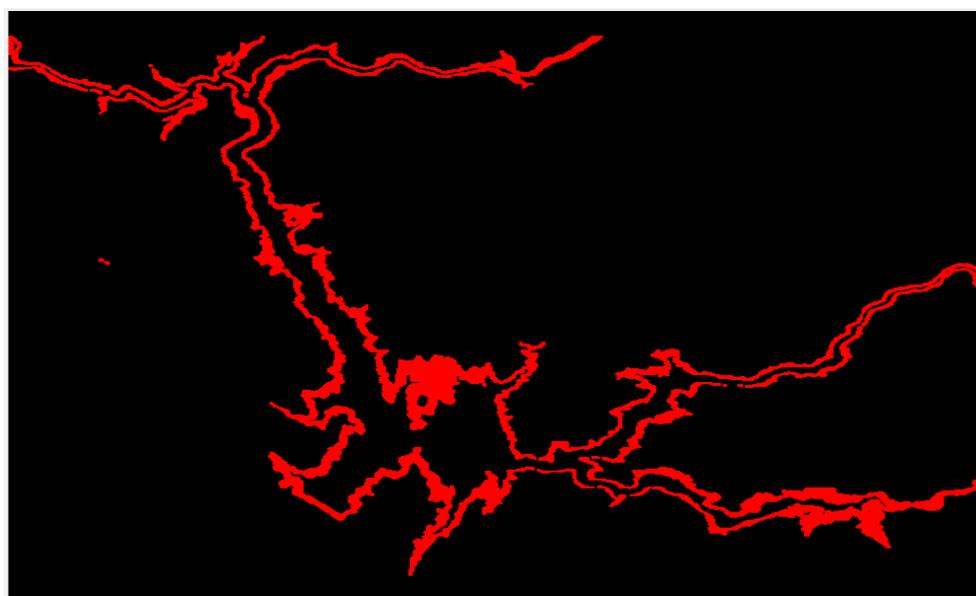


Рис. 3. Изменения озера Оровиль между 3 июня 2013 г. и 12 августа 2015 г.

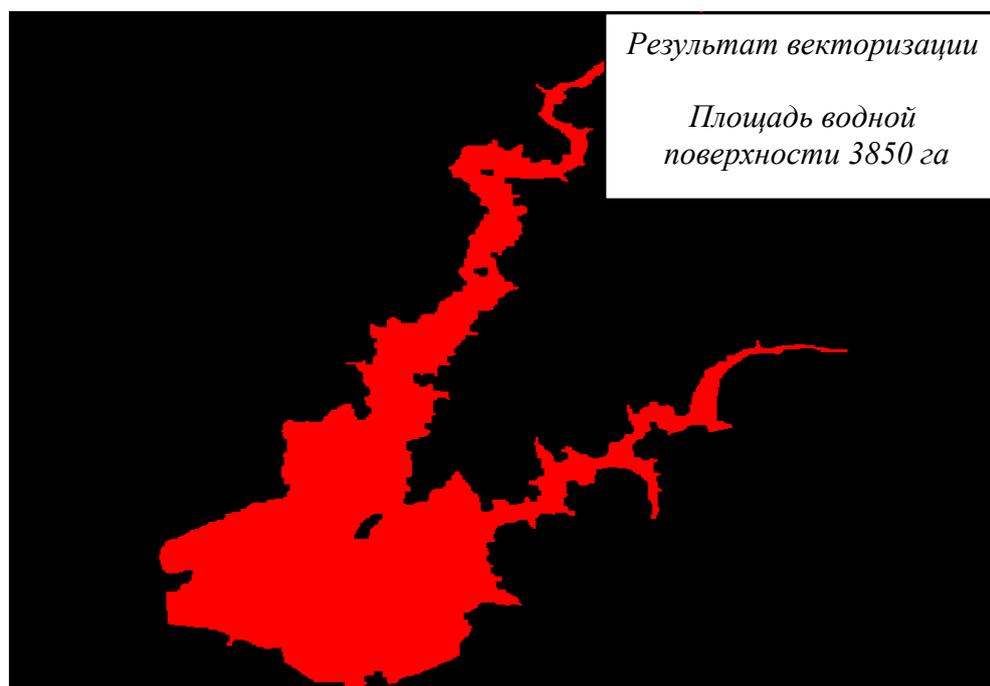
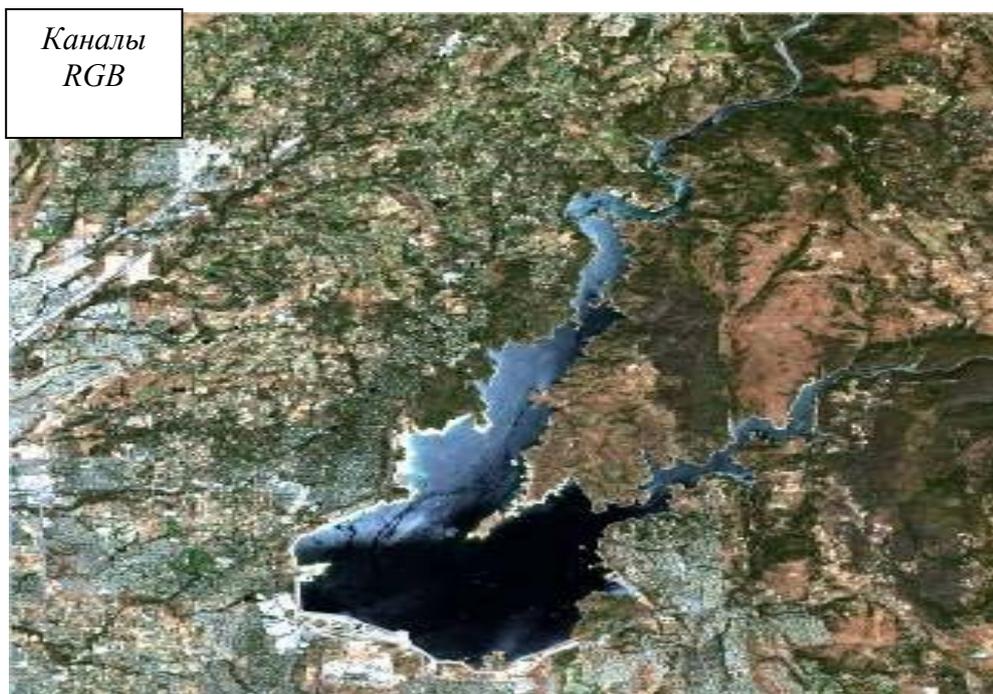


Рис. 4. Результаты обработки снимка озера Фолсом от 3 июня 2013 г.

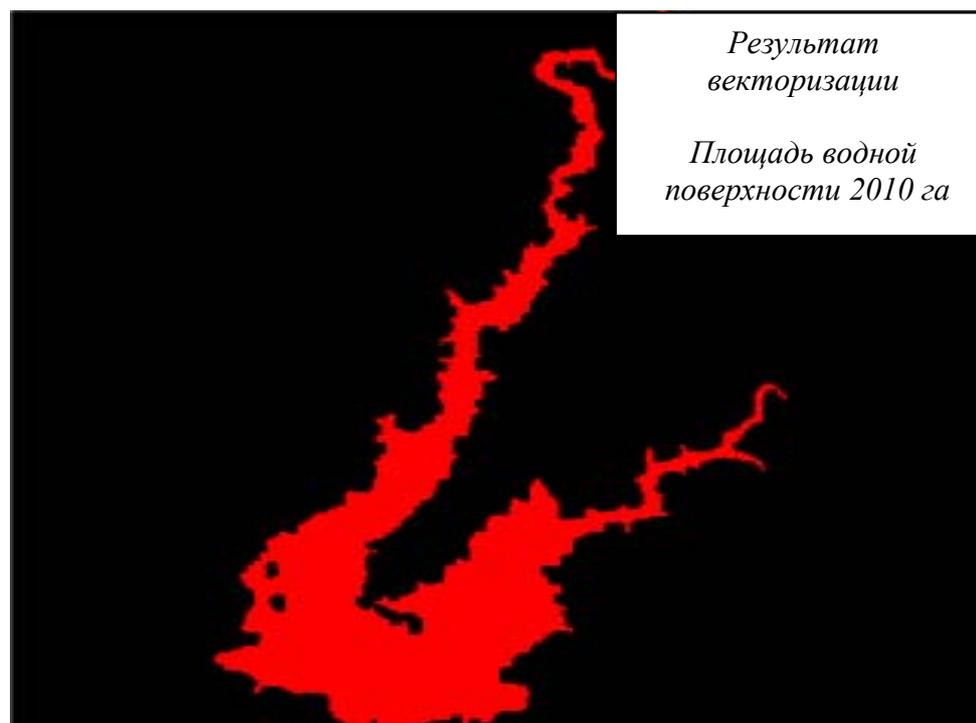


Рис. 5. Результаты обработки снимка озера Фолсом от 12 августа 2015 г.

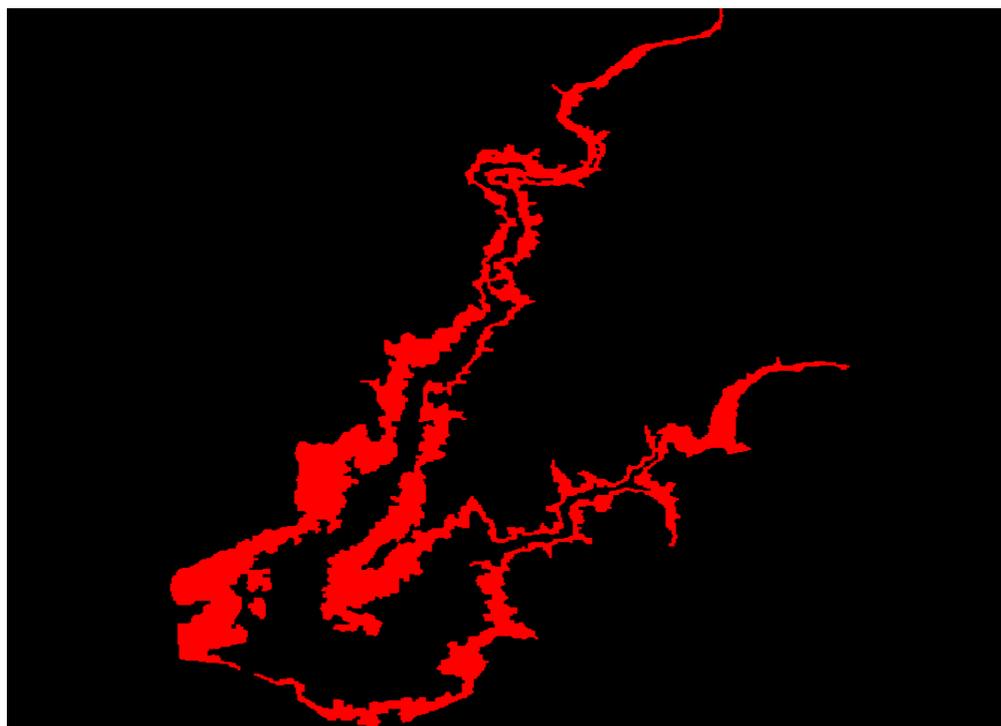
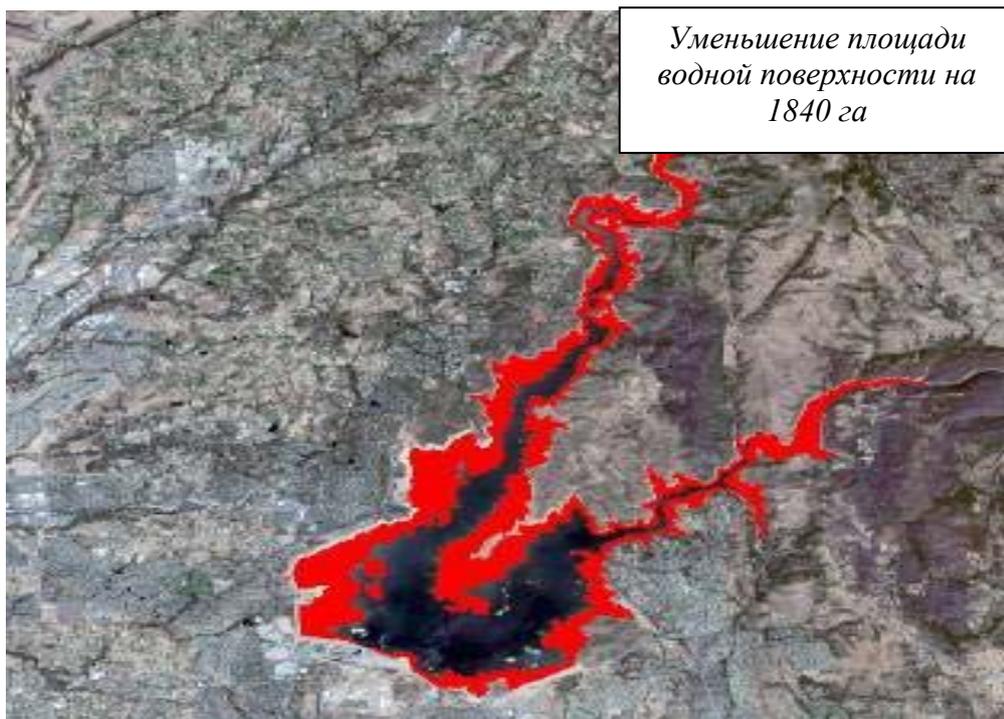


Рис. 6. Изменения озера Фолсом между 3 июня 2013 г. и 12 августа 2015 г.

**Выводы.** Масштабные последствия засухи, показанные на примере озер Оровиль и Фолсом, характерны и для других крупных пресноводных водоемов Калифорнии, большая часть из которых имеет статус водохранилищ, а также для водоемов в других штатах США. Например, озеро Мид, обеспечивающее водой Лас Вегас на 90 %, содержит на 145 футов воды меньше, чем обычно. Ожидается, что озеро обмелеет ещё на 20 футов к июню 2016 года. Речь идёт не только о воде, но и об обеспечении электричеством – плотины ГЭС почти пересохли.

Поэтому в последние годы возникла острая необходимость создания веб-службы регулярного космического мониторинга пресноводных водоемов – сейчас это стало возможным благодаря доступности спутниковых снимков и современным технологиям их обработки.

Пользователями такой службы могут быть:

- Государственные контролирующие структуры (водоснабжающие предприятия, лесная, экологическая, аграрная служба и т.п.);
- Государственные и частные компании водного транспорта (объективная оценка последствий засухи на судоходство);
- Туристические компании (мониторинг территорий массового отдыха);
- Муниципальные службы, частные компании, фермеры (проведение мероприятий по минимизации водопотребления);
- Телерадиокомпании и др. средства массовой информации (пропаганда рационального водопользования);
- Население, проживающее вблизи территорий, пострадавших от засухи (получение объективной и достоверной информации относительно масштабов и тяжести последствий засухи).

### Библиографические ссылки

1. **Мозговой Д.К.** Методика съемки береговых линий / Д.К. Мозговой, В.И. Волошин // Сборник тезисов. Шестая Украинская конференция по космическим исследованиям. 3–10 сентября 2006, Крым, Евпатория, НЦУИКС: Институт космических исследований НАНУ-НКАУ, 2006. – С. 136.

2. **Мозговой Д.К.** Молодежный космический эксперимент по гиперспектральной съемке / Д.К. Мозговой // XV науково-технічна конференція „Наукові проблеми розробки, модернізації та застосування інформаційно-вимірювальних систем космічного і наземного базування”. 20–21 квітня 2006 р., Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С. П. Корольова: тези доповідей, ч. 1. – Житомир: ЖВІРЕ, 2006. – С. 15.

3. **Mozgoviy D.K.** Remote Sensing and GIS Application for Environmental Monitoring and Accidents Control in Ukraine. - Geographic Uncertainty in Environmental Security / D.K. Mozgoviy, O.I. Parshina, V.I. Voloshin, Y.I. Bushuev. Edited by A. Morris, S. Kokhan. – Dordrecht : Springer, NATO Public Diplomacy Division, 2007. – P. 259–270.

4. **Мозговой Д.К.** Технология съемки прибрежных зон / Д.К. Мозговой, В.И. Волошин // Современные проблемы рационального природопользования в прибрежных морских акваториях Украины: тезисы докладов Международной конференции молодых ученых г. Севастополь – п. Качивели, 12–14 июня 2007 г. – Севастополь : НПП "ЭКОСИ-Гидрофизика", 2007. – С. 21– 22.

5. **Dolinets Y.** Specialists training in ERS / Y. Dolinets, D. Mozgovoy / Advanced Space Technologies For The Humankind Prosperity. International Conference. – Dnepropetrovsk : Yuzhnoe State Design Office, 2007. – P. 123.

6. **Мозговой Д.К.** Использование данных наблюдения Земли для мониторинга природных ресурсов / Д.К. Мозговой // Наукові читання «Космічні технології на користь стійкого розвитку і безпеки суспільства» 18 травня 2007 р.

Национальный центр аерокосмічної освіти молоді України, Дніпропетровськ.  
– <http://www.festival.nas.gov.ua/2007/Measures/Pages/1062.aspx>

7. **Мозговой Д.К.** Підвищення інформативності супутникової зйомки малорозмірних об'єктів земної поверхні / Д.К. Мозговой // Програма наукової конференції за підсумками науково-дослідної роботи університету за 2012 рік. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2012. – С. 92.

8. **Мозговой Д.К.** Обработка спутниковых снимков при решении прикладных задач / Д.К. Мозговой // Международный научно-практический форум «Наука и бизнес». 29–30 июня 2015 года: тезисы докладов. – Днепропетровск, Noosphere Ventures inc. – С. 191–194.

9. **Мозговой Д.К.** Спутниковый мониторинг лесных пожаров и засухи / Д.К. Мозговой // Международная научно-практическая конференция «Передовые методы обработки и анализа космической информации». 3–4 декабря 2015 года: тезисы докладов. – Днепропетровск, Noosphere Ventures inc. – С. 48–53.

10. Satellite technology of the forest fires effects monitoring. / V.V. Hnatushenko, Vik.V. Hnatushenko, D.K. Mozgovoy, V.V. Vasiliev // Scientific Bulletin of National Mining University. – №.1. – 2016. –

<http://nvngu.in.ua/index.php/en/component/jdownloads/viewdownload/59/8445>.

Надійшла до редколегії 31.05.2016

УДК 004.9

**Д. К. Мозговой, М. В. Чорненко**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ГЕОИНФОРМАЦИОННЫЕ ВЕБ-СЕРВИСЫ ОНЛАЙН ОБРАБОТКИ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ**

**Описаны функциональные возможности действующих геоинформационных веб-сервисов онлайн-обработки спутниковых снимков высокого пространственного разрешения. Показаны достоинства веб-сервиса EOS DA по сравнению со специализированными программами обработки спутниковых снимков.**

*Ключевые слова:* геоинформационные веб-сервисы, обработка спутниковых снимков, индексные изображения, обнаружение изменений.

**Описано функціональні можливості діючих геоінформаційних веб-сервісів онлайн-обробки супутникових знімків високого просторового розрізнення. Показано переваги веб-сервісу EOS DA в порівнянні зі спеціалізованими програмами обробки супутникових знімків.**

*Ключові слова:* геоінформаційні веб-сервіси, обробка супутникових знімків, індексні зображення, виявлення змін.

**We describe the functionality of existing geoinformation web services for on-line processing of high spatial resolution satellite images. Showing advantages of web service EOS DA compared with specialized software to process satellite images.**

*Keywords:* GIS Web services, processing of satellite images, index image, change detection.

Развитие компьютерных технологий, сетей доступа к информационным ресурсам, включая мобильные телефоны и планшеты, постоянно увеличивает спрос на оперативную информацию о наземных объектах, природных и техногенных процессах. Основная масса пользователей желает получать эту информацию в реальном времени или близком к реальному и готова платить за это. Также вызывает интерес динамика изменения природных явлений во времени и их прогноз на перспективу.

© Д.К. Мозговой, М.В.Чорненко, 2016

Для предоставления широкого круга информационных услуг, связанных с процессами, происходящими на Земле, единственным оперативным источником получения информации в настоящее время являются спутники, способные при относительно небольшом количестве по сравнению с наземными источниками и низколетящими летательными аппаратами, оперативно получать информацию с любой точки земной поверхности.

В настоящее время разработаны новые виды геоинформационных веб-сервисов, основанных на результатах онлайн-обработки спутниковых снимков. Эти сервисы ориентированы на массового пользователя, не имеющего опыта обработки спутниковых снимков, и не требуют использования высокопроизводительных суперкомпьютеров и дорогостоящего специализированного программного обеспечения.

Сейчас в тестовом режиме работают веб-сервисы онлайн-обработки спутниковых снимков высокого пространственного разрешения, которые позволяют решать широкий спектр актуальных прикладных задач в таких сферах:

- сельское, лесное и водное хозяйство, энергетика и нефтегазовый комплекс;
- экология и охрана окружающей среды, контроль чрезвычайных ситуаций;
- землепользование и природопользование;
- транспортная инфраструктура и контроль перемещения транспортных средств;
- градостроительство и муниципальное хозяйство; картография, геодезия и кадастр;
- культурно-исторические объекты и туризм.

На рис. 1, 2 показаны примеры использования веб-сервиса EOS DA для автоматизированного обнаружения изменений городской инфраструктуры по спутниковым снимкам.

На рис. 3, 4 показаны примеры использования веб-сервиса EOS DA для автоматизированного обнаружения изменений на территории разработки нефтяных месторождений.

На рис. 5, 6 показаны примеры использования веб-сервиса EOS DA для автоматизированного определения площадей газонов и деревьев на территории частных домовладений

Достоинства геоинформационных веб-сервисов EOS DA:

- ориентация на массового пользователя (сервисы могут быть использованы для решения большинства практических задач пользователя: как индивидуальных, так и корпоративных);
- возможность быстрого освоения для неспециалистов в области обработки спутниковых снимков (фермеры, лесники, маркетологи, туристы, рекламные агенты, картографы, спасатели, экологи, строители, нефтяники, менеджеры различного уровня и др.);
- работа непосредственно в браузере, что не требует дополнительного программного обеспечения, устанавливаемого у клиента;
- программная и аппаратная независимость, что позволяет использовать веб-сервисы на мобильных устройствах;
- высокая гибкость конфигурирования среды обработки пользователем под конкретные задачи (как на этапе автоматической обработки с помощью готовых цепочек, так и на этапе интерактивного создания цепочек обработки);

- формирование протокола обработки снимка при решении тестовой задачи (т.е. настройка сервиса на решение конкретной задачи), после чего обработка последующих снимков выполняется в автоматизированном режиме;
- вся последовательность операций обработки и настройки параметров каждой операции сохраняются на сервере EOS DA и могут быть применены к другим снимкам;
- результаты обработки снимков хранятся на сервере EOS DA что позволяет клиентам пользоваться веб-сервисами EOS DA независимо от их места нахождения.

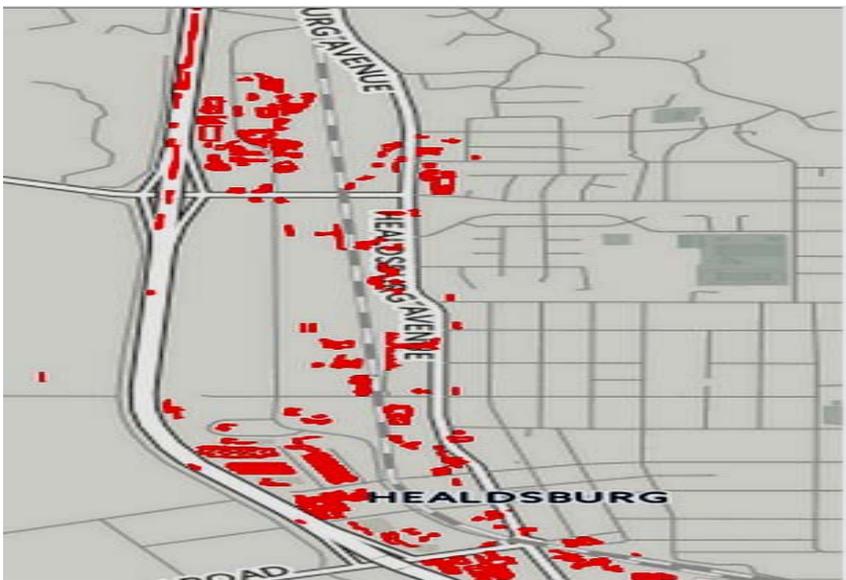
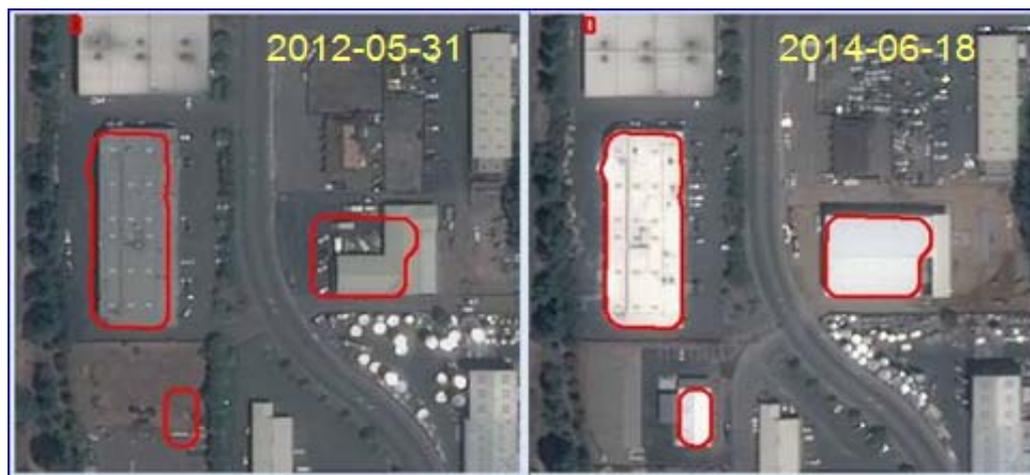


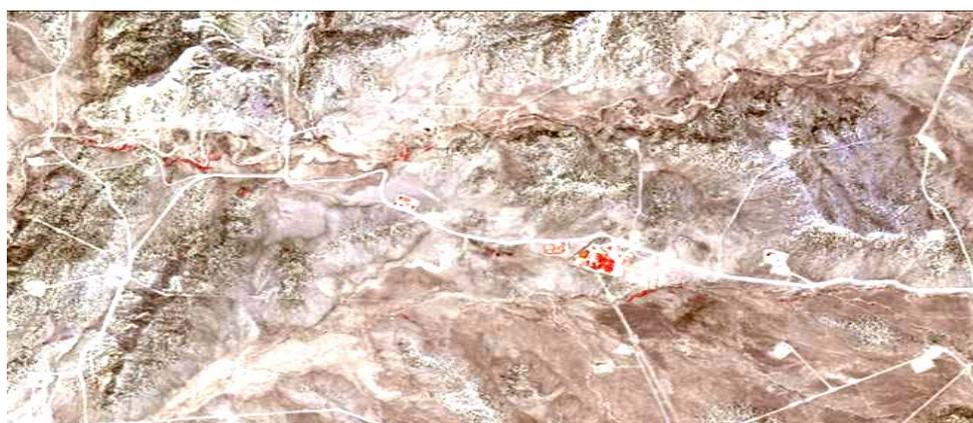
Рис. 1. Изменение городской инфраструктуры с 2012 по 2014 г.



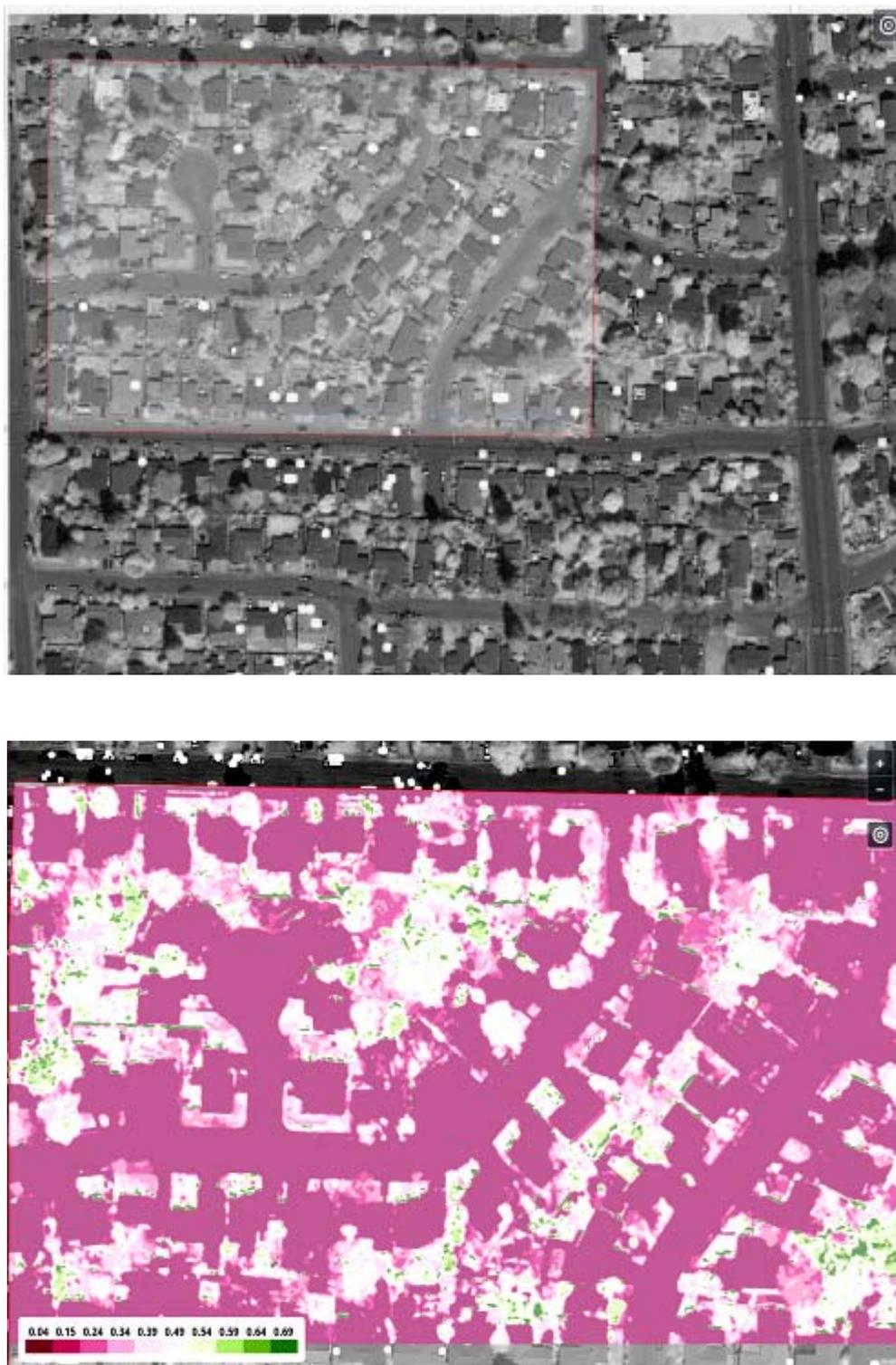
**Рис. 2. Примеры обнаруженных изменений в городской застройке**



**Рис. 3. Изменения на выбранной территории разработки нефтяных месторождений по спутниковым снимкам (без учета растительности)**



**Рис. 4. Изменения на выбранной территории разработки нефтяных месторождений по спутниковым снимкам (с учетом растительности)**



**Рис. 5. Загрузка исходного снимка, векторного слоя и настройка параметров обработки**

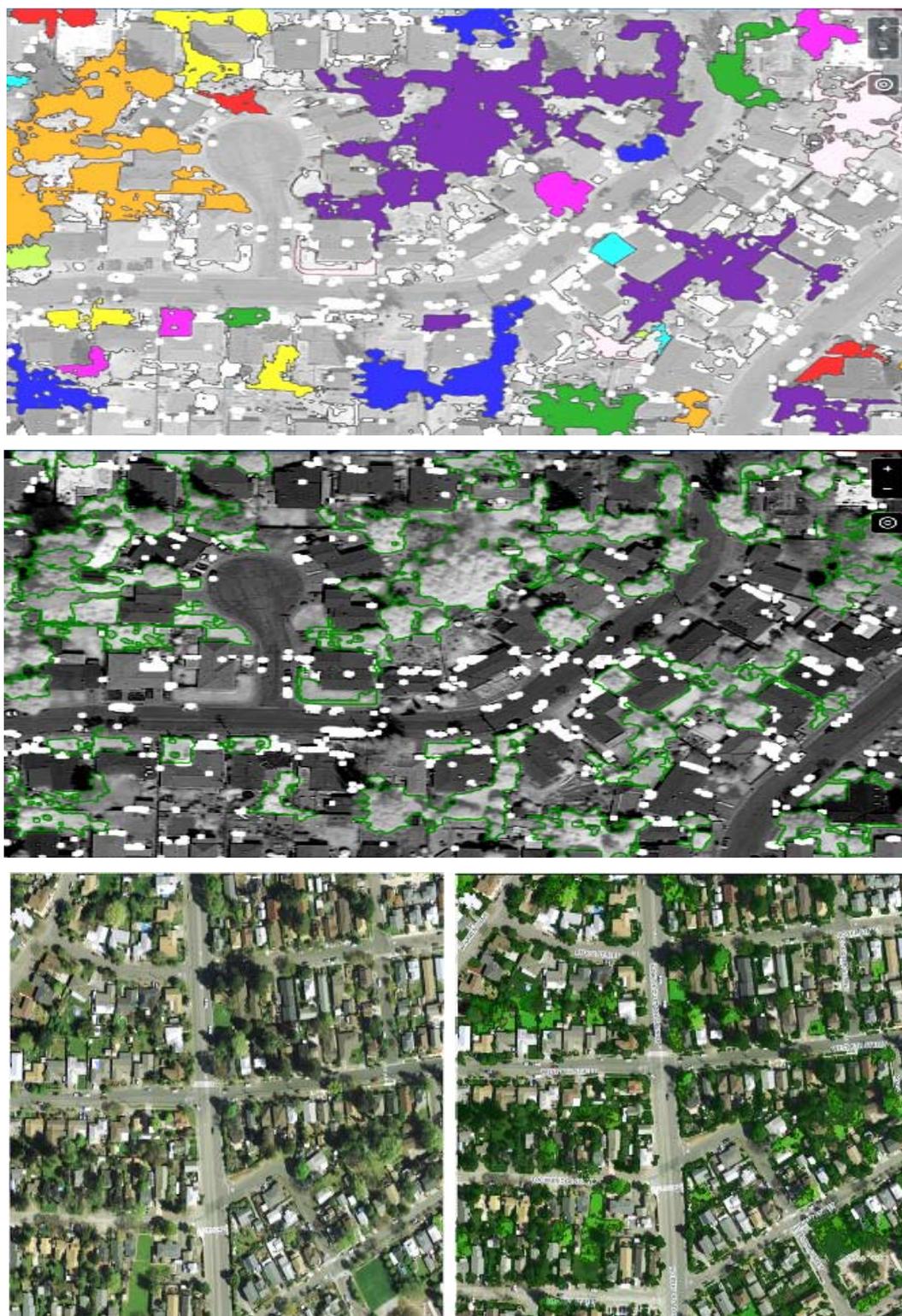


Рис. 6. Выделение объектов и наложение результатов обработки на исходный снимок

Предлагаемые веб-сервисы используют как стандартные алгоритмы, так и методики обработки снимков, разработанные в EOS DA.

Основные клиенты веб-сервисов EOS DA:

- отдельные пользователи – неспециалисты в области обработки спутниковых снимков (фермеры, туристы, рыбаки, дачники, автолюбители, спортсмены и др.);
- сотрудники компаний – неспециалисты в области обработки спутниковых снимков (лесники, маркетологи, рекламные агенты, спасатели, экологи, строители, нефтяники, менеджеры различного уровня и др.);
- специалисты в области обработки спутниковых снимков и ГИС (картографы, разработчики, проектировщики, программисты и др.).

### Библиографические ссылки

1. **Мозговой Д.К.** Підвищення інформативності даних ДЗЗ / Д.К. Мозговой, В.М. Корчинський, О.В. Кравець // Екологія та ноосферологія: науковий журнал. – Т. 23. – № 1–2. – 2009. – С. 103–109.
2. **Мозговой Д.К.** Обработка спутниковых снимков при решении прикладных задач / Д.К.Мозговой // Международный научно-практический форум «Наука и бизнес». 29–30 июня 2015 года: тезисы докладов. – Днепропетровск, Noosphere Ventures inc. – С. 191–194.
3. Метод автоматизированной классификации подвижных объектов с использованием геометрических признаков, инвариантных к повороту / А.Л. Макаров, Д.К. Мозговой, В.С. Хорошилов и др. // Авиаци.-косм. техника и технология. – 2015. – № 3(120). – С. 102–110.
4. **Мозговой Д.К.** Распознавание малоразмерных объектов с использованием библиотеки классов / Д.К. Мозговой, О.В. Кравець. – Екологія та ноосферологія: науковий журнал. – Т. 20. – № 3–4. – 2009. – С. 71–75.

Надійшла до редколегії 29.06.2016

УДК 004.9

**Д. К. Мозговой, В. В. Васильев**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## МОНИТОРИНГ ПРИРОДНЫХ И АНТРОПОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕБ-СЕРВИСА LANDSAT VIEWER

Описаны функциональные возможности веб-сервиса визуализации данных спутника Landsat 8, который позволяет наблюдать динамику развития и последствия для широкого класса природных и антропогенных явлений. Показаны основные преимущества спутникового мониторинга с использованием веб-сервиса визуализации данных спутника Landsat 8.

*Ключевые слова:* дистанционное зондирование Земли, спутниковый мониторинг, космический аппарат Landsat 8, визуализация спутниковых снимков, динамика изменений.

Наведено функціональні можливості веб-сервісу візуалізації даних супутника Landsat 8, який дозволяє спостерігати динаміку розвитку і наслідки для широкого класу природних і антропогенних явищ. Показано основні переваги спутникового моніторингу з використанням веб-сервісу візуалізації даних супутника Landsat 8.

*Ключові слова:* дистанційне зондування Землі, спутниковий моніторинг, космічний апарат Landsat 8, візуалізація спутникових знімків, динаміка змін.

© Д.К. Мозговой, В.В. Васильев, 2016

**We describe the functionality of the Landsat 8 satellite data visualization Web-service that allows you to observe the dynamics of development and the consequences for a large class of natural and man-made phenomena. The basic advantages of satellite monitoring using a visualization Web-service for Landsat 8 satellite data.**

*Keywords:* Earth remote sensing, satellite monitoring, Landsat 8 spacecraft, visualization of satellite images, change dynamics.

Программа Landsat – наиболее продолжительный проект по получению спутниковых снимков всей поверхности Земли, которые используются при решении большого числа тематических задач. Спутник Landsat 8, который был выведен на орбиту 11 февраля 2013 года, имеет многоканальный сканирующий радиометр OLI (Operational Land Imager) и сканирующий двухканальный ИК-радиометр TIRS (Thermal Infrared Sensor). Радиометр OLI позволяет получать изображения земной поверхности с максимальным разрешением 15 м с использованием усовершенствованных технологий космической съемки. ИК-радиометр TIRS предназначен для получения «теплого» изображения земной поверхности с разрешением 100 м.

Использование более совершенных ПЗС-устройств позволяет улучшить соотношение сигнал-шум и качество съемки – прибор OLI измеряет 4096 различных уровней отраженного света, в то время как бортовая камера ETM на спутнике Landsat 7 могла измерить 256 различных уровней.

Для оптимизации точности определения ориентации спутника используются два высокоточных астродатчика, масштабируемая инерциальная система наведения SIRU (Scalable Inertial Reference Unit), 12 солнечных датчиков с заглубленной чувствительностью, приемники GPS и два трехосных магнетометра.

Для получения данных со спутника задействованы три наземные станции, расположенные в г. Су-Фолз (шт. Южная Дакота), в Свалбарде (Норвегия) и Гилмор-Крик (шт. Аляска).

Ежесуточно на эти станции поступает до 400 изображений поверхности Земли, которые доступны пользователям в течение 24 часов.

Landsat 8 получает изображения в видимом диапазоне волн, в ближнем ИК и в дальнем ИК, с разрешением снимков от 15 до 100 метров на пиксель. В сутки снимается порядка 400 сцен (у предыдущего Landsat 7 было всего 250 сцен в день). Landsat 8 осуществляет съемку в 11 спектральных диапазонах. Основные характеристики снимков Landsat 8:

- размер пикселя: 15 метров/30 метров/100 метров (панхроматический канал / мультиспектральный канал / дальний ИК);
- уровень обработки: 1Т (коррекция рельефа);
- система координат UTM/WGS-84 (формат изображений: GeoTIFF).

Снимки Landsat 8 находятся в открытом доступе на сайте NASA earthexplorer.usgs.gov, однако на нем нет просмотра отдельных спектральных каналов выбранных снимков, а скачать можно только весь набор каналов, который в архиве занимает более 1 Гбайта.

От этих недостатков свободен веб-сервис визуализации данных спутника Landsat 8 (доступ по адресу <http://lv.eosda.com>), который позволяет наблюдать динамику развития и последствия для широкого класса природных (рис. 1, 2) и антропогенных (рис. 3, 4) явлений.

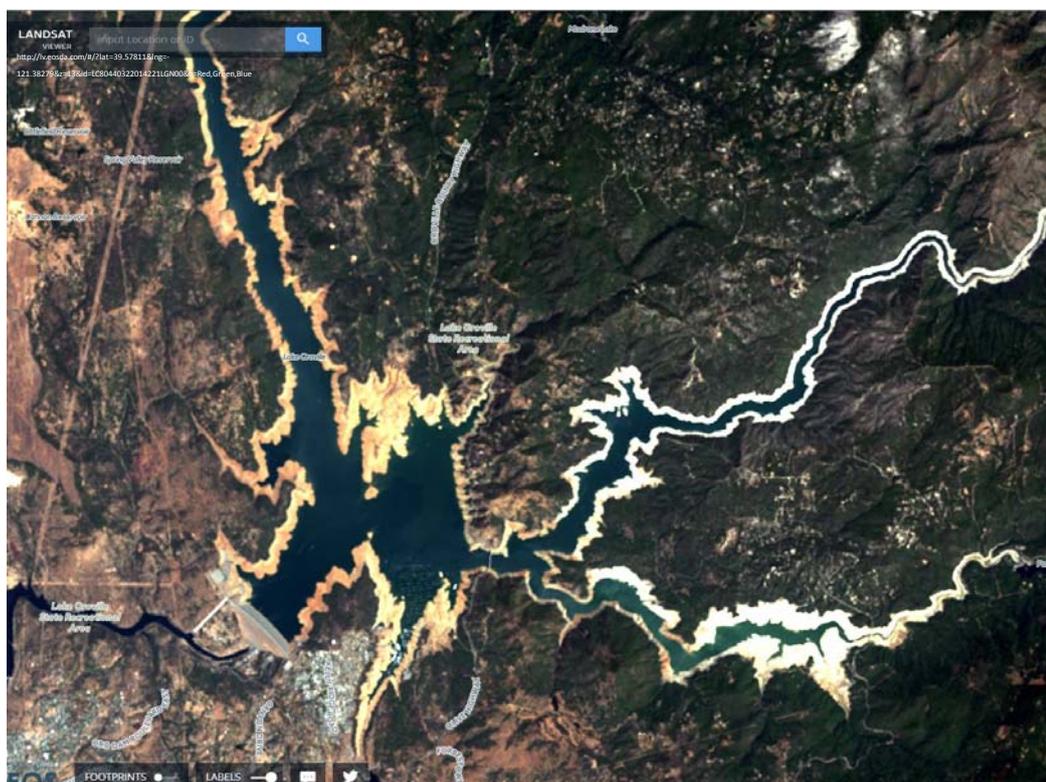
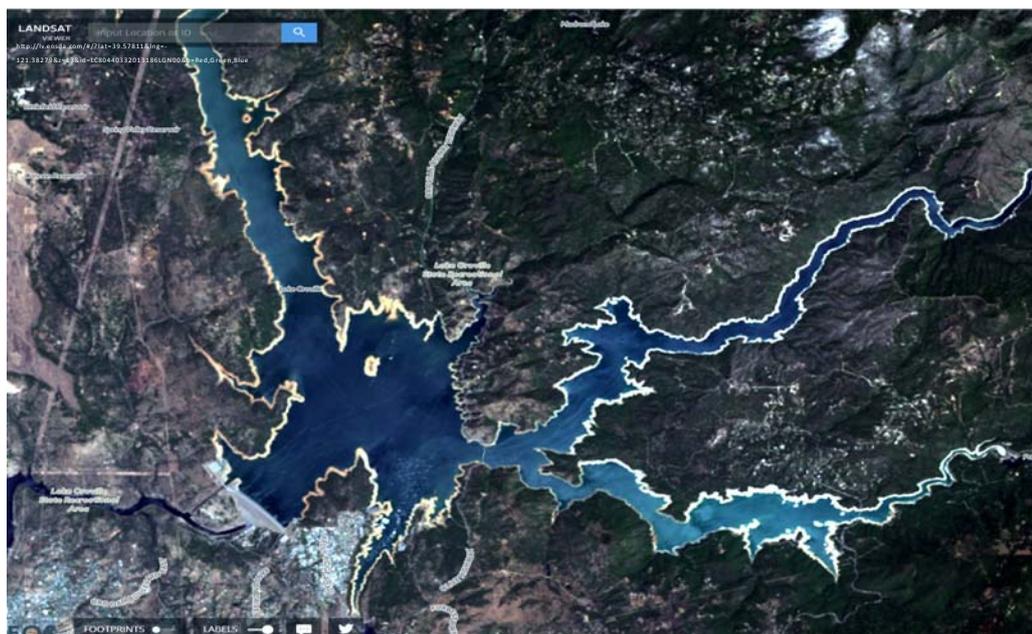


Рис. 1. Изменение озера Оровиль с 2013 по 2014 г.

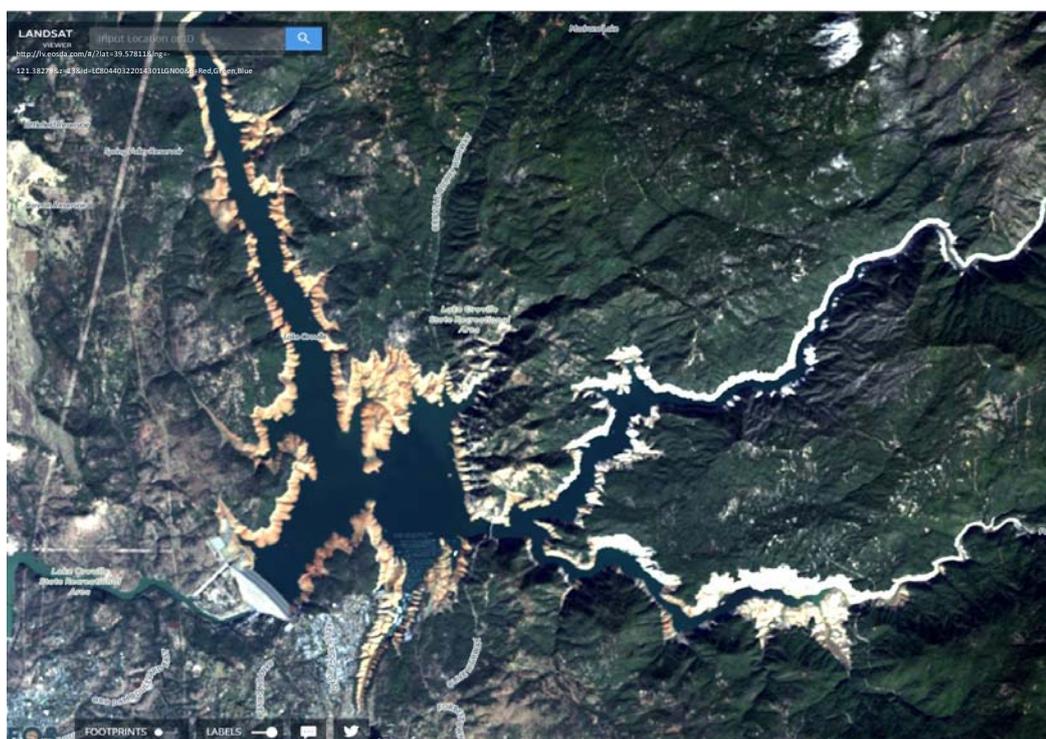
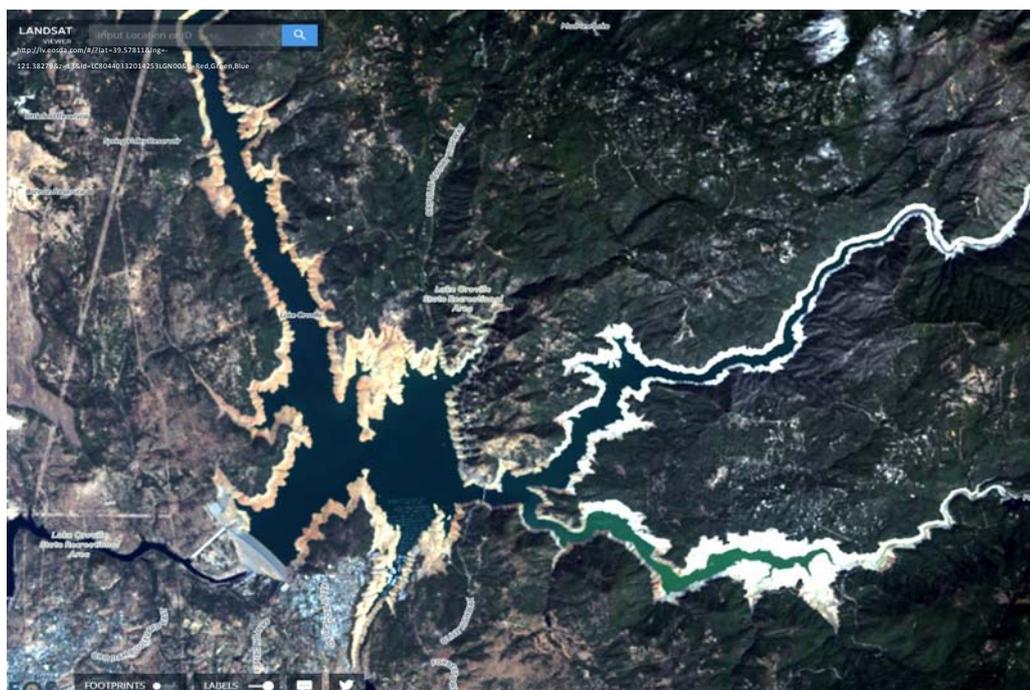


Рис. 2. Изменение озера Орлів в течение 2014 г.

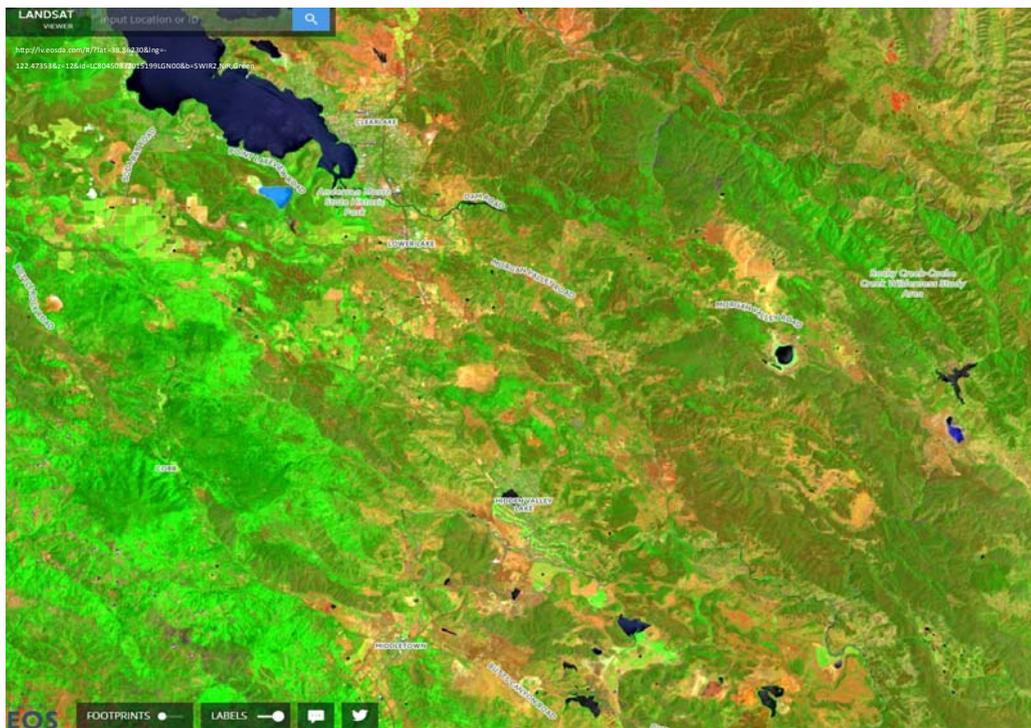


Рис. 3. Начало лесных пожаров в Калифорнии летом 2015 г.

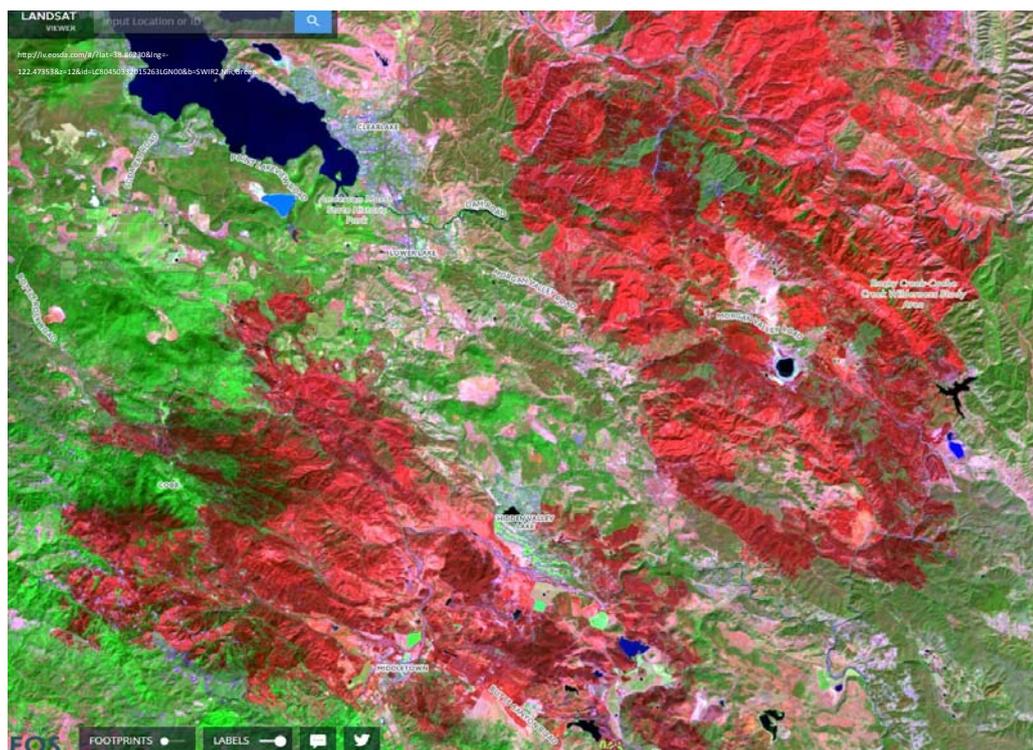
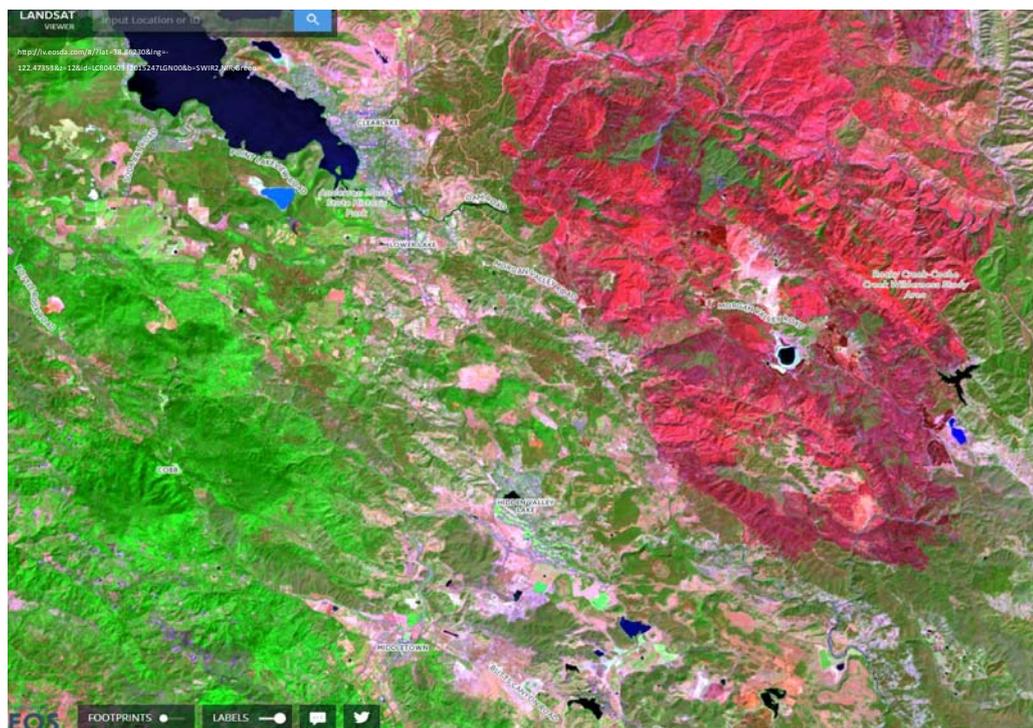


Рис. 4. Продолжение лесных пожаров в Калифорнии осенью 2015 г.

Основные преимущества спутникового мониторинга с использованием веб-сервиса визуализации данных спутника Landsat 8:

- объективность и достоверность (спутниковые снимки позволяют полностью исключить преднамеренное искажение или умалчивание важной информации);
- обзорность и детальность (возможно наблюдение любой территории на Земле с детальностью до 30 м);
- актуальность и оперативность (съемка из космоса с минимальной задержкой доставки данных пользователю);
- многоспектральный характер наблюдений (несколько спектральных каналов в одном снимке);
- высокая периодичность (до нескольких снимков в месяц);
- междисциплинарность (экологический мониторинг, сельское, лесное, водное хозяйства, прогноз и контроль чрезвычайных ситуаций, управление территориями и планирование их развития, инвентаризация и контроль использования земельных ресурсов, картография, строительство, транспорт, связь).

### Библиографические ссылки

1. **Мозговой Д.К.** Обработка спутниковых снимков при решении прикладных задач / Д.К. Мозговой // Международный научно-практический форум «Наука и бизнес». 29–30 июня 2015 г.: тезисы докладов. – Днепропетровск, Noosphere Ventures inc. – С. 191–194.
2. **Mozgoviy D.K.** Remote Sensing and GIS Application for Environmental Monitoring and Accidents Control in Ukraine. – Geographic Uncertainty in Environmental Security / D.K. Mozgoviy, O.I. Parshina, V.I. Voloshin, Y.I. Bushuev. Edited by A. Morris, S. Kokhan. – Dordrecht : Springer, NATO Public Diplomacy Division, 2007. – P. 259–270.
3. **Мозговой Д.К.** Использование данных наблюдения Земли для мониторинга природных ресурсов / Д.К. Мозговой // Наукові читання «Космічні технології на користь стійкого розвитку і безпеки суспільства» 18 травня 2007 р. Національний центр аерокосмічної освіти молоді України, Дніпропетровськ.  
<http://www.festival.nas.gov.ua/2007/Measures/Pages/1062.aspx>.
4. **Мозговой Д.К.** Спутниковый мониторинг лесных пожаров и засухи / Д.К. Мозговой // Международная научно-практическая конференция «Передовые методы обработки и анализа космической информации». 3–4 декабря 2015 года: тезисы докладов. – Днепропетровск, Noosphere Ventures inc. – С. 48–53.
5. Satellite technology of the forest fires effects monitoring. / V.V. Hnatushenko, Vik.V. Hnatushenko, D.K. Mozgovoy, V.V. Vasiliev // Scientific Bulletin of National Mining University. – № 1. – 2016.  
<http://nvngu.in.ua/index.php/en/component/jdownloads/viewdownload/59/8445>.

Надійшла до редколегії 29.06.2016

УДК 629.78

М. П. Олейник, А. М. Кулабухов

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## ОЦЕНКА ТРЕБОВАНИЙ К УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ МЕЖСПУТНИКОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ СВЯЗИ ПО НАВИГАЦИОННЫМ ПАРАМЕТРАМ

**Запропоновано спосіб наведення міжспутникової оптичної лінії зв'язку по навігаційних параметрах. Визначено залежності вимог до кутової орієнтації від параметрів оптичного терміналу і дальності зв'язку.**

*Ключові слова:* міжспутниковий оптичний зв'язок, спосіб наведення, вимоги до кутової орієнтації.

**Предложен способ наведения межспутниковой оптической линии связи по навигационным параметрам. Определены зависимости требований к угловой ориентации от параметров оптического терминала и дальности связи.**

*Ключевые слова:* межспутниковая оптическая связь, способ наведения, требования к угловой ориентации.

**A method of targeting the inter-satellite optical communication lines on navigation options. The dependence of the requirements for the angular orientation of the optical parameters of the terminal and the communication range.**

*Keywords:* inter-satellite optical communication, a way of pointing, the requirements for angular orientation.

**Введение.** Повышение эффективности спутников связи и дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) связывают с созданием межспутниковых линий связи и в первую очередь с межспутниковыми оптическими линиями связи (МОЛС). Использование МОЛС позволяет увеличить скорость и объём передачи полезной информации между спутниками ДЗЗ и повысить оперативность получения информации, ограниченную количеством наземных станций. Практическая реализация экспериментальных терминалов МОЛС показала высокую эффективность их использования для передачи информации со сверхвысокой скоростью (до десятков Гбит). Успешная передача данных между спутниками в оптическом диапазоне была осуществлена в проектах SILEX (2001 г.), LUCE (2005 г.), LCT (2008 г.) и EDRS (2014–2016 гг.). Терминалы МОЛС используют длины волн видимого и ближнего ИК-диапазонов (1,6–0,5 мкм) [1]. В качестве лазерного излучателя часто используют одномодовые полупроводниковые лазеры, которые имеют малые габариты, высокий КПД (25–35 %) и значительный ресурс (до 100 тыс. ч.) [2].

Для передачи информации с высокими скоростями используют узкие лучи, что приводит к сложным алгоритмам наведения с прецизионной точностью, намного превышающей точность ориентации и стабилизации космического аппарата.

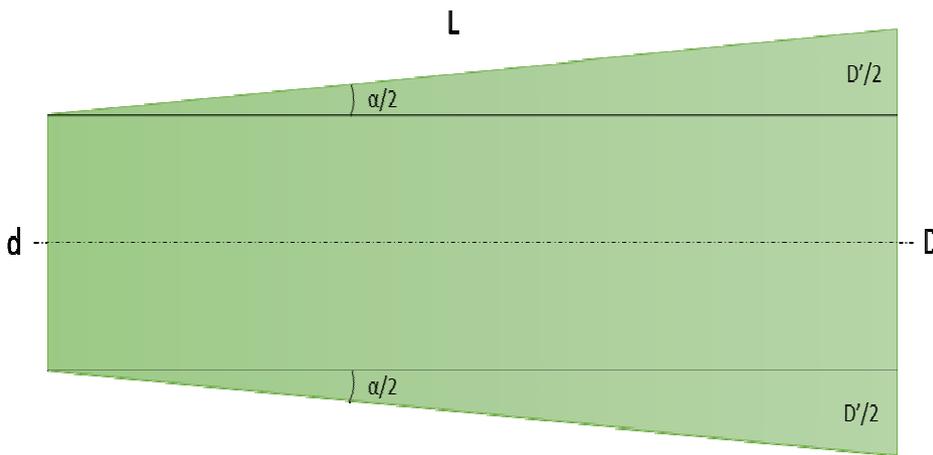
На данном этапе эту задачу решают отдельными оптическими терминалами, обладающими достаточно большими массогабаритными и энергетическими характеристиками (масса терминала ЛСТ – 35 кг, габариты – 50 × 50 × 60см, энергопотребление – 70 Вт), что исключает возможность их использования на малых космических аппаратах класса микроспутник.

**Постановка задачи.** Рассмотрим способ наведения луча МОЛС по навигационным параметрам спутников и оценим требования к точности ориентации оптического терминала в зависимости от дальности связи и параметров терминала.

**Решение задачи.** Предположим, что на фиксированный момент времени известны с определенной точностью навигационные параметры спутников, между которыми устанавливается связь (координаты и скорости). Предположим также, что спутники располагаются на одной орбите, что характерно для создания спутниковых группировок ДЗЗ.

Для рассмотрения вопросов наведения терминала МОЛС необходимо знать угол расходимости лазерного излучения, а также зону неопределенности, в которой находится спутник на данный момент времени.

Найдем угол расходимости лазерного излучения. На рис. 1 приведена схема расходимости оптического луча в зависимости от расстояния и диаметра линзы, где  $\alpha$  – угол расходимости лазерного излучения;  $D$  – полный диаметр расходимости лазерного излучения;  $D'$  – приращение диаметра расходимости лазерного излучения;  $d$  – диаметр излучающей антенны.



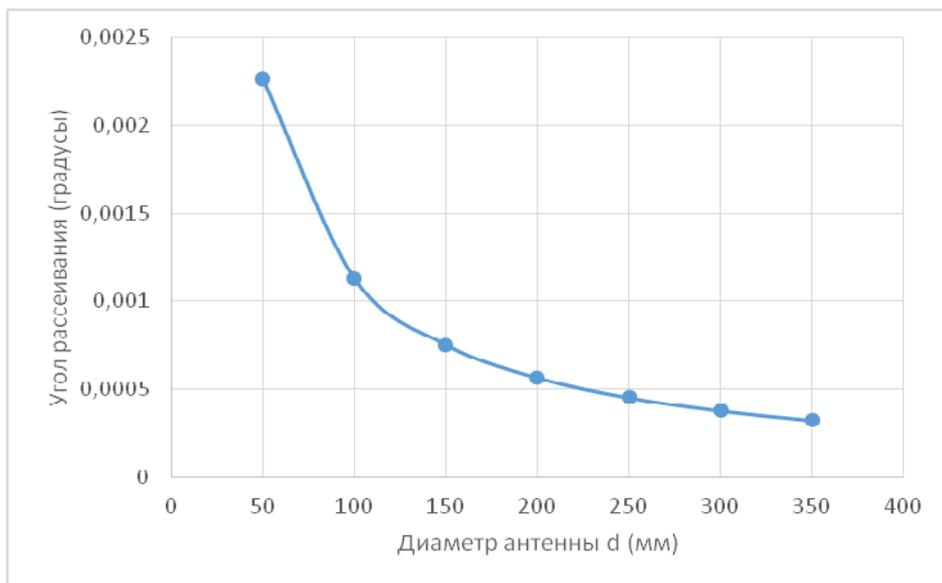
**Рис. 1. Приращение диаметра лазерного излучения**

Угол расходимости лазерного излучения зависит от длины волны и диаметра излучающей антенны. Для определения угла расходимости лазерного излучения в дальней зоне (рис. 1) при круглой апертуре воспользуемся формулой:

$$2\alpha = 2 \cdot 1,22 \frac{\lambda}{d}, \tag{1}$$

где  $\lambda$  – длина волны;  $d$  – диаметр излучающей антенны.

График зависимости угла расходимости лазерного излучения от диаметра передающей антенны показан на рис. 2.



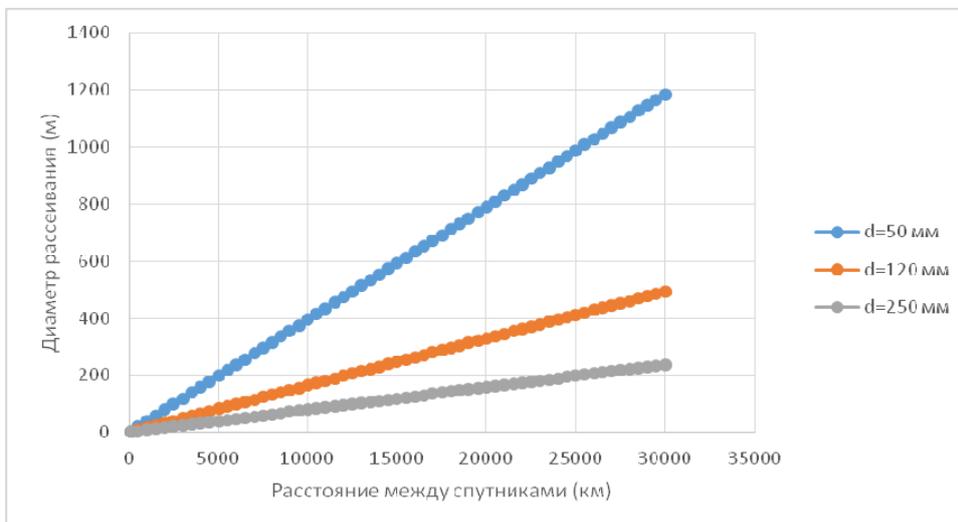
**Рис. 2. Графік залежності кута розходимості від діаметра антени**

Діаметр лазерного випромінювання (рис. 1) на визначеному відстані  $L$  можна обчислити за формулою:

$$D = d + 2 \operatorname{tg} \alpha L, \quad (2)$$

де  $D$  – діаметр лазерного випромінювання;  $L$  – відстань, на якій визначається цей діаметр.

Побудуємо графік залежностей діаметра розсіювання лазера від відстані між супутниками при різних діаметрах випромінювальної антени  $d = 50$  мм,  $d = 120$  мм,  $d = 250$  мм при довжині хвилі  $\lambda$ , рівній 0,81 мкм (рис. 2).



**Рис. 3. Залежність діаметра лазерного випромінювання від відстані між супутниками**

Найдем зону неопределённости, в которой может находиться спутник.

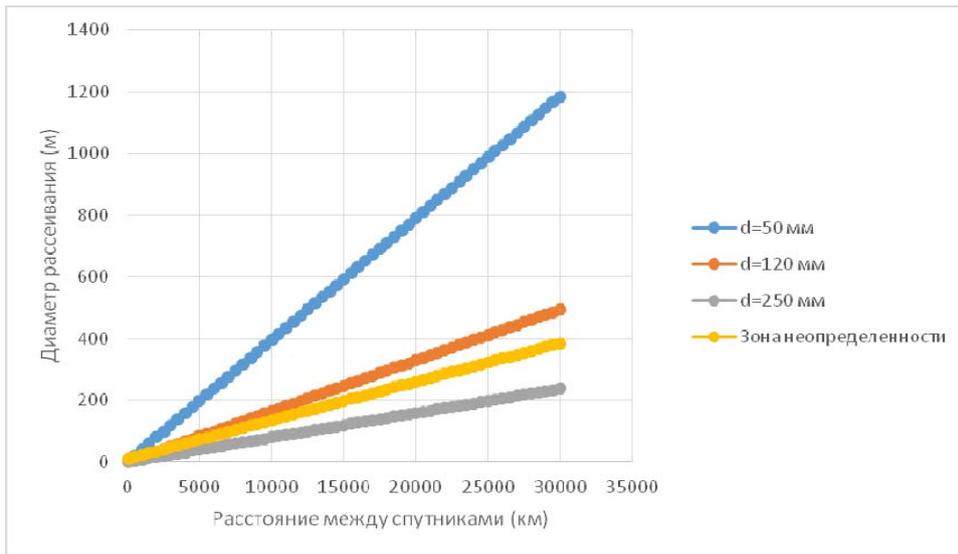
Сначала рассмотрим спутники в момент времени  $t_0$ , в случае, когда неопределённость координат спутника зависит только от погрешности определения координат GPS  $\Delta S_1$ , которая может составлять 10–15 м. Таким образом, диаметр рассеивания лазерного излучения уже на расстоянии в 5 тыс. км для антенны диаметром 250 мм будет больше чем диаметр зоны неопределённости положения спутника. Это означает, что при организации МОЛС в этом случае не требуется режим поиска и захвата цели.

Спутники движутся с большой скоростью и с течением времени ошибка определения координат накапливается. Рассмотрим случай организации МОЛС между двумя низкоорбитальными спутниками, которые находятся на одной орбите. Пусть скорость движения спутника  $V$ , а погрешность скорости, которую дает GPS,  $\Delta V$ . Тогда погрешность определения координат  $\Delta S$ :

$$\Delta S = \frac{\Delta V S}{V} + \Delta S_1, \tag{3}$$

где  $\Delta V$  – погрешность скорости определения координат;  $V$  – скорость движения спутника;  $S$  – расстояние, на котором определяется погрешность;  $\Delta S_1$  – погрешность стационарного режима.

Для наглядности построим на одном графике (рис. 4) зависимости зоны неопределенности координат спутника и диаметра рассеивания лазерного излучения на разных расстояниях, при  $\Delta V = 100$  м/с.



**Рис. 4. Зона неопределенности координат спутника и диаметр рассеивания лазера**

Для использования метода наведения оптических терминалов по навигационным данным зона неопределённости координат спутника должна быть меньше зоны рассеивания лазерного излучения. Как видно на рис. 4, этому условию удовлетворяют антенны передатчика диаметром менее 130 мм.

Уменьшение габаритов антенны терминала позволяет использовать предлагаемый способ наведения МОЛС на микроспутниках. Однако использование малых антенн приводит к снижению информационных характеристик МОЛС, а именно – скорости передачи. Эти вопросы предполагается рассмотреть в последующих исследованиях.

Кроме этого, определенные требования к габаритам предъявляет конструкция микроспутника, для которой габариты антенны должны быть не более 100 мм.

Найдем требования к угловой ориентации низкоорбитального спутника для наведения МОЛС. Рассмотрим случай создания МОЛС для группировки низкоорбитальных спутников ДЗЗ, расположенных равномерно на одной орбите. Необходимым условием создания оптической межспутниковой связи является то, что линии связи должны проходить за пределами атмосферы Земли, как показано на рис. 5. Исходя из этого условия, найдем количество спутников, которые можно расположить на разных орбитах (табл. 1).

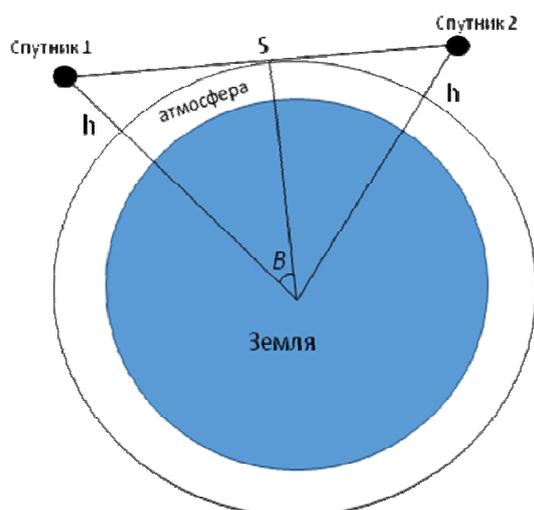


Рис. 5. Способ наведения МОЛС

Таблица 1

Количество спутников на орбите

Высота	Количество спутников	Расстояние между спутниками
600 км	9	4770 км
700 км	8	5420 км
800 км	7	6230 км

Таким образом, исходя из табл. 1, расстояние между спутниками может быть в пределах 4,7–6,2 тыс. км. На этом расстоянии угол неопределённости координат спутника будет составлять 0,014 угл. сек., а угол рассеивания лазерного излучения с антенной диаметром 100 мм – 5 угл. сек. Следовательно, точность ориентации терминалов МОЛС для обеспечения оптической связи должна быть не больше угла расходимости лазерного излучения, а именно 4 угл. сек. Данная точность может быть обеспечена использованием звездного датчика для измерения ориентации и пьезокерамическими приводами терминала МОЛС.

**Выводы.** Предложен способ наведения терминалов МОЛС по навигационным параметрам для низкоорбитальной группировки спутников ДЗЗ, который позволяет существенно упростить алгоритм наведения МОЛС.

Проведённые расчеты показали, что реализация предложенного метода может быть обеспечена малыми габаритами терминалов МОЛС, с несущественным снижением скорости передачи данных, что позволит использовать их на малых космических аппаратах массой до 100 кг.

Определены требования к точности ориентации терминалов МОЛС для обеспечения связи спутников ДЗЗ на низкой орбите. Расчеты показали, что для обеспечения функционирования сети МОЛС на низких орбитах точность ориентации терминала должна быть не хуже 5 угл. сек., что может быть обеспечено измерениями малогабаритного звёздного датчика и пьезокерамическими приводами.

### Библиографические ссылки

1. Методичне забезпечення систем керування і зв'язку. Моделювання і оптимізація складних процесів і систем: Звіт про НДР (заключн.) / Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара. № ДР 0114U000189; Інв. № 0716U002490. – Д., 2015. – 166 с.
2. **Крюкова И.В.** Проблемы создания аппаратуры для межспутниковых и атмосферных оптических линий связи / И.В. Крюкова, Н.Н. Чуковский // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Прибостроение». – 2007. – № 19 – С. 2–15.
3. **Гавриленко С.В.** Особенности современного этапа развития оптических линий межспутниковой связи / С.В. Гавриленко, Н.Н. Феоктистов, Д.К. Хегай // Приборостроение. – 2008. – Т. 51. – № 3. – С. 54–60.

*Надійшла до редколегії 12.05.2016.*

УДК 621.791.72.052

**В. А. Перерва, Е. В. Карпович**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ МАКРОСТРУКТУРЫ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ СПЛАВА VT6S, ВЫПОЛНЕННЫХ СВАРКОЙ ПОЛЫМ КАТОДОМ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ РАЗДЕЛКЕ КРОМОК**

Рассмотрена сварка высокопрочного титанового сплава VT6S, применяемого в конструкциях ракетно-космической и авиационной техники. Исследована возможность внедрения процесса сварки горячим полым катодом в вакууме для изготовления шарбаллонов. Исследование проводилось на анализе полученных макроструктур сплава VT6S, выполненных дуговой сваркой полым катодом в вакууме при различной разделке кромок.

*Ключевые слова:* высокопрочные титановые сплавы, макроструктура, полый катод, сплавление кромок.

Розглянуто зварювання високоміцного титанового сплаву VT6S, застосовуваного в конструкціях ракетно-космічної та авіаційної техніки. Досліджено можливість впровадження процесу зварювання гарячим порожнистим катодом у вакуумі для виготовлення шаробалонів. Дослідження проводилося на аналізі отриманих макроструктур сплаву VT6S, виконаних дуговим зварюванням порожнистим катодом у вакуумі при різній обробці кромок.

*Ключові слова:* високоміцні титанові сплави, макроструктура, порожнистий катод, сплавлення кромок.

**Welding is considered a high-strength titanium alloy vt6s, used in the construction of rocket-space and aviation tech-nicks. The possibility of the introduction of the welding process is hot-integer cathode in a vacuum for the production of ball-balloon. The study was conducted on the analysis of the obtained alloy macrostructures VT6S you-arc welding complements the hollow cathode in a vacuum at different cutting edges**

*Keywords:* high strength titanium alloys, mfcrostructure, hollow cathode, fusion edges.

**Введение.** Создание современного авиационного двигателя – сложнейший комплексный процесс, базирующийся на новейших достижениях в области аэро- и термодинамики, материаловедения, технологии, прочности, электроники, информатики. Важные задачи, решаемые при проектировании двигателей новых поколений, – снижение стоимости производства и эксплуатации, в том числе путем упрощения конструкции и снижения количества деталей и узлов с применением сварки [1]. Авиационная промышленность была первым потребителем титана. Создание летательных аппаратов со скоростями, близкими к скорости звука и превосходящими ее, определило ряд технических и экономических требований к конструкционным материалам, из которых изготавливаются корпуса самолетов, обшивки и двигатели.

В производстве изделий авиации и ракетостроения наибольшее распространение получил высокопрочный титановый сплав VT6S [2]. Основным видом сварки деталей из высокопрочного титанового сплава VT6S в настоящее время является сварка погруженной дугой. Структурные превращения, происходящие при дуговой сварке в шве и околошовной зоне, зачастую оказывают негативное влияние на показатели конструктивной прочности соединений [3].

Перспективним способом получения неразъемных соединений из титанового сплава ВТ6С является сварка полым катодом в вакууме.

При сварке плавлением металла толщиной от 5 мм наибольшей проблемой является получение гарантированного сплошного проплавления. В связи с этим нормативной документацией устанавливается необходимость выполнения специальной разделки кромок свариваемых изделий. Применение разделки кромок свариваемых деталей позволяет заменить двустороннюю сварку на одностороннюю, позволяя избежать излишнего тепловложения в металл, и устранить кантовку свариваемых изделий. Это особенно важно при сварке крупногабаритных конструкций и изделий сложной формы с пересекающимися сварными швами в нескольких плоскостях [4].

**Постановка задачи.** Задачей данной работы является исследование макроструктуры сварных соединений сплава ВТ6С, выполненных дуговой сваркой полым катодом в вакууме при различной разделке кромок.

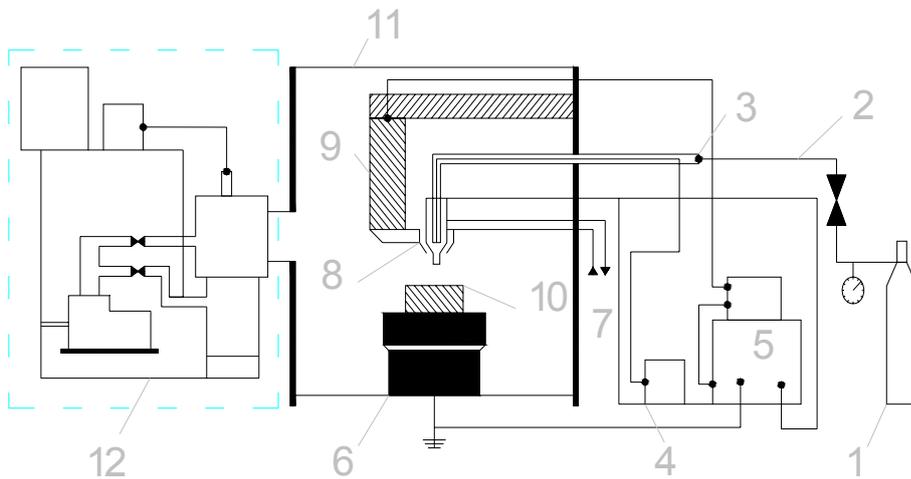
**Материалы и оборудование исследований.** Исследования проводились на образцах из высокопрочного титанового сплава ВТ6С с размерами 200 x 150 x 5 мм и 250 x 150 x 8 мм. Химический состав данного сплава представлен в табл. 1 [5]. Образцы изготавливались из пластин, отожженных при различных температурах с выдержкой 40 мин и охлаждением на воздухе.

Таблица 1

Химический состав сплава ВТ6С

Химический элемент	Содержание, %
Fe	до 0,25
C	до 0,1
Si	до 0,15
V	3,5 – 4,5
N	до 0,05
Ti	87,685 – 91,2
Al	5,3 – 6,5
Zr	до 0,3
O	до 0,15
H	до 0,015
Примесей прочих	0,3

Отработка технологии сварки полым катодом была проведена в лаборатории сварки на базе установки для электроннолучевой сварки ЭЛУ-5 с наклоном катода под углом  $20^{\circ}$  (рис.1).



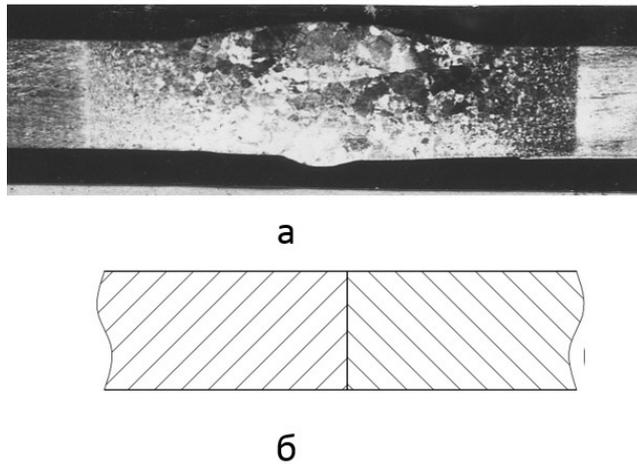
**Рис. 1. Принципиальная схема установки для сварки горячим полым катодом в вакууме:**

- 1 – аргон, 2 – натекатель, 3 – переходник осциллятора, 4 – осциллятор, 5 – источник питания, 6 – манипулятор, 7 – вода, 8 – горелка, 9 – головка, 10 – изделие, 11 – вакуумная камера, 12 – вакуумная система

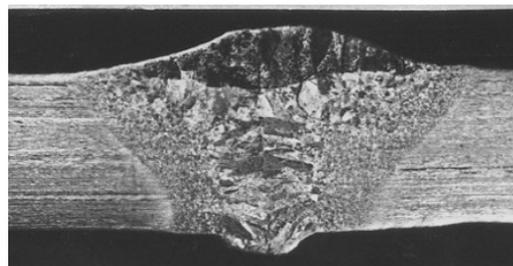
Сварка плоских образцов-имитаторов проводилась на установке, состоящей из вакуумной камеры с системой откачки, предметного стола с продольным и поперечным перемещением, источника питания ВДУ-504, горелки ТПК-300.

**Результаты исследований.** Определение оптимальных условий сварки полым катодом, обеспечивающих требуемые геометрические параметры сварного шва, выполнялось по экспериментальным сваркам пластин толщиной 5 мм и 8 мм с различной разделкой кромок.

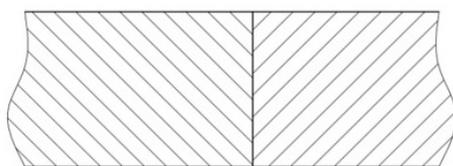
Для выявления качественных изменений формирования шва в зависимости от подготовки свариваемых поверхностей сваривали стыковые соединения без зазора (рис. 2, 3), с фиксированным зазором 0,6–1 мм (рис. 4, 5), с разделкой свариваемых кромок со стороны проплава (рис. 6).



**Рис. 2. Макроструктура (а) (x1,5) образца № 1, сваренного полым катодом без разделки кромок (б) для толщины 5 мм**



а



б

**Рис. 3. Макроструктура (а) (x1,5) образца № 2, сваренного полым катодом без разделки кромок (б) для толщины 8 мм**

Сборка образцов под сварку встык и с зазором дает различные значения геометрических параметров швов, характеризующих плавность перехода проплава к основному металлу. Особенно это показательно для образцов большой толщины 8 мм. Предварительный визуальный осмотр показал, что при сварке с зазором 0,6–1 мм высота проплава уменьшается, чешуйчатость не наблюдается. Дальнейшее увеличение зазора для плоских образцов не желательно, т.к. теряется положительный эффект зазора, образуется подрез со стороны проплава и большое занижение шва.

В связи с тем, что сборка образцов с зазором определенной толщины затруднена, была опробована сварка с фиксированным зазором для толщины 8 мм. В корне шва фрезеровали фиксирующий выступ высотой 1 мм, шириной зазора 0,6 мм и 1 мм. Это облегчает сборку и исключает стягивание пластин из-за их деформации в процессе сварки (рис. 4, б и 5, б).

Сравнительный анализ макроструктуры сварных соединений пластин толщиной 8 мм показал, что у образцов, сваренных с фиксированным зазором (рис. 4, а; рис. 5, а), ширина шва  $a$  и проплава  $b$  практически не изменились (рис. 7, табл. 2), а высота усиления шва  $h_1$  и высота проплава  $h_2$  уменьшилась на 10–20 % и 77 % соответственно. Полученная форма сварного шва позволяет использовать данный вид разделки кромок для получения сварных конструкций с замкнутыми внутренними полостями.

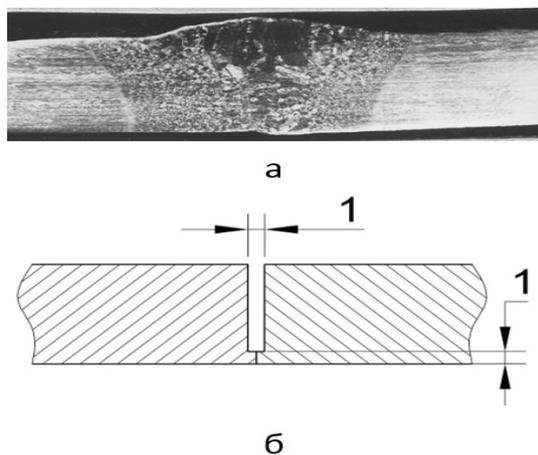


Рис. 4. Макроструктура (а) (x1,5) образца № 3, сваренного полым катодом с разделкой кромок (б) для толщины 8 мм

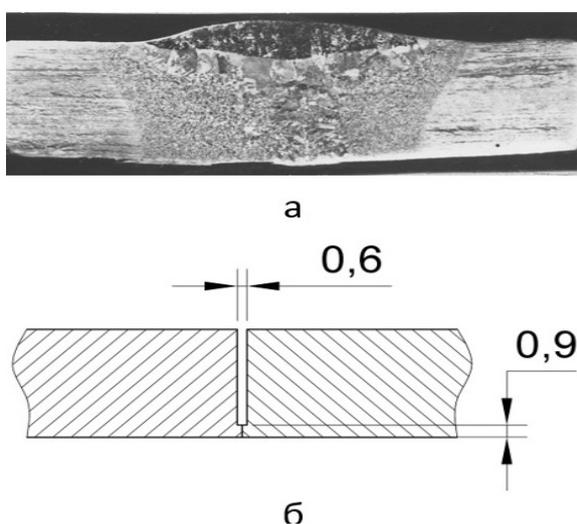
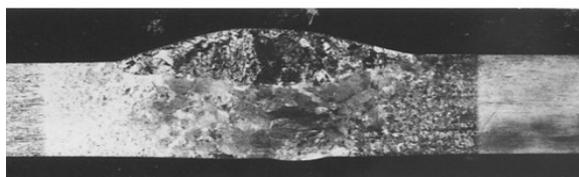
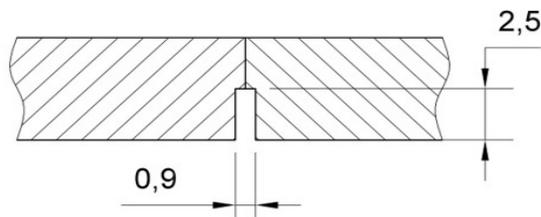


Рис. 5. Макроструктура (а) (x1,5) образца № 4, сваренного полым катодом с разделкой кромок (б) для толщины 8 мм

При сварке пластин толщиной 5 мм была применена также разделка кромок со стороны проплава в виде прямоугольной проточки 0,9 x 2,5 мм. Внешний осмотр швов, сваренных с указанной подготовкой кромок, не показал значительного улучшения формирования шва (рис. 6): ширина шва  $a$  увеличилась на 12 %, высота усиления  $h_1$  – на 67 %, ширина проплава  $b$  уменьшилась на 17 %, высота  $h_2$  – на 37,2 %. Увеличение  $a$  и  $h_1$  является недопустимым, так как полученные размеры сварного соединения превышают указанные в ГОСТ 5264-80 для толщины пластин 5 мм ( $a = 10$  мм,  $h_1 = 2$  мм).



а



б

Рис. 6. Макроструктура (а) (x1,5) образца № 5, сваренного полым катодом с разделкой кромок (б) для толщины 5 мм

Металлографические исследования проводились на образцах, вырезанных из сварного шва и основного металла на расстоянии 20 мм от края пластин. Исследования макроструктур и изломов сварных соединений, полученных сваркой полым катодом в вакууме, показали отсутствие дефектов типа флокенов, горячих и холодных трещин. В соединениях отсутствуют поры, несплошности, непровары.

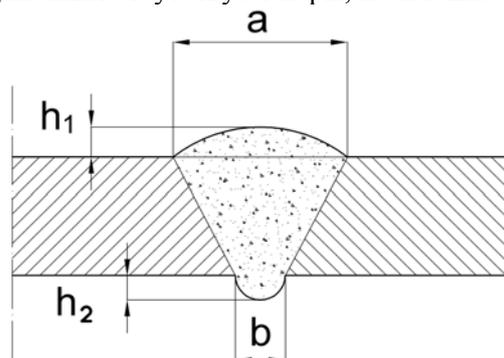


Рис. 7. Схема основных геометрических размеров сварного шва

Таблица 2

Геометрические размеры сварного шва, полученные после сварки полым катодом

№ обр.	Толщина пластины, мм	$a$ , мм	$b$ , мм	$h_1$ , мм	$H_2$ , мм	$N$ , кВт
1	5	12,5	3,4	0,9	0,4	7
2	8	15	4,5	2	1,1	9,5
3	8	15	3,5	1,6	0,25	8
4	8	16	4,5	1,8	0,5	8,4
5	5	14	2,8	1,5	0,25	5,7
6	8	15	4,5	2,3	1,1	8

Анализ результатов проведенных исследований показал, что сварку соединений из титанового сплава ВТ6С толщиной 5 мм и 8 мм наиболее целесообразно выполнять методом сварки полым катодом в вакууме. При этом должна быть выполнена разделка кромок с фиксированным зазором. Указанные условия подготовки кромок под сварку обеспечивают полное проплавление свариваемых деталей по толщине, требуемые геометрические характеристики сварного шва, отсутствие дефектов в сварном соединении и снижение мощности сварки на 11–16 %.

**Выводы.** В процессе сварки соединений из титанового сплава ВТ6С толщиной 5 мм и 8 мм полым катодом в вакууме исследовалось влияние различной разделки кромок на геометрические параметры сварного шва.

В результате исследований установлено, что наилучшие условия формирования сварного соединения обеспечиваются при разделке свариваемых кромок с фиксированным зазором величиной 0,6–1 мм. При этом выполняется полное проплавление свариваемых деталей по толщине, геометрические характеристики сварного шва соответствуют величинам, указанным в ГОСТ 5264-80, отсутствуют дефекты в сварном соединении и мощность сварки снижается на 11–16 %.

Результаты исследований показали перспективность применения метода сварки полым катодом для получения сварных соединений из высокопрочного титанового сплава ВТ6С в производстве.

### Библиографические ссылки

1. **Неровный В. М.** Повышение эффективности дуговой сварки в вакууме титановых сплавов / В. М. Неровный // Сварка и диагностика. – 2012. – № 5. – С. 18–22.
2. **Pererva V.A.** Development of penetration zone size prediction technique for hollow-cathode welding technology of spherical titanium tanks / V.A. Pererva, E.V. Karpovich, A.V. Fedosov // Eastern-European journal of enterprise technologies. – 2016. – P. 47–52. Doi: 10.15587/1729-4061.2016.59790.
3. **Перерва В. А.** Прогнозирование размеров зоны проплавления для технологии сварки полым катодом с различной разделкой кромок / В. А. Перерва, Е. В. Карпович, А. В. Федосов, Е. А. Джур // Авиационно-космическая техника и технология. – 2016. – № 2 (129). – 111 с.
4. ГОСТ 6996-66. Сварные соединения. Методы определения механических свойств. – М. : Изд-во стандартов, 2006. – 44 с.
5. **Ильин А.А.** Титановые сплавы. Состав, структура, свойства : справочник / А.А. Ильин, Б.А. Колачев, И.С. Полькин. – М. : ВИАСМАТИ, 2009. – 520 с.

*Надійшла до редколегії 09.06.2016*

УДК 669.45 + 669.046.558

С. А. Полишко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ВЛИЯНИЕ МОДИФИЦИРОВАНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛЕГИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В МИКРООБЪЕМАХ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ Ст1кп**

Рассмотрено влияние многофункциональных модификаторов на распределение легирующих элементов в микрообъемах стали марки Ст1кп. Доказано, что модифицирование позволяет снизить разницу концентраций между легирующими элементами, что обеспечивает повышение уровня механических свойств готового металла.

*Ключевые слова:* многофункциональные модификаторы, малоуглеродистая сталь Ст1кп, легирующие элементы.

Розглянуто вплив багатофункціональних модифікаторів на розподіл легуючих елементів у мікрооб'ємах сталі марки Ст1кп. Доведено, що модифікування дозволяє понизити різницю концентрацій між легуючими елементами, що забезпечує підвищення рівня механічних властивостей готового металу.

*Ключові слова:* багатофункціональні модифікатори, маловуглецева сталь Ст1кп, легуючі елементи.

The influence of multifunction modifiers was considered on distributing of alloying elements the brands of St1kp became in microvolumes. It was well-proven that modification allows to reduce the difference of concentrations between alloying elements, that provides the increase of level of mechanical properties of the prepared metal.

*Keywords:* multifunction modifiers, low-carbon steel of St1kp, alloying elements.

Одной из наиболее важных, но в то же время труднорешаемых, проблем металлургии является получение стабильного химического состава и однородного распределения легирующих элементов в микрообъемах сталей различного назначения. Ведь от стабильности химического состава зависит как уровень механических свойств металла, так и качество готовой продукции в целом.

В то же время, как показывает практика, из-за больших объемов расплава в ковше, с помощью применения только лишь традиционных технологий выплавки стали, а также из-за применения неконтролируемых по содержанию химических элементов добиться получения повышения качества металлургической продукции невозможно.

В связи с этим в условиях ОАО АрселорМиттал «Кривой Рог» было проведено модифицирование малоуглеродистой стали Ст1кп многофункциональными модификаторами [1], рис. 1.

Сталь общего назначения Ст1кп, выплавленная в 160-тонных конверторах, применяемая в строительстве в качестве арматуры, обладает структурой, свойствами и составом, удовлетворяющими требованиям, указанным выше.

Это подтверждено нашими экспериментальными исследованиями [2; 3]. Были исследованы образцы горячекатаных прутков Ст1кп серийного производства.

Анализ 34 промышленных плавков стали Ст1кп показал следующее:

1. Из-за больших концентрационных интервалов легирующих элементов C, Mn, Si, Cr, Mo, Mo, Cu и V (табл. 1) в реальном металле имеет место большой межплавочный и внутриплавочный разброс химических элементов и, соответственно, механических свойств (табл. 2).
2. В результате недостаточного усвоения алюминия чушкового расплавом в серийных плавках отсутствовал остаточный алюминий.
3. Уровень механических свойств серийной малоуглеродистой стали соответствовал требованиям ДСТУ.



Рис. 1. Внешний вид multifunctional модификатора

Таблица 1

Химический состав серийной малоуглеродистой стали Ст1кп по ДСТУ 2651-2005 (ГОСТ 380-2005)

	Массовая доля химических элементов, %									
	C	Mn	Si	Cr	Ni	Cu	S	P	V	Al
ДСТУ	0,06-0,12	0,25-0,50	≤ 0,05	≤ 0,3	≤ 0,3	≤ 0,3	≤ 0,05	≤ 0,04	-	≤ 0,01
Среднее значение	0,081	0,39	0,05	0,03	0,02	0,03	0,022	0,015	0,005	0
Разброс	0,05	0,24	0,04	0,05	0,06	0,06	0,022	0,010	0,002	0

Таблица 2

Механические свойства серийной малоуглеродистой стали Ст1кп по ДСТУ 2770-94

	Предел прочности $\sigma_b$ , Мпа	Относительное сужение $\psi$ , %
ДСТУ	≤ 420	≥ 68
Среднее значение	380,2	74
Разброс	38	6

После обработки расплава multifunctional модификаторами значительно повысилась стабильность химического состава и механических свойств (табл. 3, 4).

Таблица 3

## Химический состав модифицированной малоуглеродистой стали Ст1кп по ДСТУ 2651-2005 (ГОСТ 380-2005)

	Массовая доля химических элементов, %									
	C	Mn	Si	Cr	Ni	Cu	S	P	V	Al
ДСТУ	0,06 -0,12	0,25 -0,50	≤ 0,05	≤ 0,3	≤ 0,3	≤ 0,3	≤ 0,05	≤ 0,04	-	≤ 0,01
Среднее значение	0,085	0,40	0,03	0,03	0,02	0,03	0,019	0,008	0,005	0,005
Разброс	0,03	0,11	0,03	0,02	0,01	0,03	0,011	0,006	0,001	0,002

Таблица 4

## Механические свойства модифицированной малоуглеродистой стали Ст1кп по ДСТУ 2770-94

	Предел прочности $\sigma_b$ , Мпа	Относительное сужение $\psi$ , %
ДСТУ	≤ 420	≥ 68
Среднее значение	382,0	74,6
Разброс	38	6

Это связано с тем, что благодаря компонентам многофункциональных модификаторов было снижено содержание вредных примесей, особенно фосфора, содержание которого в конвертере без модифицирования снизить не возможно. Дело в том, что фосфор, находясь в избытке, располагается по границам зерен, разрушая их. Если же снизить его количество в стали, он располагается в феррите, не снижая свойств готового металла. Также при этом важно было снизить содержание кремния, так он образует монооксид кремния SiO, снижая свойства конструкционной стали Ст1кп [4].

В горячекатаном металле после деформации и термообработки путем дождевания проволоки с прокатного нагрева были проведены исследования на распределение элементов в металле с помощью японского микроскопа JEOL SUPERPROBE 733.

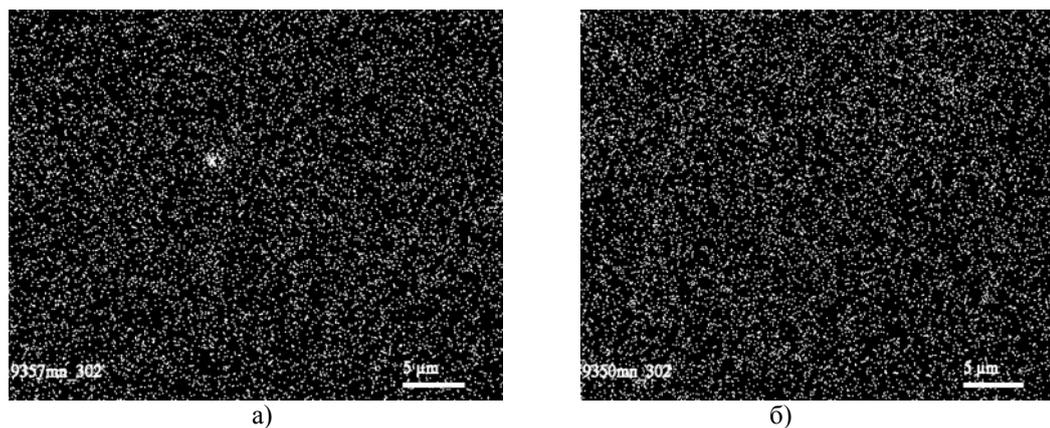
Исследовано распределение легирующих элементов марганца, кремния и хрома в немодифицированных и модифицированных образцах катанки из Ст1кп на установке JEOL SUPERPROBE 733 в отраженных электронах. Здесь светящиеся точки определяют положение атомов каждого из перечисленных элементов в поле зрения при  $\times 3000$ .

Установлено следующее:

- распределение марганца достаточно равномерное в модифицированном образце (рис. 2 б), в немодифицированном имеется включение, по-видимому, MnS, с повышенной локальной концентрацией Mn (рис. 2 а);
- распределение кремния более однородное в модифицированном образце (рис. 3 б) в сравнении с немодифицированным (рис. 3 а), где тоже имеется скопление атомов Si на базе монооксида кремния, присутствие которого нежелательно из-за его охрупчивающего действия на металл. Появление SiO связано с более высоким содержанием кремния в немодифицированной стали Ст1кп (0,05 % мас. против 0,03 % мас. Si в

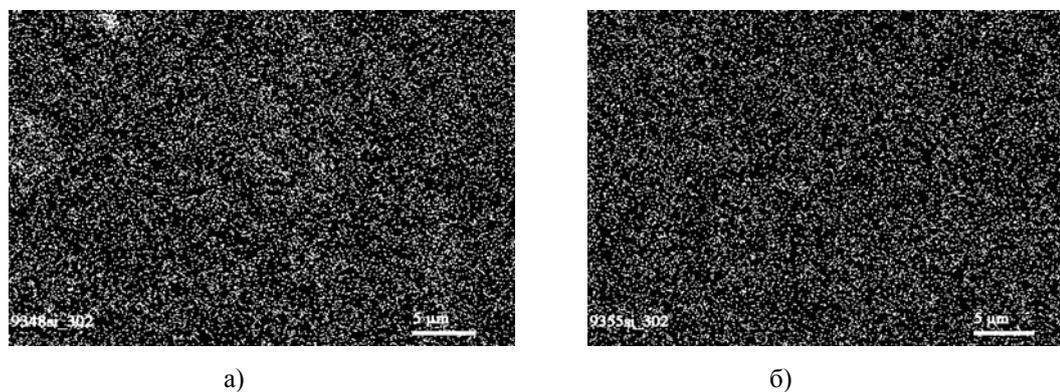
модифицированной стали Ст1кп) и неравномерным распределением атомов Si в феррите;

– распределение хрома отличается большей неоднородностью в сравнении с распределением Si и Mn в стали Ст1кп. Однако, более равномерно распределен Cr в модифицированной стали Ст1кп (рис. 4 б) в сравнении с немодифицированной (рис. 4 а), где имеются локальные места, обогащенные Cr, повидимому на базе включений. Этот эффект значительно слабее проявляется в образцах катанки из модифицированной стали Ст1кп. Таким образом, доказан экспериментально высокоточным методом факт более равномерного распределения легирующих элементов в модифицированной стали Ст1кп.



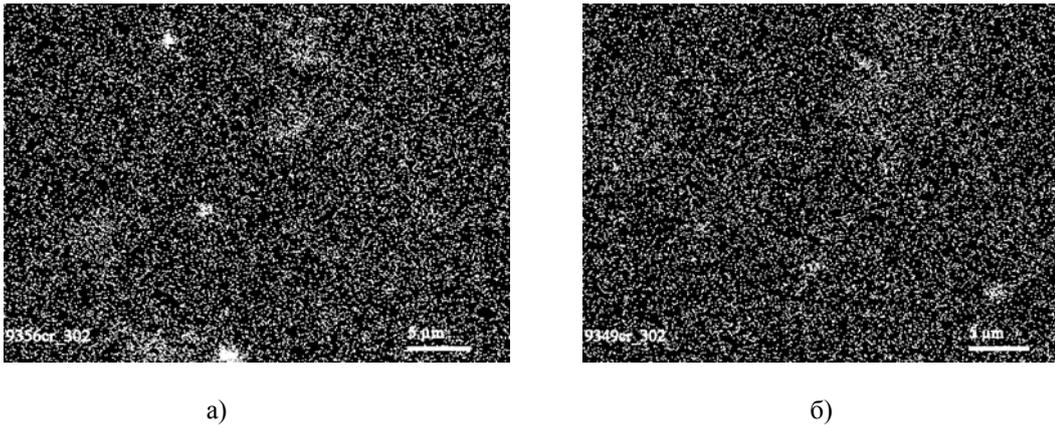
**Рис. 2. Распределение марганца в малоуглеродистой стали Ст1кп:**

- а) немодифицированной плавки № 241973, х3000;
- б) модифицированной плавки № 262673, х3000



**Рис. 3. Распределение кремния в малоуглеродистой стали Ст1кп:**

- а) немодифицированной плавки № 241973, х3000;
- б) модифицированной плавки № 262673, х3000



**Рис. 4. Распределение хрома в малоуглеродистой стали Ст1кп:**  
а) немодифицированной плавки № 241973, х3000;  
б) модифицированной плавки № 262673, х3000

Таким образом, исследованием малоуглеродистой стали Ст1кп показано, что обработкой расплавов многокомпонентными модификаторами различных составов сталей можно стабилизировать химический состав и повысить уровень механических свойств.

### Библиографические ссылки

1. Патент на винахід № UA 85254. Композиційний розкислювач для обробки сталей. МОНУ / Шаповалова О.М., Шаповалов В.П., Шаповалов А.В., Полішко С.О. Державний департамент інтелектуальної власності, ДНУ, а 2007 008 58, заявл. 26.01.2007 р, опубл. 12.01.2009 р.
2. **Шаповалова О.М.** Стабилизация химического состава и механических свойств в сталях 1кп и R7 под влиянием модифицирования / О.М. Шаповалова, А.Е. Камышный, А.В. Шаповалов, С.А. Полишко, М.А. Кушнир, Е.Н. Майстренко, Ю.А. Финдлинг // Строительство, материаловедение, машиностроение: сб. научн. трудов. – Вып. 48. Ч. 3. – ПГАСА. – 2009. – С. 232 (в обл.)
3. Влияние неметаллических включений и структуры на трещинообразование в колесной стали / А.В. Шаповалов, Е.Н. Майстренко, Л.Я. Кульчицкая, С.А. Полишко, Ю.В. Татарко // Тезисы докладов 70 Международной научно-методической конференции «Проблемы развития железнодорожного транспорта». Днепропетровск, 2010. – С. 300–301.
4. **Полишко С.А.** Комплексное влияние вредных примесей (S, P, As) и основных легирующих элементов на механические свойства стали Ст1кп / С. А. Полишко // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки : зб. наук. праць. – Вип. 18. – 2015. – С. 78–83.

Надійшла до редколегії 12.04.2016

УДК678.01:53/538.6-78.067

**О. П. Роменская, И. А. Гусарова, Т. А. Манько**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФРАКРАСНОГО НАГРЕВА ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Предложено использование инфракрасного нагрева при изготовлении изделий из стеклопластика методом намотки. Показано, что инфракрасный нагрев интенсифицирует процесс отверждения благодаря воздействию квантов энергии  $h\nu$  на развитие химических реакций между макромолекулами.

*Ключевые слова:* ракетно-космическая техника, инфракрасный нагрев, стеклопластик, связующие.

Запропоновано використання інфрачервоного нагрівання при виготовленні виробів із склопластику методом намотування. Показано, що інфрачервоне нагрівання інтенсифікує процес отвердження завдяки дії квантів енергії  $h\nu$  на розвиток хімічних реакцій між макромолекулами.

*Ключові слова:* ракето-космічна техніка, інфрачервоне нагрівання, склопластик, зв'язувальне.

In work use of infra-red heating at manufacturing of products from fibreglass is supposed a winding method. It is shown, infra-red heating intensifies process отверждения thanks to influence of quanta of energy  $h\nu$  on development of chemical reactions between macromolecules.

*Keyword:* space-rocket hardware, infra-redheating, fiberglass, bindingagent.

Анализ перспектив развития ракетно-космической техники говорит об увеличении доли полимерных композиционных материалов (ПКМ) в конструкциях летательных аппаратов. Но их производство связано с определенными затратами энергии. И это выдвигает проблему разработки новых технологий получения изделий из ПКМ по сокращению времени отверждения полимерных связующих без снижения качества ПКМ.

В настоящее время весьма актуальными являются исследования в области термоотверждения диэлектрических материалов, в частности связующих в композитах, с помощью инфракрасного (ИК) излучения.

Отверждение композитов осуществляется конвективным нагревом и с использованием потока энергии инфракрасных излучателей. При выборе режимов ИК нагрева важное значение имеет теплообмен по толщине изделия.

В работе предложено использование ИК нагрева при изготовлении изделий из стеклопластика методом намотки, условия формования плоских образцов должны быть максимально приближены к условиям изготовления намоточных композиций.

Нагрев применялся на различных стадиях изготовления изделий. При намотке предварительно пропитанным материалом нагрев необходим для размягчения связующего и, после окончания процесса, для его отверждения.

После выхода из ванны в процессе намотки связующее остывает и при завершении оборота ленты вокруг оправки его температура значительно снижается. Следующий слой препрега наматывается на слой, в котором связующее уже остыло и имеет большую вязкость, чем необходимо для получения плотной структуры материала. Быстрое остывание связующего при намотке препятствует плотной укладке наполнителя – и это может быть одной из причин снижения прочности изделий.

Поскольку скорость намотки обычно стремятся сделать высокой, желательно обеспечить максимально быстрый нагрев поверхностного слоя, и здесь наиболее перспективным решением может быть использование ИК излучателей. Наибольший эффект нагрева достигается при соответствии спектральных характеристик излучателя и оптических свойств связующего.

С целью выбора наиболее эффективного нагревателя были экспериментально определены оптические свойства исследуемого материала, в частности эпоксидного связующего ЭДТ-10. На спектрофотометре УК-75 снимали ИК спектры пропускания жидкого и отверждённого связующего. Установлено, что это связующее хорошо поглощает ИК излучение в диапазоне длин волн  $(2,7-3,5) \cdot 10^{-6}$  м и затем свыше  $5 \cdot 10^{-6}$  м. В области  $(2,7-3,5) \cdot 10^{-6}$  м находится широкая полоса, чувствительная к образованию гидроксильной группы ОН (рис. 1, 2).

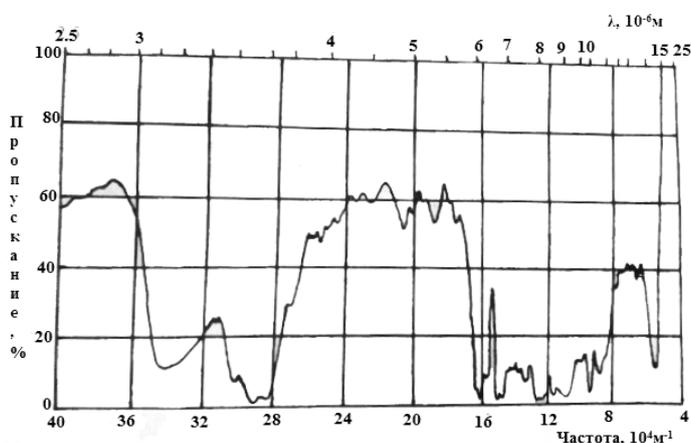


Рис. 1. ИК-спектр жидкого связующего ЭДТ-10

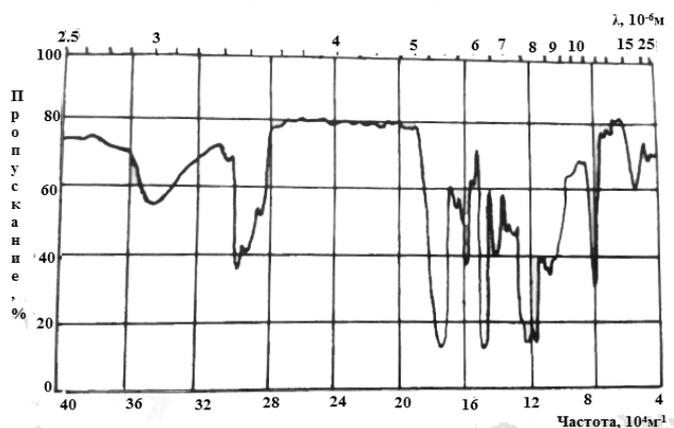


Рис. 2. ИК-спектр отверждённого связующего ЭДТ-10

Выбор источника ИК нагрева с излучением в области  $(2,7 - 3,5) \cdot 10^{-6}$  м создаёт оптимальные условия воздействия излучения на структуру исследуемых материалов в процессе отверждения.

Таким образом, на основании анализа ИК спектров пропускания установлено, что для интенсификации процесса термоотверждения стеклопластиков можно использовать лучистый поток как коротковолновый, так и длинноволновый. Но коротковолновое излучение эффективнее проявляется при термообработке стеклокомпозиции.

В работе использовали галогенные лампы накаливания КГТ-220-1000, у которых основная часть излучаемой энергии приходится на спектральную область  $(1 - 3) \cdot 10^{-6}$  м с максимумом излучения на длине волны  $\lambda_m = 1,05 \cdot 10^{-6}$  м.

С учётом проведенного анализа была рассчитана, спроектирована и изготовлена экспериментальная установка, обеспечивающая отверждение образцов стеклопластика под воздействием ИК излучения в коротковолновом диапазоне.

Количество ламп в установке  $n = 3$ . Расстояние между лампами рассчитывалось по формуле

$$E = \frac{P u a}{k_1 l^2}$$

где  $E$  – энергетическая освещенность;  $P$  – мощность лампы, Вт;  $u$  – коэффициент эффективности источника;  $a$  – коэффициент многократных отражателей;  $k_1 = 0,87$ ;  $l$  – расстояние между лампами.

Лампы располагались на высоте  $h = 4 \cdot 10^{-2}$  м. Схема расположения излучателей представлена на рис. 3.

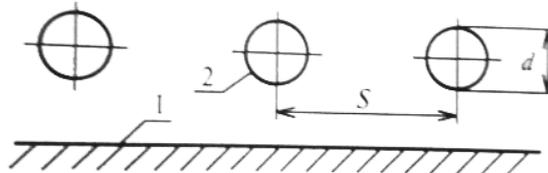


Рис. 3. Схема расположения излучающих поверхностей

На рис. 4 приведена схема установки для ИК нагрева плоских образцов.

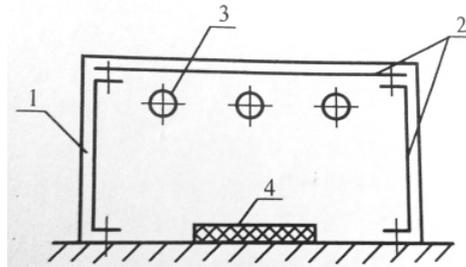


Рис. 4. Схема установки для ИК нагрева плоских образцов:

- 1 – корпус; 2 – отражатели;
- 3 – галогенные лампы накаливания;
- 4 – образец стеклопластика

Отвержденные по разработанной технологии образцы подвергали механическим испытаниям.

Установлено, что ИК нагрев в сравнении с конвективным отверждением обеспечивает повышение прочностных характеристик до 20 %.

Показано, ИК нагрев интенсифицирует процесс отверждения благодаря воздействию квантов энергии  $h\nu$  на развитие химических реакций между макромолекулами.

### Библиографические ссылки

1. Борхерт Р. Техника инфракрасного нагрева / Р. Борхерт, В. Юбиц. – М., Л. : Госэнергоиздат, 1963. – 278 с.
2. Журнал Всесоюзного химического общества Д.И. Менделеева. – № 3. – 1978.
3. Джур С.О. Полімерні композиційні матеріали в РКТ / С. О. Джур, Л. Д. Кучма, Т. А. Манько. – К. : Вища школа, 2003. – 399 с.
4. Технология намоточных изделий ОСТ-92-901, ОСТ-92-902.

Надійшла до редколегії 17.04.2016

УДК 629.78

Е. Г. Седачова, Н. Н. Убизький, А. В. Кулик

*Днепропетровский колледж ракетно-космического машиностроения  
Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара*

## МЕТОДИКА АНАЛИЗА ФОРМОИЗМЕНЯЮЩИХ ОПЕРАЦИЙ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ИЗДЕЛИЙ

**Наведено методику теоретичного аналізу операцій листового штампування.**

*Ключові слова:* методика, теоретичний аналіз, операції листового штампування.

**Приведена методика теоретического анализа операции листовой штамповки.**

*Ключевые слова:* методика, теоретический анализ, операции листовой штамповки.

**Methods over of theoretical analysis of operations of the sheet stamping are brought.**

*Keyword:* methods, theoretical analysis, operations of the sheet stamping.

**Постановка задачи.** Математически строго решить задачу по отысканию полей напряжений и деформаций в деформируемой листовой заготовке с учетом всех существенно влияющих факторов практически невозможно. Это объясняется нестационарностью процесса деформирования и обилием факторов, влияющих на поля напряжений и деформации. Поэтому обычно при анализе операций листовой штамповки используют ряд допущений, связанных со схематизацией механических свойств материала заготовки и условий ее нагружения, а также с ограничением числа учитываемых в анализе факторов, влияющих на процесс деформирования.

Ценность полученного в результате анализа решения тем выше, чем больше число учтенных в анализе факторов и чем более точно отражают найденные в результате решения функциональные зависимости реальный процесс деформирования. В то же время для инженерной практики желательно, чтобы результаты решения были достаточно просты и, по возможности, завершались установлением зависимостей, выраженных в аналитических функциях.

Решение, удовлетворяющее указанным, по существу, противоречивым требованиям, получают путем рациональной схематизации условий нагружения и свойств материала при одновременном использовании упрощающих анализ допущений, приемлемость которых может быть оценена или математически, или постановкой специальных целенаправленных экспериментов. Такое решение требует не только хорошего знания основ теории пластичности, но и определенной изобретательности в отыскании путей простейшего решения сложных вопросов.

**Основная часть.** При анализе операций листовой штамповки основным уравнением является уравнение равновесия. Так как в основной части очага деформации напряжения по толщине заготовки изменяются незначительно (за исключением участков, в которых элементы заготовки получают резкое изменение кривизны срединной поверхности), поэтому обычно используют уравнение равновесия элемента, конечного в одном измерении (по толщине заготовки).

В процессе деформирования при формоизменяющих операциях толщина заготовки изменяется и становится в очаге деформации функцией координат. Следовательно, в общем случае целесообразно использовать уравнение равновесия оболочки переменной толщины.

Обычно в формоизменяющих операциях заготовка в очаге деформации контактирует с рабочей поверхностью одного из деформирующих инструментов (с пуансоном или матрицей). В этом случае нормальные и касательные напряжения действуют на одной поверхности заготовки, в то время как противоположная свободна от внешних нагрузок.

В некоторых случаях (вытяжка с прижимом, штамповка эластичными средами) обе поверхности заготовки нагружены внешними силами. И в первом, и во втором случаях уравнение равновесия может быть получено при отнесении всех сил к срединной поверхности заготовки.

Для случаев осесимметричного деформирования общее уравнение равновесия, учитывающее переменность толщины по координате  $\rho$ , трение на контактных поверхностях, затрудняющее течение металла, и наличие контактных нормальных напряжений, вызванных, например, действием прижима, может быть представлено в виде:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left( 1 + \frac{\rho d_s}{s d\rho} \right) - \sigma_\theta - \frac{\mu \rho}{\sin \alpha} \left( \frac{2q}{s} + \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right), \quad (1)$$

где  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$  – нормальные (средние по толщине) напряжения, действующие в меридиональном и широтном направлениях;  $\rho$  – расстояние от рассматриваемого элемента до оси симметрии;  $s$  – толщина заготовки;  $\mu$  – коэффициент трения;  $\alpha$  – угол между касательной к срединной поверхности рассматриваемого элемента и осью симметрии;  $q$  – удельное усилие, созданное внешним усилием (например, усилием прижима), приложенное к поверхности заготовки (в формулу (1) следует

подставитъ со знаком минус, так как всегда сжимающее);  $R_\rho$  и  $R_\theta$  – радиусы кривизны срединной поверхности элемента соответственно в меридиональном и широтном сечениях (положительны, если центр кривизны и ось симметрии расположены по одну сторону от рассматриваемого элемента).

Уравнение (1) является достаточно общим и может быть использовано при анализе практически всех формоизменяющих операций листовой штамповки без принудительного утонения заготовки при наличии осевой симметрии деформирования.

В общем случае  $s$ ,  $R_\rho$  и  $\alpha$  являются некоторыми функциями координаты  $\rho$ , что существенно усложняет решение и затрудняет получение решения в виде аналитических функций. В зависимости от требуемой точности, а также в зависимости от целей анализа, для упрощения решения возможна аппроксимация зависимостей  $s$ ,  $R_\rho$  и  $\alpha$  от координаты  $\rho$  аналитическими функциями, упрощающими интегрирование и позволяющими за счет этого получать решение в замкнутом виде.

Однако даже в самой простой постановке  $\left( \frac{d_s}{d_\rho} = 0, \quad q = 0, \quad R_\rho = const \right)$

задача является статически неопределимой ( $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$  неизвестны) и для решения требуется еще одно уравнение. Таким уравнением может быть уравнение пластичности.

При анализе формоизменяющих операций листовой штамповки широко используют допущение о том, что заготовка деформируется в условиях, близких к схеме плоского напряженного состояния, а влиянием контактных напряжений на условие перехода в пластическое состояние можно пренебречь. Это допущение не вносит существенно погрешности в получаемое решение, если нормальные и касательные напряжения на контактных поверхностях в очаге деформации существенно меньше напряжения текучести.

Уравнение пластичности для плоского напряженного состояния при осесимметричном деформировании имеет вид:

по гипотезе максимальных касательных напряжений

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_s, \quad (2)$$

по энергетической гипотезе

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2, \quad (3)$$

где  $\sigma_s$  – напряжение текучести.

Как следует из приведенных уравнений, по энергетической гипотезе (которая для пластичных металлов более точно отражает условие перехода в пластическое состояние) для всех схем напряженного состояния существует одна запись уравнения пластичности.

При использовании гипотезы максимальных касательных напряжений для получения записи уравнения пластичности необходимо выяснить схему напряженного состояния и установить, какие из напряжений являются

максимальними и какие – минимальными. Так, при принятых обозначениях  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  уравнение пластичности имеет вид:

– для вытяжки и раздачи

$$\sigma_p - \sigma_\theta = \pm \sigma_s, \quad (2a)$$

(верхний знак для вытяжки, нижний – для раздачи),

– для отбортовки и обжима

$$\sigma_\theta = \pm \sigma_s, \quad (2б)$$

(верхний знак для отбортовки, нижний – для отжима).

Так как разница в значениях напряжений, соответствующих переходу от упругих деформаций к пластическим, по обеим гипотезам не превышает 15 % от напряжения текучести, то обычно выбирают ту запись уравнения пластичности, которая дает наиболее простое решение.

Напряжение текучести в общем случае зависит от величины деформации, полученной рассматриваемым элементом к данному моменту деформирования, а также от скорости деформации. Для металлов в условиях холодной деформации влияние скорости деформации на величину напряжения текучести незначительно, и штамповке на обычном оборудовании этим влиянием можно пренебречь. Однако, при высокоскоростной штамповке (взрывная, электромагнитная и т. п.) влиянием скорости деформации на величину напряжения текучести пренебрегать нежелательно.

В условиях обычной холодной листовой штамповки напряжение текучести, в основном, зависит от деформации, которая обуславливает упрочнение. Так как деформации, полученные элементами очага деформации, в рассматриваемый момент деформирования обычно различны, то напряжение текучести в очаге деформации являются функцией координат.

Таким образом, для получения решения при анализе операций листовой штамповки желательно установить функциональную зависимость напряжений текучести от деформаций и найти распределение деформаций в очаге для рассматриваемого момента деформирования.

Для упрощения решения обычно стремятся аппроксимировать зависимость деформации от координат и напряжений от деформаций аналитическими функциями, которые с приемлемой точностью отражали бы действительность и в то же время позволяли получить не слишком громоздкое решение.

Решение может быть получено на основе уравнений (1) и (2) или (3), в которых  $\sigma_s = f(\rho)$ . Однако в ряде случаев не удастся подобрать функции  $\sigma_s = \varphi(\varepsilon) = f(\rho)$  такими, чтобы интегрирование выполнялось достаточно просто и решение было получено в аналитических функциях. В таких случаях худшую, но приемлемую точность решения можно получить, если принять напряжение текучести постоянным для всего очага деформации и равным среднему его значению (среднему интегральному или среднему арифметическому от максимального и минимального значения напряжения текучести в очаге деформации).

Как было отмечено ранее, уравнение (1) справедливо для случаев, когда напряжение  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  незначительно изменяются по толщине заготовки. По

существо, уравнение (1) соответствует условию безмоментного деформирования, при котором кривизна срединной поверхности в процессе деформирования заготовки изменяется незначительно.

В формоизменяющих операциях листовой штамповки это условие обычно выполняется для большей (по протяженности) части очага деформации. Однако в очаге деформации имеются участки, в которых перемещение элементов заготовки относительно рабочих поверхностей инструмента сопровождается существенным изменением кривизны их срединной поверхности. В таких участках действие изгибающих моментов на поля напряжения оказывается значительным и решение следует искать, основываясь на уравнениях моментной теории оболочек. Однако решения по моментной теории оболочек, как правило, оказываются весьма сложными. В то же время с приемлемой точностью можно учесть влияние резкого изменения кривизны срединной поверхности, считая, что на участке резкого изменения кривизны (с увеличением кривизны – изгиб или с ее уменьшением – спрямление) абсолютное значение напряжения  $\sigma_\rho$ , найденное по безмоментной теории (уравнения (1), (2) и (3)), скачкообразно возрастает на величину, определяемую по формуле

$$|\Delta\sigma_\rho| = \frac{1}{4}\sigma_s \frac{s}{R_{\rho_1}} \left(1 - \frac{R_{\rho_1}}{R_{\rho_2}}\right), \quad (4)$$

где  $R_{\rho_2} > R_{\rho_1}$  – значения радиусов кривизны срединной поверхности заготовки на границах участка очага деформации, в котором перемещение элементов заготовки относительно рабочих поверхностей инструмента сопровождается значительным изменением кривизны их срединных поверхностей.

В случае, если на участке резкого изменения кривизны срединной поверхности элементов радиуса  $R_\rho$  изменяется от конечного значения до бесконечности или наоборот ( $R_{\rho_2} = \infty$ ), формула (4) принимает более простой вид:

$$|\Delta\sigma_\rho| = \frac{1}{4}\sigma_s \frac{s}{R_\rho}. \quad (4a)$$

Действие изгибающих моментов и перерезывающих сил может привести к тому, что образуются участки очага деформации, в которых элементы заготовки деформируются (происходят линейные деформации срединной поверхности и изменение ее кривизны) без контакта с рабочими поверхностями. Такие участки назовем участками свободного изгиба. В участках свободного изгиба кривизна срединной поверхности, строго говоря, переменна:  $R_\rho = f(\rho)$ . Однако без большой погрешности (учитывая то обстоятельство, что обычно протяженность участков свободного изгиба в меридиональном направлении существенно меньше размеров очага деформации) при решении задачи по отысканию полей напряжений (а иногда даже и полей деформации) можно принять, что на участке свободного изгиба кривизна постоянна ( $R_\rho = const$ ) и скачкообразно изменяется на границах участка

свободного изгиба. Величины средних значений радиуса кривизны на участке свободного изгиба приближенно можно определить по следующим выражениям:

– для участков, в которых  $\sigma_\rho$  близко к нулю

$$R_\rho = \frac{\sqrt{Rs}}{\sin \alpha}; \quad (5)$$

– для участков, в которых  $\sigma_\rho$  близко к напряжению текучести

$$R_\rho = \frac{\sigma_s s}{4\sigma_\rho(1 - \sin \alpha)}; \quad (6)$$

где  $R$  – радиус заготовки в участке свободного изгиба (расстояние от границы свободного изгиба по срединной поверхности до оси симметрии); остальные величины известны.

**Выводы.** В данной статье кратко изложены основные положения методики анализа формоизменяющих операций листовой штамповки, которая позволяет получать простейшие решения, обладающие приемлемой для практических расчетов точностью. Обоснование некоторых положений этой методики можно найти в [1; 2]. Подход к решению задач, связанных с формоизменяющими операциями листовой штамповки по этой методике, частично будет проиллюстрирован при рассмотрении основных операций листовой штамповки.

Использование уравнения (1) и уравнения пластичности (2) для плоского напряженного состояния для отыскания полей напряжений и деформаций дает удовлетворительную точность решения в случае, если радиусы кривизны срединной поверхности превышают толщину заготовки более чем в 10 раз или если криволинейный участок составляет малую долю общего очага деформации. При малых радиусах кривизны точность решения может быть выше, если использовать уравнение пластичности для объемной схемы напряженного состояния, по-прежнему относя все силы в уравнении равновесия к срединной поверхности, т.е. усредняя величины напряжений по толщине заготовки. В этом случае в качестве третьего главного нормального напряжения в уравнении пластичности может быть

принято напряжение  $\sigma_z = \frac{\sigma_\kappa}{2}$ , где  $\sigma_\kappa$  – нормальное напряжение на контактной поверхности, величину которого можно определить по уравнению Лапласа

$$\frac{\sigma_\kappa}{s} = \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\rho}{R_\theta}.$$

Применение уравнения пластичности для объемной схемы напряженного состояния по энергетической гипотезе обычно приводит к значительным математическим трудностям. При использовании уравнений пластичности по гипотезе максимальных касательных напряжений получим уравнения пластичности следующего вида:

– для обжима

$$\sigma_z - \sigma_\theta = \sigma_s \text{ при } |\sigma_z| < |\sigma_\rho| \text{ и } \sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s \text{ при } |\sigma_z| > |\sigma_\rho|;$$

– для раздачи

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_s \text{ при } |\sigma_z| > |\sigma_\rho| \text{ и } \sigma_\theta - \sigma_\rho = \sigma_s \text{ при } |\sigma_z| < |\sigma_\rho|;$$

– для отбортовки  $\sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_s$ , для всего очага деформации.

Для вытяжки напряжение  $\sigma_z$  является средним для всего очага деформации и по гипотезе максимальных касательных напряжений не оказывает влияния на условие перехода в пластическое состояние.

Уравнение пластичности в приведенном выше написании совместно с уравнением (1) позволяет получать решения, более точно отражающие действительность при значительно меньших относительных радиусах кривизны срединной поверхности, по сравнению с решениями, в которых уравнение пластичности соответствует плоскому напряженному состоянию.

### Библиографические ссылки

1. **Сторожев М. В.** Основы теории обработки металлов давлением / М. В. Сторожев. – М., 1959. – 539 с.
2. **Попов Е. А.** Основы теории листовой штамповки / Е. А. Попов. – М., 1968. – 283 с.

Надійшла до редколегії 29.06.2016

УДК 534-6

**Г. И. Сокол, В. Ю. Котлов, К. С. Щербина**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В РУПОРЕ НА ИНФРАЗВУКОВЫХ ЧАСТОТАХ**

В данной работе путем измерений экспериментально получены амплитудно-частотные характеристики функций колебательной скорости, звукового давления и фазовых соотношений между ними в горле рупора катеноидальной формы на инфразвуковых частотах. Анализ полученных результатов позволил выявить резонансные явления и определить их частоты.

*Ключевые слова:* акустические колебания, инфразвук (ИЗ), рупор, катеноидальная форма, эксперимент, резонансные явления.

В цій роботі шляхом вимірювань експериментально отримано амплітудно-частотні характеристики функцій коливальної швидкості, звукового тиску і фазових відношень між ними в горлі рупору катеноїдальної форми на інфразвукових частотах. Аналіз отриманих результатів дозволив виявити резонансні явища та визначити їх частоти.

*Ключові слова:* акустичні коливання, інфразвук (ІЗ), рупор, катеноїдальна форма, експеримент, резонансні явища.

In this paper, the experimentally obtained by measuring the amplitude and frequency characteristics of the functions of the vibration velocity, of sound pressure and phase relationships between them in the throat of the kathenoid form horn on infrasonic frequencies. Analysis of the results revealed a resonance phenomenon and determine their frequency.

*Keywords:* acoustic vibrations, infrasound (IS), horn of the kathenoid form, experiment, resonance phenomena.

**Введение.** Актуальность настоящей работы определяется возросшим интересом ученых к акустическим сигналам на инфразвуковых (ИЗ) частотах. Инфразвук – важный индикатор приближающихся природных катастроф: торнадо, тайфунов, землетрясений [12].

В приборах, улавливающих инфразвуковые сигналы, часто используются рупора. Например, известен установленный на палубе корабля рупор, который медленно вращался. При обнаружении штормовой зоны рупор останавливался, указывая направление, откуда движется шторм. Предупреждение шторма возможно за 10–15 часов до его начала [12].

Целью данной работы является экспериментальный анализ распространения акустических сигналов в катеноидальном рупоре конечной длины на инфразвуковых частотах.

**Основная часть. Аналитический обзор. Применение рупоров в акустических генераторах.** Исследованию излучения звука акустическими излучателями с рупорами, а также методам расчета величины акустической мощности таких генераторов посвящено довольно много работ. Рэлей осветил проблему колебаний воздуха внутри рупора конического сечения. Он применил теорию распространения волн в трубах к объяснению распространения акустических волн в коническом рупоре [10].

А. Г. Вебстер ввел понятие акустического сопротивления [15]. Он получил, что при некоторой частоте акустического сигнала, названной критической, в рупоре экспоненциальной формы (при условии отсутствия отражения сигнала от устья рупора, то есть в приближении рупора «бесконечной длины»), происходит как бы акустическое «запирание». Распространение акустического сигнала в полости рупора согласно этой теории возможно только тогда, если частота сигнала выше некоторого критического значения.

А. Б. Крендалл [7] на основе теории А. Г. Вебстера дал полное описание распространения волн в коническом и экспоненциальном рупорах в приближениях бесконечной и конечной длины. Показано, что в рупоре конечной длины возникает явление резонанса. Причем резонанс в коническом рупоре отмечается на тех же частотах, что и в цилиндрической трубе. А. Б. Крендаллом разработана методика расчета акустической мощности акустического генератора с рупором экспоненциальной формы конечной длины. Моделью устья рупора принята или труба с бесконечным фланцем, или полусфера в бесконечном экране, что не оправдано для излучения акустических сигналов длинноволнового диапазона.

Ф. Морз [8] привел расчетные формулы для определения звукового давления, колебательной скорости, импеданса в звуковом поле внутри рупора бесконечной и конечной длины катеноидальной формы (обводы рупора выполнены по функции гиперболического косинуса), а также вывел формулу для расчета акустической мощности генератора при использовании катеноидального рупора. Для сравнения характеристик рупоров различных форм Ф. Морз ввел коэффициент отдачи, равный отношению активной части импеданса в горле рупора к удельному акустическому сопротивлению плоской волны. Математическое выражение для коэффициента отдачи, характеризующего импеданс в горле рупора с учетом отражения волн от устья, выведено в предложении, что устье рупора моделируется трубой, снабженной бесконечным фланцем, что является недостатком предложенной методики расчета для низкочастотного диапазона.

В теорию распространения волн в рупорах бесконечной и конечной длины существенный вклад внесли работы Л. Я. Гутина [3; 4]. В его работе рассмотрено

распространение волн в рупорах: коническом, экспоненциальном, параболическом. Решение для расходящейся волны внутри рупора записано через функции Бесселя, что позволяет разграничить активную и реактивную часть импеданса. Для рупоров всех трех указанных форм в приближении их конечной длины Л. Я. Гутин вывел математические выражения для расчета коэффициента излучения, который, фактически, является введенным Ф. Морзе коэффициентом отдачи и характеризует импеданс в горле рупора. Но у Л. Я. Гутина коэффициент излучения характеризует только активную составляющую часть импеданса в горле. Этот коэффициент позволяет вычислить именно полезную часть акустической мощности излучателя. Существенным моментом в работах Л. Я. Гутина явилось то, что он дал решение задачи об излучении звука из рупоров, устье которых не снабжено бесконечным экраном. В его работах модель устья – поршневая мембрана, излучающая одной стороной в безграничную среду. Решение получено для пределов параметра  $0,4 \leq kR \leq 2$ . Здесь  $k$  – волновое число,  $R$  – радиус излучателя. Такие параметры характерны для инфразвукового диапазона частот.

Основные работы по исследованию излучения звука рупорами опубликованы в 30-е и 40-е годы, ряд последних работ посвящен уже теории звукофикации помещений, аудиторий, концертных залов громкоговорителями с обводами рупоров, выполненных по экспоненциальной форме [6; 9; 11; 14]. В расчетах используется приближение бесконечного рупора из соображений, что излучение звука происходит на частотах, когда отражение волн от устья рупора может не учитываться.

Предложенные теории не выявляли особенностей распространения акустических сигналов в полостях рупоров на инфразвуковых (ИЗ) частотах. Проблему эффективного излучения звуков низких частот пытались решать введением ряда практических мероприятий. Так, в [13] описан метод увеличения площади устья рупора за счет размещения его в углу комнаты. В работе [13] представлены «гигантские» рупора.

В настоящее время не проведены исследования процессов, происходящих в горле рупора на частотах, близких к критической частоте, когда необходимо рассматривать взаимодействие прямой и отраженной от устья волны. Тем не менее работы эти представляют определенный интерес и необходимы при практическом решении проблемы звукофикации помещений, аудиторий, залов.

**Постановка проблемы.** В основу теоретических представлений о распространении акустического сигнала на инфразвуковых частотах в рупоре катеноидальной формы конечной длины положено знание о распространении волн в трубах.

В рупоре конечной длины расходящаяся от узкого конца волна подвергается отражению в широком конце. Наличие прямой и отраженной волны приводит к резонансным явлениям, наличие которых в расчетах учитывается коэффициентом излучения (А. Г. Вебстер, Л. Я. Гутин). Вывод основной формулы для расчета коэффициента излучения на основе теории рупора конечной длины, приведенной Вебстером, состоит в решении уравнения через два линейно независимых решения.

В работе [13] составлен алгоритм, разработана на ЭВМ программа для расчета амплитудно-частотной характеристики коэффициента излучения. Представлены графики изменения действительной и мнимой частей коэффициента излучения в зависимости от частоты.

Анализируя характер кривых, можно сделать вывод, что процессы излучения рупорами бесконечной и конечной длины резко отличны между собой, что

определяется наличием отраженной волны от устья рупора. Поэтому необходимо на основе экспериментов путем измерений получить величины колебательной скорости, звукового давления, рассмотреть характер кривых изменения колебательной скорости и звукового давления с частотой, построить фазовую характеристику. Затем провести анализ полученных результатов, выявить явление резонансов и определить резонансные частоты. Это даст возможность узнать, на каких частотах активная составляющая акустической мощности имеет максимальное значение. Что имеет большое значение для анализа излучения сигналов на инфразвуковых частотах, когда активная составляющая излучаемой мощности очень мала.

**Существующие методы измерений характеристик акустических сигналов на инфразвуковых частотах.** Методы исследования инфразвуковых полей (ИЗ полей), основанные на измерении только одной функции уровня звукового давления (УЗД) – малоэффективны. В настоящее время интенсивно развиваются новые методы анализа [5]. Проводятся работы по проектированию специально созданной для инфразвукового диапазона измерительной аппаратуры. Особенно успешно здесь работают бельгийская фирма «Брюль и Кьер» [2] и немецкая фирма, выпускающая измерительные приборы типа RFT [12].

Одним из первых прибор, регистрирующий ИЗ от морских волн, создал академик В. В. Шулейкин [12]. Перед приближением шторма оболочка метеорологического шара – зонда на корабле начинала вибрировать с частотой 6–13 Гц. Было выяснено, что резонанс возникает у шаров, наполненных водородом, и имеющих собственную частоту колебаний около 10 Гц. Акад. В.В. Шулейкин сделал вывод, что шар принимает ИЗ колебания от бушующего за сотни километров шторма. Фактически, был создан первый приемник ИЗ волн.

Для тех же целей предназначен и прибор, названный «инфра-ухо» [12]. Он состоит из рупора, который улавливает колебания порядка 6–10 Гц, резонатора, который пропускает именно эти частоты и отсеивает случайные, пьезодатчика, который преобразует колебания в импульсы электрического тока, усилителя и измерительного прибора. Установленный на палубе корабля рупор медленно вращается. При обнаружении штормовой зоны рупор останавливается, указывая направление, откуда движется шторм, за 10–15 часов до начала шторма.

В настоящее время наиболее известными и полными работами по созданию методик измерений в области инфразвуковых частот (ИЗ частот), а также в разработке измерительной аппаратуры, очевидно, следует считать работы «Брюль и Кьер» [2], Л. Пимонова [12], Э. Н. Малышева [12], В. Н. Бринзы [12]. Опубликованы обзоры по измерениям в области ИЗ диапазона частот [12]. В работе [12] представлены доклады по методикам измерений и обработке ИЗ характеристик для Комиссии по метрологии и обработке акустических сигналов.

Так как длина волны ИЗ велика, то применение обычных микрофонов для его регистрации затруднено. Микрофон для ИЗ измерений на гальваномангнитных датчиках описан в работе [12]. С. Н. Бугулавская, Е. Р. Романенко, Л. И. Холод [12] отмечают о возможности создания пьезоэлектрических инфразвуковых микрофонов. Принцип работы такого микрофона основан на регистрации пьезоэлектрическим датчиком периодических изменений температуры воздуха, обусловленных адиабатичностью процесса распространения инфразвуковой волны в воздухе. В измерительной технике для возбуждения низкочастотных колебаний используют трубку Оберста [12]. Прибор такого типа основан на резонансном методе возбуждения колебаний в трубе переменного сечения, возбуждение

осуществляется мощным громкоговорителем. Устройства для регистрации и анализа инфразвука должны удовлетворять требованиям ГОСТ 17168-82.

Измеритель высоких инфразвуковых и звуковых давлений разработан в Ленинградском институте киноинженеров [12]. Для регистрации ИЗ разработаны специальные детекторы [12].

Низкочастотные измерения с конденсаторными преобразователями представлены у Stode F. [12], у Ф. В. Семякина, А. Д. Хохлова [12], имеющие частотный диапазон начиная от 0,5 Гц и позволяющие измерять УЗД до 170 дБ. Выявлено, что для данного конденсаторного микрофона нижняя граница измеряемых частот зависит от диаметра и длины канала выравнивания статического давления, а также от остаточных утечек по резьбе капсуля. Сейсмическую помеху при работе инфразвуковых микрофонов заметил А. J. Bedard [12].

С целью моделирования фазовых соотношений в плоской ИЗ волне сконструирована камера замкнутого объема, описанная в [12].

Величины: уровень звукового давления и колебательная скорость, векторно-фазовые характеристики между ними – применяются при анализе ИЗ полей [12]. Широко применяемые в акустических измерениях приборы типа шумомеров и анализаторов спектра для анализа ИЗ полей представлены в работах [12].

Основной измеряемой величиной является уровень звукового давления (УЗД) в децибелах (дБ). УЗД может измеряться при линейной коррекции шумомера [12] (обозначается дБ Лин), при этом амплитудно-частотная характеристика шумомера линейна во всем диапазоне частот, а также при коррекции «А» шумомера (дБА), которая примерно соответствует субъективному восприятию шума. Разность этих величин  $L_{\text{лин}} - L_A$ , дБ, используется для ориентировочной оценки выраженности низкочастотной части спектра шума. Чаще всего используются октавные полосы частот (понятие октавы означает удвоение частоты) со среднегеометрическими частотами 2; 4; 8 и 16 Гц [12]. В соответствии с [12] допускается определять УЗД в 1/3-октавных полосах со среднегеометрическими частотами 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5; 16; 20 Гц, их следует пересчитывать в октавные в соответствии с данными работы [12].

По характеру спектра [12] инфразвук делится на:

- 1) широкополосный с непрерывным спектром шириной более одной октавы;
- 2) гармонический, в спектре которого имеются выраженные дискретные составляющие (определяются по превышению УЗД на 10 дБ и более в одной из октавных полос). Наиболее подходящими являются шумомер типа 2209, 2031, 2033, 2010, 2120 фирмы «Briel & Kjaerg» совместно с наборами фильтров 1613, 1616, 5742 и шумомеры типов 01020, 01023, 01024, 0017 и 00023 фирмы RFT с фильтром 01025 [2; 12].

Для фиксации результатов измерений применяются переносные самописцы типа 2306, 2309 фирмы «Briel & Kjaerg» и типа 02060 фирмы RFT [12].

Исследуемый шум может быть предварительно записан на измерительный магнитофон. У фирмы «Briel & Kjaerg» имеется портативный измерительный магнитофон типа 7003. Та же фирма разработала цифровой регистратор модели 7502, позволяющий запоминать аналоговые сигналы в цифровом виде.

Для выделения ИЗ волн из общего спектра применяются специальные фильтры.

Как уже отмечалось ранее, дальнейшее поле излучателя ИЗ волн начинается от поверхности излучения на большом расстоянии. Поэтому остро стоит задача проведения достоверных измерений в ближнем поле излучателя. В [5] указана

методика сотрудников МГУ в области достоверных определений векторно-фазовых характеристик инфразвуковых полей. Методика предусматривает, наряду с измерением звукового давления, регистрацию трех ортогональных компонент колебательной скорости. Это позволяет определять три компоненты акустической мощности, а также ее суммарный поток. Кроме того, предусматривается определение фазовых (в случае шумовых сигналов корреляционных) соотношений между компонентами колебательной скорости, а также между ними и звуковым давлением. На основании измерения потока акустической мощности можно определить направление на источник звука и в некоторых случаях определить расстояние до него. Указанная методика позволяет наиболее полно определить все параметры инфразвукового поля. Большой размер длины волны ИЗ предопределяет использование в измерениях антенных систем. В работе Song Zhi-yung, Iu Yan [16] проведен акустический расчет трубки с эквидистантными отверстиями. Трубка соединена с одного торца с преобразователем ИЗ, а с другого нагружена акустическим импедансом. Рассчитан отклик антенны на переменное давление в любом отверстии трубки. Даны амплитудные характеристики антенны в зависимости от радиуса трубки. Инфразвуковое следящее устройство разработано в работе [12]. Специальные устройства для приема ИЗ колебаний разработаны группой авторов: В. А. Зверевым, А. И. Калачевым [12]. Прием волн инфразвукового диапазона с частотами до 0,001 Гц осуществлен авторами работ [12]. Влияние ветра на измерения рассмотрено у Fukuhara H. [12]. Учет атмосферной турбулентности при приеме ИЗ волн рассмотрен в работе [12].

Для корректных измерений УЗД в предлагаемом нормами частотном диапазоне, начиная с октавной полосы со среднегеометрической частотой 2 Гц, вся аппаратура (и прежде всего микрофон, предусилитель и шумомер) должна иметь линейную частотную характеристику (с отклонением в пределах класса точности) начиная с частоты 1,4 Гц. Точки измерения выбирают на расстоянии не более 20 м друг от друга. Микрофон располагают на высоте 1,5 м от пола и на удалении не менее 0,5 м от человека, проводящего измерения.

При медленном измерении уровня инфразвука его значения регистрируют одновременно с хронометражем и определению эквивалентного уровня проводят по второму методу ГОСТ 20445-75. Время наблюдения (длительность реализации) при измерении октавных УЗД должно соответствовать величинам, указанным ниже.

Среднегеометрические частоты октав, Гц	2	4	8	16
Время измерения, с	30/300	15/150	8/80	4/40

В числителе – минимальное, в знаменателе – рекомендуемое.

Минимальному и рекомендуемому времени измерения соответствуют статистические погрешности оценки уровня  $\pm 3$  дБ и  $\pm 1$  дБ при доверительной вероятности 0,95.

**Проведение эксперимента. Анализ полученных результатов.** Для экспериментальных исследований был выбран рупор катеноидальной формы конечной длины. На рис. 1 представлен внешний вид рупора катеноидальной формы. Конструктивно рупор был исполнен из отдельных металлических секций. Диаметр горла – 0,35 м, диаметр устья – 4 м, длина рупора составляла 10 м. Оболочка обладала бесконечной жесткостью по сравнению с жесткостью воздуха в полости рупора.

Соотношения между площадями сечений горла и устья, а также между значениями продольных координат были следующие:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{130}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{30}{1},$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  – площади горла и устья соответственно;  $x_1$ ,  $x_2$  – продольные координаты горла и устья вдоль оси рупора.



**Рис. 1. Внешний вид рупора**

На первом этапе экспериментальных работ можно было предположить, что колебательная скорость частиц в горле рупора определяется колебательной скоростью мембраны возбуждающего элемента. При очень медленно расходящемся сечении рупора (в случае рупора длиной 10 м при критической частоте 17 Гц существенная расходимость обвода начинается с длины, равной расстоянию от сечения горла 6 м) можно предположить, что в горле рупора распространяется плоская волна. Здесь достаточно иметь акселерометр, укрепленный на поверхности поршня или мембраны, и микрофон, установленный в горле рупора. Такой метод применим в случае реализации в горле рупора плоской бегущей волны.

Однако более точно определить коэффициент излучения можно только с использованием метода векторно-фазовых характеристик. Этот метод был ранее применен для исследования пространственного распределения основных характеристик инфразвукового поля в замкнутых объемах в Московском государственном университете имени М. Ломоносова [5].

Применим этот метод для определения безразмерной активной составляющей импеданса (или коэффициента излучения) в горле рупора при возбуждении его на инфразвуковых частотах. Необходимо измерить мгновенные значения звукового давления и колебательной скорости в горле рупора, а затем определить фазовые соотношения между этими двумя характеристиками на различных частотах.

Уровень внешних шумов во время проведения эксперимента не превышал 70 дБ и был ниже уровня измеряемого звукового давления на 15–50 дБ.

Предварительно была измерена амплитудно-частотная характеристика динамика, которая оказалась, практически, линейной.

Возбуждение акустических волн в полости рупора производилось динамиком.

На клеммы динамика подавался сигнал строго синусоидальной формы.

Для измерений использовался комплект аппаратуры "Брюль и Кьер", точность измерения уровня звукового давления составляла  $\pm 1$  дБ. Фазовые соотношения были определены с точностью  $\pm 3^\circ$ .

Измерения проводились согласно требованиям ГОСТ 17187-81 и Инструкции по эксплуатации по применению аппаратуры фирмы «Брюль и Кьер» [2].

Перед началом измерений была проведена калибровка измерительного тракта, для чего была собрана установка, состоящая из цилиндрической трубы постоянного сечения, громкоговорителя и комплекса измерительной аппаратуры (рис. 2). На рис. 2 представлена схема расположения рупора, динамика и измерительной аппаратуры. Это позволило определить погрешность, вносимую комплектом измерительной аппаратуры в измерения. С учетом данных калибровки измерительного тракта получено, что фазовый сдвиг в горле конусоидального рупора был близок к нулю градусов. Это позволило сделать вывод, что в горле рупора возбуждалась плоская волна.

С целью исключения влияния резонансных явлений электрической части громкоговорителя на чистоту экспериментальных исследований частотная характеристика звукового давления снималась при постоянной колебательной скорости диафрагмы громкоговорителя. По результатам полученных экспериментальных данных построена частотная характеристика коэффициента излучения, представленная на рис. 3.

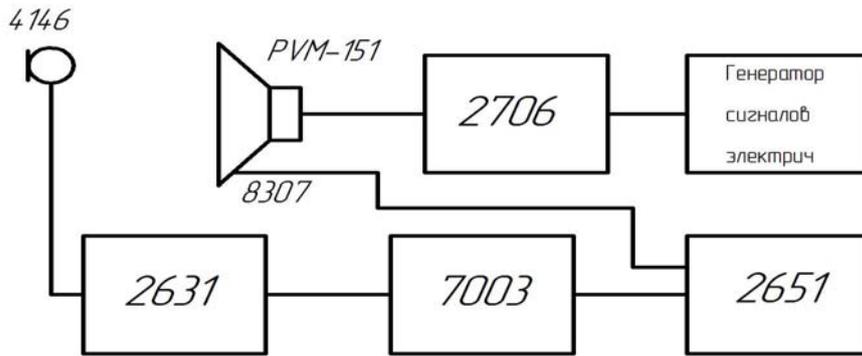


Рис. 2. Схема расстановки рупора и измерительной аппаратуры

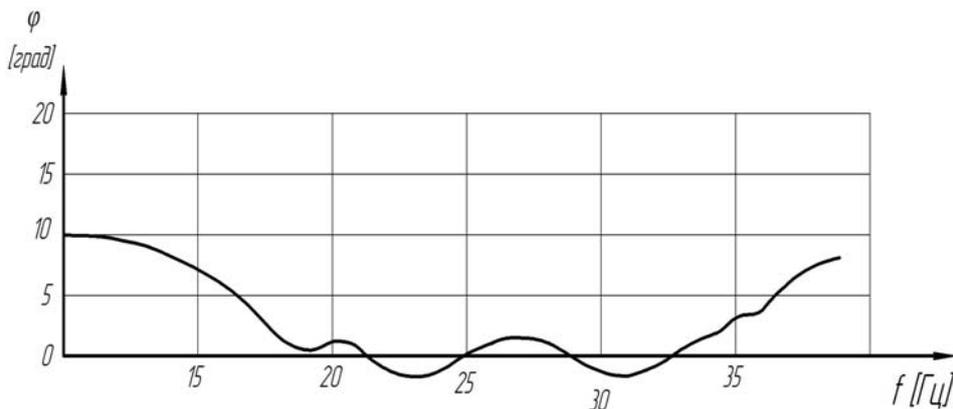


Рис. 3. Фазо-частотная характеристика в горле рупора

В качестве приемника звукового давления использовался конденсаторный микрофон 4165. Он был установлен в горле непосредственно перед диафрагмой динамика. Акселерометр 4344 был использован для измерения колебательной скорости диафрагмы. Он был установлен в центре диафрагмы динамика. Фаза между звуковым давлением и колебательной скоростью фиксировалась фазометром 2971. В процессе эксперимента было зафиксировано изменение электрической мощности в пределах 40 %. Уровень звукового давления в горле был зафиксирован в интервале 82–130 дБ. Данные измерений фиксировались на магнитографе 2631.

При подаче сигналов с задающего генератора ГЗ-47 через усилитель мощности 2706 приводилась в колебательное движение диафрагма громкоговорителя PVM-151 Model 15L, пристыкованного к горлу катеноидального рупора. В горле рупора непосредственно перед диафрагмой динамика (на расстоянии 0,1 м) был установлен микрофон 4165. Акселерометр 4344 устанавливался в центре мембраны громкоговорителя на клею. Данные измерений через предусилитель заряда 2635 и блок питания 2807 фиксировались визуально на шкалах осциллографа С1-72 и анализатора спектра 2031. Частотный диапазон измерений составил 15–50 Гц [1].

На рис. 4 представлен график изменения величины колебательной скорости в зависимости от частоты. На рисунке обозначено:  $V$  – колебательная скорость;  $n$  – отношение текущей частоты к критической, равной 17 Гц.

На рис. 5 представлен график уровня звукового давления в горле рупора в зависимости от частоты при постоянной величине колебательной скорости. На рисунке обозначено:  $p$  – звуковое давление, выраженное в паскалях;  $n$  – отношение текущей частоты к критической, равной 17 Гц.

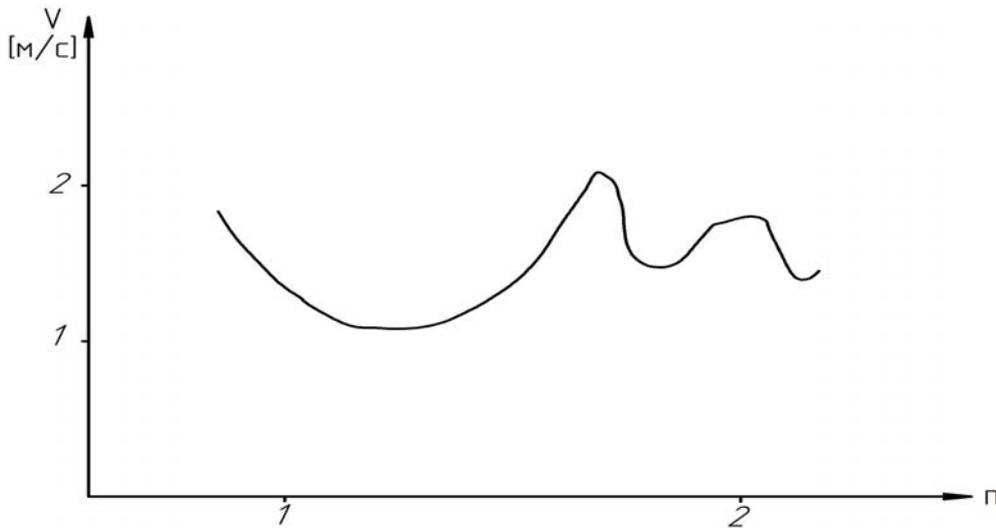


Рис. 4. График изменения колебательной скорости в горле рупора

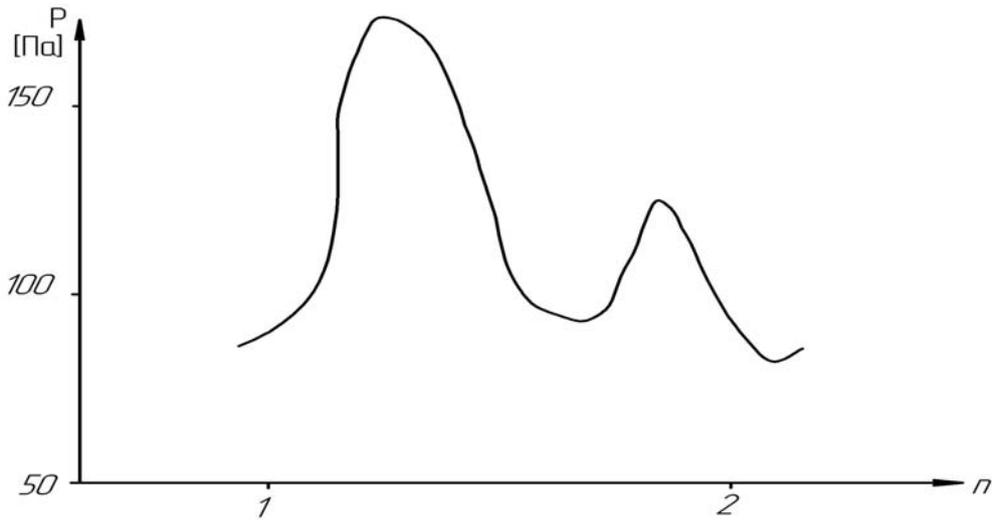


Рис. 5. График изменения звукового давления в горле рупора

По данным графиков (рис. 4, 5) были рассчитаны значения действительной и мнимой частей коэффициента излучения  $\alpha$ .

**Обсуждение результатов.** Из анализа кривых экспериментальных данных можно сделать вывод, что в горле рупора катеноидальной формы конечной длины близ критической частоты проявляются резко выраженные резонансные явления, обусловленные наличием отраженной волны. Эти эффекты наблюдаются на инфразвуковых частотах, когда размеры рупора ограничены.

Данные по характеристикам звукового давления и колебательной скорости, полученные на основе натуральных измерений, позволили построить графики изменения мнимой и действительной частей (коэффициента излучения) импеданса в горле рупора. Графики этих зависимостей представлены на рис. 6, 7.

На рис. 6 обозначено:  $\beta$  – значение мнимой части импеданса в горле рупора;  $f$  – рабочие частоты во время эксперимента.

На рис. 7 обозначено:  $\alpha$  – значение действительной части импеданса в горле рупора;  $f$  – рабочие частоты во время эксперимента.

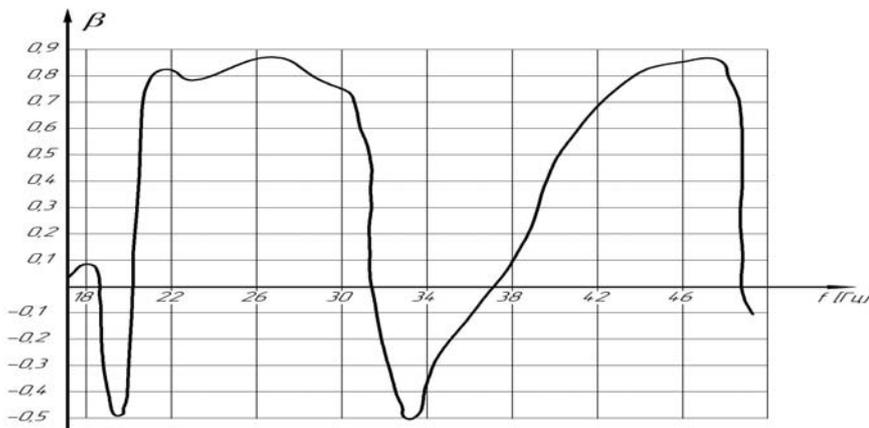
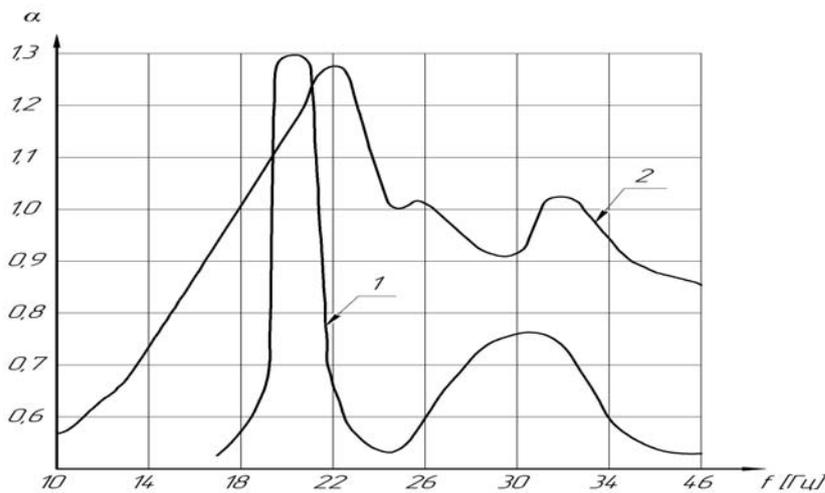


Рис. 6. Частотная характеристика безразмерной мнимой части импеданса в рупоре



**Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика коэффициента излучения:**  
1 – расчетные значения, 2 – экспериментальные для рупора  $l = 10$  м,  $R_1 = 0,17$  м,  $R_2 = 2$  м

**Заключение.** Применена методика исследования амплитудно-фазовых характеристик акустического поля в рупоре на инфразвуковых частотах.

Экспериментальные данные по амплитудно-частотной характеристике коэффициента излучения близ критической частоты катеноидального рупора с параметрами: диаметры горла и устья соответственно 0,35 и 4 м, длина 10 м – подтвердили наличие резонансов в амплитудно-частотной характеристике коэффициента излучения частотах 20 Гц, 35 Гц. Разница в уровне звукового давления на первой резонансной частоте и экспериментальных данных отличается в 0,92 раза.

На основе экспериментально полученных амплитудно-частотных характеристик звукового давления и колебательной скорости рассчитана амплитудно-частотная характеристика безразмерной активной составляющей импеданса (или коэффициента излучения) в горле рупора, что позволяет определить активную составляющую излучаемой акустической мощности излучателя с рупором.

### Библиографические ссылки

1. **Андреев А.И.** Исследование резонансных явлений в горле катеноидального рупора вблизи критической частоты / А.И. Андреев, А.И. Антоненко, В.Д. Бондарев В.Д. и др. // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпозиума по физике акусто-гидродинамических явлений с секциями молекулярной акустики и геоакустики (Ашхабад, 24–26 сент. 1985 г.). – Ашхабад : АН СССР, 1985. – С. 110.
2. **Брох Е.Т.** Применение аппаратуры фирмы «Брюль и Къер» для измерений акустического шума / Е.Т. Брох. – Дания : «Брюль и Къер», 1971. – 224 с.
3. **Гутин Л.Я.** К теории приемного рупора / Л.Я. Гутин. // МТФ. – 1935. – Т.У2. – Вып. 8. – С. 896–912.

4. **Гутин Л.Я.** О звуковом поле поршневых излучателей / Л.Я. Гутин // ЖТФ. – 1937. – Т. У2. – Вып. 10. – С. 1096–1106.
5. **Иванников А.И.** Метод исследования структуры звукового поля в малых замкнутых объемах воздуха : дис. канд. физ.-мат. наук / Анатолий Иванович Иванников. – М. : МГУ, 1983. – 140 с.
6. **Иоффе В.К.** Справочник по акустике / В.К. Иоффе, М.А. Сапожков, В.Г. Корольков. – М. : Связь, 1979. – 312 с.
7. **Крендалл И.Б.** Акустика / И.Б. Крендалл. – Л. : ЭТА, 1934. – 171 с.
8. **Морз Ф.** Колебания и звук / Ф. Морз. – М. : Гостехиздат, 1937. – 465 с.
9. **Павловская В.И.** Акустика и электроакустическая аппаратура / В.И. Павловская, А.К. Качерович, А.П. Лукьянов. – М. : Искусство, 1977. – 255 с.
10. **Рэлей (Стретт Дж.).** Теория звука / (Стретт Дж.) Рэлей. – М. : ГИТТЛ, 1955. – Т. 1, 2. – 476 с.
11. **Сапожков М.А.** Электроакустика / М.А. Сапожков. – М. : Связь, 1979. – 279 с.
12. **Сокол Г.И.** Особенности инфразвуковых процессов в инфразвуковом диапазоне частот / Г.И. Сокол. – Д. : Промінь, 2000. – 136 с.
13. **Сокол Г.И.** Двигательные установки летательных аппаратов как генераторы инфразвуковых волн: дис. канд. техн. наук / Галина Ивановна Сокол. – Д., 1986. – 167 с.
14. **Фурдуев В.В.** Электроакустика / В.В. Фурдуев. – М. : ГТТИ, 1948. – 256 с.
15. **Webster A. G.** Prok. Nat. Acad. Sci. – 1919. – 275 p.
16. **Song Zhi-Yung, Lu Yan.** Characteristics of the uneform pipe array and its application to the infrasonic reception. – Шэнсюю сюэбао, Acta Acus. – 1982. – V. 7. – № 2. – P. 99–109.

Надійшла до редколегії 02.06.2016

УДК 629.78

**А. В. Тищенко, О. Г. Клочков, А. М. Кулабухов, В. А. Масальский**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ИСПЫТАТЕЛЬНЫЙ СТЕНД СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

**Предложен испытательный стенд для отработки алгоритмов системы угловой ориентации и стабилизации в наземных условиях.**

*Ключевые слова:* стенд, воздушная подушка, система, угловая ориентация, стабилизация, космический аппарат, спутник.

**Запропоновано випробувальний стенд для відпрацювання алгоритмів системи кутової орієнтації та стабілізації у наземних умовах.**

*Ключові слова:* стенд, повітряна подушка, система, кутова орієнтація, стабілізація, космічний апарат, супутник.

**A test stand for angular orientation and stabilization algorithms testing in ground conditions is proposed.**

*Keywords:* test stand, airbag system, the angular orientation, stabilization, spacecraft, satellite.

**Введение.** С развитием нанотехнологий и микроэлектромеханических систем (МЭМС) возможность создания малого космического аппарата (КА) резко выросла. МЭМС технологии, при своих габаритах, дают с каждым годом лучше точность определения ориентации, превосходя этим оптоволоконные аналоги. Крупногабаритные спутники и их функционал уже можно заменить несколькими спутниками малого размера с меньшими затратами средств. Примером такого подхода является компания PlanetLab, которая запустила около 100 относительно дешевых малых спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), получив возможность широкого охвата поверхности Земли. Однако, как показывает практика, надежность таких аппаратов низкая. Так, например, из 92 запущенных спутников PlanetLab, по данным самой компании, работоспособными остались только 22. Одной из причин низкой надежности таких КА является отсутствие полного цикла испытаний этих аппаратов для целевой работы в космическом пространстве из-за дороговизны испытательных стендов и длительности самого процесса.

Чтобы оценить качественные характеристики работы алгоритмов системы угловой ориентации и стабилизации (СУОС) необходимо имитировать вращательное движение аппарата в невесомости. На данный момент для решения этой задачи самым известным и используемым является испытательный стенд на воздушном подвесе.

В конструкцию такого стенда входят следующие компоненты: основание со сферической впадиной и отверстиями, через которые подаётся сжатый воздух, и полусфера, с кривизной как у впадины основания, на которую крепится стол со всем испытуемым оборудованием, вместе с центровочными грузиками.

Примером могут служить подвесы на воздушной подушке компаний NELSON AIR и SPECIALTY COMPONENTS (рис. 1). Стоимость таких изделий составляет порядка 3000\$.



**Рис. 1. Сферические воздушные подвесы компаний NELSON AIR и SPECIALTY COMPONENTS соответственно**

В стенде на воздушном подвесе поворот макета спутника ограничен конструкцией по горизонтальным осям вращения. Для устранения этого недостатка рассмотрен вариант использования сферы с полостью внутри вместо полусферы, где можно расположить стол со всем оборудованием. Примером данного решения является робот-шар, созданный в Удмуртском государственном университете (рис. 2). Однако из-за проблем изготовления сферы с высокой точностью кривизны, её центровки, которая должна производиться внутри её, и ограниченности пространства внутри оболочки, было отложено данное решение.

Так как стенд на воздушном подвесе является дорогостоящим, и существует трудность его заказа и доставки от зарубежных производителей (аналогов на Украине не найдено), рассмотрен вариант карданного подвеса, который обеспечивает свободное вращения тела по трём осям. Простота его конструкции и низкая стоимость изготовления очень привлекательны. Однако ограниченное пространство для монтажа оборудования, трение в подшипниках и износ конструкции со временем являются важными недостатками.



Рис. 2. Робот-шар

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу создания относительно дешевого стенда на воздушном подвесе для отработки процессов СУОС спутника с габаритами до 24 U в наземных условиях.

**Решение задачи.** Для отработки алгоритмов СУОС важно, чтобы момент, создаваемый управляющими органами, превышал на порядок и более моменты от возмущающих сил. Следовательно, одна из главных задач испытательного стенда – обеспечить минимальный возмущающий момент среды, аналогичный космическому пространству.

Поставлены следующие требования к разрабатываемому стенду:

1. Испытательный стол с макетом спутника должен крепиться на полусферу, которая обеспечивает вращение в пространстве с помощью воздушного подвеса с минимальной возмущающей силой окружающей среды.
2. Угол поворота полусферы вокруг вертикальной оси должен быть неограничен, вокруг горизонтальных осей – повороты на углы  $\pm 45$  градусов.
3. Возможность монтажа всего испытательного оборудования массой до 5 кг, включая центровку с помощью грузиков.

Согласно второму закону Ньютона для вращательного движения тела:

$$M_{upr} + \sum M_{tr.i} = I \cdot \dot{\omega} \quad (1)$$

где  $M_{upr}$  – момент от управляющих органов;  $\sum M_{tr.i}$  – сумма всех моментов сопротивления среды;  $I$  – момент инерции тела;  $\dot{\omega}$  – угловое ускорение тела.

В качестве управляющих органов были выбраны двигатели-маховики (ДМ) с моментом 0,002 Нм. Так как испытания СУОС спутника планируется проводить на небольших угловых скоростях, до 10 град/с, то возникающая сила трения воздуха пренебрежительно мала по сравнению с моментом от ДМ. Следовательно, из возмущающих моментов остается только возможный момент от трения полусферы с основанием. Чтобы устранить его, необходимо создать зазор между основанием и полусферой такой величины, чтобы не возникло соприкосновения (рис. 3).

Найдём формулу высоты подъема полусферы над основанием в зависимости от параметров используемого компрессора и испытываемого объекта.

Расход воздуха  $Q$  компрессора запишем как:

$$Q = S V \rho, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха;  $S$  – площадь истечения воздуха из зазора между основанием и полусферой;  $V$  – скорость истечения воздуха из зазора.

Площадь истечения воздуха выражается как:

$$S = \pi \cdot d_n \cdot h \tag{3}$$

где  $d_n$  – диаметр основания;  $h$  – высота зазора, которую требуется найти.

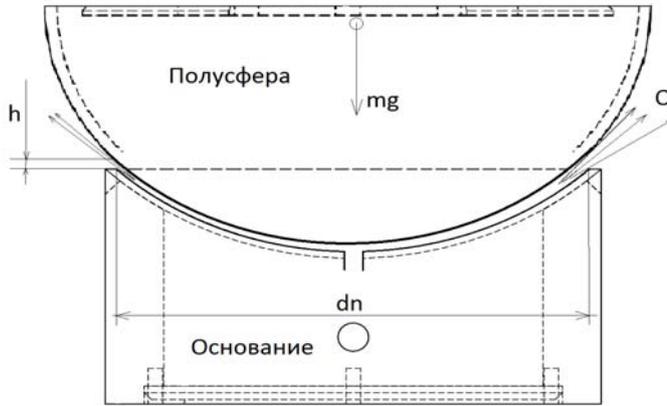


Рис. 3. Стенд на воздушном подвесе

Принимая истечение воздуха из отверстий основания ламинарным, согласно закону Бернулли можно записать, что скорость истечения  $V$  из зазора между основанием и полусферой равна:

$$V = \sqrt{2P \left( \frac{1}{\rho} \right)}, \tag{4}$$

$$P = \frac{m \cdot g}{S}, \tag{5}$$

где  $P$  – давление воздушной подушки;  $m$  – масса испытуемого макета.

Используя формулы (2), (3), (4), получим:

$$h = \frac{Q}{\pi \cdot d_n \cdot \sqrt{2P \cdot \rho}}. \tag{6}$$

Учитывая, что

$$S = \frac{\pi d_n^2}{4}, \tag{7}$$

и используя (5), получим:

$$h = \frac{Q}{\left( 2\sqrt{2\pi \cdot \rho \cdot m \cdot g} \right)}. \tag{8}$$

Подставив значения  $\rho = 1,2$  и  $g = 9,81$ , выведем окончательное выражение зависимости высоты зазора  $h$  между полусферой и основанием от расхода воздуха компрессора и массы испытуемого макета:

$$h = 0,058 \cdot \left( \frac{Q}{\sqrt{m}} \right). \tag{9}$$

Для экономии средств на разработку полусфера и основание были изготовлены методом холодного прессования с относительно невысокой точностью кривизны 0,1 мм. Чтобы обеспечить свободное вращение полусферы в основании при невысокой точности её изготовления, с учётом возможного несимметричного

зазора, требуемая высота зазора была принята равной 0,3 мм. Учитывая это, согласно формуле (9) компрессор должен обеспечить расход воздуха в 694 л / мин для массы 5 кг. Для этого была выбрана модель компрессора Werk BM-50 с входной производительностью 200 л / мин, ресивером 50 литров и максимальным давлением в 8 бар.

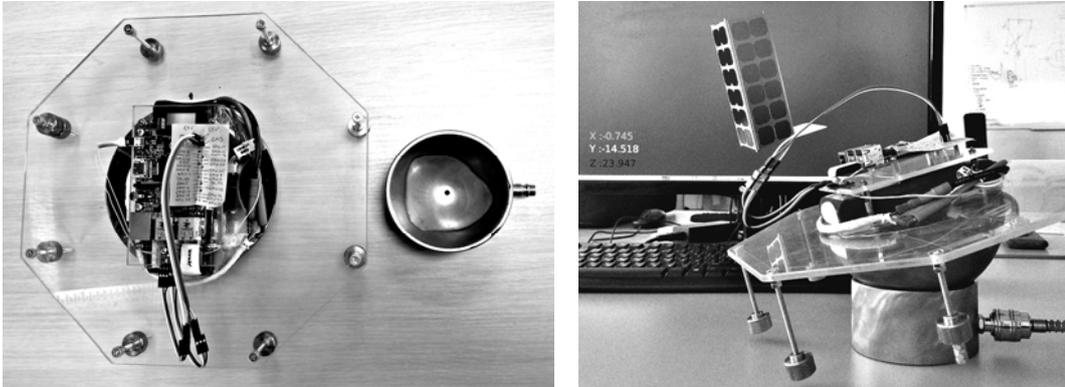


Рис. 4. Испытание СУО на разработанном стенде

**Результаты.** На испытательном стенде проверена система определения угловой ориентации (СУО) массой 3кг, которая включает в себя плату MPU-6000 с датчиками угловой скорости, акселерометром и магнитометром, плату управления Raspberry Pi, аккумулятор, средство радиосвязи по Wi-Fi, лазер определения фактического углового положения в одной плоскости с помощью юстировочной разметки для сравнения с определенной ориентацией в СУО, экран визуализации поворота с его величиной в градусах и центровочные грузики (рис. 4).

В результате на разработанном испытательном стенде обеспечено свободное вращения макета согласно поставленным требованиям, оценена точность СУО в 0,1 градуса при использовании указанных датчиков, и проверены алгоритмы определения ориентации и фильтрации данных. Был получен требуемый зазор для свободного вращения полусферы в основании.

**Выводы.** Разработан относительно недорогой стенд на воздушном подвесе для испытаний системы СУОС в наземных условиях.

Получена формула зависимости высоты зазора между полусферой и основанием стенда от расхода воздуха и массы испытательного стола. Был обеспечен требуемый зазор, величина которого близка к рассчитанному.

Проведены испытания стенда и СУО на нём. В результате расчётные данные оказались близкими к практическим данным. Получена точность СУО с помощью созданного стенда. Данная разработка может быть запущена в массовое производство.

## Библиографические ссылки

1. **Richard Boynton.** Using A Spherical Air Bearing To Simulate Weightlessness [Electronic resource] // Berlin, Space Electronics, Inc., 3–5 June 1996, 16 pages. URL:[http://www.space-electronics.com/contentAssets/Literature/SAWE\\_Papers/Spherical\\_Gas\\_Bearing\\_Weightlessness.pdf](http://www.space-electronics.com/contentAssets/Literature/SAWE_Papers/Spherical_Gas_Bearing_Weightlessness.pdf) (accessed 23.05.2016).
2. **Rees Fullmer.** The Development of a Small Satellite Attitude Control Simulator [Electronic resource] / R. Fullmer, G. Peterson, W. Holmans etc. // Utah State University, Logan UT, Departments of Mechanical and Aerospace Engineering and Electrical Engineering, 14 pages. URL:<http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2726&context=smallsat> (accessed 23.05.2016)
3. **Corey Whitcomb Crowell, Prof. David W. Miller.** Development and Analysis of a Small Satellite Attitude Determination and Control System Testbed [Electronic resource] // Department of Aeronautics and Astronautics, June 2011, 269 pages. URL:<http://ssl.mit.edu/publications/theses/SM-2011-CrowellCorey.pdf> (accessed 23.05.2016).
4. Презентація робота-шара в УдГУ [Електронний ресурс]. – Режим доступа: <http://lab.ics.org.ru/news/24-02-2012/prezentaciya-robota-shara-v-udgu/>

Надійшла до редколегії 23.05.2016

УДК 629.76. (0.75.8)

**Ю. Д. Шептун, Т. О. Коваленко**

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

### **АНАЛІЗ ВИТРАТ ЕНЕРГІЇ НА КЕРУВАННЯ КОСМІЧНИМ СТУПЕНЕМ РАКЕТИ**

Представлено результати досліджень проблем динаміки та рекомендації щодо удосконалення органів керування космічним ступенем (КС) ракети за критерієм мінімізації енерговитрат. Проналізовано кількість енергії, що витрачається на обнуління збурень параметрів кутового руху КС, обумовлених короткочасно діючими збурюючими силами та моментами. З використанням діаграм кореневих годографів характеристичних рівнянь ракети, методів класичного варіаційного обчислення, можливостей пакета програм Mathcad досліджено причинно-наслідкові зв'язки, відповідності між параметрами КС і зазначеними витратами енергії. Враховано інерційність і постійні часу виконуючих органів системи керування. У відомих науково-технічних публікаціях з проблем динаміки і керування ступенями ракет-носіїв зазначені причинно-наслідкові відповідності не описано і не використано. Висловлено рекомендації з вибору доцільної, в розумінні витрат енергії, ефективності виконуючих органів системи керування ступенів ракет-носіїв.

*Ключові слова:* удосконалення, космічний ступінь, динаміка, збурення, параметр, витрати енергії, кореневий годограф, виконуючий двигун, кількість енергії, інерційність, постійні часу.

---

© Ю.Д. Шептун, Т.О. Коваленко, 2016

Представлены результаты исследований проблем динамики и рекомендации по совершенствованию органов управления космической ступенью (КС) ракеты по критерию энергопотребления. Проанализировано количество энергии, затрачиваемой на обнуление возмущенный параметров движения КС, обусловленных краткосрочно действующими возмущающими силами и моментами. С использованием диаграмм корневых годографов характеристических уравнений ракеты, методов классического вариационного исчисления, возможностей пакета программ Mathcad исследованы причинно-следственные связи, соответствия между параметрами КС и упомянутыми затратами энергии. Учтены инерционность, постоянные времени исполнительных органов системы управления. В известных руководствах по проблемам динамики и управления РН эти связи не описываются и не используются. Высказаны рекомендации по выбору рациональной, в смысле минимизации затрат энергии, эффективности исполнительных органов системы управления.

*Ключевые слова:* усовершенствование, космическая ступень, возмущение, параметр, расход энергии, корневой годограф, исполнительный двигатель, количество энергии, инерционность, постоянные времени.

Results of researches of problems of dynamics and recommendations for improvement of the space stage (CS) rockets on the criterion of energy consumption are submitted. The amount of energy expended on the zeroing the perturbation motion parameters of the space stage of the rocket due to the short-acting perturbing forces and moments are analyzed. Graphs root locus of the characteristic equation of the rockets, the methods of classical calculus of variations, the capabilities of the software package Mathcad to establish causation between the parameters CS and energy costs are used. The inertia, the time constants of the executive of the jet engines of the control system are taken into account. In the well-known manuals on problems of dynamics and LV these causation are not described and are not used. Recommendations on choosing the rational, in the sense of minimizing the cost of energy, efficiency executive of the jet engines of the control system are submitted.

*Keywords:* improvement, space stage, dynamics, energy consumption, perturbation, parameters, root locus, executive, jet engine, cost of energy, inertia, time constants.

**Постановка задачі.** Забезпечення керованості ракети є одним з найважливіших завдань динамічного проектування, вирішення якого зводиться до вибору типу й ефективності органів керування. Ефективність органів керування оцінюється максимальним керуючим моментом, що створюється органами керування за їх максимального завантаження, або, що є таким самим – максимальним кутовим прискоренням ракети, обумовленим зазначеним керуючим моментом [1]. Важлива вимога – забезпечення керування з мінімальними витратами енергії (палива), або, що є тотожним, мінімальними керуючими моментами.

Органи керування повинні забезпечувати програмний рух ракети і відпрацювання короткочасно та тривало діючих на ракету збурюючих впливів. Момент  $M_{кер}(t)$ , що утворюється органами керування, умовно можна поділити на три незалежні, змінні за часом, частини

$$M_{кер} = M_{пр}(t) + M_{кор}(t) + M_{тр}(t).$$

Тут  $M_{пр}(t)$  – програмний керуючий момент, необхідний для ведення ракети за програмною траєкторією. Якщо значення програмних кутових швидкостей, прискорень малі, то  $M_{пр}$  за модулем також не є великим;

$M_{кор}(t)$  – складова керуючого моменту, що витрачається на відпрацювання наслідків короткочасно діючих збурюючих впливів – таких, що виникають і діють протягом перехідних режимів роботи динамічної системи: при виключенні (включенні) двигунної установки, поділі ступенів ракети, скиданні обтічників тощо. Наслідками дії таких впливів є “миттєві” збурення параметрів кутового і поступального рухів ракети;

$M_{mp}(t)$  – складова керуючого моменту, спрямована на відпрацювання тривало діючих на ракету збурюючих впливів. Ця складова повинна бути не меншою (більшою з урахуванням певного заданого запасу надійності) тривало діючого збурюючого впливу.

Можливості мінімізації складових  $M_{np}$ ,  $M_{mp}$  суттєво обмежені. Можливості мінімізації  $M_{кор}$ , навпаки, в наявності і обумовлені тим, що наслідки короткочасно діючих впливів (збурення параметрів кутового і поступального рухів) відпрацьовуються практично після обнуління названих впливів: процеси відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху ракети описуються однорідними диференціальними рівняннями, процеси відпрацювання наслідків тривало діючих впливів – неоднорідними.

Задачу мінімізації енергії, що витрачається на обнуління “миттєвих” збурень параметрів руху ступенів ракет, в наявній науково-технічній літературі не висвітлено, тому вона є актуальною, особливо стосовно космічних ступенів ракет, маршові двигуни яких за програмою польоту багаторазово вимикаються, вмикаються.

У зв'язку з висловленим доцільно дослідити:

- причинно-наслідкові відповідності між проектними параметрами ракети (масово-інерційними, геометричними, двигунними) та особливостями (періодичний, аперіодичний) перехідних процесів;
- залежність кількості енергії, витрачаємої на відпрацювання збурень параметрів руху ракети в періодичних, аперіодичних режимах, від інерційності виконавчих органів системи керування, постійних часу, коефіцієнтів передачі та ін.

#### **Огляд можливих збурених рухів космічних ступенів ракет.**

За термінологією роботи [4], фактичний рух ракети є двічі збуреним, обумовленим наявністю “миттєво” діючих (протягом часу розділення ступенів, відділення обтічників, блоків та ін.) і постійно діючих збурюючих впливів. Перші викликають стрибкоподібні збурення параметрів руху ракети; для їх відпрацювання часто достатньо виконуючих органів незначної ефективності. Другі збурюють рух ракети неперервно, для їх компенсації, як правило, необхідні керуючі органи суттєво більшої ефективності.

Зазначимо, що у разі припустимості застосування методу “заморожених” коефіцієнтів [5], особливості відпрацювання стрибкоподібних збурень параметрів руху характеризує загальне рішення однорідного диференційного рівняння – математичної моделі руху ступеня; частинне рішення відповідного неоднорідного диференційного рівняння – усталений збурений рух ступеня під впливом постійно діючих збурень.

Зв'язок особливостей процесів відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху з ефективністю керуючих органів космічних ступенів ракети наочно відображають кореневі годографи характеристичних рівнянь математичних моделей ракети [1].

Побудуємо годограф, відповідний моделі (1) руху космічного ступеня РН [2]:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ \delta &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\psi$  – кут рискання абсолютно жорсткого РН;  $k_0, k_1$  – коефіцієнти підсилення;  $K = P \cdot l \cdot J^{-1}$ ;  $P$  – вектор тяги керуючого двигуна;  $l$  – плече дії вектора  $P$  відносно центру мас ступеня;  $J$  – момент інерції ступеня відносно поперечної вісі, що проходить через центр мас ступеня.

Для визначеності покладено [3]:

$$k_0 = 10, k_1 = 5c, l = 3 м, J = 2200 кгс \cdot м \cdot c^2.$$

Характеристичне рівняння, відповідне системі (1), має вигляд

$$s^2 + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{2}$$

З рівняння (2) отримаємо:

– рівняння початкових точок кореневого годографа  $s^2 = 0$ , початкові точки  $s_{1,2} = 0$ ,

– рівняння кінцевої точки кореневого годографа  $k_1 \cdot s + k_0 = 0$ , кінцева точка  $Z = -k_0(k_1)^{-1}$ ,

– рівняння кратних точок годографа  $\begin{vmatrix} s^2 & k_1 \cdot s + k_0 \\ 2 \cdot s & k_1 \end{vmatrix} = 0$ , кратні точки

$$s_{1k} = 0, s_{2k} = 4.$$

Кореневий годограф показано на рис. 1. Площину годографа задано системою координат  $ReS \ O \ Im S$ . Показано основні точки годографа: початкові точки  $s_{1,2} = 0$ , що співпадають з початком системи координат  $O$ , кінцеву точку  $Z = -2$  та кратну точку  $B = -4$ . Початкові точки відповідають значенню  $K = 0$  в характеристичному рівнянні (2), кінцева точка – значенню  $K = \infty$ .

Дійсна вісь системи координат розбита на траєкторії коренів: дві парні  $0, 2\pi$  та одну непарну  $\pi$ .

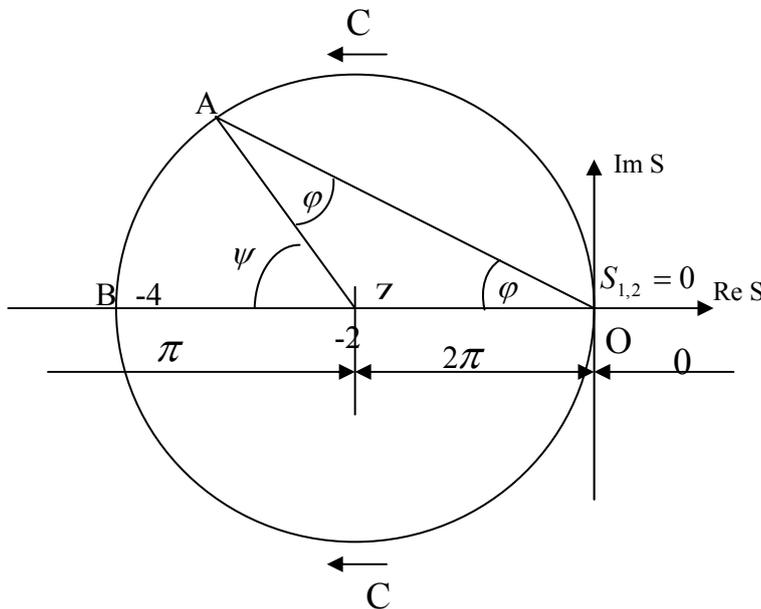


Рис. 1. Кореневий годограф, відповідний математичній моделі (1)

Непарними траєкторіями  $\pi$  годографа є також два півкола  $OCAB$  та  $OCB$ , тому що точки цих півкіл задовольняють основному фазовому співвідношенню геометричного місця коренів рівняння (2) на площині  $ReS O Im S$  [4]:

$$\sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} = N \cdot \pi, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Тут  $n, m$  – число початкових, кінцевих точок кореневого годографа відповідно,  $\varphi_{\nu}, \psi_{\mu}$  – кути, які утворюють з позитивним напрямком дійсної вісі  $ReS$  вектори, проведені з початкових, кінцевих точок годографа в певну точку площини  $ReS O Im S$ .

Для точки  $A$  (рис. 1) умова (3) виконується при  $N = 1$  і записується так

$$2 \cdot (\pi - \varphi) - (\pi - \psi) = 2 \cdot (\pi - \varphi) - (\pi - 2 \cdot \varphi) = 2\pi - 2\varphi - \pi + 2\varphi = \pi.$$

Таким чином, півкола  $OCAB, OCB$  – непарні траєкторії  $\pi$  кореневого годографа.

Фізичному змісту задачі, що розглядається, відповідають позитивні значення  $K > 0$ .

Відповідно до теорії кореневого годографа, при зміні  $K$  від 0 до  $\infty$  корені рівняння (2) виходять з початкових точок, рухаються по непарних траєкторіях до кінцевих точок або плинуть у нескінченність.

При зміні  $K$  від 0 до  $\infty$  два кореня рівняння (2) виходять з кратної початкової точки  $O$ , рухаються по непарних траєкторіях  $\pi$  (це півкола  $OCAB, OCB$ ) до кратної точки  $B$ . В кратній точці корені зливаються, утворюють кратний негативний дійсний корінь  $s_{1k} = s_{2k} = -4$  (в числовому прикладі) і далі розходяться: один за траєкторією  $\pi$  рухається вправо до кінцевої точки  $Z$ , другий за траєкторією  $\pi$  плине вліво у нескінченність.

Значення  $K$ , відповідне точці  $B$ , в якій утворюється кратний корінь, визначимо за формулою параметра [1]

$$K = \frac{\prod_{\nu=1}^n |s^* - s_{\nu}|}{\prod_{\mu=1}^m |s^* - z_{\mu}|} \cdot (-1)^{(N+1)}. \quad (4)$$

Для точки  $B$  отримуємо  $K = \frac{|-4 - 0| \cdot |-4 - 0|}{|-4 - (-2)|} \cdot (-1)^{1+1} = 8c^{-2}$ .

Визначимо значення тяги керуючого двигуна, відповідне значенню  $K = 8 c^{-2}$ :

$$K = \frac{P \cdot l}{J}, P = \frac{K \cdot J}{l} = \frac{8c^{-2} \cdot 2200 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{3 \text{ м}} = 5,867 \cdot 10^3 \text{ кгс}.$$

**Висновки з кореневого годографа, відповідного системі рівнянь (1):**

1. Три параметри  $(K, k_0, k_1)$  визначають корені характеристичного рівняння. Параметр  $K$  – узагальнений, визначається через конструктивні параметри ступеня ракети.
2. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до значення, відповідного точці  $B$ , рис. 1 (в числовому прикладі  $P_B = 5867$  кгс) корені характеристичного рівняння комплексні спряжені з негативними дійсними частками. Дійсні частки змінюються від нуля до  $\alpha_B = -4$ . Коефіцієнти  $\omega$  при  $j = \sqrt{-1}$  збільшуються від нуля до  $\omega = 2c^{-1}$  і далі спадають до нуля (в числовому прикладі).
3. Кореням характеристичного рівняння  $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$  відповідає рух динамічної системи, що є періодичним з частотою  $\omega$  і ступенем стійкості руху  $\alpha$ .
4. З п. 2 випливає, що зі збільшенням  $P$  від 0 до  $P_{\max}$  (в числовому прикладі  $P = 5867$  кгс) частоти коливань ступеня РН спочатку збільшуються від 0 до  $\omega_{\max}$  і далі спадають від  $\omega_{\max}$  до 0 (в числовому прикладі від 0 до  $\omega = 2c^{-1}$  і далі від  $\omega = 2c^{-1}$  до 0).
5. Зі збільшенням  $P$  від значення  $P_B$  (в числовому прикладі  $P_B = 5867$  кгс) корені характеристичного рівняння динамічної системи дійсні, негативні, рух ступеня – аперіодичний.
6. Рух ступеня РН стійкий при будь-яких значеннях параметрів  $K, k_0, k_1$  математичної моделі (1).

Побудуємо годограф, відповідний моделі (5) руху космічного ступеня РН [2, 3],

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ T \cdot \dot{\delta} + \delta &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $T$  – постійна часу; для визначеності покладемо  $T = 0,1$  с.

Характеристичне рівняння, відповідне системі (5), має вигляд

$$(T \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \quad (6)$$

З рівняння (6) отримаємо:

– рівняння початкових точок годографа  $T \cdot s^3 + s^2 = 0$ , початкові точки  $s_{1,2} = 0$ ,

$$s_3 = -\frac{1}{T} = -10,$$

– рівняння кінцевої точки годографа  $k_1 \cdot s + k_0 = 0$ , кінцева точка

$$z = -k_0(k_1)^{-1} = -2,$$

– рівняння кратних точок годографа  $\begin{vmatrix} (T \cdot s^3 + s^2) & (k_1 \cdot s + k_0) \\ (T \cdot s^2 + 2 \cdot s) & k_1 \end{vmatrix} = 0$ , кратна точка

$$s_{1k} = 0.$$

На рис. 2 показано основні точки годографа: початкові точки  $s_{1,2} = 0$ , що співпадають з точкою  $O$  – початком системи координат  $ReS \ O \ ImS$ , та  $s_3 = -10$ ; кінцева точка  $Z = -2$  і центр асимптот  $a^* = -4$ .

Центр асимптот годографа визначається формулою 
$$a^* = \frac{\sum_{v=1}^n s_v - \sum_{\mu=1}^m z_{\mu}}{n - m}.$$

Тут  $s_v, z_{\mu}$  – початкова і кінцева точки годографа;  $n, m$  – кількість початкових і кінцевих точок годографа.

Асимптоти  $\pm \pi, \pm 2\pi$  розходяться з центру асимптот  $a^*$  під кутами  $\varphi_v = \frac{\pi}{n - m} \cdot v$ , де  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Для прийнятих вихідних даних маємо

$$a^* = -6, \quad \varphi_v = \frac{\pi}{3}.$$

Початкові точки відповідають значенню  $K = 0$  в характеристичному рівнянні (6), кінцева точка – значенню  $K = \infty$ .

Дійсна вісь системи координат розбита на траєкторії коренів: три траєкторії парні  $0, 2\pi$  (дві траєкторії) та одну непарну  $\pi$ . При зміні  $K$  від  $0$  до  $\infty$  два кореня рівняння (6) виходять з кратної початкової точки  $s_{1,2}$ , рухаються по непарних траєкторіях  $\pm \pi$  і плинуть до асимптот  $a^*, a^*b$ . З початкової точки  $s_3 = -10$  виходить корінь, який за непарною траєкторією  $\pi$  рухається в кінцеву точку  $Z = -2$ .

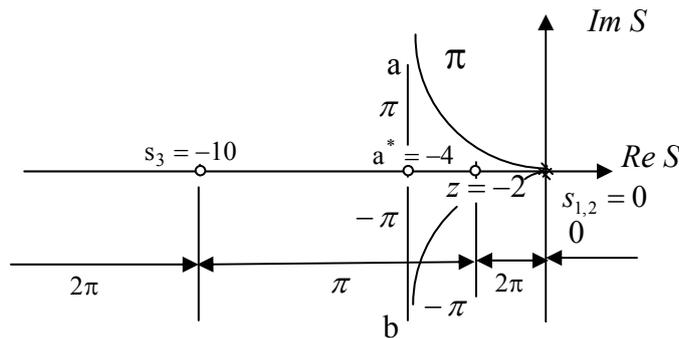


Рис. 2. Кореневий годограф, відповідний математичній моделі (5)

**Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (5):**

1. Зі збільшенням параметра  $K$  від нуля до нескінченності корені характеристичного рівняння комплексні спряжені  $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$  з негативними дійсними частками.

2. При будь-яких значеннях  $K > 0$  рух динамічної системи є періодичним з частотою  $\omega$  і ступенем стійкості руху  $\alpha$ .

Побудуємо годограф, відповідний моделі (7) руху космічного ступеня РН [2; 3]

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ T^2 \cdot \ddot{\delta} + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot \dot{\delta} + \delta &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут  $\zeta$  – коефіцієнт демпфірування; для визначеності покладемо  $\zeta = 1$ .  
Характеристичне рівняння, відповідне системі (7), має вигляд

$$(T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{8}$$

З рівняння (8) отримуємо [4]:

– рівняння початкових точок годографа  $T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2 = 0$ ,

– початкові точки  $s_{1,2} = 0, s_{3,4} = -\frac{-2 \cdot T \cdot \zeta \pm \sqrt{4 \cdot T^2 \cdot \zeta^2 - 4 \cdot T^2}}{2 \cdot T^2}$ ,

$$s_{3,4} = -10.$$

– рівняння кінцевої точки годографа  $k_1 \cdot s + k_0 = 0$ ,

– кінцева точка  $z = -k_0 / (k_1)^{-1} = -2$ ,

– рівняння кратних точок годографа

$$\begin{vmatrix} T^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2 & k_0 + k_1 \cdot s \\ 4 \cdot T^2 \cdot s^3 + 6 \cdot T \cdot \zeta \cdot s^2 + 2 \cdot s & k_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Рівняння (9) має два дійсних кореня: 0 та  $-10$  і два комплексних спряжених кореня:  $-3 \pm 2,082 \cdot j$ . Кратним точкам відповідають лише дійсні корені. Тому кратні точки годографа – це точки  $s_{1k} = 0, s_{2k} = -10$ .

Годограф, відповідний математичній моделі (7) кутового руху космічного ступеня РН [3], показано на рис. 3. Значення коренів, відповідні певним значенням параметра  $K$ , представлено в табл. 1.

**Таблиця 1**

№ з/п	$K$	$s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$	$s_3$	$s_4$
1	1	$-0.927 \pm 4.47 \cdot j$	-15.326	-2.820
2	1.5	$-0.593 \pm 5.962 \cdot j$	-16.241	-2.573
3	2	$-0.255 \pm 7.085 \cdot j$	-17.173	-2.317
4	2.5	$-0.061 \pm 7.897 \cdot j$	-17.88	-2.242
5	3	$0.349 \pm 8.586 \cdot j$	-18.503	-2.196

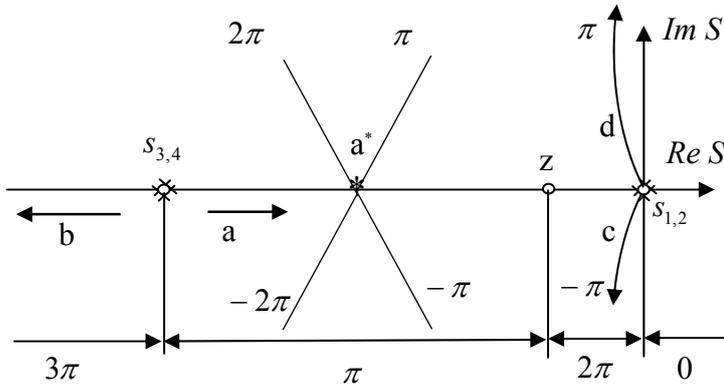


Рис. 3. Кореневий годограф, відповідний системі рівнянь (7)

**Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (7):**

1. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до нескінченності два нульових кореня характеристичного рівняння виходять з кратної початкової точки  $s_{1,2}$ , стають комплексними спряженими  $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$ , переходять з лівої півплощини в праву (ступінь РН стає за рухом нестійкою) і у нескінченності плинуть до асимптот  $\pm \pi$  (дугові стрілочки  $c, d$ ). Два дійсних кореня  $s_{3,4} = -10$  виходять з кратної початкової точки  $s_{3,4}$ . Один іде вправо за непарною траєкторією  $\pi$  в кінцеву точку  $z = -2$ . Другий іде вліво за непарною траєкторією  $3\pi$  у нескінченність (стрілочки  $a, b$ ).

2. Режим відпрацювання ступенем РН стрибкоподібних збурень параметрів руху – коливальний. Частоти коливань зі збільшенням  $K$  збільшуються.

Побудуємо годограф, відповідний моделі (10) руху космічного ступеня РН [3],

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -K \cdot \delta, \\ (T_1 \cdot \dot{\delta} + 1) \cdot (T_2^2 \cdot \ddot{\delta} + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta \cdot \dot{\delta} + \delta) &= k_0 \cdot \psi + k_1 \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тут  $T_1, T_2$  – постійні часу. Для визначеності покладемо  $T_1 = 0,15, T_2 = 0,1, \zeta = 1$ . Характеристичне рівняння, відповідне системі (10), має вигляд

$$(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2^2 \cdot s^4 + 2 \cdot T_2 \cdot \zeta \cdot s^3 + s^2) + K \cdot (k_1 \cdot s + k_0) = 0. \tag{11}$$

Основні точки годографу  $s_{1,2} = 0, s_{3,4} = 0, s_5 = -6,7, z = -2$ . Центр асимптот і кут між асимптотами  $a^* = -6, \varphi_v = \pi / 3$ .

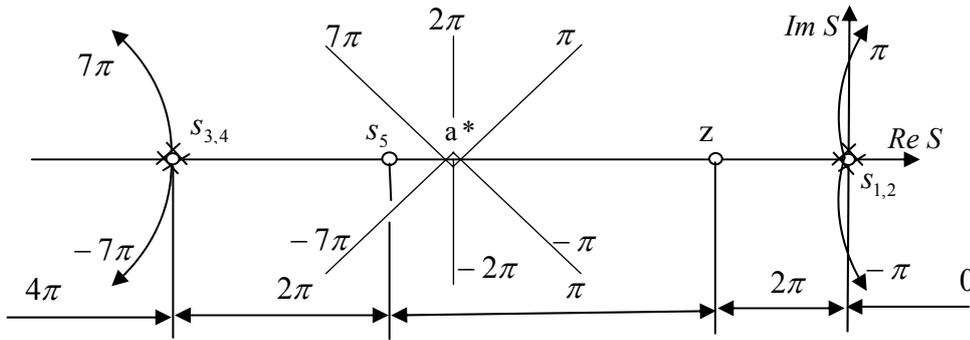


Рис. 4. Кореневий годограф, відповідний системі рівнянь (10)

Значення коренів, відповідні певним значенням параметра  $K$ , представлено в табл. 2.

Таблиця 2

№ з/п	$K$	$s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$	$s_{3,4} = \alpha \pm \omega \cdot j$	$s_5$
1	0.05	$-0.088 \pm 0.868 \cdot j$	$-0.213 \pm 1.249 \cdot j$	-272.731
2	0.1	$-0.093 \pm 0.654 \cdot j$	$-0.202 \pm 2.357 \cdot j$	-272.745
3	0.2	$-0.068 \pm 2.252 \cdot j$	$-0.226 \pm 0.955 \cdot j$	-272.745
4	0.3	$0.127 \pm 2.182 \cdot j$	$-0.422 \pm 1.165 \cdot j$	-272.745
5	4	$0.33 \pm 2.197 \cdot j$	$-0.624 \pm 1.262 \cdot j$	-272.745

**Висновки з кореневого годографа, відповідного математичній моделі (10):**

1. Зі збільшенням вектора керуючої тяги від нуля до нескінченності два нульових кореня характеристичного рівняння виходять з кратної початкової точки  $s_{1,2}$ , стають комплексними спряженими  $s_{1,2} = \alpha \pm \omega \cdot j$  і у нескінченності плінуть до асимптот  $\pm \pi$ . Два дійсних кореня  $s_{3,4} = -10$  виходять з кратної початкової точки  $s_{3,4}$ , стають комплексними спряженими  $s_{3,4} = \alpha_3 \pm \omega_3 \cdot j$  і у нескінченності плінуть до асимптот  $\pm 7\pi$ .

Режим відпрацювання ступенем РН “миттєвих” збурень параметрів руху – коливальний. Частоти коливань зі збільшенням  $P$  збільшуються.

2. В перехідному процесі відпрацювання збурень параметрів руху ступеня РН проявляються дві властиві частоти коливань.

**Витрати енергії на відпрацювання збурень.** Розглянемо залежність кількості енергії, що витрачається на відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів кутового руху космічного ступеня РН від ефективності  $K$  керуючих органів ракети. Оцінку витрат енергії виконаємо на основі припущення, що кількість енергії, витрачаємої ракетним двигуном ступеня РН на відпрацювання “миттєвого”

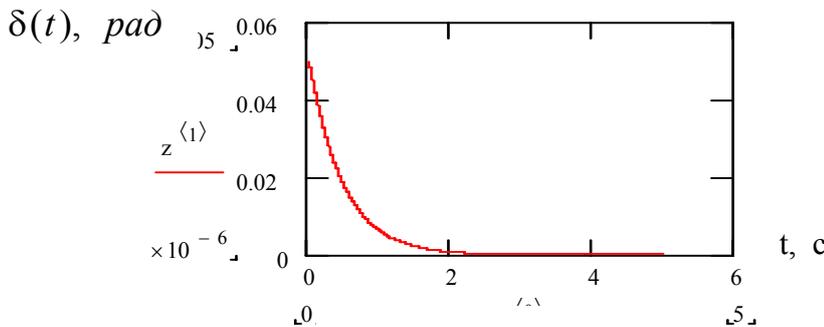
збурення координати кутового руху  $\psi_0$  протягом заданого часу  $t_3$ , пропорційна

$$Q(\delta) = \int_0^{t_3} |\delta(t)| dt.$$

Результати математичного моделювання процесів відпрацювання керуючими двигунами ступенів ракет “миттєвих” збурень координат кутового руху ракет представлено на рис. 5–8. В усіх випадках початкові значення збурень приймалися рівними  $\psi(0) = 0,051$  рад (3 кутових градуса). Моделювання проводилося з використанням пакета програм Mathcad. На кожному рисунку представлені: початкове значення вектора стану ступеня РН (у форматі матриці – стовпчика координат), відповідного одній із зазначених вище математичних моделей (1), (5), (8), (10); функція Mathcad  $D(t, x)$ , яка повертає значення у вигляді вектора з  $n$  елементів, що містять перші похідні невідомих функцій; функція Mathcad  $rkfixed$ , що розраховує числові значення рішення системи диференціальних рівнянь; показники витрат енергії  $q(\delta)$ .

I. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (1)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -80 \cdot x_0 - 40 \cdot x_1 \end{pmatrix} \quad z := rkfixed(x, 0, 5, 10000, D)$$

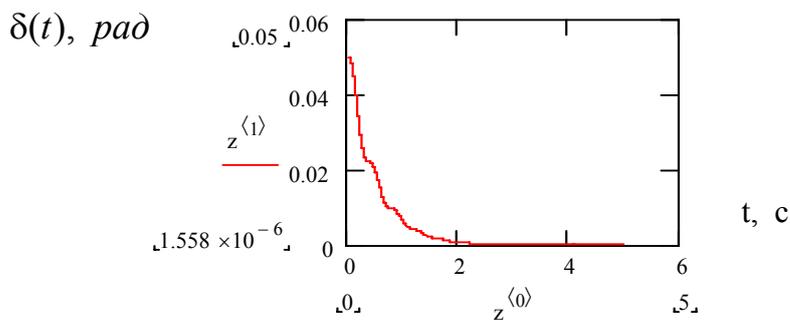


$$Q(\delta) = \int_0^4 |\delta(t)| dt = 4,85$$

Рис. 5. Графік зміни за часом функції  $\delta(t)$ , відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (1)

II. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (5)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -(0.15)^{-1} \cdot (80 \cdot x_0 + 40 \cdot x_1 + x_2) \end{pmatrix} \quad z := rkfixed(x, 0, 5, 10000, D)$$



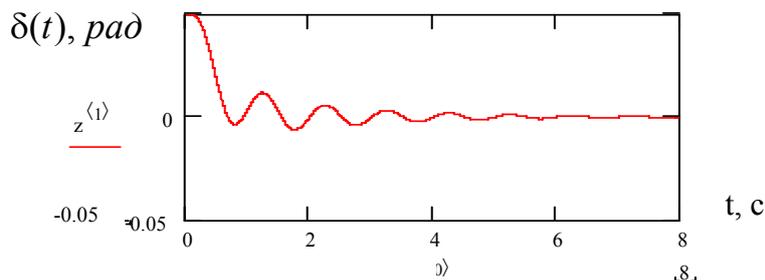
$$Q(\delta) = 4,631$$

Рис. 6. Графік зміни за часом функції  $\delta(t)$ , відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (5)

III. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (8)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -(0.01)^{-1} \cdot (16 \cdot x_0 + 8 \cdot x_1 + x_2 + 0.2 \cdot x_3) \end{bmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 8, 10000, D)$$



$$Q(\delta) = 5,505$$

Рис. 7. Графік зміни за часом функції  $\delta(t)$ , відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (8)

IV. Рух ступеня РН описується системою рівнянь (10)

$$x := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ (-0.0015)^{-1} \cdot (6 \cdot x_0 + 3 \cdot x_1 + x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.04 \cdot x_4) \end{bmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 200, 10000, D)$$

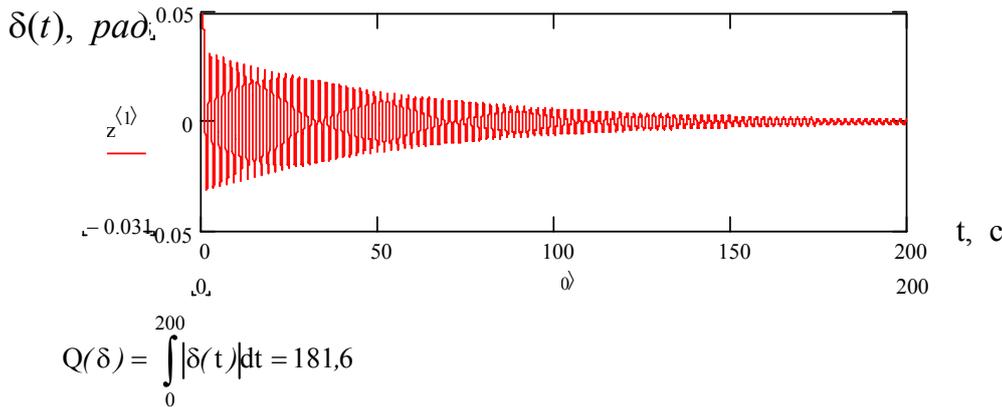


Рис. 8. Графік зміни за часом функції  $\delta(t)$ , відповідний ступеню РН, рух якого описується системою рівнянь (10)

**Висновки.** Процеси відпрацювання “миттєвих” збурень параметрів руху ступеня РН суттєво залежать від структури і постійних часу слідкуючих приводів керуючого двигуна.

Аперіодичні перехідні процеси, умови стійкості руху і найменші витрати енергії на відпрацювання збурень параметрів руху реалізуються при використанні приводів нульового і першого порядків: рух приводу описується алгебраїчним або диференціальним першого порядку рівняннями.

В разі використання приводів другого і третього порядків (математичні моделі приводів – диференціальні рівняння другого, третього порядків) перехідні процеси характеризуються коливальністю і обмеженими запасами стійкості руху.

### Бібліографічні посилання

1. **Бендриков Г.А.** Теория корней линейных автоматических систем / Г.А. Бендриков, К.Ф. Теодорчик. – М. : Машиностроение, 1965. – 156 с.
2. **Игдалов И.М.** Ракета как объект управления / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. акад. С. Н. Конюхова. – Д. : Арт-Пресс, 2004. – 542 с.
3. **Игдалов И. М.** Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и их космических ступеней / И. М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д. : Изд-во ДНУ, 2010. – 264 с.
4. **Карачаров К.А.** Введение в техническую теорию устойчивости движения / К.А. Карачаров, А.Г. Пилютик. – М. : Физматгиз, 1962. – 244 с.
5. **Лебедев А.А.** Баллистика ракет / А.А. Лебедев, Н.Ф. Герасюта. – М. : Машиностроение, 1970. – 224 с.

Надійшла до редколегії 27.04.2016

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Авдеев В.В., Капцова В.В. Використання методу аналітичного конструювання регуляторів для розробки системи стабілізації кутового положення супутника.....3
  2. Волошко В.Л., Волошко Л.В. Проектування оптимального навантаження на пластини складної форми.....10
  3. Голубек А.В. Анализ сближения ракеты-носителя с каталогизированными космическими объектами в процессе выведения на орбиты с наклоном  $45^{\circ}$  .....20
  4. Клименко С.В., Халипова В.Д. Математические модели ранжирования экспериментальных выборок случайных величин.....28
  5. Коваленко Т.А., Шептун Ю.Д., Сироткина Н.П. Система управления вектора тяги жидкостного ракетного двигателя космической ступени ракеты-носителя типа «Циклон-3» при изменяемой в полете массовой асимметрии .....33
  6. Кустов П.В., Кулабухов А.М., Масальский В.А., Тищенко А.В. Автоматизация планирования и приема спутниковой информации.....44
  7. Мазуренко В.Б. Реализация вычислительных методов повышения точности дозирования топливных баков ракеты-носителя морского базирования.....49
  8. Малайчук В.П., Потапов А.М., Гусарова И.А., Деревянко И.И. Факторный анализ работоспособности критериев оценки стационарности и независимости измерений линейно-протяженных объектов контроля .....59
  9. Манойленко А.А. Метод оценки точности угловой ориентации и стабилизации космического аппарата.....71
  10. Мозговой Д.К., Васильев В.В. Анализ многолетней засухи по данным Landsat 8 .....79
  11. Мозговой Д.К., Чорненко М.В. Геоинформационные веб-сервисы онлайн обработки спутниковых снимков.....89
-

12. Мозговой Д.К., Васильев В.В. Мониторинг природных и антропогенных процессов с помощью веб-сервиса Landsat Viewer.....95
13. Олейник М.П., Кулабухов А.М. Оценка требований к угловой ориентации межспутниковых оптических линий связи по навигационным параметрам .....102
14. Перерва В.А., Карпович Е.В. Исследование макроструктуры сварных соединений сплава ВТ6С выполненных сваркой полым катодом при различной разделке кромок .....108
15. Полишко С.А. Влияние модифицирования на распределение легирующих элементов в микрообъемах малоуглеродистой стали СТ1КП.....115
16. Роменская О.П., Гусарова И.А., Манько Т.А. Использование инфракрасного нагрева при изготовлении изделий из полимерных композиционных материалов.....120
17. Седачова Е.Г., Убизький Н.Н., Кулик А.В. Методика анализа формоизменяющих операций листовой штамповки при изготовлении элементов конструкций изделий .....123
18. Сокол Г.И., Котлов В.Ю., Щербина К.С. Экспериментальные исследования акустических характеристик в рупоре на инфразвуковых частотах.....129
19. Тищенко А.В., Клочков О.Г., Кулабухов А.М., Масальский В.А. Испытательный стенд системы угловой ориентации и стабилизации космического аппарата.....140
20. Шептун Ю.Д., Коваленко Т.О. Аналіз витрат енергії на керування космічним ступенем ракети.....145

Наукове видання

**ВІСНИК  
ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія: РАКЕТНО-КОСМІЧНА ТЕХНІКА**

Заснований у 1993 р.

*Випуск 19*

**Українською, російською та англійською мовами**

**Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого  
засобу масової інформації  
серія КВ № 21508 – 11408Р від 17.06.2015 р.**

---

Редактор Омельченко Л. В.  
Оригінал-макет Ситник В. А.

---

Підписано до друку 05.07.2016. Формат 70x108/16. Папір друкарський.  
Ум. друк. арк. 14,0. Тираж 100 прим. Зам. № 134

---

ПП «Ліра ЛТД». вул. Погребняка, 25, м. Дніпропетровськ, 49010.  
Фактична адреса: вул. Наукова 5.  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
Серія ДК № 188 від 19.09.2000 р.