Researches in Mathematics
Res. Math. **27**(2), 2019, p. 28–31
doi:10.15421/241911

https://vestnmath.dnu.dp.ua
ISSN (Print) 2664-4991
ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

A. M. Pasko*
* Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro 49050. *E-mail:pasko08@meta.ua*

The Betti numbers of the space $\mathbb{C}\Omega_3$

Запропоновану працю присвячено вивченню топологічного простору $\mathbb{C}\Omega_3$. Простори $\mathbb{C}\Omega_n$ є аналогом просторів узагальнених досконалих сплайнів Ω_n для випадку комплекснозначних функцій. Кожен сплайн простору $\mathbb{C}\Omega_n$ задається системою вузлів відрізка $[0,1]$ та системою чисел одиничного кола комплексної площини, які визначають значення сплайна на проміжках між вузлами. Цим комплекснозначні сплайни простору $\mathbb{C}\Omega_n$ відрізняються від узагальнених досконалих сплайнів простору Ω_n, значення котрих на проміжках між вузлами задаються дійсними числами множини $\{\pm 1\}$. Як і для простору Ω_n, топологія простору $\mathbb{C}\Omega_n$ наслідувана з простору сумовних функцій L_1, в цьому випадку комплекснозначних. Систематичне дослідження гомотопічних інваріантів простору Ω_n було започатковане В.І. Рубаном, який побудував клітинну структуру цього простору, і з її допомогою 1985 року знайшов групи n-вимірних гомологій простору Ω_n, а 1999 року повністю розв'язав задачу відшукання груп його когомологій. В подальшому гомотопічні інваріанти простору Ω_n вивчалися В.А. Кощеевим, який встановив однозв'язність Ω_n, та А.М. Паськом, який знайшов гомотопічні групи цих просторів у вимірностях від 2 до n. Топологічні простори $\mathbb{C}\Omega_n$ було введено в роботі 2015 року А.М. Паськом, в якій автор побудував на $\mathbb{C}\Omega_n$ структуру клітинного простору, аналогічну введеній В.І. Рубаном клітинній структурі протору Ω_n, і з її допомогою довів однозв'язність просторів $\mathbb{C}\Omega_n$ для всіх $n \geq 2$. У роботі 2016 року А.М. Пасько знайшов гомології простору $\mathbb{C}\Omega_n$ у вимірностях $0, 1, 2, 2n-1, 2n, 2n+1$ (клітинний простір $\mathbb{C}\Omega_n$ має вимірність $2n+1$), та встановив рівність нулю ейлерової характеристики простору $\mathbb{C}\Omega_n$ для всіх $n \geq 1$. У запропонованій статті досліджуються числа Бетті (ранги гомологічних груп) простору $\mathbb{C}\Omega_3$. Використовуючи обчислений у праці [3] явний вигляд оператора межі, в роботі знайдено безпосередньо групи 3-вимірних циклів та групи 3-вимірних меж простору $\mathbb{C}\Omega_3$, що дозволило знайти 3-вимірну групу гомологій цього простору. Враховучи відомі з [4] групи гомологій простору $\mathbb{C}\Omega_3$ у вимірностях 0, 1, 2, 5, 6, 7, знайдоно числа Бетті простору $\mathbb{C}\Omega_3$ у всіх вимірностях, крім вимірності 4. Число Бетті у вимірності 4 знаходимо шляхом підрахунку ейлерової характеристики. Таким чином, у статті знайдено всі числа Бетті простору $\mathbb{C}\Omega_3$.

Key words: узагальнений досконалий сплайн, клітинний простір, числа Бетті

The space $\mathbb{C}\Omega_3$ is considered. The Betti numbers of the space $\mathbb{C}\Omega_3$ are calculated.

Key words: generalized perfect spline, CW-complex, Betti numbers

MSC2010: Pri 41A10, Sec 41A44, 46E20

Let $\omega(t), t \geq 0$, be the non-negative, continuous increasing function, $\omega(0) = 0$, and $n \in \mathbb{N}$. Consider integer $q \geq 0$ and the system of the knots

$$0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1.$$

Let G be the real line $\mathbb{R}$ or the complex plane $\mathbb{C}$. Consider the function (ω-spline)

$$F(\eta, s, t) = s_k \cdot \min\{\omega(t-\eta_k), \omega(\eta_{k+1}-t)\}, \qquad for \quad t \in [\eta_k, \eta_{k+1}], \tag{1}$$

with $s_k \in G, |s_k| = 1$ and the subspace of the space $L_1[0,1]$ that consists of the splines (1) for $q \leq n$. If $G = \mathbb{R}$ this subspace coincides with the space Ω_n, in case of $G = \mathbb{C}$ it coincides with the space $\mathbb{C}\Omega_n$. The researches of the homotopy invariants of the spaces Ω_n has been started by V.I. Ruban [5], [6] who has built CW structure on Ω_n and calculated the cohomologies of the space Ω_n. V.A.Koshcheev [1] has proved that the spaces Ω_n are simply connected. A.M. Pasko [2] has established that the homotopy groups

$$\pi_k(\Omega_n) = \begin{cases} 0, & 2 \leq k \leq n-1, \\ \mathbb{Z}^{\frac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}{3}}, & k = n. \end{cases}$$

The spaces $\mathbb{C}\Omega_n$ have been introduced in the paper [3]. In [3] A.M. Pasko has built on $\mathbb{C}\Omega_n$ the structure of 2n+1 - dimensional CW-complex and proved that the spaces $\mathbb{C}\Omega_n$, $n \geq 2$, are simply connected. In [4] A.M. Pasko has established that

$$H_k(\mathbb{C}\Omega_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{якщо } k = 0, k = 2n+1; \\ 0, & \text{якщо } k = 1, k = 2; \\ \mathbb{Z}^{n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, & \text{якщо } k = 2n-1; \\ \mathbb{Z}^n, & \text{якщо } k = 2n. \end{cases} \tag{2}$$

for any $n \geq 2$. So in [4] A.M. Pasko has found that the Euler characteristic $\chi(\mathbb{C}\Omega_n) = 0$.

CW-complex is a Hausdorff space E written as a union

$$E = \bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{k \in I_q} e_k^q$$

of the non-overlapping sets e_k^q (q-cells) in such a way that any q-cell e_k^q has a continuous characteristic map $f_k^q : D^q \to E$ of closed q-dimensional ball D^q to E such that the restriction of f_k^q to $\mathrm{Int}D^q$ is a homeomorphism between $\mathrm{Int}D^q$ and e_k^q. Herewith E satisfies the conditions:

(C) the boundary $\dot{e}_k^q = \bar{e}_k^q \setminus e_k^q$ of any q-cell lies in the union of a finite number of j-cells for $j < q$;

(W) subset $F \subset E$ is closed if and only if all the intersections $F \bigcap \bar{e}_k^q$ are closed.

The q-skeleton of the CW-complex E is the union $\mathrm{ske}_q(E) = \bigcup_{j \leq q} e_k^j$. The CW-complex E is said to be finite if it consists of finite amount of cells.

Consider CW-complex E. The set of the q-cells of E may be used as the basis of a free abelian group $C_q(E)$. Elements of $C_q(E)$ are called q-chains. There are the homomorphisms of groups $\partial = \partial_q : C_q(E) \to C_{q-1}(E)$. This homomorphisms are called boundary operators. Consider the groups $Z_q(E) = \mathrm{Ker}\partial_q$ (the groups of q-cycles) and $B_q(E) = \mathrm{Im}\partial_{q+1}$ (the groups of q-boundaries). The identity $\partial_q\partial_{q+1} = 0$ implies $B_q(E) \subset Z_q(E)$ that allows to define the homology groups $H_q(E) = Z_q(E)/B_q(E)$.

Let us describe the CW-complex structure of $\mathbb{C}\Omega_n$ introduced in [3]. Consider the set of two symbols $A = \{1, e\}$, integer $0 \leq q \leq n$ and the sequences

$$u = u_0u_1...u_q, \quad u_j \in A.$$

For each sequence u let $h(u)$ be the number of u_j such that $u_j = e$. Each m-cell, $0 \leq m \leq 2n+1$, is determined with some sequence $u = u_0u_1...u_q$ where $m = q + h(u)$, we denote such m-cell as $c^q(u_0u_1...u_q)$. It is proved in [3] that the boundary of the m-cell $c^q(u_0u_1...u_q)$ is equal

$$\partial c^q(u_0u_1...u_q) = \sum_{k:\ u_k=1} (-1)^k c^{q-1}(u_0 \dots \hat{u}_k \dots u_q), \tag{3}$$

where $u_0 \dots \hat{u}_k \dots u_q$ is the sequence $u_0...u_q$ in which the symbol u_k is missed.

Consider the 3-cells of the 7-dimensional CW-complex $\mathbb{C}\Omega_3$:

$$c^3(1111), c^2(11e), c^2(1e1), c^2(e11), c^1(ee).$$

By the virtue of (3) their boundaries are

$$\partial c^3(1111) = \partial c^2(11e) = \partial c^2(e11) = \partial c^1(ee) = 0,$$

and

$$\partial c^2(1e1) = c^1(e1) + c^1(1e).$$

Therefore $Z_3(\mathbb{C}\Omega_3)$ is a free abelian group with the basis

$$c^3(1111), c^2(11e), c^2(e11), c^1(ee).$$

On the other hand

$$c^2(11e) = -\partial c^3(11e1), c^2(e11) = \partial c^3(1e11), c^1(ee) = \partial c^2(1ee),$$

so $c^2(11e), c^2(e11), c^1(ee)$ are 3-boundaries. The 3-cell $c^3(1111)$ is boundary of no 4-chain because the codes of all the 4-cells of the space $\mathbb{C}\Omega_3$ unclude the symbol e, so the codes of their boundaries do. Therefore $H_3(\mathbb{C}\Omega_3)$ is the free abelian group with the basis $c^3(1111)$. Hence

$$H_3(\mathbb{C}\Omega_3) = \mathbb{Z}. \tag{4}$$

It follows from (2), (4) that

$$H_k(\mathbb{C}\Omega_3) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k = 0, 3, 7; \\ 0, & \text{if } k = 1, k = 2; \\ \mathbb{Z}^4, & \text{if } k = 5; \\ \mathbb{Z}^3, & \text{if } k = 6. \end{cases} \tag{5}$$

So only $H_4(\mathbb{C}\Omega_3)$ is unknown. The equality (5) implies that the Betti numbers $\beta_k(\mathbb{C}\Omega_3), k \neq 4$ (the ranks of the homology groups) of the space $\mathbb{C}\Omega_3$ are equal

$$\beta_k\left(\mathbb{C}\Omega_3\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, 3, 7; \\ 0, & \text{if } k = 1, k = 2; \\ 4, & \text{if } k = 5; \\ 3, & \text{if } k = 6. \end{cases} \tag{6}$$

It is known from [4] that the Euler characteristic $\chi(\mathbb{C}\Omega_n) = 0, n \geq 1$. Thus

$$\chi(\mathbb{C}\Omega_3) = \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \beta_k(\mathbb{C}\Omega_3) = 0. \tag{7}$$

It follows from (6), (7) that $\beta_4(\mathbb{C}\Omega_3) = 2$. So we have proved the theorem.

Theorem 1. *The Betti numbers of the space* $\mathbb{C}\Omega_3$ *are*

$$\beta_k\left(\mathbb{C}\Omega_3\right) = \begin{cases} 1, & \textit{if } k = 0, 3, 7; \\ 0, & \textit{if } k = 1, k = 2; \\ 2, & \textit{if } k = 4; \\ 4, & \textit{if } k = 5; \\ 3, & \textit{if } k = 6. \end{cases}$$

References

1. *Koshcheev V. A.* The fundamental groups of the spaces of generalized perfect splines. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN V. 15, №1. (2009), 159–165.
2. *Pasko A. M.* On the homotopy of the spaces of generalized perfect splines. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **17** (2012), 138–140.
3. *Pasko A. M.* Simply connectedness of some space of the functions to complex numbers. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **20** (2015), 70–74.
4. *Pasko A. M.* The homologies of the space $\mathbb{C}\Omega_n$ in some dimensions. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **21** (2016), 71–76.
5. *Ruban V. I.* The CW-structure of the spaces of Ω-splines. Issledovania po sovr. problemam summirovania i priblizhenia funkciy i ikh prilozheniam. Dnipropetrovsk. (1985), 39–40.
6. *Ruban V. I.* The CW-structure and the cohomology of the spaces of generalized perfect splines. Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. **4** (1999), 85–90.

Received: 02.12.2019. *Accepted:* 20.12.2019