*Researches in Mathematics* https://vestnmath.dnu.dp.ua
Res. Math. **27**(1), 2019, p. 28–38 ISSN (Print) 2664-4991
doi:10.15421/241903 ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

**К. А Данченко***, **В. О. Кофанов****
* Дніпровський національный університет імени Олеся Гончара,
** Дніпровський національный університет імени Олеся Гончара,
Dnipro, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

# Екстремальні задачі для неперіодичних сплайнів на дійсній осі та їх похідних

**We consider the Bojanov-Naidenov problem over the set $\sigma_{h,r}$ of all non-periodic splines $s$ of order $r$ and minimal defect with knots at the points $kh$, $k \in \mathbf{Z}$. More exactly, for given $n, r \in \mathbf{N}$; $p$, $A > 0$ and any fix interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ we solve the following extremal problem**

$$\int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup, \quad q \geq p\,, \tag{1}$$

**over the classes**

$$\sigma_{h,r}^p(A) := \{s(\cdot + \tau) : s \in \sigma_{h,r},\ \|s\|_{p,\,\delta} \leq A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta}, \quad \delta \in (0, h], \quad \tau \in \mathbf{R}\},$$

**where**

$$\|x\|_{p,\,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : \ a,\, b \in \mathbf{R}\,,\ 0 < b - a \leq \delta\},$$

**and $\varphi_{\lambda,r}$ is $(2\pi/\lambda)$-periodic spline of Euler of order $r$.**

**In particularly, for $k = 1, ..., r-1$ we solve the extremal problem**

$$\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt \to \sup, \quad q \geq 1\,, \tag{2}$$

**over the classes $\sigma_{h,r}^p(A)$.**

**Note that the problems (1) and (2) was solved earlier on the classes**

$$\sigma_{h,r}(A, p) := \{s(\cdot + \tau) : s \in \sigma_{h,r} : L(s)_p \leq AL(\varphi_{\lambda,r})_p\,,\ \tau \in \mathbf{R}\}\,,$$

**where**

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} :\ a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\right\}.$$

**We prove that the classes $\sigma_{h,r}^p(A)$ is wider than the classes $\sigma_{h,r}(A, p)$.**

**Similarly we solve the analog of Erdös problem about the characterisation of the spline $s \in \sigma_{h,r}^p(A)$ that has maximal arc length over an fix interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$.**

*Key words: Bojanov-Naidenov problem, nonperiodic spline, rearragement, comparison theorem.*

**Для заданих $r \in \mathbf{N}$; $h, p, A > 0$ и произвольного фиксированного отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}$ решена экстремальная задача $\int_a^b |s(t)|^q dt \to \sup$, $q \geq p$, на множестве периодических сплайнов $s$ порядка $r$ минимального дефекта с узлами в точках $kh$, $k \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих условию $\|s\|_{p,\delta} \leq A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}$, $\lambda = \pi/h$, $\delta \in (0, \pi/\lambda]$, где $\|s\|_{p,\,\delta} := \sup\{\|s\|_{L_p[a,\,b]} : \ a, b \in \mathbf{R}\,,\ 0 < b - a \leq \delta\}$, а $\varphi_{\lambda,r}$ – $(2\pi/\lambda)$-периодический**

© *К. А. ДАНЧЕНКО, В. О. КОФАНОВ, 2019* 

**сплайн Ейлера порядка $r$. Как следствие, решена та же экстремальная задача для промежуточных производных $x^{(k)}$, $k = 1, ..., r-1$, при $q \geq 1$.**

*Ключевые слова: Задача Боянова-Найденова, непериодический сплайн, перестановка, теорема сравнения.*

**Для заданих $r \in \mathbf{N}$; $h, p, A > 0$ і довільного фіксованого відрізка $[a, b] \subset \mathbf{R}$ розв'язана екстремальна задача $\int_a^b |s(t)|^q dt \to \sup$, $q \geq p$, на множині всіх неперіодичних сплайнів $s$ порядку $r$ мінімального дефекту з вузлами у точках $kh$, $k \in \mathbf{Z}$, що задовольняють умову $\|s\|_{p,\delta} \leq A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}$, $\lambda = \pi/h$, $\delta \in (0, \pi/\lambda]$, де $\|s\|_{p,\delta} := \sup\{\|s\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b-a \leq \delta\}$, а $\varphi_{\lambda,r}$ – $(2\pi/\lambda)$-періодичний сплайн Ейлера порядку $r$. Як наслідок, розв'язана та ж сама екстремальна задача для проміжних похідних $x^{(k)}$, $k = 1, ..., r-1$, при $q \geq 1$.**

*Ключові слова: Задача Боянова-Найденова, неперіодичнмй сплайн, перестановка, теорема порівняння.*

**MSC 2010:** Pri 41A17, Sec 41A44

**1. Вступ**. Нехай $G = \mathbf{R}$, $G = [a, b]$ або $G = I_{2\pi}$– відрізок $[0, 2\pi]$ з ототожненими кінцями. Будемо розглядати простори $L_p(G)$, $0 < p \leq \infty$, усіх вимірних функцій $x : G \to \mathbf{R}$, для яких величина $\|x\|_{L_p(G)}$ скінченна, де

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad \text{якщо} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai\,sup}_{t \in G} |x(t)|, \quad \text{якщо} \quad p = \infty.$$

Для $r \in \mathbf{N}$ і $p, s \in (0, \infty]$ через $L^r_{p,s}$ позначимо простір усіх функцій $x \in L_p(\mathbf{R})$, які мають локально абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку, а $x^{(r)} \in L_s(\mathbf{R})$. Будемо писати $\|x\|_p$ замість $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ і $L^r_\infty$ замість $L^r_{\infty,\infty}$.

Добре відомо (див., наприклад, [1, стор. 47]), що задача знаходження точної сталої $C$ в нерівності типу Колмогорова-Надя

$$\|x^{(k)}\|_q \leq C \, \|x\|_p^\alpha \, \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

на классі функцій $x \in L^r_{p,s}$, де $\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметри $q, p, s \geq 1$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $k < r$, задовольняють умову $\alpha \leq (r-k)/r$, рівносильна наступній екстремальній задачі:

$$\|x^{(k)}\|_q \to \sup \tag{1.2}$$

на класі функцій $x \in L^r_{p,s}$ з обмеженнями

$$\|x^{(r)}\|_s \leq A_r, \quad \|x\|_p \leq A_0, \tag{1.3}$$

де $A_0$, $A_r$ – задані додатні числа.

Незважаючи на велику кількіть робіт з цієї тематики точна стала $C$ в нерівності (1.1) відома для усіх $r \in \mathbf{N}$ і усіх $k < r$ лише в небагатьох випадках. Детальна бібліографія міститься в роботах [1] – [3]. Тому цікавою є модифікація задачі (1.2)

з обмеженнями (1.3), яка розглянута Бояновим і Найденовим [4]. Для довільного відрізка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ними розв'язана проблема

$$\int_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad k = 1, ...r-1,$$

на класі функцій $x \in L^r_\infty$, які задовольняють умову (1.3) з $p = s = \infty$, де $\Phi -$ така неперервно диференційовна функція на $[0,\infty)$, додатня на $(0,\infty)$, що $\Phi(t)/t$ не спадає і $\Phi(0) = 0$. Як наслідок ними була розв'язана задача Ердеша [5] про характеризацію тригонометричного полінома з фіксованою рівномірною нормою, графік якого на заданому відрізку $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$ має максимальну довжину.

Через $W$ позначимо клас таких неперервних, невід'ємних і опуклих функцій $\Phi$, визначених на $[0,\infty)$, що $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ покладемо [6]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a,b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}. \tag{1.4}$$

Зазначимо, що $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ і $L(x')_1 \le 2\|x\|_\infty$.

В роботі [7] розв'язана наступна модифікація задачі Боянова-Найденова:

$$\int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.5}$$

на класі функцій $x \in L^r_\infty$ з обмеженнями

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p \le A_0. \tag{1.6}$$

Як наслідок отримано розв'язок задачі

$$\int_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, ..., r-1, \tag{1.7}$$

на класі усіх функцій $x \in L^r_\infty$, що задовольняють умову (1.6). Узагальнення результатів роботи [7] наведено в [8], [9].

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, позначимо $r$-й $2\pi$-періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ і для $\lambda > 0$ покладемо $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

В роботі [10] отримано розв'язок задач (1.5) і (1.7) на класі функцій $x \in L^r_\infty$ з обмеженнями

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad \|x\|_{p,\delta} \le A_r \cdot \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}, \quad \delta \in (0,\ \pi/\lambda],$$

де

$$\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a,\ b \in \mathbf{R},\ \ 0 < b-a \le \delta\}. \tag{1.8}$$

Зазначимо, що при $p \geq 1$ величина $\|x\|_{p,\,\delta}$ є нормою на відміну від величини $L(x)_p$, що визначена рівністю (1.4).

Для $h > 0$, $r \in \mathbf{N}$, через $\sigma_{h,r}$ позначимо множину поліноміальних сплайнів порядку $r$ дефекту 1 з вузлами в точках $kh$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, $\sigma_{h,r} \subset L^r_\infty$ і на кожному з відрізків $[kh, (k+1)h]$ сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ є алгебраїчним многочленом порядку не вищого за $r$.

Нехай далі $\lambda = \pi/h$. Тоді для належного зсуву $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$ має місце включення $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau) \in \sigma_{h,r}$ . Для $A, p > 0$ покладемо

$$\sigma^p_{h,r}(A) := \{s(\cdot + \tau) : s \in \sigma_{h,r},\ \|s\|_{p,\,\delta} \leq A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta}, \quad \delta \in (0, h], \quad \tau \in \mathbf{R}\}, \tag{1.9}$$

де величина $\|x\|_{p,\,\delta}$ визначена рівністю (1.8).

Через $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ позначимо класс сплайнів $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$, для яких при довільних $\Phi \in W$ і $\delta \in (0, h]$ кожна з точних верхніх граней

$$\sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi\left(|s(t)|^p\right) dt : \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \beta - \alpha \leq \delta\right\} \tag{1.10}$$

досягається на деякому відрізку $[\alpha,\, \beta]$ (який залежить від $\Phi$ і $\delta$). Прикладами функцій класу $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ є сплайни $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$, що мають одну з властивостей:

1) $s-$ періодична функція (довільного періоду),

2) $\lim_{|t|\to\infty} s(t) = 0$,

3) $s \in L_{p,\,\infty}$ при $p < \infty$,

4) $s-$ фінітна функція.

В даній работі розв'язано задачі (1.5) і (1.7) на класі $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ (теореми 1, 3). Як наслідок отримано розв'язок задачі Ердеша на цьому класі.

**2. Допоміжні твердження**.

**Lemma 1.** *Якщо функція $x$ неперервна на $\mathbf{R}$, а точна верхня грань в означенні* (1.10) *досягається на відрізку $[a, b]$, то $|x(a)| = |x(b)|$ [11].*

**Lemma 2.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$; $\lambda = \pi/h$. Тоді для довільного сплайну $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$ виконується нерівність*

$$\|s\|_\infty \leq A\|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty. \tag{2.1}$$

**Доведення**. Зафіксуємо сплайн $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$. Нехай $m-$ точка максимуму функції $\varphi_{\lambda,\,r}$. Зазначимо, что

$$\|\varphi_{\lambda,\,r}\|^p_{p,\,\delta} = \int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} \varphi_{\lambda,\,r}(t)dt, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda].$$

Тому з означення (1.9) для довільного $a \in \mathbf{R}$ випливає, що

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_a^{a+\delta} |s(t)|^p dt \leq \frac{A^p}{\delta}\int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} \varphi^p_{\lambda,\,r}(t)dt = \frac{2A^p}{\delta}\int\limits_m^{m+\delta/2} \varphi^p_{\lambda,\,r}(t)dt.$$

Переходячи в цьому співвідношенні до границі при $\delta \to 0$ отримаємо

$$|s(a)|^p \le A^p \varphi^p_{\lambda,\,r}(m) = A^p \|\varphi_{\lambda,\,r}\|^p_\infty.$$

Звідси внаслідок довільності $a \in \mathbf{R}$ випливає твердження леми 2.

Лема 2 доведена.

Будемо говорити, що $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ є функцією порівняння для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, якщо

$$\|x\|_\infty \le \|f\|_\infty$$

і з рівеості $x(\xi) = f(\eta)$, де $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, випливає нерівність $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, якщо вказані похідні існують.

**Lemma 3.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$; $\lambda = \pi/h$. Тоді сплайн $A\varphi_{\lambda,\,r}(t)$ є функцією порівняння для довільного сплайну $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$.*

**Доведення**. Зафіксуємо сплайн $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$. За лемою 2 виконується нерівність (2.1). Застосовуючи цю нерівність разом з нерівностю Магарил-Ілляєва [12]:

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} = \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty}, \qquad s \in \sigma_{h,r},$$

маємо $\|s^{(r)}\|_\infty \le A$. Внаслідок цієї нерівності і нерівності (2.1) виконані умови теореми порівняння Колмогорова [13]. За цією теоремою сплайн $A\varphi_{\lambda,\,r}(t)$ є функцією порівняння для сплайну $s$.

Лема 3 доведена.

Для сумовної на відрізку $[a, b]$ функції $x$ символом $r(x, t)$ позначимо перестановку функції $|x|$ (див., наприклад, [14, §1.3]). При цьому домовимося, що $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

**Lemma 4.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$; $\lambda = \pi/h$; $\Phi \in W$. Тоді для довільного сплайну $s \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ і будь-якого відрізку $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$, для якого $b - a \le \pi/\lambda$, виконується нерівність*

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|s(t)|^p\right) dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,\,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.2}$$

*де $m-$ точка локального максимуму сплайну $\varphi_{\lambda,\,r}$, а число $\Theta$ задовольняє умову*

$$\varphi_{\lambda,\,r}(m - \Theta) = \varphi_{\lambda,\,r}(m + \Theta), \quad 2\Theta = b - a.$$

*Зокрема,*

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|s(t)|^p\right) dt \le \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,\,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.3}$$

*де $c-$ нуль сплайну $\varphi_{\lambda,\,r}$.*

**Доведення**. Зафіксуємо сплайн $s \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ і відрізок $[a,\, b]$, які задавольняють умови леми. Доведемо нерівність (2.2). Покладемо $\delta := b - a$. За означенням класу $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ верхня грань (1.10) досягається на деякому відрізку $[\alpha,\, \beta]$. Серед цих відрізків, очевидно, знайдеться такий, що $\beta - \alpha = \delta$. Нерівність (2.2) досить довести для $[a,\, b] = [\alpha,\, \beta]$. Тоді за лемою 1

$$|x(a)| = |x(b)|. \tag{2.4}$$

Через $\overline{x}$ позначимо звуження сплайну $s$ на відрізок $[a,\, b]$, а через $\overline{\varphi}-$ звуження сплайну $A\varphi_{\lambda,\,r}$ на $[m - \Theta,\, m + \Theta]$. Доведемо спочатку нерівність

$$\int_0^{\xi} r^p(\overline{s},\, t)dt \le \int_0^{\xi} r^p(\overline{\varphi},\, t)dt, \quad \xi > 0. \tag{2.5}$$

Переконаємося перш за все в тому, що різниця $\delta(t) := r(\overline{x},\, t) - r(\overline{\varphi},\, t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Для цього зазначимо, по-перше, що

$$\delta(0) \le \|x\|_\infty - A\|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty \le 0 \tag{2.6}$$

за лемою 2. Далі покладемо

$$\mu := \min\{|\overline{x}(t)| :\, t \in [a,\, b]\}, \quad M := \max\{|\overline{x}(t)| :\, t \in [a,\, b]\}.$$

Якщо $M \le |\varphi_{\lambda,\,r}(m+\Theta)|$, то різниця $\delta(t)$ не змінює знак. Нехай $M > |\varphi_{\lambda,\,r}(m+\Theta)|$. Тоді покладемо $C = \max\{\mu,\, |\varphi_{\lambda,\,r}(m + \Theta)|\}$. Внаслідок (2.4) і (2.6) для довільного $z \in (C,\, M)$ існують точки

$$t_i \in [a,\, b], \quad i = 1, ..., m, \quad m \ge 2, \quad y_j \in [m - \Theta,\, m + \Theta], \quad j = 1, 2,$$

такі що

$$z = |\overline{s}(t_i)| = |\overline{\varphi}(y_j)|. \tag{2.7}$$

За лемою 3 сплайн $\varphi_{\lambda,\,r}$ є функцією порівняння для сплайну $s$. Тому для точок $t_i$ і $y_j$, що задовольняють умову (2.7), виконуються нерівності

$$|\overline{s}\,'(t_i)| \le |\overline{\varphi}\,'(y_j)|.$$

Отже, якщо точки $\Theta_1,\, \Theta_2 > 0$ обрані так, що

$$z = r(\overline{s},\, \Theta_1) = r(\overline{\varphi},\, \Theta_2),$$

то за теоремою про похідну перестановки (див., наприклад, [14, твердження 1.3.2])

$$|r'(\overline{s}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{s}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

З цього робимо висновок, що різниця $\delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Те ж саме виконується і для різниці $\delta_p(t) := r^p(\overline{s}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t)$. Розглянемо інтеграл

$$I_p(\xi) := \int\limits_0^{\xi} \delta_p(t)dt.$$

Зрозуміло, що $I_p(0) = 0$ і внаслідок означення (1.9) класу $\sigma^p_{h,r}(A)$ маємо

$$I_p(\xi) = \|s\|_{p,\,\delta} - A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta} \le 0, \quad \xi \ge \delta.$$

Крім того, похідна $I'_p(t) = \delta_p(t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Таким чином, $I_p(\xi) \le 0$ для всіх $\xi \ge 0$ і нерівність (2.5) доведена. З неї, застосовуючи теорему Харді - Літлвуда - Поліа (див., наприклад, [14, твердження 1.3.11]) виводимо нерівність (2.2). Очевидно, що (2.3) є наслідком (2.2).

Лема 3 доведена.

**Corollary 1.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$. Тоді для довільного $q > p$ має місце вкладення*

$$\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A) \subset \tilde{\sigma}^q_{h,r}(A),$$

*де клас $\sigma^p_{h,r}(A)$ визначено рівністю* (1.9).

**Доведення**. Вкладення $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A) \subset \sigma^q_{h,r}(A)$ випливає з означення (1.9) і нерівності (2.2), якщо покласти в ній $\Phi(t) = t^{q/p}$, $q > p$. Доведемо потрібне вкладення $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A) \subset \tilde{\sigma}^q_{h,r}(A)$. Враховуючи (1.10) і означення класу $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ зафіксуємо довільну функцію $\Phi \in W$ і переконаєиося в тому, що для довільного $\delta \in (0,\, h]$ точна верхня грань

$$S_q(\Phi) := \sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi\left(|s(t)|^q\right)dt : \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \beta - \alpha \le \delta\right\}$$

досягається на деякому відрізку. Покладемо $\Phi_1(t) = t^{q/p}$. Тоді $S_q(\Phi) = S_p(\Phi(\Phi_1))$. Очевидно, що суперпозиція функцій класу $W$ є функцією цього класу. Тому вказана точна верхня грань $S_q(\Phi)$ досягається для $s \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ так як у цьому випадку досягається верхня грань $S_p(\Phi(\Phi_1))$.

**3. Основні результати**. Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$. Як і в роботі Боянова і Найденова [4] представимо довжину відрізка $[a,\, b]$ у вигляді

$$b - a = l \cdot h + 2\Theta, \quad l \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \quad 2\Theta \in [0,\, h]. \tag{3.1}$$

Оберемо далі $\lambda = \pi/h$ і $\tau \in \mathbf{R}$ так, шо

$$|\varphi_{\lambda,r}(a + \Theta + \tau)| = |\varphi_{\lambda,r}(b - \Theta + \tau)| = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty\,. \tag{3.2}$$

Очевидно, що $\varphi_{\lambda,\,r}(\cdot + \tau) \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ для довільних $\tau \in \mathbf{R}$ і $p > 0$.

Наступна теорема містить розв'язок задачі (1.5) на класі $\tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$.

**Theorem 1.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$; $\lambda = \pi/h$. Для довільної функції $\Phi \in W$ і будь-якого відрізку $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$*

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\left(|s(t)|^p\right)dt: \quad s \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)\right\} = \int\limits_a^b \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right)dt,$$

*де число $\tau$ означено рівністю* (3.2)*. Зокрема, для довідьного $q \geq p$*

$$\sup\left\{\int\limits_a^b |s(t)|^q dt: \quad s \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)\right\} = \int\limits_a^b |A\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^q dt.$$

**Доведення**. Зафіксуємо довільні сплайн $x \in \tilde{\sigma}^p_{h,r}(A)$ і відрізок $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$. Знову представимо довжину відрізка $[a,\, b]$ у вигляді (3.1). Покладемо $a_k := a + k\pi/n$, $k = 0, 1, ..., l$. За лемою 4

$$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} \Phi(|s(t)|^p)dt \leq \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|A\varphi_{\lambda,r}(t)|^p)dt, \quad k = 0, 1, ..., l-1,$$

і

$$\int\limits_{a_l}^{b} \Phi(|s(t)|^p)dt \leq \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|A\varphi_{\lambda,r}(t)|^p)dt,$$

де $c-$ нуль, $m-$ точка локального максимума функції $\varphi_{\lambda,\,r}$, а число $\Theta$ визначене рівністю (3.1). Таким чином,

$$\int\limits_a^b \Phi(|s(t)|^p)dt \leq \; l \cdot \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|A\varphi_{\lambda,r}(t)|^p)dt + \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|A\varphi_{\lambda,r}(t)|^p)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right)dt,$$

причому рівність тут досягається для сплайну $s(t) = A\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)$. Перше твердження теореми доведено. Поклавши в ньому $\Phi(t) = t^{q/p}$, отримаємо друге твердження.

Теорема 1 доведена.

Для $r \in \mathbf{N}$; $h$, $p$, $A > 0$; $\lambda = \pi/h$ покладемо

$$\sigma_{h,r}(A,p) := \left\{s(\cdot+\tau) : s \in \sigma_{h,r} : L(s)_p \leq AL(\varphi_{\lambda,r})_p\,,\ \tau \in \mathbf{R}\right\},$$

де величина $L(s)_p$ визначена рівністю (1.4).

**Theorem 2.** *Нехай* $r \in \mathbf{N}$*;* $h$, $p$, $A > 0$. *Тоді*

$$\sigma_{h,r}(A,p) \subset \sigma^p_{h,r}(A),$$

*де клас* $\sigma^p_{h,r}(A)$ *визначено рівністю* (1.9).

**Доведення**. Зафіксуємо сплайн $s \in \sigma_{h,r}(A,p)$ і покладемо $\lambda = \pi/h$. Доведемо нерівність

$$\|s\|_{p,\,\delta} \le A\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta}. \tag{3.3}$$

Для сплайнів класу $\sigma_{h,r}(A,p)$ в работі [15, теорема 2] доведено, що

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|s(t)|^p\right)dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right)dt, \quad \Phi \in W, \tag{3.4}$$

для довільного відрізку $[a,\,b]$, для якого $b-a \le \pi/\lambda$, де $m-$ точка локального максимуму функції $\varphi_{\lambda,r}$, а $2\Theta = b-a$ . Поклавши $\Phi(t) = t$ в нерівності (3.4), отримаємо оцінку (3.3), з якої внаслідок означення (1.9) випливає потрібне вкладення.

Теорема 2 доведена.

В наступній теоремі наведено розв'язок задачі (1.7) на класі $\sigma^p_{h,r}(A)$.

Нехай $k,\,r \in \mathbf{N}$, $k \le r$; $h, A, p > 0$; $[a,\,b] \subset \mathbf{R}$. Знову представимо довжину відрізка $[a,\,b]$ у вигляді (3.1). Нехай далі $\lambda = \pi/h$, а $\tau_k \in \mathbf{R}$ оберемо так, шо

$$|\varphi_{\lambda,r-k}(a+\Theta+\tau_k) = |\varphi_{\lambda,r-k}(b-\Theta+\tau_k)| = \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty. \tag{3.5}$$

**Theorem 3.** *Нехай* $k,\,r \in \mathbf{N}$, $k \le r$*;* $h, A, p > 0$*;* $\lambda = \pi/h$. *Тоді для довільної функції* $\Phi \in W$ *і будь-якого відрізку* $[a,\,b] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\left(|s^{(k)}(t)|\right)dt: \quad s \in \sigma^p_{h,r}(A)\right\} = \int\limits_a^b \Phi\left(|A\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau_k)|\right)dt,$$

*де число* $\tau_k$ *визначено рівністю* (3.5). *Зокрема, для довільного* $q \ge 1$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b |s^{(k)}(t)|^q dt: \quad s \in \sigma^p_{h,r}(A)\right\} = \int\limits_a^b |A\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau_k)|^q dt.$$

**Доведення**. Зафіксуємо довільні сплайн $s \in \sigma^p_{h,r}(A)$ і відрізок $[a,\,b] \subset \mathbf{R}$. Доведемо перше твердження теореми 3. За лемою 2

$$\|s\|_\infty \le A\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{3.6}$$

Звідси внаслідок нерівності Магарил-Ілляєва [12]:

$$\|s^{(i)}\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r-i}\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty} \cdot \|s\|_\infty, \quad i = 1, ..., r, \quad s \in \sigma_{h,r},$$

маємо

$$\|s^{(i)}\|_\infty \le A\|\varphi_{\lambda,r-i}\|_\infty, \quad i = 1, ..., r. \tag{3.7}$$

Тому для довільного відрізку $[\alpha,\, \beta]$, для якого

$$|s^{(k)}(t)| > 0, \quad t \in (\alpha,\, \beta),$$

отримуємо

$$\int\limits_\alpha^\beta |s^{(k)}(t)|dt = |s^{(k-1)}(\beta) - s^{(k-1)}(\alpha)| \le 2\|s^{(k-1)}\|_\infty \le$$

$$\le 2A\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\|_\infty = AL(\varphi_{\lambda,r-k})_1,$$

де величина $L(x)_p$ означена рівністю (1.4). Звідси випливає, що

$$L(s^{(k)})_1 \le AL(\varphi_{\lambda,r-k})_1.$$

Для сплайнів $s$ класу $\sigma_{h,r}$, що задовольняють такому обмеженню, і довільного відрізку $[a,\, b]$ в работі [15, теоремы 2] отримана оцінка

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|s^{(k)}(t)|\right) dt \le \int\limits_a^b \Phi\left(A|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau_k)|\right) dt, \quad \Phi \in W,$$

де $\tau_k$ означено співвідношенням (3.5). Ця оцінка є точною і рівність в ній досягається для сплайну $s(t) = A\varphi_{\lambda,r}(t + \tau_k)$. Перше твердження теоремы 3 доведено. Поклавши $\Phi(t) = t^q$, отримаємо друге твердження.

Теорема 3 доведена.

**Зауваження 1**. З теореми 2 випливає, що в теоремі 3 задача (1.7) розв'язана на ширшому класі, ніж в теоремі 2 работи [15], де вона розв'язана на класі $\sigma_{h,r}(A, p)$.

Як добре відомо, довжина дуги $l[a, b]$ графіка функції $x \in L^1[a, b]$ обчислюється за формулою $l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + x'(t)^2}dt$. Ясно, що для функції $\Phi_0(t) = \sqrt{1 + t^2}$ виконується включення $\Phi_0 \in W$. Тому, поклавши $\Phi = \Phi_0$ і $k = 1$ в першому твердженні теореми 3, отримаємо розв'язок задачі Ердеша про характеризацію сплайну класу $\sigma^p_{h,r}(A)$, графік якого на заданому відрізку має максимальну довжину.

**Corollary 2.** *Нехай $r \in \mathbf{N}$; $h, A, p > 0$; $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$.*

*Серед усіх сплайнів класу $\sigma^p_{h,r}(A)$ найбільшу довжину дуги на заданому відрізку $[a, b]$ має графік сплайну $A\varphi_{\lambda,r}(t+\tau_1)$, де число $\tau_1$ таке ж, як і в теоремі 3.*

**Зауваження 2**. З теореми 2 випливає, що в наслідку 2 задача Ердеша розв'язана на бідьш широкому класі, ніж в теоремі 2 работи [15], в якій вона розв'язана на класі $\sigma_{h,r}(A, p)$.

## References

1. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для производных и их приложения [Текст]/ Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// К.: Наукова думка, 2003. – 590 с.

2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям [Текст]/ В. Ф. Бабенко// Укр. мат. журн. – 2000. – 52, 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences [Text] / M. K. Kwong, A. Zettl [Text]// Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 150 p. (Lecture Notes in Math. – V. 1536).
4. *Bojanov B.* An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos [Text] / B. Bojanov, N. Naidenov// Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – 78. – P. 263 – 280.
5. *Erdös P.* Open problems// In: Open Problems in Approximation Theory [Text]/ P. Erdös// SCT Publishing, Singapur. – 1994. – P. 238 – 242.
6. *Pinkus A.* Shisha O., Variations on the Chebyshev and $L^q$ Theories of Best Approximation [Text] / A. Pinkus, O. Shisha// Journal of Approximation Theory. – 1982. – 35, 2. – P. 148-168.
7. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси [Текст] / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, 6. – С. 765 – 776.
8. *Kofanov V. A.* Some extremal problems various metrics and sharp inequalities of Nagy-Kolmogorov type [Text] / V. A. Kofanov// East. J. Approxim. – 2010. – 16, 4. – С. 313 – 334.
9. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сранения [Текст] /В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, 7. – С. 969 – 984.
10. *Кофанов В. А.* Задача Боянова-Найденова для дифференцируемых функций на оси и неравенства разных метрик [Текст] /В. А. Кофанов // Укр. мат. журн.– 2019. – 71, 6. – С. 786 – 800.
11. *Кофанов В. А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций [Текст] /В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, 2. – С. 202 – 212.
12. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О наилучших приближениях сплайнами функциональных классов на оси [Текст] /Г. Г. Магарил-Ильяев// Труды матем. инст. им. Стеклова. – 1992. – 194. – С. 153 – 154.
13. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале [Текст] / А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – 470 с.– С. 252–263.
14. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун// К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.
15. *Кофанов В. А.* Неравенства для непериодических сплайнов на действительной оси и их производных [Текст] /В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, 2. – С. 216 – 225.

*Received*: 30.01.2019. *Accepted:* 10.06.2019