

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдання очного туру

Всеукраїнської олімпіади з математики

для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти

1. Спростити вираз

$$A(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1,$$

якщо $x \in [-2; 0]$.

Відповідь: 3.

Розв'язання. На проміжку $[-2; 0]$

$$A(x) = |x + 3| + |x - 1| - 1 = (x + 3) - (x - 1) - 1 = 3.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{3^{2x}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $-1, 5$.

3. Сторони трикутника дорівнюють 4, 13 та 15. Знайти найменшу висоту трикутника.

Відповідь: 3,2.

Розв'язання.

З одного боку площа трикутника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — сторони трикутника, а $p = (a + b + c)/2$. З іншого боку площа трикутника $S = ah_a/2$, де a — сторона трикутника, h_a — висота трикутника, опущена на сторону a .

4. Знайти площу фігури, координати точок якої задовольняють нерівності

$$|x| \leq y \leq 1.$$

Відповідь: 1.

Розв'язання. Фігурою, про яку йдеться, є трикутник з вершинами в точках $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$.

5. Обчислити $\log_8 10 \cdot \log_{10} 12 \cdot \log_{12} 14 \cdot \log_{14} 16$.

Відповідь: 4/3.

Розв'язання.

Перейти у логарифмах до основи 2.

6. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)^2(x+3)}{x-5}}.$$

Відповідь: $(-\infty, 3] \cup \{2\} \cup (5, +\infty)$.

Розв'язання. Область визначення функції $f(x)$ — множина точок, що задовольняє нерівність $(x-2)^2(x+3)/(x-5) \geq 0$.

7. Розв'язати нерівність

$$\frac{14}{x} < x + 5.$$

Відповідь: $(-7; 0) \cup (2; +\infty)$.

Розв'язання. Скориставшись методом інтервалів, отримаємо $(-7; 0) \cup (2; +\infty)$.

8. Знайти відстань від середини відрізка з кінцями $A(1; 3; 5)$ і $B(3; 5; 7)$ до площини xy .

Відповідь: 6.

Розв'язання. Середина C відрізка з кінцями $A(1; 3; 5)$ і $B(3; 5; 7)$ має координати $((1 + 3)/2, (3 + 5)/2, (5 + 7)/2) = (2; 4; 6)$. Тому шукана відстань дорівнює 6.

9. Площа ромба становить 156 кв. одиниць. Радіус кола, вписаного в ромб, дорівнює 6. Знайти довжину меншого з відрізків, на які точка дотику кола ділить сторону ромба.

Відповідь: 4.

Розв'язання. Нехай O — центр кола вписаного у ромб. Сторона ромба дорівнює $156/12=13$. Відрізок, що з'єднує точку O і точка дотику кола, є висотою $h = 6$, опущеною з вершини прямого кута на гіпотенузу довжиною 13. Тому, якщо x — довжина меншої сторони, то $6 = \sqrt{x \cdot (13 - x)}$. Звідси $x = 4$.

10. У піраміді всі грані — правильні трикутники зі стороною 1. Знайти об'єм піраміди.

Відповідь: $\sqrt{2}/12$.

Розв'язання. Висота трикутника ABC , що є основою піраміди, дорівнює $\sqrt{3}/2$. Площа S трикутника ABC дорівнює $\sqrt{3}/4$.

Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , дорівнює $1/\sqrt{3}$. Висота піраміди $H = \sqrt{1 - (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$.

Об'єм піраміди $V = HS/3 = \sqrt{2/3} \cdot (\sqrt{3}/4)/3 = \sqrt{2}/12$.