

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Петров Олександр Дмитрович

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛІВ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ

113–Прикладна математика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О.Д.Петров

Науковий керівник Черняков Юрій Абрамович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2019

АНОТАЦІЯ

Петров О.Д. Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,

Дніпро, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню поведінки матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю. Пам'яттю форми називають властивість деяких матеріалів накопичувати деформації визначеної величини при навантаженні, а потім через петлю гістерезиса повертатися у вихідне положення після розвантаження. Основним механізмом при цьому є зворотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може мати місце при порівняно незначній зміні температури. Таке перетворення може бути викликано зміною температури або зміною напруги.

До матеріалів, які проявляють пам'ять форми, псевдо-пружність та псевдо-пружно-пластичність зазвичай відносять наступні: NiTi AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa .

У роботі виконано аналітичний огляд феноменологічних та структурних моделей. Сплави, які мають властивість пам'яті форми, псевдо-пружність та псевдо-пружно-пластичність являють собою особливу групу сплавів, що володіють здатністю відновлювати колишню форму навіть після досить великих деформацій. Якщо при низьких температурах матеріал з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю деформується пластично, то при цьому деформація може бути поновлена за допомогою порівняно незначного збільшення температури. Механізмом

такого поновлення є перетворення з мартенситної фази у початкову аустенітну фазу. Мартенситні перетворення зазвичай діляться на дві групи термопружні і нетермопружні.

Нетермопружні перетворення здійснюються головним чином в сплавах заліза і пов'язані з немобільними границями вихідної фази мартенситу, скріпленими постійними дефектами і переходять в наступне створення ядра і його збільшення. Такі перетворення кристалографічно незворотні в тому сенсі, що мартенсит не може повернутися до вихідної фази орієнтації.

Термопружні мартенситні перетворення пов'язують з мобільними межами між вихідною і мартенситною фазою. Межі між ними здатні до зворотного руху за рахунок усадочної деформації пластин мартенсита.

Ключова характеристика матеріалів з пам'яттю форми, псевдопружністю та псевдо-пружно-пластичністю - виникнення мартенситного фазового перетворення між фазою аустеніту і різними варіантами низькотемпературної, низько симетричної мартенситної фази. Мартенситне перетворення являє собою головним чином перетворення зсуву, яке позбавлено дифузії при фазових переходах в твердому тілі. Воно супроводжується створенням ядра і збільшенням мартенситної фази з вихідної фази аустеніту.

Такі характеристики роблять матеріали з пам'яттю форми, псевдопружністю та псевдо-пружно-пластичністю зручними для використання в радіоелектронних елементах конструкцій і пристроях або в якості складових частин у деяких передових композиційних матеріалах. Сплав NiTi застосовується в більшості випадків через його пам'ять та структурні властивості.

Перші матеріали з пам'яттю форми, псевдопружністю та псевдо-пружно-пластичністю були розроблені в середині минулого століття, однак точних і надійних визначальних моделей континуального рівня, необхідного для практичних застосувань матеріалів поки не існує. Зв'язок

між мікроскопічною і макроскопічною поведінкою таких матеріалів складний і досі не розроблений до необхідного ступеня. Частково це пов'язано з досить сильною залежністю механічної реакції на температуру, швидкість навантаження, діапазон деформації, геометрію досліджуваного тіла, термомеханічну історію, природу навколишнього середовища, а також взаємодії між цими параметрами. Такі сплави, як NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd та інші можуть відновлювати деформації до 3% .

За результатами аналізу встановлено, що в даний час існує цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки сплавів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю. Більшість з них будуються на підставі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосереднє описати експериментальні дані, отримані на різних макрозразках при простому і складному навантаженні. Однак, як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому.

Новизна запропонованого у дисертації підходу полягає в формулюванні феноменологічної моделі для опису властивостей матеріалів з пам'яттю форми і термо-псевдо-пружно-пластичністю в точці з урахуванням тепла, що виділяється в процесі фазового переходу. Деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, деформації, викликаній температурними змінами і пластичної деформації. Остання в дисертаційній роботі визначається за допомогою співвідношень теорії течії. При цьому передбачається, що властивості матеріалу залежать від температури. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма псевдо-пружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних або нелінійних ділянок.

Таке трактування теорії призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для опису термомеханічного поведінки зразків різної форми вимагає рішення граничної задачі з урахуванням розвитку

фронту деформації фазового перетворення. У цій моделі враховується не тільки температура навколишнього середовища, але і тепло, що виділяється в тілі при фазовому переході. Це дозволило описати цілий ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження, включаючи температурний і силовий вплив. Встановлено конкретні залежності для механічних параметрів.

На підставі даного підходу показано, що межа розділу фаз переміщається з постійною для обраної температури швидкістю. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Користуючись узагальненими фізичними співвідношеннями розширено межі застосування відомого методу покомпонентного розщеплення. Розроблено новий варіант ефективного методу розв'язання нестационарних просторових задач термомеханіки у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу. Метод засновано на використанні ідеї розщеплення повної системи рівнянь за геометричними властивостями та застосуванні для апроксимації невідомих величин та їх похідних по координатах двовимірних напружених сплайнів. Такий підхід дозволив підвищити до четвертого порядку точність апроксимації методу. Це дало можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницеvim методом при досягненні однакової точності обчислень. Для підвищення до третього порядку апроксимації метода за часом запропонована ітерційна процедура, що збігається. Початковим наближенням для неї будуть результати, обчислені за допомогою формул явної схеми методу розщеплення.

Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів. У разі застосування неявних схем методу розщеплення за геометричними властивостями встановлена збіжність відповідної ітераційної процедури.

Поставлено і на основі запропонованого методу розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, псевдо-пружності, термо-псевдо-пружно-пластичності.

Виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів, та їх форми і розмірів.

Результати дисертаційної роботи використані в рамках досліджень, які здійснені у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за темами держбюджетних робіт № 1-301-15 «Розробка методик розв'язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (№ ДР 015U002393) та Дніпровському державному технічному університеті по держбюджетній науково-дослідницькій темі «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379, 2013-2015 рр.)

Також результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара при викладанні навчальної дисципліни «Теорія пластичності» і «Нелінійна механіка руйнування», Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

Ключові слова: пам'ять форми, фазові переходи, теорія псевдо-пружно-пластичності, теорія течії, двовимірні сплайни.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України,

які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

1. Petrov A. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / A.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko, K.Demichev, V.Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.

Статті у наукових виданнях інших держав:

2. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov // Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – P. 27-29.

3. Steblyanko P. Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / P.Steblyanko, Y.Chernyakov, A.Petrov, V.Loboda // Structural Integrity, Volume 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019.- P. 205-208.

Монографія:

4. Демічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е.Демічев, П.О.Стеблянюк, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров - К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.

Статті у наукових фахових виданнях України:

5. Petrov A. Behavior of material with a memory of form and pseudo-elasticity under nonstationary loading of the body / A.Petrov // Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Фізико-математичні науки. - 2017. - №1. - С. 37-42.

6. Шевченко Ю.Н. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности / Ю.Н. Шевченко, П.О. Стеблянко, А. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 22.- Дніпропетровськ, 2014.- С. 250-264.

7. Черняков Ю.А. Модель поведения псевдоупругого материала при нестационарном нагружении / Ю.А.Черняков, П.А.Стеблянко, А.Д.Петров // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. № 2. 2017. – С. 297-303.

8. Петров А. Феноменологическая модель поведения псевдоупруго-пластического материала при нестационарном нагружении / А. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 28.- Дніпро, 2018.- С. 133-141.

9. Петров О.Д. Комп'ютерне моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу при розтягуванні / О.Д. Петров // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання; матеріали статей МНПК (ISBN 978-617-7468-26-3) - 2018. - Івано-Франківськ.- 2018.- С. 234-237.

Статті у наукових фахових виданнях України, що додатково відображають результати дисертації

10. Петров А. Расчет полей пластических деформаций при термосиловом нагружении / А.Петров // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Випуск 1(24).– Дніпродзержинськ, 2014. – С. 211-216.

11. Петров А. Термо-напружено-деформований стан стрижня з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень / А.Петров, Ю.Черняков // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Випуск 1(26), додаток, розділ Математичні проблеми технічної механіки . –Дніпродзержинськ, 2015. – С. 26-36.

12. Петров А.Д., Экспериментальное обоснование варианта модели поведение материала с памятью формы и псевдоупругостью / А.Д.Петров, К.Э. Демичев, П.А.Стеблянко, Ю.А.Черняков // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С. 81-87.

Тези наукових доповідей

13. Петров О.Д. Феноменологічна модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалу з пам'яттю форми / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наукових праць / за заг.ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вересень 22–25 2018. – Т.1. – Ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 .- С. 188-189 .

14. Shevchenko Yu. Methods of calculation in non-stationary problems of theory thermal-plasticity / Yu.Shevchenko, P.Steblyanko, A.Petrov // Applied problems of the fluid mechanics and heat and mass transfer, November 6-8 2014, Dnipropetrovsk. - 2014.- P. 9-11.

15. Петров А. Связанная нестационарная задача термопластичности для срединного слоя / А. Петров, Ю.Черняков, П. Стеблянко // VII International Conference «Modern achievements of science and education», August 25 – September 01 2012 p., Opatija (Croatia). – P. 20-22.

16. Петров А. Методи розв'язання нестационарних задач для складових пластин / А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // IX МНК Математичні проблеми механіки неоднорідних структур Інститут проблем

механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, вересень 15–19 2014.– Львів, 2014. – С.135-137.

17. Петров А. Определение перемещений точек тела в некоторых задачах механики путем непосредственного интегрирования / А.Петров, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 13–15 2011. Том 2. – Дніпропетровськ –Дніпродзержинськ. – 2011. – С. 40-42.

18. Петров А. Связанная задача термо-упруго-пластичности с фазовым переходом/ А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 16–19 2012. Том 1 .– Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. – 2012. – С. 52-54.

19. Петров А. Связанная контактная задача термо-упруго-пластичности / А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 15–18 2013. Том 2. – Дніпродзержинськ. – 2013. – С. 14-18.

20. Петров А. Расчет полей пластических деформаций при термосиловом нагружении / А.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 14–17 2014. Том 2. – Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. –2014.–С. 39-42.

21. Стеблянко П. Описание термомеханической поверхности материала при помощи двумерного сплайна / П.Стеблянко, А.Галишин, А.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 14–17 2015 .– Дніпродзержинськ. – 2015. – С. 126.

22. Петров А. Моделирование псевдоупругого поведения сплавов с памятью формы/ А.Д.Петров, Ю.А.Черняков // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–21 2016. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ. – 2016. – С. 121.

23. Черняков Ю.А. Модель поведінки матеріалу з пам'яттю форми і псевдо пружністю/ Ю.А.Черняков, О.Д.Петров, П.О.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–20 2017.– Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. – 2017. – С. 14-15.

24. Демічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е.Демічев, П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017 . Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9-12.

25. Стеблянко П.О. Числові методи в просторових стаціонарних і нестаціонарних задачах теорії термопружнопластичності / П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 16–19 2018. – Київ, Черкаси, Кам'янське. – 2018. – С. 14-15.

26. Петров О.Д. Модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалів з зубом плинності / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики, квітень 15–18 2019. – Дніпро, Кам'янське. – 2019. – С. 6-7.

ABSTRACT**Petrov O.D. MODELING OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR
OF MATERIALS WITH MEMORY FORMS**

Dissertation for the degree of a doctor of philosophy 113 – Applied Mathematic, Dniprovsk National University named after Oles Honchar, Dnipro, 2019.

The dissertation is devoted to the study of the behavior of shape memory alloys and pseudo-elastic-plasticity. Memory form is the property of some materials to accumulate certain amount of deformation under loading and return to the original state when unloaded (through the loop of hysteresis). The main mechanism of such behavior is the inverse martensitic transformation between the phases of a solid body which occurs at room temperature. Such transformation may be caused by temperature or stress changes. The shape memory alloys are also characterized by nonlinear mechanical behavior, high internal damping and high volatility.

Typically, materials that demonstrate shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic-plasticity include NiTi, AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa alloys.

This paper investigates the phenomenological and structural models of shape memory alloys behavior. Alloys with the property of shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elasto-plasticity are a special group of alloys that have the ability to restore the initial state even after significant deformations. If the material with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic-plasticity deforms plastically at low temperatures, this deformation can be restored by a relatively small temperature increase. The mechanism of such behavior is the transformation from the martensitic phase into the initial austenitic phase. Martensitic transformations are usually classified into two groups: thermoelastic and non-thermoelastic ones.

Non-thermoelastic transformations mainly occur in iron alloys and are related to the non-mobile boundaries of the initial phase of martensite fixed by constant defects which leads to the nucleation and it grows. Due to the transformation of the austenite nucleus in the process of conversion (martensite to austenite) such transformations are crystallographically irreversible as martensite cannot return to the initial phase of orientation.

Thermo-elastic martensitic transformations are associated with the mobile boundaries between the initial and the martensitic phases. The boundaries between them are capable of the reverse motion in the reverse transformation due to the shrinkage deformation of the martensite plates.

The key characteristic of materials with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic-plasticity is the emergence of martensitic phase transformation between the austenite phase and various low-temperature, low-symmetric martensitic phases. The martensitic transformation is mainly a shift of the displacement without diffusion during phase transitions in a solid. It is accompanied by nucleation and increasing the martensitic phase from the initial austenite phase.

Such characteristics make materials with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic plasticity convenient for use in electronic devices and some advanced composite materials components. In most cases NiTi alloy is used due to its memory and structural properties.

The first materials with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic plasticity were developed in the middle of the last century, but precise and reliable defining models of the continual level required for practical applications of these materials do not exist yet. The connection between microscopic and macroscopic behavior of such materials is complex and has not been developed to a required degree yet. This is explained by a strong dependence of the mechanical response to the temperature, the speed of loading, the range of deformation, the geometry of the body under investigation, the thermo-mechanical history, the nature of the environment, and the interaction between these parameters.

Alloys such, as NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd, etc. have the ability to recover deformations up to 3%. Other important characteristics of some of these materials are internal damping, pseudo-elasticity and a high yield point of the material.

According to the results of the analysis, it is established that most of the models existing now for describing the thermo-mechanical behavior of alloys with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic plasticity are built on the basis of classical representations directly describing the experimental data obtained on various macroscopic samples under simple and complex loadings. However, experimental studies demonstrate that the behavior of the sample as a whole differs from its behavior at a point in general case.

The novelty of the proposed approach is to formulate a phenomenological model for describing the properties of materials with memory shape and thermo-pseudo-elastic-plasticity at the point, taking into account the heat released during the phase transition. Deformation at the point is represented as the sum of the elastic components, deformation jump during phase transition, plastic deformation from the theory of flow, and deformation caused by temperature changes. It is assumed that the properties of the material depend on temperature. To describe the elastic deformation and deformation of the phase transformation, a diagram of an elastic material consisting of three rectilinear (nonlinear) sections is used.

Such interpretation of the theory gives an unstable stress-strain diagram and for the description of the thermo-mechanical behavior of samples of various forms requires to solve the boundary problem taking into account the development of the transformation deformation front. The proposed model takes into account not only the temperature of the environment, but also the heat released during the phase transition. This interpretation allows us to describe a number of experimental data on different samples under different loading conditions, including temperature and mechanical loadings. Specific dependencies for mechanical parameters are established. It is shown that the phase separation boundary is moving with a constant velocity for the selected temperature. It is established that classical

material diagrams represent a curve enveloping a family of diagrams of a material that are constructed for certain laws of velocity change of the front of the breakdown of deformations.

The description of these phenomena in modern literature is devoted to many works. In these works, we usually consider model, by which the behavior of materials with memory of form and pseudo-elasticity is studied, and corresponding experiments and tasks for bodies of a simple form. In fact, the problem is reduced to the analysis of the phenomena described at the point of the body. For completeness of the analysis it is necessary to consider the process of development of deformation in spatial bodies, taking into account the speed of loading and temperature.

Using the generalized physical relationships the limits of application of the method of component splitting are expanded. A new version of an effective method for solving non-stationary spatial problems of thermo-mechanics in the case of deformation of a thermo-pseudo-elastic-plastic material based on the use of the idea of splitting a complete system of equations by geometric properties is developed. Two-dimensional stressed splines are applied for approximation of unknown values and their derivatives in coordinates. This approach allows increasing the accuracy of the method approximation to the fourth order. This allows us to choose a larger in coordinate grid size and achieve the same accuracy of the calculations as when employing the finite-difference method. In order to increase the method approximation to the third order in time a converging iteration procedure is proposed. The initial approximations for this procedure are the results calculated using the explicit scheme of the splitting method.

The efficiency of the generalized method is studied and an estimation of the accuracy of the obtained results is carried out. In the case of implicit schemes of the splitting by geometric properties method the convergence of the corresponding iteration procedure is established.

A new class of problems of nonstationary deformation of spatial bodies from shape memory, pseudo-elasticity, and thermo-pseudo-elastic-plasticity alloys

is solved on the basis of the proposed method.

It is detected that new mechanical effects are related to the local heat dissipation in the process of phase transformations in the bodies of pseudo-elastic-plastic materials, their shape and size. The results of the dissertation work are used in the framework of research carried out at the Dnipro National University named after Oles Honchar as a part of a state budget project No. 1-301-15 "Development of methods for solving fundamental problems of strength and destruction of piecewise-homogeneous bodies made up of intellectual materials" (№ 015U002393) and Dniprovsky State Technical University on the state budget scientific research theme "Methods of studying the durability of structural elements of functional-non-uniform materials, sensitive to the thermo-stressed state form" (state registration № 0113U000379, 2013-2015.)

The results of the dissertation work are also used in the educational process in Dnipro National University named after Oles Honchar when teaching the courses "Theory of plasticity" and "Nonlinear fracture mechanics", Dniprovsky State Technical University in the teaching of the discipline "Mathematical modeling of technological processes", National Aviation University when teaching the courses "Modern Computer Technologies in Physics" and "Methods of Mathematical Physics".

Keywords: - shape memory, phase transitions, the theory of pseudo-elastic-plasticity, theory of flow, two-dimensional splines.

List of applicant publications

The main scientific results of the dissertation

Articles in scientific professional editions of Ukraine, which are included in international science-computer databases:

1. Petrov A. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / A.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko, K.Domichev, V.Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.

Articles in scientific publications of other states:

2. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov // Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – P. 27-29.

3. Steblyanko P. Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / P.Steblyanko, Y.Chernyakov, A.Petrov, V.Loboda // Structural Integrity, Volume 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019.- P. 205-208.

Monograph:

4. Domichev K.E. Mathematical modeling of thermomechanical processes in elastic-plastic cylindrical bodies / K.E.Domichev, P.A.Steblyanko, Yu.A. Chernyakov, A.D.Petrov - Kyiv: Publishing House of Kyiv International University (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 p.

Articles in scientific specialized editions of Ukraine:

5. Petrov A. Behavior of material with a memory of form and pseudo-elasticity under nonstationary loading of the body / A.Petrov // Visnyk Natsional University of Cherkassy named after Bohdan Khmelnytsky. Fizyko-matematychni nauky. - 2017. - №1. - P. 37-42.

6. Shevchenko Yu.N. Numerical methods in nonstationary problems of the theory of thermoplasticity / Shevchenko Yu., P.A.Steblyanko, A.D.Petrov // Problems of computational mechanics and structural strength. Zbirnik naukovih prats. - Vipusk 22.-Dnipropetrovsk, 2014.- P. 250-264.

7. Chernyakov Yu.A. Model of behavior of psevdoelasticity material under nonstationary loading / Yu.A. Chernyakov, P.A.Steblyanko, A.D.Petrov // Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky. - 2017. - №2. - P.297-303.

8. Petrov A. Phenomenological model of the behavior of a pseudo-elastic-plastic material under unsteady loading /A.Petrov// Problems of computational mechanics and structural strength. Zbirnik naukovih prats. - Vipusk 28.-Dnipro, 2018.- P. 133-141.

9. Petrov A.D. Computer modeling of the shearing behavior of trilinear two-phase material during stretching / A.D.Petrov // Information Technologies and Computer Modeling; materials of articles Annual Intern. Scientific Conf. (ISBN 978-617-7468-26-3) - 2018. - Ivano-Frankivsk. – 2018. – P. 234-237.

Articles in scientific professional editions of Ukraine, which additionally reflect the results of the dissertation

10. Petrov A. Calculation of fields plastic deformation at thermopower loading / A.Petrov // Zbirnik naukovih prats Dniprodzerzhinsk state technical university. № 1(24).– Dniprodzerzhinsk, 2014. – P. 211-216.

11. Petrov A. The thermo-stress-deformed state of a bar is from heterogeneous material at presence of phase / A.Petrov, Yu.Chernyakov // Zbirnik naukovih prats Dniprodzerzhinsk state technical university. № 1(26), appendix,

section Mathematical Problems of Technical Mechanics. – Dniprodzerzhinsk, 2015. – P. 26-36.

12. Petrov A.D. Experimental substantiation of the model version of the behavior of the material with shape memory and pseudo-elasticity / A.D.Petrov, K.E.Domichev, P.A.Steblyanko, Yu.A. Chernyakov // Modeling and Information Technology: Zbirnik naukovih prats Institute of Modeling Problems in Power Engineering G.E.Puhov NAS of Ukraine, №80. –2017. – P. 81-87.

Abstracts of scientific reports

13. Petrov A.D. Phenomenological model of thermo-elastic-plastic behavior of material with memory of form / A.D.Petrov, Yu.A.Chernyakov, P.A.Steblyanko // Modern Problems of Mechanics and Mathematics: Sb. scientific works / for zag.red. A.M. Samoilenko and R.M. Kushnir // Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics named by Ya.S.Pistrigach NAS of Ukraine, September 22–25 2018. Vol.1: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 . – P. 188-189.

14. Shevchenko Yu. Methods of calculation in non-stationary problems of theory thermal-plasticity / Yu.Shevchenko, P.Steblyanko, A.Petrov // Applied problems of the fluid mechanics and heat and mass transfer, November 6–8 2014.- Dnipropetrovsk. - 2014.- P. 9-11.

15. Petrov A. The associated problem of thermo-elastic-plasticity for a three-layer body / A.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko // Zbirnik prats International Scientific Conference "Science and Education", August 25 - September 1 2012, Opatija (Croatia). –P. 20-22.

16. Petrov A. Methods of solving non-stationary problems for composite plates / A. Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko // IX Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Mechanics of Inhomogeneous Structures. Institute of Problems of Mechanics and Mathematics named by. Ya.S.Pistrigach NAS of Ukraine, September 15–19 2014. - Lviv, 2014. – P.135-137.

17. Petrov A. Determining the movement of body points in some problems of mechanics by direct integration / A.D.Petrov, P.Steblyanko // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 13–15 2011. Vol. 2.– Dnipropetrovsk – Dniprodzerzhinsk. – 2011. – P. 40 - 42.

18. Petrov A. The related problem of thermo-elastic-plasticity with phase transition / A.D.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 16–19 2012. Vol. 1.– Dnipropetrovsk – Dniprodzerzhinsk. – 2012. – P. 52-54.

19. Petrov A. Associated contact problem of thermo-elastic-plasticity / A.D.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 15–18 2013. Vol. 2. – Dniprodzerzhinsk. – 2013. – P. 14-18.

20. Petrov A. Calculation of plastic deformation fields under thermosilage /A.Petrov// Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 14–17 2014. Vol. 2. Dnipropetrovsk – Dniprodzerzhinsk. – 2014. – P.39-42.

21. Steblyanko P. Description of the thermomechanical surface of the material using a two-dimensional spline / P.Steblyanko, A.Galishin, A.Petrov // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 14–17 2015. – Dniprodzerzhinsk. – 2015. – P. 126.

22. Petrov A. Modeling of pseudoelastic behavior of alloys with shape memory / A.D.Petrov, Yu.A.Chernyakov // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 18–21 2016. – Dniprodzerzhinsk, Dnipropetrovsk, Kyiv. – 2016. – P. 121.

23. Chernyakov Yu.A. Model behavior of material with memory of form and pseudo elasticity / Yu.A.Chernyakov, A.D.Petrov, P.A.Steblyanko // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 18–20 2017. – Dnipropetrovsk – Dniprodzerzhinsk. – 2017. – P. 14-15.

24. Domichev K.E. Analysis of instrumental means of computer modeling behavior of elastic-plastic bodies / K.E.Domichev, P.A.Steblyanko,

Yu.A.Chernyakov, A.D.Petrov // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, November 20–22 2017. Vol. 2. – Dnipro, Kamianske. – 2017. – P. 9-12.

25. Steblyanko P.O. Numerical methods in spatial stationary and non-stationary problems of the theory of thermoplastic plasticity / P.O.Steblyanko Yu.A.Chernyakov, O.D.Petrov // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics, April 16–19 2018. – Kyiv, Cherkassy, Kamianske. – 2018. – P. 14-15.

26. Petrov O.D. Model of thermo-elastic-plastic behavior of materials with tooth fluidity / O.D.Petrov, Yu.A.Chernyakov, P.O.Steblyanko // Annual Intern. Scientific Conf. Mathematical Problems of Technical Mechanics and Applied Mathematic, April 15–18 2019. – Dnipro, Kamianske. – 2019. – P. 6-7.

ЗМІСТ

Умовні позначення та скорочення	24
ВСТУП.....	25
РОЗДІЛ I. Питання поведінки матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю	32
1.1. Основні моделі фазових перетворень.....	32
1.2. Експериментальні дослідження сплавів при наявності фазових переходів.....	36
1.3. Визначальні співвідношення для матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю.....	38
1.4. Комп'ютерні системи аналізу і методи розв'язання задач термопружнопластичності	40
1.5 Висновки до першого розділу	43
РОЗДІЛ II. Феноменологічна модель для матеріалів з пам'яттю форми.....	44
2.1. Феноменологічна модель.....	44
2.2. Експериментальне обґрунтування моделі.....	53
2.3. Узагальнення фізичних співвідношень.....	56
2.3.1 Теорія малих пружно-пластичних деформацій.....	58
2.3.2 Теорія течії	59
2.3.3. Теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни (Ю.М.Шевченко)	60
2.3.4. Теорія пластичності Чернякова-Кадашевича-Новожилова.....	61
2.4. Висновки по другому розділу.....	62
РОЗДІЛ III. Метод розв'язання задач термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми	64
3.1. Повна система рівнянь, граничні та початкові умови.....	64

	23
3.2. Методи підвищеної точності розв'язання нестационарних задач для термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів	66
3.2.1. Методи розв'язання нестационарних задач термомеханіки.....	67
3.2.2. МПР Писмана Речфорда Дугласа	70
3.3. МПР підвищеної точності за часом.....	72
3.3.1. Ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарної задачі термомеханіки.....	72
3.3.2. Ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності.....	75
3.4. Порівняння і оцінки ефективності методу	78
3.5. Висновки по третьому розділу.....	81
РОЗДІЛ IV. Задачі термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми	82
4.1. Нестационарне навантаження Одновимірного стрижня з термо-псевдо-пружного матеріалу.....	82
4.1.1. Активне навантаження одновимірного стрижня.....	82
4.1.2. Вплив пам'яті форми матеріалу на поведінку стрижня.....	90
4.2. Нестационарне навантаження полоси з термо-псевдо-пружного матеріалу	93
4.3. Нестационарне навантаження циліндричної трубки з термо-псевдо-пружного матеріалу.....	96
4.4. Висновки по четвертому розділу	101
ВИСНОВКИ.....	103
Список використаних джерел.....	105
ДОДАТКИ.....	118

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

u_i, v_i – переміщення та швидкості переміщень ($i = 1, 2, 3$)

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензори напруги та деформації ($i, j = 1, 2, 3$)

S_{ij}, \mathcal{E}_{ij} – девіатори тензорів напруги та деформації ($i, j = 1, 2, 3$)

\vec{W} – вектор, компонентами якого є швидкості переміщень і складові тензорів напруги та деформації

θ_i, x_i – ортогональні криволінійна та прямолінійна системи координат ($i = 1, 2, 3$)

H_i – параметри Ламе ($i = 1, 2, 3$)

Γ_{ij}^S – символи Крістофеля

T – температура

α – коефіцієнт теплообміну

t, τ – час, крок інтегрування за часом

h_i – кроки інтегрування за координатами ($i = 1, 2, 3$)

S – положення границі розділу фаз

$\dot{s} = \Phi(f)$ – функція кінетичного відгуку

f – рушійна сила фазового переходу

СПФ – сплав з пам'яттю форми

ТППМ – термо-псевдо-пружний матеріал

МТП – миттєва термомеханічна поверхня

МПР – метод покомпонентного розщеплення

НДС – напружено-деформований стан

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Сучасні деталі і елементи машинобудівних та інших конструкцій і пристроїв виготовляються з матеріалів, які мають властивість пам'яті форми і ведуть себе псевдо-пружно-пластично. В процесі виготовлення та експлуатації вони можуть перебувають під впливом складного нестационарного силового і температурного навантаження. До складних процесів деформування може призводити і їх нерівномірний нагрів у поєднанні з силовими чинниками. Для моделювання поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не тільки на псевдо-пружній стадії деформування, а й за межею пружності. Існуючі чисельні методи розв'язання таких нестационарних задач призводять, як правило, до значних обчислювальних труднощів, які пов'язані з розв'язанням великих систем алгебраїчних рівнянь, і не завжди бувають ефективні. Тому розробка методів розв'язання нестационарних задач термомеханіки для просторових конструкцій з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю є **актуальним завданням.**

Дисертаційну роботу було виконано у межах індивідуального плану роботи аспіранта та в рамках досліджень, які здійснені у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара та за темами держбюджетних робіт № 1-301-15 «Розробка методик розв'язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (№ ДР 015U002393) та Дніпровському державному технічному університеті по держбюджетній науково-дослідницькій темі «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379, 2013-2015 рр.)

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці феноменологічної моделі і варіанта методу числового моделювання процесів

деформування в нелінійних просторових тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Використаний при цьому апроксимаційний апарат двовимірних сплайн-функцій дозволяє з більшою точністю враховувати складні залежності властивостей матеріалів від термо-механічних процесів, які в них відбуваються, а також створювати нові різницеві схеми підвищеної точності.

Апробація результатів дисертації.

Основні концепції, ідеї, положення і результати досліджень доповідались і обговорювались на наукових семінарах і конференціях на Міжнародних конференціях: 2nd International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (Corfu, Greece), 2019; CXLIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Physics and Mathematics, Chemistry, Earth and Space Sciences (London, 2017); Applied problems of the fluid mechanics and heat and mass transfer (Dnipropetrovsk, 2014); Наука і освіта (Опатія (Хорватія), 2012); Математичні проблеми технічної механіки (Дніпродзержинськ, 2011-2019); IX МНК Математичні проблеми механіки неоднорідних структур Інститут проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України (Львів, 2014); Сучасні проблеми механіки та математики Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (Львів, 2018); МНК Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (Івано-Франківськ, 2018).

У повному обсязі робота доповідалась і обговорювалась на розширеному науковому семінарі кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, 2019) та на науковому семінарі "Математичні проблеми технічної механіки" кафедри вищої математики Дніпровського державного технічного університету (Кам'янське, 2019).

Публікації і особистий внесок здобувача.

Основні результати дисертації викладені в 26 наукових працях, у тому числі стаття у «Східно-Європейський журнал передових технологій»

індексована у світових наукометричних базах даних і системах [93], в монографії [6], двох статтях закордонного видання на англійській мові [65, 104], п'яти статтях в наукових фахових виданнях України [31, 32, 41, 45, 92] та чотирнадцяти тезах доповідей у матеріалах міжнародних та міжнародно-практичних конференцій [7, 20-23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 37, 38, 40, 102]. З представлених публікацій 5 є самостійними науковими працями дисертанта [24, 25, 31, 32, 92].

Результати, які складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. Постановка розглянутих задач, вибір методів досліджень та аналіз отриманих результатів проведені разом з науковим керівником Ю.А.Черняковим.

У роботах, написаних у співавторстві з іншими авторами, здобувачеві належить розробка і реалізація підходів, які ґрунтуються на застосуванні методу покомпонентного розщеплення, а також моделювання фізичних процесів в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів та їх експериментальне обґрунтування.

Обґрунтованість та достовірність результатів наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла; застосуванням відомих числових методів розв'язання поставлених задач; узгодженістю та збігом деяких одержаних розв'язків з наведеними в літературі результатами, отриманими за допомогою інших методів; відповідністю результатів і висновків до фізичної суті задач.

Метою роботи є дослідження явища пам'яті форми та псевдо-пружно-пластичності в загальній формі з урахуванням швидкостей деформування (навантаження) та температури.

Задачі, які були вирішені для досягнення поставленої мети:

– проведено аналіз і класифікацію наявних підходів до моделювання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю;

– на базі теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням побудовано фізичні співвідношення, які дозволили адекватно описати поведінку термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів ;

– розроблено ефективний метод розв'язання нестационарних тривимірних задач теорії пластичності у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу;

– розв'язано ряд відповідних нестационарних задач.

Об'єкт дослідження – деформування матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та термо-псевдо-пружно-пластичністю.

Предмет дослідження – моделі і задачі деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Методи дослідження – числове розв'язування нестационарних задач теорії термо-псевдо-пружно-пластичності для просторових тіл з урахуванням законів деформації за складного силового та температурного навантаження.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

1) запропоновано феноменологічну модель для опису властивостей матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів в матеріальних точках тіла;

2) узагальнено співвідношення теорії пластичності теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням на випадок деформування псевдо-пружно-пластичного матеріалу;

3) на основі двовимірних сплайн-функцій розроблено ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування псевдо-пружно-пластичного матеріалу;

4) поставлено і розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, псевдо-пружності, термо-псевдо-пружно-пластичності;

5) виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-

пружно-пластичних матеріалів, та їх форми і розмірів.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці феноменологічної моделі поведінки матеріалу з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю, розробці відповідного варіанту теорії псевдо-пружно-пластичності, розробці ефективного числового методу та розв'язанні за його допомогою нового класу задач. Результати роботи можуть бути використані для опису поведінки ряду матеріалів в машинобудуванні, радіоелектроніці, металургії і т.д.

Результати роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара при викладанні навчальної дисципліни «Теорія пластичності» і «Нелінійна механіка руйнування», Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

Структура дисертації. Дисертація включає вступ, чотири розділи, висновки, список використаних джерел та додатки. Вона містить 133 сторінки машинописного тексту, з них 102 сторінки основного тексту, 19 рисунків, список використаних джерел зі 114 найменувань та додатки.

У вступі окреслено актуальність теми, мету, наукову новизну одержаних результатів.

У першому розділі розглянуто історію питання, яке досліджено в дисертації, моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю. Різноманітні приклади такого моделювання наведено в роботах [15, 19, 43, 47-51, 53, 55-59, 62, 66, 74, 76, 77, 79, 80, 85, 90, 91, 94-96, 104-106, 110].

Надана інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами [46, 60, 70, 73, 75, 81-83, 88, 89, 99, 100, 101, 107, 111]. Розглянуто відповідні задачі [4, 13, 16, 35, 39, 84, 87-89, 108, 109, 112-114] та

методи їх розв'язання [2, 3, 5, 8, 12, 14, 18, 34, 36, 38, 52, 67, 70, 71, 97, 98, 103].

Особлива увага приділялась роботам по дослідженню пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів [1, 9-11, 17, 42, 44, 54, 61, 63, 64, 72, 78, 85].

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки. Більшість праць направлена на опис поведінки матеріалів точці і існує потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для опису деформації в широкому діапазоні значень температур та швидкостей деформації при довільному навантаженні.

У другому розділі запропоновано феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів і матеріалів з пам'яттю форми. Узагальнено фізичні співвідношення теорії пластичності для матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю.

На основі відомих експериментальних результатів отримано необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі.

Проведено узагальнення відомих фізичних співвідношень теорій пластичності (теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням та інші) для термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Показано, що характерною рисою діаграми матеріалу з пам'яттю форми, псевдо-пружністю, псевдо-пружно-пластичністю при деяких швидкостях активного деформування може бути ділянка ідеальної пластичності. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні, але при визначених температурах.

Запропонований підхід дозволив розширити межі застосування відомих теорій термопластичності на випадок дослідження поведінки термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

У третьому розділі запропоновано узагальнення методу покомпонентного розщеплення для розв'язання нестационарних задач

термомеханіки для термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Одним з найбільш ефективних прийомів при числовому розв'язанні багатовимірних нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є підхід, заснований на використанні для визначення невідомих величин, методу дробних кроків або методу покомпонентного розщеплення, де невідомі величини розшуковуються у вигляді сплайн-функцій [2, 5, 8, 38, 97, 98]. Перевага цього підходу обумовлена тим, що він не складніше в реалізації, ніж кінцево-різницевий метод. При цьому рішення знаходиться у вигляді сплайн-функцій в усій області визначення, тоді як різницеве рішення розшукується лише у вузлах просторової сітки. Такий підхід дозволяє підвищити порядок апроксимації, а це дає можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницевим методом при досягненні однакової точності обчислень.

У четвертому розділі розв'язано новий клас нестационарних задач для тіл (одновимірних, двовимірних та тривимірних) з пам'яттю форми та термо-псевдо-пружно-пластичністю. Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів.

В додатках наведені деякі допоміжні результати (інформація про впровадження результатів дисертаційної роботи, апроксимації діаграми матеріалу, допоміжна інформація про двовимірні сплайни, обробка експериментальних даних для ТППМ).

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професору кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Юрію Абрамовичу Чернякову за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

РОЗДІЛ І. Питання поведінки матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю

Розглянемо історію питання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю.

1.1. Основні моделі фазових перетворень

Приклади такого моделювання можна знайти в роботах К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки [19], Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко [43], И.К.Сенченкова [34], R.Abeyaratne, J.K.Knowles [47], K.Tsuchiya[49] , R.Ahluwalia, T.Lookman, A.Saxena, R.C.Albers [50], R.J.Asaro, V.A. Lubard [51], Z. Bo, D.C.Lagoudas [53], C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent [55], J.G.Boyd, D.S. Lagoudas [56], J.G. Boyd, D.S. Lagoudas [57], L.C.Brinson, I.Schmidt, R.Lammering [58] , M. Brocca[59] , Yu.A.Chernyakov, A.S. Polishchuk [62], P.V. Entchev, D.C.Lagoudas [66], D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari [67], W.S.Ko, S.B.Maisel, B.Grabowski, J.B.Jeon, J.Neugebauer [74], D.S. Lagoudas, P.B. Entchev [76], D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, P.Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao [77], V.I. Levitas, E.Stein [79], C.Lexcellent, G. Bourbon [80], Z.K. Lu, G.J. Weng [85], K.Otsuka [90], E.Pator, A.Eberhard, M.Berveiller [91], H.Petryk, S.Stupkiewicz, G.Maciejewski [94], L.Qiao, J.J.Rimoli, Y.Chen, C.A.Schuh, R.Radovitzky [95], L.Qiao, R.Radovitzky [96], Q.P.Sun, K.C.Hwang [105], Q.P.Sun, A.Ahadi, M.P.Li, M.X.Chen [106], X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue [110].

Фазові мартенситні перетворення поділяють на дві групи термопружні і нетермопружні.

Нетермопружні перетворення відбуваються головним чином в сплавах заліза і пов'язані з немобільними границями вихідної фази мартенситу, скріпленими постійними дефектами і переходять послідовним утворенням ядра і його зростанням. Через перетворення ядра аустеніту в процесі перетворення (мартенсит в аустеніт), ці перетворення кристалографічно незворотні в тому сенсі, що мартенсит не може повернутися до вихідної фази первісної орієнтації.

Термопружні мартенситні перетворення, з іншого боку, пов'язані з мобільними межами між вихідними і мартенситними фазами. Ці кордони здатні до зворотнього перетворення за рахунок усадочної деформації пластин мартенситу.

Існує велика кількість особливих матеріалів, типу сплавів пам'яті форми, п'єзоелектричних матеріалів, магнітострикційні металів, і т.д., які демонструють тісний зв'язок їх механічної поведінки з іншими полями, типу теплових, електричних або магнітних. Вони реагують механічним чином на зміну в навколишньому середовищі [53, 56, 58-61].

Псевдо-пружність відноситься до здатності матеріалу при певному температурному режимі накопичувати деформації при навантаженні та потім повертатися у вихідне положення після розвантаження (через петлю гістерезису). Основний механізм - оборотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може виникати при температурі близькій до кімнатної. Перетворення може бути викликано змінами температури або змінами напруги, що призводять до збільшення термомеханічного опору в поведінці матеріалу. Матеріал також характеризується істотно нелінійною механічною поведінкою, високим внутрішнім демпфуванням і високою напругою текучості. Всі ці властивості дають можливість застосовувати СПФ (NiTi та інші) в нових конструкціях. Специфічна поведінка сплаву NiTi є результатом взаємодії високотемпературної фази (аустеніт), що має кубічну структуру решітки, і низькотемпературну фазу (мартенсит), що має моноклінну структуру [88, 89].

Наукова література про матеріали досить обширна. Аналітичний зв'язок між мікроскопічною і макроскопічною поведінкою встановити дуже складно. За попередній період було докладено багато зусиль в результаті яких було побудовано ряд моделей [58, 76, 77, 79, 91] і отримано нові експериментальні дані [99], які додали новий стимул для розрахунків та прикладних застосувань. Слід сказати, що універсальні моделі, що підходять для багатьох технічних застосувань не завжди бувають доступні для

практичного використання. Деякі з визначальних моделей враховують нестійкість матеріалу, яка спостерігається в псевдопружному NiTi [99]. Підхід на рівні континуальної пластичності, зі спеціальною залежністю ефективна деформація - ефективне напруження у вигляді триланкової ламаної, дозволив врахувати особливості поля локалізованої деформації [100]. Була додатково врахована температурна взаємодія між механічно навантаженим зразком і навколишнім середовищем, для опису неізотермічної поведінки при більш високих швидкостях навантаження і в менш конвективному середовищі, типу повітря.

Протягом останніх декількох десятиліть моделювання полікристалічних СПФ було темою багатьох публікацій, які свідчать про істотний інтерес до цього питання.

Більшість визначальних моделей, про які повідомлялося в літературі, можна формально класифікувати, як ті, що належать до однієї з двох груп: мікромеханічні і феноменологічні моделі.

Мікромеханічні моделі будуються для опису поведінки СПФ з урахуванням зернистої мікроструктури полікристала СПФ. Теоретично, якщо мікроструктура відома, то можна, використовуючи добре вивчену поведінку монокристала СПФ, безпосередньо розв'язувати граничні задачі для полікристалічного матеріалу. На практиці точне уявлення про мікроструктуру досить складне. До того ж досить складно вирішити чисельно задачу з достатньою кількістю зерен, що має місце в реальних, тривимірних граничних задачах. Тому для відображення термомеханічних властивостей полікристалічного матеріалу використовують методи осереднення. Такі задачі спочатку виникли у зв'язку з проблемою визначення макроскопічних властивостей гетерогенних композиційних матеріалів. У зв'язку з цим було розвинено багато методів осереднення для пружних і пружнопластичних матеріалів, серед них й асимптотичні. Більшість мікромеханічних моделей для полікристалів з пам'яттю форми базується на методі осереднення [47, 50, 77, 87].

Інший клас моделей для полікристалічних сплавів з пам'яттю форми це феноменологічні моделі, які для опису змін мікроструктури через фазове перетворення виходять з термомеханіки континууму з внутрішніми змінними. У подібних моделях зазвичай задають функцію макроскопічної енергії, яка залежить від змінних стану і внутрішніх змінних, що описують ступінь фазового перетворення. Для внутрішніх змінних записуються рівняння еволюції. Макроскопічна енергія і рівняння еволюції приймаються в деякій функціональній формі, яка повинна бути сумісна з термодинамікою. Фундаментальна структура всіх цих моделей подібна, і може класифікуватися як визначальні моделі з внутрішніми змінними стану [55, 61, 64].

Феноменологічні співвідношення безпосередньо не залежать від параметрів матеріалу на мікрорівні, а залежать від набору параметрів на макрорівні, які визначаються з експериментальних спостережень. Такі моделі можуть бути простими, наприклад, моделювання одновісьової псевдопружної реакції матеріалів з пам'яттю форми кусковолінійною функцією, або можуть бути складними, як у тривимірних моделях, що використовують багато параметрів, які повинні бути визначені з великої кількості експериментів. Феноменологічні моделі легко адаптуються до числових методів розв'язання граничних задач на макроскопічному рівні.

Моделі, що описують макроскопічну термомеханічну поведінку полікристалічних сплавів з пам'яттю форми були запропоновані в роботах [55, 56, 62, 63, 66, 77, 80 та ін.].

У більшості визначальних моделей приймається термодинамічна структура і вибирається мартенситна частка обсягу як внутрішня змінна стану, для врахування впливу мікроструктури в середньому. Їх головною відмінністю є функція зміцнення, обрана для моделювання зв'язку деформація - напруження при навантаженні, що викликає мартенситне фазове перетворення. Узагальнена структура для цих визначальних моделей була представлена в роботі [56]. Пропонувались різні функції перетворення

для опису асиметричної поведінки сплавів з пам'яттю форми, яку вони проявляють при розтягуванні і стискуванні. При цьому частку обсягу мартенситу і деформацію перетворення використовували в якості окремих внутрішніх змінних. Передбачалось, що частина мартенситу не відновлюється після кожного циклу, що призводить до помітної невідновлювальної деформації, яка накопичується з числом циклів. Моделі, згадані вище, не залежать від швидкості деформування. Вони враховують залежність поведінки деформація - напруження тільки від траєкторії навантаження.

Уточнення моделей були досягнуті в роботах [55, 57 та ін.], де у визначальних моделях вже враховувалась залежність від швидкості деформування (навантаження). Формулювання цих моделей враховує і розвантаження у співвідношеннях деформації - напруження. Числове застосування феноменологічних моделей досліджувалось в [76 та ін.]. Зазначимо, що складна поведінка матеріалів з пам'яттю форми вимагає розвитку спеціалізованих алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану тіла.

1.2. Експериментальні дослідження сплавів при наявності фазових переходів

Загальні відомості про експериментальні дослідження поведінки конструкційних матеріалів докладно викладено в роботах Ю.М.Шевченко [15, 34, 42-45].

Інформацію про експерименти, які проводились з матеріалами при наявності фазових переходів можна знайти в роботах R.Abeyaratne, C.Chu, R.D.James [46], B.Budiansky, L.Truskinovsky [60], Y.J.He, Q.P.Sun [70], Y.H.Kim, G.B.Cho, S.G.Hur, S.S.Jeong, T.H.Nam [73], S.Kyriakides, J.E.Miller[75], C.Lexcellent, S.Leclerg, B.Gabry, G.Bourbon [81], C.Lexcellent, A.Vivet, C.Bouvet, S.Calloch, P.Blanc [82], C.Lexcellent, A.Schlomerkemper [83], K.Otsuka, C.Wayman, K.Nakai [88], K.Otsuka, H.Sakamoto, K.Shimizu

[89], J.A.Shaw, S.Kyriakides [99-101], M. Tokuda, M.Yea, M.Takakura, P.Sittner [107], X.M.Wang, Y.F.Wang, Z.Z.Lu, C.H.Deng, Z.F.Yue [111].

Цей параграф присвячено огляду досліджень нестабільностей, які відбуваються в псевдо-пружних матеріалах. Експериментальні дослідження явищ виникнення і кінетика розповсюдження фронтів фазових перетворень, також пов'язана з ними теплова чутливість детально обговорюються в роботах Shaw і Kyriakides [99-101]. Характерною рисою діаграми такого матеріалу в точці є зуб плинності при переході від чисто пружної ділянки (фаза аустеніт) до горизонтальної ділянки з наступною зміною фази (фаза мартенсит). Площа під кожним піком певним чином відображає теплоту трансформації матеріалу. Приклади механічних відгуків при різних температурах наведено в Додатку В. Звернуть на себе увагу піки нуклеації, які необхідно подолати на початку напружених плато під час навантаження. Напруження нуклеації та трансформації значно зростає зі збільшенням температури навколишнього середовища. Екзотермічний перехід від аустенітної фази до мартенситної під час навантаження має тенденцію викликати самонагрівання, а це підвищує основне напруження перетворення матеріалу. Звертається увага на те що природа навколишнього середовища (газ, рідина) відіграє істотну роль. Відзначається, що виразне плато напруження (нестабільна поведінка матеріалу) спостерігається під час трансформації. Оскільки переходи в непідготовлених сплавах можуть відбуватися механічно нестабільно, трансформація може відбуватися локалізованим способом, тобто через зародження і подальше поширення чітких фазових фронтів по довжині одноосно навантаженого зразка.

У багатьох публікаціях відзначалося, що такі фазові перетворення є екзотермічними. В результаті, навіть при відносно повільній швидкості подовження (деформування, навантаження), зразок відчуває саморозігрів в околиці фронту перетворення, що постійно зміщується. Зазначимо, що на напруження, необхідне для перетворення матеріалу, істотно впливає температура. Таким чином, локальне збільшення температури призводить до

збільшення напруження перетворення. Саме ця обставина є головною у феноменологічній моделі, яка запропонована в дисертації.

1.3. Визначальні співвідношення для матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю

Дані про особливості пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів наведено в роботах Б.Боли, Дж.Уэйнер [1], Д.Д.Ивлев, Г.И.Быковцев [9], А.А.Ильюшин [10], Ю.И.Кадашевич, В.В.Новожилов, Ю.А.Черняков [11], А.И.Лурье [17], Ю.Н.Шевченко, Р.Г.Терехов [42], Ю.Н.Шевченко, М.Е.Бабешко, Р.Г.Терехов [44], S.Bodner, Y.Partom [54], J.L.Chaboche [61], Yu.A.Chernyakov, A.S.Polishchuk [63], Yu. A. Chernyakov, A.S.Polishchuk, V.P.Shneider [64], Yu.I.Kadashevich, Yu.A. Chernyakov [71], S.Leclercq, C.Lexcellent [78], Z.K. Lu, G.J.Weng [85].

Особлива увага приділялась дослідженню пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів [1, 9-11, 17, 34, 42, 44, 54, 61, 63, 64, 71, 78, 85].

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженням і деформацією. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформації. У загальному випадку значення деформації є функцією процесу зміни напруження і температури, яка визначається характеристиками усього попереднього процесу зміни фізичних чинників, а не тільки їх поточними значеннями. Детальні відомості з цього питання можна знайти в роботах [42-46].

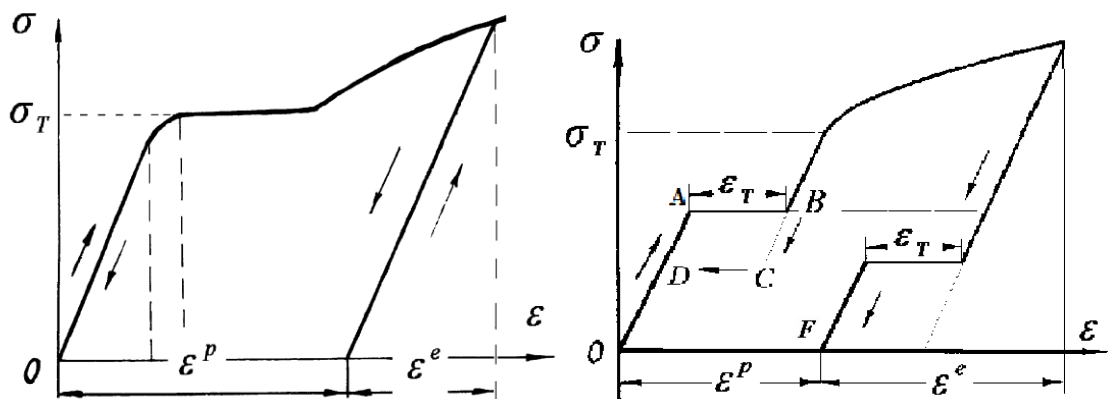
При побудові фізичних співвідношень передбачалося, що деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичній деформації і деформації, викликаній температурними змінами. Після рішення задачі по геометрії траєкторії деформації можна судити про достовірність використовуваних визначальних співвідношень.

При розв'язанні нестационарних задач термомеханіки будемо використовувати фізичні співвідношення записані для швидкостей тензорів напружень і деформацій [36].

Після експериментів на просте розтягування зразка при різних фіксованих температурах будується миттєва термомеханічна поверхня (МТП), існування якої з достатньою мірою точності експериментально підтверджене в роботах [43, 44]. Ця поверхня з певною мірою точності незалежить від виду напруженого стану для деяких класів ізотропних матеріалів. В результаті її можна визначати за допомогою експериментів на розтягування циліндричних зразків.

Конкретизація визначальних рівнянь зводиться до завдання МТП. Для проведення розрахунків необхідно цю функцію задати аналітично або у вигляді таблиці експериментальних даних $(\sigma)_i, (\varepsilon)_i, i = 0, 1, \dots$ при фіксованих значеннях температури.

На рисунках 1.1а) і 1.1б) показано характерні графіки залежності σ від ε , які визначаються з експериментів. На рисунку 1.1а) наведено типову діаграму для конструкційного матеріалу. На рисунку 1.1б) показано діаграму, яка характерна для ТППМ.



1.1а)

1.1 б)

Рисунок 1.1. Діаграма конструкційного матеріалу 1.1а) і діаграма ТППМ сплава 1.1б).

На кожній з наведених діаграм є початкова лінійна ділянка OA . Зростання та зменшення напруження йде по прямій лінії, а деформації при

цьому малі. Межа плинності залежить від температури і визначається координатою точки A . Деякі результати наведено в Додатку В.

Якщо при напруженні σ , яке відповідає точці C діаграми, зразок розвантажити, то частина деформації ε^e (пружна складова загальної деформації зразка зникне), а та деформація, яка залишається буде саме пластичною деформацією ε^p .

Таким чином, деформацію в точці представимо у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, можливої пластичної деформації і деформації, викликані температурними змінами.

На рисунку 1.1 показано і пружне розвантаження зразка по прямій CD , яка паралельна лінії OA . Таке припущення механізму розвантаження тільки у загальних рисах відображає дійсну картину деформації матеріалу при малих деформаціях. При великих деформаціях (10% і більше), розвантаження зразка буде нелінійним. Взагалі навіть при малих деформаціях навантаження і розвантаження зразка йде по різних лініях на діаграмі, але при малих деформаціях (до 6%) цими відхиленнями при дослідженні напружено-деформованого стану твердого тіла, нехтують.

Таким чином, з експериментів на розтягування зразка можна записати фізичні залежності для різноманітних значень температури.

1.4. Комп'ютерні системи аналізу і методи розв'язання задач термопружнопластичності

Задачі термомеханіки розглядались в працях Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратової [4], В.Н.Кукуджанов, В.И.Кондауров [13], В.А. Лихачева, В.Г.Малініна [16], А.А.Самарського [35], Ю.А.Чернякова, П.А.Стеблянко [41], J.T.Lim, D.L.McDowell [84], M.A.Meyers, A.Mishra, D.J.Benson [87], K. Otsuka, C.Wayman, K.Nakai [88], K.Otsuka, H.Sakamoto, K.Shimizu [89], T.Waitz, V.Kazykhanov, H.P.Karnthaler [108], T.Waitz, T.Antretter, F.D.Fischer, N.K.Simha, H.P.Karnthaler [109], M.L.Xia, Q.P.Sun [112], J.Ye., R.K.Mishra, A.R.Pelton, A.M.Minor [113], H.Yin, Y.J.He, Z.Moumni, Q.P.Sun [114].

Інформацію про методи розв'язання задач термомеханіки наведено в роботах І.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев [2], С.К.Годунов, В.С. Рябенський [3], К.Де Бор [5], Ю.С.Зав'язлов, Б.І.Квасов, В.Л.Мирошниченко [8], В.І.Кузьменко [12], В.Н.Кукуджанов [14], Г.І.Марчук [18], И.А.Рябцев, І.К.Сенченков, Е.В.Турик [34], П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков [36, 38], Т. Belytschko, W.K. Liu, B.Morgan [52], L.L.Schunsker [97], A.A.Schweikeret [98], P.A.Steblyanko, Yu.Shevchenko [103].

Основним завданням нестационарної теорії термо-пружно-пластичності є визначення температури, швидкостей переміщень (переміщень) і компонент тензорів напруження і деформації, що виникають в тілі в процесі його навантаження та нагрівання, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу. Процес навантаження змінюється в часі. Для розв'язання такої задачі необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними та фізичними рівняннями, що описують неізотермічні процеси навантаження, а також рівнянням теплопровідності.

Докладну інформацію про існуючі методи розв'язання задач термомеханіки можна знайти в роботах [2, 3, 5, 8, 12, 14, 18, 34, 36, 38, 52, 97, 98, 103], а відповідні задачі опубліковано в роботах [4, 13, 16, 35, 39, 84, 87-89, 108, 109, 112-114].

Наслідуючи роботи [18, 35, 36, 103] основними методами розв'язання нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є: різницевий метод рішень в теорії простих процесів деформації, метод кінцевих елементів в теорії простих процесів деформації і теорії процесів малої кривизни, метод розщеплення за геометричними властивостями в теорії простих процесів деформації і теорії процесів малої кривизни. У рамках різницевого методу і методу кінцевих елементів розв'язання нестационарної задачі теорії термо-пружно-пластичності зводиться до систем алгебраїчних рівнянь побудованих за класичною схемою, коли робиться заміна диференціальних операторів, що входять до складу повної системи рівнянь, на їх різницеві аналоги. Залежно від виду фізичних співвідношень, що

зв'язують напруження, деформації і температуру, можливі різні варіанти цих методів.

У роботі [36] запропонований новий варіант методу покомпонентного розщеплення підвищеної точності, розроблений для вирішення нестационарних задач теорії термо-пружності і термо-пластичності. Основними невідомими є швидкості переміщень, складові тензорів напруження та деформації і температура. Переміщення при необхідності визначаються шляхом інтегрування швидкостей за часом. При цьому повна система рівнянь в частинних похідних складається з трьох рівнянь руху, шести геометричних співвідношень і шести фізичних рівнянь [36]. Температурне поле в тілі визначається з рівняння теплопровідності.

Надалі, у рамках методу покомпонентного розщеплення, повну систему рівнянь і рівняння теплопровідності замінюють на еквівалентні їм системи одновимірних або двовимірних рівнянь. Для цього вводиться в розгляд комірка за часом з урахуванням дробового кроку [18, 36]. Після цього на кожному кроці за часом розв'язуються три системи одновимірних рівнянь (або три системи двовимірних рівнянь). Розв'язок попереднього рівняння є початковою умовою для наступного. Просторова система рівнянь може бути зведена і до системи трьох послідовно вирішуваних двовимірних завдань на дробових кроках за часом (схема Писмана, Рэчфорда, Дугласа). При числовому розв'язанні таких систем застосовуються явні і неявні схеми, а також ітераційні методи, які на них базуються.

Існують різноманітні системи інженерного аналізу і методи розв'язання задач термо-пружно-пластичності. При цьому застосовуються системи автоматичного проектування та автоматичного інженерного аналізу. САЕ-системи інженерного аналізу (ABAQUS, ANSYS, COSMOS, NASTRAN, та інші) дозволяють виконувати моделювання систем різної фізичної природи, досліджувати реакцію цих систем на зовнішні впливи у вигляді напружень, температур, швидкостей переміщень, електромагнітних полів.

Одним з таких комплексів є програма ANSYS, що використовує

метод кінцевих елементів. Саме ANSYS в даний час використовується для розв'язання задач моделювання пружно-пластичних тіл під дією різних типів навантаження.

Інший програмний комплекс ABAQUS призначений для моделювання та розв'язання лінійних і нелінійних задач методами кінцево-елементного аналізу. За допомогою комплексу ABAQUS можна вести розрахунок міцності елементів конструкцій, моделювати їх пластичне деформування та ін. При цьому один розрахунок може включати різні типи аналізів: - статичний аналіз напружень та переміщень; - в'язкопружні та в'язкопластичні відгуки; - динамічний аналіз напружень і переміщень; - нестационарний або усталений аналіз теплопередач та ін. Можливі комбіновані задачі: - тепло – механіка; - тепло – електрика та ін.

В дисертації розроблено і апробовано власні програмні продукти, можливості яких порівнювались з відомими програмними комплексами ABAQUS і ANSYS.

1.5. Висновки до першого розділу

В цьому розділі дисертації розглянуто історію питання, а саме досліджено моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю.

Надана інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами. Розглянуто відповідні задачі для СПФ та ТППМ, сучасні методи їх розв'язання та системи комп'ютерного аналізу. Особлива увага приділялась роботам по дослідженню деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки. Більшість праць направлена на опис поведінки матеріалів точці і існує потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для опису деформації в широкому діапазоні значень температур та швидкостей деформації при довільному навантаженні тіла.

РОЗДІЛ II. Феноменологічна модель для матеріалів з пам'яттю форми

У цьому розділі формулюється нова феноменологічна модель для опису поведінки матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, яка побудована для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. На основі відомих експериментальних результатів отримано необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі.

Узагальнено фізичні співвідношення теорії пластичності для матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю.

Показано, що характерною рисою діаграми матеріалу з пам'яттю форми, псевдо-пружністю, псевдо-пружно-пластичністю при деяких швидкостях активного деформування може бути ділянка ідеальної пластичності. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні, але при визначених температурах.

Запропонований підхід дозволив розширити межі застосування відомих теорій термопластичності на випадок дослідження поведінки термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

2.1. Феноменологічна модель

В даний час відомий цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки сплавів з пам'яттю форми (СПФ). Більшість з них будуються на підставі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосереднє описати експериментальні дані, отримані на різних макрозразках при простому і складному навантаженні. Однак, як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. У цьому розділі формулюється феноменологічна модель для опису властивостей

СПФ та ТППМ саме в точці. Деформація в точці представляється у вигляді суми пружною складової; стрибка деформації при фазовому переході; пластичної деформації, яка підпорядковується теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням; деформації, викликаній температурними змінами. При цьому передбачається, що властивості матеріалу залежать від температури.

Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення скористаємося діаграмою пружного матеріалу, що складається з трьох криволінійних або прямолінійних ділянок. Таке трактування призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для опису термомеханічної поведінки зразків різної форми необхідно мати рішення граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації фазового перетворення. При цьому будемо враховувати не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, що виділяється в при фазовому переході. Таке трактування дозволило з єдиної позиції запропонувати модель і описати цілий ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження, включаючи циклічне температурне і силовий вплив. Встановлено конкретні залежності для механічних параметрів. Показано, що межа розділу фаз рухається з постійною для обраної температури швидкістю. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Узагальнена залежність між напруженням σ і деформацією ε , в матеріальній точці моделюється кривою що зображена на рисунку 2.1. При побудові такої діаграми треба задати точки $(\sigma_M, \varepsilon_M)$ і $(\sigma_m, \varepsilon_m)$, функції $\varepsilon = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$. Змінна деформація фазового перетворення визначається так $\varepsilon_T = \psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma)$.

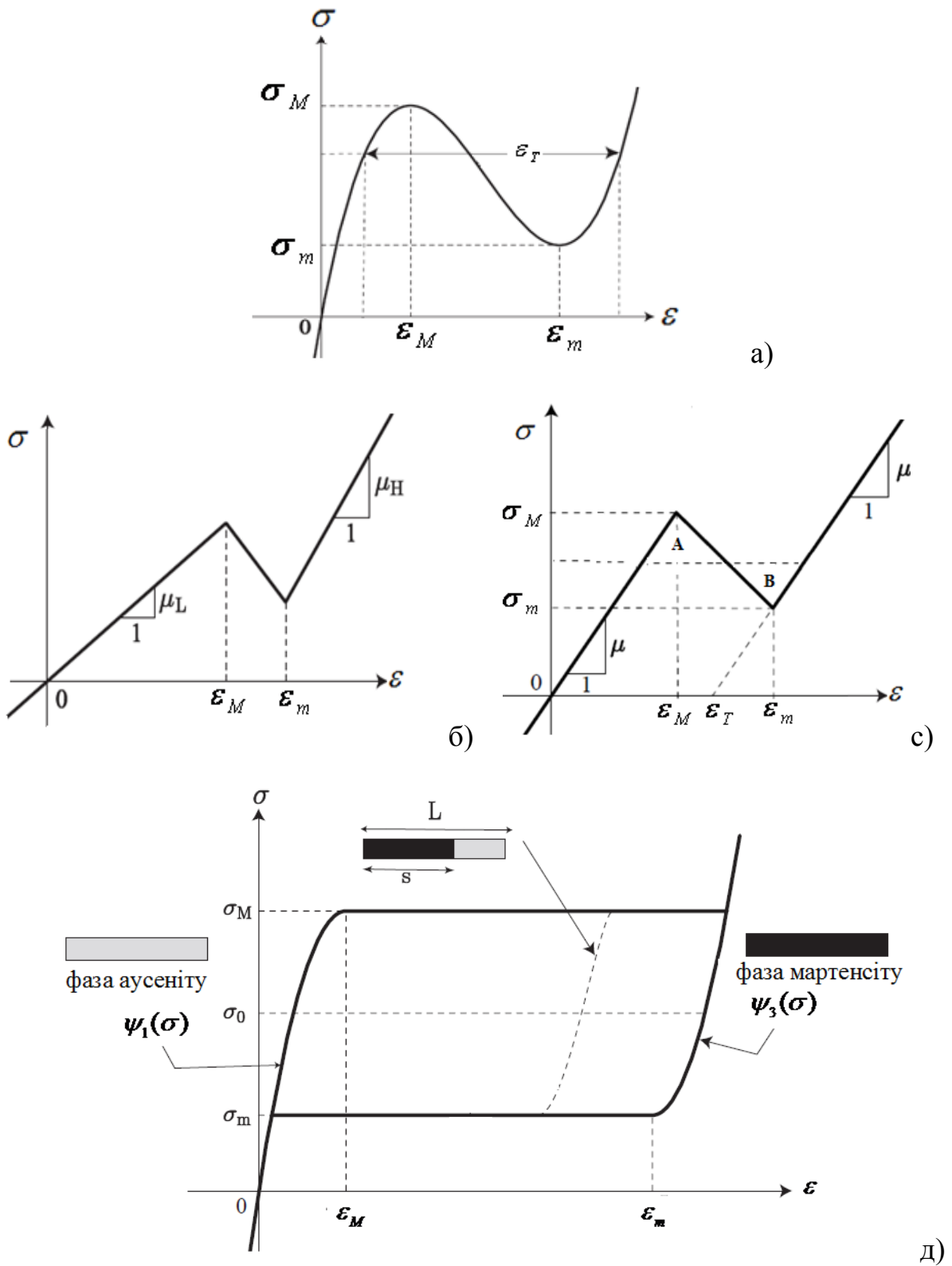


Рисунок 2.1. Крива напруження-деформація для двофазного матеріалу

В задачах механіки, де вивчається поведінка матеріалів, в яких мають місце фазові переходи, для побудови фізичних співвідношень між напруженням та деформацією необхідно додатково знати положення в зразку

фронту фазового переходу $s = s(t)$ (рисунок 2.1.д) і функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$.

Функції $\psi_i(\sigma)$ діаграми мають задовольняти наступним вимогам.

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = 0, \psi_1(\sigma_M) = \varepsilon_M, \psi_1'(\sigma) > 0, \\ \psi_2(\sigma_M) = \varepsilon_M, \psi_2(\sigma_m) = \varepsilon_m, \psi_2'(\sigma) < 0, \\ \psi_3(\sigma_m) = \varepsilon_m, \psi_3'(\sigma) > 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поле зміщень в зразку повинно бути неперервним

$$u(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma)x, & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma)x + \varepsilon_T(\sigma)s, & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Відповідний кусково-однорідний розподіл деформації в стрижени дається формулою

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma), & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma), & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Залежність між збільшенням довжини $u(L) = \delta$ стрижня і напруженням визначається виразом

$$\delta = \psi_3(\sigma)s + \psi_1(\sigma)(L - s). \quad (2.2)$$

Тут s - положення границі розділу фаз.

Рівняння (2.2) дає змогу визначити сімейство $\delta(\sigma, s)$. Якщо δ задано, то можна знайти напруження σ , розв'язуючи відповідно до умов (2.1) крайову задачу нелінійної пружності. При цьому з виразу (2.2) не можна одразу визначити σ оскільки невідомо положення границі розділу фаз.

Для однозначного розв'язку цієї задачі необхідно надати допоміжну інформацію окрім рівняння (2.2), фізичних співвідношень $\varepsilon = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$, граничних умов і вимог до гладкості. Зазвичай ці вимоги достатні при відсутності нестійких ділянок діаграми, для звичайних еластичних матеріалів, для яких напруження монотонно зростає зі збільшенням деформації.

Порушення однозначності виникає в (2.2), якщо задано σ , а не δ . Ця

проблема вирішується шляхом введення поняття рушійної сили f . Вона визначається так

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varepsilon_T(\sigma) d\sigma. \quad (2.3)$$

Тут $\sigma_0 = (\sigma_M + \sigma_m) / 2$ – напруження Максвелла. Його можна інтерпретувати геометрично як напруження, при якому дві площі, обмежені кривою напруження-деформація, мають рівну площу. Оскільки напруження в стані рівноваги в змішаній фазі повинно знаходитися між σ_m і σ_M , то діапазон можливих значень рушійної сили буде $f \in [f_m, f_M]$.

Розглянемо квазістатичний процес, в якому треба визначити функції часу $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$, $\delta = \delta(t)$.

Похідна за часом від залежності (2.2) дає наступне нелінійне рівняння

$$\dot{\delta} = \varepsilon_T(\sigma)\dot{s} + (\varepsilon'_T(\sigma)s + \psi'_1(\sigma)L)\dot{\sigma}. \quad (2.4)$$

Тут точкою позначено прохідні за часом, а штрихом похідні по σ .

В результаті в загальному випадку дотичний модуль діаграми зразка можна визначити з (2.4) так

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1 - \varepsilon_T(\sigma)\dot{s} / \dot{\delta}}{\psi'_1(\sigma)L + \varepsilon'_T(\sigma)s}.$$

При його обчисленні треба попередньо визначити функції $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$, а для цього до рівняння (2.4) слід додати функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ (Рисунок. 2.3) і вираз для рушійної сили (2.3), який можна представити так

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma)] d\sigma \quad (2.5)$$

Для трилінійного двофазного матеріалу з різними модулями пружності $\mu_1 \neq \mu_3$ і відповідно змінною трансформаційною деформацією ε_T на основі наведених вище формул (2.4) і (2.5) можна записати

залежності між напруженням і збільшенням довжини пружного зразка, а також для рушійної сили.

Рівняння першої прямої діаграми на ділянці $\varepsilon \in [0; \varepsilon_M]$, $\sigma \in [0; \sigma_M]$ має вигляд

$$\varepsilon(\sigma) = \psi_1(\sigma) = \sigma / \mu_1. \quad (2.6)$$

Рівняння діаграми на ділянці $\varepsilon \in [\varepsilon_m; \infty)$, $\sigma \in [\sigma_m; \infty)$ має вигляд

$$\varepsilon(\sigma) = \psi_3(\sigma) = \varepsilon_m + (\sigma - \sigma_m) / \mu_3. \quad (2.7)$$

Звідки

$$\varepsilon_T(\sigma) = k\sigma + b, \quad (2.8)$$

де

$$k = 1 / \mu_3 - 1 / \mu_1, \quad b = \varepsilon_m - \sigma_m / \mu_3.$$

На основі формул (2.4)-(2.8) запишемо

$$\dot{\delta} = (k\sigma + b)\dot{s} + (ks + L / \mu_1)\dot{\sigma}. \quad (2.9)$$

$$f(\sigma) = \left(k \frac{\sigma^2}{2} + b\sigma\right) - \left(k \frac{\sigma_0^2}{2} + b\sigma_0\right). \quad (2.10)$$

Звідси отримаємо

$$\dot{f}(\sigma) = \varepsilon_T(\sigma)\dot{\sigma} = (k\sigma + b)\dot{\sigma}.$$

Зазначимо, що для трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності $\mu_1 \equiv \mu_3 = \mu$ на основі формул (2.8) отримаємо

$$k = 0, \quad b \equiv \varepsilon_T = \varepsilon_m - \sigma_m / \mu.$$

В результаті цього спроститься диференціальне рівняння (2.9)

$$\dot{\delta} = b\dot{s} + L\dot{\sigma} / \mu$$

і вираз для рушійної сили (2.10)

$$f(\sigma) = b(\sigma - \sigma_0).$$

Границі зміни рушійної сили будуть такими

$$f_m = b(\sigma_m - \sigma_0), \quad f_M = b(\sigma_M - \sigma_0),$$

Розглянемо випадок, коли функція кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ буде мати вигляд, представлений на рисунку 2.2. Ця функція може бути задана аналітично.

$$\dot{s} = \begin{cases} 0; & f \in [0; f_r]; \\ \dot{s}_0 + \omega(f - f_r). & \end{cases} \quad (2.11)$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0$. В силу цього рівняння (2.4) набуде вигляд

$$\dot{\delta} = \psi'_1(\sigma)L\dot{\sigma}.$$

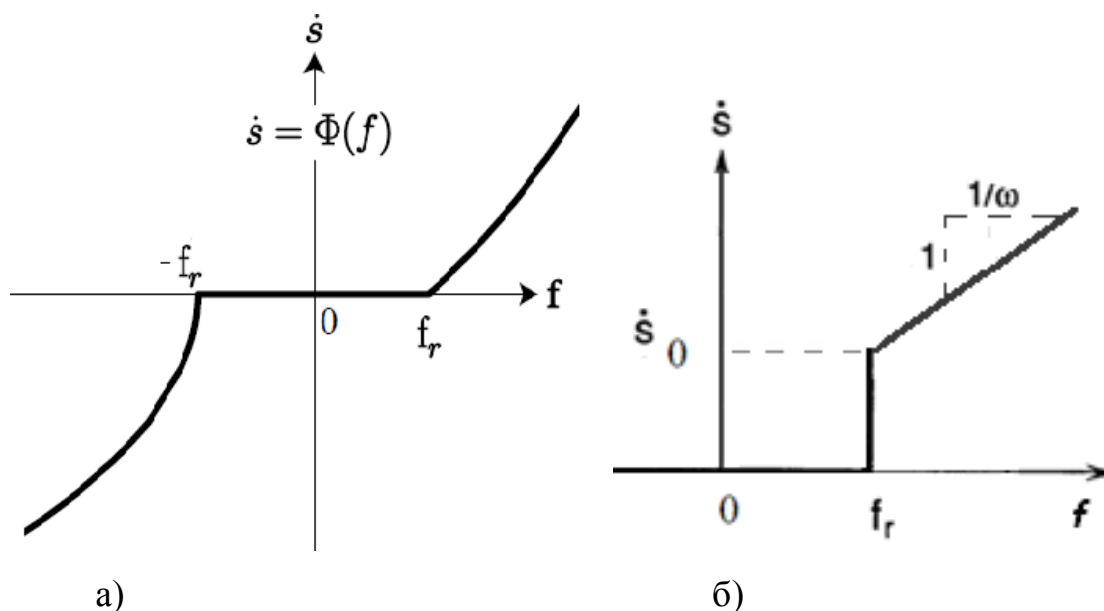


Рисунок 2.2. Схематичний графік функції кінетичного відгуку.

Звідси отримаємо формулу для обчислення дотичного модуля діаграми

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1}{\psi'_1(\sigma)L}.$$

На другій ділянці (після фазового переходу) рівняння (2.4) з урахуванням (2.11) прийме вигляд

$$\dot{\delta} = \varepsilon_T (\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)) + (\varepsilon'_T s + \psi'_1 L) \frac{\dot{f}}{\varepsilon_T},$$

$$s = (\dot{s}_0 - \omega f_r)(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t f(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

В результаті

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon'_T s + \psi'_1 L} [\dot{\delta} - \gamma_T (\dot{s}_0 + \omega(f - f_r))]. \quad (2.13)$$

Для випадку трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності з попереднього рівняння отримаємо

$$\dot{f} = \frac{\mu b}{L} [\dot{\delta} - b(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r))].$$

Після інтегрування можна записати

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha_* + (f_r - \alpha_*) e^{-(t-t_r)/\beta}, \\ \beta &= \frac{\mu b^2 \omega}{L}, \alpha_* = (\dot{\delta} / b - \dot{s}_0 + f_r) / \omega \\ t &\in [t_r; \infty), f(t_r) = f_r, f(t_r) = f_r < f_M. \end{aligned}$$

З метою спрощення подальшого запису введемо позначення

$$c_1 = b^2 + 2k(c + f_r), F = f - f_r.$$

В результаті формули (2.12), (2.13) перепишемо так

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \Phi(F, s), s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t F(\tau) d\tau, \\ \Phi(F, s) &= \frac{\varepsilon_T(F)}{ks + L / \mu_1} [\dot{\delta} - \varepsilon_T(F)(\dot{s}_0 + \omega F)], \\ \varepsilon_T(F) &= \sqrt{c_1 + 2kF}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0; t \in [0; t_r]$. З формул (2.9) і (2.10) отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \Rightarrow \sigma = \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \cdot t, \\ \dot{f}(\sigma) &= (k\sigma + b)\dot{\sigma} = \left(\frac{k\mu_1 \dot{\delta}}{L} t + b\right) \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Інтегруючи останній вираз, отримаємо

$$f(t) = k\left(\frac{\mu_1 \dot{\delta}}{L}\right)^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{b\mu_1 \dot{\delta}}{L} \cdot t,$$

$$t \in [0; t_r], f(0) = 0, f(t_r) = f_r < f_M.$$

На другій ділянці систему рівнянь (2.14) будемо розв'язувати чисельно при наступних умовах

$$s(t_r) = 0, F(t_r) = 0.$$

Для цього введемо сітку за часом і зробимо позначення

$$t_p = t_{p-1} + \tau, p = 1; 2; 3; \dots, t_0 = t_r,$$

$$s^p = s(t_p), F^p = F(t_p),$$

$$\Phi^p = \Phi(F^p, s^p), \varepsilon_T^p = \varepsilon_T(F^p).$$

В результаті диференціальне рівняння та інтеграл (2.14) можна замінити еквівалентними різницеvim рівнянням і сумою. Звідси отримаємо розрахункові формули, для рушійної сили F

$$F^{p+1} = F^p + \tau \cdot \Phi(F^p, s^p), s^p = p \cdot \dot{s}_0 \cdot \tau + \omega \cdot J^p,$$

$$J^p = J^{p-1} + \frac{\tau}{2} (F^{p-1} + F^p), J^0 = 0, F^0 = 0. \quad (2.15)$$

При числовому розв'язанні системи (2.14) за допомогою наведених різницеvих формул спочатку задаються параметри моделі $L, \omega, \dot{s}_0, \dot{\delta}, \varepsilon_M, \sigma_M, \varepsilon_m, \sigma_m, \mu_1, \mu_3, \tau$.

На основі цього обчислюються величини $k, k_0, k_1, b, \sigma_0, c, \mu_2$, а потім визначаються t_r, f_r, c_1 .

Результати розрахунків наведено нижче. На рисунку 2.3. показана типова залежність для швидкості розповсюдження фазового переходу від часу. Її графік має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом для інтегральної діаграми матеріалу теж маємо три характерні ділянки (Рисунок 2.3).

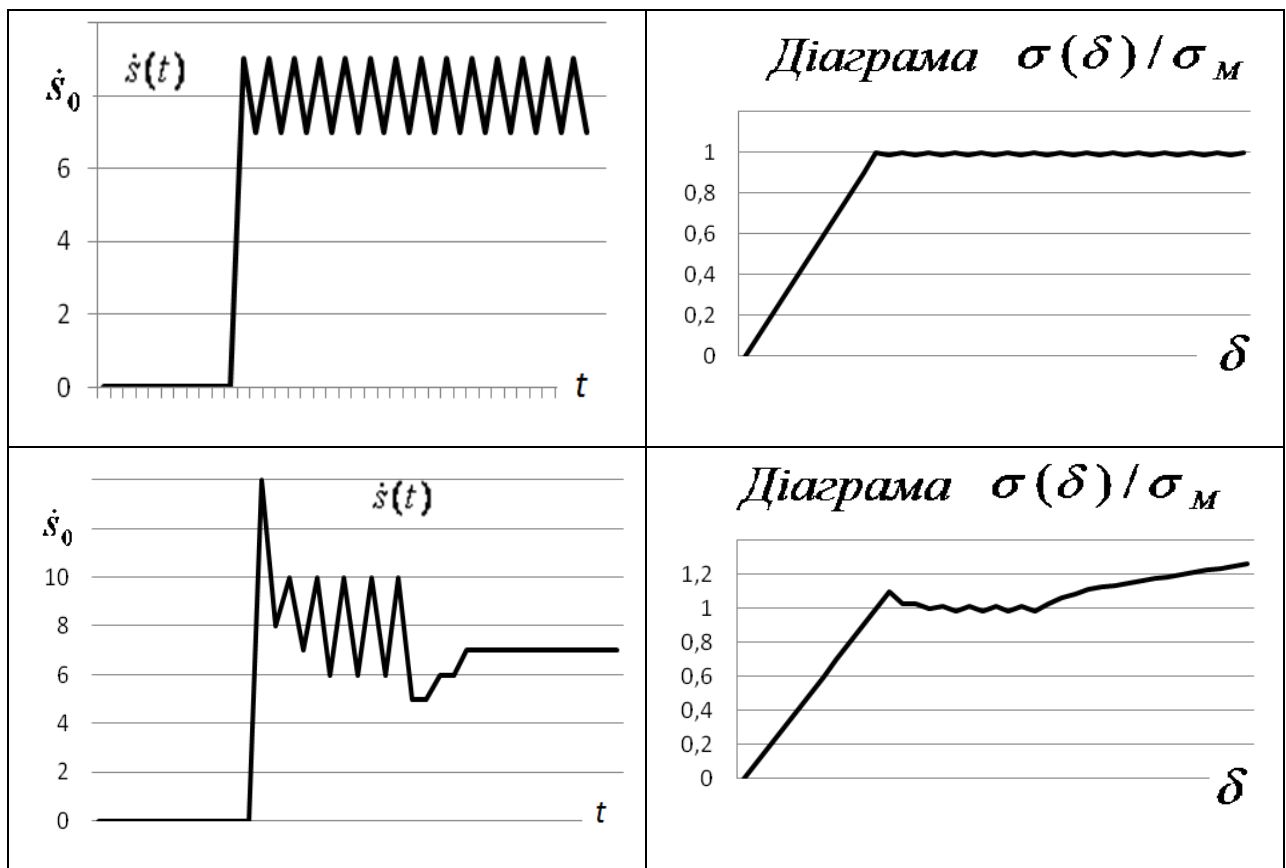


Рисунок 2.3. Швидкість розповсюдження фазового переходу та інтегральна діаграма матеріалу

Перша ділянка відповідає пружній поведінці матеріалу. Третя характеризує зміцнення матеріалу. Між ними міститься ділянка, яка нагадує поведінку ідеально пластичного матеріалу. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні, але при визначених температурах.

2.2. Експериментальне обґрунтування моделі.

Параграф присвячено експериментальному обґрунтуванню варіанта запропонованої в дисертації моделі поведінки матеріалу з пам'яттю форми та термо-псевдо-пружно-пластичністю. У цій моделі закладена можливість кількісної оцінки складної взаємодії між напруженням, температурою, деформацією, швидкістю навантаження зразка і теплом, що виділяється в процесі проходження фронту фазових перетворень вздовж зразка.

Таким чином, механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, які отримано при різних значеннях температури, і при необхідності

дозволяють побудувати інтегральну діаграму матеріалу.

Обробка експериментальних даних роботи [100] дозволила побудувати таблиці і діаграми для різних значень температури (відповідно 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0 градусів Цельсія). Результати порівняння з експериментальними даними наведено нижче у вигляді діаграм. Відповідні таблиці наведено в Додатку В (напруження задаємо у безрозмірному вигляді σ/σ_s , $\sigma_s = \sigma_s(T)_{T=110^{\circ}C}$, а деформацію в процентах). Верхні лінії ($\sigma>...$) відповідають активному навантаженню зразка, а нижні ($\sigma<...$) – розвантаженню при визначеній температурі.

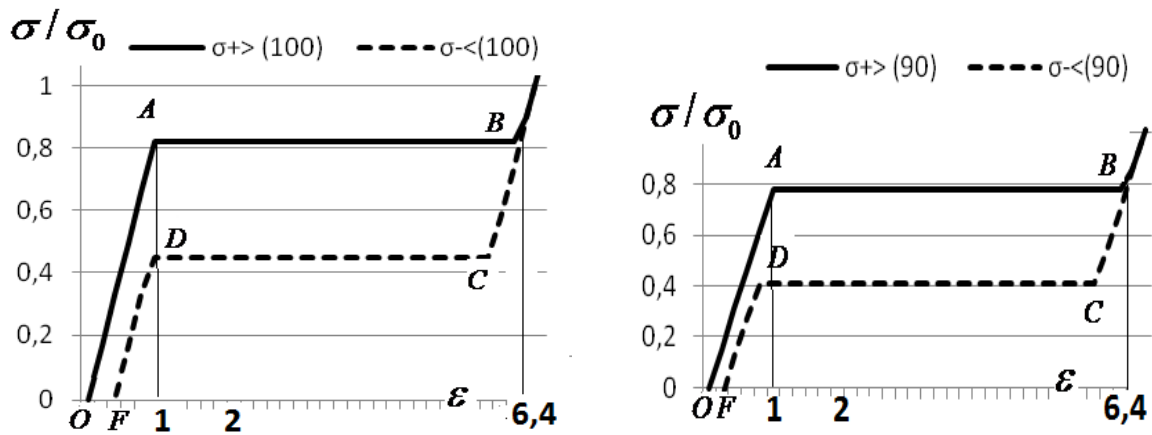


Рисунок 2.4 Локальні діаграми матеріалу ($100^{\circ}C, 90^{\circ}C$)

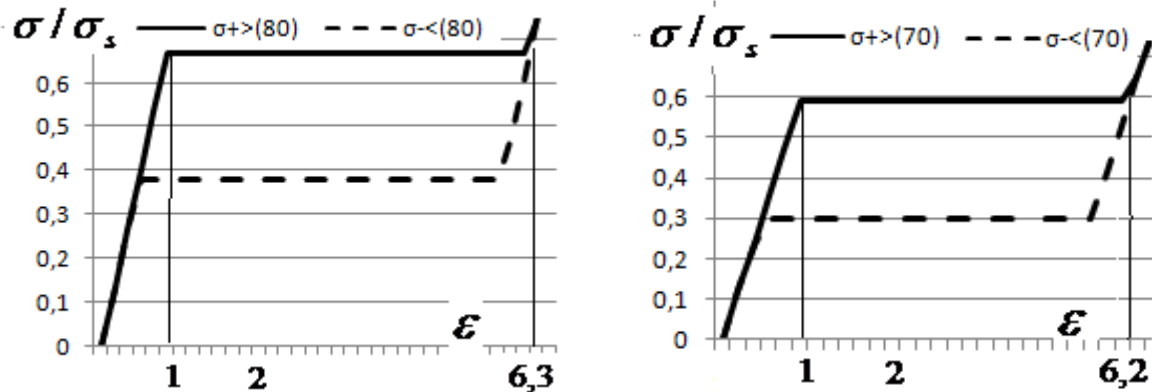
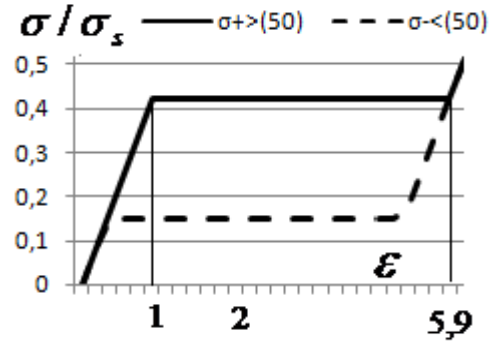
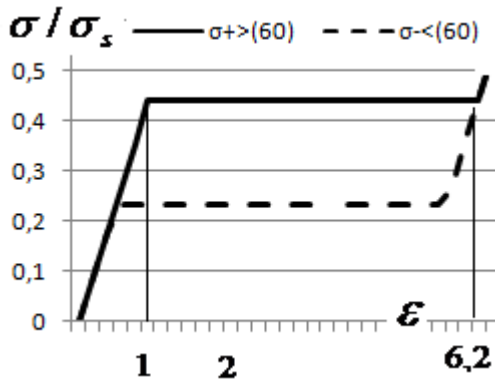
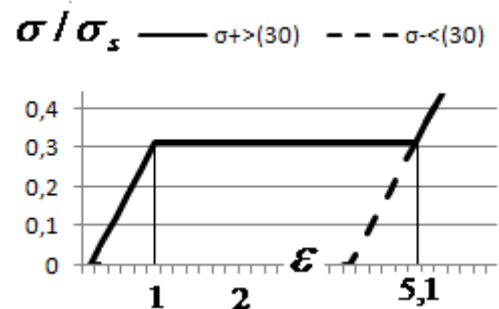
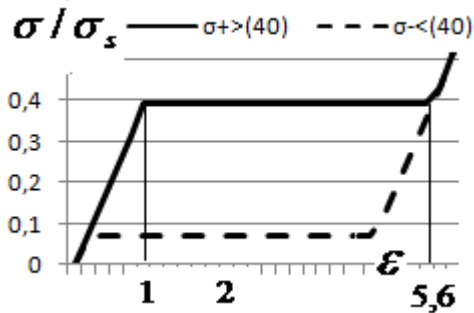
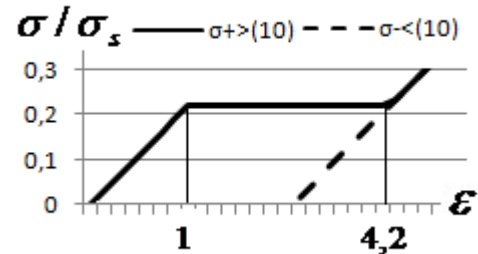
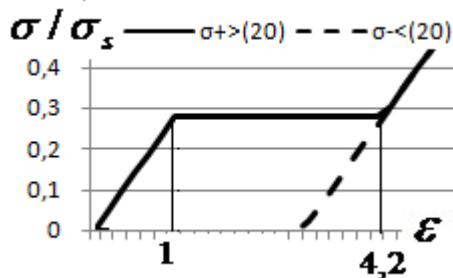


Рисунок 2.5 Локальні діаграми матеріалу ($80^{\circ}C, 70^{\circ}C$)

Рисунок 2.6 Локальні діаграми матеріалу ($60^{\circ}C, 50^{\circ}C$)Рисунок 2.7 Локальні діаграми матеріалу ($40^{\circ}C, 30^{\circ}C$)Рисунок 2.8 Локальні діаграми матеріалу ($20^{\circ}C, 10^{\circ}C$)

Зазначимо, що діаграми приведені на рисунках 2.4 - 2.8 побудовано для фіксованих значень температури без урахування тепла яке виділяється в процесі фазового перетворення в матеріальній точці.

Уточнена феноменологічна модель поведінки матеріалу в матеріальній точці будується на основі наведених результатів. Графічно вона відрізняється від попередньої моделі наявністю зуба плинності на межі пружної ділянки при активному навантаженні і плавним переходом ділянки BC в CD при розвантаженні. Відповідні якісні результати зображено на

рисунку 2.9, а кількісні показники наведено в таблицях Додатку В.

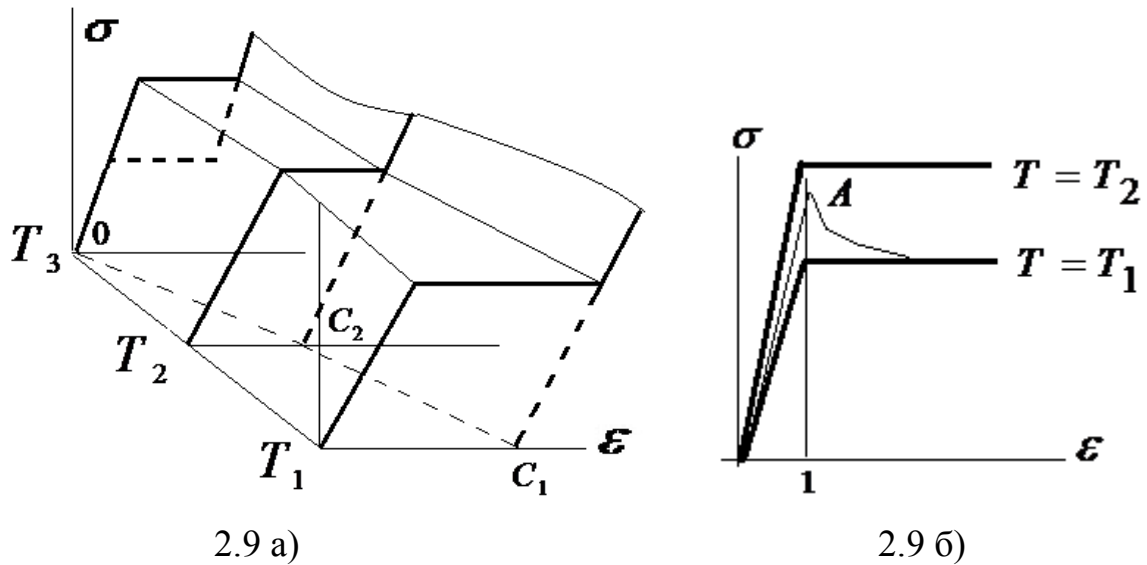


Рисунок 2.9. Локальна діаграма матеріалу.

Зазначимо, що діаграма для уточненої феноменологічної моделі (рисунок 2.9 б)) будується для тієї ж початкової температури, що й діаграма, яка наведена на рисунку 2.9 а). Величина зубу плинності моделюється окремо і порівнюється з експериментальними даними. При цьому необхідно окремо розв'язувати рівняння теплопровідності і по розбіжності температур визначати додаткові значення деформації і напруження [92]. Фактично діаграма з зубом плинності є проекцією траєкторії, яка йде по МТП.

Таким чином, маючи ТМП та закон, за яким змінюється температура в тій чи іншій точці зразка, можна провести уточнення локальної діаграми матеріала.

2.3. Узагальнення фізичних співвідношень

Проведемо узагальнення відомих фізичних співвідношень (теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням та інші) на випадок термопсевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Виходячи з результатів попереднього розділу тензор повної деформації представимо як суму пружної складової ε_{ij}^e , стрибка деформації при фазовому переході ε_{ij}^T , пластичної деформації ε_{ij}^p і деформації ε_{ij}^θ , яка

викликана температурними змінами.

В результаті цього можна записати

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta.$$

Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати так

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_T(T) \frac{\partial f_\gamma(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

де функція

$$f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$$

задає межі деякої поверхні в просторі напруги [11, 42-45, 63, 64 та ін.]. При переході через цю поверхню стрибком зростає деформація, обумовлена фазовим переходом. Будемо задавати її наступним чином

$$f_\gamma(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})} - \sigma_\gamma(T),$$

де

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,$$

$$\sigma_\gamma(T) = \begin{cases} \sigma_M(T), & S_{ij}\dot{S}_{ij} > 0; \\ \sigma_m(T), & S_{ij}\dot{S}_{ij} < 0. \end{cases}$$

Звідси остаточно отримаємо

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{3\varepsilon_T(T)}{2\sigma_\gamma(T)} S_{ij}.$$

Пластичні деформації мають задовольняти співвідношенням тієї чи іншої теорії пластичності. Наведемо визначальні фізичні співвідношення деяких теорій пластичності.

У загальному вигляді їх можна представити таким чином [36]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}. \quad (2.16)$$

Величини a_{ijkl}, b_{ij} можуть залежати від компонент тензорів напружень, деформацій, а також від інших параметрів, які будуть вказуватися нижче по мірі необхідності.

Необхідність використання визначальних співвідношень, записаних в швидкостях, викликана характером використовуваних методів чисельного розв'язання нестационарних задач.

Розглянемо деякі конкретні приклади запису класичних фізичних співвідношень.

2.3.1 Теорія малих пружно-пластичних деформацій

На підставі деформаційної теорії пластичності зазвичай записуються такі фізичні співвідношення [36]

$$S_{ij} = 2G_s \mathcal{E}_{ij}, \quad \sigma = \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon, \quad (2.17)$$

де S_{ij} і \mathcal{E}_{ij} – відповідно девіатори тензорів напружень і деформацій, які визначаються наступним чином

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon.$$

Тут позначено

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

Змінний модуль діаграми зсуву G_s визначається так:

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu)}, \quad E_s = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}.$$

Поряд з цим модулем використовується і дотичний модуль

$$G_t = \frac{E_t}{2(1+\nu)}, \quad E_t = \frac{\dot{\sigma}_u}{\dot{\varepsilon}_u}.$$

Інтенсивності напружень і деформацій визначаються через відповідні девіатори наступним чином

$$\sigma_u = \left(\frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_u = \left(\frac{2}{3} \cdot \mathcal{E}_{ij} \cdot \mathcal{E}_{ij}\right)^{1/2}.$$

Для випадку, коли визначальні співвідношення деформаційної теорії представляються у вигляді (2.16) маємо

$$\begin{aligned}
 a_{kkkk} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} + 4G_s \right) + \omega S_{kk} \cdot \mathcal{E}_{kk}, \quad a_{kkrs} = 2\omega S_{kk} \gamma_{rs}, \\
 a_{kknm} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} - 2G_s \right) + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nm}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr}, \\
 a_{kknm} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} - 2G_s \right) + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nm}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr}, \\
 a_{knkn} &= 2G_s + 2\omega S_{kn} \cdot \gamma_{kn}, \quad a_{knrs} = 2\omega S_{kn} \gamma_{rs}, \\
 b_{ij} &= 0, \quad \omega = 2 \cdot (E_t - E_s) / 3\varepsilon_u \sigma_u, \quad 2\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

З наведених вище формул можна отримати вираз для a_{ijkl} для випадку пружної поведінки матеріалу. Це можна зробити, якщо формально прирівняти $E_s = E_t = E$. Тоді з (2.18) знайдемо

$$\begin{aligned}
 a_{kkkk} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad a_{kknm} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\
 a_{knkn} &= 2G, \quad a_{knrs} = a_{knrz} = a_{kkrs} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

При чисельному розв'язанні нестационарних задач з використанням деформаційної теорії пластичності необхідно заздалегідь знати експериментально отриману залежність між інтенсивністю напруження і інтенсивністю деформації.

2.3.2 Теорія течії

Для класичного варіанту теорії течії з ізотропним зміцненням можна отримати вирази коефіцієнтів a_{ijkl} , зробивши в (2.18) формальну заміну G_s на G . В результаті отримаємо такі коефіцієнти фізичних співвідношень

$$\begin{aligned}
 a_{kkkk} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{kk}, \quad a_{kkrs} = 2\omega S_{kk} \gamma_{rs}, \\
 a_{kknm} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nm}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr},
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$a_{knkn} = 2G + 2\omega S_{kn} \gamma_{kn}, \quad a_{knrs} = 2\omega S_{kn} \gamma_{rs}.$$

Тут також

$$b_{ij} = 0, \quad \omega = 2(E_t - E)/3\varepsilon_u \sigma_u.$$

2.3.3 Теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни (Ю.М.Шевченко)

В теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни розглядаються прості або близькі до них процеси деформування. Траєкторіями деформування, близькими до прямолінійних, називають ті траєкторії, які відхиляються від прямих ліній, що проходять через початок координат і точку на траєкторії, що відповідає початковій межі текучості, не більше, ніж на слід запізнювання векторних властивостей матеріалу (5 - 15 меж плинності за деформаціями). В цьому випадку найменший радіус кривизни траєкторії деформування більше сліду запізнювання. Якщо ж відхилення від прямої лінії більше сліду запізнювання, а радіус кривизни траєкторії деформування менше його, то деформування відбувається по траєкторії малої кривизни [43]. При цьому вектор напружень спрямований по дотичній до траєкторії непружних деформацій.

Співвідношення теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни в швидкостях напружень і деформацій, придатних для дослідження обох процесів, отримано в роботі [36]. Вони, шляхом диференціювання за часом, приведені до вигляду (2.16), де для коефіцієнтів a_{ijkl} мають місце формули (2.19), для b_{ij} отримано наступний вираз

$$b_{ij} = b_{ij}^T - \sqrt{2G} \frac{S_{ij}}{\sigma_u} (\dot{e}_{ij}^{(n)} \cdot \dot{e}_{ij}^{(n)})^{1/2}, \quad k \neq n, \quad r \neq S, \quad (2.21)$$

$$b_{ij}^T = - \left[K \cdot \alpha_t + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_t) \right] \delta_{ij} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Величини G, ν, α_t в загальному випадку передбачаються залежними

від температури. Вирази для компонентів тензора накопиченої за весь час непружної деформації $e_{ij}^{(n)}$ мають різний вигляд в залежності від варіанту співвідношень пластичності (співвідношення теорії простих процесів навантаження або співвідношення процесів малої кривизни) [44].

2.3.4 Теорія Чернякова-Кадашевича-Новожилова

При аналізі нестационарних процесів при деформуванні за межею пружності, як правило необхідно враховувати те, що визначальні співвідношення залежать від швидкості деформації. Це, зокрема пояснюється тим, що теорії пластичності не описують таке явище, як поширення хвиль збільшень напружень зі швидкістю пружних хвиль.

Найбільш часто використовуються теорії, що запропоновані в роботах [62-64, 72]. У загальному випадку такі визначальні співвідношення можна представити також у вигляді (2.16) причому коефіцієнти a_{ijkl} будуть постійними, а b_{ij} є величинами, залежними від компонент тензора напружень, деформацій і, можливо, інших параметрів. У разі ізотропного матеріалу для a_{ijkl} мають місце формули (2.19).

Для приклада наведемо один з варіантів теорії Чернякова-Кадашевича-Новожилова [11]. У позначеннях, прийнятих вище, закон течії має вигляд

$$S_{ij} = \tau_s a(\lambda) \cdot \frac{d \varepsilon_{ij}^p}{d\lambda}, \quad (2.23)$$

де τ_s – локальна межа плинності при зсуві, а

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2}.$$

В результаті для a_{ijkl} отримаємо формули (2.19), а b_{ij} визначаться так

$$b_{ij} = -\frac{2G}{\tau_s} \cdot \frac{\lambda}{a(\lambda)} \cdot S_{ij}, a(\lambda) = \frac{\sigma_u}{G_s}, G_s = \sqrt{3} \cdot \tau_s.$$

Функція $a(\lambda)$ визначається на підставі експериментальних даних і характеризує собою вплив швидкості пластичного деформування на межу текучості.

2.4. Висновки по другому розділу

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. Запропоновано феноменологічну модель поведінки термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів і матеріалів з пам'яттю форми саме в точці. В ній закладена можливість кількісної оцінки складної взаємодії між напруженням, температурою, деформацією і швидкістю навантаження СПФ і ТППМ при моделюванні на континуальному рівні.

Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма пружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних ділянок. Таке трактування теорії призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і вимагає розв'язання граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації перетворення. Це дозволило з єдиної позиції створити модель матеріалу, описати ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження.

На основі відомих експериментальних результатів отримано необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі.

Проведено узагальнення відомих фізичних співвідношень теорій пластичності (теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням та інші) для СПФ та ТППМ.

Показано, що характерною рисою діаграми матеріалу з пам'яттю форми, псевдо-пружністю, псевдо-пружно-пластичністю при деяких швидкостях активного деформування може бути ділянка ідеальної

пластичності. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні, але при визначених температурах.

Запропонований підхід дозволив розширити межі застосування відомих теорій термопластичності на випадок дослідження ТППМ. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, яка побудована для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

РОЗДІЛ III. Метод розв'язання задач термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми

У цьому розділі проведено узагальнення методу покомпонентного розщеплення для розв'язання нестационарних задач термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми і термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

3.1. Повна система рівнянь, граничні та початкові умови

Для дослідження деформування твердого тіла, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження, необхідно розв'язати три групи рівнянь: рівняння руху, геометричні та фізичні рівняння, а також рівнянням теплопровідності [36]. Основними невідомими є температура, швидкості переміщень та компонент тензорів напруження і деформації, що виникають в тілі в процесі його навантаження та нагрівання.

Температурне поле для ізотропного тіла визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності [36]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \theta_3} \right) \right] + W_*(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}),$$

$$W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma \dot{\sigma}}{K}, K = \frac{3E}{1-2\nu}. \quad (3.1)$$

За допомогою функції $W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$ можна враховувати тепло, яке виникає в точці тіла при фазовому переході. В цьому випадку джерело тепла моделюємо так $W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = k_T (\sigma_M - \sigma_m)$; $k_T - const$.

Початковий розподіл температури в тілі

$$T = T_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

Граничні умови задаються наступним чином

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha \theta - q.$$

де n - зовнішня нормаль до поверхні тіла. Величини α , θ , q можуть бути

залежними від часу і координат на поверхні тіла. При різних значеннях коефіцієнта α можна отримати три види граничних умов.

Після визначення поля температур для певного моменту часу розшукуються складові вектора швидкості зміщень і компоненти тензорів напруження і деформації, які задовольняють трьом рівнянням руху, шести геометричним рівнянням і шести фізичним рівнянням.

Рівняння руху, в ортогональній системі координат має вид [36]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta_j} + B_i, \quad (3.2)$$

де

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В геометрично лінійному випадку ортогональної криволінійної системи координат тензор деформації і складові вектора зміщень пов'язані виразом

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \theta_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тоді для швидкостей деформацій можна записати

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \theta_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Система рівнянь (3.2), (3.3) замикається фізичними співвідношеннями виду (2.16). Ці рівняння розв'язуються при визначених початкових і граничних умовах.

Початкові умови задаються при $t = 0$ для усіх швидкостей переміщень, складових тензорів напруження та деформації

На частині поверхні тіла, де задано поверхневі сили, компоненти тензора напруження задовольняють трьом умовам

$$\sigma_{in}(\theta_k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

де n_j - направляючі косінуси зовнішньої нормали до поверхні тіла. На іншій частині поверхні, де задано швидкості зміщення, виконуються умови

$$v_i = V_i(\theta_j, t)$$

Існують і мішані умови, які можуть формулюватися в конкретних задачах.

Повну систему рівнянь (3.2), (3.3), (2.16) запишемо так

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_i} + \vec{B}, \quad (3.4)$$

де \vec{W} - вектор, компонентами якого є швидкості переміщень і складові тензорів напруження та деформації. Матриці A_i та праву частину векторного рівняння (3.4) можна знайти в роботах [6, 36].

3.2. Методи підвищеної точності розв'язання нестационарних задач для термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів

Наближені методи розв'язання багатовимірних нестационарних задач для нелінійних тіл досить детально обговорювалися в роботах [17, 18, 35, 36, та ін.], де проведено порівняльний аналіз деяких обчислювальних методів та надано рекомендації щодо їх використання.

Тут застосовані різноманітні методи числового розв'язання: варіаційні методи, метод кінцевих елементів, різницеві методи. Використовуються й інші підходи, засновані на модифікації вказаних вище методів та їх комбінованому використанні. Звертають на себе увагу різницеві методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях, які дозволяють отримувати економічні різницеві схеми [17, 18].

Застосування даних методів до числового вирішення багатовимірних динамічних задач теорії пружності здійснено в роботі [13]. Що стосується робіт, в яких ідея розщеплення використовувалася при вирішенні динамічних задач теорії пластичності, то можна виділити роботу [14]. Тут ідея розщеплення багатовимірної задачі на одномірні використовувалася спільно з розбиттям досліджуваного тіла на кінцеві елементи. Інші посилання можна знайти в роботі [103].

У цьому розділі дано основні відомості про деякі методи числового розв'язання нестационарних задач термомеханіки суцільного середовища. Це зокрема метод характеристик, метод Лакса-Вендроффа, методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях.

3.2.1. Методи розв'язання нестационарних задач термомеханіки

Історично найбільш часто при числовому рішенні динамічних задач теорії пластичності застосовувався метод характеристик. Цей метод дозволяє точно визначати місце виникнення ударної хвилі усередині тіла і його можна безпосередньо використовувати у випадку багатовимірних задач. Узагальнення методу характеристик на просторовий випадок можна знайти в роботах [2, 3].

Метод Лакса-Вендроффа [3] використовується для чисельного рішення рівнянь дивергентного виду, до яких зводиться широке коло задач газової динаміки, динаміки пружних та пружнопластичних середовищ. Кінцево-різницеві рівняння будуються за допомогою розкладання рішення в ряд Тейлора за часом. Зазначимо, що схема Лакса-Вендроффа добре працює при розрахунку гладких рішень.

Розглянемо ряд чисельних методів розв'язання системи (3.4) в деякій області просторового тіла $a_1 \leq \theta_1 \leq a_2, b_1 \leq \theta_2 \leq b_2, c_1 \leq \theta_3 \leq c_2$ при $t \geq 0$, де введена просторова сітка

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{1i}, \theta_{2j}, \theta_{3k}); \theta_{1i} = \theta_{1i-1} + h_1, \theta_{10} = a_1, i = 1, 2, \dots, N_1, \\ \theta_{2j} = \theta_{2j-1} + h_2, \theta_{20} = b_1, j = 1, 2, \dots, N_2, \\ \theta_{3k} = \theta_{3k-1} + h_3, \theta_{30} = c_1, k = 1, 2, \dots, N_3 \end{array} \right\}. \quad (3.5)$$

Сітку за часовою змінною визначимо з врахуванням дробових кроків:

$$\omega_\tau = \left\{ \begin{array}{l} t^p; t^{p+1/3} = t^p + \tau_1; t^{p+2/3} = t^{p+1/3} + \tau_2; \\ t^{p+1} = t^{p+2/3} + \tau_3, \quad t_0 = 0, p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}. \quad (3.6)$$

Через $\Lambda_i \bar{W}$ в (3.4) позначимо диференціальний оператор $A_i \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta_i}$,

різницеві аналоги якого можна знайти в роботах [36].

Схема реалізації алгоритму методу стабілізації у випадку трьох просторових змінних може бути представлена наступним чином [18, 19]

$$\begin{aligned} \bar{N}^p &= (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \bar{w}^p + \bar{B}^p, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \bar{N}^{p+1/3} = \bar{N}^p, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) \bar{N}^{p+2/3} &= \bar{N}^{p+1/3}, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3 \right) \bar{N}^{p+1} = \bar{N}^{p+2/3}, \\ \bar{w}^{p+1} &= \bar{w}^p + \tau \bar{N}^{p+1}. \end{aligned}$$

Тут E – одинична матриця, $\bar{N}^{p+m/3}$, $m = 0; 1; 2; 3$ - допоміжні вектори.

Схема розщеплення за геометричними властивостями у випадку використання методу предиктор-коректор має вигляд

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \bar{N}^{p+1/6} &= \bar{w}^p + \frac{\tau}{2} \bar{B}^p, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) \bar{N}^{p+1/3} = \bar{w}^{p+1/6}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3 \right) \bar{w}^{p+1/2} &= \bar{w}^{p+1/3}, \frac{1}{\tau} (\bar{w}^{p+1} - \bar{w}^p) = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \cdot \bar{w}^{p+1/2} + \bar{B}^{p+1/2}. \end{aligned}$$

Одним з найбільш ефективних прийомів при чисельному розв'язанні багатовимірних нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є підхід, заснований на використанні для визначення невідомих величин, методу дробних кроків або методу покомпонентного розщеплення у поєднанні з представленням шуканих величин у вигляді сплайн-функцій [18, 19, 36, 93]. Перевага цього підходу обумовлена тим, що він не складніше в реалізації, ніж кінцево-різницевий метод. При цьому рішення знаходиться у вигляді сплайн-функцій в усій області визначення, тоді як різницеве рішення розшукується лише у вузлах просторової сітки. Такий підхід дозволяє підвищити порядок апроксимації, а це дає можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницевим методом при умові досягнення однакової точності обчислень.

Існують різноманітні схеми методу розщеплення. В поєднанні з

методом невизначених коефіцієнтів можна записати традиційну схему розщеплення тривимірного векторного рівняння (3.4) на три одновимірних

$$\begin{aligned} (E - \tau\alpha_{11}\Lambda_1)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{N}^p, \\ (E - \tau\beta_{11}\Lambda_2)\bar{w}^{p+2/3} &= \bar{N}^{p+1/3}, \\ (E - \tau\gamma_{11}\Lambda_3)\bar{w}^{p+1} &= \bar{N}^{p+2/3}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{N}^p &= \tau \frac{\bar{B}^p}{3} + (E + \tau\alpha_{12}\Lambda_1)\bar{w}^p, \\ \bar{N}^{p+1/3} &= \tau \frac{\bar{B}^{p+1/3}}{3} + (E + \tau\beta_{12}\Lambda_2)\bar{w}^{p+1/3} + \tau\beta_{13}\Lambda_2\bar{w}^p, \\ \bar{N}^{p+2/3} &= \tau \frac{\bar{B}^{p+2/3}}{3} + (E + \tau\gamma_{12}\Lambda_3)\bar{w}^{p+2/3} + \tau\Lambda_3(\gamma_{13}\bar{w}^{p+1/3} + \gamma_{14}\bar{w}^p). \end{aligned}$$

Такий запис розрахункової схеми зручний для програмування та аналізу різних варіантів. Перехід від однієї розрахункової схеми до іншої обумовлюється лише зміною невизначених коефіцієнтів. Для них повинні виконуватися умови

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} = 1, \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} = 1, \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} = 1$$

Доволі часто використовується схема Кранка-Ніколсона, для якої

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \frac{1}{2}, \beta_{13} = \gamma_{13} = \gamma_{14} = 0. \quad (3.8)$$

В цьому випадку схема розщеплення має другий порядок апроксимації за часом. У випадку, коли $\alpha_{11} = \beta_{11} = \gamma_{11} = 0$, схема (3.7) стає явною. Явна схема методу покомпонентного розщеплення має лише перший порядок апроксимації метода за часом $O(\tau)$, що знижує загальний ефект.

Якщо взяти $\alpha_{12} = \beta_{12} = \beta_{13} = \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{14} = 0$, то схема (3.7) буде неявною.

При числовому розв'язанні просторових нестационарних задач теорії термомеханіки для тіла складної форми виникає задача, пов'язана з

апроксимацією частинних похідних першого в (3.4) і другого в (3.1) порядків.

В дисертації для цього пропонується застосовувати двовимірні сплайни. Розроблено новий варіант методу покомпонентного розщеплення для розв'язання нестационарних задач теорії термопружнопластичності, заснований на зведенні тривимірної задачі (3.4) до системи трьох послідовно розв'язуваних двовимірних задач на дробових кроках за часом (схема Писмана, Речфорда, Дугласа)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} \right) + \gamma_1 \vec{B}^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} \right) + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} \right) + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1.\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.2.2. МПР Писмана Речфорда Дугласа

В поєднанні з методом невизначених коефіцієнтів МПР дозволяє провести наступний запис для неявної схеми розщеплення системи (3.9)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} (\bar{w}^{p+1/3} - \bar{w}^p) &= \bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p, \\ \frac{1}{\tau} (\bar{w}^{p+2/3} - \bar{w}^{p+1/3}) &= \bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}, \\ \frac{1}{\tau} (\bar{w}^{p+1} - \bar{w}^{p+2/3}) &= \bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3},\end{aligned}\tag{3.10}$$

де для скорочення запису позначено

$$\begin{aligned}\bar{L}_{12} &= \Lambda_1 (\alpha_{11} \bar{w}^{p+1/3} + \alpha_{12} \bar{w}^p) + \Lambda_2 (\alpha_{21} \bar{w}^{p+1/3} + \alpha_{22} \bar{w}^p), \\ \bar{L}_{23} &= \Lambda_2 (\beta_{21} \bar{w}^{p+2/3} + \beta_{22} \bar{w}^{p+1/3} + \beta_{23} \bar{w}^p) + \\ &\quad + \Lambda_3 (\beta_{31} \bar{w}^{p+2/3} + \beta_{32} \bar{w}^{p+1/3} + \beta_{33} \bar{w}^p), \\ \bar{L}_{31} &= \Lambda_3 (\gamma_{31} \bar{w}^{p+1} + \gamma_{32} \bar{w}^{p+2/3} + \gamma_{33} \bar{w}^{p+1/3} + \gamma_{34} \bar{w}^p) + \\ &\quad + \Lambda_1 (\gamma_{11} \bar{w}^{p+1} + \gamma_{12} \bar{w}^{p+2/3} + \gamma_{13} \bar{w}^{p+1/3} + \gamma_{14} \bar{w}^p).\end{aligned}\tag{3.11}$$

З формул (3.10) отримаємо такі розрахункові формули

$$\begin{aligned}
\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{w}^p + \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p), \\
\bar{w}^{p+2/3} &= \bar{w}^{p+1/3} + \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}), \\
\bar{w}^{p+1} &= \bar{w}^{p+2/3} + \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3}).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Диференціальні оператори в (3.11) визначаються за допомогою двовимірних сплайнів [93]

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x; y).$$

безпосереднім диференціюванням за допомогою наступних формул (дивись Додаток Б)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial x}, & \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

При цьому для першого, другого та третього рівнянь з системи (3.9) пари безрозмірних координат визначаються відповідно так

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad y = \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}], \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \\
x &= \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad y = \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \\
x &= \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad y = \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}].
\end{aligned}$$

Відзначимо, що для коефіцієнтів в (3.11) повинні виконуватися умови

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} + \alpha_{12} &= 1, \quad \alpha_{21} + \alpha_{22} = 1, \quad \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1, \quad \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} = 1, \\
\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} &= 1, \quad \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} = 1.
\end{aligned}$$

Якщо взяти

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{31} = \gamma_{31} = \gamma_{11} = 0,$$

то схема (3.12) буде явною. Ці ж самі формули можна використовувати і при розв'язанні задач за допомогою неявних схем. В такому випадку

застосовується ітераційна процедура, що збігається [36]. Всі величини, які містяться в правих частинах формул (3.12) беруться з попередньої ітерації m і обчислюються нові значення для ітерації $m+1$.

Розрахункові формули можна представити так

$$\begin{aligned} (\bar{w}^{p+1/3})_{m+1} &= \left[\bar{w}^p + \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p) \right]_m, \\ (\bar{w}^{p+2/3})_{m+1} &= \left[\bar{w}^{p+1/3} + \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}) \right]_m, \\ (\bar{w}^{p+1})_{m+1} &= \left[\bar{w}^{p+2/3} + \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3}) \right]_m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В якості нульової ітерації для процедури (3.13) обираються результати обчислень за явною схемою (3.12).

Формули (3.13) неявної схеми МПР дозволяють отримати третій порядок апроксимації методу по просторовим координатам.

3.3. МПР підвищеної точності за часом

Для підвищення точності обчислень за часом при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки в цьому розділі дисертації пропонується підвищити порядок апроксимації перших похідних за часом, які стоять в лівій частині формул (3.1) та (3.4). Використаємо підхід описаний в роботі [36].

На відміну від чисто різницевого підходу, похідну за часом будемо апроксимувати за допомогою одновимірних сплайнів.

3.3.1. Ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарної задачі термомеханіки

Для складової W_m вектора розв'язку системи (3.4) можна записати наступний інтерполяційний вираз

$$W_m(t) = \sum_{r=0}^3 \Phi_r(\eta) \cdot W_m(t_{p+r/3}), \quad (3.14)$$

де $\eta = \frac{1}{\tau}(t - t_p), t \in [t_p; t_p + \tau]$.

Це дозволяє одержати порядок $O(\tau^m)$, $m = 3; 4$ відповідно при застосуванні кубічних В-сплайнів та напружених сплайнів.

Продиференціюємо вираз (3.14) за часом

$$\frac{\partial W_m(t)}{\partial t} = \frac{3}{\tau} \sum_{r=0}^3 f_r(\eta) \cdot W_m(t_{p+r/3}) \quad (3.15)$$

Функції $\Phi_r(\eta)$, $f_r(\eta)$ наведено в роботі [36] у таблицях 2.1 та 2.2.

При переході від рівнянь (3.4) до різницевої схеми їх розв'язання похідні за часом у вузлах $t_{p+r/3}$, $r = 1; 2; 3$ визначаються за формулою (3.15). Тоді у випадку застосування МПР (3.9) розрахункову схему можна записати так

$$\begin{aligned} f_3(1/3)\bar{w}^{p+1} + f_2(1/3)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(1/3)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_1, \\ f_3(2/3)\bar{w}^{p+1} + f_2(2/3)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(2/3)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_2, \\ f_3(1)\bar{w}^{p+1} + f_2(1)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(1)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В правій частині цієї системи стоять такі вектори

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p) - f_0(1/3) \cdot \bar{W}^p, \\ \bar{L}_2 &= \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}) - f_0(2/3) \cdot \bar{W}^p, \\ \bar{L}_3 &= \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_2 \bar{B}^{p+2/3}) - f_0(1) \cdot \bar{W}^p. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Значення функцій $f_r(\eta)$ для $\eta = r/3$, $r = 1; 2; 3$ наведені у таблицях 2.1 та 2.2 роботи [36] відповідно для кубічних В-сплайнів та напружених сплайнів.

Позначимо через $L_{1\lambda}, L_{2\lambda}, L_{3\lambda}$, $\lambda = 1; 2; \dots; 15$ складові векторів (3.17).

Перепишемо систему (3.16) для компонент, які складають вектор розв'язок основних і допоміжних шуканих величин $W_\lambda^{p+1}, W_\lambda^{p+2/3}, W_\lambda^{p+1/3}$; і за допомогою третього рівняння виключимо W_λ^{p+1} з перших двох. В результаті отримаємо

$$W_\lambda^{p+1} = \frac{1}{f_3(1)} \cdot \{L_{3\lambda} - f_1(1)W_\lambda^{p+1/3} - f_2(1)W_\lambda^{p+2/3}\}. \quad (3.18)$$

Після виключення величин W_λ^{p+1} з першого та другого рівнянь системи, одержимо систему, на підставі якої можна організувати ітераційну процедуру визначення допоміжних значень $W_\lambda^{p+2/3}, W_\lambda^{p+1/3}$ на дробових кроках

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot (W_\lambda^{p+1/3})_j + a_{12} \cdot (W_\lambda^{p+2/3})_j &= (c_{1\lambda})_{j-1} \quad , \\ a_{21} \cdot (W_\lambda^{p+1/3})_j + a_{22} \cdot (W_\lambda^{p+2/3})_j &= (c_{2\lambda})_{j-1} \quad . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тут j – номер ітерації, а також введені позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= f_3(1) \cdot f_1(1/3) - f_1(1) \cdot f_3(1/3), \quad a_{12} = f_3(1) \cdot f_2(1/3) - f_2(1) \cdot f_3(1/3), \\ a_{21} &= f_3(1) \cdot f_1(2/3) - f_1(1) \cdot f_3(2/3), \quad a_{22} = f_3(1) \cdot f_2(2/3) - f_2(1) \cdot f_3(2/3), \\ c_{1\lambda} &= f_3(1) \cdot L_{1\lambda} - f_3(1/3) \cdot L_{3\lambda}, \quad c_{2\lambda} = f_3(1) \cdot L_{2\lambda} - f_3(2/3) \cdot L_{3\lambda}. \end{aligned}$$

Нульове наближення для величин $(W_m^{p+1/3})_0$ та $(W_m^{p+2/3})_0$ визначається за допомогою формул явної схеми. Після цього обчислюються всі

$$c_{1\lambda}, c_{2\lambda}, \lambda = 1; 2; \dots; 15.$$

Розв'язок системи (3.19) можна записати так

$$\begin{aligned} (W_\lambda^{p+1/3})_j &= \hat{\lambda}_1 \cdot (L_{1\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_2 (L_{2\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_3 (L_{3\lambda})_{j-1}, \\ (W_\lambda^{p+2/3})_j &= \hat{\lambda}_4 \cdot (L_{1\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_5 (L_{2\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_6 (L_{3\lambda})_{j-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Якщо для апроксимації похідних за часом застосовуються кубічні В – сплайни, то

$$\hat{\lambda}_1 = 23/12; \hat{\lambda}_2 = -4/3; \hat{\lambda}_3 = 5/12; \hat{\lambda}_4 = 7/3; \hat{\lambda}_5 = -2/3; \hat{\lambda}_6 = 1/3$$

(ці значення отримано на підставі формул (2.108) та даних з таблиці 2.1 роботи [36]. У випадку застосування *напружених* сплайнів (формули (2.108) та дані з таблиці 2.2 роботи [36]) отримаємо наступні значення

$$\hat{\lambda}_1 = 1,995; \hat{\lambda}_2 = -1,406; \hat{\lambda}_3 = 0,411; \hat{\lambda}_4 = 2,406; \hat{\lambda}_5 = -0,737; \hat{\lambda}_6 = 0,331.$$

Процес ітерації за допомогою формул (3.20) проводиться доти, поки сусідні ітерації не будуть відрізнятися одна від одної не більше наперед заданої величини. Після цього на підставі формули (3.18) визначається розв'язок векторного рівняння W_m^{p+1} на повному кроці за часом.

Відзначимо, що з практичної точки зору процес ітерації, організований за допомогою формул (3.20) дає результати, аналогічні тим, які розраховуються на підставі явної схеми, але зі значно більшим кроком інтегрування за часом. Це дозволяє суттєво зменшити час розрахунку розв'язання нестационарної задачі у порівнянні з підходом, заснованим на використанні формул (3.13).

3.3.2. Ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності

Аналогічно будується ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності. За допомогою схеми Писмана, Речфорда, Дугласа зведемо тривимірне рівняння (3.1) до системи трьох послідовно розв'язуваних двовимірних задач на дробових кроках за часом

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= +\frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} \right] + \gamma_1 W_*, \quad t \in [t_p; t_{p+1/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= +\frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_3^2} \right] + \gamma_2 W_*, \quad t \in [t_{p+1/3}; t_{p+2/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= +\frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_3^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1^2} \right] + \gamma_3 W_*, \quad t \in [t_{p+2/3}; t_{p+1}], \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1, \quad T \in [T^p; T^{p+1}], \quad p = 0; 1; 2 \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пари безрозмірних координат для першого, другого та третього рівнянь системи (3.21) визначаються відповідно так

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{h_1} (\theta_1 - \theta_{1i}), \quad y = \frac{1}{h_2} (\theta_2 - \theta_{2j}), \quad \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}], \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \\ x &= \frac{1}{h_2} (\theta_2 - \theta_{2j}), \quad y = \frac{1}{h_3} (\theta_3 - \theta_{3k}), \quad \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \\ x &= \frac{1}{h_3} (\theta_3 - \theta_{3k}), \quad y = \frac{1}{h_1} (\theta_1 - \theta_{1i}), \quad \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}]. \end{aligned}$$

Для підвищення точності обчислень другі похідні в правій частині цього рівняння будемо апроксимувати за допомогою формул, які отримані за

допомогою двовимірних сплайнів

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial y^2}.$$

На відміну від чисто різницевого підходу, похідну за часом будемо апроксимувати за допомогою сплайнів. Якщо скористатися виразом для сплайну з роботи [36]

$$T(t) = \sum_{r=0}^3 \Phi_r(\eta) \cdot T(t_{p+r/3}), \eta = \frac{1}{\tau}(t - t_p), t \in [t_p; t_p + \tau],$$

то

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{3}{\tau} \sum_{r=0}^3 f_r(\eta) \cdot T(t_{p+r/3}) \quad (3.22)$$

Функції $\Phi_r(\eta)$, $f(\eta)$ наведено в роботі [36] у таблицях 2.1 та 2.2.

З урахуванням (3.23) розрахункову схему (3.21) можна записати так

$$\begin{aligned} f_3(1/3)T^{p+1} + f_2(1/3)T^{p+2/3} + f_1(1/3)T^{p+1/3} &= M_1, \\ f_3(2/3)T^{p+1} + f_2(2/3)T^{p+2/3} + f_1(2/3)T^{p+1/3} &= M_2, \\ f_3(1)T^{p+1} + f_2(1)T^{p+2/3} + f_1(1)T^{p+1/3} &= M_3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Через M_1, M_2, M_3 позначені різницеві аналоги правих частин системи (3.21)

$$\begin{aligned} M_1 &= \tau(M_{12} + \gamma_1 W_*^p) - f_0(1/3) \cdot T^p, \\ M_2 &= \tau(M_{23} + \gamma_2 W_*^{p+1/3}) - f_0(2/3) \cdot T^p, \\ M_3 &= \tau(M_{31} + \gamma_2 W_*^{p+2/3}) - f_0(1) T^p, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} M_{12} &= P_1(\alpha_{11}T^{p+1/3} + \alpha_{12}T^p) + P_2(\alpha_{21}T^{p+1/3} + \alpha_{22}T^p), \\ M_{23} &= P_2(\beta_{21}T^{p+2/3} + \beta_{22}T^{p+1/3} + \beta_{23}T^p) + \\ &\quad + P_3(\beta_{31}T^{p+2/3} + \beta_{32}T^{p+1/3} + \beta_{33}T^p), \\ M_{31} &= P_3(\gamma_{31}T^{p+1} + \gamma_{32}T^{p+2/3} + \gamma_{33}T^{p+1/3} + \gamma_{34}T^p) + \\ &\quad + P_1(\gamma_{11}T^{p+1} + \gamma_{12}T^{p+2/3} + \gamma_{13}T^{p+1/3} + \gamma_{14}T^p). \end{aligned}$$

В цих формулах позначено

$$P_i \equiv \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta_i^2}, i = 1; 2; 3,$$

а для коефіцієнтів повинні виконуватися умови

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} + \alpha_{22} = 1, \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1, \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} = 1, \\ \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} = 1, \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} = 1.$$

При

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{31} = \gamma_{31} = \gamma_{11} = 0$$

схема (3.23) буде явною.

Перетворимо систему (3.23). З її третього рівняння знайдемо T^{p+1}

$$T^{p+1} = \frac{1}{f_3(1)} \cdot \left\{ M_3 - f_1(1)T^{p+1/3} - f_2(1)T^{p+2/3} \right\}. \quad (3.24)$$

Після виключення величини T^{p+1} з першого та другого рівнянь системи (3.23) одержимо систему, на основі якої можна організувати ітераційну

процедуру визначення допоміжних величин $T^{p+1/3}, T^{p+2/3}$

$$a_{11} \cdot (T^{p+1/3})_j + a_{12} \cdot (T^{p+2/3})_j = (C_1)_{j-1}, \\ a_{21} \cdot (T^{p+1/3})_j + a_{22} \cdot (T^{p+2/3})_j = (C_2)_{j-1}. \quad (3.25)$$

де j – номер ітерації, а також позначено

$$a_{11} = f_3(1) \cdot f_1(1/3) - f_1(1) \cdot f_3(1/3), \quad a_{12} = f_3(1) \cdot f_2(1/3) - f_2(1) \cdot f_3(1/3), \\ a_{21} = f_3(1) \cdot f_1(2/3) - f_1(1) \cdot f_3(2/3), \quad a_{22} = f_3(1) \cdot f_2(2/3) - f_2(1) \cdot f_3(2/3), \\ C_1 = f_3(1) \cdot M_1 - f_3(1/3) \cdot M_3, \quad C_2 = f_3(1) \cdot M_2 - f_3(2/3) \cdot M_3.$$

Нульове наближення для величин $(T^{p+1/3})_0, (T^{p+2/3})_0$ визначається за допомогою формул явної схеми. Після цього обчислюються C_1, C_2 . Перша та всі наступні ітерації для $j = 1, 2, \dots$ визначаються з системи (3.25) так як і в попередньому параграфі. Розв'язок системи (3.25) можна записати так

$$(T^{p+1/3})_j = \hat{\lambda}_1 \cdot (M_1)_{j-1} + \hat{\lambda}_2 (M_2)_{j-1} + \hat{\lambda}_3 (M_3)_{j-1}, \\ (T^{p+2/3})_j = \hat{\lambda}_4 \cdot (M_1)_{j-1} + \hat{\lambda}_5 (M_2)_{j-1} + \hat{\lambda}_6 (M_3)_{j-1}. \quad (3.26)$$

Тут $\hat{\lambda}_1 = 23/12$; $\hat{\lambda}_2 = -4/3$; $\hat{\lambda}_3 = 5/12$; $\hat{\lambda}_4 = 7/3$; $\hat{\lambda}_5 = -2/3$; $\hat{\lambda}_6 = 1/3$ якщо для апроксимації похідних за часом застосовуються кубічні В – сплайни і $\hat{\lambda}_1 = 1,995$; $\hat{\lambda}_2 = -1,406$; $\hat{\lambda}_3 = 0,411$; $\hat{\lambda}_4 = 2,406$; $\hat{\lambda}_5 = -0,737$; $\hat{\lambda}_6 = 0,331$ у випадку застосування *напружених* сплайнів.

Процес ітерації проводиться доти, поки розходження між значеннями температури на сусідніх ітераціях не досягне значення наперед заданої величини. Після цього на підставі формули (3.24) визначається розв'язок T^{p+1} на повному кроці за часом.

З практичної точки зору процес ітерації, організований за допомогою формул (3.26) може дати результати, аналогічні тим, які розраховуються і на підставі явної схеми, але з більшим кроком інтегрування за часом. Це суттєво зменшує час розрахунку розв'язання нестационарної задачі теплопровідності у порівнянні з алгоритмом наведеним в роботі [36].

3.4. Порівняння і оцінки ефективності методу

Приступаючи до числового розв'язання конкретної нестационарної задачі термомеханіки, необхідно визначитися з вибором сіток ω_h і ω_τ . Тут важливе місце займає питання, пов'язане з оцінкою точності обчислень, що в кінцевому підсумку призводить до питання про обґрунтований вибір кроків інтегрування $\tau, h_1, h_2, h_3, h = \max(h_1; h_2; h_3)$.

Застосування кубічних В-сплайнів для апроксимації похідних за координатами дозволяє досягнути третій $O(h^3)$ і другий $O(h^2)$ порядок апроксимації відповідно для внутрішніх вузлів сітки ω_h і вузлів, розміщених на границях тіла. Для *напружених* сплайнів маємо відповідно величини порядку $O(h^4)$ і $O(h^3)$ [36]. Ці відомі апіорні оцінки дозволяють отримати наближену оцінку ефективності розробленого варіанта методу покомпонентного розщеплення, порівнявши його з класичним кінцево-різницеvim методом.

Нехай $l = \max(l_1; l_2; l_3)$ кроки інтегрування для сітки за координатами, яка використовується в класичному різницевому методі, яка аналогічна по суті сітці (3.5). В роботі [36] з'ясовано, у скільки разів більше порівняно з l можна обирати h (h - максимальний крок сітки ω_h), але з умовою, щоб похибка апроксимації запропонованого методу не перевищувала б похибки класичного різницевого методу. Для цього потрібно, щоб

$$h^k \leq l. \quad (3.27)$$

При використанні кубічних В-сплайнів $k = 2$ і у випадку застосування напружених сплайнів $k = 3$. Умова (3.27) отримана шляхом порівняння порядків апроксимації похідних за координатами для сплайн - апроксимацій з одного боку та різницевої апроксимації з іншого боку, коли точність обчислень не нижче точності обчислень за допомогою чисто різницевого підходу. Після обрання мінімально допустимого значення l можна отримати максимальне допустиме відношення h/l . Для цього треба скористатися умовою стійкості Куранта

$$h > l > a_* \tau. \quad (3.28)$$

Тут a_* - максимальна швидкість хвилі в тілі. Якщо скористаємося величиною a_* , отриманою для пружного півпростору, то (3.28) прийме вигляд

$$\frac{h}{H_0} > \frac{l}{H_0} > \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \frac{\tau}{\tau_0} \quad (3.29)$$

Через τ_0 і H_0 позначені одиниці часу та довжини, які між собою пов'язані співвідношення $H_0/\tau_0 = \sqrt{G/\rho}$, де $\sqrt{G/\rho}$ - швидкість поширення поперечної хвилі в півпросторі. Конкретні значення для τ_0 і H_0 визначаються залежно від розмірів тіла V і виходячи зі швидкості протікання в часі досліджуваних нестационарних процесів термомеханіки.

Ефект від використання для апроксимації похідних за допомогою двовимірних сплайнів обумовлений вибором більших кроків h_n у порівнянні з аналогічними кроками l_n . Важливо й те, що відношення τ/h_n менше, ніж τ/l_n , а це сприятливо позначається на стійкості обчислень і покращує збіжність. Відзначимо, що ступінь економності такого підходу перевірялася в задачах, розглянутих в наступному розділі.

Для оцінки збіжності наближеного розв'язання по часу до можливого точного розв'язку в роботі [36] проведено порівняння між собою двох наближених розв'язань векторного рівняння (3.4) $\vec{W}_0(t)$ і $\vec{W}_1(t)$. Вони будуються за допомогою розрахункових формул явної схеми методу покомпонентного розщеплення у вузлах сітки ω_n . Розв'язк $\vec{W}_0(t)$ будується з кроком τ сітки ω_τ , а $\vec{W}_1(t)$ отримано для $\tau/2$. Доведено, що з точністю до величин порядку $O(\tau^3)$ справедлива оцінка

$$|\vec{W}_1(t) - \vec{W}_0(t)| \leq N \cdot A \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^2, \quad A - const. \quad (3.30)$$

Ця нерівність дозволяє оцінити різниці між нульовим і першим наближенням лише для кроку τ , коли $t \in [0; N\tau]$.

Для послідовності наближених розв'язків $\vec{W}_0(t), \vec{W}_1(t), \dots, \vec{W}_{n+1}(t)$, де кожне наступне наближення відрізняється від попереднього тим, що воно побудоване з кроком інтегрування за часом в два рази меншим, справедлива оцінка[36]

$$|\vec{W}_{n+1}(t) - \vec{W}_0(t)| \leq 2NA \left(\frac{\tau}{h}\right)^2. \quad (3.31)$$

При цьому кількість таких кроків відповідно в два рази збільшується.

Нерівності (3.24) і (3.25) можна використовувати для оцінки наближених розв'язків нестационарних тривимірних задач термомеханіки використовуючи лише нульові та перші наближення складових вектора

розв'язку $(W_m(t))_0$, $(W_m(t))_1$.

3.5. Висновки по третьому розділу

У цьому розділі запропоновано узагальнення методу покомпонентного розщеплення для розв'язання нестационарних задач термомеханіки для ТППМ і СПФ. Перевага цього підходу обумовлена тим, що він не складніше в реалізації, ніж кінцево-різницевий метод. При цьому рішення знаходиться у вигляді двовимірних сплайн-функцій в усій області визначення, тоді як різницеве рішення розшукується лише у вузлах просторової сітки. Такий підхід дозволив підвищити порядок апроксимації похідних, які входять до складу рівнянь повної системи термомеханіки. Це дозволило обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницевим методом за умови досягнення однакової точності обчислень.

Для підвищення точності обчислень за часом в цьому розділі дисертації запропоновано нову схему підвищення порядку апроксимації перших похідних за часом. На відміну від різницевого підходу похідна за часом наближається (апроксимується) за допомогою одновимірних сплайнів.

Це дозволяє одержати третій і четвертий порядок апроксимації наближеного розв'язку за часом відповідно при застосуванні *кубічних В-сплайнів* і *напружених сплайнів*.

Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів. У разі застосування неявних схем методу розщеплення за геометричними властивостями встановлена збіжність відповідної ітераційної процедури.

РОЗДІЛ IV. Задачі термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми

В цьому розділі розв'язано ряд нестационарних задач для тіл (одновимірних, двовимірних та тривимірних) з термо-псевдо-пружно-пластичністю та пам'яттю форми.

4.1. Нестационарне навантаження одновимірного стрижня з термо-псевдо-пружного матеріалу

Розглянемо першу задачу про розповсюдження повільної хвилі фазового переходу в одновимірному стрижні при його розтягуванні.

4.1.1. Активне навантаження одновимірного стрижня

Визначимо швидкість розповсюдження границі фазового переходу вздовж одновимірного тіла (стрижня) $x \in [0; L]$. На краю $x = 0$ задається швидкість $v = V_0$, з якою розтягується зразок. Край $x = L$ закріплено і тут $v = 0$.

Основними шуканими величинами є: швидкість зміщення вздовж осі стрижня $v(x, t)$; напруження $\sigma(x, t)$; деформація $\varepsilon(x, t)$ і температура $T(x, t)$.

Для визначення невідомих величин запишемо систему

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} (1 + \varepsilon),$$

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \varepsilon - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_S] \\ E_2 (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in [\varepsilon_S, \varepsilon_C] \\ E_3 (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in (\varepsilon_C, \infty) \end{cases},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_*.$$

Тут ρ – густина матеріалу, модулі E_1, E_2, E_3 локальної діаграми матеріалу, а також коефіцієнти лінійного теплового розширення і температуропровідності α_T, a . Через W_* позначена функція, що враховує

тепло, яке виникає в тілі при фазовому переході (на діаграмі матеріалу з положення A в C або з A в B).

Перейдемо до безрозмірних нормованих шуканих величин, для яких збережемо попередні позначення

$$v \Rightarrow \frac{v}{v_*}, \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ST}}, \sigma \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{ST}}, T \Rightarrow \frac{T}{T_*}, x \Rightarrow \frac{x}{x_*}, t \Rightarrow \frac{t}{t_*}.$$

Через v_*, T_*, x_*, t_* позначено деякі задані величини для швидкості зміщення, температури, просторової координати і часу, $\sigma_{ST}, \varepsilon_{ST}$ ($\sigma_{ST} = E_1(T_*)\varepsilon_{ST}$) - границі текучості матеріалу по напруженню і деформації, які визначені при температурі $T = T_*$.

В результаті переходу до безрозмірних нормованих величин систему рівнянь перепишемо так

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k_{1*} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = k_{2*} \frac{\partial v}{\partial x} (1 + k_{4*} \varepsilon), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= k_{3*} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_* t_*, \\ \sigma &= \begin{cases} E_{1*} \varepsilon - K_* \alpha_{T_*} (T - T_0), & \varepsilon \in [0; \varepsilon_S], \\ E_{2*} (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K_* \alpha_{T_*} (T - T_0), & \varepsilon \in [\varepsilon_S; \varepsilon_C], \\ E_{3*} (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K_* \alpha_{T_*} (T - T_0), & \varepsilon \in (\varepsilon_C; \infty). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тут введено безрозмірні позначення

$$\begin{aligned} k_{1*} &= \frac{\sigma_{ST} t_*}{\rho x_* V_*}, \quad k_{2*} = \frac{V_* t_*}{x_* \varepsilon_{ST}}, \quad E_{1*} = \frac{E_1(T)}{E_1(T_*)}, \quad E_{2*} = \frac{E_2(T)}{E_2(T_*)}, \quad E_{3*} = \frac{E_3(T)}{E_3(T_*)}, \\ \alpha_{T_*} &= \frac{\alpha_T T_*}{\varepsilon_{ST}}, \quad K_* = \frac{E_{1*}}{1 - 2\nu}, \quad k_{3*} = t_* \frac{a^2}{x_*^2}. \end{aligned}$$

У випадку малих деформацій до 10% (геометрично лінійний випадок) в другому рівнянні з (4.1) беремо $k_{4*} = 0$, а у випадку великих деформацій (геометрично нелінійний випадок) $k_{4*} = 1$.

З метою спрощення обчислень оберемо $k_{2*} = 1$, тоді

$$V_* = \varepsilon_{ST} \frac{x_*}{t_*}, \text{ а } k_{1*} = \frac{E_1 t_*^2}{\rho x_*^2}.$$

Для розв'язання системи (4.1) введемо сітки за часом t і по координаті x наступним чином

$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_h \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h; x_0 = 0; h = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n \right\}. \quad (4.2)$$

Тоді явну різницеву систему еквівалентну повній системі (4.1) можна записати так

$$v^{p+1} = v^p + \tau k_{1*} \lambda(\sigma^p), \varepsilon^{p+1} = \varepsilon^p + \tau \lambda(v^p)(1 + k_{4*} \varepsilon^p),$$

$$T^{p+1} = T^p + \tau k_{3*} \mu(T^p) + \tau W_*^p t_*. \quad (4.3)$$

Зазначимо, що величина напруження в довільний момент часу може бути визначена безпосередньо по відповідній формулі з (4.1).

В розрахункових формулах (4.3) введено позначення для різницевих операторів, що апроксимують першу і другу похідні по координаті. Наприклад, найпростіші оператори для центральних вузлів мають вид

$$\lambda(y_i^p) = \frac{y_{i+1}^p - y_{i-1}^p}{2h}, \mu(y_i^p) = \frac{y_{i+1}^p - 2y_i^p + y_{i-1}^p}{h^2}.$$

і дають другий порядок точності на сітці

$$\omega_h \{x_i; i = 1; 2; \dots n - 1\}.$$

На краях стрижня використовуються односторонні різницеві оператори. Відповідно для перших похідних (перший порядок точності)

$$x = 0; \lambda(y_0^p) = \frac{y_1^p - y_0^p}{h}; \quad x = L; \lambda(y_n^p) = \frac{y_n^p - y_{n-1}^p}{h}$$

і для других похідних (другий порядок точності)

$$x = 0; \quad \mu(y_0^p) = \frac{2y_0^p - 5y_1^p + 4y_2^p - y_3^p}{h^2};$$

$$x = L; \quad \mu(y_n^p) = \frac{2y_n^p - 5y_{n-1}^p + 4y_{n-2}^p - y_{n-3}^p}{h^2}.$$

Більша точність обчислень похідних досягається за допомогою різницевих формул, отриманих в роботі [36].

Для апроксимації перших похідних отримано такі вирази

$$\lambda(y_i^p) = \frac{n_0[y_{i+1}^p - y_{i-1}^p] - k_0[y_{i+2}^p - y_{i-2}^p]}{12h}, \quad i = 2; 3; \dots; n - 2,$$

$$\lambda(y_0^p) = \frac{-k_1 y_0^p + k_2 y_1^p - k_3 y_2^p + k_4 y_3^p}{6h},$$

$$\lambda(y_1^p) = \frac{-k_4 y_0^p - k_5 y_1^p + k_6 y_2^p - k_0 y_3^p}{6h},$$

$$\lambda(y_{n-1}^p) = \frac{k_4 y_n^p + k_5 y_{n-1}^p - k_6 y_{n-2}^p + k_0 y_{n-3}^p}{6h},$$

$$\lambda(y_n^p) = \frac{k_1 y_n^p - k_2 y_{n-1}^p + k_3 y_{n-2}^p - k_4 y_{n-3}^p}{6h}. \quad (4.4)$$

Апроксимація других похідних при числовому розв'язанні рівняння теплопроводності проводиться так

$$\mu(T_i^p) = -m_0 \frac{T_{i+1}^p - 2T_i^p + T_{i-1}^p}{h^2}, \quad i = 1; 2; 3; \dots; n - 1,$$

$$\mu(T_0^p) = \frac{m_1 T_0^p + m_2 T_1^p + m_3 T_2^p + m_0 T_3^p}{h^2},$$

$$\mu(T_n^p) = \frac{m_1 T_n^p + m_2 T_{n-1}^p + m_3 T_{n-2}^p + m_0 T_{n-3}^p}{h^2}. \quad (4.5)$$

В формулах (4.4) і (4.5) використовуються коефіцієнти, які були визначені за допомогою сплайн-функцій. Якщо застосовуються кубічні В-сплайни, що мають четвертий порядок апроксимації, то

$$n_0 = 8; \quad k_0 = 1; \quad k_1 = 11; \quad k_2 = 18; \quad k_3 = 9; \quad k_4 = 2;$$

$$k_5 = 3; \quad k_6 = 6; \quad m_0 = -1; \quad m_1 = 2; \quad m_2 = -5; \quad m_3 = 4.$$

При використанні *напружених* сплайнів, які мають п'ятий порядок

апроксимації

$$\begin{aligned} n_0 &= 7,9136; & k_0 &= 0,9568; & k_1 &= 11,2646; & k_2 &= 18,4641; \\ k_3 &= 9,1344; & k_4 &= 1,9349; & k_5 &= 3,0870; & k_6 &= 5,9787; \\ m_0 &= -0,9817; & m_1 &= 2,1856; & m_2 &= -5,3529; & m_3 &= 4,149. \end{aligned}$$

Граничні умови на краях для рівняння теплопровідності сформулюємо як умови вільного теплообміну

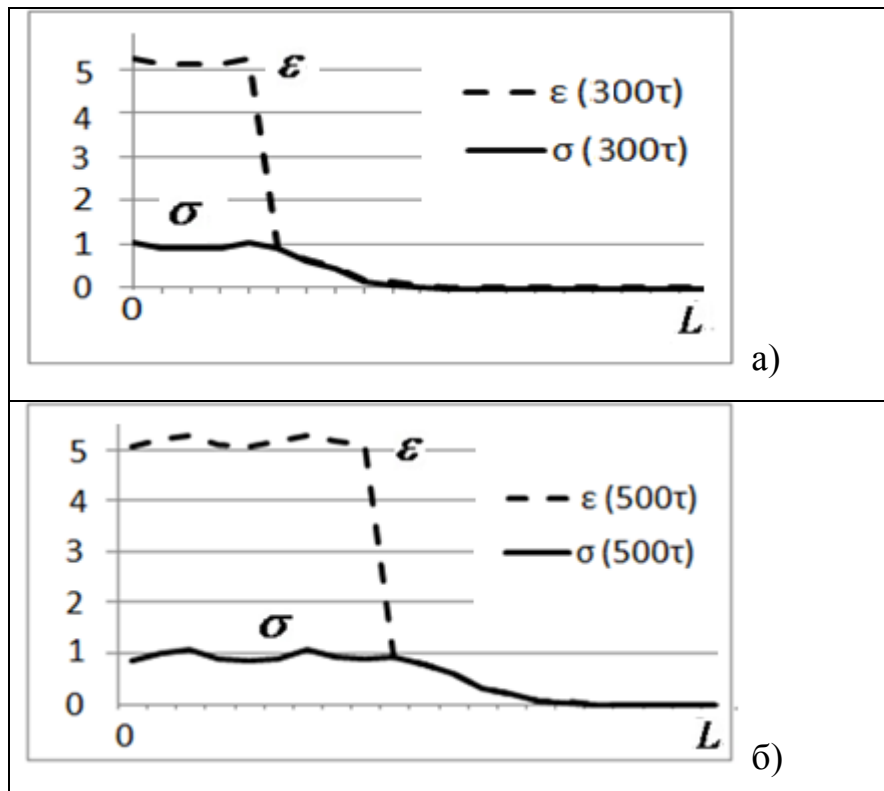
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = 0; L.$$

Тоді з другої і п'ятої формул (4.4) відповідно отримаємо розрахункові формули на краях стрижня

$$\begin{aligned} T_0^P &= (k_2 T_1^P - k_3 T_2^P + k_4 T_3^P) / k_1; \\ T_n^P &= (k_2 T_{n-1}^P - k_3 T_{n-2}^P + k_4 T_{n-3}^P) / k_1. \end{aligned}$$

Результати числового експерименту наведено на рисунках 4.1- 4.3.

Тут показано розподіл деформації та напруження вздовж стрижня для різних моментів часу.



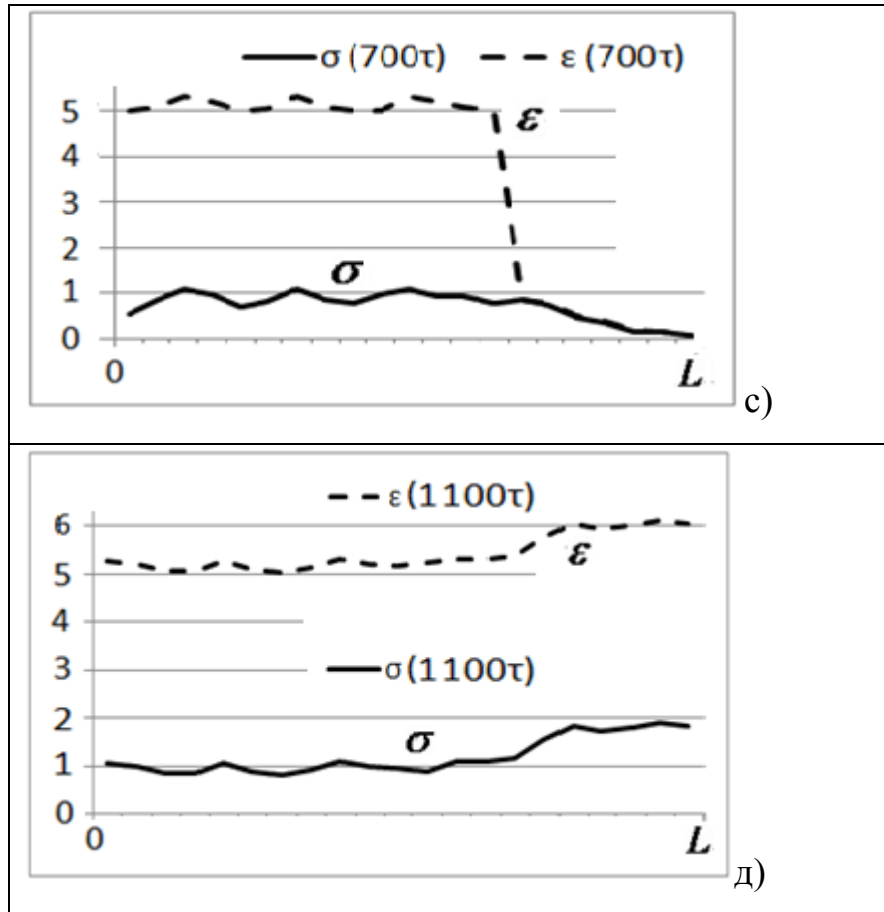
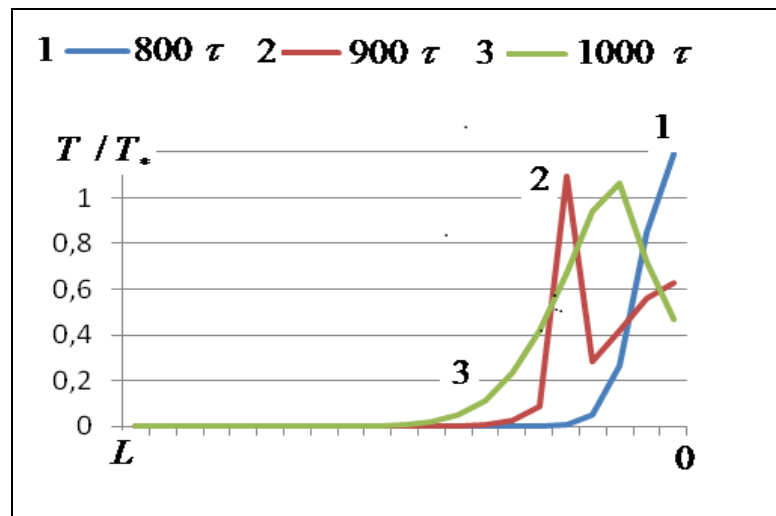
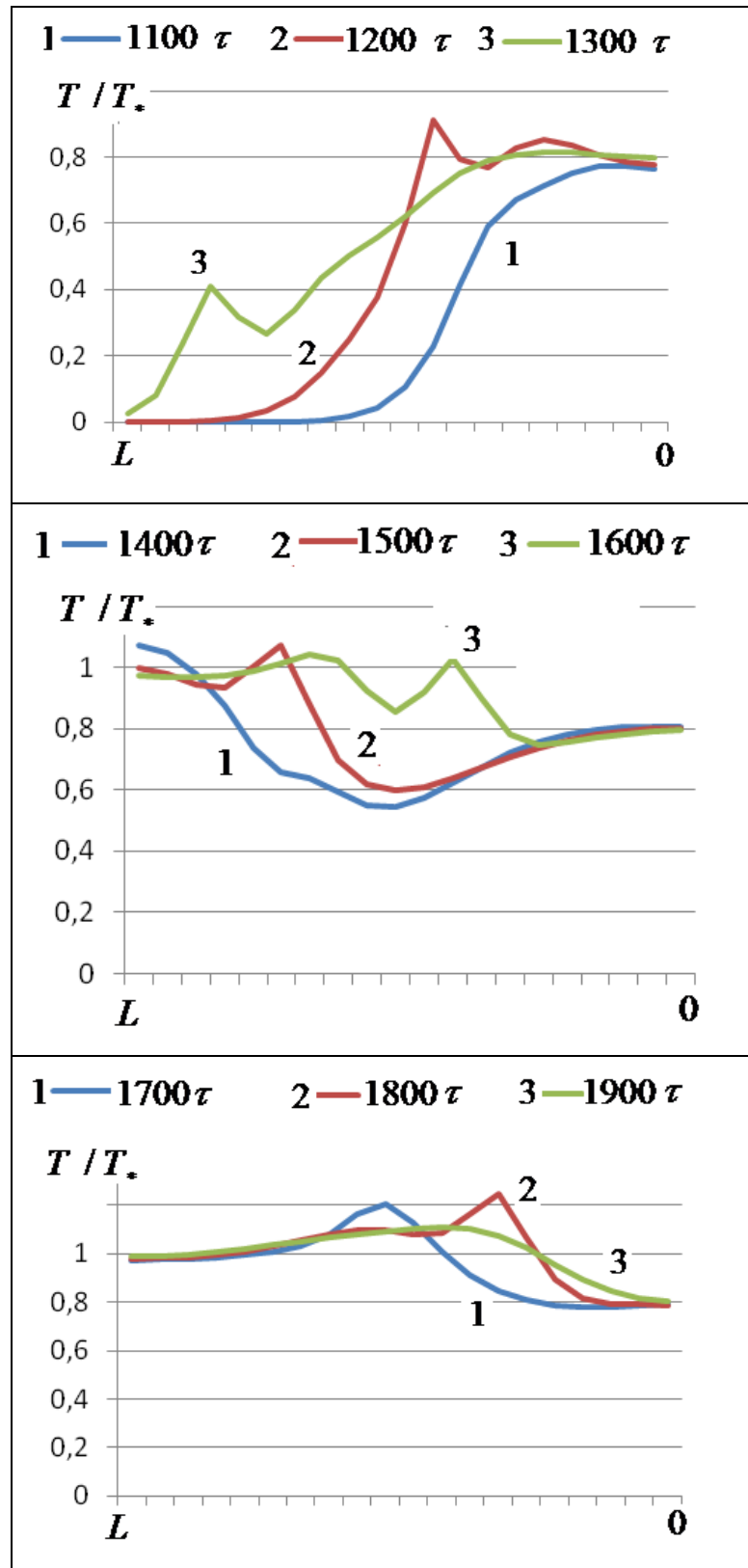


Рисунок 4.1 Розповсюдження повільної хвилі ($\tau = 0,0025$; $T = 10^0 C$)

Зміни в часі температурного поля, обумовленого теплом, що виділяється під час послідовності фазових переходів (перескок з точки А в точку В діаграми матеріалу) показано на рисунках 4.2.





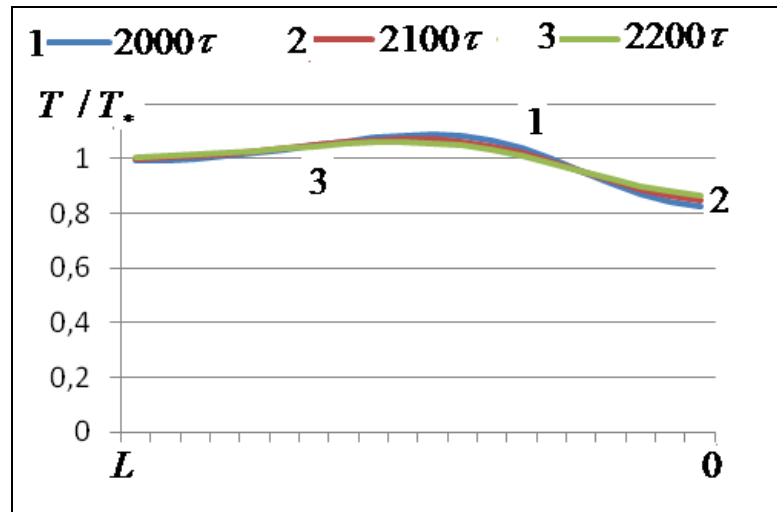


Рисунок. 4.2 Зміни температурного поля вздовж стрижня

При дослідженні збіжності за часом графіки побудовано для одних і тих же моментів часу, але з різними кроками інтегрування $\tau = 0,005$; $\tau = 0,0025$.

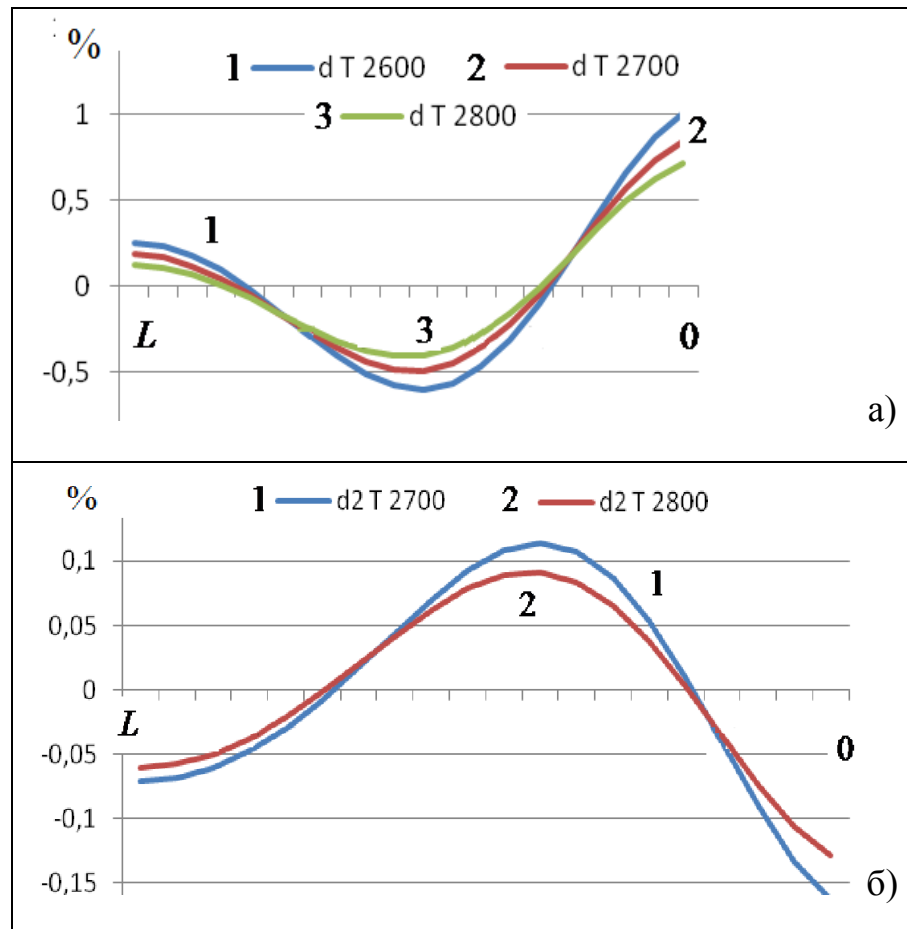


Рисунок. 4.3. Збіжність результатів при визначенні температурного поля вздовж стрижня

На рисунку 4.3а) в процентах показано зміну по довжині стрижня розбіжності значень температури

$$dT = T(t)_{(\tau = 0,005)} - T(t)_{(\tau = 0,0025)}$$

для певних моментів часу, а на рисунку 4.3б) показано зміну розбіжностей другого порядку

$$d^2T = dT(t)_{(\tau = 0,005)} - dT(t)_{(\tau = 0,0025)}.$$

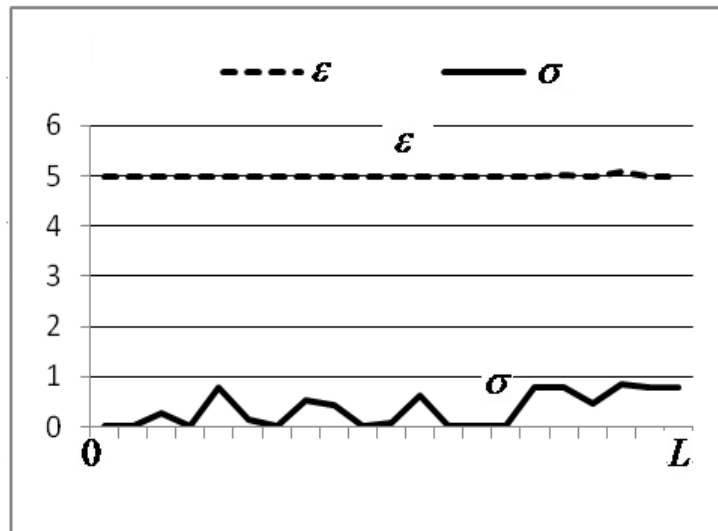
Отримані графіки підтверджують збіжність числових результатів.

4.1.2. Вплив пам'яті форми матеріалу на поведінку стрижня

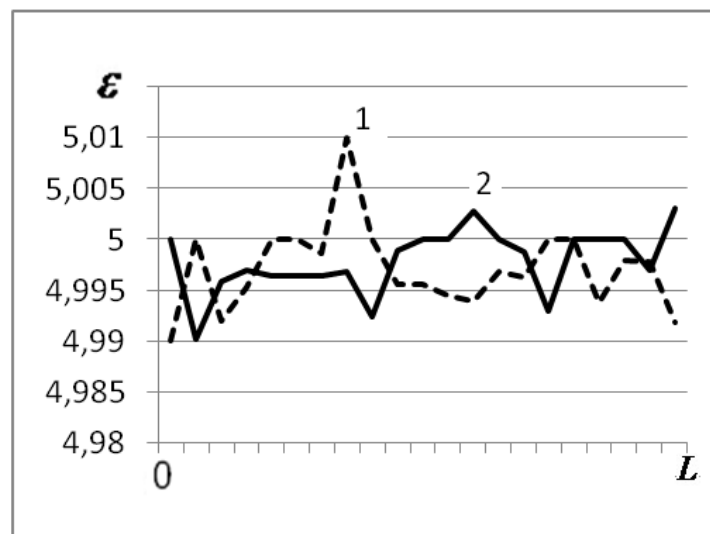
Розглянемо другу задачу про навантаження, наступне розвантаження одновимірного стрижня та його подальше нагрівання, в якій моделюється вплив пам'яті форми матеріалу в матеріальній точці на поведінку стрижня в цілому.

На першому етапі було отримано розв'язок попередньої задачі при $\tau = 0,0025$; $T = 10^0 C$. Для проміжку часу $0 < t \leq 1100\tau$ на краю $x = 0$ задається швидкість $v = V_0$; ($V_0 = -1$), з якою розтягується зразок. Після цього для $t > 1100\tau$ на краю $x = 0$ виконується умова $\sigma = 0$.

Край $x = L$ закріплено і тут швидкість переміщення дорівнює нулю. Розподіл деформації і напруження для $t = 2400\tau$ представлено на рисунку 4.4 а). По всій довжині деформація має майже сталі значення. Ці результати використовуємо, як початкові умови на другому етапі.



а)



б)

Рисунок. 4.4. Розподіл деформації і напруження перед нагрівом.

Зазначимо, що врахування геометричної нелінійності в цій задачі дає розбіжності по деформації менше 0,6 %. На рисунку 4.4 б) лінія 1 отримана в геометрично лінійній постановці, а лінія 2 відповідає геометрично нелінійному варіанту.

На другому етапі стрижень рівномірно по довжині нагрівається при незмінних граничних умовах. Розподіл деформації і напруження для відповідних моментів часу і температури представлено на рисунку 4.5.

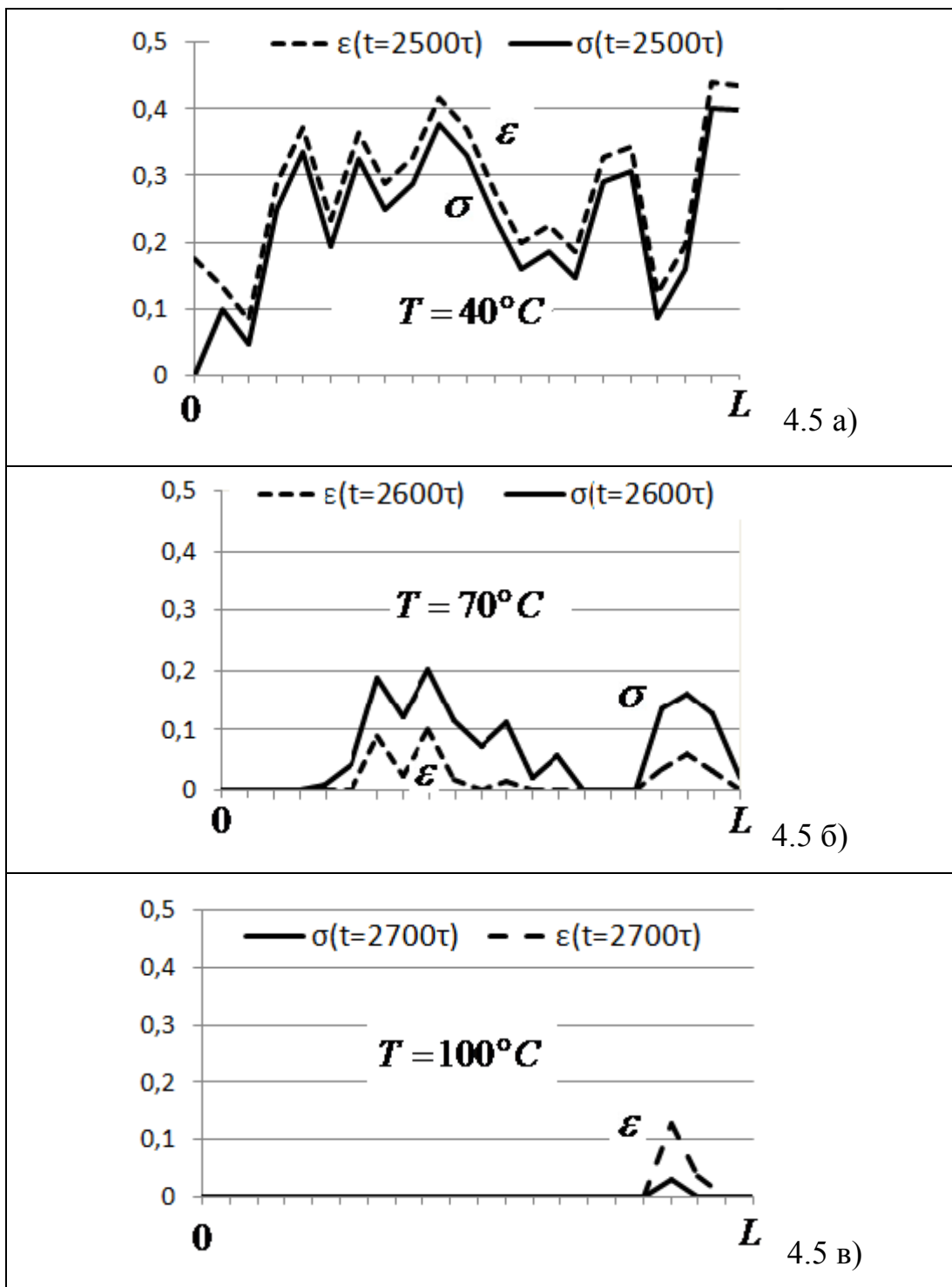


Рисунок. 4.5. Розподіл по довжині стрижня деформації і напруження при нагріванні для різних моментів часу і температур.

Наведені результати демонструють поведінку сплаву Ni-Ti, яка характеризується пам'яттю форми. З ростом температури деформації, які обумовлені фазовим переходом, суттєво зменшуються. Практично вздовж

всього стрижня вони дорівнюють нулю. Залишкові деформації в деяких точках тіла (рисунок 4.5в)) обумовлені тим, що при температурі $T = 100^{\circ}C$ в матеріалі можуть виникати і пластичні деформації (рисунок 2.4).

4.2. Нестационарне навантаження полоси з термо-псевдо-пружного матеріалу

Розглянемо двовимірну задачу про нестационарне деформування полоси з малими послабленнями із сплаву NiTi. Нехай $x \in [0; L]$, $y \in [-H/2; H/2]$, $t \in [0, \infty)$.

На краї з послабленнями ($x = 0$) швидкість переміщення дорівнює нулю. На другому краї $x = L$ задається ненульова швидкість переміщення $v = V_0$. Поверхня полоси $y = -H/2$, $y = H/2$ вільна від напруження.

Шуканими величинами будуть вісім складових вектора \vec{W} : швидкості переміщень v_x, v_y ; складові тензора напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$; деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ і температура T . Визначимо швидкість повільної хвилі, з якою розповсюджується фронт фазового переходу по полосі $x \in [0; L]$.

Система (3.4) для цієї задачі має вигляд

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} + \vec{B}.$$

Температуру визначимо як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + W_*.$$

Через W_* позначена функція, що враховує тепло, яке виникає в тілі при переході з точок A в точки B на діаграмі матеріалу.

Введемо сітки за часом і по координатам

$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_h \left\{ \begin{array}{l} x_i; x_{i+1} = x_i + h_1; x_0 = 0; h_1 = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots; n; \\ y_j; y_{j+1} = y_j + h_2; y_0 = 0; h_2 = \frac{L}{m}; j = 0; 1; 2; \dots; m; \end{array} \right\}.$$

В якості розрахункової візьмемо першу формулу ітераційної процедури з (3.13) і перепишемо її так

$$(\bar{w}^{p+1})_{m+1} = [\bar{w}^p + \tau(\bar{L}_{12} + \bar{B}^p)]_m,$$

$$\bar{L}_{12} = \Lambda_1(\alpha_{11}\bar{w}^{p+1} + \alpha_{12}\bar{w}^p) + \Lambda_2(\alpha_{21}\bar{w}^{p+1} + \alpha_{22}\bar{w}^p).$$

Температурне поле в полосі визначаємо аналогічно за допомогою двовимірного варіанта ітераційної процедури (3.23)

$$(T^{p+1})_{m+1} = \{T^p + \tau[M_{12} + W_*^p]\}_m,$$

$$M_{12} = P_1(\alpha_{11}T^{p+1} + \alpha_{12}T^p) + P_2(\alpha_{21}T^{p+1} + \alpha_{22}T^p).$$

Розглянемо числові результати, отримані для полоси. Нехай $L = 2H$, $h_1 = h_2 = H/10$, $\tau = 0,001$.

На рисунку 4.6 для відповідних моментів часу на фоні поля інтенсивності деформації полоси показано розподіл вздовж лінії локалізації $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$ деформації (лінії 1) і напруження (лінії 2) при активному навантаженні. Пунктиром позначено графік, отриманий за допомогою програмного комплексу ABAQUS. При порівнянні результатів отримана розбіжність з методом підвищеної точності 4,4%.

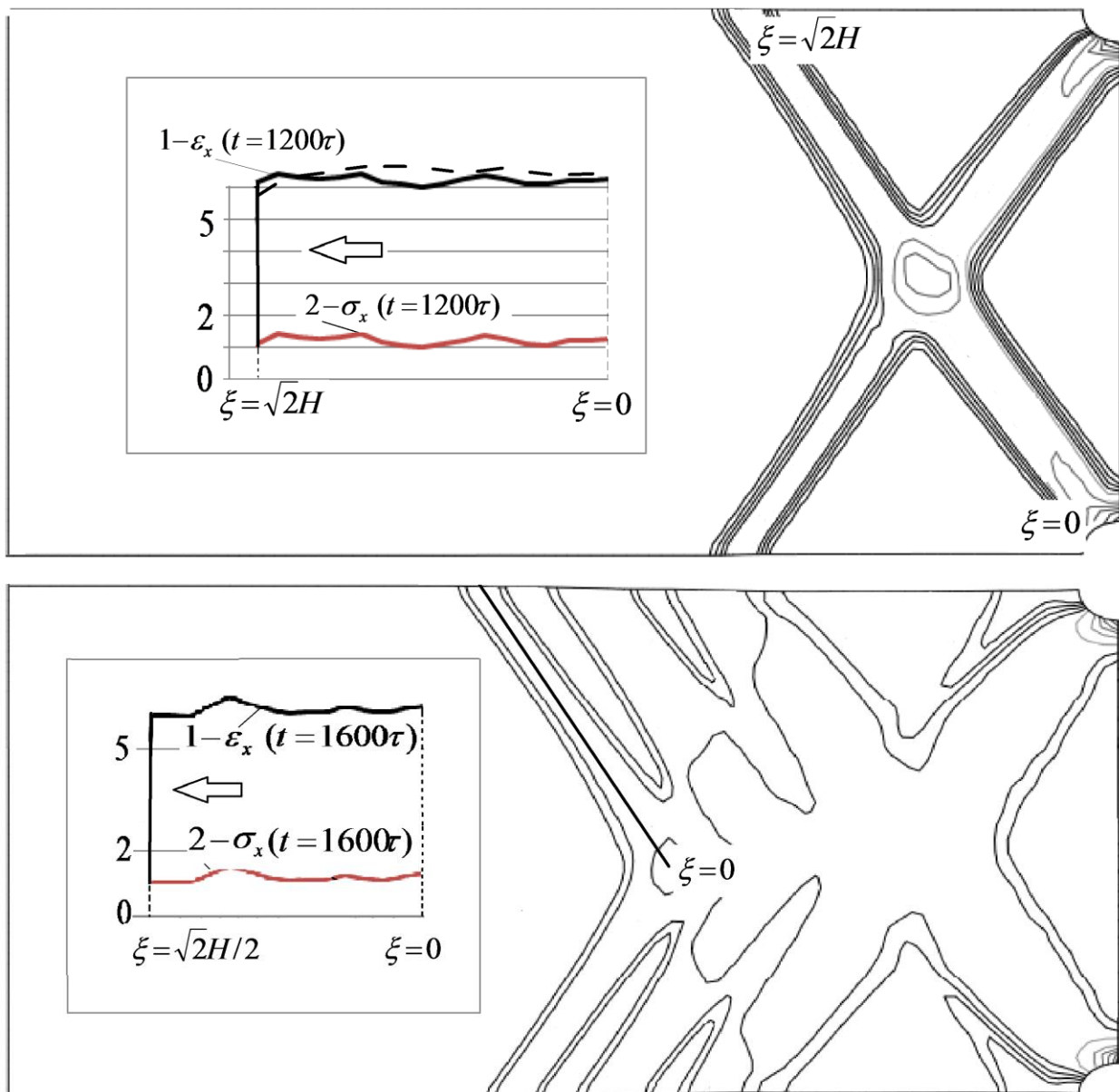


Рисунок 4.6. Розповсюдження повільної хвилі стрибка деформації вздовж лінії локалізації (фазового перетворення) і поле інтенсивності деформації

Зміни температурного поля в часі вздовж полоси локалізації, які обумовлено теплом, що виникає під час фазових переходів, показано на рисунку 4.7

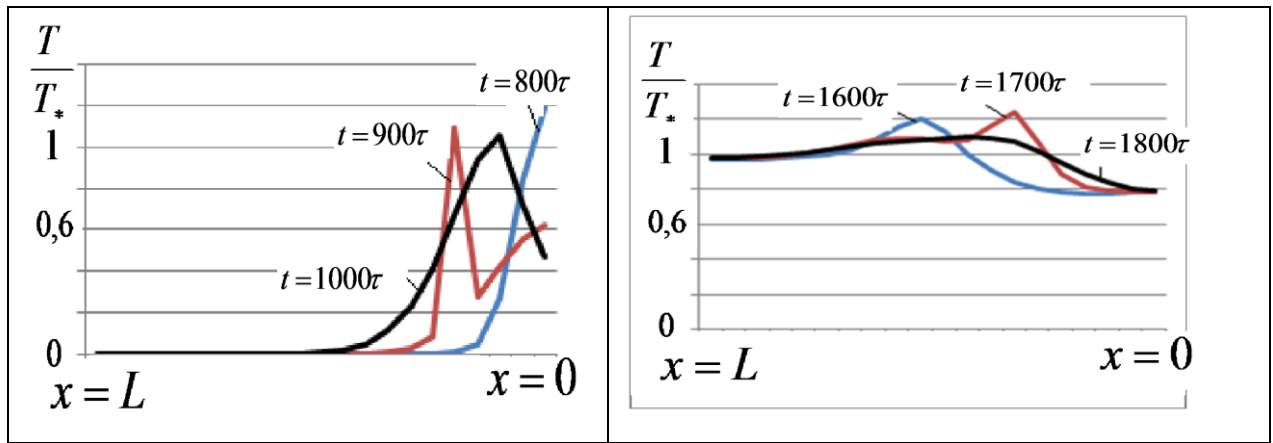


Рисунок 4.7. Зміни температурного поля вздовж полоси локалізації

Чітко проглядаються полоси локалізації, вздовж яких йде процес фазового переходу в матеріалі. Фронт стрибкоподібної зміни деформації розповсюджується вздовж лінії локалізації зі сталою швидкістю, яка залежить лише від механічних властивостей матеріалу [93]. В процесі тепловиділення, обумовленого фазовими переходами, розподіл температури вздовж полоси локалізації стає більш рівномірним.

4.3. Нестационарне навантаження циліндричної трубки з термо-псевдо-пружного матеріалу

Розглянемо задачу про нестационарне деформування циліндричної трубки з виїмкою зі сплаву NiTi. Тут використовується циліндрична система координат $x \in [0; L]$, $r \in [R_0; R_1]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $t \in [0, \infty)$.

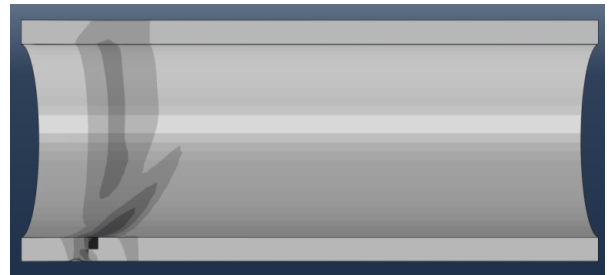
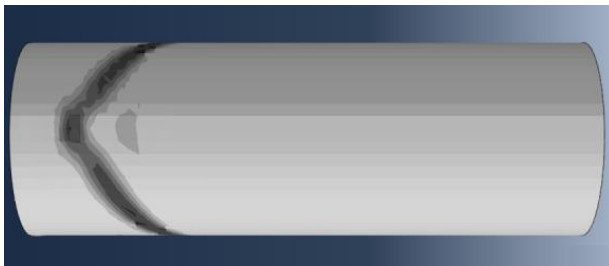
На краю $x = 0$ швидкість розтягування дорівнює нулю. На іншому краю $x = L$ задається швидкість розтягування $v = V_0$. Бокова поверхня трубки вільна від напружень. Виїмка вільна від навантаження і являє собою зовнішній дефект по товщині трубки. Її вершина моделюється в точці з координатами $x = l$, $r = R_1 - h$, $\varphi = 0$.

Шуканими величинами є три складові вектора швидкості переміщення, шість компонент тензора напруження, шість компонент тензора деформації і температура.

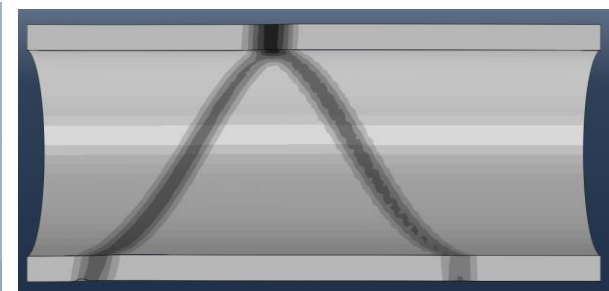
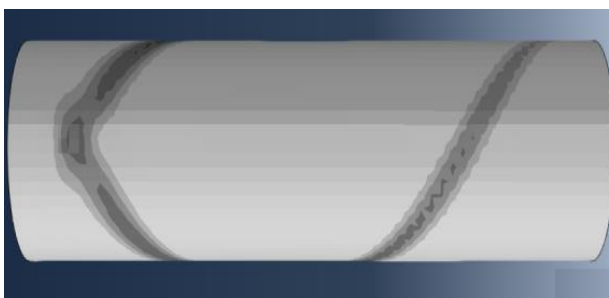
Температуру визначаємо після розв'язання рівняння теплопровідності (3.21), де через W_* позначена функція, що враховує виділення тепла в деяких точках циліндричної трубки під час послідовності фазових переходів. Встановлено, що таке теплове джерело поступово просувається по спіралі.

Відповідна нестационарна просторова задача і рівняння теплопровідності розв'язується за допомогою ітераційної процедури МПР підвищеної точності (формули (3.18), (3.20), (3.24), (3.26)). Для побудови розв'язку повної системи скористаємося двомірними напруженими сплайнами. Невідомі величини інтерполюються за допомогою лінійної комбінації двовимірних сплайнів [93].

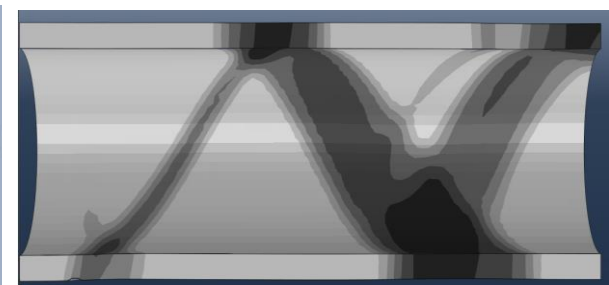
Розглянемо серію числових результатів, отриманих для циліндричної трубки наступних розмірів. Зовнішній радіус 5 см, внутрішній радіус 4см, довжина трубки 30см.



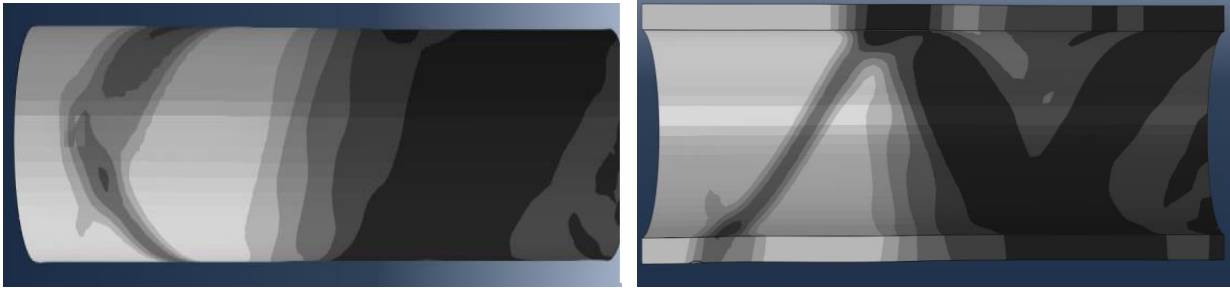
$t=21,91$



$t=28,57$



$t=35,57$



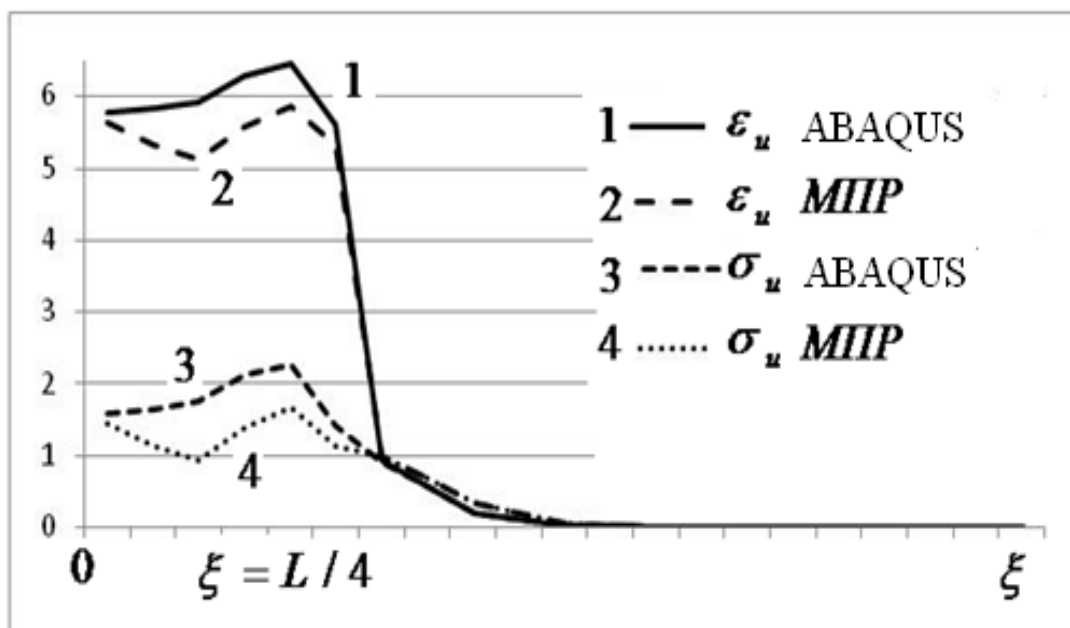
$t=100$

Рисунок 4.8. Розподіл деформацій в трубі для різних моментів часу

Окружність розбита на 58 секторальних елементів. За товщиною вибрано 2 елементи. По довжині трубки - 60 елементів, виїмка знаходиться на відстані 3 см від верхнього, жорстко закріпленого торця, нижній торець розтягуємо на протязі 100с зі швидкістю 0,0001м / с.

Розподіл інтенсивностей пластичних деформацій і безрозмірного напруження по довжині спіралі ξ для різних моментів часу показано на рисунку 4.9, де $\xi = \sqrt{(r_0 a_0)^2 + b_0^2 t}$, $r_0 = (R_0 + R_1)/2$, $a_0, b_0 - const$, $\varphi = a_0 t$, $x = b_0 t$.

Проведено порівняння результатів отриманих за допомогою МПР і програмного комплексу ABAQUS. Максимальні розходження по деформаціям 4,7%, а по інтенсивності напруження до 9,8%.



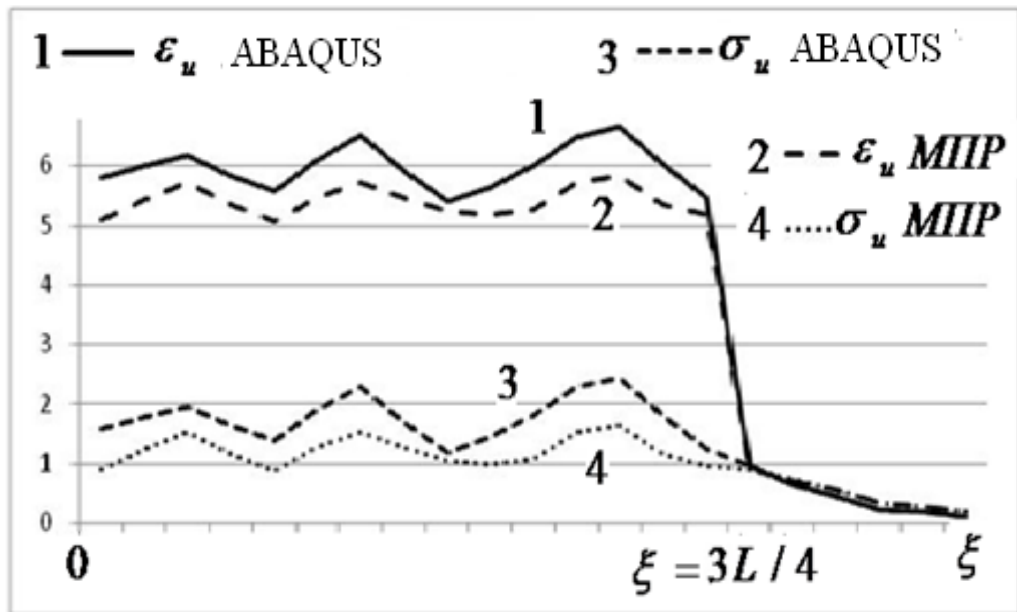


Рисунок 4.9. Розподіл інтенсивності деформацій і напруження по довжині спіралі (для різних моментів часу)

Отримані результати показують, що фронт спіралеподібного розповсюдження деформації поширюється з постійною швидкістю, яка залежить від механічних властивостей матеріалу. В процесі виділення тепла, обумовленого фазовими переходами, розподіл температури вздовж лінії локалізації стає більш рівномірним.

Для оцінки ефективності розробленого методу розв'язання скористаємося нерівністю (3.27). Для випадку застосування напружених сплайнів маємо наближену рівність $h^3 \approx l$. Виходячи з розмірів трубки і кількості елементів $h_1 = h_2 = 0,5$; $h_3(r) = \pi r / 29$, $h = \max(h_1; h_2; h_3) \approx 0,542$ вияснимо, у скільки разів менше порівняно з h треба вибирати l , щоб похибка апроксимації запропонованого методу не перевищувала б похибки класичного різницевого методу. Звідси $l \approx (0,542)^3 \approx 0,16$.

На прикладі цієї нестационарної задачі термомеханіки оцінимо кількість вузлів, в яких розшукується розв'язок.

У випадку застосування запропонованого в дисертації методу кількість вузлів сітки

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{l} x_i \equiv \theta_{1i} = \theta_{1i-1} + h_1, \theta_{10} = 0, i = 1, 2, \dots, N_1, \\ r_j \equiv \theta_{2j} = \theta_{2j-1} + h_2, \theta_{20} = 4, j = 1, 2, \dots, N_2, \\ \varphi_k \equiv \theta_{3k} = \theta_{3k-1} + h_3, \theta_{30} = 0, k = 1, 2, \dots, N_3 \end{array} \right\},$$

де

$$N_1 = 61; N_2 = 3; N_3 = 59.$$

дорівнює 10974. При застосуванні ж різницевого методу кількість вузлів значно збільшується оскільки при одній і тій же точності треба брати $N_1 = 241; N_2 = 9; N_3 = 201$.

Звідси загальна кількість вузлів для розрахунку буде дорівнювати 435969. Тобто збільшиться майже у **40** разів на одному лише кроці інтегрування за часом.

При числовому розв'язанні нестационарної задачі термомеханіки на підставі запропонованого варіанту МПР, треба вибрати крок інтегрування за часом τ , який задовольняє умові стійкого розрахунку Куранта (3.29). Для того щоб порівнювати результати треба дотриматись наближеної рівності

$$\frac{\tau_{MPR}}{h} \approx \frac{\tau_{RM}}{l},$$

де через τ_{MPR} , τ_{RM} позначені відповідно кроки інтегрування за часом для МПР і різницевого методу. Звідси для обраних вище h, l отримаємо $\tau_{MPR} \approx 4\tau_{RM}$.

Оцінимо кількість операцій, яку потрібно зробити для обчислення розв'язку задачі термомеханіки на одному кроці інтегрування за часом.

Очевидно, що для отримання результатів з однією і тією ж точністю тільки на **одному** повному кроці МПР різницеvim методом потрібно провести розрахунки у **160** ($4 \cdot 40$) разів більше.

При цій оцінці не враховувались допоміжні операції, які теж потрібно робити у кожному вузлі. Наприклад, припускалось вже відомим температурне поле.

4.4. Висновки по четвертому розділу

На основі розробленої моделі і методу її реалізації розв'язано новий клас нестационарних задач для одновимірних, двовимірних та тривимірних тіл зі СПФ та ТППМ.

В задачі для одновимірного стрижня, що розтягується отримані результати підтверджують думку про те, що фронт стрибкоподібної зміни деформації поширюється з постійною швидкістю, яка залежить від механічних властивостей матеріалу і температури. При розв'язанні задачі враховувалось тепло, яке виділяється в процесі фазових переходів в точках. Розв'язана нова задача про навантаження, розвантаження одновимірного стрижня та його подальше нагрівання, в якій з модельовано вплив пам'яті форми матеріалу в матеріальній точці на поведінку стрижня в цілому.

В двовимірній нестационарній задачі для тонкої смуги при одноосному розтягуванні побудовано полоси вздовж яких здійснюються фазові переходи і відповідно поля інтенсивності напруження та деформації. Зазначимо, що у разі розв'язання двовимірних просторових задач запропонований метод можна використовувати безпосередньо, не застосовуючи метод розщеплення за геометричними параметрами.

В тривимірній нестационарній задачі для полого циліндра (товстостінної трубки) при комбінованому навантаженні виявлено новий механічний ефект пов'язаний з розповсюдженням вздовж трубки спіралеподібної полоси фазового переходу.

Двовимірні сплайни застосовувалися у рамках цього методу як для апроксимації невідомих величин і їх частинних похідних по координатах, так і для визначення шуканих величин між вузлами просторової сітки.

Порівняння і аналіз результатів дозволили сформулювати загальний критерій ефективності запропонованого підходу, який дає можливість априорі оцінити економність методу по обраним крокам інтегрування. Він полягає в тому, що за умови дотримання однієї і тієї ж точності обчислень в порівнянні з класичним різницеvim методом розроблений метод

дозволяє швидше отримувати результати в силу обрання значно більших кроків інтегрування. Це призводить до суттєвого зменшення як кількості вузлів просторової сітки, так і кроків інтегрування за часом.

ВИСНОВКИ

Основні наукові результати дисертаційної роботи зводяться до наступного.

Запропоновано нову феноменологічну модель для опису властивостей матеріалів з пам'яттю форми. В моделі враховується тепло, яке виділяється в процесі фазових переходів в матеріальних точках тіла. Це дозволило описати ряд експериментальних даних на різних зразках при різних температурах і умовах навантаження, отримати необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі.

На випадок деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу узагальнено фізичні співвідношення теорії пластичності (теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням), що дозволило застосовувати розроблену феноменологічну модель при розв'язанні задач термомеханіки на континуальному рівні.

Розроблено новий варіант ефективного методу розв'язання нестационарних просторових задач термомеханіки у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу, який засновано на використанні ідеї розщеплення повної системи рівнянь за геометричними властивостями. Застосуванні для апроксимації невідомих функцій та їх похідних по координатах двовимірних напружених сплайнів. Такий підхід дозволив підвищити до четвертого порядку (на два порядки) точність апроксимації методу. Це дозволило обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницеvim методом за умови досягнення однакової точності обчислень.

Для підвищення до третього порядку апроксимації метода за часом запропонована ітераційна процедура, що збігається. Початковим наближенням для неї будуть результати, обчислені за допомогою формул явної схеми методу розщеплення. Виявлено, що послідовність наближених розв'язків задачі, отриманих шляхом зменшення кроку інтегрування за часом вдвічі, збігається до точного. Показано, що по двом послідовним

наближенням можна провести оцінку точного розв'язку.

Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів. У разі застосування неявних схем методу розщеплення за геометричними властивостями встановлена збіжність відповідної ітераційної процедури.

Поставлено і на основі запропонованого методу розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-пружно-пластичності.

Виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів, та їх форми і розмірів.

Використання таких економних і ефективних методів розв'язання нестационарних задач теорії термopружнопластичності при дослідженні поведінки елементів конструкцій з матеріалів СПФ та ТППМ дозволяє скорочувати строки створення нових приладів та конструкцій, підвищує їх надійність, зменшує матеріалоємність і знижує собівартість.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б.Боли, Дж.Уэйнер. - М.:Мир, 1964. - 517 с.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев - М.: Наука, 1986. - 544 с.
3. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский - М.: Наука, 1973. – 400 с.
4. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел./ Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова - К.: Наукова думка, 1991. – 216 с.
5. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. / К. Де Бор – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
6. Демічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е.Демічев, П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров - К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.
7. Демічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е.Демічев, П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017 . Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9-12.
8. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко - М.: Наука, 1980. – 352 с.
9. Ивлев Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д.Ивлев, Г.И. Быковцев - М.: Наука, 1971. –232 с.
10. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин - М.: Изд. АН СССР, 1963. – 271 с.

11. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А. Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 890–897.
12. Кузьменко В.И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейноупругих слоистых тел./ В.И. Кузьменко // Прикл. Математика и механика.- 1979.- Т.43-Вып. 5. - С. 893-901.
13. Кукуджанов В.Н. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела / В.Н. Кукуджанов, В.И. Кондауров // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. - М., 1975. - С. 39-84.
14. Кукуджанов В.Н. Численные методы решения неодномерных задач динамики упругопластических сред / В.Н. Кукуджанов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. - Новосибирск, 1980. - Ч. 1. - С. 105-120.
15. Лебедев А. А. Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии. Киев : Наукова думка, 1976. 147 с.
16. Лихачев В.А. Физико-механическая модель упругопластических свойств материалов, учитывающая структурные уровни деформации и кинетические свойства реальных кристаллов / В.А. Лихачев, В.Г. Малинин // Изв. вузов, Физика. – 1984. – 9. – С. 23-28.
17. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье – М.: Наука, 1980. – 512 с.
18. Марчук Г.И. Методы расщепления / Г.И. Марчук - М.: Наука, 1988. - 264 С. 3 - 25.
19. Ооцука К. Сплавы с эффектом памяти формы: Пер. с яп. под ред. Х. Фунакубо / К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки // М.: Металлургия.– 1990. – 224 с.
20. Петров А. Определения перемещений точек тела в некоторых задачах механики путем непосредственного интегрирования /А.Петров, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень

- 13–15 2011. Том 2. – Дніпропетровськ –Дніпродзержинськ. – 2011. – С. 40-42.
21. Петров А. Связанная задача термо-упруго-пластичности с фазовым переходом/ А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 16–19 2012. Том 1 .– Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. – 2012. – С. 52-54.
22. Петров А. Связанная нестационарная задача термопластичности для срединного слоя / А. Петров, Ю.Черняков, П. Стеблянко // VII International Conference «Modern achievements of science and education», August 25 – September 01 2012 р., Opatija (Croatia). – P. 20-22.
23. Петров А. Связанная контактная задача термо-упруго-пластичности / А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 15–18 2013. Том 2. – Дніпродзержинськ. – 2013. – С. 14-18.
24. Петров А. Расчет полей пластических деформаций при термосиловом нагружении / А.Петров // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Випуск 1(24).– Дніпродзержинськ, 2014. – С. 211-216.
25. Петров А. Расчет полей пластических деформаций при термосиловом нагружении / А.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 14–17 2014. Том 2. – Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. –2014. – С. 39-42.
26. Петров А. Методи розв’язання нестационарних задач для складових пластин / А.Петров, Ю.Черняков, П.Стеблянко // IX МНК Математичні проблеми механіки неоднорідних структур Інститут проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, вересень 15–19 2014.– Львів, 2014. – С.135-137.
27. Петров А. Термо-напружено-деформований стан стрижня з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень / А.Петров, Ю.Черняков // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного

- технічного університету. Випуск 1(26), додаток, розділ Математичні проблеми технічної механіки . –Дніпродзержинськ, 2015. – С. 26-36.
28. Петров А. Моделирование псевдоупругого поведения сплавов с памятью формы/ А.Д.Петров, Ю.А.Черняков // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–21 2016. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ. – 2016. – С. 121.
29. Петров А.Д., Экспериментальное обоснование варианта модели поведение материала с памятью формы и псевдоупругостью / А.Д.Петров, К.Э. Демичев, П.А.Стеблянко, Ю.А.Черняков // Моделювання та інформаційні технології : зб.наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С. 81-87.
30. Петров О.Д. Феноменологічна модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалу з пам'яттю форми / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наукових праць / за заг.ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вересень 22–25 2018. – Т.1. – Ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 .- С. 188-189 .
31. Петров О.Д. Комп'ютерне моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу при розтягуванні / О.Д. Петров // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання; матеріали статей МНПК (ISBN 978-617-7468-26-3) - 2018. - Івано-Франківськ.- 2018.- С. 234-237.
32. Петров А. Феноменологическая модель поведения псевдо-упруго-пластического материала при нестационарном нагружении / А. Петров // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 28.- Дніпро, 2018.- С. 133-141.
33. Петров О.Д. Модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалів з зубом плинності / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // МНК

- Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики, квітень 15–18 2019. – Дніпро, Кам’янське. – 2019. – С. 6-7.
34. Рябцев И.А. Наплавка. Материалы. Технологии. Математическое моделирование / И.А. Рябцев, И.К.Сенченков, Э.В.Турык - Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, 2015. – 590 с.
35. Самарский А.А. Экономичные разностные схемы для гиперболических систем уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости / А.А. Самарский // ЖВМ и МФ. - 1965. - Т. 5, N 1. - С. 34-43.
36. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / П.А. Стеблянко. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
37. Стеблянко П. Описание термомеханической поверхности материала при помощи двумерного сплайна / П.Стеблянко, А.Галишин, А.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 14–17 2015 .– Дніпродзержинськ. – 2015. – С. 126.
38. Стеблянко П.О. Числові методи в просторових стаціонарних і нестаціонарних задачах теорії термопружнопластичності / П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 16–19 2018. – Київ, Черкаси, Кам’янське. – 2018. – С. 14-15.
39. Черняков Ю. А. Полоса локализации пластической деформации на интерфейсе между двумя материалами / Ю.А.Черняков, А.Е.Шевелёва // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2014. – Том 22, №5. – Випуск 18, том 1. – С. 138–146.
40. Черняков Ю.А. Модель поведінки матеріалу з пам’яттю форми і псевдо пружністю/ Ю.А.Черняков, О.Д.Петров, П.О.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–20 2017.– Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. – 2017. – С. 14-15.

41. Черняков Ю.А. Модель поведения псевдоупругого материала при нестационарном нагружении / Ю.А.Черняков, П.А.Стеблянко, А.Д.Петров // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. № 2. 2017. – С. 297-303.
42. Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности: фокус на украинские исследования (обзор) / Ю.Н. Шевченко, В.Г.Савченко//. - Прикл. мех.– 2016.– **52**, №3. – С. 3-70.
43. Шевченко Ю.Н., Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2.Термовязкопластичность / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко. – Киев: Наукова думка, 1987. –264 с.
44. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, Р.Г. Терехов. - К.: Наукова думка, 1992. - 328 с.
45. Шевченко Ю.Н. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности / Ю.Н. Шевченко, П.О. Стеблянко, А. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 22.- Дніпропетровськ, 2014.- С. 250-264.
46. Abeyaratne R. Kinetics of materials with wiggly energies: theory and application to the evolution of twinning microstructures in a Cu–Al–Ni shape memory alloy. / R.Abeyaratne, C.Chu, R.D.James // Philos. Mag. A 73, 1996. - P. 457–497.
47. Abeyaratne R. Evolution of phase transitions / R.Abeyaratne, J.K. Knowles. – Cambridge University Press, 2006. – 258 p.
48. Ahadi A. Stress-induced nanoscale phase transition in superelastic NiTi by in situ X-ray diffraction. / A.Ahadi, Q.P. Sun // Acta Mater. 90, 2015. - P. 272–281.
49. Ahadi A. Origin of zero and negative thermal expansion in severely-deformed superelastic NiTi alloy. / A.Ahadi, Y.Matsushita, T.Sawaguchi, Q.P.Sun, K.Tsuchiya // Acta Mater 124, 2017. - P. 79–92.

50. Ahluwalia R. Landau theory for shape memory polycrystals. / R.Ahluwalia, T.Lookman, A.Saxena, R.C.Albers // *Acta Mater.* 52, 2004.-P.209–218.
51. Asaro R.J. Mechanics of solids and materials / R.J.Asaro, V.A. Lubard.- Cambridge University Press. – 2006. – 860 p.
52. Belytschko T. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures / T. Belytschko, W.K. Liu, B. Morgan // John Wiley and Sons. – 2006. – 650 p.
53. Bo. Z. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part I: Theoretical derivations / Z. Bo, D.C.Lagoudas // *Int. J. Eng. Sci.* – 1999. – 37. – P. 1089-1140.
54. Bodner S. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials / S.Bodner, Y.Partom // *J. Appl. Mech.* 42, 1975. P. 385– 389.
55. Bouvet C. A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiracial proportional and nonproportional loadings / C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent // *Europ. J. Mech. A /Solids.* –2004. –23. – P. 37-61.
56. Boyd J.G. Thermomechanical response of shape memory composites / J.G. Boyd, D.S. Lagoudas // *J. Intell. Mater. Systems Struct.* – 1994. – 5. – P. 333-346.
57. Boyd J.G. A thermodynamic constitutive model for the shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloys. / J.G. Boyd, D.S.Lagoudas // *Int. J. Plasticity.* – 1996. – 12. – P. 805-842.
58. Brinson L.C. Stress-induced transformation behavior of a polycrystalline NiTi shape memory alloy: micro and macrome-chanical investigations via in situ optical microscopy. /L.C.Brinson, I.Schmidt, R.Lammering // *J. Mech. Phys. Solids* 52, 2004.- P. 1549–1571.
59. Brocca M. Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model / M.Brocca // *Mech. Phys. Solids.* – 2002. – 50. – P. 1051-1077.

60. Budiansky B. On the mechanics of stress-induced phase transformation in zirconia. / B.Budiansky, L.Truskinovsky // *J. Mech. Phys. Solids* 41 (9), 1993.- P. 1445–1459.
61. Chaboche J.L. Unified cyclic viscoplastic constitutive equations: development, capabilities and thermodynamic framework / J.L.Chaboche // *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. Academic Press Inc., 1996. P. 1–68.
62. Chernyakov Yu. A. Modeling superelastic response of shape memory alloys subjected to complex loading / Chernyakov Yu.A., Polishchuk A.S. // *Advanced problems in Mechanics of Heterogeneous Media and Thin-Walled Structures*. – Dnipropetrovsk. –2010. – P. 97-113.
63. Chernyakov Yu. A. On accounting for deformation by twinning in the theory of microstrains / Yu.A Chernyakov, A.S. Polishchuk // : *Nonlinear dynamics: Proceeding of international conference* . – Kharkov. – 2010. – P. 473–477.
64. Chernyakov Yu. A. On extension of the phenomenological approach in the theory of plasticity / Yu. A. Chernyakov, A. S. Polishchuk , V. P. Shneider // *Journal of Engineering Mathematics*. - 2013. - Vol. 78, Issue 1. - P. 55-66. doi: 10.1007/s10665-011-9470-8.
65. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov // *Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017*. – P. 27-29.
66. Entchev P.V. Modeling porous shape memory alloys using micromechanical averaging techniques / P.V. Entchev, D.C. Lagoudas // *Mech. Mater.* – 2002. – 34. – P. 1-24.
67. Grandi D. A macroscale phase-field model for shape memory alloys with non-isothermal effects: Influence of strain rate and environmental conditions on the mechanical response / D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari // *Acta Materialia* 60 . – 2012. – P. 179–191.

68. Guk N.A. Selection of the informative input parameters for the inverse neural-network models of observed systems /Journal of Mathematical Sciences – 2018. – Vol. 231, №. 5. – P. 678–689.
69. Hart E. L. Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional / E.L.Hart, S. Hudramovich // J. Appl. Math. Mech. – 2016. – Vol. 80, Issue 2. – P. 156–163.
70. He Y.J. Scaling relationship on macroscopic helical domains in NiTi tubes. / Y.J.He, Q.P.Sun // Int. J. Solids Struct. 46 (24), 2009. - P. 4242–4251.
71. Kadashevich Yu.I. Theory of plasticity, taking into account micro stresses / Yu.I.Kadashevich, Yu.A. Chernyakov //Advances in Mechanics.-1992 .- 15(3-4) .– P. 3-39.
72. Kagadiy T.S. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory / T.S.Kagadiy, A.G.Shporta // Visnyk NMU.–2015. – №3(147) P. 76-81.
73. Kim Y.H. Nanocrystallization of a Ti–50.0 Ni (at. %) alloy by cold working and stress/strain behavior / Y.H.Kim, G.B.Cho, S.G.Hur, S.S.Jeong, T.H.Nam // Mater. Sci. Eng. A 438, 2006. - P. 531–535.
74. Ko W.S. Atomic scale processes of phase transformations in nanocrystalline NiTi shape-memory alloys. / W.S.Ko, S.B.Maisel, B.Grabowski, J.B.Jeon, J.Neugebauer // Acta Mater. 123, 2017. - P. 90–101.
75. Kyriakides S. On the propagation of Luders bands in steel strips / S. Kyriakides, J.E. Miller // Journal of Applied Mechanics. – 2000. – Vol.67. – P. 645 –654.
76. Lagoudas D.S. Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: Constitutive model for fully dense CMAs / D.S. Lagoudas, P.B. Entchev // Mech. Mater. –2004. –36. – P. 865-892.
77. Lagoudas D.S. Shape memory alloys, Part II: Modeling of polycrystals / D.S. Lagoudas, P.B. Entchev , P.Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao // Mech. Mater. – 2006. –38/ – P. 430-462.

78. Leclercq S. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys / S. Leclercq, C. LExcellent // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1996. – 44. – P. 953-980.
79. Levitas V.I. Simple micromechanical model of thermoelastic martensitic transformations / V.I. Levitas, E. Stein // *Mechanical Research Communications*. – 1997. – 24, №. P. 309-318.
80. LExcellent C. Thermodynamical model for cyclic behavior of Ni-Ti and Cu-Zn-Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests / C. LExcellent, G. Bourbon // *Mech. Mater.* – 2000. – 24. – P. 59-73.
81. LExcellent C. The two way shape memory effect of shape memory alloys: an experimental study and a phenomenological model / C. LExcellent, S. Leclerg, B. Gabry, G. Bourbon // *Int.J. Plasticity*. – 2000. – 16. – P. 1155-1168.
82. LExcellent C. Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformations under biaxial loading in some polycrystalline shape memory alloys / C. LExcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch, P. Blanc // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2002. – 50. – P. 2717-2735.
83. LExcellent C. Comparison of several models for the determination of the phase transformation yield surface in shape-memory alloys with experimental data / C. LExcellent, A. Schlomerkemper // *Acta Mater.* – 2007. – 55. – P. 2995–3006.
84. Lim J.T. Mechanical behavior of a Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading / J.T. Lim, D.L. McDowell // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1999. – 121. – P. 9-18.
85. Lu. Z.K. Martensitic Transformations and Stress-Strain Relations of Shape-Memory Alloys / Z.K. Lu, G.J. Weng // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1997. – 45. – P. 1905-1928.
86. Lubliner J. Generalized plasticity and shape memory alloys / F. Auricchio, Lubliner J. // *Int. J. Solids Struct.* – 1996. – 33. – P. 247-258.
87. Meyers M.A. Mechanical properties of nanocrystalline materials / M.A.Meyers, A.Mishra, D.J.Benson // *Prog. Mater Sci.* 51, 2006. - P. 427–556.

88. Otsuka K. Superelasticity effects and stress-induced martensitic transformations in Cu-Al-Ni alloy / K. Otsuka, C. Wayman, K. Nakai // *Acta Metall.* –1976. – 24. – P. 207-226.
89. Otsuka K. Successive stress-induced martensitic transformations and associated transformation pseudoelasticity in Cu-Al-Ni alloys. / K.Otsuka, H.Sakamoto, K.Shimizu // *Acta Metall* 27, 1979. - P. 585–601.
90. Otsuka K. Crystallography of martensitic transformations and lattice invariant shears / K. Otsuka // *Mater. Sci. Forum.* – 1990. – 56-58. – P. 393-401.
91. Pator E. Micromechanical Modelling of Superelasticity in Shape Memory Alloys / E. Pator, A. Eberhard, M. Berveiller // *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* –1993. –296. – P. 38-54.
92. Petrov A. Behavior of material with a memory of form and pseudo-elasticity under nonstationary loading of the body / A.Petrov // *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Фізико-математичні науки.* - 2017. - №1. - С. 37-42.
93. Petrov A. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / A.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko, K.Demichev, V.Haydurov // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
94. Petryk H. Interfacial energy and dissipation in martensitic phase transformations. Part II: size effects in pseudoelasticity. / H.Petryk, S.Stupkiewicz, G.Maciejewski // *J. Mech. Phys. Solids* 58, 2010. - P.373–389.
95. Qiao L. Nonlocal superelastic model of size-dependent hardening and dissipation in single crystal Cu-Al-Ni shape memory alloys. / L.Qiao, J.J.Rimoli, Y.Chen, C.A.Schuh, R.Radovitzky // *Phys. Rev. Lett.* 106, 2011. - P.210–216.
96. Qiao L. Computational modeling of size-dependent superelasticity of shape memory alloys. / L.Qiao, R.Radovitzky // *J. Mech. Phys. Solids* 93, 2016. - P. 93–117.

97. Schunsker L.L. Approximation by splines: Theory and applications of spline functions./ L.L. Schunsker : Academic Press.-1969. - 237 p.
98. Schweikeret A.A. An interpolating curve using a spline in tension / A.A. Schweikeret // J. Math. Physics. – 1996. – Vol. 45. – P. 312-317.
99. Shaw J. A. Thermomechanical aspects of NiTi. / J. A. Shaw, S. Kyriakides // J. Mechanics and Physics of Solids 43, 1995. -P. 1243-1281.
100. Shaw J. A. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. / J.A. Shaw, S. Kyriakides // Acta Materialia 45, 1997. - P. 683-700.
101. Shaw J.A. Initiation and propagation of localized deformation in elastoplastic strips under uniaxial tension . / J.A. Shaw, S. Kyriakides // International Journal of Plasticity. – 1998. – Vol.13. – P. 837 – 871.
102. Shevchenko Yu. Methods of calculation in non-stationary problems of theory thermal-plasticity / Yu. Shevchenko, P. Steblyanko, A. Petrov // Applied problems of the fluid mechanics and heat and mass transfer, November 6-8 2014, Dnipropetrovsk. - 2014.- P. 9-11.
103. Steblyanko P.A. Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems / P.A. Steblyanko, Yu. Shevchenko // Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal-Plasticity.- Problems, ETS- Encyclopedia of Thermal Stresses , Springer Verlag, N 7, 2014.- P. 630-636.
104. Steblyanko P. Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / P. Steblyanko, Y. Chernyakov, A. Petrov, V. Loboda // Structural Integrity, Volume 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019.- P. 205-208.
105. Sun Q.P. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys-12 / Q.P. Sun, K.C. Hwang // J. Mech. Phys. Solids. –1993.–41. - P. 2667-2680.

106. Sun Q.P. Effects of grain size on phase transition behavior of nanocrystalline shape memory alloys. / Q.P.Sun, A.Ahadi, M.P.Li, M.X.Chen // *Sci. Chin. Technol. Sci.* 57, 2014. - P.671–679.
107. Tokuda M. Thermomechanical behavior of shape memory alloy under complex loading conditions / M. Tokuda, M. Yea, M. Takakura, P. Sittner // *Int. J. of Plasticity.* 15.– 1999.– P. 223-239.
108. Waitz T. Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM. / T.Waitz, V.Kazykhanov, H.P. Karnthaler // *Acta Mater* 52, 2004. - P.137–147.
109. Waitz T. Size effects on the martensitic phase transformation of NiTi nanograins. / T.Waitz, T.Antretter, F.D.Fischer, N.K.Simha, H.P.Karnthaler // *J. Mech. Phys. Solids* 55 (2), 2007. - P.419–444.
110. Wang X.M. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. / X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue // *International Journal of Plasticity* 24, 2008. - P. 1307–1332.
111. Wang X.M. An experimental study of the superelastic behavior in NiTi shape memory alloys under biaxial proportional and non-proportional cyclic loadings /X.M. Wang, Y.F. Wang, Z.Z. Lu, C.H. Deng, Z.F. Yue // *Mechanics of Materials* 42, 2010. - P. 365–373.
112. Xia M.L. Thermomechanical responses of nonlinear torsional vibration with NiTi shape memory alloy –alternative stable states and their jumps. / M.L.Xia, Q.P.Sun // *J. Mech. Phys. Solids* 102, 2017. - P.257–276.
113. Ye J. Direct observation of the NiTi martensitic phase transformation in nanoscale volumes. / J.Ye, R.K.Mishra, A.R.Pelton, A.M.Minor // *Acta Mater* 58, 2010. - P. 490–498.
114. Yin H. Effects of grain size on tensile fatigue life of nanostructured NiTi shape memory alloy. / H.Yin, Y.J.He, Z.Moumni, Q.P.Sun // *International Journal of Fatigue* 88, 2016. - P. 166–177.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Впровадження результатів дисертаційної роботи

Результати дисертаційної роботи використані в рамках досліджень, які здійснені у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за темами держбюджетних робіт № 1-301-15 «Розробка методик розв'язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (№ ДР 015U002393) та Дніпровському державному технічному університеті по держбюджетній науково-дослідницькій темі «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379, 2013-2015 рр.).

Також результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара при викладанні навчальної дисципліни «Теорія пластичності» і «Нелінійна механіка руйнування», Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
Національного авіаційного
університетуВ.П. Харченко
2019р.

АКТ

впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи Петрова Олександра Дмитровича «Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми» на здобуття кандидата фізико-математичних наук.

Комісія у складі: голова завідувач кафедри загальної та прикладної фізики д. ф.-м. н., професор Поліщук А.П., члени комісії к. ф.-м. н., доцент Сакун Т.М., асистент Бородій І.О., склали даний акт про те, що результати дисертаційної роботи Петрова Олександра Дмитровича впроваджені у навчальний процес та використовуються на кафедрі загальної та прикладної фізики АКФ при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики»

№з з/п	Назва роботи що впроваджується	Форма впровадження	Ефективність від впровадження
	1	2	3
1.	Моделювання поведінки матеріалів з пам'яттю форми	Лекція	Ознайомлення студентів з сучасними методами моделювання поведінки матеріалів з пам'яттю форм при температурних навантаженнях
2.	Аналітичне оцінювання точних обчислень за допомогою сплайн-функцій	Лекція	Ознайомлення студентів з сучасними аналітичними методами оцінювання точних обчислень з використанням сплайн-функцій

Голова комісії:
Завідувач кафедри ЗПФ
д. ф.-м. н., професор

Поліщук А.П.

Члени комісії:
к. ф.-м. н., доцент

Сакун Т.М.

асистент

Бородій І.О.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

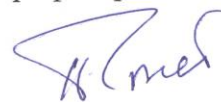
03.06.2019 № 108-08.05/116 ДОВІДКА

Про впровадження результатів дисертаційної роботи
Петрова Олександра Дмитровича
з теми «Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з
пам'яттю форми»
на здобуття наукового ступеня доктора філософії
(113 – прикладна математика)

Результати дисертаційної роботи Петрова Олександра Дмитровича «Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми» використані в рамках досліджень, які здійснені у Дніпровському державному технічному університеті за держбюджетною науково-дослідницькою роботою «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379, 2013-2015 рр.)

Також ці результати використовуються в навчальному процесі Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів».

Завідувач кафедри вищої математики,
доктор фізико-математичних наук, професор



П.О.Стеблянко

Перший проректор,
доктор технічних наук, професор



В.М.Гуляєв

ДОДАТОК Б

Допоміжна інформація про двовимірні сплайни

Наведемо інформацію про двовимірний базисний напружений сплайн. У кожній допоміжній області двовимірний напружений сплайн розшукується у вигляді

$$S_{2D} = [a_0 + a_1\xi + a_2sh(\sqrt{2}\xi) + a_3ch(\sqrt{2}\xi)] \cdot [b_0 + b_1\eta + b_2sh(\sqrt{2}\eta) + b_3ch(\sqrt{2}\eta)], \quad (1)$$

де $\xi \in [0;1]$, $\eta \in [0;1]$, а для визначення величин $a_i, b_i, i = 0;1;2;3$ використовуються певні умови. Так, поверхня (1) симетрична відносно осей координат і складається з шістнадцяти частин трьох типів.

Для кутової області ці умови у вершинах квадрата $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$, $D(1;1)$ мають вигляд

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_D.$$

В правих частинах містяться значення функції або її похідних. Задовольняючи цим умовам з урахуванням симетрії поверхні відносно діагоналі $\xi = \eta$ отримаємо

$$S_{2D} = [k_0(1 - ch\sqrt{2}\xi) + k_1\xi + k_2sh\sqrt{2}\xi] \cdot [k_0(1 - ch\sqrt{2}\eta) + k_1\eta + k_2sh\sqrt{2}\eta], \quad (2)$$

де $k_0 = -0,57235$; $k_1 = -0,37114$; $k_2 = 0,26244$.

Для центральної області умови у вершинах квадрата $D(0;0)$, $N(0;1)$, $F(1;0)$, $M(1;1)$ мають вигляд

$$S_{2D}(0;0) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = W'_D, S_{2D}(0;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = W'_F, S_{2D}(1;1) = W_M, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = 0.$$

В цій області поверхня, яку задає сплайн (1), також симетрична і відносно діагоналі $\xi = \eta$. Задовольняючи умовам у вузлах отримаємо

$$S_{2D} = \left[n_0 + n_1\xi + n_2sh\sqrt{2}\xi + n_3ch\sqrt{2}\xi \right] \left[n_0 + n_1\eta + n_2sh\sqrt{2}\eta + n_3ch\sqrt{2}\eta \right], \quad (3)$$

де $n_0 = -0,42838$; $n_1 = 2,56711$; $n_2 = -1,39527$; $n_3 = 0,6325$.

Для областей, які об'єднують кутові і центральні області у вершинах квадрата $C(0;0)$, $D(0;1)$, $E(1;0)$, $F(1;1)$ виконуються умови

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = W'_D,$$

$$S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_F.$$

На підставі цього можна записати .

$$S_{2D}(\xi, \eta) = \left(m_0 + m_1\xi + m_2sh\sqrt{2}\xi + m_3ch\sqrt{2}\xi \right) \cdot \left[m_4(1 - ch\sqrt{2}\eta) + m_5(sh\sqrt{2}\eta - \sqrt{2}) \right]. \quad (4)$$

Тут $m_0 = 3,78066$; $m_1 = -10,62084$; $m_2 = 7,28425$; $m_3 = -4,31838$;

$m_4 = 0,19552$; $m_5 = 0,29351$.

Запишемо вираз двовимірний напруженого базисного сплайну для області визначення $x \in [-2;2]$, $y \in [-2;2]$. При цьому введемо такі допоміжні функції

$$\varphi_k(t) = k_0(1 - ch\sqrt{2}t) + k_1t + k_2sh\sqrt{2}t, \quad \varphi_m(t) = m_0 + m_1t + m_2sh\sqrt{2}t + m_3ch\sqrt{2}t,$$

$$\psi_m(t) = m_4(1 - ch\sqrt{2}t) + m_5(sh\sqrt{2}t - \sqrt{2}), \quad \varphi_n(t) = n_0 + n_1t + n_2sh\sqrt{2}t + n_3ch\sqrt{2}t, \quad (5)$$

Тоді поверхня (2) в єдиній системі координат x, y записується за допомогою наступних функцій

$$\begin{aligned} S_{01}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(y), & S_{02}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(y), \\ S_{03}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(y), & S_{04}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y), \\ S_{05}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(1 - y), & S_{06}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(1 - y), \\ S_{07}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(1 - y), & S_{08}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(1 - y), \\ S_{09}(x; y) &= \varphi_k(1 - x) \cdot \varphi_k(1 - y), & S_{10}(x; y) &= \varphi_m(1 - x) \cdot \psi_m(1 - y), \\ S_{11}(x; y) &= \psi_m(1 - x) \cdot \varphi_m(1 - y), & S_{12}(x; y) &= \varphi_n(1 - x) \cdot \varphi_n(1 - y), \\ S_{13}(x; y) &= \varphi_k(1 - x) \cdot \varphi_k(y), & S_{14}(x; y) &= \psi_m(1 - x) \cdot \varphi_m(y), \\ S_{15}(x; y) &= \varphi_m(1 - x) \cdot \psi_m(y), & S_{16}(x; y) &= \varphi_n(1 - x) \cdot \varphi_n(y). \end{aligned} \quad (6)$$

В результаті цього двовимірний сплайн матиме вид

$$S_{2D}(x; y) = \sum_{k=1}^{16} b_k \cdot S_k(x; y), \quad x, y \in [0;1] \quad (7)$$

Вираз (7) в прикладних задачах зручно використовувати в дещо

іншому вигляді. Виразимо невідомі коефіцієнти сплайна b_k , ($k = 1, 2, \dots, 16$) через значення деякої функції $w(x; y)$ у вузлах $(i/3; j/3)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, де $w(i/3; j/3) \equiv w_{ij}$. Система, з якої знаходяться коефіцієнти b_k , ($k = 1, 2, \dots, 16$) виглядає так $b_k \cdot S_k(i/3; j/3) = w_{ij}$, ($i, j = 0, 1, 2, 3$).

Рішення цієї системи отримано аналітично і воно має вигляд

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \alpha_1 w_{00} + \alpha_2 w_{10} + \alpha_3 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_2 w_{01} + \alpha_6 w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_8 w_{31} + \\
 &\quad + \alpha_3 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_{11} w_{22} + \alpha_{12} w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_8 w_{13} + \alpha_{12} w_{23} + \alpha_{16} w_{33}, \\
 b_2 &= \beta_1 w_{00} + \beta_2 w_{10} + \beta_3 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_5 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_8 w_{31} + \\
 &\quad + \beta_9 w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{12} w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_{14} w_{13} + \beta_{15} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
 b_3 &= \beta_1 w_{00} + \beta_5 w_{10} + \beta_9 w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_2 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_{14} w_{31} + \\
 &\quad + \beta_3 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{15} w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_8 w_{13} + \beta_{12} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
 b_4 &= \omega_4 w_{00} + \omega_3 w_{10} + \omega_2 w_{20} + \omega_1 w_{30} + \omega_3 w_{01} + \omega_7 w_{11} + \omega_6 w_{21} + \omega_5 w_{31} + \\
 &\quad + \omega_2 w_{02} + \omega_6 w_{12} + \omega_{10} w_{22} + \omega_9 w_{32} + \omega_1 w_{03} + \omega_5 w_{13} + \omega_9 w_{23} + \omega_{13} w_{33}, \\
 b_5 &= \alpha_4 w_{00} + \alpha_8 w_{10} + \alpha_{12} w_{20} + \alpha_{16} w_{30} + \alpha_3 w_{01} + \alpha_7 w_{11} + \alpha_{11} w_{21} + \alpha_{12} w_{31} + \\
 &\quad + \alpha_2 w_{02} + \alpha_6 w_{12} + \alpha_7 w_{22} + \alpha_8 w_{32} + \alpha_1 w_{03} + \alpha_2 w_{13} + \alpha_3 w_{23} + \alpha_4 w_{33}, \\
 b_6 &= \beta_4 w_{00} + \beta_8 w_{10} + \beta_{12} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_3 w_{01} + \beta_7 w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{15} w_{31} + \\
 &\quad + \beta_2 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_{10} w_{22} + \beta_{14} w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_5 w_{13} + \beta_9 w_{23} + \beta_{13} w_{33}, \\
 b_7 &= \beta_{13} w_{00} + \beta_{14} w_{10} + \beta_{15} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_9 w_{01} + \beta_{10} w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{12} w_{31} + \\
 &\quad + \beta_5 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_7 w_{22} + \beta_8 w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_2 w_{13} + \beta_3 w_{23} + \beta_4 w_{33}, \\
 b_8 &= \omega_1 w_{00} + \omega_5 w_{10} + \omega_9 w_{20} + \omega_{13} w_{30} + \omega_2 w_{01} + \omega_6 w_{11} + \omega_{10} w_{21} + \omega_9 w_{31} + \\
 &\quad + \omega_3 w_{02} + \omega_7 w_{12} + \omega_6 w_{22} + \omega_5 w_{32} + \omega_4 w_{03} + \omega_3 w_{13} + \omega_2 w_{23} + \omega_1 w_{33}, \\
 b_9 &= \alpha_{16} w_{00} + \alpha_{12} w_{10} + \alpha_8 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_{12} w_{01} + \alpha_{11} w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_3 w_{31} + \\
 &\quad + \alpha_8 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_6 w_{22} + \alpha_2 w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_3 w_{13} + \alpha_2 w_{23} + \alpha_1 w_{33}, \\
 b_{10} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{15} w_{10} + \beta_{14} w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_{12} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_9 w_{31} + \\
 &\quad + \beta_8 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_5 w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_3 w_{13} + \beta_2 w_{23} + \beta_1 w_{33}, \\
 b_{11} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{12} w_{10} + \beta_8 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_{15} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_3 w_{31} + \\
 &\quad + \beta_{14} w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_2 w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_9 w_{13} + \beta_5 w_{23} + \beta_1 w_{33},
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$b_{12} = \omega_{13}w_{00} + \omega_9w_{10} + \omega_5w_{20} + \omega_1w_{30} + \omega_9w_{01} + \omega_{10}w_{11} + \omega_6w_{21} + \omega_2w_{31} + \\ + \omega_5w_{02} + \omega_6w_{12} + \omega_7w_{22} + \omega_3w_{32} + \omega_1w_{03} + \omega_2w_{13} + \omega_3w_{23} + \omega_4w_{33},$$

$$b_{13} = \alpha_4w_{00} + \alpha_3w_{10} + \alpha_2w_{20} + \alpha_1w_{30} + \alpha_8w_{01} + \alpha_7w_{11} + \alpha_6w_{21} + \alpha_2w_{31} + \\ + \alpha_{12}w_{02} + \alpha_{11}w_{12} + \alpha_7w_{22} + \alpha_3w_{32} + \alpha_{16}w_{03} + \alpha_{12}w_{13} + \alpha_8w_{23} + \alpha_4w_{33},$$

$$b_{14} = \beta_{13}w_{00} + \beta_9w_{10} + \beta_5w_{20} + \beta_1w_{30} + \beta_{14}w_{01} + \beta_{10}w_{11} + \beta_6w_{21} + \beta_2w_{31} + \\ + \beta_{15}w_{02} + \beta_{11}w_{12} + \beta_7w_{22} + \beta_3w_{32} + \beta_{16}w_{03} + \beta_{12}w_{13} + \beta_8w_{23} + \beta_4w_{33},$$

$$b_{15} = \beta_4w_{00} + \beta_3w_{10} + \beta_2w_{20} + \beta_1w_{30} + \beta_8w_{01} + \beta_7w_{11} + \beta_6w_{21} + \beta_5w_{31} + \\ + \beta_{12}w_{02} + \beta_{11}w_{12} + \beta_{10}w_{22} + \beta_9w_{32} + \beta_{16}w_{03} + \beta_{15}w_{13} + \beta_{14}w_{23} + \beta_{13}w_{33},$$

$$b_{16} = \omega_1w_{00} + \omega_2w_{10} + \omega_3w_{20} + \omega_4w_{30} + \omega_5w_{01} + \omega_6w_{11} + \omega_7w_{21} + \omega_3w_{31} + \\ + \omega_9w_{02} + \omega_{10}w_{12} + \omega_6w_{22} + \omega_2w_{32} + \omega_{13}w_{03} + \omega_9w_{13} + \omega_5w_{23} + \omega_1w_{33}.$$

Тут

$$\alpha_1 = -1,024; \quad \alpha_2 = 1,854; \quad \alpha_3 = 0,594; \quad \alpha_4 = -1,356; \quad \alpha_6 = -0,758;$$

$$\alpha_7 = -8,383; \quad \alpha_8 = 7,288; \quad \alpha_{11} = 21,855; \quad \alpha_{12} = -14,351; \quad \alpha_{16} = 8,640;$$

$$\beta_1 = 4,195; \quad \beta_2 = -19,306; \quad \beta_3 = 33,330; \quad \beta_4 = -11,599; \quad \beta_5 = -4,654;$$

$$\beta_6 = 29,870; \quad \beta_7 = -54,471; \quad \beta_8 = 20,759; \quad \beta_9 = -4,708; \quad \beta_{10} = -7,465;$$

$$\beta_{11} = 26,300; \quad \beta_{12} = -15,097; \quad \beta_{13} = 2,864; \quad \beta_{14} = -3,017; \quad \beta_{15} = 1,891; \quad \beta_{16} = 1,489;$$

$$\omega_1 = -5,204; \quad \omega_2 = 1,666; \quad \omega_3 = 9,491 \quad \omega_4 = -7,152; \quad \omega_5 = 36,725;$$

$$\omega_6 = -66,177; \quad \omega_7 = 20,348; \quad \omega_9 = -56,662; \quad \omega_{10} = 123,935; \quad \omega_{13} = 23,181.$$

Після підстановки виразів (8) в (7) можна записати інтерполяційний вираз

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x; y), \quad (9)$$

де

$$F_{00}(x; y) = \alpha_1 S_{01}(x; y) + \beta_1 [S_{02}(x; y) + S_{03}(x; y)] + \omega_4 S_{04}(x; y) + \alpha_4 [S_{05}(x; y) + S_{13}(x; y)] + \\ + \beta_4 [S_{06}(x; y) + S_{15}(x; y)] + \beta_{13} [S_{07}(x; y) + S_{14}(x; y)] + \omega_1 [S_{08}(x; y) + S_{16}(x; y)] + \\ + \alpha_{16} S_{09}(x; y) + \beta_{16} [S_{10}(x; y) + S_{11}(x; y)] + \omega_{13} S_{12}(x; y),$$

$$F_{10}(x; y) = \alpha_2 S_{01}(x; y) + \beta_2 S_{02}(x; y) + \beta_5 S_{03}(x; y) + \omega_3 S_{04}(x; y) + \alpha_8 S_{05}(x; y) + \beta_8 S_{06}(x; y) + \\ + \beta_{14} S_{07}(x; y) + \omega_5 S_{08}(x; y) + \alpha_{12} S_{09}(x; y) + \beta_{15} S_{10}(x; y) + \beta_{12} S_{11}(x; y) + \omega_9 S_{12}(x; y) + \\ + \alpha_3 S_{13}(x; y) + \beta_9 S_{14}(x; y) + \beta_3 S_{15}(x; y) + \omega_2 S_{16}(x; y), \quad (10)$$

$$F_{11}(x; y) = \alpha_6 S_{01}(x; y) + \beta_6 [S_{02}(x; y) + S_{03}(x; y)] + \omega_7 S_{04}(x; y) + \alpha_7 [S_{05}(x; y) + S_{13}(x; y)] + \\ + \beta_7 [S_{06}(x; y) + S_{15}(x; y)] + \beta_{10} [S_{07}(x; y) + S_{14}(x; y)] + \omega_6 [S_{08}(x; y) + S_{16}(x; y)] + \\ + \alpha_{11} S_{09}(x; y) + \beta_{11} [S_{10}(x; y) + S_{11}(x; y)] + \omega_{10} S_{12}(x; y).$$

Інші тринадцять функцій можна записати за допомогою формул (10) таким чином

$$\begin{aligned} F_{01}(x; y) &= F_{10}(y; x), & F_{02}(x; y) &= F_{10}(1-y; x), & F_{03}(x; y) &= F_{00}(x; 1-y), & F_{12}(x; y) &= F_{11}(x; 1-y), \\ F_{13}(x; y) &= F_{10}(x; 1-y), & F_{20}(x; y) &= F_{10}(1-x; y), & F_{21}(x; y) &= F_{11}(1-x; y), & F_{22}(x; y) &= F_{11}(1-x; 1-y), \\ F_{23}(x; y) &= F_{10}(1-x; 1-y), & F_{30}(x; y) &= F_{00}(1-x; y), & F_{31}(x; y) &= F_{10}(y; 1-x), & F_{32}(x; y) &= F_{00}(1-y; 1-x), \\ F_{33}(x; y) &= F_{00}(1-x; 1-y). \end{aligned}$$

Частинні похідні першого і другого порядків по координатах визначаються на підставі виразу (9). Для апроксимації диференціальних операторів можна записати такі вирази

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Відзначимо, що ці формули дозволяють обчислювати частинні похідні по координатах першого порядку в областях розташованих безпосередньо на границі тіла $x \in [x_0; x_1], y \in [y_0; y_1], x \in [x_{N-1}; x_N], y \in [y_{M-1}; y_M]$ і в сусідніх з ними областях $x \in [x_1; x_2], y \in [y_1; y_2], x \in [x_{N-2}; x_{N-1}], y \in [y_{M-2}; y_{M-1}]$. У всіх інших комірках просторової сітки для цього треба користуватися лінійною комбінацією (пів сумою) відповідних виразів з (11), записаних в сусідніх областях.

Неведемо деяку необхідну інформацію про одновимірні сплайни [36].

При розробці ітераційної процедури МПР були використані функції $\Phi_r(\eta)$,

$$f_r(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\Phi_r(\xi)}{d\xi}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \text{ та їх деякі значення.}$$

У випадку застосування кубічних В-сплайнів маємо

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= -\frac{9}{2}\xi^2 + 6\xi - \frac{11}{16}, & f_1(\xi) &= \frac{27}{2}\xi^2 - 15\xi + 3 \\ f_2(\xi) &= -\frac{27}{2}\xi^2 + 12\xi - \frac{3}{2}, & f_3(\xi) &= \frac{9}{2}\xi^2 - 3\xi + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Таблиця 2.1

ξ	$f_0(\xi)$	$f_0(\xi)$	$f_0(\xi)$	$f_0(\xi)$
0	-11/6	3	-3/2	1/3
1/3	-1/3	-1/2	1	-1/6
2/3	1/6	-1	1/2	1/3
1	-1/3	3/2	-3	11/6

Для напружених сплайнів можна записати

$$f_r(\xi) = \eta_{1r} + \eta_{2r} \operatorname{sh} \sqrt{2} \left(\xi - \frac{1}{2} \right),$$

$$\eta_{1r} = \frac{1}{3} \left(w_{1r} - 2w_{3r} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\eta_{2r} = \frac{\sqrt{2}}{3} w_{2r}, \eta_{3r} = \frac{\sqrt{2}}{3} w_{3r}.$$

де

Таблиця 2.2.

ξ	$f_0(\xi)$	$-f_3(1-\xi)$	$f_1(\xi)$	$-f_2(1-\xi)$
0	-1,87743101379164720	3,077340486418314		
1/3	-0,32248102105854048	-0,5145075286968772		
2/3	0,15946957081395841	-0,9964581205693761		
1	-0,32248102105853693	1,5223930559087213		

ДОДАТОК В

Обробка експериментальних даних для термо-псевдо-пружного матеріалу

Механічні характеристики матеріалу задаються у вигляді діаграм розтягнутих зразків, отриманих при різних значеннях температури [99, 100]. Локальні діаграми матеріалу при активному навантаженні – OAB і BCD при розвантаженні показано на рисунку. Точки B, C розташовані на одній прямій і її нахил співпадає з нахилом першої ділянки діаграми OA.

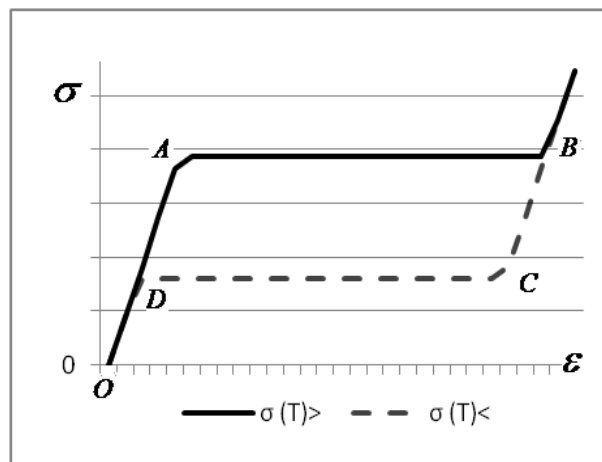


Рисунок 1. Діаграма матеріалу з пам'яттю форми (СПФ)

Таблиця 1.1 – Координати точок діаграм матеріалу (сплав NiTi)

$T^{\circ}C$	$A(\varepsilon, \sigma)$	$B(\varepsilon, \sigma)$	$C(\varepsilon, \sigma)$	$D(\varepsilon, \sigma)$	$F(\varepsilon, \sigma)$
100	1,00; 0,82	6,50; 0,82	6,05; 0,45	0,55; 0,45	0,47; 0,00
90	1,00; 0,78	6,50; 0,78	6,03; 0,41	0,53; 0,41	0,19; 0,00
80	1,00; 0,67	6,50; 0,67	6,07; 0,38	0,57; 0,38	0,00; 0,00
70	1,00; 0,59	6,30; 0,59	5,81; 0,30	0,64; 0,30	0,00; 0,00
60	1,00; 0,44	6,20; 0,44	5,72; 0,23	0,52; 0,23	0,00; 0,00
50	1,00; 0,42	5,80; 0,42	5,16; 0,15	0,36; 0,15	0,00; 0,00
40	1,00; 0,39	5,70; 0,39	4,88; 0,07	0,18; 0,07	0,00; 0,00
30	1,00; 0,31	5,00; 0,31	4,00; 0,00	0,00; 0,00	0,00; 0,00
20	1,20; 0,28	4,30; 0,28	3,10; 0,00	0,00; 0,00	0,00; 0,00
10	1,40; 0,22	4,30; 0,22	2,90; 0,00	0,00; 0,00	0,00; 0,00
0	2,00; 0,20	3,90; 0,20	1,90; 0,00	0,00; 0,00	0,00; 0,00

Після обробки експериментальних результатів побудовано таблиці і відповідні діаграми для різних значень температури (відповідно 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0 градусів Цельсія). Результати наведено нижче у

вигляді таблиць і діаграм. Напруження задаємо у безрозмірному вигляді σ / σ_s , $\sigma_s = \sigma_s(T)_{T=110^{\circ}C}$. Верхні лінії діаграм ($\sigma+$) відповідають активному навантаженню зразка, а нижні ($\sigma-$) – розвантаженню.

Таблиця 1				Таблиця 2			
$T = 100^{\circ}C$				$T = 90^{\circ}C$			
N	ε	$\sigma > (100)$	$\sigma < (100)$	N	ε	$\sigma > (90)$	$\sigma < (90)$
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0,2	0,164	0,164	2	0,2	0,156	0,156
3	0,4	0,328	0,328	3	0,4	0,312	0,312
4	0,6	0,492	0,45	4	0,6	0,468	0,41
5	0,8	0,656	0,45	5	0,8	0,624	0,41
6	1	0,82	0,45	6	1	0,78	0,41
7	1,2	0,82	0,45	7	1,2	0,78	0,41
8	1,4	0,82	0,45	8	1,4	0,78	0,41
9	1,6	0,82	0,45	9	1,6	0,78	0,41
10	1,8	0,82	0,45	10	1,8	0,78	0,41
11	2	0,82	0,45	11	2	0,78	0,41
12	2,2	0,82	0,45	12	2,2	0,78	0,41
13	2,4	0,82	0,45	13	2,4	0,78	0,41
14	2,6	0,82	0,45	14	2,6	0,78	0,41
15	2,8	0,82	0,45	15	2,8	0,78	0,41
16	3	0,82	0,45	16	3	0,78	0,41
17	3,2	0,82	0,45	17	3,2	0,78	0,41
18	3,4	0,82	0,45	18	3,4	0,78	0,41
19	3,6	0,82	0,45	19	3,6	0,78	0,41
20	3,8	0,82	0,45	20	3,8	0,78	0,41
21	4	0,82	0,45	21	4	0,78	0,41
22	4,2	0,82	0,45	22	4,2	0,78	0,41
23	4,4	0,82	0,45	23	4,4	0,78	0,41
24	4,6	0,82	0,45	24	4,6	0,78	0,41
25	4,8	0,82	0,45	25	4,8	0,78	0,41
26	5	0,82	0,45	26	5	0,78	0,41
27	5,2	0,82	0,45	27	5,2	0,78	0,41
28	5,4	0,82	0,45	28	5,4	0,78	0,41
29	5,6	0,82	0,45	29	5,6	0,78	0,41
30	5,8	0,82	0,45	30	5,8	0,78	0,41
31	6	0,82	0,45	31	6	0,78	0,41
32	6,2	0,82	0,574	32	6,2	0,78	0,546
33	6,4	0,82	0,738	33	6,4	0,78	0,702
34	6,6	0,902	0,902	34	6,6	0,858	0,858
35	6,8	1,066	1,066	35	6,8	1,014	1,014

Таблица 3 $T = 80^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (80)$	$\sigma < (80)$
1	0	0	0
2	0,2	0,134	0,134
3	0,4	0,268	0,268
4	0,6	0,402	0,38
5	0,8	0,536	0,38
6	1	0,67	0,38
7	1,2	0,67	0,38
8	1,4	0,67	0,38
9	1,6	0,67	0,38
10	1,8	0,67	0,38
11	2	0,67	0,38
12	2,2	0,67	0,38
13	2,4	0,67	0,38
14	2,6	0,67	0,38
15	2,8	0,67	0,38
16	3	0,67	0,38
17	3,2	0,67	0,38
18	3,4	0,67	0,38
19	3,6	0,67	0,38
20	3,8	0,67	0,38
21	4	0,67	0,38
22	4,2	0,67	0,38
23	4,4	0,67	0,38
24	4,6	0,67	0,38
25	4,8	0,67	0,38
26	5	0,67	0,38
27	5,2	0,67	0,38
28	5,4	0,67	0,38
29	5,6	0,67	0,38
30	5,8	0,67	0,38
31	6	0,67	0,38
32	6,2	0,67	0,469
33	6,4	0,67	0,603
34	6,6	0,737	0,737
35	6,8	0,871	0,871

Таблица 4 $T = 70^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (70)$	$\sigma < (70)$
1	0	0	0
2	0,2	0,118	0,118
3	0,4	0,236	0,236
4	0,6	0,354	0,3
5	0,8	0,472	0,3
6	1	0,59	0,3
7	1,2	0,59	0,3
8	1,4	0,59	0,3
9	1,6	0,59	0,3
10	1,8	0,59	0,3
11	2	0,59	0,3
12	2,2	0,59	0,3
13	2,4	0,59	0,3
14	2,6	0,59	0,3
15	2,8	0,59	0,3
16	3	0,59	0,3
17	3,2	0,59	0,3
18	3,4	0,59	0,3
19	3,6	0,59	0,3
20	3,8	0,59	0,3
21	4	0,59	0,3
22	4,2	0,59	0,3
23	4,4	0,59	0,3
24	4,6	0,59	0,3
25	4,8	0,59	0,3
26	5	0,59	0,3
27	5,2	0,59	0,3
28	5,4	0,59	0,3
29	5,6	0,59	0,3
30	5,8	0,59	0,3
31	6	0,59	0,413
32	6,2	0,59	0,531
33	6,4	0,649	0,649
34	6,6	0,767	0,767
35	6,8	0,885	0,885

Таблица 5 $T = 60^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (60)$	$\sigma < (60)$
1	0	0	0
2	0,2	0,088	0,088
3	0,4	0,176	0,176
4	0,6	0,264	0,23

Таблица 6 $T = 50^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (50)$	$\sigma < (50)$
1	0	0	0
2	0,2	0,084	0,084
3	0,4	0,168	0,15
4	0,6	0,252	0,15

5	0,8	0,352	0,23	5	0,8	0,336	0,15
6	1	0,44	0,23	6	1	0,42	0,15
7	1,2	0,44	0,23	7	1,2	0,42	0,15
8	1,4	0,44	0,23	8	1,4	0,42	0,15
9	1,6	0,44	0,23	9	1,6	0,42	0,15
10	1,8	0,44	0,23	10	1,8	0,42	0,15
11	2	0,44	0,23	11	2	0,42	0,15
12	2,2	0,44	0,23	12	2,2	0,42	0,15
13	2,4	0,44	0,23	13	2,4	0,42	0,15
14	2,6	0,44	0,23	14	2,6	0,42	0,15
15	2,8	0,44	0,23	15	2,8	0,42	0,15
16	3	0,44	0,23	16	3	0,42	0,15
17	3,2	0,44	0,23	17	3,2	0,42	0,15
18	3,4	0,44	0,23	18	3,4	0,42	0,15
19	3,6	0,44	0,23	19	3,6	0,42	0,15
20	3,8	0,44	0,23	20	3,8	0,42	0,15
21	4	0,44	0,23	21	4	0,42	0,15
22	4,2	0,44	0,23	22	4,2	0,42	0,15
23	4,4	0,44	0,23	23	4,4	0,42	0,15
24	4,6	0,44	0,23	24	4,6	0,42	0,15
25	4,8	0,44	0,23	25	4,8	0,42	0,15
26	5	0,44	0,23	26	5	0,42	0,15
27	5,2	0,44	0,23	27	5,2	0,42	0,168
28	5,4	0,44	0,23	28	5,4	0,42	0,252
29	5,6	0,44	0,23	29	5,6	0,42	0,336
30	5,8	0,44	0,264	30	5,8	0,42	0,42
31	6	0,44	0,352	31	6	0,504	0,504
32	6,2	0,44	0,44	32	6,2	0,588	0,588
33	6,4	0,528	0,528	33	6,4	0,672	0,672
34	6,6	0,616	0,616	34	6,6	0,756	0,756
35	6,8	0,704	0,704	35	6,8	0,84	0,84

Таблица 7 $T = 40^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (40)$	$\sigma < (40)$
1	0	0	0
2	0,2	0,078	0,07
3	0,4	0,156	0,07
4	0,6	0,234	0,07
5	0,8	0,312	0,07
6	1	0,39	0,07
7	1,2	0,39	0,07
8	1,4	0,39	0,07
9	1,6	0,39	0,07
10	1,8	0,39	0,07
11	2	0,39	0,07

Таблица 8 $T = 30^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (30)$	$\sigma < (30)$
1	0	0	0
2	0,2	0,062	0
3	0,4	0,124	0
4	0,6	0,186	0
5	0,8	0,248	0
6	1	0,31	0
7	1,2	0,31	0
8	1,4	0,31	0
9	1,6	0,31	0
10	1,8	0,31	0
11	2	0,31	0

12	2,2	0,39	0,07	12	2,2	0,31	0
13	2,4	0,39	0,07	13	2,4	0,31	0
14	2,6	0,39	0,07	14	2,6	0,31	0
15	2,8	0,39	0,07	15	2,8	0,31	0
16	3	0,39	0,07	16	3	0,31	0
17	3,2	0,39	0,07	17	3,2	0,31	0
18	3,4	0,39	0,07	18	3,4	0,31	0
19	3,6	0,39	0,07	19	3,6	0,31	0
20	3,8	0,39	0,07	20	3,8	0,31	0
21	4	0,39	0,07	21	4	0,31	0
22	4,2	0,39	0,07	22	4,2	0,31	0,062
23	4,4	0,39	0,07	23	4,4	0,31	0,124
24	4,6	0,39	0,07	24	4,6	0,31	0,186
25	4,8	0,39	0,07	25	4,8	0,31	0,248
26	5	0,39	0,117	26	5	0,31	0,31
27	5,2	0,39	0,195	27	5,2	0,372	0,372
28	5,4	0,39	0,273	28	5,4	0,434	0,434
29	5,6	0,39	0,351	29	5,6	0,496	0,496
30	5,8	0,429	0,429	30	5,8	0,558	0,558
31	6	0,507	0,507	31	6	0,62	0,62
32	6,2	0,585	0,585	32	6,2	0,682	0,682
33	6,4	0,663	0,663	33	6,4	0,744	0,744
34	6,6	0,741	0,741	34	6,6	0,806	0,806
35	6,8	0,819	0,819	35	6,8	0,868	0,868

Таблица 7 $T = 20^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (20)$	$\sigma < (20)$
1	0	0	0
2	0,2	0,047	0
3	0,4	0,093	0
4	0,6	0,14	0
5	0,8	0,187	0
6	1	0,23	0
7	1,2	0,28	0
8	1,4	0,28	0
9	1,6	0,28	0
10	1,8	0,28	0
11	2	0,28	0
12	2,2	0,28	0
13	2,4	0,28	0
14	2,6	0,28	0
15	2,8	0,28	0
16	3	0,28	0

Таблица 8 $T = 10^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (10)$	$\sigma < (10)$
1	0	0	0
2	0,2	0,031	0
3	0,4	0,063	0
4	0,6	0,094	0
5	0,8	0,126	0
6	1	0,157	0
7	1,2	0,189	0
8	1,4	0,22	0
9	1,6	0,22	0
10	1,8	0,22	0
11	2	0,22	0
12	2,2	0,22	0
13	2,4	0,22	0
14	2,6	0,22	0
15	2,8	0,22	0
16	3	0,22	0,016

17	3,2	0,28	0,023	17	3,2	0,22	0,047
18	3,4	0,28	0,07	18	3,4	0,22	0,079
19	3,6	0,28	0,117	19	3,6	0,22	0,11
20	3,8	0,28	0,163	20	3,8	0,22	0,141
21	4	0,28	0,21	21	4	0,22	0,173
22	4,2	0,28	0,257	22	4,2	0,22	0,204
23	4,4	0,303	0,303	23	4,4	0,236	0,236
24	4,6	0,35	0,35	24	4,6	0,267	0,267
25	4,8	0,397	0,397	25	4,8	0,299	0,299
26	5	0,443	0,443	26	5	0,33	0,33
27	5,2	0,49	0,49	27	5,2	0,361	0,361
28	5,4	0,537	0,537	28	5,4	0,393	0,393
29	5,6	0,583	0,583	29	5,6	0,424	0,424
30	5,8	0,63	0,63	30	5,8	0,456	0,456
31	6	0,677	0,677	31	6	0,487	0,487
32	6,2	0,723	0,723	32	6,2	0,519	0,519
33	6,4	0,77	0,77	33	6,4	0,55	0,55
34	6,6	0,817	0,817	34	6,6	0,581	0,581
35	6,8	0,863	0,863	35	6,8	0,613	0,613

Для отримання розрахункових формул уточненої моделі (параграф 2.2.) побудуємо МТП розглянувши допоміжну задачу. Нехай в тривимірному просторі ε, T, σ задано координати чотирьох точок $P_i(\varepsilon_i, T_i, \sigma_i), i = 1; 2; 3; 4$. Рівняння термомеханічної поверхні, яка проходить через ці точки запишемо так

$$\sigma = a\varepsilon + bT + c\varepsilon T + d. \quad (1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d розшуковуються з системи, яка побудована на основі виразу (1) для заданих чотирьох точок P_i МТП. З цієї системи спочатку виключимо невідому величину d за допомогою формули (1) та координат точки $P_1(\varepsilon_1, T_1, \sigma_1)$. В результаті отримаємо

$$d = \sigma_1 - a\varepsilon_1 - bT_1 - c\varepsilon_1 T_1. \quad (2)$$

Після виключення з системи величини d відомим способом знаходяться невідомі a, b, c . Остаточо можна записати

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(T_3 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\ &\quad - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\ &\quad + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (T_3 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \\ \Delta_1 &= (\sigma_2 - \sigma_1)[(T_3 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\ &\quad - (\sigma_3 - \sigma_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\ &\quad + (\sigma_4 - \sigma_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (T_3 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \\ \Delta_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(\sigma_3 - \sigma_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_4 - \sigma_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\ &\quad - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(\sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_4 - \sigma_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\ &\quad + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(\sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_3 - \sigma_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \\ \Delta_3 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(T_3 - T_1)(\sigma_4 - \sigma_1) - (T_4 - T_1)(\sigma_3 - \sigma_1)] - \\ &\quad - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\sigma_4 - \sigma_1) - (T_4 - T_1)(\sigma_2 - \sigma_1)] + \\ &\quad + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - (T_3 - T_1)(\sigma_2 - \sigma_1)]. \end{aligned}$$

Формули (1) - (3) дозволяють будувати ТМП по двом сусіднім діаграмам отриманих для $T = T_1$ і $T = T_2$, що зображені на рисунках 2.9, на інтервалі $T \in [T_1; T_2]$.

При активному навантаженні сумарна термо-механічна поверхня (ТМП) складається з трьох окремих поверхонь. Аналогічно моделюється ТМП і при розвантаженні.

Таким чином, маючи ТМП та закон, за яким змінюється температура в тій чи іншій точці зразка, можна провести уточнення локальної діаграми матеріала.