

**ВІДГУК**  
**опонента на дисертаційну роботу**  
**Ящук Вікторії Сергіївни**  
**«Алгебраїчні структури, пов'язані з решітками»,**  
**що представлена на здобуття ступеня доктора філософії**  
**з галузі знань 11 Математика та статистика**  
**за спеціальністю 111 Математика**

Дослідження з абстрактної алгебри є одним з магістральних напрямів у сучасній математиці. Найбільш глибокими і результативними з них виявились дослідження у межах теорії груп, модулів, різних типів кілець та алгебр. Одним з центральних при цьому є підхід, який передбачає вивчення абстрактних властивостей алгебраїчних структур за тими чи іншими властивостями їх природних підструктур. З іншого боку, досить часто можна встановити цілком природні й глибокі зв'язки між різними математичними теоріями. Одним з показових у цьому напрямі є зв'язок алгебраїчних структур з решітками. Так, основна теорема теорії Галуа в термінах решіток підалгебр встановлює зв'язки між теорією груп і теорією полів. Тісні зв'язки між загальною алгеброю та універсальною алгебраїчною геометрією виникають при дослідженні алгебраїчної геометрії многовидів алгебр. Напівгрупи неперервних лінійних операторів банахових просторів мають широкі застосування у функціональному аналізі. За допомогою певних структур, що асоціюються з автоматною групою, встановлено фундаментальний зв'язок між теорією автоматів, фрактальною геометрією та комплексною динамікою.

Представлена дисертаційна робота виконана у межах зазначених вище напрямів досліджень, які досить органічно поєднані між собою. У роботі визначаються та вивчаються нові алгебраїчні об'єкти, які пов'язують між собою у першому випадку групи та решітки, а у другому – кільця та решітки. Іншими алгебраїчними структурами, що вивчаються в цій роботі, є алгебри Лейбніца, які були запропоновані А.М. Блохом. Певна увага тут приділена алгебрам Лейбніца малих розмірностей, які розглядаються над скінченними полями. Також досліджуються деякі класи алгебр Лейбніца, що задовольняють природним обмеженням на їх підструктури. Відмітимо, що алгебри Лейбніца мають широкий спектр застосувань, зокрема, у диференціальній геометрії, гомологічній алгебрі, класичній алгебраїчній топології, алгебраїчній  $K$ -теорії, некомутативній геометрії, фізиці та ін. Отже, все вищевикладене обумовлює актуальність теми дисертації.

Дисертація складається з двох анотацій, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи – 137 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету та завдання, методи дослідження, новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Зазначено, в чому саме полягає особистий внесок здобувача у працях, опублікованих у співавторстві, та висвітлено, як були апробовані отримані результати.

Перший розділ містить стислий огляд літератури за темою роботи.

Другий розділ присвячено вивченню нової алгебраїчної структури, яка пов'язана з групами та решітками. Для назви цієї структури автор дисертації використовує термін «решіткова група». Досліджено базові властивості решіткових груп та отримано критерій нормальності для решіткових підгруп.

У третьому розділі вивчаються зв'язки між кільцями та решітками за допомогою так званих решіткових кілець. Подібно тому як в розділі 2 для решіткових груп, в розділі 3 встановлено деякі елементарні властивості решіткових кілець. Основним результатом цього розділу є аналог теореми про гомоморфізми кілець для класу решіткових кілець.

Четвертий розділ присвячений дослідженню алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. У цьому розділі отримано детальний опис для таких класів алгебр як нільпотентні алгебри Лейбніца, ненільпотентні алгебри Лейбніца з одновимірним ядром, ненільпотентні алгебри Лейбніца з двовимірним ядром та ненільпотентні циклічні алгебри Лейбніца. Ці результати розвивають відомі результати про опис алгебр Лейбніца над полями нульової характеристики.

П'ятий розділ присвячено опису гіперабелевих алгебр Лейбніца з деякими природними обмеженнями на ідеали. Одержано опис певних узагальнено розв'язних  $T$ -алгебр Лейбніца. Автором запропоновано поняття контраідеала в алгебрі Лейбніца. Досліджено алгебри Лейбніца, підалгебри яких є ідеалами або контраідеалами.

Дисертаційна робота В.С. Ящук є завершеною науковою працею, в якій отримано нові наукові результати про властивості решіткових груп та решіткових кілець, а також про структуру алгебр Лейбніца заданого класу. Отримані результати можуть бути використані при подальших дослідженнях у теорії груп та теорії кілець, а також можуть бути застосованими при дослідженні нових класів алгебр Лейбніца. Крім того, результати досліджень можуть бути корисними при викладанні спецкурсу з теорії алгебр Лейбніца на механіко-математичних факультетах університетів.

Усі результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, одержані автором особисто. У роботах, що виконані у співавторстві, особистий внесок здобувача чітко визначений у вступі.

Доведення основних результатів є нетривіальними. Їх достовірність забезпечена строгими математичними доведеннями, виклад матеріалу дисертації є чітким, логічним та послідовним. Для отримання результатів автор використовує різноманітну техніку, яка спирається як на методи теорії груп і теорії кілець, так і на методи теорії алгебр Лі.

Дисертаційна робота, однак, не є вільною від деяких недоліків:

1) в абстракті на с. 7 у 2-му рядку знизу замість «The concepts of lattice group and lattice ring ...» треба писати «The concepts of a lattice group and a lattice ring ...», у теоремі 2 двічі замість тире «-» необхідно «is», а перед теоремою 6 замість «... whose subalgebras are an ideal or a contraideal» треба писати «... whose subalgebras are ideals or contraideals»);

2) на с. 14 (і далі в тексті роботи) не досить вдала назва параграфу 2.5 «Визначення нового означення: решіткова група» та параграфу 3.4 «Визначення нового означення: решіткове кільце»;

3) на с. 16 у переліку умовних позначень решітка та ліва алгебра Лейбніца позначені одним й тим самим символом « $L$ »;

4) замість «Оскільки це правдиво для кожного  $x \in G \dots$ » краще писати «Оскільки ця умова виконується для кожного  $x \in G \dots$ » (див. с. 38, 39);

5) замість позначення символу « $\rightarrow$ », що вказує правило, за яким задається відображення, треба використовувати « $\mapsto$ » (див. с. 41, 53, 55);

6) на с. 45, 11-та строчка зверху, та с. 46, 5-та строчка знизу, замість елементів « $u, v$ » треба писати « $x, y$ »;

7) на с. 57 у наслідку 3.2 зайвим є слово «відповідно»;

8) на с. 62 у строчці 8 знизу не зрозуміло про які саме умови (i) та (ii) йде мова;

9) на с. 84 у теоремі 4.5 замість «Нехай  $L$  не є нільпотентна циклічна алгебра Лейбніца ...» краще писати «Нехай  $L$  є ненільпотентною циклічною алгеброю Лейбніца ...»;

10) синтаксичні та орфографічні неточності у тексті, друкарські помилки (напр., на с. 18 у 1-й зверху строчці замість «субідеали яких є ідеали ...» треба писати «субідеали яких є ідеалами ...»; на с. 20 у 10-й знизу строчці замість «пов'язаною ...» треба «пов'язаної ...»; на с. 23 замість «Серед чисельних ...» та «Будову ...» треба писати відповідно «Серед чисельних ...» та «Будова ...»; на с. 41 замість «фаззі» треба «фазі»; на с. 4, с. 9 у теоремі 1, а також на с. 62 у теоремі 3.1 замість « $Q \subseteq T \in L \dots$ » повинно бути « $Q \subseteq T \times L \dots$ »; на с. 84 у формулі на 6-й зверху строчці замість розмірності 2 повинна бути розмірність 3; на с. 95 3-й строчці зверху замість «є нільпотентна ...» треба «є нільпотентною ...»; на с. 101 у лемі 5.9 замість «... контраідеалом  $L/L$ » необхідно «... контраідеалом  $K/L$ »; на

с. 114 у наслідку 5.4 двічі замість «... є алгебрф» потрібно «... є алгеброю»; на с.128 у статті [3] зі списку використаних джерел слово «вимірність» повинно бути написано англійською).

Разом з тим, зазначені недоліки, які зустрічаються у тексті роботи, не мають принципового значення та не знижують загальну позитивну оцінку і наукову цінність дисертаційного дослідження В.С. Ящук.

Загальний список публікацій автора складається з 13 найменувань, з яких 5 наукових статей опубліковано у фахових виданнях України та 8 тез доповідей у матеріалах міжнародних наукових конференцій. При цьому 3 із опублікованих статей видано у журналах, які входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, що підкреслює їх високий науковий рівень, а отже, й рівень дисертаційної роботи.

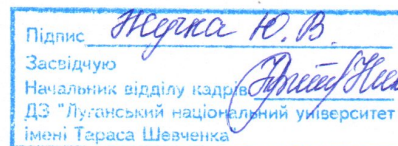
Відмітимо, що в представленій дисертаційній роботі відсутні будь-які порушення академічної доброчесності.

Основні результати було представлено на таких міжнародних алгебраїчних конференціях і форумах:

- Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена Ю.А. Дрозду (Одеса, 2015);
- Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2015 та 2017);
- Міжнародна конференція «Групи та дії. Геометрія та динаміка», присвячена В.І. Суцанському (Київ, 2016);
- IV та V Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених (Дніпро, 2017 та 2019);
- VII всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, 2018).

Вважаю, що дисертаційна робота В.С. Ящук «Алгебраїчні структури, пов'язані з решітками» відповідає всім вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», а також відповідає вимогам передбаченим пунктом 10 «Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 167 від 6.03.2019 р., а її автор В.С. Ящук заслуговує на присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика.

Доктор фізико-математичних наук,  
доцент, професор кафедри алгебри  
та системного аналізу Державного  
закладу «Луганський національний  
університет імені Тараса Шевченка»



Ю.В. Жучок