Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

**ЯЩУК ВІКТОРІЯ СЕРГІЇВНА**

УДК 512.542, 512.552, 512.554

**ДИСЕРТАЦІЯ**

# АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ, ПОВ'ЯЗАНІ З РЕШІТКАМИ

111 Математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В. Ящук Ящук В.С.

Науковий керівник:
**Курдаченко Леонід Андрійович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2019

# Анотація

*Ящук В.С.* Алгебраїчні структури, пов'язані з решітками. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Міністерство освіти і науки України, Дніпро, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню деяких властивостей решіткових груп та решіткових кілець, та зв'язків з відповідними фазі структурами; а також дослідженню структури різних типів алгебр Лейбніца.

У першій частині роботи розглянуто нові алгебраїчні структури – решіткові групи і решіткові кільця. Витоки їх виникнення знаходяться в теорії $L$-фазі груп і $L$-фазі кілець. Але якщо визначення $L$-фазі структур не є алгебраїчне (воно скоріше є функціональне), то решіткові групи й решіткові кільця – це вже суто алгебраїчні структури. Досить важливою частиною роботи було встановлення зв'язків між $L$-фазі групами та $L$-фазі кільцями з решітковими групами та решітковими кільцями. У процесі з'ясування таких зв'язків одержано досить виразну загальну картину будови решіткових груп і решіткових кілець. Розглядувані кільця були асоціативними. Тому природно виникло питання про розгляд аналогічних решіткових структур для неасоціативних кілець. Одним із важливих типів таких кілець є кільця Лейбніца та їх частинний випадок – алгебри Лейбніца. Але на відміну від теорії асоціативних кілець та асоціативних алгебр – теорія кілець Лейбніца та алгебр Лейбніца не дуже розвинена. Тому перш ніж переходити до побудови решіткових структур над кільцями Лейбніца потрібно з'ясувати важливі питання про структуру кілець Лейбніца та алгебр Лейбніца. Цим питанням присвячено другу частину дисертаційної роботи. Зокрема розглянуто питання про структуру алгебр Лейбніца з умовою транзитивності для ідеалів, було визначено поняття контраідеалу і описано алгебри Лейбніца, у яких кожна підалгебра є або ідеал, або контраідеал. Досліджено структуру алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями (до цього часу алгебри Лейбніца малих вимірностей розглядали над полями нульової характеристики). Більше того, у даному описі було одержано не тільки структурні константи (як у більшості інших робот), але й знайдено досить детальну інформацію про деякі важливі підалгебри.

У дисертаційній роботі вперше визначено поняття решіткової групи та решіткового кільця.

**Визначення 1.** Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину $\Lambda$ із $G \times \mathfrak{L}$ називатимемо *решітковою групою* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ і $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a})$, $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, тоді $(x^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$.

**Визначення 2.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину $K$ із $R \times \mathfrak{L}$ називатимемо *решітковим кільцем* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K$.

У роботі обґрунтовано, чому саме так визначається добуток решіткових груп:

$$\Lambda\Gamma = \{(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda, (y, \mathfrak{b}) \in \Gamma\}.$$

Доведено критерій нормальності: нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\lambda, \kappa \colon G \to \mathfrak{L}$ – групові функції такі, що $\kappa \preceq \gamma$. Тоді наведені нижче твердження еквівалентні:

(i) $\kappa$ – нормальна підгрупа функції $\gamma$;

(ii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \preceq \kappa$ для кожного елемента $x \in G$;

(iii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \kappa$ для кожних елементів $x, y \in G$;

(iv) $\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \chi(y, \mathfrak{b}) \odot \chi(x^{-1}, \mathfrak{a}) \subseteq \kappa$ для кожних елементів $x, y \in G$, де $\mathfrak{a} \leqslant \gamma(x)$, $\mathfrak{b} \leqslant \kappa(y)$.

Одержано опис структури фазі групи $\gamma$ для випадку, коли $\mathbf{Im}(\gamma)$ є скінченний.

У другому й третьому розділах доведено деякі основні властивості решіткових груп і решіткових кілець.

Окремий підрозділ дисертації присвячено поняттю гомоморфізма решіткових кілець та його властивостям. Наведемо означення: нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ (відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$) – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$. Тоді відображення $f\colon K \longrightarrow \Theta$ називають *гомоморфізмом*, якщо воно задовольняє такі умови:

$$f(u,\mathfrak{a}) + f(v,\mathfrak{b}) = f\big((u,\mathfrak{a}) + (v,\mathfrak{b})\big)$$

і

$$f(u,\mathfrak{a})f(v,\mathfrak{b}) = f\big((u,\mathfrak{a})(v,\mathfrak{b})\big)$$

$$\text{для всіх } (u,\mathfrak{a}),(v,\mathfrak{b}) \in K;$$

$$\text{якщо } (z,\mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}(f) \text{ і } \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}, \text{ тоді } (z,\mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}(f).$$

Для гомоморфізму, який зберігає шари, маємо такий прямий аналог теореми про гомоморфізми для кілець.

**Теорема 1.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \in \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм, який зберігає шари. Визначимо решіткові кільця $K_f \subseteq R/R_f \times \mathfrak{L}$ за правилом: пара $(x+R_f,\mathfrak{a}) \in K_f$ тоді й тільки тоді, коли $(x,\mathfrak{a}) \in K$. Тоді $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$ і $\mathbf{Im}(f)$ є ізоморфний до $K_f$.*

Ця теорема доводить, що гомоморфізм $f$, який зберігає шари, визначено за простим ідеалом $R_f$ кільця $R$, а $R_f$ визначене за ядром $f$, який є решітковий ідеал $K$.

Одержано повний опис структури алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями:

*1) нільпотентні алгебри Лейбніца вимірності 3;*

*2) алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні, із одновимірним ядром Лейбніца;*

*3) алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні, із двовимірним ядром Лейбніца;*

*4) циклічні алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні.*

У деяких випадках структура алгебр Лейбніца суттєво залежала від характеристики поля, а в інших – від можливості розв'язання конкретних рівнянь у полі.

Досліджено структуру $T$-алгебр Лейбніца, що є алгебрами Бера.

**Теорема 2.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ – це алгебра Бера, то кожна підалгебра $L$ є абелева, або $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$ і $E$ – екстраспеціальна підалгебра така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

З'ясовано, що структура $T$-алгебр Лейбніца суттєво залежить від структури її ніль-радикала.

**Теорема 3.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L) = D$ – абелевий, то $L = D \oplus V$, де $V = Fv$, $[v, v] = 0$, $[v, d] = d = -[d, v]$ для кожного елемента $d \in \boldsymbol{Nil}(L)$. Зокрема, $L$ є алгебра Лі.*

**Теорема 4.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $\boldsymbol{char}(F) \neq 2$, то радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ абелевий.*

**Теорема 5.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є нільпотентна, а радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевим. Якщо поле $F$ є 2-замкненим та $char(F) = 2$, тоді $L = (Fe \oplus Fc) \oplus Fv$, де*

$$[e, e] = c, [c, e] = [e, c] = [c, v] = [v, c] = 0,$$

$$[v, v] = 0, [v, e] = e + \gamma c = [e, v], \gamma \oplus F.$$

Було одержано опис алгебр Лейбніца, які не є алгебрами Лі, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали. А також одержано опис алгебр Лі, усі підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали, із точністю до простих алгебр Лі. А саме:

**Теорема 6.** *Нехай $L$ – алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо $L$ не є розв'язна, тоді $L$ є проста алгебра Лі або квазіпроста алгебра Лейбніца.*

**Теорема 7.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $L$ є абелева;

(ii) $\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, де $D$ має базис $\{z, b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[a, a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a, z] = [z, a] = 0$, $[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ і $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $\lambda \neq \mu$, зокрема $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$;

(iii) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для будь-якого елемента $y \in D$, зокрема $L$ є алгебра Лі;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = [y, b] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y$ для кожного елемента $y \in D$, зокрема $D = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(v) $L = B \oplus A$, де $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1, a_1] = c_1, [c_1, a_1] = 0$, $[a_1, c_1] = c_1$ і $[b, b] = [b, a_1] = [b, c_1] = [c_1, b] = 0$, $[a_1, b] = b$ для кожного елемента $b \in B$, зокрема $B \oplus Fc_1 = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(vi) $L = E \oplus Z$, де $E$ – екстраспеціальна підалгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і $Z \leqslant \zeta(L)$.

**Наслідок 1.** *Нехай $L$ є алгебра Лі, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $L$ є простою;

(ii) $L$ є квазіпростою;

(iii) $L$ є абелевою;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для кожного $y \in D$.

З огляду на вищесказане, тематика дисертації є важливою й актуальною.

**Ключові слова:** алгебра Лейбніца, гіперабелева алгебра Лейбніца, гомоморфізм, дистрибутивна решітка, екстраспеціальна алгебра Лейбніца, ідеал, контраідеал, лівий (правий) центр, нільпотентна алгебра Лейбніца, решітка, субідеал, $T$-алгебра Лейбніца, фазі група, фазі кільце.

## ABSTRACT

*Yashchuk V.S.* Algebraic structures related to lattices. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree (Ph.D.) on the speciality 111 Mathematics. – Oles Honchar Dnipro National University, MES of Ukraine, Dnipro, 2019.

The dissertation is a study of some properties of lattice groups and lattice rings, and their relations to the corresponding fuzzy structures; as well as the study of the structure of various types of Leibniz algebras.

In the first section of the dissertation considered new algebraic structures – lattice groups and lattice rings. The origins of their appearance are lie in the $L$-fuzzy groups theory and in the $L$-fuzzy rings theory. But if the definition of $L$-fuzzy structures is not algebraic (rather it is functional), then lattice groups and lattice rings are already purely algebraic structures. A fairly important part of the work was to establish ties between $L$-fuzzy groups and $L$-fuzzy rings with lattice groups and lattice rings. In the process of elucidating such connections, a clear overall picture of the structure of lattice groups and lattice rings was obtained. Only associative rings were considered. Therefore, the question of considering similar lattice structures for non-associative rings naturally arose. One of the important types of such rings is Leibniz rings and their partial case – Leibniz algebras. But unlike the theory of associative rings and associative algebras – the theory of Leibniz rings and Leibniz algebras is not well developed. Therefore, before proceeding to the construction of lattice structures over Leibniz rings, it is necessary to answer important questions about the structure of Leibniz rings and Leibniz algebras. These questions are covered in the second part of the dissertation. In particular, the structure of Leibniz algebras with the transitivity condition for ideals is considered, the concept of the contraideal is defined, and the Leibniz algebras in which each subalgebra is either an or ideal, or a contraideal are described. Investigated the structure of Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields (until now small-dimensional Leibniz algebras were considered only over fields of zero characteristic). Moreover, not only structural constants (as in most other works), but also detailed information about some important subalgebras were obtained.

The concepts of lattice group and lattice ring are defined for the very first time in this dissertation.

**Definition 1.** Let $G$ be a group, $\mathfrak{L}$ be a finite distributive lattice, then a nonempty subset $\Lambda$ of $G \times \mathfrak{L}$ is called a *lattice group over* $\mathfrak{L}$ if it satisfies the following conditions:

- if $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ and $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, then $(x, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- if $(x, \mathfrak{a})$, $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, then $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- if $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, then $(x^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$.

**Definition 2.** Let $R$ be a ring, $\mathfrak{L}$ be a finite distributive lattice, then a nonempty subset $K$ of $R \times \mathfrak{L}$ is called a *lattice ring over* $\mathfrak{L}$ if it satisfies the following conditions:

- if $(x, \mathfrak{a}) \in K$ and $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, then $(x, \mathfrak{b}) \in K$;
- if $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, then $(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K$;
- if $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, then $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K$.

The work substantiates why the product of lattice groups is thus determined:

$$\Lambda\Gamma = \{(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda, (y, \mathfrak{b}) \in \Gamma\}.$$

The criteria of normality is proved: let $G$ be a group, $\mathfrak{L}$ be a finite distributive lattice and $\lambda$,$\kappa$: $G \to \mathfrak{L}$ be group functions such that $\kappa \preceq \gamma$. Then the following assertions are equivalent:

(i) $\kappa$ is a normal subgroup function of $\gamma$;

(ii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \preceq \kappa$ for every element $x \in G$;

(iii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \kappa$ for every elements $x, y \in G$;

(iv) $\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \chi(y, \mathfrak{b}) \odot \chi(x^{-1}, \mathfrak{a}) \subseteq \kappa$ for every elements $x, y \in G$, $\mathfrak{a} \leqslant \gamma(x)$, $\mathfrak{b} \leqslant \kappa(y)$.

A description of structure of a fuzzy group $\gamma$ was obtained for the case when $\mathbf{Im}(\gamma)$ is finite.

In the second and third sections some basic properties of lattice groups and lattice rings are proved.

A separate section of the dissertation is devoted to the definition of lattice rings homomorphism and its properties.

Definition: let $R$, $T$ be rings and $\mathfrak{L}$ be a finite distributive lattice, and let $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ (respectively $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$) be a lattice rings over $\mathfrak{L}$. Then the mapping $f\colon K \longrightarrow \Theta$ is called a *homomorphism*, if it satisfies the following conditions:

$$f(u, \mathfrak{a}) + f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a}) + (v, \mathfrak{b})\big)$$

and

$$f(u, \mathfrak{a}) f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b})\big)$$

for all $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in K$;

if $(z, \mathfrak{c}) \in Im(f)$ and $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$, then $(z, \mathfrak{d}) \in Im(f)$.

For layer-preserved homomorphisms we have the following direct analogue of the homomorphism theorem for rings.

**Theorem 1.** *Let $R$, $T$ be rings, $\mathfrak{L}$ be a finite distributive lattice. Let $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ and $\Theta \subseteq T \in \mathfrak{L}$ be lattice rings over $\mathfrak{L}$ and $f\colon K \longrightarrow \Theta$ be a layer-preserved homomorphism. Define the lattice ring $K_f \subseteq R/R_f \times \mathfrak{L}$ by the rule: the pair $(x + R_f, \mathfrak{a}) \in K_f$ if and only if $(x, \mathfrak{a}) \in K$. Then $Im(f)$ is a lattice subring of $\Theta$ and $Im(f)$ is isomorphic to $K_f$.*

The theorem shows that a layer-preserved homomorphism $f$ is defined by the ordinary ideal $R_f$ of a ring $R$, and $R_f$ is defined by the kernel of $f$, which is a lattice ideal of $K$.

A complete description of the structure of Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields is obtained:

*1) nilpotent Leibniz algebras of dimension 3;*

*2) non-nilpotent Leibniz algebras of dimension 3 with 1-dimensional Leibniz kernel over finite fields;*

*3) non-nilpotent Leibniz algebras of dimension 3 with 2-dimensional Leibniz kernel over finite fields;*

*4) non-nilpotent cyclic Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields.*

In some cases, the structure of the Leibniz algebras essentially depends on the field's characteristic, in others on the solvability of specific equations in the field.

The structure of the Leibniz T-algebras, which are Baer algebras, is investigated.

**Theorem 2.** *Let $L$ be a Leibniz $T$-algebras over a field $F$. If $L$ – is Baer algebra, then every subalgebra $L$ is abelian, or $L = E \oplus Z$, where $Z \leqslant \zeta(L)$ and $E$ – extraspecial subalgebra such that $[a, a] \neq 0$ for every element $a \notin \zeta(E)$.*

It is found that the structure of Leibniz $T$-algebras essentially depends on the structure of its nil-radical.

**Theorem 3.** *Let $L$ be a hyperabelian Leibniz $T$-algebra over a field $F$. If $L$ is non-nilpotent and $\mathbf{Nil}(L) = D$ is abelian, then $L = D \oplus V$ where $V = Fv$, $[v, v] = 0$, $[v, d] = d = -[d, v]$ for every element $d \in \mathbf{Nil}(L)$. In particular, $L$ is a Lie algebra.*

**Theorem 4.** *Let $L$ be a hyperabelian Leibniz $T$-algebra over a field $F$. If $\mathbf{char}(F) \neq 2$, then $\mathbf{Nil}(L)$ is abelian.*

**Theorem 5.** *Let $L$ be a hyperabelian Leibniz $T$-algebra over a field $F$. Suppose that $L$ is non-nilpotent and $\mathbf{Nil}(L)$ is non-abelian. If a field $F$ is 2 – closed and char$(F) = 2$, then $L = (Fe \oplus Fc) \oplus Fv$, where*

$$[e, e] = c, [c, e] = [e, c] = [c, v] = [v, c] = 0,$$

$$[v, v] = 0, [v, e] = e + \gamma c = [e, v], \gamma \oplus F.$$

It was received a complete description of the Leibniz algebras, which are not Lie algebras, whose subalgebras are an ideal or a contraideal. We also obtain a description of Lie algebras, whose subalgebras are ideals or contraideals up to simple Lie algebras. That is:

**Theorem 6.** *Let $L$ be a Leibniz algebra, whose subalgebras are either ideals or contraideals. If $L$ is not solvable, then $L$ is a simple Lie algebra or quasisimple Leibniz algebra.*

**Theorem 7.** *Let $L$ be a solvable Leibniz algebra, whose subalgebras are either ideals or contraideals. Then $L$ is an algebra of one of the following types:*

(i) $L$ is abelian;

(ii) $L = E \oplus Z$, where $E$ is an extraspecial subalgebra such that $[e, e] \neq 0$ for each element $e \notin \zeta(E)$ and $Z \leqslant \zeta(L)$;

(iii) $L = D \oplus Fb$, where $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ for every $y \in D$, in particular, $L$ is a Lie algebra;

(iv) $L = D \oplus Fb$, where $[y, y] = [y, b] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y$ for every $y \in D$, in particular, $D = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(v) $L = B \oplus A$, where $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1, a_1] = c_1, [c_1, a_1] = 0$, $[a_1, c_1] = c_1$ and $[b, b] = [b, a_1] = [b, c_1] = [c_1, b] = 0$, $[a_1, b] = b$ for every $b \in B$, in particular, $B \oplus Fc_1 = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$.

(vi) $\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, where $D$ has a basis $\{z, b_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ such that $[a, a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a, z] = [z, a] = 0$,$[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ and $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ for all $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, in particular, $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$.

**Corollary 1.** *Let $L$ be a Lie algebra whose subalgebras are either ideals or contraideals. Then $L$ is an algebra of one of the following types:*

(i) $L$ is simple;

(ii) $L$ is quasisimple;

(iii) $L$ is abelian;

(iv) $L = D \oplus Fb$, where $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ for every $y \in D$.

Given all of the above, the topic of the dissertation is important and relevant.

**Key words:** contraideal, distributive lattice, extraspecial Leibniz algebra, fuzzy group, fuzzy ring, homomorphism, hyperabelian Leibniz algebra, ideal, lattice, left (right) center, Leibniz $T$-algebra, Leibniz algebra, nilpotent Leibniz algebra, subideal.

**Список опублікованих праць за темою дисертації**

*Статті у наукових фахових виданнях України:*

1. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras, whose subideals are ideals. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. **9**, 15–19 (2017). doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.015

2. Yashchuk, V.S. Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. **7**, 20–25 (2018). doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.020

*Статті у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз даних:*

3. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice groups. Algebra Discrete Math. **20**(1), 126–141 (2015).

4. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings: an interpretation of $L$-fuzzy rings as habitual algebraic structures. Algebra Discrete Math. **24**(2), 274–296 (2017).

*Статті у наукових виданнях інших держав, які входять до міжнародних наукометричних баз даних:*

5. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: The Leibniz algebras whose subideals are ideals, J. Algebra Appl. **17**(8), 1850151 (15 p.) (2018). doi.org/10.1142/S0219498818501517

*Тези наукових доповідей:*

6. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S.: Lattice groups. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, 3 – 6 June 2015, 18.

7. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S., Subbotin, I.Ya.: On some algebraic structures connected with groups and lattices. International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd, Odessa, 20 – 27 August 2015, 57.

8. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings. The conference Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, 19 – 22 December 2016, 31.

9. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras, Leibniz T-algebras and Baer algebras. IV Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 27 – 28 квітня, 2017, 204–206.

10. Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras with a large family of ideals. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Kyiv, 7 – 10 June, 2017, 15.

11. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras whose subideals are ideals. 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko, Kyiv, 3 – 7 July 2017, 70.

12. Yashchuk, V.S.: On some Leibniz algebras, having small dimension. Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19 – 20 квітня, 2018, 59.

13. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 4 over finite fields. V Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 25 – 26 квітня, 2019, 101–103.

# Зміст

# Перелік умовних позначень

| | |
|---|---|
| $L$ | – решітка. |
| $\mathfrak{L}$ | – скінченна дистрибутивна решітка. |
| $\mathbf{pr}_X(Y)$ | – проекція решіткової групи $Y$ на групу $X$. |
| $\Lambda[\mathfrak{M}]$ | – $\mathfrak{M}$-шар. |
| $\mathbf{H}(m)$ | – $m$-обід. |
| $L$ | – ліва алгебра Лейбніца. |
| $[A, B]$ | – підпростір, породжений $[a, b]$, де $a \in A$, $b \in B$. |
| $\mathrm{X} \leqslant Y$ | – $X$ підалгебра алгебри $Y$. |
| $\langle X \rangle$ | – підалгебра алгебри $L$, породжена множиною $X$. |
| $\mathbf{Ann}_Y(X)$ | – анулятор підалгебри Лейбніца $X$ в $Y$. |
| $\mathbf{Ann}_Y^{\mathbf{left}}(X)$ | – лівий анулятор підалгебри Лейбніца $X$ в $Y$. |
| $\mathbf{Ann}_Y^{\mathbf{right}}(X)$ | – правий анулятор підалгебри Лейбніца $X$ в $Y$. |
| $\mathbf{Leib}(X)$ | – ядро алгебри Лейбніца $X$. |
| $\mathbf{ncl}(X)$ | – клас нільпотентності алгебри Лейбніца $X$. |
| $\mathbf{dim}_F(X)$ | – вимірність алгебри Лейбніца X над полем $F$. |
| $\mathbf{Im}(\varphi)$ | – образ відображення $\varphi$. |

# Вступ

**Актуальність теми.** Одним із основних завдань алгебри є дослідження будови і властивостей тих чи інших алгебраїчних структур. Спектр задач, властивих цій області, різноманітний та здебільшого залежить від особливостей і специфіки алгебраїчних об'єктів. Водночас можна виділити два магістральні напрямки досліджень. Перший полягає у дослідженні загальної будови відповідної алгебраїчної структури (або за певних природних обмежень). Другий напрямок стосується розгляду природних підструктур, а також їх впливу на будову чи властивості основного об'єкта. При цьому в кожному конкретному випадку дослідження набувають свого унікального характеру, що підкреслює різноманітність і всебічність сучасних алгебраїчних досліджень.

Нині існує велика кількість природних алгебраїчних структур, дослідження в яких проводили із різною інтенсивністю та результативністю. Водночас можна констатувати, що найбільш якісними та ґрунтовними є результати, одержані в межах теорії груп, а також різних типів кілець та алгебр. Як виявилося, пов'язуючи ці структури з деякими важливими об'єктами (функції, решітки тощо), можливо природним чином визначити нові алгебраїчні системи. Саме про такі ситуації, зокрема, йдеться в даній дисертаційній роботі.

Отже, тематика дисертаційної роботи пов'язана з різними галузями сучасної математики, вона об'єднує деякі важливі алгебраїчні структури, виявляє спільні риси різних структур, що свідчить про загальність цих рис для різних алгебраїчних структур, зокрема решітки, групи, кільця, неасоціативні алгебри (алгебри Лейбніца). Також було виявлено важливий аспект решіткових структур, які є суто алгебраїчні, але вони є іншою мовою для так званих фазі структур, визначення яких не є суто алгебраїчне. Тематика є актуальна, вона пов'язана з дослідженнями багатьох відомих алгебраїстів і містить низку відкритих питань і важливих задач.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* є дослідження деяких властивостей решіткових груп і решіткових кілець, та зв'язків із відповідними фазі структурами, а також вивчення структури різних типів алгебр Лейбніца.

*Об'єктом дослідження* є групові функції, решіткові групи, нормальні фазі підгрупи, решіткові кільця, гомоморфізми, алгебри Лейбніца, усі субідеали яких є ідеали, алгебри Лейбніца вимірності 3, ідеали та контраідеали в алгебрах Лейбніца.

*Предметом дослідження* є вивчення деяких властивостей решіткових груп та решіткових кілець, встановлення зв'язків між $L$-фазі групами та $L$-фазі кільцями з решітковими групами та решітковими кільцями; а також дослідження структури різних типів алгебр Лейбніца.

*Методи дослідження.* У дисертаційній роботі застосовано методи та результати теорії фазі множин, а також алгебр Лейбніца.

**Наукова новизна отриманих результатів.** У дисертації автором вперше одержані такі теоретичні результати:

- доведено критерій групової функції для решіткових груп;
- доведено критерій нормальності для решіткових груп;
- доведено точковий критерій для решіткових кілець;
- доведено аналог теореми про гомоморфізми (для кілець) для решіткових кілець;
- одержано опис алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями;
- одержано опис алгебр Лейбніца, усі субідеали яких є ідеали;
- одержано опис алгебр Лейбніца, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали.

Всі результати нові й забезпечені докладними доведеннями.

**Особистий внесок здобувача.** Дисертація – самостійна наукова праця, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дозволили виконати поставлені завдання. Основні результати дисертаційної роботи одержані автором самостійно. У спільних статтях, де співавторами є Л.А. Курдаченко та І.Я. Субботін, було сформульовано постановки задач і проаналізовано вибір методів їх дослідження, а також обговорено одержані результати.

– У праці [54] внесок кожного співавтора є рівнозначним та нероздільним.

– У роботі [39] запропоновано формулювання та доведення твердження 1, твердження 2, доведено критерій групової функції, доведено твердження 6, а також формулювання та доведення наслідку до нього, доведено критерій нормальності.

– У публікації [53] доведено твердження 1, наведено формулювання та доведення властивостей решіткових кілець, доведено твердження 3, доведено точковий критерій, розділ про гомоморфізми.

– У праці [56] доведено теореми $A$, $B$, $C$, а також $D$.

**Апробація матеріалів дисертації.** Результати дисертаційної роботи було оприлюднено:

- на Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3 – 6 червня, 2015 р.);
- на Десятій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, Україна, 20 – 27 серпня 2015 р.);
- на Міжнародній математичній конференції Groups and Actions: Geometry and Dynamos, присвяченій пам'яті професора В. І. Сущанського (Київ, 19 – 22 грудня 2016 р.);
- на Четвертому всеукраїнському форумі студентів, аспірантів і молодих учених (Дніпро, Україна, 27 – 28 квітня 2017 р.);
- на Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка Національної академії наук України Ю. О. Митропольського (Київ, 7 – 10 червня 2017 р.);
- на Одинадцятій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (Київ, 3 – 7 липня 2017 р.);
- на Сьомій всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, 19 – 20 квітня 2018 р.);
- на П'ятому всеукраїнському форумі студентів, аспірантів і молодих учених (Дніпро, Україна, 25 – 26 квітня 2019 р.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 13 наукових працях, з них 2 статті в наукових фахових виданнях України [54, 83], 2 статті – у наукових фахових виданнях України, включених до наукометричної бази даних Scopus [39, 53], 1 статтю у науковому виданні іншої держави, включеному до наукометричної бази даних Scopus [56] і 8 тез доповідей у матеріалах міжнародних і всеукраїнських конференцій [38, 40, 52, 55, 81, 82, 84, 85].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг роботи – 137 сторінок, обсяг основного тексту дисертації – 111 сторінок. Список використаних джерел викладений на 8 сторінках і містить 88 найменувань.

**Зв'язок роботи з науковими програмами.** Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара у межах НДР «Узагальнено розв'язні групи і модулі над ними та їх застосування до інших алгебраїчних структур» (номер державної реєстрації 0115U002395, 2015–2017 рр.) і «Дослідження алгебраїчних структур з природними обмеженнями та деякі питання квантової механіки» (номер державної реєстрації 0119U100373, 2019–2021 рр.).

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має суто теоретичний характер, а її результати можливо застосувати в різних розділах сучасної алгебри.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок із науковими програмами, установлено об'єкт, предмет і методи дослідження, визначено його мету і завдання. Крім того, розкрито наукову новизну одержаних результатів, вказано особистий внесок здобувача.

**Перший** розділ присвячено аналізу літератури, пов'язаною з тематикою дисертації. У ньому вказано, ким і коли були одержані перші результати, зазначено задачі, споріднені з проблематикою дослідження, і автори, які ними займалися.

У **другому** розділі визначено деяку алгебраїчну структуру, пов'язану з групами й решітками. Ця структура є напівгрупою і з'явилася в результаті застосування запропонованого автором дисертації підходу до фазі груп і $L$-фазі груп, де $L$ – решітка. Такий підхід дозволяє послуговуватися зручнішою мовою алгебраїчних структур замість поширеної на сьогодні мови функцій.

Мета даного розділу – дослідити деякі алгебраїчні структури, пов'язані з функціями, визначеними на групі, дещо по-іншому. Якщо $S$ є множина, то з кожною її підмножиною $M$ пов'язана її характеристична функція, тобто $\chi_M \colon S \to \{0,1\}$ така, що $\chi_M(y) = 1$ для всіх $y \in M$ і $\chi_M(y) = 0$ для всіх $y \notin M$. У багатьох випадках підмножину ототожнювали з її характеристичною функцією.

У **третьому** розділі було введено деяку алгебраїчну структуру, пов'язану з кільцями та решітками. Вона з'явилася в результаті застосування запропонованого автором дисертації підходу до фазі кілець і $L$-фазі кілець, де $L$ – решітка. Такий підхід дозволяє застосовувати зручнішу мову алгебраїчних структур замість прийнятої в даний час мови функцій.

У теорії фазі кілець розглядають функції $\kappa \colon R \to [0,1]$, де $R$ – кільце, що задовольняє такі умови:

$$\kappa(x - y) \geq \kappa(x) \wedge \kappa(y) \text{ і } \kappa(xy) \geq \kappa(x) \wedge \kappa(y) \text{ для всіх } x, y \in R.$$

У другому розділі запропоновано інтерпретацію $L$-фазі груп як множини з операціями. За такого підходу основні поняття і результати набувають природної алгебраїчної форми, і процес їх появи стає більш змістовним. Більше того, було продемонстровано конструкцію, що дає дуже чітке уявлення про структури цих об'єктів. У даному розділі розглянуто аналогічну інтерпретацію для $L$-фазі кілець. Одержана структура формально є двояка, тому для неї було застосовано двояку термінологію. Крім того, термін $L$-фазі кільце не відображає усіх фактів. У даному розділі не прагнемо до максимальної узагальненості, природніше розглядати випадок, коли решітка $\mathfrak{L}$ є дистрибутивна і скінченна, хоча всі одержані результати можуть бути поширені на випадок довільної повної дистрибутивної решітки. У попередньому розділі не торкалися поняття гомоморфізму. У зазначеному розділі цю концепцію буде детально обговорено.

**Четвертий** розділ присвячено основним означенням, що стосуються алгебр Лейбніца. У ньому також наведено опис структури алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. У деяких випадках структура алгебр суттєво залежить від характеристики поля, в інших – від можливості розв'язання конкретних рівнянь у полі.

У розділі **п'ять** досліджено структуру гіперабелевих алгебр Лейбніца, субідеали яких є ідеалами. А також у цьому розділі розглядаються деякі узагальнено розв'язні $T$-алгебри Лейбніца й алгебри Лейбніца, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали.

У **висновках** перелічено основні результати роботи.

У **Додатку 1** наведено перелік статей і тез наукових доповідей, де були опубліковані одержані результати, і назви наукових конференцій, на яких ці результати були оприлюднені.

***Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику –***
***доктору фізико-математичних наук,***
***професору Курдаченку Леоніду Андрійовичу***
***за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу,***
***всебічну підтримку та допомогу в роботі.***

# 1 Огляд літератури

У першій половині XIX ст. намагання Дж. Буля формалізувати пропозиціональну логіку обумовило появу поняття булевої алгебри. У результаті дослідження аксіоматики булевої алгебри в кінці XIX ст., Ч. Пірс і Е. Шредер визначили поняття решітки. Незалежно від них Р. Дедекінд у своїх дослідженнях, що стосувались ідеалів алгебраїчних чисел, одержав те саме поняття. Насправді, Р. Дедекінд визначив також модулярність і ослаблену форму дистрибутивності решітки. Хоча деякі з ранніх результатів цих математиків і Е. Хантінгтона дуже “елегантні” і зовсім не тривіальні, вони зацікавили інших учених-математиків.

І лише праця Г. Біркгофа [10] середини 30-х рр. дала поштовх загальному розвитку теорії решіток. У блискучій серії праць він продемонстрував важливість теорії решіток і довів, що вона є “каркасом”, який уніфікує розрізнені результати.

Г. Біркгоф, В.І. Гливенко, К. Менгер, Д. Нейман, О. Оре та інші науковці досягли вражаючих успіхів у цій новій галузі, що дозволило Г. Біркгофу зробити спробу «репрезентувати» її математичному загалу, що він і зробив із дивовижним успіхом у першому виданні своєї монографії «Lattice theory».

Одним із найрозвиненіших розділів сучасної алгебри є теорія груп. Вона тісно пов’язана з іншими розділами як алгебри, так і математики в цілому. Серед чисельнних математичних об’єктів, тісно пов’язаних із групами можна виділити решітку. Теоретико-решітковими поняттями наповнена вся сучасна алгебра, хоча в багатьох підручниках це не висвітлено. Будову багатьох алгебраїчних систем (груп, кілець, універсальних алгебр та ін.) зазвичай найбільш виразно виявляється шляхом аналізу пов’язаних із ними решіток [10, 26].

Водночас ще одним інструментом вивчення структури алгебраїчних систем є функції (зокрема, числові). Тому цілком природно було поєднати групи, кільця, решітки і функції й провести відповідні дослідження.

Із праці Л. Заде [88] починається розвиток фазі математики, в основі якої покладено узагальнення характеристичної функції. Отже, фазі множина на множині $S$ є своєрідним узагальненням поняття ”характеристичної функції” на $S$, значення якої можемо брати більш різноманітними у порівнянні зі звичними значеннями з множини $L = \{\text{так}, \text{ні}\}$. У фазі математиці поширеним є випадок, коли $L = [0,1]$ – звичайний замкнутий відрізок дійсних чисел із природним порядком. Мотивацією для цього служить таке трактування: можемо розглядати значення узагальненої характеристичної функції як імовірність того факту, що даний елемент належить даній підмножині. Водночас алгебраїчна фазі структура побудована таким чином: із кожною алгебраїчною структурою $A$ пов'язана відповідна фазі структура зі специфічними функціями з $A$ в $[0,1]$, які, у свою чергу, пов'язані зі звичайною структурою алгебри $A$ [65]. Наприклад, об'єктом вивчення в теорії фазі груп є функція $\gamma\colon G \to [0,1]$, де $G$ – група, що задовольняє умови

$$\gamma(xy) \geq \gamma(x) \wedge \gamma(y) \text{ для всіх } x, y \in G$$

і

$$\gamma(x^{-1}) \geq \gamma(x) \text{ для будь-якого } x \in G$$

(див., наприклад, [65, Section 1.2]). Відразу ж з'являються узагальнення. У дисертаційній роботі розглядали функції $\gamma\colon G \to \mathfrak{L}$, де $\mathfrak{L}$ – дистрибутивна решітка [27]. Теорія фазі груп розвивалася досить швидко, але це був розвиток в ширину, а не в глибину. У праці [61] не було зроблено спроб систематизації одержаних результатів, значний масив результатів присвячених фазі групам, просто був зібраний у ній без належної уніфікації. Що стосується $L$-фазі груп, то тут, крім найзагальніших результатів, істотної динаміки в розвитку взагалі не спостерігається.

Тлумачення алгебраїчної структури як деякої множини функцій не дуже зручне. Тому досить часто функцію $\gamma$ розглядають як об'єднання всіх точкових функцій $\chi\big(g, \gamma(g)\big)$, де $g \in G$. У даному випадку $\chi(g, \mathfrak{a})$ така функція, що $\chi(g, \mathfrak{a})(g) = \mathfrak{a}$ і $\chi(g, \mathfrak{a})(y) = 0$, якщо $y \neq g$. Проте в деяких ситуаціях доводиться розглядати функції $\gamma$ як об'єднання всіх точкових функцій $\chi(g, \mathfrak{a})$ для будь-якого $g \in G$ і $\mathfrak{a} \leq \gamma(g)$ (наприклад, [36, 43]). Але при цьому точкові функції $\chi(g, \mathfrak{a})$, фактично відіграючи роль елементів, формально є підфункції $\gamma$, так що кожного разу доводиться вдаватися до спеціальних застережень.

Теорію фазі кілець уперше було розвинено в публікаціях [66, 79]. Відразу з'явилися деякі узагальнення. Якщо конкретніше, то функція $\gamma\colon A \to \mathfrak{L}$, де $A$ – деяка алгебраїчна структура, а $\mathfrak{L}$ – дистрибутивна решітка [27]. Зокрема, в праці [80] було представлено $L$-фазі кільця (див. також [64]).

Алгебри Лейбніца вперше запропоновано в роботах А.М. Блоха [5–7], у яких він називав їх $D$-алгебрами. Однак, тоді його дослідження не були продовжені. Інтерес до цього об'єкта зріс після виходу праці Ж. Лоде [57] (див. також [58, Section 10.6]), який і ввів термін "алгебра Лейбніца", названий на честь Готфріда Вільгельма Лейбніца, оскільки Г.В. Лейбніц розглядав *тотожність Лейбніца* для диференціювання функцій. Пізніше деякі автори називали ці алгебри алгебрами Лоде, хоча сам Ж. Лоде, іноді під псевдонімом G.W. Zinbiel (тут Zinbiel – навпаки Leibniz), в опитуванні [86] зауважив, що цей термін не підходить.

Алгебри Лейбніца поширені в деяких розділах диференціальної геометрії, гомологічної алгебри, класичній алгебраїчній топології, алгебраїчній $K$-теорії, некомутативній геометрії та ін. Також вони знайшли певні застосування у фізиці ( [11, 17, 18]).

Теорія алгебр Лейбніца розвивається досить інтенсивно, але дуже нерівномірно. З одного боку, ґрунтовні структурні теореми було одержано як аналоги відповідних результатів алгебр Лі. З іншого, є деякі питання, які, здавалося б, мають розглядати в першу чергу, але навіть не починали досліджувати. Наприклад, це теми, що стосуються взаємозв'язку підалгебр, ідеалів і субідеалів. Варто зазначити, наприклад, що природне питання про структуру алгебр Лейбніца, підалгебри яких є ідеали, лише нещодавно було досліджено в роботі [51]. Якщо у випадку алгебр Лі структура аналогічних алгебр дуже проста (вони є абелеві), то в алгебрах Лейбніца ситуація більш складна і водночас цікава. Маємо аналогічну ситуацію для циклічних підалгебр: якщо в алгебрах Лі кожна циклічна підалгебра має вимірність 1, то в алгебрах Лейбніца вона може мати дуже складну структуру.

$T$-алгебри Лі досліджували Я. Стюарт [77], А.Г. Гейн і Ю.М. Мухін [29]. Зокрема, було описано розв'язні $T$-алгебри і скінченновимірні $T$-алгебри Лі над полем характеристики 0. Аналогічні задачі розглядались також і в теорії груп, де було отримано неймовірну кількість різноманітних результатів (див, наприклад, [1, 12, 13, 20, 21, 23, 24, 28, 30–34, 62, 63, 70–76, 78, 87]).

Першим кроком у вивченні всіх типів алгебри є опис алгебр, які мають малі вимірності. На відміну від більш простих випадків одновимірних і двомірних алгебр Лейбніца, структура тривимірних алгебр Лейбніца складніша. У свою чергу, структура тривимірної алгебри Лейбніца у порівнянні з тривимірними алгебрами Лі є більш складною. Вивчення алгебр Лейбніца, які мають вимірність 3 було проведено у роботах [2, 3, 14, 16] для полів характеристики 0. У розділі 4, описано протилежну ситуацію, а саме розглянуто структуру алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. Як буде продемонстровано пізніше, ця ситуація є набагато різноманітнішою, інколи структура алгебри істотно залежить від характеристики поля, подекуди – від розв'язання специфічних рівнянь у полі і т. д.

Один із підходів до вивчення алгебр Лейбніца, який виявився досить ефективним, особливо для нескінченно вимірних алгебр Лейбніца, полягає в розгляді алгебр Лейбніца, підалгебри яких мають деякі фіксовані природні властивості. Він був дуже ефективним для алгебр Лі, тоді як в алгебрах Лейбніца його почали застосовувати лише нещодавно. Наприклад, у статті [15] вивчалися алгебри Лейбніца, підалгебри яких є алгебри Лі, і алгебри Лейбніца, підалгебри яких є абелеві. Також аналогічні задачі розглядались і в теорії груп [19, 22, 25, 42, 44–50, 59, 60, 67–69].

# 2 Решіткові групи

## 2.1 Основні означення і поняття

Наведемо основні поняття з теорії $L$-фазі груп, а також результати у вигляді, необхідному для нашого перетворення. Одержана структура формально є інша, тому й позначатимемо її по-іншому. Розглянемо тільки базисні поняття, утім даний підхід дозволить побачити загальну структурну картину. Що стосується терміна $L$-фазі група, то він на нашу думку, не відображає суті справи, тому будемо послуговуватися поняттям групової функції. Не будемо прагнути максимальної схожості, нам видається більш природним розглянути випадок, коли решітка $\mathfrak{L}$ є дистрибутивною, і звичайно все одержане може бути розширене на випадок довільних повних дистрибутивних решіток.

Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – решітка. Для уникнення неточностей, одиничний елемент групи $G$ позначатимемо через $e$. Розглянемо набір $\mathfrak{L}^G$ усіх функцій $\lambda\colon G \to \mathfrak{L}$. На цій множині визначимо операції $\wedge$ і $\vee$ за таким правилом: якщо $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}^G$, а потім покласти

$$(\lambda \wedge \mu)(x) = \lambda(x) \wedge \mu(x)$$

і

$$(\lambda \vee \mu)(x) = \lambda(x) \vee \mu(x) \text{ для кожного } x \in G.$$

Очевидно, що операції $\wedge$ і $\vee$ комутативні й асоціативні:

$$\big(\lambda \wedge (\lambda \vee \mu)\big)(x) = \lambda(x) \wedge (\lambda \vee \mu)(x) = \lambda(x) \wedge \big(\lambda(x) \vee \mu(x)\big) = \lambda(x)$$

і

$$\big(\lambda \vee (\lambda \wedge \mu)\big)(x) = \lambda(x) \vee (\lambda \wedge \mu)(x) = \lambda(x) \vee \big(\lambda(x) \wedge \mu(x)\big) = \lambda(x),$$

так що $\lambda \wedge (\lambda \vee \mu) = \lambda$ і $\lambda \vee (\lambda \wedge \mu) = \lambda$. Очевидно $\lambda \wedge \lambda = \lambda$ і $\lambda \vee \lambda = \lambda$. Отже, множина $\mathfrak{L}^G$ є решіткою.

Якщо $a, b \in \mathfrak{L}$, то $a \vee b = b$ еквівалентно $a \leq b$. Тому можемо визначити порядок $\mathfrak{L}^G$: для $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}^G$ покладемо $\lambda \leq \mu$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda(x) \leq \mu(x)$ для кожного елемента $x \in G$.

Припустимо тепер, що решітка $\mathfrak{L}$ – дистрибутивна і скінченна. Як скінченна вона має найбільший елемент $\mathfrak{m}$ і найменший $\mathfrak{o}$. Для кожної функції $f\colon G \to \mathfrak{L}$ визначимо $\mathbf{Supp}(f)$ як підмножину всіх елементів $x \in G$ такі, що $f(x) \neq \mathfrak{o}$.

Нехай $Y$ підмножина $G$ і $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$. Визначимо функцію $\chi(Y, \mathfrak{a})$ таким чином:

$$\chi(Y, \mathfrak{a})(x) = \begin{cases} \mathfrak{a}, & \text{якщо } x \in Y \\ \mathfrak{o}, & \text{якщо } x \notin Y. \end{cases}$$

Якщо $Y = \{y\}$, то замість $\chi(\{y\}, \mathfrak{a})$ запишемо коротше – $\chi(y, \mathfrak{a})$. Функцію $\chi(y, \mathfrak{a})$ називають *точковою функцією* або *точкою*. В силу означення $\chi(y, \mathfrak{a}) \in \mathfrak{L}^G$. Крім того, нехай $f \in \mathfrak{L}^G$. Якщо $\mathbf{Supp}(f) = \{g_1, \dots, g_n\}$ скінченна і $f(g_j) = \mathfrak{a}_\mathfrak{j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то, очевидно, що $f = \chi(g_1, \mathfrak{a}_1) \vee \ldots \vee \chi(g_n, \mathfrak{a}_\mathfrak{n})$.

Визначимо бінарну операцію $\odot$ на $\mathfrak{L}^G$ за таким правилом. Нехай $\mu, \nu \in \mathfrak{L}^G$ і $x$ – довільний елемент групи $G$. Розглянемо підмножину решітки $\mathfrak{L}$:

$$\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid u, v \text{ є такими елементами } G, \text{ що } yz = x\}.$$

Оскільки $\mathfrak{L}$ – скінченна, то ця підмножина дійсно скінченна. Тому можемо розглянути її верхню межу. Покладемо

$$(\mu \odot \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in G,\ yz = x} \big(\mu(y) \wedge \nu(z)\big).$$

Зауважимо, що

$$(\mu \odot \nu)(x) = \bigvee_{y \in G} \big(\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)\big) = \bigvee_{z \in G} \big(\mu(xz^{-1}) \wedge \nu(z)\big).$$

## 2.2 Властивості добутку $\odot$

**Твердження 2.1.** *Мають місце такі твердження:*

(i) *операція $\odot$ є асоціативна;*

(ii) *функція $\chi(e, \mathfrak{m})$ – одиничний елемент відносно операції $\odot$;*

(iii) $\lambda \odot (\mu \vee \nu) = (\lambda \odot \mu) \vee (\lambda \odot \nu)$ *і* $(\mu \vee \nu) \odot \lambda = (\mu \odot \lambda) \vee (\nu \odot \lambda)$ *для всіх функцій* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^G$*;*

(iv) *якщо* $x, y \in G, \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, *тоді* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \lambda\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(y^{-1}x)$, *зокрема, якщо* $\mathfrak{a} = \bigvee\limits_{x \in G} \lambda(x)$, *тоді* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \lambda\big)(x) = \lambda(y^{-1}x)$*;*

(v) $\big(\lambda \odot \chi(y, \mathfrak{a})\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(xy^{-1})$, *зокрема, якщо* $\mathfrak{a} = \bigvee\limits_{x \in G} \lambda(x)$, *тоді* $\big(\lambda \odot \chi(y, \mathfrak{a})\big)(x) = \lambda(xy^{-1})$*;*

(vi) *якщо* $x, y, u \in G$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, *тоді* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(yu) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ *і* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{o}$, *якщо* $x \neq yu$. *Іншими словами,* $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b}) = \chi(yu, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$, *зокрема,* $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{a}) = \chi(yu, \mathfrak{a})$*;*

(vii) $\big(\chi(x,\mathfrak{a})\odot\lambda\odot\chi(x^{-1},\mathfrak{a})\big)(y)=\mathfrak{a}\wedge\lambda(x^{-1}yx)$.

*Доведення.* (i) Нехай $\lambda,\mu,\nu\in\mathfrak{L}^G$. Покладемо $\kappa=\lambda\odot\mu$ і $\eta=\mu\odot\nu$. Матимемо:

$$\begin{aligned}\big((\lambda\odot\mu)\odot\nu\big)(x)&=(\kappa\odot\nu)(x)=\\&=\bigvee_{y,z\in G,\ yz=x}\big(\kappa(y)\wedge\nu(z)\big)=\\&=\bigvee_{y,z\in G,\ yz=x}\left(\bigvee_{u,v\in G,\ uv=y}\big(\lambda(u)\wedge\mu(v)\big)\wedge\nu(z)\right)=\\&=\bigvee_{u,v,z\in G,\ uvz=x}\Big(\big(\lambda(u)\wedge\mu(v)\big)\wedge\nu(z)\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda\odot(\mu\odot\nu)\big)(x)&=(\lambda\odot\eta)(x)=\\&=\bigvee_{u,y\in G,uy=x}\big(\lambda(u)\wedge\eta(y)\big)=\\&=\bigvee_{u,y\in G,uy=x}\left(\lambda(u)\wedge\left(\bigvee_{v,z\in G,\ vz=y}\big(\mu(v)\wedge\nu(z)\big)\right)\right)=\\&=\bigvee_{u,v,z\in G,\ uvz=x}\left(\lambda(u)\wedge\Big(\mu(v)\wedge\nu(z)\Big)\right).\end{aligned}$$

Оскільки $\big(\lambda(u)\wedge\mu(v)\big)\wedge\nu(z)=\lambda(u)\wedge\big(\mu(v)\wedge\nu(z)\big)$ для всіх $u,v,z\in G$, то

$$\big((\lambda\odot\mu)\odot\nu\big)(x)=\big(\lambda\odot(\mu\odot\nu)\big)(x)$$

для кожного $x\in G$. Це означає, що $(\lambda\odot\mu)\odot\nu=\lambda\odot(\mu\odot\nu)$.

(ii) Нехай $\lambda\in\mathfrak{L}^G$ і розглянемо добуток $\lambda\odot\chi(e,\mathfrak{m})$. Згідно із означенням $\big(\chi(e,\mathfrak{m})\big)(e)=\mathfrak{m}$ і $\big(\chi(e,\mathfrak{m})\big)(x)=\mathfrak{o}$, якщо $x\neq 1$. Матимемо:

$$\lambda(x)\wedge\big(\chi(e,\mathfrak{m})\big)(e)=\lambda(x)\wedge\mathfrak{m}=\lambda(x)$$

і

$$\lambda(y)\wedge\big(\chi(e,\mathfrak{m})\big)(z)=\mathfrak{o},\ \text{якщо } z\neq 1,$$

так що

$$\begin{aligned}\big(\lambda\odot\chi(e,\mathfrak{m})\big)(e)&=\bigvee_{y,z\in G,\ yz=1}\big(\lambda(y)\wedge\chi(e,\mathfrak{m})(z)\big)=\\&=\lambda(e)\wedge\chi(e,\mathfrak{m})(e)=\lambda(e),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda\odot\chi(e,\mathfrak{m})\big)(x)&=\bigvee_{y,z\in G,\ yz=x}\big(\lambda(y)\wedge\chi(e,\mathfrak{m})(z)\big)=\\&=\lambda(x)\wedge\chi(e,\mathfrak{m})(e)=\lambda(x).\end{aligned}$$

Оскільки це справедливо для всіх $x \in G$, $\lambda \odot \chi(e, \mathfrak{m}) = \lambda$. Аналогічним чином доводиться, що $\chi(e, \mathfrak{m}) \odot \lambda = \lambda$.

(iii) Маємо

$$\big(\lambda \odot (\mu \vee \nu)\big)(x) =$$
$$= \bigvee_{y \in G} \Big(\lambda(y) \wedge \big((\mu \vee \nu)(y^{-1}x)\big)\Big) =$$
$$= \bigvee_{y \in G} \Big(\lambda(y) \wedge \big(\mu(y^{-1}x) \vee \nu(y^{-1}x)\big)\Big) =$$
$$= \bigvee_{y \in G} \Big(\big(\lambda(y) \wedge \mu(y^{-1}x)\big) \vee \big(\lambda(y) \wedge \nu(y^{-1}x)\big)\Big) =$$
$$= \Big(\bigvee_{y \in G} \big(\lambda(y) \wedge \mu(y^{-1}x)\big)\Big) \vee \Big(\bigvee_{y \in G} \big(\lambda(y) \wedge \nu(y^{-1}x)\big)\Big) =$$
$$= (\lambda \odot \mu)(x) \vee (\lambda \odot \nu)(x) = \big((\lambda \odot \mu) \vee (\lambda \odot \nu)\big)(x).$$

Це означає, що

$$\lambda \odot (\mu \vee \nu) = (\lambda \odot \mu) \vee (\lambda \odot \nu).$$

Послуговуючись подібними міркуваннями, одержуємо, що і

$$(\mu \vee \nu) \odot \lambda = (\mu \odot \lambda) \vee (\nu \odot \lambda).$$

(iv) Нехай $x$ – довільний елемент групи $G$. Якщо $z \neq y$, тоді $\chi(y, \mathfrak{a})(z) = \mathfrak{o}$, так що матимемо

$$(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \lambda)(x) =$$
$$= \bigvee_{z \in G} \Big(\chi(y, \mathfrak{a})(z) \wedge \lambda(z^{-1}x)\Big) =$$
$$= \chi(y, \mathfrak{a})(y) \wedge \lambda(y^{-1}x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(y^{-1}x).$$

Доведення (v) аналогічне.

(vi) Якщо $u \in G$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \chi(u, \mathfrak{b})(y^{-1}x)$. Нагадаємо, що $\chi(u, \mathfrak{b})(y^{-1}x) = \mathfrak{b}$, якщо $y^{-1}x = u$ або $x = yu$, і $\chi(u, \mathfrak{b})(y^{-1}x) =$ $= \mathfrak{o}$, якщо $y^{-1}x \neq u$ або $x \neq yu$. Таким чином,

$$\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \begin{cases} \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}, \text{ якщо } x = yu \\ \mathfrak{o}, \text{ якщо } x \neq yu \ . \end{cases}$$

Отже, довели твердження (vi).

(vii) Застосовуючи вищедоведене, одержуємо

$$\Big(\chi(x,\mathfrak{a}) \odot \big(\gamma \odot \chi(x^{-1},\mathfrak{a})\big)\Big)(y) =$$

$$= \bigvee_{u,v,z \in G,\ uvz=y} \chi(x,\mathfrak{a})(u) \wedge \big(\gamma(v) \wedge \chi(x^{-1},\mathfrak{a})\big)(z) =$$

$$= \chi(x,\mathfrak{a})(x) \wedge \gamma(x^{-1}yx) \wedge \chi(x^{-1},\mathfrak{a})(x^{-1}) =$$

$$= \mathfrak{a} \wedge \gamma(x^{-1}yx) \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \wedge \gamma(x^{-1}yx).$$

□

## 2.3 Групові функції

Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $\gamma \in \mathfrak{L}^G$. Тоді сюр'єктивну функцію $\gamma$ називатимемо *груповою функцією* $G$, якщо вона задовольняє такі умови:

**(GF 1)** $\gamma(xy) \geq \gamma(x) \wedge \gamma(y)$ для будь-яких $x, y \in G$,

**(GF 2)** $\gamma(x^{-1}) \geq \gamma(x)$ для кожного $x \in G$.

Нехай $\gamma, \kappa$ – групові функції на $G$. Якщо $\gamma \leq \kappa$, говоритимемо, що $\gamma$ *є підгрупа* функції $\kappa$. Це позначатимемо $\gamma \preceq \kappa$.

**Твердження 2.2.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $\gamma \in \mathfrak{L}^G$, припустимо, що $\gamma$ – це групова функція на $G$. Тоді справедливі такі твердження:*

(i) $\gamma(x^{-1}) = \gamma(x)$ *для кожного $x \in G$ (зокрема, функція $\gamma$ – парна);*

(ii) $\gamma(xy^{-1}) \geqslant \gamma(x) \wedge \gamma(y)$ *для будь-яких $x, y \in G$;*

(iii) $\gamma(x^n) \geqslant \gamma(x)$ *для кожного $x \in G$ і будь-якого цілого $n$;*

(iv) $\gamma(e) \geqslant \gamma(x)$ *для кожного $x \in G$;*

(v) *нехай $\lambda$, $\kappa \leq \gamma$, тоді $\lambda \odot \kappa \leq \gamma$, зокрема $\gamma \odot \gamma \leq \gamma$.*

*Доведення.* (i) Маємо $x = (x^{-1})^{-1}$, так що із умови **(GF 2)** випливає, що $\gamma(x) \geqslant \gamma(x^{-1})$, який разом з $\gamma(x^{-1}) \geqslant \gamma(x)$ доводить, що $\gamma(x) = \gamma(x^{-1})$ для кожного елемента $x \in G$.

(ii) Нехай $x, y$ – довільні елементи групи $G$. Із умови **(GF 1)** випливає, що $\gamma(xy^{-1}) \geqslant \gamma(x) \wedge \gamma(y^{-1})$, і в силу **(i)** $\gamma(y^{-1}) = \gamma(y)$, так що $\gamma(xy^{-1}) \geqslant \gamma(x) \wedge \gamma(y)$.

(iii) Нехай $x \in G$. Із умови **(GF 1)** випливає, що

$$\gamma(x^2) = \gamma(xx) \geqslant \gamma(x) \wedge \gamma(y) = \gamma(x).$$

Послуговуючись звичайною індукцією, одержуємо, що $\gamma(x^n) \geqslant \gamma(x)$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Припустимо тепер, що $n = -k$, де $k \in \mathbb{N}$. Тоді $x^n = (x^{-1})^k$. Згідно із доведеним вище маємо

$$\gamma(x^n) = \gamma\big((x^{-1})^k\big) \geqslant \gamma(x^{-1}) = \gamma(x).$$

(iv) Нехай $x \in G$. Із умови **(GF 1)** маємо

$$\gamma(e) = \gamma(xx^{-1}) \geqslant \gamma(x) \wedge \gamma(x^{-1}) = \gamma(x) \wedge \gamma(x) = \gamma(x).$$

(v) Нехай $x$ – довільний елемент групи $G$. Включення $\lambda, \kappa \leq \gamma$ означає, що $\lambda(y) \wedge \kappa(z) \leq \gamma(y) \wedge \gamma(z)$. Оскільки $\gamma$ групова функція, то $\gamma(y) \wedge \gamma(z) \leq \gamma(yz)$, таким чином,

$$(\lambda \odot \kappa)(x) = \bigvee_{y,z \in G,\ yz=x} \Big(\gamma(y) \wedge \kappa(z)\Big) \leq \bigvee_{y,z \in G,\ yz=x} \gamma(yz) = \gamma(x).$$

Отже, $(\lambda \odot \kappa)(x) \leq \gamma(x)$. □

## 2.4 Критерій групової функції

**Теорема 2.1.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\gamma \in \mathfrak{L}^G$. Тоді $\gamma$ – це групова функція на $G$ тоді й тільки тоді, коли мають місце такі твердження:*

**(GF 3)** $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \gamma(y)\big) \subseteq \gamma$ *для будь-яких $x, y \in G$.*

**(GF 4)** $\chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \gamma$ *для кожного $x \in G$.*

*Доведення.* Припустимо спочатку, що $\gamma$ є групова функція. Очевидно, що $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \subseteq \gamma$ і $\chi\big(y, \gamma(y)\big) \subseteq \gamma$ для будь-яких елементів $x, y \in G$. Застосовуючи **твердження 2.2 (v)**, одержуємо, що

$$\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \gamma(y)\big) \subseteq \gamma.$$

Нехай $x$ – довільний елемент групи $G$. Маємо $\Big(\chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big)\Big)(x^{-1}) = \gamma(x)$. Оскільки $\gamma$ – групова функція, то $\gamma(x) \leq \gamma(x^{-1})$. Зауважимо, що якщо $y \neq x^{-1}$, то $\Big(\chi\big(x, \gamma(x)\big)\Big)(y) = \mathfrak{o}$, так що $\Big(\chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big)\Big)(y) \leq \gamma(y)$ для кожного $y \in G$. Це означає, що $\chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \gamma$.

Тепер же припустимо, що $\gamma$ задовольняє обидві умови **(GF 3)** і **(GF 4)**. Нехай $x$, $y$ – довільні елементи групи $G$. Тоді з огляду на умову **(GF 3)**

$$\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \gamma(y)\big) \subseteq \gamma.$$

Відповідно до **твердження 2.1 (vi)** маємо
$$\Big(\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\chi\big(y,\gamma(y)\big)\Big)(xy)=\gamma(x)\wedge\gamma(y).$$
Із включення $\chi(x,\gamma(x))\odot\chi(y,\gamma(y))\subseteq\gamma$ випливає, що
$$\Big(\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\chi\big(y,\gamma(y)\big)\Big)(xy)\leq\gamma(xy),$$
таким чином,одержуємо, що $\gamma(x)\wedge\gamma(y)\leq\gamma(xy)$, і $\gamma$ задовольняє умову **(GF 1)**.

Нехай $x\in G$. Оскільки $\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)\subseteq\gamma$ і $\Big(\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)\Big)(y)\leq\gamma(y)$ для кожного $y\in G$. Зокрема, $\Big(\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)\Big)(x^{-1})=\gamma(x)\leq\gamma(x^{-1})$, так що $\gamma$ задовольняє умову **(GF 2)**. $\square$

## 2.5 Визначення нового означення: решіткова група

Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Розглянемо декартовий добуток $A=G\times\mathfrak{L}$. Визначати операцію множення на $A$ будемо за таким правилом: $(u,\mathfrak{a})(v,\mathfrak{b})=(uv,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$ для будь-яких $u,v\in G$ та $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}$. Ця операція асоціативна, тому що множення в $G$ та операція $\wedge$ в $\mathfrak{L}$ асоціативні. Пара $(e,\mathfrak{m})$ є одиничним елементом відносно даної операції.

Одержаний вище критерій дозволяє переформулювати означення групової функції так.

Непорожню підмножину $\Lambda$ із $G\times\mathfrak{L}$ називають *решітковою групою* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє таким умовам:

**(LG 1)** якщо $(x,\mathfrak{a})\in\Lambda$ і $\mathfrak{b}\leq\mathfrak{a}$, тоді $(x,\mathfrak{b})\in\Lambda$;

**(LG 2)** якщо $(x,\mathfrak{a})$, $(y,\mathfrak{b})\in\Lambda$, тоді $(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})\in\Lambda$;

**(LG 3)** якщо $(x,\mathfrak{a})\in\Lambda$, тоді $(x^{-1},\mathfrak{a})\in\Lambda$.

Для кожного елемента $x\in\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ покладемо
$$\mathfrak{C}_\Lambda(x)=\{\mathfrak{a}\in\mathfrak{L}\mid(x,\mathfrak{a})\in\Lambda\}.$$

Зазначимо, що решіткова група $\Lambda$ визначає групову функцію на $G$. Дійсно, для кожного елемента $x\in\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ множина $\mathfrak{C}_\Lambda(x)$ непорожня. Покладемо $\lambda(x)=\bigvee\mathfrak{C}_\Lambda(x)$. Якщо $x\notin\mathbf{pr}_G(\Lambda)$, то вважатимемо, що $\lambda(x)=\mathfrak{o}$. Тоді $\lambda$ – функція. Якщо $u,v\in G$ і $\lambda(u)=\mathfrak{a}$, та $\lambda(v)=\mathfrak{b}$, тоді $(uv,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})\in\Lambda$ за умовою **(LG 2)**. Звідси випливає, що $\lambda(uv)\geqslant\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}=\lambda(u)\wedge\lambda(v)$, так що $\lambda$ задовольняє умову **(GF 1)**. Аналогічно, нехай $\lambda(u)=\mathfrak{a}$, тоді $(u^{-1},\mathfrak{a})\in\Lambda$ за умовою **(LG 3)**. Звідси випливає, що $\lambda(u^{-1})\geqslant\mathfrak{a}=\lambda(u)$, тобто $\lambda$ задовольняє **(GF 2)**.

Нехай $\Lambda$, $\Gamma$ – решіткові групи над $\mathfrak{L}$. Якщо $\Lambda$ включає $\Gamma$, то говоритимемо, що $\Gamma$ є *решіткова підгрупа* $\Lambda$, і позначатимемо це $\Gamma \leqslant \Lambda$.

Якщо $\gamma$, визначена на $\Gamma$, є групова функція, то $\gamma \preceq \lambda$.

Очевидно, що $G \times \mathfrak{L}$ є найбільша решіткова група над $\mathfrak{L}$, а $E = \{(e, \mathfrak{o})\}$ – найменша решіткова група над $\mathfrak{L}$; цю решіткову групу називають *тривіальною*. Крім того, якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді $\{(e, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}\}$ – решіткова група над $\mathfrak{L}$.

Кожна решіткова група $\Lambda$ включає $\mathbf{pr}_G(\Lambda) \times \{\mathfrak{o}\}$. Для кожної підгрупи $H$ із $G$ підмножина $H \times \{\mathfrak{o}\}$ є решіткова група. Нагадаємо, що підмножину $\mathfrak{M}$ із $\mathfrak{L}$ називають *нижнім* (і відповідно *верхнім*) *сегментом* $\mathfrak{L}$, якщо з того, що $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ (відповідно $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$) випливає, що $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$.

Якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, то підмножина $\{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{L}$ і $\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a}\}$ (відповідно $\{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{L}$ і $\mathfrak{x} \geqslant \mathfrak{a}\}$) є *нижній сегмент* (відповідно є *верхній сегмент*) $\mathfrak{L}$. Це називають *головним нижнім* (відповідно *верхнім*) *сегментом* $\mathfrak{L}$, що породжується $\mathfrak{a}$.

## 2.6 Властивості решіткових груп

**Твердження 2.3.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\mathfrak{S}$ – сімейство решіткових підгруп над $\mathfrak{L}$. Тоді перетин $\cap\mathfrak{S}$ є решіткова підгрупа.*

**Твердження 2.4.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\Lambda$ – решіткова група. Тоді:*

(i) $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ *є напівгрупа відносно операції $\wedge$ з одиницею $\mathfrak{e}(\Lambda) = \bigvee \mathfrak{C}_\Lambda(1)$ і нулем $\mathfrak{o}$. Крім того,* $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ *є головний нижній сегмент $\mathfrak{L}$, який породжений $\mathfrak{e}(\Lambda)$;*

(ii) $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ *є підгрупа групи $G$. Навпаки, для кожної підгрупи $H$ із* $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ *підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ і $x \in H\} = \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$ є решіткова підгрупа $\Lambda$;*

(iii) *якщо $\mathfrak{M}$ нижній сегмент $\mathfrak{L}$, тоді $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ і $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ є решіткова підгрупа $\Lambda$. Зокрема,* $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}^{-1}(\mathfrak{M})$ *є решіткова група.*

*Доведення.* (i) Справді, якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$, тобто елементи $u, v \in G$ такі, що $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in \Lambda$. Оскільки $\Lambda$ є решіткова група, тоді

$$(uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) \in \Lambda.$$

Звідси випливає, що $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$. Зокрема, $\mathfrak{e}(\Lambda) = \bigvee \mathfrak{C}_{\Lambda}(e) \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$.

Нехай $\mathfrak{a} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ і $u$ – елемент групи $G$ такий, що $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$. Оскільки $\Lambda$ є решіткова група, то $(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ за умовою **(LG 3)**. Застосувавши **(LG 2)**,одержимо, що

$$(e, \mathfrak{a}) = (uu^{-1}, \mathfrak{a}) = (uu^{-1}, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{a})(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda.$$

Отже, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}(e)$, звідси випливає, що $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}(\Lambda)$. Іншими словами, $\mathfrak{e}(\Lambda)$ є найбільший елемент $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$.

Нехай $\mathfrak{c}$ – довільний елемент $\mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{e}(\Lambda)$. Оскільки $\big(e, \mathfrak{e}(\Lambda)\big) \in \Lambda$, тоді $(e, \mathfrak{c}) \in \Lambda$ за умовою **(LG 1)**. Звідси випливає, що $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ є головний нижній сегмент $\mathfrak{L}$, який породжений $\mathfrak{e}(\Lambda)$.

(ii) Нехай $K = \mathbf{pr}_G(\Lambda)$ та $u, v \in K$. Тоді існують елементи $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ такі, що $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in \Lambda$. Оскільки $\Lambda$ є решіткова група, то

$$(uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) \in \Lambda.$$

Звідси випливає, що $uv \in K$. Якщо $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, тоді $(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ за умовою **(LG 3)**, а отже, випливає, що $u^{-1} \in K$. Таким чином, $K$ є підгрупа групи $G$.

Припустимо тепер, що $H$ – підгрупа $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ і нехай $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$. Оскільки $\Lambda$ є решіткова група, то $(uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) \in \Lambda$. У силу того, що $H$ є підгрупа, то з того, що $uv \in H$, випливає, що $(uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$. Оскільки $H$ є підгрупа, то з того, що $u \in H$, випливає, що $u^{-1} \in H$. Отже, $\Lambda$ є решіткова група, і $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, звідси маємо, що $(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$. Таким чином, $(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$, так що $\mathbf{pr}_G^{-1}(H)$ задовольняє умови **(LG 2)** та **(LG 3)**, і $(uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) \in \Lambda$. Отже, $K$ є підгрупа групи $G$. Нехай $(u, \mathfrak{a}) \in \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$ і $\mathfrak{b}$ – елемент решітки $\mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$. Тоді $(u, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, а, отже, $(u, \mathfrak{b}) \in \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$.

(iii) Нехай $\mathfrak{M}$ – нижній сегмент $\mathfrak{L}$, $K$ – підгрупа $G$ і $M = K \times \mathfrak{M}$. Тоді $M$ є решіткова група. Дійсно, якщо $(x, \mathfrak{a}) \in M$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$, тому що $\mathfrak{M}$ є нижнім сегментом $\mathfrak{L}$. Звідси випливає, що $(x, \mathfrak{b}) \in M$, так що $M$ задовольняє умову **(LG 1)**. Припустимо, що $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in M$. Оскільки $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Той факт, що $K$ – підгрупа $G$ означає, що $xy \in K$, а отже, $(xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in M$. Зазначимо, що $(xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b})$, це доводить, що $M$ задовольняє умову **(LG 2)**. Нарешті, нехай $(x, \mathfrak{a}) \in M$. Оскільки $K$

є підгрупа $G$, тоді $x^{-1} \in K$, а отже $(x^{-1}, \mathfrak{a}) \in M$, і $M$ задовольняє умову **(LG 3)**.

Нехай $H = \mathbf{pr}_G(\Lambda)$, тоді можна бачити, що

$$\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\} = H \times \mathfrak{M} \cap \Lambda.$$

**Твердження 2.3** доводить, що ця підмножина є решіткова підгрупа $\Lambda$. $\square$

## 2.7 Добуток підмножин

Нехай $\Lambda$ – решіткова група. На відміну від абстрактних груп, решіткова група може містити понад один ідемпотент. Крім того, $\Lambda$ містить пару $(1, \mathfrak{a})$ для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$. Справді, нехай $u$ – елемент групи $G$ такий, що $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$. Оскільки $\Lambda$ є решіткова група, то $(u, \mathfrak{a})(u^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, але $(u, \mathfrak{a})(u^{-1}, \mathfrak{a}) = (e, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}) = (e, \mathfrak{a})$. Це свідчить про те, що напівгрупа $\Lambda$ може бути групою тільки в тому випадку, коли $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ містить тільки один елемент $\mathfrak{a}$. Нехай $\mathfrak{b} \in \Lambda$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді з умови **(LG 1)** випливає, що $(u, \mathfrak{b}) \in \Lambda$. Отже, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Іншими словами, $\mathfrak{a}$ – найменший елемент $\mathfrak{L}$, тобто $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Отже, решіткова група $\Lambda$ є група тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda) = \{\mathfrak{o}\}$. У зв'язку з цим зауважимо, що напівгрупа $\Lambda$ може включати досить багато піднапівгруп, які є групи за множенням. Справді, нехай $H$ – підгрупа $G$ і $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді легко побачити, що підмножина $H \times \{\mathfrak{a}\}$ є група за множенням. Крім того, для кожного $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$: підмножина $\{(u, \mathfrak{a}) \mid (u, \mathfrak{a}) \in \Lambda\}$ також є група за множенням.

Якщо $\Lambda$ – решіткова підгрупа над $\mathfrak{L}$, де $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді покладемо $E(\Lambda) = \{(e, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{e}(\Lambda)\}$. Очевидно, що $E(\Lambda)$ є решіткова підгрупа $\Lambda$.

Нехай $\Gamma$ – решіткова підгрупа $\Lambda$. Пара $\big(e, \mathfrak{e}(\Lambda)\big)$ – одиничний елемент $\Lambda$ і $\big(e, \mathfrak{e}(\Gamma)\big)$ – одиничний елемент $\Gamma$. Оскільки $\Gamma \leqslant \Lambda$, то **твердження 2.4** доводить, що $\mathfrak{e}(\Gamma) \leqslant \mathfrak{e}(\Lambda)$. Говоритимемо, що $\Gamma$ є *унітарна решіткова підгрупа* $\Lambda$, якщо $\big(e, \mathfrak{e}(\Lambda)\big) \in \Gamma$. Кожну решіткову підгрупу $\Lambda$ можна розширити до унітарної решіткової підгрупи. Дійсно, покладемо

$$\Gamma^{u(\Lambda)} = \Gamma \cup \{(e, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{e}(\Lambda)\} = \Gamma \cup E(\Lambda),$$

тоді $\Gamma^{u(\Lambda)}$ є решіткова група.

Справді, якщо $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, то $(u, \mathfrak{a})(e, \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Оскільки $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \Gamma$. Це доводить, що $\Gamma^{u(\Lambda)}$ задовольняє всі умови **(LG 1)–(LG 3)**.

Нехай $M$ – підмножина $G \times \mathfrak{L}$ і $\mathfrak{S}$ – сімейство всіх решіткових груп, у тому числі $M$. За **твердженням 2.3** перетин $\cap\mathfrak{S}$ є решіткова група. Говоритимемо, що це решіткова група, яка породжена $M$ і позначатимемо $\langle M\rangle$.

Нехай $(x,\mathfrak{a})\in G\times\mathfrak{L}$. Якщо $\Lambda$ є решіткова група, що містить $(x,\mathfrak{a})$, то легко бачити, що $(x,\mathfrak{a})^n=(x^n,\mathfrak{a}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a})=(x^n,\mathfrak{a})\in\Lambda$ для кожного натурального $n$. Із умови **(LG 3)** маємо $(x^{-1},\mathfrak{a})\in\Lambda$, а отже, $(e,\mathfrak{a})=(x,\mathfrak{a})(x^{-1},\mathfrak{a})\in\Lambda$. Із того, що $(x^{-1},\mathfrak{a})\in\Lambda$ одержуємо, що $(x,\mathfrak{a})^{-n}=(x^{-n},\mathfrak{a})\in\Lambda$, так що $\{(x^n,\mathfrak{a})\mid n\in\mathbb{Z}\}\subseteq\Lambda$. Нехай $\mathfrak{A}$ – головний нижній сегмент $\mathfrak{L}$, породжений $\mathfrak{a}$. Якщо $\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}$, то з умови **(LG 1)** випливає, що $(x^n,\mathfrak{b})\in\Lambda$ для кожного цілого $n$. Таким чином, $\{(x^n,\mathfrak{b})\mid\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a},n\in\mathbb{Z}\}\subseteq\Lambda$. Очевидно, що підмножина $\{(x^n,\mathfrak{b})\mid\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a},n\in\mathbb{Z}\}$ є решіткова група. Звідси маємо, що $\langle(x,\mathfrak{a})\rangle=\{(x^n,\mathfrak{b})\mid\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a},n\in\mathbb{Z}\}$.

Нехай $\Lambda$, $\Gamma$ – решіткові підгрупи. Визначимо їх добуток у звичайному порядку. Покладемо

$$\Lambda\Gamma=\{(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})=(xy,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})\mid(x,\mathfrak{a})\in\Lambda,(y,\mathfrak{b})\in\Gamma\}.$$

Наступний результат є обґрунтування цього визначення.

**Твердження 2.5.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\gamma,\kappa\colon G\to\mathfrak{L}$ – функції. Тоді*

$$\gamma\odot\kappa=\bigcup_{y\in\mathbf{Supp}(\gamma),\ z\in\mathbf{Supp}(\kappa)}\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\chi\big(z,\kappa(z)\big).$$

*Доведення.* За означенням маємо

$$(\gamma\odot\kappa)(x)=\bigvee_{y,z\in G,\ yz=x}\big(\gamma(y)\wedge\kappa(z)\big).$$

Якщо $y\notin\mathbf{Supp}(\gamma)$, тоді $\gamma(y)=\mathfrak{o}$ і $\gamma(y)\wedge\kappa(z)=\mathfrak{o}$. Аналогічно, якщо $z\notin\mathbf{Supp}(\kappa)$, то $\kappa(z)=\mathfrak{o}$, і знову $\gamma(y)\wedge\kappa(z)=\mathfrak{o}$. Звідси випливає, що

$$(\gamma\odot\kappa)(x)=\bigvee_{y\in\mathbf{Supp}(\gamma),\ z\in\mathbf{Supp}(\kappa),\ yz=x}\big(\gamma(y)\wedge\kappa(z)\big).$$

Водночас, нехай

$$\xi=\bigcup_{y\in\mathbf{Supp}(\gamma),\ z\in\mathbf{Supp}(\kappa)}\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\chi\big(z,\kappa(z)\big).$$

За **твердженням 2.1** маємо

$$\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\chi\big(z,\kappa(z)\big)=\chi\Big(yz,\big(\gamma(y)\wedge\kappa(z)\big)\Big).$$

Якщо $x\in G$ і $x=yz$, тоді

$$\chi\Big(yz,\big(\gamma(y)\wedge\kappa(z)\big)\Big)(x)=\gamma(y)\wedge\kappa(z),$$

в іншому випадку $\chi\Big(yz, \big(\gamma(y) \wedge \kappa(z)\big)\Big)(x) = \mathfrak{o}$. Тому

$$\xi(x) = \bigvee_{y \in \mathbf{Supp}(\gamma),\ z \in \mathbf{Supp}(\kappa)} \left(\chi\Big(yz, \big(\gamma(y) \wedge \kappa(z)\big)\Big)\right)(x) =$$

$$\bigvee_{y \in \mathbf{Supp}(\gamma),\ z \in \mathbf{Supp}(\kappa),\ yz=x} \big(\gamma(y) \wedge \kappa(z)\big) = (\gamma \odot \kappa)(x).$$

Оскільки це правдиво для кожного $x \in G$, то маємо

$$\gamma \odot \kappa = \bigcup_{y \in \mathbf{Supp}(\gamma),\ z \in \mathbf{Supp}(\kappa)} \chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \chi\big(z, \kappa(z)\big).$$

$\square$

**Наслідок 2.1.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ та $\kappa \colon G \to \mathfrak{L}$ – групова функція. Тоді для кожного $x \in G$:*

$$\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \kappa = \bigcup_{z \in \mathbf{Supp}(\kappa)} \chi\big(x, \mathfrak{a}\big) \odot \chi\big(z, \kappa(z)\big),$$

$$\kappa \odot \chi(x, \mathfrak{a}) = \bigcup_{z \in \mathbf{Supp}(\kappa)} \chi\big(z, \kappa(z)\big) \odot \chi\big(x, \mathfrak{a}\big).$$

Нехай $\lambda \colon G \to \mathfrak{L}$ – групова функція, визначена на $\Lambda$ і $\gamma \colon G \to \mathfrak{L}$ – групова функція, визначена на $\Gamma$. Розглянемо функцію $\kappa \colon G \to \mathfrak{L}$, на якій визначено добуток $\Lambda\Gamma$. Нехай $g$ – довільний елемент групи $G$. Якщо $g \notin \mathbf{pr}_G(\Lambda\Gamma)$, то $\kappa(g) = \mathfrak{o}$. Водночас, нехай $u$, $v$ – довільні елементи $G$ такі, що $g = uv$. Оскільки $g \notin \mathbf{pr}_G(\Lambda\Gamma) = \mathbf{pr}_G(\Lambda)\mathbf{pr}_G(\Gamma)$, то або $u \notin \mathbf{pr}_G(\Lambda)$, $v \notin \mathbf{pr}_G(\Gamma)$; або $u \in \mathbf{pr}_G(\Lambda)$, але $v \notin \mathbf{pr}_G(\Gamma)$, або $u \notin \mathbf{pr}_G(\Lambda)$, але $v \in \mathbf{pr}_G(\Gamma)$. У кожному з цих випадків або $\lambda(u) = \mathfrak{o}$, або $\gamma(v) = \mathfrak{o}$, так що

$$\bigvee_{u,v \in G,\ uv=g} \big(\lambda(u) \wedge \gamma(v)\big) = \mathfrak{o} = \kappa(g).$$

Припустимо тепер, що $g \in \mathbf{pr}_G(\Lambda\Gamma)$, тоді $\kappa(g) = \bigvee \mathfrak{C}_{\Lambda\Gamma}(g)$. Нехай $u$, $v$ – довільні елементи $G$ такі, що $g = uv$. Якщо $u \notin \mathbf{pr}_G(\Lambda)$ або $v \notin \mathbf{pr}_G(\Gamma)$, тоді $\big(\lambda(u) \wedge \gamma(v)\big) = \mathfrak{o}$. Припустимо, що $u \in \mathbf{pr}_G(\Lambda)$ і $v \in \mathbf{pr}_G(\Gamma)$ і нехай $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ – елементи $\mathfrak{L}$ такі, що $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{L}$. Маємо $(u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) = (uv, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Це доводить, що $\mathfrak{C}_{\Lambda\Gamma}(g) = \{\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{C}_\Lambda(u), \mathfrak{b} \in \mathfrak{C}_\Gamma(v)\}$.

Оскільки $\lambda(u) = \bigvee \mathfrak{C}_\Lambda(u)$ та $\gamma(v) = \bigvee \mathfrak{C}_\Gamma(v)$, $\mathfrak{C}_{\Lambda\Gamma}(g) = \lambda(u) \wedge \gamma(v)$. Іншими словами, у даному випадку $\kappa(g) = \bigvee_{u,v \in G,\ uv=g} \big(\lambda(u) \wedge \gamma(v)\big)$.

Таким чином, $\kappa = \lambda \odot \gamma$. Отже, від громіздкого і не дуже прозорого добутку функцій приходимо до наочного та зручного добутку підмножин.

## 2.8 Нормальна фазі підгрупа. Критерій нормальності

Розглянемо тепер як перетворюється інше важливе поняття – поняття нормальної фазі підгрупи. Ще раз нагадаємо, що послуговуємося іншою термінологією.

Нехай $\lambda, \kappa\colon G \to \mathfrak{L}$ – групові функції і $\kappa \preceq \lambda$. Говоритимемо, що $\kappa$ є *нормальна підгрупа* функції $\lambda$, якщо $\kappa(yxy^{-1}) \geqslant \kappa(x) \wedge \lambda(y)$ для кожних елементів $x, y \in G$.

Сформулюємо критерій нормальності.

**Теорема 2.2.** *Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\lambda, \kappa\colon G \to \mathfrak{L}$ – групові функції такі, що $\kappa \preceq \gamma$. Тоді нижченаведені твердження еквівалентні:*

(i) *$\kappa$ – нормальна підгрупа функції $\gamma$;*

(ii) *$\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \preceq \kappa$ для кожного елемента $x \in G$;*

(iii) *$\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \kappa$ для будь-яких елементів $x, y \in G$;*

(iv) *$\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \chi(y, \mathfrak{b}) \odot \chi(x^{-1}, \mathfrak{a}) \subseteq \kappa$ для кожних елементів $x, y \in G$, де $\mathfrak{a} \leqslant \gamma(x)$, $\mathfrak{b} \leqslant \kappa(y)$.*

*Доведення.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Припустимо, що $\kappa$ – нормальна підгрупа функції $\lambda$. Для довільного елемента $y \in G$ розглянемо добуток $\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big)$. Нехай $x$ – довільний елемент $G$. Із **твердження 2.1** одержуємо

$$\Big(\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big)\Big)(x) = \gamma(y) \wedge \kappa(y^{-1}xy).$$

Покладемо $u = y^{-1}xy$, тоді $x = y(y^{-1}xy)y^{-1} = yuy^{-1}$, так що

$$\Big(\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big)\Big)(yuy^{-1}) = \gamma(y) \wedge \kappa(u).$$

Оскільки $\kappa(u) \wedge \gamma(y) \leqslant \kappa(yuy^{-1})$, тоді

$$\Big(\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big)\Big)(yuy^{-1}) \leqslant \kappa(yuy^{-1}),$$

це означає

$$\Big(\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big)\Big)(x) \leqslant \kappa(x).$$

Оскільки це правдиво для кожного елемента $x \in G$, тоді

$$\chi\big(y, \gamma(y)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(y^{-1}, \gamma(y)\big) \preceq \kappa.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Дійсно, **наслідок до твердження 2.5** доводить, що

$$\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\kappa\odot\chi\big(y^{-1},\gamma(y)\big)= \\ =\bigcup_{z\in\mathbf{Supp}(\kappa)}\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\chi\big(z,\kappa(z)\big)\odot\chi\big(y^{-1},\gamma(y)\big).$$

Отже, із включення $\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\kappa\odot\chi\big(y^{-1},\gamma(y)\big)\preceq\kappa$ випливає, що

$$\chi\big(y,\gamma(y)\big)\odot\chi\big(z,\kappa(z)\big)\odot\chi\big(y^{-1},\gamma(y)\big)\subseteq\kappa$$

для будь-яких елементів $y,z\in G$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Дійсно, **твердження 2.1** свідчить, що

$$\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\chi\big(y,\kappa(y)\big)\odot\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)=\chi\big(xyx^{-1},\gamma(x)\wedge\kappa(y)\big).$$

Маємо

$$\chi(x,\mathfrak{a})\odot\chi(y,\mathfrak{b})\odot\chi(x^{-1},\mathfrak{a})=\chi(xyx^{-1},\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})\subseteq\chi\big(xyx^{-1},\gamma(x)\wedge\kappa(y)\big).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i). Знову застосовуючи **твердження 2.1**, одержуємо

$$\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\chi\big(y,\kappa(y)\big)\odot\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)=\chi\big(xyx^{-1},\gamma(x)\wedge\kappa(y)\big).$$

Тепер твердження (vi) доводить, що $\chi\big(xyx^{-1},\gamma(x)\wedge\kappa(y)\big)\subseteq\kappa$. Тоді

$$\gamma(x)\wedge\kappa(y)=\chi\big(xyx^{-1},\gamma(x)\wedge\kappa(y)\big)(xyx^{-1})\leqslant\kappa(xyx^{-1}).$$

Це означає, що функція $\kappa$ є нормальна підгрупа функції $\gamma$. $\square$

Зазначимо, що **теорема 2.2** обумовила появу такого аналогу нормальності в нормальних решіткових групах.

Нехай $\Gamma$ – решіткова підгрупа $\Lambda$. Говоритимемо, що $\Gamma$ є *нормальна решіткова підгрупа* $\Lambda$, якщо $(x^{-1},\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})\in\Gamma$ для всіх пар $(x,\mathfrak{a})\in\Gamma$, $(y,\mathfrak{b})\in\Lambda$.

Зауважимо, що $(x^{-1},\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})=(x^{-1}yx,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$. Відразу це доводить, що якщо $\Gamma$ є нормальна решіткова підгрупа у $\Lambda$, тоді $\mathbf{pr}_G(\Gamma)$ є нормальна підгрупа $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$. Навпаки, припустимо, що $H$ є нормальною підгрупою $G$ і $\Lambda_H=\{(x,\mathfrak{a})\in\Lambda\mid x\in H\}$. Отже, $(y^{-1},\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})=(y^{-1}xy,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})\in\Lambda$ для кожної пари $(y,\mathfrak{b})\in\Lambda$. Оскільки $H$ нормальна в $G$, тобто $y^{-1}xy\in H$, так що $(y^{-1},\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})\in\Lambda_H$.

Нехай $\mathfrak{M}$ – нижній сегмент $\mathfrak{L}$. Тоді **твердження 2.4** доводить, що $\Lambda[\mathfrak{M}]=\{(x,\mathfrak{a})\mid(x,\mathfrak{a})\in\Lambda \text{ і } \mathfrak{a}\in\mathfrak{M}\}$ – решіткова підгрупа $\Lambda$. Наголосимо, що $\Lambda[\mathfrak{M}]$ називають $\mathfrak{M}$-*шаром* $\Lambda$. Зазначимо, що $\Lambda[\mathfrak{M}]$ є нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Дійсно, нехай $(x,\mathfrak{a})\in\Lambda[\mathfrak{M}]$ і $(y,\mathfrak{b})\in\Lambda$, тоді $(y^{-1},\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})=$ $=(y^{-1}xy,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$. Оскільки $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a},\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{M}$ – нижній сегмент $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\in\mathfrak{M}$. Отже, $(y^{-1},\mathfrak{b})(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})\in\Lambda[\mathfrak{M}]$.

Якщо $\Gamma$ є нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$, тоді $\Gamma^{u(\Lambda)}$ – нормальна підгрупа $\Lambda$. Дійсно, нехай $(x, \mathfrak{a}) \in \Gamma^{u(\Lambda)}$ і $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$.

Якщо $x \neq e$, тоді $(x, \mathfrak{a}) \in \Gamma$ та $(y^{-1}, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Gamma$. Якщо $x = e$, тоді $(y^{-1}, \mathfrak{b})(e, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (1, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in E(\Lambda)$.

Шари решіткової групи відіграють дуже важливу роль. Особливо вони ефективні у випадку, коли $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ – ланцюг. Цей випадок характерний для теорії фаззі груп, коли група $G$ – скінченна. Припустимо, що $|\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)| = k$. Тоді $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ ізоморфна (як упорядкована множина) до множини $\mathbf{Ch}[1, k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ з природним порядком $1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant k$. Говоритимемо, що $\Lambda$ є решіткова група $\mathbf{Ch}[1, k]$.

Побудуємо деякий натуральний ряд підгруп для розглядуваного випадку як у самій решітковій групі $\Lambda$, так і в $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$. Підмножина $\{1\}$ є нижній сегмент $\mathbf{Ch}[1, k]$, тому $\{1\}$-шар $\Lambda[1]$ з $\Lambda$ є решіткова підгрупа $\Lambda$. Якщо $(u, m) \in \Lambda$, тоді $(u, 1) \in \Lambda$ за умовою **(LG 1).** Це означає, що $\mathbf{pr}_G(\Lambda) = \mathbf{pr}_G(\Lambda[1])$. Для кожного $m$, де $1 \leqslant m \leqslant k$, підмножина $K_m = \{(u, m) \mid (u, m) \in \Lambda\}$ є підгрупа за множенням, тому $\mathbf{H}(m) = \mathbf{pr}_G(K_m)$ є підгрупа $\mathbf{H}(1) = \mathbf{pr}_G(\Lambda)$. Підгрупу $\mathbf{H}(m)$ називають *$m$-обід* $\Lambda$. Із того що $(u, m) \in \Lambda$ одержуємо, що $(u, m-1) \in \Lambda$ за умовою **(LG 1).** Це передбачає включення $\mathbf{H}(m) \leqslant \mathbf{H}(m-1)$, так що одержали такий ряд підгруп:

$$\mathbf{H}(1) \geqslant \mathbf{H}(2) \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{H}(k).$$

Очевидно, що відображення $u \to (u, m)$, де $u \in \mathbf{H}(m)$ є ізоморфізмом $\mathbf{H}(m)$ на $K_m$ для кожного $m$, де $1 \leqslant m \leqslant k$.

Образно кажучи, структура решіткової групи над $\mathbf{Ch}[1, k]$ нагадує торт "Наполеон". Тут роль коржів відіграють групи, а крему – ідемпотенти.

Перший крок: $\Lambda[1]$ – нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Зауважимо, що $\Lambda[1]$ є група за множенням (крім того, вона ізоморфна $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$. Тепер додаємо крем, покладемо $\Lambda_1 = \Lambda[1] \cup \{(e, 2)\}$. Неважко помітити, що $\Lambda_1$ є нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Наступний крок: розглянемо $\{1, 2\}$-шари $\Lambda[1, 2]$ з $\Lambda$ – нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Зауважимо, що $\Lambda_1 \leqslant \Lambda[1, 2]$, крім того $\Lambda_1$ є нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Для кожного елемента $(x, j) \in \Lambda[1, 2]$ позначимо через $(x, j)\Lambda_1$ добуток $\{(x, j)\}\Lambda_1$. Дану підмножину називають *суміжним класом* $\Lambda_1$. Оскільки $(x, j) \in \Lambda[1, 2]$, $j \leqslant 2$, тоді $(x, j) = (xe, j \wedge 2) = (x, j)(e, 2) \in (x, j)\Lambda_1$. Звідси випливає, що $\Lambda[1, 2]$ є об'єднання всіх підмножин $(x, j)\Lambda_1$. Припустимо, що $(x, j)\Lambda_1 \neq \Lambda_1$. Тоді $x \neq e$ і $j = 2$.

Таким чином, можемо бачити, що рівність $(x, 2) = (y, 2)(z, m)$, де $(z, m) \in \Lambda_1$ можлива тільки у випадку, коли $m = 2$. У свою чергу, єдина пара $\Lambda_1$, другий компонент якої дорівнює 2, є пара $(e, 2)$. Отже, $(x, 2) = (y, 2)(e, 2)$, так що $x = y$. Іншими словами, рівність $(x, 2)\Lambda_1 = (y, 2)\Lambda_1$ можлива тільки у випадку, коли $x = y$. Розглянемо добуток підмножин $\big((x, 2)\Lambda_1\big)\big((y, 2)\Lambda_1\big)$. Її довільний елемент має вигляд $(x, 2)(u, j)(y, 2)(v, m)$, де $(u, j), (v, m) \in \Lambda_1$. Якщо $j = 1$ або $m = 1$, тоді $(x, 2)(u, j)(y, 2)(v, m) = (xuyv, 1) \in \Lambda_1$. Таким чином, якщо $(x, 2)(u, j)(y, 2)(v, m) \notin \Lambda_1$, тоді $j = m = 2$. Але це можливо, тільки якщо $u = v = e$. У даному випадку $(x, 2)(u, j)(y, 2)(v, m) = (xy, 2)$. У свою чергу $\big((x, 2)\Lambda_1\big)\big((y, 2)\Lambda_1\big) = (xy, 2)\Lambda_1$. Отже, множина всіх суміжних класів $\Lambda_1$ є напівгрупа. Більше того, вона є група, оскільки має одиничний елемент $(e, 2)\Lambda_1 = \Lambda_1$, а для кожного суміжного класу $(x, 2)\Lambda_1$ маємо $(x^{-1}, 2)\Lambda_1(x, 2)\Lambda_1 = (e, 2)\Lambda_1 = (x, 2)\Lambda_1(x^{-1}, 2)$. Тому можемо говорити про фактор-групу решіткової групи $\Lambda[1, 2]$ за нормальною решітковою підгрупою $\Lambda_1$. Для неї застосовуватимемо загальне позначення $\Lambda[1, 2]/\Lambda_1$. Наголосимо, що мова йде про фактор-групу, а не про решіткову фактор-групу. Саме наш спеціальний відбір дає таку можливість; взагалі, не завжди сімейство суміжних класів за нормальною решітковою підгрупою є групою або решіткова група. Відображення $\Phi$ визначимо за правилом $\Phi\big((x, 2)\big) = (x, 2)\Lambda_1$, де $(x, 2) \in K_2$, воно є епіморфізм. Як бачили раніше, рівність $(x, 2)\Lambda_1 = \Lambda_1$ можлива лише у випадку, коли $x = e$, це доводить, що $\Phi$ є ізоморфізм. Оскільки $K_2 \cong \mathbf{H}(2)$, одержимо, що $\Lambda[1, 2]/\Lambda_1$ ізоморфне 2-обіду $\Lambda$.

Додамо наступний шар крему $\{(e, 3)\}$ до $\Lambda[1, 2]$, тобто перейдемо до нормальної решіткової підгрупи $\Lambda_2 = \Lambda[1, 2] \cup \{(e, 3)\}$, а потім накриємо його наступним коржем, тобто розширимо $\Lambda_2$ до $\{1, 2, 3\}$-шару $\Lambda[1, 2, 3]$, яка є нормальна решіткова підгрупа $\Lambda$. Застосовуючи наведені вище аргументи, доводимо, що сімейство суміжних класів $(x, 3)\Lambda_2$ є група за множенням, а ця група ізоморфна 2-обіду $\Lambda$ і т.д. У результаті одержимо послідовність

$$\Lambda_0 = \{(e, 1)\} \leqslant \Lambda[1] \leqslant \Lambda_1 \leqslant \Lambda[1, 2] \leqslant \Lambda_2 \leqslant \Lambda[1, 2] \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_{k-1} \leqslant \Lambda$$

нормальних решіткових підгруп таких, що

$$\Lambda_m = \Lambda[1, \ldots, m] \cup \{(e, m + 1)\},$$
$$\text{і } \Lambda[1, \ldots, m + 1]/\Lambda_m \cong \mathbf{H}(m + 1), 0 \leqslant m \leqslant k - 1.$$

Зауважимо, що в теорії фазі груп не зустрічали подібного опису загальної структури фазі групи $\gamma$ для випадку, коли $\mathbf{Im}(\gamma)$ є скінченний.

## Висновки до розділу 2

У цьому розділі основна увага була сконцентрована на природних зв'язках, які існують і які можна встановити між групами та решітками. Досліджено властивості деяких специфічних операцій, визначених на множині відображень з довільної групи у скінченну дистрибутивну решітку. Досліджено властивості групових функцій та доведено критерій групової функції. Було визначено новий алгебраїчний об'єкт – решіткові групи, та досліджено їх базові властивості. Визначено добуток решіткових підгруп та проілюстровано його застосування до відповідних досліджень. Останнім основним результатом цього розділу є критерій нормальності для решіткових підгруп.

Результати цього розділу анонсовано в [38,40] та опубліковано в праці [39].

# 3 Решіткові кільця

## 3.1 Основні означення і поняття

Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – решітка. Розглянемо множину $\mathfrak{L}^R$ усіх функцій $\lambda\colon R \longrightarrow \mathfrak{L}$. Визначимо операції $\wedge$ і $\vee$ на цій множині за таким правилом: якщо $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}^R$, тоді покладемо

$$(\lambda \wedge \mu)(x) = \lambda(x) \wedge \mu(x) \text{ і } (\lambda \vee \mu)(x) = \lambda(x) \vee \mu(x) \text{ для кожного } x \in R.$$

Очевидно операції $\wedge$ і $\vee$ комутативні й асоціативні,

$$\big(\lambda \wedge (\lambda \vee \mu)\big)(x) = \lambda(x) \wedge (\lambda \vee \mu)(x) = \lambda(x) \wedge \big(\lambda(x) \vee \mu(x)\big) = \lambda(x)$$

і

$$\big(\lambda \vee (\lambda \wedge \mu)\big)(x) = \lambda(x) \vee (\lambda \wedge \mu)(x) = \lambda(x) \vee \big(\lambda(x) \wedge \mu(x)\big) = \lambda(x),$$

тоді $\lambda \wedge (\lambda \vee \mu) = \lambda$ та $\lambda \vee (\lambda \wedge \mu) = \lambda$. Очевидно $\lambda \wedge \lambda = \lambda$ і $\lambda \vee \lambda = \lambda$. Таким чином, множина $\mathfrak{L}^R$ є решітка.

Якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, тоді $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ еквівалентне до $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$. Отже, можемо визначити порядок на $\mathfrak{L}^R$ таким чином: для $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}^R$ покладемо $\lambda \leqslant \mu$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda(x) \leqslant \mu(x)$ для кожного елемента $x \in R$.

Припустимо тепер, що решітка $\mathfrak{L}$ є дистрибутивна та скінченна. Зауважимо, що замість скінченності решітки $\mathfrak{L}$ інколи застосовують іншу умову: решітка $L$ має бути повною. Оскільки не прагнемо максимальної загальності, випадок скінченної решітки $L$ більш прозорий для нашого розгляду. Утім, розглянуті нижче міркування можна поширювати на випадок, коли $L$ – повна решітка.

Будучи скінченною, вона має найбільший елемент $\mathfrak{m}^{\uparrow}$ й найменший елемент $\mathfrak{m}_{\downarrow}$. Для кожної функції $f\colon R \longrightarrow \mathfrak{L}$ визначимо $\mathbf{Supp}(f)$ як підмножину всіх елементів $x \in R$ таких, що $f(x) \neq \mathfrak{m}_{\downarrow}$.

Нехай $Y$ – підмножина $R$ і $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$. Визначимо функцію $\chi(Y, \mathfrak{a})$ таким чином:

$$\chi(Y, \mathfrak{a})(x) = \begin{cases} \mathfrak{a}, \ \textbf{якщо } x \in Y, \\ \mathfrak{m}_{\downarrow}, \ \textbf{якщо } x \notin Y. \end{cases}$$

Якщо $Y = \{y\}$, тоді замість $\chi\big(\{y\}, \mathfrak{a}\big)$ зазначатимемо $\chi(y, \mathfrak{a})$. Функцію $\chi(y, \mathfrak{a})$ називають *точковою функцією* чи *точкою*. Відповідно до означення $\chi(y, \mathfrak{a}) \in \mathfrak{L}^R$, якщо $f \in \mathfrak{L}^R$. Якщо $\mathbf{Supp}(f) = \{g_1, \ldots, g_n\}$ та $f(g_j) = \mathfrak{a}_j$, де

$1 \leqslant j \leqslant n$, тоді очевидно $f = \chi(g_1, \mathfrak{a}_1) \vee \ldots \vee \chi(g_n, \mathfrak{a}_n)$.

Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\kappa \in \mathfrak{L}^R$. Тоді функцію, якщо вона задовольняє такі умови:

**(RF 1)** $\kappa(x - y) \geqslant \kappa(x) \wedge \kappa(y)$ для всіх $(x, y) \in R$,

**(RF 2)** $\kappa(xy) \geqslant \kappa(x) \wedge \kappa(y)$ для всіх $(x, y) \in R$,

називають $L$-*фазі кільцем* на $R$

Нехай $\gamma, \kappa$ із $L$-фазі кільця на $R$. Якщо $\gamma \leqslant \kappa$, тоді говоритимемо, що $\gamma$ є $L$-*фазі підкільце* $\kappa$. Позначатимемо $\gamma \preccurlyeq \kappa$.

Тепер визначимо бінарну операцію $\oplus$ на $\mathfrak{L}^R$ за таким правилом. Нехай $\mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$ і $x$ – довільний елемент кільця $R$. Розглянемо підмножину

$$\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid u, v \text{ елементи з } R \text{ такі, що } y + z = x\}$$

решітки $\mathfrak{L}$. Оскільки $\mathfrak{L}$ – скінченна, ця підмножина скінченна. Отже, можемо говорити про її найменшу верхню межу. Покладемо

$$(\mu \oplus \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\mu(y) \wedge \nu(z)\big).$$

Зауважимо, що

$$(\mu \oplus \nu)(x) = \bigvee_{y \in R} \big(\mu(y) \wedge \nu(x - y)\big) = \bigvee_{z \in R} \big(\mu(x - z) \wedge \nu(z)\big).$$

## 3.2 Властивості добутку $\oplus$

**Твердження 3.1.** *Виконуються такі твердження:*

*(i) операція $\oplus$ асоціативна;*

*(ii) операція $\oplus$ комутативна;*

*(iii) функція $\chi(0, \mathfrak{m}_\downarrow)$ – нульовий елемент відносно операції $\oplus$;*

*(iv) $\lambda \oplus (\mu \vee \nu) = (\lambda \oplus \mu) \vee (\lambda \oplus \nu)$ для всіх функцій $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$;*

*(v) якщо $x, y \in R$ та $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \lambda\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(x - y)$. Зокрема, якщо $\mathfrak{a} = \bigvee_{x \in R} \lambda(x)$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \lambda\big)(x) = \lambda(x - y)$;*

*(vi) якщо $x, y, u \in R$ та $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \chi(u, \mathfrak{b})\big)(y + u) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ і $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{m}_\downarrow$, якщо $x \neq y + u$. Іншими словами, $\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \chi(u, \mathfrak{b}) = \chi(y + u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Зокрема, $\chi(y, \mathfrak{a}) \oplus \chi(u, \mathfrak{a}) = \chi(y + u, \mathfrak{a})$;*

*(vii) якщо* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$ *і* $\lambda \leqslant \mu$, *тоді* $\lambda \oplus \nu \leqslant \mu \oplus \nu$.

*Доведення.* Доведемо лише твердження (ii) та (vii). Доведення інших тверджень аналогічні доведенню **твердження 2.1**.

(ii) Нехай $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}^R$. Покладемо $\kappa = \lambda \oplus \mu$ і $\eta = \mu \oplus \nu$. Матимемо

$$(\lambda \oplus \mu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\lambda(y) \wedge \mu(z)\big),$$

$$(\mu \oplus \lambda)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\mu(y) \wedge \lambda(z)\big).$$

Покладемо

$$R_x = \{(y, z) \mid y + z = x\},$$

$$\mathfrak{D}_1 = \{\lambda(y) \wedge \mu(z) \mid (y, z) \in R_x\},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \{\mu(y) \wedge \lambda(z) \mid (y, z) \in R_x\}.$$

Оскільки додавання на $R$ комутативне, $(y, z) \in R_x$ означає, що $(z, y) \in R_x$. Таким чином, якщо $\lambda(y) \wedge \mu(z) \in \mathfrak{D}_1$ (відповідно $\mu(y) \wedge \lambda(z) \in \mathfrak{D}_2$), тоді $\mu(y) \wedge \lambda(z) = \lambda(z) \wedge \mu(y) \in \mathfrak{D}_1$ (відповідно $\lambda(y) \wedge \mu(z) = \mu(z) \wedge \lambda(y) \in \mathfrak{D}_2$), що доводить $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$. У свою чергу із цього випливає, що $(\lambda \oplus \mu)(x) = (\mu \oplus \lambda)(x)$ для кожного $x \in R$, а отже, $\lambda \oplus \mu = \mu \oplus \lambda$.

(vii) Маємо

$$(\lambda \oplus \mu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\lambda(y) \wedge \nu(z)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\mu(y) \wedge \nu(z)\big) = (\mu \oplus \nu)(x).$$

Звідси випливає, що $\lambda \oplus \nu \leqslant \mu \oplus \nu$. □

Тепер визначимо бінарну операцію $\odot$ на $\mathfrak{L}^R$ за таким правилом. Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $\mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$ і $x$ – довільний елемент кільця $R$. Розглянемо підмножину

$$\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid u, v \text{ елементи з } R \text{ такі, що } yz = x\}$$

решітки $\mathfrak{L}$. Оскільки $\mathfrak{L}$ – скінченна, то розглядувана підмножина скінченна. Тоді можемо говорити про її найменшу верхню межу. Покладемо

$$(\mu \odot \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ yz=x} \big(\mu(y) \wedge \nu(z)\big).$$

Розглянемо тепер основні властивості цього добутку.

**Твердження 3.2.** *Мають місце такі твердження:*

*(i)* *якщо множення на $R$ асоціативне, тоді операція $\odot$ асоціативна;*

*(ii)* *якщо множення на $R$ комутативне, тоді операція $\odot$ комутативна;*

*(iii)* *якщо кільце $R$ має одиничний елемент $e$, тоді функція $\chi(e, \mathfrak{m}_\downarrow)$ – одиничний елемент відносно операції $\odot$;*

*(iv)* $\lambda \odot (\mu \vee \nu) = (\lambda \odot \mu) \vee (\lambda \odot \nu)$ *та* $(\mu \vee \nu) \odot \lambda = (\mu \odot \lambda) \vee (\nu \odot \lambda)$ *для всіх функцій* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$.

*(v)* *якщо* $x, y, u \in R$ *та* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, *тоді* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(yu) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ *та* $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{m}_\downarrow$, *якщо* $x \neq yu$. *Іншими словами,* $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b}) = \chi(yu, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. *Зокрема,* $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{a}) = \chi(yu, \mathfrak{a})$.

*(vi)* *якщо* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$ *та* $\lambda \leqslant \mu$, *тоді* $\lambda \odot \nu \leqslant \mu \odot \nu$ *і* $\nu \odot \lambda \leqslant \nu \odot \mu$.

**Наслідок 3.1.** *Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $\kappa \in \mathfrak{L}^G$. Припустимо, що $\kappa$ є $L$-фазі кільцем на $R$. Якщо $\lambda, \nu \leqslant \kappa$, тоді $\lambda \oplus \nu \leqslant \kappa$ і $\lambda \odot \nu \leqslant \kappa$. Зокрема, $\kappa \oplus \kappa \leqslant \kappa$ та $\kappa \odot \kappa \leqslant \kappa$.*

*Доведення.* Нехай $x$ – довільний елемент із $R$. Включення $\lambda, \nu \leqslant \kappa$ означає, що $\lambda(y) \wedge \nu(z) \leqslant \kappa(y) \wedge \kappa(z)$. Оскільки $\kappa$ є $L$-фазі кільцем групової функції, тоді $\kappa(y) \wedge \kappa(z) \leqslant \kappa(y + z)$ і $\kappa(y) \wedge \kappa(z) \leqslant \kappa(yz)$. Таким чином,

$$(\lambda \oplus \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \big(\lambda(y) \wedge \nu(z)\big) \leqslant \bigvee_{y,z \in R,\ y+z=x} \kappa(y + z) = \kappa(x),$$

$$(\lambda \odot \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in R,\ yz=x} \big(\lambda(y) \wedge \nu(z)\big) \leqslant \bigvee_{y,z \in R,\ yz=x} \kappa(yz) = \kappa(x).$$

□

## 3.3 Точковий критерій

**Твердження 3.3.** *Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\kappa \in \mathfrak{L}^R$. Тоді $\kappa$ є $L$-фазі кільце на $R$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

**(RF 3)** $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(y, \kappa(y)\big) \le \kappa$ *для всіх* $x, y \in R$;
**(RF 4)** $\chi\big(-x, \kappa(x)\big) \le \kappa$ *для кожного* $x \in R$;
**(RF 5)** $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \le \kappa$ *для всіх* $x, y \in R$.

*Доведення.* Спочатку припустимо, що $\kappa$ є $L$-фазі кільцем на $R$. Нехай $x, y$ є довільними елементами із $R$. Очевидно, що $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \leqslant \kappa$ і $\chi\big(y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa$ для будь-яких $x, y \in R$. Застосовуючи **наслідок 3.1** одержуємо, що

$$\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa$$

і

$$\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa.$$

Нехай $x$ – довільний елемент із $R$. Маємо $\Big(\chi\big(-x, \kappa(x)\big)\Big)(-x) = \kappa(-x)$. Оскільки $\kappa$ є $L$-фазі кільце на $R$, то $\kappa(-x) = \kappa(x)$. Зазначимо, що якщо $y \neq -x$, тоді $\Big(\chi\big(-x, \kappa(x)\big)\Big)(y) = \mathfrak{m}_{\downarrow}$, так що $\Big(\chi\big(-x, \kappa(x)\big)\Big)(y) \leqslant \kappa(y)$ для кожного $y \in R$. Це означає, що $\chi\big(-x, \kappa(x)\big) \leqslant \kappa$.

І навпаки, припустимо, що $\kappa$ задовольняє умови **(RF 3)-(RF 5)**. Нехай $x, y$ – довільні елементи із $R$. Тоді **(RF 4)** доводить, що $\chi\big(-y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa$. Звідси випливає, що $\Big(\chi\big(-y, \kappa(y)\big)\Big)(-y) = \kappa(y) \leqslant \kappa(-y)$. Із огляду на симетрію, $\kappa(-y) \leqslant \kappa(y)$, так що $\kappa(y) = \kappa(-y)$. Застосовуючи умову **(RF 3)**, одержуємо, що $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(-y, \kappa(-y)\big) \leqslant \kappa$. Із **твердження 3.1 (vi)** маємо

$$\Big(\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(-y, \kappa(-y)\big)\Big)(x - y) = \kappa(x) \wedge \kappa(-y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y).$$

Включення $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(-y, \kappa(-y)\big) \leqslant \kappa$ означає, що

$$\Big(\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(-y, \kappa(-y)\big)\Big)(x - y) = \kappa(x) \wedge \kappa(-y) \leqslant \kappa(x - y),$$

отже $\kappa$ задовольняє умову **(RF 1)**.

Послуговуючись умовою **(RF 5)**, одержуємо, що

$$\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa.$$

Із **твердження 3.2 (v)** маємо

$$\Big(\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big)\Big)(xy) = \kappa(x) \wedge \kappa(y).$$

Включення $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leqslant \kappa$ означає, що

$$\Big(\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big)\Big)(xy) = \kappa(x) \wedge \kappa(y) \leqslant \kappa(xy),$$

отже, $\kappa$ задовольняє умову **(RF 2)**. $\square$

**Твердження 3.3** свідчить про таке. Можемо тлумачити $L$-фазі кільце $\kappa$ як $L$-фазі кільце, що складається з точкових функцій $\chi(x, \mathfrak{a})$, де $\mathfrak{a} \leqslant \kappa(x)$. **Твердження 3.1** і **3.2** доводять, що ці точкові функцій задовольняють такі правила додавання та множення:

$$\chi(y,\mathfrak{a}) \oplus \chi(u,\mathfrak{b}) = \chi(y+u, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$$

і

$$\chi(y,\mathfrak{a}) \odot \chi(u,\mathfrak{b}) = \chi(yu, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}).$$

Таке тлумачення безпосередньо вказує на зв'язок $L$-фазі кілець та решіткових кілець над $\mathfrak{L}$, й уможливлює перехід від мови фазі функцій на мову алгебраїчних структур. Так, поєднання насправді є взаємнооднозначним. Решіткове кільце $K$ визначає $L$-фазі кільце. Дійсно, для кожного елемента $x \in \mathbf{pr}_R(K)$ множина $\mathfrak{C}_K(x)$ непорожня. Покладемо $\kappa(x) = \bigvee \mathfrak{C}_\Lambda(x)$. Якщо $x \notin \mathbf{pr}_R(K)$, тоді покладемо $(x) = \mathfrak{m}_\downarrow$. Тоді $\kappa$ – функція з $R$ в $\mathfrak{L}$. Якщо $u, v \in R$, та $\kappa(u) = \mathfrak{a}$ і $\kappa(v) = \mathfrak{b}$, то $(uv, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}) \in K$ за умовою **(LR 3)**. Звідси випливає, що

$$\kappa(uv) \geqslant \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b} = \kappa(u)\wedge\kappa(v).$$

Отже $\kappa$ задовольняє умову **(RF 2)**. Аналогічно, застосовуючи умову **(LR 2)**, одержуємо, що $(u-v, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}) \in K$. Звідси випливає, що

$$\kappa(u-v) \geqslant \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b} = \kappa(u)\wedge\kappa(v).$$

Отже, $\kappa$ задовольняє умову **(RF 1)**.

## 3.4 Визначення нового означення: решіткове кільце

Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Оскільки вона скінченна, то має найбільший елемент $\mathfrak{m}^\uparrow$ і найменший елемент $\mathfrak{m}_\downarrow$. Розглянемо декартовий добуток $A = R \times \mathfrak{L}$. Визначимо операції на $A$ за таким правилом:

$$(u,\mathfrak{a}) + (v,\mathfrak{b}) = (u+v, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$$

і

$$(u,\mathfrak{a})(v,\mathfrak{b}) = (uv, \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})$$

для всіх $u, v \in R$ та $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$.

Очевидно, що операція додавання є комутативна й асоціативна, оскільки додавання в $R$ і операція $\wedge$ у $\mathfrak{L}$ є комутативні та асоціативні. Пара $(0, \mathfrak{m}^\uparrow)$ – нульовий елемент. Якщо множення на $R$ асоціативне, то множення на $A$ також асоціативне. Якщо $R$ має мультиплікативний одиничний елемент $e$, то пара $(e, \mathfrak{m}^\uparrow)$ є одиничний елемент в $A$. Якщо множення на $R$ комутативне, то множення на $A$ також комутативне. Можемо визначити операцію віднімання на $A$ звичайним способом:

$$(u, \mathfrak{a}) - (v, \mathfrak{b}) = (u - v, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$$

$$\text{для всіх } u, v \in R \text{ та } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}.$$

Непорожню підмножину $K$ із $R \times \mathfrak{L}$ називають *решітковим кільцем* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

**(LR 1)** якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in K$;

**(LR 2)** якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K$;

**(LR 3)** якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K$.

Якщо $K$ є решітковим кільцем та $(y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді застосовуючи умову **(LR 2)** одержуємо, що $(y, \mathfrak{b}) - (y, \mathfrak{b}) = (y - y, \mathfrak{b}) = (0, \mathfrak{b}) \in K$. Звідси випливає, що $(0, \mathfrak{b}) - (y, \mathfrak{b}) = (-y, \mathfrak{b}) \in K$, отже, якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, то

$$(x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b}) = (x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) =$$

$$= (x - (-y), \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x, \mathfrak{a}) - (-y, \mathfrak{b}) \in K.$$

Отже, кожне решіткове кільце $K$ замкнене відносно множенням і містить $(0, \mathfrak{a})$ для кожного елемента $a \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$.

Нехай $K$, $\Sigma$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$. Якщо $K$ містить $\Sigma$, тоді говоритимемо, що $\Sigma$ є *решіткове підкільце* $K$ та позначатимемо це таким чином: $\Sigma \leqslant K$.

Очевидно, що $R \times \mathfrak{L}$ – найбільше решіткове кільце над $\mathfrak{L}$, а $\{(0, \mathfrak{m}_{\downarrow})\}$ – найменше решіткове кільце $\mathfrak{L}$. Останнє називають *тривіальним.* Крім того, якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді $\{(0, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}\}$ є решіткове кільце над $\mathfrak{L}$.

Кожне решіткове кільце $K$ включає $\mathbf{pr}_R(K) \times \{\mathfrak{m}_{\downarrow}\}$. Для кожного підкільця $S$ із $R$ підмножина $S \times \{\mathfrak{m}_{\downarrow}\}$ – решіткове кільце.

**Твердження 3.4.** *Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\mathfrak{S}$ – сімейство решіткових підкілець над $\mathfrak{L}$. Тоді перетин $\cap\mathfrak{S}$ є решіткове підкільце.*

*Доведення.* Нагадаємо, що підмножину $\mathfrak{M}$ із $\mathfrak{L}$ називають *нижнім* (відповідно *верхнім*) *сегментом* $\mathfrak{L}$, якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ (відповідно $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$). Із цього випливає, що $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$.

Якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді $\{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{L} \text{ і } \mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a}\}$ (відповідно $\{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{L} \text{ і } \mathfrak{x} \geqslant \mathfrak{a}\}$) є нижній сегмент (відповідно верхній сегмент) $\mathfrak{L}$. Його називають *головним нижнім* (відповідно *верхнім*) *сегментом* $\mathfrak{L}$, який породжений $\mathfrak{a}$.

Нехай $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, покладемо $K[\mathfrak{a}] = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}\}$ і $\mathrm{H}(\mathfrak{a}) = \mathbf{pr}_R(K[\mathfrak{a}])$. Зауважимо, що $K[\mathfrak{a}] = \mathrm{H}(\mathfrak{a}) \times \{\mathfrak{a}\}$.

Для кожного елемента $x \in \mathbf{pr}_R(\Lambda)$ і підмножини $M$ із $K$ покладемо $\mathfrak{C}_M(x) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{L} \mid (x, \mathfrak{a}) \in M\}$. □

## 3.5 Властивості решіткових кілець

**Твердження 3.5.** *Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, $K$ – решіткове кільце. Тоді правдиві такі твердження:*

*(i)* $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$ *– це напівгрупа відносно операції $\wedge$ з одиничним елементом $\mathfrak{e}(K) = \bigvee \mathfrak{C}_K(0)$, і нульовим елементом $\mathfrak{m}_{\downarrow}$. Більше того, $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$ – це головний нижній сегмент $\mathfrak{L}$, який породжений $\mathfrak{e}(K)$;*

*(ii)* $\mathbf{pr}_R(K)$ *– підкільце $R$. І навпаки, для кожного підкільця $S$ із $\mathbf{pr}_R(K)$ підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } x \in S\}$ є решіткове підкільце $K$;*

*(iii) якщо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$ і $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$, то підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ є решіткове підкільце $K$. Зокрема, підмножина $\{(x, \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{b}) \in K \text{ і } \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}\}$ є решіткове підкільце $K$ для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$;*

*(iv) припустимо, що $S$ є підкільце $\mathbf{pr}_R(K)$ і $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$. Тоді підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K, x \in S \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ є решіткове підкільце $K$;*

*(v) для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ підмножина $K[\mathfrak{a}]$ є замкнена відносно операцій додавання та множення пар і є кільце за виключенням цих операцій. Зокрема, підмножина $\mathrm{H}(\mathfrak{a})$ є підкільце $R$ та ізоморфна до $K[\mathfrak{a}]$;*

*(vi) якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ та $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, тоді $\mathrm{H}(\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{H}(\mathfrak{a})$;*

*(vii) замкнена відносно додавання та множення підмножина $M$ із $K$ є просте кільце за обмеженням додавання та множення тоді й тільки тоді, коли $M \leqslant K[\mathfrak{a}]$ для деякого елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ (отже $M$ є просте підкільце $K[\mathfrak{a}]$). Крім того, $K$ є просте кільце відносно додаванням та множенням тоді й тільки тоді, коли $K = K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$.*

*Доведення.* (i) Нехай $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$, тоді існують елементи $x, y \in R$ такі, що $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$. Оскільки $K$ є решіткове кільце, то $(x+y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = = (x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b}) \in K$, а це означає, що $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$.

Покладемо $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(K)$. Оскільки $\mathfrak{e} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$, тоді існує елемент $v \in R$ такий, що $(v, \mathfrak{e}) \in K$. Нехай $\mathfrak{a} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$ і $x$ – довільний елемент із $R$ такий, що $(x, \mathfrak{a}) \in K$. Як побачили вище, із цього випливає, що $(0, \mathfrak{a}) \in K$. У свою чергу із цього випливає, що $\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}_K(0)$. Тоді $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}$ і $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$.

Нарешті, нехай $\mathfrak{c}$ – довільний елемент із $\mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{e}$. Оскільки $(0, \mathfrak{e}) \in K$ за умовою **(LR 1)**, то матимемо $(0, \mathfrak{c}) \in K$ і $\mathfrak{c} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$.

(ii) Дійсно, нехай $x, y \in \mathbf{pr}_R(K)$. Тоді існують елементи $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ такі, що $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$. Той факт, що $K$ – решіткове кільце означає, що

$$(x-y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K,$$
$$(xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K,$$

звідси випливає, що $x - y \in \mathbf{pr}_R(K)$ та $xy \in \mathbf{pr}_R(K)$.

І навпаки, нехай $S$ є підкільце $R$ і покладемо

$$\Sigma = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } x \in S\}.$$

Виберемо довільні пари $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in \Sigma$. Оскільки $S$ є підкільце $R$, тоді $x - y \in S$ і $xy \in S$, так що

$$(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) = (x-y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \Sigma,$$
$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \Sigma.$$

Нехай $(x, \mathfrak{a}) \in \Sigma$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$. Із умови **(LR 1)** матимемо $(x, \mathfrak{b}) \in K$, це означає, що $(x, \mathfrak{b}) \in \Sigma$.

(iii) Дійсно, нехай $\Sigma = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ та $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in \Sigma$. З твердження **(ii)** випливає, що $x - y \in \mathbf{pr}_R(K)$ і $xy \in \mathbf{pr}_R(K)$. Оскільки $K$ – решіткове кільце, тоді

$$(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) = (x-y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K,$$
$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K.$$

Той факт, що $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ означає, що $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$, тоді $(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in \Sigma$ і $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Sigma$. Якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Sigma$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Із умови **(LR 1)** матимемо, що $(x, \mathfrak{b}) \in K$, а це означає, що $(x, \mathfrak{b}) \in \Sigma$.

(iv) Це безпосередній наслідок із тверджень **(ii)** і **(iii)**.

(v) Дійсно,

$$(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{a}) = (x - y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}) = (x - y, \mathfrak{a}) \in K[\mathfrak{a}],$$
$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{a}) = (xy, \mathfrak{a}) \in K[\mathfrak{a}].$$

Відображення $(x, \mathfrak{a}) \to x$ і $(x, \mathfrak{a}) \in K[\mathfrak{a}]$ є кільцевий мономорфізм і він збігається з $\mathrm{H}(\mathfrak{a})$.

(vi) Припустимо, що $x \in \mathrm{H}(\mathfrak{b})$. Маємо $(x, \mathfrak{b}) \in K$ і за умовою **(LR 1)** означає, що $(x, \mathfrak{a}) \in K$. Звідси випливає, що $x \in \mathrm{H}(\mathfrak{a})$.

(vii) Із твердження **(v)** маємо, що $K[\mathfrak{a}]$ є кільце за додаванням та множенням для кожного $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$. Припустимо тепер, що $M$ є підмножина $K$ і $M$ замкнене за додаванням і множенням. Припустимо тоді, що $M$ є просте кільце за обмеженням даних операцій. Зокрема, $M$ містить нульовий елемент. Цей елемент є ідемпотент за додаванням. Як уже бачили вище, кожен ідемпотент $K$ має вигляд $(0, \mathfrak{b})$ для деякого елемента $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$.

Нехай $\mathfrak{a} = \bigvee \mathfrak{C}_M(0)$, тоді $M$ міститиме пару $(0, \mathfrak{a})$. Припустимо, що $M$ містить пару $(x, \mathfrak{b})$, де $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$. Отже, $M$ містить пару $(x, \mathfrak{b}) - (x, \mathfrak{b}) = (0, \mathfrak{b})$. Пара $(0, \mathfrak{b})$ є ідемпотент за додаванням. Оскільки $M$ є кільце, то воно містить лише один ідемпотент за додаванням. Звідси випливає, що $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, так що $M \leqslant K[\mathfrak{a}]$. □

Із твердження **(v)**, $K[\mathfrak{m}_\downarrow]$ – кільце за додаванням і множенням. Зокрема, це задовольняє умови **(LR 2)** і **(LR 3)**. Оскільки $\mathfrak{m}_\downarrow$ – найменший елемент $\mathfrak{L}$, тоді $K[\mathfrak{m}_\downarrow]$ задовольняє умову **(LR 1)**. Таким чином, $K[\mathfrak{m}_\downarrow]$ є решіткове підкільце $K$.

Припустимо тепер, що $K$ – просте кільце за додаванням і множенням. Нехай $e = \bigvee \mathfrak{C}_K(0)$, припустимо, що $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{m}_\downarrow$. Тоді обидві пари $(0, \mathfrak{e})$ і $(0, \mathfrak{m}_\downarrow)$ є ідемпотенти за додаванням. Однак просте кільце має лише один ідемпотент. Воно доводить, що $\mathfrak{e} = \mathfrak{m}_\downarrow$.

Якщо $U$ є підмножина $R$ і $\mathfrak{V}$ є підмножина $\mathfrak{L}$, тоді покладемо

$$K[U] = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } x \in U\},$$
$$K[\mathfrak{V}] = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{V}\}.$$

З вищедоведеного випливає, що якщо $S$ є підкільце $R$, то тоді $K[S]$ є решіткове підкільце $K$, та якщо $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$, то тоді $K[\mathfrak{M}]$ є решіткове підкільце $K$.

Зауважимо, що $K[\mathfrak{M}]$ називають $\mathfrak{M}$-*рівнем* $K$.

Підмножину $K[\mathfrak{a}]$ називають *шаром* $K$ (більш точно – $\mathfrak{a}$-*шаром*), і $\mathrm{H}(\mathfrak{a})$ називають $\mathfrak{a}$-*ободом* $K$.

Очевидно $K[\mathfrak{a}] \cap K[\mathfrak{b}] = \varnothing$, коли $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ і $K = \bigcup\limits_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}} K[\mathfrak{a}]$. Іншими словами, сімейство $\{K[\mathfrak{a}] \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}\}$ – частина решіткового кільця $K$. Більше того, організовує деяку градацію $K$ звичайних кілець, тому що

$$K[\mathfrak{a}] + K[\mathfrak{b}] \subseteq K[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}]$$

і

$$K[\mathfrak{a}]K[\mathfrak{b}] \subseteq K[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}].$$

Припустимо, що $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ і $x \in \mathrm{H}(\mathfrak{a})$. Тоді $(x, \mathfrak{a}) \in K[\mathfrak{a}]$. Із умови **(LR 1)** випливає той факт, що $(x, \mathfrak{a}) \in K$, який означає, що $(x, \mathfrak{b}) \in K$. Це у свою чергу, означає, що $(x, \mathfrak{b}) \in K[\mathfrak{b}]$, отже, $x \in \mathrm{H}(\mathfrak{b})$. Таким чином, $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ означає, що $\mathrm{H}(\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{H}(\mathfrak{a})$.

Нехай $K$ – решіткове кільце. Як уже згадували, решіткове кільце може містити понад один ідемпотент (за додаванням). Більше того, $K$ містить пару $(0, \mathfrak{a})$ для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$. Дійсно, нехай $u$ є елемент із $R$ такий, що $(u, \mathfrak{a}) \in K$. Оскільки $K$ є решіткове кільце, то $(0, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{a}) - (u, \mathfrak{a}) \in K$.

Якщо $K$ є решіткове кільце над $\mathfrak{L}$, тоді покладемо

$$O(K) = \{(0, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{e}(K)\}.$$

Очевидно $O(K)$ – решіткове підкільце $K$. Якщо $(x, \mathfrak{a})$ є одиничний елемент за додаванням, тоді $x$ – одиничний елемент за додаванням у кільці $R$, тоді $x = 0$. Таким чином, $O(K)$ містить усі ідемпотенти за додаванням решіткового кільця $K$.

Нехай $\Lambda$ – решіткове підкільце $K$. Пара $\big(0, \mathfrak{e}(K)\big)$ є нульовий елемент $K$ і $\big(0, \mathfrak{e}(\Lambda)\big)$ є нульовий елемент $\Lambda$. Оскільки $\Lambda \leqslant K$, то **твердження 3.5** доводить, що $\mathfrak{e}(\Lambda) \leqslant \mathfrak{e}(K)$.

Говоритимемо, що $\Lambda$ – *повне решіткове підкільце* $K$, якщо $\big(0, \mathfrak{e}(K)\big) \in \Lambda$. Кожне решіткове підкільце $K$ може бути розширене до повного решіткового підкільця. Дійсно, покладемо $\Lambda^+ = \Lambda \cup O(K)$, тоді $\Lambda^+$ – решіткове кільце. Якщо $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, тоді $(u, \mathfrak{a}) - (0, \mathfrak{b}) = (u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$ та $(u, \mathfrak{a})(0, \mathfrak{b}) = (0, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Оскільки $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \Lambda$. Очевидно, $\Lambda^+$ задовольняє умову **(LR 3)**.

Нехай $\Lambda$ – решіткове підкільце $K$. Стверджуватимемо, що $\Lambda$ – *решітковий ідеал* $K$, якщо

$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$$

та

$$(y, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$$

для всіх пар $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$.

Зауважимо, що $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$ і $(y, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a}) = (yx, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Це відразу доводить, що якщо $\Lambda$ є решітковий ідеал $K$, тоді $\mathbf{pr}_R(\Lambda)$ є ідеал $\mathbf{pr}_R(K)$. І навпаки, припустимо, що $H$ є ідеал $R$, тоді $K[H]$ є решітковий ідеал $K$. Справді, за **твердженням 3.5 (ii)** $K[H]$ є решіткове підкільце $K$. Крім того, якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K, (y, \mathfrak{b}) \in K[H]$, тоді

$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K,$$
$$(y, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a}) = (yx, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K.$$

Оскільки $H$ є ідеал $\mathbf{pr}_R(K)$, тоді $xy \in H$ і $yx \in H$, отже

$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K[H] \text{ і } (y, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a}) \in K[H].$$

Аналогічно, якщо $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$, тоді $K[\mathfrak{M}]$ є решітковий ідеал $K$. Справді, за **твердженням 3.5 (iii)** $K[\mathfrak{M}]$ є решіткове підкільце $K$. Крім того, нехай $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $(y, \mathfrak{b}) \in K[\mathfrak{M}]$. Оскільки $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$, то із $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}$ випливає, що $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Тобто

$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K[\mathfrak{M}],$$
$$(y, \mathfrak{b})(x, \mathfrak{a}) = (yx, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K[\mathfrak{M}].$$

## 3.6 Гомоморфізми

Поняття гомоморфізму $L$-фазі кілець є доволі громіздким, тому не станемо його наводити, а почнемо працювати безпосередньо із решітковими кільцями над $\mathfrak{L}$, де ця концепція має цілком природний вигляд. Відразу зауважимо: оскільки зосередимося на відображеннях, що зберігають структуру решіткових кілець, недостатньо просто вимагати, щоб вони зберігали операції додавання та множення. Простий приклад яскраво демонструє це. Нехай $R$ є довільне кільце, решітка $\mathfrak{L}$ є множина $\{1, 2\}$ із природним порядком. Розглянемо решіткове кільце $K = R \times \{1, 2\}$. Тоді $\Sigma = R \times \{1\}$ є решіткове підкільце. Відображення $f\colon (x, 1) \longrightarrow (x, 2)$, де

$x \in R$, зберігає додавання та множення. Однак $\mathbf{Im}(f) = R \times \{2\}$ не є решітковим кільцем. Дані міркування "приводять" нас до такого поняття. Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка $\mathfrak{L}$, $K$ – решіткове кільце над $\mathfrak{L}$. Оскільки $K \subseteq \mathbf{pr}_R(K) \times \mathfrak{L}$, вважатимемо далі, що $R = \mathbf{pr}_R(K)$.

Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ (відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$) – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$. Тоді відображення $f\colon K \longrightarrow \Theta$ називають *гомоморфізмом*, якщо воно задовольняє такі умови:

$$f(u, \mathfrak{a}) + f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a}) + (v, \mathfrak{b})\big)$$

і

$$f(u, \mathfrak{a}) f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b})\big)$$

$$\text{для всіх } (u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in K;$$

$$\text{якщо } (z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}(f) \text{ і } \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}, \text{ тоді } (z, \mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}(f).$$

Зазначимо, що ін'єктивний гомоморфізм називають *мономорфізмом*, сюр'ютивний гомоморфізм – *епіморфізмом*, а бієктивний гомоморфізм – *ізоморфізмом.*

### 3.6.1 Властивості гомоморфізму

Позначатимемо через $0_R$ нульовий елемент кільця $R$.

**Лема 3.1.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$, відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $f\big(O(K)\big) \leqslant O(\Theta)$. Більше того, якщо $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b})$ і $f(0_R, \mathfrak{c}) = (0_T, \mathfrak{d})$ і $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}$, тоді $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$. Зокрема, $f(0_R, \mathfrak{m}_\downarrow) = (0_T, \mathfrak{m}_\downarrow)$.*

*Доведення.* Нехай $\mathfrak{a}$ – довільний елемент із $\mathfrak{L}$. Рівність $(0_R, \mathfrak{a}) + (0_R, \mathfrak{a}) = (0_R, \mathfrak{a})$ означає, що

$$f(0_R, \mathfrak{a}) = f\big((0_R, \mathfrak{a}) + (0_R, \mathfrak{a})\big) = f(0_R, \mathfrak{a}) + f(0_R, \mathfrak{a}).$$

Це доводить, що $f(0_R, \mathfrak{a})$ – одиничний елемент за додаванням решіткового кільця $\Theta$. Як уже бачили вище, кожен ідемпотент за додавання $\Theta$ має вигляд $(0_T, \mathfrak{b})$ для деякого елемента $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, так що $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b})$. Нехай $\mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$ і припустимо, що $f(0_R, \mathfrak{c}) = (0_T, \mathfrak{d})$. Матимемо

$$\begin{aligned}(0_T, \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}) &= (0_T, \mathfrak{b}) + (0_T, \mathfrak{d}) = f(0_R, \mathfrak{a}) + f(0_R, \mathfrak{c}) = \\ &= f\big((0_R, \mathfrak{a}) + (0_R, \mathfrak{c})\big) = f(0_R, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}).\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}$, тоді $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, так що $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b}) = (0_T, \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d})$. Це означає, що $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$. Із означення гомоморфізму $(0_T, \mathfrak{m}_\downarrow) \in \mathbf{Im}(f)$, тобто $(0_T, \mathfrak{m}_\downarrow) = f(0_R, \mathfrak{u})$ для деякого елемента $\mathfrak{u} \in \mathfrak{L}$. Нехай $f(0_R, \mathfrak{m}_\downarrow) = (0_T, \mathfrak{q})$, тоді $\mathfrak{m}_\downarrow \leqslant \mathfrak{u}$ це означає, що $\mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{m}_\downarrow$. Оскільки $\mathfrak{m}_\downarrow$ – найменший елемент $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\downarrow$, тоді $f(0_R, \mathfrak{m}_\downarrow) = (0_T, \mathfrak{m}_\downarrow)$. □

**Наслідок 3.2.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$, відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, і $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b})$, тоді відображення $f^L\colon \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$, визначене за правилом $f^L(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, задовольняє такі умови:*

*(i)* $f^L(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = f^L(\mathfrak{a}) \wedge f^L(\mathfrak{b})$, *зокрема, якщо* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, *тоді* $f^L(\mathfrak{a}) \leqslant f^L(\mathfrak{b})$;

*(ii) якщо* $\mathfrak{b} \in \mathbf{Im}(f^L)$ *та* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, *тоді* $\mathfrak{a} \in \mathbf{Im}(f^L)$.

**Наслідок 3.3.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – елементи $\mathfrak{L}$ такі, що $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}, x \in R$ і $f(x, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{c})$ та $f(x, \mathfrak{b}) = (v, \mathfrak{d})$, тоді $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{d}$. Зокрема, $f(x, \mathfrak{m}_\downarrow) \in T[\mathfrak{m}_\downarrow]$.*

*Доведення.* Маємо $(x, \mathfrak{a}) - (x, \mathfrak{a}) = (0_R, \mathfrak{a})$, це означає, що

$$(0_T, \mathfrak{c}) = (u, \mathfrak{c}) - (u, \mathfrak{c}) = f(x, \mathfrak{a}) - f(x, \mathfrak{a}) =$$
$$= f\big((x, \mathfrak{a}) - (x, \mathfrak{a})\big) = f(0_R, \mathfrak{a}).$$

Аналогічно, $(0_T, \mathfrak{d}) = f(0_R, \mathfrak{b})$. Із **леми 3.1** одержуємо, що $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{d}$. □

**Наслідок 3.4.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Якщо $x \in R$ і $f(x, \mathfrak{m}_\downarrow) = (u, \mathfrak{m}_\downarrow)$, де $u \in T$, тоді відображення $f^R\colon R \longrightarrow T$, визначене за правилом $f^R(x) = u$ є простий кільцевий гомоморфізм.*

*Доведення.* Дійсно, нехай $x, y \in R$ і $f(x, \mathfrak{m}_\downarrow) = (u, \mathfrak{m}_\downarrow)$ і $f(y, \mathfrak{m}_\downarrow) = (v, \mathfrak{m}_\downarrow)$. Тоді

$$f(x + y, \mathfrak{m}_\downarrow) = f\big((x, \mathfrak{m}_\downarrow) + (y, \mathfrak{m}_\downarrow)\big) =$$
$$= f(x, \mathfrak{m}_\downarrow) + f(y, \mathfrak{m}_\downarrow) = (u, \mathfrak{m}_\downarrow) + (v, \mathfrak{m}_\downarrow) = (u + v, \mathfrak{m}_\downarrow),$$

із цього випливає, що

$$f^R(x + y) = u + v = f^R(x) + f^R(y).$$

Аналогічно
$$f(xy,\mathfrak{m}_\downarrow)=f\big((x,\mathfrak{m}_\downarrow)(y,\mathfrak{m}_\downarrow)\big)=f(x,\mathfrak{m}_\downarrow)f(y,\mathfrak{m}_\downarrow)=$$
$$=(u,\mathfrak{m}_\downarrow)(v,\mathfrak{m}_\downarrow)=(uv,\mathfrak{m}_\downarrow),$$
із цього випливає, що
$$f^R(xy)=uv=f^R(x)f^L(y).$$
□

**Лема 3.2.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K\subseteq R\times\mathfrak{L}$ і $\Theta\subseteq T\times\mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K\longrightarrow\Theta$ – гомоморфізм. Нехай $x\in R,\mathfrak{a}\in\mathfrak{L}$ і припустимо, що $f(0_R,\mathfrak{a})=(0_T,\mathfrak{c})$, де $\mathfrak{c}\in\mathfrak{L}$. Тоді $f(x,\mathfrak{a})=(v,\mathfrak{c})$ для деякого елемента $v\in T$.*

*Доведення.* Припустимо, що $f(x,\mathfrak{a})=(v,\mathfrak{d})$ для деякого елемента $\mathfrak{d}\in\mathfrak{L}$. Матимемо
$$(0_T,\mathfrak{d})=(v,\mathfrak{d})-(v,\mathfrak{d})=f(x,\mathfrak{a})-f(x,\mathfrak{a})=$$
$$=f\big((x,\mathfrak{a})-(x,\mathfrak{a})\big)=f(0_R,\mathfrak{a})=(0_T,\mathfrak{c}).$$
Звідси випливає, що $\mathfrak{d}=\mathfrak{c}$. □

**Наслідок 3.5.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K\subseteq R\times\mathfrak{L}$ і $\Theta\subseteq T\times\mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K\longrightarrow\Theta$ – гомоморфізм. Тоді $f(x,\mathfrak{a})-f(y,\mathfrak{b})=f\big((x,\mathfrak{a})-(y,\mathfrak{b})\big)$ для будь-яких $(x,\mathfrak{a}),(y,\mathfrak{b})\in K$.*

*Доведення.* Припустимо, що $f(x,\mathfrak{a})=(u,\mathfrak{c})$ і $f(-x,\mathfrak{a})=(v,\mathfrak{d})$, де $\mathfrak{c},\mathfrak{d}\in\mathfrak{L}$. Із **леми 3.2** випливає, що $\mathfrak{c}=\mathfrak{d}$. Матимемо
$$(0_R,\mathfrak{a})=(x+(-x),\mathfrak{a})=(x,\mathfrak{a})+(-x,\mathfrak{a}),$$
це означає, що
$$(0_T,\mathfrak{c})=f(x,\mathfrak{a})+f(-x,\mathfrak{a})=(u,\mathfrak{c})+(v,\mathfrak{c})=(u+v,\mathfrak{c}).$$
Звідси випливає, що $v=-u$. Покладемо $f(y,\mathfrak{b})=(w,\mathfrak{m})$, де $\mathfrak{m}\in\mathfrak{L}$. Тепер маємо
$$f(x,\mathfrak{a})-f(y,\mathfrak{b})=(u,\mathfrak{c})-(w,\mathfrak{m})=(u-w,\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{m}),$$
$$f\big((x,\mathfrak{a})-(y,\mathfrak{b})\big)=f\big((x,\mathfrak{a})+(-y,\mathfrak{b})\big)=f(x,\mathfrak{a})+f(-y,\mathfrak{b})=$$
$$=(u,\mathfrak{c})+(-w,\mathfrak{m})=(u-w,\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{m}),$$
тоді
$$f\big((x,\mathfrak{a})-(y,\mathfrak{b})\big)=f(x,\mathfrak{a})-f(y,\mathfrak{b}).$$
□

**Наслідок 3.6.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f \colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$.*

*Доведення.* Дійсно, **наслідок 3.5** доводить, що $\mathbf{Im}(f)$ задовольняє умову **(LR 2)**. Нехай $(x,\mathfrak{a}),(y,\mathfrak{b})$ – довільні елементи $K$, тоді

$$f(x,\mathfrak{a})f(y,\mathfrak{b}) = f\big((x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})\big) \in \mathbf{Im}(f),$$

так що $\mathbf{Im}(f)$ задовольняє умову **(LR 3)**. Нарешті, $\mathbf{Im}(f)$ задовольняє умову **(LR 1)** за означенням гомоморфізму.

Отже, $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$. □

Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$, $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця та $f \colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Покладемо $Ker(f) = \{(x,\mathfrak{a}) \mid f(x,\mathfrak{a}) \in O(\Theta)\}$.

**Лема 3.3.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f \colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $Ker(f)$ є решітковий ідеал $K$.*

*Доведення.* Дійсно, оскільки $O(\Theta)$ є решітковий ідеал $\Theta$, зауважимо, що $(x,\mathfrak{a})$, $(y,\mathfrak{b}) \in Ker(f)$ і $(z,c) \in K$, тоді $(x,\mathfrak{a}) - (y,\mathfrak{b}) \in Ker(f)$, отже, $(z,\mathfrak{c})(x,\mathfrak{a}),(x,\mathfrak{a})(z,\mathfrak{c}) \in Ker(f)$. Нехай $(x,\mathfrak{a}) \in Ker(f), f(x,\mathfrak{a}) = (0_T,\mathfrak{u})$, де $\mathfrak{u} \in \mathfrak{L}$ і нехай $\mathfrak{d} \in \mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{a}$. Матимемо

$$f(0_R,\mathfrak{d}) = f\big((x,\mathfrak{d}) - (x,\mathfrak{a})\big) =$$
$$= f(x,\mathfrak{d}) - f(x,\mathfrak{a}) = f(x,\mathfrak{d}) - (0_T,\mathfrak{u}).$$

З вищедоведеного випливає, що: $f\big(O(K)\big) \leqslant O(\Theta)$, це означає, що $f(x,\mathfrak{d}) \in O(\Theta)$, тоді $(x,\mathfrak{d}) \in Ker(f)$.

Решітковий ідеал $Ker(f)$ формується таким чином. Перетин $K[\mathfrak{m}_{\downarrow}] \cap Ker(f)$ є простий ідеал у кільці $K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$. Із нашої умови $R = \mathbf{pr}_R(K) = \mathbf{pr}_R(K[\mathfrak{m}_{\downarrow}])$, та більше того, $R$ та $K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$ є ізоморфні як прості кільця. Звідси випливає, що

$$R_f = \mathbf{pr}_R\big(K[\mathfrak{m}_{\downarrow}] \cap Ker(f)\big) = \mathbf{pr}_R\big(Ker(f)\big) - \text{ ідеал } R.$$

□

**Твердження 3.6.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f \colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $Ker(f) = K[R_f]$.*

*Доведення.* Дійсно, якщо $(x, \mathfrak{a}) \in Ker(f)$, тоді той факт, що $Ker(f)$ є решітковий ідеал означає, що $(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) \in Ker(f)$, звідси випливає, що $x \in R_f$.

І навпаки, припустимо, що $(x, \mathfrak{a}) \in K[R_f]$, тоді $x \in R_f$, так що $f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) \in O(\Theta)$. **Лема 3.1** доводить, що $f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = (0_T, \mathfrak{m}_{\downarrow})$. Оскільки $\mathfrak{m}_{\downarrow} \leqslant \mathfrak{a}$, то

$$f(0_R, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = f\big((x, \mathfrak{a}) - (x, \mathfrak{m}_{\downarrow})\big) =$$
$$= f(x, \mathfrak{a}) - f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = f(x, \mathfrak{a}) - (0_T, \mathfrak{m}_{\downarrow}).$$

З вищедоведеного випливає, що $f\big(O(K)\big) \leqslant O(\Theta)$, це означає, що $f(x, \mathfrak{a}) \in O(\Theta)$, тоді $(x, \mathfrak{a}) \in Ker(f)$. □

**Лема 3.4.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Нехай $x \in R$ та $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}, \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ і припустимо, що $f(x, \mathfrak{b}) = (y, \mathfrak{c})$ для деяких $y \in T, \mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$. Тоді $f(x, \mathfrak{a}) = (y, \mathfrak{d})$, де $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{d})$.*

*Доведення.* Із **леми 3.1** маємо, що $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. Оскільки $f$ – це гомоморфізм: $(y, \mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}(f)$, тоді є елемент $u \in T$ такий, що $f(u, \mathfrak{a}) = (y, \mathfrak{d})$. Матимемо

$$2(y, \mathfrak{d}) = (y, \mathfrak{d}) + (y, \mathfrak{c}) =$$
$$= f(x, \mathfrak{b}) + f(u, \mathfrak{a}) = f\big((x, \mathfrak{b}) + (u, \mathfrak{a})\big) = f(x + u, \mathfrak{a}).$$

Водночас, $2(y, \mathfrak{d}) = 2f(u, \mathfrak{a}) = f(2u, \mathfrak{a})$. Таким чином, $f(x + u, \mathfrak{a}) = f(2u, \mathfrak{a})$. Застосовуючи **наслідок 3.5** одержуємо:

$$f(x, \mathfrak{a}) - f(u, \mathfrak{a}) = f\big((x, \mathfrak{a}) - (u, \mathfrak{a})\big) = f(x - u, \mathfrak{a}) =$$
$$= f\big((x + u, \mathfrak{a}) - (2u, \mathfrak{a})\big) = f(x + u, \mathfrak{a}) - f(2u, \mathfrak{a}) =$$
$$= f(2u, \mathfrak{a}) - f(2u, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{d}).$$

Звідси випливає, що $f(x, \mathfrak{a}) = f(u, \mathfrak{a})$, так що $f(x, \mathfrak{a}) = (y, \mathfrak{d})$. □

**Наслідок 3.7.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$, тоді $f(x, \mathfrak{a}) = \big(f^R(x), f^L(\mathfrak{a})\big)$.*

*Доведення.* Дійсно, за **лемою 3.2** маємо $f\big(x, \mathfrak{a}\big) = \big(u, f^L(\mathfrak{a})\big)$. Із **леми 3.4** випливає, що $f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = (u, \mathfrak{m}_{\downarrow})$, отже, $u = f^R(x)$. □

З одержаних вище результатів випливають два природні відображення. Визначимо відображення $\mathbf{s}(f)\colon K \longrightarrow T \times \mathfrak{L}$ таким чином. Нехай $f\colon R \longrightarrow T$

є простий кільцевий гомоморфізм із $R$ у $T$. Якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$, тоді покладемо $\mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a}) = \big(f(x), \mathfrak{a}\big)$. Тоді дане відображення є гомоморфізмом. Дійсно, $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $(y, \mathfrak{b}) \in K$ матимемо

$$\mathbf{s}(f)\big((x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b})\big) = \mathbf{s}(f)(x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = \big(f(x + y), \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}\big),$$

$$\mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a}) + \mathbf{s}(f)(y, \mathfrak{b}) = (f(x), \mathfrak{a}) + (f(y), \mathfrak{b}) = \big(f(x) + f(y), \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}\big).$$

Оскільки $f(x + y) = f(x) + f(y)$, матимемо

$$\mathbf{s}(f)\big((x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b})\big) = \mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a}) + \mathbf{s}(f)(y, \mathfrak{b}).$$

Аналогічно $\mathbf{s}(f)\big((x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b})\big) = \mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a})\mathbf{s}(f)(y, \mathfrak{b})$.

Нехай $(z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{s}(f)\big)$ і $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. Той факт, що $(z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{s}(f)\big)$ означає, що $K$ містить пару $(x, \mathfrak{a})$ таку, що $\mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a}) = (z, \mathfrak{c})$. У той же час, $\mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{a}) = \big(f(x), \mathfrak{a}\big)$. Звідси випливає, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Оскільки $K$ – решіткове кільце, тоді $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, а це означає, що $(x, \mathfrak{d}) \in K$. Тоді:

$$(z, \mathfrak{d}) = \big(f(x), \mathfrak{d}\big) = \mathbf{s}(f)(x, \mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{s}(f)\big),$$

отже, всі умови гомоморфізму зберігаються.

Розглянемо тепер відображення $g\colon \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$, яке задовольняє такі умови:

(i) $g(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}) \wedge g(\mathfrak{b})$,

(ii) якщо $\mathfrak{b} \in \mathbf{Im}(g)$ і $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, тоді $\mathfrak{a} \in \mathbf{Im}(g)$.

Іншими словами, $\mathbf{Im}(g)$ є нижній сегмент решітки $\mathfrak{L}$.

Визначимо відображення $\mathbf{p}(g)\colon K \longrightarrow R \times \mathfrak{L}$ за таким правилом. Якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$, тоді покладемо $\mathbf{p}(g)(x, \mathfrak{a}) = \big(x, g(\mathfrak{a})\big)$. Тоді це відображення є гомоморфізм. Дійсно, $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$ тоді матимемо

$$\mathbf{p}(g)\big((x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b})\big) =$$

$$= \mathbf{p}(g)(x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x + y, g\big(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})\big),$$

$$\mathbf{p}(g)(x, \mathfrak{a}) + \mathbf{p}(g)(y, \mathfrak{b}) =$$

$$= \big(x, g(\mathfrak{a})\big) + \big(y, g(\mathfrak{b})\big) = \big(x + y, g(\mathfrak{a}) \wedge g(\mathfrak{b})\big).$$

З нашої умови $g(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}) \wedge g(\mathfrak{b})$, так що

$$\mathbf{p}(g)\big((x, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b})\big) = \mathbf{p}(g)(x, \mathfrak{a}) + \mathbf{p}(g)(y, \mathfrak{b}).$$

Аналогічно

$$\mathbf{p}(g)\big((x, a)(y, b)\big) = \mathbf{p}(g)(x, a)\mathbf{p}(g)(y, b).$$

Нехай $(z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{p}(g)\big)$ і $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. Той факт, що $(z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{p}(g)\big)$ означає, що $K$ містить пару $(x, \mathfrak{a})$ таку, що $\mathbf{p}(g)(x, \mathfrak{a}) = (z, \mathfrak{c})$. Водночас,

$\mathbf{p}(g)(x, \mathfrak{a}) = \big(x, g(\mathfrak{a})\big)$. Звідси випливає, що $x = z$ та $g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$, тобто $\mathfrak{c} \in \mathbf{Im}(g)$. Із умови **(ii)** випливає, що $\mathfrak{d} \in \mathbf{Im}(g)$. Іншими словами, є елемент $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ такий, що $g(\mathfrak{b}) = \mathfrak{d}$. Оскільки $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, $(x, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K$. Тоді

$$\mathbf{p}(g)\big(x, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}\big)\big) = \big(x, g(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})\big) = \big(x, g(\mathfrak{a}) \wedge g(\mathfrak{b})\big) =$$
$$= (x, \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{d}) = (x, \mathfrak{d}) = (z, \mathfrak{d}).$$

Таким чином, $(z, \mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}\big(\mathbf{p}(g)\big)$, отже, виконуються всі умови означення гомоморфізму.

**Твердження 3.7.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $f = \mathbf{p}(f^L) \circ \mathbf{s}(f^R)$.*

*Доведення.* Нехай $(x, \mathfrak{a})$ є довільний елемент із $K$ і $f(x, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{c})$, де $u \in T$ і $\mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$. Із **наслідку 3.7** матимемо $(u, \mathfrak{c}) = \big(f^R(x), f^L(\mathfrak{a})\big)$. **Наслідок 3.2** і **лема 3.2** доводять, що $\big(f^R(x), f^L(\mathfrak{a})\big) = p(f^L)\big(f^R(x), \mathfrak{a}\big)$. Застосовуючи **наслідок 3.4**, одержуємо, що

$$\big(f^R(x), \mathfrak{a}\big) = s(f^R)(x, \mathfrak{a}),$$

тоді

$$f(x, \mathfrak{a}) = \mathbf{p}(f^L)\big(f^R(x), \mathfrak{a}\big) =$$
$$= \mathbf{p}(f^L)\big(\mathbf{s}(f^R)(x, \mathfrak{a})\big) = \big(\mathbf{p}(f^L) \circ \mathbf{s}(f^R)\big)(x, \mathfrak{a}).$$

□

Відображення $f\colon K \longrightarrow \Theta$ називатимемо *гомоморфізмом, який зберігає шари*, якщо $f(K[\mathfrak{a}]) \leqslant \Theta[\mathfrak{a}]$ для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$.

Зауважимо, що відображення $\mathbf{p}(f^L)$ повністю визначає перетворення решітки $L$, яке задовольняє умови **(i)** й **(ii)**. Таким чином, **твердження 3.7** доводить, що гомоморфізм, який зберігає шари, відіграє тут головну роль.

### 3.6.2 Аналог теореми про гомоморфізми для кілець

Для гомоморфізму, який зберігає шари, маємо такий прямий аналог теореми про гомоморфізми для кілець.

**Теорема 3.1.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \in \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$, і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм, який зберігає шари. Визначимо решіткові* *кільця* $K_f \subseteq R/R_f \times \mathfrak{L}$ *за правилом: пара* $(x+R_f, \mathfrak{a}) \in K_f$ *тоді й тільки тоді, коли* $(x, \mathfrak{a}) \in K$*. Тоді* $\mathbf{Im}(f)$ *є решіткове підкільце* $\Theta$ *та* $\mathbf{Im}(f)$ *є ізоморфний до* $K_f$*.*

*Доведення.* Той факт, що $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$ було доведено у **наслідку 3.6**. Вище продемонстрували, що $K_f$ є решіткове підкільце $R/R_f \times \mathfrak{L}$. Нехай $(x+R_f, \mathfrak{a}), (y+R_f, \mathfrak{b}) \in K_f$. Тоді $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$. Оскільки $K$ – решіткове кільце, тоді

$$(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K,$$
$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K.$$

Маємо

$$(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) = (x - y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}),$$
$$(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}).$$

Звідси випливає, що

$$(x - y + R_f, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K_f$$

і

$$(xy + R_f, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in K_f.$$

Більше того,

$$(x - y + R_f, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x + R_f, \mathfrak{a}) - (y + R_f, \mathfrak{b}),$$
$$(xy + R_f, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (x + R_f, \mathfrak{a})(y + R_f, \mathfrak{b}).$$

А отже, $K_f$ задовольняє умови **(LR 2) і (LR 3)**. Нарешті припустимо, що $(z + R_f, \mathfrak{c}) \in K_f$ і $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. Той факт, що $(z + R_f, \mathfrak{c})$ означає, що $(z, \mathfrak{c}) \in K$. Оскільки $K$ – решіткове кільце, тоді $(z, \mathfrak{d}) \in K$. Звідси випливає, що $(z + R_f, \mathfrak{d}) \in K_f$.

Тепер визначимо відображення $f^{\uparrow}\colon K_f \longrightarrow \mathbf{Im}(f)$ за таким правилом: $f^{\uparrow}(x+R_f, \mathfrak{a}) = f(x, \mathfrak{a})$ для кожного $(x+R_f, \mathfrak{a}) \in K_f$. Це означення коректне. Дійсно, нехай $(x + R_f, \mathfrak{a}) = (y + R_f, \mathfrak{b})$ і $f(x, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{a})$ для деякого $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$. Тоді $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ і $x + R_f = y + R_f$. Остання рівність означає, що $y = x + z$ для деякого елемента $z \in R_f$. Одержуємо

$$f(y, \mathfrak{a}) = f(x + z, \mathfrak{a}) = f(x, \mathfrak{a}) + f(z, \mathfrak{a}).$$

Оскільки $z \in R_f$, то за **твердженням 3.6** $(z, \mathfrak{a}) \in Ker(f)$. **Лема 3.2** доводить, що $f(z, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{a})$. Тепер одержуємо, що

$$f(y, \mathfrak{a}) = f(x, \mathfrak{a}) + f(z, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{a}) + (0_T, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{a}) = f(x, \mathfrak{a}).$$

Відображення $f^{\uparrow}$ є гомоморфізм. Дійсно

$$f^{\uparrow}\big((x+R_f,\mathfrak{a})+(y+R_f,\mathfrak{b})\big)=f^{\uparrow}(x+y+R_f,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})=f(x+y,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}),$$

$$f^{\uparrow}(x+R_f,\mathfrak{a})+f^{\uparrow}(y+R_f,\mathfrak{b})=f(x,\mathfrak{a})+f(y,\mathfrak{b})=$$
$$=f\big((x,\mathfrak{a})+(y,\mathfrak{b})\big)=f(x+y,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}),$$

тоді

$$f^{\uparrow}\big((x+R_f,\mathfrak{a})+(y+R_f,\mathfrak{b})\big)=f^{\uparrow}(x+R_f,\mathfrak{a})+f^{\uparrow}(y+R_f,\mathfrak{b}).$$

Аналогічно

$$f^{\uparrow}\big((x+R_f,\mathfrak{a})(y+R_f,\mathfrak{b})\big)=f^{\uparrow}(x+R_f,\mathfrak{a})f^{\uparrow}(y+R_f,\mathfrak{b}).$$

У результаті вибору $f^{\uparrow}$ маємо $\mathbf{Im}(f^{\uparrow})=\mathbf{Im}(f)$. За **наслідком 3.6**: $\mathbf{Im}(f^{\uparrow})$ є решіткове підкільце $\Theta$. Нехай $(z,\mathfrak{c})\in\mathbf{Im}(f^{\uparrow})$ і $\mathfrak{d}\leqslant\mathfrak{c}$. Рівність $\mathbf{Im}(f^{\uparrow})=$ $=\mathbf{Im}(f)$ і той факт, що $f$ є гомоморфізм означають, що $(z,\mathfrak{d})\in\mathbf{Im}(f^{\uparrow})$.

Нарешті, припустимо, що $f^{\uparrow}(x+R_f,\mathfrak{a})=f^{\uparrow}(y+R_f,\mathfrak{b})$. Тоді

$$f(y,\mathfrak{b})=f(x,\mathfrak{a})\in f(K[\mathfrak{a}]),$$

із цього випливає, що $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$. Далі

$$(0_T,\mathfrak{a})=f(x,\mathfrak{a})-f(y,\mathfrak{a})=f\big((x,\mathfrak{a})-(y,\mathfrak{a})\big)=f(x-y,\mathfrak{a}),$$

тоді $(x-y,\mathfrak{a})\in Ker(f)$. Із **твердження 3.6**: $Ker(f)=K[R_f]$. Отже, це означає, що $x-y\in R_f$. Звідси випливає, що $x+R_f=y+R_f$, отже, $(x+R_f,\mathfrak{a})=(y+R_f,\mathfrak{b})$. Таким чином, $f^{\uparrow}$ – ін'єктивний епіморфізм, відображення $f^{\uparrow}\colon K_f\longrightarrow\mathbf{Im}(f)$ – ізоморфізм. □

**Теорема 3.1** доводить, що гомоморфізм $f$, який зберігає шари, визначено за простим ідеалом $R_f$ кільця $R$, а $R_f$ означене за ядром $f$, останній є решітковий ідеал $K$. Природно виникає питання про зворотній зв'язок. Тепер розглянемо варіанти коли це відображення є гомоморфізм.

Нехай $K\subseteq R\times\mathfrak{L}$ – решіткове кільце, $\Lambda$ – решітковий ідеал $K$. Тоді $\Lambda[\mathfrak{m}_{\downarrow}]=\{(x,\mathfrak{m}_{\downarrow})\mid(x,\mathfrak{m}_{\downarrow})\in\Lambda\}=K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]\cap\Lambda$ є простий ідеал кільця $K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$. Тоді $\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow})=\mathbf{pr}_R(\Lambda[\mathfrak{m}_{\downarrow}])$ – простий ідеал кільця $R$, $\Lambda[\mathfrak{m}_{\downarrow}]=\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{a})\times\{\mathfrak{m}_{\downarrow}\}$. Таким чином, можемо тлумачити $n$ як просте фактор-кільце $R/\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow})$. Визначимо решіткові кільця $K_{\Lambda}\subseteq R/\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow})\times\mathfrak{L}$ за правилом: пара $(x+\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow}),\mathfrak{a})\in K_{\Lambda}$ тоді й тільки тоді, коли $(x,\mathfrak{a})\in K$. Повторюючи аргументи наведені вище, легко продемонструвати, що $K_{\Lambda}$ є решіткове підкільце $R/\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow})\times\mathfrak{L}$, відображення $h\colon K\longrightarrow K_{\Lambda}$, визначене за правилом $h(x,\mathfrak{a})=(x+\mathrm{H}_{\Lambda}(\mathfrak{m}_{\downarrow}),\mathfrak{a})$, $x\in K$, є гомоморфізм, який зберігає шари.

Нехай $(x, \mathfrak{a}) \in \mathbf{Ker}(h)$, тоді $(x + \mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow), \mathfrak{a}) = h(x, \mathfrak{a}) \in O(K_\Lambda)$ для кожного $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}(K) = \mathfrak{e}(K_\Lambda)$. Для елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ покладемо

$$\Lambda[\mathfrak{a}] = \{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \ \Lambda\} = K[\mathfrak{a}] \cap \Lambda.$$

Тоді $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda[\mathfrak{a}]$ для кожного $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}(K)$. Беручи до уваги нерівність

$$K = \bigcup_{\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}(K)} K[\mathfrak{a}],$$

одержуємо, що

$$(x, \mathfrak{a}) \in \bigcup_{\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{e}(K)} \Lambda[\mathfrak{a}] = \Lambda,$$

це доводить, що $\mathbf{Ker}(h) = \Lambda$.

Можемо розглянути решіткові кільця $K_\Lambda$ над $\mathfrak{L}$ як решіткові фактор-кільця $K$. Тут маємо відмінність від простих кілець. У випадку простого фактор-кільця – кільце являє собою множину, елементи якої є деякими підмножинами $K$, на якій операції додавання та множення вводять спеціальним способом. У нашому випадку є можливість одержати частину решіткового кільця, що можна розглядати як "внутрішній" аналог фактор-кільця.

Покладемо $\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{a}) = \mathbf{pr}_R(\Lambda[\mathfrak{a}])$. Зазначимо, що $\Lambda[\mathfrak{a}] = \mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{a}) \times \{\mathfrak{a}\}$. Як уже бачили вище, $K[\mathfrak{a}]$ замкнене за додаванням і множенням та є просте кільце за виключенням даних операцій, $\Lambda[\mathfrak{a}]$ є ідеал $K[\mathfrak{a}]$. Таким чином, можемо розглянути (просте) фактор-кільце $K[\mathfrak{a}]/\Lambda[\mathfrak{a}]$. Зробимо це для кожного $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ і розглянемо множину $K/\Lambda$, елементи якої – усі одержані класи суміжності $(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]$.

Зауважимо, що виконується умова

$$\big((x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]\big) \cap \big((y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}]\big) = \varnothing$$

або

$$(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] = (y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}].$$

Дійсно, якщо $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, тоді оскільки

$$(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] \subseteq K[\mathfrak{a}], (y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}] \subseteq K[\mathfrak{b}].$$

та

$$K[\mathfrak{a}] \cap K[\mathfrak{b}] = \varnothing$$

Отже, робимо висновок, що

$$\big((x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]\big) \cap \big((y, \mathfrak{b}) + \Lambda[b]\big) = \varnothing.$$

Припустимо, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Підмножина $K[\mathfrak{a}]$ – просте кільце за додаванням і множенням, $\Lambda[\mathfrak{a}]$ – простий ідеал $K[\mathfrak{a}]$. Тоді

$$\big((x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]\big) \cap \big((y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}]\big) = \varnothing$$

або

$$(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] = (y, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}].$$

Ураховуючи рівність $K = \bigcup\limits_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}} K[\mathfrak{a}]$, одержуємо, що сімейство

$$\{(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] \mid x \in R, \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}\}$$

є частина $K$.

На множині $K/\Lambda$ визначаємо додавання і множення за таким правилом. Нехай $(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]$ та $(y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}]$ – довільні суміжні класи. Тоді покладемо

$$(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] + (y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}] = (x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}],$$

$$\big((x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}]\big)\big((y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}]\big) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}].$$

Покажемо, що ці операції визначено коректно. Припустимо, що

$$(x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] = (u, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}],$$

$$(y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}] = (v, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}].$$

Тоді

$$(u, \mathfrak{a}) = (x, \mathfrak{a}) + (w, \mathfrak{a})$$

і

$$(v, \mathfrak{b}) = (y, \mathfrak{b}) + (z, \mathfrak{b}),$$

де $(w, \mathfrak{a}) \in \Lambda[\mathfrak{a}]$ та $(z, \mathfrak{b}) \in \Lambda[\mathfrak{b}]$.

Маємо

$$(u, \mathfrak{a}) + (v, \mathfrak{b}) = (x, \mathfrak{a}) + (w, \mathfrak{a}) + (y, \mathfrak{b}) + (z, \mathfrak{b}) =$$

$$= (x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + (w + z, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}),$$

$$(u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b}) = \big((x, \mathfrak{a}) + (w, \mathfrak{a})\big)\big((y, \mathfrak{b}) + (z, \mathfrak{b})\big) =$$

$$= (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + (xz + wy + wz, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}).$$

Оскільки $\Lambda$ є решітковий ідеал, то $(w + z, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (w, \mathfrak{a}) + (z, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, більш конкретно $(w + z, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \in \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}]$. Із цього випливає, що

$$(u, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] + (v, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}] = (u + v, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}] =$$

$$= (x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + (w + z, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}] =$$

$$= (x + y, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}] = (x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] + (y, \mathfrak{b}) + \Lambda[\mathfrak{b}].$$

Аналогічно
$$(xz+wy+wz,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})=$$
$$=(x,\mathfrak{a})(z,\mathfrak{b})+(w,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b})+(w,\mathfrak{a})(z,\mathfrak{b})\in\Lambda,$$
це означає, що $(xz+wy+wz,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})\in\Lambda[\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}]$.

Тоді одержуємо
$$\big((u,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)\big((v,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big)=(uv,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}]=$$
$$=(xy,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})+(xz+wy+wz,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}]=$$
$$=(xy,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}]=\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big).$$
Розглянемо тепер відображення $\eta\colon K/\Lambda\longrightarrow, K_\Lambda$ визначене за правилом $\eta((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}])=(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a})$ для кожної пари $(x,\mathfrak{a})\in K$. Дане відображення визначено коректно. Дійсно, нехай знову $(x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]=(u,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]$. Тоді $(u,\mathfrak{a})=(x,\mathfrak{a})+(w,\mathfrak{a})=(x+w,\mathfrak{a})$, де $(w,\mathfrak{a})\in\Lambda[\mathfrak{a}]$. Із того, що $\Lambda[\mathfrak{a}]=\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{a})\times\{\mathfrak{a}\}$ одержуємо, що $w\in\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{a})$. Включення $H_\Lambda(\mathfrak{a})\leqslant\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow)$ доводить, що $w\in\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow)$. Тоді
$$\big(u+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)=\big(x+w+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)=\big(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big).$$

Нехай $(x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]$ та $(y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]$ – довільні суміжні класи. Тоді покладемо
$$\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)+\eta\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big)=$$
$$=\big(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)+\big(y+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{b}\big)=\big(x+y+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\big),$$
та
$$\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]+(y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big)=$$
$$=\eta(x+y,\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}]=\big(x+y+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\big),$$
так що
$$\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]+(y,\mathfrak{b})+\Lambda[b]\big)=\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)+\eta\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big).$$

Аналогічно,
$$\eta\Big(\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big)\Big)=\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)\eta\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big).$$

Відображення $\eta$ є сюр'єктивне. Дійсно, якщо $\big(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)\in K_\Lambda$, тоді $(x,\mathfrak{a})\in K$ і тому можемо розглянути суміжний клас $(x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]$. Із визначення $\eta$ маємо $\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)=\big(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)$.

Та нарешті: нехай $\eta\big((x,\mathfrak{a})+\Lambda[\mathfrak{a}]\big)=\eta\big((y,\mathfrak{b})+\Lambda[\mathfrak{b}]\big)$. Тоді
$$\big(x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{a}\big)=\big(y+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow),\mathfrak{b}\big).$$
Це безпосередньо означає, що $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ і $x+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow)=y+\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow)$. Тоді $y=x+u$ для деякого елемента $u\in\mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow)$. Із іншого боку: $(x,\mathfrak{a}),(y,\mathfrak{a})\in K$, одержуємо, що $(x,\mathfrak{a}),(y,\mathfrak{a})\in K[\mathfrak{a}]$, та отже $x,y\in\mathrm{H}(\mathfrak{a})$. Звідси випливає, що

$u = y - x \in \mathrm{H}(\mathfrak{a})$, і, отже $u \in \mathrm{H}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{m}_\downarrow) = \mathrm{H}_\Lambda(\mathfrak{a})$. Тоді $(u, \mathfrak{a}) \in \Lambda[\mathfrak{a}]$ та маємо

$$(y, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{b}] = (x, \mathfrak{a}) + (u, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}] = (x, \mathfrak{a}) + \Lambda[\mathfrak{a}],$$

це доводить, що $\eta$ є ін'єктивне. Отже, $\eta$ є ізоморфізм.

## Висновки до розділу 3

Даний розділ є природним продовженням попереднього. Але на відміну від розділу 2, тут вже встановлюються зв'язки між кільцями та решітками. Спочатку було сформульовано та досліджено властивості деяких специфічних операцій, визначених на множині всіх відображень з довільного кільця у скінченну дистрибутивну решітку. Далі було доведено точковий критерій для $L$-фазі кілець. По аналогії з решітковими групами було визначено ще один новий алгебраїчний об'єкт – решіткові кільця, а також встановлено їх базові властивості. Далі було визначено поняття гомоморфізму решіткових кілець та доведено низку їх властивостей. Останнім основним результатом цього розділу є аналог теореми про гомоморфізми для решіткових кілець.

Результати цього розділу анонсовано в [52] та опубліковано в роботі [53].

# 4 Алгебри Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями

## 4.1 Основні означення і поняття

Нехай $L$ – алгебра над полем $F$ із бінарними операціями $+$ і $[,\,]$. Тоді $L$ називають *алгеброю Лейбніца* (точніше, *лівою алгеброю Лейбніца*), якщо вона задовольняє (*лівій*) *тотожності Лейбніца:*

$$\big[[a,b],c\big] = \big[a,[b,c]\big] - \big[b,[a,c]\big] \text{ для всіх } a,b,c \in L.$$

Ми також будемо застосовувати іншу форму цієї тотожності:

$$\big[a,[b,c]\big] = \big[[a,b],c\big] + \big[b,[a,c]\big].$$

Алгебри Лейбніца – це узагальнення алгебр Лі. Дійсно, алгебра Лейбніца $L$ є алгебра Лі тоді й тільки тоді, коли $[a,a] = 0$ для кожного елемента $a \in L$. Із цієї причини можемо розглядати алгебри Лейбніца як "не антикоммутативний" аналог алгебр Лі.

Алгебру $R$ над полем $F$ називають *правою алгеброю Лейбніца*, якщо вона задовольняє (*праву*) *тотожність Лейбніца:*

$$\big[a,[b,c]\big] = \big[[a,b],c\big] - \big[[a,c],b\big] \text{ для всіх } a,b,c \in R.$$

Зазначимо, що класи лівих і правих алгебр Лейбніца відрізняються. Проте якщо $R$ є права алгебра Лейбніца, то покладемо $[\![a,b]\!] = [b,a]$. Маємо

$$[\![[\![a,b]\!],c]\!] = \big[c,[b,a]\big] = \big[[c,b],a\big] - \big[[c,a],b\big] = [\![a,[\![b,c]\!]]\!] - [\![b,[\![a,c]\!]]\!].$$

Ця підстановка "веде" нас до лівої алгебри Лейбніца. Подібним чином можна перетворити ліву алгебру Лейбніца на праву.

Нам зручніше працювати з лівими алгебрами Лейбніца. Так, далі термін "алгебра Лейбніца" вживатимемо для лівої алгебри Лейбніца.

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$. Підпростір $A$ з $L$ називають *підалгеброю* $L$, якщо $[x,y] \in A$ для будь-яких $x,y \in A$. Той факт, що $A$ є підалгебра $L$, позначатимемо $A \leqslant L$.

Якщо $A$, $B$ є підпростори $L$, тоді через $[A,B]$ позначатимемо підпростір, породжений усіма елементами вигляду $[a,b]$, де $a \in A$, $b \in B$. Зокрема, якщо $A$ є підалгебра $L$, тоді $[A,A] \leqslant A$.

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$. Для непорожньої підмножини $M$ алгебри $L$ позначимо через $\langle M \rangle$ підалгебру алгебри $L$, породжену множиною $M$.

Підалгебру $A$ називають *лівим* (відповідно *правим*) *ідеалом* $L$, якщо $[y, x] \in A$ (відповідно $[x, y] \in A$) для будь-яких $x \in A$, $y \in L$. Іншими словами, якщо $A$ є лівий (відповідно правий) ідеал, тоді $[L, A] \leqslant A$ (відповідно $[A, L] \leqslant A$).

Підалгебру $A$ з $L$ називають *ідеалом* $L$ (точніше, *двостороннім ідеалом*), якщо вона є і лівий, і правий ідеал, тобто $[x, y], [y, x] \in A$ для будь-яких $x \in A$, $y \in L$.

Якщо $A$ є ідеал $L$, можемо розглянути *фактор-алгебру* $L/A$. Зрозуміло, що ця фактор-алгебра є алгебра Лейбніца.

Алгебра Лейбніца $L$ має ідеал, який відіграє важливу роль в її будові Позначимо через $\mathbf{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a, a]$, $a \in L$. Підпростір $\mathbf{Leib}(L)$ є ідеал $L$. Крім того, $L/\mathbf{Leib}(L)$ – алгебра Лі. І навпаки, якщо $H$ є такий ідеал у $L$, що $L/H$ – алгебра Лі, тоді $\mathbf{Leib}(L) \leqslant H$. Ідеал $\mathbf{Leib}(L)$ називають *ядром Лейбніца* алгебри $L$.

Наголосимо на ще одній важливій властивості елементів ядра Лейбніца:

$$\big[[a, a], x\big] = \big[a, [a, x]\big] - \big[a, [a, x]\big] = 0$$

для довільних елементів $a, x \in L$. Вона доводить, що $\mathbf{Leib}(L)$ є абелева підалгебра $L$.

Підалгебру $A$ називають *лівим* (відповідно *правим*) *субідеалом* $L$, якщо існує скінченний ряд підалгебр

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_n = L$$

такий, що $A_{j-1}$ є лівий (відповідно правий) ідеал $A_j$, де $1 \leqslant j \leqslant n$.

Аналогічно, підалгебру $A$ називають *субідеалом* $L$, якщо існує скінченний ряд підалгебр

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_n = L$$

такий, що $A_{j-1}$ є ідеал $A_j$, де $1 \leqslant j \leqslant n$.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *$T$-алгеброю*, якщо відношення “бути ідеалом” є транзитивне. Іншими словами, якщо $A$ є ідеал $L$ та $B$ є ідеал $A$, тоді $B$ є ідеал $L$. Звідси випливає, що в $T$-алгебрах Лейбніца кожен субідеал є ідеалом.

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца. Визначимо *нижній центральний ряд* для $L$

$$L = \gamma_1(L) \geqslant \gamma_2(L) \geqslant \ldots \gamma_\alpha(L) \geqslant \gamma_{\alpha+1}(L) \geqslant \ldots \gamma_\delta(L),$$

за таким правилом: $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_2(L) = [L, L]$, далі рекурсивно $\gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$ для усіх порядкових $\alpha$ і $\gamma_\lambda(L) = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L)$ для граничних $\lambda$. Можна показати, що кожен член цього ряду є ідеалом $L$. Останній член $\gamma_\delta(L)$ називають *нижнім гіпоцентром* $L$. Маємо $\gamma_\delta(L) = [L, \gamma_\delta(L)]$.

Якщо $\alpha = k$ – додатне ціле число, тоді $\gamma_k(L) = [L, [L, \ldots [L, L] \ldots]]$ – лівонормований комутант $k$ екземплярів $L$.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *нільпотентною*, якщо існує додатне ціле $k$ таке, що $\gamma_k(L) = \langle 0 \rangle$. Більш детально, алгебру $L$ називатимемо *нільпотентною із класом нільпотентності* $\boldsymbol{c}$, якщо $\gamma_{\mathbf{c}+1}(L) = \langle 0 \rangle$, але $\gamma_{\mathbf{c}}(L) \neq \langle 0 \rangle$. Клас нільпотентності алгебри $L$ позначатимемо через $\mathbf{ncl}(L)$.

Визначимо *лівий* (відповідно *правий*) *центр* $\zeta^{left}(L)$ (відповідно $\zeta^{right}(L)$) алгебри Лейбніца $L$ таким чином:

$$\zeta^{left}(L) = \{x \in L \mid \ [x, y] = 0 \ \text{ для усіх } y \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{right}(L) = \{x \in L \mid \ [y, x] = 0 \text{ для усіх } y \in L\}).$$

Зазначимо, що лівий центр алгебри $L$ є ідеалом, проте, це не так для правого центра. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) \leqslant \zeta^{left}(L)$, отже, $L/\zeta^{left}(L)$ є алгебра Лі. У загальному випадку лівий і правий центри є різними; вони навіть можуть мати різну вимірність. Більше того, лівий центр є ідеалом на відміну від правого, який у загальному випадку не є ідеалом. Відповідний приклад можна знайти в праці [41].

*Центр* $\zeta(L)$ *алгебри Лейбніца* $L$ визначимо таким чином:

$$\zeta(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 = [y, x] \text{ для усіх } y \in L\}.$$

Центр є ідеалом у $L$, що, зокрема, дозволяє розглядати фактор-алгебру $L/\zeta(L)$.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *абелевою*, якщо $[x, y] = 0$ для будь-яких елементів $x, y \in L$. Зазначимо, що лівий і правий центри є абелеві підалгебри.

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца. Що стосується алгебр Лі, то можна визначити такі радикали [4]. Підалгебру $\mathbf{Nil}(L)$, породжену всіма нільпотентними ідеалами $L$, називають *ніль-радикалом* $L$. Очевидно, що $\mathbf{Nil}(L)$ є ідеал $L$.

Якщо $L = \mathbf{Nil}(L)$, тоді $L$ називатимемо *ніль-алгеброю Лейбніца.*

Кожна нільпотентна алгебра Лейбніца є ніль-алгеброю, але навпаки, це не є вірним, навіть для алгебри Лі. Зауважимо також, що якщо $L$ є скінченновимірною ніль-алгеброю, то $L$ є нільпотентна.

Підалгебру $\mathbf{Ba}(L)$, яка породжена всіма нильпотентними субідеалами з $L$, називають *радікалом Бера* $L$. Зрозуміло, що $\mathbf{Ba}(L)$ є ідеал $L$ та $\mathbf{Nil}(L) \leqslant \mathbf{Ba}(L)$. Якщо $L = \mathbf{Ba}(L)$, тоді алгебру Лейбніца $L$ називають *алгебра Бера.* Кожна ніль-алгебра є алгебра Бера, утім це не є вірним навіть для алгебри Лі (див., наприклад, [4, Theorem 6.4.5]).

Алгебру Лейбніца $L$ називають *гіперабелевою*, якщо вона має зростаючий ряд

$$\langle 0 \rangle = L_0 \leqslant L_1 \leqslant \ldots \leqslant L_\alpha \leqslant L_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant L_\gamma = L$$

ідеалів, фактори яких $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ абелеві для всіх $\alpha < \gamma$. Якщо цей ряд скінченний, то $L$ називають *розв'язною алгеброю Лейбніца.* Очевидно, що кожна ніль-алгебра гіперабелева.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *екстраспеціальною*, якщо вона задовольняє такі умови:

- $\zeta(L)$ має вимірність 1;
- $L/\zeta(L)$ є абелева.

Визначимо верхній центральний ряд

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \leqslant \zeta_1(L) \leqslant \zeta_2(L) \leqslant \ldots \leqslant \zeta_\alpha(L) \leqslant \zeta_{\alpha+1}(L) \leqslant \ldots \leqslant \zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри Лейбніца $L$ за такими правилами: $\zeta_1(L) = \zeta(L)$ – центр $L$, і рекурсивно $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta\big(L/\zeta_\alpha(L)\big)$ для усіх порядкових $\alpha$, $\zeta_\lambda(L) = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L)$ для граничних $\lambda$. За побудовою кожен член цього ряду є ідеал у $L$. Останній його член $\zeta_\infty(L)$ називають *верхнім гіперцентром алгебри* $L$. Алгебру Лейбніца $L$ називають *гіперцентральною*, якщо вона збігається з верхнім гіперцентром.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *скінченновимірна*, якщо вимірність $L$ як векторного простору над $F$ скінченна.

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца, $M$ – непорожня підмножина $L$ і $H$ – підалгебра $L$.

Покладемо

$$\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{left}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = 0\},$$

$$\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{right}}(M) = \{a \in H \mid [M, a] = 0\}.$$

Підмножину $\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{left}}(M)$ називають *лівим анулятором* або *лівим централізатором* $M$ у підалгебрі $H$.

Підмножину $\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{right}}(M)$ називають *правим анулятором* або *правим централізатором* $M$ у підалгебрі $H$.

Перетин

$$\mathbf{Ann}_H(M) = \mathbf{Ann}_H^{\mathbf{left}}(M) \cap \mathbf{Ann}_H^{\mathbf{right}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle = [M, a]\}$$

називають *анулятором* або *централізатором* $M$ у підалгебрі $H$.

Усі ці підмножини є підалгебри $L$. Більше того, якщо $M$ є лівий ідеал $L$, тоді $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(M)$ є лівий ідеал $L$. Якщо $M$ є правий ідеал $L$, тоді $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(M)$ є правий ідеал. Тоді $\mathbf{Ann}_L(M)$ є ідеал $L$ (для наочного прикладу див. [37]).

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца. Перетин максимальних підалгебр $L$ називають *підалгеброю Фраттіні* $L$. Позначатимемо через $\mathbf{Frat}(L)$. Якщо $L$ не містить максимальних підалгебр, тоді $L = \mathbf{Frat}(L)$.

Із кожною підалгеброю $A$ алгебри Лейбніца $L$ природно пов'язані два ідеали: ідеал $A^L$ який є перетином усіх ідеалів, включаючи $A$ (який є ідеалом, породжений $A$), і ідеал $\mathbf{Core}_L(A)$, який є сумою всіх ідеалів, які містяться в $A$.

Підалгебру $A$ алгебри $L$ називають *контраідеалом* $L$, якщо $A^L = L$.

Алгебру Лейбніца $L$ називають *квазіпростою*, якщо центральна фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ проста і $L = [L, L]$.

Якщо $\mathbf{dim}_F(L) = 1$, тоді $L$ абелева алгебра Лі, так $L = Fa$ для деякого елемента $a$ і $[a, a] = 0$.

Якщо $\mathbf{dim}_F(L) = 2$ та $L$ не є алгебра Лі, тоді є такі дві неізоморфні алгебри Лейбніца:

$$L_1 = Fa + Fb, [a, a] = b, [b, a] = [a, b] = [b, b] = 0$$

та

$$L_2 = Fc + Fd, [c, c] = [c, d] = d, [d, c] = [d, d] = 0$$

(див., наприклад [37]).

Алгебри Лейбніца вимірності 3 є розв'язними, тому першим природним кроком є розгляд нільпотентних алгебр.

## 4.2 Нільпотентні алгебри Лейбніца вимірності 3

Припустимо, що $L$ нільпотентна. Із того що $\mathbf{ncl}(L) \leqslant \mathbf{dim}_F(L)$, випливає, що $\mathbf{ncl}(L) \leqslant 3$.

Нам буде потрібна така важлива властивість підалгебр Фраттіні.

**Твердження 4.1.** *Нехай $L$ – скінченновимірна алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ є нільпотентна, тоді $[L, L] = \mathbf{Frat}(L)$.*

Дійсно, оскільки $L$ є нільпотентна, кожна максимальна підалгебра $L$ є ідеалом [8, Лема 2.2], отже, можемо застосувати **твердження 7** з роботи [37].

**Теорема 4.1.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є алгебра Лі та $\mathbf{ncl}(L) = 3 = \mathbf{dim}_F(L)$, тоді $L$ має базис $\{a, b, c\}$ такий, що $[a, a] = b$, $[a, b] = c$, $[c, a] = [a, c] = [c, b] = [b, c] = [b, b] = [c, c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = \zeta^{left}(L) = [L, L] = Fb \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \gamma_3(L) = Fc$. Зокрема, $L$ є нільпотентна циклічна алгебра Лейбніца.*

*Доведення.* Оскільки $\gamma_1(L) = L \neq \gamma_2(L) = [L, L] \neq \gamma_3(L) \neq \langle 0 \rangle$, випливає, що $\mathbf{dim}_F\big(\gamma_2(L)\big) = 2$, а $\mathbf{dim}_F\big(\gamma_3(L)\big) = 1 = \mathbf{dim}_F\big(L/\gamma_2(L)\big)$. Нехай $a$ – елемент із $L$такий, що $a \notin \gamma_2(L)$. Тоді згідно із **твердженням 4.1** $L$ є циклічна алгебра, яка породжена елементом $a$. Покладемо $b = [a, a]$, тоді $b \in \gamma_2(L) = [L, L]$ та $b \in \mathbf{Leib}(L)$. Звідси випливає, що $[b, a] = 0$. Якщо припустимо, що $[a, b] = 0$, тоді $b \in \zeta(L)$. Але у даному випадку $\gamma_2(L) \leqslant \zeta(L)$ і $\gamma_3(L) = \langle 0 \rangle$, що суперечить нашому припущенню. Отже, $[a, b] = c \neq 0$. Тоді $c \in \gamma_3(L)$, це доводить, що $\gamma_3(L) = Fc$ та $[c, a] = [a, c] = [c, b] = [b, c] = 0$.

Випадок, коли $\mathbf{ncl}(L) = 2$ розглянемо як два підвипадки. Перший: існує елемент $b \notin \gamma_2(L) = [L, L]$ такий, що $[b, b] = 0$. Другий: $[d, d] \neq 0$ для кожного елемента $d \notin \gamma_2(L)$. У другому випадку $[d, d]$ є ненульовим елементом із $\zeta(L)$. Тоді $\zeta(L) = F[d, d] \leqslant \langle d \rangle$. Із того, що фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ є абелева, випливає, що циклічна підалгебра $\langle d \rangle$ є ідеал. Тоді й кожна ненульова підалгебра $L$ є ідеал. □

У наступних двох теоремах розглянемо обидва ці підвипадки окремо.

Далі під $L = A \oplus B$ розумітимемо, що $L$ є *пряма сума* підпросторів $A$ та $B$ або підалгебр $A$ і $B$. Якщо $L = A \oplus B$ й $A$ є ідеалом $L$, а $B$ є підалгебра $L$, говоритимемо, що $L$ є напівпряма сума $A$ та $B$ і застосовуватимемо таке позначення: $L = A \dashv B$.

**Теорема 4.2.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі, $\mathbf{dim}_F(L) = 3$, $\mathbf{ncl}(L) = 2$ і $L$ має елемент $b \notin \gamma_2(L)$ такий, що $[b, b] = 0$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. *$L = A \oplus B$, де $A$, $B$ – ідеали, $B = Fb$, $[b, b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fb \oplus Fc$.*

II. *$L = A \leftthreetimes B$, де $A = Fa \oplus Fc$ є циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$, $B$ – абелева підалгебра, $B = Fb$, $[b, b] = 0$ та $[a, b] = c$, $[b, a] = 0 = [b, c] = [c, b]$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$ і $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$.*

III. *$L = A \leftthreetimes B$, де $A = Fa \oplus Fc$ є циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$, $B$ – абелева підалгебра, $B = Fb$, $[b, b] = 0$ і $[a, b] = c$, $[b, a] = \gamma c$, $\gamma \neq 0$, $[b, c] = [c, b] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$.*

*Доведення.* З того що $\gamma_3(L) = \langle 0 \rangle$, випливає, що $\gamma_2(L) = [L, L] \leqslant \zeta(L)$. Включення $\mathbf{Leib}(L) \leqslant \gamma_2(L)$ доводить, що $\mathbf{dim}_F\big(\gamma_2(L)\big) \geq 1$. Якщо припустимо, що $\mathbf{dim}_F\big(L/\gamma_2(L)\big) = 1$, тоді **твердження 4.1** доводить, що $L$ є циклічною алгеброю. Але у даному випадку маємо, що $\mathbf{dim}_F(L) = 2$. Отже, $L/\gamma_2(L)$ не є циклічна, таким чином, $\mathbf{dim}_F\big(L/\gamma_2(L)\big) = 2$. Покладемо $K = \gamma_2(L)$. Із того що $L$ не є алгебра Лі, існує елемент $a$ такий, що $[a, a] = c \neq 0$. Включення $K \leqslant \zeta(L)$ доводить, що $a \notin K$. Оскільки $\mathbf{dim}_F\big(L/\gamma_2(L)\big) = 2$, то випливає, що $K = Fc$. Оскільки $L/K$ є абелева, то це означає, що $[a, x]$, $[x, a] \in K = Fc \leqslant \langle a \rangle$ для кожного елемента $x \in L$. Це доводить, що підалгебра $A = \langle a \rangle = Fa \oplus Fc$ є ідеал $L$.

У результаті вибору елемента $a$ одержуємо, що $b \notin \langle a \rangle$, так що $L = A \oplus Fb$. Рівність $[b, b] = 0$ доводить, що підалгебра $\langle b \rangle$ абелева, отже, $\langle b \rangle = Fb$. Таким чином, $L$ є напівпряма сума ідеалів $\langle a \rangle$ і одновимірної абелевої підалгебри $Fb$. Маємо такі можливості для комутаторів $[a, b]$ та $[b, a]$.

(i) $[a, b] = [b, a] = 0$, у цьому випадку підалгебра $\langle b \rangle$ є ідеал, а $L$ – пряма сума двох ідеалів: $L = (Fc \oplus Fa) \oplus Fb$, так що $L$ є алгебра Лейбніца типу I.

(ii) $[a,b]=\alpha c$, $[b,a]=\beta c$, де $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Якщо $\alpha\neq 0$ (відповідно $\beta\neq 0$), тоді можемо замінити елемент $b$ на $b_1=\alpha^{-1}b$ (відповідно на $b_1=\beta^{-1}b$). Зрозуміло, що $L=\langle a\rangle\oplus Fb_1$ та $[a,b_1]=c$, $[b_1,b_1]=0$ (відповідно $[b_1,a]=c$, $[b_1,b_1]=0$). Розглянемо зараз два випадки:

$$(iia)[a,b]=c,[b,a]=0,$$
$$(iib)[a,b]=0,[b,a]=c.$$

У другому випадку покладемо $a_1=a$, $b_1=a-b$, матимемо

$$[b_1,b_1]=[a-b,a-b]=[a,a]-[b,a]-[a,b]+[b,b]=c-c=0,$$
$$[a_1,b_1]=[a,a-b]=[a,a]-[a,b]=c-0=c,$$
$$[b_1,a_1]=[a-b,a]=[a,a]-[b,a]=c-c=0.$$

Це доводить, що в кожній ситуації *(iia)* та *(iib)* прийдемо до однієї і тієї ж алгебри. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типів II і III.

У другому підвипадку розглянули ситуацію, коли $[d,d]$ є ненульовий елемент із $\zeta(L)$ для кожного елемента $d\notin\zeta(L)$. Як зазначали раніше, у цьому випадку кожна ненульова підалгебра $L$ є ідеал. $\square$

**Теорема 4.3.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі, $\mathbf{dim}_F(L)=3$, $\mathbf{ncl}(L)=2$ і $[d,d]\neq 0$ для кожного елемента $d\notin\gamma_2(L)$ такий, що $[b,b]=0$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. *$L=A+B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A=\langle a\rangle$, $B=\langle b\rangle$, $A\cap B=\zeta(L)=Fc$, $[a,a]=[b,b]=c$, $[c,a]=[a,c]=[c,b]=[b,c]=[a,b]==[b,a]=0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L)=[L,L]=\zeta^{left}(L)=\zeta^{right}(L)==\zeta(L)=Fc$, $\mathbf{char}(F)\neq 2$ і рівність $X^2+1=0$ не має розв'язків у $F$.*

II. *$L=A+B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A=\langle a\rangle$, $B=\langle b\rangle$, $A\cap B=\zeta(L)=Fc$, $[a,a]=c$, $[b,b]=\rho c$, де $\rho$ – примітивний корінь із одиниці степені $|F|-1$, $[c,a]=[a,c]=[c,b]=[b,c]=[a,b]=[b,a]=0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L)=[L,L]=\zeta^{left}(L)=\zeta^{right}(L)=\zeta(L)=Fc$, $\mathbf{char}(F)\neq 2$.*

III. *$L=A+B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A=\langle a\rangle$, $B=\langle b\rangle$, $A\cap B=\zeta(L)=Fc$, $[a,a]=c=[a,b]$, $[b,b]=\eta c$, $[c,a]=[a,c]=[c,b]==[b,c]=[b,a]=0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L)=[L,L]=\zeta^{left}(L)==\zeta^{right}(L)=\zeta(L)=Fc$ і поліном $X^2+X+\eta$ не має коренів у полі $F$.*

*Доведення.* Як і в **теоремі 4.2** $\gamma_2(L) = [L, L] \leqslant \zeta(L)$, $\mathbf{Leib}(L) \leqslant \gamma_2(L)$, $\mathbf{dim}_F\big(\gamma_2(L)\big) = 1$, отже, $\mathbf{dim}_F\big(L/\gamma_2(L)\big) = 2$. Покладемо $K = \gamma_2(L)$. Нехай $a \notin K$, тоді $[a, a] = c \neq 0$. Оскільки $\mathbf{dim}_F\big(\gamma_2(L)\big) = 1$, то $K = Fc$. Так як $L/K$ є абелева випливає, що $[a, x]$, $[x, a] \in K = Fc \leqslant \langle a \rangle$ для кожного елемента $x \in L$. Це доводить, що підалгебра $A = \langle a \rangle = Fa \oplus Fc$ є ідеал $L$.

Виберемо елемент $b \notin \langle a \rangle$. Тоді підмножина $\{c, a, b\}$ – базис $L$. За нашими умовами $[b, b] = \eta c$ і $\eta \neq 0$. Розглянемо елементи $[a, b]$ та $[b, a]$. Припустимо, що $[a, b] = [b, a] = 0$. Оскільки $F$ є скінченний, то $G = F\backslash\{0\}$ є циклічна група відносно множення порядку $q = |F| - 1$. Припустимо, що $\eta \in G^2$. Тоді $\eta = \kappa^2$ для деяких елементів $0 \neq \kappa \in F$. Покладемо $b_1 = \kappa^{-1}b$, тоді

$$[b_1, b_1] = [\kappa^{-1}b, \kappa^{-1}b] = \kappa^{-2}[b, b] = \kappa^{-2}\eta c = \kappa^{-2}\kappa^2 c = c.$$

Зокрема, якщо $\mathbf{char}(F) = 2$, тоді $G^2 = G$. Візьмемо довільний елемент $d = \lambda a + \mu b_1$, де $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, знайдемо $[d, d]$. За такого вибору $d \notin \zeta(L)$, так що $[d, d] \neq 0$. Маємо

$$[d, d] = [\lambda a + \mu b_1, \lambda a + \mu b_1] =$$
$$= \lambda^2[a, a] + \lambda\mu[b_1, a] + \lambda\mu[a, b_1] + \mu^2[b_1, b_1] = \lambda^2 c + \mu^2 c.$$

Припустимо, що $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Оскільки $\mu \neq 0$, одержуємо, що $y^2 + 1 = 0$, де $y = \lambda\mu^{-1}$. Таким чином, бачимо, що многочлен $X^2 + 1$ не має коренів у полі $F$. Оскільки поле $F$ таке, що $\mathbf{char}(F) = 2$ многочлен $X^2+1$ має корінь 1, характеристика поля $F$ не має дорівнювати 2. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу I.

Наприклад, якщо $F = \mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_{13}$, рівняння $y^2 + 1 = 0$ має розв'язок, а якщо $F = \mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$, рівняння $y^2 + 1 = 0$ не має розв'язків. Таким чином, бачимо, що алгебри мають однакові співвідношення, але різні властивості.

Розглянемо випадок, коли $\eta \notin G^2$. Оскільки $G$ є циклічна, тоді $G/G^2$ – циклічна група порядку 2, така що $G = G^2 \cup \rho G^2$, де $\rho$ є первісний корінь степеня $q$. Тоді $\eta = \rho\kappa^2$ для деякого елемента $\kappa \in F$. Покладемо $b_1 = \kappa^{-1}b$, тоді

$$[b_1, b_1] = [\kappa^{-1}b, \kappa^{-1}b] = \kappa^{-2}[b, b] = \kappa^{-2}\eta c = \kappa^{-2}\rho\kappa^2 c = \rho c.$$

Як уже зазначали, у даному випадку $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Нехай $d = \lambda a + \mu b_1$, де $\lambda \neq 0$ та $\mu \neq 0$.

Маємо

$$\begin{aligned}[d,d] &= [\lambda a + \mu b_1, \lambda a + \mu b_1] = \\ &= \lambda^2[a,a] + \mu^2[b_1,b_1] = \\ &= \lambda^2 c + \mu^2 \rho c = (\lambda^2 + \mu^2\rho)c.\end{aligned}$$

Припустимо, що $\lambda^2+\mu^2\rho = 0$. Оскільки $\mu \neq 0$, одержуємо, що $y^2+\rho = 0$, де $y = \lambda\mu^{-1}$. З огляду на вибір, $\rho$ є породжуючим елементом мультиплікативної циклічної групи $G = F\backslash\{0\}$, так що $\rho \notin G^2$. Оскільки $\langle\rho\rangle \leqslant \langle-\rho\rangle$, $-\rho \notin G^2$. Звідси випливає, що рівняння $y^2 + \rho = 0$ не має розв'язків у $F$. Тоді $[d,d] \neq 0$ для кожного елемента $d \notin Fc$. Як бачили вище, у даному випадку кожна підалгебра $L$ є ідеалом. Таким чином, приходимо до алгебри Лейбніца типу II.

Припустимо, що $[b,a] = \alpha c \neq 0$. Тоді $\alpha \neq 0$. Покладемо $b_1 = \alpha a - b$, тоді $[b_1,a] = [\alpha a - b, a] = \alpha[a,a] - [b,a] = \alpha c - \alpha c = 0$. Тому далі припустимо, що $[b,a] = 0$.

Маємо $[a,b] = \beta c$ для деякого елемента $\beta \in F$. Випадок, коли $\beta = 0$ уже розглянули. Нехай $[a,b] = \beta c \neq 0$. Покладемо $b_1 = \beta^{-1}b$, тоді $[a,b_1] = [a,\beta^{-1}b] = \beta^{-1}[a,b] = \beta^{-1}\beta c = c$. Нехай $d = \lambda a + \mu b$, де $\lambda \neq 0$ та $\mu \neq 0$. Маємо

$$\begin{aligned}[d,d] &= [\lambda a + \mu b_1, \lambda a + \mu b_1] = \\ &= \lambda^2[a,a] + \lambda\mu[a,b_1] + \mu^2[b_1,b_1] = \\ &= \lambda^2 c + \lambda\mu c + \mu^2\eta c, \text{де } \eta = [b_1,b_1].\end{aligned}$$

Припустимо, що $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2\eta = 0$. Оскільки $\mu \neq 0$, одержуємо рівняння $y^2 + y + \eta = 0$, де $y = \lambda\mu^{-1}$. Отже, бачимо, що многочлен $X^2 + X + \eta$ не має коренів у полі $F$. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу III.

Як бачимо, у цьому останньому випадку властивості алгебри залежать від того, чи має многочлен корінь у полі $F$, а також залежить від вибору елемента $\eta$. Різниця з'являється навіть над полями однієї характеристики. Тому, якщо $F = \mathbb{F}_2$, тоді для $\eta$ можливе лише одне значення $\eta = 1$. Але це рівняння $y^2+y+1 = 0$ не має розв'язків у полі $F = \mathbb{F}_2$. Отже, алгебра не має елемента $d \notin Fc$ такого, що $[d,d] = 0$. Звідси випливає, що кожна підалгебра $L$ є ідеалом. Якщо $F = \mathbb{F}_4$ і $\eta_1 = 1$, тоді рівняння $y^2+y+1 = 0$ має розв'язок у полі $\mathbb{F}_4$. У даному випадку алгебра $L$ має одновимірну підалгебру, яка не є ідеал. $\square$

## 4.3 Алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні, із одновимірним ядром Лейбніца

Наступним кроком є розгляд випадку, коли $L$ не є нільпотентна. Розглянемо алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є алгебрами Лі. Звідси випливає, що $\mathbf{Leib}(L) \neq \langle 0 \rangle$. Оскільки $\mathbf{Leib}(L)$ є абелевим ідеалом, $L \neq \mathbf{Leib}(L)$. Отже, для $\mathbf{Leib}(L)$ маємо лише два випадки:

1) $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$,

2) $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$.

У цьому підрозділі розглянемо випадок, коли $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$, так що $\mathbf{dim}_F\big(L/\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$.

**Теорема 4.4.** *Нехай $L$ не є нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі, $\mathbf{dim}_F(L) = 3$ та $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. *$L = A \oplus B$, де $A$, $B$ – ідеали, $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A$ – циклічна підалгебра, $A = Fa \oplus Fc$, де $[a,a] = c = [a,c]$, $[c,a] = [c,b] = [b,c] = [a,b] = [b,a] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fb$.*

II. *$L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,b] = c$, $[c,a] = [c,b] = [b,c] = [b,a] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.*

III. *$L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[b,a] = [b,c] = c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = [a,b] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = Fb$, $\zeta(L) = \langle 0 \rangle$.*

IV. *$L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,b] = a = -[b,a]$, $[b,c] = -2c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \langle 0 \rangle$.*

V. *$L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c$, $[a,c] = 0$, $[a,b] = a + \gamma c$, $\gamma \in F$, $[b,a] = -a + \gamma c$, $[b,c] = -2c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \langle 0 \rangle$ як тільки $\mathbf{char}(F) \neq 2$ і $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$ як тільки $\mathbf{char}(F) = 2$.*

*Доведення.* Оскільки $L$ не є алгебра Лі, тоді існує елемент $a$ такий, що $[a,a]=c\neq 0$. Отже, $c\in K=\mathbf{Leib}(L)$, так що $K=Fc$. Із включення $\mathbf{Leib}(L)\leqslant \zeta^{left}(L)$ випливає, що $[c,y]=0$ для кожного елемента $y\in L$, зокрема $[c,a]=0$. А підалгебра $\langle a\rangle$ має вимірність 2, отже, $[a,c]=0$ або $[a,c]=c$ (наприклад, [37]). Припустимо, що алгебра Лі $L/K$ є абелева та нехай, по-перше $[a,c]=0$. Також припустимо, що є елемент $b\notin\langle a\rangle$ такий, що $[b,b]=0$. Із того, що $L/K$ є абелевий випливає, що $[a,b]$, $[b,a]\in Fc$. Якщо $[a,b]=0=[b,a]$, тоді підалгебра $\langle b\rangle=Fb$ є ідеалом і $L$ – пряма сума двох підалгебр: $L=(Fa\oplus Fc)\oplus Fb$. Оскільки $L$ не є нільпотентна, тоді для $[a,c]$ залишається тільки один варіант: $[a,c]=c$. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу I.

Нехай зараз $[a,b]=\alpha c$, $[b,a]=\beta c$, де $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Якщо $\alpha\neq 0$ (відповідно $\beta\neq 0$), тоді можемо замінити елемент $b$ на $b_1=\alpha^{-1}b$ (відповідно $b_1=\beta^{-1}b$). Очевидно $L=\langle a\rangle\oplus Fb_1$ та $[a,b_1]=c$, $[b_1,b_1]=0$ (відповідно $[b_1,a]=c$, $[b_1,b_1]=0$). Розглянемо далі всі три ситуації.

(1) Припустимо, що $[a,b]=c$, $[b,a]=0$. Тоді
$$[b,c]=\big[b,[a,a]\big]=\big[[b,a],a\big]+\big[a,[b,a]\big]=0.$$
Якщо припустимо, що $[a,c]=0$, тоді $K\leqslant\zeta(L)$, звідси випливає, що алгебра $L$ є нільпотентна. Цю ситуацію було розглянуто раніше. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу II.

(2) Припустимо, що $[a,b]=0$ та $[b,a]=c$. Тоді
$$[b,c]=[b,[a,a]\big]=[[b,a],a]+[a,[b,a]\big]=[c,a]+[a,c]=[a,c].$$
Якщо припустимо, що $[a,c]=0$, тоді $K\leqslant\zeta(L)$, тому знову приходимо до нільпотентного випадку. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу III.

(3) Припустимо, що $[a,b]=c$ та $[b,a]=\beta c$, де $\beta\neq 0$. Тоді
$$[b,c]=\big[b,[a,a]\big]=\big[[b,a],a\big]+\big[a,[b,a]\big]=\beta[c,a]+\beta[a,c]=\beta[a,c].$$
Водночас $[b,c]=\big[b,[a,b]\big]=\big[[b,a],b\big]+\big[a,[b,b]\big]=\beta[c,b]+[a,0]=0.$

Якщо припустимо, що $[a,c]=0$, тоді $K\leqslant\zeta(L)$, тому знову приходимо до нільпотентного випадку. Тоді з рівності $[b,c]=\beta[a,c]$ випливає, що $\beta=0$. Таким чином, одержуємо протиріччя, яке доводить, що останній випадок неможливий.

Припустимо тепер, що $[d,d] \neq 0$ для кожного елемента $d \notin K$. Звідси випливає, що $[d,d]$ є ненульовий елемент $K$. Тоді $K = F[d,d] \leqslant \langle d \rangle$. Оскільки фактор-алгебра $L/K$ є абелева, тоді циклічна підалгебра $\langle d \rangle$ є ідеалом. Якщо $0 \neq d \in K$, тоді $\langle d \rangle = K$, зокрема, $\langle d \rangle$ є ідеалом. Тоді кожна ненульова підалгебра $L$ є ідеалом. Але в даному випадку алгебра $L$ має бути нільпотентною ( [51, Theorem A]). Отже, цей випадок розглянуто раніше.

Припустимо тепер, що $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$ та алгебра Лі $L/K$ не є абелева. Отже, існує елемент $a$ такий, що $[a,a] \neq 0$. Оскільки $L/K$ – алгебра Лі, $[a,a] \in K$. Якщо припустимо, що $a + K \in \zeta(L/K)$, тоді з рівняння $\mathbf{dim}_F(L/K) = 2$ випливає, що $L/K$ є абелева, отже, одержуємо протиріччя. Таким чином, можемо знайти елемент $y$ такий, що $K \neq [a + K, y + K]$. Оскільки $L/K$ – алгебра Лі вимірності 2, тоді випливає, що $L/K \neq [L/K, L/K]$ (наприклад, [35, Chapter 1, Section 4]). Тоді $\mathbf{dim}_F([L/K, L/K]) = 1$. Покладемо $d = [a,y]$, тоді $[L/K, L/K] = \langle d + K \rangle = = D/K$. Як зазначали раніше $d + K \notin \zeta(L/K)$. Маємо одну з двох ситуацій: $\langle d + K \rangle = \langle a + K \rangle$ або перетин $\langle d + K \rangle \cap \langle a + K \rangle$ є нульовий.

Розглянемо перший випадок, нехай $\langle d + K \rangle = \langle a + K \rangle$. Припустимо, що існує елемент $b \notin D$ такий, що $[b,b] = 0$. Тоді $L = D \oplus \langle b \rangle$, де підалгебра $\langle b \rangle$ має вимірність 1, отже, $\langle b \rangle = Fb$. Оскільки $c = [a,a] \in K$, то $D = Fa \oplus Fc$. Так як $a+K \notin \zeta(L/K)$, то $[a+K, b+K] \neq K$, отже, $[a+K, b+K] = \delta(a+K)$ для деякого ненульового елемента $\delta \in F$. Покладемо $b_1 = \delta^{-1}b$, тоді

$$[a + K, b_1 + K] = [a + K, \delta^{-1}b + K] =$$
$$= \delta^{-1}[a + K, b + K] = \delta^{-1}(d + K) =$$
$$= \delta^{-1}\delta(a + K) = a + K.$$

Оскільки $[b_1, b_1] = \delta^{-2}[b,b] = 0$, припустимо, що $[a+K, b+K] = a+K$. Звідси випливає, що $[a,b] = a + \gamma c$ для деякого елемента $\gamma \in F$. Оскільки $L/K$ – алгебра Лі, $[b+K, a+K] = -[a+K, b+K] = -a+K$, так що $[b,a] = -a+\gamma_1 c$ для деякого елемента $\gamma_1 \in F$. Із того, що $c \in \mathbf{Leib}(L)$ випливає, що $[c,x] = 0$ для всіх $x \in L$, зокрема $[c,a] = [c,b] = 0$. Для елемента $[b,c]$ одержуємо

$$[b,c] = \big[b,[a,a]\big] = \big[[b,a],a\big] + \big[a,[b,a]\big] =$$
$$= [-a + \gamma_1 c, a] + [a, -a + \gamma_1 c] =$$
$$= [-a,a] + [a,-a] = -2c.$$

Далі

$$\big[[a,b],b\big] = \big[a,[b,b]\big] - \big[b,[a,b]\big] =$$
$$= -\big[b,[a,b]\big] = -[b, a+\gamma c] =$$
$$= -[b,a] - \gamma[b,c] = a - \gamma_1 c + 2\gamma c =$$
$$= a + (2\gamma - \gamma_1)c$$

та $\big[[a,b],b\big] = [a+\gamma c, b] = [a,b] = a+\gamma c$, так що $a + (2\gamma-\gamma_1)c = a+\gamma c$, звідси випливає, що $\gamma_1 = \gamma$.

Підалгебра $\langle a\rangle$ має вимірність 2, тому у нас є два випадки:

(i) $[a,c] = 0$

(ii) $[a,c] = c$

(наприклад, див. [37]).

Якщо $[a,c] = c$, тоді

$$\big[[b,a],a\big] = \big[b,[a,a]\big] - \big[a,[b,a]\big] =$$
$$= [b,c] - [a, -a+\gamma_1 c] =$$
$$= -2c + [a,a] - \gamma_1[a,c] =$$
$$= -2c + c - \gamma_1[a,c]$$

та $\big[[b,a],a\big] = [-a+\gamma_1 c, a] = -c$, звідси випливає, що $-2c + c - \gamma_1[a,c] = -c$, так що $\gamma_1 = 0$. Отже, якщо $[a,c] = c$, тоді одержуємо алгебру Лейбніца типу IV.

Якщо $[a,c] = 0$, тоді одержуємо алгебру Лейбніца типу V.

Припустимо тепер, що $[b,b] \neq 0$ для кожного елемента $b \notin D$. Як і раніше, можна вибрати елемент $b \notin D$ такий, що $[a+K, b+K] = a+K$. Звідси випливає, що $[a,b] = a+\gamma c$ для деякого елемента $\gamma \in F$. Оскільки $L/K$ – алгебра Лі, тоді

$$[b+K, a+K] = -[a+K, b+K] = -a+K,$$

так що $[b,a] = -a+\gamma_1 c$ для деякого елемента $\gamma_1 \in F$. Оскільки $[b,b] \neq 0$, то $[b,b] = \eta c$ для ненульового елемента $\eta \in F$. Із того, що $c \in \mathbf{Leib}(L)$ випливає, що $[c,x] = 0$ для всіх $x \in L$, зокрема $[c,a] = [c,b] = 0$. Для елемента $[b,c]$ одержуємо, що

$$[b,c] = \big[b,[a,a]\big] = \big[[b,a],a\big] + \big[a,[b,a]\big] =$$
$$= [-a+\gamma_1 c, a] + [a, -a+\gamma_1 c] =$$
$$= [-a,a] + [a,-a] = -2c.$$

Далі

$$\big[[a,b],b\big] = \big[a,[b,b]\big] - \big[b,[a,b]\big] =$$
$$= [a,\eta c] - \big[b,[a,b]\big] = \eta[a,c] - [b,a+\gamma c] =$$
$$= \eta[a,c] - [b,a] - \gamma[b,c] = \eta[a,c] + a - \gamma_1 c + 2\gamma c =$$
$$= \eta[a,c] + a + (2\gamma - \gamma_1)c.$$

Якщо $[a,c] = 0$, тоді $\big[[a,b],b\big] = a + (2\gamma - \gamma_1)c$, якщо $[a,c] = c$, тоді $\big[[a,b],b\big] = a + (\eta + 2\gamma - \gamma_1)c$. Водночас $\big[[a,b],b\big] = [a+\gamma c, b] = [a,b] = a + \gamma c$, так що $a + (2\gamma - \gamma_1)c = a + \gamma c$ або $a + (\eta + 2\gamma - \gamma_1)c = a + \gamma c$. Таким чином, якщо $[a,c] = 0$, тоді $\gamma_1 = \gamma$, якщо $[a,c] = c$, тоді $\gamma_1 = \eta + \gamma$.

Крім того,

$$\big[[b,a],a\big] = \big[b,[a,a]\big] - \big[a,[b,a]\big] = [b,c] - [a,-a+\gamma_1 c] =$$
$$= -2c + [a,a] - \gamma_1[a,c] = -2c + c - \gamma_1[a,c] = -c - \gamma_1[a,c]$$

та $\big[[b,a],a\big] = [-a+\gamma_1 c, a] = -c$, звідси випливає, що $\gamma_1[a,c] = 0$. Зокрема, якщо $[a,c] = c$, тоді $\gamma_1 = 0$. Як бачили вище, у даному випадку $\gamma_1 = \eta + \gamma$, тому $\eta = -\gamma$. Припустимо, що $[a,c] = c$ і розглянемо елемент $a+b+c$. Маємо

$$[a+b+c, a+b+c] =$$
$$= [a,a] + [a,b] + [a,c] + [b,a] + [b,b] + [b,c] =$$
$$= c + a + \gamma c + c - a - \gamma c - 2c = 0.$$

Оскільки $a+b+c \notin D$, то одержуємо протиріччя, яке доводить, що варіант, коли $[a,c] = c$ неможливий.

Отже, тоді $[a,c] = 0$. Нехай $x = \lambda a + \mu b + \nu c$ – довільний елемент $L$ такий, що $x \notin D$, де $\lambda$, $\mu$, $\nu$ елементи з $F$. Маємо

$$[\lambda a + \mu b + \nu c, \lambda a + \mu b + \nu c] =$$
$$= \lambda^2[a,a] + \lambda\mu[a,b] + \lambda\mu[b,a] + \mu^2[b,b] + \mu\nu[b,c] =$$
$$= \lambda^2 c + \lambda\mu(a+\gamma c) + \lambda\mu(-a+\gamma c) + \mu^2\eta c - 2\mu\nu c =$$
$$= (\lambda^2 + 2\lambda\mu\gamma + \mu^2\eta - 2\mu\nu)c.$$

Розглянемо рівняння $\lambda^2 + 2\lambda\mu\gamma + \mu^2\eta - 2\mu\nu = 0$. Якщо $F$ є скінченне поле характеристики 2, тоді одержуємо $\lambda^2 + \mu^2\eta = 0$. Покладемо $\mu = 1$, так що $x \notin D$. Рівняння $\lambda^2 + \eta = 0$ має розв'язок у полі $F$, тому що $F = \mathbb{F}_2$. Таким чином, якщо $F$ є скінченне поле характеристики 2, тоді існує елемент $x \notin D$ такий, що $[x,x] = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Припустимо тепер, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Із того, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$ випливає, що рівняння $2x = a$ має розв'язок: $\frac{1}{2}a$ для кожного елемента $a \in F$. Покладемо $\lambda = \mu = 1$, і тому приходимо до рівняння $1 + 2\gamma + \eta - 2\nu = 0$. Таким чином, якщо покладемо $\lambda = \mu = 1$, тоді $\nu = \frac{1}{2}(1 + 2\gamma + \eta)$, а отже, $x \notin D$ та $[x, x] = 0$, і знову одержуємо протиріччя. $\square$

## 4.4 Циклічна алгебра Лейбніца вимірності 3, яка не є нільпотентна

Розглянемо випадок, коли $L$ не є нільпотентна та $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$. Тут можливі два варіанти: $L$ є циклічна алгебра Лейбніца і $L$ не є циклічна алгебра Лейбніца. Отже, розглянемо випадок, коли алгебра Лейбніца вимірності 3 – циклічна.

**Теорема 4.5.** *Нехай $L$ не є нільпотентна циклічна алгебра Лейбніца вимірності 3 над полем $F$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = D \dashv A$, *де* $D = Fd$, $[d, d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ *– циклічна нільпотентна підалгебра,* $[a, a] = c$, $[a, c] = 0$, $[a, d] = \delta d$, $0 \neq \delta \in F$, $[c, a] = [c, d] = [c, c] = [d, c] = [d, a] = 0$. *Більше того,* $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = Fc$.

II. $L = D \dashv B$, *де* $B = Fb$, $[b, b] = 0$, $D = Fd \oplus Fc$ *– абелева підалгебра,* $[d, d] = [d, c] = [c, d] = [c, c] = 0$, $[b, c] = d$, $[b, d] = \gamma d + \delta d$, $0 \neq \gamma, \delta \in F$, $[c, b] = [d, b] = 0$. *Більше того,* $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = Fb$, $\zeta(L) = \langle 0 \rangle$.

*Доведення.* Оскільки $L$ є циклічна і має вимірність 3, отже, $L$ не може бути алгеброю Лі. Нехай $a$ є елемент $L$ такий, що $L = \langle a \rangle$. Оскільки $L$ не є алгебра Лі, то $[a, a] = c \neq 0$. Більше того, $c \in \mathbf{Leib}(L) \leqslant \zeta^{left}(L)$, це означає, що $[c, x] = 0$ для всіх $x \in L$, зокрема $[c, a] = 0$. Оскільки $L/\mathbf{Leib}(L)$ – це циклічна алгебра Лі, тобто $\mathbf{dim}_F\big(L/\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$, так що $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$. Якщо припускаємо, що $[a, c] \in Fc$, тоді $\langle a \rangle = Fa \oplus Fc$, так що $\mathbf{dim}_F(L) = 2$, отже, одержали протиріччя. Таким чином, $d = [a, c] \notin Fc$, із цього випливає, що $\{c, d\}$ є базис $K = \mathbf{Leib}(L)$. Водночас $[d, a] = 0$. Оскільки $K$ є абелева підалгера, то $[c, c] = [c, d] = [d, d] = [d, c] = 0$. Оскільки $K$ є ідеал, $[a, d] \in K$, так що $[a, d] = \gamma c + \delta d$. Якщо $\gamma = 0 = \delta$, тоді $L$ є циклічна нільпотентна алгебра. Даний випадок було розглянуто раніше. Припустимо тепер, що $\gamma = 0$

і $\delta \neq 0$, тоді $[a, d] \in Fd$, із цього випливає, що $D = Fd$ є ідеал $L$. Покладемо $a_1 = a - \delta^{-1}c$, тоді

$$[a_1, a_1] = [a - \delta^{-1}c, a - \delta^{-1}c] = [a, a] - \delta^{-1}[a, c] = c - \delta^{-1}d = a_2,$$
$$[a_1, a_2] = [a - \delta^{-1}1c, c - \delta^{-1}d] = [a, c] - \delta^{-1}[a, d] = d - \delta^{-1}\delta d = 0,$$
$$[a_1, d] = [a - \delta^{-1}c, d] = [a, d] = \delta d.$$

Таким чином, можемо бачити, що ця підалгебра $A = \langle a_1 \rangle$ є нільпотентою та має вимірність 2, $D \cap A = \langle 0 \rangle$, так що $L$ – напівпряма сума ідеалу $D$ вимірності 1 і нільпотентної підалгебри $A$ вимірності 2. Більше того, $D \leqslant \zeta^{left}(L)$, $[L, L] = \zeta^{left}(L) = \mathbf{Leib}(L) = D \oplus [A, A]$. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу I.

Припустимо тепер, що якщо $\gamma \neq 0$ та $\delta \neq 0$. Таким чином, $[a, d] = \gamma[a, a] + \delta[a, c]$ та $0 = [a, \gamma a + \delta c - d]$. Покладемо $b = a + \gamma^{-1}\delta c - \gamma^{-1}d$, тоді $[a, b] = 0$. Далі

$$[b, b] = [a + \gamma^{-1}\delta c - \gamma^{-1}d, b] = [a, b] + [\gamma^{-1}\delta c - \gamma^{-1}d, b] = 0,$$

так що $\langle b \rangle = Fb$. Оскільки $[c, b] = [d, b] = 0$, $Fb = \zeta^{right}(L)$. Крім того,

$$[b, c] = [a + \gamma^{-1}\delta c - \gamma^{-1}d, c] = [a, c] = d,$$
$$[b, d] = [a + \gamma^{-1}\delta c - \gamma^{-1}d, d] = [a, d] = \gamma c + \delta d.$$

Бачимо, що $L$ є напівпряма сума абелевого ідеалу $Fc \oplus Fd$ вимірності 2 й абелевої підалгебри $Fb$ вимірності 1. Більше того, $\zeta^{left}(L) = Fc \oplus Fd = \mathbf{Leib}(L) = [L, L]$, $\zeta^{right}(L) = Fb$. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу II. □

## 4.5 Алгебра Лейбніца вимірності 3, яка не є нільпотентна, із двовимірним ядром Лейбніца

Останнім випадком нашого розгляду є той випадок, коли $L$ не є нільпотента і не є циклічна, а також $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$.

Тоді $\mathbf{dim}_F\big(L/\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$. Зокрема, $L/\mathbf{Leib}(L)$ є абелева.

**Теорема 4.6.** *Нехай $L$ не є нільпотентна і не є циклічна алгебра Лейбніца вимірності 3 над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі та $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = A \dashv D$, *де* $D = Fd$, $[d,d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ *– циклічна нільпотентна підалгебра,* $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,d] = d$, $[c,a] = [c,c] = [c,d] = [d,c] = = [d,a] = 0$. *Більше того,* $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.

II. $\mathbf{Char}(F) \neq 2$, $L = A \dashv D$, *де* $D = Fd$, $[d,d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ *– циклічна нільпотентна підалгебра,* $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,d] = c + 2d$, $[c,a] = [c,d] = [c,c] = [d,c] = [d,a] = 0$. *Більше того,* $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.

*Доведення.* Покладемо $K = \mathbf{Leib}(L)$. Оскільки $L$ не є алгебра Лі, існує елемент $a$ такий, що $[a,a] = c \neq 0$. Тоді $a \notin K$, так що $L = K \oplus Fa$. Із включення $\mathbf{Leib}(L) \leqslant \zeta^{left}(L)$ випливає, що $[c,y] = 0$ для кожного елемента $y \in L$, зокрема $[c,a] = 0$. Для елемента $[a,c]$ маємо такі випадки:

1) $[a,c] = 0$,

2) $[a,c] \in Fc$,

3) $[a,c] \notin Fc$.

Переходимо до розгляду цих випадків. Виберемо елемент $d \in K$ такий, що $K = Fc \oplus Fd$. Оскільки $K$ є абелева, отже, $[d,d] = 0 = [c,d] = [d,c]$. Звідси випливає, що $c \in \zeta(L)$. Маємо $[d,a] = 0$ та $[a,d] = \gamma c + \delta d$. Якщо $\gamma = 0$, тоді підалгебра $\langle d \rangle = Fd$ є ідеал. У даному випадку одержуємо, що $L = D \oplus A$, де $D = Fd$ є абелевий ідеал, $D \leqslant \zeta^{left}(L)$, $A$ є нільпотентна циклічна підалгебра, $A = Fa \oplus Fc$, де $[a,a] = c$, $[L,L] = D \oplus [A,A] = \zeta^{left}(L)$ є абелевий ідеал. Таким чином, одержали алгебру Лейбніца типу I із **теореми 4.5**.

Припустимо тепер, що $\gamma \neq 0$. Покладемо $d_1 = \gamma^{-1} d$, тоді

$$[a, d_1] = \gamma^{-1}[a,d] = \gamma^{-1}(\gamma c + \delta d) = c + \delta d_1.$$

Якщо припустимо, що $\delta = 0$, тоді $L/\zeta(L)$ є абелова, $L$ – нільпотентна. Цей випадок розглянуто вище. Тому припускаємо, що $\delta \neq 0$. Маємо

$$[a + d_1, a + d_1] = [a,a] + [a,d_1] = c + c + \delta d_1 = 2c + \delta d_1.$$

Якщо $\mathbf{char}(F) = 2$, тоді $Fd_1 \leqslant \langle a + d_1 \rangle$, із цього випливає, що $a \in \langle a + d_1 \rangle$ та $c = [a,a] \in \langle a + d_1 \rangle$. Таким чином, бачимо, що в даному випадку $L$ є циклічна алгебра. Припустимо, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Тоді з того, що $\delta(a + d_1) - [a + d_1, a + d_1] \in \langle a + d_1 \rangle$, одержуємо $\delta a - 2c \in \langle a + d_1 \rangle$. Звідси випливає, що $\delta^2 c = [\delta a - 2c, \delta a - 2c] \in \langle a + d_1 \rangle$. Оскільки $\delta^2 \neq 0$, $Fc \leqslant \langle a + d_1 \rangle$. У свою чергу випливає, що $Fd_1 \leqslant \langle a + d_1 \rangle$, отже, $L$ є циклічна.

Припустимо тепер, що $0 \neq [a,c] \in Fc$. Тоді підалгебра $\langle a \rangle$ має вимірність 2 та не є нільпотентна. Тому можна припустити, що $[a,c] = c$ (див., наприклад, [37]). Виберемо елемент $d \in K$ такий, що $K = Fc \oplus Fd$. Оскільки $K$ є абелева, то $[d,d] = 0 = [c,d] = [d,c]$. Маємо $[d,a] = 0$ та $[a,d] = \gamma c + \delta d$. Якщо $\gamma = 0$, тоді підалгебра $\langle d \rangle = Fd$ є ідеал. У даному випадку одержуємо, що $L = D \oplus A$, де $D = Fd$ є абелевий ідеал, $D \leqslant \zeta^{left}(L)$, $A$ не є нільпотентна циклічна підалгебра вимірності 2, $A = Fa \oplus Fc$, де $[a,a] = c = [a,c]$, $[L,L] = D \oplus [A,A] = \zeta^{left}(L)$ є абелевий ідеал. Таким чином, одержуємо алгебру Лейбніца типу I.

Припустимо тепер, що $\gamma \neq 0$. Покладемо $d_1 = \gamma^{-1}d$, тоді

$$[a, d_1] = \gamma^{-1}[a,d] = \gamma^{-1}(\gamma c + \delta d) = c + \delta d_1.$$

Якщо припустимо, що $\delta = 0$, тоді $[a, d_1] \in Fc$, звідси випливає, що $L/Fc$ є абелева. У свою чергу випливає, що $\mathbf{Leib}(L) \leqslant Fc$. Але в даному випадку $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $\delta \neq 0$. Маємо

$$[a + d_1, a + d_1] = [a,a] + [a,d_1] = c + c + \delta d_1 = 2c + \delta d_1.$$

Якщо $\mathbf{char}(F) = 2$, тоді $Fd_1 \leqslant \langle a + d_1 \rangle$, із цього випливає, що $a \in \langle a + d_1 \rangle$ та $c = [a,a] \in \langle a + d_1 \rangle$. Таким чином, бачимо, що в даному випадку $L$ є циклічна алгебра. Припустимо, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Тоді з того, що $\delta(a + d_1) - [a + d_1, a + d_1] \in \langle a + d_1 \rangle$, одержуємо $\delta a - 2c \in \langle a + d_1 \rangle$. Звідси випливає, що

$$(\delta^2 - 2\delta)c = \delta^2 c - 2\delta c = [\delta a - 2c, \delta a - 2c] \in \langle a + d_1 \rangle.$$

Вище продемонстровано, що $\delta \neq 0$. Якщо $\delta \neq 2$, тоді $Fc \leqslant \langle a + d_1 \rangle$. У свою чергу випливає, що $Fd_1 \leqslant \langle a + d_1 \rangle$, знову одержуємо, що $L$ є циклічна. Припустимо, що $\delta = 2$, інакше кажучи $[a, d_1] = c + 2d_1$. Отже, якщо $L$ не є циклічна, тоді $L$ є алгебра Лейбніца типу II.

Припустимо тепер, що $[a,c] \notin Fc$. У даному випадку $[a,c] = \alpha c + \beta d$, крім того $\beta \neq 0$. Отже, алгебра Лейбніца $L$ циклічна. Цей випадок розглянуто вище.

Отже, теорему доведено. $\square$

## Висновки до розділу 4

Розділ чотири присвячений опису алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. Ця ситуація вкрай відрізняється від описів алгебр Лейбніца вимірності 3 над алгебраїчно замкненими полями, які було одержано до цього іншими алгебраїстами. Більш конкретно, було одержано досить детальний опис алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями для наступних випадків: нільпотентні алгебри Лейбніца, ненільпотентні алгебри Лейбніца із одновимірним ядром, ненільпотентні алгебри Лейбніца із двовимірним ядром, а також ненільпотентні циклічні алгебри Лейбніца. Тут також варто зауважити, що опис алгебр Лейбніца вимірності 3 дуже відрізняється від опису алгебр Лі вимірності 3, що вказує на значну відмінність між цими типами алгебр.

Результати даного розділу анонсовано в [84, 85] та опубліковано у праці [83].

# 5 Про ідеали, субідеали та контраідеали в алгебрах Лейбніца

У цьому розділі розглянуто деякі узагальнено розв'язні $T$-алгебри Лейбніца й алгебри Лейбніца, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали.

## 5.1 Алгебри Лейбніца, усі субідеали яких є ідеали

Ситуація для алгебри Лейбніца набагато складніша і різноманітніша, ніж для алгебр Лі. Наведемо кілька простих прикладів, які це ілюструють. Нехай $F$ – довільне поле, $L$ – векторний простір над полем $F$ із базисом $\{a, c\}$. Визначимо операцію $[,]$ на $L$ за таким правилом: $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = [c, c] = 0$. Тоді $L$ є циклічна алгебра Лейбніца, $Fc$ – ненульова підалгебра. Крім того, $Fc$ є центр $L$, зокрема $F$ є ідеал $L$. Таким чином, кожна підалгебра $L$ є ідеалом.

Розглянемо тепер $F = \mathbb{F}_2$ і $L$ – алгебра Лейбніца, яка побудована вище. Покладемо $A = L \oplus Fv$ і нехай $[v, v] = [v, c] = [c, v] = 0$ та $[v, a] = [a, v] = a$. Зауважимо, що $A$ – алгебра Лейбніца, а $L$ – ідеал $A$. Більше того, якщо $B$ є ненульовий ідеал $A$ і $L$ не включає $B$, то $B = A$. Як бачили вище, $Fc$ є ненульовий ідеал $L$. Але $Fc = \zeta(L)$, таким чином, $Fc$ є ідеалом $A$. Отже, $A$ є $T$-алгебра Лейбніца.

Нехай знову $F = \mathbb{F}_2$ та $D = L \oplus Fu$. Покладемо $[u, u] = [u, c] = [c, u] = 0$ та $[u, a] = [a, u] = a + c$. Зауважимо, що $D$ – алгебра Лейбніца, а $L$ – ідеал $A$. Як зазначено вище, можна переконатися, що $D$ є $T$-алгебра Лейбніца.

### 5.1.1 Структура $T$-алгебр Лейбніца, які є алгебрами Бера

Зазначимо, що в алгебрах Лейбніца (як і в групах і алгебрах Лі) той факт, що $\gamma_{\mathbf{c}+1}(L) = \langle 0 \rangle$, аналогічний тому, що $\zeta_{\mathbf{c}}(L) = L$, тобто нижній і верхній центральні ряди в нільпотентних алгебрах Лейбніца мають однакову довжину [41, Corollary 1 of Proposition 2].

**Твердження 5.1.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Тоді кожна підалгебра $L$ є субідеал $L$.*

*Доведення.* Нехай $A$ є підалгебра $L$, і нехай

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \leqslant \zeta_1(L) \leqslant \zeta_2(L) \leqslant \ldots \leqslant \zeta_n(L) = L$$

є верхній центральний ряд $L$. Виберемо номер $k$ такий, що $\zeta_{k-1}(L) \leqslant A$, але $A$ не включає $\zeta_k(L)$. Оскільки $A$ – підалгебра і $\zeta_k(L)$ – ідеал $L$, сума $A_1 = A + \zeta_k(L)$ є підалгебра. Звернемо увагу, що $A \neq A_1$. Для довільних елементів $a \in A$, $z \in \zeta_k(L)$ маємо $[a, z], [z, a] \in \zeta_{k-1}(L) \leqslant A$. Кожен елемент $A_1$ має вигляд $d + z$, де $d \in A$, $z \in \zeta_k(L)$. Тоді

$$[a, d + z] = [a, z] + [a, d] \in A.$$

Аналогічно $[d + z, a] \in A$. Звідси випливає, що $A$ є ідеал $A_1$. За побудовою $\zeta_k(L) \leqslant A_1$. Застосовуючи аналогічні аргументи, і отже, після скінченного числа кроків, одержуємо, що $A$ є субідеал $L$. □

**Наслідок 5.1.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ є нільпотентна, тоді $L$ або абелева, або $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$ і $E$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

*Доведення.* Дійсно, згідно із **твердженням 5.1** кожна підалгебра $L$ є субідеал, так що кожна підалгебра $L$ є ідеал. Результат випливає з **теореми А** [51]. □

**Теорема 5.1.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ – це алгебра Бера, то кожна підалгебра $L$ є абелева або $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$ і $E$ – екстраспеціальна підалгебра така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

*Доведення.* Алгебра $L$ породжена сімейством $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, де $A_\lambda$ – нільпотентні субідеали $L$, $\lambda \in \Lambda$. Оскільки $L$ є $T$-алгебра, то кожен $A_\lambda$ є нільпотентний ідеал $L$, $\lambda \in \Lambda$. Отже, $L$ породжують нільпотентні ідеали, так що $L$ є ніль-алгебра.

Нехай $d$ – довільний елемент $[L, L]$, а $x$ – довільний елемент $L$. Тоді існують нільпотентні ідеали $A_1, \ldots, A_k$ такі, що $x \in A_1 + \ldots + A_k = B$ і $d \in [B, B]$. Зауважимо, що $B$ є ідеал $L$. Якщо $B$ є абелевий, то $[d, x] = [x, d] = 0$. Якщо $B$ не є абелевий, тоді $B$ є нільпотентний [9, Lemma 1.5]. За **наслідком 5.1** $B$ є нільпотентний класу 2, так що $[d, x] = [x, d] = 0$. Звідси випливає, що $[L, L] \leqslant \zeta(L)$, зокрема $L$ є нільпотентна. Застосовуючи **наслідок 5.1**, одержуємо, що $D = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(D)$ і $E$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$. □

### 5.1.2 Анулятори одновимірних ідеалів в алгебрах Лейбніца

**Лема 5.1.** *Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$, тоді $[a,a] = 0$, $\big[a,[d,d]\big] = 0$ для кожного елемента $d \in L$ і $\boldsymbol{codim}_F\big(\mathbf{Ann}_L^{\boldsymbol{left}}(A)\big) = 1 = \boldsymbol{codim}_F\big(\mathbf{Ann}_L^{\boldsymbol{right}}(A)\big)$.*

*Доведення.* Нехай $b = [a,a]$, тоді $b = \beta a$ для деякого елемента $\beta \in F$. Тоді

$$0 = [[a,a],a] = [\beta a, a] = \beta[a,a] = \beta^2 a.$$

Звідси випливає, що $\beta = 0$, так що $[a,a] = 0$.

Оскільки $A = Fa = \{\lambda a \mid \lambda \in F\}$ – ідеал $L$, тоді $[d,a] = \gamma(d)a$ для деякого $\gamma(d) \in F$. Маємо

$$[d,\lambda a] = \lambda[d,a] = \lambda(\gamma(d)a) = \big(\lambda\gamma(d)\big)a = (\gamma(d)\lambda)a = \gamma(d)(\lambda a).$$

Розглянемо тепер відображення $\mathbf{f}\colon L \to F$, яке визначимо за таким правилом $\mathbf{f}(d) = \gamma(d)$ для кожного елемента $d \in L$. Маємо

$$\gamma(d_1+d_2)a = [d_1+d_2,a] = [d_1,a] + [d_2,a] =$$
$$= \gamma(d_1)a + \gamma(d_2)a = \big(\gamma(d_1)+\gamma(d_2)\big)a.$$

Звідси випливає, що $\mathbf{f}(d_1+d_2) = \gamma(d_1+d_2) = \gamma(d_1)+\gamma(d_2) = \mathbf{f}(d_1)+\mathbf{f}(d_2)$.

Якщо $\lambda \in F$, тоді

$$\gamma(\lambda d)a = [\lambda d, a] = \lambda[d,a] = \lambda\big(\gamma(d)a\big),$$

це означає, що $\mathbf{f}(\lambda d) = \gamma(\lambda d) = \lambda\gamma(d) = \lambda\mathbf{f}(d)$. Отже, відображення $\mathbf{f}$ – лінійне. Зрештою, $\mathbf{Ker}(\mathbf{f}) = \{d \in L \mid \gamma(d) = 0\}$. Це означає, що $[d,a] = 0$ для кожного елемента $a \in A$. Іншими словами, $\mathbf{Ker}(\mathbf{f}) \leqslant \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)$. Включення, навпаки, очевидне, так що $\mathbf{Ker}(\mathbf{f}) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)$.

Застосовуючи ті ж аргументи, одержуємо, що $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$ має ковимірність 1.

Оскільки $A = Fa = \{\lambda a \mid \lambda \in F\}$ – ідеал $L$, тоді $[d,a] = \gamma a$ і $[a,d] = \lambda a$ для деяких елементів $\gamma$, $\lambda \in F$. Маємо

$$\big[[d,a],d\big] = \big[d,[a,d]\big] - \big[a,[d,d]\big].$$

Водночас

$$\big[[d,a],d\big] = [\gamma a, d] = \gamma[a,d] = \gamma\lambda a,$$
$$\big[d,[a,d]\big] = [d,\lambda a] = \lambda[d,a] = \lambda\gamma a = \gamma\lambda a.$$

Звідси випливає, що $\big[a,[d,d]\big] = 0$. □

**Наслідок 5.2.** *Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$, тоді*

$$\mathbf{Ann}_L^{\textit{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\textit{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A).$$

*Доведення.* Покладемо $D = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$. Із **леми 5.1** випливає включення $K = \mathbf{Leib}(L) \leqslant D$. Нехай $d \in D$, $x$ є довільний елемент $L$. Оскільки $L/K$ є алгебра Лі, то

$$K = [a, d] + K = [a + K, d + K] = -[d + K, a + K] = -[d, a] + K,$$

звідси випливає, що $[d, a] \in K$. Водночас із того, що $A$ є ідеал $L$ випливає, що $[d, a] \in A$, тобто $[d, a] \in K \cap A$. Оскільки $A$ має вимірність 1, то він є абелевим. Тоді $[a, a] = 0$ і $K \cap A = \langle 0 \rangle$. Звідси випливає, що $[d, a] = 0$ і $d \in \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)$, так що $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) \leqslant \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)$. Якщо $L = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$, тоді $L = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A)$. Припустимо, що $L \neq \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$. Тоді з **леми 5.1** маємо, що або $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)$, або $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = L$. У другому випадку із застосуванням наведених вище аргументів одержуємо, що $[a, x] \in K$ для кожного елемента $x \in L$. Водночас, оскільки $A$ є ідеал $L$, маємо $[a, x] \in A$, тоді $[a, x] \in K \cap A = \langle 0 \rangle$. Звідси випливає, що $L = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$, отже, одержуємо протиріччя, яке доводить рівність

$$\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A).$$

$\square$

**Лема 5.2.** *Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$ та $d \notin \mathbf{Ann}_L(A)$, тоді $[a, d] = -[d, a]$.*

*Доведення.* Нехай $[d, a] = \gamma a$ та $[a, d] = \lambda a$, де $\gamma$, $\lambda \in F$. Із **наслідку 5.2** маємо $d \notin \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)$, звідси випливає, що $\lambda \neq 0$. Отже,

$$\big[[a, d], d\big] = \big[a, [d, d]\big] - \big[d, [a, d]\big].$$

За **лемою 5.1**, $\big[a, [d, d]\big] = 0$. Крім того, $\big[[a, d], d\big] = [\lambda a, d] = \lambda[a, d] = \lambda^2 a$ і $\big[d, [a, d]\big] = [d, \lambda a] = \lambda[d, a] = \lambda\gamma a$. Таким чином, $\lambda^2 a = -\lambda\gamma a$. Оскільки $\lambda \neq 0$, $\lambda a = -\gamma a$, звідси випливає, що $\lambda = -\gamma$. $\square$

**Лема 5.3.** *Нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$, $B$ є ідеали $L$. Припустимо, що $A = Fa$, $B = Fb$ для деяких елементів $a, b \in A$ і елементи $a$, $b$ є лінійно незалежні. Якщо $\mathbf{Ann}_L(A) \neq \mathbf{Ann}_L(B)$, тоді $A \oplus B$ містить підалгебру, яка не є ідеал.*

*Доведення.* Оскільки $a, b$ є лінійно незалежні, тоді $A \cap B = \langle 0 \rangle$. Звідси випливає, що ідеал $A + B$ абелевий, оскільки ідеали $A$ і $B$ абелеві за **лемою 5.1**. Тоді кожен підпростір $A + B$ є підалгебра.

Оскільки $\mathbf{Ann}_L(A) \neq \mathbf{Ann}_L(B)$, тоді $\mathbf{Ann}_L(A)$ містиме такий елемент $d$, що $d \notin \mathbf{Ann}_L(B)$, або $\mathbf{Ann}_L(B)$ такий елемент $c$, що $c \notin \mathbf{Ann}_L(A)$.

Розглянемо перший випадок. Тоді $[d, b] = \lambda b$ для деякого елемента $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Маємо $[d, a+b] = [d, a] + [d, b] = \lambda b$. Оскільки $a$, $b$ є лінійно незалежні, тобто $\lambda b \notin F(a + b)$. Звідси випливає, що $F(a + b)$ не є ідеал $L$.

Другий випадок розглядається аналогічно. □

**Наслідок 5.3.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – абелевий ідеал $L$. Тоді $\mathbf{Ann}_L^{right}(A) = \mathbf{Ann}_L^{left}(A) = \mathbf{Ann}_L(A)$ і $\mathbf{Ann}_L(A)$ має ковимірність 1.*

*Доведення.* Нехай $B = \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ – базис $A$. Оскільки $A$ є абелевий, то кожен підпростір $A$ є підалгебра й ідеал $A$. Тоді кожен підпростір $A$ є ідеал $L$. Зокрема, $Fb_\lambda$ є ідеал $L$ для всіх $\lambda \in \Lambda$. **Лема 5.3** доводить, що

$$\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(Fb_\lambda) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(Fb_\lambda) = \mathbf{Ann}_L(Fb_\lambda) =$$
$$= \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(Fb_\mu) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(Fb_\mu) = \mathbf{Ann}_L(Fb_\mu)$$

для всіх $\lambda$, $\mu \in \Lambda$. Звідси випливає, що

$$\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A) =$$
$$= \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(Fb_\lambda) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(Fb_\lambda) = \mathbf{Ann}_L(Fb_\lambda)$$

для кожного $\lambda \in \Lambda$, що й доводить результат. □

**Лема 5.4.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – абелевий ідеал $L$. Тоді для кожного елемента $d \in L$ існує елемент $\delta \in F$ такий, що $[d, a] = \delta a = -[a, d]$ для кожного елемента $a \in A$.*

*Доведення.* Оскільки $A$ є абелевий, кожен підпростір $A$ є підалгебра та ідеал $A$. Таким чином, для кожного елемента $a \in A$ підпростір $Fa = \{\lambda a \mid \lambda \in F\}$ є ідеал $L$. Тоді $[d, a] = \delta_a a$ для деякого $\delta_a \in F$.

Нехай $b \notin Fa$. Тоді

$$[d, a + b] = [d, a] + [d, b] = \delta_a a + \delta_b b.$$

Водночас

$$[d, a + b] = [d, a] + [d, b] = \delta_{a+b}(a + b) = \delta_{a+b} a + \delta_{a+b} b.$$

Оскільки елементи $a$, $b$ є лінійно незалежні, тоді $\delta_a = \delta_{a+b} = \delta_b$.

Нехай $B = \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ – базис $A$. Відповідно до доведеного вище, існує такий елемент $\delta \in F$, що $[d, b_\lambda] = \delta b_\lambda$ для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Якщо $c$ – довільний елемент $A$, тоді існує скінченна підмножина $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ й елементи $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in F$ такі, що $c = \gamma_1 b_{\lambda_1} + \ldots + \gamma_n b_{\lambda_n}$. Тоді

$$[d, c] = [d, \gamma_1 b_{\lambda_1} + \ldots + \gamma_n b_{\lambda_n}] = \gamma_1 [d, b_{\lambda_1}] + \ldots + \gamma_n [d, b_{\lambda_n}] =$$
$$= \delta\gamma_1 b_{\lambda_1} + \ldots + \delta\gamma_n b_{\lambda_n} = \delta c.$$

Нарешті, якщо $[d, a] = 0$, тоді з **наслідку 5.2** маємо, що $d \in \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(Fa)$, так що $[a, d] = 0$. Припустимо, що $[d, a] \neq 0$. Застосовуючи знову **наслідок 5.2**, маємо $d \notin \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(Fa)$, а з **леми 5.2** випливає, що $[a, d] = -[d, a]$. □

### 5.1.3 Структура гіперабелевих $T$-алгебр Лейбніца

**Твердження 5.2.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $\boldsymbol{Nil}(L)$ є абелевий, то він має ковимірність 1. Якщо $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий, то він має ковимірність не більше 2 і $\boldsymbol{Nil}(L) = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta\big(\boldsymbol{Nil}(L)\big)$, $E$ – це екстраспеціальна підалгебра, така що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

*Доведення.* Покладемо $D = \mathbf{Nil}(L)$. Кожен субідеал $S$ із $D$ є субідеал $L$. Оскільки $L$ є $T$-алгебра, $S$ є ідеалом $L$, тоді $S$ є ідеал $D$. Отже, $D$ є $T$-алгебра. **Теорема 5.1** містить опис структури $D$.

Якщо $D$ є абелевий, тоді з **наслідку 5.3** випливає, що $\mathbf{Ann}_L(D)$ має ковимірність 1. Оскільки $D$ є абелевим, то $D \leqslant \mathbf{Ann}_L(D)$. Припустимо, що $D \neq \mathbf{Ann}_L(D)$. Оскільки $L$ є гіперабелева, нетривіальний фактор $\mathbf{Ann}_L(D)/D$ містить нетривіальний абелевий ідеал $B/D$ із $L/D$. Із включення $B \leqslant \mathbf{Ann}_L(D)$ випливає, що $D \leqslant \zeta(B)$. Але в даному випадку $B$ є нільпотентний, це означає, що $B \leqslant D$, отже, приходимо до протиріччя. Воно доводить рівність $D = \mathbf{Ann}_L(D)$.

Припустимо тепер, що $D$ не є абелевий. Застосовуючи **теорему 5.1**, одержуємо, що $D = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(D)$ і $E$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$. Маємо, що $\zeta(D) = Z \oplus \zeta(E)$, де $\zeta(D)$ – абелевий ідеал $L$. Тоді з **наслідку 5.3** випливає, що $\mathbf{Ann}_L\big(\zeta(D)\big)$ має ковимірність 1. Крім того, $D/\zeta(D)$ є абелевий ідеал $L/\zeta(D)$, і, застосовуючи **наслідок 5.3**, одержуємо, що $L/\mathbf{Ann}_L\big(L/\zeta(D)\big)$ має вимірність 1. Покладемо $C = \mathbf{Ann}_L\big(L/\zeta(D)\big) \cap \mathbf{Ann}_L\big(\zeta(D)\big)$, тоді $C$

має ковимірність не більше двох, $D \leqslant C$. Більше того, $\zeta(D) \leqslant \zeta(C)$ і $D/\zeta(D) \leqslant \zeta\big(C/\zeta(D)\big)$. Якщо припустити, що $D \neq C$, тоді $C/D$ включає ненульовий абелевий ідеал $K/D$. Тоді $K$ є нільпотентнq, так що $K \leqslant D$, а отже, прийшли до протиріччя. Воно доводить рівність $D = C$, що і доводить результат.

□

Структура $T$-алгебри Лейбніца суттєво залежить від структури її ніль-радикала.

**Теорема 5.2.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L) = D$ є абелева, то $L = D \oplus V$, де $V = Fv$, $[v, v] = 0$, $[v, d] = d = -[d, v]$ для кожного елемента $d \in \boldsymbol{Nil}(L)$. Зокрема, $L$ є алгебра Лі.*

*Доведення.* За **твердженням 5.2** $\mathbf{dim}_F(L/D) = 1$. Нехай $u \in L \setminus D$. Оскільки $L/D$ абелева, то $[u, u] \in D$. Припустимо, що $b = [u, u] \neq 0$. Маємо $[b, u] = \big[[u, u], u\big] = 0$. Тоді з **леми 5.4** випливає, що $[d, u] = [u, d] = 0$ для кожного елемента $d \in D$. Звідси випливає, що $D \leqslant \zeta(L)$. Оскільки $A/D$ є абелева, $L$ – нільпотентна, отже, прийшли до протиріччя. Воно доводить, що $[u, u] = 0$. Звідси випливає, що підпростір $V = Fu$ – підалгебра $L$. Маємо $L = D \oplus V$. За **лемою 5.4** існує елемент $\gamma \in F$ такий, що $[u, d] = \gamma d$ для кожного елемента $d \in D$. Якщо припустити, що $\gamma = 0$, тоді з **леми 5.4** випливає, що $[d, u] = [u, d] = 0$ для кожного елемента $d \in D$. Звідси $D \leqslant \zeta(L)$, отже, знову приходимо до протиріччя. Воно доводить, що $\gamma \neq 0$.

Покладемо $v = \gamma^{-1}u$, тоді

$$[v, d] = [\gamma^{-1}u, d] = \gamma^{-1}[u, d] = \gamma^{-1}\gamma d = d.$$

Нарешті, оскільки $[d, d] = 0$ для кожного $d \in D$ та $[v, v] = 0$, для кожного елемента $x \in L$ маємо $[x, x] = 0$. Отже, $\mathbf{Leib}(L) = \langle 0 \rangle$, так що $L$ є алгебра Лі. □

**Лема 5.5.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є нільпотентна, а радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий, тоді $\boldsymbol{codim}_F\big(\boldsymbol{Nil}(L)\big) = 1$.*

*Доведення.* Нехай $D = \mathbf{Nil}(L)$. За **твердженням 5.2** $D = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(D)$ та $E$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$. Фактор $D/\zeta(E)$ – абелевий. Застосовуючи **наслідок 5.3**, одержуємо, що $\mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$ має ковимірність 1. Припустимо, що $D \neq \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$. Тоді $\mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)/D$ включає ненульовий абелевий ідеал $A/D$. Оскільки $D$ не є абелева, то $E \neq \langle 0 \rangle$. Тоді $0 \neq [a,a] \in \zeta(E)$ для кожного елемента $a \in E \setminus \zeta(E)$. Нехай $c = [a,a]$, тоді $\zeta(E) = Fc$. Виберемо елемент $u \in A \setminus D$. Згідно з вибором, маємо $[u,a]$, $[a,u] \in \zeta(E)$. Оскільки $c \in \mathbf{Leib}(L)$, то $[c,u] = 0$. Застосовуючи той факт, що $\zeta(E)$ – одновимірний ідеал $L$ і **лему 5.2**, одержуємо, що $[u,c] = 0$. Звідси випливає, що $\zeta(E) \leqslant \zeta(A)$. Оскільки $D/\zeta(E) \leqslant \zeta\big(A/\zeta(E)\big)$, тобто ідеал $A$ є нільпотентний. Але в даному випадку $A \leqslant \mathbf{Nil}(L)$, отже, приходимо до протиріччя. Воно доводить рівність $D = \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$, звідси випливає, що $\mathbf{dim}_F(L/D) = 1$. □

**Лема 5.6.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий, тоді $\boldsymbol{Nil}(L)$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a,a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$. Більше того, $\zeta\big(\boldsymbol{Nil}(L)\big) \leqslant \zeta(L)$.*

*Доведення.* Нехай $D = \mathbf{Nil}(L)$. За **твердженням 5.2** $D = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(D)$ і $E$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a,a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$. Оскільки $D$ не є абелева, то $E \neq \langle 0 \rangle$. Отже, $[E,E] = \zeta(E)$ має вимірність 1. Нехай $a \in E \setminus \zeta(E)$, тоді $c = [a,a] \neq 0$, а отже, $\zeta(E) = Fc$. Оскільки $c \in \mathbf{Leib}(L)$, $0 = [c,x]$ для кожного елемента $x \in L$. Те, що $\zeta(E)$ – ідеал і разом із **наслідком 5.2** означає, що $[x,c] = 0$ для кожного елемента $x \in L$.

Припустимо протилежне: нехай $Z \neq \langle 0 \rangle$. Застосовуючи **лему 5.5**, одержуємо, що $D$ має ковимірність 1. Виберемо елемент $u \in A \setminus D$. Із **леми 5.5** можна побачити, що $D = \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$. Звідси випливає, що $u \notin \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$. Водночас $Z \oplus \zeta(E)$ – абелевий ідеал $L$. Застосовуючи рівність $[u,c] = [c,u] = 0$ та **лему 5.4** одержуємо $[u,z] = [z,u] = 0$ для кожного елемента $z \in Z$.

Розглянемо тепер фактор $D/\zeta(E)$, що є абелевий ідеал $L/\zeta(E)$. Послуговуючись знову **лемою 5.4**, одержуємо, що $[x,u]$, $[u,x] \in \zeta(E)$ для кожного елемента $x \in D$. Іншими словами, $u \in \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$, отже, прийшли до протиріччя, що й доводить результат. □

**Теорема 5.3.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $\boldsymbol{char}(F) \neq 2$, то радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ є абелевий.*

*Доведення.* Припустимо протилежне: нехай $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Покладемо $D = \mathbf{Nil}(L)$. За **лемою 5.6** $D$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(D)$. Застосовуючи **лему 5.5**, одержуємо, що $D$ має ковимірність 1. Виберемо елемент $u \in A \setminus D$. Із **леми 5.5** можна побачити, що $D = \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$. Звідси випливає, що $u \notin \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$. Із **леми 5.4** випливає, що $[u, a] = \alpha a + \beta c$, $[a, u] = -\alpha a + \beta_1 c$ для деяких елементів $\alpha$, $\beta$, $\beta_1 \in F$. Маємо, що

$$\big[[u, a], a\big] = \big[u, [a, a]\big] - \big[a, [u, a]\big].$$

Далі

$$\big[[u, a], a\big] = [\alpha a + \beta c, a] = \alpha[a, a] = \alpha c,$$

$$\big[u, [a, a]\big] = [u, c] = 0,$$

$$\big[a, [u, a]\big] = [a, \alpha a + \beta c] = [a, \alpha a + \beta c] = \alpha[a, a] = \alpha c$$

Звідси випливає, що $\alpha c = -\alpha c$ або $2\alpha c = 0$. Оскільки $\mathbf{char}(F) \neq 2$, то $\alpha = 0$. Але в даному випадку $u \in \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(E)\big)$, отже, приходимо до протиріччя. □

**Лема 5.7.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $\boldsymbol{char}(F) = 2$. Якщо $L$ не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий, тоді $[a, d] = [d, a]$ для всіх $a, d \in \boldsymbol{Nil}(L)$.*

*Доведення.* Нехай $D = \mathbf{Nil}(L)$. За **лемою 5.6** $D$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(D)$. Нехай $0 \neq c \in \zeta(D)$, тоді $\zeta(D) = Fc$. Застосовуючи **лему 5.5**, одержуємо, що $D$ має ковимірність 1. Виберемо елемент $u \in L \setminus D$. Із **леми 5.5** маємо $D = \mathbf{Ann}_L(D/\zeta(D)\big)$. Звідси випливає, що $u \notin \mathbf{Ann}_L(D/\zeta(D)\big)$. Припустимо, що $w = [u, u] \neq 0$. Якщо $w \notin \zeta(D)$, то, застосовуючи рівність $[w, u] = \big[[u, u], u\big] = 0$ і **лему 5.4**, одержуємо, що $u \in \mathbf{Ann}_L(D/\zeta(D)\big)$, а це неможливо. Отже, $w \in \zeta(D)$, так що $w = \eta c$ для деякого елемента $\eta \in F$. Зокрема, $\zeta(D) \leqslant \zeta(L)$.

Застосування **леми 5.4** дає наступне: $[u, d] = [d, u] \in \alpha d + \zeta(D)$ для кожного елемента $d \in D \setminus \zeta(D)$, де $\alpha$ – фіксований ненульовий елемент $F$. Покладемо $y = \alpha^{-1}u$. Тоді $[u, d] = [d, u] \in d + \zeta(D)$ для кожного елемента

$d \in D \setminus \zeta(D)$. Більш конкретно: $[y, d] = d + \beta c$ і $[d, y] = d + \gamma c$ для деяких елементів $\beta$, $\gamma \in F$. Отже,

$$\big[d, [y, y]\big] = \big[[d, y], y\big] + \big[y, [d, y]\big].$$

Оскільки $[y, y] \in \zeta(L)$, то $\big[d, [y, y]\big] = 0$. Більше того,

$$\big[[d, y], y\big] = [d + \gamma c, y] = [d, y] = d + \gamma c,$$

$$\big[y, [d, y]\big] = [y, d + \gamma c] = [y, d] = d + \beta c.$$

Таким чином, $0 = d + \gamma c + d + \beta c = 2d + (\gamma + \beta)c = (\gamma + \beta)c$. Звідси випливає, що $\beta = \gamma$. Тому $[y, d] = [d, y]$.

Нехай $a$ – інший елемент $D$. Тоді $y + a \notin D$ і

$$[y + a, d] = [y, d] + [a, d] = d + \beta c + [a, d] = d + \beta_1 c,$$

$$[d, y + a] = [d, y] + [d, a] = d + \gamma c + [d, a] = d + \gamma_1 c.$$

Повторюючи викладені вище аргументи, одержуємо, що $\beta_1 = \gamma_1$. Разом із $\beta = \gamma$ маємо, що $[a, d] = [d, a]$. $\square$

Нехай $E$ – екстраспеціальна алгебра над полем $F$ характеристики 2 така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$ і $[a, b] = [b, a]$ для будь-яких елементів $a$, $b \in E$. Можемо пов'язати білінійну форму з екстраспеціальною алгеброю $E$ таким чином. Нехай $Z = \zeta(E)$, $V = E/Z$ і $c$ є фіксований ненульовий елемент $Z$. Визначимо відображення $\Phi : V \times V \to F$ за таким правилом: якщо $x$, $y \in L$, тоді $[x, y] \in Z$, так що $[x, y] = \alpha c$ для деякого елемента $\alpha \in F$. Покладемо $\Phi(x + Z, y + Z) = \alpha$. Це відображення визначено коректно. Дійсно, нехай $x_1$, $y_1$ є елементи $L$ такі, що $x_1 + Z = x + Z$, $y_1 + Z = y + Z$. Тоді $x_1 = x + c_1$, $y_1 = y + c_2$ для деяких елементів $c_1$, $c_2 \notin Z$. Тоді

$$[x_1, y_1] = [x + c_1, y + c_2] = [x, y] + [x, c_2] + [c_1, y] + [c_1, c_2] = [x, y].$$

Відображення $\Phi$ є білінійним. Тобто, нехай $x, y, u \notin L$, $[x, u] = \lambda c$, $[y, u] = \mu c$. Тоді:

$$[x + y, u] = [x, u] + [y, u] = \lambda c + \mu c = (\lambda + \mu)c,$$

так що

$$\Phi(x + Z + y + Z, u + Z) = \Phi(x + y + Z, u + Z) =$$

$$= (\lambda + \mu)c = \lambda c + \mu c = \Phi(x + Z, u + Z) + \Phi(y + Z, u + Z).$$

Аналогічним чином можна довести, що

$$\Phi(x + Z, y + Z + u + Z) = \Phi(x + Z, u + Z) + \Phi(x + Z, y + Z).$$

Нехай $\beta \in F$, тоді $[\beta x, y] = \beta[x, y] = \beta(\alpha c) = (\beta\alpha)c$. Звідси випливає, що

$$\Phi\big(\beta(x+Z), y+Z\big) = \Phi(\beta x + Z, y + Z) =$$
$$= (\beta\alpha)c = \beta(\alpha c) = \beta\Phi(x+Z, y+Z).$$

Аналогічно

$$\Phi\big(x+Z, \beta(y+Z)\big) = \beta\Phi(x+Z, y+Z).$$

Умова $[a, a] \neq 0$ для кожного $a \notin \zeta(E)$ випливає з того, що $\Phi(x, x) \neq 0$ для кожного ненульового елемента $x \in V$. Звідси випливає, що білінійна форма $\Phi$ є невироджена. Крім того, випливає, що обмеження $\Phi$ на довільний підпростір є невиродженим.

Умова $[a, b] = [b, a]$ для будь-яких елементів $a$, $b \in E$ випливає з того, що $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ для будь-яких елементів $x, y \in V$. Іншими словами, білінійна форма $\Phi$ є симетричною. Застосовуючи звичайні методи лінійної алгебри, можна довести, що якщо $U$ – скінченнопорожденний підпростір $V$, то векторний простір $V$ є пряма сума $U$ і його ортогонального доповнення. Застосовуючи цей результат, можемо довести, що $V$ має ортогональний базис $\{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, тобто $\Phi(v_\lambda, v_\mu) = 0$, коли $\lambda \neq \mu$.

Говоритимемо, що поле $F$ є **2-замкнене**, якщо рівняння $x^2 = a$ має розв'язок у полі $F$ для кожного елемента $a \neq 0$. Зазначимо, що кожне локально скінченне (зокрема, скінченне) поле характеристики 2 є 2-замкнене.

Розглянемо тепер випадок, коли поле $F$ є 2-замкнене. Припустимо, що $|\Lambda| > 1$. Нехай $\lambda, \mu \in \Lambda$, та $\lambda \neq \mu$. Тоді $[v_\lambda, v_\lambda] = \alpha \neq 0$, $[v_\mu, v_\mu] = \beta \neq 0$. Рівняння $x^2 = \beta^{-1}\alpha$ має розв'язок у полі $F$; нехай $\gamma$ – розв'язок даного рівняння. Покладемо $w = v_\lambda + \gamma v_\mu$, тоді

$$[w, w] = [v_\lambda, v_\lambda] + \gamma[v_\mu, v_\lambda] + \gamma[v_\lambda, v_\mu] + \gamma^2[v_\mu, v_\mu] =$$
$$= \alpha + \gamma^2\beta = 2\alpha = 0.$$

Із лінійної незалежності маємо, що $w \neq 0$. Але в той же час $[w, w] = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $\mathbf{dim}_F(V) = 1$.

Повернувшись до екстраспеціальної алгебри $E$, одержуємо, що $\mathbf{dim}_F\big(E/\zeta(E)\big) = 1$.

**Лема 5.8.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $\boldsymbol{char}(F) = 2$ і поле $F$ є 2-замкненим. Якщо $L$ не є нільпотентна і $\boldsymbol{Nil}(L)$ не абелевий, тоді $\boldsymbol{dim}_F\big(\boldsymbol{Nil}(L)\big) = 2$.*

**Теорема 5.4.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є нільпотентна, а радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий. Якщо поле $F$ є 2-замкнене та і $char(F) = 2$, тоді $L = (Fe \oplus Fc) \oplus Fv$, де*

$$[e, e] = c, [c, e] = [e, c] = [c, v] = [v, c] = 0,$$
$$[v, v] = 0, [v, e] = e + \gamma c = [e, v], \gamma \oplus F.$$

*Доведення.* Нехай $D = \mathbf{Nil}(L)$. За **лемою 5.6** $D$ є екстраспеціальна підалгебра, така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(D)$. Виберемо елемент $e \in L \setminus D$ і нехай $c = [e, e]$. Тоді $0 \neq c \in \zeta(D)$ і $\zeta(D) = Fc$. За **лемою 5.8** маємо $D = Fe + Fc$. Застосовуючи **лему 5.5**, можна побачити, що $D$ має ковимірність 1. Виберемо елемент $u \in L \setminus D$. Із **леми 5.5** можна побачити, що $D = \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(D)\big)$. Звідси випливає, що $u \notin \mathbf{Ann}_L\big(D/\zeta(D)\big)$. Припустимо, що $w = [u, u] \neq 0$. Застосовуючи аргументи з **леми 5.7**, одержуємо, що $w \in \zeta(D)$, так що $w = \eta c$ для деякого елемента $\eta \in F$.

Застосування **леми 5.4** дає $[u, e] = [e, u] \in \alpha e + \zeta(D)$, де $\alpha$ – це фіксований ненульовий елемент $F$. Покладемо $y = \alpha^{-1} u$. Тоді $[u, e] = [e, u] \in e + \zeta(D)$. Більш конкретно, $[y, e] = e + \beta c$ і $[e, y] = e + \gamma c$ для деяких елементів $\beta, \gamma \in F$. Таким чином, $\big[e, [y, y]\big] = \big[[e, y], y\big] + \big[y, [e, y]\big]$. Оскільки $[y, y] \in \zeta(L)$, то $\big[e, [y, y]\big] = 0$. Тоді

$$\big[[e, y], y\big] = [e + \gamma c, y] = [e, y] = e + \gamma c,$$
$$\big[y, [e, y]\big] = [y, e + \gamma c] = [y, e] = e + \beta c.$$

Таким чином, $0 = e + \gamma c + e + \beta c = 2e + (\gamma + \beta)c = (\gamma + \beta)c$. Звідси випливає, що $\beta = \gamma$. Отже, $[y, e] = [e, y]$.

Якщо $[y, y] = 0$, тоді $\langle y \rangle = Fy$, так що $L = D \oplus \langle y \rangle$. Припустимо, що $[y, y] \neq 0$. Тоді, як бачили раніше, $[y, y] = \nu c$ для деякого $0 \neq \nu \in F$. Якщо $F = \mathbb{F}_2$, тоді $[e, e] = c = [y, y]$. У даному випадку покладемо $v = e + y$. Якщо $F \neq \mathbb{F}_2$, тоді рівняння $x^2 = \nu$ має розв'язок $\lambda$ у полі $F$. Покладемо $b = \lambda e$, тоді

$$[b, b] = [\lambda e, \lambda e] = \lambda^2 [e, e] = \nu c = [y, y].$$

Покладемо $v = b + y$. Тоді

$$[v, v] = [b + y, b + y] = [b, b] + [b, y] + [y, b] + [y, y] =$$
$$= 2[b, b] + 2[b, y] = 0.$$

Якщо $[y, y] = 0$, тоді покладемо $v = y$, так що $L = D \oplus \langle v \rangle$, де $[v, v] = 0$. $\square$

## 5.2 Про ідеали й контраідеали в алгебрах Лейбніца

Одним із досить ефективних підходів до вивчення алгебр Лейбніца (особливо для алгебр Лейбніца, що мають нескінченну вимірність) полягає у розгляді алгебр Лейбніца, усі підалгебри яких мають деякі природні властивості. Він виявився досить результативним для алгебр Лі, у алгебрах Лейбніца його починають застосовувати тільки зараз. Так у праці [15] було досліджено алгебри Лейбніца, у яких підалгебри є алгебри Лі; і алгебри Лейбніца, підалгебри яких є абелеві. У [51] розглянуто алгебри Лейбніца, підалгебри яких є ідеали.

Із кожною підалгеброю $A$ алгебри Лейбніца $L$ природно пов'язані два ідеали: ідеал $A^L$, який є перетином усіх ідеалів, включаючи $A$ (який є ідеалом, породжений $A$); і ідеал $\mathbf{Core}_L(A)$, який є сумою всіх ідеалів, які містяться в $A$.

Підалгебру $A$ алгебри Лейбніца $L$ називають контраідеалом, якщо ідеал, породжений $A$, збігається з $L$.

Розглянемо алгебри Лейбніца, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали.

**Лема 5.9.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо $K$ – ідеал $L$, тоді кожна підалгебра $L/K$ є ідеалом або контраідеалом $L/L$.*

*Доведення.* Дійсно, нехай $A/K$ – довільна підалгебра$L/K$. Тоді $A$ або ідеал, або контраідеал $L$. Якщо $A$ є ідеал $L$, тоді $A/K$ – ідеал $L/K$. Якщо $A^L = L$, тоді $(A/K)^{L/K} = A^L/K = L/K$, тобто $A/K$ є контраідеал $L/K$. □

**Лема 5.10.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо $A$ є власний нетривіальний ідеал $L$, тоді кожна підалгебра $A$ є $L$-інваріантна. Зокрема, кожна підалгебра $A$ є ідеал.*

*Доведення.* Припустимо, що $K$ є нетривіальна підалгебра $A$, тоді $K^L \leqslant A \neq L$. Це доводить, що $K$ не може бути контраідеалом. Таким чином, $K^L = K$. Отже, кожна підалгебра $A$ є $L$-інваріантна. □

Нагадаємо означення. Нехай $L$ є алгебра Лейбніца над полем $F$ та $M$ є непорожня множина $L$, а $H$ є підалгебра $L$. Покладемо

$$\mathbf{Ann}_H^{left}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle\},$$
$$\mathbf{Ann}_H^{right}(M) = \{a \in H \mid [M, a] = \langle 0 \rangle\}.$$

Підмножину $\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{left}}(M)$ називають *лівим анулятором* або *лівим централізатором* $M$ у підалгебрі $H$.

Підмножину $\mathbf{Ann}_H^{\mathbf{right}}(M)$ називають *правим анулятором* або *правим централізатором* $M$ у підалгебрі $H$.

Перетин

$$\mathbf{Ann}_H(M) = \mathbf{Ann}_H^{\mathbf{left}}(M) \cap \mathbf{Ann}_H^{\mathbf{right}}(M) =$$
$$= \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle = [M, a]\}$$

називають *анулятором* або *централізатором* $M$ в підалгебрі $H$.

Неважко бачити, що всі ці підмножини є підалгебри $L$. Крім того, можна довести, що якщо $M$ є лівий ідеал $L$, то $\mathbf{Ann}_L^{left}(M)$ є лівий ідеал $L$, якщо $M$ є ідеал $L$, то $\mathbf{Ann}_L(M)$ є ідеал $L$ (див., наприклад, [37]).

Нехай $L$ – алгебра Лейбніца. Лінійне перетворення $f$ із $L$ називають *деривацією*, якщо $f([a, b]) = [f(a), b] + [a, f(b)]$ для будь-яких $a, b \in L$. Позначимо через $\mathbf{End}_F(L)$ множину всіх лінійних перетворень $L$. Тоді $\mathbf{End}_F(L)$ є асоціативна алгебра з операціями $+$ та $\circ$. Зазначимо, що $\mathbf{End}_F(L)$ є алгебра Лі з операціями $+$ та $[,]$, де $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ для будь-яких $f, g \in \mathbf{End}_F(L)$. Зауважимо, що множина всіх деривацій $\mathbf{Der}(L)$ є підалгебра алгебри Лі $\mathbf{End}_F(L)$ [37].

**Лема 5.11.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца над полем $F$, $K$ – абелевий ідеал $L$. Припустимо, що кожна підалгебра $K$ є ідеал $L$. Тоді $L/\mathbf{Ann}_L^{\boldsymbol{left}}(K)$ – абелева алгебра вимірності $\leqslant 1$. Більше того, для кожного елемента $x \in L$ існує однозначно визначений елемент $\alpha_x \in F$ такий, що $[x, u] = \alpha_x u$ для всіх $u \in K$.*

*Доведення.* Оскільки $K$ є абелева, тоді $K = \oplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де $K_\lambda$ – абелеві підалгебри вимірності 1, такі що $K_\lambda \cong_F F$, де $\lambda \in \Lambda$. Нехай $x \in L$, визначимо відображення $\mathfrak{l}_x \colon K \to K$ за правилом: $\mathfrak{l}_x(u) = [x, u]$, $u \in K$. Очевидно, що $\mathfrak{l}_x$ є лінійне відображення, тоді з того, що $\mathbf{dim}_F(K_\lambda) = 1$, одержуємо, що існують елементи $\alpha_{x_\lambda} \in F$ такі, що $\mathfrak{l}_x(u) = \alpha_{x_\lambda} u$ для кожного $u \in K_\lambda$. Нехай $\lambda, \mu \in \Lambda$ такі, що $\lambda \neq \mu$ і $\alpha_{x_\lambda} \neq \alpha_{x_\mu}$. Виберемо ненульовий елемент $u \in K_\lambda$,

$v \in K_\mu$. Оскільки підалгебра $F(u+v)$ є $L$-інваріантна, то, застосовуючи наведені вище аргументи, одержуємо, що $\mathfrak{l}_x(u+v) = \beta(u+v) = \beta u + \beta v$ для деяких $\beta \in F$. Водночас $\mathfrak{l}_x(u+v) = \mathfrak{l}_x(u) + \mathfrak{l}_x(v) = \alpha_{x_\lambda} u + \alpha_{x_\mu} v$. Таким чином, одержали, що $\alpha_{x_\lambda} u = \beta u$, $\alpha_{x_\mu} v = \beta v$. Оскільки елементи $u, v$ ненульові, випливає, що $\alpha_{x_\lambda} = \beta = \alpha_{x_\mu}$, отже, одержали протиріччя. Воно доводить, що існує елемент $\alpha_x \in F$ такий, що $\mathfrak{l}_x(u) = \alpha_x u$ для будь-якого $u \in K$. Оскільки множина $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{l}_x \mid x \in L\}$ є підалгебра алгебри Лі: $\mathbf{Der}(K)$. Зауважимо, що $\mathfrak{l}_x + \mathfrak{l}_y = \mathfrak{l}_{x+y}, l_{\alpha x} = \alpha \mathfrak{l}_x$, де $x, y \in L$ і $\alpha \in F$ (наприклад, див. [37]). Більше того,

$$\mathfrak{l}_{[x,y]}(u) = \big[[x,y],u\big] = \big[x,[y,u]\big] - \big[y,[x,u]\big] = [x, \alpha_y u] - [y, \alpha_x u] =$$
$$= \alpha_y [x,u] - \alpha_x [y,u] = \alpha_y \alpha_x u - \alpha_x \alpha_y u = 0;$$
$$[\mathfrak{l}_x, \mathfrak{l}_y](u) = \mathfrak{l}_x\big(\mathfrak{l}_y(u)\big) - \mathfrak{l}_y\big(\mathfrak{l}_x(u)\big) = \mathfrak{l}_x(\alpha_y u) - \mathfrak{l}_y(\alpha_x u) =$$
$$= \alpha_y \mathfrak{l}_x(u) - \alpha_x \mathfrak{l}_y(u) = \alpha_y \alpha_x u - \alpha_x \alpha_y u = 0,$$
$$\text{так, що} [\mathfrak{l}_x, \mathfrak{l}_y] = \mathfrak{l}_{[x,y]} = 0 = \mathfrak{l}_0.$$

Розглянемо відображення $\Theta\colon \mathfrak{S} \to F$, визначене за правилом: $\Theta(\mathfrak{l}_x) = \alpha_x$, де $\mathfrak{l}_x \in \mathfrak{S}$. Матимемо

$$\Theta(\mathfrak{l}_x + \mathfrak{l}_y) = \Theta(\mathfrak{l}_{x+y}) = \alpha_{x+y} = \alpha_x + \alpha_y = \Theta(\mathfrak{l}_x) + \Theta(\mathfrak{l}_y),$$
$$\Theta(\gamma \mathfrak{l}_x) = \Theta(\mathfrak{l}_{\gamma x}) = \alpha_{\gamma x} = \gamma \alpha_x = \gamma \Theta(\mathfrak{l}_x),$$
$$\Theta\big([\mathfrak{l}_x, \mathfrak{l}_y)]\big) = \Theta(\mathfrak{l}_0) = 0 = \alpha_x \alpha_y - \alpha_y \alpha_x = \big[\Theta(\mathfrak{l}_x), \Theta(\mathfrak{l}_y)\big].$$

Це доводить, що $\Theta$ є гомоморфізм абелевої алгебри Лі $\mathfrak{S}$ над $F$. Крім того, $\mathbf{Ker}(\Theta) = \{\mathfrak{l}_0\} = \langle 0 \rangle$, отже, $\Theta$ є ізоморфізм.

Природні два випадки. Якщо підалгебра $\mathfrak{S}$ – тривіальна, то лівий центр алгебри $L$ включає $K$, так що $\mathbf{Ann}_L^{left}(K)$. Водночас алгебра Лі $\mathfrak{S}$ ізоморфна фактор-алгебрі $L/\mathbf{Ann}_L^{left}(K)$ [41, Proposition 3.2]. Таким чином, ця фактор-алгебра абелева і має вимірність 1. □

**Лема 5.12.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца над полем $F$, $K$ є абелевий ідеал $L$. Припустимо, що кожна підалгебра $K$ є ідеал $L$. Тоді для будь-якого елемента $x \in L$ існує однозначно визначений елемент $\beta_x \in F$ такий, що $[u, x] = \beta_x u$ для всіх $u \in K$.*

*Доведення.* Оскільки $K$ є абелева, тоді $K = \oplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, де $K_\lambda$ є абелеві підалгебри вимірності 1, отже, $K_\lambda \cong_F F$, де $\lambda \in \Lambda$. Нехай $x \in L$, визначимо відображення $\mathfrak{r}_x\colon K \to K$ за правилом: $\mathfrak{r}_x(u) = [u, x]$, $u \in K$. Отже, $\mathfrak{r}_x$ є лінійне відображення. Тоді з того, що $\mathbf{dim}_F(K_\lambda) = 1$ одержуємо, що існує елемент $\beta_{x_\lambda} \in F$ такий, що $\mathfrak{r}_x(u) = \beta_{x_\lambda} u$ для будь-якого $u \in K_\lambda$. Нехай $\lambda, \mu \in \Lambda$ такі, що $\lambda \neq \mu$ і $\beta_{x_\lambda} \neq \beta_{x_\mu}$. Виберемо ненульові елементи $u \in K_\lambda$ та $v \in K_\mu$. Оскільки підалгебра $F(u+v)$ є $L$-інваріантна, застосовуючи наведені вище аргументи, маємо, що $\mathfrak{r}_x(u+v) = \gamma(u+v) = \gamma u + \gamma v$ для деяких $\gamma \in F$. Водночас $\mathfrak{r}_x(u+v) = \mathfrak{r}_x(u) + \mathfrak{r}_x(v) = \beta_{x_\lambda} u + \beta_{x_\mu} v$. Таким чином, одержуємо, що $\beta_{x_\lambda} u = \gamma u$ та $\beta_{x_\mu} v = \gamma v$. Оскільки елементи $u, v$ – ненульові, випливає, що $\beta_{x_\lambda} = \gamma = \beta_{x_\mu}$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що існує елемент $\beta_x \in F$ такий, що $\mathfrak{r}_x(u) = \beta_x u$ для будь-якого $u \in K$. □

**Лема 5.13.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца. Припустимо, що $L$ включає підалгебру, яка не є ідеал. Якщо кожна підалгебра $L$ є або ідеал, або контраідеалом, тоді $\mathbf{dim}_F\big(L/[L,L]\big) = 1$ та $L = A + [L,L]$, де $A$ є циклічний контраідеал і кожна підалгебра $[L,L]$ є ідеал $L$.*

*Доведення.* Нехай $C$ – підалгебра $L$, яка не є ідеал. Тоді $C$ є контраідеал $L$. Оскільки $L$ є розв'язна, тоді $D = [L,L] \neq L$. Якщо припустимо, що $C + D$ є власна підалгебра $L$, тоді з того факту, що $C + D$ є ідеалом $L$ і з огляду на **леми 5.10** одержимо, що кожна підалгебра $C + D$ є $L$-інваріантна. Зокрема, $C^L = C$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить рівність $L = C + D$.

Припустимо, що $C$ включає дві власні підалгебри $U$ і $V$ такі, що $C \cap D \leqslant U$ та $C \cap D \leqslant V$ і $C = U + V$. Тоді $D + U$ і $D + V$ є власні ідеали $L$. Застосовуючи **лему 5.10**, одержуємо, що кожна підалгебра $D + U$ (відповідно $D + V$) є $L$-інваріантна. Зокрема, підалгебри $U$ і $V$ – $L$-інваріантні. Тоді з рівності $C = U + V$ випливає, що $C$ є ідеал $L$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $C/(C \cap D)$ не є сума двох власних підалгебр. Оскільки $C/(C \cap D)$ є абелева, це означає, що $\mathbf{dim}_F\big(C/(C \cap D)\big) = 1$. Нехай $a$ є елемент із $C$ такий, що $C = Fa + (C \cap D)$, і позначимо через $A$ циклічну підалгебру, породжену $a$. Тоді $L = Fa + D = A + D$. Згідно із **лемою 5.10** кожна підалгебра $D$ є ідеал $L$. Зокрема, $C \cap D$ є ідеал $L$. Якщо припустимо, що $A$ не є контраідеал $L$, тоді $A$ є ідеал. Із рівності $C = A + (C \cap D)$ випливає, що $C$ є ідеал $L$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $A$ має бути контраідеалом. □

**Лема 5.14.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца над полем $F$, $K$ є ідеал $L$. Припустимо, що $\mathbf{dim}_F(K) = 1$. Якщо $x$ є елемент із $L$ такий, що $x \notin \mathbf{Ann}_L(K)$, але $[x,x] \in \mathbf{Ann}_L^{right}(K)$, тоді або $[x,u] = -[u,x]$, або $[u,x] = 0$ для кожного елемента $u \in K$.*

*Доведення.* Оскільки $K$ є ідеал, для кожного елемента $u \in K$, маємо $[x,u] = \alpha u$ і $[u,x] = \beta u$ для деяких елементів $\alpha$, $\beta \in F$. Із того, що $\mathbf{dim}_F(K) = 1$ випливає, що $K$ є абелева (див., наприклад, [37]). Оскільки $[x,x] \in \mathbf{Ann}_L^{right}(K)$, тоді $\big[u,[x,x]\big] = 0$. Водночас

$$\big[u,[x,x]\big] = \big[[u,x],x\big] + \big[x,[u,x]\big] = [\beta u, x] + [x, \beta u] =$$
$$= \beta\big([u,x] + [x,u]\big) = \beta(\beta u + \alpha u) = \beta(\beta + \alpha)u.$$

Звідси випливає, що або $\beta = 0$, або $\beta = -\alpha$. В останньому випадку, якщо $\alpha = 0$, матимемо, що $[x,u] = [u,x] = 0$, отже, одержуємо протиріччя з вибором елемента $x$. Отже, $\alpha \neq 0$. Якщо $\beta \neq 0$, тоді маємо, що $[x,u] = -[u,x]$. □

**Теорема 5.5.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо $L$ не є розв'язна, тоді $L$ є проста алгебра Лі або квазіпроста алгебра Лейбніца.*

*Доведення.* Якщо $L$ не містить нетривіальних власних ідеалів, тоді або $\mathbf{Leib}(L) = L$, або $\mathbf{Leib}(L)$ є тривіальний. Оскільки $\mathbf{Leib}(L)$ є абелевий, перший випадок неможливий. У другому випадку $L$ – алгебра Лі, більше того, $L$ є проста алгебра Лі.

Припустимо, що $L$ включає власний нетривіальний ідеал $K$. Це, зокрема, завжди виконується, якщо $L$ не є алгебра Лі і $L$ не є розв'язна. Згідно із **лемою 5.10**, кожна підалгебра $K$ є $L$-інваріантна. Із **леми 5.11** випливає, що фактор-алгебра $L/\mathbf{Ann}_L^{right}(K)$ абелева. Якщо припустимо, що $L \neq \mathbf{Ann}_L^{right}(K)$, тоді відповідно до доведеного вище кожна підалгебра $\mathbf{Ann}_L^{right}(K)$ є $L$-інваріантна, зокрема кожна підалгебра $\mathbf{Ann}_L^{right}(K)$ є ідеал. Звідси випливає, що $\mathbf{Ann}_L^{right}(K)$ є нільпотентний [51, Theorem A], так що $L$ має бути розв'язною, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $L = \mathbf{Ann}_L^{right}(K)$. Іншими словами, правий центр $L$ включає $K$, зокрема $K$ є абелевий ідеал.

Нехай $a$ – довільний елемент $K$, $x \in \mathbf{Ann}_L^{left}(K)$ і $y$ – довільний елемент $L$. Маємо, що

$$\big[a,[x,y]\big] = \big[[a,x],y\big] + \big[x,[a,y]\big].$$

Із того, що $K$ є ідеалом означає, що $[a,y] \in K$, більше того, із рівності $L = \mathbf{Ann}_L^{left}(K)$ випливає, що $\big[x,[a,y]\big] = 0$. Оскільки $[a,x] = 0$, тоді $\big[a,[x,y]\big] = 0$. Далі

$$\big[a,[y,x]\big] = \big[[a,y],x\big] + \big[y,[a,x]\big].$$

Оскільки $[a,y] \in K$, то $\big[[a,y],x\big] = 0$. Водночас $[a,x] = 0$ випливає, що $\big[a,[y,x]\big] = 0$. Іншими словами, $\mathbf{Ann}_L^{right}(K)$ також є ідеал $L$.

Припустимо, що $\mathbf{Ann}_L^{right}(K) \neq L$. Тоді існують елементи $a \in K$ і $x \in L$ такі, що $[a,x] \neq 0$. Оскільки $K$ є абелева, то $\langle a \rangle = Fa$. Із **леми 5.14** випливає, що в даному випадку $[a,x] = -[x,a]$. Але рівність $L = \mathbf{Ann}_L^{left}(K)$ означає, що $[x,a] = 0$ і звідси $[a,x] = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $L = \mathbf{Ann}_L^{right}(K)$. Іншими словами, центр $L$ включає кожен власний ідеал. Зокрема, із цього випливає що, фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ не включає нетривіальні власні ідеали. Це означає, що $L/\zeta(L)$ є проста алгебра Лі. Якщо припустимо, що $L \neq [L,L]$, тоді згідно із доведеним вище матимемо $[L,L] \leqslant \zeta(L)$. Отже, $L$ є розв'язна, а це неможливо. Дане протиріччя доводить, що $L = [L,L]$. Таким чином, $L$ є квазіпроста алгебра Лейбніца. □

**Твердження 5.3.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца. Припустимо також, що $L$ включає підалгебру, яка не є ідеал. Якщо похідний ідеал $[L,L]$ є абелевий і кожна підалгебра $L$ є або ідеал, або контраідеал, тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $L = D \oplus Fb$, *де* $[y,y] = 0 = [b,b]$ *та* $[b,y] = y = -[y,b]$ *для кожного* $y \in D$, *зокрема* $L$ *є алгебра Лі;*

(ii) $L = D \oplus Fb$, *де* $[y,y] = [y,b] = 0 = [b,b]$ *та* $[b,y] = y$ *для кожного* $y \in D$, *зокрема* $D = [L,L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(iii) $L = B \oplus A$, *де* $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1,a_1] = c_1$, $[c_1,a_1] = 0$, $[a_1,c_1] = c_1$ *і* $[b,b] = [b,a_1] = [b,c_1] = [c_1,b] = 0$, $[a_1,b] = b$ *для кожного* $b \in B$, *зокрема* $B \oplus Fc_1 = [L,L] = \mathbf{Leib}(L)$.

*Доведення.* За **лемою 5.13** $L = A + D$, де $A$ – циклічна підалгебра, $A$ – контраідеал і $D = [L,L]$, а кожна підалгебра $D$ є ідеал $L$. Нехай $a$ – це елемент $A$, який є породжуючим елементом підалгебри $A$. Тоді $[a,a] = c \in D$. Оскільки лівий центр включає ядро Лейбніца $L$, то $[c,a] = 0$.

Оскільки ідеал $D$ абелевий, підалгебра $\langle c \rangle$ співпадає із $Fc$, так що підпростір $Fc$ є ідеал $L$. Тоді $[a,c] \in Fc$, звідси випливає, що $A \leqslant Fa + Fc$, зокрема $\mathbf{dim}_F(A) \leqslant 2$.

Нехай $d$ – довільний ненульовий елемент $D$. Оскільки $D$ є абелевий, то $\mathbf{Ann}_L(d) \geqslant D$, зокрема $\mathbf{codim}_F\big(\mathbf{Ann}_L(d)\big) \leqslant 1$. Припустимо, що

$L = \mathbf{Ann}_L(d)$. Виберемо у векторному просторі $D$ підпростір $B$ такий, що $D = Fd \oplus B$. Оскільки $D$ є абелевий, то $B$ є підалгебра, тоді $B$ є ідеал $L$. Розглянемо фактор-алгебру $L/B$. Маємо $L/B = Fa + Fd$. Рівності $[a, d] = [d, a] = 0$ доводять, що фактор-алгебра $L/B$ є абелева, тобто $D \leqslant B$, отже, одержуємо протиріччя з вибором $B$. Воно доводить, що $\mathbf{Ann}_L(d) = D$. Оскільки $[a, a] \in D$, тоді **лема 5.14** доводить, що або $[a, d] = -[d, a]$, або $[d, a] = 0$.

Тут маємо два випадки: (I) $c = 0$ або (II) $c \neq 0$.

Розглянемо перший випадок (I). $A = Fa$. Тут можливі два підвипадки:

(Ia) $[a, d] = -[d, a]$

(Ib) $[d, a] = 0$.

Розглянемо підвипадок (Ia). Застосовуючи **леми 5.11** і **5.12**, одержуємо, що $[a, y] = -[y, a]$ для всіх $y \in D$. Нехай $x$ – довільний елемент $L$. Тоді $x = \lambda a + y$ для деяких елементів $\lambda \in F$, $y \in D$. Таким чином,

$$[x, x] = [\lambda a + y, \lambda a + y] =$$
$$= \lambda^2[a, a] + \lambda[a, y] + \lambda[y, a] + [y, y] =$$
$$= \lambda\big([a, y] + [y, a]\big) = 0.$$

Це доводить, що $L$ є алгебра Лі. Отже, одержуємо, що $L = D \oplus Fa$, де $[a, a] = 0$. Із **леми 5.11** випливає, що існує елемент $\alpha \in F$ такий, що $[a, y] = \alpha y$ для всіх $y \in D$. Більше того, як переконалися раніше, $\alpha \neq 0$. Покладемо $b = \alpha^{-1}a$, тоді $[b, b] = 0$ і $[b, y] = y$ для кожного елемента $y \in D$. Таким чином, одержуємо, що $L$ є алгебра типу (i).

Розглянемо підвипадок (Ib). Застосовуючи **лему 5.12**, одержуємо, що $[y, a] = 0$ для всіх елементів $y \in D$. **Лема 5.11** доводить, що існує елемент $\alpha \in F$ такий, що $[a, y] = \alpha y$ для всіх $y \in D$. Покладемо $b = \alpha^{-1}a$, тоді $[b, b] = 0$, $[y, b] = 0$ і $[b, y] = y$ для кожного елемента $y \in D$. Маємо

$$[b + y, b + y] = [b, b] + [b, y] + [y, b] + [y, y] = [b, y] = y.$$

Звідси випливає, що в даному випадку $[L, L] = \mathbf{Leib}(L)$. Таким чином, одержуємо, що $L$ є алгебра типу (ii).

Розглянемо випадок (II), у якому $[a, a] = c \neq 0$. Як бачили раніше, у цьому разі підалгебра $A = \langle a \rangle$ має вимірність 2. Тоді $A$ має базис $\{a_1, c_1\}$ такий, що $[a_1, a_1] = c_1$, $[c_1, a_1] = 0$ та або $[a_1, c_1] = 0$, або $[a_1, c_1] = c_1$ (див. [37]). Якщо припустимо, що $[a_1, c_1] = 0$, тоді, повторюючи вищезазначені аргументи, одержуємо протиріччя. Звідси $[a_1, c_1] = c_1$. Із **леми 5.11** випливає, що у даному випадку $[a_1, y] = y$, а із **леми 5.12** випливає, що $[y, a_1] = 0$ для всіх елементів $y \in D$. Як і раніше, одержуємо, що $[a_1 + y, a_1 + y] = y$, це доводить, що в даному випадку $\mathbf{Leib}(L) = D$. Виберемо у векторному просторі $D$ підпростір $B$ такий, що $D = Fc_1 \oplus B$. Оскільки $D$ є абелевим, то $B$ є підалгебра. Тоді $B$ є ідеал $L$ і маємо $L = B \oplus A$. Отже, одержуємо, що $L$ є алгебра типу (iii). □

**Твердження 5.4.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, похідний ідеал якої не є абелевий. Припустимо також, що $L$ включає підалгебру, яка не є ідеал. Якщо кожна підалгебра $L$ є або ідеал, або контраідеал, тоді $[L, L]$ є екстраспеціальна.*

*Доведення.* Оскільки $D$ не є абелевий, то кожна підалгебра $D$ є ідеал, тоді $D = E \oplus Z$, де $E$ – екстраспеціальна алгебра, така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і центр $D$ включає $Z$ [51, Theorem A].

Припустимо протилежне: нехай ідеал $Z$ нетривіальний. Як і раніше, бачимо, що $\mathbf{Ann}_L(d) = D$ для кожного елемента $d \in \zeta(D)$. Оскільки $[a, a] \in D$, $[a, a] \in \mathbf{Ann}_L(d)$ для кожного елемента $d \in \zeta(D)$. Нехай $e \in E \setminus \zeta(E)$ і $z = [e, e]$. Тоді $z \neq 0$ і $z \in \zeta(D)$. Із того, що $z \in \mathbf{Leib}(L)$ одержуємо, що $[z, a] = 0$. **Лема 5.11** показує, що в кожному випадку існує елемент $\alpha \in F$ такий, що $[a, y] = \alpha y$ для всіх $y \in \zeta(D)$. Зокрема, $[a, z] = \alpha z$. Із **леми 5.12** випливає, що існує елемент $\mu \in F$ такий, що $[y, a] = \mu y$ для всіх $y \in \zeta(D)$. Зокрема, $[z, a] = \mu z$. Водночас $[z, a] = 0$, так що $\mu = 0$ і $[y, a] = 0$ для всіх $y \in \zeta(D)$. Якщо припустимо, що $\alpha = 0$, тоді $\zeta(D) \leqslant \zeta(L)$. Розглянемо фактор-алгебру $L/E$. Із включення $(Z+E)/E \leqslant \zeta(L/E)$ випливає, що $L/E$ є нільпотентна класу нільпотентності не більше 2. Підалгебра $\langle a+E \rangle$ є власна. Кожна власна підалгебра нільпотентної алгебри є субідеал (**твердження 5.1**) . Тоді ідеал $\langle a + L \rangle^L$ є власний, із цього випливає, що $\langle a \rangle^L \neq L$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що $\alpha \neq 0$.

Покладемо $C = \zeta(E)$ і розглянемо фактор-алгебру $L/C$. **Лема 5.9** доводить, що кожна підалгебра $L/C$ є або ідеалом, або контраідеалом. Виберемо елемент $0 \neq d \in Z$. Маємо

$$[a + C, d + C] = [a, d] + C = \alpha d + C = \alpha(d + C).$$

Із **леми 5.10** випливає, що кожна підалгебра $D/C$ є ідеал. Тоді **лема 5.11** доводить, що $[a, x] + C = [a + C, x + C] = \alpha x + C$ для кожного елемента

$x \in D$. Зокрема, $[a, e] + C = \alpha e + C$, із цього випливає, що $[a, e] = \alpha e + z_1$ для деякого елемента $z_1 \in C$. Маємо

$$\alpha z = [a, z] = \big[a, [e, e]\big] = \big[[a, e], e\big] + \big[e, [a, e]\big] =$$
$$= [\alpha e + z_1, e] + [e, \alpha e + z_1] = \alpha[e, e] + \alpha[e, e] = 2\alpha z,$$

це доводить, що $\alpha z = 0$. Це означає, що $\alpha = 0$, оскільки $z \neq 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно підтверджує результат. □

**Твердження 5.5.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, похідний ідеал $[L, L]$ не є абелевий. Припустимо також, що $\zeta(L)$ є нетривіальний. Якщо $L$ включає підалгебру, яка не є ідеалом, і кожна підалгебра $L$ є або ідеал, або контраідеал. Маємо $\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, де $D$ має базис $\{z, b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[a, a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a, z] = [z, a] = 0$, $[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ і $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, де $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, зокрема $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$.*

*Доведення.* За **лемою 5.13** $L = A + D$, де $A$ – циклічна підалгебра, $A$ – контраідеал, тоді $D = [L, L]$ і кожна підалгебра $D$ є ідеал $L$. Нехай $a$ – елемент $A$, який породжує підалгебру $A$. Тоді $[a, a] = c \in D$. Оскільки лівий центр включає ядро Лейбніца $L$, тоді $[c, a] = 0$. Отже, $D$ не є абелевий, тоді кожна підалгебра $D$ є ідеал. Тоді $D = E \oplus Z$, де $E$ є екстраспеціальна алгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і центр $D$ включає $Z$ [51, Theorem A]. Із **твердження 5.4** випливає, що $D = E$.

Включення $\zeta(L) \leqslant \zeta(D)$ і те, що $\mathbf{dim}_F\big(\zeta(D)\big) = 1$ доводить, що $\zeta(L) = \zeta(D)$. Покладемо $C = \zeta(D)$ і зафіксуємо деякий елемент $d \in D \setminus C$. Тоді $z = [d, d] \in C$. Більше того, $z \neq 0$ і $[z, x] = 0$ для кожного елемента $x \in L$ [51]. У фактор-алгебрі $L/C$ її похідний ідеал $D/C$ є абелевий. Оскільки кожна підалгебра $D/C$ є ідеал, то $\langle d + C\rangle = F(d + C)$. Застосовуючи **лему 5.14**, одержуємо, що

$$\text{або } [a + C, d + C] = d + C = -[d + C, a + C],$$
$$\text{або } [a + C, d + C] = d + C \text{ та } [d + C, a + C] = C.$$

Зараз можемо застосувати **леми 5.11** і **5.12** одержуємо, що

$$\text{або } [a + C, y + C] = y + C = -[y + C, a + C],$$
$$\text{або } [a + C, y + C] = y + C \text{ та } [y + C, a + C] = C$$

для кожного елемента $y \in D$.

У першому випадку одержуємо, що $[a, y] = y + z_1$ і $[y, a] = -y + z_2$ для деяких елементів $z_1, z_2 \in C$.

У другому випадку одержуємо, що $[a, y] = y + z_3$ і $[y, a] = z_4$ для деяких елементів $z_3, z_4 \in C$.

Звісно, елементи $z_1, z_2, z_3, z_4$ залежать від $y$.

Припустимо, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$. Маємо

$$0 = [a, z] = \big[a, [d, d]\big] = \big[[a, d], d\big] + \big[d, [a, d]\big] =$$
$$= [d + \mu z, d] + [d, d + \mu z] = [d, d] + [d, d] = 2z.$$

І одержуємо протиріччя, яке доводить, що $\mathbf{char}(F) = 2$.

Тут можливі два випадки: (I) $[a, a] \in \zeta(L)$ або (II) $[a, a] \notin \zeta(L)$.

Розглянемо (I). Тут, у свою чергу природно виникають два варіанти:

(Ia) $[a, y] = y + z_1$, $[y, a] = -y + z_2$ для деяких елементів $z_1, z_2 \in C$;

(Ib) $[a, y] = y + z_3$, $[y, a] = z_4$ для деяких елементів $z_3, z_4 \in C$.

Розглянемо (Ia). Тоді для кожного елемента $y \in D$ матимемо

$$0 = \big[y, [a, a]\big] = \big[[y, a], a\big] + \big[a, [y, a]\big] =$$
$$= [-y + z_2, a] + [a, -y + z_2] = [-y, a] + [a, -y],$$

отже, $[a, y] = -[y, a]$. Із того, що $\mathbf{char}(F) = 2$ одержуємо, що $[a, y] = [y, a]$.

Нехай $\{z, y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ є деякий базис $D$. Нехай $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $\lambda \neq \mu$. Оскільки $C = [D, D]$, тоді $\big[[y_\lambda, y_\mu], a\big] = 0$. Водночас

$$\big[[y_\lambda, y_\mu], a\big] = \big[y_\lambda, [y_\mu, a]\big] - \big[y_\mu, [y_\lambda, a]\big] =$$
$$= [y_\lambda, -y_\mu + z_{2\mu}] - [y_\mu, -y_\lambda + z_{2\lambda}] = -[y_\lambda, y_\mu] + [y_\mu, y_\lambda],$$

і одержуємо, що $[y_\lambda, y_\mu] = [y_\mu, y_\lambda]$.

Нехай $V = D/C$. Визначимо відображення $\Phi\colon V \times V \to F$ за таким правилом: $\Phi(y + C, x + C) = \nu_{yx}$, де $\nu_{yx} z = [y, x]$, $x, y \in D$. Можна бачити, що $\Phi$ визначено коректно. Дійсно, $\Phi$ є білінійним. Оскільки $\Phi(x + C, x + C) \neq 0$ для будь-якого $x \notin C$, звуження $\Phi$ на кожен підпростір $V$ є невиродженим. Рівність $[y_\lambda, y_\mu] = [y_\mu, y_\lambda]$, де $\lambda, \mu \in \Lambda$, доводить, що $\Phi$ є симетрична білінійна форма. Тепер, застосовуючи стандартні аргументи лінійної алгебри, зауважимо, що векторний простір $V$ має ортогональний базис. Це означає, що $D$ має базис $\{z, e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[e_\lambda, e_\mu] = [e_\mu, e_\lambda]$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $[e_\lambda, e_\lambda] \neq 0$.

Маємо $[a, e_\lambda] = e_\lambda + z_\lambda$ для деяких елементів $z_\lambda \in C$. Покладемо $b_\lambda = e_\lambda + z_\lambda$, тоді $[a, b_\lambda] = [a, e_\lambda + z_\lambda] = [a, e_\lambda] + [a, z_\lambda] = b_\lambda$, де $\lambda \in \Lambda$.

Згідно із доведеним вище $[b_\lambda, a] = [a, b_\lambda] = b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Маємо $[b_\lambda, b_\mu] = [e_\lambda + z_\lambda, e_\mu + z_\mu] = [e_\lambda, e_\mu] = 0$, отже, прийшли до алгебри Лейбніца типу (i).

Розглянемо (Ib). Маємо $\big[d,[a,d]\big] = [d, d + z_3] = [d, d] = z \neq 0$.

Водночас

$$\big[d,[a,d]\big] = \big[[d,a],d\big] + \big[a,[d,d]\big] = [z_4, d] + [a, z] = 0,$$

отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що випадок (Ib) неможливий.

Розглянемо випадок (II). Покладемо $c = [a, a]$. Оскільки $c \notin \zeta(L) = \zeta(D)$, тоді $[c, c] \neq 0$ [51]. Утім $c \in \mathbf{Leib}(L)$, із цього випливає, що $[c, x] = 0$ для всіх $x \in L$. Зокрема, $[c, c] = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що випадок (II) є неможливий. □

**Твердження 5.6.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, похідний ідеал $[L, L]$ не є абелевий. Припустимо, що $L$ включає підалгебру, яка не є ідеал. Якщо кожна підалгебра $L$ є або ідеал, або контраідеал, тоді $\zeta(L)$ є нетривіальним.*

*Доведення.* Припустимо протилежне: нехай $\zeta(L) = \langle 0\rangle$. Згідно із **леми 5.13** $L = A + D$, де $A$ – циклічна підалгебра, $A$ – контраідеал, тоді $D = [L, L]$ і кожна підалгебра $D$ є ідеал $L$. Нехай $a$ – елемент $A$, який породжує підалгебру $A$. Тоді $[a, a] = c \in D$. Оскільки лівий центр включає ядро Лейбніца $L$, тоді $[c, a] = 0$. Тобто, $D$ не є абелевий, тоді кожна підалгебра $D$ є ідеал. Отже, $D = E \oplus Z$, де $E$ - це екстраспеціальна алгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і центр $D$ включає $Z$ [51, Theorem A]. Із **твердження 5.4** випливає, що $D = E$.

Покладемо $C = \zeta(D)$ і зафіксуємо деякий елемент $d \in D \setminus C$. Тоді $z = [d, d] \in C$. Більше того, $z \neq 0$ і $[z, x] = 0$ для кожного елемента $x \in L$ [51]. Із того, що $z \in \zeta(D)$ і $\mathbf{codim}_F(D) = 1$, одержуємо, що $a \notin \mathbf{Ann}_L(z)$. Водночас $[z, a] = 0$ випливає, що $[a, z] \neq 0$.

Природним чином виникають два випадки: (I) $[a, a] \in C$ або (II) $[a, a] \notin C$.

Розглянемо випадок (I). У фактор-алгебрі $L/C$ її похідний ідеал $D/C$ є абелевий. Оскільки кожна підалгебра $D/C$ є ідеал, тоді $\langle d + C\rangle = F(d + C)$. Якщо припустимо, що $[a + C, d + C] = C = [d + C, a + C]$, тоді, застосовуючи вищезазначені аргументи, одержуємо що підалгебра $\langle a\rangle$ не є контраідеал. Це доводить, що $a + C \notin \mathbf{Ann}_{L/C}(d + C)$. Застосовуючи **лему 5.14**, одержуємо, що

$$\text{або } [a + C, d + C] = d + C = -[d + C, a + C],$$
$$\text{або } [a + C, d + C] = d + C \text{ та } [d + C, a + C] = C.$$

Зараз можемо застосувати **леми 5.11** та **5.12** і з'ясувати, що

$$\text{або } [a+C, y+C] = y+C = -[y+C, a+C],$$

$$\text{або } [a+C, y+C] = y+C \text{ та } [y+C, a+C] = C$$

для кожного елемента $y \in D$.

У першому випадку одержуємо, що $[a, y] = y + z_{1y}$ і $[y, a] = -y + z_{2y}$ для деяких елементів $z_{1y}, z_{2y} \in C$.

У другому випадку одержуємо, що $[a, y] = y + z_{3y}$ і $[y, a] = z_{4y}$ для деяких елементів $z_{3y}, z_{4y} \in C$.

Дійсно, елементи $z_{1y}, z_{2y}, z_{3y}, z_{4y}$ залежать від $y$.

Таким чином, природно одержуємо такі два підвипадки:

(Ia) $[a, y] = y + z_{1y}$, $[y, a] = -y + z_{2y}$ для деяких елементів $z_{1y}, z_{2y} \in C$;

(Ib) $[a, y] = y + z_{3y}$, $[y, a] = z_{4y}$ для деяких елементів $z_{3y}, z_{4y} \in C$.

Розглянемо (Ia). Тоді одержуємо:

$$[a, z] = \big[a, [d, d]\big] = \big[[a, d], d\big] + \big[d, [a, d]\big] =$$
$$= [d + z_{1d}, d] + [d, d + z_{1d}] = [d, d] + [d, d] = 2z.$$

Оскільки $[a, z] \neq 0$, одержуємо, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$.

Якщо $x \in C$, тоді $x = \eta z$ для деякого $\eta \in F$. Звідси випливає, що

$$[a, x] = [a, \eta z] = \eta[a, z] = 2\eta z = 2x.$$

Далі маємо

$$0 = \big[d, [a, a]\big] = \big[[d, a], a\big] + \big[a, [d, a]\big] =$$
$$= [-d + z_{2d}, a] + [a, -d + z_{2d}] =$$
$$= [-d, a] + [a, -d] + [a, z_{2d}] =$$
$$= -d + z_{2d} - d - z_{1d} + 2z_{2d} = -2d - z_{1d} + 3z_{2d}.$$

Звідси випливає, що $2d \in C$. Беручи до уваги ту обставину, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$, одержуємо, що $d \in C$. Це протиріччя доводить, що випадок (Ia) неможливий.

Розглянемо (Ib). Застосовуючи зазначені раніше аргументи, знову одержуємо, що $[a, z] = 2z$, а звідси $[a, x] = 2x$ для будь-якого $x \in C$. Також одержуємо, що $\mathbf{char}(F) \neq 2$.

Далі

$$0 = \big[d, [a, a]\big] = \big[[d, a], a\big] + \big[a, [d, a]\big] = [z_{4d}, a] + [a, z_{4d}] = 2z_{4d}.$$

Оскільки $\mathbf{char}(F) \neq 2$, то одержуємо, що $z_{4d} = 0$, тобто $[d, a] = 0$. Зараз для елемента $\big[d, [a, d]\big]$ одержуємо з одного боку

$$\big[d, [a, d]\big] = [d, d + z_{3d}] = [d, d] = z,$$

а з іншого боку

$$\big[d, [a, d]\big] = \big[[d, a], d\big] + \big[a, [d, d]\big] = [0, d] + [a, z] = 2z.$$

Із цього випливає, що $z = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що випадок (Ib) є неможливим.

Розглянемо випадок (II). Покладемо $c = [a, a]$. Оскільки $c \notin \zeta(D)$ та $[c, c] \neq 0$. Але водночас $c \in \mathbf{Leib}(L)$, із цього випливає, що $[c, x] = 0$ для всіх $x \in L$. Зокрема, $[c, c] = 0$, отже, одержуємо протиріччя. Воно доводить, що випадок (II) – неможливий. Це останнє протиріччя і доводить результат. □

**Теорема 5.6.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) *$L$ – абелева;*

(ii) *$L = E \oplus Z$, де $E$ – екстраспеціальна підалгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і $Z \leqslant \zeta(L)$;*

(iii) *$L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для будь-якого елемента $y \in D$, зокрема $L$ є алгебра Лі;*

(iv) *$L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = [y, b] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y$ для кожного елемента $y \in D$, зокрема $D = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;*

(v) *$L = B \oplus A$, де $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1, a_1] = c_1, [c_1, a_1] = 0$, $[a_1, c_1] = c_1$ і $[b, b] = [b, a_1] = [b, c_1] = [c_1, b] = 0$, $[a_1, b] = b$ для кожного елемента $b \in B$, зокрема $B \oplus Fc_1 = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;*

(vi) *$\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, де $D$ має базис $\{z, b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[a, a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a, z] = [z, a] = 0$, $[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ і $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $\lambda \neq \mu$, зокрема $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$.*

*Доведення.* Якщо $L$ не включає нетривіальні контраідеали, тоді кожна підалгебра $L$ є ідеал. Отже, $L$ є алгебра Лейбніца типу (i) або (ii) [51, Theorem A]. Тому припускаємо, що $L$ включає власний контраідеал. Згідно із **лемою 5.13** $L = A + D$, де $A$ – циклічна підалгебра, $A$ –

контраідеал, тоді $D = [L, L]$ і кожна підалгебра $D$ є ідеал $L$. Якщо $D$ є абелева, тоді **твердження 5.3** доводить, що $L$ є алгебра Лейбніца типів (iii)-(v). Припустимо, що $D$ не є абелевий. Оскільки кожна підалгебра $D$ є ідеал, тоді $D = E \oplus Z$, де $E$ є екстраспеціальна алгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$, і центр $D$ включає $Z$ [51, Theorem A]. Із **твердження 5.4** випливає, що $D = E$. Із **твердження 5.6** випливає, що $\zeta(L)$ не є тривіальний, і **твердження 5.5** доводить, що $L$ є алгебра Лейбніца типу (vi). □

**Наслідок 5.4.** *Нехай $L$ є алгебрf Лі, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгебрf одного з таких типів:*

(i) *$L$ є простою;*

(ii) *$L$ є квазіпростою;*

(iii) *$L$ є абелевою;*

(iv) *$L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для кожного $y \in D$.*

## Висновки до розділу 5

Останній розділ дисертаційної роботи присвячений вивченню впливу деяких природних типів підалгебр на будову алгебр Лейбніца. Перша частина цього розділу містить досить детальний опис деяких класів T-алгебр Лейбніца. Друга частина присвячена дещо іншому питанню. Для ідеалів алгебри Лейбніца досить часто можна вказати такі підалгебри, які у певному розумінні протилежні до перших. Одними з таких виявились так звані контраідеали, які було визначено автором дисертації. Цілком логічним питанням є дослідження будови алгебр Лейбніца, в яких всі підалгебри є або ідеали, або контраідеали. Останні результати дисертаційного дослідження присвячені саме цьому питанню. Було одержано досить детальний опис таких алгебр Лейбніца.

Результати цього розділу анонсовано в [55, 81, 82] та опубліковано у праці [56].

# Висновки

У дисертаційній роботі було одержано нові результати, пов'язані з решітковими групами, решітковими кільцями й алгебрами Лейбніца.

Перший розділ присвячено огляду літератури, пов'язаною з тематикою дисертації.

У другому розділі визначено функцію $\chi(Y, \mathfrak{a})$ таким чином:

$$\chi(Y, \mathfrak{a})(x) = \begin{cases} \mathfrak{a}, & \text{якщо } x \in Y \\ \mathfrak{o}, & \text{якщо } x \notin Y. \end{cases}$$

Ввели добуток $\odot$:

$$(\mu \odot \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in G,\ yz=x} \big(\mu(y) \wedge \nu(z)\big).$$

Сформульовано та доведено його основні властивості:

(i) операція $\odot$ є асоціативна;

(ii) функція $\chi(e, \mathfrak{m})$ – одиничний елемент відносно операції $\odot$;

(iii) $\lambda \odot (\mu \vee \nu) = (\lambda \odot \mu) \vee (\lambda \odot \nu)$ і $(\mu \vee \nu) \odot \lambda = (\mu \odot \lambda) \vee (\nu \odot \lambda)$ для всіх функцій $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^G$;

(iv) якщо $x, y \in G, \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \lambda\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(y^{-1}x)$, зокрема, якщо $\mathfrak{a} = \bigvee_{x \in G} \lambda(x)$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \lambda\big)(x) = \lambda(y^{-1}x)$;

(v) $\big(\lambda \odot \chi(y, \mathfrak{a})\big)(x) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(xy^{-1})$, зокрема, якщо $\mathfrak{a} = \bigvee_{x \in G} \lambda(x)$, тоді $\big(\lambda \odot \chi(y, \mathfrak{a})\big)(x) = \lambda(xy^{-1})$ ;

(vi) якщо $x, y, u \in G$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(yu) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ і $\big(\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{o}$, якщо $x \neq yu$. Іншими словами, $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{b}) = \chi(yu, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$, зокрема, $\chi(y, \mathfrak{a}) \odot \chi(u, \mathfrak{a}) = \chi(yu, \mathfrak{a})$;

(vii) $\big(\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \lambda \odot \chi(x^{-1}, \mathfrak{a})\big)(y) = \mathfrak{a} \wedge \lambda(x^{-1}yx)$.

Наведено означення групової функції, розглянуто основні властивості групової функції та доведено її критерій, який полягає в такому: нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\gamma \in \mathfrak{L}^G$. Тоді $\gamma$ – це групова функція на $G$ тоді й тільки тоді, коли мають місце такі твердження:

(1) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \gamma(y)\big) \subseteq \gamma$ для будь-яких $x, y \in G$.

(2) $\chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \gamma$ для кожного $x \in G$.

Визначено нове означення: нехай $G$ – група і $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину $\Lambda$ із $G \times \mathfrak{L}$ називають *решітковою групою* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ і $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a})$, $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, тоді $(x^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$.

У даному розділі розглянуто деякі властивості решіткових груп, а саме:

**Властивість 1.** Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\mathfrak{S}$ – сімейство решіткових підгруп над $\mathfrak{L}$. Тоді перетин $\cap\mathfrak{S}$ є решіткова підгрупа.

**Властивість 2.** Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\Lambda$ – решіткова група. Тоді $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ є напівгрупа відносно операції $\wedge$ з одиницею $\mathfrak{e}(\Lambda) = \bigvee \mathfrak{C}_{\Lambda}(1)$ і нулем $\mathfrak{o}$. Крім того, $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(\Lambda)$ є головним нижній сегмент $\mathfrak{L}$, породжений $\mathfrak{e}(\Lambda)$;

**Властивість 3.** Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\Lambda$ – решіткова група. Тоді $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ є підгрупа групи $G$. Навпаки, для кожної підгрупи $H$ із $\mathbf{pr}_G(\Lambda)$ підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda \text{ і } x \in H\} = \mathbf{pr}_G^{-1}(H)$ є решіткова підгрупа $\Lambda$;

**Властивість 4.** Нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\Lambda$ – решіткова група. Тоді якщо $\mathfrak{M}$ нижній сегмент $\mathfrak{L}$, то $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ є решіткова підгрупа $\Lambda$. Зокрема, $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}^{-1}(\mathfrak{M})$ є решіткова група.

Обґрунтовано, чому саме так визначають добуток решіткових груп:

$$\Lambda\Gamma = \{(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda, (y, \mathfrak{b}) \in \Gamma\}.$$

Останній підрозділ другого розділу присвячено нормальній фазі підгрупі й доведено критерій нормальності: нехай $G$ – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\lambda, \kappa \colon G \to \mathfrak{L}$ – групові функції такі, що $\kappa \preceq \gamma$. Тоді нижченаведені твердження еквівалентні:

(i) $\kappa$ – нормальна підгрупа функції $\gamma$;

(ii) $\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\kappa\odot\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)\preceq\kappa$ для кожного елемента $x\in G$;

(iii) $\chi\big(x,\gamma(x)\big)\odot\chi\big(y,\kappa(y)\big)\odot\chi\big(x^{-1},\gamma(x)\big)\subseteq\kappa$ для будь-яких елементів $x,y\in G$;

(iv) $\chi(x,\mathfrak{a})\odot\chi(y,\mathfrak{b})\odot\chi(x^{-1},\mathfrak{a})\subseteq\kappa$ для будь-яких елементів $x,y\in G$, де $\mathfrak{a}\leqslant\gamma(x)$, $\mathfrak{b}\leqslant\kappa(y)$.

Одержано опис загальної структури фазі групи $\gamma$ для випадку, коли $\mathbf{Im}(\gamma)$ є скінченний.

У третьому розділі визначено функцію $\chi(Y,\mathfrak{a})$ так:

$$\chi(Y,\mathfrak{a})(x)=\begin{cases}\mathfrak{a}, & \textbf{якщо } x\in Y,\\ \mathfrak{m}_{\downarrow}, & \textbf{якщо } x\notin Y,\end{cases}$$

де $\mathfrak{m}_{\downarrow}$ – найменший елемент $\mathfrak{L}$.

Означення $L$-фазі кільця визначено таким чином: нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\kappa\in\mathfrak{L}^R$. Тоді функцію, якщо вона задовольняє такі умови:

**(RF 1)** $\kappa(x-y)\geqslant\kappa(x)\wedge\kappa(y)$ для всіх $(x,y)\in R$,

**(RF 2)** $\kappa(xy)\geqslant\kappa(x)\wedge\kappa(y)$ для всіх $(x,y)\in R$

називають *$L$-фазі кільцем* на $R$.

Ввели добуток $\oplus$:

$$(\mu\oplus\nu)(x)=\bigvee_{y,z\in R,\ y+z=x}\big(\mu(y)\wedge\nu(z)\big).$$

Сформульовано й доведено основні властивості цього добутку:

(i) операція $\oplus$ асоціативна;

(ii) операція $\oplus$ комутативна;

(iii) функція $\chi(0,\mathfrak{m}_{\downarrow})$ є нульовий елемент відносно операції $\oplus$;

(iv) $\lambda\oplus(\mu\vee\nu)=(\lambda\oplus\mu)\vee(\lambda\oplus\nu)$ для всіх функцій $\lambda,\mu,\nu\in\mathfrak{L}^R$;

(v) якщо $x,y\in R$ та $\mathfrak{a}\in\mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y,\mathfrak{a})\oplus\lambda\big)(x)=\mathfrak{a}\wedge\lambda(x-y)$. Зокрема, якщо $\mathfrak{a}=\bigvee_{x\in R}\lambda(x)$, тоді $\big(\chi(y,\mathfrak{a})\oplus\lambda\big)(x)=\lambda(x-y)$;

(vi) якщо $x, y, u \in R$ та $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$, тоді $\big(\chi(y,\mathfrak{a}) \oplus \chi(u,\mathfrak{b})\big)(y+u) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ і $\big(\chi(y,\mathfrak{a}) \oplus \chi(u,\mathfrak{b})\big)(x) = \mathfrak{m}_{\downarrow}$, якщо $x \neq y + u$. Іншими словами, $\chi(y,\mathfrak{a}) \oplus \chi(u,\mathfrak{b}) = \chi(y+u, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b})$. Зокрема, $\chi(y,\mathfrak{a}) \oplus \chi(u,\mathfrak{a}) = \chi(y+u,\mathfrak{a})$;

(vii) якщо $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{L}^R$ і $\lambda \leqslant \mu$, тоді $\lambda \oplus \nu \leqslant \mu \oplus \nu$.

Доведено точковий критерій: нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\kappa \in \mathfrak{L}^R$. Тоді $\kappa$ є $L$-фазі кільце на $R$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

(1) $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \oplus \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leq \kappa$ для всіх $x, y \in R$;

(2) $\chi\big(-x, \kappa(x)\big) \leq \kappa$ для кожного $x \in R$;

(3) $\chi\big(x, \kappa(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \leq \kappa$ для всіх $x, y \in R$.

Визначено нове означення: нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину $K$ із $R \times \mathfrak{L}$ називають *решітковим кільцем* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x,\mathfrak{a}) \in K$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(x,\mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x,\mathfrak{a}), (y,\mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x,\mathfrak{a}) - (y,\mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x,\mathfrak{a}), (y,\mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x,\mathfrak{a})(y,\mathfrak{b}) \in K$.

Розглянуто та доведено деякі властивості решіткових кілець.

**Властивість 1.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка та $K$ – решіткове кільце. Тоді $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$ – це напівгрупа відносно операції $\wedge$ з одиничним елементом $\mathfrak{e}(K) = \bigvee \mathfrak{C}_K(0)$ і нульовим $\mathfrak{m}_{\downarrow}$. Більше того, $\mathbf{pr}_{\mathfrak{L}}(K)$ – головний нижній сегмент $\mathfrak{L}$, породжений $\mathfrak{e}(K)$.

**Властивість 2.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Тоді $\mathbf{pr}_R(K)$ – підкільце $R$. І навпаки, для кожного підкільця $S$ із $\mathbf{pr}_R(K)$ підмножина $\{(x,\mathfrak{a}) \mid (x,\mathfrak{a}) \in K \text{ і } x \in S\}$ є решіткове підкільце $K$.

**Властивість 3.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Якщо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$ і $\mathfrak{M}$ є нижній сегмент $\mathfrak{L}$, тоді підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ – решіткове підкільце $K$. Зокрема, підмножина $\{(x, \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{b}) \in K \text{ і } \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}\}$ є решіткове підкільце $K$ для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$.

**Властивість 4.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Припустимо, що $S$ є підкільце $\mathbf{pr}_R(K)$ і $\mathfrak{M}$ – нижній сегмент $\mathfrak{L}$. Тоді підмножина $\{(x, \mathfrak{a}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in K, x \in S \text{ і } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ є решіткове підкільце $K$.

**Властивість 5.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Тоді для кожного елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ підмножина $K[\mathfrak{a}]$ є замкнена відносно операцій додавання і множення пар та є кільце за виключенням цих операцій. Зокрема, підмножина $\mathrm{H}(\mathfrak{a})$ є підкільце $R$ й ізоморфна до $K[\mathfrak{a}]$.

**Властивість 6.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Тоді якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ та $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, то $\mathrm{H}(\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{H}(\mathfrak{a})$.

**Властивість 7.** Нехай $R$ – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K$ – решіткове кільце. Тоді замкнена відносно додавання і множення підмножина $M$ із $K$ є просте кільце за обмеженням додавання та множення тоді й тільки тоді, коли $M \leqslant K[\mathfrak{a}]$ для деякого елемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ (отже, $M$ є просте підкільце $K[\mathfrak{a}]$). Крім того, $K$ – просте кільце за додаванням і множенням тоді й тільки тоді, коли $K = K[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$.

Детально розглянуто поняття гомоморфізму для решіткових кілець.

Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, та нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ (відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$) – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$. Тоді відображення $f \colon K \longrightarrow \Theta$ називають *гомоморфізмом*, якщо воно задовольняє такі умови:

$$f(u, \mathfrak{a}) + f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a}) + (v, \mathfrak{b})\big)$$

і

$$f(u, \mathfrak{a})f(v, \mathfrak{b}) = f\big((u, \mathfrak{a})(v, \mathfrak{b})\big)$$

для всіх $(u, \mathfrak{a}), (v, \mathfrak{b}) \in K$;

якщо $(z, \mathfrak{c}) \in \mathbf{Im}(f)$ і $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$, тоді $(z, \mathfrak{d}) \in \mathbf{Im}(f)$.

**Властивості гомоморфізму:**

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$, відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Тоді $f\big(O(K)\big) \leqslant O(\Theta)$. Більше того, якщо $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b})$ і $f(0_R, \mathfrak{c}) = (0_T, \mathfrak{d})$ і $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}$, тоді $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$. Зокрема, $f(0_R, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = (0_T, \mathfrak{m}_{\downarrow})$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$, відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм. Якщо $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$, і $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{b})$, тоді відображення $f^L\colon \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$, визначене за правилом $f^L(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, задовольняє такі умови:

  (i) $f^L(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = f^L(\mathfrak{a}) \wedge f^L(\mathfrak{b})$, зокрема, якщо $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, тоді $f^L(\mathfrak{a}) \leqslant f^L(\mathfrak{b})$;

  (ii) якщо $\mathfrak{b} \in \mathbf{Im}(f^L)$ та $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, тоді $\mathfrak{a} \in \mathbf{Im}(f^L)$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Якщо $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – елементи $\mathfrak{L}$ такі, що $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}, x \in R$ і $f(x, \mathfrak{a}) = (u, \mathfrak{c})$ і $f(x, \mathfrak{b}) = (v, \mathfrak{d})$, тоді $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{d}$. Зокрема, $f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) \in T[\mathfrak{m}_{\downarrow}]$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Якщо $x \in R$ і $f(x, \mathfrak{m}_{\downarrow}) = (u, \mathfrak{m}_{\downarrow})$, де $u \in T$, тоді відображення $f^R\colon R \longrightarrow T$ визначене за правилом $f^R(x) = u$, є простий кільцевий гомоморфізм;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Нехай $x \in R, \mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ та припустимо, що $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{c})$, де $\mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$. Тоді $f(x, \mathfrak{a}) = (v, \mathfrak{c})$ для деякого елемента $v \in T$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Тоді $f(x, \mathfrak{a}) - f(y, \mathfrak{b}) = f\big((x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b})\big)$ для всіх $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Тоді $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Тоді $\mathbf{Ker}(f)$ є решітковий ідеал $K$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Тоді $\mathbf{Ker}(f) = K[R_f]$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Нехай $x \in R$ та $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}, \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ і припустимо, що $f(x, \mathfrak{b}) = (y, \mathfrak{c})$ для деяких $y \in T, \mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$. Тоді $f(x, \mathfrak{a}) = (y, \mathfrak{d})$, де $f(0_R, \mathfrak{a}) = (0_T, \mathfrak{d})$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$, тоді $f(x, \mathfrak{a}) = \big(f^R(x), f^L(\mathfrak{a})\big)$;

- нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ є гомоморфізм. Тоді $f = \mathbf{p}(f^L) \circ \mathbf{s}(f^R)$.

Для гомоморфізму, який зберігає шари, доведено такий безпосередній аналог теореми про гомоморфізми для кілець.

**Теорема.** *Нехай $R$, $T$ – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \in \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм, який зберігає шари. Визначимо решіткові кільця $K_f \subseteq R/R_f \times \mathfrak{L}$ за правилом: пара $(x + R_f, \mathfrak{a}) \in K_f$ тоді й тільки тоді, коли $(x, \mathfrak{a}) \in K$. Тоді $\mathbf{Im}(f)$ є решіткове підкільце $\Theta$ і $\mathbf{Im}(f)$ є ізоморфний до $K_f$.*

Ця теорема доводить, що гомоморфізм $f$, який зберігає шари визначено за простим ідеалом $R_f$ кільця $R$, а $R_f$ знайдено за ядром $f$, який є решітковий ідеал $K$.

У четвертому розділі одержано опис алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями.

Алгебри Лейбніца вимірності 3 розв'язні, тому першим кроком розглянуто нільпотентні алгебри.

### Нільпотентні алгебри Лейбніца вимірності 3

**Теорема.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є алгебра Лі та $\mathbf{ncl}(L) = 3 = \mathbf{dim}_F(L)$, тоді $L$ має базис $\{a, b, c\}$ такий, що $[a, a] = b$, $[a, b] = c$, $[c, a] = [a, c] = [c, b] = [b, c] = [b, b] = [c, c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = \zeta^{left}(L) = [L, L] = Fb \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \gamma_3(L) = Fc$. Зокрема, $L$ є нільпотентна циклічна алгебра Лейбніца.*

**Теорема.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі, $\mathbf{dim}_F(L) = 3$, $\mathbf{ncl}(L) = 2$ і $L$ має елемент $b \notin \gamma_2(L)$ такий, що $[b, b] = 0$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = A \oplus B$, де $A$, $B$ – ідеали, $B = Fb$, $[b, b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fb \oplus Fc$.

II. $L = A \dashv B$, де $A = Fa \oplus Fc$ є циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$, $B$ – абелева підалгебра, $B = Fb$, $[b, b] = 0$ та $[a, b] = c$, $[b, a] = 0 = [b, c] = [c, b]$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$ і $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$.

III. $L = A \dashv B$, де $A = Fa \oplus Fc$ є циклічна нільпотентна підалгебра, $[a, a] = c$, $[c, a] = [a, c] = 0$, $B$ – абелева підалгебра, $B = Fb$, $[b, b] = 0$ і $[a, b] = c$, $[b, a] = \gamma c$, $\gamma \neq 0$, $[b, c] = [c, b] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$.

**Теорема.** *Нехай $L$ – нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі, $\mathbf{dim}_F(L) = 3$, $\mathbf{ncl}(L) = 2$ і $[d, d] \neq 0$ для кожного елемента $d \notin \gamma_2(L)$ такий, що $[b, b] = 0$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = A + B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $A \cap B = \zeta(L) = Fc$, $[a,a] = [b,b] = c$, $[c,a] = [a,c] = [c,b] = [b,c] = [a,b] = [b,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$, $\mathbf{char}(F) \neq 2$ і рівність $X^2 + 1 = 0$ не має розв'язків у $F$.

II. $L = A + B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $A \cap B = \zeta(L) = Fc$, $[a,a] = c$, $[b,b] = \rho c$, де $\rho$ – примітивний корінь із одиниці степені $|F| - 1$, $[c,a] = [a,c] = [c,b] = [b,c] = [a,b] = [b,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$, $\mathbf{char}(F) \neq 2$.

III. $L = A + B$, де $A$, $B$ – нільпотентні ідеали, $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $A \cap B = \zeta(L) = Fc$, $[a,a] = c = [a,b]$, $[b,b] = \eta c$, $[c,a] = [a,c] = [c,b] = [b,c] = [b,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = \zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$ і поліном $X^2 + X + \eta$ не має коренів у полі $F$.

Наступним кроком був розгляд випадку, коли $L$ не є нільпотентна. Було розглянуто алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є алгебрами Лі. Звідси випливає, що $\mathbf{Leib}(L) \neq \langle 0 \rangle$. Оскільки $\mathbf{Leib}(L)$ є абелевий ідеал, $L \neq \mathbf{Leib}(L)$. Отже, для $\mathbf{Leib}(L)$ одержуємо лише два випадки:

- $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$,
- $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$.

Розглянуто першу ситуацію, і одержано такий результат.

### Алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентними, із одновимірним ядром Лейбніца

**Теорема.** *Нехай $L$ не є нільпотентна алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі,* $\mathbf{dim}_F(L) = 3$ *та* $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$. *Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = A \oplus B$, де $A$, $B$ – ідеали, $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A$ – циклічна підалгебра, $A = Fa \oplus Fc$, де $[a,a] = c = [a,c]$, $[c,a] = [c,b] = [b,c] = [a,b] = [b,a] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fb$.

II. $L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,b] = c$, $[c,a] = [c,b] = [b,c] = [b,a] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = Fc$, $\zeta^{left}(L) = Fb \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.

III. $L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[b,a] = [b,c] = c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = [a,b] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = Fb$, $\zeta(L) = \langle 0 \rangle$.

IV. $L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,b] = a = -[b,a]$, $[b,c] = -2c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \langle 0 \rangle$.

V. $L = A \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна підалгебра, $[a,a] = c$, $[a,c] = 0$, $[a,b] = a + \gamma c$, $\gamma \in F$, $[b,a] = -a + \gamma c$, $[b,c] = -2c$, $[c,a] = [c,b] = [c,c] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fc$, $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = \langle 0 \rangle$ як тільки $\mathbf{char}(F) \neq 2$ і $\zeta^{right}(L) = \zeta(L) = Fc$ як тільки $\mathbf{char}(F) = 2$.

Розглянуто і другу ситуацію, а саме, коли $L$ не є нільпотентна і не є циклічна, та $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$.

Тоді $\mathbf{dim}_F\big(L/\mathbf{Leib}(L)\big) = 1$. Зокрема, $L/\mathbf{Leib}(L)$ є абелева.

### Алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентними, із двовимірним ядром Лейбніца

**Теорема.** *Нехай $L$ не є нільпотентна і не є циклічна алгебра Лейбніца вимірності 3 над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є алгебра Лі та $\mathbf{dim}_F\big(\mathbf{Leib}(L)\big) = 2$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = A \dashv D$, де $D = Fd$, $[d,d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна нільпотентна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,d] = d$, $[c,a] = [c,c] = [c,d] = [d,c] = [d,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.

II. $\mathbf{Char}(F) \neq 2$, $L = A \dashv D$, де $D = Fd$, $[d,d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна нільпотентна підалгебра, $[a,a] = c = [a,c]$, $[a,d] = c + 2d$, $[c,a] = [c,d] = [c,c] = [d,c] = [d,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = \langle 0 \rangle$.

## Циклічні алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентними

**Теорема.** *Нехай $L$ не є нільпотентна циклічна алгебра Лейбніца вимірності 3 над полем $F$. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

I. $L = D \dashv A$, де $D = Fd$, $[d,d] = 0$, $A = Fa \oplus Fc$ – циклічна нільпотентна підалгебра, $[a,a] = c$, $[a,c] = 0$, $[a,d] = \delta d$, $0 \neq \delta \in F$, $[c,a] = [c,d] = [c,c] = [d,c] = [d,a] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta(L) = \zeta^{right}(L) = Fc$.

II. $L = D \dashv B$, де $B = Fb$, $[b,b] = 0$, $D = Fd \oplus Fc$ – абелева підалгебра, $[d,d] = [d,c] = [c,d] = [c,c] = 0$, $[b,c] = d$, $[b,d] = \gamma d + \delta d$, $0 \neq \gamma$, $\delta \in F$, $[c,b] = [d,b] = 0$. Більше того, $\mathbf{Leib}(L) = [L,L] = \zeta^{left}(L) = Fd \oplus Fc$, $\zeta^{right}(L) = Fb$, $\zeta(L) = \langle 0 \rangle$.

Зауважимо, що в деяких випадках структура алгебр Лейбніца істотно залежала від характеристики поля, в інших – від можливості розв'язання конкретних рівнянь у полі.

П'ятий розділ присвячено алгебрам Лейбніца, усі субідеали яких є ідеалами, й ідеалам та контраідеалам в алгебрах Лейбніца.

Розглянуто структуру $T$-алгебр Лейбніца, що є алгебрами Бера.

**Теорема.** *Нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ – це алгебра Бера, то кожна підалгебра $L$ є абелева або $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$ і $E$ – екстраспеціальна підалгебра така, що $[a,a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

Детально розглянуто питання ануляторів одновимірних ідеалів в алгебрах Лейбніца. Одержано такі результати:

- нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$, тоді $[a,a] = 0$, $\big[a,[d,d]\big] = 0$ для кожного елемента $d \in L$ і $\mathbf{codim}_F\big(\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A)\big) = 1 = \mathbf{codim}_F\big(\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A)\big)$;

- нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$, тоді
$$\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A);$$

- нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – ідеал $L$. Якщо $A = Fa$ для деякого елемента $a \in A$ та $d \notin \mathbf{Ann}_L(A)$, тоді $[a, d] = -[d, a]$;

- нехай $L$ – алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$, $B$ – ідеали $L$. Припустимо, що $A = Fa$, $B = Fb$ для деяких елементів $a$, $b \in A$ і елементи $a$, $b$ є лінійно незалежні. Якщо $\mathbf{Ann}_L(A) \neq \mathbf{Ann}_L(B)$, тоді $A \oplus B$ містить підалгебру, яка не є ідеал;

- нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – абелевий ідеал $L$. Тоді $\mathbf{Ann}_L^{\mathbf{right}}(A) = \mathbf{Ann}_L^{\mathbf{left}}(A) = \mathbf{Ann}_L(A)$ і $\mathbf{Ann}_L(A)$ має ковимірність 1;

- нехай $L$ є $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$ і $A$ – абелевий ідеал $L$. Тоді для кожного елемента $d \in L$ існує елемент $\delta \in F$ такий, що $[d, a] = \delta a = -[a, d]$ для кожного елемента $a \in A$.

З'ясовано, що структура $T$-алгебри Лейбніца суттєво залежить від структури її ніль-радикала.

**Теорема.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $L$ не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L) = D$ абелевий, то $L = D \oplus V$, де $V = Fv$, $[v, v] = 0$, $[v, d] = d = -[d, v]$ для кожного елемента $d \in \boldsymbol{Nil}(L)$. Зокрема, $L$ є алгебра Лі.*

**Теорема.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Якщо $\boldsymbol{char}(F) \neq 2$, то радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ є абелевий.*

**Теорема.** *Нехай $L$ – гіперабелева $T$-алгебра Лейбніца над полем $F$. Припустимо, що $L$ не є нільпотентна, а радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевий. Якщо поле $F$ є 2-замкненим і $char(F) = 2$, тоді $L = (Fe \oplus Fc) \oplus Fv$, де*

$$[e, e] = c, [c, e] = [e, c] = [c, v] = [v, c] = 0,$$

$$[v, v] = 0, [v, e] = e + \gamma c = [e, v], \gamma \oplus F.$$

Одержано опис алгебр Лейбніца, які не є алгебрами Лі, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали, а також одержано опис алгебр Лі, усі підалгебри яких є або ідеали або контраідеали, з точністю до простих алгебр Лі.

**Теорема.** *Нехай $L$ є алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо $L$ не є розв'язна, тоді $L$ – проста алгебра Лі або квазіпроста алгебра Лейбніца.*

**Теорема.** *Нехай $L$ є розв'язна алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $L$ є абелева;

(ii) $\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, де $D$ має базис $\{z, b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[a,a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a,z] = [z,a] = 0$, $[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ і $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $\lambda \neq \mu$, зокрема, $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$;

(iii) $L = D \oplus Fb$, де $[y,y] = 0 = [b,b]$, $[b,y] = y = -[y,b]$ для будь-якого елемента $y \in D$, зокрема $L$ є алгебра Лі;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y,y] = [y,b] = 0 = [b,b]$, $[b,y] = y$ для кожного елемента $y \in D$, зокрема $D = [L,L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(v) $L = B \oplus A$, де $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1, a_1] = c_1, [c_1, a_1] = 0$, $[a_1, c_1] = c_1$ і $[b,b] = [b, a_1] = [b, c_1] = [c_1, b] = 0$, $[a_1, b] = b$ для кожного елемента $b \in B$, зокрема $B \oplus Fc_1 = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(vi) $L = E \oplus Z$, де $E$ є екстраспеціальна підалгебра така, що $[e,e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і $Z \leqslant \zeta(L)$.

**Наслідок.** *Нехай $L$ є алгебра Лі, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді $L$ є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $L$ є простою;

(ii) $L$ є квазіпростою;

(iii) $L$ є абелевою;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y,y] = 0 = [b,b]$, $[b,y] = y = -[y,b]$ для кожного $y \in D$.

Дисертаційна робота має суто теоретичний характер, а її результати можливо застосувати в різних розділах сучасної алгебри.

# Список використаних джерел

[1] Abramovskii, I.N., Kargapolov, M.I.: Finite groups with the property of transitivity for normal subgroups. Usp. Mat. Nauk. **13**, 232–243 (1958).

[2] Ayupov, S.A., Omirov, B.A.: On 3-dimensional Leibniz algebras. Uzbek. Math. Zh. **1**, 9–14 (1999).

[3] Albeverio, S., Omirov, B.A., Rakhimov, I.S.: Varieties of nilpotent complex Leibniz algebras of вимірність less than five. Comm. Algebra **33**(5), 1575–1585 (2005).

[4] Amayo, R.K., Stewart, I.: Infinite dimensional Lie algebras. Noordhoff Intern. Publ., Leyden (1974).

[5] Bloh, A.M.: On a generalization of the concept of Lie algebra. Dokl. Akad. Nauk SSSR. **165**(3), 471–473 (1965).

[6] Bloh, A.M.: Cartan-Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR. **175**(8), 824–826 (1967).

[7] Bloh, A.M.: A certain generalization of the concept of Lie algebra. Algebra and number theory. Moskov. Gos. Ped. Inst. Uchen. Zap. **375**, 9–20 (1971).

[8] Barnes, D.: Some theorems on Leibniz algebras. Comm. Algebra. **39**(7), 2463–2472 (2011).

[9] Barnes, D.: Schunck Classes of soluble Leibniz algebras. Comm. Algebra. **41**(11), 4046–4065 (2013).

[10] Биркгоф, Г.: Теория решеток. Наука, Москва (1984).

[11] Butterfield, J., Pagonis, C.: From Physics to Philosophy. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).

[12] Best, E., Taussky, O.: A class of groups. P. Roy. Irish Acad. A. **47**, 55–62 (1942).

[13] Chaboksavar, M., De Giovanni, F.: Groups in which every finite subnormal subgroup is normal. Ric. Mat. **64**(2), 331–338 (2015).

[14] Casas, J.M., Insua, M.A., Ladra, M., Ladra, S.: An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras. Linear Algebra Appl. **436**(9), 3747-3756 (2012).

[15] Chupordya, V.A., Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya.,: On some “minimal” Leibniz algebras. J. Algebra Appl. **16**(2), 1750082 (16 p.) (2017).

[16] Demir, I., Misra, K.C., Stitzinger, E.: On some structures of Leibniz algebras. Recent Advances in Representation Theory, Quantum Groups, Algebraic Geometry, та Related Topics, Contemporary Mathematics, **623**, 41–54 (2014).

[17] Lie Theory and its applications in physic. IX International workshop. Editor V. Dobrev, Springer, Tokyo (2013).

[18] Noncommutative Structures in Mathematics and Physics. Proceedings of the NATO advanced research workshop. Editors S. Duplij, J. Wess, Springer, Kiev (2001).

[19] Ebert, G., Bauman, S.: A note of subnormal and abnormal chains. J. Algebra. **36**(2), 287–293 (1975).

[20] Emaldi, E.: Sui T-gruppi loclmente finiti. Atti Istit. Lombardo. **121**, 55–60 (1987).

[21] Emaldi, E.: Confronto di alcule classi gruppali. Riv. Mat. Pura Appl. **5**, 33–39 (1989).

[22] Fattahi, A.: Groups with only normal and abnormal subgroups. J. Algebra. **28**(1), 15–19 (1974).

[23] Fransiosi, S., De Giovanni, F.: Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal. J. Algebra. **96**(2), 566–580 (1985).

[24] De Falco, M., De Giovanni, F., Musella, C., Sysak, Y.P.: Groups of infinite rank in which normality is a transitive relation. Glasgow Math. J., **56**(2), 387–393 (2014).

[25] De Falco, M., Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya.: Groups with only abnormal and subnormal subgroups. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. **46**, 435–442 (1998).

[26] Гретцер, Г.: Общая теория решеток. Мир, Москва (1981).

[27] Goguen, J.A.: L-Fuzzy Sets. Journal of Math. Analysis and Applications. **18**, 145–174 (1967).

[28] Gavron, P.V., Kolotilina, N.Yu.: On subgroups of T-groups. Zap. Nauchn. Sem. LOMI. **103**, 62–65 (1980).

[29] Gejn, A., Mukhin, Yu.: Complements to subalgebras of Lie algebras. Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. **12**(2), 24–48 (1980).

[30] De Giovanni, F., Trombetti, M.: A note on groups whose proper large subgroups have a transitive normality relation. B. Aust. Math. Soc. **95**(1), 38–47 (2017).

[31] Gaschutz, W.: Gruppen in denen das Normalreilersein transitir ist. J. Reine. Angew. Math. **198**, 87–92 (1957).

[32] Heineken, H., Beidleman, J.C. T-groups, polycyclic groups, and finite quotients. Arch. Math. **103**(1), 21–26 (2014).

[33] Heineken, H.: Groups with restriction on their infinite subnormal subgroups. P. Edinburg Math. Soc. **31**(2), 231–241 (1988).

[34] Heineken, H., Lennox, J.C.: Subgroups of finite index in T-groups. Boll. Un. Mat. Ital. **6**, 829–841 (1985).

[35] Jacobson, N.: Lie algebras. John Wiley: New York, (1962).

[36] Kurdachenko, L.A., Grin, K.O., Turbay, N.A.: On normalizers in fuzzy groups. Algebra and Discrete Mathematics., **15**, 23–36 (2013).

[37] Kirichinko, V.V., Kurdachenko, L.A., Pypka, A.A., Subbotin, I.Ya.,: Some aspects of Leibniz algebra theory. Algebra and Discrete Mathematics, **24**, 1–33 (2017).

[38] Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S.: Lattice groups. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, 3 – 6 June 2015, 18.

[39] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice groups. Algebra Discrete Math. **20**(1), 126–141 (2015).

[40] Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S., Subbotin, I.Ya.: On some algebraic structures connected with groups and lattices. International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd, Odessa, 20 – 27 August 2015, 57.

[41] Kurdachenko, L.A., Otal, J., Pypka, A.A.: Relationships between factors of canonical central series of Leibniz algebras, Eur. J. Math. **2**(2), 565–577 (2016).

[42] Kurdachenko, L.A., Otal, J., Russo, A., Vincenzi, G.: Groups whose all subgroups are ascendant or self-normalizing. Cent. Eur. J. Math. **9**(2), 420–432 (2011).

[43] Kurdachenko, L.A., Otal, J., Subbotin, I.Ya.: On permutable fuzzy subgroups. Serdica Mathematical Journal. **39**, 83–102 (2013).

[44] Курдаченко, Л.А., Пипка, О.О., Семко, М.М.: Періодичні групи, циклічні підгрупи яких є зростаючими або майже самонормалізовними. Доповіді НАН України. **10**, 17–20 (2015).

[45] Kurdachenko, L.A., Pypka, A.A., Semko, N.N.: The groups whose cyclic subgroups are either ascendant or almost self-normalizing. Algebra Discrete Math. **21**(1), 111–127 (2016).

[46] Kurdachenko, L.A., Pypka, A.A., Subbotin, I.Ya.: On the structure of groups, whose subgroups are either normal or core-free. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2019, 4, 17–20.

[47] Kurdachenko, L.A., Smith, H.: Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing. J. Pure Appl. Algebra. **196**(2–3), 271–278 (2005).

[48] Курдаченко, Л.А., Субботин, И.Я., Чупордя, В.А.: О некоторых группах, близких к нильпотентным. Фундаментальная и прикладная математика. **14**(6), 121–134 (2008).

[49] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Ermolkevich, T.V.: Groups whose finitely generated subgroups are either permutable or pronormal. Asian. Eur. J. Math. **4**(3), 459–473 (2011).

[50] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Ermolkevich, T.V.: On non-periodic groups whose finitely generated subgroups are either permutable or pronormal. Math. Bohemica. **138**(1), 61–74 (2013).

[51] Kurdachenko, L.A., Semko, N.N., Subbotin, I.Ya.: The Leibniz algebras whose subalgebras are ideals. Open Math. **15**(1), 92–100 (2017).

[52] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings. The conference Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, 19 – 22 December 2016, 31.

[53] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings: an interpretation of $L$-fuzzy rings as habitual algebraic structures. Algebra Discrete Math. **24**(2), 274–296 (2017).

[54] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras, whose subideals are ideals. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. **9**, 15–19 (2017). doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.015

[55] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras whose subideals are ideals. 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko, Kyiv, 3 – 7 July 2017, 70.

[56] Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: The Leibniz algebras whose subideals are ideals, J. Algebra Appl. **17**(8), 1850151 (15 p.) (2018). doi.org/10.1142/S0219498818501517

[57] Loday, J.-L.: Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbras de Leibniz. L'Enseignement Mathèmatique **39**, 269–293 (1993).

[58] Loday, J.-L.: Cyclic homology. Grundlehren der Math. Wissenschaften. **301**, 2nd ed., Springer, Verlag, Berlin (1998).

[59] Legovini, P.: Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali. Rend. Semin. Mat. U. Pad. **58**, 129–147 (1977).

[60] Legovini, P.: Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali – II. Rend. Semin. Mat. U. Pad. **65**, 47–51 (1981).

[61] Mordeson, J.N., Nair, P.S.: Fuzzy Mathematics. Springer, Berlin (2001).

[62] Menegazzo, F.: Gruppi nei quail la relazone di quasi-normalita e tranzitiva. Rend. Semin. Mat. U. Pad. **40**, 347–361 (1968).

[63] Menegazzo, F.: Gruppi nei quail la relazone di quasi-normalita e tranzitiva II. Rend. Semin. Mat. U. Pad. **42**, 389–399 (1969).

[64] Malik, D.S., Mordeson, J.N.: Fuzzy Commutative algebra. World Scientific (1998).

[65] Mordeson, J.N., Bhutani, K.R., Rosenfeld, A.: Fuzzy Group Theory. Springer, Berlin (2005).

[66] Mukherjee, T.K, Sen, M.K.: On fuzzy ideals of a ring. Fuzzy Sets and Systems. **21**, 99–104 (1987).

[67] Пипка, О.О.: Будова скінченних груп, в яких кожна пронормальна підгрупа або нормальна, або абнормальна. Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Мат. **16**, 109–112 (2011).

[68] Пипка, О.О., Семко М.М. (мол.): Про нескінченні групи, які мають тільки два типи пронормальних підгруп. Доповіді НАН України. **2**, 32–34 (2012).

[69] Пыпка, А.А., Семко, Н.Н. (мл.): Группы, имеющие только два типа пронормальных подгрупп. Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. **2**, 36–41 (2011).

[70] Peng, T.A.: Finite groups with pronormal subgroups. P. Am. Math. Soc. **20**(1), 232–234 (1969).

[71] Robinson, D.J.S.: Groups in which normality is a transitive relation. Math. Proc. Cambridge. **60**(1), 21–38 (1964).

[72] Robinson, D.J.S.: A note on finite groups in which normality is transitive. P. Am. Math. Soc. **19**(4), 933–937 (1968).

[73] Robinson, D.J.S.: Groups which are minimal with respect to normality being transitive. Pac. J. Math. **31**(3), 777–785 (1969).

[74] Robinson, D.J.S.: Groups whose homomorphic images have a transitive normality relation. T. Am. Math. Soc. **176**, 181–213 (1973).

[75] Romano, E., Vincenzi, G.: Groups in which normality is a weakly transitive relation. J. Algebra Appl. **14**(1), 1550007 (12 p.) (2015).

[76] Esteban Romero, R., Vincenzi, G.: Some characterisations of groups in which normality is a transitive relation by means of subgroup embedding properties. Int. J. Group Theory. **7**(2), 9–16 (2018).

[77] Stewart, I.N.: Subideals of Lie algebras. Ph.D. Thesis, University of Warwick (1969).

[78] Vincenzi, G.: A characterization of soluble groups in which normality is a transitive relation. Int. J. Group Theory. **6**(1), 21–27 (2017).

[79] Wang-jin, L.: Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. Fuzzy Sets and Systems. **8**, 133–139 (1982).

[80] Wang-jin, L.: Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. Fuzzy Sets and Systems. **11**, 31–41 (1983).

[81] Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras, Leibniz T-algebras and Baer algebras. IV Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 27 – 28 квітня, 2017, 204–206.

[82] Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras with a large family of ideals. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Kyiv, 7 – 10 June, 2017, 15.

[83] Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields. Dopov. Nac. akad. n. Ukr. **7**, 20–25 (2018). doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.020

[84] Yashchuk, V.S.: On some Leibniz algebras, having small dimension. Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19 – 20 квітня, 2018, 59.

[85] Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 4 over finite fields. V Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 25 – 26 квітня, 2019, 101–103.

[86] Zinbiel, G.W.: Encyclopedia of Types of Algebras 2010, in Bai, C., Guo, L. and Loday, J.-L. "Operads and Universal Algebra", Proceedings of the Summer School and International Conference, Tianjin, China, July 5–9, 2010 (World Scientific, Hackensack, NJ. Nankai Series in Pure, Appl. Math. and Theor. Phys. **9**, 217–298 (2012).

[87] Zacher, G.: Caratterizzazione dei t-gruppi finite risolubili. Ricerche Mat. **1**, 287–294 (1952).

[88] Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information Control. **8**, 338–353 (1965).

# ДОДАТОК 1

**Список опублікованих праць за темою дисертації**

1. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice groups. Algebra Discrete Math. **20**(1), 126-141 (2015).

2. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras, whose subideals are ideals. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. **9**, 15–19 (2017). doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.015

3. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings: an interpretation of $L$-fuzzy rings as habitual algebraic structures. Algebra Discrete Math. **24**(2), 274–296 (2017).

4. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: The Leibniz algebras whose subideals are ideals, J. Algebra Appl. **17**(8), 1850151 (15 p.) (2018). doi.org/10.1142/S0219498818501517

5. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. **7**, 20–25 (2018). doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.020

6. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S.: Lattice groups. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, 3–6 June 2015, 18.

7. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S., Subbotin, I.Ya.: On some algebraic structures connected with groups and lattices. International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd, Odessa, 20 – 27 August 2015, 57.

8. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings. The conference Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, 19 – 22 December 2016, 31.

9. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras whose subideals are ideals. 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko, Kyiv, 3 – 7 July 2017, 70.

10. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras, Leibniz T-algebras and Baer algebras. IV Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 27 – 28 квітня, 2017, 204–206.

11. Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras with a large family of ideals. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th

Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Kyiv, June 7 – 10, 2017, 15.

12. Yashchuk, V.S.: On some Leibniz algebras, having small dimension. Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19 – 20 квітня, 2018, 59.

13. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 4 over finite fields. V Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 25 – 26 квітня, 2019, 101–103.

**Апробація матеріалів дисертації**

1. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3 – 6 червня, 2015 р.);

2. Десята Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, Україна, 20 – 27 серпня 2015 р.);

3. Міжнародна математична конференція Groups and Actions: Geometry and Dynamos, присвячена пам'яті професора Віталія Івановича Сущанського (Київ, 19 – 22 грудня 2016 р.);

4. Четвертий всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених (Дніпро, Україна, 27 – 28 квітня 2017 р.);

5. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (Київ, 7 – 10 червня 2017 р.);

6. Одинадцята Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 75-річчю В. В. Кириченка (Київ, 3 – 7 липня 2017 р.);

7. Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, 19 – 20 квітня 2018 р.);

8. П'ятий всеукраїнськiй форум студентів, аспірантів і молодих учених (Дніпро, Україна, 25 – 26 квітня 2019 р.).