Анотація

Ящук В.С. Алгебраїчні структури, пов'язані з решітками. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Міністерство освіти і науки України, Дніпро, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню деяких властивостей решіткових груп та решіткових кілець, та зв'язків з відповідними фазі структурами; а також дослідженню структури різних типів алгебр Лейбніца.

У першій частині роботи розглянуто нові алгебраїчні структури – решіткові групи і решіткові кільця. Витоки їх виникнення знаходяться в теорії L-фазі груп і L-фазі кілець. Але якщо визначення L-фазі структур не є алгебраїчне (воно скоріше є функціональне), то решіткові групи й решіткові кільця – це вже суто алгебраїчні структури. Досить важливою частиною роботи було встановлення зв'язків між L-фазі групами та L-фазі кільцями з решітковими групами та решітковими кільцями. У процесі з'ясування таких зв'язків одержано досить виразну загальну картину будови решіткових груп і решіткових кілець. Розглядувані кільця були асоціативними. Тому природно виникло питання про розгляд аналогічних решіткових структур для неасоціативних кілець. Одним із важливих типів таких кілець є кільця Лейбніца та їх частинний випадок – алгебри Лейбніца. Але на відміну від теорії асоціативних кілець та асоціативних алгебр – теорія кілець Лейбніца та алгебр Лейбніца не дуже розвинена. Тому перш ніж переходити до побудови решіткових структур над кільцями Лейбніца потрібно з'ясувати важливі питання про структуру кілець Лейбніца та алгебр Лейбніца. Цим питанням присвячено другу частину дисертаційної роботи. Зокрема розглянуто питання про структуру алгебр Лейбніца з умовою транзитивності для ідеалів, було визначено поняття контраідеалу і описано алгебри Лейбніца, у яких кожна підалгебра є або ідеал, або контраідеал. Досліджено структуру алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями (до цього часу алгебри Лейбніца малих вимірностей розглядали над полями нульової характеристики). Більше того, у даному описі було одержано не тільки структурні константи (як у більшості інших робот), але й знайдено досить детальну інформацію про деякі важливі підалгебри.

У дисертаційній роботі вперше визначено поняття решіткової групи та решіткового кільця.

Визначення 1. Нехай G – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину Λ із $G \times \mathfrak{L}$ називатимемо *решітковою групою* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$ і $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a})$, $(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in \Lambda$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in \Lambda$, тоді $(x^{-1}, \mathfrak{a}) \in \Lambda$.

Визначення 2. Нехай R – кільце, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, тоді непорожню підмножину K із $R \times \mathfrak{L}$ називатимемо *решітковим кільцем* над $\mathfrak{L}$, якщо вона задовольняє такі умови:

- якщо $(x, \mathfrak{a}) \in K$ і $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, тоді $(x, \mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a}) - (y, \mathfrak{b}) \in K$;
- якщо $(x, \mathfrak{a}), (y, \mathfrak{b}) \in K$, тоді $(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) \in K$.

У роботі обґрунтовано, чому саме так визначається добуток решіткових груп:

$$\Lambda\Gamma = \{(x, \mathfrak{a})(y, \mathfrak{b}) = (xy, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \mid (x, \mathfrak{a}) \in \Lambda, (y, \mathfrak{b}) \in \Gamma\}.$$

Доведено критерій нормальності: нехай G – група, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка і $\lambda, \kappa \colon G \to \mathfrak{L}$ – групові функції такі, що $\kappa \preceq \gamma$. Тоді наведені нижче твердження еквівалентні:

(i) κ – нормальна підгрупа функції γ;

(ii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \kappa \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \preceq \kappa$ для кожного елемента $x \in G$;

(iii) $\chi\big(x, \gamma(x)\big) \odot \chi\big(y, \kappa(y)\big) \odot \chi\big(x^{-1}, \gamma(x)\big) \subseteq \kappa$ для кожних елементів $x, y \in G$;

(iv) $\chi(x, \mathfrak{a}) \odot \chi(y, \mathfrak{b}) \odot \chi(x^{-1}, \mathfrak{a}) \subseteq \kappa$ для кожних елементів $x, y \in G$, де $\mathfrak{a} \leqslant \gamma(x)$, $\mathfrak{b} \leqslant \kappa(y)$.

Одержано опис структури фазі групи γ для випадку, коли $\mathbf{Im}(\gamma)$ є скінченний.

У другому й третьому розділах доведено деякі основні властивості решіткових груп і решіткових кілець.

Окремий підрозділ дисертації присвячено поняттю гомоморфізма решіткових кілець та його властивостям. Наведемо означення: нехай R, T – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка, а $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ (відповідно $\Theta \subseteq T \times \mathfrak{L}$) – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$. Тоді відображення $f\colon K \longrightarrow \Theta$ називають *гомоморфізмом*, якщо воно задовольняє такі умови:

$$f(u,\mathfrak{a}) + f(v,\mathfrak{b}) = f\big((u,\mathfrak{a}) + (v,\mathfrak{b})\big)$$

і

$$f(u,\mathfrak{a})f(v,\mathfrak{b}) = f\big((u,\mathfrak{a})(v,\mathfrak{b})\big)$$

$$\text{для всіх } (u,\mathfrak{a}), (v,\mathfrak{b}) \in K;$$

$$\text{якщо } (z,\mathfrak{c}) \in Im(f) \text{ і } \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}, \text{ тоді } (z,\mathfrak{d}) \in Im(f).$$

Для гомоморфізму, який зберігає шари, маємо такий прямий аналог теореми про гомоморфізми для кілець.

Теорема 1. *Нехай R, T – кільця, $\mathfrak{L}$ – скінченна дистрибутивна решітка. Нехай $K \subseteq R \times \mathfrak{L}$ і $\Theta \subseteq T \in \mathfrak{L}$ – решіткові кільця над $\mathfrak{L}$ і $f\colon K \longrightarrow \Theta$ – гомоморфізм, який зберігає шари. Визначимо решіткові кільця $K_f \subseteq R/R_f \times \mathfrak{L}$ за правилом: пара $(x+R_f, \mathfrak{a}) \in K_f$ тоді й тільки тоді, коли $(x,\mathfrak{a}) \in K$. Тоді $Im(f)$ є решіткове підкільце Θ і $Im(f)$ є ізоморфний до K_f.*

Ця теорема доводить, що гомоморфізм f, який зберігає шари, визначено за простим ідеалом R_f кільця R, а R_f знайдено за ядром f, який є решітковий ідеал K.

Одержано повний опис структури алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями:

1) нільпотентні алгебри Лейбніца вимірності 3;

2) алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні, із одновимірним ядром Лейбніца;

3) алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні, із двовимірним ядром Лейбніца;

4) циклічні алгебри Лейбніца вимірності 3, які не є нільпотентні.

У деяких випадках структура алгебр Лейбніца суттєво залежала від характеристики поля, а в інших – від можливості розв'язання конкретних рівнянь у полі.

Досліджено структуру T-алгебр Лейбніца, що є алгебрами Бера.

Теорема 2. *Нехай L є T-алгебра Лейбніца над полем F. Якщо L – це алгебра Бера, то кожна підалгебра L є абелева, або $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$ і E – екстраспеціальна підалгебра така, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin \zeta(E)$.*

З'ясовано, що структура T-алгебр Лейбніца суттєво залежить від структури її ніль-радикала.

Теорема 3. *Нехай L – гіперабелева T-алгебра Лейбніца над полем F. Якщо L не є нільпотентна, а $\boldsymbol{Nil}(L) = D$ – абелевий, то $L = D \oplus V$, де $V = Fv$, $[v, v] = 0$, $[v, d] = d = -[d, v]$ для кожного елемента $d \in \boldsymbol{Nil}(L)$. Зокрема, L є алгебра Лі.*

Теорема 4. *Нехай L – гіперабелева T-алгебра Лейбніца над полем F. Якщо $\boldsymbol{char}(F) \neq 2$, то радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ абелевий.*

Теорема 5. *Нехай L – гіперабелева T-алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що L не є нільпотентна, а радикал $\boldsymbol{Nil}(L)$ не є абелевим. Якщо поле F є 2-замкненим та $char(F) = 2$, тоді $L = (Fe \oplus Fc) \oplus Fv$, де*

$$[e, e] = c, [c, e] = [e, c] = [c, v] = [v, c] = 0,$$

$$[v, v] = 0, [v, e] = e + \gamma c = [e, v], \gamma \oplus F.$$

Було одержано опис алгебр Лейбніца, які не є алгебрами Лі, підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали. А також одержано опис алгебр Лі, усі підалгебри яких є або ідеали, або контраідеали, із точністю до простих алгебр Лі. А саме:

Теорема 6. *Нехай L – алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Якщо L не є розв'язна, тоді L є проста алгебра Лі або квазіпроста алгебра Лейбніца.*

Теорема 7. *Нехай L є розв'язна алгебра Лейбніца, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді L є алгеброю одного з таких типів:*

(i) L є абелева;

(ii) $\mathbf{char}(F) = 2$, $L = D \oplus Fa$, де D має базис $\{z, b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ такий, що $[a, a] = \alpha z$, $[a, b_\lambda] = b_\lambda = [b_\lambda, a]$, $[a, z] = [z, a] = 0$, $[z, b_\lambda] = [b_\lambda, z] = 0$ і $0 \neq [b_\lambda, b_\lambda] \in Fz$, $\lambda \in \Lambda$, $[b_\lambda, b_\mu] = 0$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$, де $\lambda \neq \mu$, зокрема $D = [L, L]$, $Fz = \mathbf{Leib}(L)$;

(iii) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для будь-якого елемента $y \in D$, зокрема L є алгебра Лі;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = [y, b] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y$ для кожного елемента $y \in D$, зокрема $D = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(v) $L = B \oplus A$, де $A = Fa_1 \oplus Fc_1$, $[a_1, a_1] = c_1, [c_1, a_1] = 0$, $[a_1, c_1] = c_1$ і $[b, b] = [b, a_1] = [b, c_1] = [c_1, b] = 0$, $[a_1, b] = b$ для кожного елемента $b \in B$, зокрема $B \oplus Fc_1 = [L, L] = \mathbf{Leib}(L)$;

(vi) $L = E \oplus Z$, де E – екстраспеціальна підалгебра така, що $[e, e] \neq 0$ для кожного елемента $e \notin \zeta(E)$ і $Z \leqslant \zeta(L)$.

Наслідок 1. *Нехай L є алгебра Лі, підалгебри якої є або ідеали, або контраідеали. Тоді L є алгеброю одного з таких типів:*

(i) L є простою;

(ii) L є квазіпростою;

(iii) L є абелевою;

(iv) $L = D \oplus Fb$, де $[y, y] = 0 = [b, b]$, $[b, y] = y = -[y, b]$ для кожного $y \in D$.

З огляду на вищесказане, тематика дисертації є важливою й актуальною.

Ключові слова: алгебра Лейбніца, гіперабелева алгебра Лейбніца, гомоморфізм, дистрибутивна решітка, екстраспеціальна алгебра Лейбніца, ідеал, контраідеал, лівий (правий) центр, нільпотентна алгебра Лейбніца, решітка, субідеал, T-алгебра Лейбніца, фазі група, фазі кільце.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras, whose subideals are ideals. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. **9**, 15–19 (2017). doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.015
2. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 3 over finite fields. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. **7**, 20–25 (2018). doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.020

Статті у наукових фахових виданнях України,
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

3. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice groups. Algebra Discrete Math. **20**(1), 126–141 (2015).
4. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S. Lattice rings: an interpretation of L-fuzzy rings as habitual algebraic structures. Algebra Discrete Math. **24**(2), 274–296 (2017).

Статті у наукових виданнях інших держав,
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

5. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: The Leibniz algebras whose subideals are ideals, J. Algebra Appl. **17**(8), 1850151 (15 p.) (2018). doi.org/10.1142/S0219498818501517

Тези наукових доповідей:

6. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S.: Lattice groups. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, 3–6 June 2015, 18.
7. Kurdachenko, L.A., Lytvynenko, V.S., Subbotin, I.Ya.: On some algebraic structures connected with groups and lattices. International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd, Odessa, 20–27 August 2015, 57.
8. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Lattice rings. The conference Groups and Actions: Geometry and Dynamics dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy, Kyiv, 19–22 December 2016, 31.

9. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras, Leibniz T-algebras and Baer algebras. IV Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 27–28 квітня, 2017, 204–206.

10. Yashchuk, V.S.: On Leibniz algebras with a large family of ideals. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Kyiv, June 7–10, 2017, 15.

11. Kurdachenko, L.A., Subbotin, I.Ya., Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras whose subideals are ideals. 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko, Kyiv, 3–7 July 2017, 70.

12. Yashchuk, V.S.: On some Leibniz algebras, having small dimension. Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 19–20 квітня, 2018, 59.

13. Yashchuk, V.S.: Leibniz algebras of dimension 4 over finite fields. V Всеукраїнський форум студентів, аспірантів і молодих учених, Дніпро, 25–26 квітня, 2019, 101–103.