

INTERNATIONAL CONFERENCE MATHEMATIC PROBLEMS OF THE TECHNICAL MECHANIC

*ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
MPTM 2023*

Kyiv, Dnipro, Kamianske, Ukraine

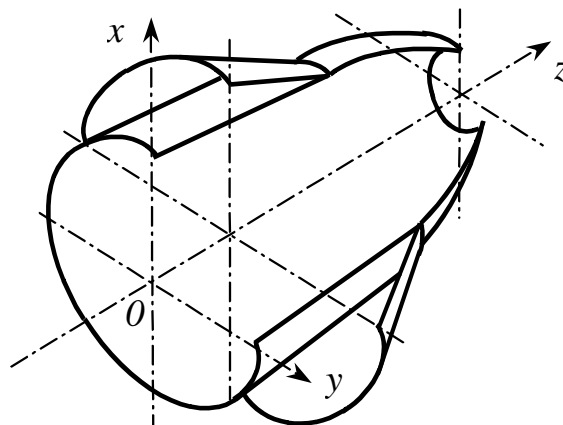
Book of Abstracts (Part 1, April 18-20, 2023)

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ - 2023

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ



Матеріали конференції



Київ, Дніпро, Кам'янське – 2023

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

**Співголови програмного комітету:
Назаренко В.М. , Богданов В.Л.**

**Заступники голови:
Стеблянко П.О., Дзюба А.П.**

**Бабешко М.О., Булат А.Ф., Галішин О.З., Гарт Е.Л., Гачкевич О.Р., Григоренко О.Я.,
Гудрамович В.С., Гузь О. М., Гук Н.А., Жук Я.О., Карнаухов В.Г., Крилова Т.В.,
Круковський О.П., Кубенко В.Д., Кушнір Р.М., Ларіонов Г.І., Лобода В.В.,
Луговий П.З., Мейш Ю.А., Пилипенко О.В., Пискунов С.О., Пошивалов В.П.,
Савченко В.Г., Сенченков І.К., Тимошенко В.І., Токовий Ю.В., Черняков Ю.А.(США)**

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Голова: Стеблянко П.О.

Заступники голови: Дзюба А.П., Крилова Т.В.

Вчений секретар: Волосова Н.М.

ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОЇ МЕТОДИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ РУЙНУВАННЯ ВИСОКОЕЛАСТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРІЩИНИ

В.М. Назаренко, М.В. Довжик

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Було досліджено плоску задачу руйнуванні півплощини $x_2 \geq -h$ під час одновісного стиску вздовж приповерхневої тріщини. Плоска тріщина довжиною $2a$ в напрямку стиску осі Ox_1 та нескінченна в напрямку осі Ox_3 розташована в площині $x_2 = 0$, стискаючі зусилля паралельні площині тріщини. В такому випадку скориставшись критерієм руйнування, що базується на локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини, в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності, задача зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь [1].

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\eta) \left| \frac{1-\xi^2}{\eta^2-\xi^2} \right| d\eta + \frac{1}{k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ \int_0^1 g(\eta) \left| \frac{1}{\eta^2-\xi^2} \right| d\eta + \frac{1}{k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \\ \int_0^1 g(\eta) d\eta &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

Для подальшого розв'язання було використано чисельно-аналітичну методу, побудовану на методі Бубнова-Гальоркіна, запропоновану в [2]. В якості системи координатних функцій використовувались степеневі функції. В такому випадку інтеграли від перших доданків можна порахувати аналітично, інтеграли від інших ядер інтегральних рівнянь (1), скориставшись рекурентними співвідношеннями з [2], також рахуються аналітично. В результаті система інтегральних рівнянь (1) зводиться до системи лінійних рівнянь, коефіцієнти якої залежать від сталих матеріалу та безрозмірної відстані $\beta = h/a$.

В якості прикладу, було розглянуто матеріал з потенціалом Трелоара. Для якого отримано критичні укорочення та напруження, що відповідають порохуванню в [1], що підтверджує застосовність запропонованої методи для розв'язання таких задач. Також запропонована в [2] метода, дозволяє провести розрахунки для дуже малих безрозмірних відстаней, що було неможливо в рамках методів використаних в [1].

1. В.М. Назаренко К теории разрушения материалов при сжатии вдоль приповерхностных трещин в условиях плоской деформации // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22, № 12. – С. 96–104.
2. А.Н. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Назаренко Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 28–37.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ СТРУКТУРНОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ СТАЛЬНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ НАГРЕВЕ И ОХЛАЖДЕНИИ

А.Р. Гачкевич¹, Т.В. Козакевич¹, Т. Волчаньски²

¹*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины (Украина);* ²*Политехника Опольска, Образовательно-учебное объединение в Глушини (Польша)*

Во многих отраслях современного машиностроения и приборостроения, энергетике и др. широко используются стали различного функционального назначения. Для предоставления стальным элементам конструкций и приборов, нужных физико-механических свойств, в инженерной практике применяется термическая обработка, которая осуществляется, как правило, с использованием локальных газовых, электрических, электромагнитных, инфракрасных, лазерных и др. нагревателей. Стальные элементы могут находиться в условиях теплового воздействия и в процессе эксплуатации.

Термическая обработка сталей и, как частный случай, термическая обработка сварных соединений, включает различные операции теплового воздействия на металл, при которой происходят изменения структуры, фазового состава, напряженного состояния и соответственно физических свойств, уровня свободной энергии фаз, значения и распределения микро- и макронапряжений и др. Для сталей, различных по химическому составу и фазово-структурному состоянию, в зависимости от цели обработки ее связывают с условиями нагрева до определенной температуры, продолжительностью пребывания при этой температуре, условиями охлаждения (скоростью охлаждения, характером изменения температуры и т.п.) Термическая обработка в основном влияет на: изменение фазового состояния и микроструктуры стали, а также уровня микро- и макронапряжений; прочность и вязкость стали, величину остаточных напряжений.

Как отмечено выше при локальном технологическом нагреве в процессах изготовления и обработки элементов современных конструкций и машин из малоуглеродистых низколегированных сталей широко используют подвижные источники нагрева (газовые, электрические, электромагнитные, лазерные, инфракрасного облучения и т.п.). Подобные источники нагрева возникают также в градиентно упрочняемых поверхностных слоях узлов трения (в частности, сухого). Поэтому является актуальной разработка новых математических моделей, которые позволяют исследовать тепловое и напряженное состояние в телах с покрытиями в процессе технологического высокотемпературного нагрева с целью получения рациональных режимов упрочняющих обработок, а также улучшения эксплуатационных свойств соответствующих узлов фрикционных сопряжений (в частности, при сухом трении).

Высокие температуры нагрева и присущие режимы последующего охлаждения могут изменять фазовое состояние стали, что обуславливает изменение ее механических свойств (твердости, прочности, пластичности, вязкости и др.), а также приводит к образованию в соответствующих элементах наряду с пластическими и структурными остаточными деформациями и напряжениями, уровни которых могут превышать допустимые.

Обсуждены избранные проблемы [1], возникающие при моделировании и оптимизации остаточных структурного и напряженного состояний стальных тел, в частности тонких низколегированных малоуглеродистых пластин при технологическом нагреве, относящиеся к свойствам, структуре и удельным объемам фазовых составляющих, видам термообработок и процессов, происходящих при них.

1. *Tomasz Wolczański, Teresa Kozakevych, Oleksandr Hachkevych. Structural and residual stress state of steel plates subjected to the heating of moving heat sources. (ISSN 1429-6063, ISBN 978-83-66033-63-4). Oficyna Wydawnicza politechniki Opolskiej, Opole, 2019. – 290 c.*

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ В
КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ
ВИДУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТА ПОШКОДЖЕННЯ СТРУКТУРИ
МАТЕРІАЛУ**

М.О.Бабешко, В.Г.Савченко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ

В довільній ортогональній системі координат розглядається напружений стан шаруватих тіл обертання з ізотропних матеріалів при їх непружному деформуванні вздовж траєкторій малої кривизни під дією термосилового навантаження. Рівень навантаження такий, що деформації, які виникають в елементах тіла, малі. Механічні характеристики матеріалів залежать від температури, величини навантаження та виду напруженого стану. Деформування елементів тіла супроводжується областями пластичних деформацій, розвантаження і повторного навантаження з пошкодженням структури матеріалу. Розподіл температури в елементах тіла вважається відомим і визначається шляхом розв'язання відповідної задачі теплопровідності або експериментально. Співвідношення між компонентами тензорів напруження та деформації (визначальні рівняння) представляються в єдиній формі, незалежно від того, на якій стадії деформування знаходиться матеріал тіла, і записуються у вигляді узагальненого закону Гука для ізотропного тіла з додатковими членами, які мають різний вигляд і враховують теплову деформацію, відхилення матеріалу від пружного, пошкодження структури матеріалу за рахунок повзучості і розпушення, залежності діаграм деформування від температури і виду напруженого стану, а також методу лінеаризації початково нелінійних співвідношень. Лінеаризація нелінійної задачі термов'язкопластичності здійснюється методом послідовних наближень з використанням миттєвих поверхонь деформування і діаграм повзучості, які відповідають значенням заданої в елементі тіла температури та визначеного в попередньому наближенні виду напруженого стану. При цьому використовуються отримані в результаті експериментів на трубчастих зразках діаграми деформування і криві повзучості для фіксованих значень температури і параметра виду напруженого стану. Запис визначальних рівнянь в єдиній формі полегшує розробку алгоритмів і відповідних програмних засобів при розв'язанні крайових задач термов'язкопластичності. З використанням лінеаризованих визначальних рівнянь формулюються крайові задачі для визначення термов'язкопластичного стану оболонок та просторових тіл обертання в процесі заданих температурних і силових навантажень. Як в одному, так і в другому випадках будується розв'язок у поперечному перерізі тіла з використанням напіваналітичного методу, коли відповідні величини представляються у вигляді тригонометричних рядів у коловому напрямку. Для просторових тіл обертання використовуються варіаційне рівняння Лагранжа та метод скінченних елементів. В цьому випадку задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні на кожному етапі навантаження систем алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти і праві частини яких визначаються за результатами попереднього наближення. Для оболонок обертання

при використанні гіпотез Кірхгофа – Лява задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні кожного етапу навантаження системи звичайних диференціальних рівнянь, коефіцієнти та вільні члени яких обчислюються за результатами попереднього наближення. З використанням запропонованих методик досліджено напружено-деформований стан конкретних тіл та оболонок обертання в умовах термосилового навантаження. Проведена оцінка впливу врахування виду напруженого стану та пластичної зміни об'єму на результати розрахунків.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОЇ ГАРМОНІЙНОЇ СИЛИ

Н.В.Жоголева, В.Ф.Щербак

Інститут прикладної математики і механіки НАН України (м. Слов'янськ)

Запропоновано новий метод асимптотичного оцінювання параметрів гармонійного силового навантаження нелінійного осцилятора шляхом побудови ідентифікатора розширеної динамічної моделі. Методика досліджень ґрунтується на синтезі інваріантних співвідношень для вихідної та додаткової динамічної системи.

В якості моделі механічної системи розглянемо рівняння вимушеного руху осцилятора Лієнара $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = u(t)$. Тут $x(t)$ – положення осцилятора, $\dot{x}(t)$ – швидкість, $f(x)$ характеризує закон дисипації, а функція $g(x)$ потенціальні сили. Зовнішній вплив дорівнює $u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$. Зробивши заміну змінних Лієнара $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x} + F(x)$, де $F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau$ маємо рівняння в просторі станів

$$\dot{x}_1 = x_2 - F(x_1); \dot{x}_2 = -g(x_1) + u(t) \quad (1)$$

Задача параметричної ідентифікації. Знайти асимптотично точні оцінки $x_2(t)$ і коефіцієнтів a_1, a_2, a_3 за даними про вихід $x_1(t)$ системи диференціальних рівнянь (1).

Крім інформації про $x_1(t)$ далі вважатимемо відомим будь-який розв'язок задачі Коші для поки що довільної, додаткової системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(t, \xi, x_1), \xi = (\chi, \xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \quad (2)$$

Ідея методу інваріантних співвідношень в задачах спостереження та параметричної ідентифікації [1] полягає в синтезі додаткових зв'язків, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (1), (2) між «відомими» величинами $x_1(t), \xi(t)$ та невідомими $x_2(t), a_i, i = 1, 2, 3$ вихідної системи.

Будемо шукати ці додаткові зв'язки у вигляді

$$x_2(t) = \Phi(t, x_1) + \chi, \quad a_i = \Psi_i(t, x_1) + \xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Як і розв'язок χ, ξ_i системи (2), функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = 1, 2, 3$ поки що невизначені. Введемо відхилення $e = (\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ від співвідношень (3), зробивши заміну змінних шуканих компонент математичної моделі (1) за формулами

$$\delta = x_2 - \Phi(t, x_1) - \chi, \quad \varepsilon_i = a_i - \Psi_i(t, x_1) - \xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Диференціюючи (4), отримуємо диференціальні рівняння у відхиленнях

$$\dot{\delta} = -\dot{g}(x_1) + \hat{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \hat{v} - \dot{\chi}, \quad \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{i_t} - \Psi'_{i_{x_1}} \hat{v} - \dot{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де $\hat{u} = \Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1 + (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2) \cos \omega t + (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2) \sin \omega t$, $\hat{v} = \Phi - F + \chi + \delta$.

Якщо при виборі тим чи іншим чином вільних функцій на деяких траєкторіях (1), (2) має місце $\|e(t)\| \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях і саме для таких функцій рівності (3) стають інваріантними співвідношеннями для розширеної системи диференціальних

рівнянь, а відтак безпосередньо визначають значення шуканих невідомих. На інших траєкторіях цієї системи з'являються ненульові доданки $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

На першому етапі зафіксуємо структуру додаткових рівнянь (2), поклавши

$$\dot{\chi} = -g(x_1) + \tilde{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \tilde{v}, \quad \dot{\xi}_i = -\Psi'_{i_t} - \Psi'_{x_1} \tilde{v}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

де $\tilde{u} = \Psi_1 + \xi_1 + (\Psi_2 + \xi_2) \cos \omega t + (\Psi_2 + \xi_2) \sin \omega t$, $\tilde{v} = \Phi - F + \chi$.

Тоді відхилення від співвідношень (3) задовольнятиме однорідній лінійній системі

$$\dot{\delta} = -\Phi'_{x_1} \delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \omega t + \varepsilon_3 \sin \omega t, \quad \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{x_1} \delta, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

На другому етапі зафіксуємо функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = 1, 2, 3$, з метою зробити нульовий розв'язок системи (7) глобально асимптотично стійким. Нехай

$$\Phi(x_1) = x_1; \quad \Psi_1(x_1) = x_1; \quad \Psi_2(x_1, t) = x_1 \cos \omega t; \quad \Psi_3(x_1, t) = x_1 \sin \omega t. \quad (8)$$

За такими функціями рівняння у відхиленнях (7) приймають вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & W^T \\ -W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Тут $W = (1, \cos \omega t, \sin \omega t)^T$. Лінійні неавтономні системи такої структури є типовими в задачах адаптивної ідентифікації [2], де один із напрямків дослідження стійкості пов'язано з властивістю Незгасаючого Збудження для коефіцієнтів системи.

Означення. Матрична локально інтегрована функція $W(t) \in R^{p \times q}$ має властивість НЗ – Незгасаючого Збудження (Persistence of Excitation) якщо

$$\exists \alpha, t^* > 0: \forall t > 0, \int_t^{t+t^*} W(\tau) W(\tau)^T d\tau \geq \alpha I.$$

Тут I – одинична матриця $p \times p$. Зокрема, для системи (9) має місце

Твердження. Тривіальний розв'язок системи (9) $\delta(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$ є глобально експоненційно стійким, якщо вектор $W(t)$ разом зі своєю похідною $\dot{W}(t)$ є обмеженими функціями часу і $W(t)$ має властивість НЗ.

Показано, що ці умови виконано і тоді $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ асимптотично прямує до нуля, функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = 1, 2, 3$ в формулах (4) і (6) визначено, доданки $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ знаходимо як розв'язок задачі Коші для системи (6). А це дозволяє безпосередньо отримати асимптотичні оцінки шуканих невідомих.

Запропонована в роботі схема ідентифікації була чисельно промодельована для лінійного осцилятора, математичного маятника та осцилятора Дуффінга. На рис. 1, 2

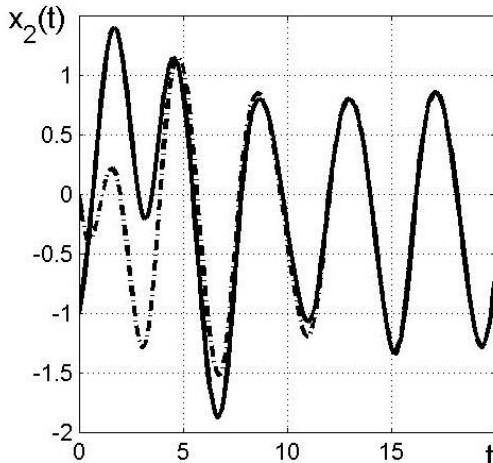


Рис. 1.

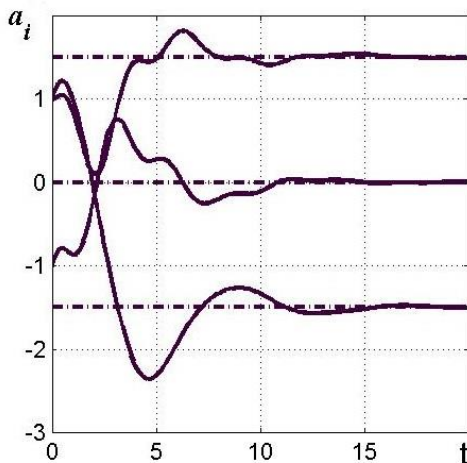


Рис. 2

наведено результати моделювання процесу ідентифікації для осцилятора Дуффінга. На першому з них зображено штриховою лінією графік $x_2(t)$, а суцільною лінією – його апроксимацію за формулою $x_1(t) + \chi(t)$. На рис. 2 суцільною лінією зображено графіки функцій $x_1(t) + \xi_1(t)$, $x_1(t) \cos \omega t + \xi_2(t)$, $x_1(t) \sin \omega t + \xi_3(t)$, які асимптотично прямує до значень a_1, a_2, a_3 (які на графіку зображені штриховою

лінією). Результати моделювання для різних типів осциляторів підтверджують ефективність пропонованого способу ідентифікації параметрів зовнішньої гармонічної сили.

1. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – **29**. – С. 69 – 76.
2. *S. Sastry and M. Bodson*, Adaptive control: stability, convergence and robustness. Prentice-Hall, 1989. 377 p.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДО ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНІКИ.

**Круковський О.П., Ларіонов Г.І. Хворостян В.О., Головка С.А.,
Земляна Ю.В.**

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

Розробка математичних моделей у технічних застосуваннях завжди є актуальною задачею. Системи диференціальних рівнянь (ДР), з яких, як правило, починається постановка задач розв'язуються у більшості своїй з використанням чисельних методів. За сприятливих обставин рішення систем ДР може бути отримано і у аналітичному вигляді. Переваги розв'язків у вигляді аналітичних формул є очевидними. По перше: зв'язок шуканої функції якості вираженої у вигляді математичних формул є наочним. Наявність зв'язків дозволяє досліднику впевнитись у своїх гіпотезах стосовно них, або отримати нові уявлення про процес, що досліджується. По друге: представлення розв'язку у зручному вигляді для дослідника (наприклад у вигляді степеневих функцій) дозволяє оцінити чутливість функції до варіації параметрів. У випадку застосування чисельних методів для отримання ММ не уникнути процедури апроксимації отриманого чисельними методами розв'язку. Особливе місце в процесах математичного моделювання належить широкому класу методів заснованих на варіаційних методах - метод скінчених елементів (МСЕ). Добре розроблений інтерфейс сприяє його широкому розповсюдженні у різні сфери технічних застосувань. Як правило, отримання безлічі двомірних рисунків та графіків задовольняє інтерес більшості дослідників. Проте аналітичного виразу шуканих функцій не наводиться. Класична процедура апроксимації вирішує цю проблему. Але процедура призводить до великих витрат комп'ютерного часу, що іноді робить неможливим її отримання. В роботі замість отримання апроксимації на сітці параметрів використовується спрощена процедура його отримання. Метод послідовної апроксимації (МПА) полягає у пошуку розв'язку у мультиплікативному вигляді де функціями добутку є одномірні представлення перетинів простору функції відповідними площинами. Таке представлення, незважаючи на наближений характер, вигідно відрізняється від класичного представлення результатів апроксимацій. Зважаючи на зростаючу складність технічних задач роль аналітичних методів значно знизилась. Пануюче місце серед чисельних методів в даний час належить широкому класу методів заснованих на методах скінчених елементів. Сфера застосувань цих методів обумовлена добре розробленим інтерфейсом для аналізу та обробки результатів розрахунків. Простота отримання результатів з допомогою МСЕ методів привела до того, що на представлення результатів в аналітичному вигляді стали звертати менше уваги. Аналіз технічних застосувань МСЕ методів це підтверджує. Так замість розробки ММ тих чи інших процесів наводять велику кількість графічного матеріалу у вигляді малюнків і

графіків, не приводячи при цьому саме математичну модель у вигляді формул. Не маючи простих формул у нормативних документах все частіше з'являються таблиці та графіки, що істотно ускладнює розуміння математичних залежностей шуканих величин від інших. Для отримання формул, як правило використовують процедури апроксимації. Маючи велику кількість параметрів виконання апроксимації функціональної поверхні на сітці їх значень є процедурою не з легких. Причиною яка обмежує широке застосування процедур апроксимації є значні витрати комп'ютерних ресурсів. Таким чином, розробка процедур які дозволять зменшити витрати машинного часу на представлення ММ методами МСЕ у вигляді математичних формул є актуальною науковою задачею. Отримання функцій апроксимації в задачах механіки деформованого твердого тіла і зокрема геотехнічної механіки відбувається за класичною схемою: на сітці параметрів задачі відбувається визначення значень ординат функції якості (тобто функції яка підлягає апроксимації), потім створюється система рівнянь, рішенням якої будуть коефіцієнти тригонометричних або алгебраїчних рядів якими апроксимують функцію. Як правило, для визначеності задачі розрахунку методами МСЕ, необхідно задати всі значення параметрів розрахунку. На цій багатовимірній сітці необхідно проводити обчислення ординат функції якості, що саме по собі не є простою задачею. Оскільки для економії пам'яті комп'ютера вихідну задачу розбивають нерівномірною сіткою, то як показує аналіз функцій інтерполяції для двовимірних функцій, поверхні далекі від гладкості навіть для відносно простих задач механіки. Процедуру апроксимації використовують як при розробці методу, так і на етапі отримання графічних залежностей функції від шуканих параметрів. Виникає враження неможливості відхилення від класичної процедури апроксимації, і тим самим, зменшення витрат часу на отримання функцій апроксимації, тобто поставленої задачі. Представлені результати порівняння поверхонь функції інтенсивності дотичних напружень отриманих за МПА методом та поверхнями інтерполяції чисельних результатів розв'язку класичної задачі про визначення напружено-деформованого стану у околі виробки кругового поперечного перерізу підсиленої анкерами МСЕ методом у масиві гірських порід. Зроблено висновки про задовільну точність отриманих результатів використання методу МПА до представленої задачі рішення якої отримано МСЕ методом.

ВПЛИВ ТОНКОГО ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ, ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ І РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ

Ю.П.Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

В даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута плоска задача про вплив рухомого навантаження на нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Досліджено напружено-деформований стан основи у випадку жорсткого контакту при різних швидкостях руху поверхневого навантаження. Для розв'язку задачі використаний інтегральний метод Фур'є. Для матеріалу з потенціалом типу Бартенєва-Хазановича виконані чисельні дослідження. Вважалось, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє, на вільну поверхню півпростору діє лінійне навантаження, що рухається з постійною швидкістю v під кутом α . Розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних (великих) початкових деформацій.

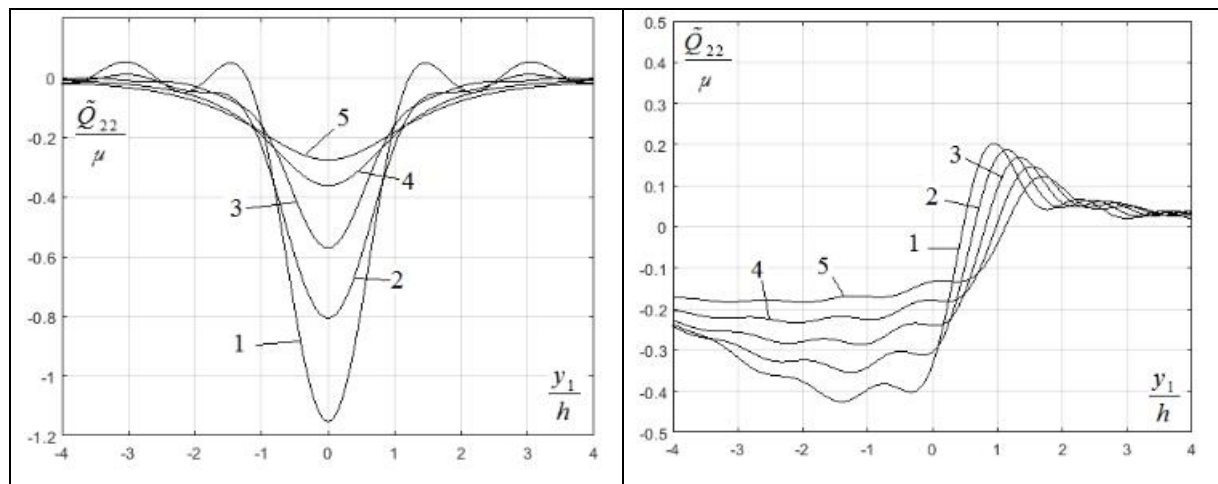


Рис.1

Рис. 2

Вивчений вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на розподіл швидкостей переміщень і напружень в нестисливій основі з початковими напруженнями.

Розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів: $\rho/\rho_1 = 0,5$; $\alpha = \pi/2$.

На рис. 1 і 2 показана залежність напруження \bar{Q}_{22} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$ і $v^2 = 2c_0^2$ відповідно. Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1 і 2 відповідають значенням $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1,1$ і $\lambda_1 = 1,2$. Тут ρ/ρ_1 - відношення густин матеріалів півпростору і поверхневого шару; c_0 - швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі без початкових напружень. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан в конкретній точці нестисливого півпростору, залежать від координат точки, яка досліджується, початкових напружень, швидкості руху навантаження та механічних параметрів шаруватого середовища.

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ НЕСКІНЧЕННОГО НЕОДНОРІДНОГО СТРИНГЕРА (НАКЛАДКИ) І ДВОХ ЗАЩЕМЛЕНИХ ОДНІЄЮ ГРАННЮ ПРУЖНИХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ.

Бабич С.Ю.¹, Борисов Є.М.², Діхтярук М.М.³

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

²Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана

³Хмельницький національний університет

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності[1] представлено розв'язки контактної задачі про взаємодію нескінченного неоднорідного стрингера з попередньо напруженими смугами. Актуальність таких досліджень не повинна викликати сумнівів, оскільки практично у всіх елементах конструкцій і деталях машин практично присутні початкові (залишкові) напруження. Дослідження проведено у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих

(скінченних) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу [2].

Розглядаються нескінченні пружні смуги товщиною H з початковими напруженнями, защемлені гранями $y_2 = \pm H$, а іншими своїми гранями з'єднані між собою нескінченним неоднорідним пружним стрингером (накладкою) малої товщини h . Підсилені таким чином нескінченні попередньо напружені смуги перебувають під дією прикладених до з'єднувального нескінченного неоднорідного стрингера розподілених горизонтальних сил інтенсивності $q_0(y)$.

При дослідженні області контакту, щодо стрингера робимо припущення, що він під дією прикладеного навантаження і тільки тангенціальних контактних напружень розтягується або стискається як стержень, що знаходиться в одновісному напруженому стані. Також вважаємо, що вздовж горизонтальної осі вертикальні пружні переміщення сталі. Останнє припущення обумовлене малістю товщини стрингера, так як її зміни від точки до точки в процесі деформації незначні і ними можна знехтувати.

Розв'язок задачі зводиться відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень до системи рекурентних систем інтегро-диференціальних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлені у вигляді інтегралів Фур'є. Числові дослідження проведені для нестисливих тіл неогуківського матеріалу (потенціал Трелоара).

Числові розрахунки, які представлені в даній роботі дають можливість зробити низку узагальнених висновків, що стосуються впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль для нескінченної накладки, що взаємодіє з попередньо напруженими смугами.

Література

1. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями К.: Вища шк., 1995.-305 с.
2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, Saarbrucken LAP LAMBET Academic Publishing, 2015. – 468.

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ ПОВЗУЧОСТІ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ

¹Галішин О.З., ²Склепус С.М.

¹*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України,*

²*Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України*

Розглянуто просторову задачу повзучості осесиметрично навантаженого нерівномірно нагрітого циліндру. Дослідження виконуються в припущенні, що пружні характеристики матеріалу, коефіцієнт лінійного температурного розширення і всі параметри повзучості у визначальних рівняннях залежать від температури. Характеристики матеріалу наведені в табличній формі для ряду фіксованих температур. Для проміжних значень температури пружні характеристики знаходять за допомогою лінійної інтерполяції. Деформація повзучості в одновісному законі повзучості визначається інтерполяцією за температурою у відповідності з експоненційним

законом Арреніуса. Це дозволяє отримати прості формули для знаходження параметрів повзучості у визначальних рівняннях. Для варіаційної постановки задачі використовується функціонал у формі Лагранжа. Для основних невідомих задачі повзучості була сформульована задача Коші за часом. Для розв'язання сформульованої фізично нелінійної початкової-крайової задачі розроблено метод, який базується на спільному застосуванні теорії R-функцій, методів Рітца і Рунге-Кутта-Мерсона. Розв'язано задачу повзучості для нерівномірно нагрітого циліндра, навантаженого внутрішнім тиском. Чисельні результати, отримані за запропонованою просторовою моделлю, було порівняно з аналогічними результатами, отриманими за допомогою уточненої теорії оболонок на основі гіпотези прямолінійного елемента. Співставлення показало, що уточнена теорія оболонок забезпечує задовільний збіг із просторовим розв'язком.

ВПЛИВ СТИСЛИВОСТІ РІДИНИ НА НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ «ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР – ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ»

О.М. Багно, Г.І. Щурук

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України

Проблема опису повного спектру акустичних хвиль, які поширюються в пружно-рідинних хвилеводах, аналізу їх дисперсійних характеристик, а також поведінки їх як у довгохвильовому, так і в короткохвильовому діапазонах частотного спектру відноситься до класичних задач механіки. Закономірності розповсюдження цих хвиль широко використовуються в сейсмології при розшифровці даних сейсмозвідки, конструюванні приладів в акустoeлектроніці, розробці ультразвукових неруйнівних методів виявлення дефектів і визначення напружень у матеріалах та елементах конструкцій, а також в інших галузях науки та техніки. У даній роботі для дослідження поширення хвиль у системі, що складається з рідкого шару та пружного півпростору, залучаються моделі, основані на використанні тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла. Обрані постановки задач і метод, основані на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху ідеальної стисливої рідини і пружного тіла, запропоновані в роботах [1, 2]. Як відомо, фазова швидкість і структура хвиль при взаємодії пружного тіла та рідини залежать від механічних параметрів гідропружної системи та визначаються співвідношеннями між ними. У системі, компонентами якої є пружний півпростір і шар рідини, таким співвідношенням може слугувати співвідношення між швидкістю звукової хвилі в рідкому шарі a_0 і швидкістю хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла c_s . У роботі встановлено, що при $a_0 > c_s$, як впливає з отриманих числових результатів, в гідропружній системі поширюється лише одна поверхнева хвиля, швидкість якої змінюється від швидкості хвилі Релея c_R (при $h \rightarrow 0$) до швидкості хвилі Стоунлі – Шольте $c_{\mathcal{S}}$ (при $h \rightarrow \infty$). У разі виконання умови $a_0 < c_s$ в гідропружному хвилеводі поширюється безліч мод високого порядку. При цьому, як впливає з числових результатів, отриманих у роботі, швидкість першої моди змінюється від швидкості хвилі Релея c_R (при $h \rightarrow 0$) до швидкості хвилі Стоунлі – Шольте $c_{\mathcal{S}}$ (при $h \rightarrow \infty$). Швидкості мод високого порядку змінюються від швидкості

хвилі зсуву у матеріалі пружного півпростору c_s (при частотах їх зародження) до швидкості хвилі звуку в рідині a_0 (при $h \rightarrow \infty$).

Таким чином, показано, що стисливість рідини, яка характеризується величиною швидкості хвилі звуку в рідині a_0 , є одним з параметрів, від якого істотно залежать хвилеводні властивості гідропружної системи «шар рідини – пружний півпростір». Зазначимо, що одним із важливих результатів роботи є отримання співвідношення, яке дозволяє, не виконуючи значних обчислень, а лише на підставі механічних параметрів пружно-рідинної системи, визначити апіорі буде система одномодовим або багатомодовим хвилеводом.

1. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.

ПЕРЕДАЧА ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ВІД ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ПІВПРОСТОРІВ ДО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

¹С.Ю. Бабич, ²Н.О. Ярецька, ³В.Ф. Лазар

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ;*

²*Хмельницький національний університет,*

³*Мукачівський державний університет,*

Дослідження питань контактної взаємодії твердих тіл представлено досить актуальною проблемою. Це підтверджено тим, що контактна взаємодія є одним із найбільш поширених на практиці способів передачі зовнішніх навантажень. Актуальність даної проблеми не викликає сумнівів ні з погляду розвитку фундаментальних розробок у механіці твердого деформованого тіла, ні з погляду прикладних галузей сучасної техніки. Особливо широке застосування теорія контактних задач знаходить у машинобудуванні та будівництві. Це пояснюється тим, що передача зусиль у вузлах і механізмах машин супроводжується контактом деталей в конструкціях між собою. Також, подібні задачі можуть виникати при розрахунках важливих характеристик для пружних фундаментів із подошвами колон будівель, димових труб, градирень, водонапірних веж та інших висотних споруд на вітрове навантаження або навантаження від власної ваги. Контактна механіка дозволяє знайти розподіл напружень у місцях дотику тіл, вивчити їх концентрацію та розробити шляхи їх зниження. Коло задач про контакт пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень є досить широким [1]. Але сучасні запити інженерної практики поставили перед дослідниками ряд нових задач. Вони потребують використання більш складних моделей суцільних середовищ. Це задачі з ускладненими фізичними та механічними властивостями. Моделі контактної взаємодії мають враховувати такі фактори: тепловиділення, вплив тертя, жорсткість, поверхневі властивості матеріалу та зносостійкість поверхні. Відомо, що практично в усіх елементах конструкцій присутні початкові напруження. Останні викликані різного роду причинами, такими як: технологічні операції, виробничі процеси (при виготовленні матеріалів) або складанням

конструкцій. У земній корі початкові напруження виникають внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил. При створенні композитних матеріалів вони виникають в результаті технологічних процесів. Початкові напруження присутні й у кровоносних судинах живих організмів також. Початкові напруження необхідно враховувати при розв'язуванні задач про деформацію ґрунтів (особливо мерзлих). У пружно-пластичних тілах, також, можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Деколи доречно навмисно створювати початкові напруження (залишкові та технологічні) для компенсації тих, які виникають у елементах конструкцій. Це підвищує їх характеристики міцності. Тому, одним важливим завданням контактної механіки є врахування початкових напружень. Деякі результати досліджень у цьому напрямі представлені у працях [2-4].

Метою роботи є дослідження передачі вісесиметричного навантаження від попередньо напружених півпросторів до пружного циліндра з початковими напруженнями та представлення розв'язку відповідної статичної контактної задачі без врахування сил тертя та у межах лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконано у випадку рівних та нерівних коренів визначального рівняння [2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припустимо, що два пружні тверді ідентичні півпростори контактно взаємодіють із пружним штампом. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні. Для дослідження застосовуємо координати деформованого стану Ou_i ($i = \overline{1, 3}$), які пов'язані з лагранжевими координатами x_i ($i = \overline{1, 3}$) співвідношеннями: $u_i = \lambda_i x_i$, ($i = \overline{1, 3}$), де λ_i , ($i = \overline{1, 3}$) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, $\lambda_i = \text{const}$. Вісь u_3 спрямована по нормалі до межі контакту.

Будемо вважати, що початковий деформований стан є однорідним, а межа контакту пружних тіл розміщується у площині $u_3 = \text{const}$. При цьому, робимо припущення, що початкові напруження діють вздовж межі контакту.

Розглянемо постановку задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю u_3 циліндричної системи координат (r, θ, u_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від межі контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини $u_3 = 0$ на величину ε . Величини: R – радіус циліндричного штампа, $h = 0.5H$.

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного штампа в області контакту $z_i = \pm h / \nu_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, Q_{33}^{(3)} = Q_{33}^{(i)}, Q_{3r}^{(3)} = 0, Q_{3r}^{(i)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (1)$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h / \nu_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = 0, Q_{3r}^{(i)} = 0, u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (2)$$

- 3) на боковій поверхні пружного штампа $r = R$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0, Q_{3r}^{(3)} = 0, (|z_i| \leq h/v_i) \quad (i=1,2), \quad (3)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q_{33}^{(i)}| dr, |Q_{33}^{(i)}| = |Q_{3r}^{(i)}|_{z_i = \pm H/v_i} \quad (i=1,2) \quad (4)$$

Умова (4) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Методика розв'язання поставленої задачі поділяється на два етапи: аналітичний, який висвітлений у праці [4] та чисельний. Для чисельного розв'язку було розроблено алгоритм та комп'ютерну програму у Maple для обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл, що дозволило дослідити передачу вісесиметричного навантаження.

В результаті проведеного дослідження, у випадку потенціалів найпростішої структури (Трелоара, Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу) можна зробити висновок про те, що: 1) найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампа; 2) чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження прямують до нуля; 3) у числовому еквіваленті переміщення приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні; 4) при розтягу сила вісесиметричного навантаження P приймає більші значення ніж при стиску, оскільки їх значення зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження λ_1 .

Отже, вплив початкових напружень на передачу навантаження та закон розподілу контактних характеристик пружних ідентичних півпросторів, які стискають пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями є суттєвим і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій. А розроблений алгоритм числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках, що значно полегшує складність досліджень. Тому він може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при моделюванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого. Також, числова реалізація дає змогу графічно відображати вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик тіл, для потенціалів найпростішої структури, що значно полегшує візуальну інтерпретацію розв'язку задачі.

Література.

1. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Yaretska N.O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ [Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences](#): Collective monograph. - Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, 2022. – Pp. 261-295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>

4. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57. №3. P. 297-305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
5. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О., В.Ф. Лазар, Н. П. Щекань. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. // *Наук. Вісник Ужгород. ун-ту*, 2022, том 41, №2. С. 91 – 102. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

Стеблянюк П.О.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН У

Мета роботи полягає в створення нового варіанту методу підвищеної точності визначення нестационарного напружено-деформованого стану тонкостінних неоднорідних елементів конструкцій при неізотермічному навантаженні.

В загальному випадку повну систему рівнянь для дослідження поведінки оболонки можна записати в векторному вигляді

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} + \vec{C}, \quad (1)$$

де через \vec{W} позначено вектор, в склад якого входять усі невідомі величини $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$, $W_3 = V_3$, $W_4 = Q_1$, $W_5 = Q_2$, $W_6 = T_1$, $W_7 = T_2$, $W_8 = S$, $W_9 = M_1$, $W_{10} = M_2$, $W_{11} = H$, $W_{12} = \varepsilon_1$, $W_{13} = \varepsilon_2$, $W_{14} = \gamma_1$, $W_{15} = \gamma_2$, $W_{16} = \omega_1$, $W_{17} = \omega_2$, $W_{18} = \chi_1$, $W_{19} = \chi_2$, $W_{20} = \tau$.

В склад вектора \vec{C} входять праві частини з відповідних рівнянь включно з допоміжними величинами $\dot{M}_1, \dot{M}_2, \dot{H}, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2, \dot{\tau}$ і їх похідними по координатах

$$C_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} (S_1^* + S_2^*) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} (T_1^* - T_2^*) - k_1 Q_1^* + q_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} (S_1^* + S_2^*) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} (T_2^* - T_1^*) - k_2 Q_2^* + q_2,$$

$$C_3 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} Q_1^* + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} Q_2^* + k_1 T_1^* + k_2 T_2^* + q^*,$$

$$C_4 = \frac{\partial \dot{M}_1}{\partial x} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} + (\dot{M}_1 - \dot{M}_2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + 2\dot{H} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y},$$

$$C_5 = \frac{\partial \dot{H}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{M}_2}{\partial y} + (\dot{M}_2 - \dot{M}_1) \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} + 2\dot{H} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
C_6 &= K_1 \left\{ \left[(1 + \varepsilon_1) \dot{\varepsilon}_1 + \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_1 + \omega_1 \cdot \dot{\omega}_1 + \nu \cdot \left((1 + \varepsilon_2) \dot{\varepsilon}_2 + \gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - (1 + \nu) \cdot \alpha_T \cdot \left[\dot{T}(0) + \frac{h^2}{24} \cdot \dot{T}''(0) \right] \right\} + \tilde{b}_{11} h, \\
C_7 &= K_1 \left\{ \left[\nu \cdot \left((1 + \varepsilon_1) \dot{\varepsilon}_1 + \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_1 + \omega_1 \cdot \dot{\omega}_1 \right) + (1 + \varepsilon_2) \dot{\varepsilon}_2 + \gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 \right] - \right. \\
&\quad \left. - (1 + \nu) \cdot \alpha_T \cdot \left[\dot{T}(0) + \frac{h^2}{24} \cdot \dot{T}''(0) \right] \right\} + \tilde{b}_{22} h, \\
C_8 &= K_1 \left\{ \left[\nu \cdot \left((1 + \varepsilon_1) \dot{\varepsilon}_1 + \gamma_1 \cdot \dot{\gamma}_1 + \omega_1 \cdot \dot{\omega}_1 \right) + (1 + \varepsilon_2) \dot{\varepsilon}_2 + \gamma_2 \cdot \dot{\gamma}_2 + \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 \right] - \right. \\
&\quad \left. - (1 + \nu) \cdot \alpha_T \cdot \left[\dot{T}(0) + \frac{h^2}{24} \cdot \dot{T}''(0) \right] \right\} + \tilde{b}_{22} h, \\
C_9 &= -D \cdot \left\{ \left[\dot{\chi}_1 + \nu \cdot \dot{\chi}_2 \right] + (1 + \nu) \cdot \alpha_T \cdot \dot{T}'(0) \right\}, \quad C_{10} = -D \cdot \left\{ \left[\nu \cdot \dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 \right] + (1 + \nu) \cdot \alpha_T \cdot \dot{T}'(0) \right\}, \\
C_{11} &= -D \cdot (1 - \nu) \cdot \dot{\tau}, \quad C_{12} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \cdot V_2 - k_1 \cdot V_3, \quad C_{13} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} \cdot V_1 - k_2 \cdot V_3, \\
C_{14} &= -\frac{V_1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y}, \quad C_{15} = -\frac{V_2}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial x}, \quad C_{16} = -k_1 \cdot V_1, \quad C_{17} = -k_2 \cdot V_2, \\
C_{18} &= -\frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial x} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \dot{\omega}_2, \quad C_{19} = -\frac{\partial \dot{\omega}_2}{\partial y} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \dot{\omega}_1, \\
C_{20} &= -\frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial y} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \dot{\omega}_2 + k_2 \cdot \dot{\gamma}_1 = -\frac{\partial \dot{\omega}_2}{\partial x} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \dot{\omega}_1 + k_1 \cdot \dot{\gamma}_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

а матриці A , B (20x20) складені з коефіцієнтів при перших похідних від \vec{W} по координатах x і y відповідно. Ненульові елементи матриці A мають вигляд

$$\begin{aligned}
A_{14} &= \omega_1, \quad A_{16} = 1 + \varepsilon_2, \quad A_{18} = \gamma_2, \quad A_{113} = T_1, \quad A_{115} = S, \quad A_{116} = Q_1, \\
A_{24} &= \omega_2, \quad A_{26} = \gamma_1, \quad A_{28} = 1 + \varepsilon_2, \quad A_{213} = S, \quad A_{214} = T_1, \quad A_{217} = Q_1, \\
A_{34} &= 1 + \varepsilon_2, \quad A_{36} = -\omega_1, \quad A_{38} = -\omega_2, \quad A_{313} = Q_1, \quad A_{316} = -T_1, \quad A_{317} = -S, \\
A_{121} &= 1, \quad A_{142} = 1, \quad A_{163} = -1,
\end{aligned} \tag{3}$$

а ненульові елементи матриці B будуть такі

$$\begin{aligned}
B_{15} &= \omega_1, \quad B_{17} = \gamma_2, \quad B_{18} = 1 + \varepsilon_1, \quad B_{112} = S, \quad B_{115} = T_2, \quad B_{116} = Q_2, \\
B_{25} &= \omega_2, \quad B_{27} = 1 + \varepsilon_1, \quad B_{28} = \gamma_1, \quad B_{212} = T_2, \quad B_{214} = S, \quad B_{217} = Q_2, \\
B_{35} &= 1 + \varepsilon_1, \quad B_{37} = -\omega_2, \quad B_{38} = -\omega_1, \quad B_{312} = Q_2, \quad B_{316} = -S, \quad B_{317} = -T_2, \\
B_{132} &= 1, \quad B_{151} = 1, \quad B_{173} = -1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Застосуємо до векторного рівняння (1) метод покомпонентного розщеплення. Введемо до розгляду сітку за часом ω_t з урахуванням дробового кроку.

$$\omega_t = \left\{ t_p; t_{p+1/2} = t_p + \tau_1; t_{p+1} = t_{p+1/2} + \tau_2; \tilde{\tau} = \tau_1 + \tau_2; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \right\} \tag{5}$$

Ідея методу покомпонентного розщеплення полягає в тому, що замість векторного рівняння (1) на повному кроці інтегрування за часом τ послідовно вирішуються два еквівалентні йому одновимірні векторні рівняння, кожне на своєму дробовому кроці за часом. Ці рівняння мають вигляд

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = A \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \phi_1 \bar{C}, \quad t \in [t_p, t_{p+1/2}], \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = B \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \phi_2 \bar{C}, \quad t \in [t_{p+1/2}, t_{p+1}], \quad (6)$$

де $\phi_1 + \phi_2 = 1$. Система рівнянь доповнюється відомим чином граничними умовами.

Для усіх величин \bar{W} задаються початкові умови в момент часу $t=0$.

Температурне поле оболонки розраховувалось окремо на основі розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності разом з заданими граничними умовами.

Неявна різницева схема для розщепленої системи (6) може бути записана так

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\tau}} (\bar{W}^{p+1/2} - \bar{W}^p) &= \alpha \Lambda_1 \bar{W}^{p+1/2} + \beta \Lambda_1 \bar{W}^p + \phi_1 \bar{C}^p, \\ \frac{1}{\tilde{\tau}} (\bar{W}^{p+1} - \bar{W}^{p+1/2}) &= \alpha \Lambda_2 \bar{W}^{p+1} + \beta \Lambda_2 \bar{W}^{p+1/2} + \phi_2 \bar{C}^{p+1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\alpha + \beta = 1$, t_p – момент часу, в який розв'язок задачі вже відомий, t_{p+1} – момент часу, в який розв'язок розшукується, а диференціальні оператори $\Lambda_n \bar{W}$ мають вигляд

$$\Lambda_1 \bar{W} = \frac{A}{h_1} \cdot \lambda_1(\bar{W}), \quad \Lambda_n \bar{W} = \frac{B}{h_2} \cdot \lambda_2(\bar{W}), \quad n = 1, 2.$$

Тут $\lambda_n(\dots)$ – різницеві оператори, $\bar{W}^{p+n/2}$, $\bar{C}^{p+n/2}$ – вектори розв'язку і правої частини для відповідного моменту часу, h_n – кроки інтегрування по координатах x і y ($n = 1, 2$).

У випадку, коли $\alpha = 0$, $\beta = 1$, схема (7) буде явною. Тоді розрахункові формули можна представити так

$$\bar{W}^{p+1/2} = \bar{W}^p + \tilde{\tau} \left[\frac{A}{h_1} \lambda_1(\bar{W}^p) + \phi_1 \bar{C}^p \right], \quad \bar{W}^{p+1} = \bar{W}^{p+1/2} + \tilde{\tau} \left[\frac{B}{h_2} \lambda_2(\bar{W}^{p+1/2}) + \phi_2 \bar{C}^{p+1/2} \right]. \quad (8)$$

При $\alpha = 1, \beta = 0$ вираз (7) дає неявну схему. Якщо $\alpha = \beta = 1/2$, то має місце схема Кранка–Ніколсона, яка на відміну від двох попередніх схем першого порядку має другий порядок апроксимації за часом.

Розв'язок системи (7) будемо за допомогою наступної ітераційної процедури

$$(\bar{W}^{p+1/2})_{i+1} = \bar{W}_*^{p+1/2} + \tilde{\tau} \frac{A}{h_1} \alpha \lambda_1(\bar{W}_i^{p+1/2} - \bar{W}^p), \quad (9)$$

$$(\bar{W}^{p+1})_{j+1} = \bar{W}_*^{p+1} + \tilde{\tau} \frac{B}{h_2} \alpha \lambda_2(\bar{W}_j^{p+1} - \bar{W}^{p+1/2}) \quad (10)$$

В якості нульової ітерації ($i=0, j=0$) виступає розв'язок, побудований по явній схемі методу покомпонентного розщеплення (8). Елементи матриць A і B визначаються на основі відомого розв'язку відповідно в моменти часу $t^p, t^{p+1/2}$. Тут $\bar{W}_*^{p+1/2}, \bar{W}_*^{p+1}$ розв'язки, отримані на основі явної схеми.

Розглянемо задачу про нестационарну поведінку попередньо стиснутої в напрямку осі x прямокутної в плані циліндричної панелі ($x \in [0, L_1]$, $y \in [0, L_2]$, $R = R_0$). В початковий момент часу задається ненульове значення для нормального переміщення в серединній поверхні ($w = w_0$, $t = 0$, $x = L_1/2$, $y = L_2/2$) і здійснюється нагрівання бокової поверхні по лінійному закону до заданого фіксованого значення ($T = T_*$). Панель до прикладення збурення w_0 і нагрівання знаходиться в безмоментному стаціонарному пружному стані. Края $x=0$, $x=L_1$ ($y \in (0, L_2)$) затиснуті, а края $y=0$, $y=L_2$ ($x \in [0, L_1]$) вільні від навантаження. Деякі результати, які отримані на основі запропонованого вище підходу, наведено нижче.

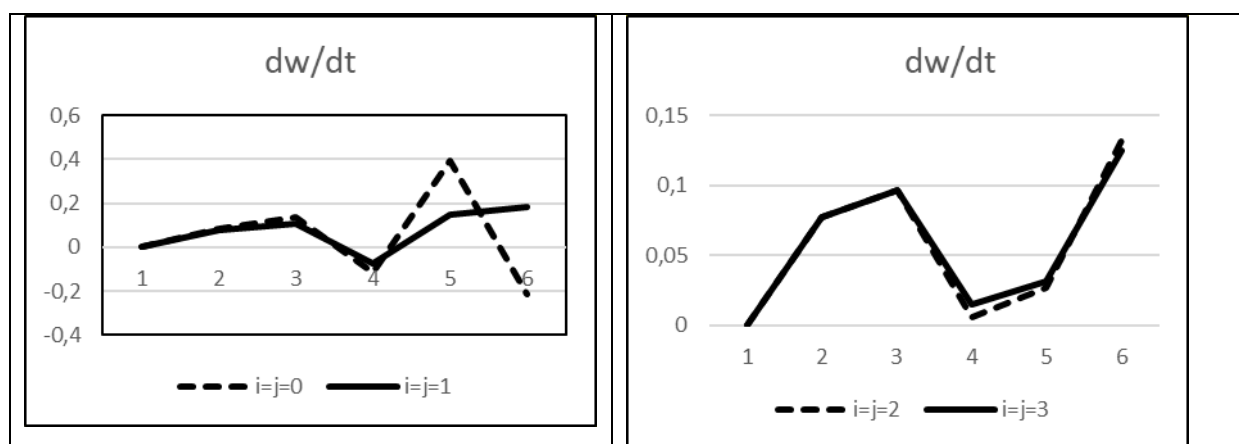


Рис.1 Збіжність результатів для величини V_3 ($x=L_1/2, y=L_2/2$)

На рисунку 1 показано зміни в часі швидкості нормального переміщення ($V_3=dw/dt$) в центрі циліндричної панелі. На рисунку 2 показано зміни в часі швидкості нормального переміщення ближче до затиснутого краю панелі. Тут помітно суттєве зближення результатів, отриманих по явній схемі і за допомогою запропонованої ітераційної процедури.

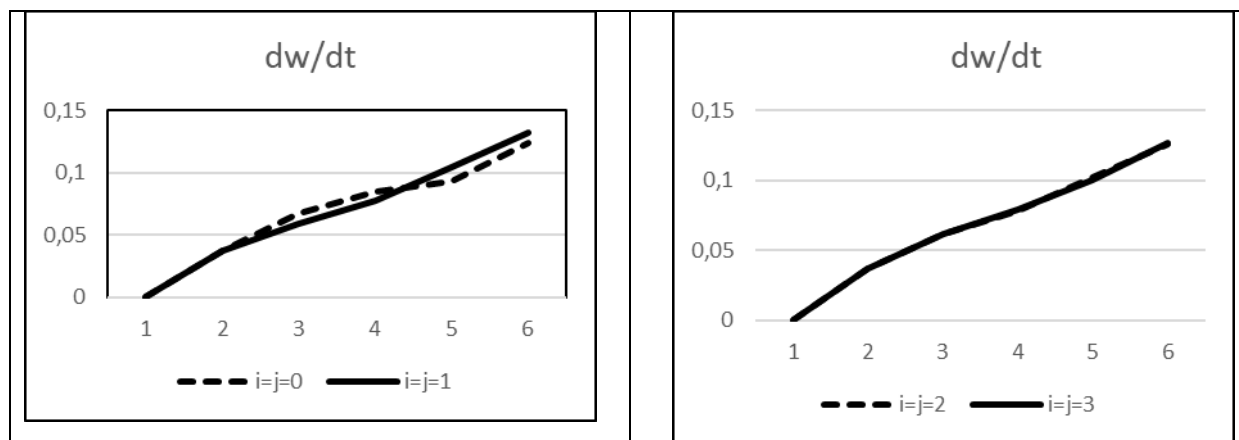


Рис.2 Збіжності результатів для величини V_3 ($x=L_1/4, y=L_2/2$)

Спочатку (за великої кількості кроків у часі) різницю між результатами, отриманими за явною схемою і за допомогою ітераційної процедури може відрізнятися навіть якісно, але зі збільшенням числа ітерацій помітна тенденція до їх збіжності.

Застосування апарату сплайн-функцій дає можливість записати нові більш точні різниці вирази для диференціальних операторів $\lambda_n(\dots)$, що входять в склад схеми розщеплення. Це дозволило підвищити, як мінімум на порядок, точність обчислень по координатах при розв'язанні нестационарної задачі теорії термопружнопластичності для пластин і оболонок.

ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НА ПАРАМЕТРИ ДЕФОРМУВАННЯ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

О.В. Дунчик, В.В. Лобода

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Розглядається плоска задача про деформування тіла з міжфазною тріщиною в п'єзоелектричному біматеріалі, складеному з промислових п'єзочермамік PZT-4 та PZT-5Н. Верхня і нижня грані п'єзоелемента вкриті електродами, котрі знаходяться під дією різниці електричних потенціалів і розтягуючого зусилля σ_{∞} . Дослідження верифіковано порівнянням аналітичного та чисельного розв'язку. Для аналітичного розв'язку використано результати [1] для п'єзоелектричної біматеріальної площини, отримані на основі розв'язку проблеми Гільберта-Рімана [2]. Отримано систему для знаходження невідомих напружень та електричного потоку. Чисельний розв'язок цієї задачі проведено за допомогою методу скінчених елементів. Структура сітки в околі тріщини показана на рис. 1. При цьому проведено збільшення кількості елементів у околі вершини тріщини для покращення точності отриманих результатів. Показано вплив електричного поля на механічні характеристики привершинної зони тріщини і його додатковий вплив на розкриття тріщини (рис. 2.). Знайдено нормальні напруження σ_{yy} . Величина такого напруження не залежить від різниці потенціалів, а лише від прикладеного розтягуючого зусилля σ_{∞} , причому має місце концентрація напружень справа від тріщини.

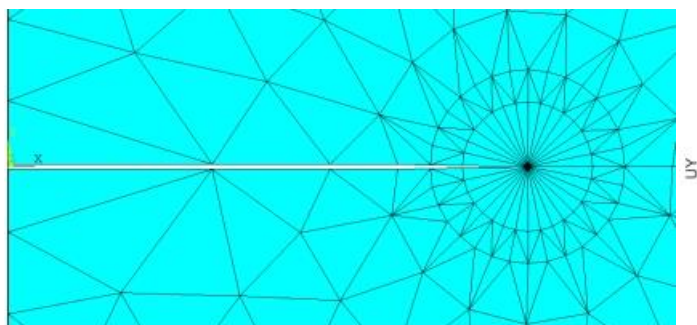


Рис. 1. Сітка елементів в околі вершини тріщини

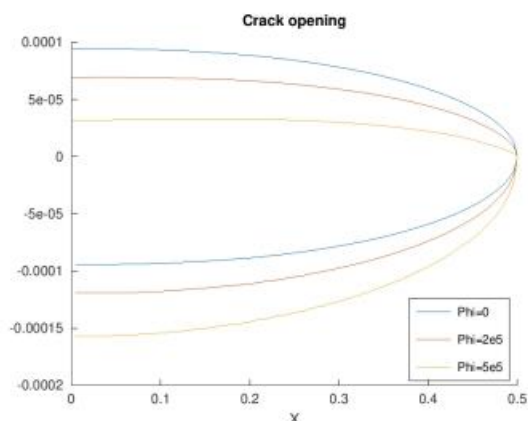


Рис. 2. Розкриття тріщини при різних ϕ_0

Встановлено добру узгодженість між чисельними і аналітичними результатами.

1. Herrmann K.P., Govorukha V.B., Loboda V. V., On contact zone model for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial. International J. of Fracture, vol.111, 2001, pp.203-227.
2. Muskhelishvili N.I., 1963. Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ПСЕВДО-ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ СПЛАВІВ

Стеблянко П.О.¹ Петров О.Д.², Черняков Ю.А.²

¹Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України;

²Дніпровський національний університет імені О. Гончара

Вибір визначальних співвідношень між напруженнями і деформаціями обґрунтовується узгодженістю з експериментом і пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. Значення деформацій є функціями процесу зміни напружень і температури, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних факторів. Тензор повної деформації будемо представляти як суму пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації і деформації, яка викликана температурними змінами. Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати за допомогою функції, яка дає межі поверхні в просторі напруження. При переході через границю цієї поверхні стрибком зростає деформація, обумовлена фазовими переходами. Конкретний вид цієї поверхні наведено в роботах [1;2]. Пластичні деформації мають задовольняти співвідношенням теорії, яка застосовується. Проведено узагальнення відомих фізичних співвідношень на випадок термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Це теорія течії, теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни та інші. Наведено конкретні приклади запису таких співвідношень. У запропонованій доповіді сформульована нелінійна феноменологічна модель для опису властивостей матеріалу саме в точці. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма пружного матеріалу, що складається з трьох нелінійних ділянок. Це дозволило описати ряд експериментальних даних при різних формах зразків і умовах навантаження, включаючи циклічне температурне і силовий вплив. Встановлено конкретні залежності для механічних параметрів. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Результати розрахунків значень дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом для інтегральної діаграми сплаву наведені нижче

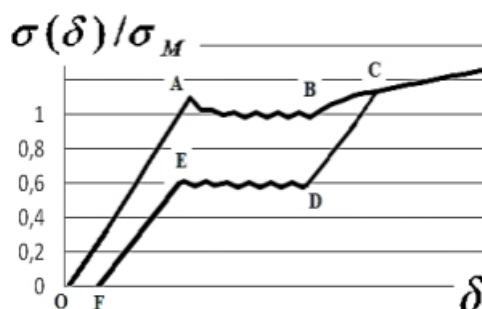


Рис. 1 Інтегральна діаграма матеріалу [2]

Перша ділянка OA інтегральної діаграми матеріалу відповідає пружній поведінці. Третя характеризує зміцнення матеріалу. Між ними знаходиться ділянка, що нагадує за поведінкою ідеально пластичний матеріал. Подібні області виникають і при

розвантаженні CDEF, але при певних температурах.

В доповіді наведено фізичні співвідношення, придатні для вивчення обох процесів. Для цього процес навантаження тіла в часі розбивається на окремі дрібні етапи, на кожному з яких за допомогою постулату ізотропії та закону пружної зміни об'єму зафіксовано зв'язок між напруженнями та деформаціями.

Список літератури

1. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Evolution of phase transitions. – Cambridge University Press, 2006. – 258 p.
2. *Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.* Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / Structural Integrity, Volume 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. – P. 205–208.

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ГАЗОНОСНИХ ПІСКОВИКІВ В ЗОНІ ВПЛИВУ ОЧИСНОГО ВИБОЮ

О.П. Круковський, В.В. Круковська, А.О. Костриця

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

Виконання буропідричних робіт у пісковиках, небезпечних за викидами породи та газу, необхідно виконувати в розвантаженій від гірського тиску зоні або в режимі струсного підривання, із зупинкою очисних робіт на тривалий час [1]. Тому дослідження зміни у часі поля напружень в газоносних породах навколо очисного вибою є актуальною задачею з точки зору забезпечення безпеки ведення гірничих робіт і підвищення ефективності вуглевидобутку. З одного боку, розвантаження порід від гірського тиску під час ведення гірничих робіт – це геомеханічний процес. З іншого боку, наявність метану в тріщинно-поровому просторі теж впливає на розподіл напружень в масиві. Але наскільки помітний цей вплив при дослідженні розвантаження газоносних пісковиків в очисній виробці? Для відповіді на це питання виконано порівняння результатів розрахунків поля напружень у двох випадках:

1) при розв'язанні рівняння, що описує деформування порід без урахування наявності газу в тріщинно-поровому просторі пісковика:

$$c_g \frac{\partial}{\partial t} u_i = \sigma_{y,j} + X_i(t),$$

де c_g – коефіцієнт демпфування, кг/(с×м³); u_i – переміщення, м; t – час, с; s_{ij} – похідні від компонент тензора напружень по x, y , Па/м; $X_i(t)$ – проекції зовнішніх сил, що діють на одиницю об'єму твердого тіла, Н/м³,

2) при розв'язанні системи рівнянь:

$$c_g \frac{\partial}{\partial t} u_i = \sigma_{y,j} + X_i(t) + P_i(t);$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2\mu_g m} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} \right) + q(t),$$

де $P_i(t)$ – проекції сил, обумовлених тиском газу в тріщинно-поровому просторі, Н/м³; p – тиск газу, Па; k – фільтраційна проникність порід, м²; m_g – в'язкість газу, Па×с; m –

пористість порід, %; q – функція газовиділення.

В якості початкових і граничних умов для поставленої задачі задаються:

$$\sigma_{yy}|_{t=0} = \gamma H; \quad \sigma_{xx}|_{t=0} = \lambda \gamma H; \quad p|_{t=0} = p_0;$$

$$u_x|_{\Omega_1} = 0; \quad u_y|_{\Omega_2} = 0; \quad p|_{\Omega_3} = p_{at}; \quad p|_{\Omega_4(t)} = p_0,$$

де g – середня вага порід, що розташовані вище, Н/м³; H – глибина ведення гірничих робіт, м; l – коефіцієнт бічного розпору; W_1 – вертикальні межі зовнішнього контуру; W_2 – горизонтальні межі зовнішнього контуру; W_3 – контур виробки; $W_4(t)$ – межі області фільтрації, що змінюються у часі; p_0 – пластовий тиск газу, МПа; p_{at} – атмосферний тиск, МПа. Задача розв'язується в пружно-пластичній постановці. Для математичного опису переходу порід в порушений стан застосовується критерій Кулона-Мора, залежність $k(s_{ij})$ взято з [1]. Для розв'язання рівнянь застосовується метод скінчених елементів, для аналізу поля напружень – параметр $P^* = s_3/gH$, що характеризує розвантаження порід від гірського тиску. При моделюванні прийнято, що очисну виробку закріплено механізованим кріпленням, рис. 1; глибина ведення очисних робіт – 900 м; потужність вугільного пласта – 2 м; $p_0 = 8$ МПа. Порода, що вміщує виробку, – алевроліт. У підшві пласта залягає газоносний пісковик потужністю 10 м. Газоносність вугілля – 22 м³/т, пісковика – 2 м³/т.



Рисунок 1 – Центральний фрагмент скінчено-елементної сітки

В результаті розрахунків отримано зони непружних деформацій, розподіли значень напружень в породному масиві і в кріпленні. На рис. 2 показано графіки зміни величини розвантаження порід підшви виробки, де розташований газоносний пісковик, розраховані вздовж вертикальної прямої в 0,5 м перед кріпленням.

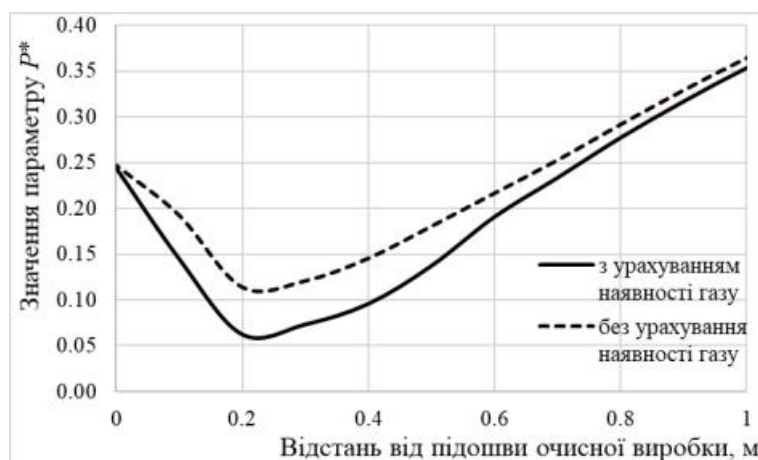


Рисунок 2 – Зміна значень параметра P^* в підшві виробки

Видно, що урахування участі процесу фільтрації метану в розвантаженні газоносного пісковику призводить до зниження значень параметра P^* . Тобто падіння тиску газу в області фільтрації, дегазація газоносних порід призводять до більш повного їх розвантаження. Похибка розрахунку при нехтуванні газової складової деформаційних процесів сягає 80% в 0,2 м від підшови виробки і зменшується з глибиною, рис. 2.

Таким чином, при розрахунках напружено-деформованого стану газоносних порід на великих глибинах необхідно розглядати зв'язані процеси їх деформування і фільтрації газу, що міститься в тріщинно-поровому просторі.

Література

1. Krukovska V.V., Krukovskyi O.P., Kocherga V.M., Kostrytsia A.O. Solving coupled problems of geomechanics and gas filtration for mining safety ensuring // Geo-Technical Mechanics, 2022. – №160. – P. 106-122.

ВІДПАЛ В'ЯЗКОПРУЖНИХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Є.М. Ірза

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН

Запропоновано методику розрахунку термонапруженого стану в'язкопружних структурно неоднорідних тіл при відпалі. Фізико-механічні характеристики матеріалу тіла розглянуто залежними від просторових координат і температури. Тіло піддається технологічному нагріванню від початкової температури t_0 до деякої максимальної температури t_{\max} , витримці при даній температурі (при якій відбувається релаксація залишкових напружень в тілі) і подальшим охолодженням до початкової, яке здійснюється зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\tau)$ через поверхню Γ_t . При цьому температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\nabla(k\nabla t) - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (1)$$

за початкової і крайової умов

$$t(\bar{r}, 0) = t_0(\bar{r}) \quad \text{на } \Omega; \quad k\nabla t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \quad \text{на } \Gamma_t. \quad (2)$$

Поведінка тіла описується рівняннями термов'язкопружності [1]:

$$\begin{cases} d\{\tilde{\varepsilon}\} = d\{\tilde{\varepsilon}^e\} + d\{\tilde{\varepsilon}^c\} \\ \sigma_0 = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \end{cases} \quad (3)$$

Обмежуємося випадком малих деформацій. В області Ω повинні виконуватися рівняння рівноваги і граничні умови. При розв'язуванні системи рівнянь термомеханіки використано метод зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів [2].

Задача теплопровідності (1)–(2) зведена до вигляду:

$$[C_t] \frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t]\{T\} = \{f_t\} \quad (4)$$

Системи рівнянь, які описують модель поведінки термов'язкопружного тіла, зведена до вигляду (інтегрального рівняння Вольтера другого роду):

$$[K_u]\{U(\tau)\} = \{F_0\} + \int_{\tau_0}^{\tau} [F_1(\tau, \xi)]\{U(\xi)\}d\xi - \{F_2\} \quad (5)$$

Розраховано термонапружений стан порожнистого термов'язкопружного структурно неоднорідного циліндра за заданим режимом відпалу.

1. Стащук М. Г., Ірза Є. М. Термонапруження функціонально-градієнтних тіл за відпалу// Фіз.-хім. механіка матеріалів. -2021. №4. С.71-78.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: “Butterwoth Heinemann”, 2000. - 689p..

БЕЗПЕКА І ЗАЛИШКОВИЙ РЕСУРС ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Пошивалов В.П., Данієв Ю. Ф.

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України

В даний час існує суперечність між необхідністю виконання зростаючих за своєю складністю завдань забезпечення безпечної експлуатації технічних об'єктів (ТО) та труднощами відновлення старіючого обладнання, включаючи систему безпеки. Одним із способів усунення цієї суперечності є визначення фактичного стану систем ТО шляхом оцінювання їх залишкового ресурсу (сумарного напрацювання обладнання в годинах, кубометрах, кілометрах, циклах тощо від моменту проведення контролю його технічного стану до переходу в граничний стан). Це призводить до необхідності вдосконалення існуючих методів і створення нових підходів до оцінки залишкового ресурсу. Існує два методи розрахунку залишкового ресурсу об'єктів: метод математичних моделей та метод експертних оцінок [1]. Для оцінки залишкового ресурсу ТО після закінчення часу τ введено показник середнього залишкового ресурсу, визначений за формулою

$$R(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} P(x) dx$$

де $P(x)$ – ймовірність безвідмовної роботи об'єкта протягом часу x .

У роботі розглядається оцінка залишкового ресурсу систем з функцією розподілу часу безвідмовної роботи елементів Вейбулла елементів

$$P(x) = \exp(-\lambda x^{\alpha}),$$

де λ і α параметри розподілу. Наявність різнорідних даних при оцінці залишкового ресурсу (експертних оцінок, дані технічного діагностування, методів прогнозування) вимагає розробки підходів, які враховували б всю цю інформацію.

У цьому плані в роботі розглядається метод прогнозування з урахуванням штучних нейронних мереж [2, 3]. Нейронні мережі застосовуються тоді, коли невідомі залежності між вхідними і вихідними даними, у ситуаціях, коли справляються як традиційні математичні, так і експертні системи.

При побудові нейронних мереж з метою оцінки їх залишкового ресурсу треба попередньо підготувати вхідні дані та привести їх до одного виду. Дані мають бути достовірними та обґрунтованими для отримання реальних показників надійності.

Список використаних джерел

1. Ю. Ф. Даниєв, В. П. Пошивалов, Л. В. Резниченко. Оценка остаточного ресурса сложных технических систем по данным эксплуатации // Математические проблемы

- технической механики-2014: межд. науч. конф.: сб. трудов. – Днепропетровск – Днепродзержинск: Днепродзерж. госуд. технологический универ., 2014. - С. 100.
2. Kohonen T. Self-organizing maps. Berlin etc: Springer, 1995. xV. 362 p.
3. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992. 237 с.

ПОБУДОВА КРИТЕРІЮ ДОВГОТРИВАЛОГО РУЙНУВАННЯ ВТОМИ ТОНКОСТІННИХ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК

Б.П. Маслов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Однією з фундаментальних проблем механіки довготривалого руйнування є моделювання опору втоми волокнистих та шаруватих композитних матеріалів при комбінованому циклічному навантаженні [1, 2]. Ця проблема вважається набагато більш важливою стосовно композитів та елементів конструкцій із них аніж для суто металевих виробів [1]. Різниця полягає в тому, що в багатьох практично важливих випадках попередній напружений стан традиційних однорідних матеріалів може вважатися одновимірним. Отже параметри опору втоми можна визначити при циклічному навантаженні напруженнями зі сталою амплітудою згідно з існуючими кривими для відповідного напруженого стану. З іншого боку навіть для простіших композитних структур типу шаруватих, армованих односпрямленими волокнами, напружений стан в кожному шарі є локально тривимірним. Це призводить до необхідності формулювання критеріїв руйнування від втоми під дією комбінованого навантаження. Перспективним напрямком є розв'язок задач розрахунку довговічності внаслідок втоми тонкостінних циліндричних оболонок за умов двовісного комбінованого навантаження на основі концепції еквівалентних напружень з використанням класичних критеріїв руйнування [2]. Міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх σ_m або максимальних σ_{max} за цикл навантаження напружень в матриці і волокнах, кількості циклів n та ін.. При цьому волокнисті композити виявляють анізотропні властивості. Це вимагає створення узагальнених моделей деформування, оскільки в мікроструктурі реалізується не одновимірний напружений стан. Важливим є вивчення мікроструктурних напружень [3] і деформацій, особливо у випадках циклічного зовнішнього впливу. Основоположене практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних пружних характеристик. У цій роботі розглянемо пружний трансверсально ізотропний композитний матеріал з випадковою структурою в площині перпендикулярній напрямку армування. В межах теорії пружності малих деформацій визначальне співвідношення між деформаціями і напруженнями вважаємо фізично нелінійним, відповідно до модельних уявлень [3]. Тензор деформацій $e^{(n)}$ залежить від компонент тензора напружень $\sigma^{(n)}$ [2].

Розглянемо матеріал із нелінійно пружною матрицею, яка армована високомодульними ізотропними волокнами. Їх поведінка залишається лінійно пружною до моменту руйнування. Напрямок армування у кожному шарі задаємо вектором $n = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$. Отже, макроскопічні напруження $\bar{\sigma}$ та деформації \bar{e} трансверсально ізотропного шару композиту пов'язані співвідношеннями, де

використано основні пружні характеристики: E_T, E_L - поперечний та поздовжній модулі Юнга, G_T, G_L - поперечний та поздовжній модулі зсуву, ν_T, ν_L - поперечний та поздовжній коефіцієнти Пуассона, відповідно. Матрицю композиту вважаємо ізотропною та такою, що деформується нелінійно, виявляючи ефект зміцнення. В анізотропному композитному середовищі еквівалентні напруження [2] виразимо через систему відповідних інваріантів [1]

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}_d \cdot \boldsymbol{\sigma}_d) = \sum_{m=1}^5 \beta_m T_m, \quad \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = -1, \beta_3 = 1, \beta_4 = \frac{3}{2}, \beta_5 = 3.$$

$$T_1 = \sigma_{aa}^2; \quad T_2 = \sigma_{aa} \sigma_{33}; \quad T_3 = \sigma_{33}^2; \quad T_4 = \sigma_{ab} \sigma_{ab}; \quad T_5 = \sigma_{a3} \sigma_{3a}, \quad (a, b = 1, 2); \quad (1)$$

Односпрямлений волокнистий композит в початковому недеформованому стані має поперечно ізотропні пружні властивості. Але можна припустити, що матеріал збереже цю макросиметрію під час циклів навантаження, доки не станеться руйнування. З цього випливає, що критерії руйнування повинні бути функціями трансверсально-ізотропних інваріантів циклічного тензора напружень і, отже, можливо бути застосованим метод, аналогічний використаному в [2]. Тобто має сенс використати структуру критерію миттєвого руйнування для волокнистого композиту [1]. Вважаємо, що вісь x_1 спрямована у напрямку волокна і застосуємо систему інваріантів трансверсально ізотропної пружності

$$I_1 = \sigma_{11}, \quad I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33} = \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2,$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2, \quad I_5 = 2\sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31} - \sigma_{22} \sigma_{31}^2 - \sigma_{33} \sigma_{12}^2. \quad (2)$$

Звідси випливає, що умову руйнування внаслідок втоми можна записати в узагальненій формі

$$F_f(I_1, I_4, R, N) = 1, \quad F_m(I_2, I_3, I_4, I_5, R, N) = 1, \quad R = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}. \quad (3)$$

Використаємо надалі критерій запропонований в роботі [2] для визначення руйнування матриці або волокон у композиті. Щодо матриці запишемо його у вигляді

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_T^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}}{\tau_T^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_A^2} = 1,$$

$$\sigma_T = \sigma_T(R, n), \quad \tau_A = \tau_A(R, n), \quad \tau_T = \tau_T(R, n) \quad (4)$$

де

$$\sigma_A = \sigma_A(-1, N), \quad \sigma_T = \sigma_T(-1, N),$$

$$\tau_A = \tau_A(-1, N), \quad \tau_T = \tau_T(-1, N)$$

є напруження руйнування для симетричного циклу $R = -1$. Якщо задано їх S-N криві, для будь-якого заданого стану циклічного напруження в (4) надалі розглядаються як рівняння з невідомим N , числом циклів до руйнування, також званий втомний ресурс. Кожне з (3), (4) розв'язано окремо і руйнування визначається критерієм, до якого призводить менший N . Ця процедура визначає довговічність втоми та умову руйнування.

Як приклад слід зазначити, що розповсюджена структура типу композитний ламінат містить однонаправлено армовані шари, що знаходяться у комбінованому напруженому стані. Повний тривимірний стан напружень реалізується переважно біля отворів у ламінаті та на краях ламінату. Це складні випадки, які вимагають аналізу чисельними методами. На основі отриманих результатів розподілу напружень

необхідно застосувати критерій руйнування втоми типу (3), (4) для трансверсально ізотропного композитного матеріалу.

1. Hashin Z. Fatigue failure criteria for unidirectional fiber composites // Transactions of the ASME. – 1981. - **48**, N 12. – p. 846 - 852.
2. Голуб В.П. Классические критерии разрушения в решении задач усталости при двухосном комбинированном нагружении // Вісник НТУУ «КПІ», „Машинобудування”, 2014. – №72. – С. 109-117.
3. Maslov V.P. Nonlinear hereditary creep of isotropic composites of random structure // Int. Appl. Mech., 2022.- 58, N 1.- P. 75-90.

ДО РОЗВ’ЯЗКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПРОСТОРИ УЗАГАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Ю.А. Мейш, д.т.н., проф., Арнаута Н.В., к.ф.-м.н., доц.

Національний транспортний університет, м. Київ

Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ

Метою даної роботи є використання апарату узагальнених функцій при розв’язанні задач динаміки підкріплених циліндричних оболонок, а також у конструюванні ефективних різницевих схем у просторі узагальнених функцій для розв’язання поставлених задач. Застосування цього підходу можливе також при розв’язанні статичних задач підкріплених циліндричних оболонок. Крім того, в задачах не передбачається завдання умов жорсткого контакту оболонки з підкріплюючими ребрами. Розглядається питання коректності розширення на узагальнені функції класичної початково-крайової задачі для підкріплених циліндричних оболонок. Доводиться коректність цього розширення при умові жорсткого закріплення торців оболонки, що відповідає нульовим граничним умовам. Оболонка та підкріплюючі ребра описуються лінійною теорією оболонок типу Тимошенка. Система рівнянь руху підкріпленої циліндричної оболонки в просторі узагальнених функцій наведена в [1], у припущенні про довільні умови сполучення ребра з оболонкою. Можливі два види умов сполучення ребер з оболонкою: 1) жорсткий контакт; 2) рухливий контакт. У разі жорсткого контакту ребра з оболонкою різницеві схеми для рівнянь руху побудовані в [2, 3] та наведено умови сполучення ребра з оболонкою. Крім наведених, розглядалися граничні умови довільного типу, куди можуть входити і похідні, що не є диференційованими в класичному розумінні. Це відповідає, наприклад, торцевій взаємодії на оболонку при розміщенні на торці оболонки підкріплюючого ребра. Для побудови різницевих схем застосовуються умови поєднання ребра з оболонкою загального виду. В області зміни просторової змінної вводяться сітки з цілими та напівцілими індексами. Різницева схема будується таким чином, що зусилля - моменти співвідносяться до вузлів сітки різної з напівцілими індексами, а переміщення - до вузлів з цілими індексами. Побудована наступним чином різницева схема має другий порядок точності у гладкій частині оболонки та перший порядок у точці контакту ребра з оболонкою і дозволяє обчислювати кінематичні та силові характеристики оболонки та ребер. Слід відмітити, що запропонований підхід може бути використаний для розв’язання довільної лінійної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних,

до складу якої входять функції, що є недиференційованими в класичному розумінні деяких точках своєї області визначення та такі, що мають змінні коефіцієнти.

Література

1. Богданов С.Ю. Расширение на обобщённые функции классической задачи динамики для подкреплённой цилиндрической оболочки. // Системні технології 4(45) 2006. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Дніпропетровськ. 2006. с.134-138.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. Акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Луговой П.З, Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур: монографія / П.З Луговой, ВФ. Мейш, Ю.А. Мейш; під ред. акад. НАН України О.М. Гузя. Київ: Видавництво Ліра-К, 2022. 326 с.

ДО ПОБУДОВИ ТА ЧИСЛЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНИХ ПО ТОЛЩИНЕ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Ю.А. Мейш¹, Н.В. Майбородина², В.П. Герасименко²

¹*Національний транспортний університет, м. Київ*

²*Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»*

Розглядається неоднорідна пружна структура, що являє собою тришарову неоднорідну по товщині, еліпсоїдальну оболонку. При побудові математичної моделі процесу динамічного деформування неоднорідної конструкції, використовується варіант теорії оболонок типу Тимошенко [1]. Як математичну модель процесів вимушених коливань тришарової еліпсоїдальної оболонки розглянуто гіперболічну систему нелінійних диференціальних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенко. Напружено-деформований стан пружної структури описується з використанням геометрично нелінійного варіанта теорії оболонок у квадратичному наближенні [1-3]. Рівняння коливань гладкої оболонки у диференційній формі мають вигляд [3]. Рівняння коливань доповнюються відповідними граничними умовами та нульовими початковими умовами. Побудова чисельного алгоритму базується на використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевої схеми по просторовим координатами та явною скінченно-різницевою схемою інтегрування типу "хрест" за часовою координатою [1, 3]. Виконуючи операцію інтегрування рівнянь, використовуючи явну апроксимацію за часовою координатою, отримаємо різницеві рівняння. Компоненти узагальненого вектора переміщень співвідносимо до цілих точок різницевої сітки за просторовими змінними, а компоненти узагальненого тензора деформацій та зусиль до напівцілих точок сітки. Такий підхід дозволяє зберегти

дивергентну форму різницевого подання диференціальних рівнянь, а також виконання закону збереження повної механічної енергії на різницевому рівні [1, 4]. Перехід від неперервної системи до скінченно-різницевої виконується у два етапи. Перший етап полягає у різницевій апроксимації дивергентних рівнянь коливань у зусиллях-моментах. Другий етап полягає у різницевих апроксимаціях величин зусиль-моментів та відповідних деформацій. Як числовий приклад досліджується динамічне деформування тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко защемленими краями при дії розподіленого нормального навантаження. Проведено порівняльний аналіз результатів розрахунків величин переміщень, деформацій та напружень для випадків одношарової і тришарової оболонок.

Литература:

1. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. Акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полиграф.центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems Under Non-Stationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 5. – P. 481 – 537.
3. Meish, V.F., Maiborodina, N.V. Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells Under a Nonstationary Normal Load // International Applied Mechanics, 2018, 54 (6), pp. 675–686.
4. Meish V.F., Meish Yu.A., Belova M.A. Nonstationary Dynamics of Elliptic Isotropic Conical Shells under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 4. – P. 424-431.

ДО ЗАДАЧІ ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТРИВИМІРНОЇ МОДЕЛІ ЗА УМОВ ОДНОЧАСНОЇ ДІЇ РОЗТЯГУ ІЗ КРУЧЕННЯМ

В.С. Ушакова¹, О.В. Ушаков²

¹*Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України,*

²*Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України*

В механіці деформівного твердого тіла матеріали, у визначальні рівняння яких входить час у формі часових інтегральних операторів ідентифікуються як в'язкопружні, а стан таких матеріалів – як в'язкопружність. До в'язкопружних матеріалів належать полімери і композити на їх основі, бетони, гірські породи і ґрунти, лід, пластмаси, метали і сплави. Особливе значення мають конструкційні матеріали та елементи конструкцій що деформується і руйнуються за умови складного напруженого стану, а тому велике значення має прогнозування деформацій повзучості. Для прогнозування таких деформацій найоптимальнішою є нелінійна тривимірна модель [1]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3 \varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{2 \sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); \\ \varepsilon_i(t) = \psi_i(\sigma_i(t)) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \psi_i(\sigma_i(\tau)) d\tau; \\ \varepsilon_v(t) = \psi_v(\sigma_0(t)) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \psi_v(\sigma_0(\tau)) d\tau; \\ (i, j = \overline{1,3}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3 \varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{2 \sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); \\ \varepsilon_i(t) = \psi_i(\sigma_i(t)) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \psi_i(\sigma_i(\tau)) d\tau; \\ \varepsilon_v(t) = \psi_v(\sigma_0(t)) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \psi_v(\sigma_0(\tau)) d\tau; \\ (i, j = \overline{1,3}), \end{cases} \quad (1)$$

яка побудована виходячи із залежності між інваріантами, що задають скалярні властивості середовища. Тут $\varepsilon_{ij}(t)$ $\varepsilon_{ij}(t)$ – компоненти тензора деформацій і $\sigma_{ij}(t)$ $\sigma_{ij}(t)$ компоненти тензора напружень; $\varepsilon_v(\cdot)$ $\varepsilon_v(\cdot)$ і $\varepsilon_i(\cdot)$ $\varepsilon_i(\cdot)$ – об'ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій; $\sigma_0(t)$ $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(t)$ $\sigma_i(t)$ – перший інваріант і інтенсивність тензора напружень; δ_{ij} δ_{ij} – дельта-функція Кронекера; t – час спостереження; τ – час, що передує часу спостереження.

Як і будь-яка інша модель механіки, співвідношення (1) справедливі за умов виконання певних гіпотез і обмежень. Для застосування моделі (1) необхідне виконання двох умов, а саме існування єдиної діаграми миттєвого і довготривалого деформування. Слід зауважити, що нелінійність матеріалів не є необхідною умовою, оскільки дана модель справедлива і для лінійних матеріалів.

В роботі наводиться алгоритм обґрунтування застосування нелінійної тривимірної моделі до задач розрахунку деформацій повзучості за умов одночасної дії розтягу з крученням. Існування єдиної діаграми миттєвого деформування обґрунтовується за результатами короткотривалих випробовувань тонкостінних трубчатих зразків на одновісний розтяг і чисте кручення. Вирази для інтенсивності напружень і деформацій за умов одновісного розтягу мають вигляд

$$\sigma_i = \sigma_{11}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{11} - \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_{11}, \quad \sigma_i = \sigma_{11}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{11} - \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_{11}, \quad (2)$$

а за умов чистого кручення – вигляд

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_{21}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{21}. \quad \sigma_i = \sqrt{3} \tau_{21}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{21}. \quad (3)$$

Тут E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона.

Єдина діаграма миттєвого деформування існує в певному довірчому інтервалі, який, як правило, будується в межах $\pm 5\% \pm 5\%$. Більші межі інтервалу можуть призвести до суттєвих похибок в розрахунках [2].

Із факту існування єдиної діаграми «миттєвого» деформування випливає, що залежність інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій може бути визначена за результатами випробувань на одновісний розтяг. В цьому випадку вирази

для інтенсивності напружень і деформацій за умов одновісного розтягу і чистого кручення задаються у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6\varepsilon_{21}^2} \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6\varepsilon_{21}^2},\end{aligned}\tag{4}$$

де $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ – поперечні деформації [2].

Виконання умов існування єдиних діаграм миттєвого і довготривалого деформування в певному довірчому інтервалі, дає підставу застосовувати нелінійну тривимірну модель до задач розрахунку деформацій повзучості за умов складного одночасної дії розтягу з крученням.

1. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Rezyk V.S. Calculation of creep strains of the thin-walled tubular members made of linear viscoelastic materials under tension and torsion // *Int. Appl. Mech.*, 2022. – Vol. 58, N2. – P. 160-169.
2. Резнік В.С., Ушаков О.В., Горун О.Ю. Щодо розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з полімерних матеріалів за умов розтягу з крученням // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки*, 2021. – №3. – С. 115-118.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЖОРСТКОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КЕРУВАННЯ РОБОТА-МАНІПУЛЯТОРА

Д.Є. Патіка, А.Є.Шевельова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

В умовах сьогодення, механічні роботи-маніпулятори являють собою просторові механізми у вигляді кінематичних ланцюгів, до складу яких входять ланки, кінематичні пари та системи приводів, зазвичай окремих для кожного ступеня вільності. Маніпулятор, як механічна система, являє собою керований багатоланковий просторовий механізм, основними компонентами якого є виконавчий пристрій, що приводить в дію робочий орган, відповідно до заданих законів руху, що в підсумку дозволяє виконання потрібних технологічних операцій. Роботи широко використовуються у біотехнологіях, дослідженні космічного простору, військовій розвідці, виробництві продуктів та напоїв, медичних дослідженнях, технологічному виробництві.

Розглядається керування роботами з пружними з'єднаннями в контакт з динамічним середовищем, включаючи динаміку приводів та пружність з'єднань. Нехай тіло маніпулятора складається з двох абсолютно твердих жорстких стрижнів довжин l_1 та l_2 , які з'єднані з нерухою основою або між собою за допомогою ідеальних циліндричних шарнірів. Кожний із шарнірів пружно зв'язаний із привідним пристроєм, що дозволяє здійснювати керування стрижнем, за кутовим прискоренням повороту вала

відповідного двигуна або за моментом навантаження, який розвиває двигун на валу. На кінці другого стрижня (на кінці цього маніпулятора) жорстко прикріплено вантаж (абсолютно тверде тіло).

Математична модель динаміки маніпулятора, яку побудовано на основі формалізму рівнянь Лагранжа другого роду, включає систему нелінійних взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь. Задачу кінематичного керування системою сформулюємо так. За заданим програмним законом зміни в часі кутів поворотів валів двигунів приводних пристроїв потрібно визначити керуючі моменти. Задача динамічного керування системою полягає в знаходженні функцій кутових переміщень ланок та кутів поворотів валів двигунів за відомим програмним законом зміни за часом електромагнітних моментів двигунів приводних пристроїв.

Система нелінійних диференціальних рівнянь задачі відноситься до жорсткого типу і значить, що її розв'язки містять одночасно компоненти, що повільно змінюються і швидко затухають. Наявність швидко затухаючих компонент істотно ускладнює побудову розв'язків на великих інтервалах. Для розв'язання такої системи звичайних диференціальних рівнянь були застосовані спеціальні методи розв'язання жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь. Аналізувалися неявний однокроковий метод Адамса з пошуком мінімального необхідного кроку та неявний метод Рунге-Кутта.

Ці методи застосовувались при виявленні ознак жорсткості системи, інакше використовувався явний метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

Проведено числові експерименти. Виконано аналіз впливу зміни коефіцієнтів жорсткості приводів на динаміку робота-маніпулятора при динамічному керуванні.

NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS USING COMPUTER TECHNOLOGIES

A.V. Sohatsky

University of Customs and Finance. Ukraine

The need to quickly solve problems in various fields has led to the widespread use of computer technology. Solving the problems of improving and creating new types of various technical devices, including transport vehicles, in a short time is associated with the improvement of computer technology. Optimization of technical characteristics, stability and controllability parameters requires the use of not only advanced mathematical models, but also high-performance computing. Mathematical models, algorithms, software packages, electronic computers and their support systems are important elements of computer technology. The combination of these elements creates a technological chain of computer modeling: mathematical model - numerical algorithms - programming - electronic computers - calculations - analysis of results - decision-making.

The significant need for high-performance computer technologies is driven by factors such as the complexity of the tasks under study, the high cost of experimental equipment, rising energy prices, the need to reduce research time, advances in electronic computers and systems, and the need for automated control systems in production and various fields of human activity.

The significant need for high-performance computer technologies is driven by factors such as the complexity of the tasks under study, the high cost of experimental equipment, rising energy prices, the need to reduce research time, advances in electronic computers and

systems, and the need for automated control systems in production and various fields of human activity.

ТЕРМОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ПРОСТОРОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ КОНІЧНОЇ ПАНЕЛІ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ

В.І.Козлов, Ю.І.Лелюх, Л.П.Зінчук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Конічні багатошарові панелі з непружних металевих та п'єзоактивних шарів знаходять широке застосування в елементах конструкцій сучасної техніки. В процесі експлуатації в багатьох випадках вони перебувають під дією високого рівня нестационарних, зокрема, гармонічних за часом навантажень, що, як правило, супроводжуються високим рівнем механічних напружень та дисипативного вібророзігріву, який виникає через гістерезисні втрати у в'язкопружному матеріалі, і може призвести до втрати його роботоздатності. Тобто, виникає необхідність оцінки впливу температури вібророзігріву на електромеханічні характеристики подібних елементів.

На основі концепції комплексних характеристик [1] розроблено підхід для дослідження термоелектромеханічної поведінки тривимірних неоднорідних тіл обертання з електров'язкопружних матеріалів при вимушених коливаннях з використанням методу скінченних елементів у варіаційній постановці. У випадку незалежності фізико-механічних властивостей матеріалів шарів від температури, який представлено у цій роботі, знаходження розв'язку задачі про вимушені коливання та дисипативний розігрів зводиться до розв'язування лінійної задачі електров'язкопружності з комплексними електромеханічними характеристиками і задачі нестационарної теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для цього використовувалось варіаційне формулювання задачі електромеханіки, яке зводить її розв'язування до визначення стаціонарних точок функціоналу [2]

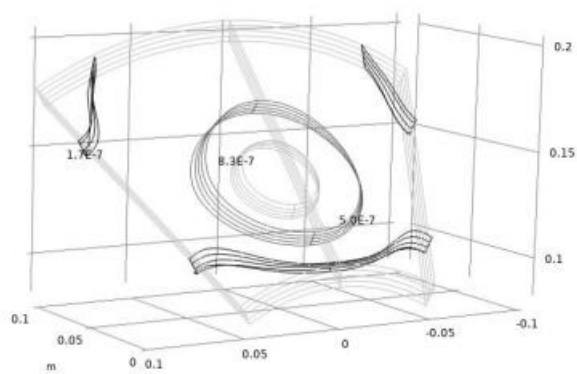
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (c_{ijkl}^E \varepsilon_j \varepsilon_{kl} - 2e_{ijk} \varepsilon_j E_k - \mu_{kl} E_k E_l - \rho \omega^2 u_k u_k) dV - \int_{\Sigma_p} (p_{nk} u_k - \sigma^e \varphi) d\Sigma_p$$

За знайденими на базі методу скінченних елементів значеннями переміщень та електричного потенціалу знаходяться величини деформацій, напружень, напруженості електричного поля та електричного зміщення, на основі яких у кожному елементі визначається дисипативна функція D_M . Знаходження розв'язку задачі нестационарної теплопровідності з відомим джерелом тепла зводиться до розв'язання варіаційної задачі для функціоналу [2]

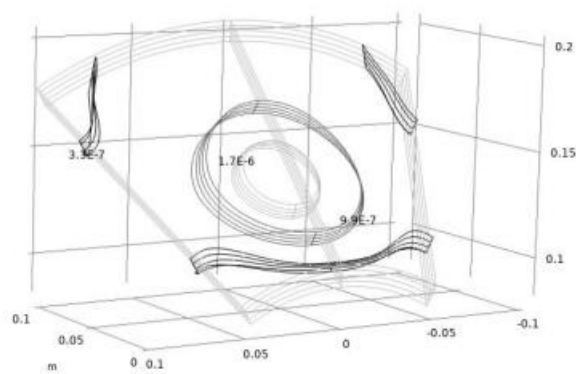
$$I = \frac{1}{2} \int_V \left(\lambda_{ij} T_{,i} T_{,j} + 2\rho c \frac{\partial T}{\partial t} T - 2D_M T \right) dV + \frac{1}{2} \int_S \alpha_T (T - 2T_c) T dS$$

Було проведено чисельне моделювання термоелектромеханічної поведінки тришарової конічної панелі з центральним кутом 60° , меншим радіусом 0,1 м, кутом конусності 45° , довжиною твірної конуса 0,141 м та товщиною 0,01 м. Приповерхневі шари панелі виготовлено із п'єзокераміки PZT (EC-65) з радіальною поляризацією, кожний товщиною 0,0025 м, середній пасивний шар представлений алюмінієм. Зовнішні поверхні вважалися електродованими. Досліджувався спектр власних частот в залежності від типу закріплення – шарнірне або жорстке заземлення. В околі

знайдених власних частот розраховувався напружено-деформований та тепловий стан панелі в залежності від механічних (внутрішній тиск) умов навантаження, при цьому на електродах і внутрішньому металевому шарі задавався нульовий потенціал. На рис. 1 представлено контурні графіки розподілу модуля зміщення шарнірно закріпленої по контуру кінчної панелі при величині амплітуди внутрішнього тиску 10^4 Па (рис.1а) та $2 \cdot 10^4$ Па (рис.1б) на першій резонансній частоті 1872 Гц. На рис. 2 наведено контурні графіки розподілу температури дисипативного розігріву на момент часу 3600 с для двох вказаних вище величин амплітуди внутрішнього тиску (рис.2а та 2б, відповідно).

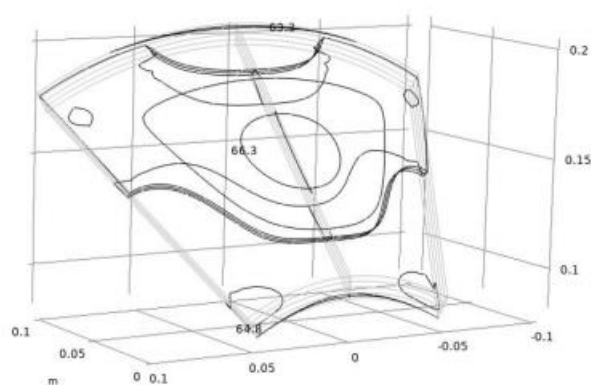


а

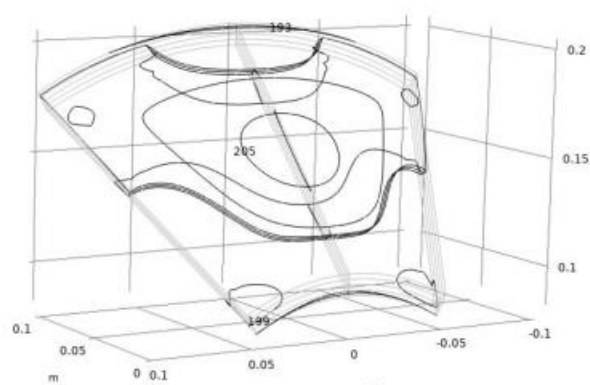


б

Рис.1



а



б

Рис.2

На основі розрахунку температурного поля дисипативного розігріву в околі частоти першого резонансу проведено оцінку роботоздатності кінчної панелі. У якості критерію довговічності приймалося досягнення принаймні в одній точці п'єзоелектричних шарів температури деградації і втрати ними п'єзоактивних властивостей [1]. Досліджено вплив на довговічність панелі амплітудних значень механічних навантажень, а також умов теплообміну з навколишнім середовищем.

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.

2. Карнаухов В. Г., Козлов В.И., Завгородний А.В., Умрыхин И.Н. Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев тел вращения из вязкоупругого пьезоэлектрического материала // Прикл. механика. – 2015. – 51, № 6. – С. 12 – 22.

НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З РАДІАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ

В.В. Левченко, О.І. Макієвський

*Державний Університет Телекомунікацій, Відокремлений структурний підрозділ
«Київський транспортно-економічний фаховий коледж Національного
транспортного університету»*

П'єзоелектричні тонкі пластинчасті перетворювачі з товщиною поляризацією використовуються в пристроях різного функціонального призначення. У дискових і кільцевих вібраторах із суцільними електродами на лицьових площинах збуджуються осесиметричні коливання. Якщо ж електроди кільцевої пластини мають тільки діаметральні розрізи і електропружні сектори збуджуються протифазно, то в ній виникають неосесиметричні коливання по окружній координаті. Форми цих коливань по цій координаті визначаються кількістю діаметральних розрізів електродів. Систематичне теоретичне дослідження частотного спектра, а також форм коливань по радіальній координаті відсутні. Цим питанням і присвячено цю роботу.

Тонку п'єзокерамічну пластину товщиною h віднесемо до прямокутних декартових координат, причому координатна площина $z=0$ збігається з серединною площиною пластини. При товщинній поляризації скористаємось відповідними матеріальними залежностями [1]. Розглянемо круглу п'єзокерамічну пластину радіусом r_1 з отвором радіусом r_0 . Електродне покриття на лицьових площинах $z = \pm h/2$ розбите на $2N$ сектори з протифазними сусідніми підключеннями. При визначенні резонансних частот тангенсами малих кутів втрачемо та користуємося дійсними значеннями фізико-механічних матеріальних параметрів.

На основі проведених аналітичних розрахунків поставлені задачі було зведено до систем алгебраїчних рівнянь. Резонансні частоти визначаються за умови рівності нулю визначників четвертого порядку однорідної системи алгебраїчних рівнянь.

З граничних умов та частотних рівнянь випливають наступні загальні властивості теоретичного частотного спектра. При коливаннях пластини з одним діаметральним розрізом ($N=1$, два електроди) виникають резонанси на частотах $f_{1,k}, f_{3,k}, f_{5,k}, \dots$; із двома діаметральними розрізами ($N=2$, чотири електроди) – резонанси на частотах $f_{2,k}, f_{6,k}, f_{10,k}, \dots$; з трьома діаметральними розрізами ($N=3$, шість електродів) – резонанси на частотах $f_{3,k}, f_{9,k}, f_{15,k}, \dots$; з чотирма діаметральними розрізами ($N=4$, вісім

розрізів) – резонанси на частотах $f_{4,k}, f_{12,k}, f_{20,k}, f_{20,k}, \dots$; із п'ятьма діаметральними розрізами ($N=5$, десять електродів) – резонанси на частотах $f_{5,k}, f_{15,k}, f_{25,k}, \dots$; із шістьма діаметральними розрізами ($N=6$, дванадцять електродів) – резонанси на частотах $f_{6,k}, f_{18,k}, f_{30,k}, \dots$; з сімома діаметральними розрізами ($N=7$, чотирнадцять електродів) – резонанси на частотах $f_{7,k}, f_{21,k}, f_{35,k}, \dots$; з вісьмома діаметральними

розрізами ($N=8$, шістнадцять електродів) – резонанси на частотах $f_{2,k}$, $f_{24,k}$, $f_{40,k}$, У прийнятій нумерації частот $f_{m,k}$ перший індекс відповідає номеру гармоніки по азимутальному куту θ (номер форми по азимуту), а другий індекс k є порядковим номером кореня відповідного частотного рівняння.

Результати аналізу частотних рівнянь частково наведені в таблиці, у якій наведено

значення безрозмірних резонансних частот $\bar{\omega} = \sqrt{(1-\nu_E^2)s_{11}^E \rho \bar{\omega} r_1}$, при $r_0/r_1 = 0,4$, $r_0/r_1 = 0,4$ і $\rho = 7,74 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 7,74 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}} s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}} s_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$,
 $s_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$, $d_{31} = -125 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н}}$, $H d_{31} = -125 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н}}$,

, що відповідає п'єзокераміці з

властивостями ЦТС-19 [1].

k	$N=0$ $\bar{\omega}_{0,k}$	$N=1$ $\bar{\omega}_{1,k}$	$N=2$ $\bar{\omega}_{2,k}$	$N=3$ $\bar{\omega}_{3,k}$	$N=4$ $\bar{\omega}_{4,k}$
1	1,42334	1,6265	0,69281	1,54389	2,35656
2	3,31746	3,85103	2,34721	3,18735	4,01180
3	5,49151	5,20302	4,85053	4,97488	5,31515
4	6,05803	6,53165	5,05288	6,17078	7,31794
5	8,896337	8,88278	7,294018	7,983204	8,45249
6	10,59329	10,72654	8,93175	9,28126	10,06834
7	11,76887	11,81621	11,049	11,42551	11,84558

Результати проведених розрахунків дозволяють зробити висновок, що із зростанням числа розрізів N електродного покриття зародження частот, що відповідають малим k , зсуваються в високочастотну область і частотний спектр стає більш густим. При $N > 1$ частоти, що відповідають однаковим k , зсуваються у високочастотну область. Зіставляючи результати при різних значеннях k , видно, що зі зростанням значення k відносна відмінність частот, що відповідають різним значенням N , зменшується.

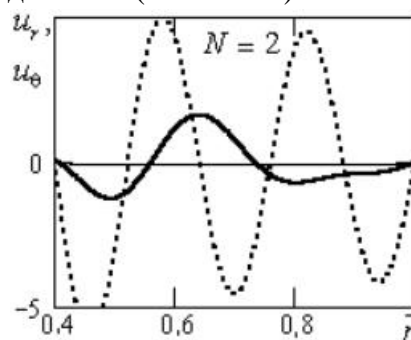
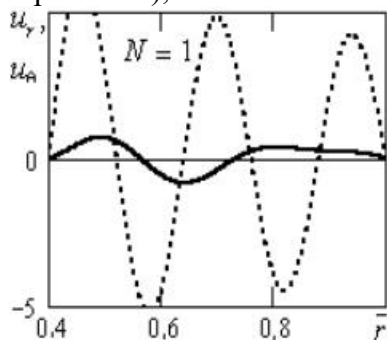
У розглянутому випадку при $k=7$ відмінність в частотах менше п'яти процентів, тому цей випадок був обраний для аналізу форм коливань; на рисунку наведені

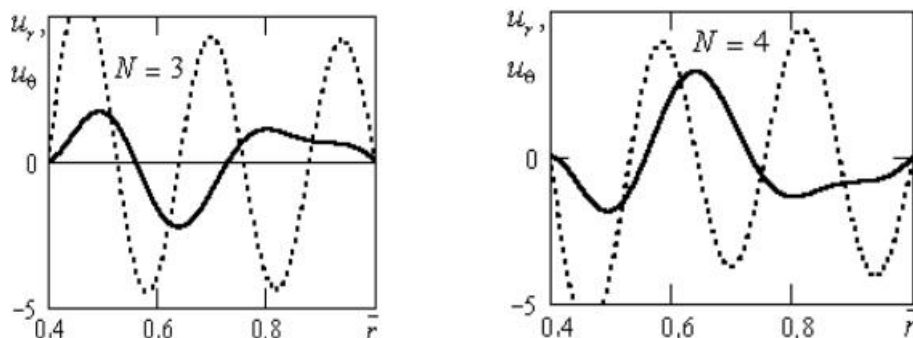
$$\bar{r} = r/r_1 \quad \bar{r} = r/r_1$$

графічні залежності u_r і u_θ від

(суцільні лінії відповідають залежностям

u_r , а пунктирні u_θ), а також значення відповідного N ($N = 0 \dots 3$).





Наведені графічні залежності дозволяють зробити висновок, що, незважаючи на близькість частот зі зростанням числа розрізів N електродного покриття, форми коливань відрізняються суттєво. Кількість нулів функцій u_r і u_θ при різних значеннях N однакова. Число нулів u_θ , зазвичай, дорівнює $[j/2]+1$, а число нулів u_r вдвічі менше.

1. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
2. Шульга М.О., Левченко В.В. До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин // Доп. НАН України. – 2012. – № 6. – С. 61-68.

КРІПЛЕННЯ ГІРНИЧОЇ ВИРОБКИ І КАМЕРИ-СХОВИЩА ПРИ ЇХ СПОРУДЖЕННІ В НЕСТІЙКИХ ПОРОДАХ

О.П. Круковський, В.В. Круковська

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

У випадках аварійних відключень електроенергії із зупинкою провітрювання і дегазації, при пожежах або вибухах метано-повітряної суміші для захисту гірників від дії шкідливих газів використовуються камери-сховища [1]. Камери-сховища також необхідні для роботи рятувальників, які проводять розвідку та мають виводити постраждалих з аварійної ділянки. Такі камери обладнуються в ніші, пройденій з виробки [2]. Для забезпечення безремонтної підтримки гірничої виробки та камери-сховища протягом усього часу їх експлуатації, а також герметичності камери-сховища, необхідно правильно вибрати їх кріплення. З цією метою виконано чисельне моделювання напруженого стану вуглепородного масиву з гірничою виробкою та камерою-сховищем. Процес деформування порід описується рівнянням:

$$c_g \frac{\partial}{\partial t} u_i = \sigma_{ij,j} + X_i(t),$$

де c_g – коефіцієнт демпфування, кг/(с·м³); u_i – переміщення, м; t – час, с; $\sigma_{ij,j}$ – похідні від компонент тензора напружень по x, y , Па/м; $X_i(t)$ – проекції зовнішніх сил, що діють на одиницю об'єму твердого тіла, Н/м³,

Початкові і граничні умови:

$$\sigma_{yy}|_{t=0} = \gamma H; \quad \sigma_{xx}|_{t=0} = \lambda \gamma H; \quad u_x|_{t=0} = 0; \quad u_y|_{t=0} = 0; \quad u_x|_{\Omega_1} = 0; \quad u_y|_{\Omega_2} = 0,$$

де γ – середня вага порід, що розташовані вище, Н/м³; H – глибина ведення гірничих робіт, м; λ – коефіцієнт бічного розпору; Ω_1 – вертикальні межі зовнішнього контуру; Ω_2 – горизонтальні межі зовнішнього контуру.

Задача розв'язується в пружно-пластичній постановці. Для математичного опису переходу порід в порушений стан застосовується критерій Кулона-Мора. При розв'язанні рівнянь застосовується метод скінчених елементів, рис. 1.

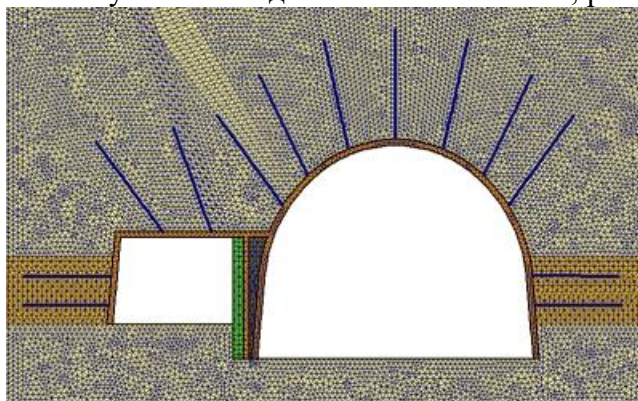












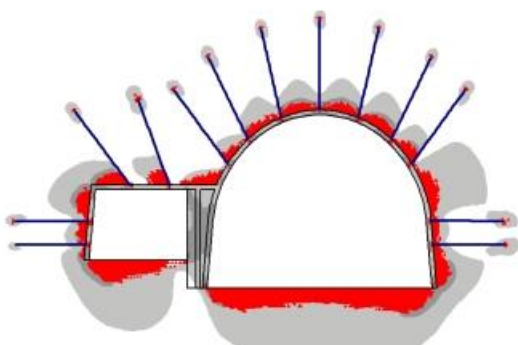
Рисунок 1 – Центральний фрагмент скінчено-елементної сітки

Аналіз напруженого стану порід і конструкцій кріплення виконується за допомогою параметрів $Q^* = (\sigma_1 - \sigma_3)/\gamma H$, що характеризує різнокомпонентність поля напружень, і $P^* = \sigma_3/\gamma H$, що характеризує розвантаження порід від гірського тиску.

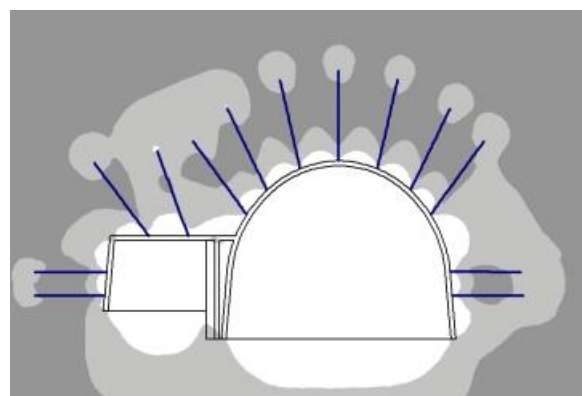
Було розглянуто стійкість камери-сховища, коли виробка і камера кріпляться рамами і анкерами, затяжка боків і покрівлі – залізобетонна, камеру відокремлює від виробки бетонна перегородка товщиною 200 мм. Підшва камери розташовується вище підшви виробки на 0,7 м. При моделюванні прийнято, що глибина ведення очисних робіт – 800 м; потужність вугільного пласта – 1,4 м; порода, що вміщує виробку, – нестійкий алевроліт з низькою межею міцності.

Результати розрахунку значень параметра Q^* і зони непружних деформацій у породах та конструкціях кріплення у різні моменти часу наведено на рис. 2.

	$Q^* > 1.6$		$P^* > 1.6$
	$1.2 < Q^* < 1.6$		$1.2 < P^* < 1.6$
	$0.8 < Q^* < 1.2$		$0.8 < P^* < 1.2$
	$0.4 < Q^* < 0.8$		$0.4 < P^* < 0.8$
	$Q^* < 0.4$		$P^* < 0.4$



a)



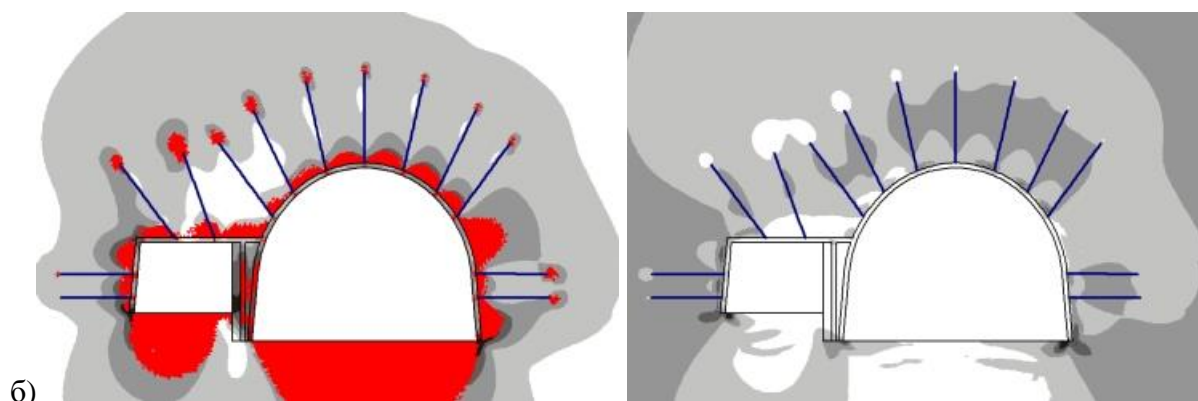


Рисунок 2 – Зони непружних деформацій (червоний колір), розподіли значень

параметрів Q^* (ліворуч) та P^* (праворуч) в моменти часу: а) $t = 1$ доба; б) $t = 20$ діб. З часом навколо виробки і камери розширюється область підвищеної різнокомпонентності поля напружень. Значення параметра P^* , навпаки, згодом знижуються – приконтурні породи поступово розвантажуються від гірського тиску. Але в заанкерованих зонах покрівлі і боків виробки і камери різнокомпонентність поля напружень значно нижче, ніж в підшві, в покрівлі навіть присутні зони непорушених порід, де $Q^* < 0,4$ (рис. 2, ліворуч), $P^* > 0,8$ (рис. 2, праворуч). Зона непружних деформацій у приконтурних породах покрівлі практично не виникає. Перемичка між виробкою і камерою з часом починає зазнавати граничних напружень, проте основний елемент цієї конструкції – міцна залізобетонна перегородка – витримує високі напруження і не руйнується.

Таким чином, у заанкерованій області гірські породи знаходяться в умовах, наближених до тривісного стиснення, з підвищеними значеннями мінімальної компоненти тензору головних напружень. Отже, над виробкою і камерою сформовано породно-анкерне перекриття, що перешкоджає зміщенню приконтурного масиву всередину гірничої виробки та підвищує її стійкість.

Література

1. Мінеєв С.П., Беліков І.Б. Методологія оцінки параметрів закладення камери порятунку у вугільних шахтах // Геотехнічна механіка, 2019. – №144. – С. 126–136.
2. СОУ 10.1.202020852.002:2006 «Стаціонарні камери-сховища рятувальні шахтні. Загальні технічні вимоги». – Введ. 2007.10.15. – К.: Міністерство вугільної промисловості України, 2007. – 16 с.

ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ ЗАХИСНОГО ПОКРИТТЯ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Ю. П. Глухов

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка Національної академії наук України

Дане дослідження спрямовано на вивчення хвильових процесів в шаруватих пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого покриття, початкових напружень, різних швидкостей руху поверхневого навантаження. Розв'язок вказаних задач передбачає встановлення закономірностей впливу початкових напружень, швидкості руху навантаження, геометричних та

механічних характеристик покриття на напружено-деформований стан пружної основи. Актуальність результатів дослідження пов'язана з можливістю їх використання в техніці та будівництві.

В роботі з використанням комплексних потенціалів [1] в загальній формі для стисливих і нестисливих пружних тіл дана постановка і приведений розв'язок двовимірної задачі про дію рухомого навантаження на вільну поверхню попередньо напруженого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Зауважимо, що при відсутності шару точний розв'язок задачі для півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів був отриманий в роботі [2]. Використовуючи граничні умови і вирази для переміщень і напружень через комплексні потенціали, отримуємо систему диференціальних рівнянь для визначення аналітичних функцій, які входять в представлення розв'язків.

Для розв'язку задачі застосовується метод Мусхелішвілі, оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. При цьому задача зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих аналітичних функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є.

1. Бабиц С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Прикл. механика. - 1981. - 17, № 7. - С. 75-83.

2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.

ПРО МЕТОДИ ВІДТВОРЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ У НЕДОСТУПНИХ ОБЛАСТЯХ

В.І.Кузьменко, А.О.Молчанов

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Підвищення продуктивності технологічних процесів ґрунтується на достовірній інформації про параметри цих процесів. Пряме отримання такої інформації часто є технічно неможливим. Тому набувають актуальності методи відтворення фізичних полів з використанням непрямої інформації про поля за межами області, в якій ми хочемо визначити параметри поля. Ця проблема, відома як проблема ідентифікації, у математичному сенсі відноситься до класу обернених задач, тобто таких, в яких за даним наслідком (в даному випадку потенціалом або напруженістю поля в точках, доступних для вимірювань) потрібно розрахувати причину (розподіл мас, зарядів, температур чи інших параметрів у області, недоступній для прямого спостереження). Труднощі у розв'язанні обернених задач зумовлені як їхньою некоректністю, так і необхідністю попередньої обробки експериментальної інформації. Успіх процедури

розв'язання таких задач в значній мірі залежить як від якості і кількості отриманої з експерименту інформації, так і від способу її обробки.

Нехай деяке фізичне поле описується рівнянням Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

Область існування поля Ω складається з двох частин: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Частина Ω_1 доступна для вимірювання характеристик поля. Вимірювання в області Ω_2 неможливе. Нехай у точках $P_1, \dots, P_n \in \Omega_1$ відомі (виміряні) значення потенціалу u_1, u_2, \dots, u_n . Потрібно побудувати функцію $u^*(x)$, яка в точках усієї області Ω задовольняє рівняння (1), а в точках вимірювання $P_1, \dots, P_n \in \Omega_1$ буде близька до виміряних значень u_1, u_2, \dots, u_n . Точки P_i розташовані по периметру деякої плоскої фігури (в разі двомірної задачі) або на границі деякого тіла (в разі тривимірної задачі).

Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x), x \in R^n$ ($n = 2$ або $n = 3$) - лінійно незалежні розв'язки рівняння Лапласа. Тоді їх лінійна комбінація

$$v_m(x) = \sum_{i=1}^m A_i \varphi_i(x) \quad (2)$$

також буде розв'язком цього рівняння. В якості функцій $\varphi_i(x)$ можна взяти гармонічні поліноми або функції виду $G(x - \beta_i)$, де $G(x)$ - фундаментальний розв'язок (функція Гріна) оператора Лапласа, β_i - набір точок (розташування джерел), які повинні лежати поза областю Ω . Розташування цих точок можна обирати довільним чином, але для кращої точності рекомендується вибирати їх розташування рівномірним навколо Ω_2 . Знайдемо коефіцієнти A_1, A_2, \dots, A_m з умови близькості $v_m(x)$ до виміряних значень потенціалу в точках $P_1, \dots, P_n \in \Omega_1$. За міру близькості узято середньоквадратичне відхилення

$$F(A_1, A_2, \dots, A_m) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m A_i \varphi_i(x_j) - u_j \right]^2. \quad (3)$$

Коефіцієнти лінійної комбінації (2) знаходимо з умови мінімуму функції $F(A_1, A_2, \dots, A_m)$. Ця умова дає m лінійних алгебраїчних рівнянь. При великих m задача знаходження мінімуму функції (3) є некоректна, оскільки СЛАР є нестійка. Для побудови наближеного розв'язку отриманої СЛАР застосовано метод регуляризації Тихонова. На модельних прикладах розглянуто якісну залежність розв'язку від значення параметра регуляризації.

В подальших дослідженнях планується, зокрема, дослідити більш детально вплив вибору розташування джерельних точок β_i на точність обчислень. Особливо цікавою є проблема побудови розв'язку за умови різких перепадів поля, оскільки для цього випадку в звичайному вигляді такий метод не застосовний.

ПРО ЗМІНУ ТИСКУ РЕЗЕРВУАРІВ НА ОСНОВУ УНАСЛІДОК ВНУТРІШНІХ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В.І.Кузьменко

Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара

Розглядається клас контактних задач про зворотній вплив процесів всередині резервуарів з рідиною або газом на контактні напруження, осідання та повороти. Фізико-хімічні процеси, такі як фазові переходи (розтанання-замерзання рідини, плавлення-кристалізація металів, випаровування-конденсація), хімічні реакції зі зміною

густини, осідання домішок, дифузійні процеси призводять до перерозподілу речовини всередині резервуарів. У процесі монтажу та експлуатації всередині та уздовж бічної поверхні резервуарів можливі переміщення вантажів. У разі аварійних ситуацій не виключена можливість витікання речовини та виникнення реактивної сили. Така сила викликає поворот резервуара та перерозподіл речовини. Унаслідок цих процесів змінюється положення центру мас системи, що викликає перерозподіл контактної тиску та додаткові повороти та осідання.

Запропоновано єдиний підхід до постановки та розв'язання контактних задач такого класу, що ґрунтується на концепції систем зі зворотними зв'язками: розглянута задача про дію важких штампів на пружний півпростір під дією зовнішнього навантаження, яке, у свою чергу, залежить від поворотів та осідань штампа. Такі зв'язані задачі виявляються нелінійними навіть у разі дії штампів на лінійно-пружні середовища за фіксованої області контакту. Введено прямий оператор, за допомогою якого заданому навантаженню ставиться у відповідність осідання та повороти штампа, та обернений оператор, який зміні руху штампа ставить у відповідність зміну зовнішнього навантаження. Задача сформульована у вигляді операторного рівняння у функціональному просторі. Запропоновано та обґрунтовано ітераційний процес розв'язання операторного рівняння та встановлено умови існування розв'язку. Для низки задач вдалося отримати аналітичні розв'язки.

Досліджено вплив початкових неоднорідностей у розподілі речовини на розвиток поворотів та осідань у процесі зростання навантаження. Показано, що існує критичне значення висоти центру мас резервуара на лінійно-пружній основі у залежності від механічних характеристик матеріалу основи, за якої резервуар починає відриватися від основи із подальшою втратою рівноваги. Встановлено, що у разі локального руйнування бічної поверхні унаслідок витікання рідини з великою швидкістю формується реактивна «відстежувальна» сила і досліджено умови втрати стійкості резервуара. Встановлено ефект зміни напрямку горизонтального переміщення кругового штампа у процесі монотонного зростання нецентральної «відстежувальної» сили, що зберігає напрямок відносно штампа. Знайдено максимальну висоту підйому вантажу уздовж бічної поверхні циліндричного резервуара без порушення контакту з основою.

ВИЗНАЧЕННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРСТИК ТРАНСПОРТНИХ АПАРАТІВ З ЗАСТОСУВАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А.В. Сохацький

Університет митної справи та фінансів Україна

Створення перспективних транспортних засобів, що працюють на нових фізичних принципах є надзвичайно складною проблемою. Необхідні розробки нових транспортних технологій. Проектування перспективних транспортних технологій неодмінно вимагає використання математичного моделювання. Високі швидкості руху транспортних апаратів вимагають урахування впливу аеродинамічних процесів на експлуатаційні характеристики. Необхідні розробки математичних моделей аеродинамічних процесів на основі сучасних досягнень обчислювальної механіки

Реальний рух транспортного засобу відбувається в турбулентному повітряному середовищі. Моделювання турбулентних рухів повітряних мас є фундаментальною проблемою як теоретичної фізики так і практичної аеродинаміки. Відсутність

універсальної теорії опису турбулентних течій створює проблеми з визначенням аеродинамічних навантажень. Це питання є одним із ключових моментів при проектуванні високошвидкісних наземних транспортних засобів, оскільки при високих швидкостях руху тільки на подолання опору повітря може припадати до 90% загальних енергетичних витрат. Таким чином необхідні фундаментальні дослідження в аеродинаміці високошвидкісного наземного транспорту.

В роботі розглянуто підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier - Stokes - RANS); два класичних підходи - пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation - DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation - LES); гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES методів для різних областей течії.

Виходячи з можливостей сучасної обчислювальної техніки найбільш доступними залишаються гібридні методи. Вони ґрунтуються на сумісному використанні RANS і LES підходів в різних областях течії

Методи моделювання турбулентних течій, з певною мірою умовності можна розділити на три групи: підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier - Stokes - RANS); два класичних підходи - пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation - DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation - LES); гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів для різних областей течії.

На сьогодні найбільш поширеними підходами є методи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier - Stokes - RANS). Вони замикаються за допомогою тієї або іншої напівемпіричної моделі турбулентності.

Класичні вихоророзрізняючі підходи є найбільш досконалими. Це пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation - DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation - LES). Метод DNS базується на безпосередньому прямому числовому розв'язуванні тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса з розрізненням усіх просторово-часових масштабів турбулентності. Він ґрунтується на фізичних принципах аеродинаміки і повністю вільний від емпіричних припущень.

У рамках методу LES ті ж рівняння розв'язуються безпосередньо після їх попередньої просторової фільтрації. Це дозволяє виключити з розгляду частину просторово-часових масштабів. Проведена операція дозволяє значно понизити вимоги до просторово-часового розрізнення. Таким чином понижуються вимоги до необхідних обчислювальних ресурсів. Для урахування впливу відфільтрованих ("підсіткових") масштабів турбулентності притягуються ті або інші напівемпіричні моделі. В науковій літературі для підкреслення кардинальних відмінностей методу LES від підходів, що використовуються для замикання RANS, їх називають "підсітковими". До третьої групи відносять гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів в різних областях течії. Вони є найбільш розповсюдженими для практичного використання, виходячи з можливостей обчислювальної техніки.

Якісна оцінка ресурсів, необхідних для проведення обчислювальних експериментів надається в роботах [1, 2]. Основні результати представлено в таблиці 1.1. В другому і третьому стовпцях цієї таблиці приведені типові розміри сіток і число кроків інтеграції за часом, необхідних для розрахунку обтікання типового цивільного транспортного засобу (літака або автомобіля) з використанням методів, що базуються на RANS, DES, LES і DNS.

Обчислювальні ресурси і перспективи практичного застосування різних підходів до моделювання турбулентних течій [1, 2]

Підхід	Необхідне число вузлів	Необхідне число кроків	Рік реалізації
RANS	10^7	10^3	1985
DES	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11,5}$	$10^{6,7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7,7}$	2080

Виходячи з аналізу сучасних досягнень в розробці методів розрахунку турбулентних течій впродовж найближчих десяти років, основним робочим інструментом для вирішення прикладних завдань аеродинаміки, пов'язаних з розрахунком турбулентних течій, будуть залишатися методи, що базуються на використанні RANS у поєднанні з різними напівемпіричними моделями турбулентності, і гібридні RANS – LES. Таким чином для визначення аеродинамічних характеристик перспективних транспортних засобів, з урахуванням рівня досягнень електронно-обчислювальної техніки, доцільно використовувати гібридні RANS - LES методи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lilly D. K. "A proposed modification of the Germano closure method", Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1992, 4(3), pp. 633–635
2. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. "Extra-large eddy simulation of massively separated flows", AIAA Paper, AIAA-2004-0264

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА НЕМОНОТОННОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ПРИ ОДНОВІСНОМУ РОЗТЯЗІ

М.М.Тормахов

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН У

При одновісному розтязі матеріальні волокна елемента тіла в залежності від своєї орієнтації можуть знаходитися в стані розтягу, стиску або взагалі не змінювати своєї довжини. Напрямок матеріальних волокон, які не змінюють своєї довжини, є нейтральним напрямом, він розділяє напрями матеріальних волокон, що стискаються та розтягуються. В межах пружності нейтральний напрям зберігає свою орієнтацію відносно лагранжевих координат, а за його межею відбувається його поворот. Окремі матеріальні волокна, нахил яких близький до нейтрального, при пропорційному навантаженні можуть змінювати знак свого деформування.

Деформацію матеріального волокна ε_α , розташованого під кутом α до вектора одновісного навантаження можна обчислити за формулою [1]

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha - \varepsilon_y \cos^2 (90 - \alpha) \quad (1)$$

де ε_x , ε_y - повздовжні та поперечні деформації зразка.

Експериментальну перевірку немонотонності деформування при одновісному розтязі проводили з суцільними циліндричними зразками зі сталі X18H10T. В середній частині зразка під кутом $\alpha = 58^\circ$ до його осі було закріплено фольговий тензорезистор, за допомогою якого вимірювали деформацію матеріального волокна ε_α . Зразок розтягували за межі пластичності та реєстрували в процесі навантаження деформації ε_x , ε_y , ε_α .

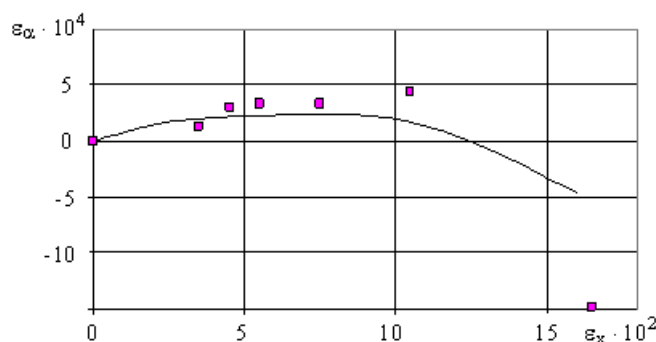


Рис. 1 Експериментальна (лінія) та теоретична (точки) залежності $\varepsilon_\alpha(\varepsilon_x)$.

На рис. 1 подано результати експерименту. Лінією зображено експериментально отриману залежність деформації $\varepsilon_\alpha(\varepsilon_x)$, а точками - теоретичну залежність, що була розрахована по формулі (1) для $\alpha = 58^\circ$. Розсіювання даних при обчислення ε_α по формулі (1) викликано зростанням похибки, яка виникає через те, що результат розрахунку - ε_α має величину на два порядки менші ніж величини ε_x та ε_y . Можна бачити, що дані експерименту та результати розрахунку по формулі (1) добре співпадають, що підтверджує припущення про немонотонність деформування окремих матеріальних волокон при одновісному розтязі зразка.

1. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; отв. ред. Г.С. Писаренко. - Киев: Наук. думка. 1988. - 736 с.

ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ ЗСУВУ У СТРУКТУРІ ШАР НА ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНОМУ НАПІВПРОСТОРИ

В.В. Левченко

Державний Університет Телекомунікацій

Питанням поширення поверхневих хвиль різної фізичної природи у періодично неоднорідних середовищах присвячено значну кількість робіт [1,2]. Основна увага при проведенні цих досліджень приділялася питанню про можливість існування поверхневих ефектів у структурах, що розглядаються, зонної локалізації дисперсійних кривих та їх шматкової неперервності. При отриманні дисперсійних умов існування поверхневих хвиль передбачалося, що поверхнева хвиля локалізована на верхній межі неоднорідного напівпростору та згасає з віддаленням від кордону. Питання про

поверхневі хвилі, які локалізовані на одній із внутрішніх границь розриву властивостей напівпростору за відсутності вимоги згасання хвиль у середовищі над аналізованою границею автору невідомі.

Розглянемо регулярно-шаруватий ізотропний напівпростір, утворений періодичним повторенням у напрямку осі oz "породжуючого" пакета з Q шарів. Припускаємо, що зсувні хвилі $u(x, z, t)$ поширюються у бік осі ox і мають загасаючий характер, починаючи з границі $z_M = Mh + h_1 + h_2 + \dots + h_l$, ($l < Q$) M - кількість "породжуючих" пакетів між вільною границею і границею z_M . Тут h_l - товщини шарів.

Хвильовий процес у шарах описується системою рівнянь

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1)$$

Розв'язання задачі про поверхневі хвилі в структурі шар на регулярно шаруватому напівпросторі зводиться до нескінченної системи рівнянь алгебри. З вимог існування нетривіального та згасаючого розв'язку знаходимо дисперсійні співвідношення для поверхневих хвиль

$$(N_Q^{11} - N_Q^{22} - N_Q^{21} S_0) S_0 + N_Q^{12} = 0; \quad (2)$$

$$|N_Q^{22} + N_Q^{21} S_0| > 1.$$

Тут введені передавальні матриці "породжуючого" пакету шарів

$$N_Q = \prod_{q=1}^Q N^{-1}(a_q; 0) N(a_q, \theta_q)$$

та передавальні матриці N_0 між вільною межею і границею z_M та позначення $S_0 = -N_0^{12} / N_0^{11}$.

Виконавши низку перетворень та виходячи з вимоги існування згасаючого розв'язку системи рівнянь знайдемо дисперсійні співвідношення

$$(N_Q^{11} - N_Q^{22} - N_Q^{21} \mu_0 \tilde{D}_0) \mu_0 \tilde{D}_0 + N_Q^{12} = 0; \quad (3)$$

$$|N_Q^{22} + N_Q^{21} \mu_0 \tilde{D}_0| > 1$$

для визначення поверхневих хвиль на межі розділу однорідного шару та регулярно-шарового напівпросторів.

У загальному випадку аналіз дисперсійних співвідношень (2) та (3) можливий лише чисельно. Аналіз проводився при "породжуючому" пакеті, що складається з двох шарів і одиночного шару над границею шаруватого напівпростору. Як впливає з результатів

чисельного аналізу при $h_0 < 0,15$ характер спектра дисперсійних кривих подібний спектру дисперсійних кривих для поверхневих хвиль в регулярно-шароватому

напівпросторі, що визначаються з умов $N_2^{12} = 0$, $|N_2^{11}| < 1$. Як впливає з результатів аналізу, якщо товщина додаткового шару мала в порівнянні з товщиною шарів напівпростору, то спектр дисперсійних кривих подібний до спектру для поверхневих хвиль в регулярно-шароватому напівпросторі. Збільшення значення h_0 призводить до суттєвої зміни спектра дисперсійних кривих. У випадку, коли верхній шар у напівпросторі "м'який", зі зростанням значення h_0 перша дисперсійна крива локалізується як можна ближче до першої зони пропускання і надалі зникає. Області існування подальших дисперсійних кривих зменшуються. Якщо верхній шар "жорсткий" навпаки збільшення товщини додаткового шару призводить до появи в спектрі додаткових дисперсійних кривих. Слід також відзначити, що незалежно від властивостей верхнього шару в напівпросторі при товщині додаткового шару близькій,

до товщини у напівпросторі, спектр дисперсійних кривих стає подібним до спектру дисперсійних кривих для поверхневих хвиль на межі однорідного і регулярно-шарового напівпросторів в області його існування $k^2 > k_0^2$. Причому подібність тим сильніша, чим нижча мода.

Величиною, яка характеризує згасання хвиль ϵ^b - Spur (слід) передавальної матриці.

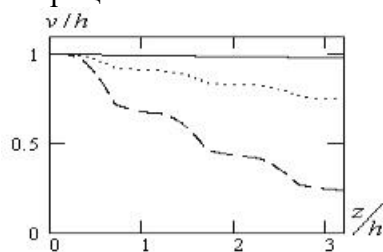


Рис. 1.1

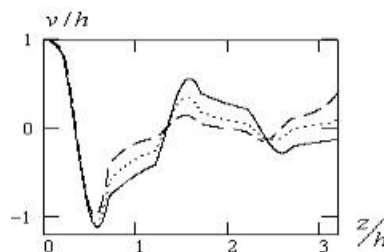


Рис. 1.2

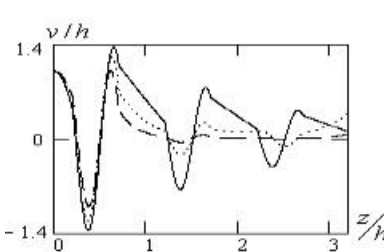


Рис. 1.3

Характеристики регулярно шаруватого напівпростору прийняті такими:

$$Q = 2, \mu_{\text{ж}}/\mu_{\text{м}} = 10, \rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{м}} = 2, h_{\text{м}} = h_{\text{м}}/h = 0.5, h_{\text{ж}} = h_{\text{ж}}/h = 0.5,$$

$h = h_{\text{ж}} + h_{\text{м}}$. Індексом "м" позначені характеристики "м'якого" шару, а "ж" відповідно "жорсткого". На рисунках представлені результати для випадку, коли верхній шар напівпростору "жорсткий", а механічні характеристики додаткового шару вибиралися наступними наступними $\mu_0/\mu_{\text{ж}} = 0.5, \rho_0/\rho_{\text{ж}} = 0.5$. На рис. 1.1 наведено форми коливань для точок першої моди дисперсійної кривої (0,13; 0,136), (1; 1,09) на рис. 1.2 для точок (4,12; 3,66), (4,51; 4,27), (5,2; 5,42) другої моди, на рис. 1.3 точок (7,15; 5,94), (7,9; 7,3), 8,86; 9,11) третьої моди. Як видно з результатів аналізу, якщо при зміні значення дисперсійна крива має асимптоту дисперсійну криву, що визначається зі співвідношень (3), то і характер її згасання стає подібним до загасання поверхневих хвиль на межі однорідного і регулярно-шарового напівпросторів. З результатів чисельного аналізу слідує, що зміною товщини додаткового шару можна ефективно керувати не тільки спектром дисперсійних кривих, але й швидкістю згасання поверхневих хвиль. В роботі теоретично досліджено умови існування поверхневих хвиль зсуву локалізованих на внутрішній поверхні в структурі шар на регулярно-шаруватому півпросторі. Вивчено характер зміни спектру дисперсійних кривих в залежності від фізичних і геометричних властивостей верхнього шару півпростору. Показано, що поверхневі хвилі можуть локалізуватися як на вільній поверхні півпростору, так і на внутрішніх границях розділу фізичних і геометричних властивостей. Досліджено умови існування поверхневих хвиль в залежності від характеру їх згасання. Аналіз отриманих дисперсійних співвідношень показав можливість існування поверхневих хвиль у структурі шар на регулярно-шаруватій підкладці.

1. Шульга Н.А. Основи механіки шаруватих середовищ періодичної структури. - К.: Наук думка, 1982. - 200 с.

2. Levchenko V.V. Propagation magnetoelastic shear waves in regularly laminated medium with metalized interfaces// Int. Appl. Mech. - 2004 - 40, № 1 - P.97 - 10

ПЛОСКІ ЛІНІЙНІ ХВИЛІ ЕЛЕКТРОМАГНІТОМЕХАНІКИ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

Н.Є.Ткаченко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

В сучасній механіці суцільного середовища при дослідженні взаємопов'язаних механічних і електричних процесів використовують рівняння механіки суцільного середовища з додатковими силами, рівняння Максвела і взаємопов'язані рівняння стану відносно механічних і електричних параметрів. Л.П.Хорошун на основі феноменологічного підходу по аналогії з теорією механічних сумішей побудував математичну модель взаємопов'язаних динамічних процесів електромагнітомеханіки в діелектриках і п'єзоелектриках. За елементарний макрооб'єм діелектрика вибрано сукупність взаємодіючих нейтральних частинок, кожна з яких має рівну кількість позитивних і негативних зарядів і в цілому нейтральна. Вказавши взаємозв'язок вектора поляризації і напруги електричного поля, яке утворюється ним, рівняння механіки взаємно проникаючих пружних сумішей перетворюються в взаємопов'язану систему рівнянь переміщень нейтральних молекул і напруги електричного поля. Рівняння цієї моделі інваріантні відносно перетворення Галілея [1]. Із цієї системи, як частинний випадок, отримуємо рівняння Максвела і акустичне наближення електропружності діелектрика і п'єзоелектриків. Запишемо рівняння електромагнітопружності для ізотропного діелектрика в лінійному наближенні.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\nu \rho'}{\rho} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c_2^{*2} u_{i,rr} + (c_1^{*2} - c_2^{*2}) u_{r,ri}$$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} - \frac{\rho'}{\nu \rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_2^{*2} E_{i,rr} + (c_1^2 - c_2^2) E_{r,ri} - \chi^* E_i.$$

Тут $c_1^{*2}, c_2^{*2}, c_1^2, c_2^2, \lambda^*, \mu^*, \chi, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – швидкості розповсюдження пружних і електромагнітних збурень, а також ефективні пружні модулі. Розглянемо розповсюдження плоских електромагнітних хвиль, що рухаються під деяким кутом θ до осі поляризації oz в координатній площині xoz . Нехай хвиля розповсюджується по напрямку вектора $\vec{m} = \vec{i}l + \vec{k}n = \vec{i} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta$, який розташований в площині xoz . Розв'язок шукаємо в вигляді:

$$u_x = A_1 f(s), \quad u_y = A_2 f(s), \quad u_z = A_3 f(s), \quad E_x = B_1 f(s),$$

$$E_y = B_2 f(s), \quad E_z = B_3 f(s) \quad s = lx + nz - \omega t. \quad (2)$$

Тут ω - частота швидкості розповсюдження збурень в середовищі. Підставивши вирази (2) в рівняння (1) знайдемо систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3$. Прирівняємо нулю визначник цієї системи. Розкривши його, отримаємо характеристичне рівняння четвертого порядку відносно ω^2 , звідки знайдемо швидкості розповсюдження збурень, співвідношення між амплітудами, фазові і групові швидкості. Маємо дві пружні недиспергуючі хвилі: квазі повздовжня, яка характеризує коливання негативно заряджених частинок в напрямку осі oz і поперечна з коливанням позитивно заряджених частинок під кутом θ до осі oz . Крім того маємо ще дві електромагнітні диспергуючі взаємопов'язані хвилі, рух яких не співпадає з напрямком вектора \vec{m} .

1. ХорошунЛ.П. Двухконтинуумная механика диэлектриков как основа электромагнитомеханики // Прикл.механика. –2003.–39, №8. – С. 28–47.

МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ПРУЖНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ТРЬОХ І ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Ю.М. Кононов

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
м. Слов'янськ, Україна*

Розглянута задача про моделювання обертання у середовищі з опором вільного пружного твердого тіла у вигляді системи двох і трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Динамічно симетричні тверди тіла S_i і S_{i+1} пов'язані в точці O_i пружним відновлювальним шарніром Гука. Тверде тіло S_i ($i = \overline{1,3}$) знаходиться під дією дисипативного моменту $M_i = D_i \omega$ ($D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$, $D_{ij} > 0$), що моделює середовище з опором і під дією постійного моменту $M_{iq} = Q_i e_i^j$, який спрямований вздовж осі симетрії тіл S_i і підтримує їх рівномірне обертання. Тут ω – кутова швидкість твердих тіл S_i , $s_i = O_i O_{i+1}$, m_i , $c_i = O_i C_i^*$ і C_i^* – маса і центр мас тіла S_i ($i = \overline{1,3}$).

На основі роботи [1] характеристичне рівняння збуреного руху трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа має вигляд:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 \lambda^2 - k_1 & \mu_2 \lambda^2 \\ \mu_1 \lambda^2 - k_1 & F_2 & \mu_3 \lambda^2 - k_2 \\ \mu_2 \lambda^2 & \mu_3 \lambda^2 - k_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\left[a_5 \lambda^5 + (a_4 + i b_4) \lambda^4 + \dots + (a_1 + i b_1) \lambda + a_0 + i b_0 \right] \lambda = 0 \quad (1)$$

Тут $F_i = A_i' \lambda^2 + (i \tilde{C}_i + D_i) \lambda + k_{i-1} + k_i$ ($k_0 = k_3 = 0$), $\tilde{C}_i = C_i a_0$, $A_i' = A_i + m_1 m_{23} c_1^2 / m$,

$$A_2' = A_2 + (m_2 m_{31} c_2^2 - 2 m_2 m_3 c_2 s_2 + m_3 m_{12} s_2^2) / m,$$

$$A_3' = A_3 + m_3 m_{12} c_3^2 / m, \quad \mu_1 = m_1 c_1 (m_2 c_2 + m_3 s_2) / m, \quad \mu_2 = m_1 m_3 c_1 c_3 / m, \quad \mu_3 = m_3 c_3 [m_1 s_2 + m_2 (s_2 - c_2)] / m$$

$m = m_1 + m_2 + m_3$, $m_{ij} = m_i + m_j$, $a_0 = (Q_1 + Q_2 + Q_3) / (D_{13} + D_{23} + D_{33})$. Наявність нульового кореня в рівнянні (1) відповідає обертанню системи трьох твердих тіл як єдиного цілого твердого тіла.

На підставі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннормному вигляді, умови асимптотичної стійкості рівняння (1) відносно квадрата кутової швидкості $x = a_0^2$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_{32} x + I_{30} > 0, \quad I_{53} x^3 + I_{52} x^2 + I_{51} x + I_{50} > 0, \\ I_{75} x^5 + I_{74} x^4 + \dots + I_{71} x + I_{70} > 0, \quad I_{96} x^6 + I_{95} x^5 + \dots + I_{91} x + I_{90} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а умови асимптотичної стійкості відносно коефіцієнта пружності шарніру k_i запишуться так:

$$I_{31} k_i + I_{30} > 0, \quad I_{53} k_i^3 + I_{52} k_i^2 + \dots + I_{51} k_i + I_{50} > 0, \quad (3)$$

$$I_{75}k_i^5 + I_{74}k_i^4 + \dots + I_{71}k_i + I_{70} > 0, \quad I_{97}k_i^7 + I_{96}k_i^6 + \dots + I_{91}k_i + I_{90} > 0 \quad (i=1,2).$$

За відсутності пружності в одному з шарнірів ($k_1 = 0$ або $k_2 = 0$) або за відсутності пружності в обох шарнірах ($k_1 = k_2 = 0$) в умовах стійкості (2) треба виключити із розгляду відповідно останню нерівність або дві останні нерівності при $k_1 = k_2 = 0$.

Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа мають вигляд:

$$I_{32}x + I_{30} > 0, \quad I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \quad (4)$$

$$I_{31}k + I_{30} > 0, \quad I_{52}k^2 + I_{51}k + I_{50} > 0. \quad (5)$$

За відсутності пружності в шарнірі ($k = 0$) в умовах стійкості (5) треба виключити із розгляду останню нерівність.

Проведені дослідження умов стійкості (3), (4) – (5) при малих и великих кутових швидкостей, малих и великих коефіцієнтів пружності шарнірів та розглянуто випадок рівних твердих тіл. Проведено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості при відсутності дисипації.

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479).

1. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I.* Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, №5. – P. 605 – 612.

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА НА ПІДВІСІ

Ю.М. Кононов, Я.І. Святенко

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
м. Слов'янськ, Україна*

Розглянута задача про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі. Динамічно симетричні тверди тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром. Тіло S_1 (підвіс) має нерухому точку O_1 . Тверди тіла S_i ($i=1,2$) знаходиться під дією сил тяжіння, а тіло S_2 – під дією дисипативного моменту $M = D\omega_2$ ($D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$) ($D_j > 0$, $j=1,3$), що моделює середовище з опором, під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку $M_p = Pg$ і під дією постійного моменту у неінерціальній системі відліку $M_q = Qe_3^2$. Ці постійні моменти підтримують рівномірне обертання тіла S_2 . Тут ω_i – кутова швидкість твердого тіла S_i , g – прискорення вільного падіння, e_3^i – орт, який спрямований вздовж осі симетрії тіла S_i . Узагальнюються результати роботи [2] на випадок урахування масових і інерціальних характеристик підвісу, пружності сферичного шарніру та урахування постійного моменту M_q .

На підставі роботи [1] характеристичне рівняння збуреного руху механічної системи має вигляд $F_1F_2 - (\mu\lambda^2 - k)^2 = 0$ або

$$a_4\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (\tilde{a}_2 + ib_2)\lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0, \quad (1)$$

де $F_i = A_i'\lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i)\lambda + a_i g + k$, $\tilde{C}_i = C_i\omega_0$, $A_i' = A_i + s_1^2 m_2$, $a_2 = m_2 c_2$,
 $a_1 = m_1 c_1 + m_2 s_1$, $s_1 = O_1 O_2$, $\mu = s_1 a_2$, $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = (P+Q)/D_3$, $c_i = O_i C_i^*$, m_i і C_i^* – маса і центр
мас тіла S_i ($i=1,2$).

При відсутності постійного моменту M_p ($P=0$) умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання тіла S_2 будуть наступні $s+c_2 > 0$ і $k(s+c_2)+c_2 m_2 s g > 0$, а при відсутності постійного моменту M_q ($Q=0$) умови стійкості відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2 = \omega_0 C_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0, \quad I_{56}\tilde{C}_2^6 + I_{55}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0, \\ I_{78}\tilde{C}_2^8 + I_{77}\tilde{C}_2^7 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} > 0. \quad (2)$$

Проведені аналітичні дослідження отриманих умов стійкості (2) від основних механічних параметрів системи. Так, у разі виродження підвісу в безмасову і безінерційну струну ($A_i = C_i = 0$, $m_1 = 0$) умови стійкості (2) у безрозмірних змінних статті [2] мають вигляд:

$$k(a+b)^2 > I\xi - ma(a+b), \quad (3)$$

$$I\xi^2 - [I + ma(a+b) + \tilde{I}k] + mab + (a+b)k/g > 0. \quad (4)$$

При відсутності пружності у сферичному шарніру ($k=0$) характеристичне рівняння (1) збігається з рівнянням роботи [2]. Умова стійкості (4) теж збігається з аналогічною умовою цієї статті, але у роботі [2] відсутня умова (3), яка при $k=0$ має вигляд $I\xi < ma(a+b)$.

Автори частково підтримані грантом EFDS-FL2-08 Європейської федерації академій наук і гуманітарних наук (ALLEA).

1. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I.* Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, №5. – Р. 605 – 612.
2. *Карпентян А.В., Лагутіна І.С.* Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2000. – № 1. – С. 53 – 57.

ОСАДКА ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДВОШАРОВОГО ПАКЕТУ СФЕРИЧНИМ ШТАМПОМ

Є.О.Коваленко, О.С.Філіпова, С.О.Чернецький

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Важливими складовими частинами багатьох будівельних конструкцій та виробів машинобудування є шаруваті тіла. Застосування таких виробів потребує вичерпної інформації о напружено-деформованом стані на межі шарів, так як поєднання шарів з різними термомеханічними характеристиками при експлуатації може визвати розшарування шарів. А це, в свою чергу, може визвати порушення працездатності всієї конструкції. Складність математичного дослідження таких завдань полягає в тому, що постановка задачі містить умови у вигляді нерівностей, тому вихідна задача не може

бути сформульована як класична задача математичної фізики. Розглядається задача визначення полів переміщень, деформацій і напружень пружнопластичної двошарової смуги (рис.1) кінцевих розмірів $H \times A \times B$ під дією абсолютно жорсткого штампу сферичної форми радіусу R .

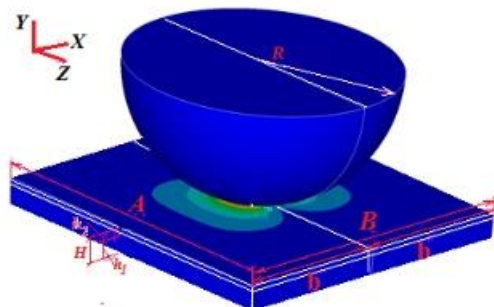


Рис. 1

При контакті між шарами тіла і тіла зі штампом враховано два випадки: проковзання з можливим розшаруванням гладких шарів з гладким штампом, та варіант з урахуванням сил тертя між шарами тіла та тіла зі штампом з можливим розшаруванням. Двошаровий пакет вважається зчепленим з основою. Для розрахунку було обрано два матеріали [1]: мідно-нікелевий сплав 70/30 (МНС), та нержавіюча сталь AISI 201 (НС). Пружнопластичні властивості описуються діаграмою з лінійним зміцненням. Матеріал штампу будемо вважати абсолютно жорстким. Коефіцієнт тертя між шарами полоси, між штампом і шарами $f = 0.2$.

За допомогою методу варіаційних нерівностей в роботі [2] показано, що задача визначення напружено-деформованого стану контакту багатошарових тіл з гладкими шарами, які або зчеплені, або враховується можливе проковзування та розшарування еквівалентна задачі мінімізації функціоналу Лагранжа

$$I(v) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} W_k(\vec{x}, \varepsilon_{ij}(\vec{x})) d\Omega_k, \quad (1)$$

де $W_k(\vec{x}, \varepsilon_{ij}(\vec{x}))$ – функція густини енергії деформації в точці \vec{x} шару Ω_k ($k = 1, 2$) на множині можливих переміщень $\vec{v}(\vec{x})$, що задовольняють граничним умовам, та умовам контакту у вигляді системи рівностей та нерівностей.

У випадку врахування сил тертя між шарами полоси та між штампом та тілом неможливо звести задачу к мінімізації функціоналу повної енергії тіла, так як розподіл нормальних напружень на поверхні контакту невідомий, як невідомі і ділянки зчеплення, проковзування та відставання шарів. Тому, як показано в роботі [3], ми маємо послідовність задач мінімізації функціоналів

$$I_n(v) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} W_k(\vec{x}, \varepsilon_{ij}(\vec{x})) d\Omega_k + \int_{S_C} f |\sigma_y^{(n-1)}(\vec{x})| \sqrt{(u_x(\vec{x}))^2 + (u_y(\vec{x}))^2} dS + \int_{S_{12}} f |\sigma_y^{(n-1)}(\vec{x})| |\vec{u}_\tau^{(1)}(\vec{x}) - \vec{u}_\tau^{(2)}(\vec{x})| \quad (2)$$

на множині можливих переміщень $\vec{v}(\vec{x})$, що задовольняють граничним умовам, та умовам контакту. Для розв'язку задач мінімізації нелінійних функціоналів (1) та (2) на множині можливих переміщень застосовано методи скінчених елементів та змінних параметрів пружності [3]. Були отримані чисельні результати для різних комбінацій матеріалів шарів без та з урахуванням сил тертя, а також досліджено залежність напружено-деформованого стану від положення штампу відносно тіла.

Для всіх розглянутих комбінацій матеріалів шарів справедливо зменшення інтенсивності пластичних деформацій на $\sim 17\%$ при урахуванні сили тертя, збільшення

максимального нормального напруження $\sigma_{y\sigma_y}$ у межах 15%, більш рівномірний розподіл інтенсивності напружень і зменшення максимальної інтенсивності до 7%. Для розрахунків МНС-НС тертя зменшує відставання верхнього шару, для НС-МНС тертя збільшило площу відставання, але не величину. У розрахунку з МНС-МНС величина відставання зменшується у 1,5 рази, але площа розшарування майже не змінюється. За результатами розрахунків можна стверджувати, що врахування тертя, як правило, зменшує величину і площу відшарування при більш м'якому матеріалі верхнього шару (МНС-НС, МНС-МНС), і збільшує його при більш жорсткому (НС-МНС). Місце прикладення штамп до полоси не змінює, значною мірою, розподілу інтенсивності

напружень, пластичних деформацій і величини $\sigma_{y\sigma_y}$, але призводить до більшої величини, іншого візерунку і площини відставання верхнього шару полоси.

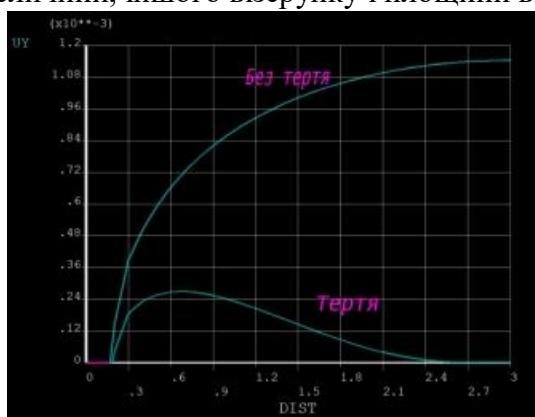


Рис. 2. Графік додатних переміщень $u_y u_y$ вздовж Ox з тертям та без. Матеріал верхнього шару МНС, нижнього - НС

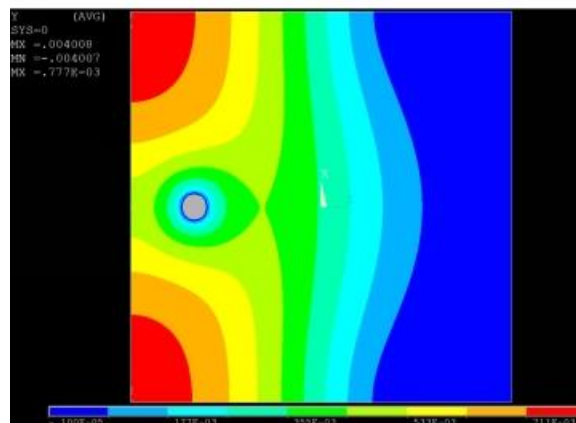


Рис. 3. Контурний графік додатних переміщень $u_y u_y$ у площині Oxz , $Y=0.41$. Матеріал верхнього шару МНС нижнього НС. Тертя. Штамп зміщено на $\frac{2}{3}$.

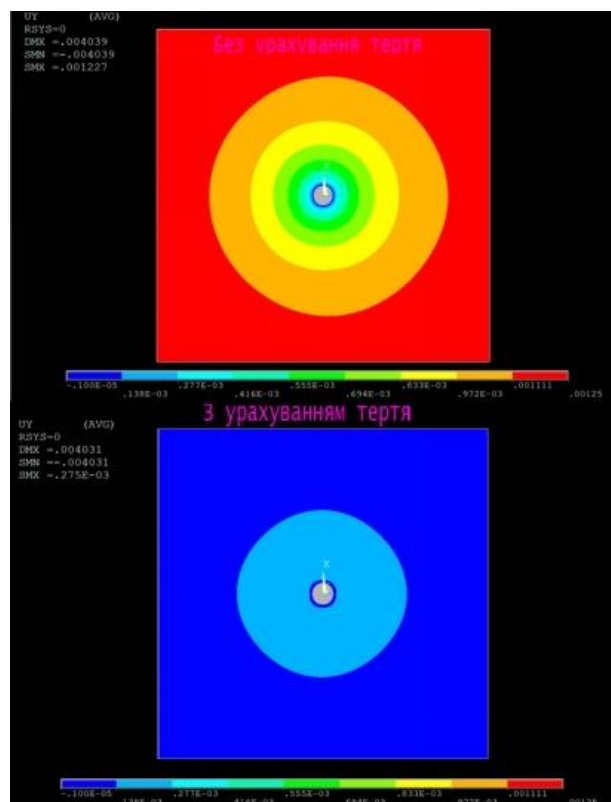


Рис. 4. Контурні графіки розподілу додатних переміщень u_{yy} у площині Oxz , $Y=0.41$. Матеріал верхнього шару МНС нижнього НС.

Література

1. Каталог механічних властивостей матеріалів. Інформаційний ресурс. <https://mechanical.com/reference/material-properties-tables>.
2. Кузьменко В.И. О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел.- Прикл. матем. и мех., 1979, т.43, вып. 5, с. 893-901.
3. Чернецький С.О., Швайко М.Ю. Вариційні принципи і математичні методи вирішення граничних задач для кусково-однорідних нелінійних середовищ //Мат. методи та фіз.-мех. поля. –1988. – Вип. 27.- С. 64-67.

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМВПЛИВУ ПРЯМОКУТНИХ ОТВОРІВ В КОНІЧНИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНОЇ ТЕХНІКИ З ВРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Є.А.Сторожук, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко, С.Б.Харенко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

У сучасному ракетобудуванні, як основні несучі елементи конструкцій, широко використовуються оболонки і пластини. Чільне місце серед них належить конічним оболонкам, які використовують при проектуванні корпусів ракет (головний обтічник, міжступеневий і хвостовий відсіки, тощо). Досить часто за конструктивними або технологічними міркуваннями такі елементи конструкцій мають отвори і вирізи

різноманітної форми. Значна частина результатів з вивчення концентрації напружень біля отворів в конічних оболонках отримана на основі розв'язання лінійно-пружних задач і найбільш повно викладена в узагальнюючій монографії [1]. Нелінійні задачі про концентрацію напружень в конічних оболонках розглянуті в обмеженій кількості робіт. Майже всі результати в цих роботах отримані для випадку, коли оболонки ослаблені одним отвором (круговим, еліптичним, прямокутним). І лише в окремих роботах досліджено нелінійне деформування конічної оболонки з двома круговими вирізами [2]. Публікації, присвячені розв'язанню фізично нелінійних крайових задач для конічних оболонок з двома або більшою кількістю прямокутних отворів, в науковій літературі на даний час відсутні.

В доповіді запропонована чисельна методика для дослідження концентрації напружень в конічних елементах конструкцій ракет, виготовлених з композитних матеріалів та ослаблених прямокутними отворами, з врахуванням фізичної нелінійності.

Геометричні співвідношення записані у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява [2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_l; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_g; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_g + \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_l; \\ \mu_{11} &= -\frac{\partial^2 \bar{u}}{A_l^2 \partial l^2} \cdot \bar{n} + \frac{1}{A_l} \frac{\partial A_l}{A_l \partial l} \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{n} - \frac{1}{A_l} \frac{\partial A_l}{A_g \partial \vartheta} \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta} \cdot \bar{n}; \\ \mu_{22} &= -\frac{\partial^2 \bar{u}}{A_g^2 \partial \vartheta^2} \cdot \bar{n} + \frac{1}{A_g} \frac{\partial A_g}{A_g \partial \vartheta} \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta} \cdot \bar{n} - \frac{1}{A_g} \frac{\partial A_g}{A_l \partial l} \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{n}; \\ 2\mu_{12} &= -\frac{2}{A_l A_g} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial l \partial \vartheta} \cdot \bar{n} + \frac{2}{A_g} \frac{\partial A_g}{A_l \partial l} \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta} \cdot \bar{n} + \frac{2}{A_l} \frac{\partial A_l}{A_g \partial \vartheta} \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{n}; \\ e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12},\end{aligned}\tag{1}$$

де $\bar{u} = u\bar{e}_l + v\bar{e}_g + w\bar{n}$ – вектор переміщень точок середньої поверхні оболонки; $\bar{e}_l, \bar{e}_g, \bar{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат (l, ϑ, γ) ; A_l, A_g – параметри Ламе.

Вважаючи, що процес навантаження є складним, при розрахунку композитних оболонок скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями теорії течії анізотропних середовищ, в якій прийнята узагальнена умова пластичності Мізеса

$$f = \frac{1}{2} (q_{1111} \sigma_{11}^2 + q_{2222} \sigma_{22}^2 + 2q_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 4q_{1212} \sigma_{12}^2) = k^2,\tag{2}$$

а прирости пластичних деформацій визначаються згідно асоційованого закону течії

$$de_{ii}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} \quad (i=1,2); \quad de_{12}^p = 2d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}.\tag{3}$$

Тут f – квадратична функція напружень σ_{ij} ; $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$ – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей композита; k^2 – додатна матеріальна константа; $d\lambda > 0$ – скалярний множник.

Значимо, що у випадку ізотропного середовища співвідношення (2), (3) переходять у відомі рівняння Прандтля–Рейса.

З метою відслідкування історії процесу деформування конічної оболонки з двома прямокутними отворами при побудові системи розв'язувальних рівнянь використана процедура покрокового навантаження. Така система отримана з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і методу скінченних елементів (МСЕ).

В результаті проведення лінеаризації задачі приходимо до такого функціоналу:

$$\begin{aligned} \Pi^n = & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \{\Delta \varepsilon\}^T [D^0] \{\Delta \varepsilon\} d\Sigma + \iint_{\Sigma} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\Delta m^P\} d\Sigma - \iint_{\Sigma} \{\Delta u\}^T \{\Delta p\} d\Sigma - \\ & - \int_{\Gamma_k} \{\Delta u_k\}^T \{\Delta m_k\} ds + \iint_{\Sigma} (\{\Delta \varepsilon\}^T \{\bar{m}\} - \{\Delta u\}^T \{\bar{p}\}) d\Sigma - \int_{\Gamma_k} \{\Delta u_k\} \{\bar{m}_k\} ds, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\{\bar{m}\}, \{\bar{p}\}, \{\bar{m}_k\}$ і $\{\Delta m\}, \{\Delta p\}, \{\Delta m_k\}$ – значення компонентів векторів внутрішніх силових факторів, поверхневого та крайового навантаження на початку n -го кроку, а також їх прирости на цьому кроці; $\{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta u\}, \{\Delta u_k\}$ – прирости деформацій, переміщень серединної поверхні та контуру оболонки на n -му кроці; $\{\Delta m^P\}$ – вектор приростів нелінійних частин зусиль і моментів, які враховують пластичні деформації матеріалу оболонки; $[D^0]$ – матриця жорсткостей оболонки; Σ – область серединної поверхні оболонки; Γ_k – частина контуру серединної поверхні, на якій задані крайові сили.

На кожній ітерації методу додаткових напружень лінеаризована задача розв'язується МСЕ з апроксимацією вектора переміщень бікубічними сплайнами виду

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^4 \left[\bar{u}^{(i)} N_i^{(1)} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1} \right)^{(i)} N_i^{(2)} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_2} \right)^{(i)} N_i^{(3)} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)^{(i)} N_i^{(4)} \right]. \quad (5)$$

Тут $N_i^{(1)}, N_i^{(2)}, N_i^{(3)}, N_i^{(4)}$ – бікубічні сплайни локальних координат ξ_1, ξ_2 ; $\bar{u}^{(i)}, \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1} \right)^{(i)}, \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_2} \right)^{(i)}, \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)^{(i)}$ – значення вектора переміщень і його похідних по локальних координатах в i -му вузлі скінченного елемента.

За допомогою розробленої чисельної методики та створеного програмного забезпечення досліджено взаємовплив двох прямокутних отворів, які розташовані на бічній поверхні нелінійно-пружної ортотропної конічної оболонки, за дії осьового навантаження.

Список використаних джерел

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н., Чехов Вал. Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Сторожук Е.А., Чернышенко И.С., Харенко С.Б. Упругопластическое деформирование конических оболочек с двумя круговыми отверстиями // Прикл. механика. – 2012. – 48, №3. – С. 127 – 132.

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Є.А. Сторожук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Довгі циліндричні панелі кругового і некругового (еліптичного, овального, параболічного, тощо) поперечного перерізу знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки, промислового і цивільного будівництва.

В доповіді розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання геометрично нелінійних задач для довгих циліндричних оболонок довільного некругового поперечного перерізу, яка базується на аналітичному та чисельному інтегруванні за методом трапецій. Запропонована методика дозволяє розглянути поведінку оболонки у всій області деформування – як докритичній, так і закритичній, і виконати аналіз напружено-деформованого стану залежно від геометричних і механічних параметрів, а також видів навантаження й контурних умов.

Основні рівняння записані на основі геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка ґрунтується на гіпотезі прямої лінії (враховуються деформації поперечного зсуву) і співвідношеннях закону Гука для ортотропних матеріалів. Розв'язок даної задачі отримано в параметричній формі з величиною тангенціального зусилля в якості параметра. Для некругової циліндричної панелі з шарнірно закріпленими поздовжніми краями одержано вирази для компонентів напружено-деформованого стану, визначено граничні значення узагальненого геометричного параметра, побудовано систему рівнянь для знаходження критичного навантаження, розглянуто основні часткові та граничні випадки.

Застосуємо запропонований підхід до дослідження деформування і стійкості піддатливої на поперечний зсув довгої овальної незамкненої циліндричної оболонки товщиною h з шарнірно закріпленими поздовжніми краями за дії рівномірного нормального тиску, прикладеного з боку опуклості оболонки.

Поперечний переріз оболонки має форму дуги овалу, кривизна якого змінюється за законом [1]:

$$k = k_0(1 - \xi \cos 2k_0 s), \quad (1)$$

де $k_0 = 1/r_0$; r_0 – радіус кола, довжина якого дорівнює довжині овалу; ξ – параметр, який є мірою відхилення овалу від кола ($-1 \leq \xi \leq 1$); s – довжина дуги овалу ($-\delta \leq s \leq \delta$).

Зазначимо, що для $-0,6 \leq \xi \leq 0,6$ ($0,66 \leq a/b \leq 1,51$) овал є достатньо точним наближенням еліпса з тими ж самими значеннями півосей a, b .

Розрахунки виконані для оболонки з параметрами:

$$\tilde{k}_0 = 2\delta k_0 = 0,5; \quad \xi = 0,5; \quad \beta = 0,08,$$

де $\beta = D_M/D_Q\delta^2$ – параметр поперечного зсуву; D_M, D_Q – жорсткості оболонки на згин і поперечний зсув.

Граничні значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k} = \delta^2 k_0/h$ і відношення півосей овалу a/b в цьому випадку дорівнюють:

$$\tilde{k}_{\pi/2} = 1,999; \quad \tilde{k}_\pi = 3,401; \quad a/b = 1,405.$$

У табл. 1 для панелі з величиною параметра $\tilde{k} = 3$ наведені верхнє і нижнє критичні значення навантаження \tilde{q}_u і \tilde{q}_l ($\tilde{q} = q\delta^2/k_0 D_M$), при досягненні яких

відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка ($\tilde{k}_{\pi/2} < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$), та відповідні цим навантаженням значення прогинів \tilde{w}_u, \tilde{w}_l ($\tilde{w} = w/k_0\delta^2$) у вершині панелі. Дані отримані з використанням розробленої методики (аналітично-чисельного розв'язку – АЧР) для ряду значень кількості частин n , на які розбивається відрізок інтегрування $[0; 1]$, і точного розв'язку (ТР) [1]. Тут же наведені значення максимальних похибок (Δ_{\max}) АЧР в залежності від кількості розбиттів відрізка інтегрування.

Таблиця 1 – Критичні навантаження і відповідні їм прогини у вершині панелі для $\tilde{k} = 3$

	АЧР							ТР
	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	$n=320$	
$\tilde{q}_u \cdot 10$	14,1078	14,2064	14,2309	14,2370	14,2385	14,2389	14,2390	14,2391
$-\tilde{w}_u \cdot 10$	1,51294	1,51740	1,51839	1,51904	1,51880	1,51874	1,51872	1,51872
$\tilde{q}_l \cdot 10$	6,99441	6,98609	6,98466	6,98435	6,98427	6,98425	6,98425	6,98425
$-\tilde{w}_l \cdot 10$	3,79271	3,82586	3,83373	3,83587	3,83641	3,83654	3,83658	3,83659
$\Delta_{\max}, \%$	1,1437	0,2797	0,0745	0,0188	0,0047	0,0014	0,0007	0

Для панелі з параметром $\tilde{k} = 4,5$ у табл. 2 представлено значення критичного навантаження \tilde{q}_u^* , при досягненні якого оболонка може втратити стійкість за рахунок біфуркації ($\tilde{k} > \tilde{k}_{\pi}$). Також в цій таблиці наведені відповідні навантаженню \tilde{q}_u^* значення прогину \tilde{w}_u^* у вершині панелі.

Таблиця 2– Критичні навантаження і відповідні їм прогини у вершині панелі для $\tilde{k} = 4,5$

	АЧР							ТР
	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	$n=320$	
$\tilde{q}_u^* \cdot 10$	22,2601	22,3455	22,3663	22,3714	22,3727	22,3730	22,3731	22,3731
$-\tilde{w}_u^* \cdot 10^2$	9,32520	9,32181	9,32123	9,32110	9,32107	9,32106	9,32106	9,32106
$\Delta_{\max}, \%$	0,5051	0,1234	0,0304	0,0076	0,0018	0,0004	0,0000	0

Аналіз даних, представлених у табл. 1, 2, свідчить про те, що при розбитті відрізка інтегрування на 5, 10, 20, 40, 80, 160 і 320 частин найбільша відмінність (Δ_{\max}) результатів аналітично-чисельного розв'язку даної задачі від її точного розв'язку не перевищує, відповідно, 1,1437; 0,2797; 0,0745; 0,0188; 0,0047; 0,0014; 0,0007(%) для панелі з узагальненим геометричним параметром $\tilde{k} = 3$ та 0,5051; 0,1234; 0,0304; 0,0076; 0,0018; 0,0004; 0,0000(%) для випадку $\tilde{k} = 4,5$.

Таким чином, розроблена аналітично-чисельна методика може бути застосована до дослідження нелінійного деформування і стійкості нескінченно довгих пологих циліндричних оболонок як овального, так і довільного некругового перерізу з врахуванням деформацій поперечного зсуву.

Список використаних джерел

1. Сторожук Є.А. Точний розв'язок геометрично нелінійної задачі для піддатливої на поперечний зсув овальної циліндричної оболонки // Прикл. механіка. – 2022. – 58, №6. – С. 39 – 59.

**ДО РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМАЦІЙ ОБЕРНЕНОЇ ПОВЗУЧОСТІ
ТОНКОСТІННИХ ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ НЕЛІНІЙНО-
В'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ ПОВНОГО
РОЗВАНТАЖЕННЯ**

Я.В.Павлюк

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Розглядається задача розрахунку деформацій оберненої повзучості тонкостінних трубчастих елементів із нелінійно-в'язкопружнопластичних матеріалів за умов повного розвантаження. Умова навантаження для режиму повного розвантаження конкретизується у вигляді

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k - h(t - t_k)\sigma_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1)$$

де σ_k – початкове напруження, що прикладено в момент часу $t = 0$; t_k – момент повного розвантаження ($t_k < t$).

Вважається, що матеріал деформується нелінійно-пружно при напруженнях σ , що не перевищують деяке критичне значення σ_* . Значення σ_* відповідає ординаті точки на діаграмі „ $\sigma - \varepsilon$ ”, для якої дотичний модуль $\bar{E}(\varepsilon_*)$ задовольняє співвідношенню [1]

$$\bar{E}(\varepsilon_*) = \frac{1}{2 \ln 2} E, \quad (2)$$

де E – модуль лінійної пружності.

У разі напружень $\sigma > \sigma_*$ матеріал поводить себе як пружнопластичний, так що траєкторії навантаження та розвантаження не співпадають.

В залежності від рівня початкового напруження σ_k в (1) миттєве деформування в'язкопружних матеріалів розглядається як нелінійно-пружне і нелінійно-пружнопластичне. Величина напруження σ_* , що визначає зміну характеру миттєвого деформування, відповідає ординаті точки на діаграмі „ $\sigma - \varepsilon$ ” (рис.1,а), для якої дотичний модуль $\bar{E}(\varepsilon_*)$ відповідає співвідношенню (2).

Величина зворотньої деформації ε_r нелінійно-пружнопластичних матеріалів при повному розвантаженні розраховується по рівнянню

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) = & \sum_{i=0}^3 b_{i,j} \sigma_k h(t) \left\{ \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_*^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right]^i + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_k}{E_p} \left[\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_*)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_*^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} - 1 \right] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

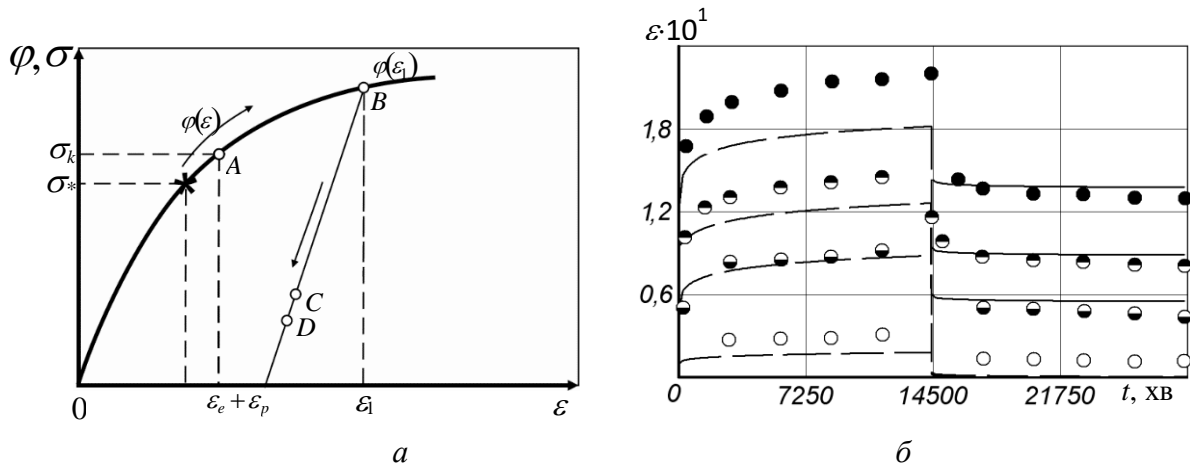


Рис. 1 Деформування нелінійно-в'язкопружнопластичних матеріалів в режимі навантаження і розвантаження в площині „ $\sigma - \varepsilon$ ” (а) та розрахункові (лінії) та експериментальні (точки) значення деформацій зворотної повзучості

виходячи із (1) і з припущенням, що розвантаження підпорядковується закону лінійної пружності, причому миттєвий модуль пружності при розвантаженні E_p співпадає із миттєвим модулем пружності при навантаженні. Для матеріалів в яких величина напружень перевищує межу нелінійно-в'язкопружного деформування σ_* , деформування здійснюється по лінійному закону рис.1,а.

В режимі повного розвантаження на підставі рівняння (3), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості для тонкостінних трубчастих елементів із політетрафторетилену [2] для декількох рівнів напружень $\sigma_k = 5(\circ), 7,5(\ominus), 8,5(\oplus), 10(\bullet)$ МПа. Результати розрахунків наведені на рис.1,б штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками. Як видно отримано із рис.1,б отримано задовільне узгодження результатів розрахунку із експериментами.

1. Бокшицкий М. Н. Длительная прочность полимеров / М. Н. Бокшицкий .— М.:Химия, 1978 .— 308с.
2. Павлов П. А. Ползучесть полистилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения / П. А. Павлов, О. Н.Кодакова, В. Н. Белан-Гайко // Механика конструкционных материалов.— 1980.— №5.— С.793— 80.

ПРО ВПЛИВ КРАЙОВИХ УМОВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ НАПІВЕЛІПТИЧНОЇ ТОРОЇДАЛЬНОЇ ОБОЛОНКИ

І.В.Луцька, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Замкнуті тороїдальні оболонки використовуються як резервуари високого тиску, надлегкі космічні конструкції [1]. Незамкнуті знайшли застосування як підводні конструкції [2]. Серед них перспективними виявилися напівеліптичні тороїдальні (semi-toroidal) оболонки (рис. 1). Розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) таких тонких оболонок виконаємо в лінійній постановці варіаційно-різницею

методом з використанням змішаних функціоналів [1]. Це дозволяє легко алгоритмічно реалізувати геометричну частину гіпотез Кірхгофа – Лява та покращити збіжність чисельного методу за можливого обчислювального явища мембранного замикання (locking).

Серединна поверхня тонкої ортотропної напівеліптичної незамкнутої тороїдальної оболонки утворена обертанням навколо вісі Oz півеліпса

$$F(x, z) = \left(\frac{x-c}{a} \right)^2 + \left(\frac{z}{b} \right)^2 - 1 = 0, \quad z \geq 0,$$

де a і b – його півосі c – відстань від центру поперечного перерізу до вісі обертання. Ця поверхня (рис. 1) віднесена [1] до криволінійної системи координат (s, θ, γ) , в якій довжина дуги еліпса s відраховується від найвіддаленішої від вісі обертання точки A ($x=c+a, z=0$) до найближчої до неї точки C ($x=c-a, z=0$). Вісі ортотропії матеріалу збігаються з координатними лініями прийнятої системи координат.

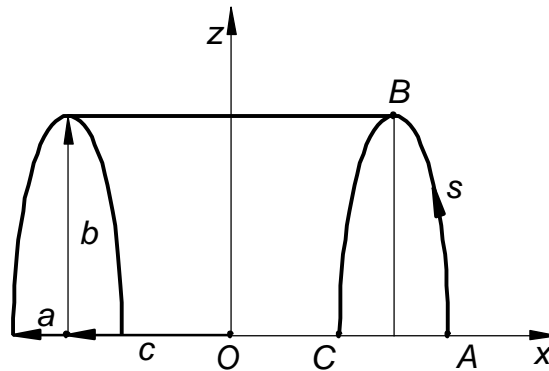


Рис. 1 – Переріз незамкнутої напівеліптичної тороїдальної оболонки

Розраховано НДС тонкої напівеліптичної тороїдальної оболонки за трьох варіантів закріплення країв в точках A і C ($z=0$): шарнірне, жорстке, шарнірно рухливе вздовж вісі Ox .

Геометричні параметри оболонки такі [1]: $\tilde{a} = a/h = 100$; $\tilde{b} = b/h = 1000$; $\tilde{c} = c/h = 200$; $\tilde{s} = s/s_k = 2032$ – половина дуги еліпса, h – товщина оболонки. Тобто поперечний переріз сильно витягнутий уздовж вісі симетрії. Матеріал оболонки – шаруватий склопластик (композит) з характеристиками: $E_s = 15$ ГПа; $E_\theta = 12$ ГПа; $\nu_s = 0,12$. Навантаження – рівномірно розподілений внутрішній тиск $q = 1$ МПа.

В табл. 1 для характерних точок тора $\tilde{s} = s/s_k$ наведено меридіональні (σ_s) та колові (σ_θ) напруження в трьох точках вздовж товщині оболонки ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0, \pm 0,5$) для трьох випадків закріплення країв. Останній варіант для даної сильно витягнутої оболонки практично відповідає умовам симетрії для замкнутої оболонки, який було розглянуто раніше [1].

Таблиця 1. Напруження в характерних точках тора

\tilde{s}	$\tilde{\gamma}$	Шарнірне		Жорстке		Шарнірно рухливе	
		σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
0	0,5	86,1	8,2	-477,1	-45,8	86,1	296,9
	0	86,1	8,2	86,1	8,2	86,1	297,9

	-0,5	86,1	8,2	649,2	62,3	86,1	297,4
0,5	0,5	-182,7	106,9	-182,4	106,6	-182,7	107,3
	0	18,2	116,4	18,2	116,1	18,2	116,7
	-0,5	219,2	125,9	218,8	125,6	219,2	126,2
1,0	0,5	141,7	13,6	-76,8	-7,4	141,7	-99,1
	0	141,7	13,6	141,7	13,6	141,7	-98,5
	-0,5	141,7	13,6	360,3	34,6	141,7	-98,0

Видно, що НДС біля великої півосі еліпса (точка B , $\tilde{s}=0,5$) практично не залежить від крайових умов. Меридіональні напруження в серединній поверхні в точках A і C (σ_s , $\tilde{\gamma}=0$, $\tilde{s}=0$ і $\tilde{s}=1$) не залежать від способу закріплення. А у випадках шарнірного та шарнірно рухливого закріплення вони в цих точках (A і C) збігаються по всій товщині ($\tilde{\gamma}=0, \pm 0,5$) внаслідок відсутності моментів. Шарнірне закріплення зовнішніх країв незамкнутої оболонки значно зменшує колові напруження (σ_θ) поблизу них. Жорстке закріплення внаслідок значних меридіональних моментів на краях викликає стиски на зовнішніх поверхнях (σ_s , $\tilde{\gamma}=0,5$, $\tilde{s}=0$ і $\tilde{s}=1$). При цьому максимальними стають меридіональні напруження на внутрішній поверхні в точці A ($\sigma_s=649,2$ МПа, $\tilde{\gamma}=-0,5$, $\tilde{s}=0$).

Як зазначалось, геометрично розглянута тороїдальна оболонка є сильно витягнутою вздовж вісі Oz ($b/a=10$) і у випадку шарнірно рухливого закріплення нагадує дві з'єднані на торцях коаксіальні циліндричні оболонки. Одна з них радіусом $c+a$ знаходиться під дією внутрішнього тиску q , а друга радіусом $c-a$ – під дією такого ж зовнішнього. Характерні величини колових напружень в них будуть: $\sigma_\theta = q(c+a)/h=300$ МПа в точці A і $\sigma_\theta = -q(c-a)/h=-100$ МПа в точці C . До цих значень наближаються колові напруження $\sigma_\theta=297,4$ МПа в точці A і $\sigma_\theta=-98,6$ МПа в точці C (остання колонка в табл.1).

Як і у випадку замкнутої [1] оболонки, так і в даному випадку незамкнутої класичним чисельним методам притаманне мембранне замикання. Дана задача може доповнити ряд так званих патологічних тестів.

Література

1. *Lutskaaya I.V., Maksimiyuk V.A, Chernyshenko I.S.* Modeling the Deformation of Orthotropic Toroidal Shells with Elliptical Cross-Section Based on Mixed Functionals // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – 54, N 6. – P. 660 – 665.
2. *Jiammeepreecha W., Chucheeprakul S.* Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures.* – 2017.–116. – P. 12–18.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ І ВКЛЮЧЕННЯМИ

Е. Л. Гарт, О. О. Семенча

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Оболонкові конструкції знайшли широке застосування у різноманітних галузях техніки, у тому числі, у аерокосмічній, машинобудуванні, енергетиці та ін. Суцільність таких конструкцій, з технологічних або конструктивних причин, часто порушується

різного роду отворами та вирізами, які є локальними концентраторами напружень. Пошук шляхів зменшення концентрації напружень навколо отворів є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла, пов'язанною з вирішенням конкретних інженерних проблем [1–3].

Виконано числове дослідження за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) поведінки циліндричних та зрізаних конічних оболонок, які мають центрально розташовані кругові отвори, оточені стрічковими включеннями. Оболонки піддані одновісним рівномірним розтягувальним врівноважувальним зусиллям. Матеріал включень має відмінні від основного матеріалу властивості ($E_{вкл} = E_0/3; E_0/2,5; E_0/2; E_0/1,5$, де E_0 – модуль пружності оболонки, $E_{вкл}$ – модуль пружності включення). Ширина включень $h_{вкл}$ варіюється ($h_{вкл} = r_0/2; r_0/4; r_0/8$, де r_0 – радіус кругового отвору). Вважається, що включення розташоване у площині оболонки, на його границі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення.

Досліджено вплив механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН). Проведено порівняльний аналіз напружено-деформованого стану (НДС) досліджуваних оболонкових елементів конструкцій з відомими аналітичними розв'язками у разі малих отворів ($r_0/\sqrt{R_0h} = 0,5$, де h – товщина оболонки; R_0 – радіус кривини координатної лінії оболонки) для різних варіантів «жорсткості» матеріалу включень та їх ширини, результати якого наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Коефіцієнт концентрації напружень в конічній і циліндричній оболонках з круговим отвором і різними стрічковими включеннями

Оболонка	Ширина включення $h_{вкл}$	Модуль пружності включення $E_{вкл}$							
		$E_0/3$	$\delta, \%$	$E_0/2,5$	$\delta, \%$	$E_0/2$	$\delta, \%$	$E_0/1,5$	$\delta, \%$
Конічна	$r_0/2$	2,45	-25,7	2,30	-30,3	2,15	-34,8	2,52	-23,6
	$r_0/4$	2,64	-19,9	2,54	-22,9	2,41	-26,9	2,45	-25,7
	$r_0/8$	2,20	-15,1	2,75	-16,6	2,66	-19,3	2,54	-22,9
Циліндрична	$r_0/2$	2,45	-24,6	2,31	-28,9	2,13	-34,5	2,53	-22,2
	$r_0/4$	2,64	-18,8	2,54	-21,9	2,41	-25,9	2,45	-24,6
	$r_0/8$	2,82	-13,2	2,76	-15,1	2,68	-17,5	2,55	-21,5

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення.

Як приклад, на рис. 1 подано результати розподілу інтенсивності напружень σ_i в циліндричній і конічній оболонках з круговим отвором по розгортці отвору в разі наявності стрічкового включення $E_{вкл} = E_0/1,5$ та без включення.

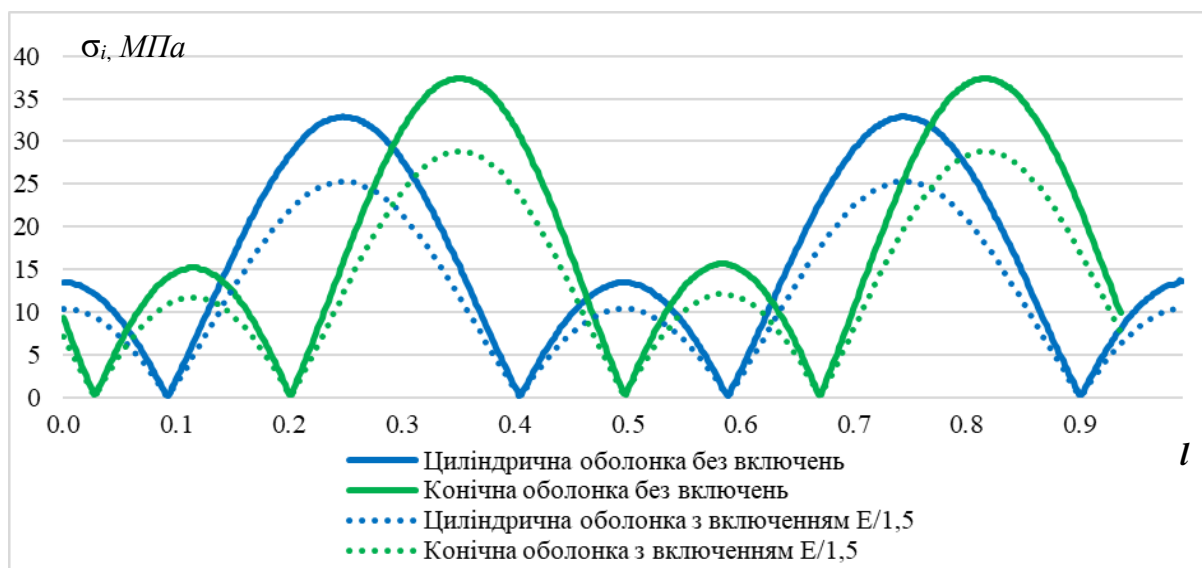


Рис. 1 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i в циліндричній і конічній оболонках по розгортці кругового отвору

Отримані результати числових розрахунків свідчать, що наявність навколо отвору стрічкового включення з більш «м'якого» матеріалу, ніж основний матеріал оболонки, дозволяє зменшити ККН на $\sim 13 - 35\%$ у порівнянні з відповідними варіантами для обох типів оболонок без включення. Найкращім з розглянутих варіантів застосування включень виявилось включення ширини $h_{вкл} = r_0 / 2$ з модулем пружності $E_{вкл} = E_0 / 1,5$.

У випадках з іншими параметрами включень (більш «м'яких» та тонших) спостерігається механічний ефект переміщення (зсуву) зони концентрації напружень від краю отвору до границі між матеріалами включення та оболонки.

Таким чином, на основі проведеного комп'ютерного моделювання із застосуванням МСЕ вивчено вплив механічних і геометричних параметрів включень на концентрацію напружень навколо отворів в тонкостінних циліндричних і зрізаних конічних оболонках з круговими отворами за наявності навколо них стрічкових включень з іншого матеріалу. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами для випадків оболонок без включень. Знайдено раціональні параметри стрічкових включень щодо зменшення ККН. Виявлено механічний ефект, пов'язаний із зсувом зони концентрації напружень за певних параметрів включень.

Література

1. *Методы расчета оболочек*: в 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. **Гарт Е. Л., Семенча О. О.** Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 43–54. <https://doi.org/10.15421/4221004>
3. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 108. – P. 77–86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ЗА НАЯВНОСТІ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Е. Л. Гарт, Б. І. Терьохін

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдяки особливостям функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), які полягають у поступовій зміні своїх властивостей в об'ємі, їх успішно використовують у багатьох галузях техніки. Застосовуючи ФГМ-включення у тонкостінних конструкціях з отворами, з'являється можливість впливати на коефіцієнт концентрації напружень (ККН) в їх околі [1, 2]. Проблема пошуку раціональних параметрів ФГМ-включень, що дають змогу зменшити локальні напруження, підвищити міцність та надійність конструкції у цілому, є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла.

У даній роботі на основі методу скінченних елементів (МСЕ) проведено числовий аналіз поведінки пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з круговими отворами та радіально-неоднорідними ФГМ-включеннями. Досліджується вплив механічних параметрів включень на напружено-деформований стан (НДС) тонких прямокутних однорідних ізотропних пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з центральним розташованим круговим отвором та кільцевим ФГМ-включенням. Вважається, що на границі включення з матрицею задано умови жорсткого зчеплення, включення знаходиться у площині пластини/оболонки. На бокові грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне навантаження розтягування, що не призводить до появи пластичних деформацій.

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона $\nu_0 = 0,25$ та змінним модулем пружності ФГМ-включення. Закон змінення модуля пружності ФГМ-включення має три характерні зони: 1) зона зростання ширини h_1 ; 2) зона незмінного (фіксованого) значення ширини h_2 ; 3) зона зменшення модуля пружності ширини h_3 . Модуль пружності пластини та оболонки $E_0 = 100 \text{ МПа}$.

Проведені дослідження показали, що найменший ККН в пластині та оболонці з кільцевим ФГМ-включенням за заданих геометричних і механічних характеристик був отри-маний, коли ширина включення $h_{\text{вкл}} = 8R$: $h_1 = h_3 = R$, $h_2 = 6R$ (R – радіус кругового отвору), а модуль пружності E_2 у другій (центральної) зоні у 2 рази більше, ніж модуль пружності матриці E_0 . Представляє інтерес дослідження впливу величини модуля пружності другої зони ФГМ-включення на зміну ККН в пластині та оболонці з отвором.

У табл. 1 наведено отримані результати комп'ютерного моделювання НДС пластини з круговим отвором і радіально-неоднорідним включенням у разі $h_1 = h_3 = R$, $h_2 = 6R$ для різних варіантів «жорсткості» другої (центральної) зони включення ($E_2 = 1,5E_0$; $2E_0$; $2,5E_0$; $3E_0$).

Маємо, що наявність радіально-неоднорідного включення із обраним законом змінення модуля пружності дає змогу зменшити величину ККН у пластині на ~24%–51%, при цьому максимальні деформації також зменшуються пропорційно. Має місце така тенденція: чим більше модуль пружності другої зони ФГМ-включення, тим менші величини ККН і відповідних деформацій у пластині. Найкращим із розглянутих варіантів щодо зменшення ККН виявилось ФГМ-включення у разі $E_2 = 3E_0$, при цьому ККН вдалося знизити майже на 51% у порівнянні з пластиною без включення.

Таблиця 1 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з круговим отвором і ФГМ-включенням у разі $h_2 = 6R$

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1 ($E_2 = 1,5E_0$)	2,32	-23,9	1,59	-25,4
ФГМ-включення 2 ($E_2 = 2E_0$)	1,90	-37,7	1,28	-39,9
ФГМ-включення 3 ($E_2 = 2,5E_0$)	1,62	-46,9	1,07	-49,8
ФГМ-включення 4 ($E_2 = 3E_0$)	1,50	-50,8	0,92	-56,8

Тут δ_1 і δ_2 – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій ε_i^{\max} від відповідного значення для пластини без включення.

Для оболонок спостерігаються аналогічні закономірності. Результати розрахунків, проведених для оболонок, наведені у табл. 2. Найкращим із розглянутих варіантів з точки зору зменшення ККН тут також, як і для пластин, виявилась наявність ФГМ-включення 4 ($h_1 = h_3 = R$, $h_2 = 6R$, $E_2 = 3E_0$), при цьому ККН вдалося знизити на 50% у порівнянні з оболонкою без включення.

Таблиця 2 – Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в оболонці з круговим отвором і ФГМ-включенням у разі $h_2 = 6R$

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \times 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1 ($E_2 = 1,5E_0$)	2,50	-23,5	1,71	-27,2
ФГМ-включення 2 ($E_2 = 2E_0$)	2,06	-37,0	1,38	-39,5
ФГМ-включення 3 ($E_2 = 2,5E_0$)	1,77	-45,9	1,16	-49,1
ФГМ-включення 4 ($E_2 = 3E_0$)	1,63	-50,2	1,00	-56,1

Тут δ_1 і δ_2 – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій ε_i^{\max} від відповідного значення для оболонки без включення.

Отже, у результаті проведеного числового дослідження поведінки тонких пластин і циліндричних оболонок з круговим отвором і кільцевим включенням із ФГМ проаналізовано вплив величини модуля пружності ФГМ-включення на ККН в пластині та оболонці. Встановлено раціональні параметри радіально-неоднорідного ФГМ-включення, при якому ККН зменшується на 50%. Пропорційно зменшуються також відповідні деформації.

За наявності ФГМ-включень з певними механічними властивостями і геометричними параметрами виникає можливість впливати не тільки на величину ККН в пластинчато-оболонкових елементах конструкцій поблизу локальних концентраторів напружень, а й на розподіл напружень по поверхні.

Література

1. *Hart E.L., Terokhin B.I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion // Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. – 2021. – Vol. 29, Iss. 1. – P. 42–53. <https://doi.org/10.15421/142103>
2. *Yang Q.Q., Gao C.F., Chen W.T.* Stress concentration in a finite functionally graded material plate // Sci. China Phys. Mech. Astron. – 2012. – Vol. 55. – P. 1263–1271.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПОБЛИЗУ ТВЕРДИХ ПОВЕРХОНЬ

Дегтярьов І.Д., Тонкошкур І.С.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

В роботі розглянуто задачу про течію в'язкої рідини в області, обмеженої двома твердими поверхнями, що обертаються навколо спільної осі з кутовими швидкостями Ω_1 і Ω_2 . Система тіл складається з двох дисків або з диска і конуса. Припускається, що спільна вісь системи тіл розташована вертикально, а течія рідини – стаціонарна, безхвильова та осесиметрична. Також розглянуто задачу про течію рідкої плівки по поверхні диска, що обертається навколо осі.

Вводиться циліндрична система координат (r, φ, z) , що зв'язана з поверхнею нижнього диска: координата z направлена вдовж осі обертання, r і φ – полярні радіус і кут в площині, яка є перпендикулярною до осі Oz . Диференціальні рівняння нерозривності й імпульсу, які описують течію в'язкої рідини, в наближенні примежового шару мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) &= \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) &= \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z}, \end{aligned}$$

де u, v, w – компоненти вектора швидкості рідини в напрямку осей координат, p – тиск, ρ – густина рідини, $\tau_{rz}, \tau_{z\varphi}$ – компоненти тензора в'язких напружень.

Система диференціальних рівнянь доповнюється степеневою реологічною моделлю в'язкої рідини

$$\tau_{ij} = 2k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}} \dot{e}_{ij}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ji},$$

де k і n – сталі величини, \dot{e}_{ij} – компоненти тензора швидкостей деформацій.

На твердих поверхнях задаються крайові умови «прилипання»

$$u = 0, \quad v = \xi \Omega_i, \quad w = 0,$$

на вільній поверхні, що розділяє рідку плівку і газ – умови неперервності напружень і нормальної складової вектору швидкості

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0, \quad p + \tau_{\zeta\zeta} = p_0, \quad w = u \frac{\partial h}{\partial \xi}.$$

Невідома товщина плівки h визначається з інтегрального рівняння нерозривності.

Задача розв'язується в наближенні примежового шару. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою автотемельних змінних зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок одновимірної крайової задачі знаходиться чисельно, з використанням пакета Matlab.

Розглядалися системи тіл, що складаються з двох дисків, а також з диска і конуса. Проведені розрахунки для випадків, коли обертається одне з системи тіл, а інше нерухоме, а також, коли обидва тіла обертаються в одному чи в протилежних напрямках.

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЕНЬ У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ

Прозор Д.Є., Тонкошкур І.С.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Захист підземних вод від забруднення – важлива проблема екологічної безпеки. Одним зі способів захисту ґрунтових вод є створення в потоці гідродинамічних бар'єрів, що перешкоджають просуванню забруднень, за допомогою нагнітальних і відкачувальних свердловин. Математичне моделювання цього процесу дає можливість визначити область забруднення, кількість і потужність свердловин, знайти їх оптимальне розташування.

В даній роботі розглядається задача про взаємодію забрудненого потоку ґрунтових вод з потоком чистої води від нагнітальних свердловин. Вважається, що товщина водяного пласта мала в порівнянні з його довжиною і шириною і течія рідини не залежить від вертикальної координати (планова задача). Для математичного моделювання процесу розповсюдження забруднень застосовується конвективно-дифузійна модель переносу, заснована на рівняннях фільтрації та перенесення забруднень. Диференціальні рівняння в частинних похідних, що описують ці процеси, мають вигляд

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0,$$

$$D_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

де H – п'єзометричний напір, φ – концентрація домішок, k_x , k_y , D_x , D_y – коефіцієнти дифузії і фільтрації, n – ефективна пористість. Компоненти вектора швидкості фільтрації обчислюються за формулами

$$V_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad V_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Система диференціальних рівнянь доповнюється початковою умовою та крайовими умовами першого і другого роду на межі розрахункової області.

Для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь застосовувались скінченно-різницевий метод розщеплення з використанням методу встановлення розв'язку для рівняння фільтрації [1,2]. Розрахунки проводились за допомогою математичного пакета Matlab.

Розрахункова область включала джерело забруднення, водозабірну свердловину та розташований між ними гідродинамічний бар'єр, який уявляв собою одну або декілька свердловин, через які закачувалась незабруднена вода. Проведені розрахунки при різній кількості нагнітальних свердловин і при різному їх розташуванні відносно джерела забруднення та водозабірної свердловини.

Література

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
2. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев. К.: Наукова думка, 1997. – 368 с.

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З НЕЛІНІЙНО- ПРУЖНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Абросов Ю.Ю., Максимюк В.А.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ

Циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу є цікавими як в сучасній інженерній справі, так і теоретичних дослідженнях. Застосування нелінійно-пружних композитних матеріалів для виготовлення оболонок веде до необхідності врахування в теорії оболонок нелінійних властивостей композитів [3]. В основі методу розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) таких оболонок лежить застосування змішаного функціоналу та нелінійних фізичних співвідношень для нелінійно-пружного ортотропного композитного матеріалу (КМ).

Вважатимемо, що тонка оболонка виготовлена з нелінійно-пружного ортотропного КМ, властивості якого не змінюються в часі, але можуть проявляти незначну ортотропію і неоднорідність за значної зсувної жорсткості. Осі ортотропії КМ збігаються з лініями головних кривин оболонки.

В декартовій системі координат (x, y, z) рівняння серединної поверхні оболонки з півосями еліпса a і b має вигляд [1]

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Віднесемо цю поверхню до криволінійної системи координат (s, z, γ) , в якій координата γ направлена вздовж нормалі до поверхні, а s є довжиною дуги еліпса, що відраховується від точки $(x = 0, y = b)$.

Нелінійні фізичні співвідношення в довгій оболонці ($e_{zz} = 0$) за плоского напруженого стану для простих навантажень згідно з теорією пластичності анізотропних середовищ [3] матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{E_{ss}} + \Psi q_{ss}\right) \sigma_{ss} + \left(-\frac{\nu_{sz}}{E_{zz}} + \Psi q_{sz}\right) \sigma_{zz} &= e_{ss}, \\ \left(-\frac{\nu_{zs}}{E_{zz}} + \Psi q_{zs}\right) \sigma_{ss} + \left(\frac{1}{E_{zz}} + \Psi q_{zz}\right) \sigma_{zz} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де e_{ss} – колова деформація; σ_{ss} і σ_{zz} – компоненти колових і поздовжніх напружень; E_{ss} , E_{zz} та ν_{sz} , ν_{zs} – модулі пружності та коефіцієнти поперечної деформації ортотропного матеріалу. Його нелінійні властивості в (2) описуються функцією $\Psi(f)$ [3], яка залежить від квадратичної форми напружень f . Система рівнянь (2) є суттєво нелінійною. Її розв'язок відносно напружень можна подати у вигляді [3]

$$\sigma_{ss} = \sigma_{ss}(e_{ss}); \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(e_{ss}). \quad (3)$$

З огляду на застосування в подальшому методу послідовних наближень (МПН) в напруженнях (3) виділяються, як доданки, нелінійні та лінійні члени.

Моделювання НДС оболонки базується на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [2, 3]. Виходячи з принципу віртуальної роботи, вважаючи, що згідно з МПН у формі додаткових напружень величини нелінійних складових відомі з попереднього наближення і не варіюються, варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\delta \Pi = \delta(\Pi^L + \Pi^N) = 0,$$

де позначено [1]

$$\Pi^L = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (T_{ss}^L \varepsilon_{ss} + T_{zz}^L \varepsilon_{zz} + M_{ss}^L \kappa_{ss}) d\Omega - \iint_{\Omega} p w d\Omega + \iint_{\Omega} T_{s\gamma}^f \varepsilon_{s\gamma} d\Omega - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} C_{ss} (\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{ss}^f)^2 d\Omega, \quad (4)$$

$$\Pi^N = \iint_{\Omega} (T_{ss}^{Nf} \varepsilon_{ss} + T_{zz}^{Nf} \varepsilon_{zz} + M_{ss}^N \kappa_{ss}) d\Omega. \quad (5)$$

Функціонал $\Pi(u, w, \varphi, T_{s\gamma}^f, \varepsilon_{ss}^f)$ залежить від чотирьох варіюваних функцій: двох переміщень, кута повороту, зусилля $T_{s\gamma}^f$, яке має фізичний зміст перерізуючої сили, та колової деформації-функції ε_{ss}^f . Переваги такої побудови функціонала викладено в [2]. В лінійній частині функціонала (4) перший доданок є енергією пружних деформацій, другий – роботою поверхневої сили, третій реалізує геометричну частину гіпотез Кірхгофа-Лява методом множників $(T_{s\gamma}^f)$ Лагранжа., четвертий сприяє зменшенню мембранного замикання. В нелінійній частині функціоналу (5) нелінійні складові зусиль T_{ss}^{Nf} і T_{zz}^{Nf} на відміну від лінійних T_{ss}^L і T_{zz}^L залежать від деформації-функції ε_{ss}^f , а не деформації-формули e_{ss} .

Лінеаризована задача зводиться до знаходження в кожному наближенні стаціонарних значень функціонала

$$\Pi^{LN} = \Pi^L + \Pi^N.$$

Для цього використовується варіаційно-різницевий метод (ВРМ) [2].

Розділення класичного функціоналу на лінійну і нелінійну частини, використання в лінійній частині множників Лагранжа для реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява і подібного підходу для уникнення мембранного замикання, дозволяє вирішувати задачу в рамках лінійної теорії оболонок. Лінеаризація функціоналу, використання МПН і ВРМ дають більш алгоритмічний підхід як до побудови системи рівнянь, так і до їх чисельного розв'язання при незначному збільшенні обчислювальних витрат.

Література

1. Abrosov Yu.Yu., Maximyuk V.A., Chernyshenko I.S. Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 282 – 289.
2. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 613 – 687.
3. Концентрация напряжений / Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. – К.: “А.С.К.”, 1998. – 387с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).

**МЕТОДИКА ВРАХУВАННЯ ПОХИБОК ВХІДНИХ ДАНИХ
ТА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕРУЙНІВНИХ ВИПРОБУВАНЬ
ДЛЯ ОБҐРУНТУВАННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РОЗРАХУНКУ
МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ**

Анатолій Дзюба^{1,2}, Володимир Сіренко²

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

²ДП «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

Незважаючи на жорсткі вимоги до якості виконання робіт з проектування, розрахунку і створення несучих конструкцій нової техніки, на завершальній стадії розробки перевірка їх достовірності здійснюється шляхом проведення досить високовартісних руйнуючих натурних випробувань створюваних фрагментів і (або) усієї конструкції. Зазначена проблема обумовлена наявністю певної розбіжності результатів розрахунку та руйнівних випробувань, що суттєво підвищує вартість розробки таких виробів і знижує їх конкурентоздатність на ринку послуг ракетно-космічної техніки.

Подана робота направлена на побудову методики оцінки достовірності прогнозування несучої здатності неоднорідних оболонкових конструкцій сучасного машинобудування, зокрема, елементів ракетно-космічної техніки, баків, сухих відсіків ракет-носіїв та ін., з метою відмови від проведення або для зменшення обсягу високовартісних руйнівних випробувань.

Як відомо, вхідні дані числового аналізу приймаються проектними (ідеальними), в той час як після виготовлення конструкції їх фізично реальні значення (геометричні розміри, значення фізико-механічних характеристик, параметри зовнішніх навантажень, умови закріплення та ін.) можуть мати певні відхилення від прийнятих в розрахунках. Побудована методика моделювання впливу можливих відхилень вхідних даних від своїх номінальних значень на відхилення основних параметрів результатів обчислень.

Реально існуючі вхідні дані (їх відхилення) можуть бути встановлені вимірюванням на натурній конструкції. Контроль накопичення похибок числового розрахунку здійснюється шляхом системного інтерактивного комп'ютерного моделювання із залученням елементів теорії чутливості для оцінки залежності результатів розрахунку від зміни вхідних параметрів та проведення порівняльного аналізу з даними паралельного неруйнівного випробування реального об'єкта (в пружній області) з використанням засобів вимірювання деформацій та напружень або методів голографічної інтерферометрії.

При досягненні гранично припустимих значень напружень пружного неруйнівного деформування, навантаження на реальну конструкцію зупиняється і проводиться порівняння напружень, обчислених за декількома вибраними критеріями, в найбільш небезпечних (де і встановлюються вимірювальні пристрої) точках. За цими результатами обирається критерій з найбільш близькими до даних неруйнівних випробувань показниками.

За наявності неприпустимих відхилень результатів розрахунку і експериментальних даних, проводиться виявлення причин неточностей в розрахунку та внесення відповідних коректив в числове моделювання напружено-деформованого стану конструкцій.

За межами пружності (при нелінійному моделюванні) подальше досягнення критичного стану і віртуального руйнування проводиться лише у вигляді комп'ютерного моделювання.

Таким чином, застосування підходу дозволяє шляхом заміни досить витратних руйнівних випробувань натурних конструкцій на менш витратне, хоча і досить трудомістке, системне комп'ютерне моделювання та використання даних неруйнівного (в пружній області деформування) випробування конструкції, встановити контроль за величиною накопиченої похибки у вигляді кількісних показників відхилень (розкиду) результатів розрахунку від відхилення вхідних даних, та визначити їх граничні допуски зокрема, і тих, які вносяться в конструкцію при її виготовленні, і, як наслідок, в розрахунках не враховані.

Результати досліджень можуть бути використані для внесення коректив у проектні та розрахункові дані з метою підвищення достовірності результатів розрахунку несучої здатності та зменшення обсягу чи повної відмови від руйнуючих випробувань.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ШАРУВАТОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАВАНТАЖЕННЯМИ ПРИ ДОТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ю. П. Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

В роботі приведені деякі результати розв'язку задачі про вплив рухомого навантаження та початкових напружень на напружено-деформований стан нестисливого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями

Для розв'язку задачі використаний інтегральний метод Фур'є. Для матеріалу з потенціалом типу Бартенєва-Хазановича виконані чисельні дослідження. Вважалось, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє, на вільну поверхню півпростору діє лінійне навантаження, що рухається з постійною швидкістю v під кутом $\alpha = 0$. Розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій.

Вивчений вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на розподіл швидкостей переміщень і напружень в нестисливій основі з початковими напруженнями.

На рис. 1 і 2 показана залежність узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} і \tilde{Q}_{21} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$ і $\rho/\rho_1 = 0,5$ відповідно. Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1 і 2 відповідають значенням $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1,1$ і $\lambda_1 = 1,2$. Тут ρ/ρ_1 - відношення густин матеріалів півпростору і поверхневого шару; c_0 - швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі без початкових напружень.

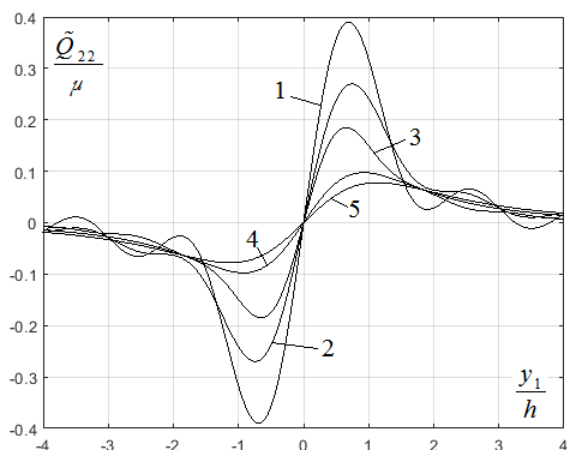


Рис. 1

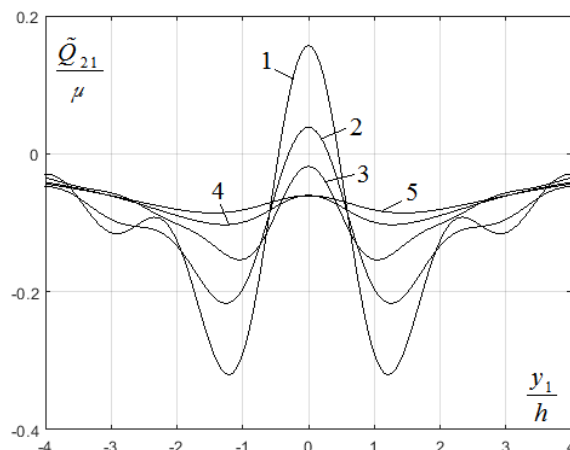


Рис. 2

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан в конкретній точці нестисливого півпростору, залежать від координат точки, яка досліджується, початкових напружень, швидкості руху навантаження та механічних параметрів шаруватого середовища.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВИНИКНЕННЯ ТРІЩИНИ, ЗБІЛЬШЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ТА РУЙНУВАННЯ В ЗОНІ КОНЦЕНТРАТОРА НАПРУЖЕНЬ

А. Г. Пацюк, А. П. Дзюба, О. А. Дзюба
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Руйнування деформівних тіл є надзвичайно складним процесом деформування, при якому матеріал фізично розділяється на частини в результаті появи тріщин, внаслідок чого здатність конструкції нести зовнішнє навантаження суттєво знижується (до нуля). Тому задача прогнозування несучої здатності тонкостінних конструкцій та неруйнівного контролю їх міцнісної надійності належить до найбільш актуальних задач механіки.

Руйнування деформівних тіл ініціюється, як правило, появою тріщин в зонах підвищених градієнтів напружень. Зважаючи, що кінетика розвитку тріщин є катастрофічно швидкою і, як наслідок руйнівною для відповідного елемента конструкції, надзвичайно важливим є моделювання процесів деформування в околі концентраторів напружень з метою більш достовірного прогнозування критичних руйнуючих навантажень.

Процес руйнування складається із сукупності явищ, які можуть починатись значно раніше, ніж з'являються перші візуально помітні тріщини. При цьому, причинами появи таких тріщин можуть бути дефекти в структурі матеріалу, мікропустоти, вклучення, раковини, корозійні ураження та інші пошкодження. Поява тріщин може бути обумовлена також конструктивними недоліками, зокрема, наявністю концентраторів напружень.

В роботі подані результати експериментального моделювання розвитку в процесі навантаження напружено-деформованого стану, появи тріщини та руйнування в зразках із оптично активного матеріалу (полікарбонату) в зоні концентратора

напружень. Викладена методика експериментальних досліджень з використанням поляризаційно-оптичного методу, методу каустик та засобів вимірювань параметрів теплового потоку.

За результатами проведених досліджень встановлено:

- напружено-деформований стан в околі тріщини в значній мірі характеризується наявністю пластичних деформацій;
- для J-інтегралу, який є мірою деформованого стану в околі тріщини, виділено лінійну і нелінійну складові, які в залежності від рівня навантаження відповідають за пружні та пластичні деформації, відповідно;
- розроблено способи реєстрації температури в зоні концентрації напружень при навантаженні зразків із оптично активного матеріалу; побудовані картини розподілу температур в зоні концентраторів напружень у вигляді кругового отвору в зразках із полікарбонату та залежності температури від швидкості навантажень; виявлено їх зв'язок зі значеннями J-інтегралу;
- отримані залежності значення J-інтегралу від величини навантаження та зміни температури від швидкості навантаження;
- виявлено, що наявність в зоні концентрації напружень включень, у яких модуль пружності є більшим, ніж в основному тілі зразків, при умові фіксації їх у моделях для випробувань за допомогою жорстких клеїв, на відміну від більш пластичних, може привести до крихкого руйнування по лінії з'єднання з переростанням в основне тіло моделі; таке включення може бути спусковим механізмом крихкого руйнування;

Результати проведених експериментів, які подані у вигляді графіків, картин ізодром, каустик та температур, вказують, що змінюючи жорсткісні параметри включень можна моделювати різні аспекти процесів утворення тріщин в зразках і їх руйнування, а також дозволяють встановити співвідношення величин пружних і пластичних деформацій в процесі руйнування зразків та в цілому прогнозувати величини руйнівних навантажень, що може бути корисним для побудови методики неруйнівного контролю міцнісної надійності силових конструктивних елементів.

ЗАДАЧА ПРО НАПЛАВЛЕННЯ ТОНКОСТІНОГО ЦИЛІНДРА

І.К.Сенченков¹, О.П.Червінко¹, С.М.Якименко²

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

² Центральнoукраїнський національний технічний університет

Об'єктами моделювання є тонкостінні циліндричні елементи конструкцій. Під час їх виготовлення або відновлення застосовується наплавлення робочих поверхонь. Схема об'єкту і варіанти наплавлення показані на рис. 1, 2.

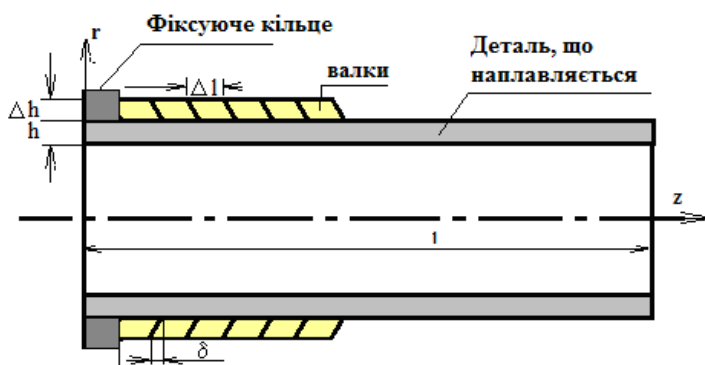


Рис 1



Рис.2

Матеріал вважається ізотропним. Постановка задачі в інваріантній формі включає кінематичні співвідношення,
рівняння теплопровідності і квазістатичної рівноваги

$$c_v \dot{\theta} = \text{div}(k \text{ grad } \theta) + Q, \quad \text{div} \underline{\sigma} = 0, \quad (1)$$

визначальні рівняння для матеріалу, що наплавляється

$$s_{ij} = 2G_f (e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_{vf} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta ph} - \varepsilon_{kk}^*), \quad (2)$$

для основного матеріалу $e_{ij}^* \equiv 0$.

рівняння еволюції для параметра ізотропного зміцнення

$$\dot{K} = m_1 (\bar{K}_1 - K) \dot{w}^p, \quad K(0) = 0; \quad (3)$$

граничні та початкові умови

$$\theta = \theta_0 \text{ при } t = 0; \quad -k \bar{n} \cdot \text{grad } \theta = -q + \gamma(\theta - \theta_c) + \sigma \varepsilon (\theta^4 - \theta_0^4); \quad \underline{\sigma} \cdot \bar{n} = 0, ; \quad (4)$$

$\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ – термоструктурна деформація, що визначається через питомі об'єми фаз V_ξ

$$\varepsilon_{ij}^{\theta ph}(\theta, \theta_r, C_\xi) = \frac{V_\xi(\theta) C_\xi(\theta) - V_\xi(\theta_r) C_\xi(\theta_r)}{3V_\xi(\theta_r) C_\xi(\theta_r)} \delta_{ij}. \quad (5)$$

Хвиля знизу означає тензорну величину $\underline{\sigma} = (\sigma_{ij}) \cdot i, j = x, y, z; i, j = r, \varphi, z$.

Термомеханічна поведінка матеріалу описується за допомогою узагальненої моделі течії Боднера-Партома [1].

У термомеханічних процесах нарощування (наплавлення) розглядаються алотропічні перетворення у твердому тілі, зумовлені розпадом аустеніту ($\xi = A$) у сталях у фази фериту ($\xi = F$), перліту ($\xi = P$), бейніту ($\xi = B$) та мартенситу ($\xi = M$) під час охолодження. Перетворення аустеніту описується кінетичною діаграмою розпаду (ТКД) [2].

Закон накопичення нової фази ξ , $\xi = F, P, B, M$, у відповідних областях уздовж траєкторії охолодження дається феноменологічним рівнянням Коїстінена-Марбургера [3].

Матеріальні властивості кожної фази Y_ξ розраховуються з урахуванням залежності від температури. Для розрахунку макрохарактеристик \bar{Y} для довільного фазового складу використовується лінійне правило сумішей $\bar{Y}(\theta, t) = C_\xi(\theta, t) Y_\xi(\theta)$.

Для розрахунку параметрів моделі течії використовуються діаграми одноосного розтягування для сталі СтЗсп (основа) і 25Х5ФМС (наплавлений шар) при $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ за постійної швидкості деформації $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ [4].

Задача розв'язується методом ітерацій з використанням МСЕ. Поліпшення збіжності досягається за допомогою процедури Стеффенсена-Ейткена.

Розглядається тонкостінний циліндричний елемент зі сталі СтЗсп в осях Orz , внутрішнім радіусом r_0 , з товщиною стінки h , $r_0 < r < r_0 + h$, $0 > z > l$, на поверхню якого $r = r_0 + h$ наплавляється шар інструментальної сталі 25Х5ФМС, товщиною Δh . Форма і розмір валиків показані на рис. 1. Приймається $r_0 = 48,5 \text{ і } \text{і}$, $h = 3 \text{ і } \text{і}$, $l = 152 \text{ і } \text{і}$, $\Delta h = 2 \text{ і } \text{і}$. Швидкість наплавлення валиків 31 м/час.

Після остигання зовнішній наплавлений шар перебуває в стані мартенситу, а основний метал має ферит-перлітну фазу.

На малюнку 3, крива 1, відповідає залишковому зміщенню u_r елемента, розрахованому за спрощеною моделлю миттєвого наплавлення (рис.2). Крива 2 відповідає аналогічному розподілу в разі відсутності фазових перетворень у наплавленому зовнішньому шарі.

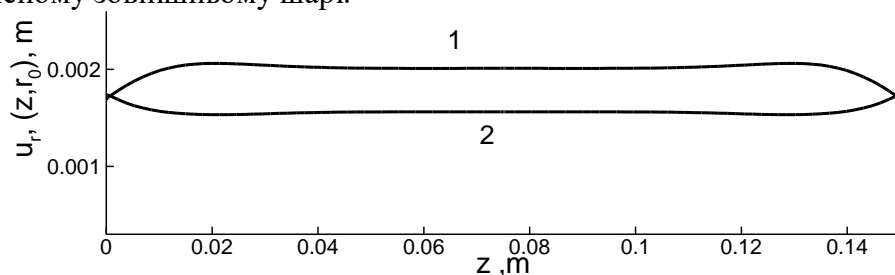


Рис. 3

Без фазових перетворень (крива 2) у зовнішньому шарі має місце поворот торців циліндричної поверхні назовні за типом котушки. Врахування фазових перетворень (крива 1) призводить до зворотного ефекту – усаджування країв всередину циліндра

1. Bodner S.R. Unified plasticity – an engineering approach. Final Rep. Technion – Israel Inst. Of Tech., Haifa, 2000. – 106 p.
2. Попов А.А., Попов А.Е. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. Справочник термистаю – Москва-Свердловск: ГНТИ Машлит, 1961. – 430 с.
3. Юрьев С.Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. - М.: Металлургиздат, 1950. – 48.
4. Марочник сталей и сплавов. 2-е издание доп. и исл. / А. С. Зубченко, М. М. Колосков, Ю. В. Камировский и др. Под редакцией А. С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. 784 с.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ З'ЄДНУВАЛЬНОГО ШВА НА КРИТИЧНУ СИЛУ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПОЗДОВЖНЬО СТИСНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

П.А.Дзюба, О.М.Полішко, В.Ф.Степаненко

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Тонкостінні циліндричні оболонкові конструкції використовуються при створенні багатьох споруд, деталей машин та інших об'єктів, зокрема, в авіації, суднобудуванні, ракетній техніці та інших галузях машинобудування. Однією з важливих інженерних задач є забезпечення їх стійкості при різних видах навантаження. Оскільки такі задачі є суттєво нелінійними, особливо за наявності неоднорідностей, пошкоджень, отворів, потовщень стінки їх бокової поверхні та ін., то для обґрунтування достовірності розрахунку їх критичних навантажень суттєве значення мають експериментальні дослідження.

Проблеми коректного проведення експериментальних досліджень стійкості оболонок і, зокрема, похибок отримуваних результатів, пов'язані як з точністю вимірювань навантажень, напружень, переміщень та ін., так і з технологічними проблемами виготовлення ідентичних (ідеальних) моделей для випробувань, оскільки

такі моделі можуть мати відхилення форми, розмірів та інших параметрів. Тому постановка і проведення відповідних експериментальних досліджень у цьому напрямку пов'язана з подоланням цілої низки труднощів технічного характеру. Зазначені аспекти проблеми пояснюються, також і наявністю у моделях циліндричних оболонок зварювального чи клейового з'єднувального шва, оскільки таке з'єднання призводить до порушення геометричної симетрії моделей для випробувань.

Оскільки виготовлення моделей гладких циліндричних оболонок (без шва) та за наявності з'єднувального шва (з метою відповідних порівнянь) в однакових умовах і з однакового матеріалу є досить проблематичним, питання впливу жорсткості з'єднувального шва на процес втрати стійкості, як і дослідження цієї задачі шляхом числового скінченно-елементного аналізу, залишається відкритим.

У поданій роботі зазначені аспекти проблеми досліджуються у неявному вигляді шляхом експериментального визначення розкиду значень критичної сили втрати стійкості циліндричної оболонки в залежності від відстані розташування розміщеного в середньому поперечному перерізі кругового отвору різного діаметра від з'єднувального шва при поздовжньому стиску і крученні.

Для масового виготовлення моделей циліндричних оболонок було використано спеціальний креслярський папір марки «В» ДСТ 597-73. Цей матеріал відрізняється досить високою стабільністю і однорідністю механічних характеристик (показників пружності та міцності).

Розроблено методику та отримано результати експериментальних досліджень впливу з'єднувального шва на процес втрати несучої здатності, форми хвилеутворення та величину критичного навантаження циліндричних оболонок при поздовжньому стиску та крученні. Випробувано 270 моделей оболонок. Результати проведених експериментальних досліджень стійкості циліндричних оболонок з отвором різного діаметра на бічній поверхні при поздовжньому стиску і крученні, які дозволяють створити досить повну картину уявлень про процес та форми хвилеутворення при втраті стійкості циліндричних оболонок за наявності поздовжнього потовщення, пов'язаного з наявністю з'єднувального шва, подані у вигляді графіків залежностей критичної сили від кута розташування отвору відносно з'єднувального шва. Встановлено зв'язок величини критичних навантажень оболонок при поздовжньому стиску та крученні від відстані розташування кругових отворів різного діаметра від з'єднувального шва.

Показано, що похибка результатів випробувань оболонок, яка обумовлена наявністю з'єднувального шва товщиною, рівною двом товщинам стінки болонки, не перевищує похибки

(3÷5 %) визначення критичного навантаження втрати стійкості, що підсумкове включає в себе геометричні та технологічні похибки виготовлення моделей для випробувань, визначення фізико-механічних характеристик матеріалу і похибок вимірювання навантажень та ін.

Отримані дані можуть бути служити достатньо надійним науковим підґрунтям для побудови достовірних математичних моделей та верифікації числових алгоритмів.

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТІВ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗВ'ЯЗАНОСТІ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА

Ніна Дмитрівна Яковенко¹
Олена Вікторівна Доля²

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*

²*Київський національний університет будівництва та архітектури*

Розробка систем імпульсної обробки елементів конструкцій потребує детальної інформації про зв'язані термомеханічні процеси, що відбуваються під час опромінення та подальшому охолодженні матеріалу.

В даній роботі за допомогою чисельного моделювання досліджується напружено-деформований стан циліндричного тіла з мікроструктурними перетвореннями, що знаходиться в умовах імпульсного термомеханічного збурення, та надається оцінка ефектів термомеханічної зв'язаності. Математична постановка динамічної осесиметричної задачі в загальному випадку включає рівняння Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, граничні та теплові умови. Рівняння теплопровідності містить доданки, що характеризують: а) термопружний механізм зв'язаності; б) дисипативний механізм; в) приховану (латентну теплоту), яка виділяється або поглинається при структурних перетвореннях. Нелінійна поведінка матеріалу описується за допомогою моделі течії Боднера–Партома [1, 2]. Чисельне розв'язання розглядуваної задачі базується на подвійному ітераційному процесі. Перший внутрішній, пов'язаний з інтегруванням системи нелінійних рівнянь моделі течії та на кожному часовому кроці враховує залежність параметрів моделі від температури. Визначення параметрів моделі течії для кожної фази здійснюється за допомогою експериментальних даних за методикою, описаною в роботі [2]. Зовнішній ітераційний процес включає рівняння руху та теплопровідності та реалізується за допомогою скінченно-елементної методики [3].

Для визначення вкладу різних механізмів зв'язаності порівнюються наступні випадки: 1) термоструктурно-механічна зв'язаність відсутня; 2) має місце лише термопружний механізм зв'язаності; 3) має місце лише ефект внутрішньої дисипації; 4) діють перші два механізми зв'язаності; 5) діють всі механізми зв'язаності.

Встановлено, що термомеханічна зв'язаність практично не змінює розподіли залишкових напружень та її вплив на інтенсивність непружних деформацій незначний.

1. Bodner S. R. Constitutive equations for dynamic material behavior // In: Mechanical behavior of materials under dynamic loads / Ed. U. Lindholm. – Springer-Verlag, New York, 1968. – P. 176–199.

2. Senchenkov I. K., Oksenchuk N. D. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material // J. Math. Sci. – 2013. – V. 190, № 6. – P. 796–803. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>

3. Zhuk Y. A., Senchenkov I. K., Kozlov V. I., Tabieva G. A. Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity // Int. Appl. Mech. – 2001. 37, No.10. – P. 1311–1317. – <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

ЗМІСТ

1. В.М. Назаренко, М.В. Довжик ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОЇ МЕТОДИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ РУЙНУВАННЯ ВИСОКОЕЛАСТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРИЩИНИ <i>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН У.....</i>	3
2. А.Р. Гачкевич¹, Т.В. Козакевич¹, Т. Волчаньски² МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ СТРУКТУРНОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ СТАЛЬНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ НАГРЕВЕ И ОХЛАЖДЕНИИ <i>¹Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України (Україна); ²Політехніка Опольська, Образователно-учебное об'єднання в Глушині (Польща).....</i>	4
3. М.О. Бабешко, В.Г. Савченко МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ ВИДУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТА ПОШКОДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛУ <i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН У..</i>	5
4. Н.В.Жоголева, В.Ф.Щербак ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОЇ ГАРМОНІЙНОЇ СИЛИ <i>Інститут прикладної математики і механіки НАН У (м. Слов'янськ).....</i>	6
5. Круковський О.П., Ларіонов Г.І. Хворостян В.О., Головка С.А., Земляна Ю.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДО ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНІКИ <i>Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України.....</i>	8
6. Ю. П. Глухов ВПЛИВ ТОНКОГО ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ, ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ І РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ <i>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.....</i>	9
7. Бабич С.Ю.¹, Борисов Є.М.², Діхтярук М.М.³ КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ НЕСКІНЧЕННОГО НЕОДНОРІДНОГО СТРИНГЕРА (НАКЛАДКИ) І ДВОХ ЗАЩЕМЛЕНИХ ОДНІЄЮ ГРАННЮ ПРУЖНИХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ <i>¹Іститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України ²Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана ³Хмельницький національний університет.....</i>	10
8. ¹Галішин О.З., ²Склепус С.М. ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ ПОВЗУЧОСТІ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ <i>¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, ²Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України.....</i>	11
9. О.М. Багно, Г.І. Щурук ВПЛИВ СТИСЛИВОСТІ РІДИНИ НА НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ «ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР – ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ» <i>Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України.....</i>	12

10. ¹ С.Ю. Бабич, ² Н.О. Ярецька, ³ В.Ф. Лазар ПЕРЕДАЧА ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ВІД ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ПІВПРОСТОРІВ ДО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ; ² Хмельницький національний університет, ³ Мукачівський державний університет.....	13
11. Стеблянюк П.О. ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.....	16
12. О.В. Дунчик, В.В. Лобода ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НА ПАРАМЕТРИ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.....	20
13. Стеблянюк П.О. ¹ Петров О.Д. ² , Черняков Ю.А. ² НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ПСЕВДО-ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ СПЛАВІВ ¹ Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України; ² Дніпровський національний університет імені О. Гончара.....	21
14. О.П. Круковський, В.В. Круковська, А.О. Костриця МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ГАЗОНОСНИХ ПІСКОВИКІВ В ЗОНІ ВПЛИВУ ОЧИСНОГО ВИБОЮ Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України.....	22
15. Є.М. Ірза ВІДПАЛ В'ЯЗКОПРУЖНИХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України	24
16. Пошивалов В.П., Данієв Ю. Ф. БЕЗПЕКА І ЗАЛИШКОВИЙ РЕСУРС ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України.....	25
17. Б.П. Маслов ПОБУДОВА КРИТЕРІЮ ДОВГОТРИВАЛОГО РУЙНУВАННЯ ВТОМИ ТОНКОСТІННИХ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.....	26
18. Ю.А. Мейш, Арнаута Н.В. ДО РОЗВ'ЯЗКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ Національний транспортний університет, м. Київ Національний університет біоресурсів і природокористування України	28
19. Ю.А.Мейш, Н.В.Майбородина, В.П.Герасименко ДО ПОБУДОВИ ТА ЧИСЛЕНОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНИХ ПО ТОЛЩИНЕ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ Національний транспортний університет, м. Київ Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут».....	29

20. В.С. Ушакова, О.В. Ушаков ДО ЗАДАЧІ ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТРИВИМІРНОЇ МОДЕЛІ ЗА УМОВ ОДНОЧАСНОЇ ДІЇ РОЗТЯГУ ІЗ КРУЧЕННЯМ <i>Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, Інститут спеціальної</i> <i>техніки та судових експертиз Служби безпеки України.....</i>	30
21. Д.Є. Патіка, А.Є.Шевельова РОЗВ'ЯЗАННЯ ЖОРСТКОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КЕРУВАННЯ РОБОТА-МАНІПУЛЯТОРА <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.....</i>	32
22. A.V. Sohatsky NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS USING COMPUTER TECHNOLOGIES <i>University of Customs and Finance. Ukraine.....</i>	33
23. В.І.Козлов, Ю.І.Лелюх, Л.П.Зінчук ТЕРМОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ПРОСТОРОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ КОНІЧНОЇ ПАНЕЛІ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ <i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.....</i>	34
24. В.В. Левченко, О.І. Макієвський НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З РАДІАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ <i>Державний Університет Телекомунікацій, Відокремлений структурний</i> <i>підрозділ «Київський транспортно-економічний фаховий коледж</i> <i>Національного транспортного університету».....</i>	36
25. О.П. Круковський, В.В. Круковська КРІПЛЕННЯ ГІРНИЧОЇ ВИРОБКИ І КАМЕРИ-СХОВИЩА ПРИ ЇХ СПОРУДЖЕННІ В НЕСТІЙКИХ ПОРОДАХ <i>Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України.....</i>	38
26. Ю. П. Глухов ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ ЗАХИСНОГО ПОКРИТТЯ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ <i>Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України.....</i>	40
27. В.І.Кузьменко, А.О.Молчанов ПРО МЕТОДИ ВІДТВОРЕННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ У НЕДОСТУПНИХ ОБЛАСТЯХ <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.....</i>	41
28. В.І.Кузьменко ПРО ЗМІНУ ТИСКУ РЕЗЕРВУАРІВ НА ОСНОВУ УНАСЛІДОК ВНУТРІШНІХ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ <i>Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара.....</i>	42
29. А.В. Сохацький ВИЗНАЧЕННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРСТИК ТРАНСПОРТНИХ АПАРАТІВ З ЗАСТОСУВАННЯМ КОМПЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ <i>Університет митної справи та фінансів Україна.....</i>	43
30. М.М.Тормахов	

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА НЕМОНОТОННОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ПРИ ОДНОВІСНОМУ РОЗТЯЗІ	
<i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН У.....</i>	45
31. В.В. Левченко	
ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ ЗСУВУ У СТРУКТУРІ ШАР НА ПЕРІОДИЧНО- НЕОДНОРІДНОМУ НАПІВПРОСТОРИ	
<i>Державний Університет Телекомунікацій.....</i>	46
32. Н.Є.Ткаченко	
ПЛОСКІ ЛІНІЙНІ ХВИЛІ ЕЛЕКТРОМАГНІТОМЕХАНІКИ В ДИЕЛЕКТРИКАХ	
<i>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.....</i>	49
33. Ю.М.Кононов	
МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ПРУЖНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ТРЬОХ І ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ	
<i>Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ, Україна.....</i>	50
34. Ю.М.Кононов, Я.І.Святенко	
ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА НА ПІДВІСІ	
<i>Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ, Україна.....</i>	51
35. Є.О.Коваленко, О.С.Філіпова, С.О.Чернецький	
ОСАДКА ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДВОШАРОВОГО ПАКЕТУ СФЕРИЧНИМ ШТАМПОМ	
<i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.....</i>	52
36. Є.А.Сторожук, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко, С.Б.Харенко	
ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОВПЛИВУ ПРЯМОКУТНИХ ОТВОРІВ В КОНІЧНИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНОЇ ТЕХНІКИ З ВРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ	
<i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.....</i>	55
37. Є.А. Сторожук	
АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ	
<i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.....</i>	58
38. Я.В.Павлюк	
ДО РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМАЦІЙ ОБЕРНЕНОЇ ПОВЗУЧОСТІ ТОНКОСТІННИХ ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ НЕЛІНІЙНО- В'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ ПОВНОГО РОЗВАНТАЖЕННЯ	
<i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.....</i>	60
39. І.В.Луцька, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко	
ПРО ВПЛИВ КРАЙОВИХ УМОВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ НАПІВЕЛІПТИЧНОЇ ТОРОЇДАЛЬНОЇ ОБОЛОНКИ	
<i>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України</i>	61
40. Е. Л. Гарт, О. О. Семенча	
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ І ВКЛЮЧЕННЯМИ	
<i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.....</i>	63

41. Е. Л. Гарт, Б. І. Терьохін
ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ЗА НАЯВНОСТІ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ ВКЛЮЧЕНЬ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара..... 66
42. Дегтярьов І.Д., Тонкошкур І.С.
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПОБЛИЗУ ТВЕРДИХ ПОВЕРХОНЬ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара..... 68
43. Прозор Д.Є., Тонкошкур І.С.
ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЕНЬ У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара..... 69
44. Абрсов Ю.Ю., Максимюк В.А.
ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ..... 70
45. А.Дзюба^{1,2}, В.Сіренко²
МЕТОДИКА ВРАХУВАННЯ ПОХИБОК ВХІДНИХ ДАНИХ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕРУЙНІВНИХ ВИПРОБУВАНЬ ДЛЯ ОБҐРУНТУВАННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РОЗРАХУНКУ МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ
¹*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*
²*ДП «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»*..... 72
46. Ю. П. Глухов
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ШАРУВАТОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАВАНТАЖЕННЯМИ ПРИ ДОТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України..... 73
47. А. Г. Пацюк, А. П. Дзюба, О. А. Дзюба
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВИНИКНЕННЯ ТРІЩИНИ, ЗБІЛЬШЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ТА РУЙНУВАННЯ В ЗОНІ КОНЦЕНТРАТОРА НАПРУЖЕНЬ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара..... 74
48. І.К.Сенченков¹, О.П.Червінко¹, С.М.Якименко²
ЗАДАЧА ПРО НАПЛАВЛЕННЯ ТОНКОСТІНОГО ЦИЛІНДРА
¹*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України*
²*Центральноукраїнський національний технічний університет*..... 75
49. П.А.Дзюба, О.М.Полішко, В.Ф.Степаненко
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ З'ЄДНУВАЛЬНОГО ШВА НА КРИТИЧНУ СИЛУ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПОЗДОВЖНЬО СТИСНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара..... 77
50. Н.Д.Яковенко¹, О.В.Доля²
ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТІВ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗВ'ЯЗАНОСТІ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА
¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України*

²*Київський національний університет будівництва та архітектури*..... 79

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ – 2023

*Матеріали конференції
видаються в авторській редакції*