

**КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДЬОМІЧЕВ Костянтин Едуардович

УДК 539.3

**МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З
ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ
ДЕФОРМАЦІЯХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

К. Е. Дьомічев

Науковий консультант Стеблянко Павло Олексійович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2021

АНОТАЦІЯ

Дьомічев К.Е. Метод дослідження поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Функціонально-неоднорідні матеріали (ФНМ) або інтелектуальні матеріали широко застосовуються в науці і техніці. Одним із представників цього класу матеріалів є матеріали із пам'яттю форми або матеріали з властивістю псевдо-пружно-пластичності. Їх фізичні або механічні властивості різко відрізняються від поведінки звичайних конструкційних, жароміцних або інструментальних матеріалів, полімерних матеріалів. Механічна поведінка в значній мірі залежить від зовнішніх умов (температура, тиск) і передісторії їх зміни. До матеріалів, які мають властивості пам'яті форми і поведуть себе псевдо-пружно чи псевдо-пружно-пластично зазвичай відносять наступні: NiTi AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa . Матеріали з пам'яттю форми (МПФ) при низьких температурах при навантаженні накопичують деформацію, а після нагрівання повністю або частково здатні до відновлення форми. Ці сплави можуть бути основою композиційних матеріалів, в більшій чи меншій мірі здатних до відновлення форми. Основним механізмом в таких процесах є зворотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може відбуватися при порівняно незначній зміні температури.

На наш погляд, дослідження такої проблеми представляє собою розробку нового розділу механіки твердого деформівного тіла. У ньому для моделювання поведінки таких елементів конструкцій використовується геометрична нелінійність, нова нелінійна феноменологічна модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів, а для розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних удосконалений метод покомпонентного розщеплення.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків.

У першому розділі проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційного дослідження. Проведено аналіз існуючих моделей фазових перетворень, які можуть мати місце у функціонально-неоднорідних матеріалах. Проаналізовано критерії за якими можна класифікувати фазові перетворення в матеріалах. Розглянуто методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Зроблена фізична постановка задачі дослідження. Сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

У другому розділі записана повна система рівнянь та розроблено метод визначення пружно-пластичного нестационарного напружено-деформованого стану трьохвимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Для розв'язання вище вказаної задачі необхідно визначити температуру, три складові вектора швидкості переміщень, шість компонент тензора напружень і шість компонент тензора деформацій. Отже, треба визначити шістнадцять невідомих функцій часу і трьох координат. Для цього сформована повна система рівнянь з урахування геометричної не лінійності. Вона складається з рівнянь руху, геометричних і фізичних рівнянь, а також рівняння теплопровідності, які виконуються при певних початкових і граничних умовах.

За допомогою підходу оснований на ідеї покомпонентного розщеплення запропоновано новий варіант методу зведення трьохвимірної геометрично нелінійної нестационарної задачі термо-пружно-пластичності до

послідовно розв'язуваної системи трьох двовимірних задач.

Зазначимо, що після визначення швидкостей зміщень та складових тензора напруження, які в запропонованій постановці задачі є основними невідомими, визначаються самі переміщення (шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей) і деформації.

Одним із аспектів числового розв'язання загальних нестационарних задач для непружних тіл є вибір фізичних співвідношень між напруженням та деформацією. Цей вибір узгоджується з експериментами і тісно пов'язаний з процесами деформування, що відбуваються в матеріалі тіла. У загальному випадку величини деформації - це функції всього попереднього процесу змін фізичних факторів (процесу навантаження, перепадів температури то що), а не лише поточними значеннями. Для конкретизації фізичних співвідношень сформульована нова нелінійна феноменологічна модель, яка більш точно в порівнянні з відомими моделями описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу саме в точці. При цьому додатково треба знати положення в тілі фронту фазового переходу і функцію кінетичного відгуку.

Розглянуто випадок, коли ця функція буде мати вигляд ламаної, яка складається з двох лінійних відрізків і більш загальний випадок з нелінійною другою ланкою, для якої друга лінійна ланка попередньої моделі буде асимптотою. Комбінована лінія може бути задана аналітично. Це дозволило побудувати нову розрахункову схему і більш точно визначати дотичний модуль інтегральної діаграми функціонально-неоднорідного матеріалу в момент переходу по ній через першу пружну ділянку.

У третьому розділі досліджується та розв'язується новий клас задач термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів. Розв'язано ряд тестових задач по моделюванню поведінки тіл з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні. Це задачі термомеханіки для матеріалів з пам'яттю форми (порівняння з відомими результатами). Моделювання поведінки локально навантаженого стрижня з трилінійного

двофазного матеріалу з урахуванням температури. Моделювання поведінки локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні.

В задачах використано діаграму псевдо-пружного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок. Такий підхід призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для описання термомеханічної поведінки зразків різної форми необхідно мати рішення граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації фазового перетворення. При цьому враховано не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, що вивільняється в точці при фазовому переході.

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. В означених задачах розроблено числову процедуру розрахунку діаграми матеріалу, яка представляє собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, побудованих для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Для використання нової феноменологічної моделі з метою дослідження двофазних матеріалів з різними модулями пружності розв'язано додаткову задачу яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а потім переходить в пластичний стан. Аналогічним чином термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні.

Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках. Встановлено, що при деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%, а при деформаціях до 16%-20% результати в геометрично лінійній і нелінійній постановках різняться більше

ніж на 25%.

Встановлено, що при деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%, а при деформаціях до 16%-20% результати в геометрично лінійній і нелінійній постановках різняться більше ніж на 25%.

У четвертому розділі проведено розв'язання ряду нових задач, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Це задачі про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій. Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій. Поведінка тривимірної пластини з розрізом при її розкритті.

В розглянутих задачах проаналізовано вплив на результати згущення сітки по просторовим координатам.

У п'ятому розділі проведено оцінку точності обчислень та ефективності розробленого нового методу розв'язання задач термомеханіки. Проаналізовано точність обчислень розв'язків в розглянутих задачах та збіжність ітераційної процедури методу при наявності геометричної нелінійності. Проведено загальний аналіз ефективності розробленого методу. Доведена відповідна теорема. Здійснено порівняння класичного різницевого підходу та запропонованого методу підвищеної точності з застосуванням сплайн-функцій.

Новизна запропонованого у дисертації підходу полягає у врахуванні геометричної не лінійності, що потрібно робити при наявності кінцевих деформацій, формулюванні нелінійної феноменологічної моделі для опису властивостей термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів в точці з урахуванням тепла, що виділяється в процесі фазового переходу.

Деформація в точці представлена у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, деформації, викликаній температурними змінами і пластичної деформації. Остання визначається за допомогою співвідношень теорії течії і інших відомих теорій.

Користуючись узагальненими фізичними співвідношеннями

розроблено новий варіант ефективного методу розв'язання нестационарних просторових задач термомеханіки у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу при значних пластичних деформаціях. Метод засновано на використанні ідеї розщеплення повної системи рівнянь за геометричними властивостями та застосуванні для апроксимації невідомих величин та їх похідних по координатах двовимірних напружених сплайнів. Такий підхід дозволив підвищити до четвертого порядку точність апроксимації методу. Це дало можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницеvim методом при досягненні однакової точності обчислень.

Для підвищення до третього порядку апроксимації метода за часом запропоновано використовувати ітерційну процедуру, що збігається. Початковим наближенням для неї будуть результати, обчислені за допомогою формул явної схеми методу розщеплення.

Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів. У разі застосування неявних схем методу розщеплення за геометричними властивостями встановлена збіжність відповідної ітераційної процедури.

Поставлено і на основі запропонованого методу розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл з термо-псевдо-пружно-пластичних сплавів, що можуть мати властивості пам'яті форми, при значних пластичних деформаціях.

Виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів, та їх форми і розмірів.

Результати дисертаційної роботи використані в рамках досліджень, які здійснені у Дніпровському державному технічному університеті по держбюджетній науково-дослідницькій темі «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації №

0113U000379, 2013-2015 pp.).

Також результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

Ключові слова: функціонально-неоднорідний матеріал, пам'ять форми, великі деформації, нелінійна феноменологічна модель, теорія псевдо-пружно-пластичності, двовимірні сплайни.

ABSTRACT

Kostiantyn E. Domichev A method for studying the behavior of structural elements made of functionally heterogeneous materials under large deformations –
Qualification research paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Psysico-Mathematical Sciences: Specialty
01.02.04 - Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

This dissertation focuses on the main methods of research of behavior of structural elements made of functionally inhomogeneous materials under large deformations. Functionally heterogeneous materials (FHMs) or intelligent materials are widely used in science and technology. One of the representatives of this class of materials is shape memory materials or materials with the property of pseudo-elasticity. Their physical or mechanical properties differ sharply from the behavior of ordinary structural, heat-resistant or tooling materials or polymeric materials. The mechanical behavior depends to a large extent on the external conditions (temperature, pressure) and the prehistory of their change. Materials that exhibit shape memory, pseudo-elasticity, and pseudo-elastic-plasticity properties are usually referred to as nasties: NiTi AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa . Materials with shape memory (MPM) at low temperatures under load accumulate deformation, and after heating are fully or partially capable of shape recovery. These alloys can be the basis of composite materials that are more or less capable of shape recovery. The main mechanism in such processes is the martensitic transformation between solid phases, which can occur with a relatively small change in temperature.

In our opinion, the study of such a problem is the development of a new section of the mechanics of a rigid deformable body. To model the behavior of such structural elements, it uses geometric nonlinearity, a new nonlinear phenomenological model of the behavior of shape memory materials, the apparatus of integro-differential partial differential equations, and an improved method of

component-wise splitting.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion, a list of references, and appendices.

The first chapter analyzes the literature on the topic of the thesis research. The analysis of existing models of phase transformations, which can take place in functionally inhomogeneous materials, has been carried out. The criteria by which phase transformations in materials can be classified are analyzed. The methods for numerical solution of problems for bodies with pseudo-elastic-plastic materials are considered. The problems of the thesis research are formulated.

In the second section, a complete system of equations is written down and a method for determining the elastic-plastic nonstationary stress-strain state of three-dimensional bodies with functionally inhomogeneous materials at large deformations is developed. A physical formulation of the problem of conception is made.

To solve the above problem, it is necessary to determine the temperature, three components of the displacement velocity vector, six components of the stress tensor, and six components of the strain tensor. This means that it is necessary to determine sixteen unknown functions of time and three coordinates. For this purpose a complete system of integrodifferential equations with geometric nonlinearity in mind has been formed. It consists of the equation of motion, geometric and physical equations, and the equation of heat conduction, which are satisfied under certain initial and boundary conditions.

Using an approach based on the idea of a component splitting, a new variant of the method of reducing a three-dimensional geometrically nonlinear nonstationary problem of thermoelastic-plasticity to a sequentially solvable system of three one-dimensional problems is proposed.

One of the aspect of the numerical solution of general nonstationary problems for inelastic bodies is the choice of physical relations between stress and strain. This choice is consistent with experiments and is closely related to the deformation processes occurring in the body material. In the general case, the

values of deformation are functions of the process of stresses and temperature differences, which are determined by the characteristics of the entire previous process of changes in physical factors, and not only by the current values. To specify the physical relations, a new nonlinear phenomenological model is formulated, which describes the properties of alloys with shape memory and thermo-pseudo-plastic behavior of the material exactly in a point more precisely in comparison with the known models. In this case it is additionally necessary to know the position in the body of the phase transition front and the kinetic response function.

The case is considered when this function will have the form of a broken line, consisting of two linear segments and a more general case with a nonlinear second link, for which the second linear link of the previous model will be an asymptote. This combined line can be set analytically. This allowed us to build a more accurate algorithm for solving the problem.

In the third section, a new class of thermomechanics problems for functionally inhomogeneous materials is investigated and solved. A number of problems of modeling the behavior of bodies with pseudo-elastic-plastic material under nonstationary loading are solved. These are the problems of thermomechanics for materials with shape memory (comparison with known results). Modeling of the behavior of a locally loaded rod with a three-linear two-phase material with regard to temperature. Simulation of Behavior of a Locally Loaded Plate of Pseudo-Elastic-Plastic Material under Non-Stationary Loading. Behavior of locally loaded plate with pseudo-elastic-plastic material under unsteady loading.

The tasks used a diagram of a pseudo-elastic material, consisting of three curved sections. This approach leads to an unstable stress-strain diagram and in order to describe the thermomechanical behavior of samples of different shapes, it is necessary to have a solution of the boundary problem with regard to the development of the deformation front of the phase transformation. This takes into account not only the ambient temperature, but also the heat released at the point

during the phase transition.

As established in the experimental investigations, the behavior of the material in the point of the body in the general case differs from the behavior of the grain as a whole. In the above tasks, a numerical procedure for calculating the material diagram, which is a curve that envelopes the family of material diagrams constructed for certain laws of change in the rate of strain fracture front.

In order to use the new phenomenological model to investigate two-phase materials with different elastic moduli, an additional problem related to the development of the instantaneous thermomechanical surface is introduced. Under active loading, the total thermomechanical surface of a pseudo-elastic material consists of four separate surfaces. These are the elastic part surface, the surface where the jump of deformations caused by the phase transformation takes place and the part of the surface where the material continues to behave elastically (after the phase transition) and then transitions to a plastic state. Similarly, the thermomechanical surface is set during unloading.

The results obtained in the geometrically linear and nonlinear formulations were compared. It was found that for small deformations (up to 7%) the discrepancy in the results does not exceed 5%, and deformations up to 16% -20% results in geometrically linear and nonlinear formulations differ by more than 25%.

It is established that deformations up to 7% the discrepancy of results does not exceed 5%, and at deformations up to 16% -20% results in geometrically linear and nonlinear formulations differ more than on 25%.

In the fourth section, a number of new problems were solved where the behavior of bodies with functionally inhomogeneous materials under large deformations was investigated. These are the problems on bending of a finite-size plate in the presence of large plastic deformations. Local bending of three-dimensional rod of rectangular cross section in the presence of large plastic deformations. Local bending of three-dimensional circular section rod in the presence of large plastic deformations. Behavior of a three-dimensional rod of rectangular cross-section with a cut when it opens. Behavior of a three-dimensional

rod under its combined loading (three-dimensional rectangular section rod and three-dimensional circular section rod).

In the fifth section, the calculation accuracy and effectiveness of the developed new method for solving the problems of thermomechanics are evaluated. The calculation accuracy of the solutions in the considered problems and the convergence of the iteration procedure of the method in the presence of geometrical nonlinearity have been analyzed. A general analysis of the effectiveness of the developed method has been carried out. The classical difference approach and the proposed method of increased accuracy with the use of spline functions have been compared.

The novelty of the approach proposed in this dissertation lies in the formulation of a nonlinear phenomenological model for the selected Sell Your Lot properties of materials with shape memory and thermo-pseudo-plasticity in the point of taking into account the heat that is released during the phase transition.

The strain at a point is represented as the sum of the elastic component, the deformation jump during the phase transition, the deformation caused by temperature changes, and the plastic strain. The latter is determined using the relations of flow theory and other known theories.

Using generalized physical relations, a new variant of effective method for solving nonstationary spatial problems of thermomechanics in the case of deformation of thermo-pseudo-ductile-plastic material under significant plastic deformations has been developed. The method is based on the use of the idea of splitting the full system of equations for geometrical properties and the application of two-dimensional stress splines for approximation of unknown quantities and their coordinate derivatives. This approach made it possible to increase to the fourth order the accuracy of approximation of the method. This made it possible to choose a larger grid for the coordinates as compared to the Kinev-difference method while achieving the same accuracy of the calculations.

To increase to the third order of approximation of the method by time, an iteration procedure is proposed, coincident. The initial approximation for it will be

the results calculated using the formulas of the explicit scheme of the splitting method.

The efficiency of the generalized method has been investigated and the accuracy of the results has been evaluated. In the case of application of implicit schemes of the method of splitting by geometrical properties the convergence of the corresponding iteration procedure has been established. Based on the proposed method, a new class of problems on nonstationary deformation of spatial bodies from alloys having the properties of shape memory, pseudo-adjacencies, and pseudo-properties is solved. New mechanical effects related to the local heat dissipation in the process of phase transformations in bodies made of pseudo-elastic-plastic materials, as well as their shapes and sizes have been revealed.

The results of the dissertation work are used in the framework of research carried out at Dniprovsk State Technical University on the state-budget research topic and "Methods of strength research of structural elements made of functionally inhomogeneous materials, sensitive to the type of thermal stress state" (state registration number № 0113U000379, 2013-2015).) and the Oles Honchar Dnipro National University on the topics of the state-budget works No. 1-301-15 "Development of methods of the fundamental problems of strength and fracture of pieces of homogeneous bodies, composed of intelligent materials" (NO. GR 015U002393).

Also, the results of the dissertation work are used in the educational process of the Oles Gonchar Dniprovsky National University when teaching the discipline "The Theory of Plasticity" and "Nonlinear Fracture Mechanics", the Dniprovsk State Technical University when teaching the discipline "Mathematical Modeling of Technological Processes", the National Aviation University when teaching the discipline "Modern Computer Technologies in Physics" and "Methods of Mathematical Physics".

Key words: functionally inhomogeneous material, shape memory, large deformations, nonlinear phenomenological model, pseudo-plasticity theory, two-dimensional splines.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні наукові положення дисертаційного дослідження опубліковано в 44 наукових працях, серед яких:

статті, опубліковані в виданнях, що входять до різних періодичних видань, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України або закордонних видань, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus

1. Demichev K. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / K. Demichev, A. Petrov, Yu. Chernyakov, P. Steblyanko, V. Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33 (наукометрична база Scopus, Q2 кuartиль).

2. Domichev K. Modeling the behavior of the body with pseudo-elastic-plastic material at non-stationary loading / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Металофізика та новітні технології, Інститут металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАН України, 2021 – Том 43, випуск 1 – с. 107–128 (наукометрична база Scopus, Q3 кuartиль).

статті у наукових виданнях, що включені до Переліку наукових фахових видань України

3. Демичев К.Э. Экспериментальное обоснование варианта модели поведение материала с памятью формы и псевдоупругостью / А.Д. Петров, П.А. Стеблянко, Ю.А. Черняков // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С. 81–87.

4. Дьомічев К.Е. Чисельне моделювання стану пружно-пластичних циліндричних тіл під дією високотемпературних навантажень / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко// Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація; збірник наукових праць Дніпропетровський державний хіміко-технічний університет. – 2017, № 1 (1). – Дніпропетровськ, 2017. – С. 56–62.

5. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького. Серія Прикладна математика. Інформатика №1(1). – 2020–С. 4–12.

6. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського технологічного університету – 2020 – № 4, ЧДТУ–с.143-151.

7. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки елементів виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій –2020–№ 32, ДНУ ім. О. Гончара –с.81–94.

статті у наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію

8. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – p. 27-29.

9. Domichev K. Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – Dubai, 2020 – No. 4(40). – p.5–17.

10. Domichev K. Simulation of behavior of functionally - heterogeneous materials under temperature loads / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, 2020 – No. 8(44). – p.5–11.

11. Domichev K. Modeling the behavior of the physical and geometric non-linear functional heterogeneous materials / K. Domichev // Scientific journal

innovative solutions in modern science. – New York, №1(45), 2021– p.82–90.

12. Domichev K. Use of splines in simulation of functionally inhomogeneous materials / K. Domichev // Colloquium-journal – Warszawa, Polska– 2021 – No.3(90). – p.16–18.

13. Domichev K. The main areas of application of functional materials / K. Domichev// «Research-science» – Banská Bystrica, Словачинна –2021 – №14. –p.26–29.

14. Domichev K. On the question of convergence solutions numerical nonstationary problems of modeling thermomechanics / K. Domichev, A. Petrov, P. Steblyanko // The scientific heritage. – Budapest, № 59 (59), 2021 – p. 15–17.

15. Domichev K. Modeling behavior textured and non-textured alloy at great deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 60 (60), 2021– p.17-19.

16. Domichev K. Application of two-dimensional splines in modeling problems of functional materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The Young Scholars. Vienna, Austria – 2021 – №1. P.7–9.

17. Domichev K. Simulation of behavior of pseudo-elastic-plastic NiTi alloy at large deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Colloquium-journal, 2021 – Warszawa, Polska, №5(92) – p.6-8.

18. Domichev K. Mathematical model shear lines for plastic deformation / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 61 (61), 2021 – p.54–56.

монографії (розділи у колективних монографіях)

19. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.

20. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання складних технічних систем / К.Е. Дьомічев, В.Є. Бондаренко, Т.І. Цюпій, В.В. Хайдуров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN

978-617-651-206-6), 2019. – 248 с.

інших виданнях, які засвідчують апробацію матеріалів дослідження на наукових конференціях, симпозіумах, конгресах

21. Дьомічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляно, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017. Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9–12.

22. Дьомічев К.Е. Застосування двовимірних сплайнів при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляно // МНПК Сучасні проблеми термомеханіки – Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача, – Львів, 2016. – С.161–162.

23. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичних циліндричних тіл з урахуванням пружних параметрів, які залежать від температури / К.Е. Дьомічев // МНПК Інформаційна безпека та комп'ютерні технології. – Кіровоград, 2016. – С.96–97.

24. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічного стану пружно-пластичного циліндричного тіла під дією електромагнітного поля / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляно // МНПК Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем.– Дніпропетровськ, 2016. – С.113–116.

25. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичного стану циліндричного тіла під впливом електромагнітних полів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляно // МНПК Математичні проблеми технічної механіки – 2017. – ДДТУ, 2017. – С. 45.

26. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання силових навантажень пружно-пластичних циліндричних тіл при температурному ударі / К.Е. Дьомічев // МНПК Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації. – Чернівці, 2017. – С.6–8.

27. Дьомічев К.Е. Схема розщеплення просторової нестационарної задачі термомеханіки з використанням сплайнів / К.Е. Дьомічев // МНПК Наукова думка інформаційного століття. – Дніпро, 2017. – С.103–105.

28. Дьомічев К. Поведінка функціонально-неоднорідних матеріалів при значних деформаціях // К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, / International scientific conference "Innovative technologies, models Cyber Security Management, ITCSM-2021". – April 14–16, 2021 (Part 1). – Dnipro, Ukraine. – P. 51–55.

29. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання полів напруження та деформації пружно-пластичних циліндричних тіл під дією складного навантаження / К.Е. Дьомічев // XXIII МНПК Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави – К.: КиМУ, 2018. – С.218–221.

30. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання нестационарного напружено-деформованого пружно-пластичного стану тіл під дією фізико-механічних полів / К.Е. Дьомічев // МНКП Актуальні питання сьогодення. – Вінниця, 2018. – С. 60–63.

31. Дьомічев К.Е. Розробка деяких положень концепції підготовки студентів технічних спеціальностей з дисципліни «Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач» / К.Е. Дьомічев, Н.М. Волосова, Д.В. Тертичний // МНПК Математичні проблеми технічної механіки–2018. – ДДТУ. 2018. – С. 80.

32. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-механічних полів двовимірними сплайнами / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.І. Коваленко // МНПК Наука та освіта: ключові питання сучасності. – 2018, Чернігів. – С. 117–120.

33. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання температурних навантажень на основі ітераційної процедури розв'язання нестационарної задачі термо-пластичності / К.Е. Дьомічев // МНПК Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології. – Харків, 2019. – С. 23–24.

34. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання псевдо-пружно-пластичних тіл з урахуванням нелінійності / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров // Науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України – Київ, 2020. – С. 10–12.

35. Дьомічев К.Е. Моделювання миттєвої термомеханічної поверхні трилінійного двофазного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти. – Львів, 2020. – С.61–62.

36. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, Ю.А. Черняков, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // МНПК Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпро, 2020. – С.15–19.

37. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з псевдопружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики». – Київ, 2020.– С. 54.

38. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання поведінки тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів під дією нестационарного навантаження / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Новітні технології в освіті, науці та виробництві. – Покровськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2020.– С.211–212.

39. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання поведінки інтелектуальних матеріалів / П.О. Стеблянко, Т.І. Каткова // МПНК «Наукові підсумки 2020 року». Збірка наукових праць. – Харків, Х.: Технологічний Центр, 2020. – С.14.

40. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель для описання властивостей матеріалів з пам'яттю форми / К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, О. Косухін // МНПК «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020» – Дніпро, 2020. – С. 3.

41. Domichev K. Method of splitting nonstationary thermomechanics task with considering electromagnetic fields / K. Domichev, P. Steblyanko // Inżynieria i technologia. Współczesne problemy i perspektywy rozwoju. – Zbiór artykułów naukowych. – Warszawa (PL). 2017. – p. 76–78.

42. Domichev K. Mathematical and computer modeling of the temperature field of elastic plastic multiple cylindrical blood / K. Domichev // Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia: Zbiór artykułów naukowych. – Poznan (PL). 2017. – p. 170–171.

43. Domichev K. Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Science, research, development. Technics and technology. – Krakow, 2020.– No 27 – p. 27–28.

44. Domichev K. Modeling of body behavior from trilline biphasic material taking into temperature / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // МНПК Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК–2020. – Дніпро, 2020. – С.76–77.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ABSTRACT.....	9
Список опублікованих праць за темою дисертації.....	15
Умовні позначення та скорочення	26
ВСТУП.....	28
РОЗДІЛ I. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	54
1.1. Аналіз математичних моделей фазових перетворень у функціонально-неоднорідних матеріалах	56
1.2. Фізична постановка задачі дослідження.....	65
1.3. Методи числового розв’язання задач для тіл з псевдо-пружно- пластичних матеріалів.....	67
1.3.1. Огляд класичних числових різницевих методів	67
1.3.2. Методи сплайн-колокації.....	69
1.3.3. Класичний метод покомпонентного розщеплення.....	75
1.3.4. Схема розщеплення Писмана Речфорда Дугласа.....	78
1.3.5. МПР підвищеної точності за часом.....	85
1.3.6. Ітераційна процедура МПР для розв’язання нестационарного рівняння теплопровідності.....	88
1.3.7. Комп’ютерні системи розв’язання задач термо-пружно- пластичності.....	96
1.4. Висновки до першого розділу	100

РОЗДІЛ II. МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТРЬОХВИМІРНИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОКОПОНЕНТНОГО РОЗЩЕПЛЕННЯ.....	102
2.1. Повна система рівнянь (математична постановка задачі).....	105
2.1.1. Нелінійні геометричні співвідношення.....	105
2.1.2. Рівняння руху (геометрично нелінійна постановка).....	112
2.2. Визначальні співвідношення теорій термо-псевдо-пружно-пластичності.....	115
2.2.1. Деформування матеріалів з майданчиком плинності.....	116
2.2.2. Пластичне деформування матеріалів при зміцненні.....	119
2.3. Нелінійна феноменологічна модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів.....	124
2.3.1. Обчислення дотичного модуля інтегральної діаграми матеріалу.....	127
2.3.2. Алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для лінійної функції кінетичного відгуку.....	130
2.3.3. Алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для степеневі функції кінетичного відгуку.....	131
2.3.4. Аналітично-числовий алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для асимптотичної другої ланки функції кінетичного відгуку.....	133
2.4. Метод числового аналізу поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів при великих деформаціях.....	136

2.4.1. Узагальнення класичного методу покомпонентного розщеплення на випадок геометрично нелінійної постановки	146
2.4.2. Метод підвищеної точності при застосуванні двовимірних сплайн-функцій.....	153
2.5. Висновки по другому розділу.....	165
РОЗДІЛ III. ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НАЯВНОСТІ КІНЦЕВИХ ДЕФОРМАЦІЙ (порівняння з відомими результатами).....	167
3.1. Обробка експериментальних результатів і описання діаграм для функціонально-неоднорідних матеріалів.....	169
3.1.1. Інтерполяція відомих з експерименту ліній розвантаження.....	176
3.1.2. Розбудова термомеханічної поверхні.....	184
3.2. Нестационарне навантаження одновимірного стрижня з псевдо-пружно-пластичного матеріалу	207
3.3. Поведінка локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при великих пластичних деформаціях.....	225
3.4. Висновки по третьому розділу.....	234
РОЗДІЛ IV. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ТІЛ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ.....	237
4.1. Вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій	240
4.2. Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перетину при наявності великих пластичних деформацій..	247
4.3. Поведінка пластини з бічним розрізом при локальному	

розтягуванні.....	255
4.4. Висновки по четвертому розділу.....	259
РОЗДІЛ V. АПРІОРНІ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ І ЗБІЖНОСТІ НЕСТАЦІОНАРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ	260
5.1. Априорні оцінки точності обчислень і збіжності нестационарного розв'язку нелінійних систем рівнянь з частинними похідними.....	261
5.2. Загальний аналіз ефективності розробленого методу.....	273
5.3. Порівняння збіжності нестационарного розв'язку в геометрично лінійній і нелінійній постановках	279
5.3.1. Розрахункові формули для класичного методу дробних кроків.....	279
5.3.2. Розрахункові формули для схеми Писмана Речфорда Дугласа.....	285
5.4. Висновки по п'ятому розділу.....	292
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ.....	294
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	296
ДОДАТКИ.....	326

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

u_i, v_i – переміщення та швидкості переміщень ($i = 1, 2, 3$)

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензори напруги та деформації ($i, j = 1, 2, 3$)

S_{ij}, \mathcal{E}_{ij} – девіатори тензорів напруги та деформації ($i, j = 1, 2, 3$)

\vec{W} – вектор, компонентами якого є швидкості переміщень і складові тензорів напруги та деформації

$\theta_i \equiv H_i \alpha_i, x_i$ – ортогональні криволінійна та прямолінійна системи координат ($i = 1, 2, 3$)

H_i – параметри Ламе ($i = 1, 2, 3$)

Γ_{ij}^S – символи Крістофеля

$u(x)$ – поле зміщень в зразку

T – температура

α – коефіцієнт теплообміну

t, τ – час, крок інтегрування за часом

h_i – кроки інтегрування за координатами ($i = 1, 2, 3$)

s – положення границі розділу фаз

$\dot{s} = \Phi(f)$ – функція кінетичного відгуку

f – рушійна сила фазового переходу

ρ – густина матеріалу

E – модуль пружності

ν – коефіцієнт Пуассона

G – модуль зсуву

МПР – матеріал з пам'яттю форми

СПФ – сплав з пам'яттю форми

ТППМ – термо-псевдо-пружний матеріал

МТП – миттєва термомеханічна поверхня

МПР – метод покомпонентного розщеплення

МКЕ – метод скінчених елементів

НДС – напружено-деформований стан

ФМ – функціональні матеріали

ФНМ – функціонально-неоднорідні матеріали

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь

СІДР – система інтегро-диференціальних рівнянь

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Функціонально-неоднорідні матеріали (ФНМ) або інтелектуальні матеріали широко застосовуються в науці і техніці. Одним із представників цього класу матеріалів є матеріали із пам'яттю форми або матеріали з властивістю псевдо-пружно-пластичності. Їх фізичні або механічні властивості різко відрізняються від поведінки звичайних конструкційних, жароміцних або інструментальних матеріалів, полімерних матеріалів. Механічна поведінка в значній мірі залежить від зовнішніх умов (температура, тиск) і передісторії їх зміни. До матеріалів, які мають властивості пам'яті форми, псевдо-пружність та псевдо-пружно-пластичність зазвичай відносять наступні: NiTi AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa . Матеріали з пам'яттю форми (МПФ) при низьких температурах при навантаженні накопичують деформацію, а після нагрівання повністю або частково здатні до відновлення форми. Ці сплави можуть бути основою композиційних матеріалів, в більшій чи меншій мірі здатних до відновлення форми.

Застосування функціонально-неоднорідні матеріали з ефектом пам'яті форми знаходять в сучасних конструкціях авіаційно-космічної техніки, суднобудування, транспорту, машинобудування, а також в медичних виробках.

Одним з перших прикладів серійного виробництва і застосування функціонально-неоднорідні матеріали з ефектом пам'яті форми стали муфти для термомеханічних з'єднань трубопроводів. Американська фірма Raychem розробила і виробляє муфти, які при температурі рідкого азоту деформують для збільшення внутрішнього діаметра і вводять в них кінці труб. Після

відігрівання до нормальної температури муфти прагнуть повернутися до колишнього розміру і надійно з'єднують кінці труб. Такі сполуки застосовувалися на палубному винищувачі-перехоплювачі F-14 «Tomcat». На кожному з таких літаків стояло близько 800 муфт, і за 30 років експлуатації не було зафіксовано жодного випадку руйнування з'єднання.

Умовно можна уявити п'ять напрямів за якими ведуться дослідження з впровадження функціонально-неоднорідних матеріалів в медицині:

Перший напрям – матеріали і імпланти для фіксації кісткових уламків лицьового скелета, трубчастих кісток, хребта та інших костних тканин; для дилатації тканин порожнистих органів, для створення межкішечних анастомозів і т.д. Цей напрямок представляють монолітні імпланти із сплавів на основі TiNiMoFe, які грають роль тимчасових функціонуючих пристроїв.

Другий напрям – пористі проникні і сітчасті імпланти для заміщення дефектів твердих і м'яких тканин організму, для відновлення функцій органів, виконуючи при цьому певні функції конкретних тканин, тобто імпланти для тривалого функціонування в організмі.

Третій напрям – пов'язаний зі створенням інструментарію нового покоління, здатного змінювати форму робочої частини інструменту і зберігати ріжучу здатність, а так само кріоінструментарій з високою охолоджуючої здатністю. Тут найбільш важливим критерієм є здатність матеріалу до зносостійкості, деформаційної і температурної циклоустійкості та термостійкістю.

Четвертий напрям – створення волоконно-в'язаних імплантів для заміщення і закриття дефектів м'яких тканин.

П'ятий напрям – наноструктурні проникні матеріали – матриці з нікелідатитану для використання в якості інкубаторів - носіїв клітинних культур органів. Ці матеріали та імпланти - матриці дозволяють на новому рівні вирішувати завдання відновлення функцій внутрішніх органів (печінки, підшлункової залози, кісткового мозку та ін.).

Існує багато прикладів практичного застосування функціонально-неоднорідних матеріалів з ефектом пам'яті форми, які можна знайти, наприклад, в роботах [17-19, 83-89, 92, 188-189].

Проектування пристроїв з елементами з матеріалу функціонально-неоднорідних матеріалів з пам'яттю форми значно відрізняється від розробки деталей з конструкційних матеріалів. За особливостями застосування пристроїв з ефектом пам'яті форми їх розбивають на кілька груп [190-192].

За принципом роботи пристрої поділяють на наступні надпружні, які спрацьовують один раз. Та такі, які спрацьовують багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткого протидії (термомеханічні з'єднання). В процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилового елементи).

Однією з найбільш затребуваних в наш час областю застосування матеріалів з пам'яттю форми є медицина. Існує значна кількість таких імплантів. Важливою особливістю тут є надпружна поведінка при температурі тіла людини. В такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження. При цьому жорсткість імпланта близька до жорсткості біологічних тканин, які він повинен замінити або зміцнити.

На наш погляд, характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок тонкого тіла зі значною зміною кривизни. Це означає, що при їх виготовленні з МПФ при відповідній температурі прутки в таких точках зазнавав значних пластичних деформацій.

Основним механізмом при в таких процесах є зворотнє мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може відбуватися при порівняно незначній зміні температури.

Фазові переходи, або фазові перетворення, є якісна, стрибкоподібна

зміна стану речовини при безперервній кількісній зміні керованих зовнішніх параметрів (температура, тиск, об'єм, ентропія). Термін фазові переходи зазвичай використовується в контексті зіставлення вихідного і кінцевого фазового стану без розгляду конкретного механізму і кінетики зміни фазових станів. Термін же «фазове перетворення» частіше використовується при розгляді кінетики і механізму зміни фазових станів.

Класифікація фазових переходів за характером зміни симетрії.

За характером зміни симетрії фазові переходи в твердому стані можна поділяють на три типи:

1. Ізоструктурні переходи, що здійснюються між фазами з однаковими структурним типом і просторовою групою симетрії. Такі фази завжди мають різний обсяг і, можливо, різний хімічний склад. Ці переходи не супроводжуються формозміною.

2. Переходи з пониженням (підвищенням) симетрії. В цьому випадку розрізняють симетричну і низько симетричну фази. Низькосиметрична структура містить частину елементів симетрії, властивих високосиметричній структурі, і не містить елементи, які відсутні у високосиметричній структурі.

3. Переходи, при яких кожна - вихідна і кінцева - структура має елементи симетрії, відсутніми в іншій структурі. Це означає, що група симетрії кінцевої структури не є ні підгрупою, ні надгрупою групи симетрії вихідної структури.

Класифікація фазових переходів за способом зміни положення атомів.

За цією ознакою розрізняють переходи типу зміщення і переходи типу порядок-безлад (або типу впорядкування). При переходах типу зміщення атоми не покидають займані ними вузли кристалічної решітки і не обмінюються місцями. Атоми зміщуються з вихідних положень разом з займаними ними вузлами кристалічної решітки. Зсув атомів і вузлів

відбувається на відстані, що не перевищують відстань між вузлами.

Прийнято ділити переходи типу зміщення (як деформаційні, так і здійснювані хвилями зміщення) на дві групи - дисторсійні і реконструктивні. При дисторсійних переходах відбуваються малі дисторсії вихідної решітки, істотно не змінюють оточення кожного атома. При реконструктивних переходах відбувається зміна координації атомів, кожен атом втрачає або набуває частину найближчих і (або) наступних сусідів.

Як мартенситні перетворення в чистому вигляді реалізуються тільки переходи типу зміщення (але ці переходи можуть реалізуватися і немартенситних механізмом). Елементи мартенситного перетворення можуть бути присутніми в реалізації переходів типу порядок-безлад, супроводжуваних деформацією решітки. У цих випадках переходи атомів здійснюються дифузійним шляхом, а деформація решітки здійснюється за мартенситному механізму.

Фазові переходи зі зміною і без зміни складу фаз.

При фазових переходах вихідна і кінцева фази можуть мати як однаковий, так і різний склад. Перехід вихідного однофазного стану в кінцеве однофазне завжди є переходом без зміни складу фаз (в системі, що не обмінюється із середовищем речовиною). Навпаки, переходи зі зміною складу фаз - це завжди переходи зі зміною кількості фаз в системі.

В чистому вигляді переходи без зміни складу фаз реалізуються тільки як мартенситні перетворення. Переходи зі зміною складу фаз можуть супроводжуватися деформацією решітки і реалізуватися як складні перетворення, що включають в себе елементи мартенситного механізму. такі перетворення можуть супроводжуватися добре вираженими ефектами пам'яті форми.

Останнім часом вживається термін «структурні фазові переходи», межі У це поняття структурного фазового переходу включають зазвичай переходи з однофазного стану в однофазне, тобто без зміни складу фази. У

широкому тлумаченні (переходи зі зміною структурного типу) термін охоплює як переходи типу зміщення, так і переходи типу впорядкування. У більш вузькому тлумаченні (переходи з перебудовою кристалічної решітки) термін включає в себе тільки переходи типу зміщення і впорядкування, що супроводжується дисторсією. Іноді до структурних фазових переходів відносять тільки переходи типу зміщення.

Класифікація фазових переходів відповідно до роду переходу

Фазовими переходами першого роду називають переходи, при яких стрибкоподібно змінюються перші похідні термодинамічної потенціалу – обсяг і ентропія, другі похідні – теплоємність, коефіцієнт стисливості і теплового розширення системи – звертаються в нескінченність. При переходах другого і більш високого роду перші похідні змінюються безперервно і спостерігаються розриви більш високих похідних. Таким чином структурні фазові переходи є переходами першого роду.

Отже, фазовий перехід 1-го роду від вихідного однофазного до кінцевого однофазного стану включає в себе двофазну рівновагу, а цей процес фазового перетворення включає в себе співіснування обох фаз. Такий процес складається з зародження нової фази (перехід від однофазного стану до двофазного), зростання нової фази за рахунок вихідної при перенесенні речовини через міжфазну межу в двофазному стані і зникнення залишків вихідної фази (перехід з двофазного стану в нове однофазне). По обидва боки від температури рівноваги обидві фази рівнозначні, але одна з них стабільна, інша метастабільна.

Ця думка є основоположною при переході до **феноменологічного опису** поведінки матеріалів з пам'яттю форми.

Мартенситні перетворення представляють собою спосіб реалізації фазових переходів в твердому стані, що характеризується своєрідністю кінетики і механізму процесу переходу. Один і той же фазовий перехід типу зміщення може реалізуватися і по мартенситному, і не мартенситному

механізму. Називають немартенситні перетворення високотемпературними, тим самим, приписуючи мартенситним перетворенням статус низькотемпературних. Таке розмежування відображає принципові риси обох типів перетворення, але не виключає широкого спектру проміжних і комбінованих ситуацій.

Мартенситну границю можна трактувати як двовимірний аналог дислокації, а її переміщення уподібнити атермічному ковзанню дислокації. У той же час рух мартенситної границі може бути представлено як результат переміщення одновимірних часткових дислокацій, так званих дислокацій перетворення. Зрушення атомної площині, що здійснює переміщення мартенситної границі, як і будь-які кристалографічні зрушення (при пластичному ковзанні і механічному двійникуванні), згідно з простих енергетичних міркувань повинно відбуватися не одночасно по всій площі, а здійснюватись за допомогою переміщення зони локального зсуву.

Як і атермічний рух дислокацій, рух мартенситної границі відбувається зі швидкістю близько швидкості звуку в даному матеріалі. Безпосередні експериментальні дані свідчать про те, що переміщення мартенситної границі відбувається стрибками і що в межах кожного стрибка швидкість переміщення близька до швидкості звуку. Стрибкуватість руху мартенситної границі пов'язана з гальмуванням на локальних перешкодах, які були присутні в початковій фазі або утворились в ході перетворення, або ж на температурних піках, обумовлених **виділенням прихованої теплоти перетворення** на рухомій мартенситній границі при обмеженій швидкості відводу тепла від неї.

Існує наступна класифікація ефектів пам'яті форми. Залежно від того, зміна якого параметра є визначальною в процесі повернення наведеної деформації, усі ефекти, пов'язані з відновленням форми, можна розділити на дві групи:

- 1) ефекти пам'яті форми, обумовлені термомеханічним поверненням;
- 2) ефекти пам'яті форми, обумовлені механотермічним поверненням.

Перша група ефектів обумовлена в основному зміною температури, а напруження грає другорядну роль, а друга - зміною напруження, коли температура забезпечує лише необхідні термодинамічні умови. Природно, що у всіх випадках наведення деформації відбувається при додаванні напруження.

Розглянемо ефекти, обумовлені термомеханічним поверненням. Ця група ефектів пов'язана з поверненням накопиченої деформації в процесі зворотного мартенситного перетворення при нагріванні до відповідних температур. Залежно від способу наведення і механізму накопичення деформації можна виділити наступні ефекти.

Односторонній або незворотний ефект пам'яті форми. Класичним варіантом незворотного ефекту пам'яті форми є відновленням форми при нагріванні після деформації зразків зі структурою атермічного мартенситу або мартенситу напруги. Другим варіантом незворотного ефекту пам'яті форми є ефект, при якому накопичення деформації відбувається за рахунок пластичності мартенситного перетворення при охолодженні в інтервалі в присутності зовнішніх напружень.

Основними характеристиками незворотного ефекту пам'яті форми є наведена деформація, відновлена деформація. Вводиться поняття ступінь відновленням форми, що дорівнює відношенню відновленої деформації до наведеної деформації. Вона може досягати до 100%. Температури початку і кінця відновленням форми.

Обернений ефект пам'яті форми реалізується при багаторазовому термоциклюванні через інтервал, який охоплює пряме і зворотне мартенситне перетворення. Існує два способи проведення зворотного ефекту при термоциклюванні деформації. Перший спосіб полягає в термоциклюванні в умовах дії зовнішнього напруги, коли накопичена за рахунок реалізації пластичності прямого мартенситного перетворення деформація повністю або частково повертається при нагріванні при дії того ж зовнішнього напруження. При такій схемі може бути досягнута значна

оборотна деформація (до 100%), величина якої, однак, зменшується зі збільшенням числа теплосмін. У багатьох випадках після 10-20 теплосмін можлива стабілізація величини оборотної деформації.

Другий спосіб полягає в попередньому впливі на матеріал, в результаті якого створюються внутрішні орієнтовані напруження, що забезпечують реалізацію пластичності мартенситного перетворення і повернення накопиченої деформації при зворотному мартенситному перетворенні. В цьому випадку зворотна деформація досягає 4%. Внутрішні напруження можуть бути викликані:

а) пластичною деформацією матеріалу в мартенситному стані або стані вихідної фази;

б) одноразовим нагріванням або охолодженням під постійним напруженням через інтервал прямого і зворотного мартенситного перетворення;

в) термоцикування під напруженням через інтервал прямого і зворотного мартенситного перетворення;

г) створенням дисперсних виділень в початковій фазі з подальшою пластичною деформацією.

Існують ефекти, обумовлені механотермічним поверненням. Ця група ефектів пов'язана з поверненням накопиченої при навантаженні в ізотермічних умовах деформації при зменшенні або зміні знака деформуючого напруження. Вона об'єднується поняттям - псевдопружність або надпружність. Залежно від механізму накопичення і повернення деформації, а також співвідношення температури, при якій проводиться механічна дія, з характеристичними температурами мартенситного перетворення виділяють наступні основні види псевдопружності.

Явище зміни та пам'яті форми спостерігається і в полімерних матеріалах. Однак природа формозміни в них і умови його створення і реалізації значно відрізняється від сплавів з пам'яттю форми.

На наш погляд, дослідження такої проблеми представляє собою

розробку нового розділу механіки твердого деформівного тіла. У ньому для моделювання поведінки таких елементів конструкцій використовується геометрична нелінійність, нова нелінійна феноменологічна модель поведінки матеріалів з пам'яттю форми, апарат інтегро-диференціальних рівнянь в частинних похідних та удосконалений метод покомпонентного розщеплення.

Пристрої і елементи конструкцій які виготовляються з термочутливих функціонально-неоднорідних матеріалів та мають властивість пам'яті форми і ведуть себе псевдо-пружно-пластично в процесі створення та експлуатації можуть перебувати під впливом складного нестационарного силового і температурного навантаження. Нерівномірний нагрів тіл у поєднанні з силовими чинниками може призводити до великих пластичних деформацій матеріалу при складних процесах деформування.

Існуючі моделі таких елементів не враховують нелінійні геометричні співвідношення та не придатні для ефективного використання при великих деформаціях.

Сучасні числові методи розв'язання таких нестационарних нелінійних задач термомеханіки призводять, як правило, до значних обчислювальних труднощів. Це пов'язано з розв'язанням систем алгебраїчних рівнянь значних розмірів, які треба постійно оновлювати при деформаціях значно більших за 10% у зв'язку зі зміною форми тіла. Тому існуючі методи не завжди бувають ефективні. Ці обставини суттєво ускладнюють моделювання термочутливих конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів під дією нестационарного складного навантаження.

Важливий внесок у розробку сучасних уявлень про закономірності взаємовпливу нестационарних процесів різної фізичної природи внесли Я.Й.Бурак, А.Р.Гачкевич, В.С.Гудрамовіч, Р.М.Кушнір, В.Г.Карнаухов, Ю.А.Черняков, Ю.М.Шевченко, Б.Болі, Дж.Уэйнер, Д.Д. Івлєв, Г.І.Биковцев, А.А.Ильюшин, Ю.И.Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А.Черняков, А.И.Лурье, Ю.Н.Шевченко, Р.Г. Терехов, Ю.Н.Шевченко, М.Е.Бабешко, Р.Г.Терехов, S.Bodner, Y.Partom, J.L.Chaboche, Yu.A.Chernyakov, A.S.Polishchuk,

A.S.Polishchuk, V.P.Shneider, Yu.I.Kadashevich, Yu.A. Chernyakov, S.Leclercq, C.Lexcellent, Z.K. Lu, G.J.Weng.

Розробці конкретних моделей визначення, дослідження та оптимізації механічної поведінки тіл при комплексних зовнішніх навантаженнях присвячені роботи В.Г.Баженова, Д.В.Гріліцького, В.С.Поповича, В.В.Лободи, Р.С.Мусія та ін. К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки, Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко, И.К.Сенченкова, R.Abeyaratne, J.K.Knowles, K.Tsuchiya, R.Ahluwalia, T.Lookman, A.Saxena, R.C.Albers, R.J.Asaro, V.A. Lubard, Z. Bo, D.C.Lagoudas, C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent, J.G.Boyd, D.S. Lagoudas, J.G. Boyd, D.S. Lagoudas, L.C.Brinson, I.Schmidt, R.Lammering, M. Brocca, Yu.A.Chernyakov, A.S. Polishchuk, P.V. Entchev, D.C.Lagoudas, B.C.Goo, C.Lexcellent, D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari, M.Huang, X.Gao, L.C.Brinson, R.D. James, W.S.Ko, S.B.Maisel, B.Grabowski, J.B.Jeon, J.Neugebauer, D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, P.Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao, V.I. Levitas, E.Stein, C.Lexcellent, G. Bourbon, Z.K. Lu, G.J. Weng, K.Otsuka, E.Pator, A.Eberhard, M.Berveiller, H.Petryk, S.Stupkiewicz, G.Maciejewski, L.Qiao, J.J.Rimoli, Y.Chen, C.A.Schuh, R.Radovitzky, L.Qiao, R.Radovitzky, Q.P.Sun, K.C.Hwang, Q.P.Sun, A.Ahadi, M.P.Li, M.X.Chen, X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue.

Ефективні числові методи вирішення нестационарних задач механіки запропоновані в роботах О.І.Безверного, Н.А.Гук, В.Ф.Мейша, О.О. Стрельнікової, Я.М. Григоренка, Т.С.Кагадій, В.І.Кузьменка, П.О.Стеблянка, А.Т.Василенко, Н.Д. Панкратової, В.Н.Кукуджанов, В.И.Кондауров, В.А. Лихачева, В.Г.Малініна, А.А.Самарського, J.T.Lim, D.L.McDowell, M.A.Meyers, A.Mishra, D.J.Benson, K. Otsuka, C.Wayman, K.Nakai, K.Otsuka, H.Sakamoto, K.Shimizu, T.Waitz, V.Kazykhanov, Н.Р.Карнхалер, Т.Waitz, Т.Antretter, F.D.Fischer, N.K.Simha, Н.Р.Карнхалер, M.L.Xia, Q.P.Sun, Q.P.Sun., С.К.Годунов, В.С. Рябенький, К.Де Бор, Ю.С.Зав'ялов, Б.І.Квасов, В.Л.Мирошніченко, В.І.Кузьменко, В.Н.Кукуджанов, Г.І.Марчук, И.А.Рябцев, І.К.Сенченков, Е.В.Турик,

П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, Т. Belytschko, W.K. Liu, B.Morgan, L.L.Schunsker, A.A.Schweikeret, Yu.Shevchenko.

Дослідження останніх років свідчать про те, що перспективними методами для моделювання поведінки тіл під дією нестационарного складного навантажень є методи розщеплення і сплайн-колокації, які дозволяють будувати точніші розв'язки, як за часом, так і по координатах.

Звертають на себе увагу роботи К.А.Багриновского, В.Г.Баженова, О.М.Белоцерковського, С.К.Годунова, Г.І.Марчука, А.А.Самарського, П.О.Стеблянка, А.Г.Угодчикова, Н.Н.Яненко та ін.

Таким чином, **актуальною є наукова проблема** створення математичних моделей, розробка та застосування методів і засобів комп'ютерного моделювання термочутливих конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Обраний підхід до вирішення цієї проблеми ґрунтується на розширенні класу математичних моделей, врахуванню особливостей процесів, що протікають при великих деформаціях та розробці ефективного методу числового моделювання нестационарних термомеханічних процесів в функціонально-неоднорідних матеріалів.

Апробація результатів дисертації.

У повному обсязі робота доповідалась і обговорювалась на кафедрі комп'ютерних наук Київського міжнародного університету (Київ, 2020), на розширеному засіданні наукового семінару відділу теорії фізико-механічних полів ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України (Львів, 2021) та на розширеному науковому семінарі кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, 2021).

Основні теоретичні та практичні результати дослідження обговорено на наукових семінарах і міжнародних наукових конференціях:

«Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016); «Інформаційна

безпека та комп'ютерні технології» (Кіровоград, 2016); «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем » (Дніпропетровськ, 2016); «Inżynieria i technologia. Współczesne problemy i perspektywę rozwoju» (Варшава, 2017); «Україна між Заходом і Сходом: реалії та перспективи» (Київ, 2017); «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, 2017, 2018, 2019, 2020); «Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації» (Чернівці, 2017); «Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia» (Познань, 2017); «Наукова думка інформаційного століття» (Дніпро, 2017); «Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави» (Київ, 2018); «Актуальні питання сьогодення» (Вінниця, 2018); «Наука та освіта: ключові питання сучасності» (Чернівці, 2018); «Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології» (Харків, 2019); «Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України» (Київ, 2020); «Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти» (Львів, 2020); «Science, research ,development, technics and technology» (Краків, 2020); «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020» (Дніпро, 2020); «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики» (Київ, 2020); «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» (Покровськ, 2020); «Наукові підсумки 2020 року» (Харків, 2020).

Публікації і особистий внесок здобувача.

Основні результати дисертації опубліковано у 44 працях [22-46, 100, 125, 164-179, 227], серед яких 2 монографії, 2 статті у періодичних виданнях, що включені до наукометричної бази Scopus, 18 статті у наукових фахових виданнях України та зарубіжних наукових періодичних виданнях, що віднесені до інших (відмінних від [Web of Science](#)) міжнародних наукометричних баз даних (з яких 3 – одноосібних), 24 наукових праць, які засвідчують апробацію матеріалів дослідження на наукових конференціях, симпозіумах, конгресах.

Серед них стаття у науковому журналі «Східно-Європейський журнал передових технологій» індексована у світових наукометричних базах даних і системах, зокрема у міжнародній науко-метричній базі Scopus, Q2 квартал [227]; стаття у науковому журналі «Металофізика та новітні технології» Інституту металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАН України, який індексується у міжнародній науко-метричній базі Scopus, Q3 квартал [167], дві монографії [22, 24], одинадцять статей у закордонних фахових виданнях на англійській мові [164-166, 172-179], п'яти статтях в наукових фахових виданнях України [25, 26, 27, 100, 125] та двадцять чотирьох тезах доповідей у матеріалах міжнародних та міжнародно-практичних конференцій [23, 28-46, 168-171]. З представлених публікацій 3 є одноосібними науковими працями дисертанта [172, 174, 178].

Результати, які складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. Постановка розглянутих задач, вибір методів досліджень та аналіз отриманих результатів проведені разом з науковим консультантом П.О.Стеблянко.

У роботах, написаних у співавторстві з іншими авторами, здобувачеві належить розробка і реалізація підходів, які ґрунтуються на застосуванні методу покомпонентного розщеплення, а також моделювання фізичних процесів в тілах з функціонально-неоднорідних матеріалів та їх експериментальне обґрунтування. Постановка та розв'язання запропонованим методом нового класу задач термомеханіки.

Обґрунтованість та достовірність результатів наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла; застосуванням всебічно нових обґрунтованих числових методів розв'язання поставлених задач; узгодженістю та збігом деяких одержаних розв'язків з наведеними в літературі результатами, отриманими за допомогою відомих методів; відповідністю результатів і висновків до відомих

експериментальних результатів та фізичної суті поставлених задач.

Мета дисертаційної роботи полягає у створенні методу та подальшому розвитку моделей і засобів комп'ютерного моделювання поведінки термочутливих елементів конструкцій з функціонально неоднорідних матеріалів при великих деформаціях з урахування нелінійних геометричних співвідношень на основі використання апарату сплайн-функцій, який забезпечує істотно більшу точність обчислень без ускладнення процедури чисельної реалізації.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- провести аналіз і класифікацію наявних підходів до моделювання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю;
- запропонувати і експериментально обґрунтувати нову нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми;
- на основі теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням побудувати фізичні співвідношення, які дозволили адекватно описати поведінку термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів;
- розробити ефективний метод розв'язання нестационарних тривимірних задач теорії пластичності у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу при великих деформаціях;
- провести досліджень точності та збіжності розробленого чисельного методу шляхом порівняння числових рішень модельних задач з відомими аналітичними і числовими рішеннями, а також на основі обчислювальних експериментів;
- реалізувати за допомогою інструментальних засобів комп'ютерного моделювання запропонованого числового методу раціонального за критеріями точності і тривалості обчислень алгоритму з

ефективним поєднанням числових схем визначення термомеханічних полів у просторових тілах під дією температурного та силового навантажень.

– розв'язати новий клас відповідних нестационарних задач.

Об'єкт дослідження – деформування термочутливих елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях, які мають властивість термо-псевдо-пружно-пластичності.

Предмет дослідження – моделі і методи і задачі деформування функціонально-неоднорідних матеріалів з властивостями термо-псевдо-пружно-пластичності при значних пластичних деформаціях.

Методи дослідження – числове розв'язання нестационарних задач теорії термо-псевдо-пружно-пластичності для просторових тіл з врахуванням нелінійних законів деформації та геометрично нелінійних співвідношень (в рівняннях руху та співвідношеннях між деформаціями та переміщеннями) за складного нестационарного навантаження.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

1) розроблено новий ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях;

2) уперше запропоновано і експериментально обґрунтовано нову нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів в матеріальних точках тіла;

3) уперше запропоновано на ділянці діаграми матеріалу близької до ідеальної пластичності застосовувати феноменологічну теорію пластичної течії для матеріалів з майданчиком плинності;

4) удосконалено (узагальнено) співвідношення теорії пластичності теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням на випадок

деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу;

5) запропоновано (на основі теорії напружених сплайн-функцій) нові експериментально підтверджені інтерполяційні формули для описання ділянок діаграми матеріалу при розвантаженні з довільної точки;

6) поставлено і розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-пружно-пластичності при значних деформаціях;

7) виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів;

8) доведена збіжність ітераційної процедури розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного пластичного матеріалу при великих деформаціях;

9) уперше в рамках запропонованого методу врахована можливість зміни форми і розмірів тіла при великих деформаціях.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці методу числового моделювання процесів деформування в нелінійних просторових тілах з функціонально-неоднорідних матеріалів (зокрема матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю) при **великих** деформаціях. Використаний при цьому апроксимаційний апарат двовимірних сплайн-функцій дозволяє з більшою точністю враховувати складні залежності властивостей матеріалів від термо-механічних процесів, які в них відбуваються, а також створювати нові різницеві схеми підвищеної точності. Результати роботи можуть бути використані для опису поведінки ряду матеріалів в машинобудуванні, радіоелектроніці, металургії і т.д.

Дисертаційна робота виконана відповідно до постанови Президії НАНУ від 20.12.13 №179 «Основні наукові напрями та найважливіші проблеми фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і гуманітарних наук Національної академії наук України на 2019–2023 рр.», а

саме – пп. 1.3.1.1. «Методи розрахунку та дослідження напружено-деформованого стану, у тому числі при наявності дефектів різного походження» та пп. 1.3.1.5. «Механіка взаємодії полів різного походження в матеріалах і елементах конструкцій», а також Постанови КМУ від 7 вересня 2011 року №942 «Про затвердження переліку пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 2020 року», а саме – «Найважливіші фундаментальні проблеми фізико-математичних і технічних наук».

Дисертаційні досліджування також виконувалося в рамках досліджень, які виконувались у Дніпровському державному технічному університеті «Створення чисельного методу дослідження міцності елементів конструкцій на основі урахування теплових та мікромеханічних ефектів» (номер державної реєстрації № 0110U002305) та «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379).

Результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики». Практичні результати дослідження впроваджено в ТОВ «LAV01»

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків. Вона містить 346 сторінок машинописного тексту, з них 268 сторінки основного тексту, 26 рисунків, список використаних джерел з 262 найменувань та додатки.

У вступі окреслено актуальність теми, мету, наукову новизну одержаних результатів.

У першому розділі проведено аналіз літературних джерел за темою

дисертаційного дослідження.

Проведено аналіз існуючих моделей фазових перетворень, які можуть мати місце у функціонально-неоднорідних матеріалах. Проаналізовано критерії за якими можна класифікувати фазові перетворення в матеріалах.

Розглянуто методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

Історія питання, яке досліджено в дисертації, моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю та різноманітні приклади такого моделювання наведено в роботах [48, 49, 51, 72, 96, 144-147, 150, 152, 153, 155-159, 180, 185, 198, 202-205, 207, 228-232, 242, 243, 252].

Наведена інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами та питання пов'язані з їх практичним впровадженням [11, 17-20, 68, 71, 83-89, 92, 93, 107, 129, 148, 149, 188, 189, 196, 201, 208-210, 214-216, 219, 229, 252, 253, 257]. Розглянуто відповідні задачі [8, 9, 11, 15, 18-20, 69, 70, 98, 131, 162, 186, 187, 193, 197, 212, 220, 221, 226, 245-246, 249, 251, 255-258], моделі та методи їх розв'язання [12, 13, 95, 99, 101-104, 112, 116, 151, 152, 160, 184, 185, 195, 200, 219, 224, 240, 241, 247, 248, 249, 255].

Особлива увага приділялась роботам по дослідженню пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів [4, 52, 57, 58-60, 90, 91, 105, 108, 132-138, 154, 161, 163, 183, 194, 206, 213]. Поведінка матеріалів при значних (кінцевих) деформаціях вивчалась в роботах [59, 60, 82, 113-115, 254, 259-262].

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки. Більшість наукових робіт направлена на описання поведінки матеріалів в точці причому існує актуальна потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для описання процесів, що відбуваються в широкому діапазоні значень температур та деформацій, деформації при довільному навантаженні.

У другому розділі записана повна система рівнянь та розроблено метод визначення пружно-пластичного нестационарного напружено-деформованого стану трьохвимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Зроблена математична постановка задачі дослідження.

Для розв'язання вище вказаної задачі необхідно визначити температуру, три складові вектора швидкості переміщень, шість компонент тензора напружень і шість компонент тензора деформацій. Отже, треба визначити шістнадцять невідомих функцій часу і трьох координат.

Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними і фізичними рівняннями, а також рівнянням теплопровідності.

Температурне поле в довільній точці тіла при наявності в ньому джерел тепла та при урахуванні тепла, яке виділяється в процесі деформування, визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності при певних початкових і граничних умовах. Сформована повна система інтегро-диференціальних рівнянь з урахування геометричної нелінійності.

За допомогою підходу основанийого на покопонентному розщепленні запропоновано новий варіант методу зведення трьохвимірної геометрично нелінійної нестационарної задачі термо-пружно-пластичності до послідовно розв'язуваної системи трьох одновимірних задач, що є основою розробленого в дисертації методу числового аналізу поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів при великих деформаціях.

Зазначимо, що після визначення швидкостей зміщень та складових тензора напруження, які в запропонованій постановці задачі є основними невідомими, визначаються самі переміщення (шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей) і деформації.

Здійснено порівняння класичного різницевого підходу та методу підвищеної точності з застосуванням сплайн-функцій.

Одним із аспектів числового розв'язання загальних нестационарних

задач для непружних тіл є вибір фізичних співвідношень між напруженням та деформацією. Цей вибір узгоджується з експериментами і тісно пов'язаний з процесами деформування, що відбуваються в матеріалі тіла. У загальному випадку складові тензора деформації будуть функціями процесу напружень та перепадів температур, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу змін фізичних факторів, а не лише поточними значеннями.

Для конкретизації фізичних співвідношень сформульована нова нелінійна феноменологічна модель, яка більш точно в порівнянні з відомими моделями описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу саме в точці. При цьому для конкретизації діаграми напруження – деформація матеріалу зразка додатково треба знати положення в тілі фронту фазового переходу і функцію кінетичного відгуку.

Розглянуто випадок, коли функція кінетичного відгуку має вигляд ламаної, яка складається з двох лінійних відрізків і більш загальний випадок з нелінійною другою ланкою, для якої друга лінійна ланка попередньої моделі буде асимптотою. Ця комбінована лінія може бути задана аналітично. Для визначення положення в тілі фронту фазового переходу і функції кінетичного відгуку записана система двох інтегро – диференціальних рівнянь. Числово-аналітичне розв'язання цієї системи дозволило побудувати більш точний алгоритм розв'язання загальної задачі по описанню діаграми матеріалу зразка в цілому.

В задачах використано діаграму псевдо-пружного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок. Такий підхід призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для описання термомеханічної поведінки зразків різної форми необхідно мати рішення граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації фазового перетворення. При цьому враховано не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, що вивільняється в точці при фазовому переході.

Загальна фізична постановка задачі дослідження формулюється так.

Спочатку ізотропне і однорідне тривимірне тіло, обмежене заданою поверхнею, в початковий момент часу знаходиться в природному ненапруженому стані при визначеній температурі. Потім тіло піддається нагріву і навантаженню зовнішніми силами. Це можуть бути об'ємні сили, що впливають на кожен елемент тіла. Поверхневі сили, що діють на одній частині поверхні тіла. На другій частині поверхні тіла, яка може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень як функції координат і часу.

Вважаємо, що нагрів і навантаження тіла протікають так, що виникають значні (кінцеві) деформації які можуть суттєво впливати на зміну температури цього елемента. Будемо розглядати такі процеси навантаження і рівні температур, при яких реологічні властивості матеріалу не проявляються. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні, яка обмежує його і може змінюватись при значних деформаціях. Крім цього задаються теплофізичні і механічні характеристики матеріалу тіла і умови його теплообміну з навколишнім середовищем.

Теплофізичні властивості матеріалу характеризуються коефіцієнтами теплопровідності і температуропровідності, які можуть залежати від температури. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторія малої кривизни задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, отриманих при різних фіксованих температурах або розшуковуються виходячи з феноменологічної моделі поведінки зразка з термо-псевдо-пластичного матеріалу в точці. Крім цього традиційно , задаються значення коефіцієнтів Пуассона ν і лінійного теплового розширення.

У третьому розділі досліджується та розв'язується новий клас задач термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів. Розв'язано ряд задач моделювання поведінки тіл з псевдо-пружно-пластичного матеріалу

при нестационарному навантаженні. Це задачі термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів (порівняння з відомими результатами). Моделювання поведінки локально навантаженого стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури. Моделювання поведінки локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні.

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. В означених задачах розроблено числову процедуру розрахунку діаграми матеріалу, яка представляє собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, побудованих для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Побудовано інтегральні діаграми матеріалу, який може знаходитися під дією складного навантаження.

Для двофазного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок з різними модулями пружності і відповідно змінною трансформаційною деформацією на основі запропонованої моделі записана залежності між напругою, збільшенням довжини зразка і рушійною силою.

При отриманні розрахункових формул уточненої моделі була розглянута допоміжна задача, яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні.

Для використання феноменологічної моделі з метою дослідження двофазних матеріалів з різними модулями пружності розв'язано додаткову задачу яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. Графік залежності має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом інтегральна діаграма матеріалу, побудована в роботі, теж має три характерні ділянки.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це

поверхня для пружної частини, поверхня де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а вже потім переходить в пластичний стан. Аналогічним чином термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні.

Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках. Встановлено, що при деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%, а при деформаціях до 16%-20% результати в геометрично лінійній і нелінійній постановках різняться більше ніж на 25%.

У четвертому розділі проведено розв'язання ряду задач в новій геометрично нелінійній постановці, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях.

За принципом роботи пристрої поділяють на надпружні, які спрацьовують один раз. Та такі, які спрацьовують багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткого протидії (термомеханічні з'єднання). В процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилового елементи).

Однією з найбільш затребуваних в наш час областю застосування матеріалів з пам'яттю форми є медицина. Існує значна кількість таких імплантів з матеріалів з пам'яттю форми. Важливою особливістю тут є надпружна поведінка при температурі тіла людини. В такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження.

Характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок де попередня заготовка отримувала значні зміни кривизни. Це означає, що при їх виготовленні при відповідній температурі прутки в таких заготовках

знавав значних пластичних деформацій. Тому при постановці нових задач зверталась увага на можливість виникнення великих пластичних деформацій.

Розглядались задачі про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій.

Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій.

Локальне розкриття тривимірної пластини з розрізом при наявності великих пластичних деформацій.

В розв'язаних означених задачах проаналізовано вплив на результати згущення сітки по просторовим координатам та за часом.

У п'ятому розділі проведено оцінку точності обчислень та ефективності розробленого нового методу розв'язання задач термомеханіки. Проаналізовано точність в одновимірних, двовимірних та тривимірних задачах пружно-пластичності. Проаналізовано збіжність ітераційної процедури методу при наявності геометричної нелінійності. Проведено загальний аналіз ефективності розробленого методу.

Новизна запропонованого у дисертації підходу полягає в формулюванні нелінійної феноменологічної моделі для опису властивостей матеріалів з пам'яттю форми і термо-псевдо-пружно-пластичністю в точці з урахуванням тепла, що виділяється в процесі фазового переходу.

Деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, деформації, викликаній температурними змінами і пластичної деформації. Остання в дисертаційній роботі визначається за допомогою співвідношень теорії течії і інших відомих теорій.

Користуючись узагальненими фізичними співвідношеннями розширено межі застосування відомого методу покомпонентного розщеплення. При цьому розроблено новий варіант ефективного методу розв'язання нестационарних просторових задач термомеханіки у випадку деформування

термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу при значних пластичних деформаціях. Метод засновано на використанні ідеї розщеплення повної системи рівнянь за геометричними властивостями та застосуванні для апроксимації невідомих величин та їх похідних по координатах двовимірних напружених сплайнів. Такий підхід дозволив підвищити до четвертого порядку точність апроксимації методу. Це дало можливість обирати сітку по координатах зі значно більшими за розмірами кроками інтегрування в порівнянні з кінцево-різницеvim методом при досягненні однакової точності обчислень.

Для підвищення до третього порядку апроксимації методу за часом запропонована ітерційна процедура, що збігається. Початковим наближенням для неї будуть результати, обчислені за допомогою формул явної схеми методу розщеплення.

Досліджена ефективність узагальненого методу та проведена оцінка точності отриманих результатів. У разі застосування неявних схем методу розщеплення за геометричними властивостями встановлена збіжність відповідної ітераційної процедури.

Поставлено і на основі запропонованого методу розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, псевдо-пружності, термо-псевдо-пружно-пластичності при значних пластичних деформаціях.

Виявлено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів, та їх форми і розмірів.

Автор висловлює щирі вдячність своєму науковому консультантові – доктору фізико-математичних наук, професору Стеблянко Павлу Олексійовичу за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

РОЗДІЛ І.

**АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-
НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ**

У цьому розділі проведено огляд літературних джерел за темою дисертаційного дослідження.

Проведено аналіз існуючих моделей фазових перетворень, які можуть мати місце у функціонально-неоднорідних матеріалах. Проаналізовано критерії за якими можна класифікувати фазові перетворення в матеріалах.

Розглянуто методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

Історія питання, яке досліджено в дисертації, моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю та різноманітні приклади такого моделювання наведено в роботах К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки [220-223], Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко [134], І.К. Сенченкова [116], R. Abeyaratne, J.K. Knowles [142-144], K. Tsuchiya, R. Ahluwalia, T. Lookman, A. Saxena, R.C. Albers, R.J. Asaro, V.A. Lubard [148], Z. Bo, C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent [211], J.A.Shaw, S.Kyriakides [237-239], J.G. Boyd, D.S. Lagoudas [156], Yu.A. Chernyakov, A.S. Polishchuk [163], P.V. Entchev, D.C. Lagoudas [204], D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari [184], W.S.Ko, S.B. Maisel, B. Grabowski, J.B. Jeon, J. Neugebauer [198], D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, P. Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao [205], V.I. Levitas, E. Stein, C. Lexcellent, G. Bourbon [208], Z.K. Lu, G.J. Weng, K. Otsuka, E. Pator, A. Eberhard, M. Berveiller [225], K. Otsuka [217-218], H. Petryk, S. Stupkiewicz, G. Maciejewski [228], L. Qiao, J.J. Rimoli, Y. Chen, C.A. Schuh, R. Radovitzky [223], L. Qiao, R. Radovitzky [224], Q.P. Sun, K.C. Hwang [243], Q.P. Sun,

A. Ahadi, M.P. Li, M.X. Chen [244], X.M. Wang, B.X. Xu, Z.F. Yue [252], С.П.Беляев [3], А.Е.Волков [8-10], А.А.Льїн [53-56, 190-192], В.А.Ліхачев [73-75], В.Г.Пушилін [109-111], Г.С.Фірстов [128, 181, 182].

Наведена інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами та питання пов'язані з їх практичним впровадженням: Вольченко Д.А. [11], Гюнтер В. Э., Малеткина Т. Ю., Дамбаев Г.Ц., Сысолятин П.Г., Ходоренко В.Н., Ясенчук Ю.Ф., Аникеев С.Г., Матюнин А.Н. [17-20, 83-89], Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. [68], Кушнір Р.М. [69, 70], Лебедев А. А. [71], Муслов С.А., Г.М. Стюрева, Николин Б.И. [92, 93], Попов А.А. [107], Хунджуа А.Г. [129], Asaro R.J., Lubard V.A. [148], Auricchio F., Boatti E., Conti M. [149], Iasnii V., Yasniy P., Lapusta Y., Shnitsar T. [188, 189], Kan Q., Yu C., Kang G., Li J., Yan W. [196], Kumar P.K., Lagoudas D.C. [201], Lexcellent C., Bourbon G., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P.[208-210], Auricchio F., Lubliner J., Menna C., Asprone D., Meyers M.A., Mishra A., Benson D.J.[214-216], Pittaccio S.[229], Wang X.M., Xu B.X., Yue Z.F., Wang Y.F., Lu Z.Z., Deng C.H., Yue Z.F. [252, 253], Yoneyama T., Miyazaki S.[257].

Розглянуто відповідні нестационарні задачі термомеханіки [8, 9, 11, 15, 18-20, 69, 70, 98, 131, 162, 186, 187, 193, 197, 212, 220, 221, 226, 245-246, 249, 251, 255-258] .

Моделі та методи розв'язання задач термомеханіки вивчались в роботах [12, 13, 95, 99, 101-104, 112, 116, 151, 160, 184, 195, 200, 219, 224, 240, 241, 247, 248, 249, 255].

Особлива увага приділялась роботам по дослідженню пластичного деформування функціонально-неоднорідних термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів при кінцевих деформаціях [4, 52, 57, 58-60, 90, 91, 105, 108, 132-138, 154, 161, 163, 183, 194, 206, 213].

Поведінка матеріалів при значних (кінцевих) деформаціях вивчалась в роботах Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. [59, 60], Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.[82], Рудаков К.М., Яковлев А.И., Шандура А.С.[113-115], Wu H.C., Lu J.K., Pan W.F. [254], Yoshida F., Hamaasaki H., Uemori T., Fujiwara K.

[259-262].

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки. Більшість наукових робіт направлена на описання поведінки матеріалів в точці причому існує актуальна потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для описання процесів, що відбуваються в широкому діапазоні значень температур та деформацій при довільному навантаженні.

1.1. Аналіз математичних моделей фазових перетворень у функціонально-неоднорідних матеріалах

Дослідження поведінки нових матеріалів завжди було однією з важливих наукових і прикладних задач, як фізичного матеріалознавства так і механіки деформівного твердого тіла при визначенні їх термомеханічної поведінки. Переважна більшість матеріалів призначених для різних сфер діяльності людини, використовується в якості конструкційних для виготовлення різних деталей та устаткування загального і спеціального призначення. Іншою групою матеріалів, призначення і застосування яких в основному визначається їх особливими і часом унікальними фізико-технічними характеристиками, є так звані функціональні матеріали. До них відносяться різні матеріали із спеціальних властивостями: електричними, магнітними, температурно-залежними, хімічними та ін.

Конструкції, які складаються з термочутливих елементів функціонально-неоднорідних матеріалів з властивостями псевдо-пружно-пластичності широко застосовуються в авіаційній, радіотехнічній, медичній та інших галузях. Вплив різних чинників на такі матеріали, зокрема температури та силового навантаження призводить до складних процесів деформації. При моделюванні поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не лише на пружній стадії деформації, але і за межею пружності, враховуючи великі деформації матеріалів.

Існуючі математичні моделі та методи дослідження нестационарних задач термомеханіки не завжди враховують геометричну нелінійність фізичних співвідношень та не є придатними для моделювання поведінки таких матеріалів при великих деформаціях. Тому математичне моделювання поведінки **функціонально-неоднорідних матеріалів** на даний час є **актуальною проблемою**.

Приклади моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів, які враховують фазові перетворення можна знайти в роботах: К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки [220-223], Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко [134], І.К. Сенченкова [116], R. Abeyaratne, J.K. Knowles [142-144], K. Tsuchiya, R. Ahluwalia, T. Lookman, A. Saxena, R.C. Albers, R.J. Asaro, V.A. Lubard [148], Z. Bo, C. Bouvet, S. Calloh, C. LExcellent [211], J.A.Shaw, S.Kyriakides [237-239], J.G. Boyd, D.S. Lagoudas [156], Yu.A. Chernyakov, A.S. Polishchuk [163], P.V. Entchev, D.C. Lagoudas [204], D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari [184], W.S.Ко, S.B. Maisel, B. Grabowski, J.B. Jeon, J. Neugebauer [198], D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, P. Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao [205], V.I. Levitas, E. Stein, C. LExcellent, G. Bourbon [208], Z.K. Lu, G.J. Weng, K. Otsuka, E. Pator, A. Eberhard, M. Berveiller [225], K. Otsuka [217-218], H. Petryk, S. Stupkiewicz, G. Maciejewski [228], L. Qiao, J.J. Rimoli, Y. Chen, C.A. Schuh, R. Radovitzky [223], L. Qiao, R. Radovitzky [224], Q.P. Sun, K.C. Hwang [243], Q.P. Sun, A. Ahadi, M.P. Li, M.X. Chen [244], X.M. Wang, B.X. Xu, Z.F. Yue [252], С.П.Беляев [3], А.Е.Волков [8-10], А.А.Ільїн [53-56, 190-192], В.А.Ліхачев [73-75], В.Г.Пушилін [109-111], Г.С.Фірстов [128, 181, 182].

Існує велика кількість функціонально-неоднорідних матеріалів, типу сплавів з пам'яттю форми (СПФ), п'єзоелектричних матеріалів, магнітострикційні металів, і т.д., які демонструють тісний зв'язок механічної поведінки з іншими полями, зокрема: тепловими, електричними або магнітними. Ці матеріали часто називають «інтерактивними», або «інтелектуальними» матеріалами, оскільки вони реагують механічним чином

на зміну в навколишньому середовищі. Унікальні властивості цих матеріалів не нові, але їх дослідження при використанні в реальних конструкціях під дією нестационарних навантажень потребують нових підходів. Властивості цих матеріалів пов'язані із зворотнім мартенситним перетворенням між фазами твердого тіла, яке часто зустрічається при температурі близькій до кімнатної. Мартенситне перетворення може бути викликано змінами температури або змінами напруги, що приводять до збільшення термомеханічного опору в поведінці матеріалу. Деякі матеріали також характеризуються істотно нелінійною механічною поведінкою, високим внутрішнім демпфуванням і високою напругою плинності [6, 53, 56, 61, 77, 78, 97, 130, 199,250].

Різноманітність фазових перетворень, які можуть бути віднесені до мартенситних, робить необхідним проведення їх класифікації. Така класифікація проводиться за різними критеріями. Наприклад, за її основу можна взяти [77]:

- термопружній і не термопружній характер перетворення;
- кінетичні ознаки: швидкість перетворення (аітермічне і ізотермічні мартенситні перетворення), вибуховий і плавний характер; оберненість (обернені і не обернені мартенситні перетворення), величина гістерезису між прямим і зворотним перетвореннями;
- хімічний склад матеріалу (перетворення в чистих елементах, перетворення в сплавах на основі заліза, на основі міді та кольорових металів, на основі титану, перетворення в з'єднаннях різного типу - іонних солях, ковалентних з'єднаннях);
- термодинамічні умови розвитку перетворення – перетворення при зміні температури, тиску, магнітного або електричного поля;
- перетворення в статичних і динамічних зовнішніх полях;
- кристалографічні характеристики перетворення;
- розмірні характеристики об'єктів (перетворення в монокристалах, полікристалах, в плівках, в мікро- і нанокристалічних матеріалах).

Взагалі ж фазові мартенситні перетворення поділяють на дві групи термопружні і нетермопружні [77, 78].

Нетермопружні перетворення відбуваються головним чином в сплавах заліза і пов'язані з немобільними границями вихідної фази мартенситу, скріпленими постійними дефектами і переходять послідовним утворенням ядра і його зростанням. Через перетворення ядра аустеніту в процесі перетворення (мартенсит в аустеніт), ці перетворення кристалографічно незворотні в тому сенсі, що мартенсит не може повернутися до вихідної фази первісної орієнтації.

Термопружні мартенситні перетворення, з іншого боку, пов'язані з мобільними межами між вихідними і мартенситними фазами. Ці межі здатні до зворотнього перетворення за рахунок усадочної деформації пластин мартенситу.

Існує велика кількість особливих матеріалів, типу сплавів з пам'яттю форми, п'єзоелектричних матеріалів, магнітострикційні металів, і т.д., які демонструють тісний зв'язок їх механічної поведінки з іншими полями, типу теплових, електричних або магнітних. Вони реагують механічним чином на зміну в навколишньому середовищі [53, 56, 61].

Псевдо-пружність відноситься до здатності матеріалу при певному температурному режимі накопичувати деформації при навантаженні та потім повертатися у вихідне положення після розвантаження (через петлю гістерезису). Основний механізмом є оборотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може виникати при температурі близькій до кімнатної. Перетворення може бути викликано змінами температури або змінами напруження, що призводять до збільшення термомеханічного опору в поведінці матеріалу. Матеріал також характеризується істотно нелінійною механічною поведінкою та високою напругою текучості. Всі ці властивості дають можливість застосовувати СПФ (NiTi та інші) в нових конструкціях. Аналітичний зв'язок між мікроскопічною і макроскопічною поведінкою встановити досить проблематично. В результаті яких було побудовано ряд

моделей [157, 204, 205, 207, 225] і отримано нові експериментальні дані [237], які започаткували початок новий досліджень в моделюванні, проведенні відповідних розрахунків та прикладних впроваджень. Слід сказати, що універсальні моделі, що підходять для багатьох технічних застосувань не завжди бувають доступні для практичного використання. Підхід на рівні континуальної пластичності, зі спеціальною залежністю деформація - напруження у вигляді триланкової ламаної, дозволив врахувати особливості поля локалізованої деформації [238]. Була додатково врахована температурна взаємодія між механічно навантаженим зразком і навколишнім середовищем, для опису неізотермічної поведінки при більш високих швидкостях навантаження і в менш конвективному середовищі, типу повітря.

Більшість визначальних моделей можна класифікувати, як ті, що належать до однієї з двох груп: мікромеханічні і феноменологічні моделі.

Мікромеханічні моделі будуються для опису поведінки СПФ з урахуванням зернистої мікроструктури полікристала СПФ. Теоретично, якщо мікроструктура відома, то можна, використовуючи добре вивчену поведінку монокристала СПФ, безпосередньо розв'язувати граничні задачі для полікристалічного матеріалу. На практиці точне уявлення про мікроструктуру досить складне. До того ж досить складно вирішити прикладну числову задачу з достатньою кількістю зерен, що має місце в реальних, тривимірних граничних задачах. Тому для відображення термомеханічних властивостей полікристалічного матеріалу використовують методи осереднення. Такі задачі спочатку виникли у зв'язку з проблемою визначення макроскопічних властивостей гетерогенних композиційних матеріалів. При цьому було розвинено підхід оснований на осередненні для пружних і пружнопластичних матеріалів [143, 147, 205, 216].

Інший клас моделей для полікристалічних сплавів з пам'яттю форми це феноменологічні моделі, які для опису змін мікроструктури через фазове перетворення виходять з термомеханіки континууму з внутрішніми

змінними. У подібних моделях зазвичай задають функцію макроскопічної енергії, яка залежить від змінних стану і внутрішніх змінних, що описують ступінь фазового перетворення. Для внутрішніх змінних записуються рівняння еволюції. Макроскопічна енергія і рівняння еволюції приймаються в деякій функціональній формі, яка повинна бути сумісна з термодинамікою. Фундаментальна структура всіх цих моделей подібна, і може класифікуватися як визначальні моделі з внутрішніми змінними стану [155, 161, 163].

Феноменологічні співвідношення безпосередньо не залежать від параметрів матеріалу на мікрорівні, а залежать від набору параметрів на макрорівні, які визначаються з експериментальних спостережень. Такі моделі можуть бути простими, наприклад, моделювання одновісьової псевдопружної реакції матеріалів з пам'яттю форми кусковолінійною функцією, або можуть бути складними, як у тривимірних моделях, що використовують багато параметрів, які повинні бути визначені з великої кількості експериментів.

Феноменологічні моделі легко адаптувати до числових методів розв'язання граничних задач термомеханіки на макроскопічному рівні. Моделі, що описують макроскопічну термомеханічну поведінку полікристалічних сплавів з пам'яттю форми були запропоновані в роботах [155, 156, 162, 163, 180, 205, 208].

У більшості визначальних моделей приймається термодинамічна структура і вибирається мартенситна частка обсягу як внутрішня змінна стану, для врахування впливу мікроструктури в середньому. Їх головною відмінністю є функція зміцнення, обрана для моделювання зв'язку деформація - напруження при навантаженні, що викликає мартенситне фазове перетворення. Узагальнення структури для цих моделей було проведено в роботі [156]. Пропонувались різні функції перетворення для опису асиметричної поведінки сплавів з пам'яттю форми, яку вони проявляють при розтягуванні і стискуванні. При цьому частку обсягу

мартенситу і деформацію перетворення використовували в якості окремих внутрішніх змінних. Передбачалось, що частина мартенситу не відновлюється після кожного циклу, що призводить до помітної невідновлювальної деформації, яка накопичується з числом циклів. Моделі, згадані вище, не залежать від швидкості деформування. Вони враховують залежність поведінки деформація - напруження тільки від траєкторії навантаження.

Збільшення точності у феноменологічних моделях проводились в роботах [155, 156], де у визначальних моделях вже враховувалась залежність від швидкості деформування (навантаження). Формулювання цих моделей враховує і розвантаження у співвідношеннях деформації - напруження. Числове застосування феноменологічних моделей досліджувалось в [204]. Зазначимо, що складна поведінка матеріалів з пам'яттю форми вимагає розвитку спеціфічних алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану тіла.

Загальні відомості про експериментальні дослідження поведінки конструкційних матеріалів докладно викладено в роботах Ю.М.Шевченко [134-138].

Інформацію про експерименти, які проводились з матеріалами при наявності фазових переходів можна знайти в роботах [129, 148, 188, 189, 196, 201, 209-210, 252, 253]. Під час фазових переходів в псевдо-пружних матеріалах відбуваються нестабільні процеси. Експериментальні дослідження явищ виникнення і кінетика розповсюдження фронтів фазових перетворень, також пов'язана з ними теплова чутливість детально обговорюються в роботах Shaw і Kyriakides [237-239]. Характерною рисою діаграми такого матеріалу в точці є зуб плинності при переході від чисто пружної ділянки (фаза аустеніт) до горизонтальної ділянки з наступною зміною фази (фаза мартенсит). Площа під кожним піком певним чином відображає теплоту трансформації матеріалу. Звернуть на себе увагу піки, які необхідно подолати на початку напружених плато під час навантаження.

Екзотермічний перехід від аустенітної фази до мартенситної під час навантаження має тенденцію викликати самонагрівання, а це підвищує основне напруження перетворення матеріалу. Звертається увага на те що природа навколишнього середовища (газ, рідина) відіграє істотну роль. Відзначається, що плато напруження (нестабільна поведінка матеріалу) спостерігається під час трансформації. Оскільки такі переходи в сплавах можуть відбуватися механічно нестабільно, трансформація може відбуватися локалізованим способом, тобто через зародження і подальше поширення чітких фазових фронтів по довжині одноосно навантаженого зразка.

У багатьох публікаціях відзначалося, що такі фазові перетворення є екзотермічними. В результаті, навіть при відносно повільній швидкості подовження (деформування, навантаження), зразок відчуває саморозігрів в околиці фронту перетворення, що постійно зміщується. Зазначимо, що на напруження, необхідне для перетворення матеріалу, істотно впливає температура. Таким чином, локальне збільшення температури призводить до збільшення напруження перетворення. Саме ця обставина є головною у феноменологічній моделі, яка запропонована в дисертації.

Дані про особливості пластичного деформування термо-пружно-пластичних та термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів наведено в роботах Д.Д.Івлєв, Г.І.Биковцев [52], А.А.Ільюшин [57], Ю.И.Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А.Черняков [58], А.І.Лурье [76], Ю.М.Шевченко, Р.Г., М.Є.Бабешко, Р.Г.Терехов [137], S.Bodner, Y.Partom [154], J.L.Chaboche [161], Yu.A.Chernyakov, A.S.Polishchuk [162], Yu.A.Chernyakov, A.S.Polishchuk, V.P.Shneider[163], Yu.I.Kadashevich, Yu.A.Chernyakov [194], S.Leclercq, C.Lexcellent [206], Z.K. Lu, G.J.Weng [213].

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженням і деформацією. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформації. У загальному випадку значення деформації є функцією процесу зміни

напруження і температури, яка визначається характеристиками усього попереднього процесу зміни фізичних чинників, а не тільки їх поточними значеннями. Докладну інформацію з цього питання можна знайти в роботах [134-138].

При побудові фізичних співвідношень передбачалося, що деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації прифазовому переході, пластичній деформації і деформації, викликаній температурними змінами. Після розв'язання задачі, по геометрії траєкторії деформації та її абсолютних значеннях, можна судити про достовірність використаних визначальних співвідношень.

При розв'язанні нестационарних задач термомеханіки будемо використовувати фізичні співвідношення записані для швидкостей тензорів напружень і деформацій [119].

Після експериментів на просте розтягування зразка при різних фіксованих температурах будується миттєва термомеханічна поверхня (МТП), існування якої з певною мірою точності експериментально підтверджене в роботах [136, 137]. Вважається, що ця поверхня не залежить від виду напруженого стану для деяких класів ізотропних матеріалів. В результаті її визначають за допомогою експериментів на розтягування циліндричних зразків.

Для проведення розрахунків необхідно миттєву термомеханічну поверхню задати аналітично або у вигляді таблиці експериментальних даних $(\sigma)_i, (\varepsilon)_i, i = 0, 1, \dots$ при фіксованих значеннях температури, як при активному навантаженні, так і при розвантаженні починаючи з довільної точки діаграми матеріалу. З експериментів на розтягування зразка можна записати фізичні залежності для різноманітних значень температури. Після цього здійснюється конкретизація визначальних рівнянь.

Зазначимо, що взагалі ж навіть при малих деформаціях пружне навантаження і розвантаження зразка йде по різних лініях на діаграмі, але при малих деформаціях (до 6%) цими відхиленнями при дослідженні

напружено-деформованого стану твердого тіла, нехтують.

1.2. Фізична постановка задачі дослідження

Основним завданням нестационарної теорії термопружно-пластичності є визначення переміщень (швидкостей переміщень) і компонент тензорів напруги та деформації, що виникають в просторовому тілі в процесі його навантаженні, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу. Процес навантаження будемо розглядати таким, що змінюється у часі. Все це може викликати рух окремих частин тіла.

Нехай спочатку ізотропне і однорідне тіло V , обмежене поверхнею S , в початковий момент часу $t = 0$ знаходиться в природному ненапруженому стані. Потім тіло піддається навантаженню зовнішніми силами і нагріванню. Це можуть бути об'ємні сили $\vec{K}(\alpha_i, t)$, що впливають на тіло, і поверхневі сили $\vec{\Sigma}(\alpha_i, t)$, які діють на частині поверхні тіла S_Σ . На іншій частині поверхні тіла S_V , яка певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень $\vec{V}(\alpha_i, t)$. Поверхня $\Phi(\alpha_i)$ задає конфігурацію тіла. Тут $\alpha_i, i = 1; 2; 3$ - осі довільній ортогональної системи координат. Механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків.

Виходячи з перерахованих даних, необхідно визначити температурне поле, складові вектора швидкості переміщень, компоненти тензора напружень і компоненти тензора деформацій. Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними, фізичними рівняннями і рівнянням теплопровідності.

При розв'язанні нестационарної задачі теорії пластичності в тих частинах тіла, де виникають незворотні деформації, будемо користуватися визначальними рівняннями, що описують процеси навантаження як по прямолінійних траєкторіях, так і по траєкторіях деформування малої

кривизни. Тут використовується форма фізичних рівнянь, наведена в монографії [119].

Повна система рівнянь в загальному випадку має вигляд [118, 119]:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{H_1 \partial \alpha_1} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{H_2 \partial \alpha_2} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{H_3 \partial \alpha_3} + \vec{B}, \quad (1.1)$$

де \vec{W} - вектор, компонентами якого будуть швидкості переміщень v_i , складові тензорів напружень і деформацій $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Система (1.1) доповнюється певними початковими і граничними умовами.

Нестационарне тривимірне рівняння теплопровідності, що використовується при вирішенні пов'язаних задач механіки деформованого твердого тіла, має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{W_*}{\lambda} \right], \quad (1.2)$$

де:

$$W_* = S_{ij} \dot{\mathcal{E}}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma_{ii} \dot{\sigma}_{ii}}{9K}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{1-2\nu},$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3},$$

H_1, H_2, H_3 - Коефіцієнти Ляме, a - коефіцієнт теплопровідності, λ - коефіцієнт теплопровідності, E -модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона. Точкою зверху позначені швидкості (похідні за часом) від відповідних величин.

1.3. Методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів

В задачах механіки застосовуються різноманітні методи числового розв'язання: варіаційні методи, метод кінцевих елементів, різницеві методи. Використовуються підходи, засновані на модифікації вказаних вище методів та їх комбінованому використанні. Перспективними вважаються різницеві методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях, які дозволяють отримувати економічні різницеві схеми [81, 139].

Числові методи розв'язання багатовимірних нестационарних задач механіки для тіл, матеріал яких отримує пластичні деформації, достатньо повно можна знайти в роботах [1, 2, 7, 14, 16, 62, 65-67, 79- 81, 117-119, 124, 127, 139-141, 151, 241 та ін.].

Інформацію про застосування в рамках методів розв'язання задач термомеханіки сплайн-функцій, які дозволяють підвищувати точність обчислень знаходимо в роботах [21, 47, 50, 63, 120-123, 126, 235, 236].

У цьому параграфі надано основні відомості про найбільш відомі класичні методи числового розв'язання нестационарних задач термомеханіки суцільного середовища. Це зокрема метод характеристик, метод Лакса-Вендроффа, методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях. Проведемо порівняльний аналіз деяких з них та надамо рекомендації щодо їх використання.

1.3.1. Огляд класичних числових різницевого методів

Найбільш часто при числовому рішенні динамічних задач теорії пластичності застосовувався метод характеристик. Цей метод дозволяє точно визначати місце виникнення ударної хвилі усередині тіла і його можна безпосередньо використовувати у випадку багатовимірних задач. Узагальнення методу характеристик на просторовий випадок можна знайти в роботах [1, 2].

Метод Лакса-Вендроффа [80] використовується для числового

рішення рівнянь дивергентного виду, до яких зводиться широке коло задач газової динаміки, динаміки пружних та пружнопластичних середовищ. Кінцево-різницеві рівняння будуються за допомогою розкладання рішення в ряд Тейлора за часом. Зазначимо, що схема Лакса-Вендроффа добре працює при розрахунку гладких рішень.

Розглянемо ряд числових методів розв'язання системи (1.1) в деякій області просторового тіла $a_1 \leq \theta_1 \leq a_2, b_1 \leq \theta_2 \leq b_2, c_1 \leq \theta_3 \leq c_2$ при $t \geq 0$, де введена просторова сітка:

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{1i}, \theta_{2j}, \theta_{3k}); \theta_{1i} = \theta_{1i-1} + h_1, \theta_{10} = a_1, i = 1, 2, \dots, N_1, \\ \theta_{2i} = \theta_{2i-1} + h_2, \theta_{20} = b_1, j = 1, 2, \dots, N_2, \\ \theta_{3i} = \theta_{3i-1} + h_3, \theta_{30} = c_1, k = 1, 2, \dots, N_3 \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$

Сітку за часовою змінною визначимо з врахуванням дробових кроків:

$$\omega_\tau = \left\{ \begin{array}{l} t_p; t_{p+1/3} = t_p + \tau_1; t_{p+2/3} = t_{p+2/3} + \tau_2; \\ t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

Через $\Lambda_i \bar{W}$ в (1.1) позначимо диференціальний оператор $A_i \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta_i}$,

різницеві аналоги якого можна знайти в роботах [118, 119].

Схема реалізації алгоритму методу стабілізації у випадку трьох просторових змінних може бути представлена наступним чином [80, 81]:

$$\begin{aligned} \bar{N}^p &= (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \bar{w}^p + \bar{B}^p, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \bar{N}^{p+1/3} = \bar{N}^p, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) \bar{N}^{p+2/3} &= \bar{N}^{p+1/3}, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3 \right) \bar{N}^{p+1} = \bar{N}^{p+2/3}, \\ \bar{w}^{p+1} &= \bar{w}^p + \tau \bar{N}^{p+1}. \end{aligned}$$

Тут E – одинична матриця, $\bar{N}^{p+m/3}$, $m = 0; 1; 2; 3$ - допоміжні вектори.

Схема розщеплення за геометричними властивостями у випадку використання методу предиктор-коректор має вигляд:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1\right) \bar{N}^{p+1/6} = \bar{w}^p + \frac{\tau}{2} \bar{B}^p, \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2\right) \bar{N}^{p+1/3} = \bar{w}^{p+1/6},$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3\right) \bar{w}^{p+1/2} = \bar{w}^{p+1/3}, \frac{1}{\tau} (\bar{w}^{p+1} - \bar{w}^p) = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \cdot \bar{w}^{p+1/2} + \bar{B}^{p+1/2}.$$

Одним з найбільш ефективних прийомів при чисельному розв'язанні багатовимірних нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є підхід, заснований на використанні для визначення невідомих величин, методу дробних кроків або методу покомпонентного розщеплення у поєднанні з представленням шуканих величин у вигляді сплайн-функцій [21, 79-81, 63, 126, 236]. Перевага цього підходу обумовлена тим, що він не складніше в реалізації, ніж кінцево-різницевий метод. При цьому рішення знаходиться у вигляді сплайн-функцій в усій області визначення, тоді як різницеве рішення розшукується лише у вузлах просторової сітки. Такий підхід дозволяє підвищити порядок апроксимації, а це дає можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах в порівнянні з кінцево-різницевим методом при умові досягнення однакової точності обчислень.

Існують різноманітні схеми методів розщеплення та сплайн-колокації. В поєднанні з методом невизначених коефіцієнтів можна записати традиційну схему розщеплення тривимірного векторного рівняння (1.1) на трійку одновимірних рівнянь або систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів сплайна, за допомогою якого інтерполюється розв'язок задачі термомеханіки.

1.3.2. Методи сплайн-колокації

Значний розвиток методів числового розв'язання систем диференціальних рівнянь пов'язано з використанням сплайна - функцій (метод сплайн-колокації). Традиційний метод колокацій будувався на підставі апарату наближення розв'язання задач багаточленами. Проте через складність реалізації він виявився повністю витісненим кінцево-різницевими методами. Метод сплайн-колокації, на відміну від класичного методу, заснований на апроксимації шуканих функцій сплайнами [21, 47, 119-121].

Його реалізація не складніша реалізації різницевих схем. Принципова відмінність полягає в тому, що розв'язання знаходиться у вигляді сплайна по всій області визначення, тоді як різницеве розв'язання шукається тільки на сітці. Це дозволяє одержати більш повну інформацію про розв'язання задачі. В порівнянні з класичним апаратом наближення багаточленами сплайн-функції мають важливі переваги. По-перше, мають кращі апроксимаційні властивості [64], по-друге, зручність реалізації на ПК побудованих на їх основі алгоритмів [119]. Відзначимо, що метод сплайн-колокації застосовувався для розв'язання задач математичної фізики. В нестационарних задачах теорії термопружно-пластичності використовувався в роботах [7, 139-141].

Для побудови рішення повної системи (1.1) скористаємося двомірними напруженими сплайнами. Невідомі величини розшуковуються у вигляді лінійної комбінації двовимірних сплайнів [121]:

$$W_m(\xi; \eta) = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^2 b_{i+l, j+n} S_{2D}(\xi; \eta).$$

Тут, наприклад, для першого рівняння схеми змінних напрямів:

$$\xi = \frac{1}{h_1}(\alpha - \alpha_i), \quad \eta = \frac{1}{h_2}(\beta - \beta_j), \quad \alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \beta \in [\beta_j, \beta_{j+1}].$$

Для другого і третього векторного рівняння розщепленої системи безрозмірні координати визначаються аналогічно. Через h_1, h_2, h_3 позначено кроки інтегрування по координатах α, β, γ .

Двомірний базисний напружений сплайн.

В кожній допоміжній області двомірний напружений сплайн розшукується у вигляді:

$$S_{2D} = [a_0 + a_1\xi + a_2sh(\sqrt{2}\xi) + a_3ch(\sqrt{2}\xi)] \cdot [b_0 + b_1\eta + b_2sh(\sqrt{2}\eta) + b_3ch(\sqrt{2}\eta)],$$

де $\xi \in [0;1], \eta \in [0;1]$, а для визначення величин $a_i, b_i, i = 0;1;2;3$ використовуються допоміжні умови. Поверхня такого сплайна симетрична відносно осей координат і складається з шістнадцяти частин трьох типів.

Для кутової області ці умови у вершинах квадрата $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$, $D(1;1)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} S_{2D}(0;0) &= 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(0;1) &= 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) &= 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;1) &= W_D, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = W_D', \quad \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W_D'. \end{aligned}$$

У правих частинах цих умов стоять значення функції чи її похідних. Задовольняючи цим умовам з урахуванням симетрії поверхні відносно діагоналі $\xi = \eta$ отримаємо:

$$S_{2D} = \left[k_0 (1 - ch\sqrt{2}\xi) + k_1 \xi + k_2 sh\sqrt{2}\xi \right] \cdot \left[k_0 (1 - ch\sqrt{2}\eta) + k_1 \eta + k_2 sh\sqrt{2}\eta \right],$$

де $k_0 = -0,57235$; $k_1 = -0,37114$; $k_2 = 0,26244$.

Для центральної під області умови в вершинах квадрату $D(0;0)$, $N(0;1)$, $F(1;0)$, $M(1;1)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} S_{2D}(0;0) &= W_D, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = W_D', \quad \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = W_D', \\ S_{2D}(0;1) &= W_F, \quad \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W_F', \quad \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) &= W_F, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = W_F', \\ S_{2D}(1;1) &= W_M, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = 0. \end{aligned}$$

У центральній під області поверхня, яку задає двовимірний напружений сплайн, також симетрична і відносно діагоналі $\xi = \eta$. Задовольняючи умовам у вузлах, отримаємо:

$$S_{2D} = \left[n_0 + n_1 \xi + n_2 sh\sqrt{2}\xi + n_3 ch\sqrt{2}\xi \right] \left[n_0 + n_1 \eta + n_2 sh\sqrt{2}\eta + n_3 ch\sqrt{2}\eta \right],$$

де $n_0 = -0,42838$; $n_1 = 2,56711$; $n_2 = -1,39527$; $n_3 = 0,6325$.

Для областей, які об'єднують кутові і центральні області у вершинах квадрата $C(0;0)$, $D(0;1)$, $E(1;0)$, $F(1;1)$ виконуються умови:

$$\begin{aligned} S_{2D}(0;0) &= 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(0;1) &= W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = W'_D, \\ S_{2D}(1;0) &= 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;1) &= W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_F. \end{aligned}$$

Користуючись цим запишемо

$$S_{2D}(\xi, \eta) = \left(m_0 + m_1 \xi + m_2 sh\sqrt{2}\xi + m_3 ch\sqrt{2}\xi \right) \cdot \left[m_4 (1 - ch\sqrt{2}\eta) + m_5 (sh\sqrt{2}\eta - \sqrt{2}) \right].$$

Тут $m_0 = 3,78066$; $m_1 = -10,62084$; $m_2 = 7,28425$; $m_3 = -4,31838$;

$m_4 = 0,19552$; $m_5 = 0,29351$.

Запишемо вираз двовимірного напруженого базисного сплайну для області визначення $x \in [-2;2]$, $y \in [-2;2]$. Для цього задамо чотири допоміжні функції:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= k_0 (1 - ch\sqrt{2}t) + k_1 t + k_2 sh\sqrt{2}t, \\ \varphi_m(t) &= m_0 + m_1 t + m_2 sh\sqrt{2}t + m_3 ch\sqrt{2}t, \\ \psi_m(t) &= m_4 (1 - ch\sqrt{2}t) + m_5 (sh\sqrt{2}t - \sqrt{2}), \\ \varphi_n(t) &= n_0 + n_1 t + n_2 sh\sqrt{2}t + n_3 ch\sqrt{2}t, \end{aligned}$$

Тоді поверхня кожної частини нормованого базисного двомірного сплайна, що задається в єдиній системі координат x, y може бути описана за допомогою наступних функцій:

$$\begin{aligned}
S_{01}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(y), \\
S_{02}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(y), \\
S_{03}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(y), \\
S_{04}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y), \\
S_{05}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(1-y), \\
S_{06}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(1-y), \\
S_{07}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(1-y), \\
S_{08}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(1-y), \\
S_{09}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(1-y), \\
S_{10}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(1-y), \\
S_{11}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(1-y), \\
S_{12}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(1-y), \\
S_{13}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(y), \\
S_{14}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(y), \\
S_{15}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(y), \\
S_{16}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(y).
\end{aligned}$$

В результаті цього двовимірний сплайн приводиться до вигляду:

$$S_{2D}(x; y) = \sum_{k=1}^{16} b_k \cdot S_k(x; y), \quad x, y \in [0;1] \quad (1.5)$$

Інтерполяційний вираз для двовимірного сплайну

Вираз (1.5) в прикладних завданнях зручно використати в дещо іншому виді. Виразимо невідомі коефіцієнти сплайна b_k , ($k = 1, 2, \dots, 16$) через значення деякої функції $w(x; y)$ у вузлах $(i/3; j/3)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, де $w(i/3; j/3) \equiv w_{ij}$. Система, з якої знаходяться b_k , виглядає так:

$$b_k \cdot S_k(i/3; j/3) = w_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Рішення цієї системи отримано аналітично і після підстановки виразів

b_k , ($k = 1, 2, \dots, 16$) в (10) записано нове інтерполяційне вираження:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x, y), \quad (1.6)$$

де:

$$\begin{aligned} F_{00}(x, y) &= \alpha_1 S_{01}(x, y) + \beta_1 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \\ &\quad + \omega_4 S_{04}(x, y) + \alpha_4 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \\ &\quad + \beta_4 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \beta_{13} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] \\ &\quad + \omega_1 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \alpha_{16} S_{09}(x, y) + \\ &\quad + \beta_{16} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{13} S_{12}(x, y), \\ F_{10}(x, y) &= \alpha_2 S_{01}(x, y) + \beta_2 S_{02}(x, y) + \beta_5 S_{03}(x, y) + \omega_3 S_{04}(x, y) + \\ &\quad + \alpha_8 S_{05}(x, y) + \beta_8 S_{06}(x, y) + \beta_{14} S_{07}(x, y) + \omega_5 S_{08}(x, y) + \\ &\quad + \alpha_{12} S_{09}(x, y) + \beta_{15} S_{10}(x, y) + \beta_{12} S_{11}(x, y) + \omega_9 S_{12}(x, y) + \\ &\quad + \alpha_3 S_{13}(x, y) + \beta_9 S_{14}(x, y) + \beta_3 S_{15}(x, y) + \omega_2 S_{16}(x, y), \\ F_{11}(x, y) &= \alpha_6 S_{01}(x, y) + \beta_6 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \omega_7 S_{04}(x, y) + \\ &\quad + \alpha_7 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \beta_7 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \\ &\quad + \beta_{10} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] + \omega_6 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \\ &\quad + \alpha_{11} S_{09}(x, y) + \beta_{11} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{10} S_{12}(x, y). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тут:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1,024; \quad \alpha_2 = 1,854; \quad \alpha_3 = 0,594; \quad \alpha_4 = -1,356; \quad \alpha_6 = -0,758; \\ \alpha_7 &= -8,383; \quad \alpha_8 = 7,288; \quad \alpha_{11} = 21,855; \quad \alpha_{12} = -14,351; \quad \alpha_{16} = 8,640; \\ \beta_1 &= 4,195; \quad \beta_2 = -19,306; \quad \beta_3 = 33,330; \quad \beta_4 = -11,599; \quad \beta_5 = -4,654; \\ \beta_6 &= 29,870; \quad \beta_7 = -54,471; \quad \beta_8 = 20,759; \quad \beta_9 = -4,708; \quad \beta_{10} = -7,465; \\ \beta_{11} &= 26,300; \quad \beta_{12} = -15,097; \quad \beta_{13} = 2,864; \quad \beta_{14} = -3,017; \quad \beta_{15} = 1,891; \quad \beta_{16} = 1,489; \\ \omega_1 &= -5,204; \quad \omega_2 = 1,666; \quad \omega_3 = 9,491; \quad \omega_4 = -7,152; \quad \omega_5 = 36,725; \\ \omega_6 &= -66,177; \quad \omega_7 = 20,348; \quad \omega_9 = -56,662; \quad \omega_{10} = 123,935; \quad \omega_{13} = 23,181. \end{aligned}$$

Інші тринадцять функцій записуються за допомогою основних функцій

$F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y)$ з формул (1.7) шляхом зміни аргументів:

$$\begin{aligned}
F_{01}(x; y) &= F_{10}(y; x), & F_{02}(x; y) &= F_{10}(1 - y; x), \\
F_{03}(x; y) &= F_{00}(x; 1 - y), & F_{12}(x; y) &= F_{11}(x; 1 - y), \\
F_{13}(x; y) &= F_{10}(x; 1 - y), & F_{20}(x; y) &= F_{10}(1 - x; y), \\
F_{21}(x; y) &= F_{11}(1 - x; y), & F_{22}(x; y) &= F_{11}(1 - x; 1 - y), \\
F_{23}(x; y) &= F_{10}(1 - x; 1 - y), & F_{30}(x; y) &= F_{00}(1 - x; y), \\
F_{31}(x; y) &= F_{10}(y; 1 - x), & F_{32}(x; y) &= F_{00}(1 - y; 1 - x), \\
F_{33}(x; y) &= F_{00}(1 - x; 1 - y).
\end{aligned}$$

Формула (1.6) дозволяє обчислювати частинні похідні по координатах в областях, розташованих безпосередньо на межі тіла $x \in [x_0; x_1], y \in [y_0; y_1], x \in [x_{N-1}; x_N], y \in [y_{M-1}; y_M]$ і в сусідніх з ними областях $x \in [x_1; x_2], y \in [y_1; y_2], x \in [x_{N-2}; x_{N-1}], y \in [y_{M-2}; y_{M-1}]$.

У усіх інших осередках просторової сітки для цієї мети треба користуватися лінійною комбінацією (пів сумою) відповідних виразів, записаних в суміжних областях.

1.3.3. Класичний метод покомпонентного розщеплення

Класична схема методу покомпонентного розщеплення векторного рівняння (1.1) має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + \gamma_1 \vec{B}^p, t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \\
\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Звідки наближено отримують різницеві рівняння:

$$\frac{1}{\tau} (\vec{W}^{p+1/3} - \vec{W}^p) = \alpha \Lambda_1 \vec{W}^{p+1/3} + \beta \Lambda_1 \vec{W}^p + \gamma_1 \vec{B}^p,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+2/3} - \vec{W}^{p+1/3}) &= \alpha\Lambda_2\vec{W}^{p+2/3} + \beta\Lambda_2\vec{W}^{p+1/3} + \gamma_2\vec{B}^{p+1/3}, \\ \frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+2/3}) &= \alpha\Lambda_3\vec{W}^{p+1} + \beta\Lambda_3\vec{W}^{p+2/3} + \gamma_3\vec{B}^{p+2/3}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

де $\alpha + \beta = 1$ і оператори по координатах $\Lambda_n \vec{W}$ задаються тотожністю:

$$\Lambda_k \vec{W} \equiv \frac{A_k}{h_k} \cdot \lambda_k(\vec{W}), k = 1, 2, 3.$$

Тут $\lambda_k(\dots)$ – диференціальний оператор, h_k – кроки інтегрування за координатами.

Перші похідні по координатам в означених різницевих схемах доцільно апроксимувати наступними різницевиими аналогами [118, 119]:

$$\lambda_n(W_m(\theta_i)) = \frac{1}{12} \{-k_0 \cdot [W_m(\theta_{i+2}) - W_m(\theta_{i-2})] + n_0 \cdot [W_m(\theta_{i+1}) - W_m(\theta_{i-1})]\},$$

$$i = 3, 4, \dots, N_n; m = 1, 2, \dots, 15.$$

$$\lambda_k(W_m(\theta_0)) = \frac{1}{6} [-k_1 \cdot W_m(\theta_0) + k_2 \cdot W_m(\theta_1) - k_3 \cdot W_m(\theta_2) + k_4 \cdot W_m(\theta_3)],$$

$$\lambda_k(W_m(\theta_1)) = \frac{1}{6} [-k_4 \cdot W_m(\theta_0) - k_5 \cdot W_m(\theta_1) + k_6 \cdot W_m(\theta_2) - k_0 \cdot W_m(\theta_3)],$$

$$\lambda_k(W_m(\theta_{N-1})) = \frac{1}{6} [k_4 \cdot W_m(\theta_N) + k_5 \cdot W_m(\theta_{N-1}) - k_6 \cdot W_m(\theta_{N-2}) + k_0 \cdot W_m(\theta_{N-3})],$$

$$\lambda_k(W_m(\theta_N)) = \frac{1}{6} [k_1 \cdot W_m(\theta_N) - k_2 \cdot W_m(\theta_{N-1}) + k_3 \cdot W_m(\theta_{N-2}) - k_4 \cdot W_m(\theta_{N-3})], \quad (1.10)$$

У випадку застосування кубічних В-сплайнів:

$$n_0 = 8; k_0 = 1; k_1 = 11; k_2 = 18; k_3 = 9; k_4 = 2; k_5 = 3; k_6 = 6.$$

Перша формула з (1.10) дає похибку $O(h^3)$, а інші $O(h^2)$ [5].

При використанні напружених сплайнів в формулах (1.10) слід брати:

$$n_0 = 7,9136; k_0 = 0,9568; k_1 = 11,2646; k_2 = 18,4641;$$

$$k_3 = 9,1344; k_4 = 1,9349; k_5 = 3,0870; k_6 = 5,9787.$$

В цьому випадку перша формула з (1.7) дає похибку $O(h^4)$, а інші $O(h^3)$ [64].

Різницеві рівняння (1.9) зводяться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно основних невідомих на повному і допоміжних кроках

інтегрування за часом:

$$\begin{aligned}(E - \tau\alpha\Lambda_1)\vec{W}^{p+1/3} &= \vec{N}^p, \\(E - \tau\alpha\Lambda_2)\vec{W}^{p+2/3} &= \vec{N}^{p+1/3}, \\(E - \tau\alpha\Lambda_3)\vec{W}^{p+1} &= \vec{N}^{p+2/3},\end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned}\vec{N}^p &= (E + \tau\beta\Lambda_1) \cdot \vec{W}^p + \tau\gamma_1\vec{B}^p, \\ \vec{N}^{p+1/3} &= (E + \tau\beta\Lambda_2) \cdot \vec{W}^{p+1/3} + \tau\gamma_2\vec{B}^{p+1/3}, \\ \vec{N}^{p+2/3} &= (E + \tau\beta\Lambda_3) \cdot \vec{W}^{p+2/3} + \tau\gamma_3\vec{B}^{p+2/3}.\end{aligned}$$

Такий запис розрахункової схеми зручний для програмування та аналізу різних варіантів. Перехід від однієї розрахункової схеми до іншої обумовлюється лише зміною невизначених коефіцієнтів. Для них повинні виконуватися умови:

$$\alpha + \beta = 1, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

Доволі часто використовується схема Кранка-Ніколсона, для якої:

$$\alpha = \beta = 1/2.$$

В цьому випадку схема розщеплення має другий порядок апроксимації за часом. У випадку, коли $\alpha = 0, \beta = 1$, схема стає явною. Явна схема методу покомпонентного розщеплення має лише перший порядок апроксимації методу за часом $O(\tau)$, що знижує загальний ефект.

Якщо взяти $\alpha = 1, \beta = 0$, то ця схема буде неявною.

В роботі [118] доведено, що в тривимірних задачах термомеханіки оптимальним буде такий вибір вагових коефіцієнтів у правій частині формул (1.8) $\gamma_1 = 2/3, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1/3$. У випадку розв'язання двовимірних задач треба брати $\gamma_1 = 3/5, \gamma_2 = 2/5, \gamma_3 \equiv 0$.

При числовому розв'язанні просторових нестационарних задач теорії термомеханіки для тіл складної форми виникає задача, пов'язана з

апроксимацією частинних похідних першого в (1.1) і другого в (1.2) порядків. Результати роботи [119] свідчать про те, що для цього слід застосовувати сплайн-функції. При використанні кубічних В-сплайнів отримані наближені формули для апроксимації похідних першого і другого порядків по координатах, які мають відповідно третій і другий порядок точності відносно кроку інтегрування. У випадку застосування *напружених* сплайнів для апроксимації похідних першого і другого порядків по координатах отримано відповідно четвертий і третій порядок точності відносно кроку інтегрування(дивись нижче).

В дисертації для цього пропонується застосовувати двовимірні сплайни. Розроблено новий варіант методу покомпонентного розщеплення для розв'язання нестационарних задач теорії термопружнопластичності, якій базується на схемі Писмана, Речфорда, Дугласа.

1.3.4. Схема розщеплення Писмана Речфорда Дугласа

Схема розщеплення Писмана Речфорда Дугласа заснована на зведенні тривимірної задачі (1.1) до системи трьох послідовно розв'язуваних двовимірних задач на дробових кроках за часом:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} \right) + \gamma_1 \vec{B}^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}],$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} \right) + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}],$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} \right) + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}],$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \quad (1.11)$$

В поєднанні з методом невизначених коефіцієнтів МПР дозволяє провести наступний запис для неявної схеми розщеплення системи (1.11)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}(\bar{w}^{p+1/3} - \bar{w}^p) &= \bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p, \\
\frac{1}{\tau}(\bar{w}^{p+2/3} - \bar{w}^{p+1/3}) &= \bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}, \\
\frac{1}{\tau}(\bar{w}^{p+1} - \bar{w}^{p+2/3}) &= \bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

де для скорочення запису позначено:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{12} &= \Lambda_1(\alpha_{11}\bar{w}^{p+1/3} + \alpha_{12}\bar{w}^p) + \Lambda_2(\alpha_{21}\bar{w}^{p+1/3} + \alpha_{22}\bar{w}^p), \\
\bar{L}_{23} &= \Lambda_2(\beta_{21}\bar{w}^{p+2/3} + \beta_{22}\bar{w}^{p+1/3} + \beta_{23}\bar{w}^p) + \\
&\quad + \Lambda_3(\beta_{31}\bar{w}^{p+2/3} + \beta_{32}\bar{w}^{p+1/3} + \beta_{33}\bar{w}^p), \\
\bar{L}_{31} &= \Lambda_3(\gamma_{31}\bar{w}^{p+1} + \gamma_{32}\bar{w}^{p+2/3} + \gamma_{33}\bar{w}^{p+1/3} + \gamma_{34}\bar{w}^p) + \\
&\quad + \Lambda_1(\gamma_{11}\bar{w}^{p+1} + \gamma_{12}\bar{w}^{p+2/3} + \gamma_{13}\bar{w}^{p+1/3} + \gamma_{14}\bar{w}^p).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

З формул (1.12) отримують такі розрахункові формули для явної схеми:

$$\begin{aligned}
\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{w}^p + \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p), \\
\bar{w}^{p+2/3} &= \bar{w}^{p+1/3} + \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}), \\
\bar{w}^{p+1} &= \bar{w}^{p+2/3} + \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3}).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Диференціальні оператори в (1.14) визначаються за допомогою двовимірних сплайнів [120-123]:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x; y).$$

безпосереднім диференціюванням за допомогою наступних формул (дивись нижче):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial x}, & \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Після диференціювання по координаті x виразів (1.7) для трьох

основних функцій отримаємо їх перші частинні похідні:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{00}(x; y)}{\partial x} = & \alpha_1 \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) + \beta_1 \left[\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) + \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
& + \omega_4 \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_4 \left[\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y) + \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) \right] + \\
& + \beta_4 \left[\frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) + \frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) \right] + \\
& + \beta_{13} \left[\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
& + \omega_1 \left[\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y) \right] + \\
& + \beta_{16} \left[\frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) \right] + \\
& + \omega_{13} \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{16} \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{10}(x; y)}{\partial x} = & \alpha_2 \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) + \beta_2 \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) + \beta_5 \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) + \\
& + \omega_3 \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_8 \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y) + \beta_8 \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) + \\
& + \beta_{14} \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \omega_5 \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{12} \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y) + \\
& + \beta_{15} \frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \beta_{12} \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) + \\
& + \omega_9 \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) + \\
& + \beta_9 \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) + \beta_3 \frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) + \omega_2 \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}(x; y)}{\partial x} = & \alpha_6 \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) + \beta_6 \left[\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) + \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
& + \omega_7 \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_7 \left[\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y) + \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(y) \right] + \\
& + \beta_7 \left[\frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) + \frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(y) \right] + \\
& + \beta_{10} \left[\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
& + \omega_6 \left[\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(y) \right] + \\
& + \beta_{11} \left[\frac{\partial \varphi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial \psi_m(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_m(1-y) \right] + \\
& + \omega_{10} \frac{\partial \varphi_n(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{11} \frac{\partial \varphi_k(1-x)}{\partial x} \cdot \varphi_k(1-y).
\end{aligned}$$

Інші тринадцять похідних функцій записуються за допомогою наведених вище похідних основних функцій $\frac{\partial F_{00}(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial F_{10}(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial F_{11}(x, y)}{\partial x}$ ШЛЯХОМ зміни аргументів:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_{01}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(y; x), & \frac{\partial}{\partial x} F_{02}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(1-y; x), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{03}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{00}(x; 1-y), & \frac{\partial}{\partial x} F_{12}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{11}(x; 1-y), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{13}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(x; 1-y), & \frac{\partial}{\partial x} F_{20}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(1-x; y), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{21}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{11}(1-x; y), & \frac{\partial}{\partial x} F_{22}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{11}(1-x; 1-y), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{23}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(1-x; 1-y), & \frac{\partial}{\partial x} F_{30}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{00}(1-x; y), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{31}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{10}(y; 1-x), & \frac{\partial}{\partial x} F_{32}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{00}(1-y; 1-x), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_{33}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{00}(1-x; 1-y).
\end{aligned}$$

Перші частинні похідні по координаті y також знаходимо за допомогою формул (1.7). Для трьох основних функцій отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{00}(x; y)}{\partial y} &= \alpha_1 \varphi_k(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} + \beta_1 \left[\frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) \right] + \\
&+ \omega_4 \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_4 \left[\frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(x) + \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x) \right] + \\
&+ \beta_4 \left[\frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) + \frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{13} \left[\frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_1 \left[\frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{16} \left[\frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) + \frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_{13} \frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_{16} \frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x), \\
\frac{\partial F_{10}(x; y)}{\partial y} &= \alpha_2 \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(x) + \beta_2 \frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \beta_5 \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) + \\
&+ \omega_3 \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_8 \frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(x) + \beta_8 \frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) + \\
&+ \beta_{14} \frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \omega_5 \frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_{12} \frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x) + \\
&+ \beta_{15} \frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) + \beta_{12} \frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) + \\
&+ \omega_9 \frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x) + \\
&+ \beta_9 \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) + \beta_3 \frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) + \omega_2 \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}(x; y)}{\partial y} = & \alpha_6 \varphi_k(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} + \beta_6 \left[\frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) \right] + \\
& + \omega_7 \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_7 \left[\frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(x) + \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x) \right] + \\
& + \beta_7 \left[\frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(x) + \frac{\partial \psi_m(y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) \right] + \\
& + \beta_{10} \left[\frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
& + \omega_6 \left[\frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(x) + \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x) \right] + \\
& + \beta_{11} \left[\frac{\partial \psi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_m(1-x) + \frac{\partial \varphi_m(1-y)}{\partial y} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
& + \omega_{10} \frac{\partial \varphi_n(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_{11} \frac{\partial \varphi_k(1-y)}{\partial y} \cdot \varphi_k(1-x),
\end{aligned}$$

Тринадцять інших похідних функцій записуються за допомогою наведених вище похідних основних функцій $\frac{\partial F_{00}(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial F_{10}(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial F_{11}(x, y)}{\partial y}$ шляхом зміни аргументів:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} F_{01}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(y; x), & \frac{\partial}{\partial y} F_{02}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(1-y; x), \\
\frac{\partial}{\partial y} F_{03}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{00}(x; 1-y), & \frac{\partial}{\partial y} F_{12}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{11}(x; 1-y), \\
\frac{\partial}{\partial y} F_{13}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(x; 1-y), & \frac{\partial}{\partial y} F_{20}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(1-x; y), \\
\frac{\partial}{\partial y} F_{21}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{11}(1-x; y), & \frac{\partial}{\partial y} F_{22}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{11}(1-x; 1-y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} F_{23}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(1-x; 1-y), \quad \frac{\partial}{\partial y} F_{30}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y} F_{00}(1-x; y), \\ \frac{\partial}{\partial y} F_{31}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{10}(y; 1-x), \quad \frac{\partial}{\partial y} F_{32}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y} F_{00}(1-y; 1-x), \\ \frac{\partial}{\partial y} F_{33}(x; y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{00}(1-x; 1-y).\end{aligned}$$

В наведених вище формулах для частинних похідних першого порядку використовуються чотири перших похідних від допоміжних функцій $\varphi_k(t)$, $\varphi_m(t)$, $\psi_m(t)$, $\varphi_n(t)$ наведених на сторінці 57, для яких знайдемо:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_k(t)}{dt} &= \sqrt{2}(k_2 ch\sqrt{2t} - k_0 sh\sqrt{2t}) + k_1, \\ \frac{d\varphi_m(t)}{dt} &= m_1 + \sqrt{2}(m_2 ch\sqrt{2t} + m_3 sh\sqrt{2t}), \\ \frac{d\psi_m(t)}{dt} &= \sqrt{2}(m_5 ch\sqrt{2t} - m_4 sh\sqrt{2t}), \\ \varphi_n(t) &= n_1 + \sqrt{2}(n_2 ch\sqrt{2t} + n_3 sh\sqrt{2t}),\end{aligned}$$

Для першого, другого та третього рівнянь з системи (1.11) пари безрозмірних координат визначаються відповідно так:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad y = \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}], \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \\ x &= \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad y = \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \\ x &= \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad y = \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}].\end{aligned}$$

Відзначимо, що для коефіцієнтів в (1.11) повинні виконуватися умови

$$\begin{aligned}\alpha_{11} + \alpha_{12} &= 1, \quad \alpha_{21} + \alpha_{22} = 1, \quad \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1, \quad \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} = 1, \\ \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} &= 1, \quad \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} = 1.\end{aligned}$$

Якщо взяти:

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{31} = \gamma_{31} = \gamma_{11} = 0,$$

то схема буде явною. Ці ж самі формули можна використовувати і при розв'язанні задач за допомогою неявних схем. В такому випадку застосовується ітераційна процедура, що збігається [119]. Всі величини, які містяться в правих частинах відповідних формул беруться з попередньої ітерації m і обчислюються нові значення для ітерації $m+1$.

Розрахункові формули можна представити так:

$$\begin{aligned} (\bar{w}^{p+1/3})_{m+1} &= \left[\bar{w}^p + \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p) \right]_m, \\ (\bar{w}^{p+2/3})_{m+1} &= \left[\bar{w}^{p+1/3} + \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}) \right]_m, \\ (\bar{w}^{p+1})_{m+1} &= \left[\bar{w}^{p+2/3} + \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_3 \bar{B}^{p+2/3}) \right]_m. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В якості нульової ітерації для процедури (1.15) обираються результати обчислень за явною схемою (1.12).

Формули неявної схеми МПР дозволяють отримати третій порядок апроксимації методу по просторовим координатам.

1.3.5. МПР підвищеної точності за часом

Для підвищення точності обчислень за часом при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки було запропоновано підвищити порядок апроксимації перших похідних за часом, які стоять в лівій частині формул (1.1) та (1.2). Цей підхід було описано в роботі [119].

На відміну від чисто різницевого підходу, похідну за часом було апроксимовано за допомогою одновимірних сплайнів. Була розроблена наступна ітераційна процедура методу по компонентного розщеплення для розв'язання нестационарної задачі термомеханіки

Для складової W_m вектора розв'язку системи (1.11) можна записати наступний інтерполяційний вираз:

$$W_m(t) = \sum_{r=0}^3 \Phi_r(\eta) \cdot W_m(t_{p+r/3}), \quad (1.16)$$

де $\eta = \frac{1}{\tau}(t - t_p), t \in [t_p; t_p + \tau]$.

Це дозволяє одержати порядок $O(\tau^m), m = 3; 4$ відповідно при застосуванні кубічних В-сплайнів та напружених сплайнів.

Продиференціюємо вираз (1.14) за часом:

$$\frac{\partial W_m(t)}{\partial t} = \frac{3}{\tau} \sum_{r=0}^3 f_r(\eta) \cdot W_m(t_{p+r/3}) \quad (1.17)$$

Функції $\Phi_r(\eta), f(\eta)$ наведено в роботі [119] у таблицях 2.1 та 2.2.

При переході від диференціальних рівнянь (1.11) до різницевої схеми їх розв'язання похідні за часом у вузлах $t^{p+r/3}, r = 1; 2; 3$ визначаються за формулою (1.17). Тоді у випадку застосування схеми Писмана, Речфорда, Дугласа для розрахунків можна записати так:

$$\begin{aligned} f_3(1/3)\bar{w}^{p+1} + f_2(1/3)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(1/3)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_1, \\ f_3(2/3)\bar{w}^{p+1} + f_2(2/3)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(2/3)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_2, \\ f_3(1)\bar{w}^{p+1} + f_2(1)\bar{w}^{p+2/3} + f_1(1)\bar{w}^{p+1/3} &= \bar{L}_3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В правій частині цієї системи стоять такі вектори:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \tau(\bar{L}_{12} + \gamma_1 \bar{B}^p) - f_0(1/3) \cdot \vec{W}^p, \\ \bar{L}_2 &= \tau(\bar{L}_{23} + \gamma_2 \bar{B}^{p+1/3}) - f_0(2/3) \cdot \vec{W}^p, \\ \bar{L}_3 &= \tau(\bar{L}_{31} + \gamma_2 \bar{B}^{p+2/3}) - f_0(1) \cdot \vec{W}^p. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Значення функцій $f_r(\eta)$ для $\eta = r/3, r = 1; 2; 3$ наведені у таблицях 2.1 та 2.2 роботи [119] відповідно для кубічних В-сплайнів та напружених сплайнів.

Позначимо через $L_{1\lambda}, L_{2\lambda}, L_{3\lambda}, \lambda = 1; 2; \dots; 15$ складові векторів (1.19).

Перепишемо систему (1.16) для компонент, які складають векторний розв'язок основних і допоміжних шуканих величин $W_\lambda^{p+1}, W_\lambda^{p+2/3}, W_\lambda^{p+1/3}$; і за допомогою третього рівняння виключимо W_λ^{p+1} з перших двох. В результаті отримаємо

$$W_{\lambda}^{p+1} = \frac{1}{f_3(1)} \cdot \{L_{3\lambda} - f_1(1)W_{\lambda}^{p+1/3} - f_2(1)W_{\lambda}^{p+2/3}\}. \quad (1.20)$$

Після виключення величин W_{λ}^{p+1} з першого та другого рівнянь системи, одержимо систему, на підставі якої можна організувати ітераційну процедуру визначення допоміжних значень $W_{\lambda}^{p+2/3}, W_{\lambda}^{p+1/3}$ на дробових кроках:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot (W_{\lambda}^{p+1/3})_j + a_{12} \cdot (W_{\lambda}^{p+2/3})_j &= (c_{1\lambda})_{j-1} \quad , \\ a_{21} \cdot (W_{\lambda}^{p+1/3})_j + a_{22} \cdot (W_{\lambda}^{p+2/3})_j &= (c_{2\lambda})_{j-1} \quad . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Тут j – номер ітерації, а також позначено:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f_3(1) \cdot f_1(1/3) - f_1(1) \cdot f_3(1/3), \quad a_{12} = f_3(1) \cdot f_2(1/3) - f_2(1) \cdot f_3(1/3), \\ a_{21} &= f_3(1) \cdot f_1(2/3) - f_1(1) \cdot f_3(2/3), \quad a_{22} = f_3(1) \cdot f_2(2/3) - f_2(1) \cdot f_3(2/3), \\ c_{1\lambda} &= f_3(1) \cdot L_{1\lambda} - f_3(1/3) \cdot L_{3\lambda}, \quad c_{2\lambda} = f_3(1) \cdot L_{2\lambda} - f_3(2/3) \cdot L_{3\lambda}. \end{aligned}$$

Нульове наближення для величин $(W_m^{p+1/3})_0$ та $(W_m^{p+2/3})_0$ визначається за допомогою формул явної схеми. Після цього обчислюються всі необхідні величини $c_{1\lambda}, c_{2\lambda}, \lambda = 1; 2; \dots; 15$.

Розв'язок системи (1.21) в позначеннях роботи [119] можна записати так:

$$\begin{aligned} (W_{\lambda}^{p+1/3})_j &= \hat{\lambda}_1 \cdot (L_{1\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_2 \cdot (L_{2\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_3 \cdot (L_{3\lambda})_{j-1}, \\ (W_{\lambda}^{p+2/3})_j &= \hat{\lambda}_4 \cdot (L_{1\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_5 \cdot (L_{2\lambda})_{j-1} + \hat{\lambda}_6 \cdot (L_{3\lambda})_{j-1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Якщо для апроксимації похідних за часом застосовуються кубічні В – сплайни, то:

$$\hat{\lambda}_1 = 23/12; \quad \hat{\lambda}_2 = -4/3; \quad \hat{\lambda}_3 = 5/12; \quad \hat{\lambda}_4 = 7/3; \quad \hat{\lambda}_5 = -2/3; \quad \hat{\lambda}_6 = 1/3$$

(ці значення отримано на підставі формул (2.108) та даних з таблиці 2.1

роботи [119]. У випадку застосування напружених сплайнів (формули (2.108) та дані з таблиці 2.2 роботи [119]) отримано наступні значення:

$$\hat{\lambda}_1 = 1,995; \hat{\lambda}_2 = -1,406; \hat{\lambda}_3 = 0,411; \hat{\lambda}_4 = 2,406; \hat{\lambda}_5 = -0,737; \hat{\lambda}_6 = 0,331.$$

Процес ітерації за допомогою формул (1.20) проводиться доти, поки сусідні ітерації не будуть відрізнятися одна від одної не більше наперед заданої величини. Після цього на підставі формули (1.20) визначається розв'язок векторного рівняння W_m^{p+1} на повному кроці за часом.

Відзначимо, що з практичної точки зору процес ітерації, організований за допомогою формул (1.22) дає результати, аналогічні тим, які розраховуються на підставі явної схеми, але зі значно більшим кроком інтегрування за часом. Це дозволяє суттєво зменшити час розрахунку розв'язання нестационарної задачі у порівнянні з підходом, заснованим на використанні формул (1.12).

1.3.6. Ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності

Аналогічно будується ітераційна процедура МПР для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності. За допомогою схеми Пісмана, Речфорда, Дугласа зведемо тривимірне рівняння (1.2) до системи трьох послідовно розв'язувальних двовимірних рівнянь на дробових кроках за часом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} \right] + \gamma_1 W_*, \quad t \in [t_p; t_{p+1/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_3^2} \right] + \gamma_2 W_*, \quad t \in [t_{p+1/3}; t_{p+2/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_3^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_1^2} \right] + \gamma_3 W_*, \quad t \in [t_{p+2/3}; t_{p+1}], \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1, \quad T \in [T^p; T^{p+1}], \quad p = 0; 1; 2 \dots \end{aligned} \tag{1.23}$$

Пари безрозмірних координат для першого, другого та третього

рівнянь системи (1.23) визначаються відповідно так:

$$x = \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad y = \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}], \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}],$$

$$x = \frac{1}{h_2}(\theta_2 - \theta_{2j}), \quad y = \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad \theta_2 \in [\theta_{2j}, \theta_{2j+1}], \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}],$$

$$x = \frac{1}{h_3}(\theta_3 - \theta_{3k}), \quad y = \frac{1}{h_1}(\theta_1 - \theta_{1i}), \quad \theta_3 \in [\theta_{3k}, \theta_{3k+1}], \theta_1 \in [\theta_{1i}, \theta_{1i+1}].$$

Для підвищення точності обчислень другі похідні в правій частині цього рівняння апроксимують за допомогою формул, які отримані за допомогою двовимірних сплайнів:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial y^2}.$$

Після повторного диференціювання по координаті x виразів (1.7) для трьох основних функцій отримаємо їх другі частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{00}(x; y)}{\partial x^2} = & \alpha_1 \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) + \beta_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) + \frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\ & + \omega_4 \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_4 \left[\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) \right] + \\ & + \beta_4 \left[\frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) \right] + \\ & + \beta_{13} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\ & + \omega_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y) \right] + \\ & + \beta_{16} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) \right] + \\ & + \omega_{13} \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{16} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_{10}(x; y)}{\partial x^2} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) + \beta_2 \frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) + \beta_5 \frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) + \\
&+ \omega_3 \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_8 \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y) + \beta_8 \frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) + \\
&+ \beta_{14} \frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \omega_5 \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y) + \\
&+ \beta_{15} \frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \beta_{12} \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) + \\
&+ \omega_9 \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_3 \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) + \\
&+ \beta_9 \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) + \beta_3 \frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) + \omega_2 \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y), \\
\frac{\partial^2 F_{11}(x; y)}{\partial x^2} &= \alpha_6 \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) + \beta_6 \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) + \frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
&+ \omega_7 \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y) + \alpha_7 \left[\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(y) \right] + \\
&+ \beta_7 \left[\frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(y) \right] + \\
&+ \beta_{10} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(y) \right] + \\
&+ \omega_6 \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(y) \right] + \\
&+ \beta_{11} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \psi_m(1-y) + \frac{\partial^2 \psi_m(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_m(1-y) \right] + \\
&+ \omega_{10} \frac{\partial^2 \varphi_n(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_n(1-y) + \alpha_{11} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_k(1-y).
\end{aligned}$$

Інші тринадцять похідних функцій записуються за допомогою наведених

вище других похідних основних функцій $\frac{\partial^2 F_{00}(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F_{10}(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F_{11}(x, y)}{\partial x^2}$

шляхом зміни аргументів:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{01}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(y; x), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{02}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(1-y; x), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{03}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{00}(x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{12}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{11}(x; 1-y), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{13}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{20}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(1-x; y), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{21}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{11}(1-x; y), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{22}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{11}(1-x; 1-y), \\
\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{23}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(1-x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{30}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{00}(1-x; y), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{31}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{10}(y; 1-x), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{32}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{00}(1-y; 1-x), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{33}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{00}(1-x; 1-y).
\end{aligned}$$

Другі частинні похідні по координаті y також знаходимо за допомогою формул (1.7). Для трьох основних функцій отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_{00}(x; y)}{\partial y^2} &= \alpha_1 \varphi_k(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} + \beta_1 \left[\frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) \right] + \\
&+ \omega_4 \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_4 \left[\frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(x) + \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x) \right] + \\
&+ \beta_4 \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) + \frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{13} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{16} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_{13} \frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_{16} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_{10}(x; y)}{\partial y^2} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(x) + \beta_2 \frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \beta_5 \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) + \\
&+ \omega_3 \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_8 \frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(x) + \beta_8 \frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) + \\
&+ \beta_{14} \frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \omega_5 \frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x) + \\
&+ \beta_{15} \frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) + \beta_{12} \frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) + \\
&+ \omega_9 \frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_3 \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x) + \\
&+ \beta_9 \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) + \beta_3 \frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) + \omega_2 \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_{11}(x; y)}{\partial y^2} &= \alpha_6 \varphi_k(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} + \beta_6 \left[\frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) \right] + \\
&+ \omega_7 \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \alpha_7 \left[\frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(x) + \frac{\partial^2 \varphi_k(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x) \right] + \\
&+ \beta_7 \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(x) + \frac{\partial^2 \psi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{10} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_6 \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(x) + \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x) \right] + \\
&+ \beta_{11} \left[\frac{\partial^2 \psi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_m(1-x) + \frac{\partial^2 \varphi_m(1-y)}{\partial y^2} \cdot \psi_m(1-x) \right] + \\
&+ \omega_{10} \frac{\partial^2 \varphi_n(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_n(1-x) + \alpha_{11} \frac{\partial^2 \varphi_k(1-y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_k(1-x).
\end{aligned}$$

Тринадцять інших похідних функцій записуються за допомогою наведених

вище похідних основних функцій $\frac{\partial^2 F_{00}(x, y)}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F_{10}(x, y)}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F_{11}(x, y)}{\partial y^2}$

шляхом заміни аргументів:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{01}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(y; x), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{02}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(1-y; x), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{03}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{00}(x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{12}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{11}(x; 1-y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{13}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{20}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(1-x; y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{21}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{11}(1-x; y), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{22}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{11}(1-x; 1-y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{23}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(1-x; 1-y), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{30}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{00}(1-x; y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{31}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{10}(y; 1-x), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{32}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{00}(1-y; 1-x), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{33}(x; y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{00}(1-x; 1-y).\end{aligned}$$

В наведених вище формулах для частинних похідних другого порядку використовуються чотири перших похідних від допоміжних функцій $\varphi_k(t)$, $\varphi_m(t)$, $\psi_m(t)$, $\varphi_n(t)$ наведених на сторінці 57, для яких:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \varphi_k(t)}{dt^2} &= 2(k_2 sh\sqrt{2t} - k_0 ch\sqrt{2t}), \\ \frac{d^2 \varphi_m(t)}{dt^2} &= 2(m_2 sh\sqrt{2t} + m_3 ch\sqrt{2t}), \\ \frac{d^2 \psi_m(t)}{dt^2} &= 2(m_5 sh\sqrt{2t} - m_4 ch\sqrt{2t}), \\ \frac{d^2 \varphi_n(t)}{dt^2} &= 2(n_2 sh\sqrt{2t} + n_3 ch\sqrt{2t}).\end{aligned}$$

На відміну від чисто різницевого підходу, похідну за часом будемо апроксимувати за допомогою сплайнів. Якщо скористатися виразом для сплайну з роботи [122], то:

$$T(t) = \sum_{r=0}^3 \Phi_r(\eta) \cdot T(t_{p+r/3}), \eta = \frac{1}{\tau}(t - t_p), t \in [t_p; t_p + \tau],$$

Звідки:

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{3}{\tau} \sum_{r=0}^3 f_r(\eta) \cdot T(t_{p+r/3}) \quad (1.24)$$

Функції $\Phi_r(\eta)$, $f(\eta)$ наведено в роботі [119] у таблицях 2.1 та 2.2.

З урахуванням (1.24) розрахункову схему (1.23) можна записати так:

$$\begin{aligned} f_3(1/3)T^{p+1} + f_2(1/3)T^{p+2/3} + f_1(1/3)T^{p+1/3} &= M_1, \\ f_3(2/3)T^{p+1} + f_2(2/3)T^{p+2/3} + f_1(2/3)T^{p+1/3} &= M_2, \\ f_3(1)T^{p+1} + f_2(1)T^{p+2/3} + f_1(1)T^{p+1/3} &= M_3. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Через M_1, M_2, M_3 позначені різницеві аналоги правих частин системи (1.25):

$$\begin{aligned} M_1 &= \tau(M_{12} + \gamma_1 W_*^p) - f_0(1/3) \cdot T^p, \\ M_2 &= \tau(M_{23} + \gamma_2 W_*^{p+1/3}) - f_0(2/3) \cdot T^p, \\ M_3 &= \tau(M_{31} + \gamma_2 W_*^{p+2/3}) - f_0(1)T^p, \end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned} M_{12} &= P_1(\alpha_{11}T^{p+1/3} + \alpha_{12}T^p) + P_2(\alpha_{21}T^{p+1/3} + \alpha_{22}T^p), \\ M_{23} &= P_2(\beta_{21}T^{p+2/3} + \beta_{22}T^{p+1/3} + \beta_{23}T^p) + \\ &\quad + P_3(\beta_{31}T^{p+2/3} + \beta_{32}T^{p+1/3} + \beta_{33}T^p), \\ M_{31} &= P_3(\gamma_{31}T^{p+1} + \gamma_{32}T^{p+2/3} + \gamma_{33}T^{p+1/3} + \gamma_{34}T^p) + \\ &\quad + P_1(\gamma_{11}T^{p+1} + \gamma_{12}T^{p+2/3} + \gamma_{13}T^{p+1/3} + \gamma_{14}T^p). \end{aligned}$$

В цих формулах позначено:

$$P_i \equiv \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta_i^2}, i = 1; 2; 3,$$

а для коефіцієнтів повинні виконуватися умови:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} + \alpha_{22} = 1, \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1, \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} = 1, \\ \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} = 1, \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} = 1.$$

При:

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{31} = \gamma_{31} = \gamma_{11} = 0$$

ця схема буде явною.

Перетворимо систему (1.23). З її третього рівняння знайдемо T^{p+1} :

$$T^{p+1} = \frac{1}{f_3(1)} \cdot \left\{ M_3 - f_1(1)T^{p+1/3} - f_2(1)T^{p+2/3} \right\}. \quad (1.26)$$

Після виключення величини T^{p+1} з першого та другого рівнянь системи (1.25) одержано систему, на основі якої була організована ітераційна процедура визначення допоміжних величин $T^{p+1/3}$; $T^{p+2/3}$:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot (T^{p+1/3})_j + a_{12} \cdot (T^{p+2/3})_j &= (C_1)_{j-1}, \\ a_{21} \cdot (T^{p+1/3})_j + a_{22} \cdot (T^{p+2/3})_j &= (C_2)_j, \end{aligned} \quad (1.27)$$

де j – номер ітерації, а також позначено:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f_3(1) \cdot f_1(1/3) - f_1(1) \cdot f_3(1/3), \quad a_{12} = f_3(1) \cdot f_2(1/3) - f_2(1) \cdot f_3(1/3), \\ a_{21} &= f_3(1) \cdot f_1(2/3) - f_1(1) \cdot f_3(2/3), \quad a_{22} = f_3(1) \cdot f_2(2/3) - f_2(1) \cdot f_3(2/3), \\ C_1 &= f_3(1) \cdot M_1 - f_3(1/3) \cdot M_3, \quad C_2 = f_3(1) \cdot M_2 - f_3(2/3) \cdot M_3. \end{aligned}$$

Нульове наближення для величин $(T^{p+1/3})_0, (T^{p+2/3})_0$ визначається за допомогою формул явної схеми. Після цього обчислюються C_1, C_2 . Перша та всі наступні ітерації для $j = 1, 2, \dots$ визначаються з системи (1.27) так як і в попередньому параграфі. Розв'язок системи (1.27) можна записати так:

$$\begin{aligned} (T^{p+1/3})_j &= \hat{\lambda}_1 \cdot (M_1)_{j-1} + \hat{\lambda}_2 (M_2)_{j-1} + \hat{\lambda}_3 (M_3)_{j-1}, \\ (T^{p+2/3})_j &= \hat{\lambda}_4 \cdot (M_1)_{j-1} + \hat{\lambda}_5 (M_2)_{j-1} + \hat{\lambda}_6 (M_3)_{j-1}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тут

$$\widehat{\lambda}_1 = 23/12; \widehat{\lambda}_2 = -4/3; \widehat{\lambda}_3 = 5/12; \widehat{\lambda}_4 = 7/3; \widehat{\lambda}_5 = -2/3; \widehat{\lambda}_6 = 1/3$$

якщо для апроксимації похідних за часом застосовуються кубічні В – сплайни і

$$\widehat{\lambda}_1 = 1,995; \widehat{\lambda}_2 = -1,406; \widehat{\lambda}_3 = 0,411; \widehat{\lambda}_4 = 2,406; \widehat{\lambda}_5 = -0,737; \widehat{\lambda}_6 = 0,331$$

у випадку застосування напружених сплайнів .

Процес ітерації проводиться доти, поки розходження між значеннями температури на сусідніх ітераціях не досягне значення наперед заданої величини. Після цього на підставі формули (1.26) визначається розв'язок T^{p+1} на повному кроці за часом.

З практичної точки зору процес ітерації, організований за допомогою формул (1.28) може дати результати, аналогічні тим, які розраховуються і на підставі явної схеми, але зі значно більшим кроком інтегрування за часом. Це суттєво зменшує час розрахунку розв'язання нестационарної задачі теплопровідності [119].

1.3.7. Комп'ютерні системи розв'язання задач термо-пружно-пластичності

Докладну інформацію про інші існуючі методи розв'язання задач термомеханіки можна знайти в роботах [65, 67, 106, 116, 124, 127, 134, 138, 151, 185, 240, 241], а відповідні задачі опубліковано в роботах [12, 13, 15, 16, 66, 69, 70, 133, 135, 186, 226]. На даний час означеним вище методам складають конкуренцію комп'ютерні системи аналізу і методи розв'язання задач термопружнопластичності.

Існують різноманітні системи інженерного аналізу і методи розв'язання задач термо-пружно-пластичності, які базуються на засадах **методу скінчених елементів**. При цьому застосовуються системи автоматичного проектування та автоматичного інженерного аналізу. САЕ-системи інженерного аналізу (ABAQUS, ANSYS, COSMOS, NASTRAN, та

інші) дозволяють виконувати моделювання систем різної фізичної природи, досліджувати реакцію цих систем на зовнішні впливи у вигляді напружень, температур, швидкостей переміщень, електромагнітних полів.

Одним з таких комплексів є програма ANSYS, що використовує метод скінчених елементів. Саме ANSYS в даний час використовується для розв'язання задач моделювання пружно-пластичних тіл під дією різних типів навантаження.

Інший програмний комплекс ABAQUS призначений для моделювання та розв'язання лінійних і нелінійних задач методами скінчено-елементного аналізу. За допомогою комплексу ABAQUS можна вести розрахунок міцності елементів конструкцій, моделювати їх пластичне деформування та ін. При цьому один розрахунок може включати різні типи аналізів: статичний аналіз напружень та переміщень; в'язкопружні та в'язкопластичні відгуки; динамічний аналіз напружень і переміщень; нестационарний або усталений аналіз теплопередач та ін. Можливі комбіновані задачі: тепло – механіка; тепло – електрика та ін.

Перелічимо основні етапи розв'язання двовимірних стаціонарних задач термомеханіки **методом скінчених елементів** на основі методу зважених нев'язок Гальоркіна.

1. Розрахункова область, яка може бути і багатозв'язною, розбивається на елементи того ж простору. Для двовимірної розрахункової області в якості скінчених елементів приймаються трикутні або чотирикутні елементи, причому останні можна розділити діагоналлю на два трикутних елементи. Перевагами трикутних елементів є можливість гарної апроксимації межі області та можливість апроксимації шуканої функції на трикутному елементі за допомогою найпростішої поверхні (площини), яка визначається значеннями шуканої функції в нумерованих вузлах елемента (зазвичай це вершини трикутного елемента). Розбиття на елементи має задовольняти визначеним умовам, причому суміжні елементи повинні мати загальні сторони і загальні нумеровані вузли.

2. У нумерованих вузлах фіксуються вузлові значення шуканої функції, які є невідомими величинами, що підлягають визначенню.

3. За допомогою вузлових значень в нумерованих вузлах елемента шукана функція апроксимується поверхнею (частіше всього лінійною функцією, яка описує площину), званою функцією елемента, що дозволяє визначити шукану функцію в будь-якій точці скінченного елемента. При цьому якщо кількість нумерованих вузлів елемента на одиницю більше розмірності простору, то елемент називається лінійним. Якщо в елементі число нумерованих вузлів більше ніж одиниця, то цей елемент називається нелінійним, а шукана функція на ньому апроксимується за допомогою нелінійної функції (наприклад сплайн-функцій).

4. Кожному нумерованому вузлу розрахункової області приписується базисна функція, що дорівнює одиниці в вузлі, якому вона приписується, і нулю у всіх інших вузлах розрахункової області. Базисні функції для різних нумерованих вузлів є лінійно незалежними.

5. Наближене рішення задачі формується у вигляді лінійної комбінації базисних функцій по всім нумерованим вузлам розрахункової області з коефіцієнтами лінійної комбінації, рівними вузловим значенням шуканої функції.

6. Це рішення підставляється в диференціальну задачу, що призводить не до тотожного нулю, оскільки підставляється наближене рішення, а до нев'язок по розрахунковій області і границі.

7. У відповідності з різними методами зважених нев'язок, найбільш ефективним з яких є метод Гальоркіна, нев'язки ортогоналюються з системою вагових функцій (в методі Гальоркіна в якості вагових функцій приймаються базисні функції). Результатом такої ортогоналізації є глобальна система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо вузлових значень шуканої функції. Число рівнянь в цій системі збігається з кількістю нумерованих вузлів розрахункової області. Кожен елемент матриці вектора правих частин цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь містить в тій чи іншій мірі вклади

елементів матриць і правої частин локальних система лінійних алгебраїчних рівнянь, сформованих для кожного скінченного елемента. Процес підсумовування таких вкладів скінчених елементів називають ансамблюванням скінчених елементів, тобто локальним номерам вузлів скінчених елементів ставляться у відповідність глобальні номери вузлів розрахункової області.

8. Вирішуючи отриману глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь будь-яким з відомих методів, отримуються вузлові значення шуканої функції, за допомогою яких з функцій елементів визначаються значення шуканої функції у будь-яких точках скінчених елементів.

З наведеного аналізу моделей та методів розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів випливає, на наш погляд, що при їх числовому дослідженні найбільш ефективним є використання методу покомпонентного розщеплення, побудованого з використанням ітераційної процедури підвищення точності обчислень. При цьому треба враховувати можливість виникнення в процесі навантаження тіла значних пластичних деформацій.

Виходячи з цього, головною задачею дисертаційної роботи є модернізація описаних вище підходів і розробка нового варіанта методу покомпонентного розщеплення підвищеної точності для дослідження поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при значних пластичних деформаціях з урахуванням геометричної нелінійності.

В дисертаційній роботі розроблено і апробовано власні програмні продукти. Їх можливості порівнювались з відомими програмними комплексами ABAQUS і ANSYS. В деяких задачах ці результати використовувались як початкові умови при розв'язанні задач в геометрично нелінійній постановці.

1.4. Висновки по першому розділу

В цьому розділі дисертації розглянуто історію питання, а саме досліджено феноменологічні моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та термо-псевдо-пружно-пластичністю.

Надана інформація про експерименти, які проводились з функціонально-неоднорідними матеріалами. Розглянуто відповідні задачі для сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пружно-пластичністю, сучасні методи їх розв'язання та існуючі системи комп'ютерного аналізу. Значна увага приділялась роботам по експериментальному дослідженню деформування функціонально-неоднорідних термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

Проведено аналіз існуючих моделей фазових перетворень, які можуть мати місце у функціонально-неоднорідних матеріалах. Проаналізовано критерії за якими можна класифікувати фазові перетворення в матеріалах.

Розглянуто методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

Досліджено історію питання, яке досліджується в дисертації, моделі запропоновані для описання поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю та різноманітні приклади такого моделювання.

Наведена інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами та питання пов'язані з їх практичним впровадженням. Розглянуто відповідні нестационарні задачі термомеханіки, моделі та методи їх розв'язання.

Особлива увага приділялась роботам по дослідженню пластичного деформування функціонально-неоднорідних термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів при кінцевих деформаціях.

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження,

можна зробити такі висновки. Більшість праць направлена на описання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів точці і існує потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для дослідження в широкому діапазоні значень температур, швидкостей деформації при довільному навантаженні тіла та при наявності **значних (кінцевих) пластичних деформацій** (до 20%).

РОЗДІЛ II

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТРЬОХВИМІРНИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОКОПОНЕНТНОГО РОЗЩЕПЛЕННЯ

У другому розділі записана повна система рівнянь та розроблено метод визначення пружно-пластичного нестационарного напружено-деформованого стану трьохвимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Зроблена математична постановка задачі дослідження.

Для розв'язання вище вказаної задачі необхідно визначити температуру, три складові вектора переміщень, три складові вектора швидкості переміщень, шість компонент тензора напружень і шість компонент тензора деформацій. Отже, треба визначити дев'ятнадцять невідомих функцій часу і трьох координат. При цьому необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними і фізичними рівняннями, а також рівнянням теплопровідності.

Температурне поле в довільній точці тіла при наявності в ньому джерел тепла та при урахуванні тепла, яке виділяється в процесі деформування, визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності при певних початкових і граничних умовах. Сформована повна система диференціальних рівнянь з урахування геометричної нелінійності.

Одним із аспектів числового розв'язання загальних нестационарних задач для непружних тіл є вибір фізичних співвідношень між напруженням та деформацією. Цей вибір узгоджується з експериментами і тісно пов'язаний з процесами деформування, що відбуваються в матеріалі тіла. У загальному випадку складові тензора деформації будуть функціями процесу напружень та перепадів температур, які визначаються характеристиками всього

попереднього процесу змін фізичних факторів, а не лише поточними значеннями.

Для конкретизації фізичних співвідношень сформульована нова нелінійна феноменологічна модель, яка більш точно в порівнянні з відомими моделями описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу саме в точці. При цьому для конкретизації діаграми напруження – деформація матеріалу зразка додатково треба знати положення в тілі фронту фазового переходу і функцію кінетичного відгуку.

Розглянуто випадок, коли функція кінетичного відгуку має вигляд ламаної, яка складається з двох лінійних відрізків і більш загальний випадок з нелінійною другою ланкою, для якої друга лінійна ланка попередньої моделі буде асимптотою. Ця комбінована лінія може бути задана аналітично. Для визначення положення в тілі фронту фазового переходу і функції кінетичного відгуку записана система двох інтегро – диференціальних рівнянь. Числово-аналітичне розв'язання цієї системи дозволило побудувати більш точний алгоритм розв'язання загальної задачі по описанню діаграми матеріалу зразка в цілому.

В задачах використано діаграму псевдо-пружного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок. Такий підхід призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і для описання термомеханічної поведінки зразків різної форми необхідно мати рішення граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації фазового перетворення. При цьому враховано не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, що вивільняється в точці при фазовому переході.

Загальна фізична постановка задачі дослідження формулюється так. Спочатку ізотропне і однорідне тривимірне тіло, обмежене заданою поверхнею, в початковий момент часу знаходиться в природному ненапруженому стані при визначеній температурі. Потім тіло піддається нагріву і навантаженню зовнішніми силами. Це можуть бути об'ємні сили, що впливають на кожен елемент тіла. Поверхневі сили, що діють на одній

частині поверхні тіла. На другій частині поверхні тіла, яка може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень як функції координат і часу.

Вважаємо, що нагрів і навантаження тіла протікають так, що виникають значні (кінцеві) деформації які можуть суттєво впливати на зміну температури цього елемента. Будемо розглядати такі процеси навантаження і рівні температур, при яких реологічні властивості матеріалу не проявляються. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні, яка обмежує його і може змінюватись при значних деформаціях. Крім цього задаються теплофізичні і механічні характеристики матеріалу тіла і умови його теплообміну з навколишнім середовищем.

Теплофізичні властивості матеріалу характеризуються коефіцієнтами теплопровідності і температуропровідності, які можуть залежати від температури. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторія малої кривизни задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, отриманих при різних фіксованих температурах або розшуковуються виходячи з феноменологічної моделі поведінки зразка з термо-псевдо-пластичного матеріалу в точці. Крім цього традиційно , задаються значення коефіцієнтів Пуассона ν і лінійного теплового розширення.

За допомогою підходу основанийого на покопонентному розщепленні запропоновано новий варіант методу зведення трьохвимірної геометрично нелінійної нестационарної задачі термо-пружно-пластичності до послідовно розв'язуваної системи трьох двовимірних задач, що є основою розробленого в дисертації методу числового аналізу поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів при **значних пластичних деформаціях**.

Зазначимо, що після визначення швидкостей зміщень та складових тензора напруження, які в запропонованій постановці задачі є основними невідомими, визначаються самі переміщення (шляхом безпосереднього

інтегрування відповідних швидкостей) і деформації .

Здійснено порівняння класичного різницевого підходу та методу підвищеної точності з застосуванням сплайн-функцій.

2.1. Повна система рівнянь (математична постановка задачі)

Загальна фізична постановка задачі дослідження представлена в параграфі 1.2 попереднього розділу.

Для математичного дослідження процесу деформування твердого тіла з функціонально-неоднорідного матеріалу, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження, необхідно розв'язати повну систему, яка складається з наступних груп рівнянь: рівняння руху, геометричні та фізичні рівняння, а також рівняння теплопровідності. Основними невідомими є температура, швидкості переміщень (переміщення) та компоненти тензорів напруження і деформації, що виникають в тілі в процесі його навантаження та нагріванні. Усі ці невідомі є функції трьох координат та часу.

Температурне поле для ізотропного тіла визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності [119]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \theta_3} \right) \right] + W_*(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}),$$

$$W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma \dot{\sigma}}{K}, K = \frac{3E}{1-2\nu}. \quad (2.1)$$

За допомогою функції $W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$ враховується тепло, яке виникає в матеріальній точці тіла при циклічному навантаженні та фазових переходах. Наприклад, в останньому випадку джерело тепла моделюємо так $W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = k_T (\sigma_M - \sigma_m)$; $k_T - const$ [227].

Початковий розподіл температури в тілі задається функцією координат точок тіла:

$$T = T_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

Граничні умови задаються наступним чином

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha \theta - q,$$

де n - зовнішня нормаль до поверхні тіла. Величини α , θ , q можуть бути залежними від часу і координатна поверхні тіла. При різних значеннях коефіцієнта α можна отримати три види граничних умов [118].

Після визначення поля температур для певного моменту часу розшуковуються складові вектора швидкості зміщень і компоненти тензорів напруження і деформації, які задовольняють трьом рівнянням руху, шести геометричним рівнянням і шести фізичним рівнянням.

2.1.1. Нелінійні геометричні співвідношення

У загальному випадку тензор деформацій Гріна і компоненти вектора переміщень пов'язані наступними нелінійними рівняннями [94, 105]:

$$2\varepsilon_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i} + U_{n,i} \cdot U_j^n,$$

де

$$U_{j,i} = \frac{\partial U_j}{\partial \alpha^i} - U_k \cdot \Gamma_{ij}^k, \quad U_i^j = \frac{\partial U_j}{\partial \alpha^i} + U_k \cdot \Gamma_{ki}^j,$$

а індекси i, j, k, n пробігають значення 1, 2, 3.

Тут U_i , U^i відповідно коваріантні і коваріантні компоненти вектора переміщень, Γ_{ij}^S – символи Крістофеля, що визначаються наступним чином

$$\Gamma_{ij}^S = \frac{1}{2} g^{sm} \cdot \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^m} \right),$$

де g_{ij} і g^{ij} – відповідно коваріантний і контраваріантний метричний тензор.

Зстосування неортогональних систем координат пов'язано з додатковими труднощами, зумовленими необхідністю, обліку двох типів

компонент вектора переміщень (коваріантні і контраваріантні компоненти). У разі використання ортогональних систем координат потреба в цьому відпадає, так як тут коваріантні і контраваріантні компоненти векторів переміщень збігаються. Враховуючи ту обставину, що необхідність застосування неортогональних систем координат виникає порівняно рідко, обмежимося розглядом тільки ортогональних систем координат. У цьому випадку з двадцяти семи символів Кристофеля ненульовими будуть наступні дванадцять:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}, & -\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}, & -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}, \\ -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}, & -\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1}, & -\Gamma_{33}^2 = \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2}. \end{aligned}$$

В загальному випадку ортогональної системи координат тензор деформації і складові вектора переміщень пов'язані такими нелінійними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \left[e_{22}^2 + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right)^2 + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{33} &= e_{33} + \frac{1}{2} \left[e_{33}^2 + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right)^2 + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right), \\ \varepsilon_{23} &= e_{23} + e_{22} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) + e_{33} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right), \\ \varepsilon_{31} &= e_{31} + e_{33} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + e_{11} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

У випадку використання ортогональної системи координат для геометрично лінійних складових тензора деформації вводяться такі позначення:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_3; \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} u_3 + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_1; \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_2; \\
 e_{12} &= \frac{\partial u_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{H_2 \partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right); \\
 e_{23} &= \frac{\partial u_3}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{H_3 \partial \alpha_3} - \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_3 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} u_2 \right); \\
 e_{31} &= \frac{\partial u_1}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{\partial u_3}{H_1 \partial \alpha_1} - \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_1 + \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u_3 \right); \\
 2\omega_1 &= \frac{\partial u_3}{H_2 \partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_3 - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} u_2 \right); \\
 2\omega_2 &= \frac{\partial u_1}{H_3 \partial \alpha_3} - \frac{\partial u_3}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_1 - \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u_3 \right); \\
 2\omega_3 &= \frac{\partial u_2}{H_1 \partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

З урахуванням цього після диференціювання за часом в геометрично нелінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} &= (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} + c_{11}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} + (1 + e_{22}) \frac{\partial v_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} + c_{22}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{H_3 \partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{H_3 \partial \alpha_3} + (1 + e_{33}) \frac{\partial v_3}{H_3 \partial \alpha_3} + c_{33}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{11}}{2} + \frac{e_{22}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \\
&\quad + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{(e_{22} - e_{11})}{2} \left(\frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} - \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} + c_{12}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{33}}{2} + \frac{e_{11}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{H_3 \partial \alpha_3} + \\
&\quad + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{(e_{11} - e_{33})}{2} \left(\frac{\partial v_1}{H_3 \partial \alpha_3} - \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{H_3 \partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + c_{13}, \\
\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{22}}{2} + \frac{e_{33}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{\partial v_2}{H_3 \partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \\
&\quad + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{(e_{33} - e_{22})}{2} \left(\frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} - \frac{\partial v_2}{H_3 \partial \alpha_3} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{H_3 \partial \alpha_3} + c_{23}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тут введено позначення:

$$c_{11} = c_{11}^0 - \frac{v_1}{H_1} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right],$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= c_{22}^0 - \frac{v_2}{H_2} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right], \\
c_{33} &= c_{33}^0 - \frac{v_3}{H_3} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right]; \\
c_{12} &= c_{12}^0 + v_3 \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{e_{32}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right], \\
c_{23} &= c_{23}^0 + v_1 \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - \left(\frac{e_{13}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right], \tag{2.5} \\
c_{31} &= c_{31}^0 + v_2 \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{e_{21}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right].
\end{aligned}$$

Тут введені допоміжні позначення для геометрично лінійних складових:

$$\begin{aligned}
c_{11}^0 &= \frac{1+e_{11}}{H_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_3 \right), \\
c_{22}^0 &= \frac{1+e_{22}}{H_2} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} v_3 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} v_1 \right), \\
c_{33}^0 &= \frac{1+e_{33}}{H_3} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} v_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} v_2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}^0 &= \frac{v_1}{H_1 H_2} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - (1 + e_{22}) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right] + \\
&+ \frac{v_2}{H_1 H_2} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - (1 + e_{11}) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right], \\
c_{23}^0 &= \frac{v_2}{H_3 H_2} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} - (1 + e_{33}) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right] + \\
&+ \frac{v_3}{H_3 H_2} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} - (1 + e_{22}) \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right], \\
c_{31}^0 &= \frac{v_3}{H_3 H_1} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - (1 + e_{11}) \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right] + \\
&+ \frac{v_1}{H_3 H_1} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} - (1 + e_{33}) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зазначимо, що при деформаціях менше 7% рівняння руху і геометричні співвідношення доцільно використовувати в геометрично лінійній постановці. В цьому випадку тензор деформації і складові вектора зміщень пов'язані виразом:

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \theta_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тоді після диференціювання за часом для швидкостей деформацій можна записати такі рівняння:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \theta_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

2.1.2. Рівняння руху (геометрично нелінійна постановка)

Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується, в ортогональній системі координат в **геометрично нелінійній** постановці представимо у вигляді [105]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sigma_{ij} + \sigma_{jn}^0 \frac{\partial u_j}{H_n \partial \alpha_n} \right) + \frac{1}{\rho} B_i(\sigma_{nm}; \dots), \quad (2.8)$$

$i; j; n; m = 1; 2; 3.$

де:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В рамках запропонованого підходу будемо використовувати і лінійні рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується. Через $\sigma_{ij}^0; v_j^0$ позначено невідомі складові тензора напруги та вектора швидкості переміщень, які розшуковуються за допомогою геометрично лінійного підходу. Вони мають вигляд (2.9) :

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{\rho} B_i(\sigma_{mm}^0); \quad i; j; n; m = 1; 2; 3. \quad (2.9)$$

$$v_i^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial t}, \quad i = 1; 2; 3.$$

Представимо **геометрично нелінійні** рівняння руху (2.8) в розгорнутому у вигляді:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial t_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial t_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial t_{31}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_1,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial t_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial t_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial t_{32}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_2, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial t_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial t_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial t_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_3,$$

де для скорочення позначено:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{H_1 \partial \alpha_1}, & t_{12} &= \sigma_{12} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{H_1 \partial \alpha_1}, & t_{13} &= \sigma_{13} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{H_1 \partial \alpha_1}, \\ t_{21} &= \sigma_{21} + \sigma_{22}^0 \frac{\partial u_1}{H_2 \partial \alpha_2}, & t_{22} &= \sigma_{22} + \sigma_{22}^0 \frac{\partial u_2}{H_2 \partial \alpha_2}, & t_{23} &= \sigma_{23} + \sigma_{22}^0 \frac{\partial u_3}{H_2 \partial \alpha_2}, \\ t_{31} &= \sigma_{31} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{H_3 \partial \alpha_3}, & t_{32} &= \sigma_{32} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{H_3 \partial \alpha_3}, & t_{33} &= \sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{H_3 \partial \alpha_3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З урахуванням (2.10) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_1(\sigma_{ij}, \sigma_{nn}^0, u_i), \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_2(\sigma_{ij}, \sigma_{nn}^0, u_i), \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{1}{\rho H_1} \cdot \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho H_2} \cdot \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho H_3} \cdot \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho} B_3(\sigma_{ij}, \sigma_{nn}^0, u_i), \end{aligned} \quad (2.12)$$

де:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^0 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\sigma_{11}^0 \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1 + u_2 + u_3) \right], \\ B_2 &= B_2^0 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\sigma_{22}^0 \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (u_1 + u_2 + u_3) \right], \\ B_3 &= B_3^0 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\sigma_{33}^0 \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (u_1 + u_2 + u_3) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$B_1^0 = K_1 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial \alpha_1} \sigma_{11} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} + \right. \\ \left. + \left(2H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right) \sigma_{12} + \left(2H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{13} \right],$$

$$B_2^0 = K_2 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} - H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \sigma_{33} - H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} + \right. \\ \left. + \left(2H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{23} + \left(2H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right) \sigma_{21} \right],$$

$$B_3^0 = K_3 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial \alpha_3} \sigma_{33} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} + \right. \\ \left. + \left(2H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) \sigma_{31} + \left(2H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) \sigma_{32} \right],$$

Тут K_1, K_2, K_3 - проекції вектора масових сил.

Система геометричних рівнянь (2.4) і рівнянь руху (2.12) замикається фізичними співвідношеннями між складовими тензора напруги та складових тензора деформації і разом створюють повну систему диференціальних рівнянь, з якої визначаються всі невідомі функції.

2.2. Визначальні співвідношення теорій термо-псевдо-пружно-пластичності

Система геометричних рівнянь в швидкостях (2.4) і рівнянь руху (2.12) замикається фізичними співвідношеннями між швидкостями складових тензора напруги та швидкостями складових тензора деформації виду [119]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + b_{ij}, \quad (2.14)$$

$$b_{ij} = \delta_{ij} b_*, \quad b_* = -[K\alpha_T + \theta \frac{\partial(K\alpha_T)}{\partial T}] \dot{T}.$$

Тут a_{ijkl} – const для пружного випадку і функціонали процесу попереднього деформування у випадку наявності пластичних деформацій [241].

Виходячи з результатів першого розділу тензор повної деформації можна представити як суму пружної складової ε_{ij}^e , стрибка деформації при фазовому переході ε_{ij}^T , пластичної деформації ε_{ij}^p і деформації ε_{ij}^θ , яка викликана температурними змінами. Тоді можна записати:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta.$$

Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати так:

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_T(T) \frac{\partial f_\gamma(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

де функція $f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$ дає межі деякої поверхні в просторі напруження. При переході через границю цієї поверхні стрибком зростає деформація, обумовлена фазовими переходами. Вона задається так:

$$f_\gamma(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})} - \sigma_\gamma(T), \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,$$

де

$$\sigma_{\gamma}(T) = \begin{cases} \sigma_M(T), & S_{ij}\dot{S}_{ij} > 0; \\ \sigma_m(T), & S_{ij}\dot{S}_{ij} < 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо:

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{3\varepsilon_T(T)}{2\sigma_{\gamma}(T)} S_{ij}.$$

Пластичні деформації мають задовольняти співвідношенням теорії пластичності, яка застосовується. Проведемо узагальнення відомих фізичних співвідношень на випадок термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Це теорія течії, теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни та інші.

Розглянемо деякі конкретні приклади запису класичних фізичних співвідношень, які приводяться до виду (2.14).

2.2.1. Деформування матеріалів з майданчиком плинності

Ця частина параграфу присвячена дослідженню поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів з майданчиком плинності.

Пластична деформація на майданчику плинності розвивається за рахунок поширення по довжині зразка з конструкційного матеріалу смуг ковзання. Подібна ситуація має місце і для матеріалів, що володіють пам'яттю форми в процесі фазового переходу. При активному навантаженні у кожен момент часу має зсув уздовж однієї або декількох смуг, поки на їх поверхні не буде досягнута пластична деформація, що відповідає переходу до ділянки зміцнення. Далі утворюється нова смуга на деякій відстані від попередньої і пластичне зсув триває. У підсумку ми приходимо до моделі ідеальної пластичності для зразка в цілому, але при істотно неоднорідній деформації.

В обох випадках експерименти підтверджують на думку про необхідність перегляду класичного трактування ідеальної пластичності. При цьому інтегральна діаграма матеріалу для зразка відрізняється від діаграми

напруження - деформація в матеріальній точці, в якій на певному інтервалі деформування має місце нестійка поведінку матеріалу, пов'язана з переривчастою деформацією [162, 163].

Роботи присвячені аналізу різних уточнень і доповнень до класичних рівнянь ідеально-пластичного стану і застосуванню відповідних методик призводять до існування падаючого ділянки діаграми напруги-деформації матеріалу в точці. Це дозволяє провести аналогію між поведінкою при пластичній локалізації та розвантаженні [142, 238, 239].

Деформування на майданчику плинності має особливості. Для механіки пластичного стану має особливе значення наступна властивість прошарків ковзання або течії. Площини ковзання тонких прошарків, в яких матеріал деформується більше, ніж деінде в іншому місці, приблизно збігаються з двома з площин головних дотичних напружень. Кут, який складається шарами ковзання з віссю зразка, зазвичай при розтягуванні дещо більше 45° , а при стискуванні трохи менше, ніж 45° . Так як ці властивості прошарків ковзання існують також і при складному тривимірному розподілі напруження, то спостереження, які стосуються розташування цих прошарків, надають цінну допомогу в дослідженні напруженого стану при пластичних деформаціях.

Умови утворення ліній ковзання залежать від ряду важливих механічних чинників: форми зразка; зв'язків його з захопленнями (граничні умови); числа ступенів свободи руху захоплень випробувальної машини; ексцентриситету навантаження; жорсткості випробувальної машини (вираженої відношенням прирощення навантаження до відносного переміщення захоплень машини, зразок передбачається абсолютно жорстким); розмірів зерен матеріалу. Наприклад, відзначається, що дрібнозерниста нормалізована м'яка сталь дає різкий, а грубозерниста сталь - поступовий перехід від пружної до пластичної частин кривої напруження - деформація.

Пластичні деформації виникають в дуже тонкому шарі і вся робоча ділянка зменшується до розмірів товщини цього шару плинності, тобто до дуже малої величини, то пластичні деформації здійснюються при досить високих швидкостях зсуву.

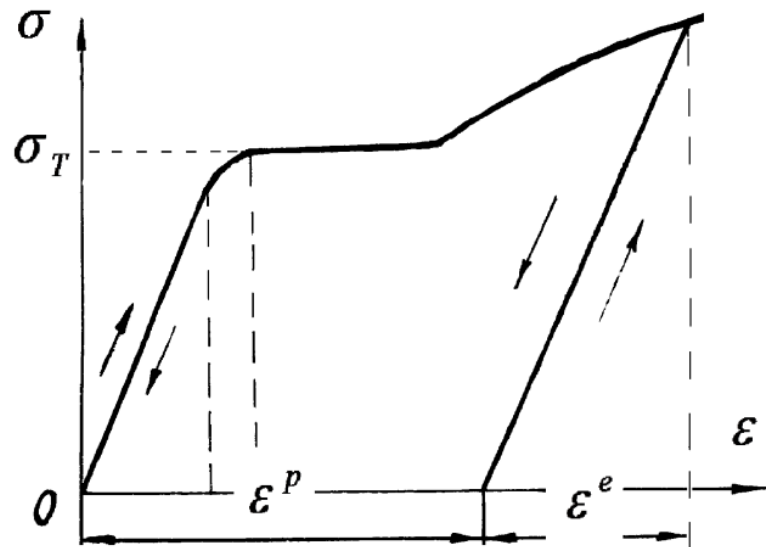


Рисунок 2.1. Діаграма конструкційного матеріалу з майданчиком плинності

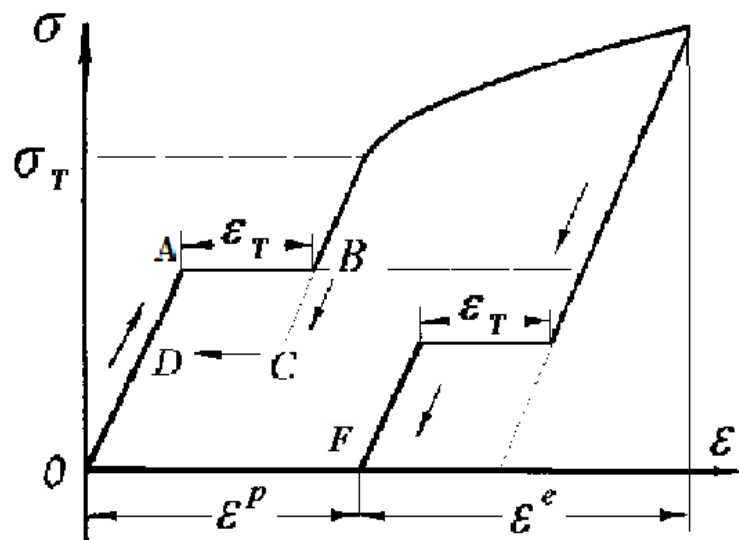


Рисунок 2.2. Діаграма псевдо-пружно пластичного сплаву

Незважаючи на те, що характер виникнення пластичних деформацій в плоских зразках, виготовлених з металів, що мають різко виражену межу плинності, помітно різниться для сталей різних видів, кольорових металів і сплавів, в яких проявляється псевдо-пружно пластичність, можна

сформулювати кілька узагальнюючих зауважень. У деяких зразків з кременистої сталі (що містить менше 0,02% вуглецю) або зразків з м'якої сталі прямокутного поперечного перерізу, з малим відношенням товщини до ширини перерізу, на межі плинності спостерігаються різко окреслені тонкі шари ковзання [238].

2.2.2. Пластичне деформування матеріалів при зміцненні

На рисунках 2.1 і 2.2 показано характерні графіки залежності σ від ε , які визначаються з експериментів. На рисунку 2.1 наведено типову діаграму для конструкційного матеріалу. На рисунку 2.2 показано діаграму, яка характерна для термо-псевдо-пружного матеріалу (ТППМ).

На кожній з наведених діаграм є початкова лінійна (пружна) ділянка OA . Майданчик плинності матеріалу та ділянка зміцнення. Межа плинності залежить від температури і визначається координатою точки A . Деякі результати наведено в Додатках.

Якщо при напруженні σ , яке відповідає точці C діаграми, зразок розвантажити, то частина деформації ε^e (пружна складова загальної деформації зразка зникне), а та деформація, яка залишається буде саме пластичною деформацією ε^p .

Таким чином, для термо-псевдо-пружного матеріалу деформацію в точці представимо у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, можливої пластичної деформації і деформації, викликаної температурними змінами.

На рисунку 2.1 показано і пружне розвантаження зразка по прямій CD , яка паралельна лінії OA . Таке припущення механізму розвантаження тільки у загальних рисах відображає дійсну картину деформації матеріалу при малих деформаціях. При великих деформаціях (10% і більше), розвантаження зразка буде нелінійним.

Розглянемо деякі конкретні приклади запису класичних фізичних співвідношень.

Теорія малих пружно-пластичних деформацій [57]. На підставі деформаційної теорії пластичності зазвичай записуються такі фізичні співвідношення [57, 118]

$$S_{ij} = 2G_s \mathcal{E}_{ij}, \quad \sigma = \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon,$$

де S_{ij} і \mathcal{E}_{ij} – відповідно девіатори тензорів напружень і деформацій, які визначаються наступним чином

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon.$$

Тут позначено

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

Змінний модуль діаграми зсуву G_s визначається так:

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu)}, \quad E_s = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}.$$

Поряд з цим модулем використовується і дотичний модуль

$$G_t = \frac{E_t}{2(1+\nu)}, \quad E_t = \frac{\dot{\sigma}_u}{\dot{\varepsilon}_u}.$$

Інтенсивності напружень і деформацій визначаються через відповідні девіатори наступним чином

$$\sigma_u = \left(\frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_u = \left(\frac{2}{3} \cdot \mathcal{E}_{ij} \cdot \mathcal{E}_{ij}\right)^{1/2}.$$

Для випадку, коли визначальні співвідношення деформаційної теорії представляються у вигляді (2.16) маємо

$$\begin{aligned}
a_{kkkk} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} + 4G_s \right) + \omega S_{kk} \cdot \mathcal{E}_{kk}, \quad a_{kkrs} = 2\omega S_{kk} \gamma_{rs}, \\
a_{kkn} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} - 2G_s \right) + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nn}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr}, \\
a_{kkn} &= \frac{1}{3} \left(\frac{E}{1-2\nu} - 2G_s \right) + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nn}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr}, \\
a_{knkn} &= 2G_s + 2\omega S_{kn} \cdot \gamma_{kn}, \quad a_{knrs} = 2\omega S_{kn} \gamma_{rs}, \\
b_{ij} &= 0, \quad \omega = 2 \cdot (E_t - E_s) / 3\varepsilon_u \sigma_u, \quad 2\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

З наведених вище формул можна отримати вираз для a_{ijkl} для випадку пружної поведінки матеріалу. Це можна зробити, якщо формально прирівняти $E_s = E_t = E$. Тоді з (2.15) знайдемо:

$$\begin{aligned}
a_{kkkk} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad a_{kkn} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\
a_{knkn} &= 2G, \quad a_{knrs} = a_{knrz} = a_{kkrs} = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

При числовому розв'язанні нестационарних задач з використанням деформаційної теорії пластичності необхідно заздалегідь знати експериментально отриману залежність між інтенсивністю напруження і інтенсивністю деформації.

Теорія течії. Для класичного варіанту теорії течії з ізотропним зміцненням можна отримати вирази коефіцієнтів a_{ijkl} , зробивши в (2.15) формальну заміну G_s на G . В результаті отримаємо такі коефіцієнти фізичних співвідношень:

$$\begin{aligned}
a_{kkkk} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{kk}, \quad a_{kkrs} = 2\omega S_{kk} \gamma_{rs}, \\
a_{kkn} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \omega S_{kk} \mathcal{E}_{nn}, \quad a_{knrr} = \omega S_{kn} \mathcal{E}_{rr}, \\
a_{knkn} &= 2G + 2\omega S_{kn} \gamma_{kn}, \quad a_{knrs} = 2\omega S_{kn} \gamma_{rs}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Тут також:

$$b_{ij} = 0, \omega = 2(E_t - E)/3\varepsilon_u \sigma_u.$$

Теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни [137]. В теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни розглядаються прості або близькі до них процеси деформування. Траєкторіями деформування, близькими до прямолінійним, називають ті траєкторії, які відхиляються від прямих ліній, що проходять через початок координат і точку на траєкторії, що відповідає початковій межі текучості, не більше, ніж на слід запізнювання векторних властивостей матеріалу (5 - 15 меж плинності за деформаціями) . В цьому випадку найменший радіус кривизни траєкторії деформування більше сліду запізнювання. Якщо ж відхилення від прямої лінії більше сліду запізнювання, а радіус кривизни траєкторії деформування менше його, то деформування відбувається по траєкторії малої кривизни. При цьому вектор напружень спрямований по дотичній до траєкторії непружних деформацій.

Співвідношення теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни в швидкостях напружень і деформацій, придатних для дослідження обох процесів, отримано в роботі [137]. Вони, шляхом диференціювання за часом, приводяться до вигляду (2.14), де для коефіцієнтів a_{ijkl} мають місце формули (2.16), а для b_{ij} отримано наступний вираз:

$$b_{ij} = b_{ij}^T - \sqrt{2G} \frac{S_{ij}}{\sigma_u} (\dot{e}_{ij}^{(n)} \cdot \dot{e}_{ij}^{(n)})^{1/2}, \quad k \neq n, \quad r \neq S, \quad (2.18)$$

$$b_{ij}^T = - \left[K \cdot \alpha_r + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_r) \right] \delta_{ij} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Величини G, ν, α_r в загальному випадку передбачаються залежними від температури. Вирази для компонентів тензора накопиченої за весь час непружної деформації $e_{ij}^{(n)}$ мають різний вигляд в залежності від варіанту співвідношень пластичності (співвідношення теорії простих процесів навантаження або співвідношення процесів малої кривизни) [241].

Теорія Чернякова-Кадашевича-Новожилова [58, 194]. При аналізі нестационарних процесів при деформуванні за межею пружності, як правило необхідно враховувати те, що визначальні співвідношення залежать від швидкості деформації. Це, зокрема пояснюється тим, що теорії пластичності не описують таке явище, як поширення хвиль збільшень напружень зі швидкістю пружних хвиль.

У загальному випадку такі визначальні співвідношення можна представити також у вигляді (2.14) причому коефіцієнти a_{ijkl} будуть постійними, а b_{ij} є величинами, залежними від компонент тензора напружень, деформацій і, можливо, інших параметрів. У разі ізотропного матеріалу для a_{ijkl} мають місце формули (2.16).

Для приклада наведемо один з варіантів теорії Чернякова-Кадашевича-Новожилова [58]. У позначеннях, прийнятих вище, закон течії має вигляд:

$$S_{ij} = \tau_s a(\lambda) \cdot \frac{d \varepsilon_{ij}^p}{d\lambda}, \quad (2.19)$$

де τ_s – локальна межа плинності при зсуві, а:

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2}.$$

В результаті для a_{ijkl} отримаємо формули (2.19), а b_{ij} визначаються так :

$$b_{ij} = -\frac{2G}{\tau_s} \cdot \frac{\lambda}{a(\lambda)} \cdot S_{ij}, a(\lambda) = \frac{\sigma_u}{G_s}, G_s = \sqrt{3} \cdot \tau_s.$$

Функція $a(\lambda)$ визначається на підставі експериментальних даних і характеризує собою вплив швидкості пластичного деформування на межу текучості.

В результаті для a_{ijkl} отримаємо формули:

$$a_{kkkk} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, a_{kknn} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, a_{knkn} = 2G, a_{knrs} = a_{knrz} = a_{kkrs} = 0,$$

а b_{ij} визначаються так $b_{ij} = -\frac{2G}{\tau_s} \cdot \frac{\lambda}{a(\lambda)} \cdot S_{ij}, a(\lambda) = \frac{\sigma_u}{G_s}, G_s = \sqrt{3} \cdot \tau_s.$

Функція $a(\lambda)$ визначається на підставі експериментальних даних і характеризує собою вплив швидкості пластичного деформування на межу текучості.

2.3. Нелінійна феноменологічна модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

На даний час відомий цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів, зокрема сплавів з пам'яттю форми. Більшість з них будуються на підставі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосереднє описати експериментальні дані, отримані на різних макрозразках при простому і складному навантаженні. Однак, як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку може бути відмінною від поведінки зразка в цілому. У цьому розділі формулюється нелінійна феноменологічна модель, яка описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу в точці. При цьому будемо враховувати не тільки температуру навколишнього середовища, але і тепло, що вивільняється в точці при фазовому переході. Таке трактування дозволяє з єдиної позиції сформулювати феноменологічну модель і описати цілий ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження, включаючи циклічне температурне і силовий вплив. Підтверджено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

В задачах термомеханіки неоднорідних матеріалів, в яких мають

місце фазові переходи, для побудови фізичних співвідношень між напруженням та деформацією необхідно додатково знати положення в тілі фронту фазового переходу $s = s(\theta_i, t), i = 1, 2, 3$ і допоміжну внутрішню функцію кінетичного відгуку $\Phi(\dot{s}, f) = 0$ [144]. В роботах [102-104] така допоміжна задача була розглянута для одновимірного тіла (стриження), коли функція кінетичного відгуку задавалась явно $\dot{s} = \Phi(f)$ у вигляді ламаної лінії, а матеріал підпорядковувався трилінійній двофазній моделі.

Обробка експериментальних даних роботи R. Abeyaratne, J.K. Knowles [144] дозволила побудувати таблиці і діаграми для різних значень температури. Діаграми побудовано для фіксованих значень температури без урахування тепла яке виділяється в процесі фазового перетворення в матеріальній точці.

Для конкретизації фізичних співвідношень сформульована нова уточнена нелінійна феноменологічна модель, яка більш точно в порівнянні з відомими моделями описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу в точці.

Узагальнена залежність між напруженням σ і деформацією ε , в матеріальній точці моделюється кривою що зображена на рисунку 2.3.

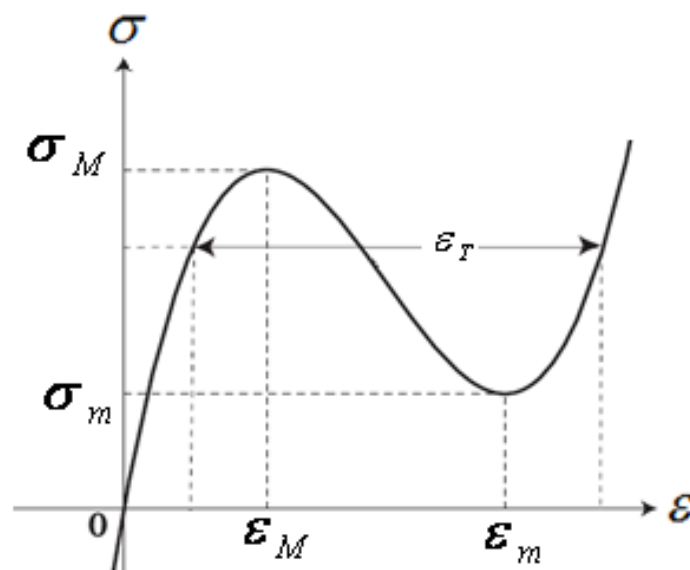


Рисунок 2.3. Узагальнена залежність між напруженням і деформацією в точці

При побудові такої діаграми треба задати точки $(\sigma_M, \varepsilon_M)$ і $(\sigma_m, \varepsilon_m)$, функції $\varepsilon = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$. Змінна деформація фазового перетворення визначається так:

$$\varepsilon_T = \psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma).$$

Рівняння першої ділянки діаграми матеріалу в точці для $\varepsilon \in [0; \varepsilon_M], \sigma \in [0; \sigma_M]$ має вигляд

$$\varepsilon(\sigma) = \psi_1(\sigma).$$

Рівняння діаграми на ділянці $\varepsilon \in [\varepsilon_m; \infty), \sigma \in [\sigma_m; \infty)$ має вигляд

$$\varepsilon(\sigma) = \psi_3(\sigma).$$

Зазначимо, що у порівнянні з перебігом деформування на першій та третій ділянках, час протікання процесу на другій ділянці $\varepsilon(\sigma) = \psi_2(\sigma)$ значно менший. Тому традиційно вважається, що фазове перетворення протікає миттєво.

Функції $\psi_i(\sigma)$ діаграми мають задовольняти наступним вимогам.

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 0, \psi_1(\sigma_M) = \varepsilon_M, \psi_1'(\sigma) > 0, \\ \psi_2(\sigma_M) &= \varepsilon_M, \psi_2(\sigma_m) = \varepsilon_m, \psi_2'(\sigma) < 0, \\ \psi_3(\sigma_m) &= \varepsilon_m, \psi_3'(\sigma) > 0. \end{aligned}$$

Для конкретизації діаграми напруження – деформація матеріалу зразка додатково треба знати положення в тілі фронту фазового переходу. Ця проблема вирішується шляхом введення поняття рушійної сили f . Вона визначається так

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varepsilon_T(\sigma) d\sigma.$$

Тут $\sigma_0 = (\sigma_M + \sigma_m) / 2$ – напруження Максвела. Оскільки напруження в стані рівноваги в змішаній фазі повинно знаходитися між σ_m і σ_M , то діапазон можливих значень рушійної сили буде таким $f \in [f_m, f_M]$.

Вираз для рушійної сили можна представити і так:

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma)] d\sigma$$

На рисунку 2.4 показана схема розповсюдження в зразку фронту фазового переходу. Тут через s позначено границю розділу фаз.

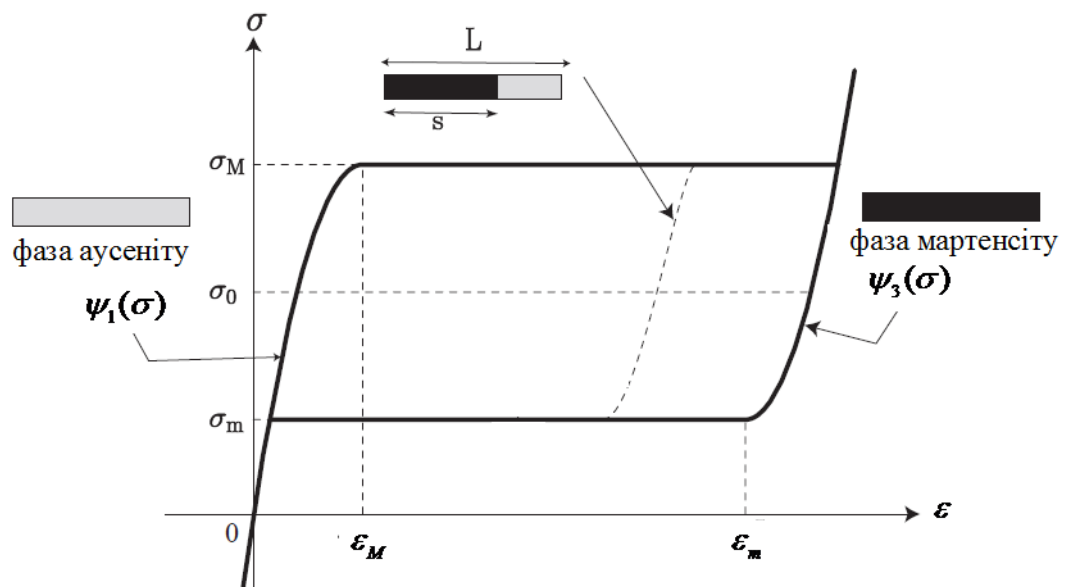


Рисунок 2.4. Крива напруження-деформація для двофазного матеріалу [144]

2.3.1. Обчислення дотичного модуля інтегральної діаграми матеріалу

Поле переміщень в зразку повинно бути неперервним:

$$u(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma)x, & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma)x + \varepsilon_T(\sigma)s, & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Відповідний кусково-однорідний розподіл деформації дається формулою:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma), & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma), & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Залежність між деформацією $\varepsilon \equiv \delta/L$ (δ збільшення довжини стрижня) і напруженням визначається виразом:

$$\varepsilon = \psi_3(\sigma)s/L + \psi_1(\sigma)(1 - s/L). \quad (2.20)$$

Взагалі це рівняння дає змогу визначити сімейство $\varepsilon(\sigma, s)$. Якщо деформацію задано, то можна знайти напруження σ , розв'язуючи відповідно до наведених вище умов крайову задачу нелінійної пружності. При цьому з виразу (2.20) не можна одразу визначити σ оскільки невідомо положення границі розділу фаз.

Для однозначного розв'язання цієї задачі необхідно мати допоміжну інформацію окрім рівняння (2.20), фізичних співвідношень $\varepsilon = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$, граничних умов і вимог до гладкості. Перераховані рівняння достатні при відсутності нестійких ділянок діаграми, для звичайних матеріалів, для яких напруження монотонно зростає зі збільшенням деформації.

Порушення однозначності виникає в (2.20), якщо задано напруження σ , а не деформацію ε . В цьому випадку проблема вирішується за допомогою введеного поняття рушійної сили f .

Розглянемо допоміжну задачу, в якій треба визначити функції $\sigma = \sigma(t), s = s(t), \varepsilon = \varepsilon(t)$.

Похідна за часом від залежності (2.20) дає наступне нелінійне рівняння:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_T(\sigma)\dot{s}/L + (\varepsilon'_T(\sigma)s/L + \psi'_1(\sigma))\dot{\sigma}. \quad (2.21)$$

Тут точкою позначено похідні за часом, а штрихом похідні по напруженню σ .

В результаті з цієї рівності визначається дотичний модуль діаграми зразка. В загальному випадку:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{L\dot{\varepsilon} - \varepsilon_T(\sigma)\dot{s}}{L\dot{\varepsilon}[\varepsilon'_T(\sigma)s/L + \psi'_1(\sigma)]}. \quad (2.22)$$

При обчисленні дотичного модуля треба попередньо визначити функції $\sigma = \sigma(t), s = s(t)$. Для розв'язання цієї задачі до рівняння (2.21)

слід додати і визначити функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$; $F = f - f_r$. або $\Phi(\dot{s}, f) = 0$.

Розглянемо випадок, коли функція кінетичного відгуку має вигляд лінії, яка складається з двох частин (рисунок 2.5).

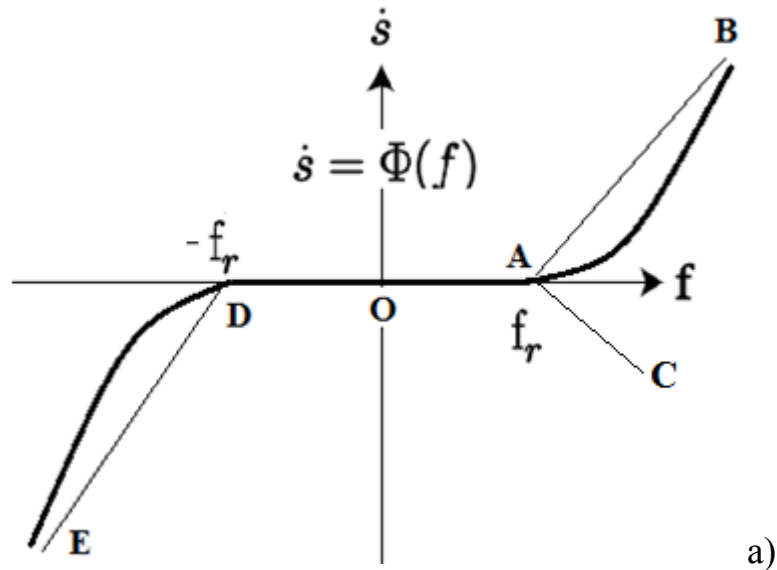


Рисунок 2.5. Схематичний графік нелінійної функції кінетичного відгуку

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0$; $s \equiv 0$. В силу цього рівняння (2.21) набуде вигляд:

$$\dot{\varepsilon} = \psi'_1(\sigma)\dot{\sigma}.$$

Звідси отримаємо формулу для обчислення дотичного модуля на першій ділянці діаграми:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\psi'_1(\sigma)}.$$

На другій ділянці (після фазового переходу) для визначення положення в тілі фронту фазового переходу і функції кінетичного відгуку треба розв'язати систему двох диференціальних рівнянь. Першим рівнянням буде (2.20) або (2.22), а друге рівняння це нелінійна функція кінетичного

відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ або $F(\dot{s}, f) = 0$. Після розв'язання цієї системи за допомогою формули (2.22) обчислюється дотичний модуль.

Розглянемо приклади. Це кусочно-лінійна функція кінетичного відгуку і більш загальні випадки з нелінійною другою ланкою. Зазначимо, що ці лінії можна задаватись як за допомогою таблиці, так і аналітично.

2.3.2. Алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для лінійної функції кінетичного відгуку

Для випадку трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності результати отримані в роботі [242]. Система інтегро-диференціальних рівнянь мала вигляд:

$$s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t (f - f_r) d\tau,$$

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_T(\sigma)}{\varepsilon_T'(\sigma)s + \psi_1'(\sigma)L} [\dot{\varepsilon} - \varepsilon_T(\sigma)(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r))]. \quad (2.23)$$

Для першої ділянки функції кінетичного відгуку була отримана формула:

$$f(t) = k \left(\frac{\mu_1 \dot{\delta}}{L} \right)^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{b\mu_1 \dot{\delta}}{L} \cdot t,$$

$$t \in [0; t_r], f(0) = 0, f(t_r) = f_r < f_M. \quad (2.24)$$

На другій ділянці означену систему рівнянь було приведено до вигляду:

$$\dot{F} = \Phi(F, s), s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t F(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(F, s) = \frac{\varepsilon_T(F)}{ks + L/\mu_1} [\dot{\delta} - \varepsilon_T(F)(\dot{s}_0 + \omega F)],$$

$$\varepsilon_T(F) = \sqrt{c_1 + 2kF} \quad (2.25)$$

і розв'язано за допомогою різницевого методу при таких умовах:

$$s(t_r) = 0, \quad F(t_r) = 0.$$

Для цього було введено сітка за часом:

$$\begin{aligned} t_p &= t_{p-1} + \tau, \quad p = 1; 2; 3; \dots, \quad t_0 = t_r, \\ s^p &= s(t_p), \quad F^p = F(t_p), \\ \Phi^p &= \Phi(F^p, s^p), \quad \varepsilon_T^p = \varepsilon_T(F^p). \end{aligned} \quad (2.25)$$

В результаті диференціальне рівняння та інтеграл (2.25) було замінено еквівалентними різницеvim рівнянням і сумою і отримано розрахункові формули, для рушійної сили F :

$$\begin{aligned} F^{p+1} &= F^p + \tau \cdot \Phi(F^p, s^p), \quad s^p = p \cdot \dot{s}_0 \cdot \tau + \omega \cdot J^p, \\ J^p &= J^{p-1} + \frac{\tau}{2} (F^{p-1} + F^p), \quad J^0 = 0, \quad F^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При числовому розв'язанні системи (2.26) за допомогою наведених різницеvих формул спочатку задаються параметри моделі $L, \omega, \dot{s}_0, \dot{\delta}, \varepsilon_M, \sigma_M, \varepsilon_m, \sigma_m, \mu_1, \mu_3, \tau$. На основі цього обчислюються допоміжні величини $k, k_0, k_1, b, \sigma_0, c, \mu_2$, а потім визначаються s^p, f^p [102-104].

Після обчислення рушійної сили по заданому закону для швидкості деформації $\dot{\varepsilon}(t^p)$ визначається дотичний модуль $\frac{d\sigma(t^p)}{d\varepsilon}$ за допомогою формули (2.22) і покроково будується інтегральна діаграма для зразка.

2.3.3. Алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для степеневі функції кінетичного відгуку

Для степеневі функції кінетичного відгуку (друга ланка):

$$\dot{s} = \omega(f - f_r)^n.$$

На ділянці після фазового переходу рівняння (2.21) прийме вигляд:

$$\dot{\varepsilon}L = \omega \varepsilon_T(\sigma)(f - f_r)^n + \frac{(\varepsilon_T'(\sigma)s + \psi_1'(\sigma)L)}{\varepsilon_T} \dot{f}.$$

Після інтегрування за часом функції кінетичного відгуку отримаємо наступну систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$s = \omega \int_{t_r}^t (f - f_r)^n d\tau,$$

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_T(\sigma)}{\varepsilon'_T(\sigma)s + \psi'_1(\sigma)L} [\dot{\varepsilon}L - \varepsilon_T(\sigma)(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)^n)]. \quad (2.27)$$

Зазначимо, що при $n=1$ система (2.27) співпадає з (2.23). Тому на першій ділянці функції кінетичного відгуку для рушійної сили справедлива формула (2.24) при $s_0 = 0$.

На другій ланці функції кінетичного відгуку систему (2.27) приведемо до вигляду:

$$\dot{F} = \Phi(F, s), \quad s = \omega \int_{t_r}^t F^n(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(F, s) = \frac{\varepsilon_T(\sigma)}{\varepsilon'_T(\sigma)s + \psi'_1(\sigma)L} [\dot{\varepsilon}L - \omega\varepsilon_T(\sigma)F^n].$$

Розв'язуємо цю систему за допомогою різницевого методу при умовах:

$$s(t_r) = 0, \quad F(t_r) = 0.$$

Для цього введемо сітку за часом (2.25), диференціальне рівняння та інтеграл замінюємо еквівалентними їм різницеvim рівнянням і інтегральною сумою. В результаті отримаємо розрахункові формули для рушійної сили F :

$$F^{p+1} = F^p + \tau \cdot \Phi(F^p, s^p), \quad s^p = \omega \cdot J^p,$$

$$J^p = J^{p-1} + \frac{\tau}{2} (F^{p-1} + F^p), \quad J^0 = 0, \quad F^0 = 0. \quad (2.28)$$

При числовому розв'язанні системи за допомогою наведених різницевих формул спочатку задаються параметри моделі $L, \omega, \varepsilon_M, \sigma_M, \varepsilon_m, \sigma_m, \tau$. Потім по заданому закону для швидкості деформації $\varepsilon(t^p)$ визначаються F^p, s^p для відповідних моментів часу.

Після обчислення рушійної сили по заданому закону для швидкості

деформації $\dot{\varepsilon}(t^p)$ визначається дотичний модуль $\frac{d\sigma(t^p)}{d\varepsilon}$ за допомогою формули (2.22) і покроково будується інтегральна діаграма для зразка.

2.3.4. Аналітично-числовий алгоритм розв'язання інтегро-диференціальної системи для асимптотичної другої ланки функції кінетичного відгуку

В цьому пункті параграфу розглянемо випадок, коли друга ланка функції кінетичного відгуку асимптотично наближається до ланки АВ.

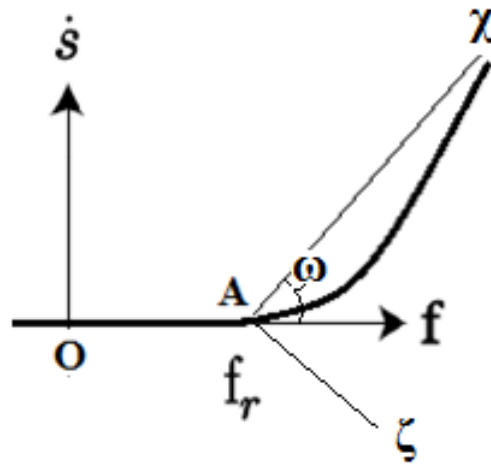


Рисунок 2.6. Локальна система координат

Уведемо в розгляд допоміжну локальну ортогональну систему координат $A\chi\zeta$ (рисунок 2.6).

В цій системі координат друга ланка функції кінетичного відгуку матиме вигляд $\zeta = (a\chi + b)\exp(-k\chi)$, для якої ланка АВ буде асимптотою.

Невідомі a, b визначимо з умов:

- 1) $\chi = 0, \zeta = 0$;
- 2) $\chi = 0, d\zeta/d\chi = \operatorname{tg}(\omega)$.

Звідси отримаємо $b = 0, a = \operatorname{tg}(\omega)$. Тоді функцію кінетичного відгуку в

локальній системі координат можна записати так $\zeta = tg(\omega)\chi \exp(-k\chi)$.

Перейдемо до основної системи координат $O f \dot{s}$ за допомогою формул:

$$\begin{aligned}\chi &= (f - f_r) \cos(\omega) + \dot{s} \sin(\omega), \\ \zeta &= (f - f_r) \sin(\omega) - \dot{s} \cos(\omega).\end{aligned}$$

В результаті другу ланку функції кінетичного відгуку можна привести до такого нелінійного вигляду:

$$\dot{s} - (1 - \exp(-k\chi)) \left(\frac{f - f_r}{2} \sin(2\omega) + \dot{s} \sin^2(\omega) \right) = 0. \quad (2.29)$$

Система (2.29), (2.21) розв'язується різницевим методом із застосуванням ітераційної схеми, що збігається.

Параметрами цієї нелінійної моделі є кут нахилу ω асимптоти АВ до осі f та величина k . Вони визначаються шляхом порівняння отриманої при моделюванні інтегральної діаграми зразка з відомою експериментальною діаграмою.

Результати розрахунків по обчисленню дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом для інтегральної діаграми матеріалу наведено нижче на рисунку 2.7.

Перша ОА ділянка інтегральної діаграми матеріалу відповідає пружній поведінці. Третя ВС характеризує зміцнення матеріалу. Між ними міститься ділянка, яка нагадує поведінку ідеально пластичного матеріалу. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні CDEF, але при визначених температурах.

Числове або аналітично-числове розв'язання цієї системи дозволяє побудувати більш точний алгоритм розв'язання загальної задачі по описанню діаграми матеріалу зразка вцілому.

Типовий результат наведено на рисунку 2.7.

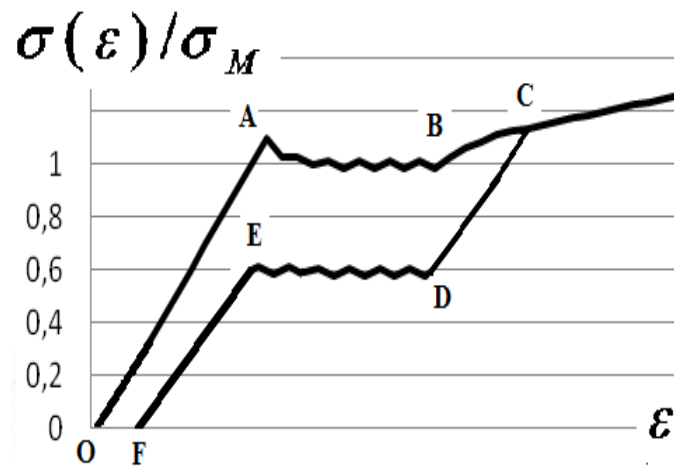


Рисунок 2.7. Інтегральна діаграма матеріалу

Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Ділянка розвантаження на інтегральній діаграмі матеріалу будується за алгоритмами, які аналогічні описаним. При цьому дотичний модуль діаграми будується з використанням рушійної сили при зворотному фазовому перетворенні.

Уточнена феноменологічна модель поведінки матеріалу в матеріальній точці будується на основі наведених результатів. Вона відрізняється від попередньої моделі наявністю зуба плинності на межі пружної ділянки при активному навантаженні і плавним переходом при розвантаженні. Фактично діаграма з зубом плинності є проекцією траєкторії, яка йде по миттєвій термо-механічній поверхні (МТМП). Таким чином, маючи миттєву термо-механічну поверхню та закон, за яким змінюється температура в точці зразка, можна провести уточнення діаграми матеріалу.

2.4. Метод числового аналізу поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів при великих деформаціях

Повна система рівнянь (2.4), (2.12), (2.14) приводиться до вигляду (1.1). В ній через \vec{W} позначено вектор, компонентами якого будуть швидкості переміщень v_i , складові тензорів напружень і деформацій $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Виключимо з цієї системи швидкості деформацій. Після підстановки (2.4) в (2.14) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = & \left\{ a_{ij11}(1 + e_{11}) + a_{ij12} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij13} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \\
& + \left\{ a_{ij12}(1 + e_{11}) + a_{ij22} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} + \\
& + \left\{ a_{ij13}(1 + e_{11}) + a_{ij23} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij33} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{H_3 \partial \alpha_3} + \\
& + \left\{ a_{ij11} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij12}(1 + e_{22}) + a_{ij13} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \\
& + \left\{ a_{ij22}(1 + e_{22}) + a_{ij12} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \\
& + \left\{ a_{ij33} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{ij13} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij23}(1 + e_{22}) \right\} \frac{\partial v_2}{H_3 \partial \alpha_3} + \\
& + \left\{ a_{ij11} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij12} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij13}(1 + e_{33}) \right\} \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} + \\
& + \left\{ a_{ij22} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij12} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij23}(1 + e_{33}) \right\} \frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} + \\
& + \left\{ a_{ij33}(1 + e_{33}) + a_{ij13} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \right\} \frac{\partial v_3}{H_3 \partial \alpha_3} + d_{ij},
\end{aligned} \tag{2.30}$$

де

$$d_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \cdot c_{kl} + b_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

В створеній системі (2.12), (2.31) основними невідомими будуть швидкості переміщень і складові тензора напружень.

Повну систему рівнянь в матричному вигляді запишемо так:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \vec{B}^N. \quad (2.31)$$

З неї визначаються **основні** невідомі функції

$$w_1 = v_1; w_2 = v_2; w_3 = v_3; w_4 = \sigma_{11}; w_5 = \sigma_{22}; w_6 = \sigma_{33}; w_7 = \sigma_{12}; w_8 = \sigma_{13}; w_9 = \sigma_{23}$$

при визначених початкових і граничних умовах.

Вектор \vec{B}^N в правій частині (2.31) має такі компоненти:

$$\begin{aligned} B_1^N &= B_1; B_2^N = B_2; B_3^N = B_3; \\ B_4^N &= d_{11}; B_5^N = d_{22}; B_6^N = d_{33}; \\ B_7^N &= d_{12}; B_8^N = d_{13}; B_9^N = d_{23}. \end{aligned}$$

Тут:

$$\begin{aligned} B_j &= B_j^0 + \frac{1}{H_j} \left(\frac{\partial \sigma_{jj}^0}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_j} \sigma_{jj}^0 \right) \frac{\partial (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j \partial \alpha_j} + \\ &+ \sigma_{jj}^0 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j^2 \partial \alpha_j^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^0 &= K_1 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial \alpha_1} \sigma_{11} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} + \right. \\ &+ \left. \left(2H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right) \sigma_{12} + \left(2H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{13} \right], \end{aligned}$$

$$B_2^0 = K_2 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} - H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \sigma_{33} - H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} + \right. \\ \left. + \left(2H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{23} + \left(2H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right) \sigma_{21} \right],$$

$$B_3^0 = K_3 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial \alpha_3} \sigma_{33} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} + \right. \\ \left. + \left(2H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) \sigma_{31} + \left(2H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) \sigma_{32} \right],$$

Матриці $A_i^{(N)}$ розміром 9x9 мають наступну структуру:

$$A_i^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{71} & \alpha_{72} & \alpha_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{81} & \alpha_{82} & \alpha_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{91} & \alpha_{92} & \alpha_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елементи α_{nm} матриць A_i^N в геометрично нелінійній постановці містять

ω_i, e_{ij} і мають вигляд:

$$\begin{aligned}\alpha_{41} = & \left\{ a_{1111}(1+e_{11}) + a_{1112}\left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3\right) + a_{1113}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1112}(1+e_{11}) + a_{1122}\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right) + a_{1123}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{1113}(1+e_{11}) + a_{1123}\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right) + a_{1133}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{42} = & \left\{ a_{1111}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{1112}(1+e_{22}) + a_{1113}\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1112}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{1122}(1+e_{22}) + a_{1123}\left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1\right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{1133}\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right) + a_{1113}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{1123}(1+e_{22}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{43} = & \left\{ a_{1111}\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right) + a_{1112}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{1113}(1+e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1122}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{1112}\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right) + a_{1123}(1+e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{1113}\left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2\right) + a_{1123}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{1133}(1+e_{33}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{51} = & \left\{ a_{2211}(1+e_{11}) + a_{2212}\left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3\right) + a_{2213}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{2212}(1+e_{11}) + a_{2222}\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right) + a_{2223}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{2213}(1+e_{11}) + a_{2223}\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right) + a_{2233}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{52} = & \left\{ a_{2211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2212} (1 + e_{22}) + a_{2213} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{2212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2222} (1 + e_{22}) + a_{2223} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{2233} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{2213} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2223} (1 + e_{22}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{53} = & \left\{ a_{2211} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2212} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2213} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{2222} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2212} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2223} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{2213} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2223} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2233} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{61} = & \left\{ a_{3311} (1 + e_{11}) + a_{3312} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{3313} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{3312} (1 + e_{11}) + a_{3322} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{3323} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{3313} (1 + e_{11}) + a_{3323} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{3333} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{62} = & \left\{ a_{3311} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{3312} (1 + e_{22}) + a_{3313} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{3312} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{3322} (1 + e_{22}) + a_{3323} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{3333} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{3313} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{3323} (1 + e_{22}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{63} = & \left\{ a_{3311} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{3312} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{3313} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{3322} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{3312} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{3323} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{3313} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{3323} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{3333} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{71} = & \left\{ a_{1211} (1 + e_{11}) + a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1213} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1212} (1 + e_{11}) + a_{1222} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1223} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & \left\{ a_{1213} (1 + e_{11}) + a_{1223} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1233} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{72} = & \left\{ a_{1211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1212} (1 + e_{22}) + a_{1213} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1222} (1 + e_{22}) + a_{1223} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{1233} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{1213} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1223} (1 + e_{22}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{73} = & \left\{ a_{1211} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1212} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1213} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{1222} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1212} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1223} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{1213} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1223} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1233} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{81} &= \left\{ a_{1311}(1 + e_{11}) + a_{1312} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1313} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i1} + \\
&+ \left\{ a_{1312}(1 + e_{11}) + a_{1322} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1323} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i2} + \\
&+ \left\{ a_{1313}(1 + e_{11}) + a_{1323} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{1333} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i3}; \\
\alpha_{82} &= \left\{ a_{1311} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1312}(1 + e_{22}) + a_{1313} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i1} + \\
&+ \left\{ a_{1312} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1322}(1 + e_{22}) + a_{1323} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i2} + \\
&+ \left\{ a_{1333} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{1313} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1323}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i3}; \\
\alpha_{83} &= \left\{ a_{1311} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1312} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1313}(1 + e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\
&+ \left\{ a_{1322} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1312} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1323}(1 + e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\
&+ \left\{ a_{1313} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{1323} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{1333}(1 + e_{33}) \right\} \delta_{i3}; \\
\alpha_{91} &= \left\{ a_{2311}(1 + e_{11}) + a_{2312} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{2313} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i1} + \\
&+ \left\{ a_{2312}(1 + e_{11}) + a_{2322} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{2323} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i2} + \\
&+ \left\{ a_{2313}(1 + e_{11}) + a_{2323} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{2333} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \delta_{i3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{92} = & \left\{ a_{2311} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2312} (1 + e_{22}) + a_{2313} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{2312} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2322} (1 + e_{22}) + a_{2323} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{2333} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) + a_{2313} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2323} (1 + e_{22}) \right\} \delta_{i3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{93} = & \left\{ a_{2311} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2312} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2313} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i1} + \\ & + \left\{ a_{2322} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2312} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2323} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i2} + \\ & + \left\{ a_{2313} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{2323} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{2333} (1 + e_{33}) \right\} \delta_{i3}; \end{aligned}$$

Зазначимо, що після обчислення основних невідомих величин незалежно визначаються переміщення шляхом інтегрування за часом відповідних швидкостей переміщень v_i і складові тензора деформацій за допомогою інтегрування рівнянь (2.4).

Рівняння (2.22) розв'язуються при визначених початкових і граничних умовах. Початкові умови задаються при $t = 0$ для усіх швидкостей переміщень, складових тензорів напруження та деформації.

На частині поверхні тіла, де задано поверхневі сили, компоненти тензора напруження задовольняють трьом умовам:

$$\sigma_{in}(\theta_k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

де n_j - направляючі косінуси зовнішньої нормали до поверхні тіла. На іншій частині поверхні, де задано швидкості зміщення, виконуються умови:

$$v_i = V_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t).$$

Існують і інші мішані умови, які можуть формулюватися в конкретних задачах

В геометрично лінійному варіанті повна система приводиться також до вигляду схожому на (2.31):

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i^L \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \vec{B}^L. \quad (2.32)$$

Тут

$$A_i^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} \\ \alpha_{41}^0 & \alpha_{42}^0 & \alpha_{43}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51}^0 & \alpha_{52}^0 & \alpha_{53}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{61}^0 & \alpha_{62}^0 & \alpha_{63}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{71}^0 & \alpha_{72}^0 & \alpha_{73}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{81}^0 & \alpha_{82}^0 & \alpha_{83}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{91}^0 & \alpha_{92}^0 & \alpha_{93}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де:

$$\alpha_{41}^0 = a_{1111} \delta_{i1} + a_{1112} \delta_{i2} + a_{1113} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{42}^0 = a_{1112} \delta_{i1} + a_{1122} \delta_{i2} + a_{1123} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{43}^0 = a_{1113} \delta_{i1} + a_{1123} \delta_{i2} + a_{1133} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{51}^0 = a_{2211} \delta_{i1} + a_{2212} \delta_{i2} + a_{2213} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{52}^0 = a_{2212} \delta_{i1} + a_{2222} \delta_{i2} + a_{2223} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{53}^0 = a_{2213} \delta_{i1} + a_{2223} \delta_{i2} + a_{2233} \delta_{i3};$$

$$\alpha_{61}^0 = a_{3311}\delta_{i1} + a_{3312}\delta_{i2} + a_{3313}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{62}^0 = a_{3312}\delta_{i1} + a_{3322}\delta_{i2} + a_{3323}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{63}^0 = a_{3313}\delta_{i1} + a_{3323}\delta_{i2} + a_{3333}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{71}^0 = a_{1211}\delta_{i1} + a_{1212}\delta_{i2} + a_{1213}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{72}^0 = a_{1212}\delta_{i1} + a_{1222}\delta_{i2} + a_{1223}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{73}^0 = a_{1213}\delta_{i1} + a_{1223}\delta_{i2} + a_{1233}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{81}^0 = a_{1311}\delta_{i1} + a_{1312}\delta_{i2} + a_{1313}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{82}^0 = a_{1312}\delta_{i1} + a_{1322}\delta_{i2} + a_{1323}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{83}^0 = a_{1313}\delta_{i1} + a_{1323}\delta_{i2} + a_{1333}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{91}^0 = a_{2311}\delta_{i1} + a_{2312}\delta_{i2} + a_{2313}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{92}^0 = a_{2312}\delta_{i1} + a_{2322}\delta_{i2} + a_{2223}\delta_{i3};$$

$$\alpha_{93}^0 = a_{2313}\delta_{i1} + a_{2323}\delta_{i2} + a_{2333}\delta_{i3}.$$

Вектор \vec{B}^L в правій частині (2.32) має такі компоненти, як і в (2.31), але без нелінійних складових :

$$B_1^L = B_1^0; B_2^L = B_2^0; B_3^L = B_3^0,$$

$$B_4^L = d_{11}^0; B_5^L = d_{22}^0; B_6^L = d_{33}^0,$$

$$B_7^L = d_{12}^0; B_8^L = d_{13}^0; B_9^L = d_{23}^0,$$

де:

$$d_{ij}^0 = \frac{1}{2} a_{ijkl} \cdot c_{kl}^0 + b_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

2.4.1. Узагальнення класичного методу покомпонентного розщеплення на випадок геометрично нелінійної постановки

Класична схема методу покомпонентного розщеплення векторного рівняння (2.31) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\
 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\
 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= A_3^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3}, t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \\
 \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Звідки наближено отримують різницеві рівняння:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau} (\vec{W}^{p+1/3} - \vec{W}^p) &= \alpha \Lambda_1 \vec{W}^{p+1/3} + \beta \Lambda_1 \vec{W}^p + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \\
 \frac{1}{\tau} (\vec{W}^{p+2/3} - \vec{W}^{p+1/3}) &= \alpha \Lambda_2 \vec{W}^{p+2/3} + \beta \Lambda_2 \vec{W}^{p+1/3} + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \\
 \frac{1}{\tau} (\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+2/3}) &= \alpha \Lambda_3 \vec{W}^{p+1} + \beta \Lambda_3 \vec{W}^{p+2/3} + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3},
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

де $\alpha + \beta = 1$ і оператори по координатах $\Lambda_n \vec{W}$ задаються тотожністю:

$$\Lambda_k \vec{W} \equiv \frac{A_k^N}{h_k} \cdot \lambda_k(\vec{W}), k = 1, 2, 3.$$

Тут $\lambda_k(\dots)$ – диференціальний оператор, h_k – кроки інтегрування за координатами.

Перші похідні по координатам в означених різницевих схемах доцільно апроксимувати за допомогою формул (1.7) наведених в першому розділі.

Різницеві рівняння (2.34) зводяться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно основних невідомих на повному і допоміжних кроках інтегрування за часом

$$\begin{aligned}
(E - \tau\alpha\Lambda_1)\vec{W}^{p+1/3} &= \vec{N}^p, \\
(E - \tau\alpha\Lambda_2)\vec{W}^{p+2/3} &= \vec{N}^{p+1/3}, \\
(E - \tau\alpha\Lambda_3)\vec{W}^{p+1} &= \vec{N}^{p+2/3},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

де :

$$\begin{aligned}
\vec{N}^p &= (E + \tau\beta\Lambda_1) \cdot \vec{W}^p + \tau\gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \\
\vec{N}^{p+1/3} &= (E + \tau\beta\Lambda_2) \cdot \vec{W}^{p+1/3} + \tau\gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \\
\vec{N}^{p+2/3} &= (E + \tau\beta\Lambda_3) \cdot \vec{W}^{p+2/3} + \tau\gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3}.
\end{aligned}$$

Такий запис розрахункової схеми зручний для програмування та аналізу різних варіантів. Перехід від однієї розрахункової схеми до іншої обумовлюється лише зміною невизначених коефіцієнтів. Для них повинні виконуватися умови:

$$\alpha + \beta = 1, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

Доволі часто використовується схема Кранка-Ніколсона, для якої:

$$\alpha = \beta = 1/2.$$

В цьому випадку схема розщеплення має другий порядок апроксимації за часом. Якщо взяти $\alpha = 1, \beta = 0$, то схема (2.34) буде неявною. У випадку, коли $\alpha = 0, \beta = 1$, схема стає явною. Явна схема методу покомпонентного розщеплення має вигляд:

$$\begin{aligned}
\vec{W}^{p+1/3} &= \vec{W}^p + \tau \left[\Lambda_1 \vec{W}^p + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p \right], \\
\vec{W}^{p+2/3} &= \vec{W}^{p+1/3} + \tau \left[\Lambda_2 \vec{W}^{p+1/3} + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3} \right], \\
\vec{W}^{p+1} &= \vec{W}^{p+2/3} + \tau \left[\Lambda_3 \vec{W}^{p+2/3} + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3} \right].
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Вона використовується в багатьох випадках як безпосередньо, так і опосередковано (при обчисленні значень для першого кроку ітераційної схеми або при дослідженні збіжності розв'язку отриманого шляхом зменшення кроку інтегрування за часом). Тому наведемо всі ці формули в розгорнутому вигляді.

Для першого дробового кроку маємо (елементи матриці A_1^N визначаються з загальних формул при $i=1$).

Швидкості переміщень:

$$v_1^{p+1/3} = v_1^p + \tau \left[\frac{1}{\rho H_1 h_1} \lambda_1(\sigma_{11}) + \gamma_1 B_1 \right]^p,$$

$$v_2^{p+1/3} = v_2^p + \tau \left[\frac{1}{\rho H_1 h_1} \lambda_1(\sigma_{12}) + \gamma_1 B_2 \right]^p,$$

$$v_3^{p+1/3} = v_3^p + \tau \left[\frac{1}{\rho H_1 h_1} \lambda_1(\sigma_{13}) + \gamma_1 B_3 \right]^p.$$

Складові тензора напруження:

$$\sigma_{11}^{p+1/3} = \sigma_{11}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{41}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{42}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{43}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{11} \right]^p,$$

$$\sigma_{22}^{p+1/3} = \sigma_{22}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{51}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{52}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{53}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{22} \right]^p,$$

$$\sigma_{33}^{p+1/3} = \sigma_{33}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{61}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{62}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{63}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{33} \right]^p,$$

$$\sigma_{12}^{p+1/3} = \sigma_{12}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{71}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{72}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{73}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{12} \right]^p,$$

$$\sigma_{13}^{p+1/3} = \sigma_{13}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{81}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{82}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{83}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{13} \right]^p,$$

$$\sigma_{23}^{p+1/3} = \sigma_{23}^p + \tau \left[\frac{\alpha_{91}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\alpha_{92}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\alpha_{93}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 d_{23} \right]^p.$$

Складові тензора деформації обчислюються шляхом інтегрування за часом швидкостей деформації. Користуючись формулами (2.4) і наступними скороченнями

$$\beta_{41} = (1 + e_{11})\delta_{i1}; \quad \beta_{42} = \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right)\delta_{i1}; \quad \beta_{43} = \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right)\delta_{i1};$$

$$\beta_{51} = \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right)\delta_{i2}; \quad \beta_{52} = (1 + e_{22})\delta_{i2}; \quad \beta_{53} = \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right)\delta_{i2};$$

$$\beta_{61} = \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right)\delta_{i3}; \quad \beta_{62} = \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right)\delta_{i3}; \quad \beta_{63} = (1 + e_{33})\delta_{i3};$$

$$\beta_{71} = \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right)\delta_{i1} + (1 + e_{11})\delta_{i2};$$

$$\beta_{72} = (1 + e_{22})\delta_{i1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right)\delta_{i2};$$

$$\beta_{73} = \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right)\delta_{i1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right)\delta_{i2};$$

$$\beta_{81} = \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right)\delta_{i1} + (1 + e_{11})\delta_{i3};$$

$$\beta_{82} = \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right)\delta_{i1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right)\delta_{i3};$$

$$\beta_{83} = (1 + e_{33})\delta_{i1} + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2\right)\delta_{i3};$$

$$\beta_{91} = \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right)\delta_{i2} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right)\delta_{i3};$$

$$\beta_{92} = \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1\right)\delta_{i2} + (1 + e_{22})\delta_{i3};$$

$$\beta_{93} = (1 + e_{33})\delta_{i2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right)\delta_{i3}$$

запишемо різницеві формули для першого дробового кроку (елементи β_{kl} визначаються з загальних формул при $i=1$):

$$\varepsilon_{11}^{p+1/3} = \varepsilon_{11}^p + \tau \left[\frac{\beta_{41}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\beta_{42}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\beta_{43}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 c_{11} \right]^p,$$

$$\varepsilon_{22}^{p+1/3} = \varepsilon_{22}^p + \tau \gamma_1 [c_{22}]^p,$$

$$\varepsilon_{33}^{p+1/3} = \varepsilon_{33}^p + \tau \gamma_1 [c_{33}]^p,$$

$$\varepsilon_{12}^{p+1/3} = \varepsilon_{12}^p + \tau \left[\frac{\beta_{71}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\beta_{72}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\beta_{73}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 c_{12} \right]^p,$$

$$\varepsilon_{13}^{p+1/3} = \varepsilon_{13}^p + \tau \left[\frac{\beta_{81}}{h_1} \lambda_1(v_1) + \frac{\beta_{82}}{h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\beta_{83}}{h_1} \lambda_1(v_3) + \gamma_1 c_{13} \right]^p,$$

$$\varepsilon_{23}^{p+1/3} = \varepsilon_{23}^p + \tau \gamma_1 [c_{23}]^p.$$

Для другого дробового кроку маємо (елементи матриці A_2^N визначаються з загальних формул при $i=2$):

$$v_1^{p+2/3} = v_1^{p+1/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_2 h_2} \lambda_2(\sigma_{21}) + \gamma_2 B_1 \right]^{p+1/3},$$

$$v_2^{p+2/3} = v_2^{p+1/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_2 h_2} \lambda_2(\sigma_{22}) + \gamma_2 B_2 \right]^{p+1/3},$$

$$v_3^{p+2/3} = v_3^{p+1/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_2 h_2} \lambda_2(\sigma_{23}) + \gamma_2 B_3 \right]^{p+1/3},$$

$$\sigma_{11}^{p+2/3} = \sigma_{11}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{41}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{42}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{43}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{11} \right]^{p+1/3},$$

$$\sigma_{22}^{p+2/3} = \sigma_{22}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{51}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{52}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{53}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{22} \right]^{p+1/3},$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{p+2/3} &= \sigma_{33}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{61}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{62}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{63}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{33} \right]^{p+1/3}, \\ \sigma_{12}^{p+2/3} &= \sigma_{12}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{71}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{72}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{73}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{12} \right]^{p+1/3}, \\ \sigma_{13}^{p+2/3} &= \sigma_{13}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{81}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{82}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{83}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{13} \right]^{p+1/3}, \\ \sigma_{23}^{p+2/3} &= \sigma_{23}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{91}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\alpha_{92}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\alpha_{93}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 d_{23} \right]^{p+1/3}.\end{aligned}$$

Для визначення деформацій на другому дробному кроці маємо наступні різницеві формули (елементи β_{kl} визначаються з загальних формул при $i=2$).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{p+2/3} &= \varepsilon_{11}^{p+1/3} + \tau \gamma_2 [c_{11}]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{22}^{p+2/3} &= \varepsilon_{22}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\beta_{51}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\beta_{52}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\beta_{53}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 c_{22} \right]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{33}^{p+2/3} &= \varepsilon_{33}^{p+1/3} + \tau \gamma_2 [c_{33}]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{12}^{p+2/3} &= \varepsilon_{12}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\beta_{71}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\beta_{72}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\beta_{73}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 c_{12} \right]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{13}^{p+2/3} &= \varepsilon_{13}^{p+1/3} + \tau \gamma_2 [c_{13}]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{23}^{p+2/3} &= \varepsilon_{23}^{p+1/3} + \tau \left[\frac{\beta_{91}}{h_2} \lambda_2(v_1) + \frac{\beta_{92}}{h_2} \lambda_2(v_2) + \frac{\beta_{93}}{h_2} \lambda_2(v_3) + \gamma_2 c_{23} \right]^{p+1/3}.\end{aligned}$$

Для третього дробового кроку маємо (елементи матриці A_3^N визначаються з загальних формул при $i=3$):

$$v_1^{p+1} = v_1^{p+2/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_3 h_3} \lambda_3(\sigma_{31}) + \gamma_3 B_1 \right]^{p+2/3},$$

$$v_2^{p+1} = v_2^{p+2/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_3 h_3} \lambda_3(\sigma_{32}) + \gamma_3 B_2 \right]^{p+2/3},$$

$$v_3^{p+1} = v_3^{p+2/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_3 h_3} \lambda_3(\sigma_{33}) + \gamma_3 B_3 \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{11}^{p+1} = \sigma_{11}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{41}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{42}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{43}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{11} \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{22}^{p+1} = \sigma_{22}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{51}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{52}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{53}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{22} \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{33}^{p+1} = \sigma_{33}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{61}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{62}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{63}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{33} \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{12}^{p+1} = \sigma_{12}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{71}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{72}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{73}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{12} \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{13}^{p+1} = \sigma_{13}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{81}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{82}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{83}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{13} \right]^{p+2/3},$$

$$\sigma_{23}^{p+1} = \sigma_{23}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\alpha_{91}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\alpha_{92}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\alpha_{93}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 d_{23} \right]^{p+2/3}.$$

Для визначення деформацій на третьому дробному кроці маємо такі різницеві формули (елементи β_{kl} визначаються з загальних формул при $i=3$):

$$\varepsilon_{11}^{p+1} = \varepsilon_{11}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{11}]^{p+2/3},$$

$$\varepsilon_{22}^{p+1} = \varepsilon_{22}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{22}]^{p+2/3},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33}^{p+1} &= \varepsilon_{33}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\beta_{61}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\beta_{62}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\beta_{63}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 c_{33} \right]^{p+1/3}, \\ \varepsilon_{12}^{p+1} &= \varepsilon_{12}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{12}]^{p+2/3}, \\ \varepsilon_{13}^{p+1} &= \varepsilon_{13}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\beta_{81}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\beta_{82}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\beta_{83}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 c_{13} \right]^{p+2/3}, \\ \varepsilon_{23}^{p+1} &= \varepsilon_{23}^{p+2/3} + \tau \left[\frac{\beta_{91}}{h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\beta_{92}}{h_3} \lambda_3(v_2) + \frac{\beta_{93}}{h_3} \lambda_3(v_3) + \gamma_3 c_{23} \right]^{p+2/3}.\end{aligned}$$

В тривимірних задачах термомеханіки оптимальним буде такий вибір вагових коефіцієнтів у правій частині цих формул $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1/3$ [118].

2.4.2. Метод підвищеної точності при застосуванні двовимірних сплайн-функцій

Запропоновано новий варіант методу зведення трьохвимірної геометрично нелінійної нестационарної задачі термо-пружно-пластичності до послідовно розв'язуваної системи трьох двовимірних задач на дробових кроках за часом (схема Писмана, Речфорда, Дугласа). Система рівнянь (2.31) розв'язується за допомогою підходу основанийого на ідеї покопонентному розщепленні при застосуванні для апроксимації похідних по координатам двовимірних сплайн-функцій:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{H_1 \partial \alpha_1} + A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{H_2 \partial \alpha_2} + A_3^N \frac{\partial \vec{W}}{H_3 \partial \alpha_3} \right) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_3^N \frac{\partial \vec{W}}{H_3 \partial \alpha_3} + A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{H_1 \partial \alpha_1} \right) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1.\end{aligned}\tag{2.37}$$

В поєднанні з методом невизначених коефіцієнтів підход Писмана,

Речфорда, Дугласа дозволяє провести наступний запис неявної схеми розщеплення системи (2.37):

$$\begin{aligned} (\vec{W}^{p+1/3} - \vec{W}^p) / \tau &= \vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \\ (\vec{W}^{p+2/3} - \vec{W}^{p+1/3}) / \tau &= \vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \\ (\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+2/3}) / \tau &= \vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

де для скорочення запису позначено наступні диференціальні оператори:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{12} &\equiv \vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) = \Lambda_1(\alpha \vec{W}^{p+1/3} + \beta \vec{W}^p) + \Lambda_2(\alpha \vec{W}^{p+1/3} + \beta \vec{W}^p), \\ \vec{L}_{23} &\equiv \vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) = \Lambda_2(\alpha \vec{W}^{p+2/3} + \beta \vec{W}^{p+1/3}) + \Lambda_3(\alpha \vec{W}^{p+2/3} + \beta \vec{W}^{p+1/3}), \\ \vec{L}_{31} &\equiv \vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) = \Lambda_3(\alpha \vec{W}^{p+1} + \beta \vec{W}^{p+2/3}) + \Lambda_1(\alpha \vec{W}^{p+1} + \beta \vec{W}^{p+2/3}), \\ \alpha + \beta &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Диференціальні оператори (2.39) визначаються за допомогою безпосереднього диференціювання двовимірних сплайнів, які попередньо будуються на основі відомих з попереднього дробового кроку величин у вузлах координатної сітки.

Частинні похідні першого та другого порядків по координатах визначаються на основі виразів (1.6) з першого розділу. Тоді для диференціальних операторів, що входять в склад розрахункових формул (1.8) і (1.23) можна записати такі вирази:

$$\Lambda_k w \equiv \frac{A_k^N}{h_k} \cdot \lambda_k(w), \quad k = 1, 2, 3,$$

де:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(w)}{h_1} &\equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial x}, \\ \frac{\lambda_2(w)}{h_2} &\equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x; y)}{\partial y}, \\ \frac{\mu_1(w)}{h_1^2} &\equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_2(w)}{h_2^2} \equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot \frac{\partial^2 F_{ij}(x; y)}{\partial y^2}$$

Програми для обчислення цих похідних наведено в додатках.

Наведемо формули отримані з (2.38) в розгорнутому вигляді. Для **першого дробового кроку** маємо ряд відповідних формул.

Швидкості переміщень:

$$\begin{aligned} v_1^{p+1/3} &= v_1^p + \tau \Lambda_1 [\alpha(\sigma_{11})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{11})^p] + \\ &\quad + \tau \Lambda_2 [\alpha(\sigma_{21})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{21})^p] + \tau \gamma_1 B_1^p; \\ v_2^{p+1/3} &= v_2^p + \tau \Lambda_1 [\alpha(\sigma_{12})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{12})^p] + \\ &\quad + \tau \Lambda_2 [\alpha(\sigma_{22})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{22})^p] + \tau \gamma_1 B_2^p; \\ v_3^{p+1/3} &= v_3^p + \tau \Lambda_1 [\alpha(\sigma_{13})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{13})^p] + \\ &\quad + \tau \Lambda_2 [\alpha(\sigma_{23})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{23})^p] + \tau \gamma_1 B_3^p; \end{aligned}$$

Складові тензора напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{p+1/3} &= \sigma_{11}^p + \tau \alpha_{41(i=1)} \Lambda_1 [\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p] + \\ &\quad + \tau \alpha_{42(i=1)} \Lambda_1 [\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p] + \\ &\quad + \tau \alpha_{43(i=1)} \Lambda_1 [\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p] + \\ &\quad + \tau \alpha_{41(i=2)} \Lambda_2 [\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p] + \\ &\quad + \tau \alpha_{42(i=2)} \Lambda_2 [\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p] + \\ &\quad + \tau \alpha_{43(i=2)} \Lambda_2 [\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p] + \tau \gamma_1 d_{11}^p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{p+1/3} &= \sigma_{22}^p + \tau\alpha_{51(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{52(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{53(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{51(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{52(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{53(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \tau\gamma_1 d_{22}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{p+1/3} &= \sigma_{33}^p + \tau\alpha_{61(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{62(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{63(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{61(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{62(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{63(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \tau\gamma_1 d_{33}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{p+1/3} &= \sigma_{12}^p + \tau\alpha_{71(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{72(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{73(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{71(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{72(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{73(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \tau\gamma_1 d_{12}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{p+1/3} &= \sigma_{13}^p + \tau\alpha_{81(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{82(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{83(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{81(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{82(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{83(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \tau\gamma_1 d_{13}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^{p+1/3} = & \sigma_{23}^p + \tau\alpha_{91(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\alpha_{92(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\alpha_{93(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
& + \tau\alpha_{91(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\alpha_{92(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\alpha_{93(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \tau\gamma_1 d_{23}^p.
\end{aligned}$$

Складові тензора деформації, які обчислюються шляхом інтегрування за часом швидкостей деформації:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{p+1/3} = & \varepsilon_{11}^p + \tau\beta_{41(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{42(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{43(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \gamma_1 c_{11}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}^{p+1/3} = & \varepsilon_{22}^p + \tau\beta_{51(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{52(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{53(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \gamma_1 c_{22}^p;
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33}^{p+1/3} = \varepsilon_{33}^p + \gamma_1 c_{33}^p;$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^{p+1/3} = & \varepsilon_{12}^p + \tau\beta_{71(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{72(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{73(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{71(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{72(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{73(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \gamma_1 c_{12}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13}^{p+1/3} = & \varepsilon_{13}^p + \tau\beta_{81(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{82(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\
& + \tau\beta_{83(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \gamma_1 c_{13}^p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23}^{p+1/3} &= \varepsilon_{23}^p + \tau\beta_{91(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+1/3} + \beta(v_1)^p\right] + \\ &+ \tau\beta_{92(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1/3} + \beta(v_2)^p\right] + \\ &+ \tau\beta_{93(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1/3} + \beta(v_3)^p\right] + \gamma_1 c_{23}^p;\end{aligned}$$

Для другого дробового кроку маємо:

Швидкості переміщень:

$$\begin{aligned}v_1^{p+2/3} &= v_1^{p+1/3} + \tau\Lambda_2\left[\alpha(\sigma_{21})^{p+2/3} + \beta(\sigma_{21})^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\Lambda_3\left[\alpha(\sigma_{31})^{p+2/3} + \beta(\sigma_{31})^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 B_1^{p+1/3}; \\ v_2^{p+2/3} &= v_2^{p+1/3} + \tau\Lambda_2\left[\alpha(\sigma_{22})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{22})^p\right] + \\ &+ \tau\Lambda_3\left[\alpha(\sigma_{32})^{p+2/3} + \beta(\sigma_{32})^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 B_2^{p+1/3}; \\ v_3^{p+2/3} &= v_3^{p+1/3} + \tau\Lambda_2\left[\alpha(\sigma_{23})^{p+1/3} + \beta(\sigma_{23})^p\right] + \\ &+ \tau\Lambda_3\left[\alpha(\sigma_{33})^{p+2/3} + \beta(\sigma_{33})^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 B_3^{p+1/3};\end{aligned}$$

тензор напруження:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{p+2/3} &= \sigma_{11}^{p+1/3} + \tau\alpha_{41(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{42(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{43(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{41(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{42(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{43(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{11}^{p+1/3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{p+2/3} &= \sigma_{22}^{p+1/3} + \tau\alpha_{51(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{52(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{53(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{51(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{52(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\ &+ \tau\alpha_{53(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{22}^{p+1/3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{p+2/3} = & \sigma_{33}^{p+1/3} + \tau\alpha_{61(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{62(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{63(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{61(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{62(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{63(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{33}^{p+1/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{p+2/3} = & \sigma_{12}^{p+1/3} + \tau\alpha_{71(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{72(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{73(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{71(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{72(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{73(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{12}^{p+1/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{p+2/3} = & \sigma_{13}^{p+1/3} + \tau\alpha_{81(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{82(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{83(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{81(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{82(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{83(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{13}^{p+1/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^{p+2/3} = & \sigma_{23}^{p+1/3} + \tau\alpha_{91(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{92(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{93(i=2)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{91(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{92(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3}\right] + \\
& + \tau\alpha_{93(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3}\right] + \tau\gamma_2 d_{23}^{p+1/3};
\end{aligned}$$

для визначення деформацій на другому дробовому кроці маємо наступні різницеві формули:

$$\varepsilon_{11}^{p+2/3} = \varepsilon_{11}^{p+1/3} + \tau\gamma_2 c_{11}^{p+1/3};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^{p+2/3} = & \varepsilon_{22}^{p+1/3} + \tau\beta_{51(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{52(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{53(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \tau\gamma_2 c_{22}^{p+1/3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{p+2/3} = & \varepsilon_{33}^{p+1/3} + \tau\beta_{61(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{62(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{63(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \tau\gamma_2 c_{33}^{p+1/3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{p+2/3} = & \varepsilon_{12}^{p+1/3} + \tau\beta_{71(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{72(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{73(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \tau\gamma_2 c_{12}^{p+1/3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^{p+2/3} = & \varepsilon_{13}^{p+1/3} + \tau\beta_{81(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{82(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{83(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \tau\gamma_2 c_{13}^{p+1/3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23}^{p+2/3} = & \varepsilon_{23}^{p+1/3} + \tau\beta_{91(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{92(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{93(i=2)}\Lambda_2 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{91(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_1)^{p+2/3} + \beta(v_1)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{92(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_2)^{p+2/3} + \beta(v_2)^{p+1/3} \right] + \\ & + \tau\beta_{93(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_3)^{p+2/3} + \beta(v_3)^{p+1/3} \right] + \tau\gamma_2 c_{23}^{p+1/3}; \end{aligned}$$

Для **третього дробового кроку** запишемо наступні формули.

Швидкості переміщень:

$$\begin{aligned}
 v_1^{p+1} &= v_1^{p+2/3} + \tau\Lambda_3 \left[\alpha(\sigma_{31})^{p+1} + \beta(\sigma_{31})^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\Lambda_1 \left[\alpha(\sigma_{11})^{p+1} + \beta(\sigma_{11})^{p+2/3} \right] + \tau\gamma_3 B_1^{p+2/3}; \\
 v_2^{p+1} &= v_2^{p+2/3} + \tau\Lambda_3 \left[\alpha(\sigma_{32})^{p+1} + \beta(\sigma_{32})^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\Lambda_1 \left[\alpha(\sigma_{12})^{p+1} + \beta(\sigma_{12})^{p+2/3} \right] + \tau\gamma_2 B_2^{p+2/3}; \\
 v_3^{p+1} &= v_3^{p+2/3} + \tau\Lambda_3 \left[\alpha(\sigma_{33})^{p+1} + \beta(\sigma_{33})^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\Lambda_1 \left[\alpha(\sigma_{13})^{p+1} + \beta(\sigma_{13})^{p+2/3} \right] + \tau\gamma_2 B_3^{p+2/3}.
 \end{aligned}$$

Тензор напруження:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{p+1} &= \sigma_{11}^{p+2/3} + \tau\alpha_{41(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{42(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{43(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{41(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{42(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{43(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3} \right] + \tau\gamma_3 d_{11}^{p+2/3}; \\
 \sigma_{22}^{p+1} &= \sigma_{22}^{p+2/3} + \tau\alpha_{51(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{52(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{53(i=3)}\Lambda_3 \left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{51(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{52(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3} \right] + \\
 &\quad + \tau\alpha_{53(i=1)}\Lambda_1 \left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3} \right] + \tau\gamma_3 d_{22}^{p+2/3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{p+1} &= \sigma_{33}^{p+2/3} + \tau\alpha_{61(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{62(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{63(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{61(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{62(i=1)}\Lambda_2\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{63(i=1)}\Lambda_2\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3 d_{33}^{p+2/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{p+1} &= \sigma_{12}^{p+2/3} + \tau\alpha_{71(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{72(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{73(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{71(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{72(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{73(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3 d_{12}^{p+2/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{p+1} &= \sigma_{13}^{p+2/3} + \tau\alpha_{81(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{82(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{83(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{81(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{82(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{83(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3 d_{13}^{p+2/3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^{p+1} &= \sigma_{23}^{p+2/3} + \tau\alpha_{91(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{92(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&+ \tau\alpha_{93(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{91(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{92(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\
&\quad + \tau\alpha_{93(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3 d_{23}^{p+2/3}.
\end{aligned}$$

Для визначення деформацій на третьому дробному кроці маємо такі різницеві формули:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{p+1} = & \varepsilon_{11}^{p+2/3} + \tau\beta_{41(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{42(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{43(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3c_{11}^{p+2/3};\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22}^{p+1} = \varepsilon_{22}^{p+2/3} + \tau\gamma_3c_{22}^{p+2/3};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33}^{p+1} = & \varepsilon_{33}^{p+2/3} + \tau\beta_{61(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{62(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{63(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3c_{33}^{p+2/3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^{p+1} = & \varepsilon_{12}^{p+2/3} + \tau\beta_{71(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{72(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{73(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3c_{12}^{p+2/3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^{p+1} = & \varepsilon_{13}^{p+2/3} + \tau\beta_{81(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{82(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{83(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{81(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{82(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{83(i=1)}\Lambda_1\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3c_{13}^{p+2/3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23}^{p+1} = & \varepsilon_{23}^{p+2/3} + \tau\beta_{91(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_1)^{p+1} + \beta(v_1)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{92(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_2)^{p+1} + \beta(v_2)^{p+2/3}\right] + \\ & + \tau\beta_{93(i=3)}\Lambda_3\left[\alpha(v_3)^{p+1} + \beta(v_3)^{p+2/3}\right] + \tau\gamma_3c_{23}^{p+2/3}.\end{aligned}$$

В тривимірних задачах термомеханіки оптимальним буде такий вибір вагових коефіцієнтів у правій частині цих формул $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1/3$

[118].

З формул (2.38) та розгорнутих формул отримано такі загальні розрахункові формули:

$$\begin{aligned} (\vec{W}^{p+1/3})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^p + \tau \left[\vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p \right] \right\}_m, \\ (\vec{W}^{p+2/3})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^{p+1/3} + \tau \left[\vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3} \right] \right\}_m, \\ (\vec{W}^{p+1})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^{p+2/3} + \tau \left[\vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3} \right] \right\}_m. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В якості нульової ітерації ($m=0$) обираються результати обчислень за явною схемою ($\alpha=0; \beta=1$). Ці формули дозволяють отримати третій порядок апроксимації методу по просторовим координатам.

Для підвищення точності обчислень за часом треба підвищити порядок апроксимації перших похідних за часом в лівій частині рівнянь (2.33). Для цього використаємо підход розроблений в роботах П.О.Стеблянка, який дозволяє одержати порядок апроксимації похідної $O(\tau^3), O(\tau^4)$ відповідно при застосуванні кубічних В-сплайнів та напружених одновимірних сплайнів.

При переході від рівнянь (2.33) до різницевої схеми їх розв'язання похідні за часом у вузлах $t_{p+r/3}, r=1;2;3$ визначаються за допомогою безпосереднього диференціювання попередньо отримані одновимірні сплайн-функції. Алгоритм цієї ітераційної процедури описано вище в першому розділі (дивись 1.3.5. МПР підвищеної точності за часом).

В результаті розрахункова схема зводиться до розв'язання системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $W_k^{p+1/3}, W_k^{p+2/3}, W_k^{p+1}, k=1;2;\dots;15$.

Після виключення величин W_k^{p+1} з першого та другого рівнянь системи, одержимо систему двох рівнянь, на підставі організована ітераційна

процедура визначення допоміжних значень $W_k^{p+1/3}, W_k^{p+2/3}$ на дробових кроках.

Нульове наближення для цих величин визначається за допомогою формул явної схеми. Процес ітерації за допомогою формул (2.40) проводиться доти, поки сусідні ітерації не будуть відрізнятись одна від одної не більше наперед заданої величини. Після цього на визначається розв'язок векторного рівняння W_m^{p+1} на повному кроці за часом.

Відзначимо, що з практичної точки зору такий процес ітерації дає результати, аналогічні тим, які розраховуються на підставі явної схеми, але зі значно більшим кроком інтегрування за часом. Це дозволяє суттєво зменшити час розрахунку розв'язання нестационарної задачі у порівнянні з підходом, заснованим на використанні формул явної схеми методу розщеплення.

2.5. Висновки по другому розділу

В цьому розділі дисертації отримані розрахункові формули для визначення пружно-пластичного нестационарного напружено-деформованого стану трьохвимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів за допомогою методу покопонентного розщеплення при кінцевих деформаціях.

Записана повна система рівнянь, яка складається з нелінійних геометричних співвідношень, рівняння руху (в геометрично нелінійній постановці), визначальних співвідношень найбільш вживаних теорій термопсевдо-пружно-пластичності. Ці теорії описують поведінку функціонально-неоднорідних матеріалів при наявності на діаграмі деформування майданчика плинності, а також описують термопластичне деформування матеріалів при зміцненні. Повна деформація складається з пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації і деформації, яка викликана температурними змінами.

Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході визначається за допомогою запропонованої феноменологічної моделі.

Запропонована та експериментально обґрунтована нова нелінійна феноменологічна модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Ця модель дозволяє проводити обчислення дотичного модуля інтегральної діаграми матеріалу. Для цього запропоновано нові алгоритми розв'язання інтегро-диференціальної системи для різних видів функції кінетичного відгуку (кусково-лінійної, степеневі та коли другої ланки асимптотично наближається до прямої лінії).

Повна система рівнянь, початкові та граничні умови складають математичну постановку задачі термомеханіки для тривимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при наявності великих (до 20%) пластичних деформацій.

Розроблено новий варіант методу числового аналізу поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів при великих деформаціях. Для цього проведено узагальнення класичного методу покомпонентного розщеплення на випадок геометрично нелінійної постановки та запропоновано метод підвищеної точності оснований на застосуванні двовимірних сплайн-функцій.

РОЗДІЛ III
ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-
НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НАЯВНОСТІ КІНЦЕВИХ
ДЕФОРМАЦІЙ
(порівняння з відомими результатами)

У третьому розділі досліджується та розв'язується новий клас задач термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів. Розв'язано ряд задач моделювання поведінки тіл з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні. Це задачі термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів (порівняння з відомими результатами). Моделювання поведінки локально навантаженого стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури. Моделювання поведінки локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні.

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. В означених задачах розроблено числову процедуру розрахунку діаграми матеріалу, яка представляє собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, побудованих для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Побудовано інтегральні діаграми матеріалу, який може знаходитися під дією складного навантаження.

Для двофазного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок з різними модулями пружності і відповідно змінною трансформаційною деформацією на основі запропонованої моделі записана залежності між напругою, збільшенням довжини зразка і рушійною силою.

При отриманні розрахункових формул уточненої моделі була розглянута допоміжна задача, яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні.

Для використання феноменологічної моделі з метою дослідження

двофазних матеріалів з різними модулями пружності розв'язано додаткову задачу яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. Графік залежності має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом інтегральна діаграма матеріалу, побудована в роботі, теж має три характерні ділянки.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а вже потім переходить в пластичний стан. Аналогічним чином термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні.

Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках. Встановлено, що при деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%, а при деформаціях до 16%-20% результати в геометрично лінійній і нелінійній постановках різняться більше ніж на 25%.

Перший параграф присвячено обробці відомих експериментальних результатів і описанню діаграм напруження – деформація для функціонально-неоднорідних матеріалів як при активному навантаженні, так і при розвантаженні.

У другому параграфі в геометрично нелінійній постановці розглянуто задачу про розповсюдження повільної хвилі фазового переходу в одновимірному стрижні при його розтягуванні при значних деформаціях (до 20%). Зазначимо, що в роботі [1] ця задача була розв'язана в геометрично лінійній постановці для деформацій, які не перевищували 6%.

У третьому параграфі цього розділу проведено моделювання поведінки локально навантаженої послабленої полоси з псевдо-пружно-

пластичного матеріалу при її нестационарному навантаженні. Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках при великих пластичних деформаціях. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 6% розбіжність результатів в точках локалізації деформації не перевищує 5%. При збільшенні значень пластичної деформації розбіжність результатів може значно зростати і в околі можливого створення шийки досягати 20% .

3.1. Обробка експериментальних результатів і описання діаграм для функціонально-неоднорідних матеріалів

Для дослідження поведінки стрижня при великих пластичних деформаціях була застосована модель матеріалу з трилінійного двофазного матеріалу та з урахуванням тепла, яке виділяється. При числових розрахунках було використано діаграми сплаву з пам'яттю форми NiTi, які наведено в роботі *Wang X.M. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. / X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue // International Journal of Plasticity 24, 2008. - P. 1307–1332* (рисунок 3.1).

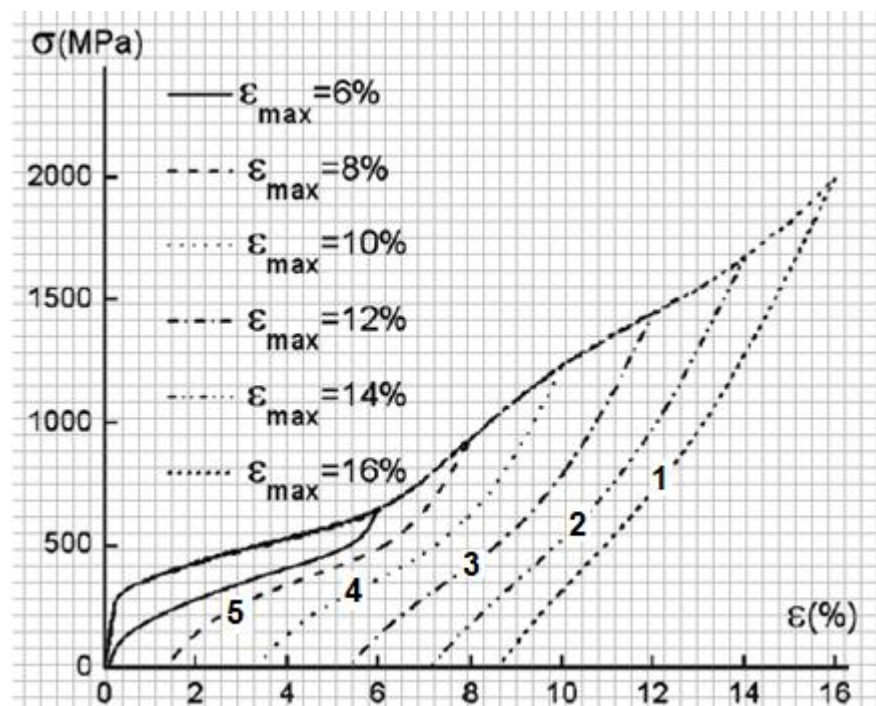


Рисунок 3.1. Діаграма сплаву з пам'яттю форми NiTi

Використання наведених графічно експериментальних результатів при розв'язанні нестационарних задач для тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів потребує їх подальшої обробки. Мета її таблично чи аналітично описати діаграму матеріалу, як на активному етапі навантаження, так і при розвантаженні. Користуючись даними з рисунку 3.1 спочатку будуюмо таблицю 3.1, в якій наведено значення $\sigma(MPa)$ для відповідної величини $\varepsilon\%$ (перший стовпчик).

Знаком \uparrow в другому стовпчику позначено результати отримані при активному навантаженні для $\varepsilon\% \in [0;16]$. В усіх інших стовбцях (з третього по восьмий) знак \downarrow показує дані $\sigma(MPa)$ для розвантаження починаючи з заданої максимальної точки.

Таблиця 3.1.

$\varepsilon\%$	$\sigma(MPa)$ \uparrow $\varepsilon_{\max} = 16\%$	$\sigma(MPa)$ \downarrow $\varepsilon_{\max} = 8\%$	$\sigma(MPa)$ \downarrow $\varepsilon_{\max} = 10\%$	$\sigma(MPa)$ \downarrow $\varepsilon_{\max} = 12\%$	$\sigma(MPa)$ \downarrow $\varepsilon_{\max} = 14\%$	$\sigma(MPa)$ \downarrow $\varepsilon_{\max} = 16\%$
0	0	---	---	---	---	---
0,2	270	---	---	---	---	---
0,4	288,7	---	---	---	---	---
0,6	307,3	---	---	---	---	---
0,8	326	---	---	---	---	---
1	344,7	---	---	---	---	---
1,2	363,3	---	---	---	---	---
1,4	382	---	---	---	---	---
1,6	400,6667	---	---	---	---	---
1,8	419,3333	0	---	---	---	---
2	438	130	---	---	---	---
2,2	447,3	153,2	---	---	---	---

2,4	456,6	176,4	---	---	---	---
2,6	465,9	199,6	0	---	---	---
2,8	475,2	222,8	18,42	---	---	---
3	484,5	246	36,85	---	---	---
3,2	493,8	269,2	55,29	---	---	---
3,4	503,1	292,4	73,71	---	---	---
3,6	512,4	315,6	92,14	---	---	---
3,8	521,7	338,8	110,57	---	---	---
4	531	362	129	---	---	---
4,2	541,1	374,9	151,5	---	---	---
4,4	551,2	387,8	174	---	---	---
4,6	561,3	400,7	196,5	---	---	---
4,8	571,4	413,6	219	---	---	---
5	581,5	426,5	241,5	---	---	---
5,2	591,6	439,4	264	---	---	---
5,4	601,7	452,3	286,5	---	---	---
5,6	611,8	465,2	309	---	---	---
5,8	621,9	478,1	331,5	0	---	---
6	632	491	354	142	---	---
6,2	658,1	531,2	371,5	174,5	---	---
6,4	684,2	571,4	389	207	---	---
6,6	710,3	611,6	406,5	239,5	---	---
6,8	736,4	651,8	424	272	---	---
7	762,5	692	441,5	304,5	---	---
7,2	788,6	732,2	459	337	---	---
7,4	814,7	772,4	476,5	369,5	---	---
7,6	840,8	812,6	494	402	0	---
7,8	866,9	852,8	511,5	434,5	74,1	---
8	893	893	529	467	146,7	---

8,2	925,7	---	598,1	475,9	183,93	---
8,4	958,4	---	667,2	484,8	221,16	0
8,6	991,1	---	736,3	493,7	258,39	37,5
8,8	1023,8	---	805,4	502,6	295,62	75
9	1056,5	---	874,5	511,5	332,85	112,5
9,2	1089,2	---	943,6	520,4	370,08	150
9,4	1121,9	---	1012,7	529,3	407,31	187,5
9,6	1154,6	---	1081,8	538,2	444,54	225
9,8	1187,3	---	1150,9	547,1	481,77	262,5
10	1220	---	1220	556	519	300
10,2	1241,4	---	---	643,8	563,8	334,17
10,4	1262,8	---	---	731,6	608,6	368,34
10,6	1284,2	---	---	819,4	653,4	402,51
10,8	1305,6	---	---	907,2	698,2	436,68
11	1327	---	---	995	743	470,85
11,2	1348,4	---	---	1082,8	787,8	505,02
11,4	1369,8	---	---	1170,6	832,6	539,19
11,6	1391,2	---	---	1258,4	877,4	573,36
11,8	1412,6	---	---	1346,2	922,2	607,53
12	1434	---	---	1434	967	641,7
12,2	1453,1	---	---	---	1032,8	705,86
12,4	1472,2	---	---	---	1098,6	770,02
12,6	1491,3	---	---	---	1164,4	834,18
12,8	1510,4	---	---	---	1230,2	898,34
13	1529,5	---	---	---	1296	962,5
13,2	1548,6	---	---	---	1361,8	1026,66
13,4	1567,7	---	---	---	1427,6	1090,82
13,6	1586,8	---	---	---	1493,4	1154,98
13,8	1605,9	---	---	---	1559,2	1219,14

14	1625	---	---	---	1625	1283,3
14,2	1662,5	---	---	---	---	1354,97
14,4	1700	---	---	---	---	1426,64
14,6	1737,5	---	---	---	---	1498,31
14,8	1775	---	---	---	---	1569,98
15	1812,5	---	---	---	---	1641,65
15,2	1850	---	---	---	---	1713,32
15,4	1887,5	---	---	---	---	1784,99
15,6	1925	---	---	---	---	1856,66
15,8	1962,5	---	---	---	---	1928,33
16	2000	---	---	---	---	2000

Таким чином, ми можемо побудувати відповідну частину діаграми матеріалу, по якій здійснюється розвантаження зразка з наперед заданої точки діаграми, де немає експериментальних результатів. При цьому інтерполяція може здійснюватись як лінійно, так і за допомогою сплайн-функцій. Ця задача розв'язувалась за допомогою створеної програми.

Для інтерполяції графіка діаграми матеріалу між вузлами сітки $\omega_\varepsilon = \left\{ \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \Delta\varepsilon; j=0,1,\dots \right\}$ по деформації, в яких відомі експериментальні значення для визначення напруження скористаємось наступним виразом [47, 118].

$$\sigma(\xi) = b_{i+2} \cdot \frac{\xi^3}{6} + b_{i+1} \cdot \frac{1}{2} (-\xi^3 + \xi^2 + \xi + \frac{1}{3}) + b_i \left(\frac{\xi^3}{2} - \xi^2 + \frac{2}{3} \right) + b_{i-1} \cdot \frac{(1-\xi)^3}{6}, \quad \xi \in [0;1]$$

$$\text{де } \xi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\Delta\varepsilon}, \varepsilon \in [\varepsilon_i; \varepsilon_{i+3}].$$

Він базується на застосуванні нормалізованих кубічних B -сплайнів. Невідомі коефіцієнти $b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, b_{i+2}$ визначаються з системи, яка записана у вузлах

$\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \varepsilon_{i+3}$ для відомих експериментальних значень $\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \sigma_{i+3}$.

Після розв'язання цієї системи і виключення коефіцієнтів $b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, b_{i+2}$ інтерполяційного виразу можна записати таку розрахункову формулу

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2 \right) \cdot \sigma_i + \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot \sigma_{i+1} + \\ + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot \sigma_{i+2} + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot \sigma_{i+3} .$$

Ця формула дозволяє вести інтерполювання значень функції $\sigma(\varepsilon)$ на відрізку

$$\varepsilon \in \left[\varepsilon_i; \varepsilon_{i+3} \right] \text{ з похибкою } O\left(\Delta\varepsilon^4\right).$$

Розглянемо приклад використання отриманої інтерполяційної формули. Скористаємося діаграмою матеріалу, яка задана таблицею 3.1 у вигляді табличних даних. Наведемо фрагмент цієї таблиці при активному навантаженні

Таблиця 3.1 а

i	1	2	3	4	5
σ_i	1220	1327	1434	1529,5	1625
ε_i	10	11	12	13	14

Варіант 1. Проведемо уточнення інтерполяційної формули на першому відрізку $\varepsilon \in [10; 13]$; $\xi_1 = (\varepsilon - 10) / 3\Delta\varepsilon$

$$\sigma_I(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi_1^3 + 18\xi_1^2 - 11\xi_1 + 2 \right) \cdot 1220 + \frac{9}{2} \left(3\xi_1^3 - 5\xi_1^2 + 2\xi_1 \right) \cdot 1327 + \\ + \frac{9}{2} \left(-3\xi_1^3 + 4\xi_1^2 - \xi_1 \right) \cdot 1434 + \frac{1}{2} \left(9\xi_1^3 - 9\xi_1^2 + 2\xi_1 \right) \cdot 1529,5 .$$

Варіант 2. Проведемо уточнення інтерполяційної формули на другому відрізку $\varepsilon \in [11; 14]$; $\xi_2 = (\varepsilon - 11) / 3\Delta\varepsilon$

$$\sigma_{II}(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi_2^3 + 18\xi_2^2 - 11\xi_2 + 2 \right) \cdot 1327 + \frac{9}{2} \left(3\xi_2^3 - 5\xi_2^2 + 2\xi_2 \right) \cdot 1434 + \\ + \frac{9}{2} \left(-3\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - \xi_2 \right) \cdot 1529,5 + \frac{1}{2} \left(9\xi_2^3 - 9\xi_2^2 + 2\xi_2 \right) \cdot 1625 .$$

Числові результати отримані для загальної частини $\varepsilon \in [11; 13]$ і наведені в таблиці 3.1 б.

Таблиця 3.1 б

$\varepsilon\%$	$\sigma(\varepsilon) \uparrow$	$\sigma_I(\varepsilon)$	$\sigma_{II}(\varepsilon)$	$\delta\%$
11	1327	1327	1327	0
11,2	1348,4	1348,768	1349,872	0,027
11,4	1369,8	1370,444	1371,916	0,047
11,6	1391,2	1391,936	1393,224	0,053
11,8	1412,6	1413,152	1413,888	0,039
12	1434	1434	1434	0
12,2	1453,1	1454,388	1453,652	0,089
12,4	1472,2	1474,224	1472,936	0,137
12,6	1491,3	1493,416	1491,944	0,142
12,8	1510,4	1511,872	1510,768	0,097
13	1529,5	1529,5	1529,5	0

Зазначимо, що наведені інтерполяційної формули дають гарний результат навіть обраній для приклада грубій сітці по деформаціям. Максимальна відносна розбіжність $\delta\% = 100 * (\sigma_*(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon)) / \sigma(\varepsilon)$, де $\sigma_*(\varepsilon) = (\sigma_I(\varepsilon) + \sigma_{II}(\varepsilon)) / 2$ становить 0,15%.

3.1.1. Інтерполяція відомих з експерименту ліній розвантаження

Визначимо криву 1 розвантаження $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$ з точки $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \% = 16\%$ до $a_2 = 8,4\%$. Для цього скористаємося таблицею

Таблиця 3.1 в

i	1	2	3	4
σ_i	0	419	1175	2000
ε_i	8,4	10,933	13,467	16

Звідси отримаємо наближений аналітичний вираз для функції $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [8,4;16]$

$$\sigma(\xi) = \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 419 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 1175 + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 2000; \quad \xi = (\varepsilon - 8,4) / 3\Delta\varepsilon.$$

Визначимо значення похідної, яка дає нам відповідні значення дотичного модуля.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{3\Delta\varepsilon} \left[\frac{3}{2} \left(9\xi^2 - 10\xi + 2 \right) \cdot 419 + \frac{3}{2} \left(-9\xi^2 + 8\xi - 1 \right) \cdot 1175 + \frac{1}{6} \left(27\xi^2 - 18\xi + 2 \right) \cdot 2000 \right],$$

$$\varepsilon \in [8,4;16]; \quad \xi = (\varepsilon - 8,4) / 3\Delta\varepsilon.$$

На краях означеного відрізка отримаємо

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(8,4)) = 193,612; \quad \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(16)) = 1283,612.$$

Визначимо криву 2 розвантаження $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$ з точки $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \% = 14\%$ до $a_2 = 7,6\%$. Для інтерполяції скористаємося таблицею

Таблиця 3.1 з

i	1	2	3	4
σ_i	0	469,298	935,844	1625
ε_i	7,6	9,733	11,867	14

Звідси отримаємо наближений аналітичний вираз для функції $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [7,6;14]$

$$\sigma(\xi) = \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 469,298 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 935,844 + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 1625, \quad \xi = (\varepsilon - 7,6) / 3\Delta\varepsilon.$$

Визначимо значення похідної, яка дає нам відповідні значення дотичного модуля.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{3\Delta\varepsilon} \left[\frac{3}{2} \left(9\xi^2 - 10\xi + 2 \right) \cdot 469,298 + \frac{3}{2} \left(-9\xi^2 + 8\xi - 1 \right) \cdot 935,844 + \frac{1}{6} \left(27\xi^2 - 18\xi + 2 \right) \cdot 1625 \right],$$

$$\varepsilon \in [7,6;14]; \xi = (\varepsilon - 7,6) / 3\Delta\varepsilon.$$

На краях означеного відрізка отримаємо:

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\sigma(7,6)) = 909,658, \quad \frac{d}{d\varepsilon} (\sigma(14)) = 1459,302.$$

Визначимо криву 3 розвантаження $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$ з точки $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \% = 12\%$ до $a_2 = 5,8\%$. Для інтерполяції скористаємося таблицею:

Таблиця 3.1 д

i	1	2	3	4
σ_i	0	442,038	526,185	1434
ε_i	5,8	7,867	9,333	12

Звідси отримаємо наближений аналітичний вираз для функції

$$\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [5,8;12]$$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 442,038 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 526,185 + \\ & + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 1434, \quad \xi = (\varepsilon - 5,8) / 3\Delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Визначимо значення похідної, яка дає нам відповідні значення дотичного модуля.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{3\Delta\varepsilon} \left[\frac{3}{2} \left(9\xi^2 - 10\xi + 2 \right) \cdot 442,038 + \frac{3}{2} \left(-9\xi^2 + 8\xi - 1 \right) \cdot 526,185 + \frac{1}{6} \left(27\xi^2 - 18\xi + 2 \right) \cdot 1434 \right];$$

$$\varepsilon \in [5,8;12]; \xi = (\varepsilon - 5,8) / 3\Delta\varepsilon.$$

На краях означеного відрізка отримаємо:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(5,8)) = 1691,395, \quad \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(12)) = 2855,837.$$

Визначимо криву 4 розвантаження $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$ з точки $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \% = 10\%$ до $a_2 = 2,6\%$. Для інтерполяції скористаємося таблицею

Таблиця 3.1 е

i	1	2	3	4
σ_i	0	244,515	479,138	1220
ε_i	2,6	5,067	7,533	10

Звідси отримаємо наближений аналітичний вираз для функції $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [2,6;10]$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 244,515 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 479,138 + \\ & + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 1220, \quad \xi = (\varepsilon - 2,6) / 3\Delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Визначимо значення похідної, яка дає нам відповідні значення дотичного модуля:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{3\Delta\varepsilon} \left[\frac{3}{2} (9\xi^2 - 10\xi + 2) \cdot 244,515 + \frac{3}{2} (-9\xi^2 + 8\xi - 1) \cdot 479,138 + \frac{1}{6} (27\xi^2 - 18\xi + 2) \cdot 1220 \right];$$

$$\varepsilon \in [2,6;10]; \xi = (\varepsilon - 2,6) / 3\Delta\varepsilon.$$

На краях означеного відрізка отримаємо

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(2,6)) = 702,508; \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(10)) = 1943,375.$$

Визначимо криву 5 розвантаження $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$ з точки $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \% = 8\%$ до $a_2 = 1,8\%$. Для інтерполяції скористаємося таблицею

Таблиця 3.1 ж

i	1	2	3	4
σ_i	0	346,572	486,08	893
ε_i	1,8	3,867	5,933	8

Звідси отримаємо наближений аналітичний вираз для функції $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [1,8; 8]$

$$\sigma(\xi) = \frac{9}{2} (3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi) \cdot 346,572 + \frac{9}{2} (-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi) \cdot 486,08 + \frac{1}{2} (9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi) \cdot 893, \xi = (\varepsilon - 1,8) / 3\Delta\varepsilon.$$

Визначимо значення похідної, яка дає нам відповідні значення дотичного модуля.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{3\Delta\varepsilon} \left[\frac{3}{2} (9\xi^2 - 10\xi + 2) \cdot 346,572 + \frac{3}{2} (-9\xi^2 + 8\xi - 1) \cdot 486,08 + \frac{1}{6} (27\xi^2 - 18\xi + 2) \cdot 893 \right];$$

$$\varepsilon \in [1,8; 8]; \xi = (\varepsilon - 1,8) / 3\Delta\varepsilon.$$

На краях означеного відрізка отримаємо:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(1,8)) = 1013,772, \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(8)) = 1164,642.$$

В реальних задачах термомеханіки процес розвантаження в конкретній точці тіла може розпочатись з будь-якого значення $\varepsilon_* \% \in [\varepsilon_{\max 1} \% ; \varepsilon_{\max 2} \%]$. Тому виникає нова задача, пов'язана з інтерполяцією відповідних значень $\sigma(MPa)$ і розбудові додаткової таблиці.

Розглянемо таку допоміжну задачу. Нехай $x_1 = \varepsilon_{\max 1} \%$ і $x_2 = \varepsilon_{\max 2} \%$ два сусідніх відомих з *Таблиці 3.1* максимальних значення деформації, з яких на діаграмі матеріалу розпочинається процес розвантаження, а функції $\sigma = f_1(\varepsilon), \varepsilon \in [a_1; x_1]$ і $\sigma = f_2(\varepsilon), \varepsilon \in [a_2; x_2]$, графіки яких показані на рисунку 3.1, означають дві сусідні відомі лінії, по яким іде розвантаження зразка (наприклад, дані з третього і четвертого стовбців *Таблиці 3.1*). Функція $\sigma = f_0(\varepsilon)$ задає діаграму матеріалу при активному навантаженні (другий стовбець *Таблиці 3.1*).

Ставиться задача наближено розрахувати відповідну таблицю і побудувати графік функції ($\sigma = f_*(\varepsilon), \varepsilon \in [a_*; \varepsilon_*]$), по яким визначається розвантаження зразка.

Розв'язання цієї допоміжної задачі розпочнемо з визначення невідомої a_* по заданим значенням $a_1, x_1, a_2, x_2, \varepsilon_*$. Спочатку визначимо параметр $t_* \in [0; 1]$, який відповідає точці ε_* з відрізка $\varepsilon_* \in [x_1; x_2]$.

В результаті отримаємо $t_* = (\varepsilon_* - x_1)/(x_2 - x_1)$. Тоді по аналогії отримаємо $a_* \approx (a_2 - a_1)t_* + a_1$.

Відповідні значення функції $\sigma = f_*(\varepsilon), \varepsilon \in [a_*; \varepsilon_*]$ (напруження) в крайніх точках будуть такими $\sigma \in [0; \sigma_*]$, де $\sigma_* = f_0(\varepsilon_*)$, і $f_1(a_*) = 0$.

В подальшому потрібно буде знати значення дотичних модулів діаграм на краях. Це будуть:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(a_1)) = f_1'(a_1), \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(x_1)) = f_1'(x_1),$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(a_2)) = f_2'(a_2), \frac{d}{d\varepsilon}(\sigma(x_2)) = f_2'(x_2).$$

Тоді для дотичних модулів шуканої функції $\sigma = f_*(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [a_*; \varepsilon_*]$ на краях запишемо:

$$\begin{aligned} f_*(a_*) &\approx (f_2'(a_2) - f_1'(a_1))t_* + f_1'(a_1); \\ f_*(\varepsilon_*) &\approx (f_2'(x_2) - f_1'(x_1))t_* + f_1'(x_1). \end{aligned}$$

У випадку розвантаження з довільної точки діаграми (без наявності прямого експериментального підтвердження) для аналітичного описання кривої розвантаження будемо користуватись загальною формулою :

$$\sigma(\xi) = b_2 \cdot \frac{\xi^3}{6} + b_1 \cdot \frac{1}{2} \left(-\xi^3 + \xi^2 + \xi + \frac{1}{3} \right) + b_0 \cdot \left(\frac{\xi^3}{2} - \xi^2 + \frac{2}{3} \right) + b_{-1} \cdot \frac{(1-\xi)^3}{6},$$

$$\xi = \frac{\varepsilon - a_*}{\Delta\varepsilon}; \varepsilon \in [a_*; \varepsilon_*]; \xi \in [0; 1].$$

Дотичний модуль фрагмента діаграми визначимо шляхом диференціювання:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{\Delta\varepsilon} \left[b_2 \cdot \frac{\xi^2}{2} + b_1 \cdot \frac{1}{2} \left(-3\xi^2 + 2\xi + 1 \right) + b_0 \cdot \left(\frac{3\xi^2}{2} - 2\xi \right) - b_{-1} \cdot \frac{(1-\xi)^2}{2} \right].$$

Невідомі коефіцієнти b_{-1}, b_0, b_1, b_2 визначаються з системи, яка записана у вузлах $\varepsilon_*; a_*$ для відомих на цих краях значень функції $\sigma_*; 0$ і дотичних модулів $f_*(a_*); f_*(\varepsilon_*)$.

Система має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}b_1 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{6}b_{-1} &= 0; \\ \frac{1}{6}b_2 + \frac{2}{3}b_1 + \frac{1}{6}b_0 &= \sigma_*; \\ \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_{-1} &= \Delta\varepsilon \cdot f_*(a_*); \\ \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_0 &= \Delta\varepsilon \cdot f_*(\varepsilon_*). \end{aligned}$$

Після розв'язання цієї системи отримаємо наступні коефіцієнти:

$$b_2 = -\sigma_* + \frac{A_*}{3} + \frac{7E_*}{6}; b_1 = 2\sigma_* - \frac{A_*}{6} - \frac{E_*}{3};$$

$$b_0 = -\sigma_* + \frac{A_*}{3} + \frac{E_*}{6}; b_{-1} = 2\sigma_* - \frac{7A_*}{6} - \frac{E_*}{3}.$$

Тут для скорочення запису позначено:

$$A_* = (\varepsilon_* - a_*) \cdot f'_*(a_*); E_* = (\varepsilon_* - a_*) \cdot f'_*(\varepsilon_*).$$

В результаті розрахунків формули для кривої розвантаження запишемо так:

$$\sigma(\xi) = \left(-\sigma_* + \frac{A_*}{3} + \frac{7E_*}{6} \right) \cdot \frac{\xi^3}{6} + \left(2\sigma_* - \frac{A_*}{6} - \frac{E_*}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(-\xi^3 + \xi^2 + \xi + \frac{1}{3} \right) +$$

$$+ \left(-\sigma_* + \frac{A_*}{3} + \frac{E_*}{6} \right) \cdot \left(\frac{\xi^3}{2} - \xi^2 + \frac{2}{3} \right) + \left(2\sigma_* - \frac{7A_*}{6} - \frac{E_*}{3} \right) \cdot \frac{(1-\xi)^3}{6}.$$

Розглянемо приклад інтерполювання кривої розвантаження між лініями 1 і 2 (рисунок 3.1).

Нехай $x_2 = 16; a_2 = 8,4; x_1 = 14; a_1 = 7,6$. Побудуємо діаграму розвантаження з починаючи з точки $\varepsilon_* = 15$ користуючись наведеною вище формулою.

В цьому випадку $\sigma_* = 1641,65, t_* = 0,5; a_* = 8,$

$$f'_*(8) \approx (f'_2(8,4) - f'_1(7,6))t_* + f'_1(7,6) =$$

$$= (193,612 - 909,658)0,5 + 909,658 = 551,635;$$

$$f'_*(15) \approx (f'_2(16) - f'_1(14))t_* + f'_1(14) =$$

$$= (1283,612 - 1459,302)0,5 + 1459,302 = 1371,457.$$

$$A_* = (15 - 8) \cdot f'_*(8) = 7 \cdot 551,635 = 3861,445,$$

$$E_* = (15 - 8) \cdot f'_*(15) = 7 \cdot 1371,302 = 9599,114.$$

Коефіцієнти сплайну приймуть значення:

$$b_2 = -1641,65 + 3861,445/3 + 7 \cdot 9599,114/6 = 10844,46;$$

$$b_1 = 2 \cdot 1641,65 - 3861,445/6 - 9599,114/3 = -559,979;$$

$$b_0 = -1641,65 + 3861,445/3 + 9599,114/6 = 1245,351;$$

$$b_{-1} = 2 \cdot 1641,65 - 7 \cdot 3861,445/6 - 9599,114/3 = -4421,42.$$

Шукана лінія розвантаження може бути описана аналітичним виразом:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & 1807,411 \cdot \xi^3 - 279,989 \left(-\xi^3 + \xi^2 + \xi + \frac{1}{3} \right) + \\ & + 1245,351 \cdot \left(\frac{\xi^3}{2} - \xi^2 + \frac{2}{3} \right) - 736,904 \cdot (1 - \xi)^3, \\ \xi = & \frac{\varepsilon - 8}{7}; \varepsilon \in [8; 15]; \xi \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Користуючись цією формулою можна отримати всі необхідні значення напруження на невідомій з експериментів кривій розвантаження по заданому значенню деформації (Таблиця 3.1 з).

Таблиця 3.1 з

ε_i %	$\sigma_i \downarrow$ (MPa)
15	1641,65
14	1080,743
13	729,126
12	526,503
11	412,575
10	327,047
9	209,621
8	0

Таким чином, ми можемо доповнити інформацію про криву розвантаження з необхідної точки на діаграмі матеріалу.

3.1.2. Розбудова термомеханічної поверхні

Проведемо числову обробку **інших експериментальних** даних для термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу, які були зібрані в роботах [40, 167].

Після обробки експериментальних результатів побудовано таблиці і відповідні діаграми для різних значень температури (відповідно 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0 градусів Цельсія). Результати наведемо нижче у вигляді таблиць. Напруження задаємо у безрозмірному вигляді σ / σ_s , $\sigma_s = \sigma_s(T)_{T=110^{\circ}C}$. Лінії діаграм позначені як $\sigma >$ відповідають активному навантаженню зразка, а знак $\sigma <$ означає розвантаження.

Таблиця 3.2 $T = 100^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (100)$	$\sigma < (100)$
1	0	0	0
2	0,2	0,164	0,164
3	0,4	0,328	0,328
4	0,6	0,492	0,45
5	0,8	0,656	0,45
6-31	1 - 6	0,82	0,45
32	6,2	0,82	0,574
33	6,4	0,82	0,738
34	6,6	0,902	0,902
35	6,8	1,066	1,066
36	7	1,1	---
37	7,2	1,12	---
38	7,4	1,12	---
39	7,6	1,13	---
40	7,8	1,14	---
41	8	1,15	---
42	8,2	1,16	---

43	8,4	1,17	---
44	8,6	1,18	---
45	8,8	1,19	---
46	9	1,2	---
47	9,2	1,21	---
48	9,4	1,22	---
49	9,6	1,23	---
50	9,8	1,24	---
51	10	1,25	---
52	10,2	1,26	---
53	10,4	1,27	---
54	10,6	1,28	---
55	10,8	1,29	---
56	11	1,3	---
57	11,2	1,31	---
58	11,4	1,32	---
59	11,6	1,33	---
60	11,8	1,34	---
61	12	1,35	---
62	12,2	1,36	---
63	12,4	1,37	---
64	12,6	1,38	---
65	12,8	1,39	---
66	13	1,4	---
67	13,2	1,41	---
68	13,4	1,42	---
69	13,5	1,425	---
70	13,6	1,43	---
71	13,8	1,44	---

72	14	1,45	---
73	14,2	1,46	---
74	14,4	1,47	---
75	14,6	1,48	---
76	14,8	1,49	---
77	15	1,5	---

Аналітичний вираз безрозмірної залежності $\sigma = f_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0;15]$ представлених в таблиці 3.2 результатів може бути отримано за допомогою загальної інтерполяційної формули:

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2 \right) \cdot \sigma_i + \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot \sigma_{i+1} + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot \sigma_{i+2} + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot \sigma_{i+3} ,$$

яка записується послідовно на окремих сусідніх відрізках. Наведемо приклади.

Вираз залежності $\sigma = f_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0;0,6]$ буде таким:

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2 \right) \cdot 0 + \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 0,164 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 0,328 + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 0,426 ,$$

$$\xi = \frac{\varepsilon - 0}{0,6}, \xi \in [0;1].$$

Для сусідньої ділянки $\sigma = f_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,6;1,2]$ отримаємо:

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \left(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2 \right) \cdot 0,426 + \frac{9}{2} \left(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 0,656 + \frac{9}{2} \left(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi \right) \cdot 0,82 + \frac{1}{2} \left(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi \right) \cdot 0,82 ,$$

$$\xi = \frac{\varepsilon - 0,6}{0,6}, \xi \in [0;1].$$

Окремо описується ділянка діаграми для сталого значення напруження

$$\sigma \equiv 0,82, \varepsilon \in [1;6,4].$$

Наступна ділянка $\sigma = f_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [6,4; 7]$ описується виразом:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \frac{1}{2}(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2) \cdot 0,82 + \frac{9}{2}(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi) \cdot 0,902 + \\ & + \frac{9}{2}(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi) \cdot 1,066 + \frac{1}{2}(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi) \cdot 1,1, \\ \xi = & \frac{\varepsilon - 6,4}{0,6}, \xi \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Для останньої ділянки пропонується збільшити крок інтерполяції оскільки тут графік функції $\sigma = f_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [7; 15]$ змінюється не так круто:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \frac{1}{2}(-9\xi^3 + 18\xi^2 - 11\xi + 2) \cdot 1,1 + \frac{9}{2}(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi) \cdot 1,237 + \\ & + \frac{9}{2}(-3\xi^3 + 4\xi^2 - \xi) \cdot 1,413 + \frac{1}{2}(9\xi^3 - 9\xi^2 + 2\xi) \cdot 1,5, \\ \xi = & \frac{\varepsilon - 7}{8}, \xi \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Таблиця 3.3 $T = 90^\circ \text{C}$

N	ε	$\sigma > (90)$	$\sigma < (90)$
1	0	0	0
2	0,2	0,156	0,156
3	0,4	0,312	0,312
4	0,6	0,468	0,41
5	0,8	0,624	0,41
6-31	1 - 6	0,78	0,41
32	6,2	0,78	0,546
33	6,4	0,78	0,702
34	6,6	0,858	0,858
35	6,8	1,014	1,014
36	7	1,05	---
37	7,2	1,108	---
38	7,4	1,116	---
39	7,6	1,124	---

40	7,8	1,132	---
41	8	1,14	---
42	8,2	1,148	---
43	8,4	1,156	---
44	8,6	1,164	---
45	8,8	1,172	---
46	9	1,18	---
47	9,2	1,188	---
48	9,4	1,196	---
49	9,6	1,204	---
50	9,8	1,212	---
51	10	1,22	---
52	10,2	1,228	---
53	10,4	1,236	---
54	10,6	1,244	---
55	10,8	1,252	---
56	11	1,26	---
57	11,2	1,268	---
58	11,4	1,276	---
59	11,6	1,284	---
60	11,8	1,292	---
61	12	1,3	---
62	12,2	1,308	---
63	12,4	1,316	---
64	12,6	1,324	---
65	12,8	1,332	---
66	13	1,34	---
67	13,2	1,348	---
68	13,4	1,356	---

69	13,5	1,36	---
70	13,6	1,364	---

Таблица 3.4 $T = 80^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (80)$	$\sigma < (80)$
1	0	0	0
2	0,2	0,134	0,134
3	0,4	0,268	0,268
4	0,6	0,402	0,38
5	0,8	0,536	0,38
6-31	1 - 6	0,67	0,38
32	6,2	0,67	0,469
33	6,4	0,67	0,603
34	6,6	0,737	0,737
35	6,8	0,871	0,871
36	7	0,8786	---
37	7,2	0,8862	---
38	7,4	0,8938	---
39	7,6	0,9014	---
40	7,8	0,909	---
41	8	0,9166	---
42	8,2	0,9242	---
43	8,4	0,9318	---
44	8,6	0,9394	---
45	8,8	0,947	---
46	9	0,9546	---
47	9,2	0,9622	---
48	9,4	0,9698	---

49	9,6	0,9774	---
50	9,8	0,985	---
51	10	0,9926	---
52	10,2	1,0002	---
53	10,4	1,0078	---
54	10,6	1,0154	---
55	10,8	1,023	---
56	11	1,0306	---
57	11,2	1,0382	---
58	11,4	1,0458	---
59	11,6	1,0534	---
60	11,8	1,061	---
61	12	1,0686	---
62	12,2	1,0762	---
63	12,4	1,0838	---
64	12,6	1,0914	---
65	12,8	1,099	---
66	13	1,1066	---
67	13,2	1,1142	---
68	13,4	1,1218	---
69	13,5	1,1256	---
70	13,6	1,1294	---

Таблиця 3.5 $T = 70^{\circ}C$

N	ε	$\sigma_{>(70)}$	$\sigma_{<(70)}$
1	0	0	0
2	0,2	0,118	0,118
3	0,4	0,236	0,236
4	0,6	0,354	0,3

5	0,8	0,472	0,3
6-30	1 - 5,8	0,59	0,3
31	6	0,59	0,413
32	6,2	0,59	0,531
33	6,4	0,649	0,649
34	6,6	0,767	0,767
35	6,8	0,885	0,885
36	7	0,899	---
37	7,2	0,899	---
38	7,4	0,906	---
39	7,6	0,913	---
40	7,8	0,92	---
41	8	0,927	---
42	8,2	0,934	---
43	8,4	0,941	---
44	8,6	0,948	---
45	8,8	0,955	---
46	9	0,962	---
47	9,2	0,969	---
48	9,4	0,976	---
49	9,6	0,983	---
50	9,8	0,99	---
51	10	0,997	---
52	10,2	1,004	---
53	10,4	1,011	---
54	10,6	1,018	---
55	10,8	1,025	---
56	11	1,032	---
57	11,2	1,039	---

58	11,4	1,046	---
59	11,6	1,053	---
60	11,8	1,06	---
61	12	1,067	---
62	12,2	1,074	---
63	12,4	1,081	---
64	12,6	1,088	---
65	12,8	1,095	---
66	13	1,102	---
67	13,2	1,109	---
68	13,4	1,116	---
69	13,5	1,1195	---
70	13,6	1,123	---

Таблица 3.6 $T = 60^{\circ}C$

N	ϵ	$\sigma > (60)$	$\sigma < (60)$
1	0	0	0
2	0,2	0,088	0,088
3	0,4	0,176	0,176
4	0,6	0,264	0,23
5	0,8	0,352	0,23
6-29	1 - 5,6	0,44	0,23
30	5,8	0,44	0,264
31	6	0,44	0,352
32	6,2	0,44	0,44
33	6,4	0,528	0,528
34	6,6	0,616	0,616
35	6,8	0,704	0,704
36	7	0,7106	---
37	7,2	0,7172	---

38	7,4	0,7238	---
39	7,6	0,7304	---
40	7,8	0,737	---
41	8	0,7436	---
42	8,2	0,7502	---
43	8,4	0,7568	---
44	8,6	0,7634	---
45	8,8	0,77	---
46	9	0,7766	---
47	9,2	0,7832	---
48	9,4	0,7898	---
49	9,6	0,7964	---
50	9,8	0,803	---
51	10	0,8096	---
52	10,2	0,8162	---
53	10,4	0,8228	---
54	10,6	0,8294	---
55	10,8	0,836	---
56	11	0,8426	---
57	11,2	0,8492	---
58	11,4	0,8558	---
59	11,6	0,8624	---
60	11,8	0,869	---
61	12	0,8756	---
62	12,2	0,8822	---
63	12,4	0,8888	---
64	12,6	0,8954	---
65	12,8	0,902	---
66	13	0,9086	---

67	13,2	0,9152	---
68	13,4	0,9218	---
69	13,5	0,9251	---
70	13,6	0,9284	---

Таблица 3.7 $T = 50^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (50)$	$\sigma < (50)$
1	0	0	0
2	0,2	0,084	0,084
3	0,4	0,168	0,15
4	0,6	0,252	0,15
5	0,8	0,336	0,15
6-26	1 - 5	0,42	0,15
27	5,2	0,42	0,168
28	5,4	0,42	0,252
29	5,6	0,42	0,336
30	5,8	0,42	0,42
31	6	0,504	0,504
32	6,2	0,588	0,588
33	6,4	0,672	0,672
34	6,6	0,756	0,756
35	6,8	0,84	0,84
36	7	0,8464	---
37	7,2	0,8528	---
38	7,4	0,8592	---
39	7,6	0,8656	---
40	7,8	0,872	---
41	8	0,8784	---
42	8,2	0,8848	---

43	8,4	0,8912	---
44	8,6	0,8976	---
45	8,8	0,904	---
46	9	0,9104	---
47	9,2	0,9168	---
48	9,4	0,9232	---
49	9,6	0,9296	---
50	9,8	0,936	---
51	10	0,9424	---
52	10,2	0,9488	---
53	10,4	0,9552	---
54	10,6	0,9616	---
55	10,8	0,968	---
56	11	0,9744	---
57	11,2	0,9808	---
58	11,4	0,9872	---
59	11,6	0,9936	---
60	11,8	1	---
61	12	1,0064	---
62	12,2	1,0128	---
63	12,4	1,0192	---
64	12,6	1,0256	---
65	12,8	1,032	---
66	13	1,0384	---
67	13,2	1,0448	---
68	13,4	1,0512	---
69	13,5	1,0544	---
70	13,6	1,0576	---

Таблица 3.8 $T = 40^{\circ}C$

N	ε	0	$\sigma < (40)$
1	0	0,078	0
2	0,2	0,156	0,07
3	0,4	0,234	0,07
4	0,6	0,312	0,07
5-25	0,8 - 4,8	0,39	0,07
26	5	0,39	0,117
27	5,2	0,39	0,195
28	5,4	0,39	0,273
29	5,6	0,429	0,351
30	5,8	0,507	0,429
31	6	0,585	0,507
32	6,2	0,663	0,585
33	6,4	0,741	0,663
34	6,6	0,819	0,741
35	6,8	0,825	0,819
36	7	0,831	---
37	7,2	0,837	---
38	7,4	0,843	---
39	7,6	0,849	---
40	7,8	0,855	---
41	8	0,861	---
42	8,2	0,867	---
43	8,4	0,873	---
44	8,6	0,879	---
45	8,8	0,885	---
46	9	0,891	---
47	9,2	0,897	---

48	9,4	0,903	---
49	9,6	0,909	---
50	9,8	0,915	---
51	10	0,921	---
52	10,2	0,927	---
53	10,4	0,933	---
54	10,6	0,939	---
55	10,8	0,945	---
56	11	0,951	---
57	11,2	0,957	---
58	11,4	0,963	---
59	11,6	0,969	---
60	11,8	0,975	---
61	12	0,981	---
62	12,2	0,987	---
63	12,4	0,993	---
64	12,6	0,999	---
65	12,8	1,005	---
66	13	1,011	---
67	13,2	1,017	---
68	13,4	1,02	---
69	13,5	1,023	---
70	13,6	1,029	---

Таблиця 3.9 $T = 30^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (30)$	$\sigma < (30)$
1	0	0	0
2	0,2	0,062	0

3	0,4	0,124	0
4	0,6	0,186	0
5	0,8	0,248	0
6-21	1 - 4	0,31	0
22	4,2	0,31	0,062
23	4,4	0,31	0,124
24	4,6	0,31	0,186
25	4,8	0,31	0,248
26	5	0,31	0,31
27	5,2	0,372	0,372
28	5,4	0,434	0,434
29	5,6	0,496	0,496
30	5,8	0,558	0,558
31	6	0,62	0,62
32	6,2	0,682	0,682
33	6,4	0,744	0,744
34	6,6	0,806	0,806
35	6,8	0,868	0,868
36	7	0,8742	---
37	7,2	0,8804	---
38	7,4	0,8866	---
39	7,6	0,8928	---
40	7,8	0,899	---
41	8	0,9052	---
42	8,2	0,9114	---
43	8,4	0,9176	---
44	8,6	0,9238	---
45	8,8	0,93	---
46	9	0,9362	---

47	9,2	0,9424	---
48	9,4	0,9486	---
49	9,6	0,9548	---
50	9,8	0,961	---
51	10	0,9672	---
52	10,2	0,9734	---
53	10,4	0,9796	---
54	10,6	0,9858	---
55	10,8	0,992	---
56	11	0,9982	---
57	11,2	1,0044	---
58	11,4	1,0106	---
59	11,6	1,0168	---
60	11,8	1,023	---
61	12	1,0292	---
62	12,2	1,0354	---
63	12,4	1,0416	---
64	12,6	1,0478	---
65	12,8	1,054	---
66	13	1,0602	---
67	13,2	1,0664	---
68	13,4	1,0726	---
69	13,5	1,0757	---
70	13,6	1,0788	---

Таблица 3.10 $T = 20^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (20)$	$\sigma < (20)$
1	0	0	0
2	0,2	0,047	0

3	0,4	0,093	0
4	0,6	0,14	0
5	0,8	0,187	0
6	1	0,23	0
7-16	1,2 - 3	0,28	0
17	3,2	0,28	0,023
18	3,4	0,28	0,07
19	3,6	0,28	0,117
20	3,8	0,28	0,163
21	4	0,28	0,21
22	4,2	0,28	0,257
23	4,4	0,303	0,303
24	4,6	0,35	0,35
25	4,8	0,397	0,397
26	5	0,443	0,443
27	5,2	0,49	0,49
28	5,4	0,537	0,537
29	5,6	0,583	0,583
30	5,8	0,63	0,63
31	6	0,677	0,677
32	6,2	0,723	0,723
33	6,4	0,77	0,77
34	6,6	0,817	0,817
35	6,8	0,863	0,863
36	7	0,869	---
37	7,2	0,875	---
38	7,4	0,881	---
39	7,6	0,887	---
40	7,8	0,893	---

41	8	0,899	---
42	8,2	0,905	---
43	8,4	0,911	---
44	8,6	0,917	---
45	8,8	0,923	---
46	9	0,929	---
47	9,2	0,935	---
48	9,4	0,941	---
49	9,6	0,947	---
50	9,8	0,953	---
51	10	0,959	---
52	10,2	0,965	---
53	10,4	0,971	---
54	10,6	0,977	---
55	10,8	0,983	---
56	11	0,989	---
57	11,2	0,995	---
58	11,4	1,001	---
59	11,6	1,007	---
60	11,8	1,013	---
61	12	1,019	---
62	12,2	1,025	---
63	12,4	1,031	---
64	12,6	1,037	---
65	12,8	1,043	---
66	13	1,049	---
67	13,2	1,055	---
68	13,4	1,061	---
69	13,5	1,064	---

Таблица 3.11 $T = 10^{\circ}C$

N	ε	$\sigma > (10)$	$\sigma < (10)$
1	0	0	0
2	0,2	0,031	0
3	0,4	0,063	0
4	0,6	0,094	0
5	0,8	0,126	0
6	1	0,157	0
7	1,2	0,189	0
8-15	1,4 – 2,8	0,22	0
16	3	0,22	0,016
17	3,2	0,22	0,047
18	3,4	0,22	0,079
19	3,6	0,22	0,11
20	3,8	0,22	0,141
21	4	0,22	0,173
22	4,2	0,22	0,204
23	4,4	0,236	0,236
24	4,6	0,267	0,267
25	4,8	0,299	0,299
26	5	0,33	0,33
27	5,2	0,361	0,361
28	5,4	0,393	0,393
29	5,6	0,424	0,424
30	5,8	0,456	0,456
31	6	0,487	0,487
32	6,2	0,519	0,519
33	6,4	0,55	0,55

34	6,6	0,581	0,581
35	6,8	0,613	0,613
36	7	0,619	---
37	7,2	0,625	---
38	7,4	0,631	---
39	7,6	0,637	---
40	7,8	0,643	---
41	8	0,649	---
42	8,2	0,655	---
43	8,4	0,661	---
44	8,6	0,667	---
45	8,8	0,673	---
46	9	0,679	---
47	9,2	0,685	---
48	9,4	0,691	---
49	9,6	0,697	---
50	9,8	0,703	---
51	10	0,709	---
52	10,2	0,715	---
53	10,4	0,721	---
54	10,6	0,727	---
55	10,8	0,733	---
56	11	0,739	---
57	11,2	0,745	---
58	11,4	0,751	---
59	11,6	0,757	---
60	11,8	0,763	---
61	12	0,769	---
62	12,2	0,775	---

63	12,4	0,781	---
64	12,6	0,787	---
65	12,8	0,793	---
66	13	0,799	---
67	13,2	0,805	---
68	13,4	0,811	---
69	13,5	0,814	---
70	13,6	0,817	---
71	13,8	0,823	---
72	14	0,829	---

Для отримання розрахункових формул уточненої моделі (параграф 2.2.) будується термомеханічна поверхня. Для цього розв'язується ще одна допоміжна задача. Нехай в тривимірному просторі ε, T, σ задано координати чотирьох точок $P_i(\varepsilon_i, T_i, \sigma_i), i = 1; 2; 3; 4$. Рівняння термомеханічної поверхні, яка проходить через ці точки запишемо так [34]:

$$\sigma = a\varepsilon + bT + c\varepsilon T + d.$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d розшуковуються з системи, яка побудована на основі цього виразу для заданих чотирьох точок P_i поверхні. В результаті отримаємо $d = \sigma_1 - a\varepsilon_1 - bT_1 - c\varepsilon_1T_1$. Після виключення з системи величини d відомим способом знаходяться невідомі a, b, c . Остаточо можна записати:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\begin{aligned} \Delta = & (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(T_3 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\ & - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\ & + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (T_3 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (\sigma_2 - \sigma_1)[(T_3 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\
&\quad - (\sigma_3 - \sigma_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (T_4 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\
&\quad + (\sigma_4 - \sigma_1)[(T_2 - T_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (T_3 - T_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \\
\Delta_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(\sigma_3 - \sigma_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_4 - \sigma_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1)] - \\
&\quad - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(\sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon_4 T_4 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_4 - \sigma_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)] + \\
&\quad + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(\sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon_3 T_3 - \varepsilon_1 T_1) - (\sigma_3 - \sigma_1)(\varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_1 T_1)], \\
\Delta_3 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[(T_3 - T_1)(\sigma_4 - \sigma_1) - (T_4 - T_1)(\sigma_3 - \sigma_1)] - \\
&\quad - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\sigma_4 - \sigma_1) - (T_4 - T_1)(\sigma_2 - \sigma_1)] + \\
&\quad + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)[(T_2 - T_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - (T_3 - T_1)(\sigma_2 - \sigma_1)].
\end{aligned}$$

Наведені формули дозволяють будувати ТМП по двом сусіднім діаграмам отриманих для різних значень температури $T = T_1$ і $T = T_2$ на інтервалі $T \in [T_1; T_2]$.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а вже потім переходить в пластичний стан (поверхня зміцнення). Аналогічним чином термомеханічна поверхню задаємо і при розвантаженні.

Таким чином, маючи ТМП та закон, за яким змінюється температура в тій чи іншій точці зразка, можна провести уточнення локальної діаграми матеріалу.

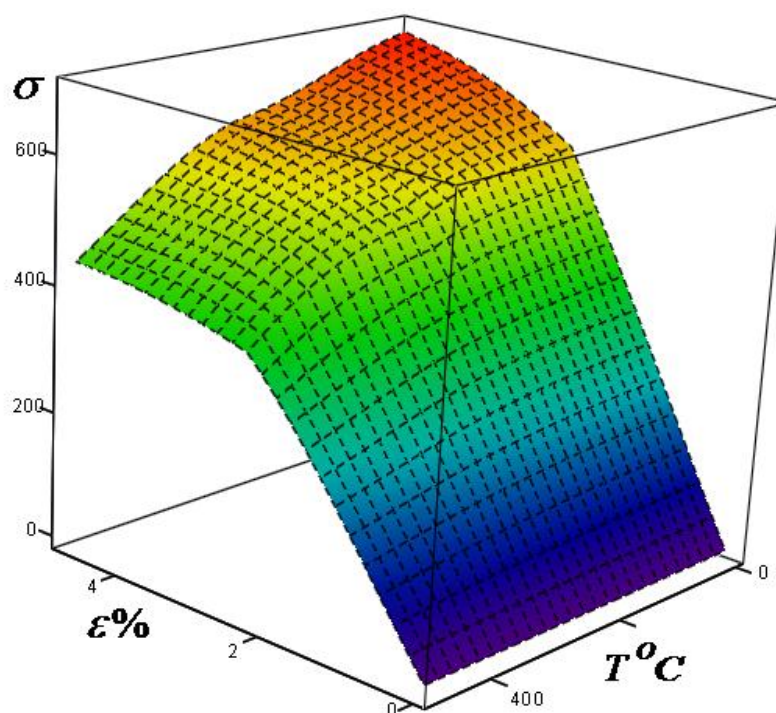


Рисунок 3.2. Термомеханічна поверхня для пружно-пластичного конструкційного матеріалу

Приклад побудови термомеханічної поверхні для пружно-пластичного конструкційного матеріалу EI395M за допомогою двовимірних сплайнів наведено на рисунку 3.2.

Інформацію пов'язану з розбудовою таких поверхонь (дані матеріалу, програма для обчислень) можна знайти в додатку.

3.2. Нестационарне навантаження одновимірного стрижня з псевдо-пружно-пластичного матеріалу

Розглянемо випадок активного навантаження одновимірного стрижня. Визначимо швидкість розповсюдження границі фазового переходу вздовж одновимірного стрижня $x \in [0; L]$. На краю $x = 0$ задаємо швидкість $v = V_0$, з якою розтягується зразок. Край $x = L$ закріплено (тут $v = 0$). Основними шуканими величинами є: швидкість зміщення вздовж осі стрижня $v(x, t)$; напруження $\sigma(x, t)$; деформація $\varepsilon(x, t)$ і температура $T(x, t)$.

Для визначення невідомих величин запишемо одновимірний варіант повної системи рівнянь:

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma + \sigma_0 e), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} (1 + e), \quad e = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \varepsilon - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_s], \\ E_2 (\varepsilon - \varepsilon_s) + \sigma_s - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in [\varepsilon_s, \varepsilon_c], \\ E_3 (\varepsilon - \varepsilon_c) + \sigma_c - K \alpha_T (T - T_0) & , \quad \varepsilon \in (\varepsilon_c, \infty), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_*.$$

де E_1, E_2, E_3 модулі локальної діаграми матеріалу. Через W_* позначена функція, що враховує тепло, яке виникає в точках тіла при проходженні повільної хвилі фазового переходу.

Перейдемо до безрозмірних нормованих шуканих величин.

Для числового розв'язання системи (3.1) введемо сітки за часом t і по координаті x :

$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_x = \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h; x_0 = 0; h = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n \right\}. \quad (3.2)$$

Тоді явну різницеву систему еквівалентну системі (3.1) можна записати так

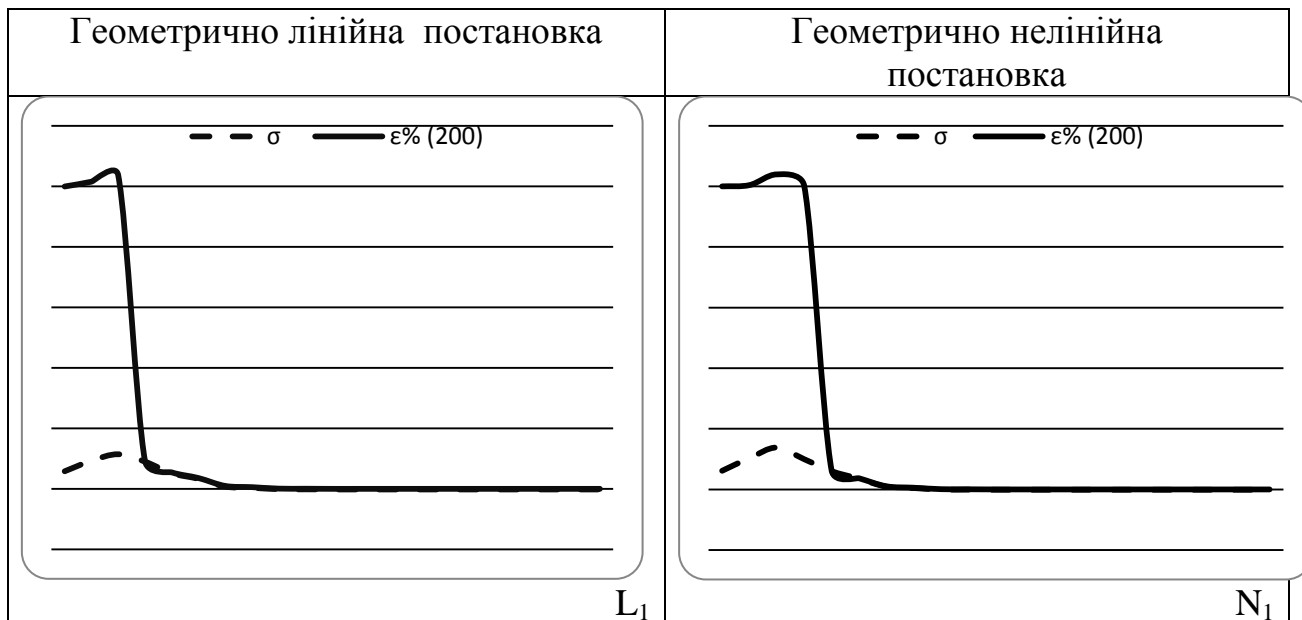
$$\begin{aligned} v^{p+1} &= v^p + \tau k_{1*} \lambda(\sigma^p + k_{4*} \sigma_0^p e^p), \\ \varepsilon^{p+1} &= \varepsilon^p + \tau \lambda(v^p)(1 + k_{4*} e^p), \\ T^{p+1} &= T^p + \tau k_{3*} \mu(T^p) + \tau W_*^p t_*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

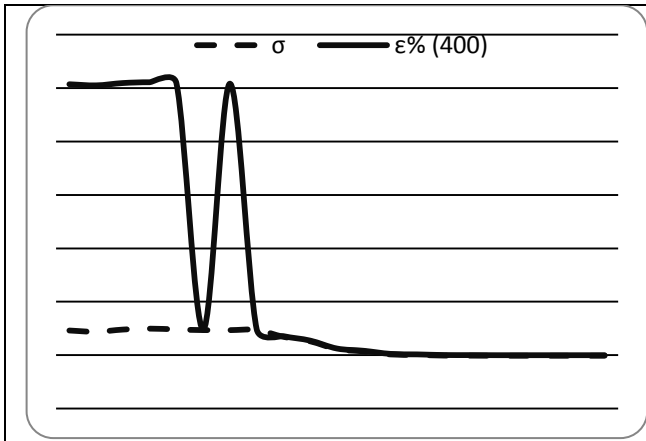
Зазначимо, що величина напруження в довільний момент часу може бути визначена безпосередньо по відповідній формулі з (3.1).

Підвищена точність обчислень похідних досягається за допомогою різницевої формул підвищеної точності, які наведені в першому розділі.

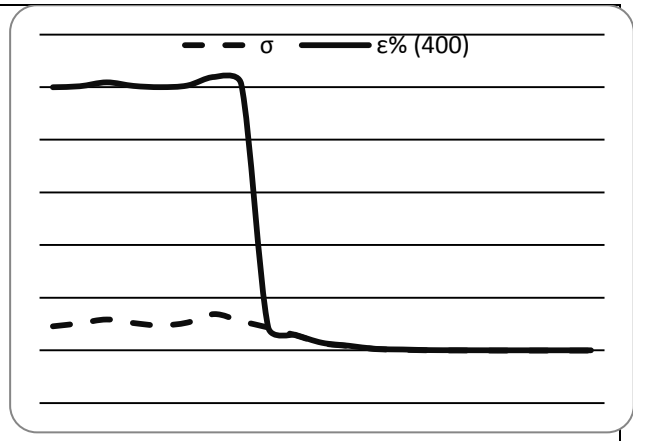
Результати числового експерименту наведено на рисунках 3.3-3.8. Тут показано розподіл деформації та напруження вздовж стрижня для різних моментів часу і проведено порівняння результатів.

Порівняння результатів розповсюдження повільної хвилі деформації в одновимірному стрижні при великих (кінцевих) значеннях деформації, отриманих в геометрично лінійній (L) і нелінійній (N) постановках.

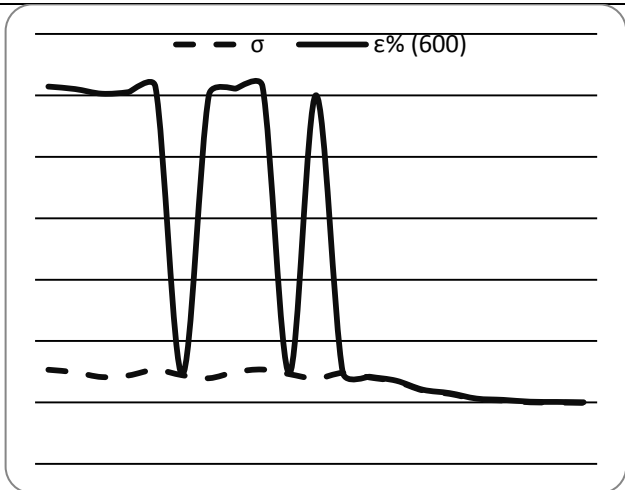




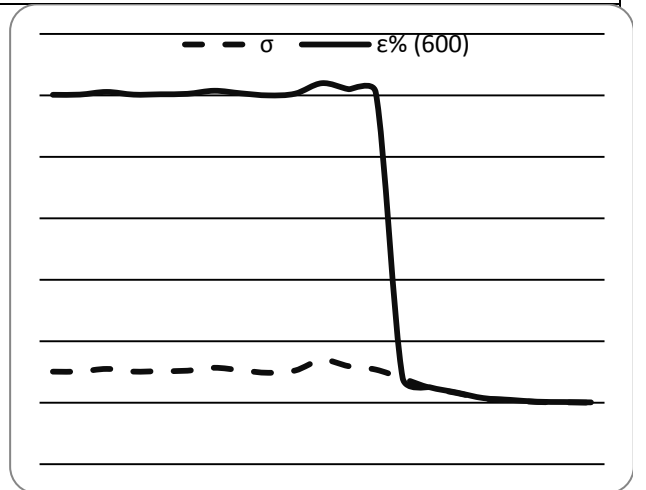
L₂



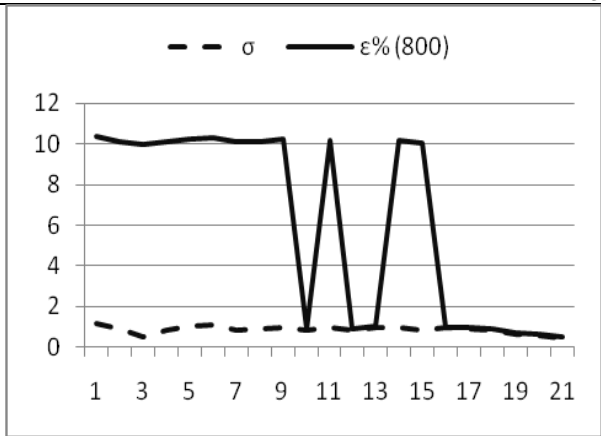
N₂



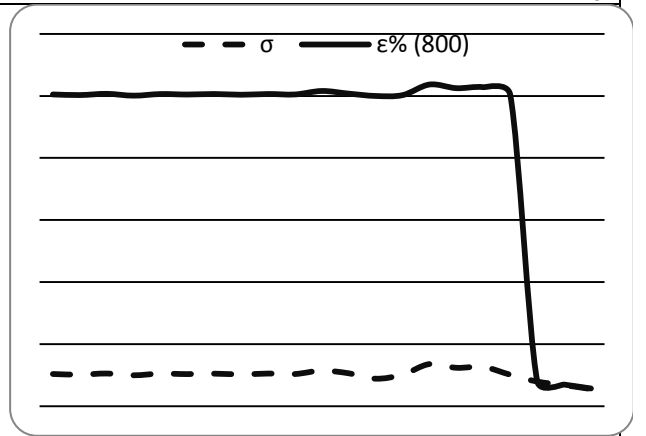
L₃



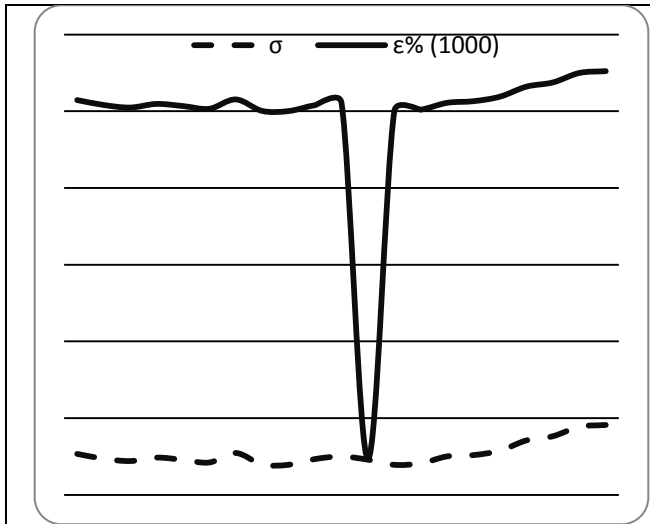
N₃



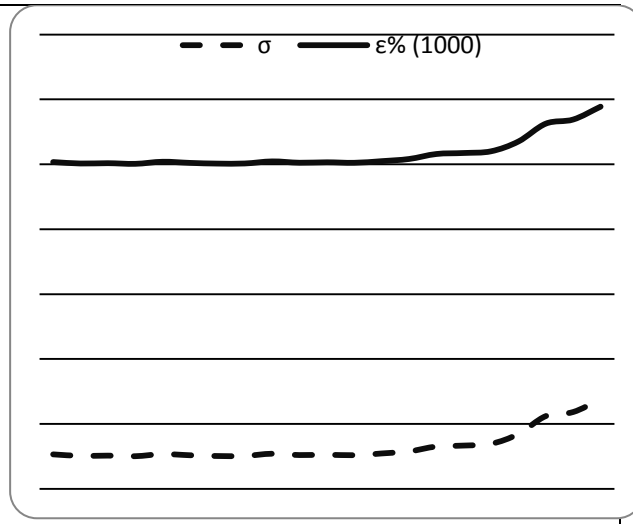
L₄



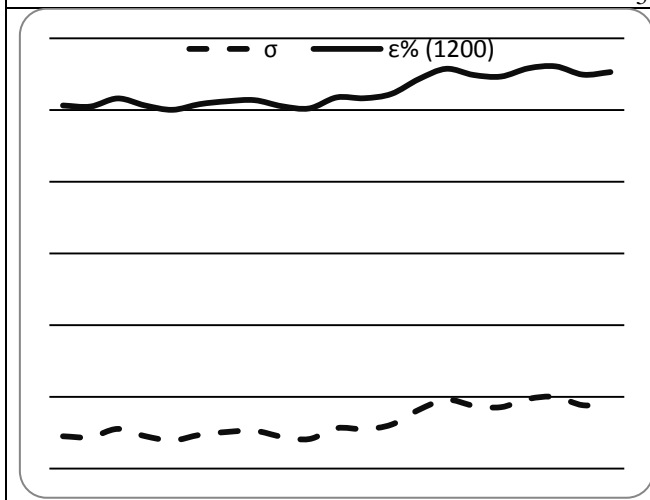
N₄



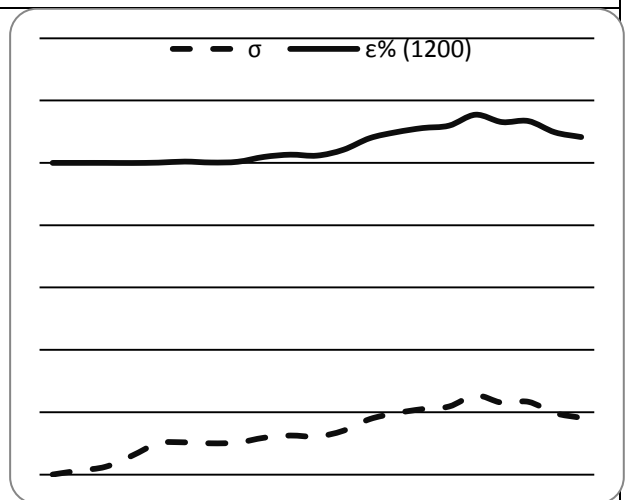
L₅



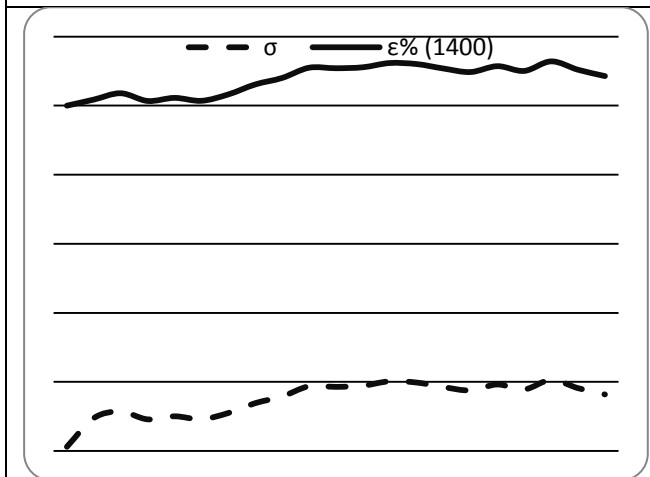
N₅



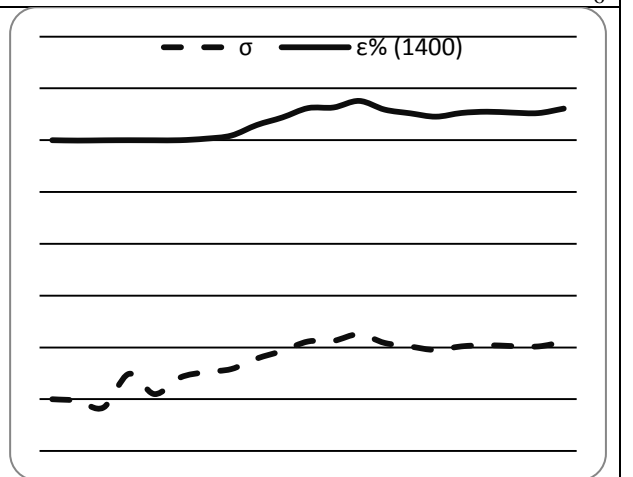
L₆



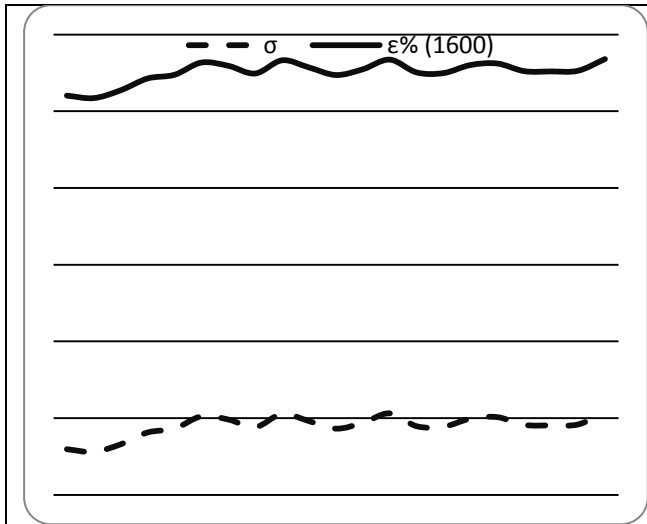
N₆



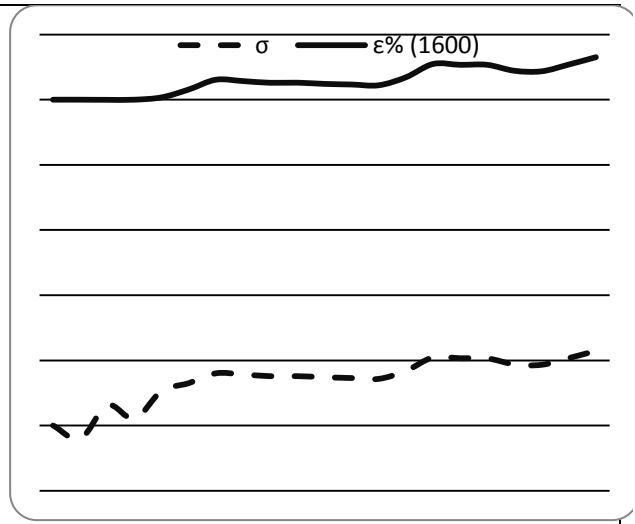
L₇



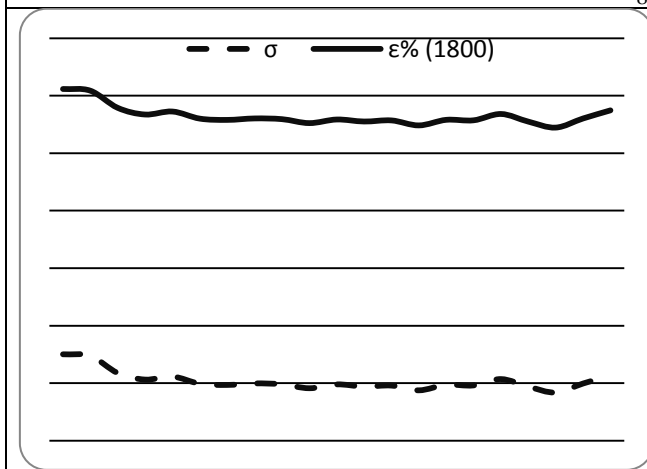
N₇



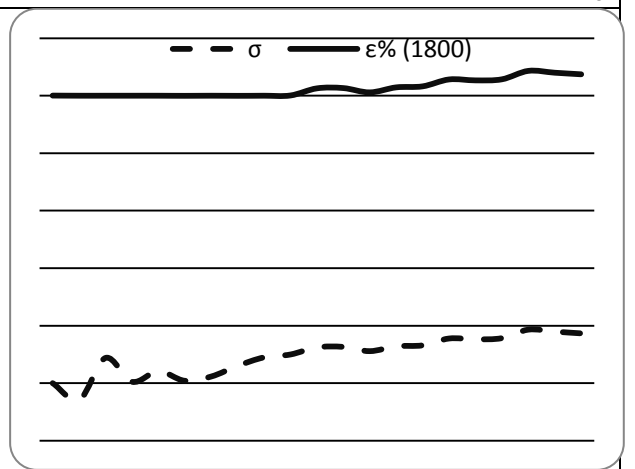
L₈



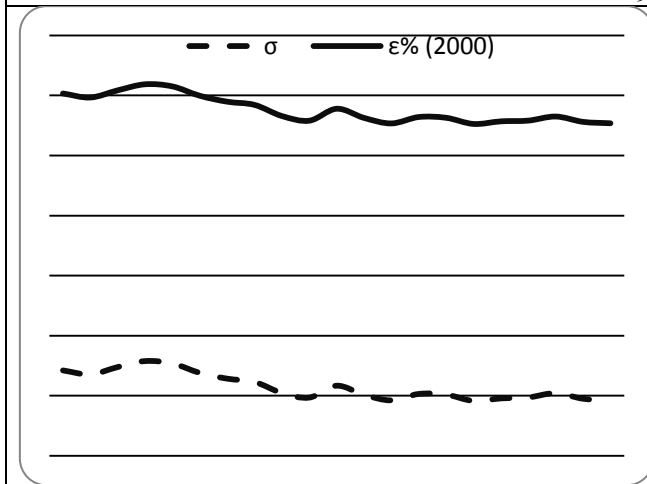
N₈



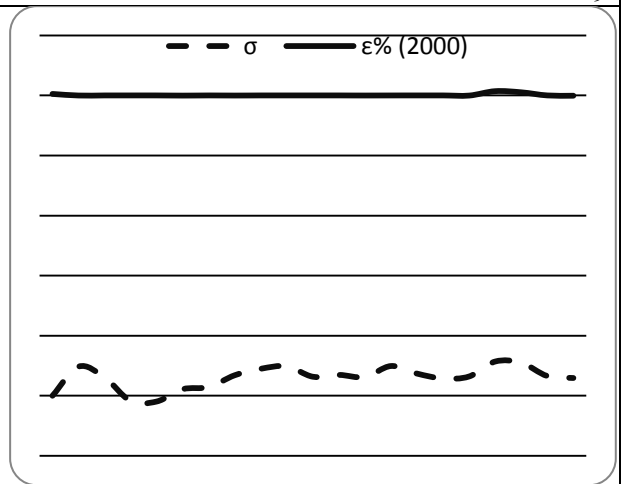
L₉



N₉



L₁₀



N₁₀

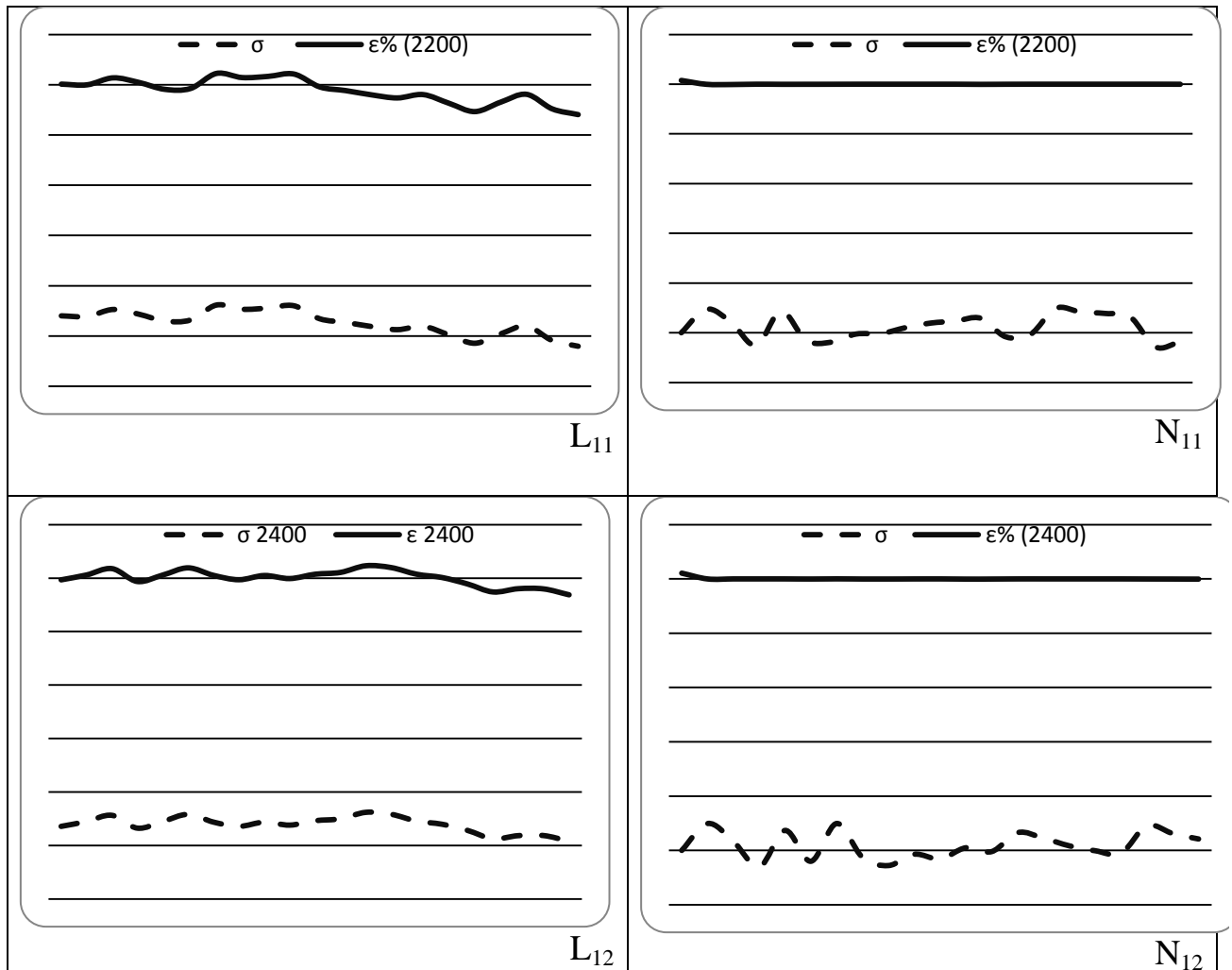
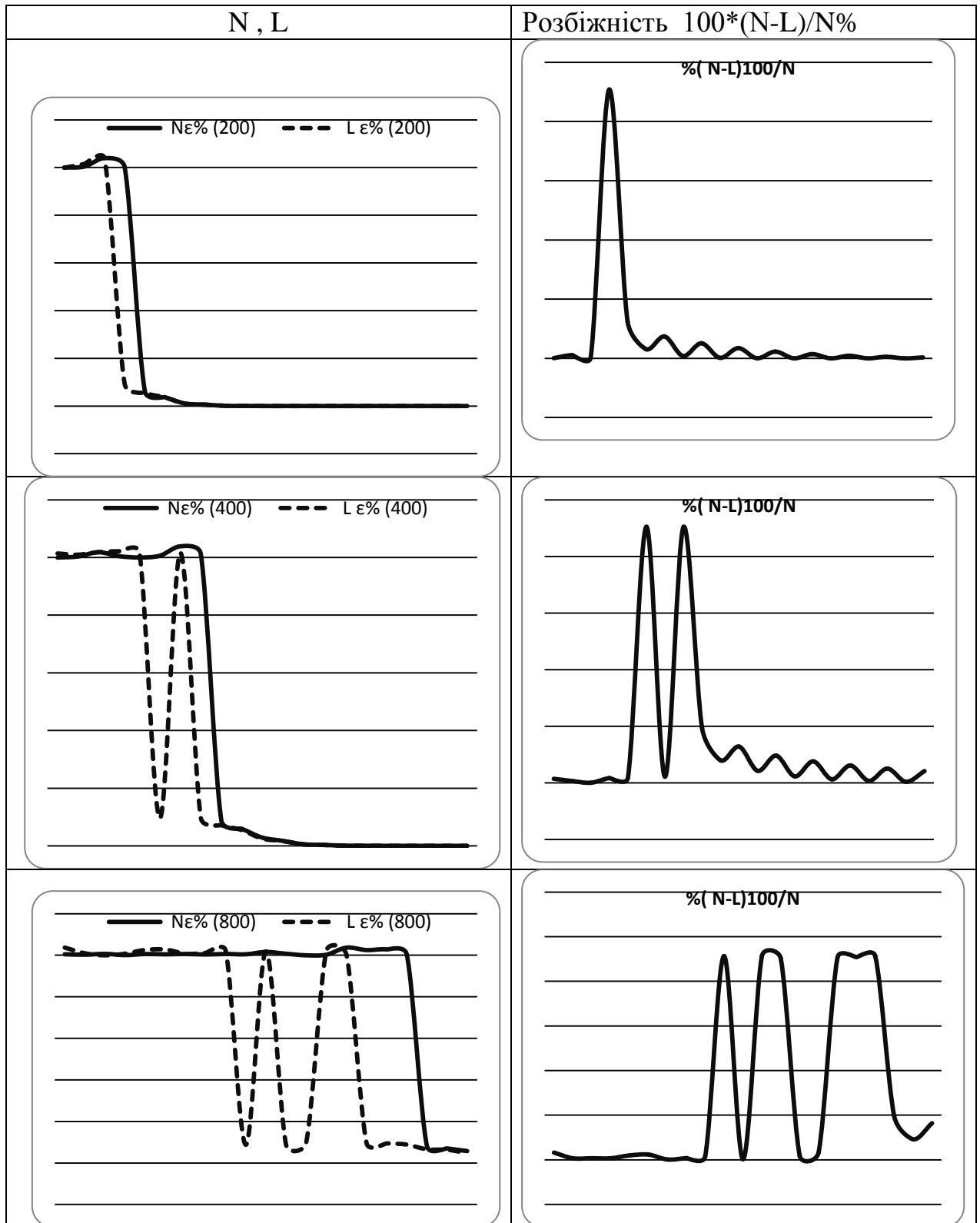
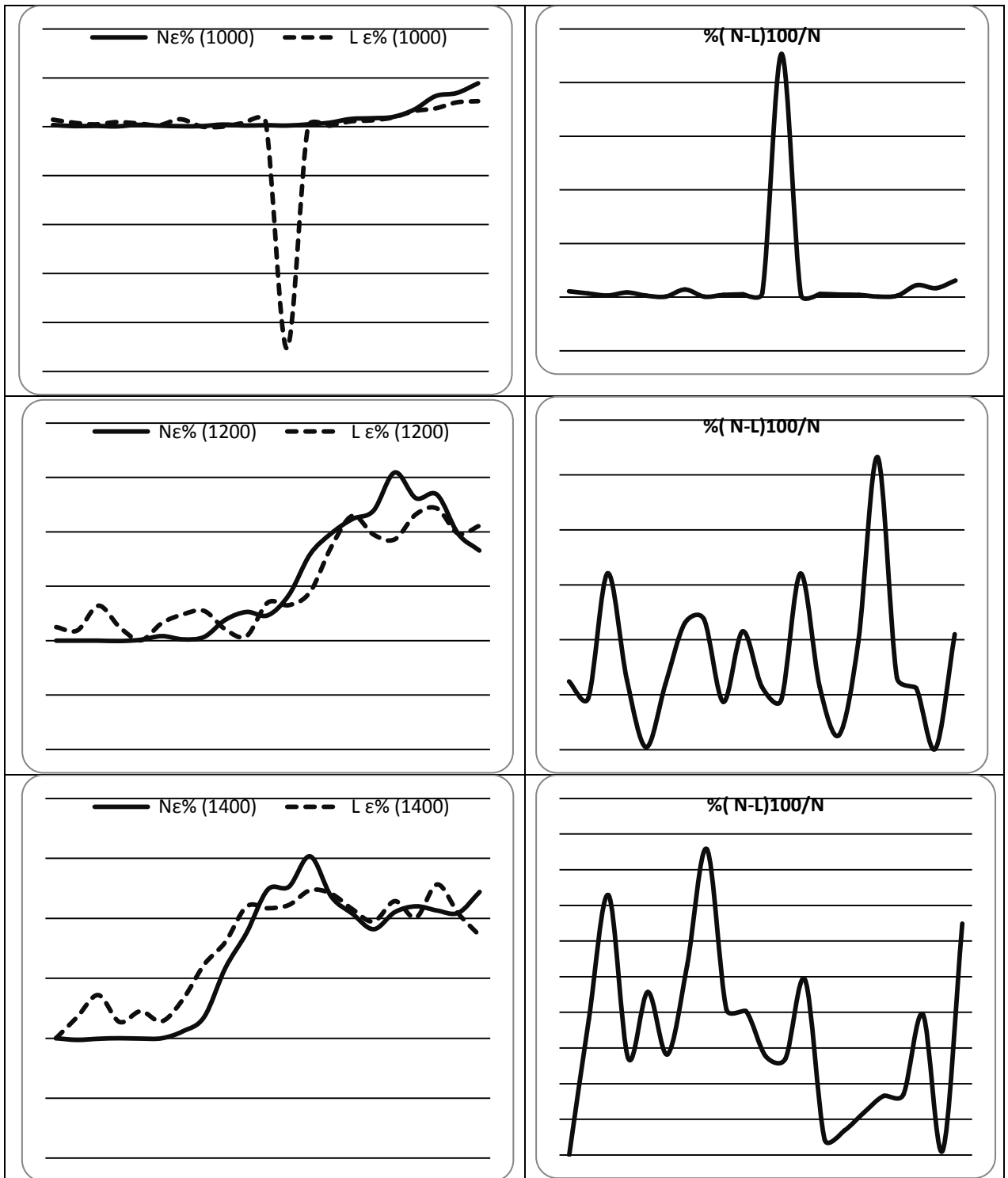
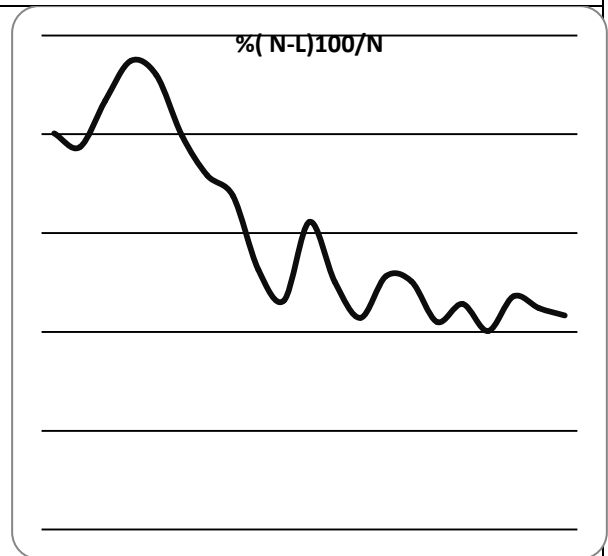
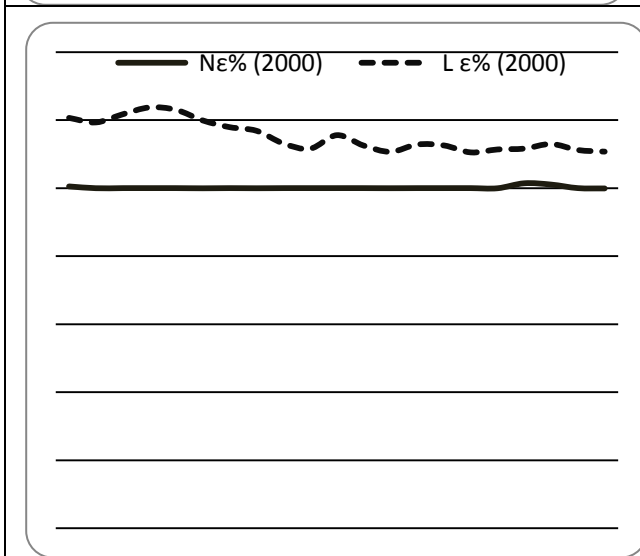
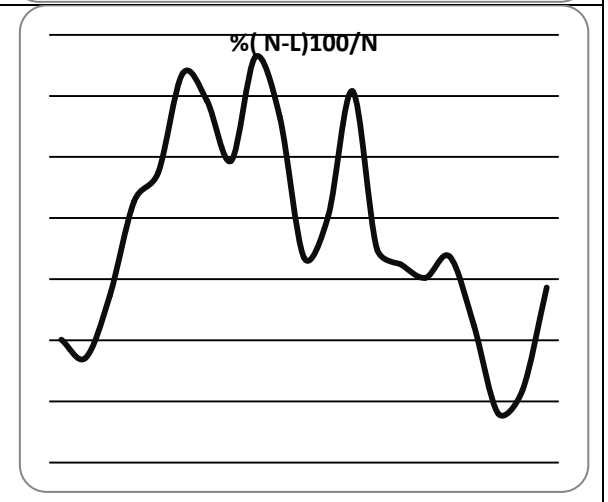
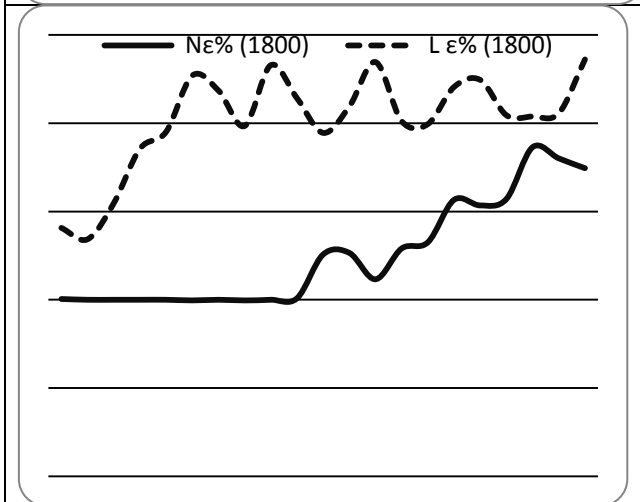
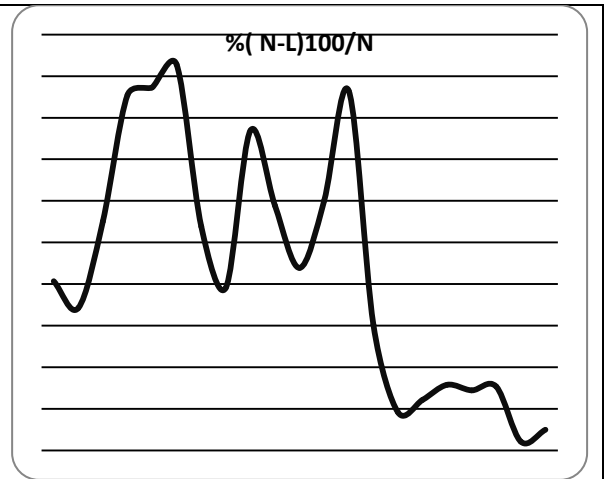
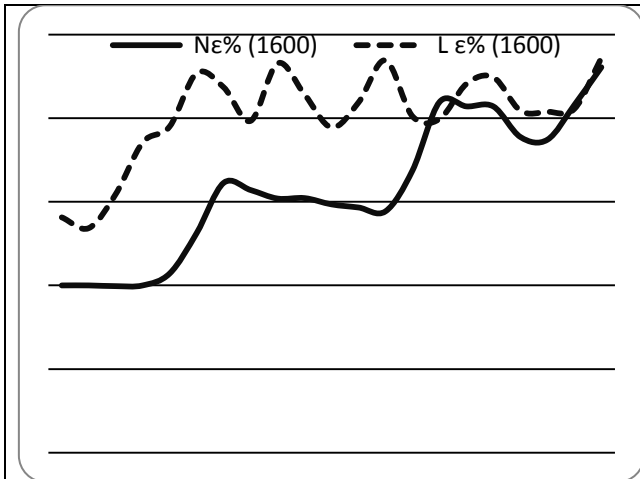


Рисунок 3.3. Розповсюдження повільної хвилі деформації в стрижени при значеннях $\epsilon\% \in [0;10]$, отриманих в геометрично лінійній (L) і нелінійній (N) постановках

Проведемо порівняння результатів розповсюдження повільної хвилі в одновимірному стрижени при великих (кінцевих) значеннях деформації, отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках і визначимо розбіжність результатів у %. Оцінимо вплив величини кроку інтегрування за часом на збіжність числових результатів.







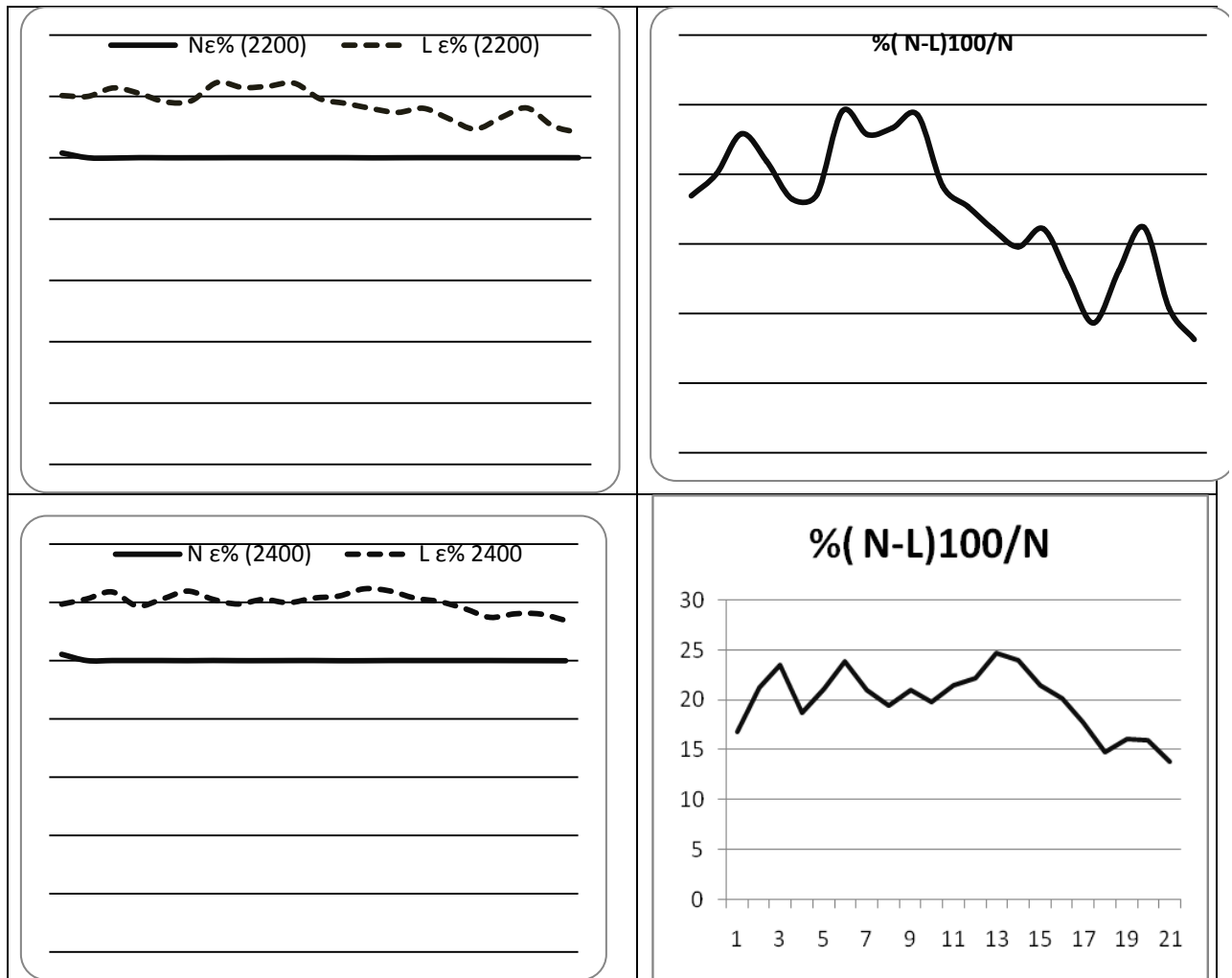
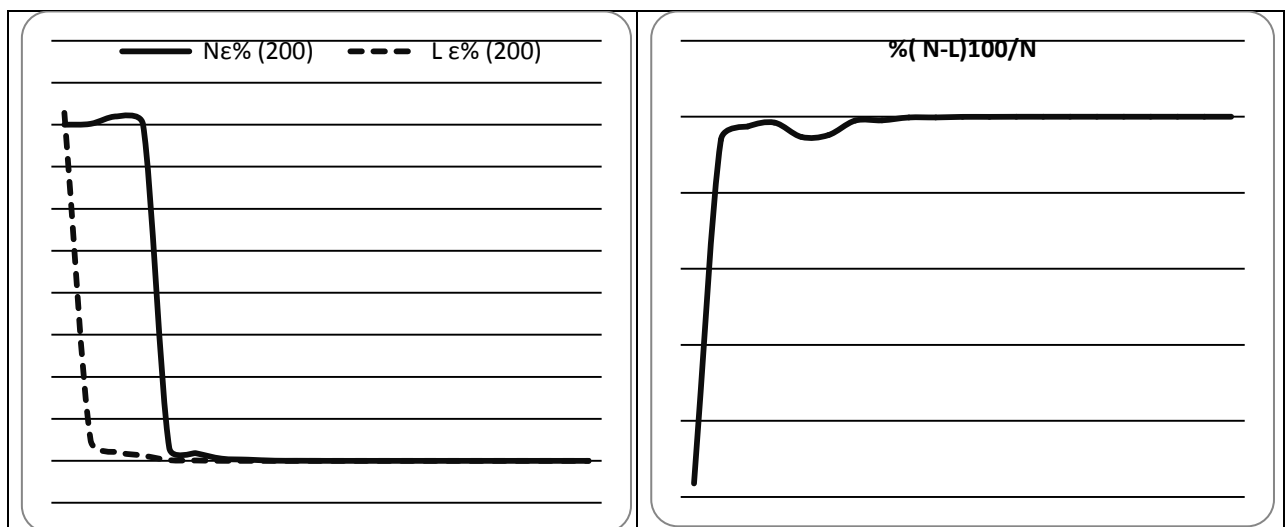
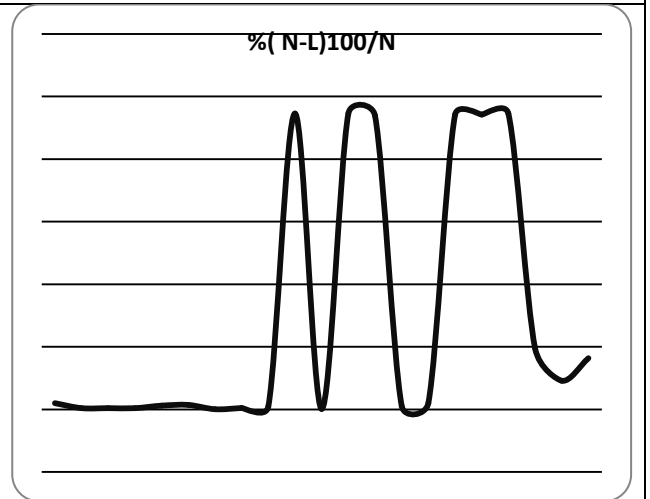
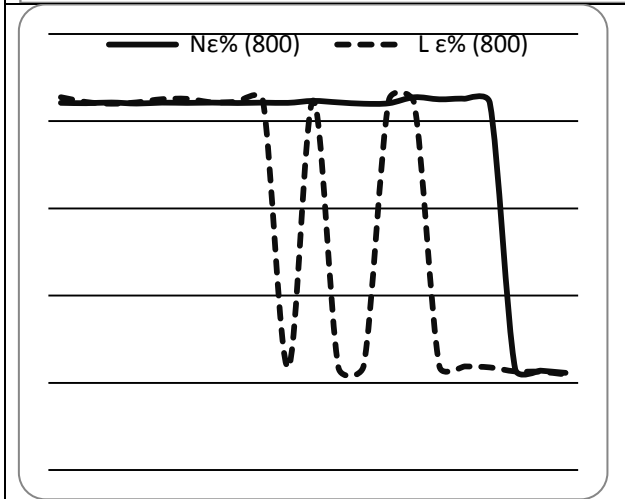
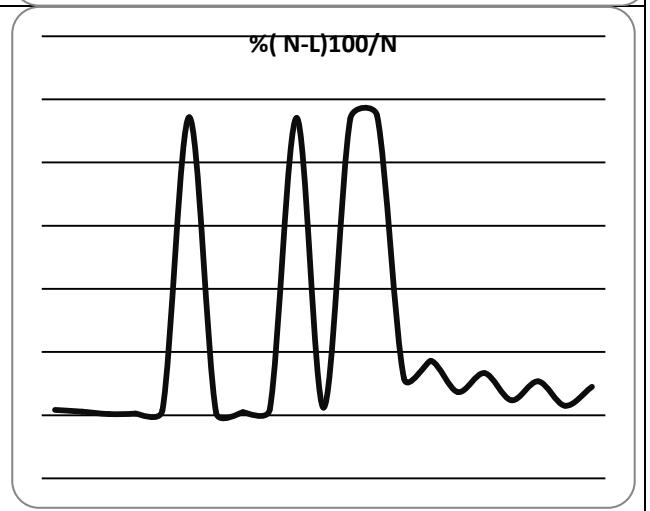
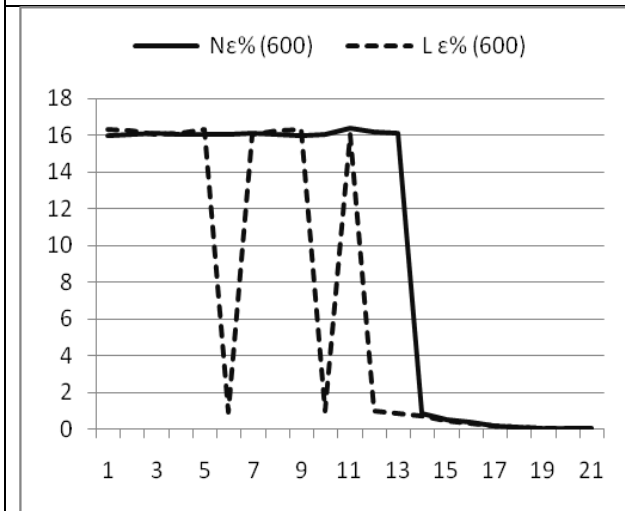
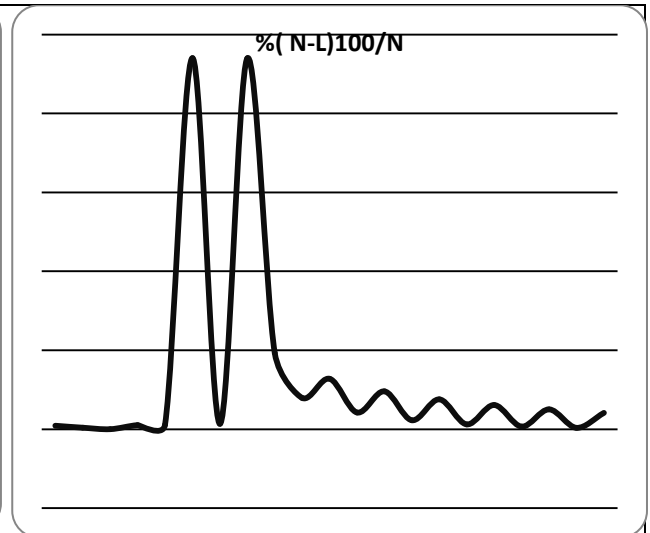
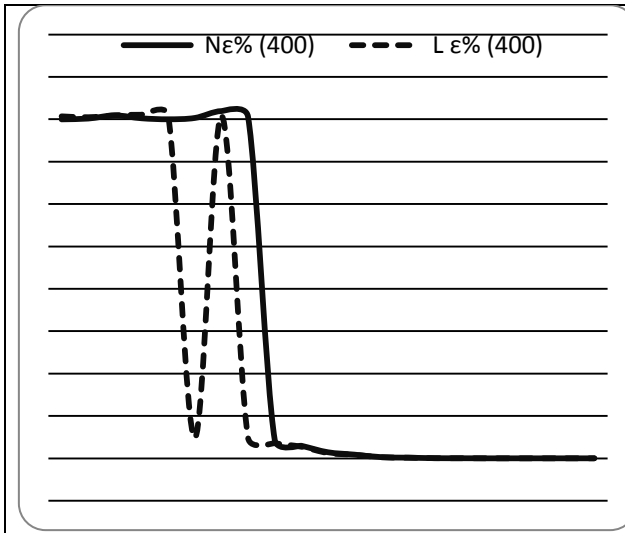
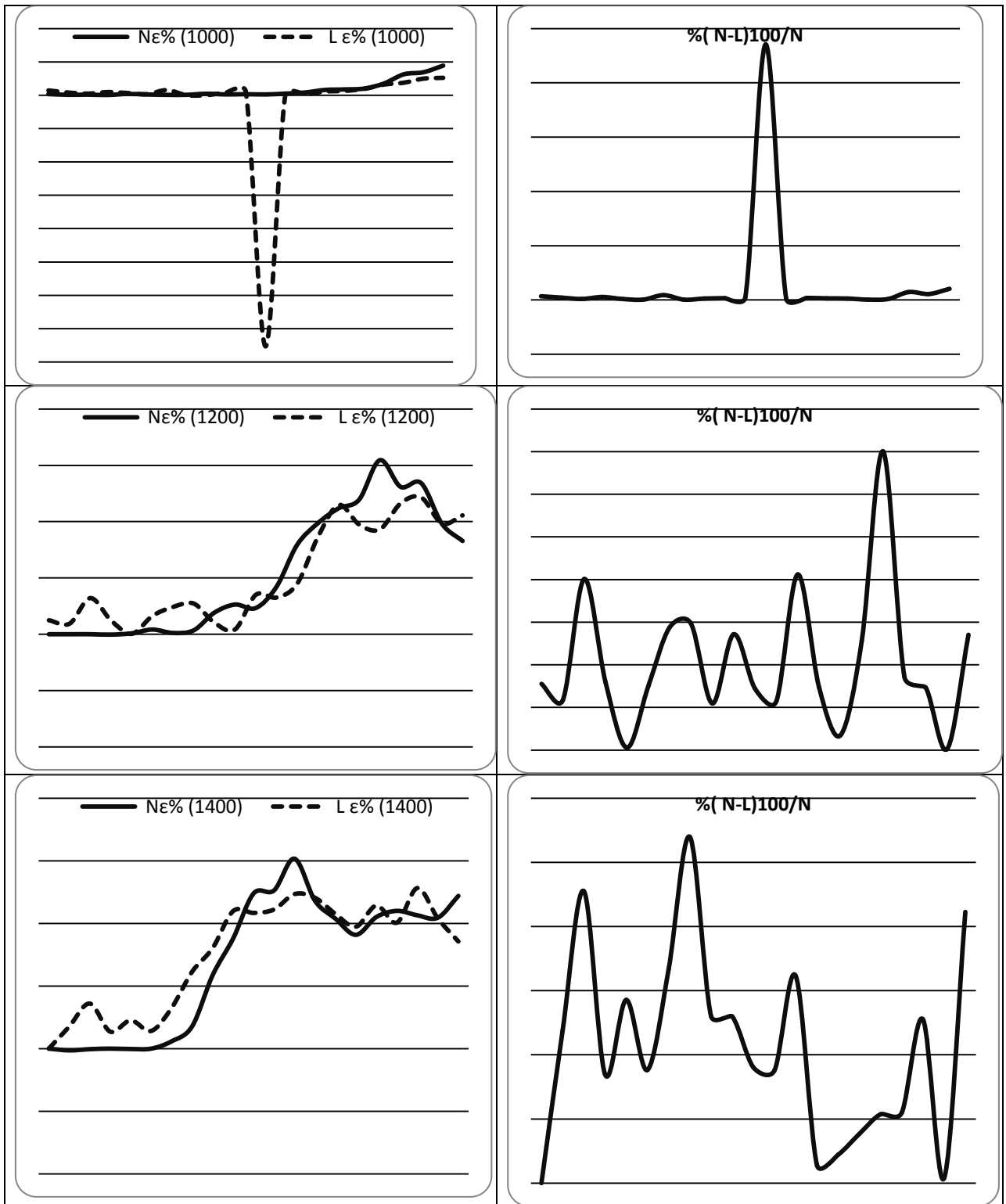
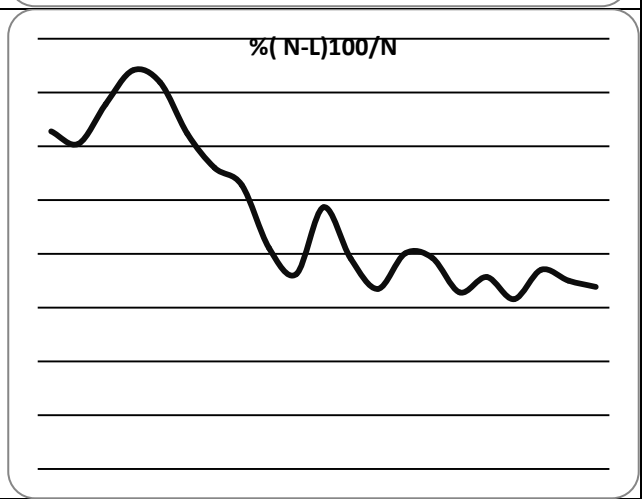
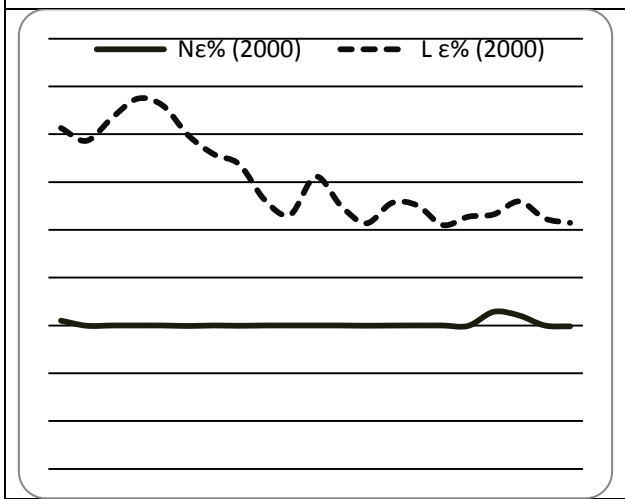
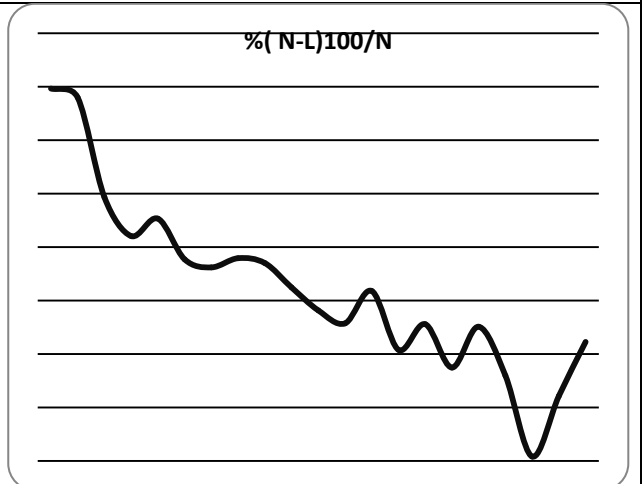
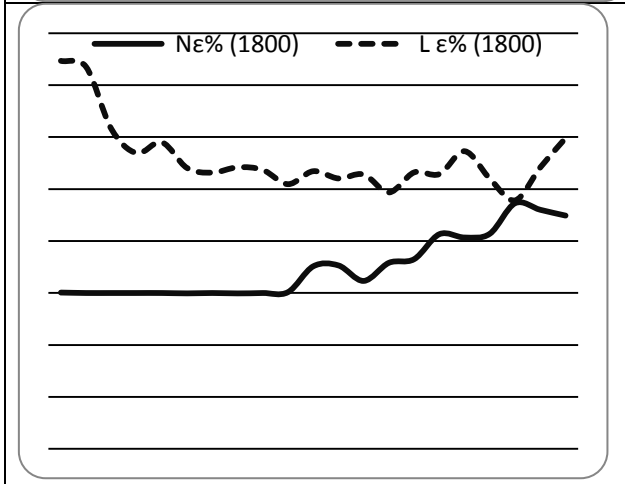
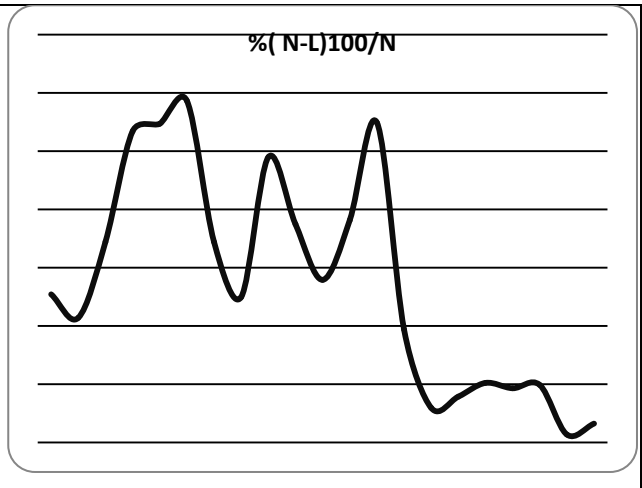
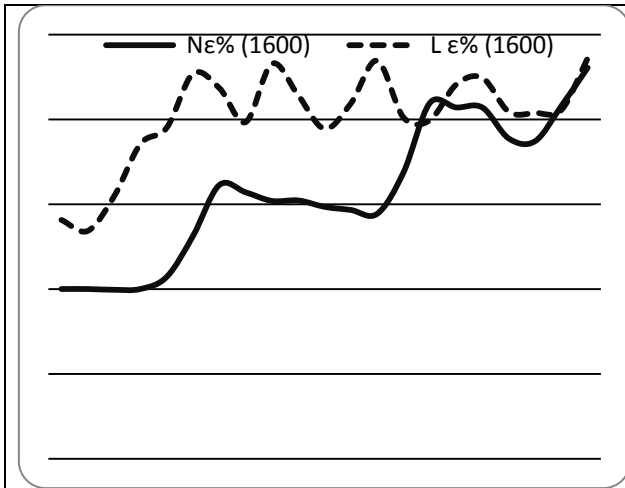


Рисунок 3.4. Порівняння і розбіжність результатів, отриманих в геометрично лінійній (L) і нелінійній (N) постановках для $\epsilon\% \in [0;10]$.









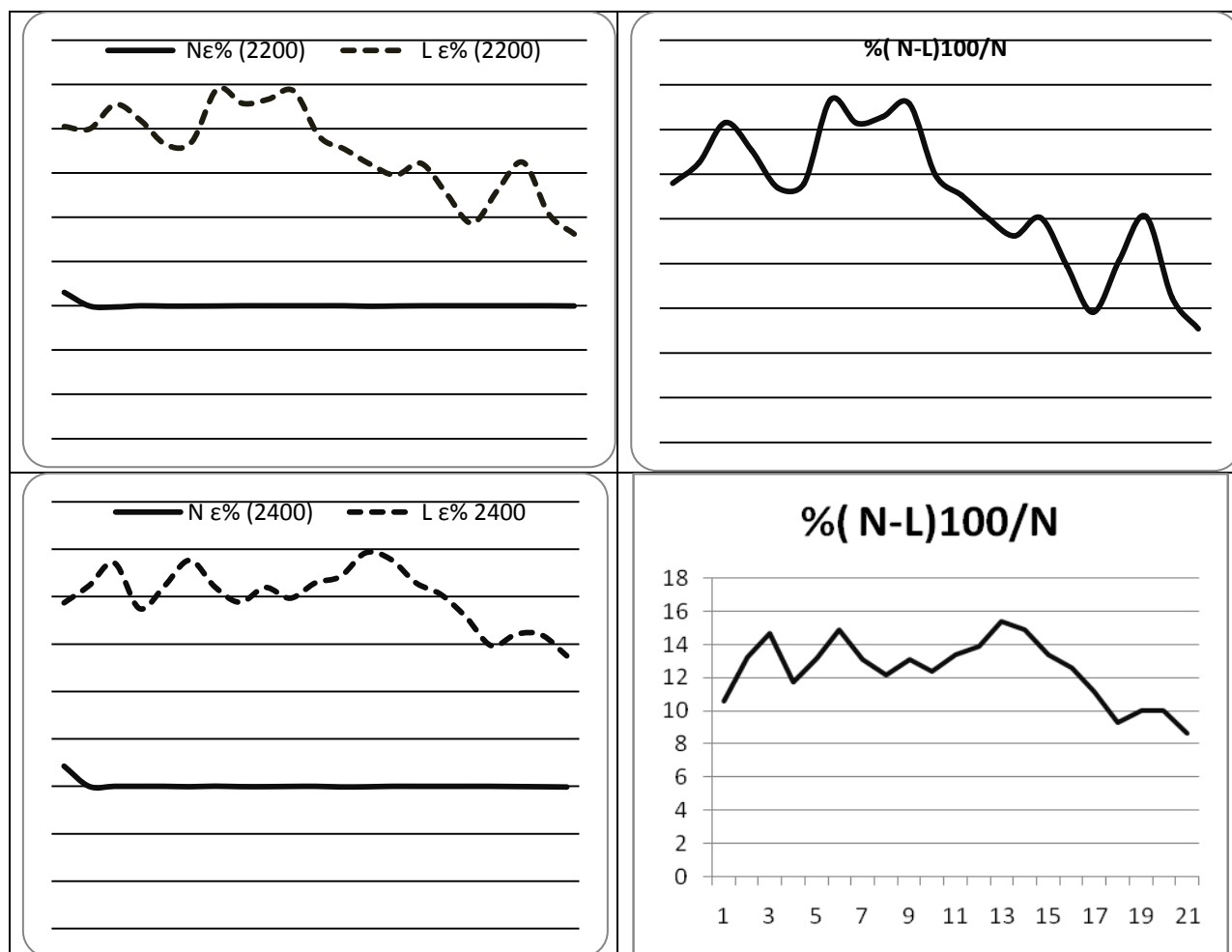


Рисунок 3.5. Порівняння і розбіжність результатів, отриманих в геометрично лінійній (L) і нелінійній (N) постановках для $\varepsilon\% \in [0;16]$

Числові результати наведені на рисунках 3.2-3.4 отримані для кроків інтегрування $\tau = 0,0025; h = 0,1$. На рисунку 3.5 показано порівняння деяких з цих результатів з аналогічними за часом результатами, але отриманими для вдвічі більшого кроку за часом $\tau = 0,005; h = 0,1$

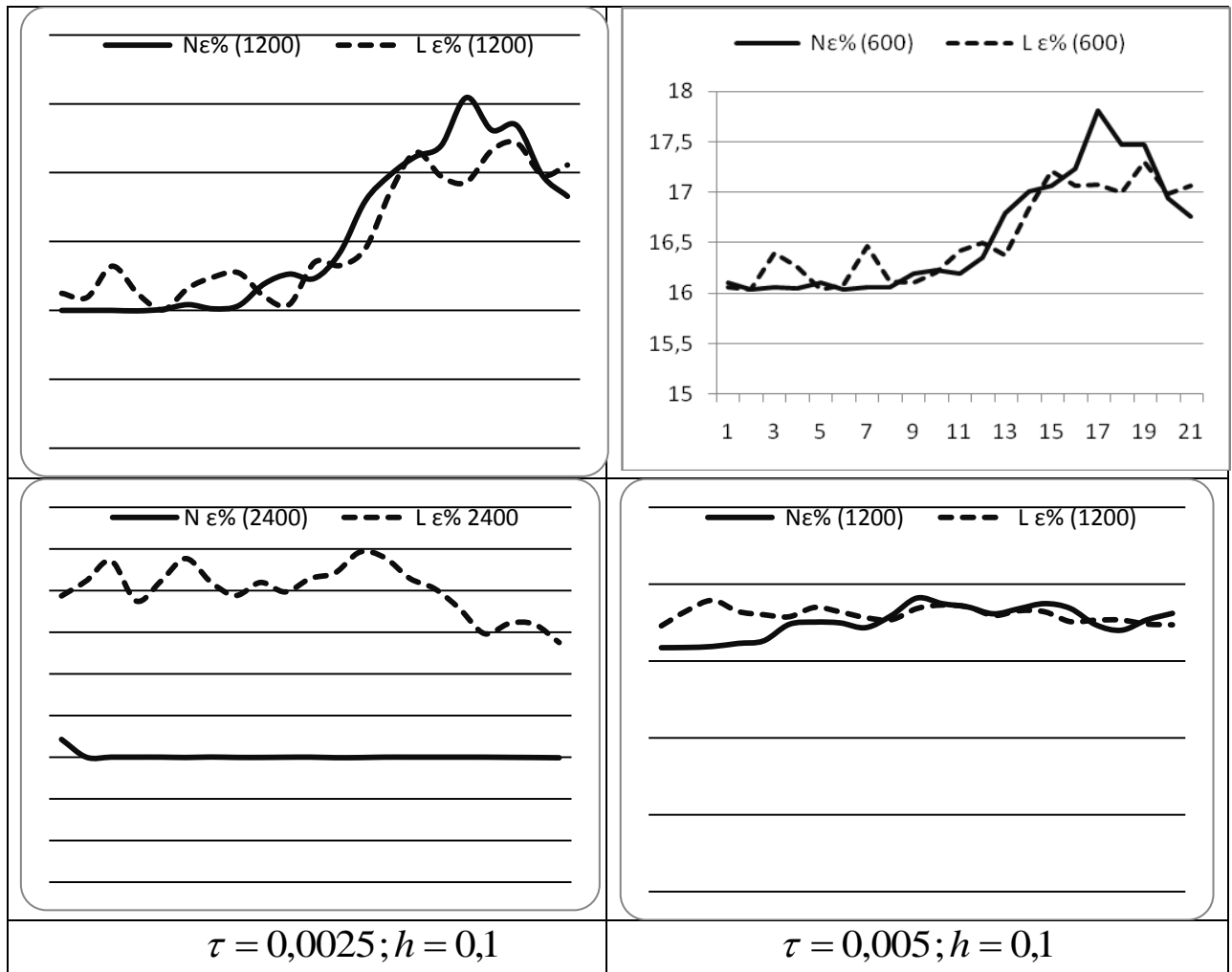
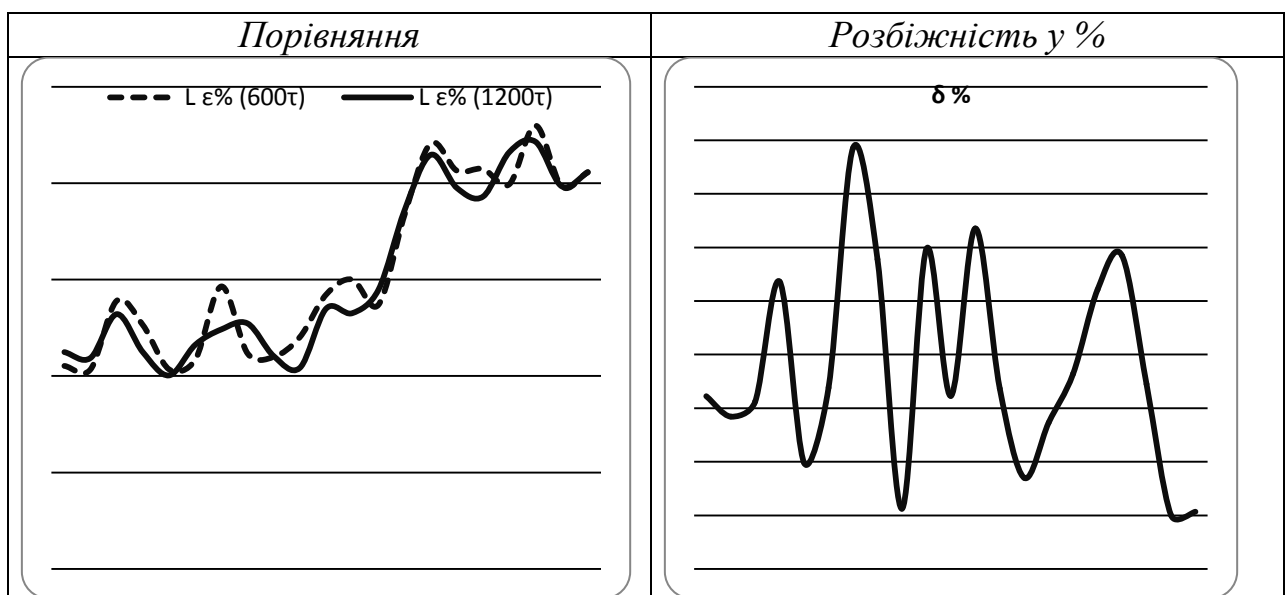


Рисунок 3.6. Порівняння результатів, отриманих за допомогою різних кроків інтегрування за часом



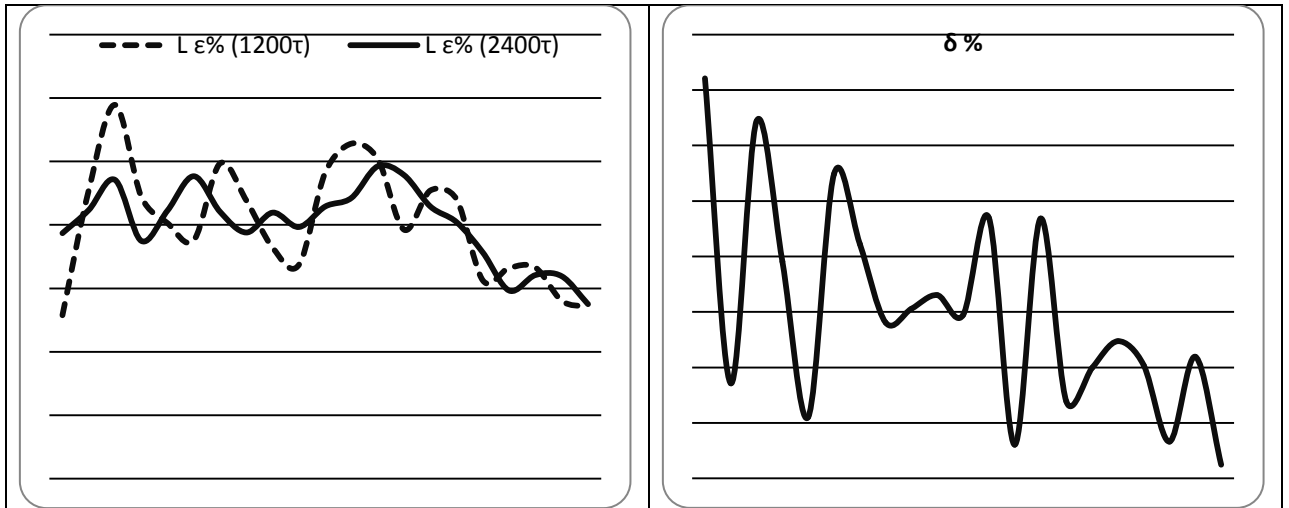


Рисунок 3.7. Розбіжність результатів, отриманих за допомогою різних кроків інтегрування за часом для геометрично лінійної (L) постановки

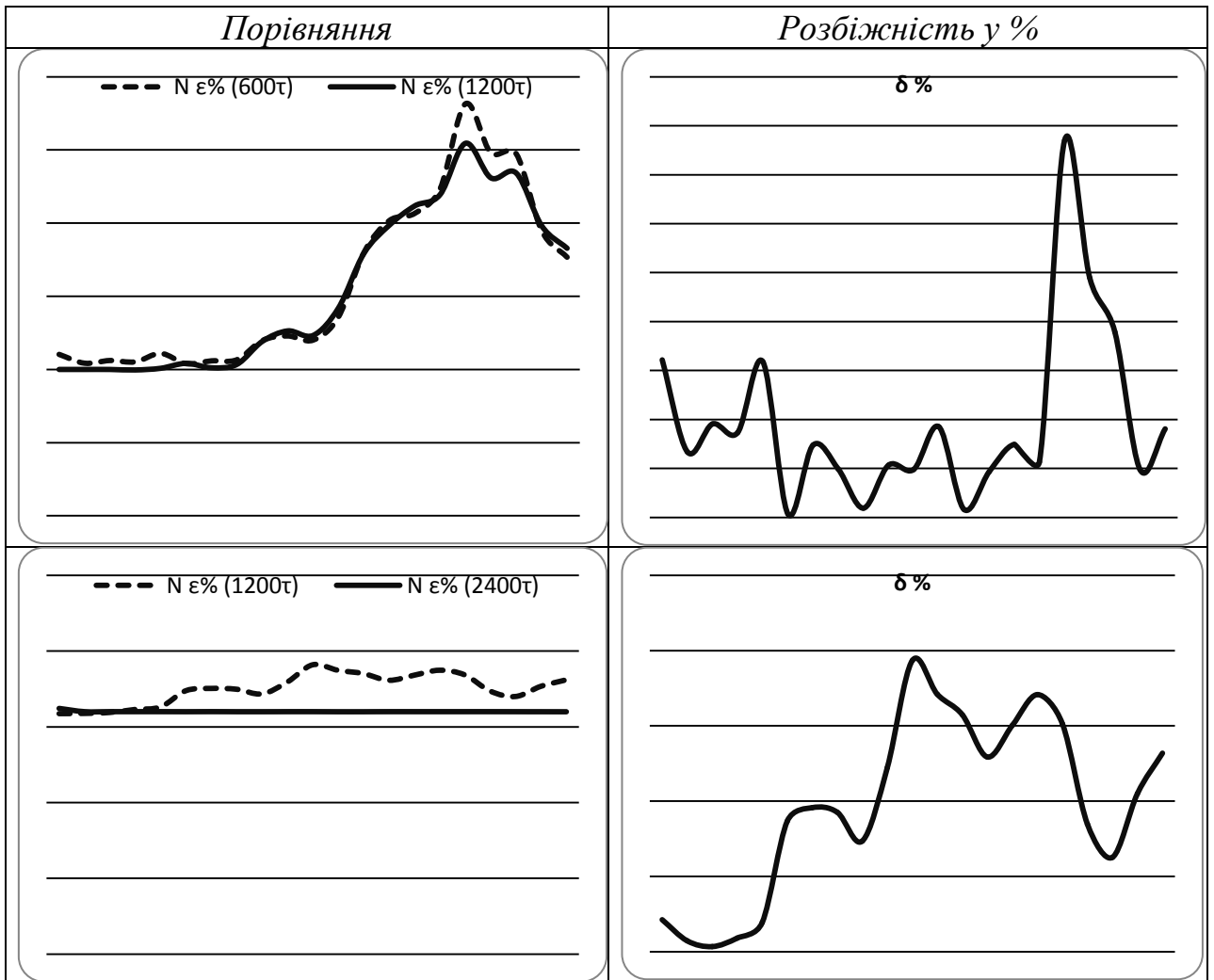
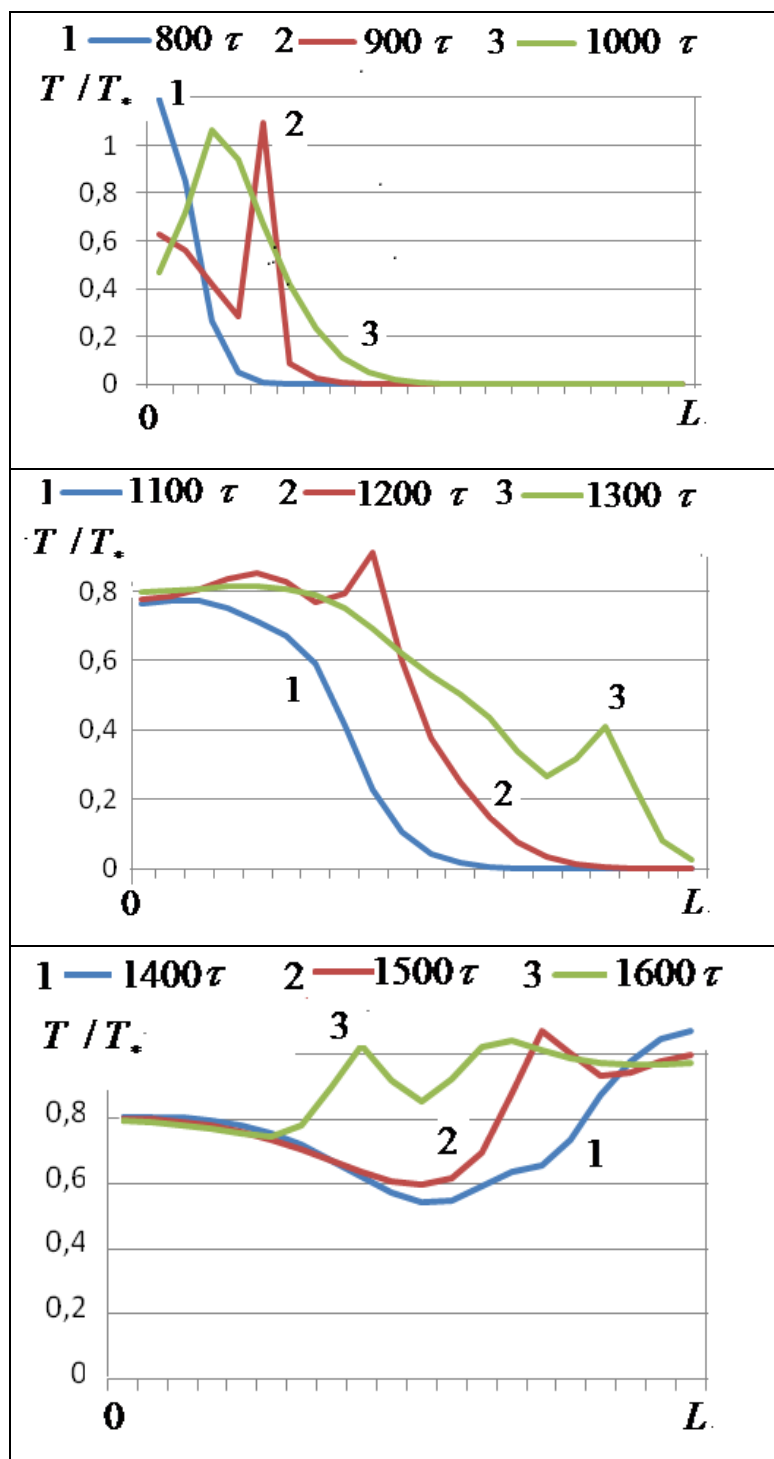


Рисунок 3.8. Розбіжність результатів, отриманих за допомогою різних кроків інтегрування за часом для нелінійної (N) постановки.

Враховано зміни в часі температурного поля, обумовленого теплом, що виділяється під час послідовності фазових переходів.

Розв'язано ряд таких задач.

Зміни в часі температурного поля, обумовленого теплом, що виділяється під час послідовності фазових переходів (перескок з точки А в точку В діаграми матеріалу) показано на рисунку 3.9.



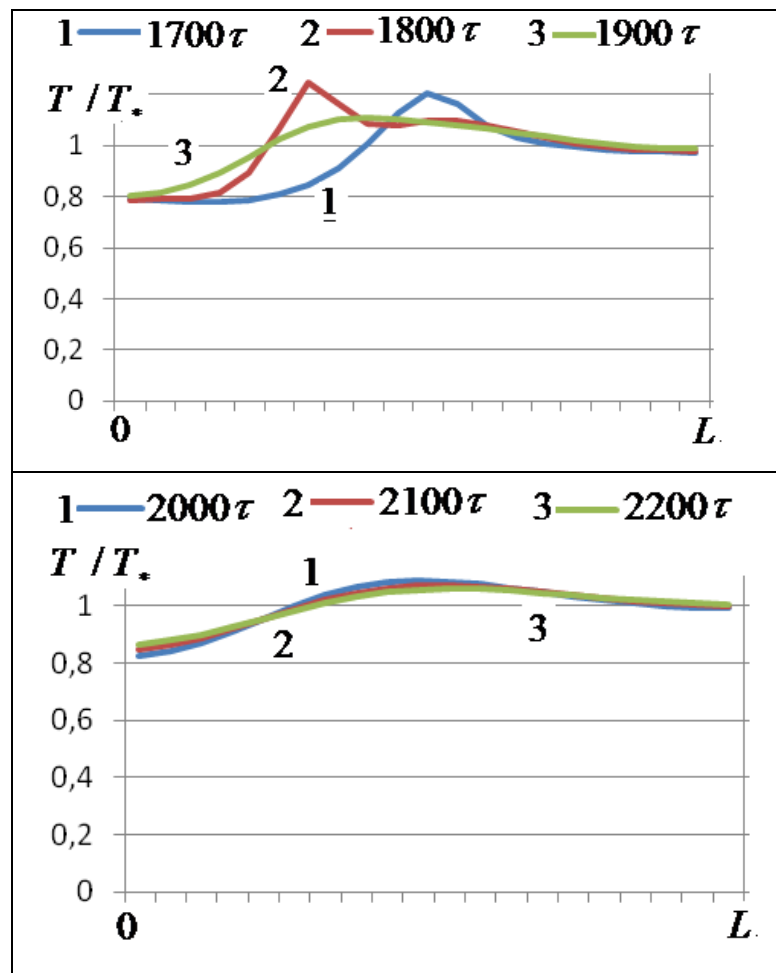
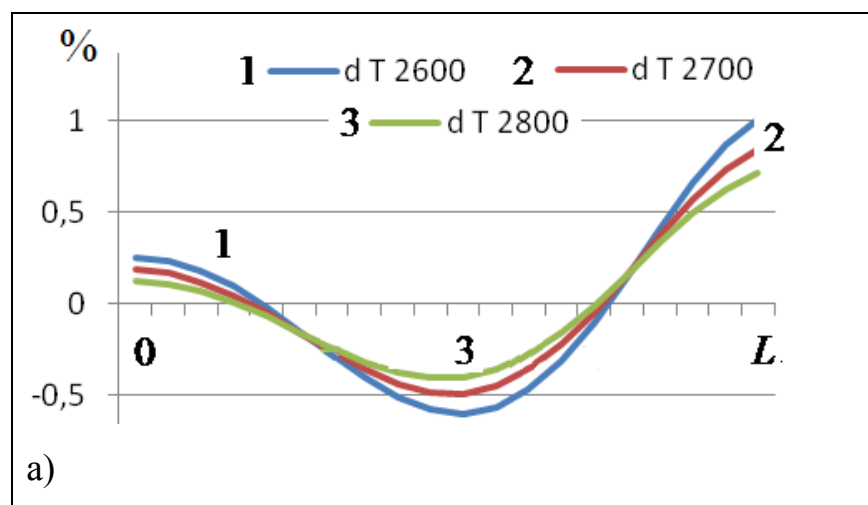


Рисунок. 3.9 Зміни температурного поля вздовж стрижня

При дослідженні збіжності за часом графіки побудовано для одних і тих же моментів часу, але з різними кроками інтегрування $\tau = 0,005$; $\tau = 0,0025$.



a)

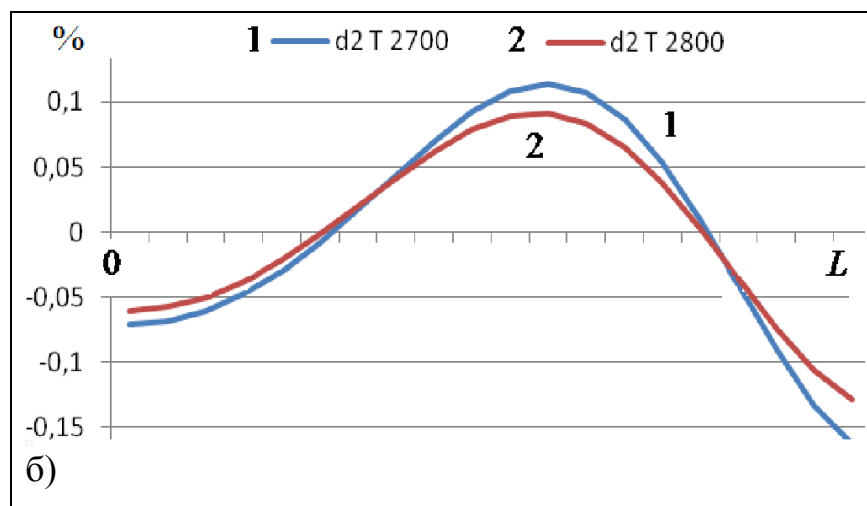


Рисунок. 3.10. Збіжність результатів при визначенні температурного поля вздовж стрижня

На рисунку 3.10 а) в процентах показано зміну по довжині стрижня розбіжності значень температури отриманої відповідно за допомогою кроків $\tau=0,005$ і $\tau=0,0025$ для певних моментів часу, а на рисунку 3.9б) показано зміну розбіжностей другого порядку. Наведені графіки підтверджують збіжність числових результатів по часу.

3.3. Поведінка локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при великих пластичних деформаціях

У третьому параграфі цього розділу проведено моделювання поведінки локально навантаженої послабленої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при її нестационарному навантаженні. Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках при великих пластичних деформаціях. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 6% розбіжність результатів в точках локалізації деформації не перевищує 5%. При збільшенні значень пластичної деформації розбіжність результатів може значно зростати і в околі послаблення досягати 20% .

Розглянемо двовимірну задачу про нестационарне деформування полоси із сплаву NiTi з малими послабленнями. Нехай геометрія полоси

$x \in [-H/2; H/2]$, $y \in [-L/2; L/2]$. Для послаблюючого розрізу запишемо $x \in [-H/2; -H/2+l] \cup [H/2-l; H/2]$, $y \in [-l/2; l/2]$.

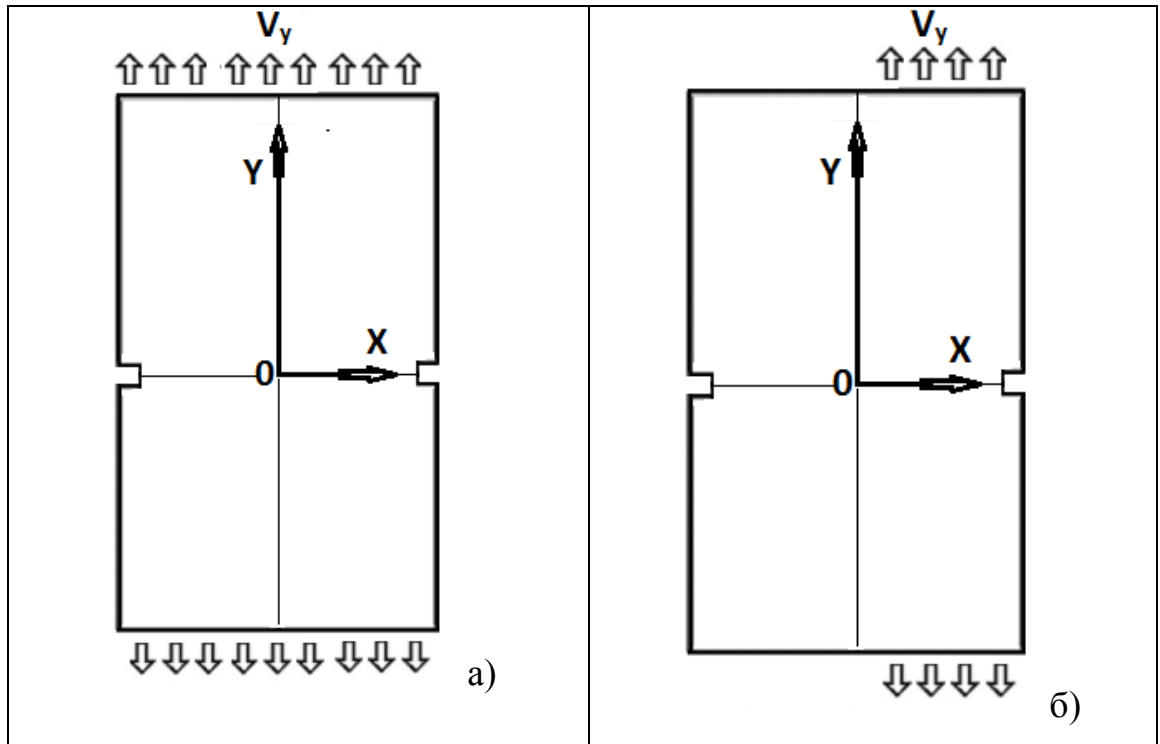


Рисунок 3.11. Геометрія полоси з послабленнями

На краях з послабленнями ($x = -H/2, x = H/2$) поверхня полоси вільна від напруження. Поверхні самого послаблення полоси також вільні від напруження.

Для всіх точок полоси, для яких $y = 0$ швидкість вертикального переміщення v_y дорівнює нулю. На краї $y = L/2; x \in [H/2 - x_*]$ задається ненульова швидкість переміщення $v_y = V_0$, яка змінюється по відомому закону. Для іншого краю $y = -L/2; x \in [H/2 - x_*]$ маємо $v_y = -V_0$.

Шуканими величинами будуть дев'ять складових вектора \vec{W} : швидкості переміщень v_x, v_y ; складові тензора напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}$; деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ і температура T .

У випадку плоскої деформації ($u_3 \equiv 0; v_3 \equiv 0; \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_3} \equiv 0$) при використанні ортогональної декартової системи координат ($H_1 = H_2 = H_3 = 0$) для геометрично лінійних складових тензора деформації з (2.3) отримаємо

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}; e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}; e_{33} = 0;$$

$$e_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}; e_{23} = 0; e_{31} = 0;$$

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = 0; 2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Тензор деформації і складові вектора переміщень пов'язані такими нелінійними співвідношеннями (дивись формули (2.2)):

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right)^2 \right], \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \left[e_{22}^2 + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right)^2 \right], \varepsilon_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{11} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right), \varepsilon_{23} = 0, \varepsilon_{31} = 0.$$

З урахуванням цього після диференціювання за часом в геометрично нелінійному випадку для швидкостей деформацій при плоскій деформації можна записати:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} &= (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} + (1 + e_{22}) \frac{\partial v_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= (1 + e_{22}) \frac{\partial v_2}{\partial x} + (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} B_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} B_2,\end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned}B_1 &= K_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2 + u_3) \right], \\ B_2 &= K_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{22}^0 \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + u_2 + u_3) \right].\end{aligned}$$

Після виключення з визначальних фізичних співвідношень швидкостей деформацій у випадку плоскій деформації отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= \left\{ a_{1111}(1 + e_{11}) + a_{1112} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ &+ \left\{ a_{1112}(1 + e_{11}) + a_{1122} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\ &+ \left\{ a_{1111} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1112}(1 + e_{22}) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \\ &+ \left\{ a_{1122}(1 + e_{22}) + a_{1112} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial y} + b_*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = & \left\{ a_{2211}(1 + e_{11}) + a_{2212} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{2212}(1 + e_{11}) + a_{2222} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\ & + \left\{ a_{2211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2212}(1 + e_{22}) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{2222}(1 + e_{22}) + a_{2212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial y} + b_*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = & \left\{ a_{1211}(1 + e_{11}) + a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{1212}(1 + e_{11}) + a_{1222} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\ & + \left\{ a_{1211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1212}(1 + e_{22}) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{1222}(1 + e_{22}) + a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

В результаті повна система для цієї задачі має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} + \vec{B}.$$

$$W_1 = v_x, W_2 = v_y, W_3 = \sigma_x, W_4 = \sigma_y, W_5 = \sigma_{xy}.$$

$$A_i^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho} & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho} & \frac{\delta_{i1}}{\rho} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{71} & \alpha_{72} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{41} &= \left\{ a_{1111}(1 + e_{11}) + a_{1112} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{1112}(1 + e_{11}) + a_{1122} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i2}; \\
\alpha_{42} &= \left\{ a_{1111} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1112}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{1112} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1122}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i2}; \\
\alpha_{51} &= \left\{ a_{2211}(1 + e_{11}) + a_{2212} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{2212}(1 + e_{11}) + a_{2222} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i2}; \\
\alpha_{52} &= \left\{ a_{2211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2212}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{2212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{2222}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i2}; \\
\alpha_{71} &= \left\{ a_{1211}(1 + e_{11}) + a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{1212}(1 + e_{11}) + a_{1222} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \delta_{i2}; \\
\alpha_{72} &= \left\{ a_{1211} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1212}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i1} + \left\{ a_{1212} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{1222}(1 + e_{22}) \right\} \delta_{i2}.
\end{aligned}$$

Температуру в точках тіла визначимо як розв'язок рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + W_*.$$

Через W_* позначена функція, що враховує тепло, яке виникає в тілі при фазовому переході з точок A в точки B на діаграмі матеріалу.

Введемо сітки за часом і по координатам:

$$\omega_t = \{ t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots \},$$

$$\omega_h \left\{ \begin{array}{l} x_i; x_{i+1} = x_i + h_1; x_0 = 0; h_1 = \frac{H}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n; \\ y_j; y_{j+1} = y_j + h_2; y_0 = 0; h_2 = \frac{L}{m}; j = 0; 1; 2; \dots m; \end{array} \right\}.$$

В якості розрахункової візьмемо наступну формулу ітераційної процедури і перепишемо її так

$$\begin{aligned}
(\bar{w}^{p+1})_{m+1} &= \left[\bar{w}^p + \tau (\bar{L}_{12} + \bar{B}^p) \right]_m, \\
\bar{L}_{12} &= \Lambda_1 (\alpha_{11} \bar{w}^{p+1} + \alpha_{12} \bar{w}^p) + \Lambda_2 (\alpha_{21} \bar{w}^{p+1} + \alpha_{22} \bar{w}^p).
\end{aligned}$$

Температурне поле в полосі визначаємо за допомогою двовимірного варіанта ітераційної процедури :

$$(T^{p+1})_{m+1} = \left\{ T^p + \tau [M_{12} + W_*^p] \right\}_m ,$$

$$M_{12} = P_1(\alpha_{11}T^{p+1} + \alpha_{12}T^p) + P_2(\alpha_{21}T^{p+1} + \alpha_{22}T^p) .$$

Зазначимо, що після визначення основних невідомих, окремо розшуковуються шляхом інтегрування за часом решта невідомих функцій:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = & \left\{ a_{3311}(1 + e_{11}) + a_{3312} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{3312}(1 + e_{11}) + a_{3322} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\ & + \left\{ a_{3311} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{3312}(1 + e_{22}) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \\ & + \left\{ a_{3322}(1 + e_{22}) + a_{3312} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial y} + b_* , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = (1 + e_{11}) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} = \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1 + e_{22}) \frac{\partial v_y}{\partial y} ;$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} = (1 + e_{22}) \frac{\partial v_y}{\partial x} + (1 + e_{11}) \frac{\partial v_x}{\partial y} + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} .$$

Розглянемо числові результати, отримані для полоси при $L = 2H$, $h_1 = h_2 = H/10$, $\tau = 0,01$.

На рисунках 3.12 і 3.13 для відповідних моментів часу показано поле інтенсивності деформації, яке має місце в полосі при різних видах навантаження.

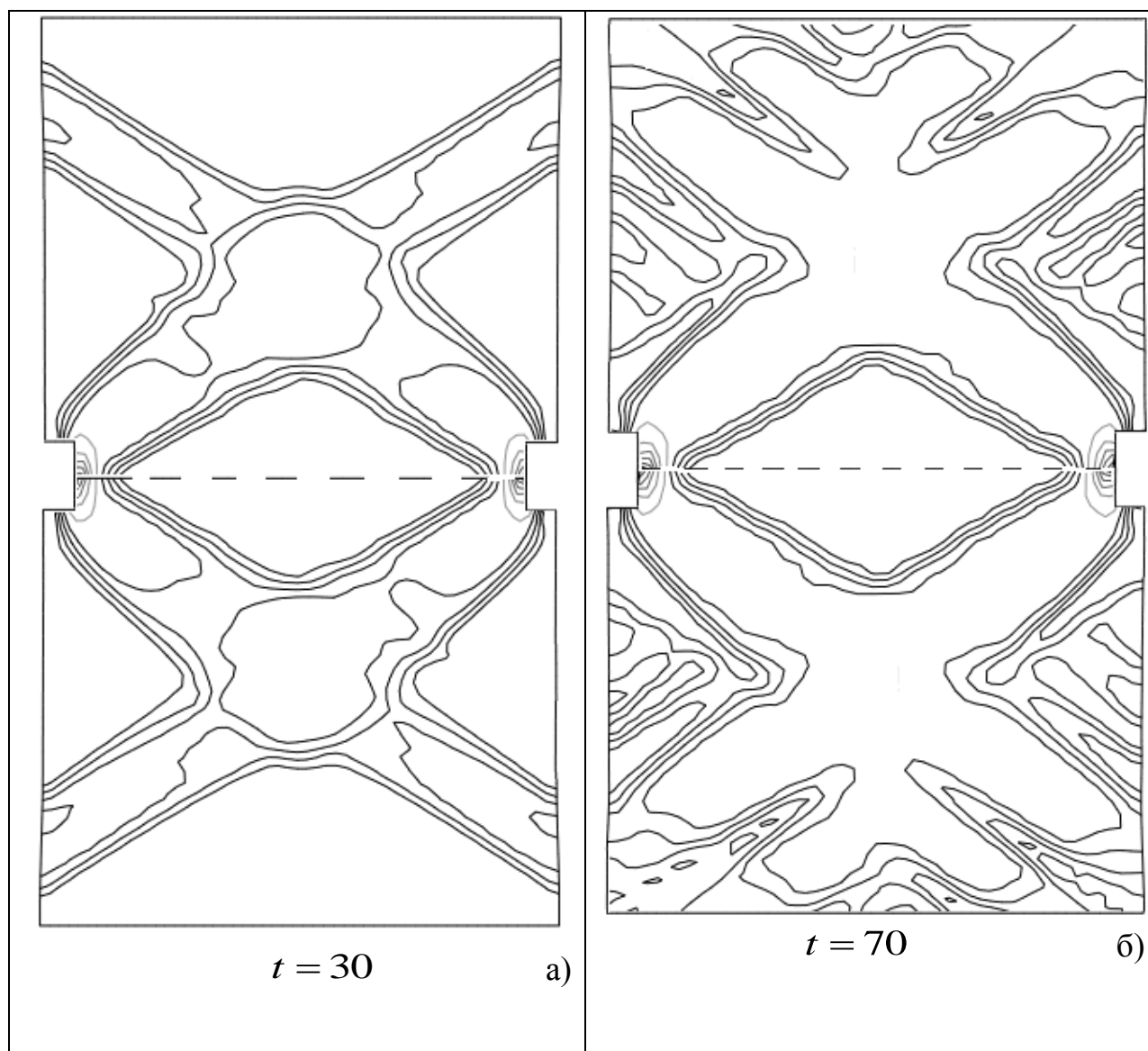


Рисунок 3.12. Поле інтенсивності деформації при симетричному навантаженні

На рисунку 3.12 а) показано поле інтенсивності деформації при симетричному навантаженні (рисунок 3.11 а)) для безрозмірного моменту часу ($t = 30 = 3000\tau$). В момент $t = 50$ розтягування полоси зупинялось, але в тілі і далі йшов перерозподіл навантаження в режимі усталовлення. На рисунку 3.12 б) показано поле інтенсивності деформації (рисунок 3.11 а)) для $t = 70$.

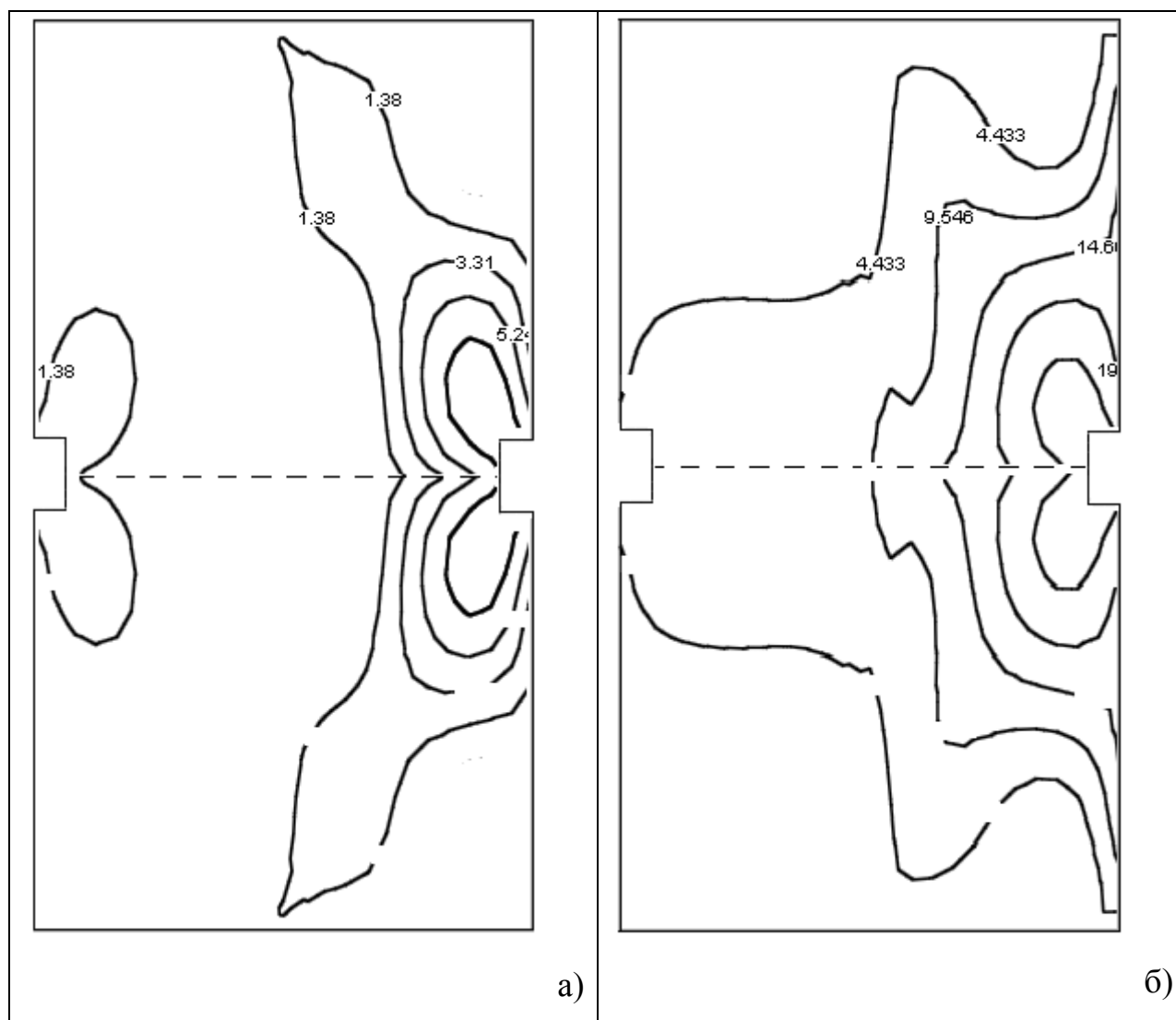


Рисунок 3.13 Поле інтенсивності деформації при несиметричному навантаженні

На рисунку 3.13 а) показано поле інтенсивності деформації при несиметричному навантаженні (рисунок 3.11 б)) для безрозмірного моменту часу ($t = 30 = 3000\tau$). В момент $t = 50$ розтягування полоси зупинялось, але в тілі і далі йшов перерозподіл навантаження в режимі установлення. На рисунку 3.13 б) показано поле інтенсивності деформації (рисунок 3.11 а)) для $t = 70$.

3.4. Висновки по третьому розділу

В розділі досліджується та розв'язується новий клас задач термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів. Розв'язано ряд задач моделювання поведінки тіл з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні. Виконано порівняння з відомими результатами.

Це задачі термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів (порівняння з відомими результатами). Моделювання поведінки локально навантаженого стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури. Моделювання поведінки локально навантаженої пластини з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні. Поведінка локально навантаженого трубчастого тіла з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні.

Проведена обробка відомих експериментальних результатів і описано ряд діаграм напруження – деформація для функціонально-неоднорідних матеріалів як при активному навантаженні, так і при розвантаженні.

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. В означених задачах розроблено числову процедуру розрахунку діаграми матеріалу, яка представляє собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, побудованих для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Побудовано інтегральні діаграми матеріалу, який може знаходитися під дією складного навантаження.

Для двофазного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок з різними модулями пружності і відповідно змінною трансформаційною деформацією на основі запропонованої моделі записана залежності між напругою, збільшенням довжини зразка і рушійною силою.

Для використання феноменологічної моделі з метою дослідження двофазних матеріалів з різними модулями пружності розв'язано додаткову задачу яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні.

Графік залежності має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом інтегральна діаграма матеріалу, побудована в роботі, теж має три характерні ділянки.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а вже потім переходить в пластичний стан. Аналогічним чином термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні.

Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановці. Встановлено, що при деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%, а при деформаціях до 16%-20% результати в геометрично лінійній і нелінійній постановках різняться більше ніж на 25%.

Перший параграф присвячено обробці відомих експериментальних результатів і описанню діаграм напруження – деформація для функціонально-неоднорідних матеріалів як при активному навантаженні, так і при розвантаженні.

У другому параграфі в геометрично нелінійній постановці розглянуто задачу про розповсюдження повільної хвилі фазового переходу в одновимірному стрижні при його розтягуванні при значних деформаціях (до 20%).

У третьому параграфі цього розділу проведено моделювання поведінки локально навантаженої послабленої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при її нестационарному навантаженні. Проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках при великих пластичних деформаціях. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 6% розбіжність результатів в точках локалізації

деформації не перевищує 5%. При збільшенні значень пластичної деформації розбіжність результатів може значно зростати і в околі можливого створення шийки досягати 20% .

В описаних тестових задачах проведено порівняння результатів отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%. При пластичних деформаціях до 16% розбіжність результатів може досягати 25% в точці і більше де ймовірно при розтягуванні буде формуватись шийка зразка.

РОЗДІЛ IV

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ТІЛ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

У четвертому розділі проведено розв'язання ряду задач, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Це задачі про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій. Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій. Локальне розкриття тривимірної пластини з розрізом при наявності великих пластичних деформацій. В розв'язаних задачах проаналізовано вплив на результати згущення сітки по просторовим координатам та за часом.

Найчастіше функціональні матеріали з ефектом пам'яті форми застосовуються в сучасній техніці і медицині. Проектування пристроїв з елементами з матеріалу з пам'яттю форми значно відрізняється від розробки деталей з конструкційних матеріалів. За особливостями застосування пристроїв з ефектом пам'яті форми їх розбивають на кілька груп [190-192].

За принципом роботи пристрої поділяють на надпружні, які спрацьовують один раз. Та такі, які спрацьовують багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткого протидії (термомеханічні з'єднання). В процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилового елементи).

Однією з найбільш затребуваних в наш час областю застосування матеріалів з пам'яттю форми є медицина. Існує значна кількість таких імплантів з матеріалів з пам'яттю форми. Важливою особливістю тут є

надпружна поведінка при температурі тіла людини. В такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження. При цьому жорсткість імпланта близька до жорсткості біологічних тканин, які він повинен замінити або зміцнити (рисунок 4.1).

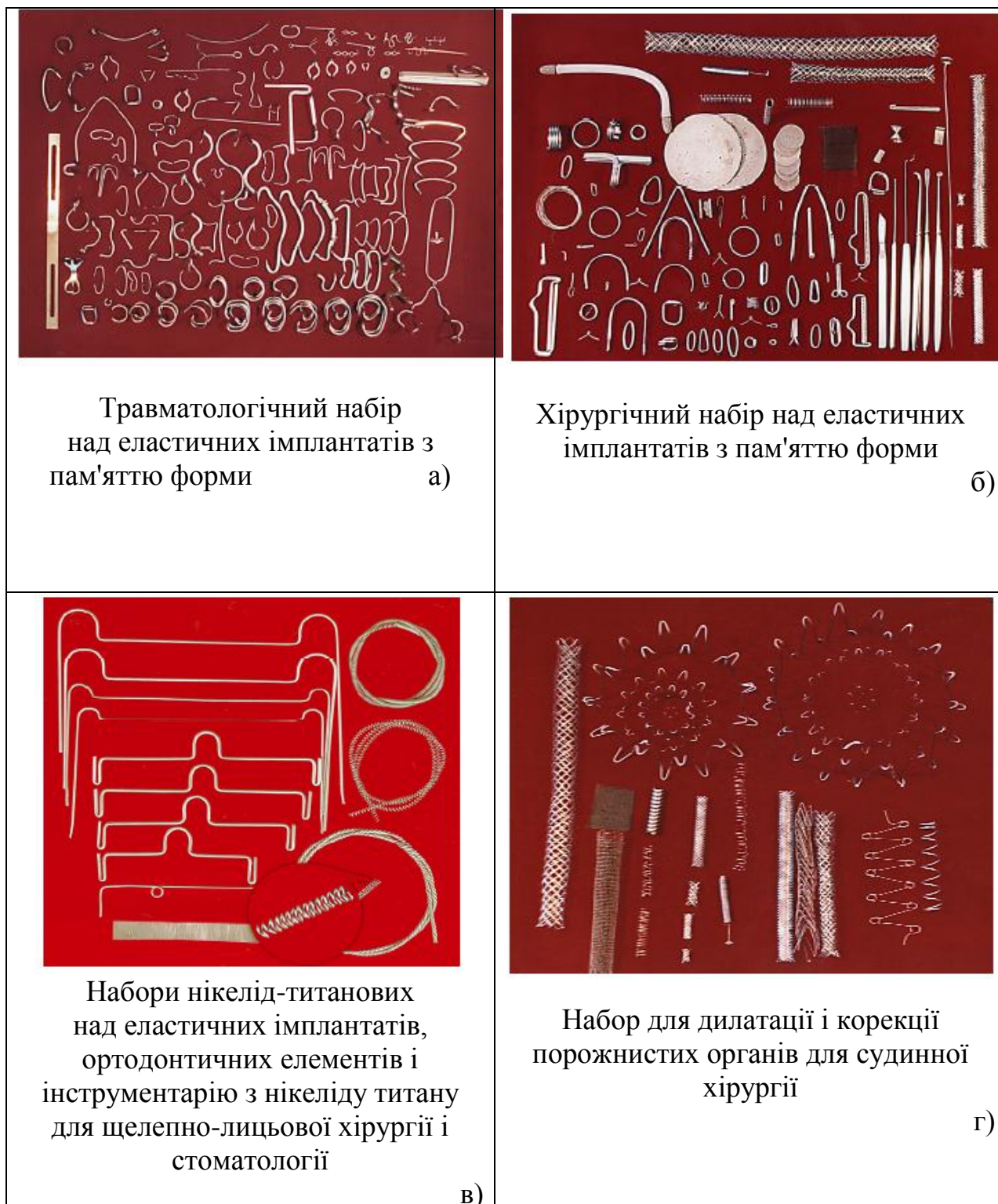


Рисунок 4.1. Приклади імплантів та інструментів з функціональних сплавів, що мають властивість пам'яті форми.

На рисунку 4.1 показані імпланти для фіксації кісткових уламків лицьового скелета, трубчастих кісток, хребта та інших кісткових тканин; для дилатації тканин порожнистих органів, для створення між кишечник анастомозів і т.д. Цей напрямок представляють монолітні імпланти із сплавів на основі TiNiMoFe, які грають роль тимчасових функціонуючих пристроїв [83].

В роботі [125] представлено зовнішній вигляд деяких імплантів, які очевидно при виготовленні зазнавали значних вигинів

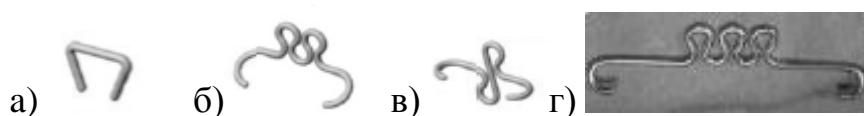


Рисунок 4.2. Зовнішній вигляд деяких імплантів.

- a) – фіксатор для з'єднання фрагментів плюсневої кістки,
- б) – між кісткова зв'язка,
- с) – імпланти, які застосовуються в стоматології,
- г) – фіксатор для стабілізації хребта

На наш погляд, характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок де попередня заготовка отримувала **значні зміни кривизни**. Це означає, що при їх виготовленні при відповідній температурі прутки в таких заготовках зазнавали **значних пластичних деформацій**.

Розрахунок елементів конструкції, що трансформуються в основному зводиться до вибору оптимальної схеми і ступеня деформації, які дозволяють визначити геометрію цього елемента і технологію його застосування. При виборі схеми деформації будемо керуватися такими міркуваннями. Максимальні переміщення можна реалізовувати при деформації вигином, мінімальні - при стисканні. При цьому ступінь деформації елемента, призначеного для багаторазового спрацьовування, не повинна перевищувати критичну ступінь деформації (до руйнування). В цьому випадку при нагріванні буде спостерігатися майже повне відновлення форми і після

охолодженні до робочої температури елемент можна повторно деформувати і нагрівати без небезпеки порушення його геометрії

На основі цього проведено розв'язання ряду нових задач, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих (кінцевих) деформаціях до 20%.

4.1. Вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій

У першому параграфі четвертого розділу була розв'язана задача про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій. Пластина розміщена симетрично на опорі, за допомогою якої згинається. Схема розміщення і навантаження пластини показана на рисунку 4.3 а).

Геометрія пластини задана так: $x \in [-H; H]$, $y \in [-L; L]$, $z \in [-h; h]$. Положення опори $x = 0$, $y \in [-L; L]$, $z = 0$.

На обох її краях задаємо вертикальну швидкість переміщень, яка розподілена у вузлах на торцях. В місцях опори вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення дорівнюють нулю. Вся інша її поверхня вільна від напружень.

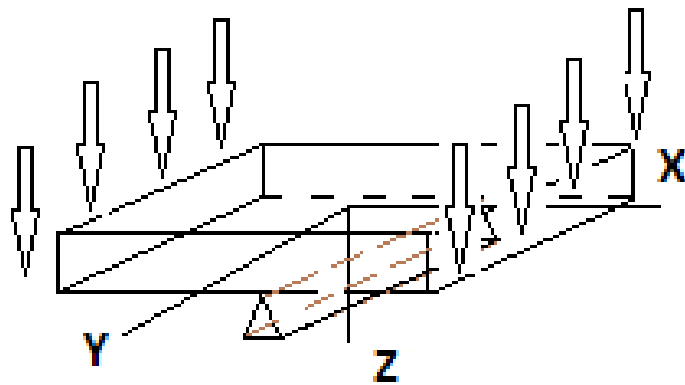
Для застосування ітераційної схеми підвищеної точності (2.40) методу покомпонентного розщеплення в заданій вище області тривимірної пластини при $t \geq 0$ введемо сітку за часовою змінною з врахуванням дробових кроків

$$\omega_\tau = \left\{ \begin{array}{l} t_p; t_{p+1/3} = t_p + \tau_1; t_{p+2/3} = t_{p+2/3} + \tau_2; \\ t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

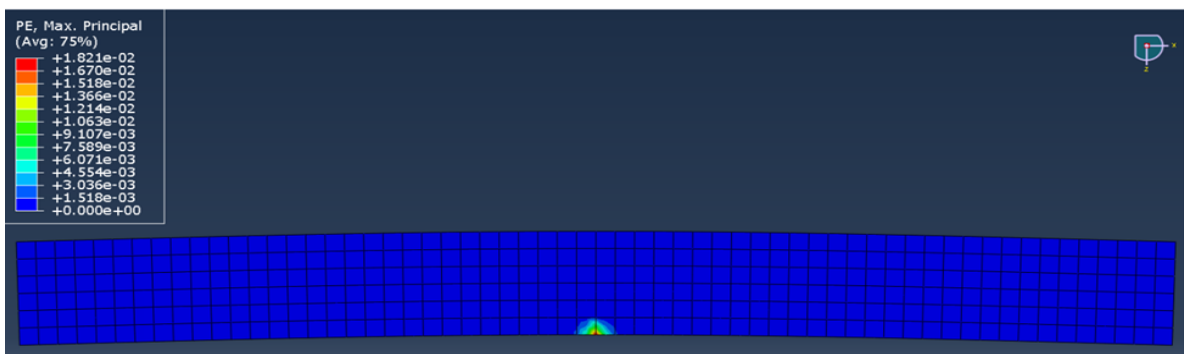
і просторову сітку

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, z_k); \\ x_{i+1} = x_i + h_1; x_1 = 0; h_1 = \frac{H}{N_1}; i = 1; 2; \dots; N_1; \\ y_{j+1} = y_j + h_2; y_1 = 0; h_2 = \frac{L}{N_2}; j = 1; 2; \dots; N_2; \\ z_{k+1} = z_k + h_3; z_1 = 0; h_3 = \frac{h}{N_3}; j = 1; 2; \dots; N_3 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

де $N_1 = N_2 = 21, N_3 = 7$.

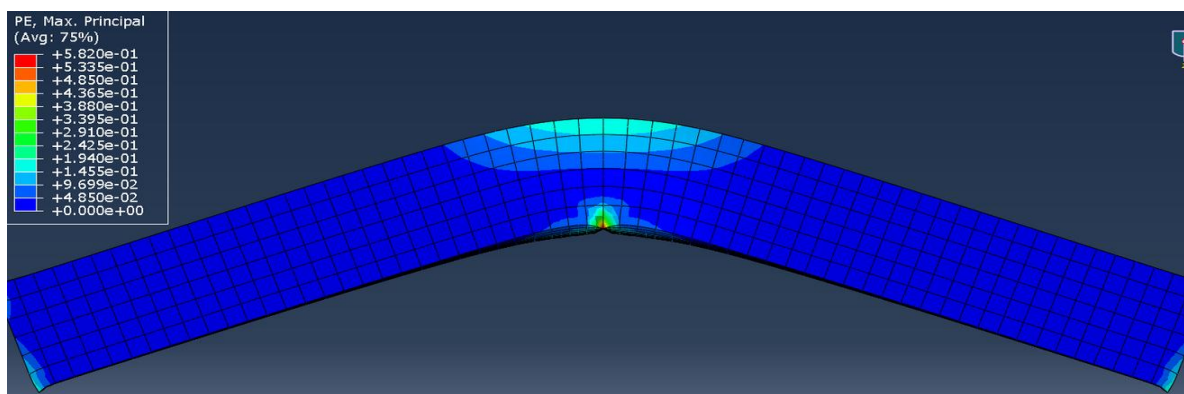


a)



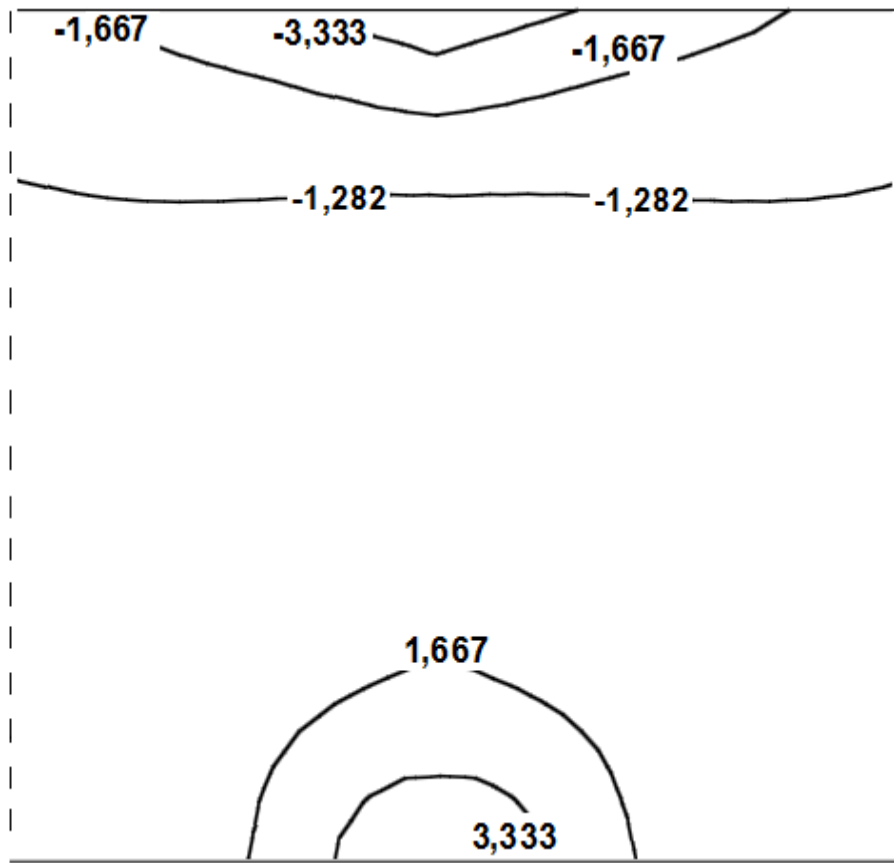
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6 \%$$

b)



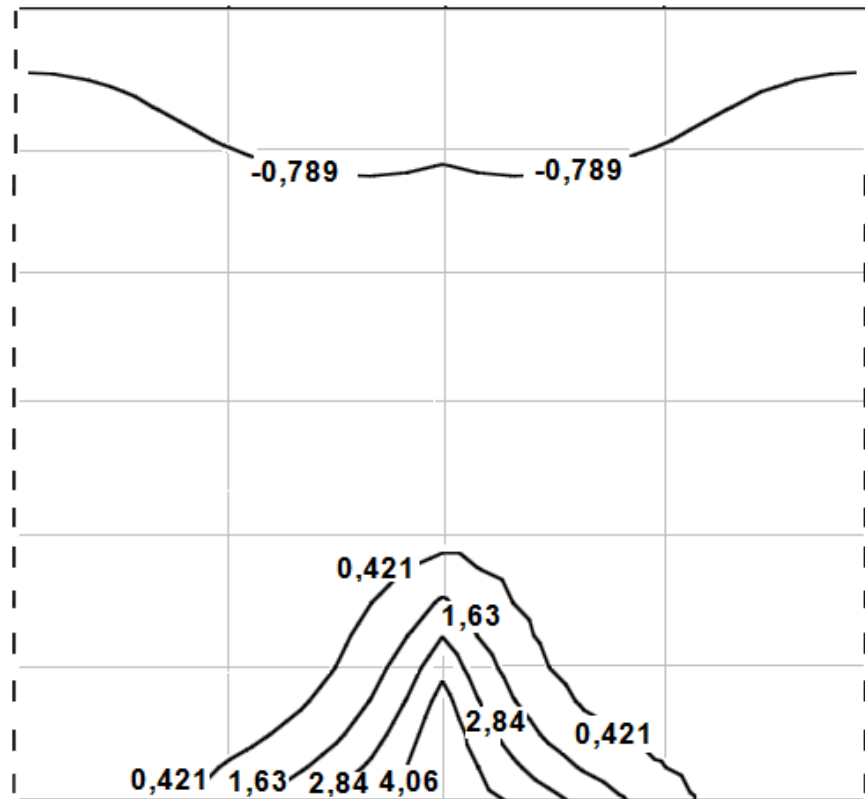
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 10 \%$$

B)



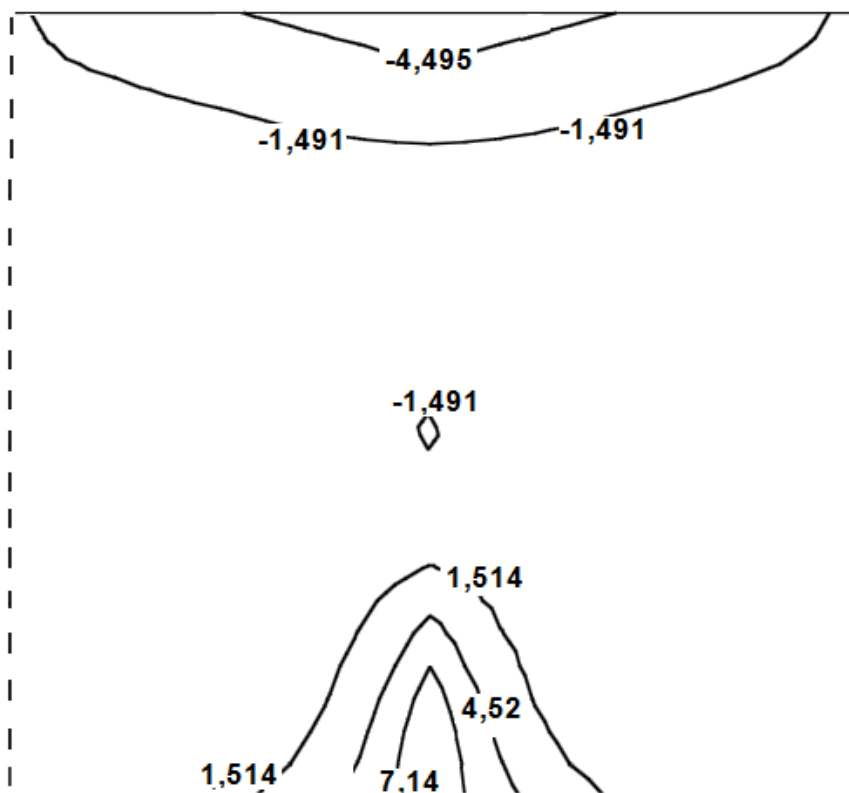
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4 \%$$

Г)



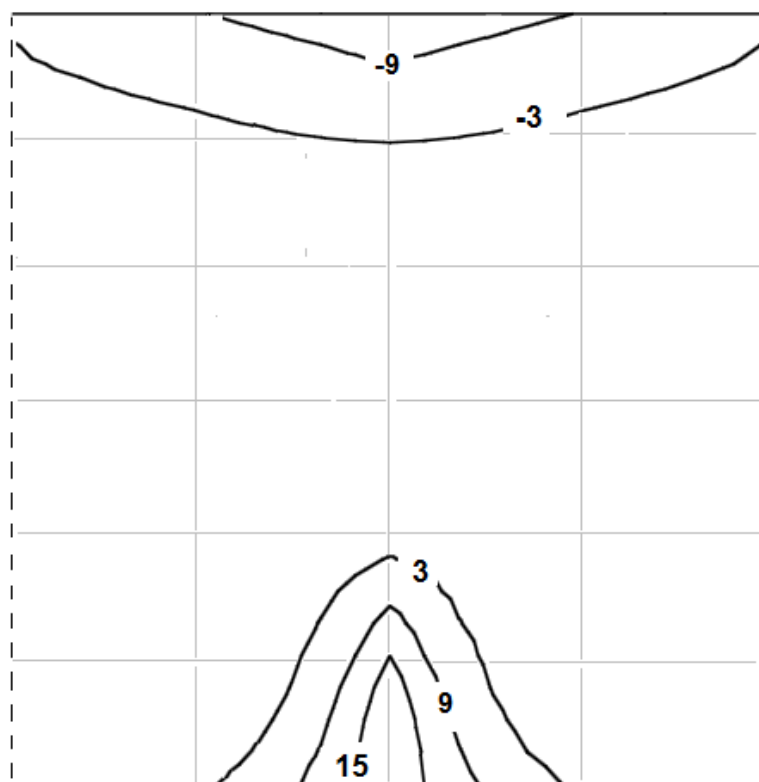
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6 \%$$

Д)



$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 10\%$$

e)



$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 16\%$$

ж)

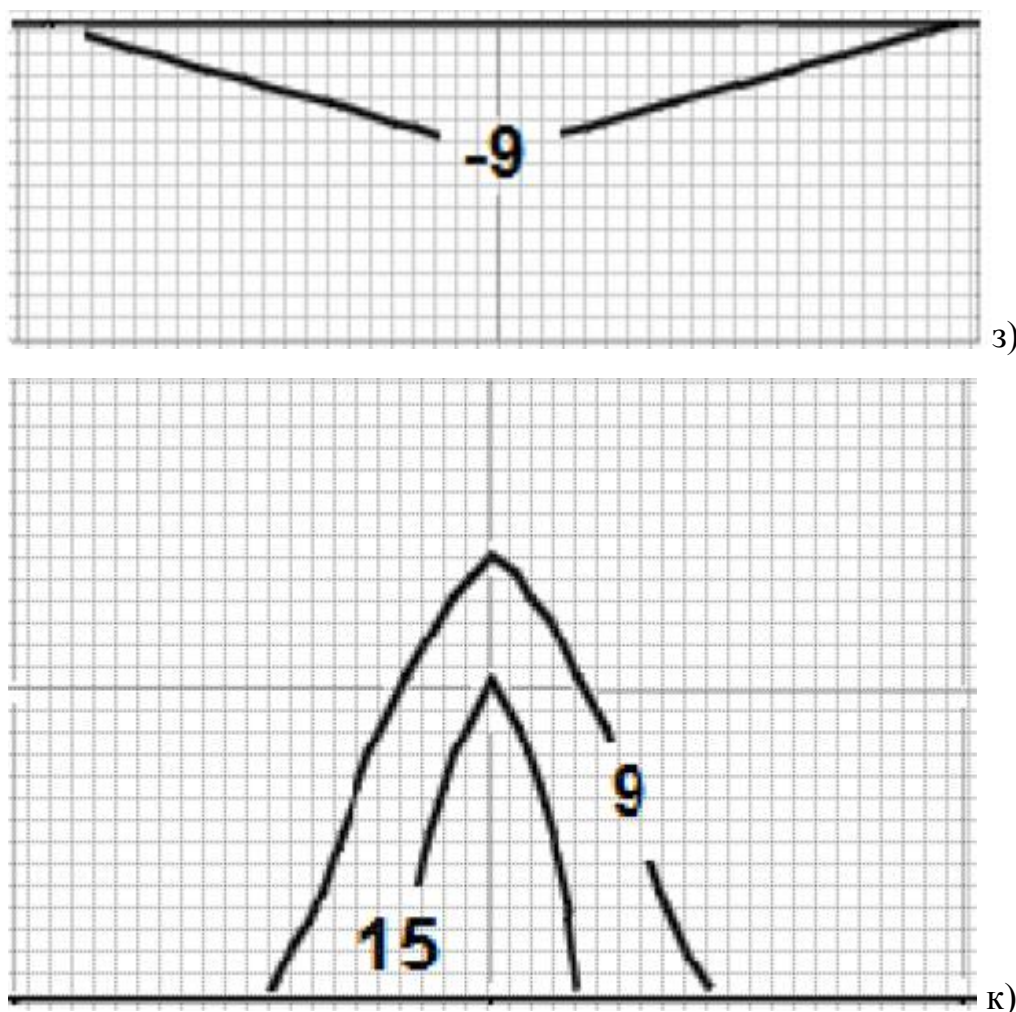


Рисунок 4.3. Вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій

Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул тривимірного варіанту методу покомпонентного розщеплення (2.40). Кроки інтегрування та розміри були такі: $\tau = 0,001$; $h_1 = h_2 = h_3 = 0,05$; $L = H = 1$; $h = 0,3$.

Деякі результати розрахунків приведено на рисунках 4.3.

Поле інтенсивності деформації при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$ в точці опори наведено на рисунку 4.3г). Поле інтенсивності деформації при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6\%$ наведено на рисунку 4.3д). Результати розрахунків для максимальних значень інтенсивності деформації $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 10\%$ і $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 16\%$ показано відповідно

на рисунках 4.3е) і 4.3 ж). Зазначимо, що максимальне значення інтенсивності деформації має місце вздовж точок опори пластини.

На рисунках 4.3. з) і 4.3 к) показана сітка, за допомогою якої проводиться уточнення результатів в геометрично нелінійній області N шляхом. Кроки інтегрування в зоні кінцевих деформацій були зменшені у відношенні 1:14 по осі z в 1:22 по осі x та y . В результаті з'явилась можливість вперше в рамках запропонованого методу враховувати можливість зміни форми і розмірів тіла при наявності великих деформацій.

Для порівняння поле інтенсивності деформацій отримано і за допомогою системи інженерного аналізу ABAQUS при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6\%$ та $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 10\%$ показано відповідно на рисунках 4.3 б) і 4.3 в).

Має місце якісне співпадіння результатів розрахунків. Для досягнення кількісного співпадіння результатів в околі опори пластини в програмі ABAQUS треба дещо по іншому задавати граничні умови (не в одній точці вздовж опори а ще й в декількох сусідніх).

Алгоритм розрахунків цієї тривимірної нестационарної задачі також полягав в таких трьох кроках.

На першому з них розв'язується відповідна лінійна L-задача і визначається область тіла де інтенсивність деформації більше ніж умовна границя $\varepsilon_u^N = 7\%$ (надалі це область N). При отриманні основних результатів, наведених на рисунках 4.3, було використано 2400 комірок. Зазначимо, що для отримання L-рішення використовувалась як власна програма, так і програма ABAQUS.

На другому кроці в області N тіла розв'язувалась N-задача в геометрично нелінійній постановці. На рисунках 4.3 з) і 4.3 к) показана область N. Вона складалась з шести основних комірок сітки (4.2). При отриманні основних N результаті було використано 120 комірок.

На третьому кроці проводилось уточнення області N і самого розв'язку. При цьому для однієї з шести комірок у відповідність було

максимально обрано 6×22^2 менших.

Першою особливістю постановки задачі по уточненню області N є формулювання граничних умов в околі опори. Якщо для L задачі лише в місці опори $x = 0, y \in [-L; L], z = 0$ вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення дорівнюють нулю. В N задачі при уточненні геометрично нелінійного рішення нульові вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення задавались в області $x \in [-mh_1; mh_1], m = 1; 2; \dots, y \in [-L; L], z = 0$.

Друга особливість уточнення в N задачі полягає в зменшенні кроків інтегрування по координатам. При цьому для виконання умови стійкості треба пропорційно зменшувати і крок інтегрування за часом. В результаті значно збільшується кількість таких кроків і взагалі час розрахунку.

Третя особливість полягає в вирішенні додаткової задачі інтерполяції шуканих величин у вузлах нової сітки (більш дрібних) по відповідним значення у вузлах основної сітки. Ця задача вирішена за допомогою двовимірної сплайн-функції (програма в додатку).

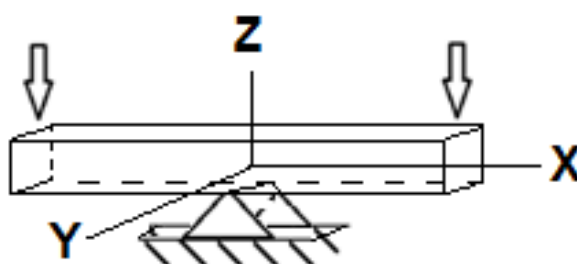
Виходячи з наведених міркувань для уточнення геометрично нелінійного рішення треба збалансувати дві протилежні тенденції. З одного боку в N-задачі для пластини треба розглянути лише 120 комірок просторової сітки замість 2400 (лише 5%). Кількість додаткових обчислювальних операцій на початковій сітці теж суттєво зменшується. З іншої сторони для достовірного порівняння результатів треба при зменшенні кроків інтегрування по координатам збільшувати кількість кроків інтегрування за часом. Ця проблема розв'язувалась за допомогою послідовності числових експериментів.

4.2. Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перетину при наявності великих пластичних деформацій

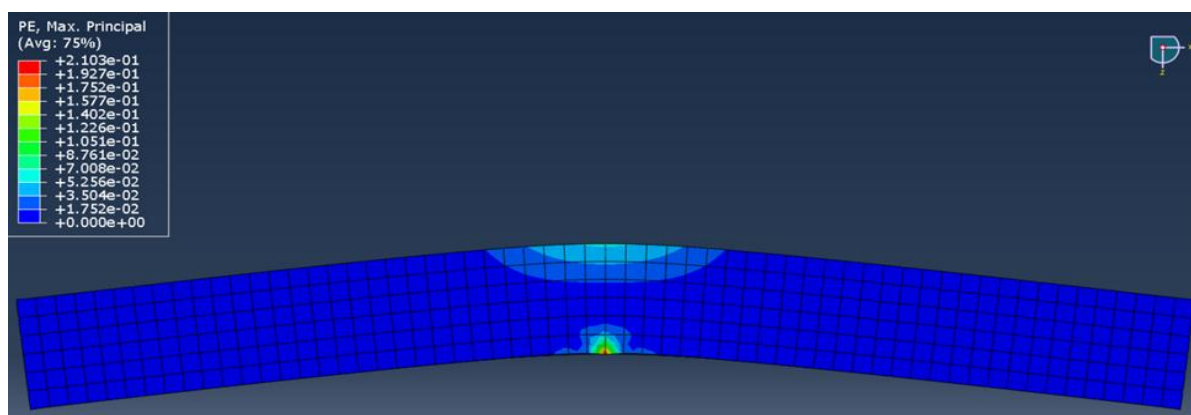
В другому параграфі досліджено локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій (рисунки 4.4).

Геометрія тривимірного стрижня (бруса) задана так:
 $x \in [-H; H]$, $y \in [-L; L]$, $z \in [-h; h]$. Положення опори
 $x = 0$, $y \in [-L; L]$, $z = 0$.

Брус, що згинається, розміщений симетрично на центральній опорі. На його краях задається вертикальна швидкість переміщень у вузлах на торцях. В місці опори вертикальні переміщення точок бруса і відповідно швидкість переміщення дорівнюють нулю. Вся інша поверхня бруса вільна від напружень.

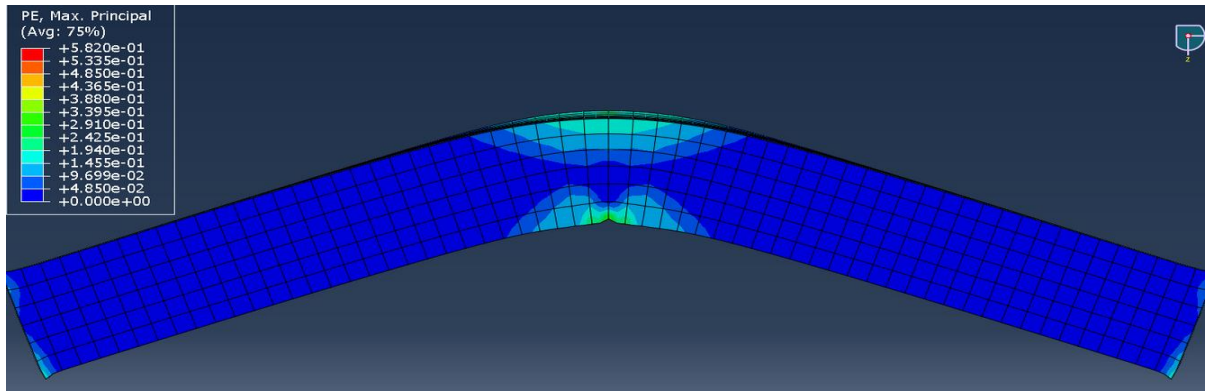


a)



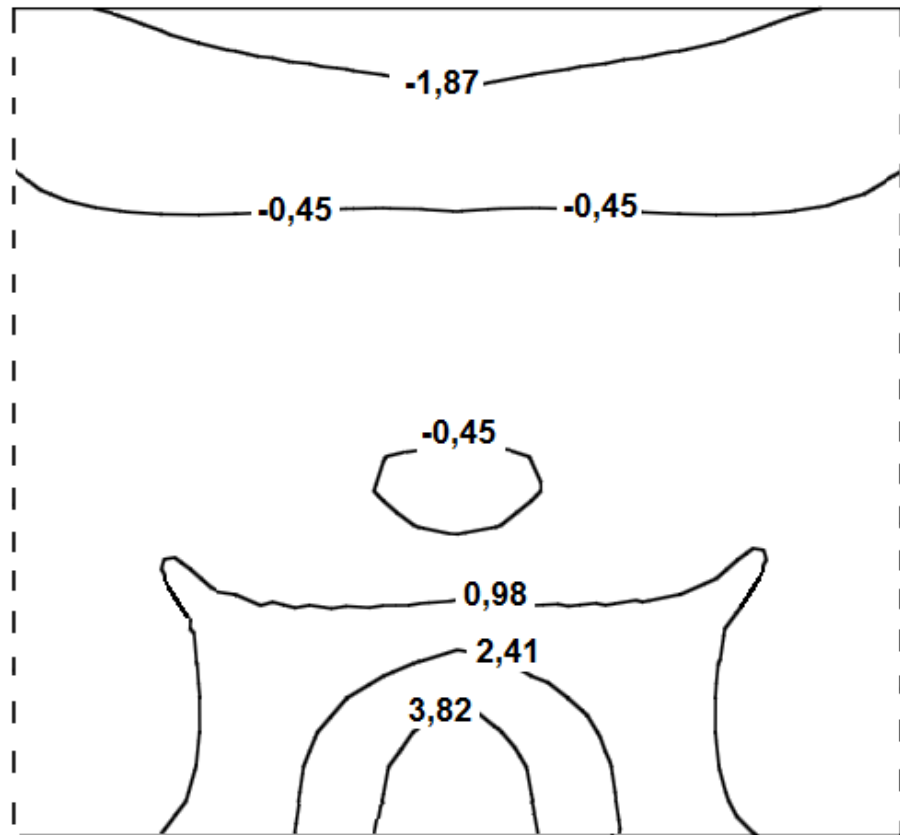
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$$

б)



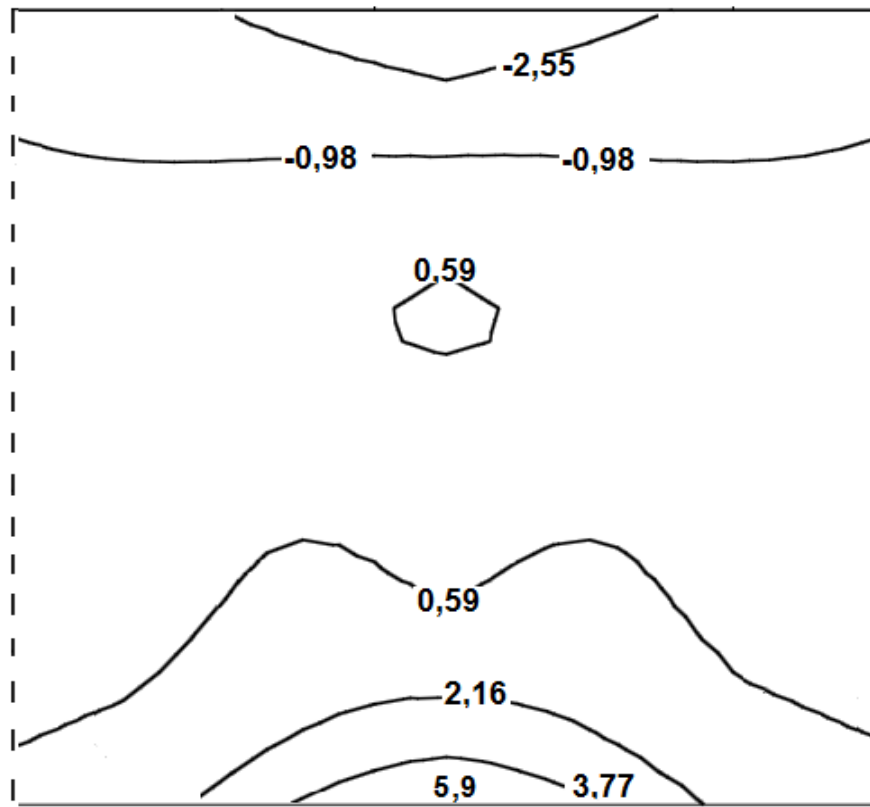
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$$

B)



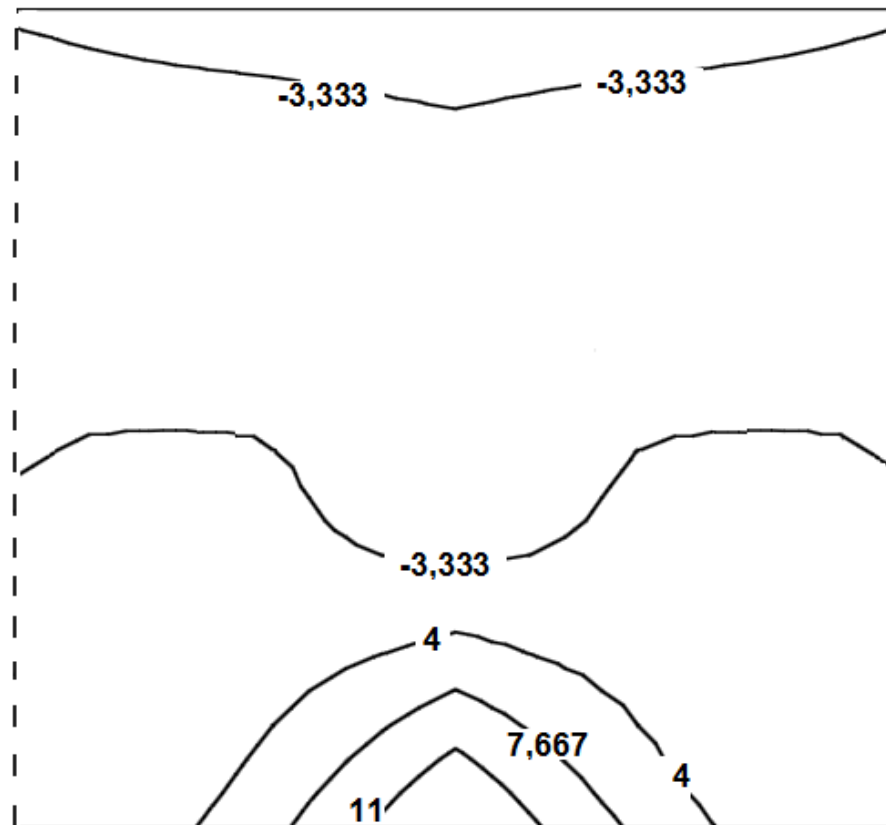
$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$$

Г)



$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6\%$$

д)



$$(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$$

е)

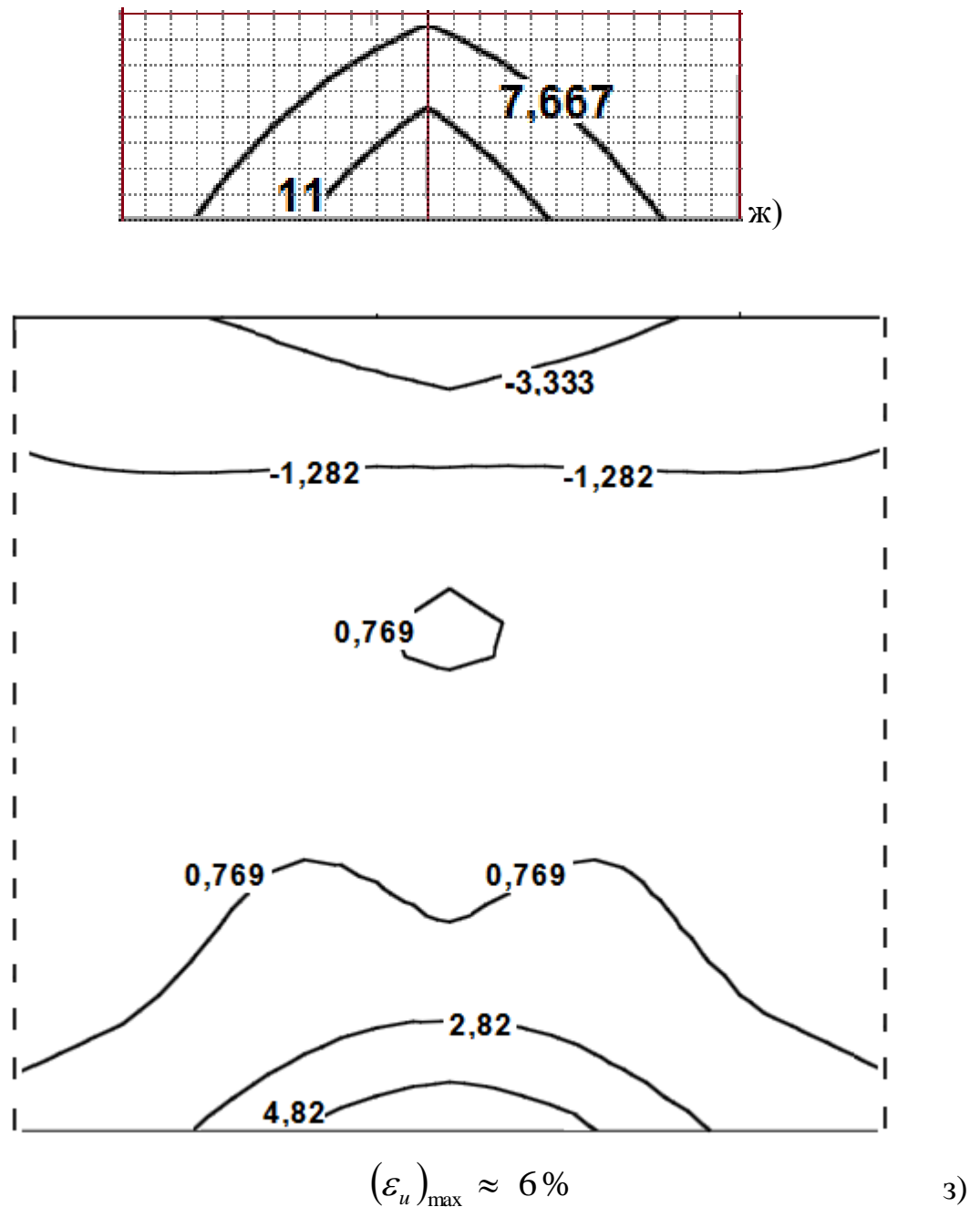


Рисунок 4.4. Локальний вигин тривимірного бруса прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій

Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул тривимірного варіанту методу покомпонентного розщеплення (2.40). В сітці (4.2) було вибрано $N_1 = 21$, $N_2 = N_3 = 7$.

Кроки інтегрування по координатам, часу та розміри були такі:

$$\tau = 0,001; h_1 = h_2 = h_3 = 0,05; H = 1; L = h = 0,3.$$

На рисунку 4.4 а) показана схема навантаження бруса. Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул методу розщеплення (2.40). Поле інтенсивності деформації при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$ в точці опори бруса наведено на рисунку 4.3 г). Поле інтенсивності деформації при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6\%$ наведено на рисунку 4.3 д). Результати розрахунків для максимальних значень інтенсивності деформації $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$ показано на рисунку 4.3 е). Зазначимо, що максимальне значення інтенсивності деформації має місце в околі точки опори бруса.

На рисунках 4.4. ж) показана сітка, за допомогою якої проводиться уточнення результатів в геометрично нелінійній області N. Кроки інтегрування в зоні кінцевих деформацій були зменшені у відношенні 1:8 по осі y та z і 1:12 по осі x . В результаті в рамках запропонованого методу враховано можливість зміни форми і розмірів бруса при наявності великих деформацій.

На рисунку 4.4 з) показано поле інтенсивності деформації після припинення згину бруса. На торцях припиняється дія вертикальних складових швидкостей переміщень. Торці стають вільними (напруження у вузлах торців дорівнюють нулю) і відбувається часткове розвантаження в околі опори шляхом чистого вигину бруса в протилежному напрямку.

В розв'язаній задачі мало місце часткове розвантаження починаючи зі значення інтенсивності деформації в 14%. Розглянемо другий приклад використання наведеної вище інтерполяційної формули і розбудуємо частину діаграми матеріалу, яка задана таблицею 3.1. при розвантаженні

Таблиця 4.1

i	1	2	3	4	5
σ_i	519	743	967	1296	1625
↓					

$\varepsilon_i \downarrow$	10	11	12	13	14
----------------------------	----	----	----	----	----

Варіант 3. Проведемо уточнення інтерполяційної формули на першому відрізку $\varepsilon \in [10;13]$; $\xi_1 = (\varepsilon - 10)/3$

$$\sigma_{III}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(-9\xi_1^3 + 18\xi_1^2 - 11\xi_1 + 2 \right) \cdot 519 + \frac{9}{2} \left(3\xi_1^3 - 5\xi_1^2 + 2\xi_1 \right) \cdot 743 + \\ + \frac{9}{2} \left(-3\xi_1^3 + 4\xi_1^2 - \xi_1 \right) \cdot 967 + \frac{1}{2} \left(9\xi_1^3 - 9\xi_1^2 + 2\xi_1 \right) \cdot 1296 .$$

Варіант 4. Проведемо уточнення інтерполяційної формули на другому відрізку $\varepsilon \in [11;14]$; $\xi_2 = (\varepsilon - 11)/3$

$$\sigma_{IV}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(-9\xi_2^3 + 18\xi_2^2 - 11\xi_2 + 2 \right) \cdot 743 + \frac{9}{2} \left(3\xi_2^3 - 5\xi_2^2 + 2\xi_2 \right) \cdot 967 + \\ + \frac{9}{2} \left(-3\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - \xi_2 \right) \cdot 1296 + \frac{1}{2} \left(9\xi_2^3 - 9\xi_2^2 + 2\xi_2 \right) \cdot 1625 .$$

Числові результати отримані для загальної частини $\varepsilon \in [11;13]$ і наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

$\varepsilon\% \downarrow$	$\sigma(\varepsilon) \downarrow$	$\sigma_{III}(\varepsilon)$	$\sigma_{IV}(\varepsilon)$	$\delta\%$
11	743	743	743	0
11,2	787,8	784,44	774,36	0,642
11,4	832,6	826,72	813,28	0,813
11,6	877,4	870,68	858,92	0,675
11,8	922,2	917,16	910,44	0,366
12	967	967	967	0
12,2	1032,8	1021,04	1027,76	0,329
12,4	1098,6	1080,12	1091,88	0,544
12,6	1164,4	1145,08	1158,52	0,587
12,8	1230,2	1216,76	1226,84	0,414
13	1296	1296	1296	0

Зазначимо, що наведені інтерполяційної формули дають гарний результат навіть обраній для приклада грубій сітці по деформаціям. Максимальна відносна розбіжність $\delta\% = 100 * (\sigma_*(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon)) / \sigma(\varepsilon)$ до 0,65%.

Для порівняння поле інтенсивності деформацій отримане і за допомогою системи інженерного аналізу ABAQUS при $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$ та $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$ показано відповідно на рисунках б) і в).

Має місце якісне співпадіння результатів розрахунків. Особливістю є те, що для досягнення кількісного співпадіння результатів в околі опори бруса в програмі ABAQUS треба дещо по іншому задавати граничні умови (не в одній точці опори, а і в декількох сусідніх).

Алгоритм розрахунків тривимірної нестационарної задачі для функціонально-неоднорідного матеріалу полягав в наступних трьох кроках. На першому з них розв'язується відповідна лінійна задача (L) і визначається область тіла де інтенсивність деформації більше ніж умовна границя $\varepsilon_u^N = 7\%$ (область N). Зазначимо, що для цього можна використовувати і програми інженерного аналізу. На другому кроці в області N тіла розв'язується задача в геометрично нелінійній постановці. Третій крок це уточнення області N і самого розв'язку.

На рисунку 4.4 ж) показана область N. Вона складалась з двох основних комірок сітки (4.2). При отриманні основних N результаті було використано 12 комірок.

На третьому кроці проводилось уточнення області N і самого розв'язку. При цьому для однієї з двох комірок у відповідність було максимально обрано 12×8^2 менших.

Особливістю постановки задачі по уточненню області N є формулювання граничних умов в околі опори. Якщо для L задачі лише в місці опори $x = 0, y \in [-L; L], z = 0$ вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення дорівнюють нулю. В N задачі

при уточненні геометрично нелінійного рішення нульові вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення задавались в області $x \in [-mh_1; mh_1]$, $m = 1; 2; \dots$, $y \in [-L; L]$, $z = 0$.

Друга особливість уточнення в N задачі полягає в зменшенні кроків інтегрування по координатам. При цьому для виконання умови стійкості треба пропорційно зменшувати і крок інтегрування за часом. В результаті може значно збільшитись кількість таких кроків і взагалі час розрахунку.

Третя особливість полягає в вирішенні додаткової задачі інтерполяції шуканих величин у вузлах нової більш дрібної сітки по відповідним значення у вузлах основної сітки. Ця задача вирішена за допомогою двовимірної сплайн-функції (програма в додатку).

В задачі для бруса для уточнення геометрично нелінійного рішення також треба збалансувати дві протилежні тенденції. З одного боку в N-задачі для пластини треба розглянути лише 12 комірок просторової сітки замість 720 (лише 1,67 %). Кількість додаткових обчислювальних операцій на початковій сітці теж суттєво зменшується. З іншої сторони для достовірного порівняння результатів треба при зменшенні кроків інтегрування по координатам збільшувати кількість кроків інтегрування за часом. Ця проблема розв'язувалась за допомогою послідовності числових результатів отриманих на сітці (4.2) з меншими розмірами комірок.

4.3. Поведінка пластини з бічним розрізом при локальному розтягуванні

В третьому параграфі розглянуто поведінку пластини з бічним розрізом при неоднорідному по x розтягуванні. Геометрія пластини задана так: $x \in [0; H]$, $y \in [-L; L]$, $z \in [-h; h]$. Для розрізу вибрано $x \in [l; H]$, $y \in [-h_0; h_0]$, $z \in [-h; h]$.

Початкові умови для всіх невідомих величин нульові.

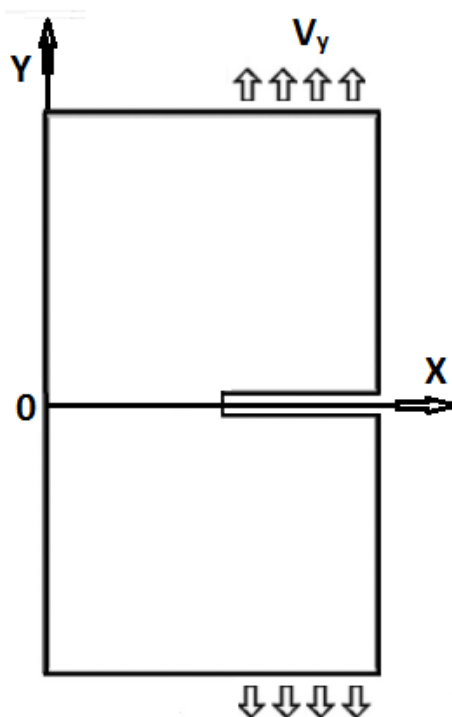
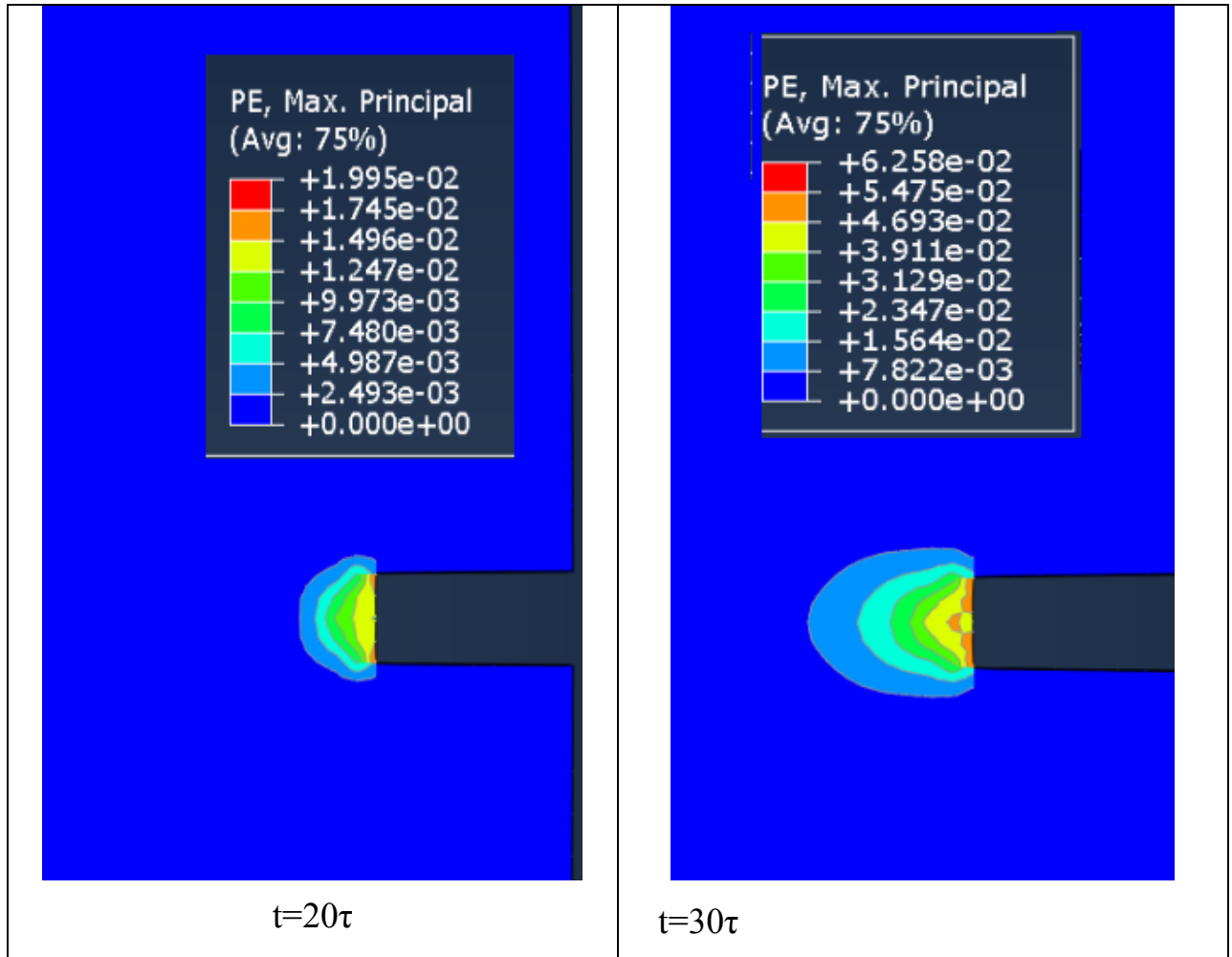


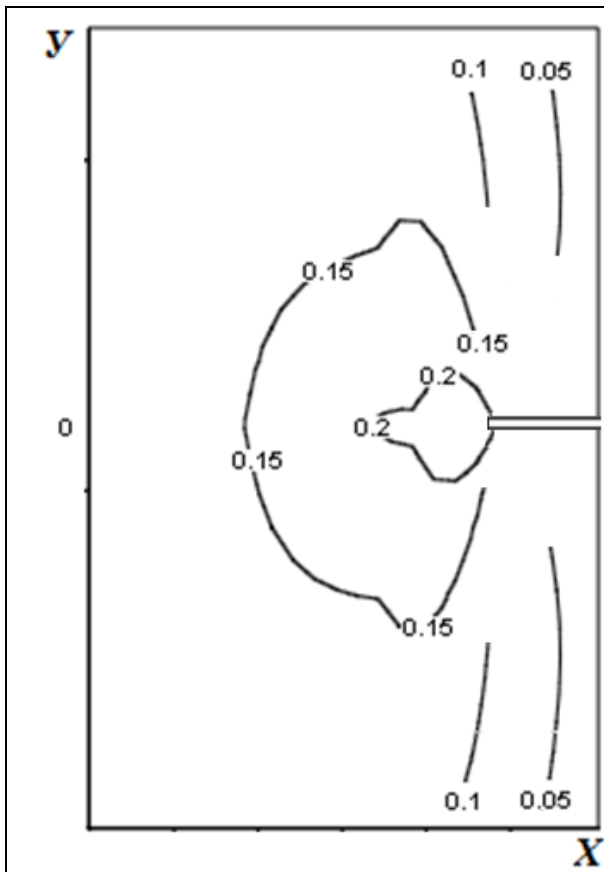
Рисунок 4.5. Геометрія пластини з розрізом

На краях пластини $y = -L$, $y = L$ $\{x \in [l; H]; z \in [-h; h]\}$ задаємо швидкість переміщення $V_y = \varphi(t, x, z)$, яка змінюється по відомому закону. Вся інша поверхня пластини та розрізу вільні від навантаження. В середніх точках пластини, де $z = 0$ переміщення u_z (швидкості переміщень v_z) дорівнюють нулю.

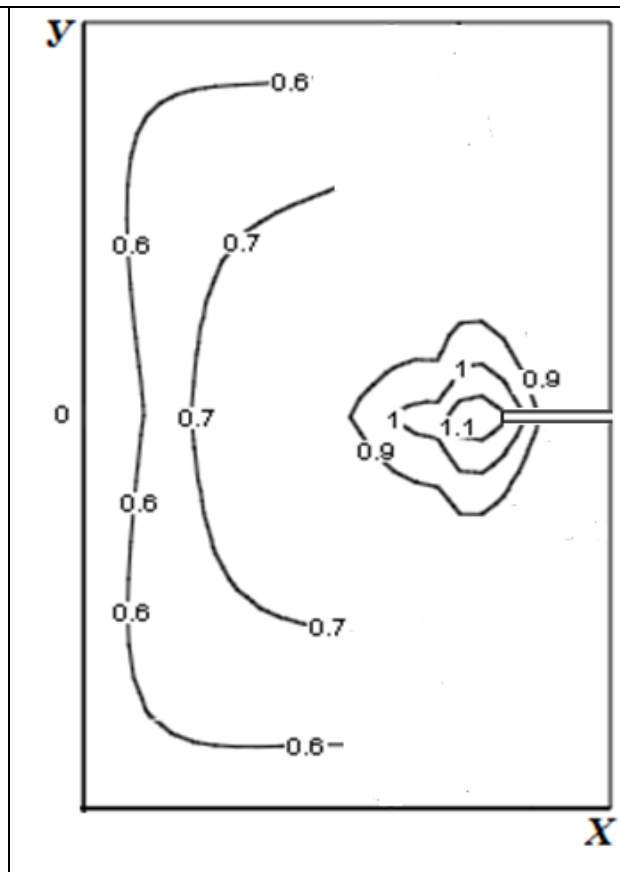
Числові результати, які наведені нижче на рисунку 4.6, отримані за

допомогою методу розщеплення (2.40) для таких сіток за часом (4.1) та координатами (4.2) і розмірів $L = H = 1$; $h = 0,3$; $h_0 = 0,025$; $l = 0,75$. В сітці (4.2) було вибрано $N_1 = 21$, $N_2 = 41$, $N_3 = 7$.

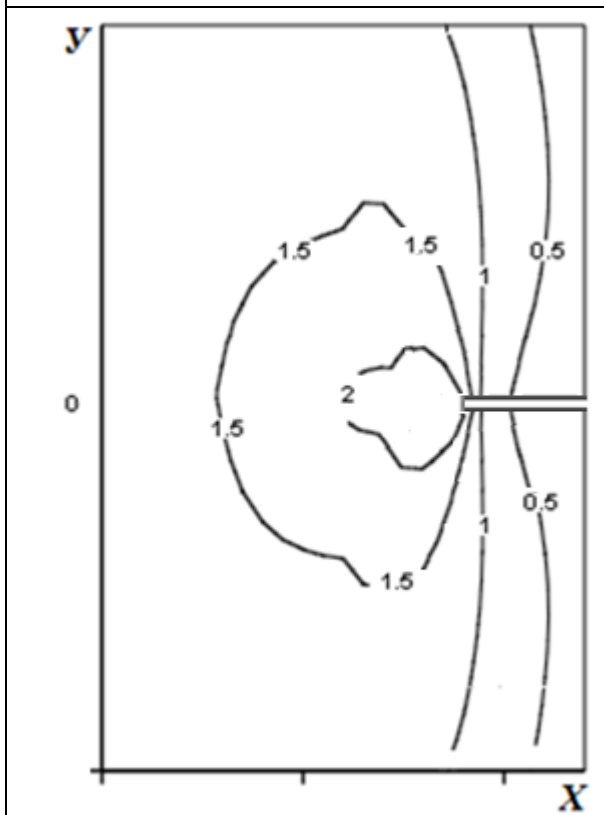




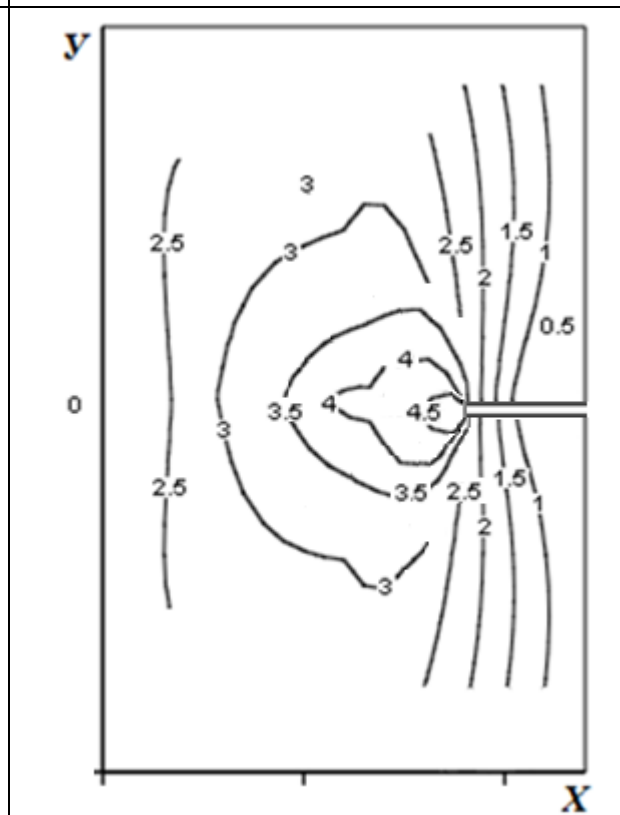
$t=10\tau$



$t=20\tau$



$t=30\tau$



$t=40\tau$

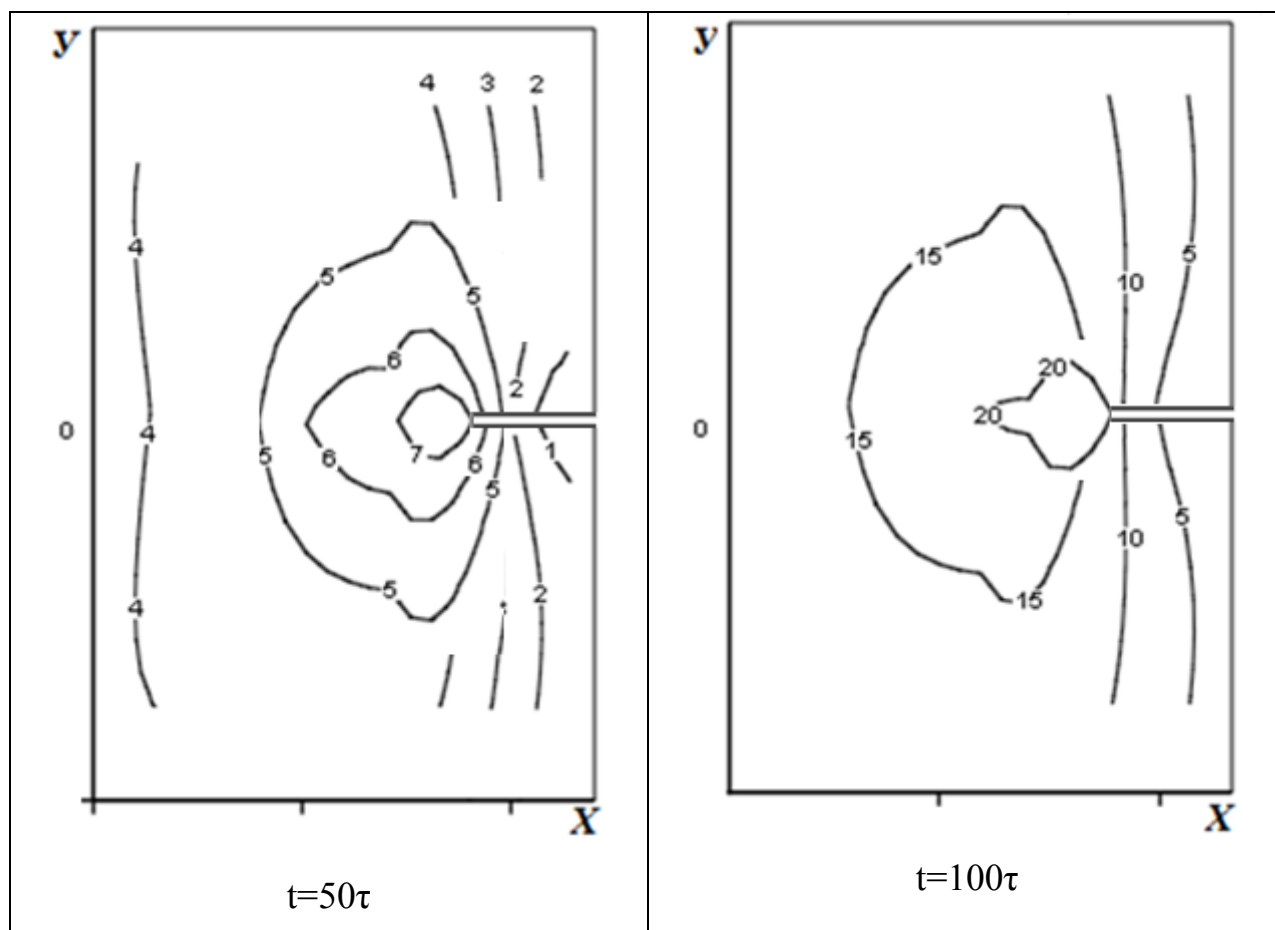


Рисунок 4.6. Поле інтенсивності деформації для різних моментів часу

Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул тривимірного варіанту методу покомпонентного розщеплення (2.40). Кроки інтегрування та розміри були такі: $\tau = 0,001$; $h_1 = h_2 = h_3 = 0,05$;

На рисунках 4.6 показано поле інтенсивності деформації для різних моментів часу. На початку навантаження максимальні показники досягають 7% і розходження між результатами, отриманими в геометрично лінійній і нелінійній постановках поблизу розрізу пластини становить до 1%. З ростом навантаження (рисунок 4.5 для $t=100\tau$) отримано значні пластичні деформації до 20%. В цьому випадку розходження між результатами геометрично лінійного і нелінійній підходів досягає 25%.

Алгоритм розрахунків тривимірної нестационарної задачі для функціонально-неоднорідного матеріалу полягав в наступних трьох кроках.

На першому з них розв'язується відповідна лінійна L-задача і визначається область тіла де інтенсивність деформації більше ніж умовна границя $\varepsilon_u^N = 7\%$ (область N). Зазначимо, що для цього можна використовувати і програми інженерного аналізу. На другому кроці в області N тіла розв'язується задача в геометрично нелінійній постановці. Третій крок це уточнення області N і самого розв'язку.

4.4. Висновки по четвертому розділу

Проведено розв'язання ряду нових задач, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Це задачі про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій. Локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій. Локальне розкриття тривимірної пластини з розрізом при наявності великих пластичних деформацій. В розв'язаних задачах проаналізовано вплив на результати згущення сітки по просторовим координатам та за часом.

Встановлено, що з ростом навантаження в розглянутих тілах в окремих зонах виникають значні пластичні деформації до 20%. В цьому випадку розходження між результатами геометрично лінійного і нелінійній підходів досягає 25%.

Алгоритм розрахунків тривимірної нестационарної задачі для функціонально-неоднорідного матеріалу полягав в наступних трьох кроках. На першому з них розв'язується відповідна лінійна задача (надалі L) і визначається область тіла де інтенсивність деформації більше ніж умовна границя ε_u^N (область N). Зазначимо, що для цього можна використовувати і програми інженерного аналізу. На другому кроці в області N тіла розв'язується задача в геометрично нелінійній постановці. Третій крок це уточнення області N і самого розв'язку.

РОЗДІЛ V.

**АПРІОРНІ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ І ЗБІЖНОСТІ
НЕСТАЦІОНАРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ
СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ**

У п'ятому розділі проведено оцінку точності обчислень та ефективності розробленого нового методу розв'язання задач термомеханіки при значних пластичних деформаціях.

В розв'язаних задачах:

- проаналізовано точність отриманих результатів в одновимірних, двовимірних та тривимірних задачах пружно-пластичності при різних кроках інтегрування;

- досліджено збіжність ітераційної процедури методу при наявності геометричної нелінійності;

- проведено оцінки ефективності розробленого ітераційного методу, у порівнянні з класичним кінцево-різницеvim методом;

- проведено аналіз збіжності розв'язків, отриманих за допомогою розробленого методу та умов збіжності Куранта, які повинні накладатися на кроки інтегрування за часом та координатах;

- проведено загальний аналіз ефективності розробленого методу шляхом порівняння кількості елементарних операцій необхідних для отримання розв'язку геометрично нелінійної задачі термопластичності за допомогою розробленого методу і різницевого методу.

Виявлено, що в геометрично нелінійній постановці, застосування кубічних В-сплайнів для апроксимації дозволяє досягнути третій $O(h^3)$ і другий $O(h^2)$ порядок апроксимації похідних за координатами для внутрішніх вузлів сітки ω_h і вузлів, розміщених на границях тіла. Напружені сплайни дають відповідно величини порядку $O(h^4)$ і $O(h^3)$.

Очевидно, що істотний ефект від використання для апроксимації похідних тих чи інших сплайн-функцій обумовлений вибором значно

більших кроків інтегрування h (для методу розщеплення) в порівнянні з аналогічними кроками λ (для з класичного кінцево-різницевого методу).

Другий важливий ефект полягає в тому, що відношення τ/h значно менше, ніж τ/λ , а це сприятливо позначається на стійкості рахунки і покращує збіжність. Відзначимо, що наведені оцінки наближені і ступінь їх достовірності перевірялась в конкретних задачах.

5.1. Априорні оцінки точності обчислень і збіжності нестационарного розв'язку нелінійних систем рівнянь з частинними похідними

Труднощі пов'язанні з розв'язанням систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних із застосуванням обчислювальних методів призводять до проблеми оцінки точності наближеного розв'язку і вибору масштабу кроку сітки, як за координатами так і за часом.

Перелік задач в яких існує така проблема дуже широкий, зокрема і задачі які виникають в теорії функціональних матеріалів з властивістю термо-пружно-пластичності під дією складних нестационарних навантажень [241, 242].

Існують багато методів числового розв'язання таких систем. На практиці гарно себе зарекомендував метод покомпонентного розщеплення в поєднанні з теорією сплайнів[119].

Пристаюючи до числового вирішення конкретної нестационарної задачі, після її постановки, необхідно визначитися з вибором сіток ω_h і ω_τ . Тут важливе місце займає питання, пов'язане з оцінкою точності обчислень, що в кінцевому підсумку призводить до питання про обґрунтований вибір кроків інтегрування τ, h_1, h_2, h_3 .

Застосування кубічних В-сплайнів для апроксимації похідних по координатам дозволяє досягнути третій $O(h^3)$ и другий $O(h^2)$ Порядок апроксимації відповідно для внутрішніх вузлів сітки ω_h і вузлів, розташованих

на границях тіла. Напружені сплайни дають тут відповідно величини порядку $O(h^4)$ і $O(h^3)$. Ці відомі апріорні оцінки дозволяють отримати наближену оцінку ефективності розробленого варіанту методу покомпонентного розщеплення (явна схема), порівнявши його з класичним кінцево-різницевою методом. Для цього наведемо основні відомості про нього.

Нехай $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ для сітки ω_λ за координатами, яка використовується в класичному різницевої методі і аналогічна по суті сітці ω_h . Тоді явна схема розв'язання векторного рівняння (1.1) у разі застосування класичного кінцево-різницевого методу дозволяє записати:

$$\vec{W}^{p+1} = \vec{W}^p + \tau \left(\sum_{n=1}^3 \Lambda_n \vec{W}^p + \vec{B}^p \right),$$

де:

$$\Lambda_n \vec{W}^p = \frac{A_n}{H_n \lambda_n} \lambda_n(\vec{W}).$$

Різницеві оператори при класичному підході можна представити так:

$$\lambda_n(W_m(\alpha_1^n)) = W_m(\alpha_2^n) - W_m(\alpha_1^n), \quad \lambda_n(W_m(\alpha_{N_n}^n)) = W_m(\alpha_{N_n}^n) - W_m(\alpha_{N_n-1}^n),$$

$$\lambda_n(W_m(\alpha_i^n)) = \frac{1}{2} [W_m(\alpha_{i+1}^n) - W_m(\alpha_{i-1}^n)], \quad i = 2, 3, \dots, N_n - 1, \quad n = 1, 2, 3$$

(5.1)

Як відомо, така апроксимація має другий порядок для центральних вузлів ($O(\lambda^2)$) і перший ($O(\lambda)$) для вузлів, розташованих на той чи інший краю тіла. Вияснимо, у скільки разів більше в порівнянні з λ можна вибрати h (h – максимальний крок сітки ω_h , використовуваної в методі покомпонентного розщеплення), але щоб похибка апроксимації запропонованого методу не перевищувала б похибку класичного різницевого методу. Для цього потрібно вимагати виконання нерівності:

$$h^k \leq \lambda. \quad (5.2)$$

Тут $k = 2$, коли використовуються кубічні В-сплайни і $k = 2,5$ в разі застосування напружених сплайнів. Умову (5.2) отримано шляхом

порівняння порядків апроксимації похідних за координатами для сплайн-апроксимацій з одного боку і апроксимації (5.1) з іншого боку, коли точність обчислень за допомогою запропонованого варіанта методу розщеплення не нижче точності обчислень отриманих за допомогою чисто різницевого підходу. Якщо тепер вибирати мінімально допустиме значення λ , то за допомогою (5.2) можна отримати максимальне допустиме відношення h/λ . Для цієї мети скористаємося умовою стійкості розрахунків Куранта, яке представимо так [118]:

$$h > \lambda > a_* \cdot \tau,$$

де a_* - максимальна швидкість хвилі в тілі. Якщо скористаємося величиною a_* , отриманою для пружного півпростору, то ця умова набуде вигляду [118]:

$$\frac{h}{H_0} > \frac{\lambda}{H_0} > \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (5.3)$$

Через τ_0 і H_0 в (5.3) позначені масштабні одиниці часу і довжини, пов'язані співвідношенням:

$$\frac{H_0}{\tau_0} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

де $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ - швидкість поширення поперечної хвилі в півпросторі. Конкретні значення для τ_0 і H_0 визначаються в залежності від розмірів тіла V і виходячи з швидкості протікання в часі досліджуваних нестационарних процесів деформування тіла.

Очевидно, що істотний ефект від використання для апроксимації похідних тих чи інших сплайн-функцій обумовлений вибором більших кроків h_n в порівнянні з аналогічними кроками λ_n . Другий важливий ефект полягає в тому, що відношення τ/h_n менше, ніж τ/λ_n , а це сприятливо позначається на стійкості розрахунків і покращує збіжність. Відзначимо, що

наведені оцінки наближені і ступінь їх достовірності повинна перевірятися в конкретних задачах.

Зупинимося докладніше на питанні збіжності наближеного розв'язку по часу до точного. Для цього порівнюємо між собою два наближених рішення векторного рівняння (1.1), які в подальшому будемо позначати $\bar{W}_0(t)$ і $\bar{W}_1(t)$. Нехай обидва ці рішення будуються за допомогою розрахункових формул явної схеми методу покомпонентного розщеплення в вузлах сітки ω_h . Відмінність між ними лише в тому, що $\bar{W}_0(t)$ будується за допомогою кроку τ сітки ω_τ , а $\bar{W}_1(t)$ отримано для кроку вдвічі менше - $\tau/2$. Якщо в схемі розщеплення зробити виключення допоміжних величин $\bar{W}^{p+1/3}, \bar{W}^{p+2/3}$, то в розгорнутому вигляді для складових вектора \bar{W}^{p+1} можна записати:

$$(v_k)_0^{p+1} = v_k^p + \tau \cdot A_v + \tau^2 \cdot B_v + \tau^3 C_v, \quad (5.4)$$

де:

$$A_v = \frac{1}{\rho H_1 h_1} \lambda_1(\sigma_{1k}^p) + \frac{1}{\rho H_2 h_2} \lambda_2(\sigma_{2k}^p) + \frac{1}{\rho H_3 h_3} \lambda_3(\sigma_{3k}^p) + B_k,$$

$$B_v = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 \lambda_2(a_{2k1s} \cdot \lambda_1(v_s^p)) + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 \lambda_3(a_{3k1s} \lambda_1(v_s^p)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 \lambda_3(a_{3k2s} \lambda_2(v_s^p)) \right\} + \\ + \frac{\gamma_1}{H_2 h_2} \lambda_2(d_{2k}) + \frac{\gamma_2}{H_3 h_3} \cdot \lambda_3(d_{3k}) + \gamma_2 \frac{\gamma_3}{H_3 h_3} \cdot \lambda_3(d_{3k}),$$

$$C_v = \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 \lambda_3(a_{3k2s} \lambda_2 \lambda_1(\sigma_{1s}^p)) + \gamma_1 \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \lambda_3 \left(\sum_{s=1}^3 a_{3k2s} \lambda_2(B_s) \right);$$

$$(\sigma_{k\lambda})_0^{p+1} = \sigma_{k\lambda}^p + \tau \cdot A_\sigma + \tau^2 \cdot B_\sigma + \tau^3 \cdot C_\sigma, \quad (5.5)$$

$$A_\sigma = \frac{1}{H_1 h_1} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 1s} \lambda_1(v_s^p) + \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \lambda_2(v_s^p) + \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3(v_s^p) + d_{k\lambda},$$

$$\begin{aligned}
B_\sigma &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{H_1 h_1} \cdot \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \lambda_2(\lambda_1(\sigma_{1s}^p)) \right) + \\
&\quad + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3(\lambda_1(\sigma_{1s}^p)) + \\
&\quad + \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3(\lambda_2(\sigma_{2s}^p)) + \\
&\quad + \gamma_1 \left[\frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \lambda_2(B_s) + \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3(B_s) \right], \\
C_\sigma &= \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3 \left(\lambda_2 \cdot \sum_{s=1}^3 a_{2s1\lambda} (\lambda_1(\nu_\lambda^p)) \right) + \\
&\quad + \gamma_1 \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3(\lambda_2(d_{2s}));
\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_{k\lambda})_0^{p+1} = \varepsilon_{k\lambda}^p + \tau \cdot A_\varepsilon + \tau^2 \cdot B_\varepsilon + \tau^3 \cdot C_\varepsilon, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \frac{1}{2H_1 h_1} [\delta_{k1} \cdot \lambda_1(\nu_\lambda^p) + \delta_{\lambda 1}(\nu_k^p)] + \frac{1}{2H_2 h_2} [\delta_{k2} \lambda_2(\nu_\lambda^p) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2(\nu_k^p)] + \\
&\quad + \frac{1}{2H_3 h_3} [\delta_{k3} \lambda_3(\nu_\lambda^p) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3(\nu_k^p)] + c_{k\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot [\delta_{k2} \lambda_2(\lambda_1(\sigma_{1\lambda}^p)) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2(\lambda_1(\sigma_{1k}^p))] \right) + \\
&\quad + \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot [\delta_{k3} \lambda_3(\lambda_2(\sigma_{2\lambda}^p)) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3(\lambda_2(\sigma_{2k}^p))] + \\
&\quad + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot [\delta_{k3} \lambda_3(\lambda_1(\sigma_{1\lambda}^p)) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3(\lambda_1(\sigma_{1k}^p))] + \\
&\quad + \gamma_1 \cdot \frac{1}{2H_2 h_2} [\delta_{k2} \lambda_2(B_\lambda) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2(B_k)] + \\
&\quad + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{1}{2H_3 h_3} [\delta_{k3} \lambda_3(B_\lambda) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3(B_k)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} (\delta_{k3} \lambda_3 \lambda_2 \left(\sum_{s=1}^3 a_{2\lambda 1s} \cdot \lambda_1(\nu_s^3) \right) + \\
&\quad + \delta_{\lambda 3} \lambda_3 \lambda_2 \left(\sum_{s=1}^3 a_{2k 1s} \lambda_1(\nu_s^p) \right)) + \\
&\quad + \gamma_1 \frac{1}{4} \frac{1}{H_2 h_2} \frac{1}{H_3 h_3} [\delta_{k3} \lambda_3 \lambda_2(d_{2\lambda}) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3 \lambda_2(d_{2k})].
\end{aligned}$$

В цих формулах вирази для коефіцієнтів в (5.4)-(5.6) задаються за допомогою формул наведених в першому розділі на інтервалі $t \in [t_p; t_p + \tau]$ і визначаються для моменту часу $t = t_p$.

Таким чином, формули (5.4)-(5.6) дозволяють отримати нульове наближення рішення векторного рівняння (1.1), яке зазначено вище як $\vec{W}_0(t)$.

Інше наближене рішення $\vec{W}_1(t)$ на інтервалі часу $t \in [t_p; t_p + \tau]$ можна отримати на підставі такого алгоритму. З початку будується розв'язок в момент часу $t = t_p + \tau/2$. Для цього в формулах (5.4)-(5.6) зробимо формальну заміну τ на $\tau/2$. В результаті цього визначаються допоміжні величини $\nu_k^{p+1/2}, \sigma_{k\lambda}^{p+1/2}, \varepsilon_{k\lambda}^{p+1/2}$. На другій половині кроку $\tau/2$ за допомогою тих же формул (5.4)-(5.6) визначаються $\nu_k^{p+1}, \sigma_{kl}^{p+1}, \varepsilon_{kl}^{p+1}$ через $\nu_k^{p+1/2}, \sigma_{k\lambda}^{p+1/2}, \varepsilon_{k\lambda}^{p+1/2}$.

Після виключення допоміжних величин в геометрично нелінійних розрахункових формулах отримаємо:

$$\begin{aligned} (\nu_k)_1^{p+1} &= (\nu_k)_0^{p+1} + \Delta \nu_k^{p+1}, \\ (\sigma_{k\lambda})_1^{p+1} &= (\sigma_{k\lambda})_0^{p+1} + \Delta \sigma_{k\lambda}^{p+1}, \\ (\varepsilon_{k\lambda})_1^{p+1} &= (\varepsilon_{k\lambda})_0^{p+1} + \Delta \varepsilon_{k\lambda}^{p+1}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Тут введені позначення:

Для приросту швидкостей:

$$\Delta \nu_k^{p+1} \approx \tau^2 \cdot \Delta B_v + O(\tau^3),$$

$$\begin{aligned}
\Delta B_v = & \frac{1}{4\rho} \left(\frac{1}{H_1 h_1} \right)^2 \cdot \lambda_1 \left(\sum_{s=1}^3 a_{1k1s} \lambda_1(\tau_s^p) \right) + \\
& + \left(\frac{1}{H_2 h_2} \right)^2 \cdot \lambda_2 \left(\sum_{s=1}^3 a_{2k2s} \cdot \lambda_2(\nu_s^p) \right) + \\
& + \left(\frac{1}{H_3 h_3} \right)^2 \cdot \lambda_3 \left(\sum_{s=1}^3 a_{3k3s} \lambda_3(\nu_s^p) \right) + \\
& + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 \left(\lambda_1(a_{1k2s} \cdot \lambda_2(\nu_s^p)) - \lambda_2(a_{2k1s} \lambda_1(\nu_s^p)) \right) + \\
& + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 \left(\lambda_1(a_{1k3s} \cdot \lambda_3(\nu_s^p)) - \lambda_3(a_{3k1s} \lambda_1(\nu_s^p)) \right) + \\
& + \frac{1}{H_3 h_3} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 \left(\lambda_2(a_{2k3s} \cdot \lambda_3(\nu_s^p)) - \lambda_3(a_{3k2s} \lambda_2(\nu_s^p)) \right) + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{H_1 h_1} \lambda_1(d_{1k}) + \frac{1}{H_2 h_2} (1 - 2\gamma_1) \lambda_2(d_{2k}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{H_3 h_3} (1 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2) \lambda_3(d_{k3}) \right), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

для приросту складових тензора напруження:

$$\Delta \sigma_{k\lambda}^{p+1} \approx \tau^2 \cdot \Delta B_\sigma + O(\tau^3),$$

$$\begin{aligned}
\Delta B_\sigma = & \frac{1}{4\rho} \left(\frac{1}{H_1 h_1} \right)^2 \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 1s} \lambda_1 \lambda_1(\sigma_{1s}^p) + \\
& + \left(\frac{1}{H_2 h_2} \right)^2 \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \lambda_2 \lambda_2(\sigma_{2s}^p) + \left(\frac{1}{H_3 h_3} \right)^2 \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3 \lambda_3(\sigma_{3s}^p) + \\
& + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \left(\lambda_1 \lambda_2(\sigma_{2s}^p) - \lambda_2 \lambda_1(\sigma_{1s}^p) \right) + \\
& + \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \left(\lambda_1 \lambda_3(\sigma_{3s}^p) - \lambda_3 \lambda_1(\sigma_{1s}^p) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{H_3 h_3} \frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} (\lambda_2 \lambda_3 (\sigma_{3s}^p) - \lambda_3 \lambda_2 (\sigma_{2s}^p)) + \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{H_1 h_1} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 1s} \lambda_1 (B_s) + (1 - 2\gamma_1) \left(\frac{1}{H_2 h_2} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 2s} \lambda_2 (B_s) \right) \right) + \\
& + \frac{1}{H_3 h_3} \cdot \sum_{s=1}^3 a_{k\lambda 3s} \lambda_3 (B_s),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

для приросту складових тензора деформації:

$$\Delta \varepsilon_{k\lambda}^{p+1} \approx \tau^2 \cdot \Delta B_\varepsilon + O(\tau^3),$$

$$\begin{aligned}
\Delta B_\varepsilon = & \frac{1}{4\rho} \left(\frac{1}{2H_1 h_1} \right)^2 \cdot [\delta_{k1} \lambda_1 \lambda_1 (\sigma_{1\lambda}^p) + \delta_{\lambda 1} \lambda_1 \lambda_1 (\sigma_{1k}^p)] + \\
& + \left(\frac{1}{2H_2 h_2} \right)^2 \cdot [\delta_{k2} \lambda_2 \lambda_2 (\sigma_{2\lambda}^p) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2 \lambda_2 (\sigma_{2k}^p)] + \\
& + \left(\frac{1}{2H_3 h_3} \right)^2 \cdot [\delta_{k3} \lambda_3 \lambda_3 (\sigma_{3\lambda}^p) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3 \lambda_3 (\sigma_{3k}^p)] + \\
& + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_2 h_2} [\delta_{k1} \lambda_1 \lambda_2 (\sigma_{2\lambda}^p) + \delta_{\lambda 1} \lambda_1 \lambda_2 (\sigma_{2k}^p) - \delta_{k2} \lambda_2 \lambda_1 (\sigma_{1\lambda}^p) - \delta_{\lambda 2} \lambda_2 \lambda_1 (\sigma_{1k}^p)] + \\
& + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1 h_1} \frac{1}{H_3 h_3} [\delta_{k1} \lambda_1 \lambda_3 (\sigma_{3\lambda}^p) + \delta_{\lambda 1} \lambda_1 \lambda_3 (\sigma_{3k}^p) - \delta_{k3} \lambda_3 \lambda_1 (\sigma_{1\lambda}^p) - \delta_{\lambda 3} \lambda_3 \lambda_1 (\sigma_{1k}^p)] + \\
& + \frac{1}{4} \frac{1}{H_3 h_3} \frac{1}{H_2 h_2} [\delta_{k2} \lambda_2 \lambda_3 (\sigma_{3\lambda}^p) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2 \lambda_3 (\sigma_{3k}^p) - \delta_{k3} \lambda_3 \lambda_2 (\sigma_{2\lambda}^p) - \delta_{\lambda 3} \lambda_3 \lambda_2 (\sigma_{2k}^p)] + \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{H_1 h_1} [\delta_{k1} \lambda_1 (B_\lambda) + \delta_{\lambda 1} \lambda_1 (B_k)] + \frac{1}{H_2 h_2} (1 - 2\gamma_1) [\delta_{k2} \lambda_2 (B_\lambda) + \delta_{\lambda 2} \lambda_2 (B_k)] \right) + \\
& + \frac{1}{H_3 h_3} (1 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2) [\delta_{k3} \lambda_3 (B_\lambda) + \delta_{\lambda 3} \lambda_3 (B_k)].
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Оцінімо величини Δv_k^{p+1} , $\Delta \sigma_{k\lambda}^{p+1}$, $\Delta \varepsilon_{k\lambda}^{p+1}$ для геометрично нелінійного випадку.

Нехай:

$$\begin{aligned}
\lambda^p & = \max \{ \lambda_i (d_{k\lambda}); \lambda_i (B_k) \}, \\
L^p & = \max \{ \lambda_i \lambda_j (v_k^p); \lambda_i \lambda_j (\sigma_{k\lambda}^p) \}, \\
h_* & = \min \{ H_1 h_1; H_2 h_2; H_3 h_3 \}.
\end{aligned}$$

Тоді, нехтуючи величинами порядку $O(\tau^3)$ в формулах (5.8) - (5.10), отримаємо оціночні нерівності:

$$\begin{aligned} |\Delta v_k^{p+1}| &< \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2 L^p A_v^* + \tau \frac{\tau}{h_*} \cdot \lambda^p \cdot B_v^*, \\ |\Delta \sigma_{k\lambda}^{p+1}| &< \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2 L^p A_\sigma^* + \tau \frac{\tau}{h_*} \cdot \lambda^p \cdot B_\sigma^*, \\ |\Delta \varepsilon_{k\lambda}^{p+1}| &< \frac{3}{8\rho} \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2 L^p + \tau \frac{\tau}{h_*} \cdot \lambda^p \cdot B_\varepsilon^*. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} A_v^* &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 |a_{mk\lambda s}|, \\ B_v^* &= 3 - 4\gamma_1 - 2\gamma_2, \\ A_\sigma^* &= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^3 \{ |a_{k\lambda 1s}| + 3|a_{k\lambda 2s}| + |5a_{k\lambda 3s}| \}, \\ B_\sigma^* &= \sum_{s=1}^3 \{ |a_{k\lambda 1s}| + |1 - 2\gamma_1| (|a_{k\lambda 2s}| + |a_{k\lambda 3s}|) \}, \\ B_\varepsilon^* &= \frac{1}{2} [\delta_{k1} + \delta_{\lambda 1} + |1 - 2\gamma_1| (\delta_{k2} + \delta_{\lambda 2}) + |1 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2| (\delta_{k3} + \delta_{\lambda 3})]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Аналізуючи вирази (5.11), можна зробити висновок, що для усіх складових вектора $\bar{W}(W_m, m=1,2,\dots,15)$, який є рішенням рівняння (1.1), справедлива оцінка:

$$|\Delta W_m^{p+1}| < \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2 \cdot A, \quad (5.19)$$

де:

$$\begin{aligned} A &= A_* \cdot L_* (1 + h_*), L_* = \max_p (\lambda^p, L^p), \\ A_* &= \max \left(\frac{A_v^*}{\rho}, \frac{A_\sigma^*}{\rho}, \frac{3}{8\rho}, B_v^*, B_\sigma^*, B_\varepsilon^* \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Нерівність (5.19) дозволяє оцінити зміна різниці між нульовим і першим наближенням лише на одному кроці інтегрування за часом τ . Нехай потрібно зробити p_* кроків τ або іншими словами $t \in [0; p_*\tau]$.

Тоді на підставі (1.19)

$$|(W_m(t))_1 - (W_m(t))_0| < p_* \cdot A \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2. \quad (5.21)$$

Розглянемо послідовність наближених рішень $(W_m(t))_0, (W_m(t))_1, (W_m(t))_2, \dots, (W_m(t))_n, (W_m(t))_{n+1}$, де $t \in [0; p_*\tau]$. Кожне наступне наближення відрізняється від попереднього тим, що воно побудоване з кроком інтегрування в два рази меншим, а кількість таких кроків відповідно в два рази більше. Тоді користуючись (5.21) можна записати:

$$\begin{aligned} |(W_m(t))_2 - (W_m(t))_1| &< 2p_* A \left(\frac{\tau}{2h_*} \right)^2, \\ |(W_m(t))_3 - (W_m(t))_2| &< 4p_* A \left(\frac{\tau}{4h_*} \right)^2, \\ &\dots, \\ |(W_m(t))_n - (W_m(t))_{n-1}| &< 2^{n-1} p_* A \left(\frac{\tau}{2^{n-1} h_*} \right)^2, \\ |(W_m(t))_{n+1} - (W_m(t))_n| &< 2^n p_* A \left(\frac{\tau}{2^n h_*} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Нехай рішення системи (1) являє собою границя зазначеної вище послідовності рішень при $n \rightarrow \infty$

$$W_m(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (W_m(t))_{n+1}. \quad (5.23)$$

Оцінимо різницю на підставі нерівностей (21) і (22). Тоді:

$$\begin{aligned} |(W_m(t))_{n+1} - (W_m(t))_0| &< |(W_m(t))_{n+1} - (W_m(t))_n| + \\ &+ |(W_m(t))_n - (W_m(t))_{n-1}| + \\ &\dots + |(W_m(t))_2 - (W_m(t))_1|, \end{aligned}$$

$$|(W_m(t))_1 - (W_m(t))_0| < p_* A \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right).$$

Якщо тут перейти до границі, то отримаємо:

$$|(W_m(t))_{n+1} - (W_m(t))_0| < 2p_* A \left(\frac{\tau}{h_*} \right)^2. \quad (5.24)$$

Таким чином, можна вважати доведеною наступну теорему:

ТЕОРЕМА збіжності наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Послідовність наближених розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних $(W_m(t))_n, n = 0, 1, 2, \dots, t \in [0; p_* \tau]$, геометрично нелінійної системи (1.1), яка отримана на підставі явної схеми методу покомпонентного розщеплення відповідно до кроків інтегрування $\tau/2^n$, обмежена і сходиться до точного розв'язку $W_m(t)$.

Відзначимо, що нерівності (5.21) і (5.24) можна використовувати для оцінки наближеного розв'язку тієї чи іншої нестационарної тривимірної задачі теорії термопружності пластичності за нульовим і першим наближенням $(W_m(t))_0$ и $(W_m(t))_1$.

Дійсно, якщо переписати у вигляді:

$$|(W_m(t))_1 - (W_m(t))_0| < \varepsilon_*, \quad (5.25)$$

де величина $\tilde{\varepsilon}_*$ визначається з числового експерименту на певному відрізку часу $t \in [0; t_*]$, а (24) надати вигляду:

$$|(W_m(t)) - (W_m(t))_0| < 2\varepsilon_*, \quad (5.26)$$

то на підставі останньої нерівності можна дати наближену оцінку розбіжності між точним рішенням і його нульовим наближенням для $t \in [0; t_*]$.

Наприкінці даного параграфа конкретизуємо вагові коефіцієнти $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, які входять до складу розрахункових схем методу по компонентного розщеплення підвищеної точності. Для цього потрібно мінімізувати функцію, яка представляє собою суму квадратів виразів, що входять до складу оціночних формул $B_v^*, B_\sigma^*, B_\varepsilon^*$ (5.4)-(5.10). Формально це дозволить зменшити другі доданки в правих частинах оціночних нерівностей (5.11). Зазначимо, що в залежності від значень індексів у розгорнутому вигляді можна записати:

$$B_\varepsilon^* = \begin{cases} 1, (k = \lambda = 1); \\ 1 - 2\gamma_1, (k = \lambda = 2); \\ 1 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2, (k = \lambda = 3); \\ 1 - \gamma_1, (k = 1, \lambda = 2); \\ 1 - \gamma_1 - \gamma_2, (k = 1, \lambda = 3); \\ 1 - 2\gamma_1 - \gamma_2, (k = 2, \lambda = 3). \end{cases}$$

Крім цього, $B_v^* = 3 - 4\gamma_1 - 2\gamma_2$, а до складу B_σ^* входить величина $1 - 2\gamma_1$.

Зазначену вище функцію змінних γ_1, γ_2 , яка підлягає мінімізації, запишемо так:

$$F(\gamma_1, \gamma_2) = 1 + (1 - 2\gamma_1)^2 + (1 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2)^2 + \\ + (1 - \gamma_1)^2 + (1 - \gamma_1 - \gamma_2)^2 + (1 - 2\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (3 - 4\gamma_1 - 2\gamma_2)^2.$$

В результаті мінімізації отримаємо наступні значення $\gamma_1 = 2/3, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 = 1/3$. Таким чином, в разі рішення тривимірних нестационарних задач за допомогою запропонованого варіанту методу покомпонентного розщеплення в розрахункових формулах слід брати

$$\gamma_1 = 2/3, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1/3. \quad (5.27)$$

При вирішенні двовимірних задач величина B_v^* задається виразом (5.12). Для B_ε^* можна записати:

$$B_{\varepsilon} = \begin{cases} 1, & (k = \lambda = 1); \\ 1 - 2\gamma_1, & (k = \lambda = 2); \\ 1 - \gamma_1, & (k = 1, \lambda = 2). \end{cases}$$

Тоді функція, що представляє собою суму квадратів величин, що входять до складу $B_v^*, B_{\sigma}^*, B_{\varepsilon}^*$ буде виглядати так:

$$F(\gamma_1) = 1 + (1 - 2\gamma_1)^2 + (1 - \gamma_1)^2.$$

Тут враховано $\gamma_1 + \gamma_2 = 1, (\gamma_3 = 0)$. Мінімум $F(\gamma_1)$ досягається при $\gamma_1 = 3/5$.

Тоді:

$$\gamma_1 = 3/5, \gamma_2 = 2/5, (\gamma_3 = 0) \quad (5.28)$$

Таким чином, приступаючи до числового розв'язання нестационарної тривимірної задачі термо-пружнопластичності на підставі запропонованого варіанту МПР підвищеної точності, потрібно вибрати кроки інтегрування τ і $h_i, i = 1, 2, 3$, які задовольняють умові стійкого розрахунку (7) і задати вагові коефіцієнти $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ в правих частинах розрахункової схеми за допомогою (5.27) або (5.28).

5.2. Загальний аналіз ефективності розробленого методу

Як видно з наведених вище результатів застосування запропонованого в дисертації варіанту МПР до вирішення нестационарних просторових задач теорії пластичності дозволяє істотно зменшити час їх вирішення на ЕОМ в порівнянні з класичним КРМ за умови досягнення однакової точності обчислень.

Сформулюємо в загальному вигляді критерій ефективності методу по компонентного розщеплення. В якості критерію для оцінки ефективності (економічності) явної схеми методу по компонентного розщеплення заснованого на застосуванні для апроксимації диференціальних операторів сплайн-функцій (кубічних В-сплайнів і напружених сплайнів), виберемо відношення $m_2^{(3)} / m_1^{(3)}$. Тут $P_2^{(3)}$ і $P_1^{(3)}$ - кількість елементарних операцій,

необхідних для побудови рішення $(V_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ на одному повному кроці за часом відповідно для класичного кінцево-різницевого методу і методу покомпонентного розщеплення. Оцінимо величини $P_2^{(3)}$ і $P_1^{(3)}$.

Нехай $\mu_B, \mu_C, \mu_d, \mu_a$ і $\mu_\lambda \dots$ - цілі числа, які означають кількість елементарних операцій, що треба виконати при обчисленні величин $B_k, C_{kl}, d_{kl}, a_{ijkl}$ і диференціальних операторів $\lambda_n(\dots)$. Якщо скористатися формулами першого і другого розділів, то можна визначити, що в залежності від використовуваної системи координат числа μ_e і μ_c задовольняють нерівності

$$0 \leq \mu_B \leq 10, \quad 0 \leq \mu_c \leq 3.$$

Що стосується чисел μ_a і μ_∂ , то їх величина залежить від того, які співвідношення теорії пластичності використовуються при вирішенні задачі. Наведемо приклад. Якщо застосовуються співвідношення теорії процесів малої кривизни (ТПМК), то всі a_{ijkl} постійні і, отже, $\mu_a = 0$. У разі використання співвідношень теорії малих пружно-пластичних деформацій (ТМППД) при обчисленні a_{ijkl} потрібно зробити $\mu_a = 40$ операцій.

З величиною μ_d все навпаки. У загальному випадку $\mu_d = 30$ якщо застосовуються співвідношення теорії процесів малої кривизни і $\mu_d = 3$ у разі використання співвідношень теорії малих пружно-пластичних деформацій

Для класичної двохточкової кінцево-різницевої апроксимації диференціальних операторів (5.1) отримаємо $\mu_\lambda = 2$. У разі використання для цієї мети кубічних В-сплайнів неважко визначити, що $\mu_\lambda = 5$ для центральних вузлів і $\mu_\lambda = 7$ для крайніх вузлів. Відзначимо, що така ж кількість операцій буде і в разі апроксимації похідних за допомогою напружених сплайнів.

Виходячи з формул класичного варіанту методу покомпонентного розщеплення, можна оцінити кількість операцій, необхідних для обчислення швидкостей переміщень, компонент тензора напружень і деформацій. Якщо зазначені вище кількості операцій позначати відповідно $P_{1\nu}$, $P_{1\sigma}$ и $P_{1\varepsilon}$, то:

$$\begin{aligned} P_{1\nu} &= 3(\mu_B + \mu_\lambda) + 12, \\ P_{1\sigma} &= 6\mu_d + 18(\mu_a + \mu_\lambda) + 42, \\ P_{1\varepsilon} &= 6(\mu_C + \mu_\lambda) + 24 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Введемо в розгляд нову величину:

$$P_{1w} = P_{1\nu} + P_{1\sigma} + P_{1\varepsilon}.$$

З урахуванням (5.29) її можна записати так:

$$P_{1w} = 3(\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 6\mu_d + 9\mu_\lambda + 26). \quad (5.30)$$

Якщо в тілі, що представляє собою прямокутний паралелепіпед, ввести сітку ω_h , розміри якої визначаються числами N_1, N_2, N_3 (N_n - кількість вузлів в напрямку координати α_n), то можна оцінити сумарну величину P_1 . Так при вирішенні задачі на першому дробовому кроці за часом, коли інтегрування ведеться в напрямку α_1 ($n=1$), потрібно виконати $4 \cdot P_{1w}|_{\mu_\lambda=7} + (N_1 - 4)P_{1w}|_{\mu_\lambda=5}$ операцій уздовж кожної з $N_2 \cdot N_3$ координатних ліній α_1 .

Аналогічним чином можна визначити кількість операцій, що виконуються на другому ($n = 2$) і третьому ($n = 3$) дробних кроках за часом. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} P_1^{(3)} &= N_2 \cdot N_3 \left[4 \cdot P_{1w}|_{\mu_\lambda=7} + (N_1 - 4)P_{1w}|_{\mu_\lambda=5} \right] + \\ &\quad + N_1 \cdot N_3 \cdot \left[4 \cdot P_{1w}|_{\mu_\lambda=7} + (N_2 - 4)P_{1w}|_{\mu_\lambda=5} \right] + \\ &\quad + N_1 \cdot N_2 \cdot \left[4 \cdot P_{1w}|_{\mu_\lambda=7} + (N_3 - 4)P_{1w}|_{\mu_\lambda=5} \right]. \end{aligned}$$

Якщо тут привести подібні, то з урахуванням (5.30):

$$P_1^{(3)} = 216(N_1N_2 + N_1N_3 + N_2N_3) + 9N_1N_2N_3(\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 6\mu_a + 71). \quad (5.31)$$

Проведемо оцінку величини $P_1^{(3)}$. Позначимо через $m_{2\nu}$, $m_{2\sigma}$ і $m_{2\varepsilon}$ кількість операцій, необхідних для обчислення відповідно швидкостей переміщень, складових тензора напружень і деформацій в одному вузлі сітки ω_h . Нехай:

$$P_{2w} = m_{2\nu} + m_{2\sigma} + m_{2\varepsilon}.$$

Тоді з урахуванням наведених вище формул отримаємо

$$P_{2w} = 3(\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 18\mu_a + 27\mu_\lambda + 58). \quad (5.32)$$

Якщо розміри сітки ω_h задаються числами M_1, M_2, M_3 (M_n - кількість вузлів в напрямку α_n), то:

$$P_2^{(3)} = M_1M_2M_3 \cdot P_{2w}.$$

З урахуванням (5.32) при $\mu_\lambda = 2$ запишемо:

$$P_2^{(3)} = 3M_1M_2M_3(\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 18\mu_a + 85). \quad (5.33)$$

У загальному випадку величини N_n і M_n пов'язані між собою в такий спосіб $|\alpha_{N_n}^n - \alpha_1^n| = (N_n - 1)h_n = (M_n - 1)\ell_n$, де h_n і ℓ_n - власне кроки інтегрування, вибрані для методу покомпонентного розщеплення і класичного кінцево-різницевого методу. Звідки отримаємо:

$$M_n = 1 + \frac{h_n}{\ell_n}(N_n - 1), \quad n = 1, 2, 3. \quad (5.34)$$

Якщо ввести позначення:

$$\mu_0 = \mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 6\mu_a + 71,$$

то можна записати:

$$\frac{P_2^{(3)}}{P_1^{(3)}} = \frac{(n_1N_1 - m_1)(n_2N_2 - m_2)(n_3N_3 - m_3)(\mu_0 + 12\mu_a + 14)}{72(N_1N_2 + N_1N_3 + N_2N_3) + 3N_1N_2N_3 \cdot \mu_0}. \quad (5.35)$$

Тут:

$$n_k = h_k / \ell_k, \quad m_k = n_k - 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.36)$$

Очевидно, що відчутний ефект від застосування більш точної апроксимації диференціальних операторів першого порядку λ_n може бути при $M_n > N_n (h_n > \ell_n)$, коли обома методами досягається одна і та ж точність обчислень. На підставі (5.36) отримуємо:

$$n_k = h_k^{1-q}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.37)$$

У випадку застосування для апроксимації похідних кубічних В-сплайнів $q = 2$, а при застосуванні для апроксимації похідних напружених сплайнів $q = 2,5$ [119].

Тепер, задавши кроки h_k і числа N_k, M_k за допомогою формул (5.35), можна знайти величину $P_2^{(3)} / P_1^{(3)}$.

Оцінку ефективності запропонованого варіанту МПР можна отримати і на підставі наближеного виразу, що випливає з (4.34). Розділимо чисельник і знаменник на $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$. Тоді:

$$\frac{P_2^{(3)}}{P_1^{(3)}} = \frac{\left(n_1 - \frac{m_1}{N_1}\right) \left(n_2 - \frac{m_2}{N_2}\right) \left(n_3 - \frac{m_3}{N_3}\right) (\mu_0 + 12\mu_a + 14)}{72 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3}\right) + 3\mu_0}.$$

Якщо зменшити чисельник (замість m_k / N_k віднімається більше число n_k / N_k) і збільшити знаменник (оскільки N_n не більше 4, то найбільше значення знаменника досягається при $N_n=4$) в останньому виразі, то:

$$\begin{aligned} \frac{P_2^{(3)}}{P_1^{(3)}} &= \frac{n_1 n_2 n_3 \left(1 - \frac{1}{N_1}\right) \left(1 - \frac{1}{N_2}\right) \left(1 - \frac{1}{N_3}\right)}{54 + 3\mu_0} (\mu_0 + 12\mu_a + 14) > \\ &> \frac{n_1 n_2 n_3 (3/4)^3 (\mu_0 + 12\mu_a + 14)}{3(18 + \mu_0)}. \end{aligned}$$

Цю нерівність отримано шляхом вибору найменшого значення величини $1-1/N_n$, яке досягається при $N_n=4$ і дорівнює $3/4$. Таким чином, оціночна нерівність виглядає так:

$$\frac{P_2^{(3)}}{P_1^{(3)}} > \frac{9}{64} n_1 n_2 n_3 \cdot \frac{\mu_0 + 12\mu_a + 14}{\mu_0 + 18}. \quad (5.38)$$

Якщо тіло V задано в прямокутній декартовій системі координат ($\mu_B = \mu_c = \mu_d = 0$) і матеріал поводить псевдо-пружно ($\mu_a = 0$), то нерівність (5.38) буде виглядати так:

$$\frac{P_2^{(3)}}{P_1^{(3)}} > 1,1343 \cdot n_1 n_2 n_3. \quad (5.39)$$

Якщо за допомогою вказаного варіанту МПР вирішується двовимірна задача (плоска деформація), то:

$$P_{1w} = 2(\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 6\mu_a + 9\mu_\lambda + 26)$$

і, оскільки:

$$P_1^{(2)} = N_2 \cdot \left[4 \cdot P_{1w} \Big|_{\mu_\lambda=7} + (N_1 - 4) \cdot P_{1w} \Big|_{\mu_\lambda=5} \right] + \\ + N_1 \cdot \left[4 \cdot P_{1w} \Big|_{\mu_\lambda=7} + (N_2 - 4) \cdot P_{1w} \Big|_{\mu_\lambda=5} \right],$$

Отримаємо:

$$P_1^{(2)} = 144(N_1 + N_2) + 4 \cdot N_1 N_2 \cdot \mu_0. \quad (5.40)$$

Аналогічно визначається і:

$$P_2^{(2)} = 2M_1 M_2 (\mu_B + 2\mu_c + 2\mu_d + 18\mu_a + 85). \quad (5.41)$$

Формули (5.40), (5.41) дозволяють записати оціночну рівність:

$$\frac{P_2^{(2)}}{P_1^{(2)}} = \frac{(n_1 N_1 - m_1)(n_2 N_2 - m_2)(\mu_0 + 12\mu_a + 14)}{72(N_1 + N_2) + 2N_1 N_2 \cdot \mu_0}, \quad (5.42)$$

а на підставі неї і нерівність:

$$\frac{P_2^{(2)}}{P_1^{(2)}} > \frac{9}{32} n_1 n_2 \cdot \frac{\mu_0 + 12\mu_a + 14}{\mu_0 + 18}. \quad (5.43)$$

Таким чином, формули (4.34) і (4.41) дозволяють оцінити економічність явної схеми класичного методу покомпонентного розщеплення, в якій використанні сплайн - функції.

Розглянемо приклад оцінки економічності МПР. У задачі, наведеній в параграфі 4.1, де розміри сітки ω_h визначалися числами $N_1 = N_2 = 21, N_3 = 7$, а кроки інтегрування $h_1 = h_2 = h_3 = 0,05$. На підставі умови (5.37) отримаємо $n_1 = n_2 = n_3 = 4,472$.

Відповідні по точності результати можуть бути отримані за допомогою класичного різницевого методу при значеннях $\tau = 0,000224; l_1 = l_2 = l_3 = 0,0112$.

Порівняємо кількість операцій $P_1^{(3)}$ і $P_2^{(3)}$, необхідних для побудови рішення $(v_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ на одному повному кроці по часу відповідно для методу розщеплення і класичного кінцево-різницевого методу. Якщо скористатися виразом (5.38), то отримаємо $P_2^{(3)} / P_1^{(3)} \approx 12,58$. Крім цього, при вибраних кроках інтегрування за часом потрібно зробити ще й в 4,472 разів більше елементарних операцій. В результаті відношення кількості операцій досягне 56,25.

Таким чином, розрахункові формули класичного методу покомпонентного розщеплення дозволяють отримати рішення необхідної точності зробивши всього лише 1,77% операцій, якщо брати величину $P_2^{(3)}$ за 100%.

На прикладі цієї задачі видно, що розроблений варіант МПР дозволяє істотно економити пам'ять ЕОМ в порівнянні з класичним кінцево-різницевим методом.

5.3. Порівняння розрахункових формул в геометрично лінійній і нелінійній постановках

В наведених вище формулах окремо запишемо складові, які обумовлені геометрично нелінійною постановкою.

5.3.1. Розрахункові формули для класичного методу дробних кроків

Для класичного методу дробних кроків запишемо складові, які обумовлені геометрично нелінійною постановкою.

$$v_j^{p+1/3} = v_j^p + \tau \left[\frac{1}{\rho H_1 h_1} \lambda_1(\sigma_{1j}) + \gamma_1 B_j^L \right]^p + \tau \gamma_1 \langle V_j^N \rangle^p;$$

$$V_j^N = \frac{1}{H_j} \left(\frac{\partial \sigma_{jj}^0}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_j} \sigma_{jj}^0 \right) \frac{\partial (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j \partial \alpha_j} + \sigma_{jj}^0 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j^2 \partial \alpha_j^2};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{p+1/3} = & \sigma_{ij}^p + \frac{\tau}{h_1} \{ a_{ij11} \lambda_1(v_1) + a_{ij12} \lambda_1(v_2) + a_{ij13} \lambda_1(v_3) \}^p + \\ & + \frac{\tau \gamma_1}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^0 + b_{ij})^p + \left\langle \frac{\tau}{h_1} \Omega_{ij}^p + \frac{\tau \gamma_1}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^N)^p \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^p = & \left[a_{ij11} e_{11} + a_{ij12} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij13} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right] \lambda_1(v_1) + \\ & + \left[a_{ij11} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij12} e_{22} + a_{ij13} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right] \lambda_1(v_2) + \\ & + \left[a_{ij11} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij12} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij13} e_{33} \right] \lambda_1(v_3); \end{aligned}$$

$$v_j^{p+2/3} = v_j^{p+1/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_2 h_2} \lambda_2(\sigma_{2j}) + \gamma_2 B_j^L \right]^{p+1/3} + \tau \gamma_2 \langle V_j^N \rangle^{p+1/3};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{p+2/3} = & \sigma_{ij}^{p+1/3} + \frac{\tau}{h_2} [a_{ij12} \lambda_2(v_1) + a_{ij22} \lambda_2(v_2) + a_{ij23} \lambda_2(v_3)]^{p+1/3} + \\ & + \frac{\tau \gamma_2}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^0 + b_{ij})^{p+1/3} + \left\langle \frac{\tau}{h_2} \Omega_{ij}^{p+1/3} + \frac{\tau \gamma_2}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^N)^{p+1/3} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{p+1/3} &= \left\{ a_{ij12} e_{11} + a_{ij22} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \lambda_2(v_1) + \\ &+ \left\{ a_{ij12} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij22} e_{22} + a_{ij23} \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \lambda_2(v_2) + \\ &+ \left\{ a_{ij12} \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij22} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij23} e_{33} \right\} \lambda_2(v_3); \\ v_j^{p+1} &= v_j^{p+2/3} + \tau \left[\frac{1}{\rho H_3 h_3} \lambda_3(\sigma_{3j}) + \gamma_3 B_j^L \right]^{p+2/3} + \tau \gamma_3 \langle V_j^N \rangle^{p+2/3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{p+1} &= \sigma_{11}^{p+2/3} + \frac{\tau}{h_3} [a_{1113} \lambda_3(v_1) + a_{1123} \lambda_3(v_2) + a_{1133} \lambda_3(v_3)]^{p+2/3} + \\ &+ \frac{\tau \gamma_3}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^0 + b_{ij})^{p+2/3} + \left\langle \frac{\tau}{h_3} \Omega_{ij}^{p+2/3} + \frac{\tau \gamma_3}{2} (a_{ijkl} c_{kl}^N)^{p+2/3} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{p+2/3} &= \left\{ a_{ij13} e_{11} + a_{ij23} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij33} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \lambda_3(v_1) + \\ &+ \left\{ a_{ij13} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij23} e_{22} + a_{ij33} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \lambda_3(v_2) + \\ &+ \left\{ a_{ij13} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij33} e_{33} \right\} \lambda_3(v_3); \end{aligned}$$

В кутових дужках записані складові, які мають місце лише в геометрично нелінійній постановці.

Тут введено позначення для геометрично нелінійних складових:

$$c_{11}^N = -\frac{v_1}{H_1} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right],$$

$$c_{22}^N = -\frac{v_2}{H_2} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right],$$

$$\begin{aligned}
c_{33}^N &= -\frac{\nu_3}{H_3} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right]; \\
c_{23}^N &= \nu_1 \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - \left(\frac{e_{13}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right], \quad (2.5) \\
c_{12}^N &= \nu_3 \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{e_{32}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right], \\
c_{31}^N &= \nu_2 \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{e_{21}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right].
\end{aligned}$$

В формулах для деформацій окремо запишемо складові, які обумовлені геометрично нелінійною постановкою. В результаті на першому дробному кроці отримаємо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{p+1/3} &= \varepsilon_{11}^p + \left[\frac{\tau}{h_1} \lambda_1(v_1) + \tau\gamma_1 c_{11}^0 \right]^p + \\
&+ \left\langle \frac{\tau}{h_1} \left[e_{11} \lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_1(v_2) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_1(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{11}^N \right\rangle^p ; \\
\varepsilon_{22}^{p+1/3} &= \varepsilon_{22}^p + \tau\gamma_1 [c_{22}^0]^p + \tau\gamma_1 \langle c_{22}^N \rangle^p , \\
\varepsilon_{33}^{p+1/3} &= \varepsilon_{33}^p + \tau\gamma_1 [c_{33}^0]^p + \tau\gamma_1 \langle c_{33}^N \rangle^p , \\
\varepsilon_{12}^{p+1/3} &= \varepsilon_{12}^p + \left[\frac{\tau}{h_1} \lambda_1(v_2) + \tau\gamma_1 c_{12}^0 \right]^p + \\
&+ \left\langle \frac{\tau}{h_1} \left[\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_1(v_1) + e_{22} \lambda_1(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_1(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{12}^N \right\rangle^p ; \\
\varepsilon_{13}^{p+1/3} &= \varepsilon_{13}^p + \left[\frac{\tau}{h_1} \lambda_1(v_3) + \tau\gamma_1 c_{13}^0 \right]^p + \\
&+ \left\langle \frac{\tau}{h_1} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_1(v_2) + e_{33} \lambda_1(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{13}^N \right\rangle^p ; \\
\varepsilon_{23}^{p+1/3} &= \varepsilon_{23}^p + \tau\gamma_1 [c_{23}^0]^p + \tau\gamma_1 \langle c_{23}^N \rangle^p .
\end{aligned}$$

Для визначення деформацій на другому дробовому кроці маємо наступні різницьві формули:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{p+2/3} &= \varepsilon_{11}^{p+1/3} + \tau\gamma_2 [c_{11}^0]^{p+1/3} + \tau\gamma_2 \langle c_{11}^N \rangle^{p+1/3} , \\
\varepsilon_{22}^{p+2/3} &= \varepsilon_{22}^{p+1/3} + \left[\frac{\tau}{h_2} \lambda_2(v_2) + \tau\gamma_2 c_{22}^0 \right]^{p+1/3} + \\
&+ \left\langle \frac{\tau}{h_2} \left[\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_2(v_1) + e_{22} \lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_2(v_3) \right] + \tau\gamma_2 c_{22}^N \right\rangle^{p+1/3} , \\
\varepsilon_{33}^{p+2/3} &= \varepsilon_{33}^{p+1/3} + \tau\gamma_2 [c_{33}^0]^{p+1/3} + \tau\gamma_2 \langle c_{33}^N \rangle^{p+1/3} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{p+2/3} &= \varepsilon_{12}^{p+1/3} + \left[\frac{\tau}{h_2} \lambda_2(v_1) + \tau \gamma_2 c_{22}^0 \right]^{p+1/3} + \\ &+ \left\langle \frac{\tau}{h_2} \left[e_{11} \lambda_2(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_2(v_3) \right] + \tau \gamma_2 c_{12}^N \right\rangle^{p+1/3} ; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13}^{p+2/3} = \varepsilon_{13}^{p+1/3} + \tau \gamma_2 [c_{13}^0]^{p+1/3} + \tau \gamma_2 \langle c_{13}^N \rangle^{p+1/3} ;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23}^{p+2/3} &= \varepsilon_{23}^{p+1/3} + \left[\frac{\tau}{h_2} \lambda_2(v_3) + \tau \gamma_2 c_{23}^0 \right]^{p+1/3} + \\ &+ \left\langle \frac{\tau}{h_2} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_2(v_1) + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_2(v_2) + e_{33} \lambda_2(v_3) \right] + \tau \gamma_2 c_{23}^N \right\rangle^{p+1/3} . \end{aligned}$$

Для визначення деформацій на третьому дробовому кроці маємо такі різницеві формули:

$$\varepsilon_{11}^{p+1} = \varepsilon_{11}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{11}^0]^{p+2/3} + \langle \tau \gamma_3 c_{11}^N \rangle^{p+2/3} ,$$

$$\varepsilon_{22}^{p+1} = \varepsilon_{22}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{22}^0]^{p+2/3} + \langle \tau \gamma_3 c_{22}^N \rangle^{p+2/3} ,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{p+1} &= \varepsilon_{33}^{p+2/3} + \left[\frac{\tau}{h_3} \lambda_3(v_3) + \tau \gamma_2 c_{33}^0 \right]^{p+2/3} + \\ &+ \left\langle \frac{\tau}{h_3} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_3(v_1) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_3(v_2) + e_{33} \lambda_3(v_3) \right] + \tau \gamma_3 c_{33}^N \right\rangle^{p+2/3} ; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12}^{p+1} = \varepsilon_{12}^{p+2/3} + \tau \gamma_3 [c_{12}^0]^{p+2/3} + \langle \tau \gamma_3 c_{12}^N \rangle^{p+2/3} ,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^{p+1} &= \varepsilon_{13}^{p+2/3} + \left[\frac{\tau}{h_2} \lambda_3(v_1) + \tau \gamma_2 c_{13}^0 \right]^{p+2/3} + \\ &+ \left\langle \frac{\tau}{h_3} \left[e_{11} \lambda_3(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_3(v_2) + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_3(v_3) \right] + \tau \gamma_3 c_{13}^N \right\rangle^{p+2/3} ; \\ \varepsilon_{23}^{p+1} &= \varepsilon_{23}^{p+2/3} + \left[\frac{\tau}{h_2} \lambda_3(v_2) + \tau \gamma_2 c_{23}^0 \right]^{p+2/3} + \\ &+ \left\langle \frac{\tau}{h_3} \left[\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_3(v_1) + e_{22} \lambda_3(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_3(v_3) \right] + \tau \gamma_3 c_{23}^N \right\rangle^{p+2/3} . \end{aligned}$$

5.3.2. Розрахункові формули для схеми Писмана Речфорда Дугласа

В формулах схеми розщеплення Писмана Речфорда Дугласа (2.40) окремо в кутових дужках запишемо складові, які обумовлені геометрично нелінійною постановкою.

Швидкості переміщень.

На першому дробовому кроці для швидкостей переміщень отримаємо наступні розрахункові формули:

$$\begin{aligned} \left\{ v_1^{p+1/3} \right\}_{m+1} &= \left\{ \left[v_1 + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{11}) + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{21}) + \tau \gamma_1 B_1^L \right]^p + \tau \gamma_1 \langle V_1^N \rangle^p \right\}_m ; \\ \left\{ v_2^{p+1/3} \right\}_{m+1} &= \left\{ \left[v_2 + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{12}) + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{22}) + \tau \gamma_1 B_2^L \right]^p + \tau \gamma_1 \langle V_2^N \rangle^p \right\}_m ; \\ \left\{ v_3^{p+1/3} \right\}_{m+1} &= \left\{ \left[v_3 + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{13}) + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{23}) + \tau \gamma_1 B_3^L \right]^p + \tau \gamma_1 \langle V_3^N \rangle^p \right\}_m ; \end{aligned}$$

На другому дробовому кроці:

$$\left\{ v_1^{p+2/3} \right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_1 + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{21}) + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{31}) + \tau \gamma_2 B_1^L \right]^{p+1/3} + \tau \gamma_2 \langle V_1^N \rangle^{p+1/3} \right\}_m ;$$

$$\left\{v_2^{p+2/3}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_2 + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{22}) + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{32}) + \tau\gamma_2 B_2^L \right]^{p+1/3} + \tau\gamma_2 \langle V_2^N \rangle^{p+1/3} \right\}_m ;$$

$$\left\{v_3^{p+2/3}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_3 + \frac{\tau}{2\rho h_2} \lambda_2(\sigma_{23}) + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{33}) + \tau\gamma_2 B_3^L \right]^{p+1/3} + \tau\gamma_2 \langle V_3^N \rangle^{p+1/3} \right\}_m ;$$

На третьому дробовому кроці:

$$\left\{v_1^{p+1}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_1 + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{31}) + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{11}) + \tau\gamma_3 B_1^L \right]^{p+2/3} + \tau\gamma_3 \langle V_1^N \rangle^{p+2/3} \right\}_m ;$$

$$\left\{v_2^{p+1}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_2 + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{32}) + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{12}) + \tau\gamma_3 B_2^L \right]^{p+2/3} + \tau\gamma_3 \langle V_2^N \rangle^{p+2/3} \right\}_m ;$$

$$\left\{v_3^{p+1}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[v_3 + \frac{\tau}{2\rho h_3} \lambda_3(\sigma_{33}) + \frac{\tau}{2\rho h_1} \lambda_1(\sigma_{13}) + \tau\gamma_3 B_3^L \right]^{p+2/3} + \tau\gamma_3 \langle V_3^N \rangle^{p+2/3} \right\}_m ,$$

де
$$V_j^N = \left(\frac{\partial \sigma_{jj}^0}{\partial x_j} \right) \frac{\partial (u_1 + u_2 + u_3)}{\partial x_j} + \sigma_{jj}^0 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2 + u_3)}{\partial x_j^2}.$$

Складові тензора напружень.

На першому дробовому кроці для напружень отримаємо наступні розрахункові формули:

$$\left\{\sigma_{ij}^{p+1/3}\right\}_{m+1} = \left\{ \left[\begin{aligned} &\sigma_{ij} + \frac{\tau}{2h_1} (a_{ij11}\lambda_1(v_1) + a_{ij12}\lambda_1(v_2) + a_{ij13}\lambda_1(v_3)) + \\ &+ \frac{\tau}{2h_2} (a_{ij12}\lambda_2(v_1) + a_{ij22}\lambda_2(v_2) + a_{ij23}\lambda_2(v_3)) + \\ &+ \tau\gamma_1 (a_{ijkl}c_{kl}^0 + b_{ij}) \end{aligned} \right]^p + \left\langle \frac{\tau}{h_1} \Omega_{ij}^p + \tau\gamma_1 (a_{ijkl}c_{kl}^N)^p \right\rangle_m ,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^p = & \left[a_{ij11}e_{11} + a_{ij12}\left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3\right) + a_{ij13}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right] \lambda_1(v_1) + \\ & + \left[a_{ij11}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{ij12}e_{22} + a_{ij13}\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right) \right] \lambda_1(v_2) + \\ & + \left[a_{ij11}\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right) + a_{ij12}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{ij13}e_{33} \right] \lambda_1(v_3), \end{aligned}$$

На другому дробовому кроці:

$$\left. \left\{ \sigma_{ij}^{p+2/3} \right\}_{m+1} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\sigma_{ij} + \frac{\tau}{2h_2} (a_{ij22}\lambda_2(v_2) + a_{ij23}\lambda_2(v_3) + a_{ij21}\lambda_2(v_1)) + \right. \\ & + \frac{\tau}{2h_3} (a_{ij23}\lambda_3(v_2) + a_{ij33}\lambda_3(v_3) + a_{ij31}\lambda_3(v_1)) + \\ & \left. + \tau\gamma_2(a_{ijkl}c_{kl}^0 + b_{ij}) \right] \right\}_m \right\}^{p+1/3} + \\ & + \left\langle \frac{\tau}{h_2} \Omega_{ij}^{p+1/3} + \tau\gamma_2(a_{ijkl}c_{kl}^N)^{p+1/3} \right\rangle_m ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{p+1/3} = & \left\{ a_{ij12}e_{11} + a_{ij22}\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3\right) + a_{ij23}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right) \right\} \lambda_2(v_1) + \\ & + \left\{ a_{ij12}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{ij22}e_{22} + a_{ij23}\left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1\right) \right\} \lambda_2(v_2) + \\ & + \left\{ a_{ij12}\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right) + a_{ij22}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{ij23}e_{33} \right\} \lambda_2(v_3); \end{aligned}$$

$$\left\{ \sigma_{ij}^{p+1} \right\}_{m+1} = \left\{ \left[\begin{aligned} & \sigma_{ij} + \frac{\tau}{2h_3} (a_{ij33}\lambda_3(v_3) + a_{ij31}\lambda_3(v_1) + a_{ij32}\lambda_3(v_1)) + \\ & + \frac{\tau}{2h_1} (a_{ij31}\lambda_1(v_3) + a_{ij11}\lambda_1(v_1) + a_{ij12}\lambda_1(v_2)) + \\ & + \tau\gamma_3 (a_{ijkl}c_{kl}^0 + b_{ij}) \end{aligned} \right] \right\}_{m}^{p+2/3} +$$

$$+ \left\langle \frac{\tau}{h_3} \Omega_{ij}^{p+2/3} + \tau\gamma_3 (a_{ijkl}c_{kl}^N)^{p+2/3} \right\rangle_m ;$$

$$\Omega_{ij}^{p+2/3} = \left\{ a_{ij13}e_{11} + a_{ij23} \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) + a_{ij33} \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \right\} \lambda_3(v_1) +$$

$$+ \left\{ a_{ij13} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + a_{ij23}e_{22} + a_{ij33} \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \right\} \lambda_3(v_2) +$$

$$+ \left\{ a_{ij13} \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) + a_{ij23} \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + a_{ij33}e_{33} \right\} \lambda_3(v_3);$$

На першому дробовому кроці для деформацій отримаємо наступні розрахункові формули:

$$\left\{ \varepsilon_{11}^{p+1/3} \right\}_{m+1} = \left\{ \left[\varepsilon_{11} + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_1) + \tau\gamma_1 c_{11}^0 \right]^p + \left\langle \frac{\tau}{2h_1} \left[e_{11}\lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_1(v_2) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_1(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{11}^N \right\rangle^p \right\}_m ;$$

$$\left\{ \varepsilon_{22}^{p+1/3} \right\}_{m+1} = \left\{ \left[\varepsilon_{22} + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_2) + \tau\gamma_1 c_{22}^0 \right]^p + \left\langle \frac{\tau}{2h_2} \left[\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_2(v_1) + e_{22}\lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_2(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{22}^N \right\rangle^p \right\}_m$$

$$\left\{ \varepsilon_{33}^{p+1/3} \right\}_{m+1} = \left\{ \left[\varepsilon_{33} + \tau\gamma_1 c_{33}^0 \right]^p + \left\langle \tau\gamma_1 c_{33}^N \right\rangle^p \right\}_m ,$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{E}_{12}^{p+1/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{12} + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_2) + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_1) + \tau\gamma_1 c_{12}^0 \right]^p + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_1} \left[\left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_1(v_1) + e_{22} \lambda_1(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_1(v_3) \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\tau}{2h_2} \left[e_{11} \lambda_2(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_2(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{12}^N \right\rangle \right\}_m + \\
\{\mathcal{E}_{13}^{p+1/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{13} + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_3) + \tau\gamma_1 c_{13}^0 \right]^p + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_1} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_1(v_2) + e_{33} \lambda_1(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{13}^N \right\rangle \right\}_m ; \\
\{\mathcal{E}_{23}^{p+1/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{23} + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_3) + \tau\gamma_1 c_{23}^0 \right]^p + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_2} \left[\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_2(v_1) + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_2(v_2) + e_{33} \lambda_2(v_3) \right] + \tau\gamma_1 c_{23}^N \right\rangle \right\}_m .
\end{aligned}$$

На другому дробовому кроці маємо наступні формули:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_{22}^{p+2/3})_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{22} + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_2) + \tau\gamma_2 c_{22}^0 \right]^{p+1/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_2} \left[e_{22} \lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_2(v_3) + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_2(v_1) \right] + \tau\gamma_2 c_{22}^N \right\rangle \right\}_m^{p+1/3} ; \\
\{\mathcal{E}_{33}^{p+2/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{33} + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_3) + \tau\gamma_2 c_{33}^0 \right]^{p+1/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_3} \left[\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_3(v_2) + e_{33} \lambda_3(v_3) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_3(v_1) \right] + \tau\gamma_2 c_{33}^N \right\rangle \right\}_m^{p+1/3} \\
\{\mathcal{E}_{11}^{p+2/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{11} + \tau\gamma_2 c_{11}^0 \right]^{p+1/3} + \left\langle \tau\gamma_2 c_{11}^N \right\rangle^{p+1/3} \right\}_m ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_{23}^{p+2/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{23} + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_3) + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_2) + \tau\gamma_2 c_{23}^0 \right]^{p+1/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_2} \left[\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_2(v_2) + e_{33} \lambda_2(v_3) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_2(v_1) \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\tau}{2h_3} \left[e_{22} \lambda_3(v_2) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_3(v_3) + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_3(v_1) \right] + \tau\gamma_2 c_{23}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+1/3} + \\
\{\varepsilon_{21}^{p+2/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{21} + \frac{\tau}{2h_2} \lambda_2(v_1) + \tau\gamma_2 c_{21}^0 \right]^{p+1/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_2} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_2(v_2) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_2(v_3) + e_{11} \lambda_2(v_1) \right] + \tau\gamma_2 c_{21}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+1/3} ; \\
\{\varepsilon_{31}^{p+2/3}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{31} + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_1) + \tau\gamma_2 c_{31}^0 \right]^{p+1/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_3} \left[\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_3(v_2) + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_3(v_3) + e_{11} \lambda_3(v_1) \right] + \tau\gamma_2 c_{31}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+1/3} .
\end{aligned}$$

Для визначення деформацій на третьому дробовому кроці маємо наступні різницьві формули:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_{33}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{33} + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_3) + \tau\gamma_3 c_{33}^0 \right]^{p+2/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_3} \left[e_{33} \lambda_3(v_3) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_3(v_1) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_3(v_2) \right] + \tau\gamma_3 c_{33}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+2/3} ; \\
\{\varepsilon_{11}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{11} + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_1) + \tau\gamma_3 c_{11}^0 \right]^{p+2/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_1} \left[\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_1(v_3) + e_{11} \lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_1(v_2) \right] + \tau\gamma_3 c_{11}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+2/3} \\
\{\varepsilon_{22}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{22} + \tau\gamma_3 c_{22}^0 \right]^{p+2/3} + \left\langle \tau\gamma_3 c_{22}^N \right\rangle^{p+2/3} \right\}_{m} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_{31}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{31} + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_1) + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_3) + \tau\gamma_3 c_{31}^0 \right]^{p+2/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_3} \left[\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \lambda_3(v_3) + e_{11} \lambda_3(v_1) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \lambda_3(v_2) \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\tau}{2h_1} \left[e_{33} \lambda_1(v_3) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \lambda_1(v_1) + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \lambda_1(v_2) \right] + \tau\gamma_3 c_{31}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+2/3} + \\
\{\varepsilon_{32}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{32} + \frac{\tau}{2h_3} \lambda_3(v_2) + \tau\gamma_3 c_{32}^0 \right]^{p+2/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_3} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_3(v_3) + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_3(v_1) + e_{22} \lambda_3(v_2) \right] + \tau\gamma_3 c_{32}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+2/3} ; \\
\{\varepsilon_{12}^{p+1}\}_{m+1} &= \left\{ \left[\varepsilon_{12} + \frac{\tau}{2h_1} \lambda_1(v_2) + \tau\gamma_3 c_{12}^0 \right]^{p+2/3} + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\tau}{2h_1} \left[\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \lambda_1(v_3) + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \lambda_1(v_1) + e_{22} \lambda_1(v_2) \right] + \tau\gamma_3 c_{12}^N \right\rangle \right\}_{m}^{p+2/3} .
\end{aligned}$$

Наведені формули дозволяють провести оцінку кількості елементарних операцій, які необхідно зробити при розв'язанні нестационарної задачі термопсевдо-пружно-пластичності при визначенні напружено-деформованого стану тіл виготовлених з функціонально-неоднорідного матеріалу.

5.4. Висновки по п'ятому розділу

У розділі проведено оцінку точності обчислень та ефективності розробленого нового методу розв'язання задач термомеханіки при значних пластичних деформаціях.

- проаналізовано точність отриманих результатів в одновимірних, двовимірних та тривимірних задачах пружно-пластичності при різних кроках інтегрування;
- досліджено збіжність ітераційної процедури методу при наявності геометричної нелінійності;
- проведено оцінки ефективності розробленого ітераційного методу, у порівнянні з класичним кінцево-різницеvim методом;
- проведено аналіз збіжності розв'язків, отриманих за допомогою розробленого методу та умов збіжності Куранта, які повинні накладатися на кроки інтегрування за часом та координатах;
- проведено загальний аналіз ефективності розробленого методу шляхом порівняння кількості елементарних операцій необхідних для отримання розв'язку геометрично нелінійної задачі термопластичності за допомогою розробленого методу і різницевого методу.

Виявлено, що в геометрично нелінійній постановці, застосування кубічних В-сплайнів для апроксимації дозволяє досягнути третій $O(h^3)$ і другий $O(h^2)$ порядок апроксимації похідних за координатами для внутрішніх вузлів сітки ω_h і вузлів, розміщених на границях тіла. Напружені сплайни дають відповідно величини порядку $O(h^4)$ і $O(h^3)$.

Очевидно, що істотний ефект від використання для апроксимації похідних тих чи інших сплайн-функцій обумовлений вибором значно більших кроків інтегрування h (для методу розщеплення) в порівнянні з аналогічними кроками λ (для з класичного кінцево-різницевого методу).

Другий важливий ефект полягає в тому, що відношення τ/h значно менше, ніж τ/λ , а це сприятливо позначається на стійкості рахунків і покращує збіжність. Відзначимо, що наведені оцінки наближені і ступінь їх

достовірності перевірялась в конкретних задачах.

Досліджено вплив геометрично нелінійних складових в розрахункових формулах на збіжність отриманих числових результатів.

Доведено збіжність послідовності наближених рішень системи (2.40) $(W_m(t))_0, (W_m(t))_1, (W_m(t))_2, \dots, (W_m(t))_n, (W_m(t))_{n+1} \dots$. Кожне наступне наближення відрізняється від попереднього тим, що воно побудоване з кроком інтегрування за часом в два рази меншим від попереднього. Тоді на підставі отриманих розрахункових формул для геометрично нелінійного випадку теж

можна стверджувати, що при виконанні умови $|(W_m(t))_1 - (W_m(t))_0| < A_*^N \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^2$

, де величина A_*^N обмежена і визначена з урахуванням геометрично нелінійних складових, для граничного значення розв'язку задачі виконується

обмеження $|W_m(t) - (W_m(t))_0| < 2A_*^N \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^2$.

Таким чином, **доведена наступна теорема.**

Послідовність наближених розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних $(W_m(t))_n, n = 0, 1, 2, \dots, t \in [0; p_*\tau]$, системи (1.1), отримана на підставі схеми (2.40) методу покомпонентного розщеплення відповідно до кроків інтегрування $\tau/2^n$, обмежена і сходиться до точного розв'язку $W_m(t)$.

Наслідком цієї теореми може бути наступна наближена оцінка.

Різниця між точним розв'язком та його нульовим наближенням дає результат, який лише вдвічі більший ніж різниця між першим та нульовим наближеннями розв'язку задачі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано актуальну наукову проблему механіки деформівного твердого тіла: розроблено модель та метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях.

У роботі отримано такі основні результати:

1. Розроблено новий ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях, який базується на зведенні задачі до системи трьох послідовно розв'язуваних двовимірних задач, коли невідомі величини представлені у вигляді двовимірних поліноміальних та напружених сплайнів.

2. Розроблено і експериментально обґрунтовано нову нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів в матеріальних точках тіла. За допомогою цієї моделі розв'язано ряд нових задач термомеханіки, пов'язаних з розрахунками напружено-деформованого стану елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях.

3. Запропоновано на ділянці діаграми матеріалу близької до ідеальної пластичності застосовувати феноменологічну теорію пластичної течії для матеріалів з майданчиком плинності.

4. Узагальнено співвідношення теорії пластичності теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням навипадок деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу.

5. Запропоновано (на основі теорії напружених сплайн-функцій) нові експериментально підтверджені інтерполяційні формули для описання ділянок діаграми матеріалу при розвантаженні з довільної точки, які

дозволяють отримувати третій порядок методу апроксимації за часом та третій і четвертий порядок по координатам.

6. Поставлено і розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-пружно-пластичності при значних деформаціях.

7. Виявлено та досліджено нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

8. Доведено збіжність нової ітераційної процедури розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного пластичного матеріалу при великих деформаціях.

9. Вперше в рамках запропонованого методу врахована можливість зміни форми і розмірів тіла при наявності кінцевих деформацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Багриновский К.А., Годунов С.К. Разностные методы для многомерных задач // Докл. АН СССР. - 1957.- Т.115, N2. - С. 421-426.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984. - 520 с.
3. Беляев С.П. Моделирование микропластических явлений в сплавах с памятью формы типа никелида титана / С.П. Беляев, А.Е. Волков, М.Е. Евард // Вестник Тамбовского Университета. Т. 3, Вып. 3. 1998. – С. 306–309.
4. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б.Боли, Дж.Уэйнер. - М.: Мир, 1964. - 517 с.
5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев - М.: Наука, 1986. - 544 с.
6. Варлимонт Х. Мартенситные превращения в сплавах на основе меди, серебра, золота / Х. Варлимонт, Л. Дилей. М. : Наука, 1980. – 205 с.
7. Васильковский С.Н., Яненко Н.Н. О применении приближенной факторизации в методе Рунге и в методе конечных элементов // Динамика сплошной среды.-Новосибирск, 1980.-№45.-с. 48-57.
8. Волков А. Е. Исследование эффектов памяти формы в пластически деформированном сплаве TiNi / А.Е.Волков, И.В. Иночкина // Вестник молодых ученых. Серия: Технические науки, 2001.– № 2.– С. 37–41.
9. Волков А. Е. Механика пластичности материалов с фазовыми превращениями / А. Е.Волков, В. А.Лихачев, А. И. Разов // Вестн. ЛГУ. 1984. –№ 19, Вып. 4.– С. 30–37.
10. Волков А.Е. Кинетика явлений мартенситной неупругости в условиях взаимного влияния ориентационных вариантов мартенсита /А. Волков, В. Лихачев, О. Соловьева // Функционально-механические свойства сплавов с мартенситным механизмом неупругости. Ухта.1992. С. 26–30.

11. Вольченко Д.А. Сплавы с памятью формы /Д. А. Вольченко // Автомобильная промышленность. – 1991. – №8. – С. 30-31.
12. Гачкевич О.Р. Моделювання напруженого і фазового станів пластини з нікеліду титану за термомеханічного навантаження / О.Є. Онишко, О.Р. Гачкевич, Л.Й. Онишко//Фізико-хімічна механіка матеріалів. –Львів,2019– №5(44)–С.15 – 21.
13. Гачкевич О.Р. Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми за врахування дії електричного поля / Б.Боженко, О.Гачкевич, О.Онишко, А.Станік-Беслер // Сучасні проблеми механіки та математики. В 3-х т. – Львів, 2013.–Т.1–С.76–78.
14. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский - М.: Наука, 1973. – 400 с.
15. Головкин К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г.Головкин, П.З.Луговой, В.Ф.Мейш; под ред. акад. НАН Украины А.Н.Гузя.– К.: Изд. полигр. центр «Киевский университет», 2012.–541 с.
16. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел./ Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова - К.: Наукова думка, 1991. – 216 с.
17. Гюнтер В. Э., Малеткина Т. Ю. Влияние деформации на характеристики эффекта памяти формы в сплавах на основе TiNi /В. Э.Гюнтер, Т. Ю. Малеткина // Имплантаты с памятью формы. Томск. 1994.– Вып.1.– С.1–6.
18. Гюнтер В.Э., Дамбаев Г.Ц., Сысолятин П.Г. и др. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. - Томск: ТГУ, 1998. - 487 с.
19. Гюнтер В.Э., Ходоренко В.Н., Ясенчук Ю.Ф. и др. Никелид титана. Медицинский материал нового поколения /. – Томск: Изд-во МИЦ, 2006.296с.
20. Гюнтер С.В., Анисеев С.Г., Матюнин А.Н. и др. Технология изготовления полуфабрикатов из никелида титана (стержней, проволоки) и сверхтонких нитей. – Томск: Изд-во ООО «НПП«МИЦ», 2013. – 24 с.

21. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. / К. Де Бор – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
22. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е.Дьомічев, П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров - К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.
23. Дьомічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е. Дьомічев, П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017 . Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9-12.
24. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання складних технічних систем / К.Е.Дьомічев, В.Є. Бондаренко, Т.І.Цюпій, В.В. Хайдуров - К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-617-651-206-6), 2019. – 248 с.
25. Дьомічев К.Е. Чисельне моделювання стану пружно-пластичних циліндричних тіл під дією високотемпературних навантажень /К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко// Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація; збірник наукових праць Дніпропетровський державний хіміко-технічний університет. - 2017, № 1 (1).- Дніпропетровськ, 2017.- С. 56–62.
- 26.Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель поведінки функціонально - неоднорідних матеріалів/ К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького. Серія Прикладна математика. Інформатика №1(1). – 2020– С.4-12.
- 27.Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського технологічного університету – 2020– № 4, ЧДТУ–с.143-151.

28. Дьомічев К.Е. Застосування двовимірних сплайнів при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко // МНПК Сучасні проблеми термомеханіки – Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача, – Львів, 2016. – С.161-162.
29. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичних циліндричних тіл з урахуванням пружних параметрів, які залежать від температури /К.Е. Дьомічев // МНПК Інформаційна безпека та комп'ютерні технології. – Кіровоград, 2016. – С.96–97.
30. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічного стану пружно-пластичного циліндричного тіла під дією електромагнітного поля /К.Е. Дьомічев // МНПК Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем.– Дніпропетровськ, 2016. – С.113–116.
31. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичного стану циліндричного тіла під впливом електромагнітних полів /К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко // МНПК Математичні проблеми технічної механіки – 2017. – ДДТУ, 2017. – С.45.
32. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання силових навантажень пружно-пластичних циліндричних тіл при температурному ударі /К.Е. Дьомічев // МНПК Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації . – Чернівці, 2017. – С.6 – 8.
33. Дьомічев К.Е. Схема розщеплення просторової нестационарної задачі термомеханіки з використанням сплайнів / К.Е. Дьомічев // МНПК Наукова думка інформаційного століття. – Дніпро, 2017. – С.103–105.
34. Дьомічев К. Поведінка функціонально-неоднорідних матеріалів при значних деформаціях // К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, / International scientific conference "Innovative technologies, models Cyber Security Management, ITCSM-2021". - April 14 - 16, 2021 (Part 1).- Dnipro, Ukraine. – P.51-55.
35. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання полів напруження та деформації пружно-пластичних циліндричних тіл під дією

- складного навантаження / К.Е. Дьомічев // XXIII МНПК Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави – К.: КиМУ, 2018. – С.218-221.
36. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання нестационарного напружено-деформованого пружно-пластичного стану тіл під дією фізико-механічних полів / К.Е. Дьомічев // МНКП Актуальні питання сьогодення. – Вінниця, 2018. – С. 60–63.
37. Дьомічев К.Е. Розробка деяких положень концепції підготовки студентів технічних спеціальностей з дисципліни «Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач» / К.Е. Дьомічев, Н.М. Волосова, Д.В. Тертичний // МНПК Математичні проблеми технічної механіки–2018. – ДДТУ. 2018. – С. 80.
38. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-механічних полів двовимірними сплайнами / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.І. Коваленко // МНПК Наука та освіта: ключові питання сучасності. – 2018, Чернігів. – С. 117-120.
39. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання температурних навантажень на основі ітераційної процедури розв'язання нестационарної задачі термопластичності / К.Е. Дьомічев // МНПК Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології. – Харків, 2019. – С. 23-24.
40. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання псевдо-пружно-пластичних тіл з урахуванням не лінійності / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров // Науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України – Київ, 2020. – С. 10-12.
41. Дьомічев К.Е. Моделювання миттєвої термомеханічної поверхні трилінійного двофазного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНКП Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти. – Львів, 2020. – С.61-62.
42. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з трилінійного двофазного

- матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, Ю.А. Черняков, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // МНПК Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпро, 2020. – С.15-19.
43. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з псевдопружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики». – Київ, 2020.– С.54
44. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання поведінки тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів під дією нестационарного навантаження / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Новітні технології в освіті, науці та виробництві. – Покровськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2020.– С.211-212.
45. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання поведінки інтелектуальних матеріалів / П.О.Стеблянко, Т.І.Каткова // МПНК «Наукові підсумки 2020 року». Збірка наукових праць. – Харків, Х.: Технологічний Центр, 2020. – С.14.
46. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель для описання властивостей матеріалів з пам'яттю форми / К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, О. Косухін // МНПК «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020», том 2. – Дніпро, 2020.–С.3
47. Зав'ялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Зав'ялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352 с.
48. Зельдович В. И. Фазовые превращения в сплавах никелида титана / В.И. Зельдович, В. Г. Пушин, Н. Ю. Фролова, В. Н. Хачин, Л. И. Юрченко // Физ. мет.и металловед. 1990. –№ 8. –С. 90–96.
49. Зельдович В. И., Собянина Г. А., Ринкевич О. С. Влияние степени деформации на эффекты памяти формы и структуру мартенсита в никелиде титана /В. И.Зельдович,Г. А. Собянина, О. С.Ринкевич // Физ. мет. и металловед. 1996. –Т. 81, Вып. 3.– С.107–115.

50. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. - Киев: Наукова думка, 1986. - 583 с.
51. Ивасишин О.М., Свириденко Н.В., Полушкин Ю.А. Эффект запоминания формы в конструкционных титановых сплавах. // *Металлофизика*, т.11, №1, 1989, с.30-35.
52. Ивлев Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д.Ивлев, Г.И. Быковцев - М.: Наука, 1971. –232 с.
53. Ильин А.А. Сплавы с эффектом запоминания формы (обзор) // *Итоги науки и техники. Металловедение и термическая обработка.* – М.: ВИНТИ. 1991. Т. 25. С. 3-59.
54. Ильин А.А. Механизм и кинетика фазовых превращений в титановых сплавах. М.: Наука, 1994. –304 с.
55. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Хачин В.И., Гусев Д.Е., Медицинский инструмент и имплантаты из никелида титана: металловедение, технология, применение // *Металлы*. 2002. №3. с. 105-110.
56. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Н.А. Ночовная, Д.Е. Гусев. Материалы с эффектом памяти формы: М.: МАТИ, 2009-126с.
57. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А.Ильюшин - М.: Изд. АН СССР, 1963. – 271 с.
58. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А. Черняков // *ПММ.* – 1986. – Т.50, №6. – С. 890–897.
59. Кадашевич Ю.И. Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций/ Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин // *Научно-технические ведомости СПбГТУ.СПб: СПбГТУ, 2003.–N3.–С.96-103.*
60. Кадашевич Ю.И. Учет конечных деформаций в эндохронной теории вязкопластичности / Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин // *Вестник гражданских инженеров.* 2005.–N1.–С.28-32.
61. Коваль Ю.Н., Лободюк В.А. Деформационные и релаксационные явления

- при превращениях мартенситного типа. К.: Наук. думка, 2010.
62. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления газовой динамики - Новосибирск: Наука, 1981. - 304 с.
63. Кравчук Т.В., Стеблянок П.О. Побудова базисного тривимірного сплайна для розв'язування задач математичного моделювання/ Science and Education a New Dimension: Natural and Technical Sciences. –2013. – I(2), Issue: 15. –С. 71-74.
64. Крылова Т.В., Лигун А.А. Асимптотические оценки погрешности приближения функций интерполяционными напряженными сплайнами // Теория приближения. - Дн-вск, 1994. -С. 63-64.
65. Кузьменко В.И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейноупругих слоистых тел./ В.И. Кузьменко // Прикл. Математика и механика.- 1979.- Т.43-Вып. 5.- С. 893-901.
66. Кукуджанов В.Н. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела / В.Н. Кукуджанов, В.И. Кондауров // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. - М., 1975. - С. 39-84.
67. Кукуджанов В.Н. Численные методы решения неодномерных задач динамики упругопластических сред / В.Н. Кукуджанов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. - Новосибирск, 1980. - Ч. 1. - С. 105-120.
68. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. // Док. АН СССР. 1949. Т. 66, №2. С. 211-214.
69. Кушнір Р.М. Температурні напруження у функціонально-градієнтній циліндричній оболонці / Р.М.Кушнір, У.В. Жидик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – 54, № 5. – С. 56-65.
70. Кушнір Р.М. Термопружний аналіз функціонально-градієнтних циліндричних оболонок /Р. М. Кушнір, У. В. Жидик, В. М. Флячок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 61, № 3. – С. 45-53.
71. Лебедев А. А. Методы механических испытаний материалов при сложном

- напряженном состоянии. Киев : Наукова думка, 1976. 147 с.
72. Лихачев В.А. Физико-механическая модель упругопластических свойств материалов, учитывающая структурные уровни деформации и кинетические свойства реальных кристаллов / В.А. Лихачев, В.Г. Малинин // Изв. вузов, Физика. – 1984. – 9. – С. 23-28.
73. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1987 – 216 с.
74. Лихачев В. А. Численное моделирование эффекта памяти формы на основе структурно-аналитической теории пластичности / В. А. Лихачев, А. Е. Волков, О. В. Пущаенко // Материалы с эффектом памяти формы и их применение: Материалы семинара. Новгород — Л. 1989. – С. 7-9.
75. Лихачев В. А., Мастерова М. В. Высокотемпературная память формы в никелиде титана / В. А. Лихачев, М. В. Мастерова // Физ. мет. и металловед. 1983. – Т. 55, Вып. 4. – С. 814-816.
76. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье – М.: Наука, 1980. – 512 с.
77. Лободюк В. А. Мартенситные превращения / В. А. Лободюк, Э. И. Эстрин. М.: Физматлит, 2009. 352 с.
78. Лободюк В. А. Кристаллоструктурные особенности предпереходных явлений и термоупругих мартенситных превращений в сплавах цветных металлов / В. А. Лободюк, Ю. Н. Коваль, В. Г. Пушин // ФММ. 2011. Т. 111. № 2. – С. 169-194.
79. Марчук Г.И., Яненко Н.Н. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. - Новосибирск, 1966. - С. 3-25.
80. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
81. Марчук Г.И. Методы расщепления / Г.И. Марчук - М.: Наука, 1988. - 264 С. 3 - 25.

82. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Об учете геометрически нелинейных составляющих на напряженно-деформируемое состояние трехслойных оболочек при нестационарных нагрузках /II Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (5-8 жовтня, 2020 року). Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків.- С. 248.
83. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 1. Медицинские материалы с памятью формы. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2011. – 534 с.
84. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 2. Имплантаты с памятью формы в травматологии ортопедии. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2010. – 282 с.
85. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э.Гюнтера. Том 3. Имплантаты с памятью формы в хирургии позвоночника. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2011. – 374 с.
86. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 4. Имплантаты с памятью формы в челюстно-лицевой хирургии. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2012. – 384 с.
87. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 5. Имплантаты с памятью формы в стоматологии.– Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2011. – 220 с.
88. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 9. Пористо-проницаемые криоапликаторы изникелида титана в медицине. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2010. – 306с.
89. Медицинские материалы и имплантаты с память формы: В 14 томах/ Под ред. В.Э. Гюнтера. Том 11. Имплантаты с памятью формы в хирургии. – Томск: Изд-во ООО «НПП «МИЦ», 2012. – 398 с.
90. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. //А.А. Мовчан. / Проблемы машиностроения и

- надежности машин. 1994. No 6. С. 47–53.
91. Москвитин В.В. Циклические нагрузки элементов конструкций. – Москва: Наука, 1981. – 344 с.
92. Муслов С.А. История и перспективы применения сплавов с памятью формы в науке, технике и медицине./С.А. Муслов, Г.М. Стюрева // *Фундаментальные исследования*. 2007. – No 10.–С. 119-120.
93. Николин Б.И. // Структура реальных металлов :Сб. науч. тр. Киев:Наукова думка, 1988. С. 101-132.
94. Новожилов В.В. Теория упругости /. – Л: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
95. Онишко О.Є. Моделювання фізико-механічної поведінки тіл, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, за наявності електричного поля / О. Є. Онишко // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. - 2017. - Т. 53, № 4. - С. 107-111.
96. Ооцука К. Сплавы с эффектом памяти формы: Пер. с яп. под ред. Х. Фунакубо / К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки // М.: Металлургия.– 1990. – 224 с.
97. Перкинс Д. Термомеханические характеристики сплавов с термоупругим мартенситом. Эффект памяти формы в сплавах / Д. Перкинс, Г.Р.Эвардс, С.Р. Сач [и др.] // М.: Металлургия. – 1979. – с.230-254.
98. Петров А. Термо-напряжено-деформований стан стрижня з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень / А.Петров, Ю.Черняков // *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету*. Випуск 1(26), додаток, розділ Математичні проблеми технічної механіки . –Дніпродзержинськ, 2015. – С. 26-36.
99. Петров А. Моделирование псевдоупругого поведения сплавов с памятью формы/ А.Д.Петров, Ю.А.Черняков // *МНК Математичні проблеми технічної механіки*, квітень 18–21 2016. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ. – 2016. – С. 121.
100. Петров А.Д., Экспериментальное обоснование варианта модели поведение материала с памятью формы и псевдоупругостью

- / А.Д.Петров, К.Э. Демичев, П.А.Стеблянко, Ю.А.Черняков // Моделирование та інформаційні технології: зб.наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С.81-87.
101. Петров О.Д. Феноменологічна модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалу з пам'яттю форми / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наукових праць / за заг.ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вересень 22–25 2018. – Т.1. – Ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018. –С. 188-189 .
102. Петров О.Д. Комп'ютерне моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу при розтягуванні / О.Д. Петров // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання; матеріали статей МНПК (ISBN 978-617-7468-26-3) - 2018. - Івано-Франківськ.- 2018.- С. 234-237.
103. Петров А. Феноменологическая модель поведения псевдо-упруго-пластического материала при нестационарном нагружении / А.Петров // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 28.- Дніпро, 2018.- С. 133-141.
104. Петров О.Д. Модель термо-пружно-пластичної поведінки матеріалів з зубом плинності / О.Д.Петров, Ю.А.Черняков, П.О.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики, квітень 15–18 2019. – Дніпро, Кам'янське. – 2019. – С. 6-7.
105. Поздеев А.А., Трусков П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения/А.А.Поздеев, П.В.Трусков, Ю.И. Няшин // М.: Наука. 1986. – 232 с.
106. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Изд. МГУ, 1981. - 344 с.
107. Попов А.А. Конструкционные и функциональные материалы на

- металлической основе / В. М. Фарбер [и др.]; под общ. ред. А. А. Попова. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 252 с.
108. Прагер В. Неизотермическое пластическое деформирование // Механика . - М., 1959. - N 5. - С. 95-101.
109. Пушин В. Г. Сплавы никелида титана с памятью формы. Ч. I. Структура, фазовые превращения и свойства / В. Г. Пушин, С. Д. Прокошкин, Р.З. Валиев [и др.]. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2006. – 440 с.
110. Пушин В. Г. Бароупругие эффекты памяти формы в сплавах никелида титана, подвергнутых пластической деформации под высоким давлением / В. Г. Пушин, Н. Н. Куранова, Н. И. Коуров [и др.] // ЖТФ. 2012. Т. 82. вып. 8. С. 67–75.
111. Пушин В. Г. О природе аномально высокой пластичности высокопрочных сплавов никелида титана с эффектами памяти формы. Исходная структура и механические свойства / В. Г. Пушин, А. И. Лотков, Ю. Р. Колобов [и др.] // ФММ. 2008. Т. 106. № 5. С. 537–547.
112. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 418 с.
113. Рудаков К.М. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 2. Температурні деформації / К.М. Рудаков, А.І. Яковлев // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 65. – С. 10–18.
114. Рудаков К. М. Чисельне обґрунтування застосування змішаних 3D-моделей пкм при розрахунках болтових з'єднань / К. М. Рудаков, А. С. Шандура // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія : Машинобудування. - 2015. - № 2. - С. 67-76.
115. Рудаков К. М. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 6. Термопружно-пластичний аналіз, формулювання Total Lagrangian / К. М. Рудаков // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія : Машинобудування. - 2015. -

№ 3. - С. 14-24.

116. Рябцев И.А. Наплавка. Материалы. Технологии. Математическое моделирование / И.А. Рябцев, И.К.Сенченков, Э.В.Турык - Gliwice: WydawnictwoPolitechnikiSlaskiej, 2015. – 590 с.
117. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
118. Стеблянко П.А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. – К.: Инст. мех. НАН Украины, 1997, - 273 стр.
119. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / П.А. Стеблянко. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
120. Стеблянко П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестационарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двовимірних сплайнів / Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ.- Дніпропетровськ,– 2005.– Вип.7– С. 73-87.
121. Стеблянко П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стеблянко. Системні технології. Регіональній міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 5(46). Дніпропетровськ,– 2006.–С. 17-26.
122. Стеблянко П.О., Кравчук Т.В. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій/ П.О. Стеблянко, Т.В. Кравчук//Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ ДДТУ. – 2013. – В. 2(22). – с.75-82.
123. Стеблянко П. Описание термомеханической поверхности материала при помощи двумерного сплайна / П.Стеблянко, А.Галишин, А.Петров // МНКМатематичні проблеми технічної механіки, квітень 14–17 2015 .– Дніпродзержинськ. – 2015. – С. 126.

124. Стеблянко П.О. Числові методи в просторових стаціонарних і нестаціонарних задачах теорії термопружнопластичності / П.О.Стеблянко, Ю.А.Черняков, О.Д.Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 16–19 2018. – Київ, Черкаси, Кам'янське. – 2018. – С. 14-15.
125. Стеблянко П.О. Моделювання поведінки елементів виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях / П.О.Стеблянко, К.Е. Дьомічев, О.Д.Петров, // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій –2020–№ 32, ДНУ ім. О.Гончара –с.81-94.
126. Стечкин С.В., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.
127. Угодчиков А.Г., Баженов В.Г., Рузанов А.И. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности // Числ. мет. мех. спл. среды. - Новосибирск, 1985. - т. 16, N 4. - С. 129-149.
128. Фірстов Г.С. Функціональні матеріали з пам'яттю форми: сучасний стан і перспективи використання / Г.С. Фірстов Г.С.// ISSN 1027-3239. Вісн. НАН України, 2018, № 6. – С. 19-34.
129. Хачин В.Н., Пушин В.Г., Кондратьев В.В. Никелид титана: структура и свойства. М.:Наука, 1992 – 160 с.
130. Хунджуа А.Г. Мартенситные превращения в сплавах с эффектами памяти формы - М.: Физический факультет МГУ, 2010. - 44 с.
131. Черняков Ю. А. Полоса локализации пластической деформации на интерфейсе между двумя материалами / Ю.А.Черняков, А.Е.Шевелёва // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2014. – Том22, №5. – Випуск 18, том 1. – С. 138–146.
132. Черняков Ю.А. Модель поведінки матеріалу з пам'яттю форми і псевдопружністю/ Ю.А.Черняков, О.Д.Петров, П.О.Стеблянко // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–20 2017.– Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ. – 2017. – С. 14-15.

133. Черняков Ю.А. Модель поведения псевдоупругого материала при нестационарном нагружении / Ю.А.Черняков, П.А.Стеблянко, А. Д. Петров// Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. № 2. 2017. –С. 297-303.
134. Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности: фокус на украинские исследования (обзор) / Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко//. - Прикл.мех.– 2016.–**52**, №3. – С. 3-70.
135. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. Пространственные задачи термопластичности. - К.: Наукова думка, 1980. - 264 с.
136. Шевченко Ю.Н., Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2.Термовязкопластичность / Ю.Н.Шевченко, В.Г. Савченко. – Киев: Наукова думка, 1987. –264 с.
137. Шевченко Ю.Н.Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю.Н.Шевченко, М.Е.Бабешко, Р.Г.Терехов. - К.: Наукова думка, 1992. - 328 с.
138. Шевченко Ю.Н. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности / Ю.Н. Шевченко, П.О. Стеблянко, А. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 22.- Дніпропетровськ, 2014.- С. 250-264.
139. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука, 1967. - 195 с.
140. Яненко Н.Н. Введение в разностные методы математической физики. - Новосибирск: Изд. НГУ, 1968. - Ч. 1. - 192 с.
141. Яненко Н.Н. Введение в разностные методы математической физики. - Новосибирск: Изд.НГУ, 1968. - Ч. 2. - 387 с.
142. Abeyaratne, R., Knowles, J.K.A., 1993. A continuum model of a thermoelastic solid capable of under-going phase transitions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 541–571.
143. Abeyaratne R. Kinetics of materials with wiggly energies: theory and

- application to the evolution of twinning microstructures in a Cu–Al–Ni shape memory alloy. / R.Abeyaratne, C.Chu, R.D.James // *Philos. Mag. A* 73, 1996. - P. 457–497.
144. Abeyaratne R. Evolution of phase transitions / R.Abeyaratne, J.K. Knowles. – Cambridge University Press, 2006. – 258 p.
145. Ahadi A. Stress-induced nanoscale phase transition in superelastic NiTi by in situ X-ray diffraction. / A.Ahadi, Q.P. Sun // *Acta Mater.* 90, 2015. - P. 272–281.
146. Ahadi A. Origin of zero and negative thermal expansion in severely-deformed superelastic NiTi alloy. / A.Ahadi, Y.Matsushita, T.Sawaguchi, Q.P.Sun, K.Tsuchiya // *Acta Mater* 124, 2017. - P. 79–92.
147. Ahluwalia R. Landau theory for shape memory polycrystals. / R.Ahluwalia, T.Lookman, A.Saxena, R.C.Albers // *Acta Mater.* 52, 2004.-P.209–218.
148. Asaro R.J. Mechanics of solids and materials / R.J.Asaro, V.A. Lubard.- Cambridge University Press. – 2006. – 860 p.
149. Auricchio F., Boatti E., Conti M. SMA Biomedical Applications // *Shape Mem. Alloy Eng.* Butterworth-Heinemann, 2015. P. 307 – 341. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-099920-3.00011-5>
150. Baumgart F. Memory– Legierungen – Eigenschaften, phänomenologische Theorie und Anwendungen /F. Baumgart, J. Jorde, H.-G. Reiss // *Techn. Mitt. Krupp. Forsch.* 1976. Vol. 34. P. 1–16.
151. Belytschko T. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures / T. Belytschko, W.K. Liu, B. Morgan // John Wiley and Sons. – 2006. – 650 p.
152. Bezverkhyi, O.I., Grigoryeva, L.O. Comparative Analysis of Two Methods Used for the Investigation of Harmonic Vibrations of Piezoceramic Cylinders.//*Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2019, 240(2), P. 129–140.
153. Bo. Z. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part I: Theoretical derivations / Z. Bo, D.C.Lagoudas // *Int. J. Eng. Sci.* – 1999. – 37. – P. 1089-1140.

154. Bodner S. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials / S.Bodner, Y.Partom // *J. Appl. Mech.* 42, 1975. P.385– 389.
155. Bouvet C. A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiracial proportional and nonproportional loadings / C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent // *Europ. J. Mech. A /Solids.* –2004. –23. – P. 37-61.
156. Boyd J.G. A thermodynamic constitutive model for the shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloys. / J.G. Boyd, D.S.Lagoudas // *Int. J. Plasticity.* – 1996. – 12. – P. 805-842.
157. Brinson L.C. Stress-induced transformation behavior of a polycrystalline NiTi shape memory alloy: micro and macromechanical investigations via in situ optical microscopy. /L.C.Brinson, I.Schmidt, R.Lammering // *J. Mech. Phys. Solids* 52, 2004.-P. 1549–1571.
158. Brocca M. Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model / M.Brocca // *Mech. Phys. Solids.* – 2002. – 50. – P. 1051-1077.
159. Budiansky B. On the mechanics of stress-induced phase transformation in zirconia. / B.Budiansky, L.Truskinovsky // *J. Mech. Phys. Solids* 41 (9), 1993.- P. 1445–1459.
160. Buehler W. J. Effect of low temperature phase change on the mechanical properties of alloys near composition TiNi / W. J. Buehler, J. V. Gilfrich, R. C. Wiley // *J. Appl. Phys.* 1963. V.34. №5. P. 1475–1477.
161. Chaboche J.L. Unified cyclic viscoplastic constitutive equations: development, capabilities and thermodynamic framework / J.L.Chaboche // *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation.* Academic Press Inc., 1996. P. 1–68.
162. Chernyakov Yu. A. Modeling superelastic response of shape memory alloys subjected to complex loading / Chernyakov Yu.A., Polishchuk A.S. // *Advanced problems in Mechanics of Heterogeneous Media and Thin-Walled Structures.* – Dnipropetrovsk. –2010. – P. 97-113.

163. Chernyakov Yu. A. On extension of the phenomenological approach in the theory of plasticity / Yu. A. Chernyakov, A. S. Polishchuk , V. P. Shneider // Journal of Engineering Mathematics. - 2013. - Vol. 78, Issue 1. - P. 55-66. doi: 10.1007/s10665-011-9470-8.
164. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics/K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov// Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – P. 27-29.
165. Domichev K. Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory / K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov// Scientific journal innovative solutions in modern science. – Dubai, 2020 – No. 4(40). – p.5-17.
166. Domichev K. Simulation of behavior of functionally - heterogeneous materials under temperature loads / K.Domichev, P.Steblyanko, A.Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, 2020 – No. 8(44). – p.5-11.
167. Domichev K. Modeling the behavior of the body with pseudo-elastic-plastic material at non-stationary loading / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Металофізика та новітні технології, Інститут металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАН України, 2021– Том 43, випуск 1 – с. 107-128
168. Domichev K.Method of splitting nonstationary thermomechanics task with considering electromagnetic fields /K. Domichev, P. Steblyanko// Inżynieria i technologia. Współczesne problemy i perspektywy rozwoju. – Zbiór artykułów naukowych. – Warszawa (PL). 2017. – p.76–78.
169. Domichev K.Mathematical and computer modeling of the temperature field of elastic plastic multiple cylindrical blood /K. Domichev // Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia: Zbiór artykułów naukowych. – Poznan (PL). 2017. – p.170–171.
170. Domichev K. Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials /K. Domichev, P. Steblyanko, A.Petrov //

- Science, research ,development. Technics and technology. – Krakow, 2020.– No27 – p.27-28.
171. Domichev K. Modeling of body behavior from trilline biphasе material taking into temperature /K. Domichev, P. Steblyanko, A.Petrov //МНПК Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020. – Дніпро, 2020. – С.76-77.
172. Domichev K. Use of splines in simulation of functionally inhomogeneous materials / K. Domichev // Colloquium-journal – Warszawa, Polska– 2021 – No.3(90). – p.16-18
173. Domichev K. On the question of convergence solutions numerical nonstationary problems of modeling thermomechanics / K. Domichev, A. Petrov, P. Steblyanko // The scientific heritage. – Budapest,№ 59 (59), 2021 – p. 15-17.
174. Domichev K. The main areas of application of functional materials /K. Domichev// «Research-science» – Banská Bystrica, Словачинна–2021–№14. – p.26-29.
175. Domichev K. Modeling behavior textured and non-textured alloy at great deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest,№ 60 (60), 2021– p.17-19.
176. Domichev K. Application of two-dimensional splines in modeling problems of functional materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The Young Scholars. Vienna, Austria – 2021–№1–p.7-9.
177. Domichev K. Simulation of behavior of pseudo-elastic-plastic niti alloy at large deformations/ K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Colloquium-journal, 2021– Warszawa, Polska, №5(92)— p.6-8.
178. Domichev K. Modeling the behavior of the physical and geometric non-linear functional heterogeneous materials / K. Domichev // Scientific journal innovative solutions in modern science. – – New York, №1(45), 2021– p.82-90.

179. Domichev K. Mathematical model shear lines for plastic deformation / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 61 (61), 2021– p.54-56.
180. Entchev P.V. Modeling porous shape memory alloys using micromechanical averaging techniques / P.V. Entchev, D.C. Lagoudas // Mech. Mater. – 2002. – 34. – P. 1-24.
181. Firstov G.S., Vitchev R.G., Kumar H., Blanpain B., Van Humbeeck J. Surface oxidation of NiTi shape memory alloy. *Biomaterials*. 2002. **23**(24): 4863. [https://doi.org/10.1016/S0142-9612\(02\)00244-2](https://doi.org/10.1016/S0142-9612(02)00244-2)
182. Firstov G.S., Van Humbeeck J., Koval Yu.N. High temperature Shape Memory Alloys problems and prospects. *J. Intel.Mater. Syst. Structures*. 2006. **17**(12): 1041. <https://doi.org/10.1177/1045389X06063922>
183. Furuya Y., Park Y.C. Thermal cyclic deformation and degradation of shape memory effect in Ti-Ni alloy. *Nondestr.Test. Eval*. 1992. **8-9**: 541. <https://doi.org/10.1080/10589759208952731>
184. Grandi D. A macroscale phase-field model for shape memory alloys with non-isothermal effects: Influence of strain rate and environmental conditions on the mechanical response / D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari // *Acta Materialia* 60. – 2012. – P. 179–191.
185. Guk N.A. Selection of the informative input parameters for the inverse neural-network models of observed systems / *Journal of Mathematical Sciences* – 2018. – Vol. 231, №. 5. – P. 678–689.
186. Hart E. L. Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional / E.L.Hart, S. Hudramovich // *J. Appl. Math. Mech.* – 2016. – Vol. 80, Issue 2. – P. 156–163.
187. He Y.J. Scaling relationship on macroscopic helical domains in NiTi tubes. / Y.J.He, Q.P.Sun // *Int. J. Solids Struct.* 46 (24), 2009. - P. 4242–4251.
188. Iasnii V., Yasniy P., Lapusta Y., Shnitsar T. Experimental study of pseudoelastic NiTi alloy under cyclic loading, *Scientific Journal of TNTU*. – 2018. – 92(4), 7-12.

189. Iasnii V., Yasniy P. Degradation of functional properties of pseudoelastic niti alloy under cyclic loading: an experimental study / *Acta mechanica et automatica*, vol.13 no.2 . – 2019. – P. 95–100.
190. Ilyin A.A., Kollerov M.Y., Sevortsova S.V. Titanium Alloys with shape Memory Effects and their Perspective Technological Application. // *Titanium – 1990 Products Applications Prosidings of the Technical. Program from the 1990 international Conference*, Published by Titanium Development Association 1990v.11, p.746-754.
191. Ilyin A.A., Kollerov M.Y., Makarenkov D.Y., Shinaev A.A. Alloys on Ti and TiNi base with shape memory effect: metallurgy, technology, future application // *EUROMAT'95*, 1995, Padua/Venice, Italy, p.117-123.
192. Ilyin A.A., Kollerov M.Y., Makarenkov D.Y., Shinayev A.A., Brun M.Ya. Martensitic transformations and shape memory effect in titanium alloys. - 8th World Conf. *Titanium'95*, International Convention Centre, 22-26 October 1995, Birmingham UK, p.2571-2578.
193. Jang W.Y., Van Humbeeck J., Delaey L., Koval Yu.N., Firstov G.S. The influence of Ti and Ni additions and thermal cycling on the martensitic transformation in CuZr alloys. *Trans. Mater. Res. Soc. Jpn.* 1994. **18B**: 1009.
194. Kadashevich Yu.I. Theory of plasticity, taking into account micro stresses / Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // *Advances in Mechanics*. – 1992. – 15(3-4). – P.3-39.
195. Kagadiy T.S. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory / T.S. Kagadiy, A.G. Shporta // *Visnyk NMU*. – 2015. – №3(147) P.76-81.
196. Kan Q., Yu C., Kang G., Li J., Yan W. Experimental observations on rate-dependent cyclic deformation of superelastic NiTi shape memory alloy, *Mechanics of Materials*, 97, 2016. - P. 48-58.
197. Kim Y.H. Nanocrystallization of a Ti–50.0 Ni (at. %) alloy by cold working and stress/strain behavior / Y.H. Kim, G.B. Cho, S.G. Hur, S.S. Jeong, T.H. Nam // *Mater. Sci. Eng. A* 438, 2006. - P. 531–535.

198. Ko W.S. Atomic scale processes of phase transformations in nanocrystalline NiTi shape-memory alloys. / W.S.Ko, S.B.Maisel, B.Grabowski, J.B.Jeon, J.Neugebauer // *Acta Mater.* 123, 2017. - P. 90–101.
199. Koval Yu.N., Firstov G.S., Kotko A.V. Martensitic transformation and shape memory effect in ZrCu intermetallic compound. *Scripta Met. et Mater.* 1992. **27**(11): 1611. [http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X\(92\)90153-6](http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X(92)90153-6)
200. Kyriakides S. On the propagation of Luders bands in steel strips / S. Kyriakides, J.E. Miller // *Journal of Applied Mechanics.* – 2000. – Vol.67. – P. 645 –654.
201. Kumar P.K., Lagoudas D.C. Experimental and microstructural characterization of simultaneous creep, plasticity and phase transformation in Ti50Pd40Ni10 high-temperature shape memory alloy. *Acta Mater.* 2010. **58**(5): 1618. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.006>
202. Kurdyumov G.V. On the nature of diffusionless (martensitic) transformations. *Proc. USSR Acad. Sci.* 1948. **60**(9):1534.
203. Kurdyumov G.V., Khandros L.G. On "thermoelastic" equilibrium in martensitic transformations. *Proc. USSR Acad.Sci.* 1949. **66**(2): 211.
204. Lagoudas D.S. Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: Constitutive model for fully dense CMAs / D.S. Lagoudas, P.B. Entchev // *Mech. Mater.* –2004. –36. – P. 865-892.
205. Lagoudas D.S. Shape memory alloys, Part II: Modeling of polycrystals / D.S. Lagoudas, P.B. Entchev , P.Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao // *Mech. Mater.* – 2006. –38/ – P. 430-462.
206. Leclercq S. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys / S. Leclercq, C. LExcellent // *J. Mech. Phys. Solidas.* – 1996. – 44. – P. 953-980.
207. Levitas V.I. Simple micromechanical model of thermoelastic martensitic transformations / V.I. Levitas, E. Stein // *Mechanical Research Communications.* – 1997. – 24, №. P. 309-318.

208. Lexcellent C. Thermodynamical model for cyclic behavior of Ni-Ti and Cu-Zn-Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests / C. Lexcellent, G. Bourbon // *Meh. Mater.* – 2000. – 24. – P. 59-73.
209. Lexcellent C. The two way shape memory effect of shape memory alloys: an experimental study and a phenomenological model / C. Lexcellent, S. Leclerg, B. Gabry, G. Bourbon // *Int.J. Plasticity.* – 2000. – 16. – P. 1155-1168.
210. Lexcellent C. Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformations under biaxial loading in some polycrystalline shape memory alloys / C. Lexcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch, P. Blanc // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2002. – 50. – P. 2717-2735.
211. Lexcellent C. Comparison of several models for the determination of the phase transformation yield surface in shape-memory alloys with experimental data / C. Lexcellent, A. Schlomerkemper // *Acta Mater.* – 2007. – 55. – P. 2995–3006.
212. Lim J.T. Mechanical behavior of a Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading / J.T. Lim, D.L. McDowell // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1999. – 121. – P. 9-18.
213. Lu. Z.K. Martensitic Transformations and Stress-Strain Relations of Shape-Memory Alloys / Z.K. Lu, G.J. Weng // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1997. – 45. – P. 1905-1928.
214. Lubliner J. Generalized plasticity and shape memory alloys / F. Auricchio, Lubliner J. // *Int. J. Solids Struct.* – 1996. – 33.– P. 247-258.
215. Menna C., Auricchio F., Asprone D. Applications of shape memory alloys in structural engineering // *Shape Memory Alloy Engineering.* 2015. 369–403 p.
216. Meyers M.A. Mechanical properties of nanocrystalline materials / M.A.Meyers, A.Mishra, D.J.Benson // *Prog. Mater Sci.* 51, 2006. - P. 427–556.
217. Miyazaki S., Igo Y., Otsuka K. Effect of Thermal Cycling on the Transformation Temperatures of Ti-Ni Alloys. *Acta Metall.* 1986. **34**: 2045.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(86\)90263-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90263-4)

218. Miyazaki S., Otsuka K. Development of shape memory alloys // *ISIJInternational*. 1989, 29, №5. P. 353-377.
219. Niendorf T., Krooß P., Batyrsina E., Paulsen A., Motemani Y., Ludwig A., Buenconsejo P., Frenzel J., Eggeler G., Maier H.J. Functional and structural fatigue of titanium tantalum high temperature shape memory alloys. *Mater. Sci.Eng. A*. 2015. **620**: 359. <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2014.10.038>
220. Otsuka K. Superelasticity effects and stress-induced martensitic transformations in Cu-Al-Ni alloy / K. Otsuka, C. Wayman, K. Nakai// *Acta Metall.* –1976. – 24. – P. 207-226.
221. Otsuka K. Successive stress-induced martensitic transformations and associated transformation pseudoelasticity in Cu-Al-Ni alloys. / K.Otsuka, H.Sakamoto, K.Shimizu // *Acta Metall* 27, 1979. - P. 585–601.
222. Otsuka K. Crystallography of martensitic transformations and lattice invariant shears / K. Otsuka // *Mater. Sci. Forum.* – 1990. – 56-58. – P. 393-401.
223. Otsuka K. Ren X. Physical metallurgy of Ti-Ni – based shape memory alloys / K. Otsuka X.Ren // *Progress in Materials Science* 50 (2005). P. 511-678.
224. Onyshko O.E. Modeling of the Stressed and Phase States of Titanium-Nickelide Plates Under Thermomechanical Loading /O.E. Onyshko, O.R. Hachkevych, L.I. Onyshko // - Springer US, *Materials Science*, 2020–No.55 – P.469-476
225. Pator E. Micromechanical Modelling of Superelasticity in Shape Memory Alloys / E. Pator, A. Eberhard, M. Berveiller // *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* –1993. –296. – P. 38-54.
226. Petrov A. Behavior of material with a memory of form and pseudo-elasticity under nonstationary loading of the body /A.Petrov // *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Фізико-математичні науки.* - 2017. - №1. - С. 37-42.
227. Petrov A. Development of the method with enhanced accuracy for solving

- problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / A.Petrov, Yu.Chernyakov, P.Steblyanko, K.Demichev, V.Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
228. Petryk H. Interfacial energy and dissipation in martensitic phase transformations. Part II: size effects in pseudoelasticity. / H.Petryk, S.Stupkiewicz, G.Maciejewski // J. Mech. Phys. Solids 58, 2010. - P.373–389.
229. Pittaccio S. Applications of Shape Memory Alloys for Neurology and Neuromuscular Rehabilitation / S. Pittaccio et al // J. Funct. Biomater / ed. Petrini L. MDPI. – 2015. – № 2 (6). – P. 328 – 344.
230. Pushin V. G. Alloys with a Thermomechanical Memory: Structure, Properties, and Application / V. G. Pushin // PhMM. 2000. V. 90. Suppl. 1. P. 568–595.
231. Pushin V. G. Features of structure and phase transformations in shapememory TiNi-based alloys after severe plastic deformation / V. G. Pushin, V. V. Stolyarov, R. Z. Valiev [et al.] // Ann.Chim.Sci.Mat. 2002. V.27. № 3. P. 77–88.
232. Pushin V. G. Nanocrystalline TiNi-based shape memory materials produced by ultrarapid quenching from melt / V. G. Pushin, N. I. Kourov, T. E. Kuntsevich [et al.] // PhMM. 2002. V.94. Suppl.1 P. S107–S119.
233. Qiao L. Nonlocal superelastic model of size-dependent hardening and dissipation in single crystal Cu-Al-Ni shape memory alloys. / L.Qiao, J.J.Rimoli, Y.Chen, C.A.Schuh, R.Radovitzky // Phys. Rev. Lett. 106, 2011. - P.210–216.
234. Qiao L. Computational modeling of size-dependent superelasticity of shape memory alloys. / L.Qiao, R.Radovitzky // J. Mech. Phys. Solids 93, 2016. - P. 93–117.
235. Schunsker L.L. Approximation by splines: Theory and applications of spline functions./ L.L. Schunsker: Academic Press.-1969. - 237 p.
236. Schweikeret A.A. An interpolating curve using a spline in tension / A.A. Schweikeret // J. Math. Physics. – 1996. – Vol. 45. – P. 312-317.

237. Shaw J. A. Thermomechanical aspects of NiTi. / J. A. Shaw, S. Kyriakides // *J. Mechanics and Physics of Solids* 43, 1995. -P. 1243-1281.
238. Shaw J. A. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. / J.A. Shaw, S. Kyriakides // *Acta Materialia* 45, 1997.- P. 683-700.
239. Shaw J.A. Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension . / J.A. Shaw, S. Kyriakides // *International Journal of Plasticity*. – 1998. – Vol.13. – P. 837 – 871.
240. Shevchenko Yu. Methods of calculation in non-stationary problems of theory thermal-plasticity/ Yu. Shevchenko, P. Steblyanko, A. Petrov // *Applied problems of the fluid mechanics and heat and mass transfer*, November 6-8 2014, Dnipropetrovsk. - 2014.- P. 9-11.
241. Steblyanko P.A. Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems / P.A. Steblyanko, Yu. Shevchenko // *Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal-Plasticity.- Problems*, ETS- Encyclopedia of Thermal Stresses , Springer Verlag, N 7, 2014.- P. 630-636.
242. Steblyanko P. Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading/ P. Steblyanko, Y. Chernyakov, A. Petrov, V. Loboda // *Structural Integrity, Volume 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, Springer Verlag, 2019.- P. 205-208.
243. Sun Q.P. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys-12 / Q.P. Sun, K.C. Hwang // *J. Mech. Phys. Solids*. –1993.–41. - P. 2667-2680.
244. Sun Q.P. Effects of grain size on phase transition behavior of nanocrystalline shape memory alloys. / Q.P. Sun, A. Ahadi, M.P. Li, M.X. Chen // *Sci. Chin. Technol. Sci.* 57, 2014. - P. 671–679.
245. Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect; one dimensional tensile behaviour / K. Tanaka // *Res. Mechanica*. 1986. Vol. 18.

- P. 251–263.
246. Tanaka, K., Kobayashi, S., Sato, Y., 1986. Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effects in alloys. *International Journal of Plasticity* 2, 59–72.
247. Tokuda M. Thermomechanical behavior of shape memory alloy under complex loading conditions / M. Tokuda, M. Yea, M. Takakura, P. Sittner // *Int. J. of Plasticity*. 15.– 1999.– P. 223-239.
248. Van Humbeeck J. High temperature shape memory alloys. *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.* 1999. **121**(1): 98.<http://dx.doi.org/10.1115/1.2816006>.
249. Waitz T. Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM. / T.Waitz, V.Kazykhanov, H.P. Karnthaler // *Acta Mater* 52, 2004. - P.137–147.
250. Waitz T. Size effects on the martensitic phase transformation of NiTi nanograins. / T.Waitz, T.Antretter, F.D.Fischer, N.K.Simha, H.P.Karnthaler // *J. Mech. Phys. Solids* 55 (2), 2007. - P.419–444.
251. Wang Y.Q., Zheng Y.F., Cai W., Zhao L.C. The tensile behavior of Ti₃₆Ni₄₉Hf₁₅ high temperature shape memory alloy. *Scripta Mater.* 1999. **40**(12): 1327. [http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6462\(99\)00085-8](http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6462(99)00085-8)
252. Wang X.M. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. / X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue // *International Journal of Plasticity* 24, 2008. - P. 1307–1332.
253. Wang X.M. An experimental study of the superelastic behavior in NiTi shape memory alloys under biaxial proportional and non-proportional cyclic loadings /X.M. Wang, Y.F. Wang, Z.Z. Lu, C.H. Deng, Z.F. Yue // *Mechanics of Materials* 42, 2010. - P. 365–373.
254. Wu H.C. Endochronic equations for finite plastic deformation and application to metal tube under torsion /H.C.Wu, J.K.Lu, W.F.Pan//*Int. J. Solids and Struct.* 1995. – Vol.32. No.8/9.– Pp.1079–1097.
255. Xia M.L. Thermomechanical responses of nonlinear torsional vibration with

- NiTi shape memory alloy –alternative stable states and their jumps. / M.L.Xia, Q.P.Sun // *J. Mech. Phys. Solids* 102, 2017. - P.257–276.
256. Ye J. Direct observation of the NiTi martensitic phase transformation in nanoscale volumes. / J.Ye, R.K.Mishra, A.R.Pelton, A.M.Minor // *Acta Mater* 58, 2010. - P. 490–498.
257. Yoneyama T., Miyazaki S. (eds.). *Shape Memory Alloys for Biomedical Applications*. (Woodhead Publ. Limited,2009).
258. Yin H. Effects of grain size on tensile fatigue life of nanostructured NiTi shape memory alloy. / H.Yin, Y.J.He, Z.Moumni, Q.P.Sun // *International Journal of Fatigue* 88, 2016. - P. 166–177.
259. Yoshida F., Hamasaki H., Uemori T. Modeling of anisotropic hardening of sheet metals including description of the Bauschinger effect // *International Journal of Plasticity*. 2015. (75). C. 170–188.
260. Yoshida F., Uemori T. A model of large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and workhardening stagnation // *International Journal of Plasticity*. 2002. № 5 (18). C. 661–686.
261. Yoshida F., Uemori T. A model of large-strain cyclic plasticity and its application to springback simulation // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. № 10 (45). C. 1687–1702.
262. Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K. Elastic-plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain // *International Journal of Plasticity*. 2002. № 5 (18). C. 633–659.

ДОДАТКИ

В додатках наведені допоміжний матеріал (експериментальні результати, зразки програми для розрахунків двовимірних сплайн-функцій та інше), акти про впровадження результатів дисертаційного дослідження.

ДОДАТОК А.

Приклад Mathcad-програма побудови двовимірного В-сплайна

1	$F1(x) := x^3$	$F2(x) := 1 + 3 \cdot (x + x^2 - x^3)$
2	$A01(x, y) := \frac{F1(x) \cdot F1(y)}{24}$	$A02(x, y) := \frac{F2(x) \cdot F1(y)}{24}$
	$A03(x, y) := \frac{F2(y) \cdot F1(x)}{24}$	$A04(x, y) := \frac{F2(x) \cdot F2(y)}{24}$
	$A05(x, y) := \frac{F1(x) \cdot F1(1 - y)}{24}$	$A06(x, y) := \frac{F2(1 - y) \cdot F1(x)}{24}$
	$A07(x, y) := \frac{F2(x) \cdot F1(1 - y)}{24}$	$A08(x, y) := \frac{F2(x) \cdot F2(1 - y)}{24}$
	$A09(x, y) := \frac{F1(1 - x) \cdot F1(1 - y)}{24}$	$A10(x, y) := \frac{F2(1 - x) \cdot F1(1 - y)}{24}$
	$A11(x, y) := \frac{F2(1 - y) \cdot F1(1 - x)}{24}$	$A12(x, y) := \frac{F2(1 - x) \cdot F2(1 - y)}{24}$
	$A13(x, y) := \frac{F1(1 - x) \cdot F1(y)}{24}$	$A14(x, y) := \frac{F2(y) \cdot F1(1 - x)}{24}$
	$A15(x, y) := \frac{F2(1 - x) \cdot F1(y)}{24}$	$A16(x, y) := \frac{F2(1 - x) \cdot F2(y)}{24}$

3	$\alpha_1 := \frac{32}{3} \quad \alpha_2 := -44 \quad \alpha_3 := 64 \quad \alpha_4 := \frac{-100}{3}$ $\alpha_6 := 181.5 \quad \alpha_7 := -264 \quad \alpha_8 := 137.5$ $\alpha_{11} := 384 \quad \alpha_{12} := -200 \quad \alpha_{16} := \frac{625}{6}$ $\omega_1 := -2 \quad \omega_2 := 7.5 \quad \omega_3 := -6 \quad \omega_4 := 1.5$ $\omega_5 := 8 \quad \omega_6 := -30 \quad \omega_7 := 24 \quad \omega_9 := -10$
3	$\omega_{10} := 37.5 \quad \omega_{13} := \frac{8}{3} \quad \beta_1 := -4$ $\beta_2 := 16 \quad \beta_3 := -20 \quad \beta_4 := \frac{16}{3} \quad \beta_5 := 16.5$ $\beta_6 := -66 \quad \beta_7 := 82.5 \quad \beta_8 := -22 \quad \beta_9 := -24$ $\beta_{10} := 96 \quad \beta_{11} := -120 \quad \beta_{12} := 32 \quad \beta_{16} := \frac{-50}{3}$ $\beta_{13} := 12.5 \quad \beta_{14} := -50 \quad \beta_{15} := 62.5$
4	$F_{01}(x, y) := \alpha_1 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_4 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_4 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_{16} \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{16} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_{13} \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_1 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{02}(x, y) := \alpha_2 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_8 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{12} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_2 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{03}(x, y) := \alpha_3 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{12} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_8 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_3 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{04}(x, y) := \alpha_4 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_{16} \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{16} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_{13} \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{10}(x, y) +$

	$+ \beta_4 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_1 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_4 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{05}(x, y) := \alpha_2 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{05}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{15} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_5 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{06}(x, y) := \alpha_6 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_7 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_7 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_{11} \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{11} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_{10} \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_6 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{07}(x, y) := \alpha_7 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_{11} \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{11} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_{10} \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_7 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_6 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_7 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{08}(x, y) := \alpha_8 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{15} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{07}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_3 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_3 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{09}(x, y) := \alpha_3 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{02}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_2 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{14} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_9 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{11}(x, y) := \alpha_{11} \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_{10} \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{10} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_6 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_6 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_7 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_6 \cdot A_{16}(x, y)$

	$F_{10}(x, y) := \alpha_7 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{10} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_6 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_6 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_6 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_7 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_7 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_7 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{10} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_6 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_{11} \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{11} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_{10} \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{12}(x, y) := \alpha_{12} \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{14} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_5 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_2 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_9 \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_2 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{14}(x, y) := \alpha_8 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_5 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_5 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_9 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_{12} \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_9 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{13}(x, y) := \alpha_4 \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{03}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_1 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_1 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_4 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_{13} \cdot A_{11}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_{16} \cdot A_{13}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_{13} \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{15}(x, y) := \alpha_{12} \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{15} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{12} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_9 \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_3 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_9 \cdot A_{06}(x, y) + \beta_3 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_2 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_2 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_2 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_5 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_3 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_8 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_8 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{14} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_5 \cdot A_{16}(x, y)$
	$F_{16}(x, y) := \alpha_{16} \cdot A_{01}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{02}(x, y) + \beta_{16} \cdot A_{03}(x, y) + \omega_{13} \cdot A_{04}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{05}(x, y) +$ $+ \beta_{13} \cdot A_{06}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{07}(x, y) + \omega_1 \cdot A_{08}(x, y) + \alpha_1 \cdot A_{09}(x, y) + \beta_1 \cdot A_{10}(x, y) +$ $+ \beta_1 \cdot A_{11}(x, y) + \omega_4 \cdot A_{12}(x, y) + \alpha_4 \cdot A_{13}(x, y) + \beta_4 \cdot A_{14}(x, y) + \beta_{13} \cdot A_{15}(x, y) +$ $+ \omega_1 \cdot A_{16}(x, y)$

5	<p>Область 1,</p> $\begin{aligned} w_{03} &:= -15.0 & w_{13} &:= -3.0 & w_{23} &:= 0 & w_{33} &:= 0 \\ w_{02} &:= -10.0 & w_{12} &:= -2.30 & w_{22} &:= 0 & w_{32} &:= 0 \\ w_{01} &:= -7.0 & w_{11} &:= -1.30 & w_{21} &:= 0 & w_{31} &:= 0 \\ w_{00} &:= -2.0 & w_{10} &:= -1.0 & w_{20} &:= 0 & w_{30} &:= 0.0 \end{aligned}$ $\begin{aligned} W_1(x, y) &:= w_{00} \cdot F_{01}(x, y) + w_{10} \cdot F_{02}(x, y) + w_{20} \cdot F_{03}(x, y) + w_{30} \cdot F_{04}(x, y) + w_{01} \cdot F_{05}(x, y) + \\ &+ w_{11} \cdot F_{06}(x, y) + w_{21} \cdot F_{07}(x, y) + w_{31} \cdot F_{08}(x, y) + w_{02} \cdot F_{09}(x, y) + w_{12} \cdot F_{10}(x, y) + w_{22} \cdot F_{11}(x, y) + \\ &+ w_{32} \cdot F_{12}(x, y) + w_{03} \cdot F_{13}(x, y) + w_{13} \cdot F_{14}(x, y) + w_{23} \cdot F_{15}(x, y) + w_{33} \cdot F_{16}(x, y) \end{aligned}$
	<p>Область 2,</p> $\begin{aligned} w_{03} &:= 0 & w_{13} &:= 0 & w_{23} &:= 15.0 & w_{33} &:= 20.0 \\ w_{02} &:= 0 & w_{12} &:= 0 & w_{22} &:= 0 & w_{32} &:= 5.0 \\ w_{01} &:= 0.0 & w_{11} &:= 0 & w_{21} &:= 0 & w_{31} &:= 0 \\ w_{00} &:= 0 & w_{10} &:= 0 & w_{20} &:= 0 & w_{30} &:= 0.0 \end{aligned}$ $\begin{aligned} W_2(x, y) &:= w_{00} \cdot F_{01}(x, y) + w_{10} \cdot F_{02}(x, y) + w_{20} \cdot F_{03}(x, y) + w_{30} \cdot F_{04}(x, y) + w_{01} \cdot F_{05}(x, y) + \\ &+ w_{11} \cdot F_{06}(x, y) + w_{21} \cdot F_{07}(x, y) + w_{31} \cdot F_{08}(x, y) + w_{02} \cdot F_{09}(x, y) + w_{12} \cdot F_{10}(x, y) + w_{22} \cdot F_{11}(x, y) + \\ &+ w_{32} \cdot F_{12}(x, y) + w_{03} \cdot F_{13}(x, y) + w_{13} \cdot F_{14}(x, y) + w_{23} \cdot F_{15}(x, y) + w_{33} \cdot F_{16}(x, y) \end{aligned}$
	<p>Область 3,</p> $\begin{aligned} w_{03} &:= -2.0 & w_{13} &:= -1.0 & w_{23} &:= 0 & w_{33} &:= 0 \\ w_{02} &:= -7.0 & w_{12} &:= -1.30 & w_{22} &:= 0 & w_{32} &:= 0 \\ w_{01} &:= -10.0 & w_{11} &:= -2.3 & w_{21} &:= 0 & w_{31} &:= 0 \\ w_{00} &:= -15.0 & w_{10} &:= -3.0 & w_{20} &:= 0 & w_{30} &:= 0.0 \end{aligned}$ $\begin{aligned} W_3(x, y) &:= w_{00} \cdot F_{01}(x, y) + w_{10} \cdot F_{02}(x, y) + w_{20} \cdot F_{03}(x, y) + w_{30} \cdot F_{04}(x, y) + w_{01} \cdot F_{05}(x, y) + \\ &+ w_{11} \cdot F_{06}(x, y) + w_{21} \cdot F_{07}(x, y) + w_{31} \cdot F_{08}(x, y) + w_{02} \cdot F_{09}(x, y) + w_{12} \cdot F_{10}(x, y) + w_{22} \cdot F_{11}(x, y) + \\ &+ w_{32} \cdot F_{12}(x, y) + w_{03} \cdot F_{13}(x, y) + w_{13} \cdot F_{14}(x, y) + w_{23} \cdot F_{15}(x, y) + w_{33} \cdot F_{16}(x, y) \end{aligned}$
	<p>Область 4,</p> $\begin{aligned} w_{03} &:= 0 & w_{13} &:= 0 & w_{23} &:= 0 & w_{33} &:= 0 \\ w_{02} &:= 0 & w_{12} &:= 0 & w_{22} &:= 0 & w_{32} &:= 0 \\ w_{01} &:= 0.0 & w_{11} &:= 0 & w_{21} &:= 0 & w_{31} &:= 5.0 \\ w_{00} &:= 0 & w_{10} &:= 0 & w_{20} &:= 15.0 & w_{30} &:= 20.0 \end{aligned}$ $\begin{aligned} W_4(x, y) &:= w_{00} \cdot F_{01}(x, y) + w_{10} \cdot F_{02}(x, y) + w_{20} \cdot F_{03}(x, y) + w_{30} \cdot F_{04}(x, y) + w_{01} \cdot F_{05}(x, y) + \\ &+ w_{11} \cdot F_{06}(x, y) + w_{21} \cdot F_{07}(x, y) + w_{31} \cdot F_{08}(x, y) + w_{02} \cdot F_{09}(x, y) + w_{12} \cdot F_{10}(x, y) + w_{22} \cdot F_{11}(x, y) + \\ &+ w_{32} \cdot F_{12}(x, y) + w_{03} \cdot F_{13}(x, y) + w_{13} \cdot F_{14}(x, y) + w_{23} \cdot F_{15}(x, y) + w_{33} \cdot F_{16}(x, y) \end{aligned}$

6	$M := 24$ $i := 0..M \quad j := 0..M$ $x_{\min} := 0 \quad x_{\max} := 6 \quad y_{\min} := 0 \quad y_{\max} := 6$ $x_i := x_{\min} + \frac{i}{M} \cdot (x_{\max} - x_{\min}) \quad y_j := y_{\min} + \frac{j}{M} \cdot (y_{\max} - y_{\min})$ $f1(x, y) := \begin{cases} W1\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) & \text{if } x \leq 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}$ $f2(x, y) := \begin{cases} W2\left(\frac{x-3}{3}, \frac{y}{3}\right) & \text{if } x > 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $f3(x, y) := \begin{cases} W3\left(\frac{x}{3}, \frac{y-3}{3}\right) & \text{if } y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $f4(x, y) := \begin{cases} W4\left(\frac{x-3}{3}, \frac{y-3}{3}\right) & \text{if } y > 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
7	$u1(x, y) := \begin{cases} f1(x, y) & \text{if } y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $u2(x, y) := \begin{cases} f2(x, y) & \text{if } y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $u3(x, y) := \begin{cases} f3(x, y) & \text{if } y > 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $u4(x, y) := \begin{cases} f4(x, y) & \text{if } y > 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $A_{i,j} := u1(x_i, y_j) + u2(x_i, y_j) + u3(x_i, y_j) + u4(x_i, y_j)$

ДОДАТОК Б.

Акти впровадження результатів дисертаційного дослідження.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор ТОВ «LAV 01»

Найда О.М.



АКТ

про застосування матеріалів дисертаційної роботи
 «Метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних
 матеріалів при великих деформаціях»
 на здобуття наукового ступеня
 доктора фізико-математичних наук
 зі спеціальності 01.02.04 – «Механіка деформівного твердого тіла»
 Дьомічева Костянтина Едуардовича

В докторській дисертації кандидата технічних наук, доцента, професора кафедри комп'ютерних наук «Київського міжнародного університету» Дьомічева Костянтина Едуардовича отримано цілий ряд наукових результатів, які знайшли свою область використання в інженерній практиці та мають значні перспективи широкого їх застосування при моделюванні та прогнозуванні поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів під впливом навантаження при великих навантаженнях. Практичні і прикладні рекомендації ефективно використовуються при комп'ютерному та математичному моделюванні виготовлення та роботи медичних імплантів.

Алгоритми методу дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях використовуються для комп'ютерного моделювання навантажень на матеріали, які створенні на основі нікелю титану (нітинол) і мають властивості з пам'яттю форм (ендопротези).

Директор



Найда О.М.

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з
навчальної роботи НАУ
А. Полухін
«28» _____ 2021р.



АКТ

впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи Дьомічева Костянтина Едуардовича «Метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях» на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Комісія у складі: голова завідувач кафедри загальної та прикладної фізики д.ф.-м.н., професор Поліщук А.П., члени комісії к.ф.-м.н., Сакун Т.М., асистент Бородій І.О. склали даний акт про те, що результати дисертаційної роботи Дьомічева Костянтина Едуардовича впроваджені у навчальний процес та використовуються на кафедрі загальної та прикладної фізики АКФ при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

№ з/п	Назва роботи що впроваджується	Форма впровадження	Ефективність від впровадження
	1	2	3
1.	Моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів	Лекція	Ознайомлення студентів з сучасними методами моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів при складних навантаженнях
2.	Аналітичне	Лекція	Ознайомлення студентів з сучасними аналітичними методами оцінювання точних обчислень за допомогою сплайн-функцій

Голова комісії:
Завідувач кафедри ЗПФ
д.ф.-м.н., професор

Поліщук А.П.

Члени комісії:
к.ф.-м.н., доцент

Сакун Т.М.

старший викладач

Бородій І.О.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ДОВІДКА

від 11.01.2021 № 126 - ОС 05/120

Про впровадження результатів дисертаційної роботи
Дьомічева Костянтина Едуардовича
з теми «Метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних
матеріалів при великих деформаціях»
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
(01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла)

Результати дисертаційної роботи Дьомічева Костянтина Едуардовича «Метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях» використанні в рамках дослідження, які здійсненні у Дніпровському державному технічному університеті за держбюджетною науково-дослідницькою роботою «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації №0113U000379, 2013-2015 рр.)

Також ці результати використовуються в навчальному процесі Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів»

Завідувач кафедри прикладної
та вищої математики
кандидат фізико-математичних наук, доцент

I.K. Карімов

Ректор,
доктор технічних наук, професор



О.М. Коробочка

ДОДАТОК В.

Список опублікованих праць за темою дисертації.

Основні наукові положення дисертаційного дослідження опубліковано в 44 наукових працях, серед яких:

статті, опубліковані в виданнях, що входять до різних періодичних видань, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України або закордонних видань, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus

1. Demichev K. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / K. Demichev, A. Petrov, Yu. Chernyakov, P. Steblyanko, V. Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33 (наукометрична база Scopus, Q2 кuartиль).

2. Domichev K. Modeling the behavior of the body with pseudo-elastic-plastic material at non-stationary loading / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Металофізика та новітні технології, Інститут металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАН України, 2021 – Том 43, випуск 1 – с. 107–128 (наукометрична база Scopus, Q3 кuartиль).

статті у наукових виданнях, що включені до Переліку наукових фахових видань України

3. Демичев К.Э. Экспериментальное обоснование варианта модели поведение материала с памятью формы и псевдоупругостью / А.Д. Петров, П.А. Стеблянко, Ю.А. Черняков // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С. 81–87.

4. Дьомічев К.Е. Чисельне моделювання стану пружно-пластичних циліндричних тіл під дією високотемпературних навантажень / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко// Комп'ютерне моделювання: аналіз,

управління, оптимізація; збірник наукових праць Дніпропетровський державний хіміко-технічний університет. – 2017, № 1 (1). – Дніпропетровськ, 2017. – С. 56–62.

5. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького. Серія Прикладна математика. Інформатика №1(1). – 2020–С. 4–12.

6. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського технологічного університету – 2020 – № 4, ЧДТУ–с.143-151.

7. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки елементів виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій –2020–№ 32, ДНУ ім. О. Гончара –с.81–94.

статті у наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію

8. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – p. 27-29.

9. Domichev K. Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – Dubai, 2020 – No. 4(40). – p.5–17.

10. Domichev K. Simulation of behavior of functionally - heterogeneous materials under temperature loads / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, 2020 – No.

8(44). – p.5–11.

11. Domichev K. Modeling the behavior of the physical and geometric non-linear functional heterogeneous materials / K. Domichev // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, №1(45), 2021– p.82–90.

12. Domichev K. Use of splines in simulation of functionally inhomogeneous materials / K. Domichev // Colloquium-journal – Warszawa, Polska– 2021 – No.3(90). – p.16–18

13. Domichev K. The main areas of application of functional materials / K. Domichev// «Research-science» – Banská Bystrica, Словачинна –2021 – №14. –p.26–29.

14. Domichev K. On the question of convergence solutions numerical nonstationary problems of modeling thermomechanics / K. Domichev, A. Petrov, P. Steblyanko // The scientific heritage. – Budapest, № 59 (59), 2021 – p. 15–17.

15. Domichev K. Modeling behavior textured and non-textured alloy at great deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 60 (60), 2021– p.17-19.

16. Domichev K. Application of two-dimensional splines in modeling problems of functional materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The Young Scholars. Vienna, Austria – 2021 – №1. P.7–9.

17. Domichev K. Simulation of behavior of pseudo-elastic-plastic NiTi alloy at large deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Colloquium-journal, 2021 – Warszawa, Polska, №5(92) – p.6-8.

18. Domichev K. Mathematical model shear lines for plastic deformation / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 61 (61), 2021 – p.54–56.

монографії (розділи у колективних монографіях)

19. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.

20. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання складних технічних систем / К.Е. Дьомічев, В.Є. Бондаренко, Т.І. Цюпій, В.В. Хайдуров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-617-651-206-6), 2019. – 248 с.

інших виданнях, які засвідчують апробацію матеріалів дослідження на наукових конференціях, симпозиумах, конгресах

21. Дьомічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляк, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017. Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9–12.

22. Дьомічев К.Е. Застосування двовимірних сплайнів при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляк // МНПК Сучасні проблеми термомеханіки – Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача, – Львів, 2016. – С.161–162.

23. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичних циліндричних тіл з урахуванням пружних параметрів, які залежать від температури / К.Е. Дьомічев // МНПК Інформаційна безпека та комп'ютерні технології. – Кіровоград, 2016. – С.96–97.

24. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічного стану пружно-пластичного циліндричного тіла під дією електромагнітного поля / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляк // МНПК Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем.– Дніпропетровськ, 2016. – С.113–116.

25. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичного стану циліндричного тіла під впливом електромагнітних полів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стебляк // МНПК Математичні проблеми технічної механіки – 2017. – ДДТУ, 2017. – С. 45.

26. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання

силових навантажень пружно-пластичних циліндричних тіл при температурному ударі / К.Е. Дьомічев // МНПК Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації. – Чернівці, 2017. – С.6–8.

27. Дьомічев К.Е. Схема розщеплення просторової нестационарної задачі термомеханіки з використанням сплайнів / К.Е. Дьомічев // МНПК Наукова думка інформаційного століття. – Дніпро, 2017. – С.103–105.

28. Дьомічев К. Поведінка функціонально-неоднорідних матеріалів при значних деформаціях // К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, / International scientific conference "Innovative technologies, models Cyber Security Management, ITCSM-2021". – April 14–16, 2021 (Part 1). – Dnipro, Ukraine. – P. 51–55.

29. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання полів напруження та деформації пружно-пластичних циліндричних тіл під дією складного навантаження / К.Е. Дьомічев // XXIII МНПК Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави – К.: КиМУ, 2018. – С.218–221.

30. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання нестационарного напружено-деформованого пружно-пластичного стану тіл під дією фізико-механічних полів / К.Е. Дьомічев // МНКП Актуальні питання сьогодення. – Вінниця, 2018. – С. 60–63.

31. Дьомічев К.Е. Розробка деяких положень концепції підготовки студентів технічних спеціальностей з дисципліни «Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач» / К.Е. Дьомічев, Н.М. Волосова, Д.В. Тертичний // МНПК Математичні проблеми технічної механіки–2018. – ДДТУ. 2018. – С. 80.

32. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-механічних полів двовимірними сплайнами / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.І. Коваленко // МНПК Наука та освіта: ключові питання сучасності. – 2018, Чернігів. – С. 117–120.

33. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання температурних

навантажень на основі ітераційної процедури розв'язання нестационарної задачі термо-пластичності / К.Е. Дьомічев // МНПК Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології. – Харків, 2019. – С. 23–24.

34. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання псевдо-пружно-пластичних тіл з урахуванням нелінійності / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров // Науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України – Київ, 2020. – С. 10–12.

35. Дьомічев К.Е. Моделювання миттєвої термомеханічної поверхні трилінійного двофазного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНКП Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти. – Львів, 2020. – С.61–62.

36. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, Ю.А. Черняков, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // МНПК Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпро, 2020. – С.15–19.

37. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з псевдопружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНКП «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики». – Київ, 2020.– С. 54.

38. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання поведінки тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів під дією нестационарного навантаження / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Новітні технології в освіті, науці та виробництві. – Покровськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2020.– С.211–212.

39. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання поведінки інтелектуальних матеріалів / П.О. Стеблянко, Т.І. Каткова // МПНК «Наукові підсумки 2020 року». Збірка наукових праць. – Харків, Х.: Технологічний Центр, 2020. – С.14.

40. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель для описання

властивостей матеріалів з пам'яттю форми / К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, О. Косухін // МНПК «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020» – Дніпро, 2020. – С. 3.

41. Domichev K. Method of splitting nonstationary thermomechanics task with considering electromagnetic fields / K. Domichev, P. Steblyanko // Inżynieria i technologia. Współczesne problemy i perspektywy rozwoju. – Zbiór artykułów naukowych. – Warszawa (PL). 2017. – p. 76–78.

42. Domichev K. Mathematical and computer modeling of the temperature field of elastic plastic multiple cylindrical blood / K. Domichev // Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia: Zbiór artykułów naukowych. – Poznan (PL). 2017. – p. 170–171.

43. Domichev K. Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Science, research, development. Technics and technology. – Krakow, 2020.– No 27 – p. 27–28.

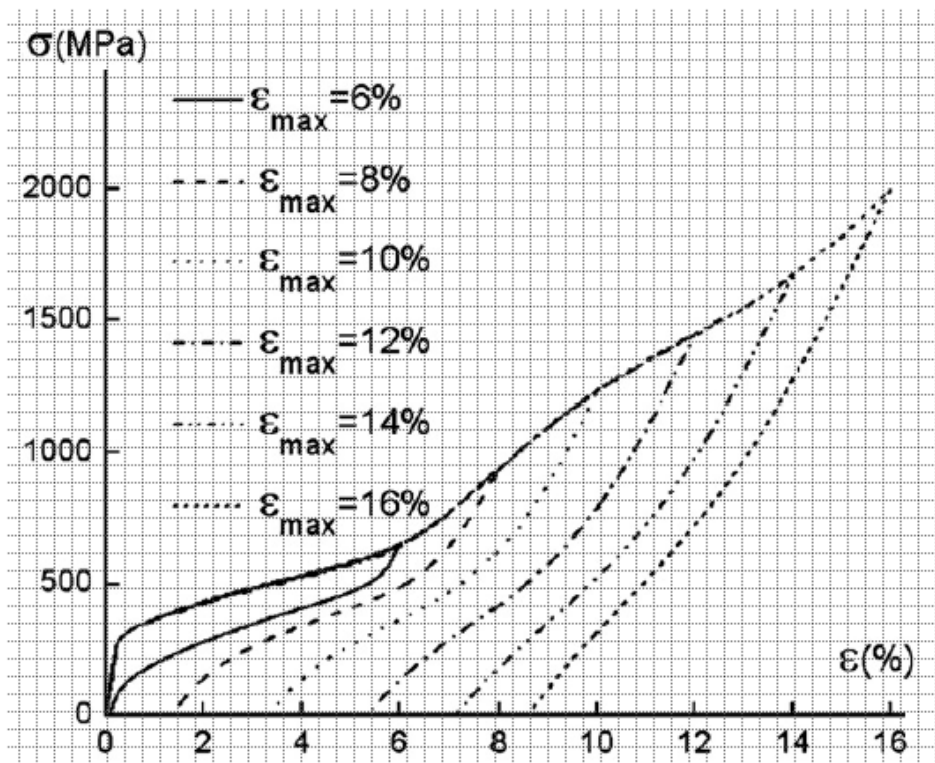
44. Domichev K. Modeling of body behavior from trilline biphasic material taking into temperature / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // МНПК Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК–2020. – Дніпро, 2020. – С.76–77.

ДОДАТОК Г.

Діаграма сплаву з пам'яттю форми *NiTi*

(дивись *Wang X.M. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. / X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue // International Journal of Plasticity 24, 2008. - P. 1307–1332.*).

Еволюція полікристалічної середньої об'ємної частки мартенситу під час циклу навантаження-розвантаження з різними максимальна амплітуда деформації нетекстурованого сплаву.



$\varepsilon\%$	$\sigma(MPa)$ ↑ $\varepsilon_{\max} = 16\%$	$\sigma(MPa)$ ↓ $\varepsilon_{\max} = 8\%$	$\sigma(MPa)$ ↓ $\varepsilon_{\max} = 10\%$	$\sigma(MPa)$ ↓ $\varepsilon_{\max} = 12\%$	$\sigma(MPa)$ ↓ $\varepsilon_{\max} = 14\%$	$\sigma(MPa)$ ↓ $\varepsilon_{\max} = 16\%$
0	0	---	---	---	---	---
0,2	270	---	---	---	---	---
0,4	288,7	---	---	---	---	---
0,6	307,3	---	---	---	---	---
0,8	326	---	---	---	---	---
1	344,7	---	---	---	---	---

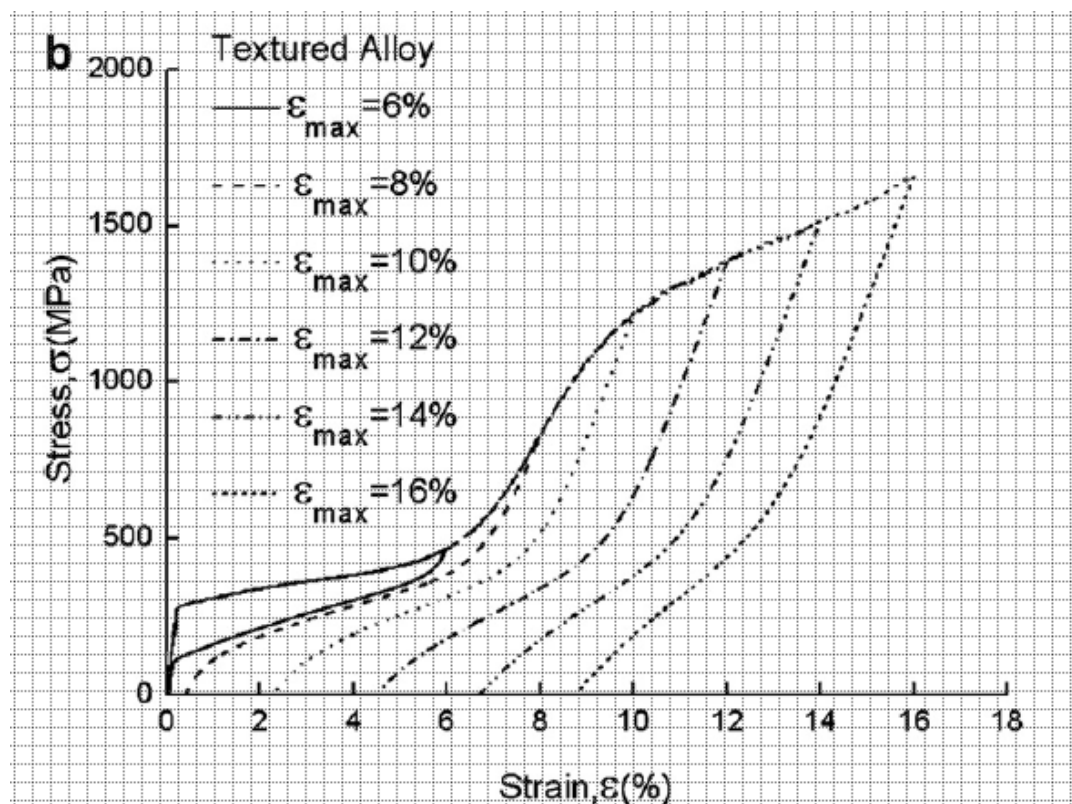
1,2	363,3	---	---	---	---	---
1,4	382	---	---	---	---	---
1,6	400,6667	---	---	---	---	---
1,8	419,3333	0	---	---	---	---
2	438	130	---	---	---	---
2,2	447,3	153,2	---	---	---	---
2,4	456,6	176,4	---	---	---	---
2,6	465,9	199,6	0	---	---	---
2,8	475,2	222,8	18,42	---	---	---
3	484,5	246	36,85	---	---	---
3,2	493,8	269,2	55,29	---	---	---
3,4	503,1	292,4	73,71	---	---	---
3,6	512,4	315,6	92,14	---	---	---
3,8	521,7	338,8	110,57	---	---	---
4	531	362	129	---	---	---
4,2	541,1	374,9	151,5	---	---	---
4,4	551,2	387,8	174	---	---	---
4,6	561,3	400,7	196,5	---	---	---
4,8	571,4	413,6	219	---	---	---
5	581,5	426,5	241,5	---	---	---
5,2	591,6	439,4	264	---	---	---
5,4	601,7	452,3	286,5	---	---	---
5,6	611,8	465,2	309	---	---	---
5,8	621,9	478,1	331,5	0	---	---
6	632	491	354	142	---	---
6,2	658,1	531,2	371,5	174,5	---	---
6,4	684,2	571,4	389	207	---	---
6,6	710,3	611,6	406,5	239,5	---	---
6,8	736,4	651,8	424	272	---	---
7	762,5	692	441,5	304,5	---	---
7,2	788,6	732,2	459	337	---	---
7,4	814,7	772,4	476,5	369,5	---	---
7,6	840,8	812,6	494	402	0	---
7,8	866,9	852,8	511,5	434,5	74,1	---
8	893	893	529	467	146,7	---
8,2	925,7	---	598,1	475,9	183,93	---
8,4	958,4	---	667,2	484,8	221,16	0
8,6	991,1	---	736,3	493,7	258,39	37,5
8,8	1023,8	---	805,4	502,6	295,62	75
9	1056,5	---	874,5	511,5	332,85	112,5
9,2	1089,2	---	943,6	520,4	370,08	150
9,4	1121,9	---	1012,7	529,3	407,31	187,5
9,6	1154,6	---	1081,8	538,2	444,54	225

9,8	1187,3	---	1150,9	547,1	481,77	262,5
10	1220	---	1220	556	519	300
10,2	1241,4	---	---	643,8	563,8	334,17
10,4	1262,8	---	---	731,6	608,6	368,34
10,6	1284,2	---	---	819,4	653,4	402,51
10,8	1305,6	---	---	907,2	698,2	436,68
11	1327	---	---	995	743	470,85
11,2	1348,4	---	---	1082,8	787,8	505,02
11,4	1369,8	---	---	1170,6	832,6	539,19
11,6	1391,2	---	---	1258,4	877,4	573,36
11,8	1412,6	---	---	1346,2	922,2	607,53
12	1434	---	---	1434	967	641,7
12,2	1453,1	---	---	---	1032,8	705,86
12,4	1472,2	---	---	---	1098,6	770,02
12,6	1491,3	---	---	---	1164,4	834,18
12,8	1510,4	---	---	---	1230,2	898,34
13	1529,5	---	---	---	1296	962,5
13,2	1548,6	---	---	---	1361,8	1026,66
13,4	1567,7	---	---	---	1427,6	1090,82
13,6	1586,8	---	---	---	1493,4	1154,98
13,8	1605,9	---	---	---	1559,2	1219,14
14	1625	---	---	---	1625	1283,3
14,2	1662,5	---	---	---	---	1354,97
14,4	1700	---	---	---	---	1426,64
14,6	1737,5	---	---	---	---	1498,31
14,8	1775	---	---	---	---	1569,98
15	1812,5	---	---	---	---	1641,65
15,2	1850	---	---	---	---	1713,32
15,4	1887,5	---	---	---	---	1784,99
15,6	1925	---	---	---	---	1856,66
15,8	1962,5	---	---	---	---	1928,33
16	2000	---	---	---	---	2000

Діаграма сплаву з пам'яттю форми *NiTi*

(дивись Wang X.M. *Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys.* / X.M.Wang, B.X.Xu, Z.F.Yue // *International Journal of Plasticity* 24, 2008. - P. 1307–1332.).

Еволюція полікристалічної середньої об'ємної частки мартенситу під час циклу навантаження-розвантаження з різними максимальна амплітуда деформації для *текстурованого* сплаву.



$\epsilon\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↑ $\epsilon_{\max} = 16\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↓ $\epsilon_{\max} = 8\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↓ $\epsilon_{\max} = 10\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↓ $\epsilon_{\max} = 12\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↓ $\epsilon_{\max} = 14\%$	$\sigma(\text{MPa})$ ↓ $\epsilon_{\max} = 16\%$
0	0	---	---	---	---	---
0,2	276,5	0	---	---	---	---
0,4	285	19,61111	---	---	---	---
0,6	293,5	39,22222	---	---	---	---
0,8	302	58,83333	---	---	---	---
1	310,5	78,44444	---	---	---	---

1,2	319	98,05556	---	---	---	---
1,4	327,5	117,6667	---	---	---	---
1,6	336	137,2778	---	---	---	---
1,8	344,5	156,8889	---	---	---	---
2	353	176,5	---	---	---	---
2,2	355,94	188,26	0	---	---	---
2,4	358,88	200,02	19,66667	---	---	---
2,6	361,82	211,78	39,33333	---	---	---
2,8	364,76	223,54	59	---	---	---
3	367,7	235,3	78,66667	---	---	---
3,2	370,64	247,06	98,33333	---	---	---
3,4	373,58	258,82	118	---	---	---
3,6	376,52	270,58	137,6667	---	---	---
3,8	379,46	282,34	157,3333	---	---	---
4	382,4	294,1	177	---	---	---
4,2	392,56	302,93	188,72	---	---	---
4,4	402,72	311,76	200,44	0	---	---
4,6	412,88	320,59	212,16	22,5	---	---
4,8	423,04	329,42	223,88	45	---	---
5	433,2	338,25	235,6	67,5	---	---
5,2	443,36	347,08	247,32	90	---	---
5,4	453,52	355,91	259,04	112,5	---	---
5,6	463,68	364,74	270,76	135	---	---
5,8	473,84	373,57	282,48	157,5	---	---
6	484	382,4	294,2	180	---	---
6,2	517,99	426,51	317,73	197,3	---	---
6,4	551,98	470,62	341,26	214,6	---	---
6,6	585,97	514,73	364,79	231,9	---	---
6,8	619,96	558,84	388,32	249,2	0	---
7	653,95	602,95	411,85	266,5	29,66667	---
7,2	687,94	647,06	435,38	283,8	59,33333	---
7,4	721,93	691,17	458,91	301,1	89	---
7,6	755,92	735,28	482,44	318,4	118,6667	---
7,8	789,91	779,39	505,97	335,7	148,3333	---
8	823,5	823,5	529,5	353	178	---
8,2	862,1	---	597,14	382,41	198,44	---
8,4	900,3	---	664,78	411,82	218,88	---
8,6	938,5	---	732,42	441,23	239,32	---
8,8	976,7	---	800,06	470,64	259,76	0
9	1014,9	---	867,7	500,05	280,2	29,43333
9,2	1053,1	---	935,34	529,46	300,64	58,86667
9,4	1091,3	---	1002,98	558,87	321,08	88,3
9,6	1129,5	---	1070,62	588,28	341,52	117,7333

9,8	1167,7	---	1138,26	617,69	361,96	147,1667
10	1205,9	---	1205,9	647,1	382,4	176,6
10,2	1223,55	---	---	720,63	417,68	200,12
10,4	1241,2	---	---	794,16	452,96	223,64
10,6	1258,85	---	---	867,69	488,24	247,16
10,8	1276,5	---	---	941,22	523,52	270,68
11	1294,15	---	---	1014,75	558,8	294,2
11,2	1311,8	---	---	1088,28	594,08	317,72
11,4	1329,45	---	---	1161,81	629,36	341,24
11,6	1347,1	---	---	1235,34	664,64	364,76
11,8	1364,75	---	---	1308,87	699,92	388,28
12	1382,4	---	---	1382,4	735,2	411,8
12,2	1394,86	---	---	---	812,38	455,91
12,4	1407,32	---	---	---	889,56	500,02
12,6	1419,78	---	---	---	966,74	544,13
12,8	1432,24	---	---	---	1043,92	588,24
13	1444,7	---	---	---	1121,1	632,35
13,2	1457,16	---	---	---	1198,28	676,46
13,4	1469,62	---	---	---	1275,46	720,57
13,6	1482,08	---	---	---	1352,64	764,68
13,8	1494,54	---	---	---	1429,82	808,79
14	1507	---	---	---	1507	852,9
14,2	1521,01	---	---	---	---	932,32
14,4	1535,02	---	---	---	---	1011,74
14,6	1549,03	---	---	---	---	1091,16
14,8	1563,04	---	---	---	---	1170,58
15	1577,05	---	---	---	---	1250
15,2	1591,06	---	---	---	---	1329,42
15,4	1605,07	---	---	---	---	1408,84
15,6	1619,08	---	---	---	---	1488,26
15,8	1633,09	---	---	---	---	1567,68
16	1647,1	---	---	---	---	1647,1