

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЄВДОКИМОВ ДМИТРО ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ
ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ І
ТЕПЛОМАСООБМІНУ ПРИ МАЛИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

01.02.05 – Механіка рідини, газу та плазми

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Д.В. Євдокимов

Науковий керівник

Поляков Микола Вікторович, доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент Національної академії наук України

Дніпро – 2021

АНОТАЦІЯ

Євдокимов Д. В. Математичні моделі та чисельні методи теорії потенціалу для задач гідродинаміки і тепломасообміну при малих числах Рейнольдса. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.05 механіка рідини, газу та плазми. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено створенню нових та вдосконаленню існуючих математичних моделей течій в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса та процесів тепломасообміну у таких течіях, а також розробці розрахункових схем підвищеної точності та ефективності для розв'язання численних технічних задач, що з'явилися за останні роки у багатьох областях сучасної науки та техніки, зокрема, у мікрогідродинаміці, мікробіології, медицині, мікроелектроніці, космічних дослідженнях, гідрометеорології, тепловій та атомній енергетиці, екології тощо. Для побудови нових математичних моделей фізичних та технологічних процесів й природних явищ з наведеного вище переліку областей використовувалися традиційні та добре обґрунтовані математичні моделі відповідних предметних областей, методи асимптотичного аналізу та підходи теорії потенціалу. В основу алгоритмів чисельного розв'язання крайових задач, сформульованих у рамках відомих та запропонованих математичних моделей процесів та явищ, що розглядаються, покладені алгоритми обчислювальної теорії потенціалу, насамперед, метод граничних елементів.

Побудова перших асимптотичних моделей течії в'язкої рідини для малих чисел Рейнольдса була здійснена Г. Стоксом практично одночасно з розробкою загальної моделі – крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса. Однак отримана асимптотична математична модель мала низку недоліків, найбільш відомі з яких парадокси Уайтхеда та Стокса. В той же час модель Стокса дозволила побудувати низку корисних аналітичних розв'язків задач зовнішнього обтікання при малих числах Рейнольдса. В останній чверті минулого сторіччя швидкий розвиток

мікрогідродинаміки та гідродинаміки течій в умовах мікрогравітації зробив виключно актуальними течії при малих числах Рейнольдса та процеси тепломасообміну у них у обмежених областях складної геометричної форми, де не мають місця парадокси Уайтхеда та Стокса. Окремими проблемами з розглянутої області є розрахунок багатофазних течій Стокса та течій Стокса з інтенсивним тепломасообміном з урахуванням ефектів флотації та седиментації у слабких полях масових сил, термофореза та дифузіфореза, ефектів Соре, Дюфора та зв'язаної дифузії, слабкої вільної конвекції, повільних фазових переходів та гідродинамічних ефектів фазових переходів (течій Стефана), феноменів гідродинамічної взаємодії тощо. Сучасна вимога підвищення точності комп'ютерного розрахунку змушує застосовувати узагальнені асимптотичні математичні моделі та вдосконалювати методи чисельного розв'язання широкого кола крайових задач параболічного та еліптичного типів, у тому числі метод граничних елементів. Відповідні огляди літератури та аналіз сучасного стану питання з наведеними висновками стали предметом розгляду першого розділу дисертаційної роботи.

Методи обчислювальної теорії потенціалу й, в першу чергу, метод граничних елементів, стали предметом аналізу другого розділу роботи, який розпочинається з короткого огляду історії класичної теорії потенціалу та обчислювальної теорії потенціалу. Аналіз сучасного стану питання наводиться на прикладах алгоритмів, котрі реалізовані у комплексі програм, розробленому за безпосередньої участі автора. Серед нових алгоритмів запропонованих автором слід зазначити нові регулярні алгоритми методу граничних елементів з розташуванням точок коллокації всередині області розв'язку, що дає змогу завжди формулювати задачі, що розглядаються, у вигляді наближених регулярних граничних інтегральних рівнянь другого роду та проводити інтегрування у методі граничних елементів вздовж реальної (неапроксимованої) межі області розв'язку, а це дозволяє суттєво підвищити точність розрахунків без помітного збільшення потреби у ресурсах обчислювальної техніки; на основі регулярного формулювання запропоновано принципово новий «явний» покроковий за часом алгоритм методу граничних елементів для рівняння теплопровідності; запропоновано прямий регулярний метод дискретних особливостей, який вимагає значно менше комп'ютерного часу у порівнянні з іншими методами теорії потенціалу; запропоновано комбінований

метод граничних елементів та дискретних особливостей, призначений для лагранжевого розрахунку багатозфазних течій; запропоновано новий адаптивний алгоритм методу граничних елементів, оснований на розкладанні бажаної функції в ряд за малим параметром, що характеризує масштаб дискретизації.

Всі запропоновані нові та вдосконалені чисельні алгоритми та розрахункові схеми було ретельно протестовані шляхом обчислювального експерименту на спеціально підібраних тестових задачах, що мають відомі аналітичні розв'язки у квадратурах. Точність та ефективність запропонованих алгоритмів були проаналізовані за спеціально розробленою методикою, а для випадків складних розрахункових схем для дослідження їх властивостей було застосовано метод штучних збурень. Тестові розрахунки підтвердили високу точність та ефективність запропонованих обчислювальних підходів особливо для областей складної геометричної форми для лінійних крайових задач еліптичного та параболічного типів.

Задачі мікрогідродинаміки та інші інженерно-технічні задачі для течій Стокса було розглянуто у третьому розділі роботи. В основу підходу було покладено стаціонарну чи нестаціонарну систему рівнянь Стокса та її узагальнення, у тому числі, течію Стокса у полі малих масових сил, течію Стокса при неасимптотично малих числах Рейнольдса, менших за 1, багатозфазну течію Стокса. Були розглянуті альтернативні формулювання системи рівнянь Стокса в залежних змінних функція течії – завихренність, швидкість – завихренність, тиск – завихренність, функція струму (плоский випадок). Для кожного з цих випадків була вперше побудована матриця фундаментальних розв'язків та отримана відповідна система граничних інтегральних рівнянь. У випадку неасимптотично малих чисел Рейнольдса у обмежених областях було застосоване класичне асимптотичне розкладання Уайтхеда по числу Рейнольдса. Для нестаціонарних течій Стокса з малими числами Стокса для отримання асимптотичної математичної моделі вперше було застосовано розкладання по числам Стокса. Отримані асимптотичні математичні моделі значно спрощують подальше застосування методу граничних елементів для чисельного розрахунку.

Нові запропоновані ефективні алгоритми обчислювальної теорії потенціалу дали змогу чисельного розв'язання задачі про гідродинамічну взаємодію у течії

Стокса для тіл довільної геометричної форми з урахуванням обертання об'єктів, що було неможливе на попередньому етапі розвитку комп'ютерного моделювання течій Стокса. Була розглянута багатофазна течія Стокса у лагранжевому наближенні з урахуванням гідродинамічної взаємодії. Для взаємодії об'єктів дисперсної фази на відносно великих відстанях застосовувався метод М. Смолуховського, на проміжних відстанях – запропонований автором узагальнений метод М. Смолуховського та на малих відносних відстанях для розрахунку гідродинамічної взаємодії було використано прямий метод граничних елементів. Запропоновані нові лагранжеві підходи з використанням методів теорії потенціалу для розрахунку багатофазних течій у середовищах складної структури знайшли застосування для аналізу технологічних процесів у хімічних виробництвах, видобутку та збагачення корисних копалин, а також у наукових дослідженнях у гідрометеорології та екології. Принципово новим у такий розрахунковій схемі є врахування ефектів тепломасообміну у лагранжевому підході.

Застосування розроблених асимптотичних та обчислювальних підходів до задач теорії тепломасообміну стало предметом розгляду у четвертому розділі. Метод малого параметра з використанням числа Стефана, меншого за 1, було застосовано для побудови асимптотичної математичної моделі повільних фазових переходів, що дало змогу проводити високоточні розрахунки методом граничних елементів у повільному часі. Для ілюстрації працездатності запропоновано підходу були проведені розрахунки повільних фазових переходів у областях складної геометричної форми. Вдалося показати, що у переважній більшості випадків течія Стефана при повільному фазовому переході є течією Стокса. Окремо були розглянуті випадки так званих гомотетичних фазових переходів, у яких тіло завдяки фазовому переходу змінює розмір, але зберігає геометричну форму. Прикладом гомотетичних фазових переходів можуть бути повільні фазові переходи рідина-газ на поверхні бульбашок чи крапель, де під дією сил поверхневого натягу під час процесу фазового переходу зберігається сферична форма. До розрахунку таких фазових переходів також вперше був застосований запропонований в роботі асимптотичний метод разом з методом граничних елементів. Як модель дифузійного тепломасообміну у багатокомпонентному середовищі була розглянута система рівнянь Онзагера, для якої були побудовані фундаментальні розв'язки,

граничноінтегральні аналоги та асимптотичні аналоги і застосовано метод граничних елементів. Отримані розв'язки крайових задач для системи рівнянь Онзагера демонструють властивості, непритаманні розв'язкам інших крайових задач параболічного типу.

Течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації розглянуті у п'ятому розділі. В умовах мікрогравітації, за додаткової очевидної умови відсутності вимушеної конвекції, процеси руху рідини та тепломасообміну у ній визначаються ефектами теплопровідності та дифузії, а до того ж процесами слабкої вільної конвекції, конвекції Марангоні, термо-капілярної та концентраційно-капілярної конвекції, течій Стефана при наявності фазових переходів, ефектів Соре і Дюфора, для випадку багатофазного рідинного середовища до зазначених ефектів слід додати явища седиментації та флотації у полях слабких масових сил, термофореза та дифузійфореза, ефект гідродинамічної взаємодії. Перелічені ефекти та явища можуть мати суттєво різні геометричні, часові та фізичні масштаби, але у роботі показано, що асимптотичний аналіз на основі розкладання Уайтхеда, розкладання за числами Стокса та Стефана дозволяє значно спростити математичну модель та ефективно застосовувати до неї методи теорії потенціалу та лагранжеві підходи. У роботі запропоновано нову асимптотичну математичну модель слабкої вільної конвекції, побудовано матриці фундаментальних розв'язків та отримано інтегральне представлення для цієї моделі, вперше розроблено лагранжеві алгоритми розрахунку багатофазних середовищ в умовах мікрогравітації. На основі розроблених у роботі нових математичних моделей та запропонованих нових високоефективних методів розрахунку була розглянута принципово важлива для подальшого розвитку ракетно-космічної техніки задача про процеси тепломасообміну у паливному баку космічного апарату під час довготривалого інерційного польоту. Остання задача представляє великий практичний інтерес в світі анонсованих польотів до Марсу.

Зазначені вище асимптотичні математичні моделі течій при малих числах Рейнольдса та процесів тепломасообміну у них, запропоновані автором, та алгоритми обчислювальної теорії потенціалу, також запропоновані автором, є новими та такими, що відповідають світовому рівню досліджень у релевантній області. Отримані результати у вигляді математичних моделей та розрахункових

алгоритмів можуть бути застосовані як теоретичні основи для створення обчислювального інструментарію для розробки нових чи вдосконаленню існуючих технічних пристроїв, виробничих та транспортних технологій, що застосовуються у мікрогідромеханіці, космічних дослідженнях та ракетно-космічних технологіях, мікробіології та медицині, мікроелектроніці, тощо.

Ключові слова: течія Стокса, парадокс Уайтхеда, асимптотичне розкладання Уайтхеда, парадокс Стокса, метод граничних елементів, повільні фазові переходи, багатофазна течія Стокса, течія Стефана, флотація, седиментація, термофорез, система рівнянь Онзагера, паливний бак космічного апарату, довготривалий інерційний політ.

Список публікацій здобувача

Публікації у вітчизняних наукових фахових виданнях:

1. Гончаренко М. П. Решение задач гидродинамического взаимодействия малых частиц методом М. Смолуховского / М. П. Гончаренко, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту, 2014, № 3(50). – с. 249-253.
2. Евдокимов Д. В. Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения / Д. В. Евдокимов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2015, №2/7 (74). – С. 16-25. (**Index Copernicus**)
3. Бразалук, Ю. В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, О. А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Вып. 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56. (**Index Copernicus**)
4. Бразалук Ю. В. Асимптотическая математическая модель аблирующих теплозащитных покрытий / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, М. А. Стояновский // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – №3 (62) т.2, 2017. С.47 – 55.
5. Бразалук Ю. В. Применение метода граничных элементов для расчета течения Пуазейля в каналах сложного поперечного сечения / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Р. А. Шульга // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – № 3(66). Том 1. – 2018. – С. 24–31.

6. Амуров А. В. Численное исследование процесса эволюции жидкого контура / А. В. Амуров, Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – Херсон: ХНТУ, 2019. – № 2(69), частина 2. – С. 140–152.

7. Бразалук Ю. В. Математическое и численное моделирование систем теплоизоляции тел сложной геометрической формы / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, А. В. Давыдова, Д. В. Евдокимов, Ю. А. Малая, М. А. Стояновский // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпро, 2019. – Випуск 2 (121). – С. 64–76 (**Index Copernicus**)

Публікації у наукових виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз даних SCOPUS та Web of Science:

8. Yevdokymov D.V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D. V. Yevdokymov // D. Durban and A. R. J. Pearson (Eds.) Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17-21 March, 1997. Kluwer Academic Publisher. - pp. 217-230. (**WoS**).

9. Brazaluk Iu. Asymptotic Approach and Boundary Element Method for Calculation of Slow Phase Transitions / Iu. Brazaluk, D. Yevdokymov / 4 th International Conference on Computational Methods for Thermal Problems, 2016, Georgia Tech, Atlanta, USA.- p.286-289. <http://www.thermacomp.com/public/index.php?node=16&nm=ThermaComp>. (**SCOPUS**).

10. Brazaluk Iu. V. Generalized Onsager's Equation System as Mathematical Model of Heat and Mass Transfer in Microgravity Conditions / Iu. V. Brazaluk, D. V. Yevdokymov // Fifth International Conference on Computational Methods for Thermal Problems. July 9-11, 2018. Bangalor. India. – P. 342–345. (**SCOPUS**).

11. Yevdokymov D. V. Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Diffusive Processes in Slow Changing Domains / D. V. Yevdokymov, Yu. L. Menshikov // Modeling and Simulation in Engineering - Selected Problems. – Електронний ресурс, доступ за адресою: <https://www.intechopen.com/online-first/mathematical-modelling-and-numerical-simulation-of-diffusive-processes-in-slow-changing-domains>

Інші публікації та матеріали конференцій:

12. Бразалук Ю. В. Метод граничних елементів в задачах гідродинаміки та теплопровідності / Ю. В. Бразалук, О. Г. Гоман, Д. В. Євдокимов, О. О. Кочубей, М. В. Поляков // Дніпро: Ліра, 2019. – 228 с. (монографія).

13. Беляев Н. М. Применение метода граничных элементов в задачах теплопроводности / Н. М. Беляев, Д. В. Евдокимов // Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 12-18.
14. Евдокимов Д. В. Интегральные уравнения процесса сушки капиллярнопористого тела / Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1998. – С. 52-55.
15. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. Випуск 2. Том 1, 1999. – С. 150-156.
16. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задач межфазового взаимодействия с неизвестными границами фаз / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Дніпропетровського ун-ту, 2001. сер. "Механіка", вып.5, том 1. – С. 109-116.
17. Евдокимов Д. В. Гидродинамическое взаимодействие малых объектов в потоке / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 1. – С. 157-161.
18. Бевза Э. К. Математическое моделирование процессов фазовых переходов в условиях микрогравитации / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 2. – С. 249-253.
19. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задачи Стефана в случае медленных фазовых переходов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Харьковского нац. ун-та, 2003, № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 26-31.
20. Евдокимов Д. В. Об одном интегральном представлении для уравнений Стокса в плоском случае / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 3-9.
21. Поляков Н. В. Матрицы фундаментальных решений для плоских нестационарных уравнений Стокса / Н. В. Поляков, Н. Г. Зинченко, Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: Изд-во ДНУ, 2005. – С. 3-11.

22. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 7 – 25.
23. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 2. Нелинейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 25 – 42.
24. Бевза Э. К. Математическая модель медленного фазового перехода на поверхности пузырьков и капель / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко, Т. Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 157-166.
25. Евдокимов Д. В. Расчет стационарных температурных полей в областях с малыми возмущениями границы / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Т. И. Тарасова // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 167-176.
26. Бевза Э. К. Об одном адаптивном алгоритме метода граничных элементов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 27-32.
27. Евдокимов Д. В. Математическое моделирование гидродинамических эффектов медленных фазовых переходов / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 114-119.
28. Евдокимов Д. В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, № 8, серія “Моделювання”, Випуск 1, 2009. с. 5 – 17.
29. Дидинская Е. О. Гомотетичный рост ансамбля пузырей (капель) / Е. О. Дидинская, А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 153-158.
30. Дидинская Е. О. Об одной модельной задаче теории кипения / Е. О. Дидинская, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Д. Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 159-164.

31. Дидинский А. В. Асимптотический анализ системы уравнений Онзагера / А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. – ДНУ, 2010. – Вып. 2. – №8. – С. 36-44.
32. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to calculation of fluid flow and heat and mass transfer in microgravity / D. V. Yevdokymov // Symposium on Advanced Math. and Comput. Aspects of BEM, Cracow, Poland, May 30 - June 3, 1999. – P. 92-93.
33. Polyakov M. V. Boundary element method application to the steady-state three-phase system calculation / M. V. Polyakov, D. V. Yevdokymov // IABEM2000, Symposium of the International Association for BEM, Brescia, Italy, July 4-7, 2000. – p. 189-191.
34. Yevdokymov D. V. Boundary element method accuracy investigation by numerical experiment / D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2000, Gottingen, Germany. – p. 166-167.
35. Bevza E. K. Effect of Density Jump during Slow Phase Transition / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2004, Dresden 2004. – p. 173.
36. Bevza E. K. Hydrodynamic Effect of Slow Phase Transitions in Microgravity / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM 2004, Warsaw 2004. – p. 38.
37. Yevdokymov D. Potential Theory Application to Onsager's Equation System. / D. Yevdokymov // Book of Abstracts. 77th Annual Meeting of the GAMM. March 27th - 31th, 2006, Technische Universitet Berlin. – p. 491.
38. Yevdokymov D. Boundary element method with collocation points inside the solution domain / D. Yevdokymov // IABEM 2014, Zhengzhou, China, August 13-15, 2014. Book of Abstracts. – p. 173-174.
39. Бабич А. П. Лабораторний практикум із курсу «Методи дослідження процесів тепломасообміну» / А. П. Бабич, Д. В. Євдокимов, О. В. Хамініч // Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2012. – 64 с.

ANNOTATION

Yevdokymov D. V. Mathematical Models and Numerical Methods of Potential Theory for Hydrodynamic and Heat and Mass Transfer Problems under Small Reynolds Number. – Qualification scientific work with the manuscript copyright. The dissertation for the degree of Candidate of technical sciences, specialty 01.02.05 "Mechanics of a liquid, gas and plasma". – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

The dissertation is devoted to creation of new and improvement of existing mathematical models of viscous fluid flows under small Reynolds numbers and heat and mass transfer processes in such flows, and also to development of computational schemes of improved accuracy and effectiveness for solution of a lot of technical problems, which have appeared last years in many fields of modern science and technics, in particular, in microhydrodynamics, microbiology, medicine, microelectronics, space explorations, hydrometeorology, thermal and nuclear electrical power generation, ecology and so on. The traditional and well-grounded mathematical models from the correspondent particular fields, methods of asymptotic analysis and approaches of potential theory are used for construction of new mathematical models of physical and technical processes and natural phenomena from above presented list of fields. Algorithms of computational potential theory, first of all, boundary element method were used as a base of computational approaches to numerical solution of the boundary-value problems, which are formulated according to known and proposed mathematical models of the considered natural and technological processes and phenomena.

G. Stokes made a construction of the first asymptotic mathematical models of viscous fluid flow under small Reynolds number practically simultaneously with development of the general mathematical model that is Navier-Stokes equations. However, the obtained mathematical model had a lot of faults. The most widely known from them were paradoxes of Whitehead and Stokes, they prevented an effective application of Stokes model to some external hydrodynamics problems in infinite domains. In the same time, Stokes model gave an opportunity to build several useful analytical solutions of external fluid flow problems under small Reynolds number. A fast development of microhydrodynamics and hydrodynamics in microgravity conditions during the last quarter of the last century made extremely actual the flows under small Reynolds numbers

and heat and mass transfer processes in such flows in the case of restricted domains where the paradoxes of Whitehead and Stokes do not take place. Specific problems of the considered field are calculations of multiphase Stokes flows with intensive heat and mass transfer taking into account effects of flotation and sedimentation in the weak field of body forces, thermophoresis and diffusiophoresis, Soret effect, Dufour effect and coupled diffusion, weak free convection, slow phase transitions with hydrodynamic effects of phase transitions (Stefan flows), hydrodynamic interaction phenomena etc. A modern requirement of increasing of computer calculation accuracy makes to use the generalized asymptotic mathematical models and to improve the methods of numerical solution for wide classes of parabolic and elliptic boundary-value problems, including boundary element method. Correspondent literature reviews and “state-of-art” analysis with the presented conclusions became the consideration subject of the first section of the dissertation work.

Computational potential theory methods, firstly including boundary element method, became a subject of analysis in the second section of the work, which is started from the short historical review of classical potential theory and computational potential theory. “State-of-art” of the question is presented on the base of algorithm examples, which are realized in the program complex, developed with participation of the author. New regular algorithms of the boundary element method with collocation points situated inside the solution domain must be distinguished among new algorithms proposed by the author, because it gives an opportunity to formulate the considering problems as approximated second kind boundary integral equations and to make an integrating in the boundary element method along real (non-approximated) boundary, what sufficiently increases an accuracy of calculations without any increasing of required computer resources. Principally new “step-by-step” in time “explicit” algorithm of the boundary element method for the heat conduction equation is proposed on the base of the regular formulation. New direct regular discrete singularity method, which requires less computer time, than other computational potential theory algorithms, is proposed too. The combined discrete singularity and boundary element method is proposed for Lagrangian calculations of multiphase flows. New adaptive algorithm of the boundary element method is proposed; it based on desirable function series expansion with respect to a small parameter, which describes discretization scale.

All proposed and improved numerical methods and computational schemes are carefully tested using numerical experiments with the specially selected test problems, which have the known analytical solutions in quadrature. Accuracy and effectiveness of the proposed algorithms are analyzed by specially developed techniques. The method of artificial disturbances are applied for investigations of complex computational scheme cases. The test calculations confirm high accuracy and good effectiveness of the proposed computational approaches especially for solution domains of complex geometrical shapes for linear elliptic and parabolic boundary-value problems.

Microhydrodynamic problems and other engineering and technical problems for Stokes flows are considered in the third section of the work. Stationary or non-stationary Stokes equation system and its generalization is used as a base of the approach, in particular, Stokes flow in a field of small body forces, Stokes flow under non-asymptotically small Reynolds number, which is less, than 1, multiphase Stokes flow. Alternative formulations of the Stokes equation system, in particular, in dependent variables stream function – vorticity, velocity – vorticity, velocity – pressure, stream function (plane case), are considered. Matrix of fundamental solutions is, for the first time, constructed and correspondent boundary integral equation system is, for the first time, obtained for every from the mentioned cases. Classical asymptotic Whitehead expansion with respect to Reynolds number is applied in the case of non-asymptotically small Reynolds number in restricted domains. An expansion with respect to Stokes number is, for the first time, applied to obtain of an asymptotic mathematical model in the case of non-stationary Stokes flow under small Stokes numbers. The obtained asymptotic mathematical models sufficiently simplify a following application of the boundary element method for numerical calculations.

The new proposed algorithms of computational potential theory give an opportunity to solve numerically the hydrodynamic interaction problems in Stokes flows for bodies of arbitrary geometrical shapes taking into account rotations of the objects, what were impossible at previous stage of the computer modelling of Stokes flows. Multiphase Stokes flows are considered in Lagrangian approximation taking into account a hydrodynamic interaction. M. Smoluchowski method is applied for calculation of interactions between disperse phase objects on relatively large distances, the generalized M. Smoluchowski method, proposed by the author, is used for intermediate distances and direct boundary element method is applied for hydrodynamic interaction calculations on

relatively small distances. The proposed new Lagrangian approaches with using of potential theory methods for calculations of multiphase flows of complex internal structure media can be applied for technological process analysis in chemical industry, mining and concentration of mineral resources, and in hydrometeorological and ecological investigations. Taking into account of heat and mass transfer in Lagrangian approach is principally new in such computational schemes.

An application of the developed asymptotic and computational to the problems of heat and mass transfer theory is subject of consideration in the fourth section. The small parameter method with Stefan number less than 1 as a small parameter is used for construction of asymptotic mathematical model of slow phase transitions, what gives an opportunity to make high accurate boundary element calculations in “slow” time. Calculations of slow phase transitions in the domains of complex geometrical shapes are made for illustration of the proposed approach efficiency. It is managed to show, that the Stefan flows of slow phase transitions are Stokes flow for most of cases. The cases of so-called homothetic phase transitions, when a body changes its size due to phase transition, but it saves its geometrical shape, are considered separately. Slow phase transitions on the surface of bubbles or drops, which saves its spherical shape due to action of surface tension force, can be considered as examples of homothetic phase transitions. The developed in the present work asymptotic method together with boundary element method is applied for calculations of such phase transitions. Onsager’s equation system is considered as a model of diffusive heat and mass transfer for multicomponent media. Matrices of fundamental solutions are constructed for this system, boundary integral and asymptotic analogs for this system are obtained and boundary element method is applied for its numerical solution. The obtained solutions of initial-boundary-value problems for Onsager’s equation system shows properties, which is non-specific for other solution of parabolic initial-boundary-value problems.

Flows of viscous fluids and heat and mass transfer processes in microgravity conditions are considered in the fifth section of the work. Fluid motion and heat and mass transfer processes in the microgravity conditions, under additional condition that the forced convection is absent, are caused by heat conduction and diffusion phenomena, and also weak free convection effect, Marangoni convection, thermo-capillary and concentration-capillary convection, Stefan flows under phase transitions, Soret and Dufour effects, phenomena of flotation and sedimentation in small body force field,

thermophoresis and diffusiophoresis, hydrodynamic interaction effect must be added for the case of multiphase liquid media. The listed effects and phenomena can have sufficiently different geometrical, temporal and physical reference scales; however, it is shown in the work, that asymptotic analysis on the base of Whitehead expansion, expansions with respect to Stefan and Stokes numbers give an opportunity to seriously simplify the mathematical model and to effectively apply to it the potential theory methods and the Lagrangian approaches. New asymptotic mathematical model of weak free convection is proposed in the work; fundamental solution matrix is constructed and integral representation is obtained for this model; Lagrangian algorithms for calculations of multiphase media in microgravity conditions are developed in the work for the first time. The problem about heat and mass transfer processes in fuel tank of space vehicle during long-time inertial flight, which is principally important for following development of space-missile equipment, is considered in the work on the base of the developed here new mathematical models and the new proposed here high effective computational methods. The last problem attracts great practical interests in connection with the announced flight to Mars.

The mentioned above asymptotic mathematical models of flows under small Reynolds numbers, that proposed by the author, and computational potential theory algorithms that proposed by the author too, are new and correspond to world level of investigations in relevant field. The obtained results as mathematical models and computational algorithms can be applied as theoretical bases for creation of computational tools for development of new or improvement of existing technical systems, industrial and transport technologies, which are used in microhydromechanics, space explorations and space-missile technologies, in microbiology and medicine, microelectronics and so on.

Key words: Stokes flow, Whitehead paradox, Whitehead asymptotic expansion, Stokes paradox, boundary element method, slow phase transitions, multiphase Stokes flow, Stefan flow, flotation, sedimentation, thermophoresis, Onsager's equation system, fuel tank of space vehicle, long-time inertial flight.

ЗМІСТ

Вступ.....		19
1	Історія досліджень течій рідини при малих числах Рейнольдса та аналіз сучасного стану питання	55
1.1	Течії при малих числах Рейнольдса	55
1.2	Течії в'язкої рідини та задачі тепломасообміну в умовах мікрогравітації	71
2	Нові алгоритми обчислювальної теорії потенціалу	92
2.1	Обчислювальна теорія потенціалу: сучасний стан і перспективи використання у механіці суцільного середовища та ракетно-космічній техніці	92
2.2	Розробка прямих регулярних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу	119
2.3	Спільне застосування методу малого параметра і методу граничних елементів для чисельного розв'язку еліптичних задач з малими збуреннями	136
3	Задачі мікрогідродинаміки та течії Стокса	147
3.1	Розкладання Уайтхеда	147
3.2	Побудова матриць фундаментальних розв'язків для системи рівнянь Стокса	153
3.3	Метод М. Смолуховського та застосування його для чисельного моделювання руху мікрочастинок	156
3.4	Деякі узагальнення та вдосконалення методу М. Смолуховського	165
4	Асимптотичні Задачі теорії тепломасообміну	168
4.1	Стефанівські течії	168
4.2	Система рівнянь Онзагера	177
5	Течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації	188

5.1	Слабка вільна конвекція	188
	Висновки	193
	Перелік посилань.....	195
	ДОДАТОК 1	235
	ДОДАТОК 2	240
	ДОДАТОК 3	251
	ДОДАТОК 4	265
	ДОДАТОК 5	274
	ДОДАТОК 6	283
	ДОДАТОК 7	295

ВСТУП

Сучасний етап розвитку механіки рідини і теорії тепломасообміну характеризується, перш за все, значним прогресом методів кількісного аналізу відповідних явищ та процесів, досягнутому завдяки широкому використанню потужної обчислювальної техніки, а також методів математичного та чисельного моделювання. Така ситуація представляється проявом загальної тенденції зростання ролі кількісних представлень, характерної для всього сучасного природознавства і технічних наук та обумовленої не тільки внутрішньою логікою розвитку названих дисциплін, а й винятково важливим значенням, яке мають кількісні результати для різного роду прикладних наук. Переважаюча роль чисельних підходів у розвитку теоретичних кількісних методів сучасних природничих та технічних наук є очевидною і пояснюється тим, що для таких складних задач, що постійно виникають у зазначених дисциплінах і, в тому числі, в механіці суцільного середовища та теорії тепломасообміну, аналітичні методи розв'язання вважаються швидше потенційною теоретичною можливістю, а не реальним інструментом дослідження. Прогрес обчислювальної техніки за роки її існування є прикладом чи не найшвидшого розвитку галузі науки і техніки в історії людства. Успіхи, досягнуті в розвитку чисельних методів в останні десятиліття, були не настільки великі, як прогрес обчислювальної техніки, але теж вельми істотні. Разом же зазначені досягнення забезпечили феноменальне зростання можливостей чисельного моделювання, що настільки явно проявляється у теперішній час.

Аналізуючи історію розвитку даного напрямку науки та сучасні тенденції, які в ньому проявляються, можна зробити висновок про те, що початковий етап бурхливого, можна сказати, експоненціального зростання математичного і чисельного моделювання, як специфічної частини загальної галузі інформаційних технологій, закінчується. Це пов'язано, перш за все, з вичерпанням множини проблем, до яких традиційні універсальні підходи математичного і чисельного моделювання були легко та очевидно застосовні. У той же час накопичується множина задач, до яких традиційні методи

незастосовні або застосовні з великими труднощами. В результаті, загальна ситуація в даній області суттєво змінилася, що і зумовило завершення початкового етапу експоненціального зростання. У наш час якісні зміни знає як сфера застосування методів математичного і чисельного моделювання, так й сам інструментарій цих методів, оскільки зростання кількості проблем, до яких не застосовуються традиційні універсальні методи, ставить природне запитання: чи так універсальні «універсальні» методи, щоб виправдати свою назву? Іншими словами, сучасна ситуація в математичному і чисельному моделюванні настійно вимагає перегляду парадигми розвитку даної галузі. Мова не йде про відмову від традиційних підходів, а, скоріше, представляється доцільним більш точне їх позиціонування, поряд з розвитком альтернативних підходів та створенням спільних інтегруючих концепцій побудови математичних та чисельних моделей, що поєднують в собі переваги різних напрямків, котрі існують в даній області.

Треба зазначити, що останнім часом розглянута проблема отримала ще один, прикладний аспект, а саме – труднощі з засобами кількісного аналізу, безумовно, гальмують розвиток певних теоретичних дисциплін, до яких такий аналіз відноситься, але, як правило, це не утворює нездоланих перешкод щодо подальшого розвитку відповідного теоретичного напрямку, однак, якщо такий теоретичний напрямок пов'язаний з деяким класом інженерно-технічних задач, тобто з певним напрямком розвитку техніки та технологій, то для останнього напрямку труднощі розвитку виявляються вельми суттєвими, практично відкидаючи засоби розвитку з сучасного рівня на рівень докомп'ютерної епохи, блокуючі кількісну складову у процесах розробки та проектування нової техніки та технологій, змушуючи приймати неоптимальні, а часом й нераціональні технічні рішення. А це означає, що неналежний рівень математичного та комп'ютерного моделювання у певній області може призвести до принципових технічних проблем.

Пояснимо висловлену думку. Практично вся історія розвитку математичного і чисельного моделювання та, в першу чергу, обчислювальної гідромеханіки проходила під впливом двох пануючих та багато в чому

суперечливих тенденцій: ускладнення розглянутих задач та підвищення вимог до їх розв'язків. Тенденції ці сформувалися в результаті зростання потреб не тільки сучасних техніки та технологій, а й ряду природничих наук. Стимульоване цими тенденціями постійне збільшення складності і, відповідно, ресурсоемності розрахунків на практиці не завжди вдавалося компенсувати зростанням потужності та розвитком інших можливостей обчислювальної техніки. Зазначена диспропорція розвитку змушує розробляти нові, більш точні і ефективні обчислювальні алгоритми, які могли б хоча б частково задовольнити зростаючим вимогам практики. Мав місце і зворотний ефект: не тільки математичні моделі, що все ускладнюються, стимулювали появу нових і розвиток вже існуючих чисельних методів, але чисельні методи, що розвиваються, сприяли появі нових і вдосконаленню існуючих математичних моделей. Іншим фактором, що сприяє розвитку чисельних методів, була їх універсалізація – якщо на початковому етапі розвитку математичного і чисельного моделювання чисельний алгоритм зазвичай зв'язувався з певною задачею або класом задач, то зараз «чисельний алгоритм», як правило, розглядається в зв'язку з певним класом математичних моделей. Однак вплив зазначеного чинника не можна вважати однозначно позитивним, оскільки, з одного боку, універсальні алгоритми зручні у використанні, дозволяють створювати універсальне програмне забезпечення та не вимагають спеціальних розробок для розв'язання переважної більшості задач з предметної області, до якої належить це дослідження, але, з іншого боку, спеціалізовані алгоритми часто виявляються набагато точнішими та ефективнішими за універсальних для певних, досить вузьких класів задач. Таким чином, на сучасному етапі важко дати однозначно позитивну або негативну оцінку згаданих тенденцій розвитку чисельних методів – універсалізації та спеціалізації алгоритмів чисельного розрахунку. Незважаючи на переважання в даний час тенденції узагальнення і універсалізації, в подальшому автор даної роботи схильний вважати рівною мірою корисними обидві розглянуті тенденції – універсалізацію і спеціалізацію – як з практичної, так і з теоретичної точки зору. Більш того, оскільки в розвитку універсальних алгоритмів останнім часом досягнуто

значного прогресу, автор вважає за доцільне на даному етапі більш інтенсивно розвивати саме спеціалізовані підходи, увага до яких і, відповідно, успіхи в розвитку яких в останні роки були набагато скромніші.

Іншим, вже згаданим та, може бути, навіть більш вагомим аргументом на користь розвитку спеціальних математичних моделей і спеціалізованих чисельних методів в обчислювальній механіці суцільного середовища є наявність досить істотного числа вельми актуальних задач, до яких універсальні чисельні методи або взагалі не можуть бути застосовані, або застосовуються з такими обчислювальними труднощами, що забезпечення належної точності розв'язку з прийнятними витратами обчислювальних ресурсів видається проблематичним, а проведення розрахунків недоцільним. Перераховані труднощі не можна трактувати як вузьку локальну обчислювальну проблему. Сучасний стан обчислювальної механіки характеризується крайньою нерівномірністю розвитку різних напрямків. Така ситуація склалася історично в результаті стрибкоподібного розвитку чисельних методів. Історично першим розвивався метод скінченних різниць, і переважна більшість задач, для яких алгоритми цього методу були ефективні, розв'язані досить давно. Потім аналогічний прорив пройшов в методі скінченних елементів. В результаті, було створено велику кількість комплексів і пакетів прикладних програм, як комерційного, так і некомерційного призначення, заснованих на згаданих чисельних методах. Зазначене програмне забезпечення охоплює переважну більшість задач обчислювальної механіки, у тому числі й обчислювальної гідромеханіки, та обчислювальної теорії тепломасообміну, що виникають як у теоретичних, так і в інженерних розрахунках, та є досить надійним і ефективним. Магістральним напрямом розвитку традиційних універсальних чисельних методів є модифікація та вдосконалення існуючих алгоритмів, що разом зі стрімким зростанням потужності обчислювальної техніки дає можливість чисельно розв'язувати все більш складні задачі із зазначених класів, для яких традиційні чисельні методи ефективні. Однак в ході розвитку обчислювальної механіки накопичилася значна кількість задач, для яких традиційні чисельні методи неефективні. До подібних задач слід віднести,

наприклад, багатомасштабні явища (термін «багатомасштабний» є прямим перекладом англійського терміну «multiscale» і, мабуть, виявився не зовсім вдалим), задачі, що вимагають підвищеної точності розв'язку, задачі зі специфічними формами нелінійності, задачі з локалізованими ефектами. В результаті, в теорії багатомасштабних процесів (гідродинаміка багатофазних середовищ, механіка композитних матеріалів, фільтрація і теплообмін в пористих середовищах і т.д.) було запропоновано велику кількість різноманітних математичних моделей, як правило, заснованих на припущеннях, що сильно спрощують сутність проблеми, область застосування яких суттєво обмежена, а ефективність застосування залишає бажати набагато більшого. Оскільки обмеження, що накладаються наявністю в задачі двох істотно різних масштабів, є принциповими, надій на розробку удосконаленого сіткового алгоритму для прямого розрахунку таких явищ залишається мало. Відзначимо, що певні фізичні ефекти можуть бути локалізовані не тільки в околі деяких точок (як, наприклад, частинки дисперсної фази в багатофазному потоці або геометрично малі віхреутворення), але і на поверхнях (як, наприклад, фазові переходи, вільні межі та межі рідин, що не змішуються, в потоці). Хоча для останнього класу задач в рамках традиційних, універсальних чисельних методів розроблено досить велику кількість алгоритмів, з обчислювальної точки зору стан проблеми ефективності та якості розрахунку для задач розглянутого класу ще досить далекий від бажаного, причиною чого є як рухливість (невідомість) межі, що, як правило, представляє собою специфічну форму нелінійності, так й пов'язані з поверхнями локалізації численні нелінійні фізичні ефекти, а, найчастіше, і нестійкості.

У нестационарних задачах зустрічаються істотні відмінності у часових масштабах ефектів, які опинилися частинами одного фізичного явища. Йдеться про так звані повільні та швидкі процеси. На жаль, методи покрокового інтегрування за часом, що застосовуються в традиційних, універсальних чисельних методах, виявляються малоефективними для розглянутого класу задач. Крім згаданих багатомасштабних явищ погано піддаються розрахунку сітковими методами задачі з фізичними

особливостями розв'язків, наприклад, особливостями розв'язку в кутових точках. В решті решт, можлива ситуація, коли у формулювання математичної моделі входять фізичні ефекти різного порядку, однак малими ефектами неможливо знехтувати з тих чи інших причин. У цьому випадку при застосуванні обчислювальних підходів, які ґрунтуються на дискретизації області розв'язку, апроксимація більших за величиною членів має бути такою, щоб її похибка була суттєво меншою за малі члени, щоб не завдати небажаного впливу на їх обчислення. А це вимагає відповідного додаткового іноді вельми суттєвого подріблення розрахункової сітки, що може радикально погіршити ефективність розрахунку.

Хоча перелічені задачі складають лише невелику частину обчислювальної механіки, те, що вони залишаються нерозв'язаними належним чином протягом довгого часу, створює труднощі у розвитку відповідних розділів даної дисципліни в цілому. Таким чином, в сучасній обчислювальній механіці склалася істотна нерівномірність розвитку різних напрямків. А це відбивається на якості технічних систем та виробничих технологій, які розробляються та проектується на основі тих напрямків, що відстають.

Сучасний чисельний аналіз, у відповідності до специфіки застосованого обчислювального інструментарію, умовно поділяють на два основні класи чисельних методів і алгоритмів: традиційні або основні, до яких відносяться методи скінченних елементів й скінченних різниць, (назву цей клас методів заслужив завдяки тому, що не менше 90% розрахунків проводяться за допомогою саме цих алгоритмів, а в минулому ця частка була ще більше), і альтернативні – цей клас об'єднує велику і виключно різномірну групу методів і алгоритмів, котрі настільки відрізняються один від одного, що неможливо знайти для них загальної ознаки; з позицій обчислювальної гідромеханіки серед альтернативних методів найбільший інтерес представляють дві тісно пов'язані між собою групи методів і алгоритмів – методи обчислювальної теорії потенціалу (метод граничних елементів, панельний метод, метод джерел, метод функцій Гріна, метод фундаментальних розв'язків, метод дискретних вихорів, метод дискретних

особливостей та багато інших, близьких до них ідейно методів) та лагранжеві методи обчислювальної гідромеханіки (метод частинок, метод великих частинок, метод гладких частинок, метод частинок у комірці, Lattice Boltzmann Method, метод дискретних вихорів, метод дискретних особливостей, метод контурної динаміки), збіги назв алгоритмів в списках підтверджують зв'язки між зазначеними двома напрямками альтернативних чисельних методів. Таким чином, при виборі розрахункового інструментарію для розв'язання інженерних задач гідромеханіки, а саме їм присвячена дана робота, вибір зводиться до методів скінченних різниць, скінченних елементів, лагранжевих методів та методів обчислювальної теорії потенціалу, де під кожним з цих методів мається на увазі велика група алгоритмів, які вельми різняться за структурою, специфікою, цілями і задачами застосування; а вибір одного із зазначених методів безумовно означає, що в подальшому він буде конкретизований у процесі вибору конкретного розрахункового алгоритму, при цьому, як правило, вибір конкретного алгоритму являє собою ніяк не меншу проблему, ніж вибір методу. Як відомо, метод скінченних різниць та всі його модифікації засновані на заміні актуальної області розв'язання скінченною множиною точок, котра називається скінченнорізницевою сіткою, на який за деякими правилами, що визначаються конкретним алгоритмом, апроксимується крайова задача, тобто, диференційний оператор, початкові та крайові умови та інші співвідношення, що входять до постановки задачі; метод скінченних елементів, навпаки, передбачає апроксимацію області розв'язання множиною геометричних фігур наперед заданої форми, які називаються скінченними елементами, та апроксимацію шуканої розв'язку за допомогою деяких заданих функцій, обраних з міркувань точності і ефективності чисельного розв'язання. Загальну схему методів обчислювальної теорії потенціалу і лагранжевих методів важко визначити так однозначно. Наприклад, в основі методів обчислювальної теорії потенціалу лежить перехід від первісної крайової задачі для диференціального рівняння у частинних похідних до граничних інтегральних рівнянь, а потім, в залежності від того, який алгоритм обрано і яке рівняння отримано, дискретизації належить або тільки

межа області розв'язання, або межа і сама область, а апроксимація шуканого розв'язку, як правило, проводиться, дотримуючись методу скінченних елементів. Нарешті, лагранжеві алгоритми припускають введення деяких рухливих примітивів, наприклад, дискретних вихорів або інших дискретних особливостей, частинок зі специфічними властивостями, переміщення яких описує процес руху рідини, а разом з ним і інші процеси в рухомій рідині, що представляють інтерес для дослідження, котре проводиться. Як зазначалося вище, в обчислювальній гідромеханіці методи теорії потенціалу та лагранжеві методи дуже близькі, що може бути продемонстровано на наступному прикладі: в разі розгляду стаціонарної задачі ряд лагранжевих методів, в тому числі метод дискретних вихорів, метод дискретних особливостей, метод контурної динаміки вироджуються в алгоритми обчислювальної теорії потенціалу. Порівняння алгоритмів, що відносяться до різних чисельних методів, являє собою досить невдячне заняття, оскільки історично розвиток кожного методу мав свою абсолютно унікальну логіку, переслідував специфічні цілі і був орієнтований на певні класи задач. В даний час значна частина отриманих раніше теоретичних оцінок властивостей обчислювальних алгоритмів, з точки зору практичного їх застосування, представляється неприпустимо грубою. Більш того, на початкових етапах розвитку математичного та чисельного моделювання рівень обчислювальної техніки дозволяв мати справу тільки з найпростішими задачами, а перехід навіть до відносно простих зв'язаних задач на практиці зайняв більше 20 років, зараз же складність розглянутих задач зросла багаторазово, в деяких областях на порядок або два порядки; в одній задачі можуть взаємодіяти обчислювальні процеси абсолютно різні за логікою, структурою, організацією та властивостям, що відображають настільки ж різні математичні моделі. У такому випадку нерідко виявляється, що похибка одного обчислювального процесу служить збуренням для іншого, і навпаки, чого практично не було на початковому класичному етапі розвитку чисельного аналізу. Ймовірно, тут недоречно визначати поняття складності системи, тому залишимо це питання фахівцям в теорії систем. Для досягнення цілей цієї роботи цілком достатньо визначити складність в

обмеженому обчислювальному сенсі, вважаючи, що складна обчислювальна система може включати в себе одночасно математичні моделі процесів і явищ, що мають різні геометричні, часові та фізичні масштаби (в зарубіжній науковій літературі такі задачі об'єднані терміном *multiscale*), нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, які відносяться до різних типів, так і не підпадають під загальноприйнятну класифікацію, (в зарубіжній науковій літературі такі задачі об'єднані терміном *multiphysic*), задачі Коші і крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, лінійні і нелінійні інтегральні рівняння Фредгольма, Вольтерра, Урисона і Хаммерштейна, а також інтегральні рівняння теорії потенціалу, алгебраїчні, функціональні і операторні рівняння, інверсні, обернені та оптимізаційні задачі. Ситуація може ускладнюватися наявністю в зазначених задачах сингулярностей в параметрах і розв'язках, різного роду біфуркацій та аттракторів, виродженням параметрів або задач у цілому. Зрозуміло, що теоретичні підходи до методів чисельного моделювання в подібних випадках безсилі. Тобто, вже досить давно, з 70-их або першої половини 80-их років минулого століття гостро стоїть проблема вибору ефективної методики дослідження чисельного алгоритму. Сформована ситуація ускладнювалася ще й методологічною проблемою визначення точності чисельного розрахунку. На початкових етапах розвитку чисельного моделювання для оцінки точності чисельного розрахунку його результати порівнювалися з аналогічними результатами фізичного експерименту. Однак з часом похибка чисельного розрахунку зрівнялася з похибкою кваліфіковано проведеного фізичного експерименту. Для більшості напрямків чисельного аналізу це сталося в 70-ті або 80-ті роки минулого століття, а потім завдяки стрімкому прогресу обчислювальної техніки точність чисельного розрахунку зростала випереджаючими темпами і вже в 90-ті роки все того ж минулого століття практично повсюдно значно перевершувала точність фізичного експерименту, незважаючи на явний прогрес останнього. Для теперішнього часу характерно, що величини похибки чисельних розрахунків на кілька порядків менше, ніж відповідні значення похибки лабораторних і натурних експериментів, а, тим більше,

натурних спостережень. Це означає, що фізичний експеримент ніяк не може бути критерієм точності комп'ютерного експерименту, а, в кращому випадку, збіг результатів обох досліджень вказує на адекватність математичної моделі та відповідної розрахункової моделі. Рішення проблеми лежить в застосуванні до дослідження чисельних алгоритмів і розрахункових схем обчислювального експерименту на спеціально підібраних тестових задачах, що мають аналітичні розв'язки в квадратурах. На жаль, такий підхід до аналізу похибки зустрів явно виражене неприйняття з боку фахівців з обчислювальної математики, що займалися теоретичним дослідженням властивостей розрахункових схем. Суть їх заперечень зводилася до того, що результати подібного тестування залежать від програмного забезпечення, за допомогою якого тестування виконується, тобто, якщо десь в програмі переплутані плюс і мінус, то результати розрахунку будуть обов'язково неадекватні, але в той же час, якщо плюс і мінус переплутані в десятому або двадцятому члені ряду, то загальні результати розрахунку виявляться досить близькими до правильних, а помилка, викликана зазначеною плутаниною, буде прийнята за похибку алгоритму. Є й більш серйозні заперечення проти того, щоб пов'язувати аналіз точності алгоритму з конкретним програмним забезпеченням. Вони стосуються так званого стилю програмування: загальновідомо, що деякі невдалі програмні рішення можуть призвести до значного накопичення похибки обчислень, яка ніяк не залежить від помилки, що генерується самим алгоритмом. Таким чином, тестування на задачах з відомими аналітичними розв'язками може трактуватися як не більше ніж евристичні міркування на користь даного алгоритму, а аж ніяк не як строгий доказ його точності або неточності. Розуміючи і приймаючи істотність цих заперечень, хотілося б відзначити, що питання в даному випадку стоїть не про вибір між двома підходами до оцінки похибки чисельного алгоритму, один з яких не може бути належним чином обґрунтований, мова йде про єдиний підхід, оскільки на рівні сучасних вимог теоретичний підхід явно непрацездатний.

На глибоке переконання автора до задач, що погано піддаються розв'язанню традиційними, універсальними чисельними методами, слід

віднести і задачі, сформульовані в областях складної геометричної форми, для яких проблема побудови скінченнорізницевої або скінченноелементної сіток стає ключовою і важкою з практичної точки зору.

Нарешті, останньою та найбільш поширеною обставиною, що стимулює розвиток спеціалізованих підходів, є можливість використання їх як альтернативних методів для проведення розрахунків, призначених для порівняння з результатами аналогічних чисельних розрахунків, які були здійснені за допомогою інших методів, з метою аналізу достовірності останніх.

Як відмічалось вище, для чисельного розв'язання задач, які виявились непридатними для розрахунку традиційними чисельними методами, розвиваються так звані альтернативні методи, проте рівень розвитку альтернативних методів залишає бажати набагато більшого. Дана ситуація може бути пояснена цілим рядом причин. Зокрема, альтернативні методи специфічні та неуніверсальні, тобто, область застосування кожного з них суттєво обмежена. Крім того, комерційна зацікавленість у розвитку альтернативних методів набагато нижче, ніж для основних, оскільки коло задач які вони розв'язують досить мале та включає в себе переважно теоретичні, а не прикладні проблеми. Та, нарешті, як правило, альтернативні методи набагато складніші традиційних, менш алгоритмічні, ніж останні, і, отже, набагато складніші та важчі в програмній реалізації. Все вищесказане призвело до того, що альтернативні чисельні, чисельно-аналітичні й наближені методи на сьогоднішній день розроблені досить слабо і досліджені явно недостатньо.

Одним з найбільш значних і розвинених напрямків альтернативних методів обчислювальної механіки є чисельні методи теорії потенціалу (інша загальновідома назва: методи обчислювальної теорії потенціалу), зокрема, метод граничних елементів. Розвитку даного напрямку сприяло те, що воно ґрунтується на теорії потенціалу – класичному, добре розробленому і широко відомому розділі математичної фізики, а це виключило необхідність теоретичного обґрунтування ряду основних етапів побудови відповідних алгоритмів. Незважаючи на виняткову складність інтегральних представлень

теорії потенціалу, наявність численних проблем і обмежень, притаманних теорії потенціалу, алгоритмічні аспекти даного напрямку отримали значний розвиток. Хотілося б відзначити, що методи розглянутого класу вимагають істотного попереднього перетворення математичної моделі від крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних до граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу.

Історія створення і розвитку обчислювальної теорії досить заплутана і суперечлива. Але починаючи з деякого моменту і протягом досить тривалого часу обчислювальна теорія потенціалу і найбільш популярна її алгоритмічна реалізація – метод граничних елементів – розглядалися як універсальний чисельний підхід, альтернативний традиційним сітковим методам. Пізніше такий же погляд був поширений і на інші чисельні методи, об'єднані парадигмою безсіткових обчислень. Такий погляд на обчислювальну теорію потенціалу і метод граничних елементів зокрема зазвичай зв'язується з ім'ям К.А. Бреббія та його науковою школою. Слід зазначити, що розвиток методу граничних елементів у науковій школі К.А. Бреббія супроводжувався безпрецедентною в історії чисельних методів рекламною компанією, методи проведення якої представляються аж ніяк не безперечними. На глибоке переконання автора даної роботи, така точка зору є помилковою та багато в чому шкідливою, оскільки численні спроби поширити обчислювальну теорію потенціалу на класи задач, до яких вона не може бути ефективно застосована в силу об'єктивних причин, були трудомісткі та малорезультативні. Правильне позиціонування обчислювальної теорії потенціалу в сучасних обчислювальній гідромеханіці та теорії тепломасообміну являє собою одну з задач даної роботи.

Принциповим моментом, що лежить в основі всіх алгоритмів теорії потенціалу, є перетворення початкової крайової задачі, сформульованої для диференціальних рівнянь в частинних похідних, до специфічних інтегральних представлень, наприклад, граничних інтегральних рівнянь або більш складних інтегро-диференціальних співвідношень. Таким чином, при застосуванні методів теорії потенціалу мова йде про принципово інші математичні моделі, що володіють специфічними властивостями і суттєво

відрізняються за методами дослідження. Тому обчислювальну теорію потенціалу слід розглядати не просто як засіб чисельного аналізу, але як окремий напрямок в математичному і чисельному моделюванні полів різноманітної природи.

Для переходу від лінійного диференціального оператора до його інтегрального аналога необхідно знати фундаментальний розв'язок (функцію Гріна) для відповідних рівнянь, побудова якого являє собою досить складну проблему. Методи ж переходу до інтегральних представлень від нелінійних диференціальних операторів в частинних похідних на теперішній час практично не розроблені. Вже ці обставини істотно обмежують можливості обчислювальної теорії потенціалу та унеможливають використання її в якості універсального чисельного підходу. Іншим суттєвим недоліком обчислювальної теорії потенціалу є великі обчислювальні труднощі, що виникають при розв'язанні неоднорідних задач. Труднощі ці є прямим наслідком глобального характеру інтегральних операторів теорії потенціалу. Хоча методи локалізації забезпечили певний прогрес в цьому напрямі, до повного вирішення цієї проблеми ще дуже далеко.

Перераховані вище обставини, що підтверджують тезу про недоцільність розробки алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу як універсального підходу, призводять до постановки питання про класи задач, в яких зазначені обставини місця не мають та, відповідно, про ефективність застосування до них алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу. Слід визнати, що, навіть якщо зазначені обставини не мають місця, метод граничних елементів часто програє по ефективності традиційним чисельним методам. Наприклад, це має місце для лінійного рівняння теплопровідності в області канонічної геометричної форми, де метод скінченних різниць значно перевершує метод граничних елементів. Однак, з огляду на високу точність методу граничних елементів, він може виявитися корисною альтернативою навіть в тих випадках, коли він недостатньо ефективний.

Може бути і не радикальним, але таким, що забезпечує певний прогрес, виходом із ситуації з нерозв'язаними або неналежним чином розв'язаними задачами є спрощення математичних моделей у специфічних випадках, яке

неминуче спричинить й спрощення розрахунку. В історії математики та механіки добре відомо, що в асимптотичних випадках математичні моделі виявляються набагато простішими, ніж їх аналоги, що застосовуються в загальних випадках. Наприклад, ідея про використання асимптотичних математичних моделей для дослідження процесів на мікрорівні в багатомасштабних задачах абсолютно очевидна і загальновідома, більш того, вона дуже широко використовується в теоретичних і практичних розрахунках. В тематиці даної роботи, пов'язаної з течіями в'язкої рідини, також знайшли відображення асимптотичні математичні моделі гідромеханіки – течії Стокса і Озеєна, але аналогічних спроб для задач тепломасообміну навіть в явно асимптотичних випадках раніше зроблено не було. Проте, розвиток мікроелектроніки, мікробіології, дещо пізніше мікромеханіки та, нарешті, нанотехнологій стимулювали різке зростання інтересу до течій в мікромасштабах, оскільки в цих дисциплінах, на відміну від механіки гетерогенних середовищ, дослідження процесів у малих геометричних масштабах були вже не допоміжними елементами визначення властивостей середовища, а основною метою науково-дослідної роботи або, принаймні, найважливішою її складовою. Не вдаючись в подробиці перерахованих вище областей науки і техніки, відзначимо лише, що в них не можна виділити якусь окрему складову частину, пов'язану з процесами в суцільному середовищі в мікромасштабах, практично будь-який розділ розглянутих дисциплін заснований на асимптотичних випадках задач гідромеханіки і тепломасообміну. Слід визнати, що спроби побудувати загальні асимптотичні математичні моделі подібних класів гідродинамічних явищ, засновані на малості числа Рейнольдса, робилися неодноразово, проте через парадокс Уайтхеда побудова таких теорій не пішла далі загальновідомих наближень Стокса та Озеєна. Власне кажучи, Уайтхед був перший, хто спробував розвинути подібну теорію. Основним недоліком зазначених спроб було прагнення, перш за все, використовувати їх для розв'язання тривіальної задачі про обтікання тіла необмеженим, поступальним на нескінченності потоком. Зазнавши невдачі в побудові асимптотичного розкладання для цієї задачі в просторовому випадку, а в

плоскому випадку для неї не існує навіть нульового наближення, що впливає з парадоксу Стокса, Уайтхед відмовився від подальших спроб розробки такого підходу. Причиною розходження першого і наступних наближень в асимптотичному розкладанні по числу Рейнольдса, що досліджував Уайтхед, була необхідність інтегрування по нескінченному простору. У разі ж скінченної області парадокс Уайтхеда не має місця, на що вказав М. О. Сльозкін, як на потенційну можливість подолання даної проблеми. Особливістю розглянутих вище сучасних прикладних задач, які стимулювали значне число досліджень в даній області, в тому числі й дану роботу, є обмежені області течії. Тобто, для переважної більшості практично цікавих задач асимптотичні математичні моделі, в тому числі і в плоскому випадку, можуть будуватися без всяких обмежень. Остання обставина відкриває широкі можливості будувати асимптотику по числу Рейнольдса не тільки для відповідних задач гідродинаміки в обмежених областях, але й для різноманітних їх узагальнень, в першу чергу, задач тепломасообміну, в тому числі з фазовими переходами, задач про багатофазні течії і так далі.

Стимулами зазначеного вище прикладного інтересу до гідродинаміки і теплообміну при малих числах Рейнольдса з'явилися, з одного боку, розвиток традиційних і поява принципово нових технологій виробництва, а з іншого боку інтенсивні гідрометеорологічні та екологічні дослідження. Зупинимося на зазначених питаннях докладніше, оскільки вони важливі для визначення актуальності даної задачі. Слід зазначити, що обтікання частинок (бульбашок, крапель) другої фази в багатофазному середовищі неминуче відбувається при малих числах Рейнольдса внаслідок малих геометричних розмірів і малої відносної швидкості зазначених частинок. Дослідження фізико-хімічних процесів у навколишньому природному середовищі, особливо процесів циркуляції вологи в атмосфері, призводить до необхідності розгляду навколишнього середовища як багатофазних систем: крапель, сніжинок і порошинок в атмосфері або різних твердих частинок, газових і парових бульбашок у водному середовищі. Іншою, більш традиційною областю появи течій при малих числах Рейнольдса є численні промислові технології обробки дисперсних матеріалів, такі технології

широко поширені в хімічній промисловості, промисловості будівельних матеріалів, легкій та харчовій промисловості. Наведені вище приклади відповідають випадку зовнішнього обтікання об'єктів при малих числах Рейнольдса. Зовсім інша картина має місце в різних пристроях мікроелектроніки і мікромеханіки, які інтенсивно розвиваються у теперішній час. У таких пристроях переважно зустрічаються внутрішні течії при малих числах Рейнольдса, досвід математичного і чисельного дослідження яких дуже обмежений. Нарешті, дослідження і освоєння космічного простору привели до вивчення ще одного класу течій при малих числах Рейнольдса, які виникають внаслідок дії малих масових сил. Протягом довгого часу такими течіями нехтували, проте розвиток космічних технологій змусив розглядати їх як один з механізмів еволюції неоднорідностей в ємностях орбітальних комплексів та космічних апаратів, що містять рідини або гази, наприклад, в паливних баках космічних кораблів на орбіті. Наведені вище приклади ще раз переконливо демонструють актуальність обраної тематики дослідження.

Природним наслідком розширення класів задач, пов'язаних з течіями нестисливої рідини при малих числах Рейнольдса, і збільшення самого числа таких класів, що відзначалося вище, є необхідність розвитку методів розв'язання нових задач. Застосування теорії потенціалу до течій при малих числах Рейнольдса традиційно приносило обнадійливі результати. Природно очікувати, що і в випадках нових сформульованих задач методи теорії потенціалу виявляться досить ефективними. Ключовим моментом теорії потенціалу є побудова фундаментального розв'язку (функції Гріна), за допомогою якого будуються інтегральні співвідношення. Серед основних цілей даної роботи необхідно виділити побудову фундаментальних розв'язків для ряду диференціальних операторів, що описують течії нестисливої в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса.

З точки зору механіки рідини і газу предметом розгляду даної роботи є повільні течії в'язкої рідини, для яких відомі дві математичних моделі – течія Стокса та течія Озеена. Існують різні точки зору на співвідношення цих моделей. Хоча формально рівняння Стокса є окремим випадком рівнянь

Озеєна, як правило, їх розглядають окремо. Проте, питання це не вирішене остаточно. Як і будь-які асимптотичні моделі, рівняння Стокса та Озеєна мають як специфічні переваги, так і специфічні недоліки, наприклад, наближення Озеєна некоректно описує поле течії поблизу обтічного тіла, хоча і дає правильні інтегральні характеристики обтікання, а парадокс Стокса стверджує, що в моделі Стокса не існує поступального на нескінченності плоского обтікання. Всі зазначені переваги і недоліки також заслуговують на окремий розгляд. Хотілося б відзначити, що, незважаючи на інтенсивне використання асимптотичних моделей Стокса і Озеєна в гідродинаміці в'язкої рідини, аналогічні асимптотичні підходи в теорії тепломасообміну для випадків малих швидкостей рідини або малих визначальних параметрів практично відсутні. Така ситуація фізично може бути легко пояснена наявністю ефектів вільної конвекції, які в значній кількості випадків підсилюють нелінійність та не дають можливості провести лінеаризацію асимптотичними методами. Однак, в умовах мікрогравітації та в областях малих геометричних масштабів ефекти вільної конвекції досить малі, і це дає підстави вважати, що в цих випадках застосування асимптотичного аналізу буде більш правомірним і ефективним.

Течія Стокса тісно пов'язана з процесами руху об'єктів дисперсної фази у багатофазних течіях. Дійсно, не важко показати, що швидкість малої частинки (об'єкту дисперсної фази) дуже швидко наближається до швидкості рідини, що її оточує, внаслідок чого число Рейнольдса відносного руху становиться малим. Однак при застосуванні чисельних методів скінченних різниць та скінченних елементів незрозуміло, яким чином у масштабі скінченнорізницевого чи скінченних елементів забезпечити коректний розрахунок взаємодії утворень менших геометричних масштабів. З приведених міркувань можна зробити однозначний висновок, що згадані методи скінченних різниць та скінченних елементів можуть бути застосовані для розрахунку задач, що розглядаються, тільки у випадках, коли для масштабів комірок чи елементів можна провести коректне осереднення процесів, що протікають на мікрорівні та у проміжних масштабах, але це не завжди можливо, чи правомірно. В іншому випадку математичні моделі, що

застосовуються, мають бути доповнені певними емпіричними результатами чи додатковими міркуваннями, зробленими інженерними методами. Таким чином, застосування методів скінченних різниць та скінченних елементів до розрахунку багатомасштабних процесів у гетерогенних середовища має принципові недоліки, що не можуть бути усунені простою модифікацією зазначених методів, тобто необхідна розробка альтернативного чисельного підходу. У попередніх роботах автора дисертаційного дослідження, було висловлено думку, що на роль такого альтернативного підходу доцільно обрати методи обчислювальної теорії потенціалу, завдяки їх загальновідомим перевагам, про які буде ще сказано і далі у даній роботі. Але й алгоритми обчислювальної теорії потенціалу для ефективного застосування до розглянутих задач потребують суттєвої модернізації та вдосконалення.

Коротко зупинимось на перевагах методів обчислювальної теорії потенціалу, котрі вселили в автора впевненість у доцільності застосування цих підходів до задач, що розглядаються. Зазначимо, що повний перелік переваг методів обчислювальної теорії потенціалу та, в першу чергу, найпоширенішого з них методу граничних елементів, вже неодноразово наводився у попередніх наукових працях автора даної роботи, в яких ці переваги були всебічно проаналізовані, тому наводити тут цей повний перелік нема жодного сенсу. Зупинимось лише на найбільш вагомим перевагам зазначеного обчислювального підходу. По-перше, це адитивний характер методів обчислювальної теорії потенціалу, котрий полягає у представленні будь-якого розв'язку, отриманого таким шляхом, у вигляді суми інтегралів, а останні можуть бути визначені по області довільного геометричного розміру та за довільним проміжком часу. Це означає, що при розгляді багатомасштабної задачі величини, ефекти у областях різних геометричних масштабів за допомогою теорії потенціалу можуть бути просто механічно просумовані під знаками інтегралів, внаслідок чого до певного масштабу алгоритми методів обчислювальної теорії потенціалу просто «не відчують» багатомасштабності задачі. По-друге, методи обчислювальної теорії потенціалу мають високу точність обчислень, непритаманну альтернативним чисельним методам. Значення цієї переваги можна легко

проілюструвати на прикладі сильно перфорованого середовища, яке вочевидь моделює багатофазне середовище. Якщо похибка розрахунку поля, котре розшукується, та його похідних, які визначають взаємний вплив порожнин, для поодинокі порожнини у середовищі більша за обернену кількість порожнин, то обов'язково знайдеться порожнина, вплив якої на дану порожнину буде менший за похибку релевантного розрахунку, тобто цей вплив не є достовірним. Як результат, – подальше збільшення числа порожнин з метою більш точного моделювання процесів у багатофазному середовищі втрачає будь-який сенс. На відміну від методів скінченних різниць та скінченних елементів методи обчислювальної теорії потенціалу досягають цього негативного порогу значно пізніше. По-третє, методи обчислювальної теорії потенціалу тісно пов'язані та легко інтегруються у єдині обчислювальні схеми з лагранжевими методами обчислювальної гідромеханіки, що було усвідомлено ще в ранніх роботах О. Чоріна та С. М. Белоцерковського. Очевидно, що основні переваги лагранжових методів обчислювальної гідромеханіки повністю поширюються і на їх комбінації з методами обчислювальної теорії потенціалу. У решті решт, в-четвертих, методи обчислювальної теорії потенціалу легко комбінуються з асимптотичними методами, що було одним з основних предметів розгляду у декількох попередніх публікаціях автора. Застосування асимптотичних методів до постановки задач, що надалі підлягають розв'язанню методами обчислювальної теорії потенціалу, забезпечує другий альтернативний шлях використання методів обчислювальної теорії потенціалу для аналізу багатомасштабних задач.

Однією з головних ідей, що покладені автором в основу відповідної частини представленої роботи, є опис багатомасштабних процесів, котрі відбуваються у багатофазному середовищі за допомогою інтегральних представлень теорії потенціалу, з подальшим аналізом запропонованих математичних моделей за допомогою алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу та лагранжових методів. Ідея сумісного застосування методів теорії потенціалу та асимптотичних методів для отримання нових спрощених математичних моделей належить автору даної науково-дослідної роботи;

вона була висунута у його попередніх наукових працях та розвивається в останні роки як щодо узагальнення, так і щодо застосування цієї ідеї до вже відомих та принципово нових задач математичної фізики, механіки суцільного середовища, теорії тепломасообміну та інших технічних та фізичних дисциплін.

У порівнянні з альтернативними підходами, що існують на теперішній час, запропоновані розрахункові схеми відрізняє загальність постановки задач та розгляду процесів, що досліджуються. Особливо простим такий аналіз виявляється при малих числах Рейнольдса, коли цілком природно застосовувати модель течії Стокса та, відповідно, метод М. Смолуховського чи його узагальнення. У останньому випадку питання про гідродинамічну взаємодію взагалі гранично спрощується, оскільки для течії Стокса сила гідродинамічного опору, а з нею й сила взаємодії пропорційні швидкості об'єкту.

Свого часу М. Смолуховський докладав значних зусиль, щоб поширити підхід, згодом названий його ім'ям, на випадок гідродинамічної взаємодії у течії Стокса на порівняно невеликій відстані між об'єктами дисперсної фази. Однак у розпорядженні у М. Смолуховського були лише надто громіздкі та незручні аналітичні методи, котрі не забезпечували належним чином апарат гідродинамічного розрахунку. У теперішній час проблема взаємодії у течії Стокса на близьких відстанях може бути без особливих труднощів розв'язана чисельно за допомогою методу граничних елементів, що було покладено в основу узагальнень методу М. Смолуховського, зроблених автором представленої роботи. Це особливо важливо для роботи, про яку звітують, тому, що абсолютна більшість течій у масштабі об'єктів дисперсної фази представляють собою течії Стокса, а, наприклад, броунівський рух відносно великих частинок представляє собою рух зазначених частинок у стохастичному полі швидкості течії Стокса чи рух тих же самих частинок у течії Стокса під впливом стохастичних сил, що не складає принципової різниці. Автор даної роботи вважає за доцільне у наступному називати задачу про багатозфазну течію Стокса задачею М. Смолуховського.

Математичний та обчислювальний апарат, розроблений на основі узагальнень методу М. Смолуховського, може бути застосований до аналізу широких класів механічних, гідродинамічних та тепломасообмінних процесів, що протікають на мікрорівні, тобто у масштабі об'єктів дисперсної фази, у багатофазних середовищах. Зрозуміло, що такий підхід, з фізичної точки зору, представляється більш адекватним, гнучким та набагато точнішим за аналоги, що існували раніше.

Одним з найбільш поширених застосувань багатофазних середовищ у сучасних виробничих технологіях є численні процеси, у яких процеси обробки твердої фракції прискорюється за рахунок високої дисперсності останньої, котра забезпечує високе співвідношення, сумарної площі поверхні частинок дисперсної фази до сумарної маси цієї складової дисперсної фази. Тобто мова йде про процеси розчинення та кристалізації з розчину чи газової фази, хімічні реакції та різного роду фазові переходи, що зазнають сумарної інтенсифікації при збільшенні дисперсності за рахунок збільшення поверхні масообміну. Такі процеси мають визначальне значення для низки виробничих технологій у хімічній та металургійній промисловості, для видобутку та збагачення корисних копалин, у промисловості будівельних матеріалів та медико-біологічній промисловості. Більш того, аналогічні технічні рішення застосовуються у тепловій енергетиці, а аналогічні процеси відіграють визначальну у тепломасообміні у навколишніх середовищах та досліджуються у гідрометеорології та екології. Робота, що пропонується, ніяк не може претендувати на такий широкий охват прикладних задач та обмежується випадком руху суцільної фази у режимі течії Стокса, віднесеного до технологічних процесів видобутку та збагачення корисних копалин, а також технологій хімічних виробництв, що забезпечує такий постановці задачі достатню актуальність з точки зору застосування до інженерно-технічних проблем сучасної промисловості.

Серед пріоритетних напрямів розвитку сучасної науки та техніки дослідження та засвоєння космічного простору являє собою вельми специфічну галузь науково-технічної діяльності, оскільки, з одного боку, такі дослідження втілюють в життя стародавню мрію Людства про шлях до зірок,

що, безумовно, має незаперечне філософське, соціальне та загальнонаукове значення, а, з іншого боку, космічні технології та системи дають змогу забезпечити технологічні та технічні рішення, повністю неможливі у звичайних наземних умовах. Це стосується не тільки процесів в умовах мікрогравітації, але й технологій супутникового зв'язку, спостереження Землі з космосу, досліджень Сонячної системи та Всесвіту. Жодна з областей сучасної науки в такий мірі не залежить від апаратного забезпечення (ракетно-космічної техніки у даному випадку), як дослідження та використання космічного простору. Потенційні, а тим більш актуально реалізовані, можливості традиційних принципів та конструктивно-комповочних схем, більшість з яких були відомі ще К. Е. Цюлковському, вже значною мірою вичерпано. Принципово нові інженерні рішення – орбітальний літак, космічний ліфт та таке інше – ще дуже далекі від втілення в життя. Єдиним суттєвим досягненням у галузі технологій виробництва та застосування ракет-носіїв за останні десятиліття стала реалізація принципу багаторазового використання перших ступенів ракет у важких ракетах-носіях Фалькон, виробництва компанії Ілона Маска. Але, незважаючи на суттєве здешевлення одиничного старту за допомогою такого носія, принципово технологія старту не змінилася.

Однак на теперішній час більшість космічних держав (Сполученні Штати Америки, Європейський Союз, Росія, Китай, Індія) мають амбітні проекти щодо створення великих орбітальних лабораторій, дослідження Місяця та Марса за допомогою одноразових експедицій та постійно діючих станцій, а Ілон Маск навіть пропонує колонізацію Марса, дослідження віддалених частин Сонячної системи та Далекого космосу. Звичайно, наявність глобальних та національних проблем, економічні кризи, що трапляються з прикрою регулярністю, сумніви щодо космічних досліджень, що регулярно вносяться до громадської думки політиками, журналістами, громадськими діячами та іншими неадекватними особами, однозначно ускладнюють втілення в життя національних та міждержавних космічних програм. Тим не менш, дослідження космосу, подальше використання космічного простору в інтересах всього Людства, окремих держав чи їх

об'єднань, суб'єктів підприємницької діяльності чи певних груп громадян представляється невідворотним. Щодо ракетно-космічної техніки, то для неї теж є актуальні проблеми, стан дослідження яких залишає бажати набагато більшого. В першу чергу, до таких проблем слід віднести проблему запуску ракетного двигуна на рідинному паливі у орбітальному польоті, тобто в умовах мікрогравітації чи ефективної невагомості. У таких умовах компонент ракетного палива, що знаходиться у частково заповненому баку, розповсюджується по баку у вигляді однієї чи декількох областей незвичних геометричних форм, які важко визначити теоретично. Внаслідок цього може бути переміщений центр мас системи. Внаслідок зміщення центра мас ракети при включенні двигуна вона може отримати небажаний обертальний рух, оскільки повний вектор тяги буде мати момент відносно зміщеного центру мас. А при наявності нерозрахованого обертального руху загальний рух системи буде далеким від заданого, та мати випадкові характеристики. Незважаючи на вельми численні експериментальні та теоретичні дослідження, на даний момент проблема поведінки великих мас палива у паливних баках при запуску двигуна в умовах невагомості досі належним чином не розв'язана. В цілому слід відмітити, що проблема запуску ракетного двигуна у орбітальному польоті в умовах мікрогравітації на даний момент не тільки не розв'язана, а й не має необхідної кількості належним чином проведених досліджень фізичних процесів у паливному баку в умовах мікрогравітації. Ймовірно, така ситуація склалася внаслідок двох чинників: по-перше, проблему забезпечення надійного постачання палива під час запуску ракетного двигуна в умовах мікрогравітації тривалий час намагалися вирішити шляхом розробки різноманітних технічних систем та пристроїв, (всі такі системи значно збільшували польотну масу та були недостатньо ефективними); по-друге, поведінка рідини в умовах мікрогравітації суттєво, іноді кардинально відрізняється від відповідної поведінки тієї ж самої рідини в умовах звичайної гравітації, внаслідок чого до самого останнього часу не було розроблено досить універсальних та добре обґрунтованих математичних моделей та методів розрахунку поведінки рідини у паливних баках в умовах мікрогравітації, наприклад, під час довготривалого інерційного польоту, та

при запуску ракетного двигуна, внаслідок чого замість комп'ютерного обчислювального експерименту розв'язання розглянутої проблеми вимагало проведення польотного експерименту, який зазвичай був неприпустимо коштовний. Хотілося б ще раз підкреслити суперечливість ситуації, що склалася, – сучасна космічна наука з фінансових причин неспроможна провести необхідну серію польотних досліджень процесів всередині паливних баків ракет-носіїв на рідинному паливі, хоча при розробці ракет-носіїв певний час назад кількість таких польотних досліджень була просто вражаючою. Очевидним висновком з приведених міркувань є неможливість продовжувати розвиток космонавтики традиційними шляхами винаходу пристроїв з подальшим їх випробуванням у польотному експерименті, а також проведення польотних та орбітальних експериментів для відпрацювання та вдосконалення окремих пристроїв та систем ракетно-космічної техніки. При обмеженості можливостей експериментального дослідження процесів, що розглядаються, однозначним пріоритетним шляхом дослідження представляється проведення математичного моделювання та обчислювального експерименту з метою вивчення зазначеного процесу. Питання: чи готові сучасні математичні моделі та чисельні алгоритми до такого дослідження, що є одним з головних у даній роботі. Дещо забігаючи наперед, відмітимо, що вихід на повномасштабне комп'ютерне дослідження технічних, технологічних та наукових аспектів створення, використання та розвитку ракетно-космічної техніки потребує докорінного переосмислення методів сучасного математичного та чисельного моделювання.

Тут треба відзначити, що дослідження процесів в умовах мікрогравітації вже протягом тривалого часу проводяться, як експериментальним, так й теоретичним шляхами. Для експериментальних досліджень використовуються вежі та шахти мікрогравітації, літаки у вільному параболічному польоті, ракети, що летять по балістичній траєкторії, та, звичайно, орбітальні науково-дослідні комплекси. Певні гідродинамічні та теплові ефекти, що мають суттєве значення в умовах мікрогравітації, можна з успіхом дослідити у наземних умовах, організуючи експеримент так, щоб

гравітація не впливала на його результат. Детальний аналіз процесів в умовах мікрогравітації вочевидь показує, що фізико-хімічні та механічні процеси у рідинах та газах у розглянутих умовах настільки відрізняються від своїх аналогів у наземних умовах, що не доводиться дивуватися труднощам їх аналізу. Як добре відомо, гравітаційна складова являється визначальною у вільній конвекції, а щодо вимушеної конвекції, то для неї вплив гравітації може й не бути скільки-небудь визначальним, що має місце у переважній більшості випадків наземних течій. В умовах орбітального польоту важко очікувати появу вимушеної конвекції, а вільна конвекція буде малою через визначення, оскільки її інтенсивність є прямо пропорційною величині прискорення вільного падіння, котра в умовах мікрогравітації мала за визначенням. В випадках, коли інерційні та інші масові сили реально малі, реалізується так звана слабка вільна конвекція. Тобто конвективні члени, які входять у рівняння переносу (рівняння Нав'є-Стокса, енергії та переносу маси), виявляються малими за рахунок малої швидкості течії. Більш того, мала швидкість течії дуже часто означає малу величину числа Рейнольдса та пов'язаного з ним числа Пекле. Остання обставина дозволяє перейти від загальних рівнянь гідродинаміки та теорії тепломасообміну до їх асимптотичних аналогів, наприклад, течії Стокса. Такий перехід значно спрощує математичні моделі процесів, які розглядаються, але, з іншого боку, малі конвективні члени (у порівнянні з дифузійними) змушують враховувати деякі малі за фізичною величиною ефекти, якими у звичайних наземних умовах прийнято нехтувати. До останніх ефектів слід віднести, у першу чергу, вплив поверхневого натягу та пов'язану з ним конвекцію Марангоні, які практично не притаманні аналогічним процесам у наземних умовах. У той же час ефекти седиментації та флоатації в умовах мікрогравітації також малі, як відносно, так і абсолютно, внаслідок чого в умовах мікрогравітації слабка гравітаційна сепарація багатофазних середовищ. Це означає, що, одного разу виникнув, в умовах мікрогравітації багатофазне середовище буде існувати протягом дуже тривалого часу, який для деяких випадків може вважатися фактично нескінченним. Така ситуація призводить до виникнення специфічної групи незворотних процесів тепломасообміну в умовах

мікрогравітації. Іншим специфічним моментом, притаманним виключно умовам мікрогравітації, представляється величезна роль поверхневих ефектів при наявності вільних поверхонь у об'ємі, котрий містить рідину; такі течії отримали узагальнюючу назву конвекції Марангоні чи термо-капілярної та концентраційно-капілярної конвекції. В решті решт, слід зазначити, що при практичній відсутності вимушеної конвекції та малому фізичному масштабі вільної конвекції, тобто при малій швидкості руху рідини чи газу, процеси тепломасообміну визначаються зовсім іншими механізмами, найбільш цікаві та незвичайні з яких термодифузія, пов'язана дифузія, а для багатозфазних середовищ термофорез та дифузіофорез. Перші з названих ефектів вимушують замість рівнянь переносу енергії та маси, які узагальнюють рівняння теплопровідності та дифузії у звичайному тепломасообміні, використовувати інше узагальнення тих же крайових задач для рівнянь теплопровідності та дифузії, відоме у термодинаміці незворотних процесів як крайові задачі для системи рівнянь Онзагера. Крайові задачі для системи рівнянь Онзагера мають певну специфіку у порівнянні зі звичайними крайовими задачами теорії тепломасообміну, що вимагає розробки специфічних, принципово нових розрахункових підходів. Щодо термофорезу та дифузіофорезу, то ці ефекти пов'язані з іншим набором малих параметрів, які теж ускладнюють чисельний розв'язок релевантних задач (а інший підхід просто неможливий) через власну малість. Математичні моделі зазначених ефектів термофорезу та дифузіофорезу теж відрізняються від традиційних, оскільки включають в себе окрім звичайних крайових задач дифузійного типу (чи рівнянь переносу, якщо враховувати малі швидкості) ще й задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, котрі описують рух об'єктів дисперсної фази. До зазначеного класу асимптотичних задач у рідинному чи газоподібному середовищі, яке рухається вкрай повільно, відносяться також задачі про течію Стефана (гідродинамічний ефект фазового переходу) для випадку повільного фазового переходу. Хоча цей випадок набагато ширший та зустрічається не тільки в умовах мікрогравітації, а й в багатьох інших фізичних та технологічних процесах, він буде розглянутий у роботі, що представляється, через його актуальність для вивчення процесів

тепломасообміну з фазовими переходами в умовах мікрогравітації, оскільки майже всі випадки бульбашкового кипіння та переважна більшість випадків процесів конденсації в умовах мікрогравітації відповідають випадку повільного фазового переходу. Для повільних фазових переходів початкова математична модель співпадає з математичною моделлю теплового фазового переходу у рідинному чи газоподібному середовищі. Однак число Стефана, що виникає при обезрозмірюванні такої початково-крайової задачі, для повільного фазового переходу менше за одиницю, а саме ця нерівність дає змогу побудувати збіжний асимптотичний ряд, що представляє собою розкладання шуканої функції по числу Стефана. Такий підхід забезпечує можливість розв'язувати замість однієї складної початково-крайової задачі послідовність простих крайових задач, що швидко збігається. Більш того, мале число Стефана прямо вказує на наявність у задачі, що розглядається, двох масштабів часу: відносно швидкого часу, пов'язаного з відомим числом Фур'є для процесів теплопровідності фаз, та відносно повільного стефановського часу, який визначає процес фазового переходу. Перевагою описаного асимптотичного підходу є можливість проводити розрахунки у повільному часі замість швидкого часу. Нарешті, запропоноване асимптотичне розкладання забезпечує додаткову лінеаризацію задачі, що розглядається. Зрозуміло, що сформульовані крайові задачі на кроках асимптотичного розкладання вимагають розробки специфічних розрахункових підходів, що й було зроблено автором. Більш того, автору вдалося показати, що для повільного фазового переходу число Рейнольдса стефановської течії пропорційне числу Стефана, тобто у більшості випадків повільних фазових переходів число Рейнольдса течії Стефана менше за 1, тобто течія Стефана для таких фазових переходів є течією Стокса. Щодо термо-капілярної та концентраційно-капілярної конвекції, то відповідні течії не завжди є течіями Стокса, але у значній частині випадків число Рейнольдса в них менше за 1, тобто до них може бути застосовано розкладання Уайтхеда. Наведені обставини та міркування показують складність та специфічність задач, котрі притаманні математичному моделюванню процесів механіки рідини та газу, а також процесів тепломасообміну в умовах мікрогравітації.

Слід зазначити, що переважна більшість описаних вище фізичних явищ та їх математичних моделей до цього часу чи взагалі не досліджувалися, чи були розглянуті неналежним чином через складність математичних моделей та відсутність спеціально розроблених ефективних методів розрахунку.

Розглянемо докладніше математичні моделі процесів гідродинаміки і тепломасообміну в умовах мікрогравітації, а також в областях малих геометричних розмірів, між якими, як буде показано далі, існує певна математична аналогія. Як наголошувалося вище, вільна конвекція в цих умовах мала. Однак, як показує аналіз більшості процесів в умовах мікрогравітації та в областях малих геометричних розмірів, що зараз досліджуються, в них мала або зовсім відсутня вимушена конвекція внаслідок інших чинників. Тому моделі гідродинаміки і тепломасообміну в подібних випадках повинні будуватися в припущенні про малість всіх конвективних членів (автор утримується від формулювання «конвективними членами можна знехтувати»). Саме у цьому полягає математична аналогія зазначених класів задач, що була покладена у основу дослідження що пропонується до уваги. За відсутності традиційних чинників вимушеної конвекції такі рухи рідини збурюються поверхневими ефектами (конвекція Марангоні), можливими рухами об'єктів дисперсної фази (наприклад, в ході процесів седиментації або флоатації) та гідродинамічними ефектами фазових переходів, а також, нарешті, малою вільною конвекцією. Чисельне моделювання конвекції Марангоні є досить складною проблемою й заслуговує окремого дослідження, але, не дивлячись на це, конвекція Марангоні досить ретельно вивчалася в численних роботах, що знайшло відображення у значній кількості літературних джерел, деякі з них будуть згадуватися далі. Решта поставлених вище питань в науковій літературі висвітлені мало, а деякі з них й зовсім не досліджені.

В умовах малості конвективних ефектів, явища термодифузії, бародифузії, пов'язаних дифузії і теплопровідності, якими в звичайних умовах, як правило, нехтують у порівнянні з конвекцією і прямими теплопровідністю та дифузиею, можуть виявитися порівнянними по порядку з конвективними членами або навіть більшими за таких, тобто, можуть

виявитися другими за величиною ефектами, які обов'язково треба враховувати. Таке урахування призводить до використання в якості математичної моделі системи рівнянь Онзагера, а, якщо враховуються й конвективні члени, та різного роду фізико-хімічні перетворення, то узагальненої системи рівнянь Онзагера, застосування до якої теорії потенціалу буде також розглянуто в цій роботі.

Слід зазначити, що це перша спроба в рамках теорії потенціалу розглянути настільки складні процеси тепломасообміну. Крім того, хоча система рівнянь Онзагера практично повсюдно називається математичною моделлю процесів тепломасообміну в умовах мікрогравітації, з урахуванням специфічних труднощів розрахунку число спроб використувати її в обчислювальних цілях дуже обмежено, що підкреслює важливість подібних результатів. В дисертаційній роботі були побудовані матриці фундаментальних розв'язків для системи рівнянь Онзагера, системи рівнянь слабкої вільної конвекції, деяких формулювань системи рівнянь Стокса, що дало змогу побудувати відповідні системи граничних інтегральних рівнянь, придатні для розв'язання методом граничних елементів, зокрема запропонованими у роботі алгоритмами.

Ідея застосування методів теорії потенціалу для розв'язання задач гідродинаміки і тепломасообміну в асимптотичних випадках аж ніяк не нова. Ідея ця виявляється особливо привабливою завдяки тому, що застосування асимптотичних розкладів лініаризує задачі, котрі розглядаються. Відома аналогія Стокса між математичною моделлю течії Стокса та задачами теорії пружності (рівняння Ляме при коефіцієнті Пуассона, рівному $1/2$) дозволила без труднощів поширити на течію Стокса все результати, отримані в теорії потенціалу для розв'язання задач теорії пружності, починаючи з робіт Кельвіна та Сомільяни. Перехід до обчислювальної реалізації теорії потенціалу – методу граничних елементів – у цьому напрямку також пройшов відносно легко і безболісно. Більш того, в даний час в мікрогідродинаміці по частоті використання методу граничних елементів не поступається ні методу скінченних елементів, ні методу скінченних різниць, чого не спостерігається у інших розділах механіки суцільного середовища.

Однак застосування нових авторських алгоритмів методу граничних елементів, що підвищують його точність та ефективність розрахунку, поширення граничноелементного підходу на задачі, сформульовані в рамках узагальнених асимптотичних математичних моделей, що обговорювалися вище, створює додаткові дуже серйозні можливості розрахунку більш складних конфігурацій та відкриває нові перспективи дослідження асимптотичних випадків задач гідродинаміки та тепломасообміну.

На основі запропонованих асимптотичних та інтегральних математичних моделей релевантних фізичних явищ за допомогою запропонованих алгоритмів були розглянуті принципово важливі для подальшого розвитку ракетно-космічної техніки та космічних досліджень задачі про гідродинаміку рідини та процеси тепломасообміну у паливних баках ракет у тривалому інерційному польоті. Показано, що процеси тепломасообміну у частково заповненому баку можуть призвести до зміщення центру мас космічного літального апарату.

Актуальність обраної тематики наукових досліджень визначається двома обставинами: по-перше, необхідністю розробки ефективного обчислювального інструментарію мікрогідродинаміки, гідродинаміки та процесів тепломасообміну в умовах мікрогравітації, які забезпечили б необхідний прогрес в цих вельми важливих галузях, і, по-друге, нагальною необхідністю розв'язання прикладних задач про течії в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса та процеси тепломасообміну в областях малих геометричних масштабів, в умовах мікрогравітації та в інших випадках, які виникають в мікроелектроніці, мікробіології та медицині, мікромеханіці, екології, космічних дослідженнях та в інших областях науки і техніки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Автор представленої дисертаційної роботи був відповідальним виконавцем наступних науково-дослідних робіт, що виконувалися в науково-дослідній лабораторії моделювання процесів механіки рідини і газу та тепломасообміну механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара: № 1-256-12 «Математичні моделі та чисельні методи теорії потенціалу та задачі оптимізації механічних

і тепломасообмінних процесів в гетерогенних середовищах» (ДР № 0112U000186, 2012 - 2014 рр.); № 1-302-15 «Математичні моделі, методи розрахунку та експериментальні дослідження багатомасштабних механічних та тепломасообмінних процесів у гетерогенних середовищах» (ДР № 0115U002394, 2015 - 2017 рр.); № 1-327-17 «Розробка нового покоління високоефективних методів розрахунку гідродинамічних та тепломасообмінних процесів у ємкостях ракетно-космічної техніки» (ДР № 0117U001209, 2017 - 2019 рр.); № 390-05 «Фізичне та математичне моделювання кризи кипіння» (ДР № 01063U000817, 2005 - 2005 рр., Договір № М / 228-2005 за програмою спільних дій в галузі науково-технічного співробітництва між Україною та Францією («Дніпро»)).

Мета і задачі дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей теорії потенціалу для широкого спектра прикладних задач гідродинаміки і тепломасообміну при малих числах Рейнольдса, розробка на їх основі ефективних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу. Для досягнення сформульованих вище цілей дослідження слід розв'язати такі задачі:

- розробка нових та вдосконалення існуючих алгоритмів теорії потенціалу, що забезпечують ефективне чисельне розв'язання розглянутих в роботі класів задач;
- застосування асимптотичних підходів в обчислювальній теорії потенціалу;
- застосування асимптотичних підходів для побудови математичних моделей течій та процесів тепломасообміну при малих числах Рейнольдса, Пекле, Стефана;
- розробка математичних моделей і ефективних методів розрахунку повільних фазових переходів і гідродинамічних ефектів фазових переходів (течій Стефана);
- розробка нових формулювань граничних інтегральних рівнянь і алгоритмів методу граничних елементів для розв'язання системи рівнянь Стокса;

- чисельне дослідження течій Стокса в областях складної форми, а також руху ансамблів об'єктів в стоксовському режимі, вдосконалення і узагальнення методу М. Смолуховського та застосування запропонованого підходу для розрахунку еволюції багатофазних середовищ у технологіях хімічної та гірничої промисловості, гідрометеорології;

- розробка математичних моделей та методів чисельного дослідження теплообміну у тонких шарах та застосування отриманих результатів у задачах теплового захисту;

- розробка математичних моделей та методів чисельного дослідження процесів слабкої вільної конвекції, термофорезу та дифузійфорезу, термодифузії та пов'язаної дифузії, флоатації, седиментації тощо;

- розробка математичних моделей і методів чисельного дослідження процесів течії в'язкої рідини і тепломасообміну в умовах мікрогравітації та застосування запропонованих підходів для аналізу процесів тепломасообміну у паливному баку космічного апарату під час довготривалого інерційного польоту.

Об'єкт дослідження: течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну при малих числах Рейнольдса та Пекле.

Предмет дослідження: асимптотичні та інтегральні математичні моделі теорії потенціалу, що описують течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну при малих числах Рейнольдса та Пекле, а також відповідні чисельні методи теорії потенціалу, що застосовуються для розрахунку зазначених процесів й течій.

Методи дослідження: асимптотичні методи дослідження крайових задач, побудова інтегральних математичних моделей методами теорії потенціалу, чисельні методи обчислювальної теорії потенціалу.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

1. На підставі вперше отриманих в роботі граничних інтегральних рівнянь з точкою колокації всередині області розв'язку розроблено нове сімейство регулярних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу, в рамках того ж підходу запропоновано новий прямий регулярний метод дискретних особливостей.

2. На основі асимптотичного аналізу граничних інтегральних рівнянь розроблено нове сімейство асимптотичних алгоритмів методу граничних елементів.

3. Розроблено нову асимптотичну математичну модель повільних фазових переходів з урахуванням гідродинамічного ефекту повільного фазового переходу та застосовано методи обчислювальної теорії потенціалу для розрахунків в рамках запропонованої моделі. Вперше запропоновано математичну модель гомотетичного зростання тіл при повільних фазових переходах.

4. У роботі отримала подальший розвиток методика тестування алгоритмів й програмного забезпечення обчислювальної теорії потенціалу.

5. Побудовано нові фундаментальні розв'язки та нові граничні інтегральні формулювання для системи рівнянь Стокса і деяких її узагальнень.

6. Одержали подальший розвиток дослідження процесів гідродинамічної взаємодії в течіях Стокса. Вдосконалено та узагальнено метод М. Смолуховського, який було застосовано до аналізу багатофазних систем у технологіях хімічної та гірничої промисловості, гідрометеорології. У рамках обчислювальної теорії потенціалу вперше побудована лагранжева математична модель тепломасообміну в багатофазному середовищі в умовах мікрогравітації при малих числах Рейнольдса та Пекле з урахуванням явищ термофорезу, дифузіофорезу, седиментації та флоатації.

7. Вперше побудований граничноінтегральний аналог системи рівнянь Онзагера та на його основі виконано чисельне моделювання процесів тепломасообміну з урахуванням явищ термодифузії та пов'язаної дифузії.

8. Вперше побудована асимптотична математична модель слабкої вільної конвекції та на її основі інтегральна модель цього явища.

9. Завдяки застосуванню розроблених асимптотичних та інтегральних математичних моделей й методів обчислювальної теорії потенціалу були вдосконалені математичні моделі і чисельні методи розрахунку гідродинамічних і тепломасообмінних явищ в умовах мікрогравітації. Запропоновані моделі та методи були застосовані для розрахунку процесів

тепломасообміну у паливному баку космічного апарату у довготривалому інерційному польоті.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості застосування побудованих математичних моделей, запропонованих чисельних методів та розробленого програмного забезпечення в якості інструментарію наукових досліджень для наступних областей науки та техніки:

- в дослідженнях космічного простору для аналізу процесів тепломасообміну з фазовими переходами, для аналізу течій рідини і процесів тепломасообміну в паливних баках космічних апаратів в умовах довготривалого інерційного польоту;

- в екології, гідрометеорології, хімічних та гірничозбагачувальних технологіях для розрахунку малих рухів частинок дисперсної фази, зважених в повітряному або водному середовищі з урахуванням фазових переходів та інших процесів тепломасообміну в околі частинок дисперсної фази.

Результати дисертаційної роботи були впроваджені в навчальний процес підготовки студентів Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. З використанням результатів дисертаційної роботи був підготовлений лабораторний практикум з курсу «Методи дослідження процесів тепломасообміну».

Результати дисертаційної роботи було впроваджено у науково-технічну діяльність Інституту геотехнічної механіки імені М. С. Полякова Національної академії наук України. Результати передані до ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для використання під час виконання робіт з розробки нових ракет-носіїв та космічних літальних апаратів.

Достовірність і обґрунтування отриманих в дисертаційній роботі результатів, забезпечується: використанням класичних, загальновизнаних математичних моделей гідродинаміки в'язкої рідини та теорії тепломасообміну; використанням суворих математичних перетворень; ретельним тестуванням запропонованих алгоритмів за спеціальними методиками; порівнянням отриманих результатів розрахунків з відомими аналітичними та чисельними результатами інших авторів.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дослідження опубліковано в 39 наукових роботах, з них 7 статті [1 – 7] у фахових виданнях України, 4 публікації, що входять до наукометричних баз даних [8 – 11] (SCOPUS, WoS) ([11] є глава у зарубіжній монографії), 3 статті [2, 3, 7] проіндексовано у наукометричній базі даних «Index Copernicus», 1 колективна монографія в Україні [12], 26 інших публікацій та праць в матеріалах наукових конференцій і збірниках тез доповідей, що підтверджують апробацію роботи та науковий пріоритет автора [13 – 38], 1 навчальний посібник [39]. Наукові роботи [2, 8, 14, 15, 32, 34, 37, 38] опубліковані автором особисто, без співавторів. Наукові роботи [17, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 33] виконані у співавторстві з науковим керівником професором М. В. Поляковим, у цих роботах науковий керівник приймав участь у постановці задачі та аналізі отриманих результатів, автор теж приймав участь у постановці задачі та аналізі отриманих результатів та, окрім того, виконував розробку алгоритму та підготовку програмного забезпечення, інші співавтори, якщо вони були, також приймали участь у програмуванні та проводили розрахунки. Роботи [22, 23, 28] носять оглядовий характер, в них всі співавтори приймали рівну участь. Автор приймав участь при підготовці всіх розділів монографії [12] та всіх лабораторних робіт, що увійшли у лабораторний практикум [39]. У решті наукових робіт особисто автору належать постановки задач та розробки алгоритмів, а підготовка програмного забезпечення, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів проводилися разом зі співавторами.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, що включені в дисертацію, доповідалися і обговорювалися на наступних конференціях, симпозіумах і семінарах: Міжнародних симпозіумах «Метод дискретних особливостей в задачах аеродинаміки, електродинаміки та теорії дифракції» (1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019); Симпозіумі ІУТАМ «Нелінійні сингулярності в деформаціях і течіях» (Хайфа, Ізраїль, 1997); Щорічних наукових зборах Товариства механіки і прикладної математики (GAMM) (1998, Бремен, 2000, Геттінген, 2004, Дрезден, 2006, Берлін); Симпозіумі «Сучасні математичні та обчислювальні

аспекти методу граничних елементів» (Краків, Польща, 1999); Симпозіумі міжнародної асоціації методу граничних елементів IABEM (2014, Китай); Щорічній міжнародній конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпродзержинськ - Дніпропетровськ, 2003 – 2020); Міжнародному конгресі з теоретичної та прикладної механіки ІСТАМ2004 (Варшава, Польща, 2004); Міжнародній конференції «Неперервні моделі і дискретні системи» (Шореш, Ізраїль, 2003); Міжнародних наукових конференціях «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасообміну» (Дніпропетровськ, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016 року); Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка В.І. Массаківського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 2007, 2019); Міжнародній конференції «Нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних» (Дніпропетровськ, 2010); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та чисельних методів» (Рівне, Україна, 2015, 2018); підсумкових наукових конференціях Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (1986 - 2019 рр.); наукових семінарах кафедри прикладної газової динаміки та тепломасообміну, кафедри диференціальних рівнянь та кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. В цілому дисертаційна робота обговорювалася на об'єднаному семінарі Проблемної науково-дослідної лабораторії міцності і надійності конструкцій та кафедри аерогідромеханіки і енергомасопереносу механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається із анотацій, вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел, 7 додатків. Загальний обсяг роботи становить 298 сторінок. Основна частина викладена на 168 сторінках, містить 14 рисунків, 5 таблиць, список використаних джерел з 415 найменувань на 40 сторінках. Додатки займають 130 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Історія досліджень течій рідини при малих числах Рейнольдса та аналіз сучасного стану питання

1.1 Течії при малих числах Рейнольдса

Сучасна механіка рідини і газу, а також нерозривно пов'язана з нею теорія тепломасообміну служать теоретичною основою численних технічних пристроїв і виробничих технологій, що застосовуються практично у всіх областях людської діяльності, в тому числі й в таких найважливіших галузях промисловості як металургія, хімічна промисловість, енергетика, всі види транспорту тощо. В останні роки все частіше задачі гідродинаміки і тепломасообміну виникають в мікроелектроніці, мікробіології, нанотехнологіях. Настільки широке розмаїття областей застосування механіки рідини і газу, а також теорії тепломасообміну породжує виключно широкий спектр відповідних задач, сформульованих при істотно різних значеннях визначальних параметрів.

Історично в силу очевидних причин гносеологічного характеру розвиток теоретичної гідромеханіки розпочався з теорії течій ідеальної нестисливої рідини (крайові задачі для системи рівнянь Ейлера) і, зокрема, з вивчення потенційних течій ідеальної нестисливої рідини, для яких навіть без застосування комп'ютерної техніки були отримані вельми істотні результати, що увійшли в класичні монографії з гідромеханіки [40 – 44]. Майже через сто років після перших робіт Леонарда Ейлера і Данила Бернуллі з теорії руху ідеальної рідини (використовувана хронологія відповідає історичному нарису з монографії Л. Г. Лойцяньського [43]) в роботах Нав'є (1821) і Стокса (1845) були сформульовані рівняння руху в'язкої рідини. Однак, на думку автора згаданої книги [43], інтенсивні дослідження течій в'язкої рідини почалися з робіт О. Рейнольдса, виконаних і опублікованих в 1876 – 1883 рр. Саме Рейнольдс ввів у користування критерій подібності, згодом названий його ім'ям, який характеризує відношення сил інерції до сил в'язкості в потоці в'язкої рідини. Використання числа Рейнольдса як універсального критерію, що визначає структуру течії, дозволило провести першу, досить грубу

систематизацію та класифікацію течій рідини, яка в подальшому неодноразово доповнювалась та уточнювалась. У тій же серії досліджень Рейнольдс описав явище турбулентності і вказав на зв'язок переходу від ламінарної течії до турбулентної (і зворотного переходу) з певним значенням числа Рейнольдса в потоці.

Відкриття турбулентності та її подальше вивчення привело до розуміння можливості якісних відмінностей в структурі течії в залежності від числа Рейнольдса. Зовнішні течії при великих числах Рейнольдса по загальній структурі виявилися близькими до зовнішніх течій ідеальної рідини, що стимулювало появу очевидної ідеї про використання для аналізу таких течій добре розробленого і відносно простого апарату гідромеханіки ідеальної рідини. Теорія примежового шару Л. Прандтля забезпечила реалізацію цієї ідеї на практиці, принципово розділивши течії в'язкої рідини на внутрішні та зовнішні.

Справедливості заради слід зазначити, що роботам Нав'є і Стокса передували окремі дослідження Кулона (1801) і Дюбуа (1799), присвячені опору тіл, що рухаються в рідині з малими швидкостями, а також роботи Ж. Пуазейля (1840 – 1842), присвячені руху в'язкої рідини в циліндричних каналах малого діаметра (капілярах) (хронологія наведена зі згаданої вище монографії [43]). Хоча зі зрозумілих причин в зазначених роботах число Рейнольдса не визначалося, є всі підстави вважати, що розглянуті в цих роботах течії мали місце при малих числах Рейнольдса. Більш того, зазначені дослідження стимулювали спочатку Стокса (1846), а потім Стефана (1862) до теоретичного вивчення таких течій. Як наслідок, саме Стокс сформулював першу математичну модель течії при малих числах Рейнольдса, яка згодом була названа течією Стокса, або рівняннями Стокса. Тут є певні термінологічні труднощі, викликані тим, що Стокс не міг будувати модель течії при малих числах Рейнольдса в 1846 р., оскільки поняття числа Рейнольдса було введено набагато пізніше. Стокс ж побудував математичну модель повільної (повзучої) течії в'язкої рідини, яка, як з'ясувалося при подальших дослідженнях, відповідає асимптотично малим числам Рейнольдса.

Слід зазначити, що Стокс зробив досить велике і ретельне дослідження побудованої їм математичної моделі течії при малих числах Рейнольдса. Зокрема, ним було виявлено, що в плоскому випадку не існує розв'язку задачі про обтікання контуру при малих числах Рейнольдса поступальним на нескінченності потоком – у даний час цей факт носить назву парадоксу Стокса. Парадокс Стокса в подальшому зіграв істотну роль у розвитку гідромеханіки течій при малих числах Рейнольдса, кардинально зменшивши число робіт, присвячених плоским течіям Стокса, і змусивши приділити основну увагу просторовим течіям. Стоксом також було побудовано аналітичний розв'язок задачі про обтікання сфери поступальною на нескінченності течією Стокса і отримано формулу для сили опору сфери, що носить його ім'я. Нарешті, Стокс звернув увагу на аналогію між рівняннями Ляме, що описують у переміщеннях напружено-деформований стан деформівного твердого тіла, при коефіцієнті Пуассона, що дорівнює $1/2$, і рівняннями Стокса [45, 46]. Ця аналогія (в даний час так звана аналогія Стокса) дала можливість застосовувати для дослідження течій при малих числах Рейнольдса добре розроблений і загальнодоступний математичний апарат теорії пружності, що, безумовно, істотно сприяло розвитку даного напрямку механіки рідини. Слід зазначити, що в подальшому численні результати, отримані в теорії пружності, були автоматично перенесені на течії Стокса. Далі в цій роботі будуть розглянуті класичні інтегральні аналоги рівнянь Стокса, які по суті своїй є відомими в теорії пружності формулами Сомільяни, та фундаментальні розв'язки рівнянь Стокса, які збігаються з відомими розв'язками Кельвіна. Таким чином, з математичної точки зору можна говорити вже не про два (турбулентний та ламінарний) режими течії, а про три, виділяючи течії при малих числах Рейнольдса в окремий режим. Підставою для подібного трактування є лінійність рівнянь Стокса і відсутність в них конвективних членів на відміну від рівнянь Нав'є-Стокса. Однак в гідромеханіці традиційно вважають течію Стокса окремим випадком ламінарної течії.

Після введення числа Рейнольдса і появи трактування рівнянь Стокса як граничного по числу Рейнольдса окремого випадку рівнянь Нав'є-Стокса

виникло очевидне прагнення узагальнити рівняння Стокса на випадок малих, але скінченних чисел Рейнольдса. Першим таку спробу за допомогою асимптотичних розкладів по числу Рейнольдса зробив Уайтхед [47], але отримав розбіжний розв'язок. Цей результат був узагальнений на всі випадки зовнішнього обтікання необмеженою просторовою течією Стокса і отримав назву парадокса Уайтхеда. Відповідно до класифікації, запропонованої в монографії [48], парадокс Уайтхеда відноситься до так званих «парадоксів нескінченності», тобто, він є результатом спроби врахувати вплив фактору, розподіленого по нескінченній області, але, якщо цей фактор скінченний, то його вплив, взагалі кажучи, необмежений, що і призводить до розбіжних результату. Аналогічна точка зору висловлена також і в книзі [49].

Незважаючи на абсолютно очевидне пояснення парадоксу Уайтхеда, що стало зрозумілим практично відразу після його формулювання, даний парадокс викликав жваві дискусії і стимулював великі дослідження течій Стокса. Позбавлення протиріч парадоксу Уайтхеда зазвичай пов'язують з ім'ям К. В. Озеєна, який в 1910 запропонував для зовнішніх течій при малих числах Рейнольдса альтернативне наближення, назване згодом його ім'ям [50]. Наближення Озеєна не припускає повне виключення конвективних членів, як наближення Стокса, а лише лінеаризацію конвективних членів шляхом заміни в них локальної швидкості потоку, що стоїть перед диференціальним оператором, на швидкість потоку на нескінченності. Цей прийом дозволив вдало апроксимувати віддалене поле течії. Однак наближення Озеєна було піддано жорсткій критиці [51], оскільки воно явно незадовільно апроксимувало поле течії поблизу обтічного тіла. Справедливість критики визнав і сам К. В. Озеєн, який у своїй пізнішій книзі [52] трактував запропоноване ним наближення як наближення для далекого поля течії, а наближення Стокса – як наближення для течії в безпосередній близькості від тіла. Аналогічну точку зору було обгрунтовано в роботі І. Праудмана і Дж. Пірсона [53], однак такий підхід передбачає спряження запропонованих моделей на деякій межі, що представляє собою досить складну і неоднозначну процедуру, тому на практиці таке трактування не знайшло широкого застосування. Практичне значення і робіт К. В. Озеєна, і

роботи І. Праудмана та Дж. Пірсона полягало в побудові певних поправок до формули Стокса для гідродинамічного опору сфери. Хоча, строго кажучи, підхід І. Праудмана і Дж. Пірсона відрізнявся від підходу К. В. Озеєна, перша поправка в формулі І. Праудмана і Дж. Пірсона [53] збігається з поправкою К. В. Озеєна, а друга збігається з другою поправкою у формулі Озеєна-Голдстейна [53], отриманою за методом К. В. Озеєна. Наукова дискусія з приводу коректності узагальнень наближення Стокса в цілому і їх справедливості в конкретних окремих випадках тривала і далі, наприклад, у монографії [44] наведено таблицю порівнянь результатів визначення коефіцієнта опору сфери по Стоксу і Озеєну з експериментальними даними, і зроблено висновок про можливість застосування наближення Стокса, починаючи з чисел Рейнольдса 10^{-2} і нижче, а для чисел Рейнольдса в діапазоні від 0,1 до 1 отримані формули давали помітну похибку. Однак важко погодитися з висновком, зробленим в тій же монографії [43], що з розвитком чисельних методів асимптотичні наближення для малих чисел Рейнольдса втратили своє значення. Проте, у подальшому, коли крім задач зовнішнього обтікання при малих числах Рейнольдса інтерес стали викликати також внутрішні задачі, для яких парадокс Уайтхеда місця не має, асимптотичні розкладання по числу Рейнольдса для останніх задач вже не будувалися.

Цікаво відзначити, що задача про обертання тіла в необмеженій в'язкій рідині при малих числах Рейнольдса подібних складнощів не викликає. Розв'язок цієї задачі для випадку обертання сфери в необмеженому просторі в розглянутому режимі наведено в монографії [42].

Якщо для традиційних крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса число актуальних застосувань нестационарних випадків набагато перевершує кількість стаціонарних задач, то в крайових задачах для рівнянь Стокса спостерігається прямо протилежна картина: стаціонарні задачі, безумовно, превалюють. Проте, хоча нестационарні формулювання рівнянь Стокса відомі, в літературі вони зустрічаються не часто, оскільки не становлять великого практичного інтересу. У монографії [43] наведено розв'язок нестационарної задачі про обтікання сфери течією Стокса. Відзначимо, що

рівняння Озеєна, як правило, формулюються для нестационарного випадку. Подальший розвиток підходів як для нестационарних рівнянь Стокса, так і для нестационарних рівнянь Озеєна можна знайти у монографії [54]. Сучасне трактування питання про використання стаціонарних і нестационарних рівнянь Стокса наводить К. Позрікідіс у монографії [55], однак на цьому питанні про урахування нестационарних членів в рівняннях Стокса ніяк не можна вважати вичерпаним. Далі у роботі, що пропонується, питання про нестационарні течії Стокса буде обговорено додатково.

Слід також зазначити, що для стаціонарного і нестационарного випадків крайових задач для рівнянь Стокса були проведено великі дослідження питань існування та єдиності розв'язків. Практично вичерпний виклад даної проблематики можна знайти в монографії О. О. Ладиженської [56], конструктивний розвиток цих результатів можна знайти в уже згадуваній монографії [54].

Основною перевагою систем рівнянь Стокса і Озеєна є їх лінійність на відміну від повних рівнянь Нав'є-Стокса. Саме ця обставина і зумовила популярність розглянутих наближених моделей, хоча в порівнянні з повними рівняннями Нав'є-Стокса їх частка в загальній структурі розв'язків задач про ламінарні течії в'язкої нестисливої рідини досить мала навіть при досить малих числах Рейнольдса. Подібно потенційним течіям ідеальної нестисливої рідини, правда, в значно менших масштабах, крайові задачі для системи рівнянь Стокса залучили досить велике число спроб аналітичного розв'язання, багато з яких були досить успішні. В результаті значна кількість течій Стокса в областях канонічної геометричної форми отримали аналітичні описи. Серед методів розв'язання даного класу задач можна виявити практично всі методи розв'язання крайових задач еліптичного типу (параболічного типу для нестационарних рівнянь Стокса), включаючи методи теорії функцій комплексних змінних (для плоских задач), методи відокремлення змінних, перетворення Лапласа, Фур'є та інші інтегральні перетворення, методи збурень, методи функцій Гріна, інверсій та інші методи теорії потенціалу. Зрозуміло, що за більш ніж стоп'ятдесятирічну історію моделі Стокса накопичилася величезна кількість відповідних аналітичних

розв'язків. На щастя, аналітичні розв'язки крайових задач для системи рівнянь Стокса не мають прямого відношення до тематики цієї роботи, а отримані з їх допомогою аналітичні розв'язки використовуються тут хіба що для тестування точності чисельних алгоритмів. Тому в докладному огляді релевантних робіт немає необхідності, а, наприклад, практично вичерпний огляд застосування аналітичних і наближених аналітичних методів для розв'язання рівнянь Стокса в областях канонічної геометричної форми міститься в монографії [45], де розглянуті розв'язки наступних задач:

- а) поступальний рух сфери і обтікання сфери (розв'язок Стокса);
- б) рух рідинної сфери;
- в) концентричні сфери;
- г) обтікання тіл, близьких до сфери, в тому числі сплюсненого і витягнутого сфероїдів;
- д) течія в кінчному дифузорі та через круглий отвір;
- е) рух круглого диска;
- ж) сформульовано загальну задачу руху частинки довільної форми в необмеженому середовищі;
- к) розглянуто задачу про взаємодію двох сфер в необмеженому середовищі в загальному випадку наближеним методом відображень (метод М. Смолуховського) і аналітично для руху сфер уздовж лінії, що з'єднує їх центри;
- л) рух сфери поблизу твердої плоскої або циліндричної стінки;
- м) обертання твердого тіла обертання в обмеженому об'ємі;
- н) постановка задачі про рух сукупностей частинок і аналіз окремих специфічних випадків;
- п) розгляд проблеми в'язкості дисперсних систем.

До цього достатньо повного списку аналітичних розв'язків для класичної стаціонарної системи рівнянь Стокса, мабуть, можна додати тільки більш повний виклад проблеми взаємодіючих сфер [57, 58] і більш детально розглянуту в [42] задачу про обертання кулі в необмеженій рідині. Слід зазначити, що розгляд в монографії [45] обмежений вісісиметричним та просторовим випадками, а плоский випадок, внаслідок парадоксу Стокса, не

викликав у авторів інтересу. Тому наведений список аналітичних розв'язків бажано було б доповнити описаними в монографії [46] розв'язками задач про рух в'язкої рідини в плоскому дифузорі і розв'язок задачі про обтікання циліндра, (правда, остання в дещо модифікованій постановці (докладніше в [40])).

Дещо пізніше, починаючи з 70-их років минулого століття, став зростати інтерес до нестационарних рівнянь Стокса і рівнянь Озеєна. Так, поряд з традиційними задачами для стаціонарних рівнянь Стокса, в монографії [54] значну увагу приділено нестационарній системі рівнянь Стокса і рівнянням Озеєна, крайові задачі для яких розглядалися аналітично за допомогою методу потенціалу і розділення змінних. Зокрема, у зазначеній книзі були розглянуті такі задачі:

- а) про течію в'язкої рідини в півпросторі та смузі (в різних формулюваннях);
- б) про обертання диску, вбудованого в межу півпростору;
- в) про нестационарне обертання сфери і загальна задача про обертання осесиметричних тіл;
- г) про обертання тонкого диска в необмеженому в'язкому середовищі;
- д) про обертання декількох тонких дисків навколо однієї осі.

Слід зазначити, що класичні аналітичні підходи, що застосовуються в монографії [54], подальшого широкого поширення не отримали, оскільки, по-перше, нестационарна система рівнянь Стокса і система рівнянь Озеєна істотно складніші, ніж їх традиційні стаціонарні аналоги, і, по-друге, монографія [54] з'явилася під час бурхливого розвитку чисельних методів, які, в значній мірі, знизили цінність аналітичних результатів саме з розрахункової точки зору. Проте, оригінальні роботи щодо аналітичних розв'язків згаданих крайових задач продовжували з'являтися і пізніше. Так, наприклад, один із розділів монографії [59] присвячено застосуванню альтернативних формулювань системи рівнянь Стокса: зокрема, були розглянуті представлення загального розв'язку системи рівнянь Стокса через узагальнені потенціали в спеціальному класі ортогональних систем координат, представлення Хаппеля-Бреннера і Ламба для системи рівнянь

Стокса, аналоги уявлень Юнгдала, Дебая - Морса - Фешбаха, Папковича - Нейбера і Гальоркіна для системи рівнянь Ляме. Останні аналоги представлень, що широко використовуються в теорії пружності, ще раз підкреслюють ефективність застосування зв'язків між системою рівнянь Стокса і системою рівнянь Ляме, так званої аналогії Стокса. Іншою особливістю підходу монографії [59] є включення в формулювання задачі сили Попова - Ері - Релея, правда, обґрунтування включення в систему рівнянь Стокса цього реологічного ефекту в монографії [59] не наводиться і віднесено до робіт [60, 61].

Серед загальних результатів, отриманих при дослідженні системи рівнянь Стокса, слід виділити формули Х. Факсена – аналітичні співвідношення, що визначають силовий вплив сингулярності на контур, який знаходиться в стоксовській течії. Вперше формули Х. Факсена були опубліковані в оригінальній роботі автора [62], а потім були наведені в книзі [52], завдяки чому і отримали популярність. Детальний виклад даного питання за допомогою математичного апарату теорії потенціалу можна знайти в монографії [55].

Іншою істотною спільною проблемою течій при малих числах Рейнольдса, на жаль, ще дуже далекою від свого вирішення, є практика постановки крайових умов на твердих поверхнях в подібних задачах. Вважаючи системи рівнянь Стокса і Озеєна окремим випадком системи рівнянь Нав'є - Стокса, природно було б на твердих поверхнях ставити для систем рівнянь Стокса і Озеєна крайові умови прилипання, як це робиться в загальному випадку. Однак до течій Стокса і Озеєна, котрі досліджуються, відносяться і течії в дуже малих геометричних масштабах, які ближче до наномасштабів, ніж до традиційних масштабів Нав'є-Стокса, а для наногідродинаміки крайові умови з ковзанням (мається на увазі молекулярне ковзання) є стандартними. Більш того, реальні тіла, в тому числі і в мікромасштабах, мають шорсткі поверхні, а при обтіканні шорсткостей неминучі гідродинамічні особливості течії. Оскільки при розв'язанні крайових задач гідродинаміки, і в тому числі задач при малих числах Рейнольдса, поверхні, як правило, вважаються гладкими, тобто, крайові

умови «зносяться» на деяку фіктивну гладку поверхню, наприклад, серединну поверхню шорсткостей, це є ще одним із доводів до використання крайових умов ковзання. Однак у всіх згаданих вище і процитованих нижче фундаментальних публікаціях щодо течій при малих числах Рейнольдса використовувалися тільки крайові умови прилипання. Умови ковзання неодноразово згадувалися на різних рівнях в якості потенційної можливості [63], але автору роботи, що пропонується, невідомі систематичні дослідження з цього питання, а, тим більше, систематичні спроби впровадити подібні постановки задач в обчислювальну практику.

Розглянуті вище математичні моделі являють собою самостійні математичні об'єкти, вивчення властивостей яких становить інтерес не тільки для механіки рідини та газу, але і для математичної фізики взагалі. Досить важко простежити історію математичного дослідження системи рівнянь Стокса, причиною чому служить аналогія Стокса: багато результатів, отриманих в математичній теорії пружності, з мінімальними витратами переносилися на відповідні гідродинамічні аналоги. Дещо пізніше аналогічні дослідження почалися для нестационарної системи рівнянь Стокса і системи рівнянь Озеєна, але в цих випадках вже доводилося проводити повністю оригінальні дослідження. На думку В. В. Пухначьова [64] такі дослідження почалися в кінці двадцятих–тридцятих роках минулого століття в Геттінгенській математичній школі, проте першою спеціалізованою монографією з цього питання була книга [56] (перше видання в 1960 р). Саме в монографії [56] було вперше систематично проаналізовано питання про існування і єдиність розв'язків крайових задач для системи рівнянь Стокса, тобто, доведена коректність цих задач в досить широких класах функцій. Логічним продовженням книг [56, 64] і природним переходом від чисто теоретичних методів аналізу, що превалюють там, до чисельного моделювання стала монографія [65], в якій, до речі, чимала увага приділяється і наближенню Озеєна. Зазначені праці стимулювали численні наступні роботи, присвячені теоретичному дослідженню тих чи інших математичних особливостей розв'язків крайових задач в рамках наближень Стокса і Озеєна. Але, оскільки тематика згаданих робіт далеко виходить за

рамки інтересів автора даної роботи, а всі важливі для неї результати були опубліковані в зазначених монографіях [56, 64, 65], приводити тут огляд подальших досліджень у даному напрямку недоцільно.

Альтернативною точкою зору на математичні моделі Стокса і Озеєна є трактування їх в рамках загальної проблеми лінеаризації рівнянь Нав'є-Стокса [66]. Наприклад, Г. Біркгоф [51] розглядав наближення Озеєна як невдалу лінеаризацію. Трактування наближень Стокса і Озеєна як більш-менш вдалих лінеаризацій рівнянь Нав'є-Стокса, згідно до книги [65], поширилося серед фахівців з обчислювальної гідродинаміки, що використовують традиційні чисельні підходи – методи скінченних різниць і елементів. Дещо інші погляди на дане питання містяться в книгах М. Д. Копачевського і співавторів [67 – 69], де зі всієї множини задач механіки рідини і газу виділено лінійні задачі, об'єднані в єдиний розділ, названий лінійною гідродинамікою, і для зазначеного розділу розробляються специфічні підходи. Справедливості заради слід зазначити, що дослідження М.Д. Копачевського [67 – 69] стосуються тільки математичних аспектів відповідних крайових задач.

Однак найбільш поширеною точкою зору в даний час є об'єднання задач за фізичними або геометричними ознаками, як це бачиться природним з прикладної точки зору. Наприклад, течії в малих геометричних масштабах об'єднані загальною назвою мікрогідродинаміка [70 – 74], при цьому до цього розділу відносяться як лінійні, так і нелінійні задачі. Слід зазначити, що саме на розвиток цього напрямку значного позитивного впливу завдав бурхливий прогрес мікробіології, мікроелектроніки та мікромеханіки. Хоча, зрозуміло, не всі течії при малих числах Рейнольдса можуть бути віднесені до мікрогідродинаміки, швидкий розвиток саме цього напрямку стимулює загальний розвиток теорії даного класу течій. Можна ще згадати, що в середині минулого століття для течій при малих числах Рейнольдса було введено термін «повзучі течії», однак зараз цей термін практично не використовується.

Окремо необхідно зупинитися на асимптотичному аналізі течій при малих числах Рейнольдса. Наявність у постановці задачі малого числа

Рейнольдса очевидно припускає використання його в якості малого параметру у відповідному асимптотичному розкладанні, що й було зроблено Уайтхедом [47], однак невдало, оскільки ряд, отриманий Уайтхедом для задачі зовнішнього обтікання, розбігався. Цей факт отримав назву парадокса Уайтхеда і був проаналізований у монографіях [48, 49], де його було віднесено до так званих парадоксів нескінченності. Внаслідок парадоксу Уайтхеда задачі зовнішнього обтікання при малих числах Рейнольдса розглядаються в рамках наближення Стокса, тобто при числі Рейнольдса, що дорівнює 0, а це не завжди виправдано, або у рамках повної моделі рівнянь Нав'є-Стокса. У монографії [46] для подолання парадоксу Уайтхеда пропонується замінити нескінченну область обтікання на скінченну, а умови на нескінченності знести на скінченну відстань, що очевидним чином виключає парадокси Уайтхеда та Стокса, але ця ідея не здобула популярності у практичних розрахунках. Традиційно рівняння Стокса розглядаються у розмірному вигляді, оскільки вони отримані з безрозмірених рівнянь Нав'є-Стокса при числі Рейнольдса, рівному 0, однак, в принципі, можливо окреме безрозмірювання рівнянь Стокса [73]. У той же час відомо, що у обмежених областях розкладання Уайтхеда збігається, тобто наближення Стокса може бути узагальнено для чисел Рейнольдса, менших за 1, що було зазначено у монографіях [46, 48]. Однак у практичних розрахунках описаний підхід також не набув популярності, оскільки для скінченних чисел Рейнольдса при застосуванні методів скінченних різниць чи скінченних елементів використання асимптотичного розкладання не надає ніяких переваг а тільки ускладнює розрахунок. Але при застосуванні методу граничних елементів такі переваги можна знайти. Необхідно відмітити, що застосування наближення Озесна для внутрішніх течій недоцільно з очевидних причин.

Починаючи з роботи [75], метод граничних елементів став широко застосовуватися для розрахунку течій Стокса. Не зупиняючись детально на успіхах цього напрямку, відзначимо лише, що монографія К. Позрікідіса [55] містить практично повну інформацію з даного питання на момент її виходу. Зазначимо, що для вже згаданого класу внутрішніх течій при малих числах Рейнольдса парадокс Стокса міста не має, тобто плоскі течії можуть

розглядатися у такому випадку. Найпростішою математичною моделлю плоскої течії Стокса є крайові задачі для бігармонічного рівняння для функції течії [45]. Розвиток даного напрямку застосування методу граничних елементів можна прослідити по роботах [76-94] для плоских задач та [95-143] для просторових. Ці роботи опубліковані у журналі Engineering Analysis with Boundary Elements, де публікується більшість статей, присвячених розвитку та застосуванню методу граничних елементів. Не важко помітити, що кількість публікацій, присвячених просторовим задачам, значно більша, ніж аналогічна кількість для плоских задач, що очевидно пояснюється парадоксом Стокса. Плоскі задачі були сформульовані як у традиційних змінних тиск-швидкість, так й за допомогою функції течії у вигляді крайових задач для бігармонічного рівняння. Також помітно, що число випадків розв'язання нестационарних рівнянь Стокса непропорційно мале, що буде пояснене далі у тексті роботи. З загального аналізу переліку [76-143] цілком ясно, що до крайових задач для рівнянь Стокса останнім часом були застосовані практично всі нові і ефективні алгоритми методу граничних елементів. Слід зазначити, що застосовувалися алгоритми методу граничних елементів виключно до традиційних формулювань системи рівнянь Стокса. В жодній з перелічених статей мова не йдеться ні про альтернативні формулювання системи рівнянь Стокса, які на той час були вже добре відомі, про що свідчить відповідний розділ монографії [59], ні про асимптотичний характер системи рівнянь Стокса, як математичної моделі, що також було добре відомо на момент видання [45, 49].

Слід зазначити, що застосування методу граничних елементів до течій Стокса почалося з роботи [75], в якій окрім задач обтікання кулі та еліпсоїду була розглянута задача гідродинамічної взаємодії об'єктів відповідних геометричних форм між собою та з твердими стінками, тобто стаття у цій частині була спрямована на розрахунок багатофазних течій Стокса у лагранжевому формулюванні для одиничного об'єкту дисперсної фази чи невеликої кількості таких об'єктів. Тенденція аналізу гідродинамічної взаємодії у більш чи менш визначеному відношенні до багатофазних течій була, певною мірою, продовжена у роботах [79, 95, 100, 106, 109, 110, 117,

118, 123, 128, 142]. Однак у жодній з цих публікацій навіть не згадується метод М. Смолуховського [45], який вже протягом тривалого часу являється найбільш розповсюдженим підходом до аналізу багатофазних течій Стокса. Справа в тому, що метод М. Смолуховського ґрунтується на використанні в якості апроксимуючої функції у задачі гідродинамічної взаємодії розв'язку задачі про обтікання поодинокі частинки, та лише для взаємодії частинок на мінімальній відстані декількох радіусів застосовується повний точний розрахунок взаємодії двох куль, побудований методом функцій Гріна, які, у свою чергу, отримані методом інверсії [45]. Метод М. Смолуховського забезпечує прийнятну точність визначення параметрів взаємодії, що зазначено у монографії [45] та перевірено безпосередньо автором роботи, що пропонується. Ця точність виявилася прийнятною навіть у порівнянні з методом граничних елементів, хоча останній має великі переваги з точки зору форми об'єктів, що взаємодіють, їх швидкостей та взаємного розташування, а також взаємодії з твердими межами області течії. Очевидним кроком у напрямку створення ефективної розрахункової схеми для багатофазної течії Стокса представляється комбінування методу М. Смолуховського з методом граничних елементів та іншими алгоритмами теорії потенціалу, чого у зазначених вище роботах зроблено не було. Іншим очевидним узагальненням методу М. Смолуховського є розширення бази апроксимуючих функцій: як зазначалося вище, у класичному методі М. Смолуховського в якості такої функції використовувався аналітичний розв'язок задачі про обтікання кулі поступальною на нескінченності течією у необмеженій області, однак відомі також аналітичні розв'язки задач про обертання кулі [40, 42] та радіального розширення кулі [42], та застосовувати відповідні фундаментальні розв'язки для випадків дальньої взаємодії. А іншим прийомом, який розширяє можливості застосування методу щодо інших форм об'єктів, представляється використання функцій Гріна чи граничноелементних розв'язків для об'єктів дисперсної фази.

Зазначимо, що при застосуванні методу граничних елементів до розв'язання крайових задач для системи рівнянь Стокса певну популярність здобув метод фундаментальних розв'язків – регулярний непрямий алгоритм

обчислювальної теорії потенціалу [92, 112, 140], який у вітчизняній термінології відповідає регулярному непрямому методу дискретних особливостей з точками колокації поза області розв'язку. У роботі, що представляється, запропоновано близький до нього регулярний прямий метод дискретних особливостей, який має переваги перед методом фундаментальних розв'язків, притаманні прямим методам, а запропонований у тій же роботі метод граничних елементів з точками колокації всередині області розв'язку переважає метод фундаментальних розв'язків за цілою низкою параметрів.

Аналіз фізичного сенсу числа Рейнольдса прямо вказує, що процеси при малих числах Рейнольдса представляють собою процеси з малими швидкостями, тобто повільні процеси. Цілком природно очікувати, що інші повільні процеси можуть бути пов'язані з течіями, що розглядаються. В першу чергу, до таких процесів слід віднести повільні процеси тепломасообміну, наприклад, теплоперенос та масоперенос у повільних течіях, повільні фазові переходи, вільна конвекція у слабкому полі масових сил. На жаль, дана тематика практично не була охоплена методом граничних елементів, за винятком, можливо, роботи [124]. Щодо процесів перенесення, то вони визначаються числами Пекле, які пропорційні числу Рейнольдса з коефіцієнтом пропорційності, який дорівнює числу Прандтля. Для чисел Прандтля порядку одиниці, а в більш широкому сенсі для обмежених чисел Прандтля та малих чисел Рейнольдса, для математичних моделей таких процесів може бути побудоване асимптотичне наближення, подібне до наближення Уайтхеда, з подальшим застосуванням методу граничних елементів чи іншого обчислювального підходу. Асимптотичні моделі для повільних фазових переходів відомі досить давно (відповідний огляд літератури буде наведений нижче), але тільки у публікаціях автора даного дослідження зі співавторами для чисельного аналізу таких асимптотичних моделей запропоновано застосовувати метод граничних елементів, що дало змогу побудувати потужну обчислювальну схему. Найскладніше це питання стоїть щодо слабкої вільної конвекції, де традиційним оказалось обезрозмірювання з числом Рейнольдса, що дорівнює одиниці, а це робить

неможливим застосування асимптотичного розкладання, подібного до розкладання Уайтхеда (відповідний огляд літератури також буде наведений нижче).

Таки чином, на теперішній час явно проявляється тенденція збільшення інтересу дослідників до течій при малих числах Рейнольдса у обмежених областях, що природно пояснюється зростаючим інтересом до течій рідин у різного роду мікропристроях, які широко застосовуються у мікромеханіці, мікробіології, мікроелектроніці тощо, а також фізичних процесах, що відбуваються у рідинних середовищах в тих же областях науки і техніки. До речі, такі течії та їх математичні моделі цікаві з математичної та гідродинамічної точки зору, оскільки в таких течіях не мають місця парадокси Стокса та Уайтхеда, тобто відкриті додаткові можливості для постановки та розв'язання релевантних крайових задач. Зазначені обставини використовувалися автором цього дослідження при побудові асимптотичних математичних моделей гідродинамічних та тепломасообмінних процесів, які відбуваються на рівні об'єктів дисперсної фази.

1.2 Течії в'язкої рідини та задачі тепломасообміну в умовах мікрогравітації

Сучасна ракетно-космічна техніка являє собою досить специфічну і, як це не дивно, досить вузьку область техніки. Остання обставина може викликати здивування, однак це так: в даний час ми маємо фактично один тип ракет-носіїв різної потужності, і саме цим пояснюється виняткова успішність міжнародних проектів, коли на американські, китайські або корейські ракети буквально протягом декількох місяців встановлюють російські або європейські ракетні двигуни; два типи апаратів, що спускаються з орбіти, – традиційний і орбітальний літак подібний Шаттлу; єдину на даний момент орбітальну станцію і, нарешті, деяку різноманітність супутників, яких за типами навряд чи набереться кілька десятків. Тим не менш, наукоємність апаратів ракетно-космічної техніки така, що значно перевищує аналогічні показники інших галузей промисловості, транспорту,

зв'язку та сільського господарства, включаючи навіть атомну енергетику, але, можливо, дещо поступаючись галузі інформаційних технологій. Причиною такої високої наукоємності, характерної для даної галузі є унікальність технічних рішень та технологій, що не повторена ні в якій іншій області діяльності людини. Відносно невеликий і перелік можливих ракетних палив, який складається з двох можливостей: тверді та рідинні ракетні палива, що складаються з декількох різновидів, які функціонують згідно одного й того ж принципу. З іншого боку, в ракетно-космічній техніці, як ні в якій іншій галузі, багато виробів одноразового призначення, проаналізувати якість і результати роботи яких часто не представляється можливим. Враховуючи всю зазначену специфіку, в процесах створення нової ракетно-космічної техніки, особливо на стадії проектування, дуже багато теоретичної і розрахункової роботи, а експериментальні і дослідні етапи роботи, всупереч поширеному переконанню, відносно малі.

Для ракети-носія, безумовно, найважливішою складовою частиною є двигун і пов'язана з ним система зберігання та подачі ракетного палива, причому паливо становить більшу частину маси ракети-носія. Саме тому настільки важливі теоретичні дослідження поведінки палива і роботи системи подачі під час передстартової готовності, під час старту, на активній ділянці траєкторії та у вільному польоті. Отже, в сучасній ракетно-космічній техніці є дві основні рухові і паливні схеми – двигуни твердого і рідинного палива. Твердопаливні ракети використовуються, в основному, в оборонних цілях, а для наукових цілей та космічних досліджень, як правило, застосовують ракети на рідинному паливі. Розглянемо особливості зберігання та транспортування рідин та газів в системах ракетно-космічної техніки на прикладі ракет на рідинному паливі. Необхідною складовою частиною таких досліджень є розробка обчислювального інструментарію для вивчення процесів в паливних баках та інших ємностях в ракетно-космічній техніці, що містять рідини і гази.

Переслідуючи одну з основних цілей цієї роботи – розробку нових алгоритмів розрахунку процесів руху в'язкої рідини та тепломасообміну в ній у різноманітних ємностях, що входять в якості функціональних елементів

до літальних апаратів, що використовуються в ракетно-космічній техніці, розглянемо на якісному рівні відповідні процеси на прикладах компонент рідинного палива, яке знаходяться в паливних баках згаданих літальних апаратів. Щоб конкретизувати зазначені приклади, уявімо собі, що на стартовому столі стоїть ракета-носій важкого класу космічного призначення, баки якої заповнені компонентами рідинного палива, котрі можуть виявитися й криогенними. Взагалі кажучи, саме ракети важкого і надважкого класів на криогенному рідинному паливі вважаються найбільш перспективними в сучасній науковій і комерційній космонавтиці. Але, в той же час, найбільша кількість наукових та технічних проблем, що потребують вирішення, виникають у зв'язку саме з цими типами ракет. Відзначимо, що навіть виключення з даного розгляду ракет-носіїв на твердому паливі та інших бойових ракет, все одно, зі зрозумілих причин, не дозволяє привести тут якийсь огляд конструктивно-компонувальних схем та інших наукових і технічних питань, пов'язаних з предметом цього розгляду.

Ракети-носії розглянутого класу мають досить великий час передстартової підготовки, на відміну від бойових ракет. За цей час компоненти рідинного палива термічно взаємодіють з навколишнім середовищем, нагріваючись або охолоджуючись в залежності від співвідношення температур. Наприклад, криогенне паливо нагрівається в будь-якому випадку, в результаті чого воно починає кипіти. Кипіння криогенного палива є вкрай небажаним явищем, яке, крім прямих втрат компоненти палива, а його пари доводиться стравлювати в атмосферу, створює несприятливі температурні умови на стартовому столі, збільшує небезпеку аварій ракети-носія, може призвести до пошкодження обладнання стартового столу, ракети-носія і корисного навантаження, нарешті, створює небажане додатковий тиск всередині бака. Не можна сказати, що з цим негативним явищем не боролися. Найпростіший та найбільш очевидний шлях боротьби був реалізований на радянських ракетах-носіях лінійки Восток-Восход-Союз, де застосовувалися додаткові заправки криогенним паливом натомість того, що випарувалося, та барботаж охолодженим азотом, зрозуміло, що такий підхід ніяк не можна вважати задовільним. На ракетах-

носіях важкого класу Протон застосовувалися пасивні засоби теплового захисту, а саме теплозахисні шари з пористих матеріалів (вати) або елементи вакуумної теплоізоляції, яка при низьких температурах поблизу бака з криогенним паливом була виключно ефективна. Нарешті, на ракетах-носіях Фалькон, за словами Ілона Маска, застосовувався обдув газоподібним гелієм при криогенній температурі, що надзвичайно дорого і, по всій ймовірності, нераціонально. Заходи по боротьбі з нагріванням палива в баку повинні поєднуватися з заходами щодо запобігання або, принаймні, щодо зниження обмерзання поверхні бака з криогенним паливом і, можливо, інших частин поверхні ракети-носія, оскільки обледеніння може істотно збільшити стартову масу ракети-носія, що призведе до зменшення корисного навантаження, може створити труднощі з передстартовим обслуговуванням виробу, і призвести до виникнення небажаних нерозрахункових напружень та деформацій у конструкціях ракети-носія і стартового столу. З цієї точки зору, перший підхід до питань теплової захисту бака з криогенним паливом, передбачає тільки заміщення палива, яке випарувалося, виявляється повністю нераціональним. Другий підхід демонструє задовільні результати, а третій вимагає величезних кількостей газу для охолодження, оскільки потрібно повністю виключити контакт навколишнього вологого повітря з зовнішньою поверхнею бака, яка захищається.

Як відомо, процеси обмерзання дуже складні, описуються нелінійними крайовими задачами, найпростіша з яких – задача Стефана, тобто, задача про тепловий фазовий перехід в нерухомих середовищах. При конденсації водяної пари з вологого навколишнього повітря на поверхні криогенного бака неминуче виникає багатошарова багатофазна система, що складається з твердої оболонки баку, розташованого на ній шару льоду, що зростає, шару води, що покриває лід, при цьому шар води зменшується з боку льоду і збільшується зі сторони повітря (навіть якщо шар води монотонно зменшується по товщині, зникнути він не може в силу різниці між температурами фазових переходів, крім, звичайно, випадку, коли температура повітря опуститься до точки замерзання води або нижче її), нарешті, вологе повітря навколо бака також можна вважати шаром

нескінченної товщини. Незважаючи на фізичну простоту описаної системи, що здається очевидною недосвідченому читачу, розрахунок її стикається з численними труднощами, пов'язані з нелінійністю релевантної математичної моделі та наявністю в системі двох істотно різних геометричних масштабів – товщини шарів і радіусу бака.

На відміну від криогенних, висококиплячі компоненти рідинних ракетних палив при теплообміні з навколишнім середовищем не призводять до обмерзання бака (утворення інію на поверхні бака в холодну пору року відбувається внаслідок інших, природних причин). Сам теплообмін в такому випадку веде до виникнення всередині бака вільноконвективної течії. Оскільки нагрів бака в такому разі рідко виявляється симетричним, то розрахунок вільної конвекції в ньому являє собою складну просторову задачу. Враховуючи, що всередині бака можуть міститися ще й численні об'єкти та механічні пристрої, в тому числі трубопроводи, гасники коливань, система забезпечення суцільності палива і так далі, то задача ця викликає певний науковий інтерес. Однак на практиці перед стартом, як правило, проводиться барботаж палива в баку, в результаті чого неоднорідність температури в масі рідини в значній мірі нівелюється. Того ж ніяк не можна сказати про рух рідини всередині бака з криогенним компонентом палива. З економічних і технічних причин компонент криогенного палива заправляють в бак при температурах ненабагато нижче температури кипіння, а на внутрішній поверхні бака під дією теплового потоку ззовні відбувається кипіння компоненти, тому внутрішня поверхня бака знаходиться при температурі фазового переходу, тобто, очікувати всередині бака інтенсивної теплової вільної конвекції в даному випадку не доводиться. Проте в баку відбувається виключно інтенсивна концентраційна вільна конвекція, в якій в якості субстанції, що переноситься, і чинника, що викликає вільну конвекцію, виступають бульбашки пари, котрі утворилися при кипінні. Зрозуміло, що найбільша кількість таких бульбашок знаходиться поблизу внутрішньої поверхні бака, де вони утворилися. З експериментальних досліджень відомо (дивись огляди у роботах та монографіях [144 – 152]), що парова бульбашка на поверхні нагрівача зростає до певного розміру, потім

відривається і відходить від стінки, при цьому сам механізм відриву на сьогоднішній день залишається неясним, незважаючи на інтенсивні дослідження [153 – 173]. Швидкість і, відповідно, імпульс, яких набуває парова бульбашка при відриві залежать тільки від її геометричних розмірів, які при незмінному температурному режимі залишаються постійними, тобто, кожна з відірвавшихся парових бульбашок відходить від поверхні нагрівача на строго певну відстань, на який вона припиняє горизонтальний рух, оскільки сили в'язкого опору тертя до цього моменту повністю гасять початковий імпульс бульбашки, а потім бульбашка починає рух вгору під дією сили Архімеда. Таким чином, вільна конвекція в разі бульбашкового кипіння зводиться до того, що парові бульбашки зосереджуються в досить тонкому шарі, який лежить на невеликій відстані від поверхні бака. Для розрахунку руху цього шару може бути використана модель течії Пуазейля, узагальнена автором роботи, що пропонується, на випадок поздовжнього руху в каналі, довільного поперечного перерізу. Використання зазначеної моделі, незважаючи на досить грубе наближення, яке в ній використане, дає можливість за допомогою методу граничних елементів швидко і досить точно розрахувати концентраційну вільну конвекцію при кипінні в паливному баку. Попередній аналіз показав, що провести такий розрахунок традиційними чисельними методами важко, оскільки шар, в якому зосереджуються бульбашки досить тонкий (в поперечному розмірі істотно менше, ніж радіус бака), та й традиційні методи розрахунку багатофазних течій погано підходять для аналізу такої течії [174].

Якщо фізична і математична моделі флотації бульбашок пари виявилися досить прості, то для побудови загального високоефективного підходу до розв'язання задачі тепломасообміну потрібно радикально спростити модель бульбашкового кипіння компонента палива на внутрішній поверхні бака під впливом теплового потоку ззовні. Основні труднощі при розрахунку процесів кипіння, так само, як і інших фазових переходів, полягають в тому, що у більшості процесів теплового фазового переходу прихована теплота останнього являє собою досить значну величину в порівнянні з сумарною теплоємністю одиниці маси однієї з фаз у

релевантному діапазоні температур. Цю властивість особливо сильно виражено для процесів кипіння / випаровування / конденсації, внаслідок дуже великих значень прихованої теплоти пароутворення. В результаті такого співвідношення між визначальними параметрами розглянутих процесів на фазовий перехід за одиницю часу витрачається набагато більше тепла, ніж на нагрівання / охолодження фаз, тобто, в порівнянні з процесом теплопровідності фазовий перехід відбувається досить повільно. Грунтуючись на цьому факті, Л. С. Лейбензон [175] запропонував для розв'язання задачі Стефана про описаному вище повільному фазовому переході квазістаціонарне наближення [175 – 177], згодом назване його ім'ям. Протягом досить тривалого часу наближення Лейбензона з успіхом використовувалося для наближеного аналітичного розв'язання відповідних задач Стефана переважно в одновимірному по простору випадку. Більш того, після досить тривалого часу, а саме у 60-ті роки минулого століття до аналогічної задачі Стефана були застосовані асимптотичні методи [178], і з'ясувалося, що наближення Лейбензона збігається з нульовим наближенням відповідного асимптотичного розкладання. З практичної точки зору, заміна наближення Лейбензона його узагальненням у вигляді асимптотичного розкладання мало що змінила, оскільки не дозволила вийти за рамки того ж одновимірному по простору випадку, а при малих числах Стефана уточнення, забезпечене застосуванням асимптотичного підходу, виявилось не таким вже й важливим. Така ситуація тривала протягом досить довгого часу. Всі спроби поширити наближення Лейбензона або його асимптотичне узагальнення на плоский і просторовий випадки виявлялися недостатньо ефективними з обчислювальної точки зору, так як наближення Лейбензона, і кожен з членів асимптотичного розкладання передбачає розв'язання крайової задачі еліптичного типу, а такі крайові задачі, як правило, розв'язуються традиційними чисельними методами за допомогою розрахунку на встановлення, тобто, розв'язується певна крайова задача параболічного типу з фіктивним часом і крайовими умовами, які від цього фіктивного часу не залежать. Розрахунок продовжується до моменту встановлення поля температур з наперед заданою точністю. Такий обчислювальний апарат,

застосований разом з асимптотичним розкладанням або наближенням Лейбензона, представляється абсолютно абсурдним, оскільки наближення Лейбензона або асимптотичне розкладання застосовувалися, щоб позбутися від часу в рівнянні теплопровідності, а метод встановлення вимагає час в рівнянні теплопровідності повернути і, можливо, з набагато більш громіздкою процедурою. В результаті, наближення Лейбензона та його асимптотичне узагальнення довгий час розглядалося як елегантний, але малокорисний спосіб розв'язання задачі Стефана. І тільки в 2003 році група дослідників [13], серед яких був і один із автор представленої роботи, запропонували розв'язувати еліптичні крайові задачі, одержані при застосуванні наближення Лейбензона чи його асимптотичного узагальнення, методом граничних елементів. Це дозволило, по-перше, підняти точність проведених розрахунків, а, по-друге, це, напевно, найголовніше, запропонований підхід дозволяє виключити покроковий процес у масштабі «швидкого часу» за числом Фур'є та виконувати інтегрування по часу в покроковому процесі за «повільним» стефановським часом. Очевидно, що для достатньо малих чисел Стефана, а це більшість фазових переходів, запропонований обчислювальний підхід є найбільш ефективним алгоритмом розв'язання задачі Стефана з нині існуючих.

Перед запуском двигуна, як правило, проводять барботаж компонентів палива у відповідних баках. Перемішуючи паливо, барботаж сприяє усуненню навіть малих неоднорідностей поля температур і полів концентрацій в ньому (якщо поля концентрації в ньому мають місце). Більш того, бульбашки газу, який забезпечує барботаж, піднімаючись вгору під дією сили Архімеда, взаємодіють з неоднорідностями, котрі містяться в паливі, в тому числі, зародками парових бульбашок та малими паровими бульбашками, твердими частинками, серед яких особливий інтерес становлять мікрочастинки твердої фази палива і мікрочастинки водяного льоду. Перебуваючи в русі, великі газові бульбашки притягують малі неоднорідності за рахунок сил гідродинамічного взаємодії. Зливаючись з малими неоднорідностями різної фізичної природи, бульбашки, котрі здійснюють барботаж, в результаті очищують масу палива від можливих

забруднень. Ефект очищення рідини при барботажі добре відомий і широко використовується в сучасних промислових технологіях. Власне кажучи, очищення палива при барботажі не є предметом вивчення даної роботи, але розроблені тут і в інших роботах авторів [180, 181] обчислювальні підходи мають універсальний характер і можуть бути використані для широкого кола технічних пристроїв і виробничих технологій.

Також перед запуском двигуна здійснюється наддув бака, який створює в баку тиск, необхідний для ритмічної роботи двигуна, та компенсує втрати гідростатичного тиску при зменшенні стовпа палива під час роботи двигуна. У першому наближенні розрахунок процесу наддуву абсолютно елементарний, до такої міри, що не викликає інтересу з наукової точки зору. Докладна теорія процесів наддуву з аналізом відповідних можливих технічних рішень наведена в монографії [182]. Автори зазначених робіт схиляються до думки про витрату газу, котрий наддувають, та, відповідно, тиску наддуву, як про керуючі параметри роботи ракетного двигуна.

Після старту ракети-носія, на активній ділянці траєкторії паливо в баках зазнає різноманітних механічних впливів, наприклад, вібрацій найрізноманітніших частот і амплітуд. Основна проблема на цьому етапі польоту полягає в рухливості палива щодо конструкції паливного баку та жорстко з ним пов'язаної решти частин конструкції ракети-носія. Зрозуміло, що при таких рухах стінки бака відчують додаткові зусилля, що виникають в результаті тиску рухомої рідини. Зусилля ці тим більше, чим більше амплітуда коливань конструкції, а її визначають величини зовнішніх механічних впливів. Однак результат зовнішніх впливів може виявитися дуже істотним, якщо їх частота близька до власної частоти системи бак-паливо (щодо власних частот рідини у баку може бути рекомендована феноменальна серія публікацій професора М. Д. Копачевського [183 – 197], а також роботи [198 – 203], зараз найбільшу зацікавленість викликають власні частоти системи рідина разом з баком [204 – 207]). Описана проблема є окремим випадком загальної проблематики, пов'язаної з динамікою твердого тіла з порожнинами, які містять рідину. Ця проблема вирішувалась різними методами у відповідності з певною ієрархією математичних моделей

гідромеханіки [208 – 224]. Зрозуміло, найбільш простою з можливих для застосування в даному випадку математичних моделей руху рідини є модель потенційного течії ідеальної нестисливої рідини. При розв'язанні загальної задачі про динаміку твердого тіла з порожнинами, повністю або частково заповнених рідиною, математична модель потенційного течії ідеальної нестисливої рідини представляється на рівні приєднаних мас, такий підхід відрізняється простотою і алгоритмічністю, але для не повністю заповненого бака, в якому переміщується рідина, такий підхід недостатньо раціональний, і було б бажано замінити використання приєднаних мас прямим розрахунком потенційного руху рідини з визначенням тиску з інтеграла Коші-Лагранжа. Однак припущення про потенційність розглянутої течії було задовільним на початкових етапах розвитку ракетно-космічної техніки, коли паливний бак представляв собою порожню ємність, а на сучасному етапі паливний бак є складною конструкцією, складові якої можуть виявитися джерелами завихреності в потоці. Питання про вибір математичної моделі вихрового течії у вигляді рівнянь Ейлера, рівнянь Нав'є-Стокса (з ефективними коефіцієнтами, якщо течія турбулентна) [225 – 228], рівнянь Рейнольдса для турбулентної течії або моделі в'язко-нев'язкої взаємодії представляється вельми нетривіальним, а рішення його, як це не парадоксально, залежить від передбачуваного методу чисельного розрахунку. Дійсно, на практиці мають місце істотно тривимірні області складної геометричної форми, а при застосуванні традиційних чисельних методів скінченних різниць та скінченних елементів основні труднощі чисельного дослідження визначаються саме формою області, а різниця між методиками розрахунків для рівнянь Ейлера та Нав'є-Стокса полягає в необхідності згущення розрахункової сітки поблизу твердих стінок для рівнянь Нав'є-Стокса, щоб врахувати наявність примежового шару, а при використанні тих же методів розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса і Рейнольдса, застосованих спільно з деякою моделлю турбулентності, розходження в обчислювальних витратах виявиться зовсім незначним. Зазначені обставини послужили основною причиною виниклої останнім часом тенденції розв'язувати всі задачі про внутрішні течії на підставі осереднених по Рейнольдсу рівнянь Нав'є-Стокса і

деякої моделі турбулентності, не звертаючи уваги на можливі постановки задачі, спрощені завдяки використанню простих математичних моделей. Такий підхід, застосований на основі пакета прикладних програм, безумовно помітно економить час дослідників та проєктантів і зводить проблеми точності і якості розрахунку, що проводиться, до питання про потужність обчислювальної техніки, яка використовувалася. Принципово інакше справа обстоїть при застосуванні альтернативних чисельних методів, зокрема методів обчислювальної теорії потенціалу та лагранжевих методів, що відносяться до тематики дослідження цієї роботи, а також алгоритмів теорії в'язко-нев'язкої взаємодії. Для потенційних течій альтернативні методи і особливо метод граничних елементів демонструють істотно більш високу точність розрахунку та більш високу ефективність у порівнянні з традиційними чисельними методами, що ж стосується рівнянь Ейлера та Нав'є-Стокса, то тут комбінований метод граничних елементів та дискретних вихорів цілком з часом зможе конкурувати з традиційними підходами, але у випадку розрахунку турбулентних течій, щоб дати відповідь на поставлене питання, ще належить провести дуже суттєві дослідження. Оскільки розглянутий клас задач привертає пильну увагу фахівців вже протягом досить тривалого часу [208 – 230], історія питання включає безліч досягнень, проте загальна ситуація з розрахунком як окремих рухів рідини в баку, так і загальної динаміки тіла з порожнинами, частково або повністю заповненими рідиною, ще дуже далека від задовільної. Автор цього дослідження вважає, що застосування чисельних методів теорії потенціалу спільно з моделлю потенційних течій ідеальної нестисливої рідини забезпечить істотний прогрес в даній області, що дозволить оптимізувати конструкцію бака і забірних пристроїв, а також дозволить зменшити пульсації в роботі двигуна і коливання ракети-носія в цілому, і, в решті решт, знизить залишки незабору палива. В теперішній час метод граничних елементів вельми успішно застосовується для розрахунку малих коливань рідини в баку [205 – 207], але предметом сучасного наукового інтересу є рухи рідини в баку з великою амплітудою, що відповідає маневру на активній ділянці траєкторії, сильному зовнішньому механічному впливі на ракету-носії на активній ділянці

траєкторії та моменту виключення двигуна. Важливість даного класу задач є очевидною, оскільки при сплеску рідини в ту ж сторону від осі виробу зміщується центр мас системи, а, оскільки вектор тяги двигунів відцентрований щодо тієї ж вісі, виникає небажаний нерозрахований момент сили тяги щодо центру мас рухомого об'єкту, який розгортає ракету-носії. Остання обставина не дозволяла проводити на активній ділянці траєкторії високоенергетичних маневрів, тобто маневрів за рахунок сили тяги маршових двигунів.

Враховуючи великі витрати палива в ракетних двигунах другої і особливо першої ступеней на активній ділянці траєкторії, слід побоюватися виникнення кавітації в патрубках системи живлення двигунів, де швидкість течії компонентів палива максимальна [231]. Попадання кавітаційних бульбашок в турбонасосні агрегати двигунів з можливим подальшим їх схлопуванням в системах подачі палива може призвести до пошкодження системи живлення в цілому. Для одноразових систем, можливо, виникнення кавітації і не дуже небезпечно, оскільки тривалість роботи двигуна невелика, і навіть розвинена кавітація, а немає гарантії, що вона встигне розвинутися за обмежений час, не встигне завдати конструкції істотні пошкодження. Однак для багаторазових систем ракет-носіїв або для двигунів, призначених для багаторазового запуску, навіть обмежене пошкодження, повторене кілька разів, може виявитися дуже небезпечним. Наразі, історія ракетно-космічної техніки та космонавтики рясніє складними для пояснення катастрофами та аваріями під час передстартової готовності та на активній ділянці траєкторії, і не можна виключити кавітацію зі списку причин цих аварій. Тому для забезпечення високого рівня безпеки сучасної ракетної техніки та космонавтики слід для кожної з рушійних систем на рідинному паливі, що проектується, проаналізувати можливість виникнення і розвитку кавітації. Як відомо, існує два основних види кавітації – гідродинамічна і ультразвукова (акустична). Теоретичні основи розрахунку для обох цих випадків добре відомі на теперішній час, тому не будемо на них зупинятися, однак при старті ракети носія можуть проявлятися вібрації та коливання всіх можливих частот та амплітуд, що сприяють появі акустичної кавітації, а в процесі зливу

палива з бака створюються умови для виникнення гідродинамічної кавітації. Тобто, в паливному баку і, особливо, у системі живлення ракетного двигуна на рідинному паливі присутні умови для виникнення і розвитку кавітації комбінованого типу, яка ще недостатньо вивчена до теперішнього часу. Виникнення і зростання кавітаційних бульбашок залежить від температури рідини, тиску в ній і наявності в рідині зародків кавітаційних бульбашок і парових бульбашок. Всі ці параметри залежать від передісторії процесів тепломасообміну в баку і в патрубках системи живлення, а також від структури течії компонентів палива при зливів та наддуві бака. Якщо у течії палива не встигла виникнути і розвинути повномасштабна турбулентність, а це можливо з огляду на швидкоплинність процесу зливу, то зростання кавітаційних бульбашок може бути описане в рамках принципу «частинка в комірці», правда реальні форми комірок є досить складними фігурами, але практика розрахунків за принципом «частинка в комірці» показує, що вони з достатньою точністю можуть бути апроксимовані тілами канонічної геометричної форми, наприклад, кубами, прямокутними паралелепіпедами, кулями, циліндрами і так далі, в центрі яких розташована зростаюча парова бульбашка. Розвиток кавітації, тобто, зростання бульбашки в цьому випадку зводиться до звичайної задачі Стефана в комірці.

Після виключення ракетного двигуна ракета-носій, включаючи ступені, які ще не відпрацювали, та корисне навантаження, продовжують рухатися за інерцією, в результаті чого опиняються в стані ефективної невагомості або, правильніше сказати, мікрогравітації. Пояснимо різницю між цими термінами та відповідними їм фізичними станами. Термін невагомість означає відсутність будь-яких масових сил і може ставитися як до тіл, що знаходяться у вакуумі, так і до тіл, що знаходяться в рідині або газі. Ефективна невагомість означає, що малі масові сили в системі присутні, але в силу малості скільки-небудь помітного впливу на процеси, що відбуваються в розглянутих системах, не надають. Нарешті, термін мікрогравітація означає, що в розглянутій системі все-таки присутні масові сили, але вони малі у порівнянні з деяким еталоном. Питання про вибір такого еталону, з яким можна було б порівнювати масові сили, щоб переконатися в їх малості,

залишається відкритим. Як правило, в прикладних дослідженнях в якості еталону гравітаційної сили використовують силу тяжіння на поверхні Землі (іноді зручніше оперувати з прискоренням вільного падіння також на поверхні Землі), але такий вибір представляється вельми сумнівним: чому на поверхні Землі, а не Марсу, Венери і Сонця? Справедливості заради, слід зазначити, що для штучних супутників Землі, які складають левову частку сучасної космонавтики, такий вибір досить коректний і навіть зручний. Які ж масові сили, що діють на космічні апарати, що знаходяться в інерційному польоті? В першу чергу, це сили інерції, викликані силами, які збурюють, що впливають на космічний апарат. Досить повний огляд таких сил, включаючи гравітаційні впливу інших небесних тіл, механічні рухи всередині літальних апаратів, в тому числі рухи космонавтів, якщо вони там присутні, сонячний вітер, гальмування верхніми розрідженими шарами атмосфери, сили самогравітації, дана в монографії [229]. Оцінки для сил самогравітації наведені в монографії А. Д. Мишкіса з співавторами [230].

В умовах невагомості в не повністю заповненому баку під дією поверхневих сил і, можливо, сил змочування рідина займає області, що мають форму, досить незвичну для наземних умов [232 – 254]. Зокрема, не торкаючись твердих поверхонь, під дією поверхневих сил рідина приймає форму з мінімальною площею поверхні, тобто, сферичну, а на гладкій плоскій твердій поверхні – форму усіченої сфери. На складних підстилаючих поверхнях можливі більш складні форми поверхні рідини. Питання про стійкість таких поверхонь для різних форм і варіантів підстилаючих поверхонь вичерпно повно поставлено і досліджено у вже згадуваній монографії А. Д. Мишкіса з співавторами [230]. Якщо маса рідини торкається твердої поверхні, то крім сил поверхневого натягу значну роль відіграють сили змочування, наприклад, при змочуванні внутрішньої поверхні паливного бака рідина в баку може розподілитися у вигляді тонкого шару на цій поверхні. Механізм формування окремих об'ємів рідини при переході від умов перевантаження до умов мікрогравітації (ефективної невагомості) був абсолютно незрозумілий до самого останнього часу. Справа в тому, що в дослідженнях з цього питання неявно передбачалося миттєве зникнення

масових сил при відключенні двигуна і переходу системи в стан інерційного польоту, однак, в момент вимкнення двигуна паливо рухається з деякою швидкістю відносно стінок та інших конструкцій паливного бака, і після відключення двигуна паливо буде продовжувати рухатися за інерцією до того моменту, доки сили в'язкості не погасять його залишкову кінетичну енергію повністю. Проте залишковий рух вже буде класичним рухом з вільною поверхнею, яка визначається крім умов на вільній поверхні ще й силами змочування, і силами поверхневого натягу. В залежності від початкових швидкостей і сил, прикладених до рідини, остання може або сегментуватись на окремі сферичні маси рідини, що плавають в газі, на нерухомі усічені сферичні, поверхневі кулі та інші за формою маси рідини, що прикріплені до внутрішньої поверхні бака або інших твердих поверхонь, що знаходяться всередині бака. Дослідження впливу залишкових полів швидкостей на рух рідини в баку розпочато відносно недавно [255].

Якщо паливо в баку у момент переходу в стан ефективної невагомості було сильно сегментовано, або значна його частина виявилася розташованою на стінках бака, що знаходяться далеко від забірної пристрою, при повторному включенні двигуна, якщо таке передбачено, може виникнути прорив газової фази в патрубки системи живлення двигуна, що перешкодить виходу двигуна на розрахунковий режим, а, можливо, і зовсім позбавить його працездатності. Щоб уникнути подібної ситуації, розробляють так звані системи забезпечення суцільності палива. У більшості випадків системи забезпечення суцільності палива ґрунтуються на дії сил змочування. Не зупиняючись докладно на всій різноманітності систем забезпечення суцільності палива, зазначимо лише, що найбільш ефективними з них вважаються сітчасті фазороздільники, які являють собою сітчасту поверхню певної форми, що утримує за рахунок змочування рідину поблизу забірної пристрою. Зрозуміло, що сітчасті фазороздільники, якщо вони встановлені в баку, паливо з якого використовується на активній ділянці траєкторії або використовується при декількох включеннях двигуна, працюють в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. На жаль, до цього часу не було проведено досліджень режимів роботи сітчастих фазороздільників при залишкових

рухах палива після відключення ракетного двигуна, однак для випадку течій при скінченних числах Рейнольдса вдалося запропонувати досить просту математичну модель течії близько сітчастих фазороздільників. Основна ідея цієї моделі полягає в тому, що немає ніякої необхідності розглядати обтікання тонкого сітчастого тіла в рамках моделі в'язкої рідини. Дійсно, в'язкість при помірних і великих числах Рейнольдса у зовнішніх течіях проявляється в примежових шарах, тобто тонких шарах рідини, прилеглих до твердої поверхні і маючих специфічну структуру. Однак на пористій поверхні примежовий шар не формується, оскільки там, де рідина всмоктується в пори пористого тіла, загальмована рідина з примежового шару йде у пористу середу, а там, де рідина з пористого тіла потрапляє в потік, вона відтісняє зовнішню течію та утворює з останньою контактний розрив швидкостей або вихрову пелену. Звичайно, можна припускати, що не весь примежовий шар всмоктується у пористе тіло або на поверхні сітчастого тіла відсутня різниця тисків, внаслідок чого через сітчастий фазороздільник не відбувається нормальної течії, але такі припущення сприймаються надто екзотичними. Застосування зазначеної моделі нерідко позбавляє від необхідності проводити розрахунки течій всередині баків в рамках моделі в'язкої рідини.

Наступне питання, яке хотілося б розглянути, є процеси гідродинаміки та тепломасообміну в великих масах рідини в умовах мікрогравітації. Питання це в останні роки був ключовим у ряді національних програм з мікрогравітації. У звичайних наземних умовах, коли течії відбуваються в широких діапазонах чисел Рейнольдса і Пекле, як правило (крім відносно рідкісних випадків малості чисел Рейнольдса і Пекле, які якраз і відповідають розглянутому класу процесів в умовах мікрогравітації), в рівняннях течії домінують конвективні члени, а в'язкі члени і додаткові механізми, що впливають на структуру потоку, надають тільки малі або локальні впливи. Інші ж фізичні ефекти, а до них відносяться, наприклад, термодифузія і пов'язана дифузія, ефект Марангоні, термофорез, дифузіофорез, самогравітація, поверхневі сили на поверхнях рідини малої кривизни вважаються знехтовно малими і враховуються лише в дуже

обмеженому числі спеціальних випадків. Як правило, не враховуються й інші малі ефекти, подібні гідродинамічному ефекту фазового переходу (стефановська течія). Абсолютно протилежним чином справа йде в малих геометричних масштабах (мікрогідродинаміка) та в умовах мікрогравітації. Оскільки вимушена конвекція в зазначених двох останніх випадках мала або відсутня зовсім, а вільна конвекція мала внаслідок малого прискорення вільного падіння, то в подібних системах домінують дифузійні ефекти, названі вище, а саме в'язкість, теплопровідність, дифузія, про що й свідчить малість чисел Рейнольдса і Пекле. Але інші малі ефекти, також перераховані вище, вже не обов'язково будуть знехтовно малі в порівнянні з дифузійними ефектами, а можуть бути сумірними з ними або просто малими (меншими на порядок). Тобто урахування зазначених ефектів, у вищій мірі, бажане для забезпечення прийнятної точності розрахунків. Але урахування ефектів Дюфора, Сорє, а також різних форм пов'язаної дифузії змушує в якості математичної моделі процесів дифузійного тепломасообміну використовувати крайові задачі для системи рівнянь Онзагера, яка, як відомо [256 – 262], має специфічні труднощі, пов'язані з різномасштабністю кінетичних коефіцієнтів, які ведуть до проблем в розрахунку. Ідея використання крайових задач для системи рівнянь Онзагера в якості математичних моделей процесів тепломасообміну в умовах мікрогравітації належить О. В. Ликову [263], проте згодом вона не була розвинена і використана належним чином. Більш того, ряд процесів в умовах мікрогравітації виявляються малими по характерним величинам або повільними в силу малості прискорення вільного падіння, наприклад, мова йде про слабку вільну конвекцію, флотацію та седиментацію об'єктів дисперсної фази. Перераховані ефекти та фізичні явища, а їхній перелік тут далеко не повний, мають різні фізичні, геометричні та часові масштаби, і, щоб коректно проаналізувати їх взаємний вплив, розглянуті системи слід піддати асимптотичному аналізу, нерідко багатofакторному. Тобто, для розглянутих процесів ефективними виявляються не загальні математичні моделі, що враховують весь спектр релевантних ефектів, а їх окремі випадки, отримані за допомогою асимптотичного аналізу загальної моделі для умов,

що відповідають певним класам завдань. Саме цю ідею запропонував і реалізував в практичних дослідженнях автор цього дослідження. Ефективність розв'язання отриманих асимптотичних крайових задач, які, як правило, лінійні, забезпечується застосуванням для їх чисельного аналізу методу граничних елементів у високоточних і високоефективних алгоритмічних реалізаціях, запропонованих і розроблених автором представленої роботи сумісно з Ю. В. Бразалук. Необхідні постановки задач, алгоритми їх розв'язання та отримані результати читач може знайти, як далі у цьому тексті, так і в публікаціях названих авторів, включених в список література, а також підготовлених до друку публікаціях, які, як сподівається автор, побачать світ найближчим часом.

Малість чисел Рейнольдса в розглянутих задачах про рух в'язкої рідини і процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації безумовно передбачає застосування специфічних асимптотичних математичних моделей гідродинаміки – крайових задач для системи рівнянь Стокса та крайових задач для системи рівнянь Озеєна. Огляд відповідних задач і методів їх розв'язання частково наведений вище, а частково буде дано нижче, тут же тільки відзначимо, що специфіка розглянутих в даній роботі проблем змусила автора звернутися до узагальнень традиційних моделей у вигляді крайових задач для системи рівнянь Стокса та крайових задач для системи рівнянь Озеєна і використовувати замість них асимптотичні розкладання А. Уайтхеда для крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса, системи рівнянь конвективного тепломасообміну та системи рівнянь руху і тепломасообміну багатозфазних середовищ. В якості основного чисельного методу розв'язання зазначених задач використовувався метод граничних елементів.

Використання моделі повільних течій у обмеженому просторі в умовах мікрогравітації не обмежується проблематикою процесів усередині паливних баків ракет-носіїв та космічних літальних апаратів. Приблизно з початку 70-их років минулого сторіччя у Радянському Союзі та Сполучених Штатах Америки отримала значного розповсюдження та популярності ідея космічного виробництва. З практичної точки зору ця ідея зводиться до

визнання необхідності розгорнути у космосі деякі виробництва, котрі ґрунтувалися би на використанні унікальних умов космічного простору та змогли б хоча б в деякій мірі, частково компенсувати космічним державам їх величезні витрати на дослідження космосу. В першу чергу, унікальною умовою, що має місце у космосі, виявилася мікрогравітація. Низка проектів передбачала отримання у космосі матеріалів з унікальними властивостями, створення глобальних енергетичних та інформаційних систем і таке інше. Ідеї космічного виробництва детально описані у монографії [264]. Зі всього цього на поточний момент реалізовано тільки глобальні інформаційні системи зв'язку та дослідження Землі з космосу. Однак за майже 50 років існування ідея індустріалізації космосу стимулювала величезні за обсягом наукові дослідження [265 – 295], у тому числі й феноменальні за масштабами програми орбітальних станцій. Однак складова програм індустріалізації космосу, яка викликала найбільші сподівання, а саме космічне матеріалознавство, не досягла бажаних результатів. Ці задачі розпочалися зі спроб отримати в умовах мікрогравітації речовини високої частоти, отримання яких неможливо у наземних умовах через вільну конвекцію та інші гравітаційні ефекти. Однак у зразках, отриманих у орбітальних експериментах, спостерігалася «смугастість», пояснити яку теоретично не вдалося. На думку В. І. Полежаєва – одного з провідних теоретиків цих досліджень, що проводилися під загальним керівництвом В. С. Авдуського, причиною такого ефекту могли стати слабка вільна конвекція, температурно-капілярна (термокапілярна) та концентраційно-капілярна конвекція, однак на момент виходу препринтів [296 – 298] промодельовати зазначене явище не вдалося. З іншого боку, у 2004 під час доповіді [36] автор роботи, що представляється, мав дискусію з В. І. Полежаєвим щодо впливу ефектів Дюфора та Сорє на процеси фазових переходів в умовах мікрогравітації. Точка зору В. І. Полежаєва на це питання була різко скептичною, однак через певний час у згаданих вже препринтах [296 – 298] В. І. Полежаєв оцінював цей напрямок як перспективний. Однак зі смертю професора В. І. Полежаєва ця серія публікацій зупинилася, і автору даної роботи невідомо, наскільки В. І. Полежаєв та його співробітники просунулися у справі застосування

системи рівнянь Онзагера в якості математичної моделі тепломасообміну в умовах мікрогравітації.

На теперішній час більшість космічних країн мають національні програми дослідження мікрогравітації, як окремі програми, чи розділи у національних космічних програмах. На жаль в Україні такої програми немає, незважаючи на наявність потужних наукових шкіл [299].

1.3 Висновки до розділу 1

Грунтуючись на вищевикладених оглядах літератури та аналізі історії і сучасного стану питання, можна зробити наступні висновки:

1. Течії при малих числах Рейнольдса є добре відомим на протязі вже тривалого часу та досить ретельно дослідженим розділом сучасної гідромеханіки.

2. Розвиток даного напрямку історично стримувався і зараз стримується парадоксами Стокса та Уайтхеда, які є наслідком асимптотичного характеру математичних моделей течій при малих числах Рейнольдса.

3. Для задач зовнішнього обтікання виділяють два наближення (нульові наближення у асимптотичному розкладанні рівнянь Нав'є-Стокса за числом Рейнольдса – розкладанні Уайтхеда) Стокса та Озеєна. Повне розкладання Уайтхеда для задач зовнішнього обтікання розбігається, що складає основний зміст парадоксу Уайтхеда.

4. Для внутрішніх задач розкладання Уайтхеда збігається, але для внутрішніх задач не має сенсу наближення Озеєна. Тому доцільне роздільне за інструментарієм чисельне дослідження внутрішніх та зовнішніх задач про течії при малих числах Рейнольдса.

5. Рівняння Стокса представляють собою систему рівнянь у частинних похідних еліптичного типу, у дуже невеликій кількості випадків виникає потреба розглянути рівняння Стокса у нестационарному формулюванні, що відноситься до параболічного типу. Існування та єдність розв'язків системи рівнянь Стокса доведена О. О. Ладиженською.

6. У плоскому випадку (внутрішня течія) система рівнянь Стокса може бути зведена до крайової задачі для бігармонічного рівняння відносно функції течії.

7. Застосування традиційних чисельних методів скінченних елементів та скінченних різниць до системи рівнянь Стокса практично не підвищує ефективність загальної розрахункової схеми, однак метод граничних елементів виключно ефективний саме для системи Стокса, як лінійної еліптичної системи, що підтверджується численними публікаціями.

8. Метод граничних елементів та наближення Стокса раніше практично не застосовувалися до багатофазних течій, хоча таке застосування у лагранжевому (об'єкто-траекторному) підході представляється цілком очевидним.

9. Ще однією актуальною, але маловивченою задачею являється багатофазна течія Стокса. У необмежених областях для задач такого класу стандартним є метод М. Смолуховського. Для задач у обмежених чи напівобмежених областях перспективним підходом представляється комбінація методу граничних елементів з методом М. Смолуховського.

10. Дослідження течій рідини та газу, а також процесів тепломасообміну в них, що мають місце у елементах ракетно-космічної техніки виключно актуальні у теперішній час внаслідок важливості ракетно-космічної техніки для сучасних наукових досліджень, народного господарства та оборони. Розгляд у роботі, що пропонується, а також у відповідному огляді літератури був обмежений ракетами та іншими космічними літальними апаратами на рідинному паливі, а аналіз був спрямований на відповідні процеси усередині паливних баків.

11. Паливо у баках ракет-носіїв на рідинному паливі під час передстартової підготовки, при старті та на активній ділянці траєкторії зазнає механічних, теплових та різних фізико-хімічних впливів, у тому числі таких, що призводять до повільних фазових переходів та рухів палива як багатофазного (бульбашкового) середовища, а це важливо для забезпечення роботи ракетного двигуна у розрахунковому режимі. Але найбільше значення для остаточного стану палива на етапі інерційного польоту має рух

палива та його фазовий склад на момент відключення двигуна. Запуск двигуна на орбіті під час інерційного польоту представляє собою одну із найскладніших технічних проблем сучасної ракетно-космічної техніки.

12. Проблема стану палива у баку під час інерційного польоту космічного апарату на теперішній час досліджена явно недостатньо, наприклад, не вивчалися повільні рухи палива усередині баку під впливом слабких факторів, наприклад, слабка вільна конвекція, стефановські течії, температурно-капілярна та концентраційно-капілярна конвекція, седиментація та флотація у багатофазних середовищах під дією слабких масових сил, явища термофореза та дифузіофореза у багатофазних середовищах. Асимптотичні математичні моделі течій в'язкої рідини та тепломасообміну при малих числах Рейнольдса та Пекле до перелічених в цьому пункті проблем теж раніше не застосовувалися.

13. Однією з найбільших тенденцій сучасних космічних досліджень являється індустріалізація космосу, у якій центральне місце якщо не за результатами, то за сподіваннями займає космічне матеріалознавство. Однак сподівання на отримання надчистих матеріалів в умовах мікрогравітації виявилися марними. Автором даної роботи була висунута гіпотеза про те, що це результат ефектів Дюфора і Сорє, тобто застосовувати в якості математичної моделі систему рівнянь Онзагера.

14. В цілому, для дослідження процесів в умовах мікрогравітації не застосовувалися ні асимптотичні підходи, ні методи теорії потенціалу, незрозуміло чому, оскільки малі визначальні параметри напряму явно входять у математичні моделі, а методи теорії потенціалу вельми ефективні для отриманих лінійних задач.

РОЗДІЛ 2

Нові алгоритми обчислювальної теорії потенціалу

2.1 Обчислювальна теорія потенціалу: сучасний стан і перспективи використання у механіці суцільного середовища та ракетно-космічній техніці

Даний параграф містить короткий огляд сучасного стану обчислювальної теорії потенціалу у той частині, що стосується тематики дисертаційної роботи, та короткий опис алгоритмів, які увійшли до пакету програм методу граничних елементів, що був розроблений за участю автора и взятий за основу при написанні дисертації. Параграф представляє собою скорочений варіант статті [22, 23].

Сучасний стан обчислювальної механіки характеризується крайньою нерівномірністю розвитку різних напрямків. Така ситуація склалася історично в результаті стрибкоподібного розвитку чисельних методів. Історично першим розбудовувався метод скінченних різниць, і переважна більшість задач, для яких алгоритми цього методу були ефективні, були розв'язані досить давно. Потім аналогічний прорив стався у методі скінченних елементів. У результаті було створено велику кількість комплексів і пакетів прикладних програм, як комерційного, так і некомерційного призначення, заснованих на згаданих чисельних методах. Вказане програмне забезпечення охоплює переважну більшість задач обчислювальної механіки, що виникають як у теоретичних, так і в інженерних розрахунках, і є досить надійним і ефективним. Магістральним напрямом розвитку традиційних чисельних методів є модифікація й удосконалення існуючих алгоритмів, що разом з постійним збільшенням потужності обчислювальної техніки дає можливість чисельно розв'язувати все більш складні задачі із зазначених класів задач, для яких традиційні чисельні методи ефективні. Однак у ході розвитку обчислювальної механіки накопичилось значне число задач, для

яких традиційні чисельні методи неефективні. До подібних задач слід віднести, наприклад, багатомасштабні явища, що вимагають підвищеної точності розв'язку; задачі зі специфічними формами нелінійності, задачі з локалізованими ефектами. Хоча названі задачі становлять лише невелику частину обчислювальної механіки, той факт, що вони залишаються невирішеними протягом довгого часу, створює труднощі у розвитку відповідних дисциплін у цілому. Таким чином, у сучасній обчислювальній механіці склалась істотна нерівномірність розвитку різних напрямків.

Для чисельного розв'язку задач, що виявились непридатними для розв'язку їх традиційними чисельними методами, розбудовуються так звані альтернативні методи, однак рівень розвитку альтернативних методів залишає бажати багато більшого. Дана ситуація може бути пояснена цілим рядом причин. Зокрема, альтернативні методи специфічні й не універсальні, тобто, область застосування кожного з них суттєво обмежена. Крім того, комерційна зацікавленість у розвитку альтернативних методів набагато нижче, ніж для основних, оскільки коло розв'язуваних ними задач незначне і містить у собі переважно теоретичні, а не прикладні проблеми. І, нарешті, як правило, альтернативні методи набагато складніші традиційних, менш алгоритмічні, ніж останні, і, отже, набагато складніші в програмній реалізації. Усе вищесказане привело до того, що альтернативні чисельні, численно-аналітичні й наближені методи на сьогоднішній день розроблені досить слабо й досліджені явно недостатньо.

Одним з найбільш серйозних і розвинених напрямків альтернативних методів обчислювальної механіки є чисельні методи теорії потенціалу, зокрема, метод граничних елементів. Розвитку даного напрямку сприяло те, що він ґрунтується на теорії потенціалу – класичному, добре розробленому й широко відомому розділі математичної фізики, що виключило необхідність теоретичного дослідження основних етапів застосування відповідних алгоритмів.

Наявність значної кількості досить повних монографій як по теорії потенціалу, у цілому, так і з різних окремих її розділів [300-334], а також монографій і тематичних збірників наукових праць по обчислювальним методам теорії потенціалу [335-360] позбавляє від необхідності приводити в даній роботі повний огляд літератури й викладати досить заплутану й суперечливу історію питання. Обмежимося лише коротким аналізом тенденцій розвитку розглянутого напрямку. Основи теорії потенціалу були закладені Дж. Гріном [330] в 20-і роки XIX століття. Практично одночасно з Гріном теорію потенціалу почали розробляти К. Гаусс, О. Коші та М. В. Остроградський. При цьому, якщо Грін позиціонував теорію потенціалу як метод побудови аналітичних розв'язків в областях канонічної форми, то Гаусс і Коші розглядали теорію потенціалу як окремий напрямок математичної фізики. Подальше поширення теорії потенціалу на нові класи задач відбулося в роботах Пуассона, Кірхгофа, Стокса, Кельвіна та Сомільяни, Д. Гільберта та А. Пуанкаре. Неоднозначне значення для розвитку теорії потенціалу представляла розвинена Фредгольмом теорія лінійних інтегральних рівнянь. З одного боку ця теорія дала імпульс для розвитку методів розв'язку й дослідження властивостей лінійних інтегральних рівнянь, але з іншого боку вона значно обмежила інтерес до інтегральних рівнянь першого роду, які трактувалися як некоректні задачі, у тому числі й до граничних інтегральних рівнянь. Незважаючи на те, що ця омана була переборена В. Д. Купрадзе [300] на початку шістдесятих років, ситуація із граничними інтегральними рівняннями першого роду із сингулярними ядрами дотепер залишається неясною і є численні суперечливі думки щодо даного питання.

Середина двадцятого століття ознаменувалася подальшим розширенням сфери застосування теорії потенціалу в математичній фізиці й поглибленням цієї теорії. Цей період охарактеризувався появою значних спеціалізованих монографій, серед яких хотілося б відзначити монографію О. Келлога [301], монографію М. М. Гюнтера [302], монографії С. Г. Михлина [303, 304], фундаментальну працю М. І. Мусхелішвілі [305] і вже згадувану

книгу В.Д. Купрадзе. Наведений короткий перелік у жодному разі не вичерпує величезну кількість робіт у даному напрямку, а відзначає лише найбільш фундаментальні з них, що найбільше вплинули на подальший розвиток чисельних алгоритмів теорії потенціалу.

Історія розвитку чисельних методів теорії потенціалу досить складна, заплутана й суперечлива. Скільки-небудь повний виклад історії даного питання вимагає окремого дослідження, яке виходить за рамки даної роботи, тому обмежимося вказівкою тільки загальних тенденцій розвитку розглянутого напрямку. Ідея чисельного розв'язку граничних інтегральних рівнянь досить очевидна й виникла вона неодноразово у різних дослідників. Однак розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь із повністю заповненою матрицею, що виникає при чисельному розв'язку зазначених задач, вимагав значних ресурсів ЕОМ і до початку розвитку електронно-обчислювальної техніки взагалі не міг бути здійсненим, а на ранніх етапах її розвитку приводив до настільки значних обчислювальних труднощів, що створював подібні спроби невиправданими. Подальший розвиток електронно-обчислювальної техніки безпосередньо привів до того, що було сформульовано метод граничних елементів. Повне формування методу було завершено виходом монографій [320, 321], де міститься досить повна бібліографія початкових етапів розвитку методу. Наслідком вищезгаданих труднощів початкового етапу розвитку методу граничних елементів і попередніх йому панельного методу, методу джерел і інших чисельних реалізацій теорії потенціалу є повна плутанина в пріоритетах і тенденціях розвитку цієї області до початку 80-х років ХХ століття.

Не вдаючись докладно в історичні аспекти розвитку методу граничних елементів, відзначимо тут лише два принципові факти, що мають велике значення для даної роботи. З кінця 70-х років ХХ століття розвиток методу граничних елементів супроводжувався активною рекламною компанією, в ході якої метод граничних елементів позиціонувався як універсальний чисельний метод високої точності й ефективності, що перевершує інші

чисельні методи. Така оцінка є невиправдано завищеною. Насправді метод граничних елементів має відчутні переваги тільки для лінійних однорідних задач і спеціальних класів неоднорідних задач еліптичного типу, а що стосується еволюційних, нелінійних і навіть лінійних неоднорідних задач, те тут ситуація часто виявляється прямо протилежною, і необхідна розробка спеціальних алгоритмів, щоб забезпечити скільки-небудь ефективно застосування методу граничних елементів.

Загальний алгоритм методу граничних елементів тут викладено з урахуванням останніх тенденцій використання неточних фундаментальних розв'язків і одержання інтегральних рівнянь по границі й області розв'язку стосовно як лінійних, так і нелінійних задач. Нехай є деяке рівняння (система рівнянь) з нелінійним диференціальним оператором N

$$N(u) = f(u, X), \quad (2.1)$$

де X – узагальнений вектор координат; u – шукана функція. Представимо оператор N у вигляді

$$N = L + R_1, \quad (2.2)$$

де L – лінійний оператор; R_1 – нелінійний оператор. Розбивка (2.2), зрозуміло, не єдина. Визначимо неточний фундаментальний розв'язок (котрий іноді називається параметрикс або функція Леви (Levi), що, втім, не зовсім вірно) як розв'язок рівняння

$$L(\varphi) = \delta(X, X_0) + R_2(\varphi, X, X_0), \quad (2.3)$$

де X_0 – точка спостереження; R_2 – деякий диференціальний оператор (функція).

Обмежимо заради стислості даний розгляд випадком скалярних диференціальних операторів другого порядку. Тоді запишемо в області D із межею Γ інтегральне представлення для стаціонарного випадку у вигляді

$$\begin{aligned}
c(X_0)u(X_0) &= \int_{\Gamma(u)} u(X) \frac{\partial \varphi(X, X_0)}{\partial n} dS(X) - \\
&- \int_{\Gamma(u)} \frac{\partial u(X)}{\partial n} \varphi(X, X_0) dS(X) + \int_{D(u)} R_1(u, X) \varphi(X, X_0) dX - , \\
&- \int_{D(u)} R_2(\varphi, X, X_0) u(X) dX + \int_{D(u)} f(u, X) \varphi(X, X_0) dX
\end{aligned} \tag{2.4}$$

де c – функція розташування точки X_0 , визначена як

$$c(X_0) = \begin{cases} 1, X_0 \in D, \\ 1/2, X_0 \in \Gamma, \\ 0, X_0 \notin D, X_0 \notin \Gamma. \end{cases} \tag{2.5}$$

Позначення $D(u)$ й $\Gamma(u)$ вказують на те, що частина межі області розв'язку може бути невідомою і має бути визначена з наступного додаткового співвідношення:

$$\gamma(u, X) = 0, \tag{2.6}$$

яке може бути скінченним, диференціальним, або інтегральним, або може доставляти мінімум деякому функціоналу $J(u, X)$. У якості крайових умов загального виду розглянемо співвідношення

$$q(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}, X) = 0. \tag{2.7}$$

З урахуванням можливих перетворень рівняння (2.3) і підстановки крайових умов введемо два оператори t_1 і t_2 й одержимо узагальнення рівняння (2.4)

$$\begin{aligned}
c(X_0)u(X_0) &= \int_{\Gamma(u)} t_1(u(X), \frac{\partial u(X)}{\partial n}, X) \frac{\partial \varphi(u, X, X_0)}{\partial n} dS - \\
&- \int_{\Gamma(u)} t_2(u(X), \frac{\partial u(X)}{\partial n}, X) \varphi(u, X, X_0) dS + \\
&+ \int_{D(u)} R_1(u, X) \varphi(u, X, X_0) dX - \int_{D(u)} R_2(\varphi, X, X_0) u(X) dX + \\
&+ \int_{D(u)} f(u, X) \varphi(u, X, X_0) dX
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) являє собою найбільш загальне інтегральне рівняння для нелінійних задач еліптичного типу. Поява u в функції φ може бути наслідком попередніх лінеаризаційних перетворень.

Аналог рівняння (2.8) для задач параболічного типу очевидний, і має вигляд

$$\begin{aligned}
 c(X_0)u(X_0, t) = & \int_{t_0}^t \int_{\Gamma(u, \tau)} t_1(u(X, \tau), \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial n}, X, \tau) \frac{\partial \varphi(u, X, X_0, t, \tau)}{\partial n} dS d\tau - \\
 & - \int_{t_0}^t \int_{\Gamma(u, \tau)} t_2(u(X, \tau), \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial n}, X, \tau) \varphi(u, X, X_0, t, \tau) dS d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{D(u, \tau)} R_1(u, X, \tau) \varphi(u, X, X_0, t, \tau) dX d\tau - \\
 & - \int_{t_0}^t \int_{D(u, \tau)} R_2(\varphi, X, X_0, t, \tau) u(X, \tau) dX d\tau + \int_{D(u_0, t=t_0)} u(X, t_0) \varphi(u, X, X_0, t, \tau) dX + \\
 & + \int_{D(u, \tau)} f(u, X, t) \varphi(u, X, X_0, t, \tau) dX d\tau
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

де залежність Γ і D від τ означає можливу рухливість межі, наприклад, внаслідок фазового переходу.

Увесь подальший виклад проведемо на прикладі рівняння (2.8). Вибір операторів t_1 і t_2 , звичайно, у значній мірі довільний, але вдалим слід вважати такий вибір, коли в кожній точці межі значення одного із цих операторів відомо із крайових умов і інших даних. Тоді інтеграл, що містить відомий оператор при $X_0 \in \Gamma$ ($c = 1/2$ – сингулярне інтегральне рівняння) являє собою невластний інтеграл, що сходиться у звичайному сенсі або у сенсі Коші, який обчислюється з певними труднощами. При $X_0 \notin D$, $X_0 \notin \Gamma$ ($c = 0$ – регулярне інтегральне рівняння) такий інтеграл може бути обчислено чисельно з практично будь-якою «розумною» точністю. Розглянемо апроксимацію невідомих величин у рівнянні (2.8). При цьому відзначимо, що традиційний метод граничних елементів припускає також апроксимацію межі й, відповідно, області розв'язку, і, крім того, відомих величин, але перше з

цих питань буде розглянуто нижче окремо, а друге уже згадувався вище. Розіб'ємо межу області Γ деяким чином на частини, які назвемо граничними елементами, так, щоб усередині кожного граничного елемента крайова умова не змінювалась, а область D розіб'ємо деяким чином на скінченні елементи. Взагалі кажучи, необхідно два набори граничних і скінчених елементів: перший – для апроксимації на них невідомих функцій, і другий – для обчислення інтегралів від функцій відомих, при цьому параметри дискретизації другого набору елементів слід вибирати набагато меншими, ніж для першого набору, а порядок апроксимації (порядок квадратурних формул) – вищими. Така ситуація пояснюється ростом числа обумовленості матриці при зростанні числа граничних елементів, а зростання числа обумовленості призводить до зростання загальної похибки, викликані похибкою обчислення правої частини системи. Тому для компенсації зросання числа обумовленості слід добиватися зменшення похибки обчислення правої частини, чого можна добитися тільки шляхом подрібнення відповідних сіток і збільшення порядків апроксимації. Відзначимо також, що при обчисленні інтегралів від відомих функцій (за винятком сингулярних інтегралів) недоцільно використовувати роздільні апроксимації ядра, функції форми, і вагові функції, а слід застосовувати квадратурну формулу до всього підінтегрального виразу. Вводячи роздільну апроксимацію для операторів t_1 і t_2 , можна використовувати або підхід

$$t_1^k(s) = \psi_{t_1}^k(s, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, \alpha_{M_k}^k), \quad (2.10)$$

$$t_2^k(s) = \psi_{t_2}^k(s, \beta_1^k, \beta_2^k, \beta_3^k, \dots, \alpha_{L_k}^k), \quad (2.11)$$

де s – координата точки у внутрішній системі координат k -го елемента; α_i^k , β_i^k – набори довільностей для визначення (апроксимації (2.10) і (2.11) можуть бути застосовані не тільки до граничних елементів, де оператори t_1 , t_2 діють на невідомі функції, але й до інших елементів), або може бути використаний підхід:

$$u^k(s) = \psi_1^k(s, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, \alpha_{M_k}^k), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial n}(s) = \psi_2^k(s, \beta_1^k, \beta_2^k, \beta_3^k, \dots, \beta_{L_k}^k). \quad (2.13)$$

І аналогічно для скінченних елементів: або

$$R^j(X) = \psi_R^j(X, \gamma_1^j, \gamma_2^j, \gamma_3^j, \dots, \gamma_{\gamma_j}^j), \quad (2.14)$$

або

$$u^j(X) = \psi_D^j(X, \gamma_1^j, \gamma_2^j, \gamma_3^j, \dots, \gamma_{\gamma_j}^j). \quad (2.15)$$

Більш складним є питання про вигляд функцій ψ і спосіб входження в них довільних параметрів α , β , γ , що належать визначенню. У переважній більшості робіт за функції ψ використовуються поліноми, а в якості довільностей розглядаються коефіцієнти цих поліномів. Однак використання поліномів для апроксимації обумовлене лише простотою їх застосування, а успішне використання альтернативних апроксимацій у методі скінченних елементів вселяє надію, що подібні апроксимації можна вдало застосувати й у методі граничних елементів. Серед таких апроксимацій, у першу чергу, слід розглянути використання рядів Фур'є замість рядів Тейлора, але, наскільки відомо автору даної роботи, такі спроби не вживались. Взагалі кажучи, довільності α , β , γ можуть входити у функції ψ лінійним або нелінійним образом. Якщо рівняння лінійні, то нелінійність апроксимації перетворює систему, отриману в результаті дискретизації, в нелінійну систему, що, звичайно, неприпустимо. Однак, якщо задача нелінійна, те нелінійний спосіб включення довільних параметрів представляється досить природним. Проте, це коло потенційних можливостей методу граничних елементів на сьогодні не використовується. Іншим важливим аспектом побудови алгоритму чисельного розв'язку рівняння (2.8) є обчислення (апроксимація) інтегралів по області розв'язку. У даному питанні існують три основні підходи. Перший із них і, напевно, найбільш ефективний, полягає в перетворенні інтеграла по

області в інтеграл по її межі; на жаль, таку операцію можна провести далеко не завжди, а лише в невеликому числі випадків. Інший підхід полягає в організації ітераційного процесу, коли задається деякий початковий розподіл шуканої функції усередині області розв'язку, підставляється в (2.8), у результаті чого, варіюючи точку X_0 , можемо отримати нові розподіли шуканої функції усередині області, і так далі, поки процес не зійдеться. Незважаючи на те, що другий підхід реалізовано у переважній більшості робіт, його збіжність належним чином досліджена не була, і оцінки для швидкості збіжності не отримані, хоча слід зазначити, що в більшості тестових розрахунків швидкість збіжності була досить високою. Нарешті, третій підхід полягає в апроксимації інтегралів по області з невідомими вузловими значеннями шуканої функції, що призводить до великої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які вирішуються одним із традиційних методів розв'язку таких систем. До останнього часу такий підхід вважається неефективним, але оскільки він не вимагає обчислення інтегралів на кожному кроці ітерації й допускає локалізацію, яка буде розглянута нижче, то він представляється досить перспективним.

Наведений вище опис є найбільш загальним описом методу граничних елементів із усіх наявних на сьогоднішній день у літературі.

Нижче буде наведено два алгоритми розв'язку лінійних еліптичних крайових задач, які представляються автору найбільш ефективними серед алгоритмів відповідного роду. Регулярний метод граничних елементів, який також називають методом базисних функцій Купрадзе, було запропоновано у монографії [300] і розвинено у роботах [361, 362]. Найважливішими гідностями даного методу є відсутність сингулярних інтегралів і, як наслідок, можливість виключити явну апроксимацію межі області розв'язку, що й було зроблено в роботах [8, 15, 365]. У цих же роботах шляхом чисельного експерименту було переконливо показано, що алгоритм методу граничних елементів без апроксимації границі області розв'язку набагато точніше звичайного методу граничних елементів (у безпосередній близькості межі

області розв'язку погрішність запропонованого алгоритму може виявитися на два порядки меншою, ніж у традиційному алгоритмі [8, 15, 365]).

Протягом досить тривалого проміжку часу в розвитку методу граничних елементів превалювала тенденція збільшення числа задач, до яких застосовувався метод, що досягалося двома шляхами:

а) формулювання нових фізичних задач, які зводяться до вже відомих крайових задач (найбільше число таких задач було сформульовано для рівняння Лапласа);

б) побудова фундаментальних розв'язків для нових лінійних диференціальних операторів.

Результати такого розвитку знайшли відбиття в монографіях [320, 321]. Власне, метод граничних елементів, його алгоритмічна база розвивалася весь цей час достатньо повільно, що також очевидно з монографій [320, 321]. Про це ж також свідчать публікації [335 – 360]. Інтерес до побудови граничних елементів складної внутрішньої топології (криволінійних елементів) і високих порядків апроксимації, виявлений наприкінці 70-х – початку 80-х років ХХ століття, досить швидко поменшав і фактично не був реалізований в обчислювальній практиці. Значні успіхи, досягнуті адаптивними й багатосітковими алгоритмами методу скінченних елементів стимулювали розвиток аналогічних алгоритмів для методу граничних елементів, але, наскільки відомо автору даної роботи, незважаючи на багатообіцяючі теоретичні оцінки таких алгоритмів і результати тестових розрахунків, що підтверджували теоретичні оцінки, вказані алгоритми не отримали широкого поширення в обчислювальній практиці. Фактично граничноелементне програмне забезпечення трохи запізнилося, що разом з відносною обмеженістю поля ефективного застосування алгоритмів призвело до дуже обмеженого використання методів граничних елементів, навіть у тих областях, де вони найбільш ефективні. Ще одним напрямком розвитку методу граничних елементів було його спільне використання з іншими чисельними методами. Однак і отут майже завжди вибирали метод скінченних елементів,

хоча, використання інших підходів могло виявитися куди більш плідним, що й було в решті решт показано для методу дискретних вихорів та методу малого параметра. Проте, в останні роки в розвитку методу граничних елементів настав певний перелом. По-перше, метод граничних елементів стали позиціонувати як засіб високоточного чисельного розв'язку лінійних задач в областях складної геометричної форми. Однак у таких задачах виникають дуже великі матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У цьому плані вирішальним моментом виявилось застосування високоефективних методів розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема, методу сполучених градієнтів. Незважаючи на те, що застосування високоефективних методів значно скорочує час розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, повністю проблеми ефективності це застосування не вирішує, оскільки залишається досить істотним час формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Іншою сучасною тенденцією розвитку методу граничних елементів є використання швидкозатухаючих ядер, що доцільно в кожному разі, але побудова таких ядер є досить складною математичною проблемою. Наведений короткий перелік, зрозуміло, аж ніяк не вичерпує всіх напрямків розвитку обчислювальної теорії потенціалу, але дає загальне уявлення про динаміку її розвитку.

Перспективи використання алгоритмів регулярного методу граничних елементів високого порядку апроксимації зовсім очевидні – підвищення точності розв'язків лінійних крайових задач. Аналогічна ситуація й з алгоритмами, розробленими для лінійних задач із малими збуреннями. Ці алгоритми практично готові для створення прикладного програмного забезпечення й розв'язку актуальних задач, що виникають у мікроелектроніці, мікромеханіці, біотехнологіях та в інших областях техніки й технології. Що стосується створення універсальних, а не спеціалізованих пакетів і комплексів прикладних програм на основі методу граничних елементів, то автор цієї роботи прагнув би ще раз підкреслити своє скептичне відношення до подібної можливості.

Працездатність і ефективність сучасних чисельних методів, зрозуміло, повинна оцінюватися не на лінійних, а на нелінійних задачах. Автоматичний перенос висновків, зроблених для лінійних задач, на задачі нелінійні неможливий, навіть якщо розв'язок нелінійної задачі зведено до розв'язку послідовності лінійних задач. Таким чином, розгляд і чисельний розв'язок нелінійних задач вимагає не тільки розробки спеціальних алгоритмів, але й окремого тестування, яке, як правило, складніше аналогічного тестування лінійної задачі.

Історично теорія потенціалу побудована як засіб розв'язку тільки лінійних задач. Більше того, оскільки інтегральні представлення шуканих функцій безпосередньо засновані на принципі суперпозиції, який фактично еквівалентний визначенню лінійності, лінійність розглянутих задач довгий час вважалася неодмінною вимогою теорії потенціалу. В 20-і роки ХХ століття було розпочато спробу побудувати теорію нелінійних інтегральних рівнянь, однак теорія ця ще й дотепер далека від завершення. Перші спроби сформулювати нелінійні граничні інтегральні рівняння були розпочаті для задач із лінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних і нелійними крайовими умовами, наприклад, для задачі про потенційну течію ідеальної рідини з вільною поверхнею. Огляд таких робіт можна знайти в монографії Сретенського Л. М. [370]. Задачі з нелійними диференціальними операторами згадувалися досить часто (див., наприклад, [306, 311, 314, 315]), але до їхнього практичного розв'язку справа не доходила.

Що стосується нелінійних задач, то в цій області сучасна ситуація в обчислювальній теорії потенціалу дещо суперечлива. З одного боку, метод граничних елементів є, ймовірно, найбільш ефективним для крайових задач з лінійним диференціальним рівнянням і нелійними граничними умовами [334]. З іншого боку, нелінійність рівняння в загальному випадку, як правило, приводить до появи у формулюванні нелінійного неоднорідного члена, який крім усіх проблем, пов'язаних з неоднорідністю вимагає ще й організації

ітераційного процесу. Існує декілька підходів до розв'язку крайових задач для нелінійних рівнянь методами теорії потенціалу:

а) представлення оператора у вигляді суми лінійної та нелінійної частин і «переніс нелінійної частини в праву частину» (метод фіктивних навантажень), що приводить до обчислення інтегралів по області й робить підхід низькоефективним;

б) використання різного роду лінеаризуючих аналітичних перетворень, наприклад, перетворення Кірхгофа;

в) метод «заморожених коефіцієнтів», котрий до самого останнього часу в теорії потенціалу практично не застосовувався, оскільки в цьому випадку невідомі фундаментальні розв'язки, однак розвиток останнім часом методів локалізації дозволив використовувати і цей підхід;

г) застосування для лінеаризації асимптотичних розкладань;

д) лінеаризація за допомогою спеціальних апроксимацій, до яких можна віднести застосування явних за часом схем з обчисленням нелінійних членів на попередньому кроці за часом або апроксимацію завихреності потоку дискретними вихорами;

е) перетворення інтегралів по області, що містять нелінійності, до інтегралів по межі, яке слід вважати найбільш ефективним із усіх існуючих методів розв'язку нелінійних задач методом граничних елементів.

Незважаючи на значну кількість робіт з нелінійних задач теорії потенціалу й різноманітність напрямків розв'язку таких задач, загальну ситуацію в даній області не можна назвати задовільною, і потрібне проведення спеціальних досліджень, розробка нових і вдосконалення існуючих алгоритмів. Як правило, нелінійність у теорії потенціалу намагаються звести до нелінійної неоднорідності, тобто, до додаткового нелінійного джерельного члена в рівняннях. Однак проблема неоднорідності, і, тим більше, нелінійної неоднорідності в сучасній теорії потенціалу фактично не вирішена.

Урахування джерельних членів у загальному випадку доводиться проводити за допомогою інтеграла по області розв'язку (як і урахування початкових умов загального виду в еволюційних задачах), обчислення якого є винятково складною й ресурсномісткою задачею. Проблема обчислення об'ємного потенціалу, тобто інтеграла по області розв'язку, у методі граничних елементів є найважчою із проблем методу, оскільки при прямому обчисленні об'ємного потенціалу в загальному випадку ефективність методу падає катастрофічно. Тому у випадку неоднорідних, більшості нелінійних задач, нестационарних задач із довільними початковими умовами потрібна розробка спеціальних алгоритмів обчислення об'ємних потенціалів. Існує три основні напрямки в обчисленні таких інтегралів:

- а) пряме обчислення;
- б) перетворення до межового вигляду;
- в) обчислення на спеціальних сітках.

Розвиток перерахованих алгоритмів обліку неоднорідності не входить до мети даної роботи. Відзначимо лише, що навіть при застосуванні найбільш ефективних з них проблема зниження ефективності методу граничних елементів для неоднорідних задач повністю не вирішується.

Пряме обчислення інтегралів виявляється абсолютно неефективним. Пояснимо цю тезу. Розглянемо об'ємний потенціал у загальному виді (для простоти обмежимося просторовим випадком еліптичної задачі):

$$\iiint_D \varphi(x, x_0, y, y_0, z, z_0) f(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.16)$$

Пряме обчислення інтегралів виду (2.16) є важким через те, що функція $\varphi(x, x_0, y, y_0, z, z_0)$ є двухточечною функцією, тобто, якщо область D розбита на M скінченних елементів, а її границя на N граничних елементів, то при розв'язку чисто граничної задачі слід обчислити $n \times N \times N$ інтегралів по примежовим елементам (тут n – кількість вузлів коллокації на кожному граничному елементі) і $n \times N \times M$ інтегралів по скінченним елементам. Для розрахунку поля розв'язків усередині області слід обчислити $m \times N \times M$

інтегралів по граничних елементах і $m \times M \times M$ інтегралів по скінченним елементах (тут m – число вузлів на скінченному елементі). Зрозуміло, що при досить великих значеннях M такі обчислення зажадають значних, а іноді величезних ресурсів машинного часу. Якщо прийняти для M оцінку $N^2/16$ (отриману для рівномірно розбитого квадрата), то відношення числа виконаних операцій для однорідної й неоднорідної задач для звичайного методу граничних елементів у найпростішому випадку ($N \times N$ інтегралів по граничних елементах і розрахунок M точок усередині області) складе (при $n = m = 1$):

$$\frac{aN^2 + bN * N^2 / 16}{aN^2 + (a + b)N * N^2 / 16 + bN^4 / 256} = \frac{\frac{256a}{N^2} + \frac{16b}{N}}{\frac{256a}{N^2} + \frac{16(a + b)}{N} + b}, \quad (2.17)$$

де a – кількість операцій, необхідних для обчислення межового інтеграла; b – кількість операцій, необхідних для обчислення інтеграла по скінченному елементу. Відзначимо, що, як правило, $a < b$. При досить значних N вираз в (2.17) прагне до $\frac{16}{N}$, тобто, час розрахунків збільшується в $\frac{N}{16}$ разів, – і це для

методу граничних елементів, що не відрізняється зайвою економічністю. Для кола аналогічне співвідношення складає $\frac{N}{(2\pi)^2}$, що трохи менше, за

попереднє число. У просторовому випадку, приймаючи, що $M \approx \left(\frac{N}{6}\right)^{3/2}$,

отримаємо аналог (2.17):

$$\frac{aN^2 + bN * \left(\frac{N}{6}\right)^{3/2}}{aN^2 + (a + b)N * \left(\frac{N}{6}\right)^{3/2} + b\left(\frac{N}{6}\right)^3} = \frac{\frac{256a}{N^2} + \frac{b(6)^{3/2}}{\sqrt{N}}}{\frac{256a}{N^2} + \frac{(a + b)(6)^{3/2}}{\sqrt{N}} + b}. \quad (2.18)$$

При досить великих N вираз в (2.18) прагне до $\frac{(6)^{3/2}}{\sqrt{N}}$. Тобто, тут ситуація трохи легша, ніж у плоскому випадку, але враховуючи те, що в просторовому випадку, як правило, N набагато більше, подібне збільшення може зажадати надмірної витрати ресурсів ЕОМ. Для подолання настільки швидкого росту числа операцій Дж. Ву [371, 372] запропонував ідею сегментації області розв'язку, котра полягає у наступному: якщо в області є M комірок, то ділення області на дві рівні частини з кількістю комірок $M/2$ дає замість матриці взаємного впливу розміру $M \times M$ дві матриці впливу розміру $M/2 \times M/2$, однак цей підхід не вирішує проблему ефективності радикально.

Перетворення інтегралів до межового вигляду є найбільш ефективним підходом, але таке перетворення обмежене дуже невеликим колом задач, де воно може бути виконане. Тому зупинимося докладніше на обчисленні інтегралів на спеціальних сітках. У випадку, коли в області розв'язку можна визначити переміщення (групу паралельних переносів, або обертань), при якому кожному скінченному елементу ставиться у відповідність інший скінченний елемент (у найпростішому випадку один елемент відображається на іншій), значно скорочується число незалежних впливів елемента на елемент. Найпростішим прикладом тут може служити рівномірна прямокутна сітка, для якої існує три (у плоскому випадку два) паралельних переноси, що відображають комірку на комірку. Тобто можна визначити вплив усіх комірок на одну комірку й паралельним переносом переводити кожну пару комірок у парі, однією з яких є дана комірка; таким чином, можна зберігати в пам'яті ЕОМ не матрицю впливу розміру $M \times M$, а матрицю розміру M , а обчислення, пов'язані з визначенням впливів, зводяться до цілочисленних операцій з індексами і викликом відповідного елемента матриці впливу на одну комірку.

Розглянемо плоске рівняння Пуассона з нелінійною правою частиною

$$\Delta T = f(x, y, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}), \quad (2.19)$$

і відповідними крайовими умовами. Для одержання його розв'язку слід організувати ітераційний процес

$$T_{(x_0, y_0)}^{(i+1)} = \int_{\Gamma} P \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} T^{(i)} \frac{\partial P}{\partial n} ds - \iint_D Pf \left(x, y, T^{(i)}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.20)$$

Як відзначалося вище, розв'язок за допомогою формул (2.20) в області довільної форми із прямим обчисленням подвійного потенціалу дуже важкий. Для розв'язку даної задачі в прямокутній області необхідно побудувати масив коефіцієнтів впливу на рівномірній прямокутній сітці

$$D_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi_0(x, y, x_1^c, y_1^c) dx dy, \quad (2.21)$$

де x_1^c, y_1^c – центри відповідної комірки. Коефіцієнти D_{ij} можуть бути отримані аналітично

$$\begin{aligned} D_{ij} = & -\frac{1}{4\pi} \left[y_2 x_2 \ln(x_2^2 + y_2^2) - y_2 x_1 \ln(x_1^2 + y_1^2) - y_1 x_2 \ln(x_2^2 + y_1^2) + \right. \\ & + y_1 x_1 \ln(x_1^2 + y_1^2) - 3(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + x_2^2 \operatorname{arctg}(y_2 / x_2) - \\ & - x_1^2 \operatorname{arctg}(y_2 / x_1) - y_1^2 \operatorname{arctg}(x_2 / y_1) + y_1^2 \operatorname{arctg}(x_1 / y_1) + \\ & \left. + x_2^2 \operatorname{arctg}(y_1 / x_2) + x_1^2 \operatorname{arctg}(y_1 / x_1) + y_2^2 \operatorname{arctg}(x_2 / y_1) + y_2^2 \operatorname{arctg}(x_1 / y_2) \right] \end{aligned}, \quad (2.22)$$

де $x_1 = x_i - x_1^c, x_2 = x_{i+1} - x_1^c, y_1 = y_i - y_1^c, y_2 = y_{i+1} - y_1^c$. При $x_1 = 0, y_1 = 0$

$$D_{11} = -\frac{1}{4\pi} \left[y_2 x_2 \ln(x_2^2 + y_2^2) - 3y_2 x_2 + x_2^2 \operatorname{arctg}(y_2 / x_2) + y_2^2 \operatorname{arctg}(x_2 / y_2) \right]. \quad (2.23)$$

Врахуємо, що

$$\int_{x_{i+m}}^{x_{i+m+1}} \int_{y_{j+k}}^{y_{j+k+1}} \varphi_0(x, y, x_{m+1}^c, y_{k+1}^c) dx dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi_0(x, y, x_1^c, y_1^c) dx dy. \quad (2.24)$$

При розв'язку необхідні похідні від функції T можуть бути отримані за формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial x_0} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} T^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial n \partial x_0} ds - \iint_D \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} f \left(x, y, T^{(i)}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} \right) dx dy, \\ \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial y_0} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} T^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial n \partial y_0} ds - \iint_D \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} f \left(x, y, T^{(i)}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}, \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для організації обчислень по формулах (2.25) потрібно ще два масиви коефіцієнтів

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} (x, y, x_1^c, y_1^c) dx dy, \\ D_{ij}^{(2)} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} (x, y, x_1^c, y_1^c) dx dy, \end{aligned} \quad (2.26)$$

що визначаються як

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi} \left[y_2 (\ln(x_1^2 + y_2^2) - \ln(x_2^2 + y_2^2)) - y_1 (\ln(x_1^2 + y_1^2) - \ln(x_2^2 + y_1^2)) + \right. \\ &\left. + 2x_1 (\arctg(y_2 / x_1) - \arctg(y_1 / x_1)) - 2x_2 (\arctg(y_2 / x_2) - \arctg(y_1 / x_2)) \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi} \left[x_2 (\ln(x_2^2 + y_1^2) - \ln(x_2^2 + y_2^2)) - x_1 (\ln(x_1^2 + y_1^2) - \ln(x_1^2 + y_2^2)) + \right. \\ &\left. + 2y_1 (\arctg(x_2 / y_1) - \arctg(x_1 / y_1)) - 2y_2 (\arctg(x_2 / y_2) - \arctg(x_1 / y_2)) \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

У випадку області довільної форми її слід попередньо відобразити на прямокутник, використовуючи наступний алгоритм. Відобразимо конформно однозв'язану область D на прямокутник, згідно з роботою [374]. Будемо шукати аналітичну функцію комплексного змінного $W = f(z) = u + iv$, де $z = x + iy$, або, що теж саме, дві гармонійні функції $u(x, y)$, $v(x, y)$, що відображають область Ω у площині (x, y) , обмежену відрізками кривих $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, на прямокутник Ω' , обмежений відрізками прямих $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3, \Gamma'_4$ у площині (u, v) . Співвідношення Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.29)$$

звідки

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.30)$$

$$\Delta v = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.31)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Gamma_2, \\ u(x, y) &= u_0, & (x, y) &\in \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Спочатку повинна бути розв'язана задача для u . З цією метою застосуємо метод граничних елементів до рівняння Лапласа (2.30) із крайовими умовами (2.32). Крайові умови для функції v

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Gamma_1, \\ v(x, y) &= v_0, & (x, y) &\in \Gamma_3, \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де значення v_0 може бути знайдене в ході розв'язку як

$$v_0 = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial x} ds = - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (2.34)$$

Застосувавши метод граничних елементів, розв'яжемо задачу (2.31) з крайовими умовами (2.33). Аналогічно можна знайти обернені функції $x(u, v)$, $y(u, v)$, враховуючи, що

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}, \quad (2.35)$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0, \\ \Delta y &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Тоді рівняння (2.19) перетвориться у такий спосіб

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial v^2} \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) = f(x(u, v), y(u, v), T, \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial v}). \quad (2.37)$$

Вводячи в (2.37) нову функцію

$$\bar{f}(u, v), T, \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \frac{f(x(u, v), y(u, v), T, \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial v})}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}, \quad (2.38)$$

отримаємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial v^2} \right) = \bar{f}(u, v, T, \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial v}). \quad (2.39)$$

Крайові умови для (2.39) перетворяться відповідно, після чого задача може бути вирішена за допомогою описаного вище алгоритму.

У якості тестової задачі було використане рівняння

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right) = \frac{\Gamma^2}{4}, \quad (2.40)$$

задане в прямокутній області із крайовими умовами, що визначають розв'язок виду

$$\Gamma = \frac{1}{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad (2.41)$$

де (x_s, y_s) – точка поза областю розв'язку. Ітераційний процес (2.20) сходиться досить швидко, якщо точка (x_s, y_s) лежить удалині від області розв'язку, тобто, коли неоднорідний член по області розв'язку змінюється повільно. При цьому у випадку прямокутної області при 40 граничних елементах і сітці скінченних елементів 10×10 похибка розв'язку склала 1%, а у випадку області криволінійної форми за рахунок використання конформного відображення при використанні аналогічної сітки в площині (u, v) похибка склала 3–4%, а на в два рази більш густій сітці – 1,5%. На жаль, наведений алгоритм не придатний в просторовому випадку, де не

можна побудувати конформне відображення. Однак економія від використання рівномірних прямокутних сіток, заснована на просторовому аналогу співвідношення (2.24), у просторовому випадку зберігається.

Лінеаризація за допомогою спеціальних апроксимацій є розповсюдженим заходом сучасного чисельного аналізу. Прикладом подібного підходу може служити обчислення нелінійних членів на попередньому тимчасовому шарі при розрахунках еволюційних процесів (правда, в обчислювальній теорії потенціалу прямі покрокові підходи для еволюційних задач неефективні [374]). Більш доцільним представляється використання фізично обґрунтованих спеціальних апроксимацій. Очевидно, що для побудови таких алгоритмів зручно використовувати розщеплення по фізичних процесах, наприклад, геометричну локалізацію фізичного процесу, як це робиться в методі локалізованих об'єктів, описаному нижче.

Традиційні чисельні методи – метод скінченних різниць і метод скінченних елементів, застосовані для чисельного розв'язку задач механіки суцільного середовища й тепломасообміну, потребують побудови сітки (скінченнорізницевої або скінченноелементної). Не зупиняючись на подробицях і особливостях розглянутих методів, відзначимо лише, що хоча метод скінченних різниць припускає апроксимацію на коміпці сітки (у контрольному об'ємі) диференціальних рівнянь, а метод скінченних елементів припускає апроксимацію шуканих функцій на скінченних елементах, усередині комірки можливості одержання будь якої додаткової інформації дуже обмежені. Вважається, що «витягти» яку-небудь інформацію зсередини комірки неможливо в принципі. Зазначене обмеження дуже рідке розглядається як недолік традиційних методів, більше того, широко поширена думка, що для будь-якого масштабу фізичного явища в суцільному середовищі можна побудувати достатньо дрібну сітку, щоб одержати достовірні результати розрахунків. Для підвищення ефективності таких підходів були розроблені так звані багатосіткові й адаптивні методи, що дозволяють згущати сітку й підвищувати порядок апроксимації поблизу

локальних ефектів у суцільному середовищі. На жаль, незважаючи на всі успіхи згаданих підходів, досвід розвитку чисельних методів спростовує думку про необмежені можливості традиційних методів. Дійсно, вводячи в області сітку, неявно вводять і характерний розмір сітки, який повинен бути, принаймні, у кілька раз менше лінійного розміру найменшого з досліджуваних ефектів; аналогічна ситуація має місце й з тимчасовою розбивкою. Якщо при цьому досліджуються різномасштабні процеси, то це неминуче призведе до появи в розрахунковій схемі (особливо в схемі методу скінченних різниць) величин різного порядку, що, в свою чергу, приведе до нагромадження похибок. Обмежені можливості електронно-обчислювальних машин, нагромадження похибок при аналізі різномасштабних явищ, власні недоліки конкретних розрахункових схем змушують ставити під сумнів принципову можливість розраховувати традиційними методами ефект будь-якого геометричного або тимчасового масштабу.

Таким чином, якщо в області розв'язку побудована сітка, то підсітковими ефектами варто або зневажити, або врахувати їх у рамках деякої розрахункової схеми, з даними розрахунками ніяк не зв'язаної, наприклад, за емпіричними формулами, як це робиться в ряді моделей турбулентності. На жаль, побудова такої додаткової схеми в багатьох випадках взагалі сумнівна, і завжди надзвичайно трудомістка. З іншого боку, якщо обрано дві сітки з різними параметрами, то урахування фізичних ефектів у цих двох розрахункових схемах буде залежати від параметрів сітки. Усе вищесказане переконливо показує, що проблеми підсіткових ефектів є принциповими труднощами при чисельному розв'язку задач механіки суцільного середовища традиційними чисельними методами. Від зазначених недоліків, значною мірою, вільні так звані безсіткові методи. Термін безсіткові методи поєднує досить велику групу чисельних методів, для реалізації яких немає необхідності вводити сітки. Група ця включає різноманітні методи частинок [375, 376], методи дискретних вихорів [377 – 379], метод граничних елементів і деякі інші, близькі до них по ідеології, переважно лагранжеві методи.

Обмежимо розгляд деякими аспектами методу граничних елементів і комбінованого методу граничних елементів і дискретних вихорів, як безсіткових методів.

Методи локалізації залежно від алгоритмічної реалізації можуть бути віднесені як до методів «заморожених коефіцієнтів», так і до методів фіктивних навантажень. У наш час вимоги до точності чисельного розрахунку настільки високі, що при проведенні значної частини практичних розрахунків доводиться враховувати неоднорідність властивостей середовища, а також нелінійність її властивостей, чим в попередній практиці часто зневажали. Природно, що урахування зазначених ефектів призводить до додаткових обчислювальних труднощів. У попередніх роботах [380] було розглянуто питання про слабонеоднорідні середовища, однак будь-яке середовище з гладкими властивостями локально може бути розглянуте як слабонеоднорідне. У ряді випадків такий підхід може виявитися досить ефективним. Однак слід зазначити, що мова в даних випадках іде про наближений фундаментальний розв'язок. У загальному ж випадку локалізація може бути здійснена за допомогою введеного вище неточного фундаментального розв'язку. У якості неточного фундаментального розв'язку найчастіше використовується параметрикс (функція Леви), а також параметрикс, помножений на деяку вагову функцію. Такий підхід був розвинений у роботах С. Є. Михайлова [381–384] і В. В. Пухначьова [64]. Принцип локалізації розглянемо на прикладі найпростішого рівняння

$$(Lu)(X) = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[a(X, u) \frac{\partial u}{\partial X_i} \right] = f(X, u), \quad (2.42)$$

де a – деяка знаковизначена досить гладка функція. Введемо параметрикс у вигляді [381–384]:

$$P(X, X_0) = \frac{\varphi_0(X, X_0)}{a(X_0)}, \quad (2.43)$$

де φ_0 – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.

Взагалі кажучи, параметрикс відомий і для більш складного випадку, ніж (2.42) [64], але обмежимося в цьому випадку представленням (2.43). У точці X_0 параметрикс має таку ж сингулярність, як і фундаментальний розв'язок рівняння (2.80) [314], хоча очевидно, що вдалині від точки X_0 ці функції можуть поводитися досить по-різному.

У методах локалізації існують два підходи: перший заснований на розкладанні в ряд функції а й побудові наближеного фундаментального розв'язку, він запропонований автором [380], а другий запропоновано С. Є. Михайловим. Підхід, який було запропоновано С. Є. Михайловим, припускає використання замість параметрикса наступного неточного фундаментального розв'язку

$$\varphi(X, X_0) = \chi(X, X_0)P(X, X_0), \quad (\chi(X, X_0) \rightarrow 1, \text{ при } X \rightarrow X_0), \quad (2.44)$$

де довільність у виборі функції χ забезпечує локалізацію при використанні φ , визначеної в (2.44) у якості фундаментального розв'язку для узагальненого інтегрального представлення [381 – 384]:

$$\begin{aligned} c(X_0)u(X_0) &= \int_{\Gamma(u)} t_1(u(X), \frac{\partial u(X)}{\partial n}, X) \frac{\partial \varphi(u, X, X_0)}{\partial n} dS - \\ &- \int_{\Gamma(u)} t_2(u(X), \frac{\partial u(X)}{\partial n}, X) \varphi(u, X, X_0) dS + \\ &+ \int_{D(u)} R_1(u, X) \varphi(u, X, X_c) dX - \int_{D(u)} R_2(\varphi, X, X_0) u(X) dX + \\ &+ \int_{D(u)} f(u, X) \varphi(u, X, X_0) dX. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Але, якщо С. Є. Михайлов використовував функцію

$$\chi_i(X, X_{0i}) = \begin{cases} 0, & X \notin D_i \\ 1, & X \in D_i \end{cases}, \quad (2.46)$$

то автор даної роботи вважає за доцільне використовувати як функцію χ таку функцію, для якої крім умови $\chi_i(X) = 0, X \notin D_i$ виконуються умови

$$\chi_i|_{\Gamma_i} = 0, \quad (2.47)$$

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = 0, \quad (2.48)$$

звідки в силу (2.44)

$$\varphi_i|_{\Gamma_i} = 0, \quad (2.49)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = \frac{\partial \chi_i}{\partial n} P + \frac{\partial P}{\partial n} \chi_i = 0. \quad (2.50)$$

Тоді в співвідношенні (2.45), записаному для D_i , зникають інтеграли по Γ_i , воно значно спрощується, і досягається більш ефективна локалізація. Вибираючи D_i у вигляді кола (кулі) радіуса R_i із центром у точці X_{0i} , в якості χ зручно використовувати функцію

$$\chi_i = \frac{(R_i - r)^2}{R_i^2}, \quad (2.51)$$

а для прямокутної області зручно вибрати χ у вигляді

$$\chi_i = \frac{256(x-a)^2(x-b)^2(y-c)^2(y-d)^2}{(b-a)^4(d-c)^4}, \quad (2.52)$$

де a, b, c, d – координати сторін прямокутника. Якщо С. Є. Михайлов намагався отримати в результаті апроксимації глобальну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, то автор даної роботи вважає за доцільне використовувати традиційний підхід «фіктивних навантажень», для якого локалізація дозволяє значно скоротити обсяг обчислень.

Вище розглянуто застосування чисельних методів теорії потенціалу для розв'язку нелінійних задач математичної фізики, у тому числі й задач із нелінійним диференціальним оператором, що довгий час вважалося неможливим. Проте, наведені вище алгоритми переконливо демонструють застосовність методів обчислювальної теорії потенціалу для чисельного розв'язку нелінійних задач. Наведені алгоритми не вичерпують увесь список подібних розрахункових схем, але кожний з наведених алгоритмів значно

перевершує існуючі раніше аналоги. Причому, якщо порівнювати із прямим обчисленням інтегралів по області розв'язку, то наведені вище алгоритми скорочують час розрахунків у декілька разів, оскільки кількість операцій, необхідних для обчислення інтегралів по області, скорочується в плоскому випадку від величин порядку N^4 до величин порядку N^2 , а в просторовому випадку від величин порядку N^6 до величин порядку N^3 (для локалізованих об'єктів до величин порядку M^2 , де M – загальна кількість локалізованих об'єктів). Незважаючи на отримані теоретичні оцінки на сьогоднішній момент ще досить складно оцінити загальну обчислювальну ефективність запропонованих алгоритмів, особливо, якщо їх використовувати в комбінації. Найбільш ефективним, але не універсальним підходом є приведення нелінійної крайової задачі до нелінійних чисто межових інтегральних рівнянь, а одночасно найбільш ефективним і універсальним підходом представляється локалізація інтегральних рівнянь, однак обидва ці підходи явно несумісні.

Оскільки алгоритми, засновані на моделях локалізованих об'єктів, очевидно перевершують інші існуючі в цей час методи розв'язку задач із маломасштабними ефектами, доцільне створення на цій основі пакетів прикладних програм для чисельного розв'язку цього класу задач (у тому числі й комерційних пакетів). Застосування високоефективних (у порівнянні з раніше існуючими) методів розв'язку нелінійних задач відкриває досить широкі перспективи створення універсальних комплексів розв'язку прикладних крайових задач (принаймні, еліптичного типу). Однак, враховуючи, що ринок пакетів прикладних програм у даний момент уже в значній мірі заповнено, успіх граничноелементних пакетів представляється сумнівним. Таким чином, алгоритми розв'язку нелінійних задач методом граничних елементів також доцільно позиціонувати як унікальні й високоефективні методи розв'язку спеціальних задач.

2.2 Розробка прямих регулярних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу

Матеріали цього підрозділу були опубліковані у роботах [2, 8, 15, 38] та наводяться тут зі скороченнями

Одним із істотних недоліків методу граничних елементів є швидке зростання похибки при наближенні до межі, що особливо помітно на відстанях менш половини довжини граничного елемента від межі. Це змушує для задач, в яких необхідно отримати поле розв'язку поблизу межі, значно збільшувати кількість граничних елементів. Метою цієї частини роботи є розробка алгоритму методу граничних елементів, вільного від означеного недоліку. В основу розробленого алгоритму було покладено метод функціональних рівнянь, запропонований В. Д. Купрадзе в монографії [300]. Цей метод отримав подальший розвиток у роботах Ю. В. Верюжського [324] та Паттерсона [361, 362]. Подальший аналіз проведемо на прикладі задачі Діріхле для рівняння Лапласа в деякій області, що обмежена гладкою кривою. Розглянемо інтегральне рівняння [2]:

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \\ = \oint_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial G}{\partial n}(x_0, y_0, x, y) dS - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) G(x_0, y_0, x, y) dS, \end{aligned} \quad (2.53)$$

де u і $\frac{\partial u}{\partial n}$ – шукана функція і її нормальна похідна на межі, відповідно; G і

$\frac{\partial G}{\partial n}$ – відповідний фундаментальний розв'язок (чи функція Гріна) і його

нормальна похідна на межі; функція $c(x_0, y_0)$ визначається співвідношенням

(2.5). При $c = \frac{1}{2}$ (2.53) являє собою сингулярне граничне інтегральне

рівняння, при $c = 0$ чи $c = 1$ (2.53) може розглядатися як регулярне граничне інтегральне рівняння [2]. Обмежимося розглядом випадку $c = 0$, існування і

єдиність розв'язків рівняння (2.53), тобто існування оберненого оператора, у цьому випадку доведені в монографії В. Д. Купрадзе [300].

Розглянемо джерела похибок методу граничних елементів [15]:

- а) апроксимація невідомих функцій на межі (δ_1);
- б) апроксимація відомих функцій на межі (δ_2), необхідна для обчислення інтегралів;
- в) апроксимація межі (δ_3);
- г) апроксимація фундаментальних розв'язків або функцій Гріна та їх нормальних похідних (δ_4);
- д) помилка обчислення інтегралів, що входять у вирази для коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь (δ_5);
- е) помилка обчислення інтегралів, що входять в вирази для правих частин системи лінійних алгебраїчних рівнянь (δ_6);
- ж) помилка розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (δ_7).

Алгоритм [15], що тут розглядається, не припускає апроксимації фундаментальних розв'язків або функцій Гріна, тому вважаємо $\delta_4 = 0$. На жаль, не існує загального підходу, котрий дозволяв би виділити вклад кожного класу похибки в загальну похибку методу. Тому потрібно обмежитися аналізом тестових прикладів, в яких істотно відрізняються вклади різноманітних джерел похибки [15]. Пошук таких прикладів являє собою досить складну задачу тому, що приклад повинен мати аналітичний розв'язок для порівняння з тестовим розрахунком. Після проведення дискретизації рівняння (2.53) відповідно до методу граничних елементів, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_1 x = b_1, \quad (2.54)$$

матриця і права частина якої містять перераховані вище похибки [15]. Конкретний вигляд матриці і правої частини приведеної системи залежать від крайових умов і форми межі області розв'язку. Нехай [15]:

$$Ax^* = b, A_1 = A + \Delta, b_1 = b + \eta, \quad (2.55)$$

де Δ – матриця похибок матриці системи; A_1 – наближена матриця; b_1 – наближена права частина; η – похибка правої частини; x^* – наближений розв’язок. Нехай також відомі оцінки для величин $\|\Delta\|$ і $\|\eta\|$, що включають різні джерела похибки, причому по суті алгоритму ці дві величини повинні бути досить малі, тобто A і A_1 досить близькі. Нехай також $r = x - x^*$. Тоді, згідно з [367 – 369]:

$$\|r\| \leq \frac{\|A^{-1}\|(\|\eta\| + \|\Delta\|\|x^*\|)}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta\|}, \quad (2.56)$$

а з урахуванням малості $\|\Delta\|$ і $\|\eta\|$, а також $\|r\|$, зневажаючи Δr і заміняючи $\|A^{-1}\|$ на $\|A_1^{-1}\|$, одержимо [15]:

$$\|r\| \leq \|A_1^{-1}\|(\|\eta\| + \|\Delta\|\|x\|). \quad (2.57)$$

Приведемо оцінки для величин $\|\Delta\|$ і $\|\eta\|$:

$$\|\Delta\| \leq \|\delta_1\| + \|\delta_3^*\| + \|\delta_4\| + \|\delta_5\|, \quad (2.58)$$

$$\|\eta\| \leq \|\delta_2\| + \|\delta_3^{**}\| + \|\delta_6\|,$$

де $\|\delta_3^*\|$ і $\|\delta_3^{**}\|$ відбивають вплив апроксимації межі на погрішність обчислення матриці системи і її правої частини, відповідно.

Співвідношення (2.58) отримано в припущенні про відомий точний розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь [15]. Для оцінки точності повного алгоритму до оцінки (2.57) повинна бути додана погрішність розв’язку системи, що залежить від конкретних властивостей матриці системи (числа обумовленості) і методу розв’язання системи [15]:

$$\|\delta_{\text{sum}}\| \leq \|r\| + \|\delta_7\|. \quad (2.59)$$

Шляхом чисельного експерименту, порівнюючи точність тестових розрахунків для областей, де апроксимація межі не потрібна (наприклад,

прямокутник), з аналогічними розрахунками для областей, де апроксимація межі істотна (наприклад, коло), можна зробити висновок, що саме апроксимація межі вносить найбільший вклад у сумарну похибку методу [15]. Слід зазначити, що апроксимація межі практично немінуча для сингулярного методу граничних елементів тому, що в протилежному випадку важко розглянути аналітично сингулярні інтеграли [15]. Однак, для регулярного методу граничних елементів, описаного вище, апроксимація межі не є обов'язковою, тому що всі інтеграли, які використовуються в процесі розв'язання, є регулярними. Виключення апроксимації межі в регулярному методі граничних елементів, тобто перехід від інтегрування по апроксимуючій кривій до інтегрування по реальній межі, є основою запропонованого алгоритму [15].

Нехай межа Γ області D є гладка крива й описується функцією від параметра t , тоді дискретний аналог (2.53) [15]

$$0 = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{1k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, \alpha_n^k, x(t), y(t)) \frac{\partial G}{\partial n}(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{2k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, x(t), y(t)) G(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt, \quad (2.60)$$

де $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ – базисні функції, що апроксимують u і $\frac{\partial u}{\partial n}$, відповідно;

$\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$ – набір довільностей, що підлягають визначенню при розв'язанні системи (2.60); x_i, y_i – множина точок спостереження, що використані при розв'язанні системи (2.60); $h_k(t)$ – функція форми кривої, вид якої залежить від способу завдання межі [385].

Наприклад, при завданні межі в прямокутних декартових координатах $y = f(x)$ функція форми визначається як [15]:

$$h(x) = \sqrt{f'_x{}^2 + 1}, \quad (2.61)$$

при завданні межі в полярних координатах $r = \rho(\varphi)$ функція форми є:

$$h(\varphi) = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'_\varphi{}^2(\varphi)}, \quad (2.62)$$

при завданні межі в параметричному вигляді $x = x(t)$, $y = y(t)$ функція форми:

$$h(t) = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}. \quad (2.63)$$

Припустимо, що $h(t)$ – неперервна, обмежена, потрібне число раз диференційована функція, що відповідає вимогам, котрі накладаються на межу області розв'язку Γ при виводі рівняння (2.53) [15]. Слід зазначити, що, якщо на граничному елементі функція u чи $\frac{\partial u}{\partial n}$ відомі з крайових умов, то в даному алгоритмі відповідна базисна функція з нею збігається, тобто для крайових умов Діріхле $\varphi_{1k} = u$, для крайових умов Неймана $\varphi_{2k} = \frac{\partial u}{\partial n}$, тобто невідомі функції на межі не апроксимуються [15]. За базисні функції $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ можна вибрати різні функції, однак, бажано, щоб α_i^k входили до них лінійно, що дозволяє відразу перейти до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У монографіях [320, 321] як базисні функції використовуються поліноми з коефіцієнтами α_i^k . У даній роботі невідомі функції апроксимувалися сталими, лінійними і квадратичними функціями. Апроксимація сталими представляється найбільш простим і зручним підходом [15]. Обчислення відповідних інтегралів у (2.60) може бути проведене за відомими квадратурними формулами [366, 369, 386]. Перевагою даного алгоритму є відсутність похибок внаслідок апроксимації межі області розв'язку ($\delta_3 = 0$), тобто на відміну від традиційного методу граничних елементів замість наближеної функції $h_k(t)$ використовується її точне вираження [15]. У силу зробленого вище зауваження про те, що відомі функції на межі не апроксимуються, відсутня відповідна похибка ($\delta_2 = 0$) [15]. Недоліком алгоритму є практична неможливість аналітичного обчислення інтегралів по граничних елементах. Очевидно, що даний

алгоритм не вимагає також апроксимації фундаментальних розв'язків чи функцій Гріна та їхніх нормальних похідних ($\delta_4 = 0$) [15].

Нехай невідома функція $f(t)$ на k -ій частині межі області розв'язку апроксимована функцією φ_{mk} з n -им порядком, тобто $f(t) = \varphi_{mk}(t) + O(\Delta S_k^n)$, де ΔS_k – довжина k -го граничного елемента. Тоді для крайових умов Діріхле [15]:

$$\delta_1 = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h_k(t) \frac{\partial G}{\partial n}(t, t_0) O(\Delta S_k^{n+1}) dt \leq \sum_{k=1}^N M_{1k} M_{2k} O(\Delta S_k^{n+2}) / (n+2), \quad (2.64)$$

де N – кількість граничних елементів;

$$M_{1k} = \sup[h_k(t)], t \in \Gamma_k, \quad M_{2k} = \sup\left[\frac{\partial G}{\partial n}(t, t_0)\right], t \in \Gamma_k. \quad (2.65)$$

Аналогічно для крайових умов Неймана:

$$\delta_1 = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h_k(t) G(t, t_0) O(\Delta S_k^{n+1}) dt \leq \sum_{k=1}^N M_{1k} M_{2k} O(\Delta S_k^{n+2}) / (n+2), \quad (2.66)$$

$$M_{1k} = \sup[h_k(t)], t \in \Gamma_k, \quad M_{2k} = \sup[G(t, t_0)], t \in \Gamma_k.$$

Варто, однак, указати, що підвищення порядку апроксимації невідомих функцій на межі не призводить до прямого підвищення точності алгоритму, тому що підвищення порядку апроксимації приводить до збільшення числа обумовленості матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь і в результаті до збільшення похибки розв'язку системи [15]. Що стосується точності чисельного визначення інтегралів, то підвищення точності даного процесу може бути обмежено тільки ресурсами комп'ютера.

Відзначимо [15], що в правій частині дискретного аналога рівняння (2.53)

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{1k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, \alpha_n^k, x(t), y(t)) \frac{\partial G}{\partial n}(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt - \\ &- \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{2k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, x(t), y(t)) G(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt \end{aligned} \quad (2.67)$$

стоять гармонійні функції, для яких справедливий принцип максимуму, і, визначаючи похибку як різницю між лівими частинами (2.60) і (2.67), можна прийти до висновку, що така похибка теж буде гармонійною функцією, тобто вона буде досягати свого максимального значення на межі, оскільки для неї теж виконується принцип максимуму.

За першу групу тестових задач були обрані внутрішні задачі Неймана і Діріхле для рівняння Лапласа в колі одиничного радіуса, що мають відомі аналітичні розв'язки, наприклад:

$$u(x, y) = x^2 - y^2. \quad (2.68)$$

Розрахунки проводилися з використанням граничних елементів нульового порядку точності та приведені в таблиці 2.1а, тобто

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &= \text{const}, \\ \varphi_{2k} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Таблиця 2.1а – Зміна похибки, отриманої при розв'язанні тестової задачі Діріхле, поблизу межі області розв'язку

Радіальна координата точки	Похибка при використанні 60 граничних елементів	Похибка при використанні 90 граничних елементів	Похибка звичайного методу граничних елементів (60 елементів)
0.90108700	0.95367430E-06	0.13113020E-05	-0.21674040E-02
0.92500000	0.33378600E-05	0.14305110E-05	-0.22286180E-02
0.95000000	0.10848050E-04	0.21457670E-05	-0.21432640E-02
0.97500000	0.35285950E-04	0.47683720E-05	-0.16335250E-02
0.99782610	0.33682580E-03	0.12993810E-04	0.43721800E-02

За другу групу тестових задач були обрані задачі зовнішнього обтікання профілю потенційним потоком ідеальної нестисливої рідини, зокрема, задача

про безциркуляційне обтікання кола одиничного радіуса, сформульована в термінах функції струму, для якої відомо аналітичний розв'язок:

$$\psi(x, y) = y - y/(x^2 + y^2). \quad (2.70)$$

Результати розрахунку приведені в таблиці 2.1б.

Таблиця 2.2б – Похибка розв'язку задачі про безциркуляційне обтікання кругового контуру потенційним потоком ідеальної нестисливої рідини.

Відстань до межі	Похибка при використанні 60 граничних елементів	Похибка при використанні 90 граничних елементів
0.11412750E-02	0.69353280E-02	-0.77354910E-03
0.10271760E-01	-0.11518600E-03	-0.20444390E-04
0.25108720E-01	-0.53763390E-04	-0.73015690E-05
0.75326090E-01	-0.28908250E-05	0.23841860E-06
0.10043480	-0.23841860E-06	0.44703480E-06

Слід зазначити, що похибки розв'язку задач Неймана і Діріхле була приблизно однаковими. Таким чином, запропонований алгоритм (2.160) забезпечує виключно високу точність поблизу межі області розв'язку, що дозволяє рекомендувати даний алгоритм, як метод розрахунку в задачах, де потрібно отримати високу точність розв'язку поблизу межі.

На відміну від початкових етапів розвитку обчислювальної теорії потенціалу, починаючи з монографій [320, 321], при застосуванні методу граничних елементів повністю переважають прямі формулювання, що припускає можливість ефективного чисельного розв'язку граничних інтегральних рівнянь першого роду поряд із граничними інтегральними рівняннями другого роду. Оскільки рівняння першого роду, взагалі кажучи, некоректні, виникає питання про обґрунтованість такого підходу, яке, на жаль, дотепер не вирішене належним чином ні в регулярному, ні в сингулярному випадку. Регулярні алгоритми методу граничних елементів використовуються поряд із традиційними сингулярними елементами, однак значно

рідше, оскільки існуючі раніше традиційні регулярні алгоритми із точками коллокації поза областю розв'язку завжди приводять до регулярних граничних інтегральних рівнянь першого роду. Вихід монографій [320, 321] ознаменував собою завершення початкового етапу розвитку методу граничних елементів і формування його алгоритмічної бази. З тих пір основною тенденцією розвитку методу граничних елементів є застосування його до нових задач обчислювальної механіки, наприклад, до течії Стокса [387–388], бігармонічного рівняння [389], течії надтекучої рідини [390] тощо. Іншим напрямком застосування методу граничних елементів у цей час є крайові задачі, сформульовані в областях складної геометричної форми [391, 392].

В процесі виконання даної роботи була виконана розробка й дослідження сімейства алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу з точками коллокації всередині області розв'язку, зокрема, прямого методу дискретних особливостей і прямого коллокаційного методу граничних елементів із точками коллокації всередині області розв'язку.

Розглянемо регулярні граничні рівняння з точками коллокації всередині області. Розгляд запропонованих підходів проведемо на прикладі інтегрального аналога плоского рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (2.71)$$

де u – шукана функція. Рівняння (2.71) будемо розглядати в деякій області D , обмеженій ляпуновською кривою Γ (у всіх наступних тестових розрахунках межа вибиралась кусочно-гладкою). Для простоти припустимо, що в кожній точці межі Γ поставлено крайові умови або Діріхле

$$u|_{\Gamma_D} = f_D, \quad (2.72)$$

або Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_N} = f_N. \quad (2.73)$$

Граничноінтегральний аналог рівняння (2.71) має вигляд [320, 321]:

$$C(X_0)u(X_0) = \int_{\Gamma} \varphi(X, X_0) \frac{\partial u}{\partial n} ds(X) - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial \varphi(X, X_0)}{\partial n} ds(X), \quad (2.74)$$

де X – як і раніше, точка джерела; X_0 – точка спостереження; φ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в плоскому випадку:

$$\varphi(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \quad (2.75)$$

коефіцієнт форми C визначається співвідношенням (2.5).

Візьмемо на межі Γ деяку контрольну точку X'_0 (у даному алгоритмі контрольна точка не збігається із точкою коллокації $X'_0 \neq X_0$, як це буває звичайно). Побудуємо в точці X'_0 перпендикуляр n до кривої Γ , спрямований в середину області D , (припускаємо криву Γ гладкою в точці X'_0 , завдяки чому такий перпендикуляр може бути однозначно визначений). Введемо локальну систему координат з початком у X'_0 і віссю, спрямованою уздовж перпендикуляра n . На цій осі виберемо точку X_0 з координатою в локальній системі координат η . Надалі будемо розглядати точку X_0 як точку коллокації і перенесемо в неї початок локальної системи координат, зберігши при цьому масштаби і осі використаної вище локальної системи координат. У точці X_0 інтегральне співвідношення (2.74) може бути скільки завгодно разів продиференційовано по координатах точки X_0 як по параметрах. Тоді уздовж осі n шукана функція u може бути розкладена в ряд Тейлора в околі точки X_0

$$u(\xi) = u(X_0) - \xi \frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \dots + (-1)^k \frac{\xi^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \dots, \quad (2.76)$$

де ξ – координата, відлічувана від точки X_0 у напрямку до точки X'_0 . Очевидно, що при $\xi = \eta$ ряд (2.76) дає значення функції u в точці X'_0 :

$$u(X'_0) = u(X_0) - \eta \frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \dots + (-1)^k \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \dots, \quad (2.77)$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(X'_0) = -\frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \dots + (-1)^k \frac{\eta^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \dots \quad (2.78)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial^i u(X_0)}{\partial n^i} = \int_{\Gamma} \frac{\partial^i \varphi(X, X_0)}{\partial n^i} \frac{\partial u}{\partial n} ds(X) - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial^{i+1} \varphi(X, X_0)}{\partial n^{i+1}} ds(X), \quad (2.79)$$

співвідношення (2.77) і (2.78) можна трактувати як граничні інтегральні рівняння з ядрами, визначеними в точці X_0 . Рівняння (2.77) після підстановки в праву частину виразів для похідних із (2.79) для крайових умов Діріхле являє собою регулярне гранично-інтегральне рівняння першого роду, а для крайових умов Неймана – другого роду. У той же час рівняння (2.78) після підстановки в праву частину виразів для похідних із (2.79) для крайових умов Діріхле являє собою регулярне гранично-інтегральне рівняння другого роду, а для крайових умов Неймана – першого роду. Таким чином, використовуючи рівняння (2.77) для точки X'_0 , коли в цій точці задані умови Неймана, і рівняння (2.78) для випадку умов Діріхле, можна одержати формулювання задачі у вигляді граничних інтегральних рівнянь другого роду, що забезпечує відомі переваги такому підходу.

Природно, що в практичних розрахунках ряди (2.77) і (2.78) доводиться обривати на деякому члені; у результаті отримуємо рівняння виду

$$u(X'_0) = \int_{\Gamma} \Phi(X, X_0) \frac{\partial u}{\partial n} ds(X) - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial \Phi(X, X_0)}{\partial n} ds(X), \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(X'_0) = \int_{\Gamma} \Phi_1(X, X_0) \frac{\partial u}{\partial n} ds(X) - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial \Phi_1(X, X_0)}{\partial n} ds(X), \quad (2.81)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(X, X_0) = & \varphi(X, X_0) - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial n}(X, X_0) + \\ & + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}(X, X_0) + \dots + (-1)^k \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial n^k}(X, X_0) \end{aligned}, \quad (2.82)$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \quad (2.83)$$

Розв'язок граничних інтегральних рівнянь (2.80), (2.81) може бути виконано будь-яким чисельним методом розв'язання рівнянь такого класу, наприклад, методом граничних елементів. Не зупиняючись докладно на подробицях алгоритму чисельного розв'язку, відзначимо тільки, що до розглянутих рівнянь застосовні як традиційні методи граничних елементів, описані в монографіях [320, 321], так і методи граничних елементів з інтегруванням по реальній межі, запропоновані в роботах [15, 34]. Остання можливість є безумовною перевагою запропонованого підходу, що виникає із регулярного характеру формулювання і забезпечує підвищену точність чисельного розв'язку, особливо поблизу межі області розв'язку. Пояснимо останню тезу.

При застосуванні методу граничних елементів, як відомо, межа області розв'язку розбивається деяким чином на частини, так звані граничні елементи. При цьому інтеграли, що входять до правої частини граничних інтегральних рівнянь (2.79), (2.80), (2.81) (і інших, їм подібних), представляються у вигляді суми інтегралів по граничних елементах, котрі у локальній системі координат мають такий вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t)K(t, X_0)h(t) dt, \quad (2.84)$$

де t – внутрішня змінна, визначена в локальній системі координат, пов'язаної з даним граничним елементом; t_1, t_2 – координати кінців даного граничного елемента в локальній системі координат; U – невідома чи відома функція, названа щільністю потенціалу й визначена на границі в локальній системі координат; K – деяке ядро, обумовлене структурою інтегрального рівняння; h – функція, що відображає форму даного граничного елемента. У сингулярних алгоритмах h також неминуче підлягає апроксимації, чого в регулярних алгоритмах немає, що й породило термін «методи з інтегруванням по реальній межі».

Розглянемо найпростіший алгоритм методу граничних елементів, що відноситься до даного сімейства. Випадок, коли крайові умови з межі (із точки X'_0)

зносяться у середину області (у точку X_0), тут розглядатися не буде взагалі через його низьку точність. Обмежимося у розкладаннях (2.77), (2.78) першими двома членами ряду Тейлора. Однак у цьому випадку зручніше будувати розкладання в ряд Тейлора не в околі точки X_0 , а в околі точки X'_0 , тоді для точки X_0

$$u(X_0) = u(X'_0) + \eta \frac{\partial u}{\partial n}(X'_0) + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X'_0) + \dots \quad (2.85)$$

Зневажаючи у ряді (2.85) членами до другого порядку малості включно, отримаємо наступне наближене співвідношення:

$$u(X_0) \approx u(X'_0) + \eta \frac{\partial u}{\partial n}(X'_0), \quad (2.86)$$

яке й підставимо в інтегральне співвідношення (2.74)

$$u(X'_0) + \eta \frac{\partial u}{\partial n}(X'_0) = \int_{\Gamma} \varphi(X, X_0) \frac{\partial u}{\partial n}(X) ds(X) - \int_{\Gamma} u(X) \frac{\partial \varphi(X, X_0)}{\partial n} ds(X). \quad (2.87)$$

Отримане співвідношення (2.87) також є регулярним граничним інтегральним рівнянням із точкою коллокації, розташованою всередині області розв'язку. Структура лівої частини рівняння (2.87) забезпечує шукану властивість – при будь-яких крайових умовах інтегральне рівняння (2.87) є інтегральним рівнянням другого роду. У випадку розв'язку задачі Діріхле при невідомій величині $\frac{\partial u}{\partial n}$ у лівій частині рівняння (2.87) стоїть малий коефіцієнт η , який на думку авторів еквівалентний деякій регуляризації для граничних інтегральних рівнянь першого роду.

Оскільки формально граничне інтегральне рівняння (2.87) є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з регулярним ядром, для його чисельного розв'язку можуть бути застосовані як методи розв'язання граничних інтегральних рівнянь, так і традиційні методи розв'язання інтегральних рівнянь. До перших відносяться методи граничних елементів і методи дискретних особливостей, щоправда, гальоркінське формулювання для регулярних граничних інтегральних рівнянь у даній роботі не розглядалося, оскільки вимагає окремого дослідження. Прикладом

традиційних чисельних методів розв'язку інтегральних рівнянь другого роду може служити метод механічних квадратур.

Наведений вище підхід легко поширюється й на інший чисельний метод обчислювальної теорії потенціалу – метод дискретних особливостей. Розглянемо вихідну постановку граничного інтегрального рівняння (2.74), яка після розбивки межі області розв'язку на граничні елементи включає інтеграли виду (2.84). Оскільки передбачається, що точка X_0 лежить усередині області розв'язку, то ядра K завжди є регулярними, необхідне число раз диференційованими функціями. Тоді розкладемо ядро K в ряд Тейлора уздовж граничного елемента в околі точки X'_0 і утримавши лише перший член розкладання, отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t)K(t, X_0)h(t)dt = K(X'_0, X_0) \int_{t_1}^{t_2} U(t)h(t)dt = K(X'_0, X_0)W(X'_0), \quad (2.88)$$

де $W(X'_0)$ – інтенсивність дискретної особливості. Тоді, наприклад, для рівняння (2.87), заміняючи в його правій частині інтеграли за допомогою апроксимації (2.88) і опускаючи проміжні перетворення, одержимо дискретний аналог у вигляді

$$u(X'_{0i}) + \eta_i \frac{\partial u}{\partial n}(X'_{0i}) = \sum_{k=1}^M \varphi(X'_{0k}, X_{0i}) W_2(X'_{0k}) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial \varphi(X'_{0k}, X_{0i})}{\partial n} W_1(X'_{0k}) \quad (2.89)$$

де

$$W_2(X'_{0k}) = \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} \frac{\partial u}{\partial n}(t) h_k(t) dt, \quad W_1(X'_{0k}) = \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} u(t) h_k(t) dt. \quad (2.90)$$

Отримані вирази для інтенсивностей дискретних особливостей (2.90) показують, що вони являють собою сумарні по граничному елементу інтенсивності шуканої функції або її нормальної похідної. У випадку традиційної для методу дискретних особливостей точності, шукана функція і її нормальна похідна можуть бути розкладені в ряд Тейлора в околі точки X'_{0k} і утримуючи перший член ряду, одержимо

$$W_2(X'_{0k}) \approx \frac{\partial u}{\partial n}(X'_{0k}) S_k, \quad W_1(X'_{0k}) \approx u(X'_{0k}) S_k, \quad (2.91)$$

де S_k – довжина k -го граничного елемента.

Зауважимо, що використання наближення (2.91), загалом кажучи, не обов'язково. Вхідний у співвідношення (2.90) інтеграл, що містить невідому функцію, підлягає визначенню з наступного розв'язку задачі й не має потреби в спрощеному уявленні виду (2.91), як і в будь-якій іншій апроксимації. А другий інтеграл, що містить відому функцію, може бути обчислений з високою точністю за допомогою більш складних квадратурних формул, ніж (2.91). Тому використання апроксимації (2.91) пояснюється тільки побажанням сумісності із традиційним алгоритмом методу дискретних особливостей.

Регулярні прямі алгоритми методу дискретних особливостей, засновані на представленні (2.89), взагалі кажучи, точніше традиційних методів дискретних особливостей і мають більші можливостей, наприклад, у випадку змішаних крайових умов. У той же час, запропоновані алгоритми, як і всі інші алгоритми методу дискретних особливостей, поступаються в точності аналогічним алгоритмам методу граничних елементів, але перевершують останні у швидкості розрахунку.

Природною формою апробації нових чисельних алгоритмів є їхнє тестування на спеціально підібраних задачах. Вимогам до тестових задач, методик тестування й інтерпретації результатів розрахунків присвячена значна література, починаючи з монографії [393]; питання тестування чисельних методів обчислювальної теорії потенціалу знайшли відбиття також у роботі [28]. У даній роботі для тестування використовувалися задача Діріхле для рівняння Лапласа (2.71), (2.72). В якості тестових функцій були обрані наступні гармонійні функції, визначені у квадраті ($0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$) або у колі одиничного радіуса із центром на початку координат.

$$u_1(x, y) = (x + y)/2, \quad (2.92)$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2, \quad (2.93)$$

$$u_3(x, y) = e^x \cos y, \quad (2.94)$$

Використання трьох гармонійних функцій замість однієї дозволяє з більшою впевненістю робити загальні висновки щодо точності запропонованих підходів. Традиційно для регулярних методів граничних елементів оптимальне положення точки коллокації щодо границі визначається шляхом чисельного експерименту на

тестовій задачі, що має аналітичний розв'язок. У цьому випадку було також проведено чисельний експеримент із використанням функцій (2.92) – (2.94), у результаті, мінімальну похибку вдалося отримати для точок коллокації, що лежать на серединному перпендикулярі до граничного елемента на відстані половини довжини граничного елемента, як і в інших регулярних алгоритмах.

Питання тестування та опис відповідних методик віднесені до Додатку 1. В таблиці 2.2а дано порівняння результатів чисельного розв'язку задачі Діріхле для функції (2.92) в одиничному колі традиційним регулярним методом граничних елементів (№1) (алгоритм В.Д. Купрадзе); запропонованим алгоритмом методу граничних елементів (№ 2); запропонованим прямим методом дискретних особливостей (№ 3).

Таблиця 2.2а – Порівняння результатів розв'язку задачі Діріхле для функції (2.92)

Кількість граничних елементів	Похибка методу №1 максимальна/ середньо-квдратична	Похибка методу №2 максимальна/ середньо-квдратична	Похибка методу №3 максимальна/ середньо-квдратична
50	.852108E-03 .310123E-05	.325322E-03 .107606E-05	.317632E-01 .904395E-04
100	.208497E-03 .778348E-06	.460147E-04 .168899E-06	.271041E-01 .101137E-03
200	.523328E-04 .194279E-06	.846386E-05 .291107E-07	.285408E-01 .106590E-03
400	.138282E-04 .481405E-07	.309944E-05 .596552E-08	.292825E-01 .109357E-03

У всіх наведених чисельних розрахунках використовувалися отримані оптимальні розташування точок коллокації. Результати чисельних розрахунків наведено в табл. 2.2а і 2.2б для круглої й квадратної областей, відповідно. Розрахунки проводилися для різного числа граничних елементів (дискретних особливостей). Результати наведено тільки для однієї з тестових функцій, оскільки розрахунки для інших тестових функцій продемонстрували гарний збіг з наведеними тут. Для коректності порівняння результатів розрахунків за допомогою сингулярного алгоритму методу граничних елементів з результатами розрахунків за

допомогою регулярних алгоритмів, в останніх замість згаданого вище інтегрування по реальній межі використовувалася стандартна апроксимація межі відрізками прямих. Перший рядок дає максимальну похибку, другий – середньоквадратичну.

Таблиця 2.2б – Порівняння результатів чисельного розв'язку задачі Діріхле для функції (2.92) у квадратній області вказаними вище алгоритмами

Кількість граничних елементів	Помилка методу №1	Помилка методу №2	Помилка методу №3
160	.118500E-02 .619152E-06	.680264E-03 .548595E-06	.103917E-02 .127448E-05
200	.530183E-03 .284582E-06	.166356E-03 .222926E-06	.290632E-03 .765017E-06
240	.285685E-03 .164432E-06	.148626E-03 .115835E-06	.256970E-03 .520429E-06
300	.168979E-03 .830855E-07	.392794E-04 .481105E-07	.102289E-03 .328160E-06
400	.928640E-04 .426434E-07	.607967E-05 .209963E-07	.449679E-04 .183140E-06

Наведені в табл. 2.2а і 2.2б результати показують, що запропонований регулярний коллокаційний алгоритм методу граничних елементів із точкою коллокації усередині області розв'язку має переваги по точності перед традиційними сингулярними й регулярними алгоритмами розглянутого методу для областей із гладкою межею (табл. 2.2а). Аналогічно, запропонований прямий метод дискретних особливостей має переваги як перед традиційним методом дискретних особливостей (у таблиці не наведено). Як і очікувалося, точність методу дискретних особливостей суттєво уступає точності методу граничних елементів. Для кусочно-гладкої області (табл. 2.2б) запропоновані алгоритми вже не мають настільки явно виражених переваг, а іноді й уступають традиційним алгоритмам по точності. Причиною того є наявність у квадратній області кутових точок, внаслідок чого точки коллокації для граничних елементів, що примикають до кутових точок, розташовуються дуже близько одна від одної, що «псує» властивості матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь і веде до збільшення похибки. Незважаючи на деякі спеціальні програмні удосконалення, виконані при програмній реалізації

алгоритму, повністю подолати зазначений недолік запропонованих підходів для меж із наявністю кутових точок не вдалося.

Запропонована група алгоритмів дозволила переформулювати задачу до вигляду регулярних граничних інтегральних рівнянь другого роду, які коректні за Фредгольмом. Остання обставина представляється істотною перевагою розглянутого підходу в порівнянні з традиційними сингулярними й регулярними алгоритмами обчислювальної теорії потенціалу. З практичної точки зору це означає суттєве збільшення надійності відповідного програмного забезпечення, розробленого на основі запропонованих алгоритмів.

2.3 Спільне застосування методу малого параметра і методу граничних елементів для чисельного розв'язку еліптичних задач з малими збуреннями

У даний час інтенсивний розвиток мікроелектроніки, мікромеханіки і біотехнологій робить дуже актуальною проблему малих збурень, тобто проблему визначення впливу ефектів, якими раніш зневажали через малість їхніх характерних параметрів чи малість області дії. Не зупиняючись докладно на фізичних аспектах подібних задач, відзначимо тільки, що в механіці суцільного середовища і теорії тепломасообміну сформувався окремий напрямок, що називається «багатомасштабні явища». У теорії чисельних методів існує устояна точка зору на проблему малих збурень, що зводиться до того, що так звані підсіткові ефекти в рамках чисельного методу не можуть бути проаналізовані. Зазначена теза приводить до очевидного висновку: чим менший ефект треба досліджувати, тим більш докладну дискретизацію варто ввести. Такий підхід призвів навіть до розвитку спеціального напрямку в чисельних методах – багатосіткових методів.

Хоча ідея використовувати методів теорії збурень і асимптотичні розкладання при побудові чисельних алгоритмів, взагалі кажучи, досить очевидна, вона не одержала достатнього розвитку, очевидно, через труднощі з доказом збіжності асимптотичних розкладань і через те, що фактично зводила сформульовану крайову задачу до послідовності інших крайових задач, що явно малоефективно. Метою даного підрозділу є застосування асимптотичних розкладань по малому параметру разом з чисельним методом, у даному випадку методом граничних елементів, для аналізу малих збурень в еліптичних задачах. Основна ідея даного підходу досить очевидна і ґрунтується на добре відомому факті – для методу високого порядку точності похибка результатів застосування методу виявляється набагато меншою, ніж похибка застосованих апроксимацій.

Нехай у параметри, що визначають крайову задачу (у даній роботі мається на увазі еліптична крайова задача, але даний підхід може бути застосований до крайової задачі будь-якого типу), внесені збурення $\varepsilon f(X)$, де ε – мала величина, $f \sim 1$ – деяка функція від координат X (у загальному випадку вона залежить від незалежних перемінних, у яких задача визначена, як безпосередньо, так і у вигляді нелінійності). Тоді будемо відшукувати розв'язок крайової задачі у вигляді наступного ряду

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.95)$$

Традиційно в асимптотичних методах функції u_i визначалися аналітично. Як сказано вище, ідея даної роботи полягає в тім, щоб визначити u_i за допомогою чисельного методу, зокрема, методу граничних елементів, що вважається найбільш точним для еліптичних задач, тут розглянутих. У класичних чисельних методах для розв'язку даної збуреної задачі було потрібно б зробити дискретизацію таким чином, щоб погрішність дискретизації була $\delta < \varepsilon$, а бажано $\delta \ll \varepsilon$. Позначимо похибку чисельного визначення функції u_0 через Δ (як буде показано нижче, як правило, всі функції u_i задовольняють аналогічним крайовим задачам, тому варто очікувати, що всі ці функції будуть визначені приблизно з тією же самою

похибкою Δ). Для сучасних чисельних методів, щонайменше, $\Delta < \delta$, а як правило, $\Delta \ll \delta$. Вважаючи функцію u обмеженою, і додатково вважаючи для простоти $u_1 \sim u_0$ (що, взагалі кажучи, необов'язково), одержимо, що застосування розкладання (2.95) дозволяє знизити вимоги до параметрів дискретизації до $\delta > \varepsilon > \Delta$, тобто, дуже істотно.

Зауваження. Обґрунтуванням запропонованого підходу може служити доказ збіжності ряду (2.95), однак, як і для більшості асимптотичних розкладань, довести цей факт дуже складно і, очевидно, у загальному вигляді неможливо, тому приймемо як обґрунтування методу результати чисельних експериментів на тестових задачах, що, звичайно, не може вважатися строгим обґрунтуванням.

Поставлена вище задача впритул примикає до відомої проблеми чутливості чисельного методу до малих збурень (що було розглянуто у першому розділі даної роботи). Чутливість тут розуміється як зміна результатів обчислень після внесення в задачу малих збурень. Іноді під чутливістю розуміють похідну зміни розв'язку по збуренню, але, оскільки в даній роботі основний інтерес представляє гранична чутливість, тобто, граничний випадок, коли визначення такої похідної важко, то і використання визначення чутливості як похідної представляється недоцільним. Для дослідження чутливості й аналізу впливу малих збурень принципове значення має методика тестування програм і алгоритмів.

Нехай задані незбурене (у сенсі збурення межі) (2.96) і збурене (2.97) граничні інтегральні рівняння

$$c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y), \quad (2.96)$$

$$c(x_0, y_0)u^*(x_0, y_0) = \int_{\gamma} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n^*} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds^*(x, y) - \int_{\gamma} u^*(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n^*} ds^*(x, y). \quad (2.97)$$

Метою в даній задачі є встановлення зв'язку між цими рівняннями, якщо збурення відоме і може бути представлене у вигляді $\varepsilon f(x, y)$, де ε – деякий малий параметр; f – якась, щонайменше, кусково-неперервна функція порядку $O(1)$.

Збурення межі області розв'язку і крайових умов можуть бути включені в рівняння (2.97). Тоді представимо функцію форми збуреної межі у вигляді наступного розкладання в ряд

$$h^*(t) = h^{*0}(t) + \varepsilon h^{*1}(t) + \varepsilon^2 h^{*2}(t) + \dots + \varepsilon^k h^{*k}(t) + \dots, \quad (2.98)$$

де t – внутрішній параметр кривої (у найпростішому випадку він співпадає з довжиною кривої s). Аналогічним чином представимо і крайові значення шуканої функції та її нормальної похідної (збурення яких може бути наслідком збурення межі чи мати іншу, окрему причину)

$$u^*(t) = u^{*0}(t) + \varepsilon u^{*1}(t) + \varepsilon^2 u^{*2}(t) + \dots + \varepsilon^k u^{*k}(t) + \dots, \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial n} = \frac{\partial u^{*0}(t)}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial u^{*1}(t)}{\partial n} + \varepsilon^2 \frac{\partial u^{*2}(t)}{\partial n} + \dots + \varepsilon^k \frac{\partial u^{*k}(t)}{\partial n} + \dots \quad (2.100)$$

Після підстановки представлень (2.98) - (2.100) у рівняння (2.97) одержимо

$$\begin{aligned} & c(x_0, y_0) (u^{*0}(x_0, y_0) + \varepsilon u^{*1}(x_0, y_0) + \varepsilon^2 u^{*2}(x_0, y_0) + \dots) = \\ & = \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial (u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \dots)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) \right. \\ & \times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 h^{*2}(x, y) + \dots) \Big\} ds(x, y) - \\ & - \int_{\gamma} (u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \dots) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} \times \\ & \times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 h^{*2}(x, y) + \dots) ds(x, y). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Як і раніше, оскільки параметр ε , взагалі кажучи, довільний, то щоб рівняння (2.101) виконувалося при будь-якій значенні параметра ε , варто зажадати рівності коефіцієнтів при кожному ступені параметра ε , у результаті нульове наближення має вигляд

$$\begin{aligned}
c(x_0, y_0)u^{*0}(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u^{*0}(x, y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) h^{*0}(x, y) ds(x, y) - \\
&- \int_{\Gamma} u^{*0}(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} h^{*0}(x, y) ds(x, y).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Інтегрування в рівнянні (2.102) виконується уздовж незбуреної межі Γ , оскільки h^{*0} збігається з функцією форми незбуреної межі. Відзначимо, що нульове наближення (2.102) фактично збігається з незбуреним рівнянням (2.96). Перше наближення має вигляд

$$\begin{aligned}
c(x_0, y_0)u^{*1}(x_0, y_0) &= \\
&= \int_{\gamma} \left(\frac{\partial u^{*0}(x, y)}{\partial n} h^{*1}(x, y) + \frac{\partial u^{*1}(x, y)}{\partial n} h^{*0}(x, y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \\
&- \int_{\gamma} \left(u^{*0}(x, y) h^{*1}(x, y) + u^{*1}(x, y) h^{*0}(x, y) \right) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y).
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Отут варто провести розподіл між збуреною γ і незбуреною Γ кривими. Після підстановки в інтеграл функції форми посилання на ці криві означає лише зміну границь інтегрування, і, якщо ці границі збігаються, а це лише питання техніки опису кривої, то збурена і незбурена крива в цьому сенсі вже нерозрізнені. Помноживши і розділивши підінтегральний вираз на h^{*0} і згрупувавши співмножники, можна формально перейти до інтегрування по незбуреній кривій Γ .

Якщо розв'язок u^{*0} відомий, нехай навіть приблизно з розв'язку рівняння (2.102), то співвідношення (2.103) можна розглядати як інтегральне рівняння відносно u^{*1} (якщо $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$ відомо з крайових умов) чи $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$ (якщо u^{*1} відомо з крайових умов). Таким чином, рівняння (2.103) також подібно рівнянню (2.102) (за винятком неоднорідного члена). Нарешті, сформулюємо m -е рівняння:

$$\begin{aligned}
c(x_0, y_0)u^{*m}(x_0, y_0) &= \\
&= \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^m \frac{\partial u^{*k}(x, y)}{\partial n} h^{*m-k}(x, y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \\
&- \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^m (u^{*k}(x, y) h^{*m-k}(x, y)) \right) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Усі висновки, зроблені для граничних інтегральних рівнянь (2.102) і (2.103) справедливі для граничного інтегрального рівняння (2.104).

Очевидно, що випадок малих збурень крайових умов є частковим випадком збурення межі. Розкладання (2.99) і (2.100) формально ніяк не зв'язані зі збуренням межі, тому в них може бути враховане збурення крайових умов. Відповідна послідовність граничних інтегральних рівнянь може бути отримана з послідовності (2.102) - (2.104) зануленням доданків, зв'язаних зі збуренням межі області розв'язку.

Грунтуючись на описаній вище методиці тестування програм, були зроблені тестові розрахунки. Як тестова була обрана задача Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{2.105}$$

$$u|_{\Gamma} = g(x, y). \tag{1.106}$$

Як тестові були обрані наступні гармонійні функції (2.92)-(2.94), визначені у квадраті ($0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$) чи колі одиничного радіуса з центром у початку координат. Очевидно, що повне дослідження розглянутих алгоритмів досить важко і не може бути виконане в обмежених рамках даної роботи. Ситуація ускладнюється тим, що, якщо для глобального збурення тестова функція підбирається елементарно для будь-якої форми області, наприклад, у вигляді

$$u(x, y) = u_i + \varepsilon u_j, \tag{2.107}$$

де функції в правій частині (2.107) визначені співвідношеннями (2.92) - (2.94); то для локального збурення крайових умов тестову задачу можна побудувати тільки в області, для якої відомі досить прості вирази функцій Гріна, тобто, кола, смуги, напівсмуги. Що ж стосується збурення форми

області, то підібрати в цьому випадку коректну тестову задачу досить складно через необхідність визначати й збурення крайових умов.

Усі, приведені нижче, розрахунки були виконані в одиничному квадраті з використанням сітки 50×50 граничних елементів нульового порядку, при цьому максимальна похибка методу для основної тестової функції, визначеної (3.265), у рівномірно розташованих вузлах сітки усередині області склала $0,68023800e-05$, а середньоквадратична похибка складала $0,23669210e-07$.

У таблиці 2.3а приведені результати розрахунків за допомогою запропонованого методу тестової задачі Діріхле у випадку глобального збурення крайових умов. У цьому випадку відгук на збурення може бути визначений аналітично. Очевидно, що приведені величини помилок відгуку відповідають теоретично очікуваним значенням. Як тільки величина збурення виявляється порівнянною з похибкою методу граничних елементів, що використовувався для розв'язку крайових задач, відносна помилка визначення відгуку починає різко зростати. У таблицях 3.4 і 3.5 приведені результати розрахунків локальних збурень крайових умов для класичного методу граничних елементів і алгоритму, запропонованого у даному розділі. Очевидно, що запропонований алгоритм виявився дошкульнішим до збурень.

Таблиця 2.3а – Глобальне збурення крайових умов. Розрахунок зроблений комбінованим методом малого параметра (урахування першого наближення) і граничних елементів.

Збурення	Максимум відгуку	Середньоквадратичний відгук	Максимум помилки відгуку	Середньоквадратична помилка відгуку
$0,10000e-01$	$0,266278e-01$	$0,316907e-03$	$0,147242e-05$	$0,736568e-08$
$0,99999e-03$	$0,266265e-02$	$0,316904e-04$	$0,139302e-05$	$0,726825e-08$
$0,99999e-04$	$0,266552e-03$	$0,316917e-05$	$0,150270e-05$	$0,746707e-08$
$0,99999e-05$	$0,269413e-04$	$0,317204e-06$	$0,162374e-05$	$0,721761e-08$

0,99999e-06	0,333786e-05	0,323238e-07	0,118722e-05	0,577233e-08
0,99999e-07	0,107288e-05	0,599115e-08	0,969870e-06	0,407706e-08
0,99999e-08	0,953674e-06	0,454624e-08	0,939753e-06	0,432718e-08

Таблиця 2.3б – Локальне збурення крайових умов. Розрахунок зроблений методом граничних елементів.

Збурення	Максимум відгуку	Середньоквадратичний відгук
0,10000000e-01	0,25033280e-02	0,22570830e-05
0,99999990e-03	0,25025760e-03	0,22577660e-06
0,99999990e-04	0,24951990e-04	0,23158120e-07
0,99999990e-05	0,24735930e-05	0,56874050e-08
0,99999990e-06	0,95367430e-06	0,49376350e-08
0,99999990e-07	0,83446500e-06	0,44488610e-08
0,99999990e-09	0,00000000	0,00000000

Таблиця 2.3в – Локальне збурення крайових умов. Розрахунок зроблений комбінованим методом малого параметра (урахування першого наближення) і граничних елементів.

Збурення	Максимум відгуку	Середньоквадратичний відгук
0,10000000e-01	0,25033360e-02	0,22570510e-05
0,99999990e-03	0,25033370e-03	0,22570500e-06
0,99999990e-05	0,25033360e-05	0,22570480e-08
0,99999990e-06	0,28370880e-06	0,29762680e-09
0,99999990e-07	0,25033370e-07	0,22570560e-10
0,99999990e-08	0,25033380e-08	0,22570530e-11

Таблиці 2.3г і 2.3д містять аналогічні результати для випадку збурення межі області розв'язку. Як і раніше, запропонований алгоритм виявився дошкульніше до збурень.

Таблиця 2.3г – Локальне збурення межі. Розрахунок зроблений методом граничних елементів.

Збурення	Максимум відгуку	Середньоквадратичний відгук
0,10000000e-01	0,78861560e-02	0,78465500e-05
0,99999990e-03	0,29973690e-03	0,29012160e-06
0,99999990e-04	0,23178760e-04	0,33003970e-07
0,99999990e-05	0,70855020e-05	0,23870020e-07
0,99999990e-06	0,68880620e-05	0,23678410e-07
0,99999990e-07	0,68284570e-05	0,23644730e-07

Таблиця 2.3д – Локальне збурення межі. Розрахунок зроблений комбінованим методом малого параметра (урахування першого наближення) і граничних елементів.

Збурення	Максимум відгуку	Середньоквадратичний відгук
0,10000000e-01	0,71920044e-02	0,72663500e-05
0,99999990e-03	0,28376910e-03	0,28333180e-06
0,99999990e-04	0,23447680e-04	0,33310090e-07
0,99999990e-05	0,69143420e-05	0,13956750e-07
0,99999990e-06	0,11147700e-05	0,78645340e-08
0,99999990e-07	0,68145870e-06	0,69585622e-08

Таким чином, у даній роботі запропонований комбінований алгоритм методів малого параметра і граничних елементів. Вище показана ефективність застосування запропонованого підходу для аналізу малих збурень. Показано, що точність, що досягається за допомогою запропонованого алгоритму набагато вища, ніж точність класичного методу граничних елементів і достатня для багатьох практичних цілей. Таким чином, дана робота має методичне та прикладне значення для проведення інженерних розрахунків.

2.4 Висновки до розділу 2

Грунтуючись на вищевикладених оглядах літератури та аналізі історії і сучасного стану питання, можна зробити наступні висновки:

1. Метод граничних елементів та інші методи теорії потенціалу представляють собою потужний засіб розв'язання лінійних, однорідних задач еліптичного типу, що підтверджено досвідом практичного використання, яке відображено у низці робіт автора даної дисертації та роботах інших авторів.

2. Щоб запобігти обчислення сингулярних інтегралів, яке суттєво ускладнює алгоритм методу граничних елементів, був запропонований регулярний алгоритм цього методу з точкою колокації усередині області розв'язку. Цей підхід дозволяє звести еліптичну крайову задачу, що розглядається, до регулярного граничного інтегрального рівняння другого роду, яке коректне за Фредгольмом, що радикально підвищує надійність розробленого на основі цього алгоритму програмного забезпечення. Незважаючи на те, що отримане граничне інтегральне рівняння являється наближеним, запропонований алгоритм демонструє результати обчислювального експерименту на рівні сингулярного та традиційного регулярного методу, у яких аналогічне граничне інтегральне рівняння є

точним. Цей факт пояснюється кращою структурою матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь у запропонованому алгоритмі.

3. На аналогічних засадах був запропонований прямий регулярний алгоритм методу дискретних особливостей з точкою колокації усередині області розв'язку, який значно поступається запропонованому алгоритму методу граничних елементів у точності, але переважає останній у швидкості розрахунків. За ідеєю цей метод близький до методу фундаментальних розв'язків, що зараз вельми розповсюджений за кордонами нашої країни, однак запропонований алгоритм переважає аналог завдяки властивостям, притаманним прямим алгоритмам.

4. На основі сумісного застосування методу граничних елементів та методу малого параметра запропоновано комбінований алгоритм для асимптотичного урахування малих збурень межі області розв'язку та крайових умов. Запропонований алгоритм має унікальні переваги, не притаманні іншим багатосітковим методам.

5. За традицією теорії потенціалу нові алгоритми були продемонстровані на прикладах задач для рівняння Лапласа, однак пробні розрахунки підтвердили їх ефективність для системи рівнянь Стокса.

РОЗДІЛ 3

Задачі мікрогідродинаміки та течії Стокса

3.1 Розкладання Уайтхеда

Розглянемо попередньо основну ідею, покладену в основу асимптотичного підходу в даному розділі. Нехай мається деяка система диференціальних рівнянь у частинних похідних, доповнена необхідними початковими і крайовими умовами, а також іншими відповідними співвідношеннями:

$$L(u) = 0. \quad (3.1)$$

Нехай відомий деякий розв'язок крайової задачі для системи (3.1) u^0 , який ми вважаємо стійким (оскільки далі мова йде про рівняння Нав'є-Стокса, питання існування й єдності розв'язку яких дотепер не вирішені, зробити апріорні висновки про стійкість якого-небудь розв'язку, взагалі кажучи, неможливо, більш того, для рівнянь Нав'є-Стокса відомі численні випадки нестійкості, отже, стійкість розв'язку в даному випадку можна тільки вимагати а priori). Нехай необхідно знайти такий розв'язок крайової задачі для системи (3.1) u , що мало відрізняється від u^0 (це мале відхилення може бути викликано малою зміною форми області, крайових чи початкових умов, малою зміною визначальних параметрів чи наявністю малих параметрів у рівнянні і так далі). Вводячи параметр ε , що характеризує малість збурення, одержимо відповідно до теорії асимптотичних методів

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^n u^n + \dots, \quad (3.2)$$

де $u^1, u^2, \dots, u^n \dots$ – деякі функції, що підлягають визначенню. Підстановка (3.2) у (3.1) і у відповідні умови однозначності в ряді випадків дозволяє звести початкову задачу до послідовності більш простих крайових задач, щодо функцій u^i , крім того, іноді цей підхід забезпечує також лінеаризацію системи.

Розглянемо описаний підхід на прикладі рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F} + \nu \Delta \vec{V}, \quad (3.3)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (3.4)$$

с крайовими умовами прилипання

$$\vec{V}|_{\Gamma} = \vec{V}_e, \quad (3.5)$$

і початковими умовами

$$\vec{V}(t=0) = \vec{V}_0. \quad (3.6)$$

Представлення швидкості і тиску у вигляді (3.2) з наступною підстановкою в задачу (3.3) - (3.6) дає (припущення про збурення межі зручно розглядати окремо, оскільки включення його в загальну постановку сильно ускладнить виклад):

$$\frac{\partial \vec{V}^0}{\partial t} + (\vec{V}^0 \nabla) \vec{V}^0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F} + \nu \Delta \vec{V}^0, \quad (3.7)$$

$$\text{div} \vec{V}^0 = 0, \quad (3.8)$$

$$\vec{V}^0|_{\Gamma} = \vec{V}_e^0, \quad (3.9)$$

$$\vec{V}^0(t=0) = \vec{V}_0^0. \quad (3.10)$$

Розв'язок крайової задачі (3.7) - (3.10) вважається відомим

$$\frac{\partial \vec{V}^1}{\partial t} + (\vec{V}^0 \nabla) \vec{V}^1 + (\vec{V}^1 \nabla) \vec{V}^0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p^1 + \nu \Delta \vec{V}^1, \quad (3.11)$$

$$\text{div} \vec{V}^1 = 0, \quad (3.12)$$

$$\vec{V}^1|_{\Gamma} = \vec{V}_e^1, \quad (3.13)$$

$$\vec{V}^1(t=0) = \vec{V}_0^1. \quad (3.14)$$

і далі

$$\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial t} + (\vec{V}^0 \nabla) \vec{V}^2 + (\vec{V}^1 \nabla) \vec{V}^1 + (\vec{V}^2 \nabla) \vec{V}^0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p^2 + \nu \Delta \vec{V}^2, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}^2 = 0, \quad (3.16)$$

$$\vec{V}^2|_{\Gamma} = \vec{V}_e^2, \quad (3.17)$$

$$\vec{V}^2(t=0) = \vec{V}_0^2. \quad (3.18)$$

Хотілося б відзначити, що на відміну від початкового рівняння (3.3) рівняння (3.11), (3.15) лінійні. Для урахування збурень межі, як відзначалося вище, необхідно рівняння (3.11), (3.12), (3.15), (3.16) і так далі замінити їхніми інтегральними аналогами, що вимагає окремого дослідження.

Природно в якості \vec{V}^0 використовувати тривіальні розв'язки $\vec{V}^0 = \text{const}$, тоді малий параметр зручно одержати при обезрозмірюванні рівняння (число Рейнольдса). Наприклад, \vec{V}^0 можна вибрати як середню швидкість в області течії

$$\vec{V}^0 = \frac{1}{\|D\|_D} \int_D \vec{V} dx, \quad (3.19)$$

де $\|D\|$ – деяка геометрична міра області D (довжина, площа, об'єм). При

$$\vec{V}^0 = \text{const} \neq 0, \quad (3.20)$$

маємо наближення Озеєна (3.10), при

$$\vec{V}^0 = 0, \quad (3.21)$$

наближення Стокса. З поставлених задач очевидно, що не доцільно розглядати наближення Стокса як частинний випадок наближення Озеєна, оскільки рівняння в цих випадках мають різну структуру. Не можна також розглядати наближення Озеєна як наступне за Стоксом, оскільки воно не збігається з (3.15).

Наближення Озеєна і Стокса застосовуються при малих числах Рейнольдса, що і використовується як малий параметр, тобто

$$\vec{V} = \vec{V}^0 + \text{Re} \vec{V}^1 + \text{Re}^2 \vec{V}^2 + \dots, \quad (3.22)$$

але при виводі задач (3.11) - (3.18) не була потрібна малість числа Рейнольдса, як і обезрозмірювання взагалі, а передбачалася лише наявність у

системі малого параметра, що дає додаткові можливості використання підходу.

Зауваження. Класичне обезрозмірювання в гідромеханіці робиться в припущенні, що в задачі відсутній специфічний масштаб часу. При такому підході втрачає сенс питання: чи є течія повільною чи швидкою. Однак часто гідродинаміка в'язкої рідини є складовою частиною більш складної системи, у якій є масштаб часу, тоді у відповідних наближеннях необхідно, взагалі кажучи, обов'язково зберегти похідну за часом, що і робиться в звичайному наближенні Озеєна, а іноді і наближенні Стокса. У таких випадках доцільно говорити про повільну течію, коли наступний порядок малості мають тільки конвективні члени.

Асимптотичний аналіз безрозмірних рівнянь Нав'є-Стокса на основі представлення (3.22) має деякі особливості. Підставивши (3.22) в безрозмірні рівняння

$$\frac{\partial \vec{V}^1}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{V}^1, \quad (3.23)$$

де усі величини вважаються безрозмірними. Одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\vec{V}^0 + \text{Re } \vec{V}^1 + \text{Re}^2 \vec{V}^2 + \dots)}{\partial t} + ((\vec{V}^0 + \text{Re } \vec{V}^1 + \text{Re}^2 \vec{V}^2 + \dots)\nabla) \times \\ & \times (\vec{V}^0 + \text{Re } \vec{V}^1 + \text{Re}^2 \vec{V}^2 + \dots) = -\text{grad}\left(\frac{p^{-1}}{\text{Re}} + p^0 + \text{Re } p^1 + \text{Re}^2 p^2 + \dots\right) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \Delta(\vec{V}^0 + \text{Re } \vec{V}^1 + \text{Re}^2 \vec{V}^2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Дорівнюючи члени з рівними ступенями числа Рейнольдса, одержимо

$$p^{-1} = 0, \quad (3.25)$$

що фізично очевидно,

$$\text{grad } p^0 = \Delta \vec{V}^1, \quad (3.26)$$

і так далі. Очевидно, що отримані наближення не є ні наближеннями Стокса, ні наближеннями Озеєна, у якому $\text{grad } p^0$ входить в одне наближення

с. $\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{V}^1$ Але, якщо ввести в (3.14) відповідну заміну $\bar{p}^0 = \text{Re} p^0$, $\bar{p}^1 = \text{Re} p^1$,

то

$$\text{Re grad } p^0 = \Delta \vec{V}^1, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \vec{V}^1}{\partial t} + (\vec{V}^0 \nabla) \vec{V}^1 = -\text{Re grad } p^1 + \Delta \vec{V}^2, \quad (3.28)$$

і так далі. Очевидно, що (3.28) також не збігається з наближенням Озеєна.

Подібна ситуація на практиці підтверджується тим, що наближення Озеєна дає задовільні результати в проміжку $1 < \text{Re} < 5$, де розкладання (3.22), взагалі кажучи, некоректно.

Таким чином, можна отримати класичне наближення Стокса, що має вигляд:

$$\text{grad } p^1 = \mu \Delta \vec{V}^1 + \vec{F}, \quad \text{div } \vec{V}^1 = 0, \quad \vec{V}^1 \Big|_{\Gamma} = \vec{V}_e, \dots \quad (3.29)$$

$$\text{grad } p^i = \mu \Delta \vec{V}^i + \vec{\Phi}, \quad \text{div } \vec{V}^i = 0, \quad \vec{V}^i \Big|_{\Gamma} = 0, \dots \quad (3.30)$$

де векторна функція $\vec{\Phi}$ відбиває вклад доданків, не врахованих у попередніх наближеннях. Перша задача (3.29) є класичним наближенням Стокса, а вся послідовність визначає розкладання Уайтхеда й при обмежених областях розв'язання та малих числах Рейнольдса має збігатися до точного розв'язку. На жаль, для задач про зовнішнє обтікання, тобто у необмежених областях, розкладання Уайтхеда розходиться. Цей факт отримав назву парадоксу Уайтхеда.

Зауваження. Наведене вище розкладання Уайтхеда призводить до стаціонарних рівнянь Стокса. Це вірно у загальному випадку, коли у задачі відсутні інші масштаби часу. Але якщо в задачі є додатковий масштаб часу T , то він, в принципі, може бути застосований для обезрозмірювання та призвести до того, що похідна за часом вже не буде малою навіть у добутку з малим числом Рейнольдса. Це призведе до нестаціонарних рівнянь Стокса

$$\rho \frac{\partial \vec{V}^1}{\partial \tau} + \text{grad } p^1 = \mu \Delta \vec{V}^1 + \vec{F}, \quad (3.31)$$

$$\text{div } \vec{V}^1 = 0. \quad (3.32)$$

Зазвичай рівняння Стокса розглядають у розмірному вигляді, але якщо в ньому провести обезрозмірювання, то

$$\frac{\partial \vec{V}^1}{\partial \tau} \text{Sk} + \gamma_1 \text{grad } p^1 = \Delta \vec{V}^1 + \gamma_2 \vec{F}, \quad (3.33)$$

де γ_1, γ_2 – безрозмірні комплекси, які можуть змінюватися у широкому діапазоні; число Стокса

$$\text{Sk} = \frac{L^2}{\nu T}. \quad (3.34)$$

Очевидно, що для течій, близьких до стаціонарних, значення T прагне до нескінченності, а само число Стокса до 0. У більшості практично цікавих течій число Стокса достатньо мало, тому асимптотичне розкладання за числом Стокса може бути проведене. Таке розкладання зв'язує стаціонарні та нестаціонарні рівняння Стокса та дозволяє проводити розрахунки у «повільному часі». Крім того, воно може бути застосовано для оцінки похибки, що виникає у зв'язку з нехтуванням нестаціонарними ефектами.

Розглянемо випадок, коли в системі є ще й перенос деякої субстанції, тоді рівняння переносу, наприклад, для температури T (у безрозмірному вигляді):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) T = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T, \quad (3.35)$$

де число Пекле $\text{Pe} = \frac{UL}{a} = \text{Re Pr}$. Звідки очевидно, що при обмеженому числі

Прандтля з умови $\text{Re} \ll 1$ слідує $\text{Pe} \ll 1$, тобто в рівняння (3.35) можна підставити розкладання в ряд

$$T = T^0 + \text{Pe} T^1 + \text{Pe}^2 T^2 + \dots, \quad (3.36)$$

і далі за процедурою методу малого параметру отримаємо наближення Уайтхеда

$$\Delta T^0 = 0, \quad \frac{\partial T^1}{\partial \tau} + (\bar{V}^1 \nabla) T^0 = \Delta T^1, \dots \quad (3.37)$$

Очевидно, що наближення Уайтхеда для рівняння переносу є істотним спрощенням останнього.

Викладені вище міркування ніяким чином не претендують на повний розв'язок проблеми асимптотичного аналізу рівнянь динаміки в'язкої рідини і тепломасообміну при малих визначальних параметрах. По-перше, до таких параметрів можна віднести не тільки число Рейнольдса, а і, наприклад, число Стефана, що було зроблено у наступному розділі, число Грасгофа, число Пекле. По-друге, навіть випадок малих чисел Рейнольдса не розглянуто до кінця, і нижче йому буде приділена значна увага. З другого боку, добре відомо, що асимптотичні методи тісно пов'язані з різного роду парадоксами (достатньо пригадати парадокс Стокса, який також буде розглянуто далі), але визначення та аналіз парадоксів, що виникають у запропонованих загальних асимптотичних моделях, ще не проводилося.

3.2 Побудова матриць фундаментальних розв'язків для системи рівнянь Стокса

Система рівнянь Стокса є однією з математичних моделей, що описує течію в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса. Систематичне викладення застосування теорії потенціалу до системи рівнянь Стокса можна знайти також у книгах О. О. Ладиженської [56], Дж. Хаппеля та Г. Бреннера [45]. Однак обидва ці викладення, в першу чергу, орієнтовані на просторову течію, в книзі Ладиженської плоский випадок навіть не згадано, крім цього викладення грішить надмірною конспективністю. В книжці Хаппеля та Бреннера [45] плоский випадок розкритий також недостатньо. Спосіб

інтегральних перетворень, прийнятий в книзі Ладиженської, достатньо складний та може привести до істотних труднощів навіть при будь-якому зміні математичної моделі. З іншої сторони, в книзі Хаппеля та Бреннера використана виробляюча функція, котра фактично «вгадана» (при цьому вірно «вгаданий» тільки порядок сингулярності, але ні її повний вигляд). Тому в даній роботі стояло питання о суворому виводі матриці фундаментальних розв'язків системи рівнянь Стоксу. Для цього був обраний метод формального оберненого оператора, який зводиться до побудови матричного оператора, оберненого даному [395 – 399].

Розглянемо систему рівнянь Стокса у плоскому випадку:

$$\begin{cases} \mu\Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Матричний оператор для системи (3.38) має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} \mu\Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \mu\Delta & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Символічний визначник матриці L дорівнює:

$$\det(L) = -\mu\Delta\Delta. \quad (3.40)$$

Обернений до оператору L оператор будується по правилам оберненої матриці:

$$R = L^{-1} = \left(-\frac{1}{\det(L)} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \mu\Delta \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \mu\Delta \frac{\partial}{\partial y} \\ \mu\Delta \frac{\partial}{\partial x} & \mu\Delta \frac{\partial}{\partial y} & \mu\mu\Delta\Delta \end{pmatrix} = -\frac{R^*}{\det(L)}. \quad (3.41)$$

Тоді, враховуючи, що оператор L самоспряжений, можна записати для матриці фундаментальних розв'язків системи рівнянь Стоксу:

$$RL(U) = \delta E, \quad (3.42)$$

де U – матриця фундаментальних розв'язків; δ – дельта-функція Дірака; E – одинична матриця. Діючи на обидві частини співвідношення (3.42) матричним оператором R , отримаємо

$$RL(U) = R\delta E, \quad (3.43)$$

звідки

$$U = R\delta E. \quad (3.44)$$

Подіємо оператором R на дельта-функцію, для чого випишемо добуток

$$\varphi_1 = (\det(L))^{-1} \delta. \quad (3.45)$$

Враховуючи основний вид оператора $\det(L)$ (3.40), виробляюча функція у даному випадку з точністю до множника $\frac{1}{\mu}$ є фундаментальним розв'язком

бігармонічного рівняння:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 (\ln r - 1). \quad (3.46)$$

Слід звернути увагу на відмінність представлення (3.46) від застосованого вище, запропонованого Бюргерсом (Burgers) представлення $\varphi_1 = r^2 \ln r$, котре збігається з (3.46) асимптотично, але відрізняється у регулярній частині. Таким чином,

$$U = -R^* \varphi_1, \quad (3.47)$$

тобто

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) + \frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - 1 \right), \\ U_{12} = U_{21} &= -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ U_{13} = U_{31} &= \frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
 U_{22} &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\ln \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right) + \frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - 1 \right), \\
 U_{23} = U_{32} &= \frac{1}{2\pi} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\
 U_{33} &= \mu\delta.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Подальша процедура застосування розв'язку (3.48), (3.49) є стандартною. Треба зазначити, що побудована матриця фундаментальних розв'язків має простий фізичний сенс – вона є аналітичним розв'язком для випадку локалізованого (точкового) впливу на суцільне рідинне середовище, яке описується розглянутою системою рівнянь. У багатьох випадках побудована матриця фундаментальних розв'язків є достатньою для наближеного розв'язання задачі, а у ще більшому числі випадків такі матриці можуть бути використані як частина методу інженерного розрахунку.

Побудова аналогічних матриць фундаментальних розв'язків для альтернативних формулювань системи рівнянь Стокса та інших випадків системи рівнянь Стокса подібна до наведеної вище та представляється суто рутинною процедурою, тому вона віднесена до Додатку 2.

3.3 Метод М. Смолюховського та застосування його для чисельного моделювання руху мікрочастинок

Стрімкий розвиток мікроелектроніки, мікробіології та мікромеханіки, а також нанотехнологій, що має місце в останнє десятиліття, стимулював постановку нових задач у різних галузях науки та техніки, у тому числі й у гідромеханіці. Оскільки всі вищезгадані науки характеризуються істотно малими геометричними розмірами областей, у яких протікають процеси, які мають бути досліджені, не важко показати, що течії рідини або газу у вищезгаданих гідродинамічних задачах будуть також характеризуватися

досить малими характерними розмірами, тобто, вони можуть бути віднесені, у переважній більшості випадків, до течії Стокса.

Незважаючи на досить інтенсивні дослідження, проведені в зазначених областях, досі в тіні залишилася проблема руху малих частинок у подібних течіях. Це тим більш дивно, з огляду на те, що винятково актуальна проблема руху клітин у рідинних середовищах, що часто виникає в біології та медицині, відноситься саме до таких задач. Проте, теорія багатозфазних течій Стокса в загальному вигляді дотепер не розроблена, хоча крім зазначених вище областей теорія досить актуальна й для дослідження хімічних технологій обробки дисперсних матеріалів, для аналізу ряду процесів в енергетиці, а так само для екологічних і гідрометеорологічних досліджень. Новою тенденцією, що виникла останнім часом й також пов'язана з розглянутим напрямком, є нанотехнології, які оперують із частинками, що рухаються в рідині або газоподібному середовищі та мають гранично малі розміри з точки зору механіки суцільного середовища. На думку автора даної роботи, принциповою проблемою, що підлягає вирішенню при формуванні моделі багатозфазних течій Стокса, повинні стати задачі гідродинамічної взаємодії в стоксовських течіях. На жаль, дотепер зазначені задачі хоча й розглядалася багаторазово, однак вивчалися епізодично, причиною чому були істотні обчислювальні й математичні складності, що виникають при розв'язанні задач гідродинамічної взаємодії.

Розгляд проблеми гідродинамічної взаємодії в течіях Стокса доцільно почати з найпростіших задач, що мають основне значення для побудови й тестування моделі. До таких задач відноситься взаємодія сферичних частинок у течії Стокса, чому й присвячена дана частина представленої роботи.

М. Смолуховський звернувся до проблеми взаємодії мікрочастинок у повільних потоках вже після отримання разом з А. Ейнштейном Нобелівської премії за роз'яснення природи броунівського руху. Класична модель броунівського руху припускає зіткнення частинок як механічних об'єктів.

Однак М. Смолуховський звернув увагу на те, що дані частинки рухаються в рідинному середовищі, і запропонував наближений метод розрахунку такого руху, згодом названий його ім'ям. Ймовірно, метою того дослідження М. Смолуховського було поширення теорії броунівського руху на випадок частинок більших розмірів, що відповідає багатофазній течії рідини чи газу. Відмінність нової моделі, яку будував й не встиг добудувати М. Смолуховський у тому, що він намагався врахувати гідродинамічну взаємодію частинок, що рухаються на відносно невеликих відстанях одна від одної.

Починаючи з відкриття броунівського руху малих частинок у першій половині XIX століття [423, 424], інтерес до руху таких частинок у рідинах і газах у стоковском режимі течії постійно зростає, ставши особливо істотним у другій половині XIX століття у зв'язку з розвитком багатьох хімічних технологій, що включають обробку матеріалу в дисперсній фазі. Оскільки розв'язок рівнянь Стокса для відокремленої сфери для нехтовно малих чисел Рейнольдса [42–45] вже не могло задовольнити практичні потреби розрахунків, виникла гостра необхідність у розробці алгоритму, здатного враховувати взаємодію частинок в ансамблі, що й було зроблено М. Смолуховским [45] при спробі узагальнення теорії броунівського руху. Наявність фундаментальної монографії [45] рятує автора роботи, що представляється від необхідності докладного аналізу подальших етапів розвитку розглянутої області. Відзначимо тільки роботу [75], у якій до задачі гідродинамічної взаємодії в течії Стокса був вперше застосований ефективний метод чисельного розрахунку – метод граничних елементів. За роботою [75] пішли численні спроби чисельного розв'язання зазначеної задачі [320, 321], однак принципового прогресу вони не забезпечили. Виходячи з вищесказаного, мету даної частини дисертаційної роботи можна сформулювати у такий спосіб: на основі методу М. Смолуховського розробити ефективний алгоритм грубого оціночного розрахунку гідродинамічної взаємодії в течіях при малих числах Рейнольдса.

Сформулюємо проблему. Течія Стокса – одна із двох найпоширеніших моделей течій при асимптотично малих числах Рейнольдса – описується наступною крайовою задачею (дивись задачу (3.30)):

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta \vec{V}, \quad (3.50)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (3.51)$$

$$\vec{V}|_{\Gamma} = \vec{V}_a, \quad (3.52)$$

де, як і звичайно p – тиск; μ – динамічна в'язкість; \vec{V} – швидкість рідини; вектор-функція \vec{V}_a в крайових умовах (3.52) вважається відомою, оператори grad , div , Δ розуміються у звичайному сенсі та далі будуть розглядатися тільки в декартових ортогональних системах координат. Крайова задача (3.50) - (3.52) була отримана з рівнянь Нав'є-Стокса граничним переходом при $Re \rightarrow 0$, де число Рейнольдса $Re = \frac{LV}{\nu}$ так само розуміється у звичайному сенсі (тут L – характерний розмір, V – характерна швидкість, ν – кінематична в'язкість рідини). Область течії, у якій формулюється крайова задача (3.50) - (3.52), може бути як плоскою, так і просторовою, як обмеженою, так і необмеженою або напівобмеженою. Єдине обмеження на задачу (3.50) - (3.52) накладається парадоксом Стокса: не існує поступальної на нескінченності плоскої течії Стокса.

Очевидно, що задача (3.50) - (3.52) відноситься до еліптичних крайових задач, є лінійною (на відміну від повних рівнянь Нав'є-Стокса) і може бути розв'язана будь-яким чисельним методом, розв'язання таких задач. Наприклад, для чисельного розв'язання досить ефективний метод граничних елементів [320, 321]. У той же час, у проблемі гідродинамічної взаємодії, коли в потоці присутні кілька об'єктів, що обтікаються, чисельне розв'язання даної задачі стає досить складним навіть для методу граничних елементів через складну форму області розв'язку. У випадку ж, коли кількість об'єктів, що обтікаються, зростає істотно, що природно для моделювання багатозафазного течій, дана задача стає нерозв'язною для чисельних методів,

що й послужило основною перешкодою для широкого застосування лагранжевих підходів у теорії багатофазних течій. Наближений метод М. Смолуховського частково вирішує зазначену проблему. Опишемо метод М. Смолуховського стосовно до розглянутого класу задач.

Нехай у стоксовській течії нестисливої рідини з незбуреним полем швидкості $U^0(x, y, z, \tau)$, що задовольняє системі (3.50) - (3.52), є присутніми N об'єктів з геометричними розмірами, набагато меншими в порівнянні з характерним геометричним масштабом основної течії. Нехай для кожного із цих об'єктів відомий розв'язок $V_i(x, y, z)$ крайової задачі (3.50) - (3.52) у необмеженій області зі швидкістю на нескінченності $V_{i\infty}$. Відзначимо, що розв'язок V_i є стаціонарним, а загальне поле швидкості U^0 залежить від часу, але в той же час передбачається, що в кожний момент часу U^0 задовольняє крайовій задачі (3.50) - (3.52). Таке, дещо незвичайне положення з аргументами функцій пов'язане з тим, що рівняння Стокса це асимптотичний випадок рівнянь Нав'є-Стокса, і деякі процеси в них виявляються стаціонарними, але тільки в асимптотичному сенсі.

Зв'язавши з кожним з об'єктів деяку точку, що належить цьому об'єкту й далі називається центром об'єкта, будемо надалі всі параметри об'єкта (місце розташування, швидкості, прискорення) відносити до цієї точки (x_i, y_i, z_i) . Якщо кожний з об'єктів має відносну швидкість $V_i(x_i, y_i, z_i)$ і абсолютну швидкість $V_i^a(x_i, y_i, z_i)$, що дорівнює

$$V_i^a = U + V_i, \quad (3.53)$$

де U – швидкість потоку в точці (x_i, y_i, z_i) , (у відмінності від U_0 , тут U – повна швидкість потоку); то й рух об'єкту описується наступними рівняннями руху матеріальної точки

$$\frac{dx_i}{d\tau} = V_{ix}^a, \quad \frac{dy_i}{d\tau} = V_{iy}^a, \quad \frac{dz_i}{d\tau} = V_{iz}^a, \quad (3.54)$$

$$m_i \frac{dV_{ix}^a}{d\tau} = F_{ix}, \quad m_i \frac{dV_{iy}^a}{d\tau} = F_{iy}, \quad m_i \frac{dV_{iz}^a}{d\tau} = F_{iz}, \quad (3.55)$$

де F_i – сила, що діє на i -у частинку; m_i – її маса. Нехай

$$F_i = F_{mi} + F_{Di}, \quad (3.56)$$

де F_{mi} – як правило, задана масова сила; F_{Di} – сила гідродинамічного опору об'єкта, що, як відомо [45], для течії Стокса пропорційна відносній швидкості. Відповідно до методу М. Смолуховського апроксимуємо вплив об'єкта на потік аналітичним виразом для його обтікання необмеженим потоком $V_i(x, y, z)$. Тоді в першому наближенні використовуємо в (3.53) $U^0(x_i, y_i, z_i, \tau)$ – швидкість незбуреного потоку – та одержимо відносну швидкість кожного об'єкта. Для i -го об'єкта $N-1$ об'єктів, що залишилися, у точці (x_i, y_i, z_i) індукують збурення швидкості

$$\delta U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N V_j(x_i, y_i, z_i), \quad (3.57)$$

яке, будучи підставлене в (3.53), дасть нове значення відносній швидкості. Нехай збільшення відносній швидкості δV_i визначено для кожного об'єкта, за аналогією з (3.57)

$$\delta U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \delta V_j(x_i, y_i, z_i). \quad (3.58)$$

Використовуючи δU_i з (3.58) за аналогією з (3.53), продовжуємо процес до того моменту, коли δU_i стане досить малим. Для ряду течій Стокса переважний інтерес представляє випадок, коли досить малий об'єкт рухається в умовах рівноваги, тобто, його прискорення досить малі, а сила, що діє на нього, урівноважується силою гідродинамічного опору. У цьому випадку немає необхідності розв'язувати задачу Коші для рівнянь (3.55), які перетворюються у скінченні співвідношення (3.56), що дозволяють визначити відносну швидкість об'єкта. Метод же М. Смолуховського в цьому

випадку використовується тільки для визначення збуреної швидкості потоку в точці, де перебуває розглянутий об'єкт.

На жаль, розв'язки крайових задач (3.50) - (3.52) у необмеженій області відомі тільки для дуже обмеженого класу тіл найпростішої геометричної форми, а практичні розрахунки проводяться тільки для розв'язку Стокса, побудованого для сфери. Проте, для якісного аналізу багатьох випадків течій багатофазного середовища при малих числах Рейнольдса такого наближення цілком достатньо.

Описаний вище алгоритм був реалізований у програмі для розрахунку на комп'ютері. При цьому взаємодіючі в потоці об'єкти передбачалися сферичними, як аналітичний розв'язок задачі про обтікання відокремленого об'єкта поступальною на нескінченності течією Стокса використовувався розв'язок Стокса для сфери, а для гідродинамічного опору об'єкта – відповідна формула Стокса [45]. Окремий інтерес представляли два випадки: рух по інерції, коли в рівняннях (3.56) значення сили F_m дорівнює нулю, і випадок "рівноважного" руху частинки з нульовим прискоренням. Для всіх випадків для системи звичайних диференціальних рівнянь (3.50) - (3.52) задавалися необхідні початкові умови по швидкостях і початковому місці розташування частинок, утворюючи, таким чином, класичну задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Відповідно до загального принципу лагранжевих підходів гідромеханіки сформульовані задачі Коші були розв'язані чисельно за допомогою схеми Ейлера [369, 402]. Застосування більш точних і ошадливих алгоритмів інтегрування за часом [369, 402], безумовно, прискорило б процес розрахунку, але оскільки розрахунки носили, скоріше, демонстраційний характер, і переслідувалася мета відпрацювання загального алгоритму, була обрана саме схема Ейлера через її простоту.

Метою проведення розрахунків було відпрацювання загальної методики застосування методу М. Смолуховського до задач про багатофазні течії Стокса. Ітераційний процес визначення відносної швидкості потоку

сходився досить швидко, хоча, як і слід було сподіватися, швидкість збіжності залежала від відстані між об'єктами. Так, наприклад, при відстані між об'єктами (сферами) порядку 10 характерних розмірів (радіусів) прийнятна точність збіжності ітераційного процесу досягалася за 3-4 ітерації, а для відстаней менш одного характерного розміру необхідна кількість ітерацій перевищувало 12. Ілюстративні розрахунки проводилися для частинок радіуса 10^{-3} і 10^{-4} , рознесених на відстані порядку десяти радіусів у русі уздовж однієї прямої з різними швидкостями. Всі проведені розрахунки підтвердили високу ефективність розглянутого підходу.

Хоча проведені розрахунки й носили переважно ілюстративний характер, у ході аналізу результатів частини з них удалося виявити цікаві якісні закономірності. При «лобовому» зближенні малих сферичних частинок, що рухаються по інерції, швидкість зближення помітно зменшувалася внаслідок гідродинамічного опору, посиленого впливом другої частинки, що рухається, (розрахованому по М. Смолуховському), тому істотно (до декількох разів) зменшувалася й кінетична енергія зіткнення. Цей ефект (демпфірування рідиною значної частини енергії зіткнення малих частинок) представляється досить істотним для теорії броунівського руху та рухів багатофазного середовища.

У даній частині роботи розглянуті проблеми гідродинамічної взаємодії малих частинок у течії Стокса. Починаючи з 4-5 частинок, застосування класичних чисельних методів до цієї задачі стає досить складним внаслідок складності форми області розв'язку. При збільшенні числа частинок до декількох десятків навіть найпотужніші сучасні суперкомп'ютери не зможуть забезпечити розв'язання цієї задачі з належною точністю. Тому автор роботи для проведення докладних розрахунків використовував метод М. Смолуховського. Метод М. Смолуховського являє собою наближений інженерний метод чисельного розв'язку крайових задач для системи рівнянь Стокса при наявності в області течії відокремлених тіл (об'єктів) малих геометричних розмірів. Метод М. Смолуховського заснований на

використанні розв'язків рівнянь Стокса для випадку обтікання відокремленого тіла в необмеженому, поступальному на нескінченності стоксовському потоці. Очевидно, що метод М. Смолуховського має як переваги, так і недоліки; до перших варто віднести його високу ефективність, а до других – низьку точність при взаємодії об'єктів на малих відстанях. До того ж, для успішного застосування методу М. Смолуховського необхідно знати розв'язки задач обтікання зазначених відокремлених об'єктів, а кількість відомих подібних аналітичних розв'язків, взагалі кажучи, досить обмежено, і на практиці, як правило, задовольняються випадком сферичних частинок. Проте, метод М. Смолуховського дозволяє збільшити кількість розглянутих об'єктів з 4-5 до декількох сотень, а з використанням потужній обчислювальній техніці до декількох тисяч. У випадку рухливих частинок метод М. Смолуховського стає невід'ємною частиною лагранжевого підходу до розрахунку багатозфазної течії Стокса. Таким чином, метод М. Смолуховського є вдалою альтернативою іншим чисельним методам для проміжної кількості частинок між випадком невеликого числа об'єктів у потоці та випадком, коли дисперсна фаза може з достатньою точністю вважатися неперервною.

Отримані результати свідчать про досить високу ефективність методу М. Смолуховського. Отримані результати можна умовно розділити на два випадки: перший випадок – рух частинок по інерції, коли швидкість частинок неминуче згодом наближається до швидкості потоку, а другий випадок – рух частинок під дією деяких масових і поверхневих сил. Другий випадок можна зустріти в численних технологічних процесах, зв'язаних, наприклад, із седиментацією або флотацією малих об'єктів у малорухомій рідині, рухом частинок у процесах термофорезу, дифузіофорезу, електрофорезу й інших механічних процесах обробки дисперсної фази.

Результати роботи знайдуть застосування в мікробіології, мікромеханіки, мікроелектроніки, хімічної й металургійної промисловості, а так само промисловості будівельних матеріалів. Підходи, розвинені в роботі,

можуть стати основами для розробки математичних моделей процесів тепломасообміну в навколишньому природному середовищі.

3.4 Деякі узагальнення та вдосконалення методу М. Смолуховського

Як очевидно з вищенаведених матеріалів, метод М. Смолуховського має низку недоліків та обмежень і тільки одну перевагу – обчислювальну ефективність. Ця перевага є прямим наслідком обмеженості кола задач про течії багатофазного середовища випадком, коли основна суцільна фаза рухається у режимі малих чисел Рейнольдса, тобто може бути описана моделлю Стокса (як для внутрішніх, так і для зовнішніх течій). Остання обставина означає, що задача про основну течію лінійна та допускає суперпозицію розв'язків. Більш того, при застосуванні до задачі про зовнішню течію методів теорії потенціалу внаслідок суперпозиції у процес розрахунку можуть бути залучені аналітичні розв'язки окремих частинних задач, наприклад, для випадку багатофазної течії, що розглядається, задачі про обтікання сфери у режимі Стокса, що й було зроблено у методі М. Смолуховського.

Природньо намагатися виключити чи подолати недоліки алгоритму та поширити його переваги. Для цього перелічимо недоліки, що мають бути подолані:

1. Для визначення гідродинамічної взаємодії об'єктів дисперсної фази М. Смолуховський обмежив свій розгляд випадком сферичних об'єктів, що представляється непринциповим обмеженням, оскільки у всіх випадках міжфазної межі рідина-газ об'єкти дисперсної фази мають форму, близьку до кулі. На великих відстанях гідродинамічна взаємодія враховувалася через аналітичні розв'язки задачі про обтікання сфери течією Стокса, а для відносно невеликих та малих відстаней М. Смолуховський намагався будувати функції Гріна методом інверсій [45]. Така апроксимація дальнього поля не є суворою і має бути віднесена до інженерних методів розрахунку.

2. У початковому варіанті М. Смолуховського алгоритм не передбачав урахування зовнішніх меж течії. Цей недолік очевидно усувається сумісним застосуванням методу граничних елементів та методу М. Смолуховського, де метод граничних елементів враховує зовнішні межі.

3. Метод М. Смолуховського не допускає розгляд плоских течій. Цей недолік є наслідком парадоксу Стокса та не може бути усунений.

4. У випадку твердих частинок дисперсної фази, коли необхідно враховувати форму частинок дисперсної фази, це можна зробити за допомогою відповідних функцій Гріна, якщо вони відомі, а якщо побудова таких функцій Гріна викликає труднощі, то обчислювальний аналог функції Гріна може бути побудований завдяки методу граничних елементів наступним чином: розглянемо обтікання частинки дисперсної фази довільної форми, після дискретизації прямим методом граничних елементів отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь наступного вигляду у лівій частині стоїть деяка матриця впливів в добутку з вектором невідомих, а у правій частині стоїть компліментарна матриця впливів у добутку з вектором, відомим з крайових умов; якщо тип крайових умов, форма та розміри меж об'єкту не змінюються, то добуток оберненої першої матриці на другу також не змінюється та утворює обчислювальний аналог функції Гріна.

5. Аналітичні розв'язки для об'єктів дисперсної фази обмежені випадком поступальної на нескінченності течії. Цей недолік може бути частково подоланий додаванням до переліку аналітичних розв'язків випадку обертання сфери у течії Стокса [42] та випадку розширення сфери [42, 45], а повністю він виключається прийомом, описаним у пункті 4, однак цей прийом вимагає набагато більших витрат ресурсів обчислювальної техніки.

Мабуть, недоцільно у рамках цієї дисертаційної роботи здійснювати повний аналіз міста методу М. Смолуховського у сучасній гідродинаміці багатофазного середовища [403, 404]. Додаткові обчислювальні аспекти цієї методики можна знайти у статті [405].

3.5 Висновки до розділу 3

Грунтуючись на вищевикладених оглядах літератури та аналізі історії і сучасного стану питання, можна зробити наступні висновки:

Асимптотичний випадок рівнянь Нав'є-Стокса – так звані течії Стокса – представляє собою значне спрощення математичних моделей сучасної гідромеханіки. На відміну від багатьох асимптотичних моделей, течії Стокса мають явний та зрозумілий фізичний сенс. Більш того, течії Стокса мають власну сферу застосування, до якої відносяться численні процеси руху рідини та тепломасообміну, що притікають повільно чи протікають у областях малих геометричних розмірів. Такі процеси можна знайти практично в кожній галузі діяльності людини, але для деяких дисциплін вони виявилися визначальними, тобто такими, що визначають розуміння найважливіших процесів. Це має місце, наприклад, у мікроелектроніці – тепломасообмін навколо малих елементів мікроелектронних пристроїв під час їх охолодження, у мікробіології та медицині – практично всі процеси тепломасообміну на рівні клітин, а також рух клітин крові, в енергетиці – процеси горіння малих частинок диспергованого палива у топках котлів теплових електростанцій та процеси бульбашкового кипіння у парогенераторах теплових та атомних електростанцій, при дослідженні систем з гідродинамічною кавітацією – зростання та взаємодія кавітаційних бульбашок, гідрометеорології – утворення, зростання та взаємодія крапельок дощу та туману, сніжинок та градин, у екології – поглинання забруднень у атмосфері крапельками дощу та туману, сніжинками, в авіації – обмерзання літаків, у дослідженні космічного простору – практично всі вільні рухи тіл в рідинах та газах й рухи самих рідин та газів в умовах мікрогравітації, в хімічній промисловості – процеси обробки речовини, що була диспергована для пришвидшення хімічних реакцій і так далі. Наведений далеко не повний перелік фізичних явищ та процесів показує важливість дослідження течій Стокса та тепломасообміну в них.

Запропоновані у даному розділі нові математичні моделі течій Стокса дають змогу значно розширити коло явищ з відповідних класів, що ефективно розв'язуються методами обчислювальної теорії потенціалу.

РОЗДІЛ 4

Асимптотичні Задачі теорії тепломасообміну

4.1 Стефанівські течії

Наступний підрозділ роботи пов'язаний з урахуванням стрибка густини при повільному фазовому переході, тобто у загальному випадку в процесі фазового переходу початкова фаза і фаза, що утворюється, мають різну густину, що призводить до виникнення течії в рідинних фазах (строго кажучи, стрибок густини призводить до появи деформацій, що компенсують цей стрибок, а зазначені деформації ведуть до течій рідинних середовищ чи залишаються деформаціями середовищ твердих). Особливо істотний ефект стрибка густини при фазовому переході має місце в процесах випару (кипіння) і конденсації, коли густина рідинної і газоподібної фаз може розрізнятися на два-три порядки. При фазових переходах рідина-газ має місце наступний механізм виникнення течії: у залежності від напрямку процесу фазового переходу газоподібна фаза виявляється або стиснутою, або розрідженою, тобто на межі фазового переходу відбувається або підвищення, або зниження тиску, що і викликає рух рідин. Це своєрідний «реактивний ефект». У рух приходять обидві фази і рідка, і газоподібна, але оскільки густина рідкої фази набагато більше, як правило, швидкість її руху менше. Такий рух фаз історично отримав назву стефановської течії. У загальному ж випадку для визначення полів течій фаз необхідно вирішувати сполучену гідродинамічну задачу, що являє собою значні труднощі.

Стосовно до задач про повільні фазові переходи сформулюємо математичну модель фазового переходу зі стрибком густини в загальному вигляді, але обмежимося прикладом одновимірної однофазної задачі, оскільки ця задача допускає досить просте аналітичне дослідження. На відміну від вигляду розглянутих вище задач Стефана у випадку розгляду фазового переходу паротворення чи конденсації поля температур у фазах

будуть описуватися не рівняннями теплопровідності, а рівняннями переносу тепла:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_1 \text{grad} T_1 = a_1 \Delta T_1, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + V_2 \text{grad} T_2 = a_2 \Delta T_2, \quad (4.2)$$

де V_1, V_2 – поля швидкостей у першій і другій фазах. Простоти заради поставимо крайову умову першого роду на зовнішніх межах фаз

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_{1s}, \quad (4.3)$$

$$T_2|_{\Gamma_2} = T_{2s}, \quad (4.4)$$

початкові умови

$$T_1(t=0) = T_{10}, \quad (4.5)$$

$$T_2(t=0) = T_{20}. \quad (4.6)$$

Як і раніш, на межі фазового переходу

$$T_1|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = T_{\text{ф.п.}}, \quad (4.7)$$

$$T_2|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = T_{\text{ф.п.}}, \quad (4.8)$$

умова Стефана

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = \sigma \rho \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad (4.9)$$

де ρ – густина однієї з фаз (звичайно для зручності нестисливої фази).

Відзначимо, що похідна, що стоїть в правій частині, є не повною швидкістю межі розділа фаз, а лише її складова, що відповідає власне фазовому переходу, і повна швидкість межі фазового переходу записується як

$$V_{\text{ф.п.}} = \frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{\Gamma_1} + V_h, \quad (4.10)$$

де V_h – гідродинамічна швидкість межі розділу фаз, нестисливої фази, що зв'язується традиційно з поверхневою швидкістю нестисливої фази.

Диференціальне рівняння руху межі фазового переходу має вигляд

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = V_{\text{ф.п.}}, \quad (4.11)$$

де η – узагальнена координата межі фазового переходу, що відлічується по нормалі до останньої; $V_{\text{ф.п.}}$ – визначається з (4.9). Рівняння (4.11) варто доповнити початковою умовою, що відбиває початкове положення межі розділу фаз:

$$\eta(t=0) = \eta_0. \quad (4.12)$$

Однак, представлена вище крайова задача є незамкненою, оскільки до неї не входить алгоритм визначення поля швидкостей. Дана гідродинамічна задача має ряд особливостей. Нехай за час $\Delta\tau$ межа фазового переходу

змістився безпосередньо за рахунок власне фазового переходу на $\Delta\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \Delta\tau$, тоді, якщо припустити, що фазовий перехід проходить із другої фази в першу, перетерпіла фазовий перехід маса другої фази, рівна

$$dm = \rho_2 \left| \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right| \Delta\tau ds, \quad (4.13)$$

де ds – елементарна площадка межі фазового переходу. Але та ж сама маса утворилася й у першій фазі, при цьому вона зайняла об'єм

$$dv_1 = \frac{dm}{\rho_1} = \frac{\rho_2 \left| \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right| \Delta\tau ds}{\rho_1}, \quad (4.14)$$

однак, друга фаза звільнила об'єм, рівний

$$dv_2 = \left| \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right| \Delta\tau ds, \quad (4.15)$$

тобто різниця між елементарними об'ємами, визначеними співвідношеннями (4.14) і (4.15), повинна бути скомпенсована за рахунок виниклого руху рідин, отже, $dv_1 - dv_2 = (|V_1| + |V_2|)ds\Delta\tau$, звідкіля

$$|V_1| + |V_2| = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left| \frac{\partial n}{\partial \tau} \right|. \quad (4.16)$$

Крайова задача (4.1) - (4.16) відрізняється великою складністю. Як відзначалося вище, обмежимо розгляд найпростішим прикладом одновимірної однофазної задачі Стефана про повільний фазовий перехід зі стрибком густини на межі фазового переходу. У цьому випадку (випадок кипіння) вважаємо рідинну фазу нерухомою

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.17)$$

$$T|_{x=x_2} = T_s, \quad T|_{x=y} = T_{\text{ф.п.}}, \quad (4.18)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=y} = \sigma \rho_2 \frac{dy}{d\tau}, \quad (4.19)$$

$$V = - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{\partial y}{\partial \tau}, \quad (4.20)$$

де y – координата фронту фазового переходу; T – температура газоподібного середовища; ρ_1 – густина рідини; ρ_2 – густина пари.

Відзначимо, що в крайову задачу (4.17)-(4.20) не ввійшли рівняння гідродинаміки, оскільки поле швидкості в даному випадку не залежить від просторової координати x і задається співвідношенням (4.20).

Підставивши співвідношення (4.20) у рівняння (4.17), одержимо

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{dy}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.21)$$

Доповнимо задачу (4.18) - (4.21) початковими умовами

$$T(t=0) = T_{01}, \quad (4.22)$$

$$y(t=0) = y_{01}, \quad (4.23)$$

де умова (4.23) визначає початкове положення межі фазового переходу. Обезрозміримо отриману задачу у такий спосіб:

$$\theta = \frac{T - T_{\text{ф.п.}}}{T_n - T_{\text{ф.п.}}}, \quad (4.24)$$

де T_n – деяка характерна температура. Тоді одержимо

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_{\text{st}}} \text{St} + W \frac{\partial \theta}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (4.25)$$

де St – число Стефана, котре визначимо як

$$\text{St} = \frac{c_p(T_n - T_{\text{ф.п.}})\rho_1}{\sigma\rho_2}; \quad (4.26)$$

τ_{st} – стефановський час, зв'язаний з фізичним часом τ по формулі

$$\tau_{\text{St}} = \frac{\tau\lambda(T_n - T_{\text{ф.п.}})}{\sigma\rho_2 L^2}; \quad (4.27)$$

L – характерний лінійний розмір задачі, $L = x_2 - y_0$; x вважаємо обезрозміреним; W – безрозмірний параметр, визначений як

$$W = \frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{\partial y}{\partial \tau} L}{a}.$$

Очевидно, що параметр W залежить від часу і числа Стефана, оскільки від часу і числа Стефана залежить величина $\frac{\partial y}{\partial \tau}$, при обезрозмірюванні останньої одержимо

$$W = -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{\partial \eta}{\partial \text{Fo}} = -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{\partial \eta}{\partial \tau_{\text{st}}} \text{St}, \quad (4.28)$$

тобто

$$\text{St} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau_{\text{st}}} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{d\eta}{d\tau_{\text{st}}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (4.29)$$

Оцінимо число Рейнольдса для такої течії

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu} = \frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{dy}{d\tau} L}{\nu} = \frac{a}{\nu} W = \frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \text{St}}{\text{Pr}}. \quad (4.30)$$

Звідкіля очевидно, що малість числа Стефана означає малість числа Рейнольдса, та навпаки. Це, у свою чергу, означає, що течія Стефана повільного фазового переходу є течією Стокса (у обгрунтованому припущенні $\text{Pr} \sim 1$). Таким чином, рівняння Нав'є-Стокса в цій математичній моделі можуть бути замінені на рівняння Стокса:

$$\mu_1 \Delta \vec{V}_1 = \text{grad } p_1, \quad (4.31)$$

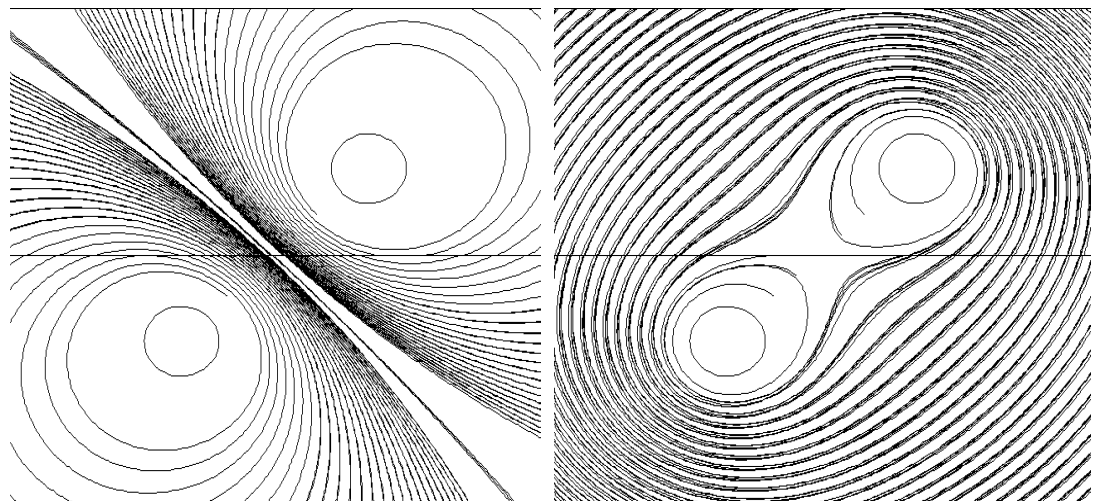
$$\mu_2 \Delta \vec{V}_2 = \text{grad } p_2, \quad (4.32)$$

$$\text{div } V_1 = 0, \quad (4.33)$$

$$\text{div } V_2 = 0. \quad (4.34)$$

Зроблений висновок очевидно розповсюджується на випадки двох та трьох вимірювань.

Приклад такого фазового переходу на поверхні двох крапель показано на рисунку 4.1. Добре помітна симетрія каритини, посередині між крапель знаходиться максимум градієнту тиску та мінімум градієнту температури.



а)
а) – ізобари;
б) – ізотерми

Рисунок 4.1 – Фазовий перехід на поверхні двох крапель

Особливості задачі Стефана для повільного фазового переходу на поверхні краплі (бульбашки) стали об'єктом розгляду наступного підрозділу. На поверхні крапель (бульбашок) діють сили поверхневого натягу, котрі у випадку, якщо поверхня має форму, яка не відповідає вимозі мінімальної енергії, тобто положенню стійкої рівноваги, викликають зміни форми вільної поверхні і течії усередині об'єму рідини (газу), що називається конвекцією Марангоні. У результаті краплі і бульбашки прагнуть прийняти ідеальну сферичну форму і приймають її в міру загасання конвекції Марангоні унаслідок в'язкості. Якщо розглядати фазовий перехід на поверхні краплі (бульбашки) як збурення вільної поверхні, то при повільному фазовому переході конвекція Марангоні буде мати малий масштаб, мало впливати на форму вільної поверхні, і поверхню краплі (бульбашки) можна вважати сферичною протягом усього процесу повільного фазового переходу. Ця обставина змушує змінити в даній задачі форму умови Стефана і сформулювати задачу Стефана, відмінну від традиційної. Запишемо математичну модель описаного процесу в загальному випадку, але з урахуванням сферичної форми краплин (бульбашок), фазу поза краплями (бульбашками) позначимо індексом 1, а усередині 2, тоді

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial T_{2i}}{\partial \tau} = a_2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} T_{2i} \right), \quad (4.36)$$

де індекс i указує на номер краплі (бульбашки).

Сформулюємо крайову умову для рівнянь (4.35), (4.36), для визначеності будемо вважати на зовнішній межі першої фази умови першого роду

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_{s1}. \quad (4.37)$$

Для другої фази не можна вказати зовнішньої межі, тому замість умови на зовнішній межі для другої фази ставиться умова рівності 0 теплового потоку в центрі кожної краплі (бульбашки)

$$\left. \frac{\partial T_{2i}}{\partial r} \right|_{r_i=0} = 0 \quad (4.38)$$

Початкові умови

$$T_1(t=0) = T_{10}, \quad (4.39)$$

$$T_2(t=0) = T_{20}. \quad (4.40)$$

На межі розділу фаз

$$T_1|_{\Gamma_{\text{ф.п.і}}} = T_{\text{ф.п.}}, \quad T_i|_{\Gamma_{\text{ф.п.і}}} = T_{\text{ф.п.}}, \quad (4.41)$$

але умова Стефана в даному випадку має зовсім інший вигляд. Нехай за малий проміжок часу $\Delta\tau$ в результаті фазового переходу поверхня i -ої краплі змістилася на малу відстань ΔR_i , вважаючи об'єм сферичного шару, що перетерпів фазовий перехід, $\Delta R_i \cdot 4\pi R_i^2$, одержимо

$$\sigma\rho\Delta R_i 4\pi R_i^2 = \int_{\Gamma_{\text{ф.п.і}}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Delta\tau dj, \quad (4.42)$$

переходячи до границі при $\Delta\tau \rightarrow 0$, одержимо

$$\sigma\rho \frac{dR_i}{d\tau} 4\pi R_i = \int_{\Gamma_{\text{ф.п.і}}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} ds, \quad (4.43)$$

де $\frac{\partial T_1}{\partial n} = -\frac{\partial T_1}{\partial r_i}$.

Задача (4.35) - (4.43) являє собою задачу про фазовий перехід на поверхні крапель (бульбашок), від класичної задачі Стефана вона відрізняється виглядом умови (4.43). Застосуємо постановку задачі (4.35) - (4.43) до випадку повільного фазового переходу

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_{St}} St = \Delta\theta_1, \quad (4.44)$$

де число Стефана визначається звичайним чином.

Що стосується рівняння (4.36), то у випадку повільного фазового переходу воно вироджується, а задача перетворюється в однофазну задачу Стефана. Це легко можна показати методом малого параметру. Дійсно, у нульовому наближенні поле температур усередині краплі описується рівнянням Лапласа з крайовою умовою (4.41), тобто умовою сталості функції на межі. Звідкіля за принципом максимуму

$$\theta_2^0 = 0. \quad (4.45)$$

Якщо

$$\frac{dT_{\text{ф.п.}}}{d\tau_{\text{St}}} = 0, \quad (4.46)$$

то з аналогічних міркувань

$$\theta_2^i = 0. \quad (4.47)$$

Крайові і початкові умови для мають вигляд

$$\theta_1|_{\Gamma_i} = \theta_{is}, \quad (4.48)$$

$$\theta_1|_{\Gamma_{\text{ф.п.}i}} = 0, \quad (4.49)$$

$$\theta_i(\tau_{\text{st}} = 0) = \theta_{i0}, \quad (4.50)$$

умова Стефана

$$\frac{dR_i^*}{d\tau_{\text{St}}} 4\pi R_i^{*2} = \int_{\Gamma_{\text{ф.п.}i}^*} \frac{\partial \theta}{\partial n} ds, \quad (4.51)$$

де R_i^* – безрозмірна координата фазового переходу; $\Gamma_{\text{ф.п.}}^*$ – поверхня і-ої краплі, з урахуванням безрозмірювання радіусу. Звичайним шляхом застосовав до задачі (4.44), (4.47) - (4.51) метод малого параметру, одержимо

$$\Delta \theta^0 = 0, \quad (4.52)$$

$$\theta^0|_{\Gamma_i} = \theta_{is}, \quad (4.53)$$

$$\theta^0|_{\Gamma_{\text{ф.п.}i}} = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{dR_i^0}{d\tau_{St}} 4\pi R_i^{02} = \int_{\Gamma_{\phi.p.i}^*} \frac{\partial \theta^0}{\partial n} ds, \quad (4.55)$$

$$\eta_i^0(\tau_{St} = 0) = \eta_{0i}, \quad (4.56)$$

$$\Delta \theta^1 = \frac{\partial \theta^0}{\partial \tau}, \quad (4.57)$$

$$\theta^1 \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad (4.58)$$

$$\theta^1 \Big|_{\Gamma_{\phi.p.i}^*} = 0, \quad (4.59)$$

$$4\pi \left(\frac{d\eta_i^1}{d\tau_{St}} \eta_i^{02} + \frac{d\eta_i^0}{d\tau_{St}} 2\eta_i^0 \eta_i^1 \right) = \int_{\Gamma_{\phi.p.i}^*} \frac{\partial \theta^1}{\partial n} ds, \quad (4.60)$$

$$\eta_i^1(\tau_{St} = 0) = 0. \quad (4.61)$$

Оскільки в рівняннях (4.52), (4.57) і так далі входять просторові оператори Лапласа, розв'язання поставленої задачі можливо тільки чисельно.

4.2 Система рівнянь Онзагера

Система рівнянь Онзагера (Onsager) представляє собою лінійну систему параболічного типу, яка виникає під час описування процесів переносу в складних системах, коли мають лінійні закони переносу. Система рівнянь Онзагера описує процеси тепломасообміну у пористому середовищі, процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації і ряд інших процесів. Метод граничних інтегральних рівнянь може бути застосований до рішення системи рівнянь Онзагера, однак до останнього часу не було зроблено спроб у цьому напрямку в зв'язку з тим, що фундаментальні рішення або функція Гріна для системи рівнянь Онзагера не були побудовані. Вперше методи

теорії потенціалу були застосовані до системи рівнянь Онзагера у роботі [27]. Фундаментальний розв'язок системи рівнянь Онзагера може бути побудований двома шляхами – чи методом формального зворотного оператора, чи за допомогою лінійного перетворення системи рівнянь Онзагера до системи рівнянь теплопровідності. Приведемо побудову фундаментального рішення для системи рівнянь Онзагера. Система рівнянь Онзагера:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha_{11}\Delta U + \alpha_{12}\Delta T + \alpha_{13}\Delta P, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha_{21}\Delta U + \alpha_{22}\Delta T + \alpha_{23}\Delta P, \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = \alpha_{31}\Delta U + \alpha_{32}\Delta T + \alpha_{33}\Delta P, \end{cases} \quad (4.62)$$

де α_{ij} – коефіцієнти матриці Онзагера;

Δ – оператор Лапласа.

Помітимо, що по фізичному значенню матриця Онзагера α_{ij} симетрична і має чітко виражене діагональне переважання [28].

Помножимо систему (4.62) на матрицю γ , таку, що її рядки є власними векторами матриці α , як показано в книзі [29] матриця γ невироджена, а отже отримана система буде еквівалентна початкової

$$\begin{cases} \gamma_{11}P_{a1}U_1 + \gamma_{12}P_{a1}U_2 + \gamma_{13}P_{a1}U_3 = 0, \\ \gamma_{21}P_{a2}U_1 + \gamma_{22}P_{a2}U_2 + \gamma_{23}P_{a2}U_3 = 0, \\ \gamma_{31}P_{a3}U_1 + \gamma_{32}P_{a3}U_2 + \gamma_{33}P_{a3}U_3 = 0, \end{cases} \quad (4.63)$$

де a_i – власні числа матриці α ;

P_{a_i} – оператор вигляду

$$P_{a_i} = \frac{\partial}{\partial \tau} - a_i \Delta.$$

У літературі є суперечливі думки з приводу визначення фундаментального рішення системи лінійних диференціальних рівнянь. По

одному визначенню фундаментальне рішення є вектор G , що задовольняє системі

$$L_i(G) = \delta(x, x_0), \quad (4.64)$$

де L_i – лінійний диференціальний оператор;

δ – дельта-функція Дірака;

а по іншому фундаментальне рішення є вектор G_i , що задовольняє системі

$$L_i(G) = \delta(x, x_0)\delta_{ij}, \quad (4.65)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Очевидно, що між системами (4.64) і (4.65) немає істотних протиріч, оскільки

$$G = \sum G_j$$

а мова йде просто про термінологічне розходження.

Фундаментальне рішення системи (4.63) побудуємо методом формального зворотного оператора, для чого необхідно побудувати оператор, зворотний матричному диференціальному оператору

$$L = \begin{pmatrix} \gamma_{11}P_{a1} & \gamma_{12}P_{a1} & \gamma_{13}P_{a1} \\ \gamma_{21}P_{a2} & \gamma_{22}P_{a2} & \gamma_{23}P_{a2} \\ \gamma_{31}P_{a3} & \gamma_{32}P_{a3} & \gamma_{33}P_{a3} \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Символічний визначник цього оператора

$$D = \det(\gamma)P_{a1}P_{a2}P_{a3},$$

де $\det(\gamma) \neq 0$, оскільки матриця γ не вироджена.

Побудуємо символічну матрицю, зворотню (4.66) методом додаткових мінорів. Опускаючи проміжні викладення і означаючи матрицю, зворотню γ , через β , отримаємо

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \frac{P_{a2}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{12} \frac{P_{a2}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{13} \frac{P_{a2}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} \\ \beta_{21} \frac{P_{a1}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{22} \frac{P_{a1}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{23} \frac{P_{a1}P_{a3}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} \\ \beta_{31} \frac{P_{a2}P_{a2}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{32} \frac{P_{a1}P_{a2}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} & \beta_{33} \frac{P_{a1}P_{a2}}{P_{a1}P_{a2}P_{a3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}P_{a1}^{-1} & \beta_{12}P_{a1}^{-1} & \beta_{13}P_{a1}^{-1} \\ \beta_{21}P_{a2}^{-1} & \beta_{22}P_{a2}^{-1} & \beta_{23}P_{a2}^{-1} \\ \beta_{31}P_{a3}^{-1} & \beta_{32}P_{a3}^{-1} & \beta_{33}P_{a3}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для отримання фундаментального рішення системи, що розглядається, G або G_i , відповідно, необхідно на вектор правих частин f , який має вигляд

$$f_i = \delta(x, x_0, \tau, \tau_0),$$

або

$$f_i = \delta(x, x_0, \tau, \tau_0)\delta_{ij}.$$

подіяти оператором L^{-1} , при цьому треба мати на увазі, що

$$P_a^{-1}\delta(x, x_0, \tau, \tau_0) = g_a(x, x_0, \tau, \tau_0),$$

де g_a – фундаментальне рішення рівняння теплопровідності, відоме з робіт [23, 24, 26].

Тоді елементи матриці та вектора, відповідно,

$$G_{jk} = \beta_{kj}g_{ak},$$

$$G_{jk} = \sum_j \beta_{kj}g_{ak}.$$

Приведемо інтегральний аналог системи

$$L(U) = b, \tag{4.67}$$

Він має вигляд

$$\begin{aligned}
U_i = & \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\Gamma} a_1 \gamma_{11} \beta_{1i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial n} g_{a1} - U_1 \frac{\partial g_{a1}}{\partial n} \right) + \gamma_{12} \beta_{1i} \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} g_{a1} - U_2 \frac{\partial g_{a1}}{\partial n} \right) + \\
& + \gamma_{13} \beta_{1i} \left(\frac{\partial U_3}{\partial n} g_{a1} - U_3 \frac{\partial g_{a1}}{\partial n} \right) \} + a_2 \{ \gamma_{21} \beta_{2i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial n} g_{a1} - U_1 \frac{\partial g_{a1}}{\partial n} \right) + \\
& + \gamma_{22} \beta_{2i} \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} g_{a2} - U_2 \frac{\partial g_{a2}}{\partial n} \right) + \gamma_{23} \beta_{2i} \left(\frac{\partial U_3}{\partial n} g_{a2} - U_3 \frac{\partial g_{a2}}{\partial n} \right) \} + \\
& + a_3 \{ \gamma_{31} \beta_{3i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial n} g_{a1} - U_1 \frac{\partial g_{a3}}{\partial n} \right) + \gamma_{32} \beta_{3i} \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} g_{a3} - U_2 \frac{\partial g_{a3}}{\partial n} \right) + \\
& \quad + \gamma_{33} \beta_{3i} \left(\frac{\partial U_3}{\partial n} g_{a3} - U_3 \frac{\partial g_{a3}}{\partial n} \right) \} ds d\tau + \\
& + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_D \{ b_1 \beta_{1i} g_{a1} + b_2 \beta_{2i} g_{a2} + b_3 \beta_{3i} g_{a3} \} dV d\tau + \\
& + \int_D \{ U_1(x,0) \beta_{1i} g_{a1} + U_2(x,0) \beta_{2i} g_{a2} + U_3(x,0) \beta_{3i} g_{a3} \} dV.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Використовуючи співвідношення (4.68), можна побудувати фундаментальне рішення для системи (4.62), для чого необхідно розглянути необмежений простір з нульовими початковими умовами, тоді перший і останній інтеграл в (4.68) дорівнюють нулю. Побудуємо вектор \mathbf{b} для системи (4.63):

$$\beta_{ij} = (\gamma)(\delta(x, x_0, \tau, \tau_0) \delta_{ij}),$$

таким чином

$$G_{ij} = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_D (\gamma) \delta(x, x_0, \tau, \tau_0) \delta_{kj} \beta_{kj} g_{ak} dV d\tau = \gamma_{kj} \beta_{kj} g_{ak}.$$

На закінчення хотілося б стисло відмітити наступні аспекти:

- а) для областей простої форми (полуплощина, напівпростір, квадрант, октант) методом відображень за допомогою фундаментального рішення можуть бути побудовані функції Гріна;
- б) побудовані фундаментальні рішення чи функції Гріна можуть бути об'єднані в матрицю Гріна;

в) даний алгоритм може бути застосований до одновимірних, двовимірних і трьохвимірних по простору задач з будь-яким числом рівнянь в системі Онзагера;

г) умова симетричності матриці Онзагера може бути замінена на більш загальну умову дійсності власних чисел матриці Онзагера, однак для стійкості рішення необхідна додатність власних чисел, тобто позитивна визначеність матриці, що забезпечується різко вираженим діагональним переважанням;

д) у наближенні Лейбензона в запропонованому алгоритмі немає необхідності, а досить просто помножити систему на матрицю α^{-1} .

Перейдемо до асимптотичного аналізу системи рівнянь Онзагера. Система рівнянь Онзагера – основна математична модель складних дифузійних процесів – як безпосередньо, так і у виді різного роду узагальнень – викликає останнім часом усе більший інтерес не тільки в дослідників відповідних фізико-хімічних систем, але й у розробників нових виробничих технологій. Специфічні особливості системи рівнянь Онзагера, про які буде докладно сказано нижче, дозволяють віднести крайові задачі, сформульовані для цієї системи, до так званих багатомасштабним проблемам із усіма, зв'язаними з зазначеним типом проблем, обчислювальними труднощами. Остання обставина змушує розробляти для системи рівнянь Онзагера спеціальні методи розв'язку. Використання асимптотичних розкладань по малому параметру що природно виникає в крайових задачах для системи рівнянь Онзагера, представляється більш універсальним і потужним підходом, ніж спеціальні аналітичні перетворення, що наведені вище. Застосування разом з відомими чисельними методами зазначених асимптотичних розкладань дає можливість розвитку універсальних чисельних підходів до розв'язку крайових задач для системи рівнянь Онзагера.

Метою даної частини дослідження є розробка універсального наближеного підходу, заснованого на застосування асимптотичних

розкладань, та такого, що дозволяє ефективно чисельно розв'язувати крайові задачі для системи рівнянь Онзагера.

Перейдемо до постановки задачі. Системою рівнянь Онзагера в загальному вигляді будемо називати наступну систему N параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^N \alpha'_{ij} \operatorname{div} q_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.69)$$

де узагальнений потік $q_j = \lambda_j \operatorname{grad} u_j$; α'_{ij} – модифіковані коефіцієнти Онзагера. Під функціями u_i в (4.69) маються на увазі відповідні концентрації, температура i , можливо, тиск. Тоді по фізичному сенсу λ_j – це коефіцієнти дифузії, теплопровідності і фільтрації. Коефіцієнти покладалися постійними, що відповідає процесам, які протікають у досить вузькому діапазоні зміни шуканих величин.

Початкові умови для системи рівнянь (4.69) ставляться традиційним чином:

$$u_i(\tau = 0, X) = u_{i0}(X), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.70)$$

де X – узагальнена точка простору; u_{i0} – відомі функції. Обмежимося традиційною для теорії тепломасообміну постановкою крайових умов першого роду

$$u_i|_{\Gamma_{ii}} = u_{ia}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.71)$$

другого роду

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = q_{ia}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.72)$$

чи третього роду

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = \beta_i (u_i|_{\Gamma_{ii}} - u_{\Gamma\alpha}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.73)$$

де Γ_{II} , Γ_{III} , Γ_{III} позначають сукупності частин межі області, на яких для i -ої компонента задані відповідні крайові умови; u_{ia} , q_{ia} – відомі функції.

Було запропоновано новий алгоритм розв'язку. По фізичному сенсу елементів матриці Онзагера має місце наступне співвідношення

$$\alpha'_{ij} \ll \alpha'_{ii}, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (4.74)$$

Як правило, позадіагональні члени, як мінімум, на 2 порядки менше діагональних. У цій обставині і полягають основні труднощі чисельного розв'язку крайових задач для системи рівнянь Онзагера. Дійсно, для коректного розрахунку впливу членів, що відповідають позадіагональним елементам матриці Онзагера, похибка апроксимації при застосуванні традиційних чисельних методів скінченних різниць чи скінченних елементів повинна бути, як мінімум, на два порядки менше, ніж величина згаданих членів, що накладає істотні обмеження на кроки за часом та по просторі.

Щоб спростити подальші міркування, зробимо фізично обґрунтоване припущення про те, що діагональні елементи модифікованої матриці Онзагера мають однаковий певний порядок, та позадіагональні елементи теж мають однаковий, але менший порядок (з огляду на те, що λ_i також величини одного порядку, це припущення очевидним чином переноситься на звичайну матрицю Онзагера). Тоді:

$$\frac{\alpha'_{ij}}{\alpha'_{ii}} \sim \varepsilon, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.75)$$

де ε – мала величина, що надалі буде використовуватися як малий параметр, тобто, $\alpha'_{ij} = \varepsilon \alpha'^{*}_{ij}$, $\alpha'^{*}_{ij} \sim \alpha'_{ii}$.

Відповідно до методу малого параметра розв'язок задачі будемо відшукувати у вигляді:

$$u_i = u_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.76)$$

де u_i^k – функції, що підлягають визначенню. Підставимо розкладання (4.76) у початкову постановку задачі і, дорівнявши нулю суму коефіцієнтів при відповідних ступенях ε , одержимо

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial \tau} = \alpha'_{ii} \operatorname{div} \lambda(u_j^0) \operatorname{grad} u_i^0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.77)$$

$$u_i^0(\tau = 0, X) = u_{i0}(X), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.78)$$

$$u_i^0 \Big|_{\Gamma_{ii}} = u_{ia}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.79)$$

$$\lambda_i(u_j^0) \frac{\partial u_i^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = q_{ia}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.80)$$

$$\lambda_i(u_j^0) \frac{\partial u_i^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = \beta_i (u_i^0 \Big|_{\Gamma_{ii}} - u_{i\alpha}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.81)$$

.....

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial \tau} = \alpha'_{ii} \operatorname{div} \lambda_i(u_j^k) \operatorname{grad} u_i^k + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \alpha'_{il} \operatorname{div} \lambda_l(u_j^{k-1}) \operatorname{grad} u_l^{k-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.82)$$

$$u_i^k(\tau = 0, X) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.83)$$

$$u_i^k \Big|_{\Gamma_{ii}} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.84)$$

$$\lambda_i(u_j^k) \frac{\partial u_i^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.85)$$

$$\lambda_i(u_j^k) \frac{\partial u_i^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{iii}} = \beta_i u_i^k \Big|_{\Gamma_{ii}}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.86)$$

.....

Перейдемо до аналізу отриманих результатів. Щоб проілюструвати запропонований підхід була обрана найпростіша крайова задача для системи

рівнянь Онзагера, що складається з двох рівнянь, в одномуірному по просторі середовищі з постійним властивостями. Тобто:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = \alpha_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (4.87)$$

$$u_1(\tau = 0) = C_1 \neq 0, \quad u_2(\tau = 0) = 0, \quad (4.88)$$

$$u_1(x = x_1) = C_2 \neq C_1, \quad u_1(x = x_2) = C_2, \quad (4.89)$$

$$u_2(x = x_1) = 0, \quad u_2(x = x_2) = 0. \quad (4.90)$$

Результати проведених розрахунків представлені на наступних рисунках

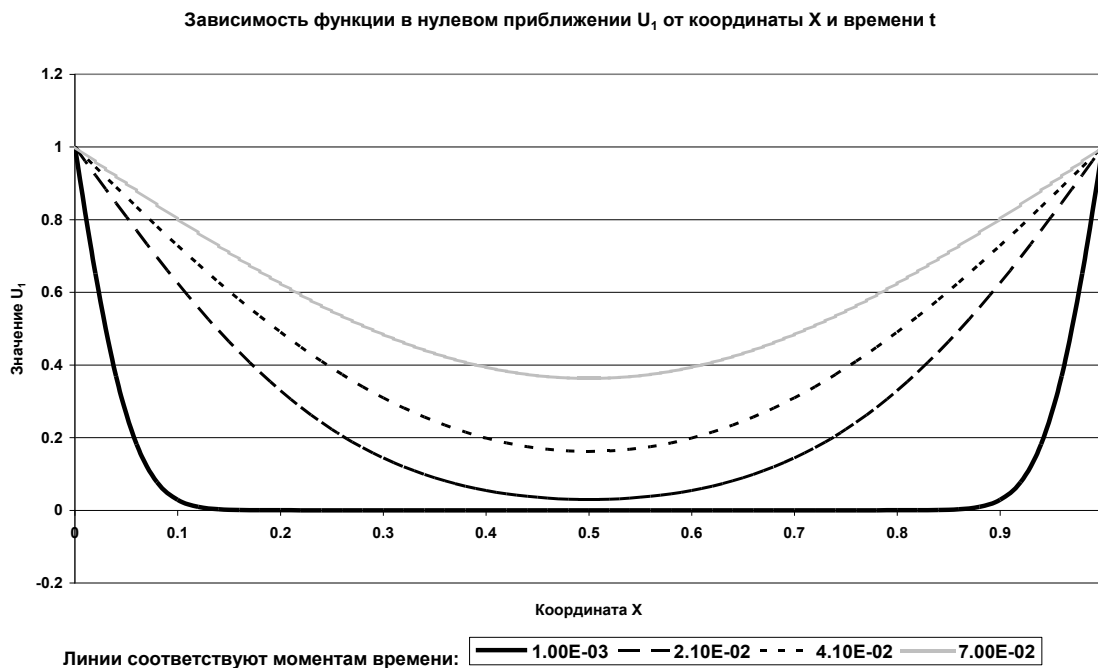


Рисунок 4.2 – Залежність у першому наближенні функції u_1 від координати для різних моментів часу.

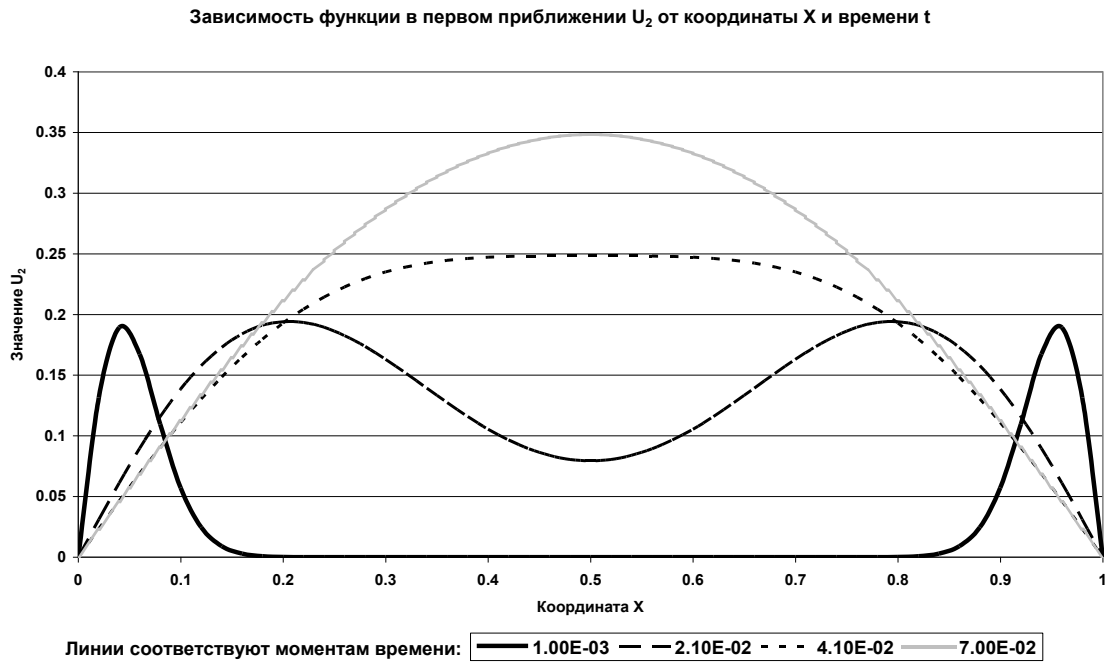


Рисунок 4.3 – Залежність у першому наближенні функції u_2 від координати для різних моментів часу.

На рисунках 4.2, 4.3 приведені результати чисельного розв'язку за допомогою запропонованого вище алгоритму. Зміна функції u_1 в залежності від часу відповідає типовому поведженню розв'язку рівняння теплопровідності. Однак у графіках функції u_2 спостерігаються два максимуми, які рухаються в напрямку до середини розрахункової області та потім зливаються в один. Подібна немонотонність, невластива розв'язкам лінійних параболічних задач, є специфічною особливістю розв'язків системи рівнянь Онзагера.

Очевидні висновки можна зробити на підставі наведеного вище матеріалу. Приведені ілюстративні розрахунки підтверджують високу обчислювальну ефективність запропонованого підходу. Малість параметра ε дозволяє обмежитися нульовим і щонайбільше наступними двома наближеннями. Не меншою перевагою запропонованого підходу є його універсальність.

РОЗДІЛ 5

Течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації

5.1 Слабка вільна конвекція

Перший підрозділ присвячений математичним моделям слабкої вільної конвекції. Очевидно, що конвективні потоки субстанції (тепла і маси) у цьому випадку істотно менше, дифузійних, з урахуванням зроблених вище припущень і, зневажаючи в нульовому наближенні конвективними членами, одержимо для стаціонарного поля температур:

$$\mu \Delta \vec{V}^0 = \text{grad} p^0 + \gamma \vec{g}(T^0 - T_0), \quad (5.1)$$

$$\Delta T^0 = 0, \quad \text{div} \vec{V}^0 = 0. \quad (5.2)$$

Крайові умови для системи (5.1) - (5.2) ставляться традиційним чином. Слабка вільна конвекція, по визначенню, – це не механізм переносу субстанції, основний перенос субстанції в даному випадку, здійснюється дифузійним шляхом. Слабка вільна конвекція – це специфічний гідродинамічний ефект, що виникає в системах з малими масовими силами. Для системи рівнянь (5.1) - (5.2) вдалося побудувати матрицю фундаментальних розв'язків, яка описує локальні впливи на середовище і дозволяє застосовувати до відповідних крайових задач метод граничних елементів.

Подальший аналіз стосується фізичних явищ флотації, седиментації, термофорезу, дифузійфорезу і ефекту Марангоні. Термофорез і дифузійфорез, з одного боку, і ефект Марангоні явища аналогічні. Силу, з якою рідина діє на відокремлений об'єкт, можна підставити у вигляді

$$\vec{F}_p = - \sum_{k=1}^{2M} \alpha_{u_k} \text{grad} u_k S_M, \quad (5.3)$$

де S_M – площа миделевого перетину об'єкта перпендикулярно до відповідного градієнта. Тоді рух об'єкта опишемо рівнянням

$$(m + m_{ai})\ddot{x}_i = F_{mi} + F_{pi} - F_{di}, \quad (5.4)$$

де m – маса об'єкта; m_{ai} – приєднана маса у відповідному напрямку; F_{mi} – відповідна компонента масових сил; F_{di} – відповідна компонента сил гідродинамічного опору. Для рівняння (5.4) можуть бути поставлені початкові умови, і відповідна задача Коші може бути розв'язана чисельно. Однак у повільних течіях малі і прискорення, тому найчастіше лівою частиною рівняння (5.4) просто зневажають. Тоді, з огляду на те, що в течії Стокса сила гідродинамічного опору пропорційна швидкості, одержимо $C\vec{V} = \vec{F}_m + \vec{F}_p$, де C – коефіцієнт опору. Особливо простий цей підхід для сферичних об'єктів, опір яких визначається формулою Стокса: $6\pi\eta R\vec{V} = \vec{F}_m + \vec{F}_p$. Для випадку багатофазного середовища може бути задіяний описаний вище метод М. Смолуховського.

Однією з найбільш актуальних технічних проблем сучасного етапу розвитку ракетно-космічної техніки є побудова математичної моделі та методів розрахунку гідродинамічних та тепломасообмінних процесів у паливних баках та інших ємностях космічних літальних апаратів, частково заповнених рідиною, під час тривалого інерційного польоту, коли у баку утворюються умови мікрогравітації з діже низьким рівнем масових сил. Вважаємо бак циліндричним, що відповідає сучасній практиці конструювання ракетно-космічної техніки, ефектами на торцях баку нехтуємо. Тоді для аналізу процесу достатньо розглянути процеси, що відбуваються у поперечному перерізі баку. Нехай стінка баку має форму кола, а компонент палива розподілений у вигляді шару біля стінки. В середині баку міститься певний газ, що складається з пари компоненту палива та, можливо з інших газів, наприклад, газу наддува. Така конфігурація відповідає сучасним якісним уявленням про процес, що досліджується.

Одним боком бак повернутий до Сонця та нагрівається сонячним випромінюванням, а протилежна сторона охолоджується за рахунок теплового випромінювання у космічний простір. Завдяки зазначеному процесу всередині баку виникає градієнт температури, зокрема, перепад температур на внутрішній поверхні паливного шару. Крім того, відбувається перенос тепла шляхом теплопроводності від нагрітої сторони до охолодженої.

Враховуючі відносно тонку стінку баку та відносно тонкий шар палива біля неї, можна отримати асимптотичне представлення розподілу температури в них. Розроблена здобувачем методика побудови такого асимптотичного представлення наведена у Додатку 6. Окрім теплопроводності можливо перенесення ентальпії шляхом дифузії пари компоненти палива. Дійсно, якщо на внутрішній поверхні паливного шару має місце термодинамічна квазірівновага між рідинним паливом та його паром, то концентрація пари над шаром дорівнює концентрації насиченої пари, яка при заданій температурі відома (позначито її як $p_{\text{sat}}(T)$), а дифузійні потоки, що підводяться до чи відводяться від міжфазової межі, корегуються фазовим переходом випаровування чи конденсації, який, у власну чергу, являється джерелом чи стоком тепла.

В системі виникають два види течій: стефанівська течія внаслідок стрибка густини при фазовому переході та термокапілярна течія внаслідок різниці тисків, що виникають внаслідок дії сил поверхневого натягу, через зміну коефіцієнту поверхневого натягу від температури. Вважаємо, що обидві течії є течіями Стокса (що в кожному конкретному випадку треба перевіряти додатково). Тоді у першому наближенні отримаємо систему (нехтуємо конвективними членами у порівнянні з дифузійними) для температури:

$$\Delta T_g = 0, \quad (5.5)$$

$$T_g|_{\Gamma_{gf}} = T_f|_{\Gamma_{gf}}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{gf}} = \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{gf}} + q, \quad (5.7)$$

де T_g, T_f – температури газу та компоненти палива; λ_g, λ_f – їхні теплопровідності; Γ_{gf} – межа між ними; q – тепловий ефект фазового переходу. Для концентрації пари компонента палива:

$$\Delta c_v = 0, \quad (5.8)$$

$$c_v \Big|_{\Gamma_{gf}} = c_{\text{sat}}(T_g \Big|_{\Gamma_{gf}}), \quad (5.9)$$

де c_v – концентрація пари компонента палива. Оскільки задача формулюється як лінійна стефановську та термокапілярну течії можна розглядати як окремі незалежні течії. Для стефановської течії

$$\mu \Delta \vec{V}_s = \text{grad } p_s, \quad (5.10)$$

$$\text{div } \vec{V}_s = 0, \quad (5.11)$$

$$\vec{V}_s \Big|_{\Gamma_{gf}} = V_{\text{p.t.}}(q), \quad (5.12)$$

де \vec{V}_s – швидкість стефановської течії; p_s – відповідний додаток у тиск; $V_{\text{p.t.}}$ – швидкість пари, індукована фазовим переходом. Для термокапілярної течії

$$\mu \Delta \vec{V}_t = \text{grad } p_t, \quad (5.13)$$

$$\Delta p_t = 0, \quad (5.14)$$

$$p_t \Big|_{\Gamma_{gf}} = \delta p_t \Big|_{\Gamma_{gf}}(T_g), \quad (5.15)$$

$$\vec{V}_t \Big|_{\Gamma_{gf}} = 0, \quad (5.16)$$

де \vec{V}_t – швидкість термокапілярної течії; p_t – відповідний тиск; $\delta p_t \Big|_{\Gamma_{gf}}(T_g)$ – зміна тиску на поверхні розділу фаз через залежність поверхневого натягу від температури. Умова (5.16) означає нехтування рухом палива у рідинному стані через його відносно високу густину.

Всі наведені вище задачі розв'язувалися методом граничних елементів. При чому, задачі для стефановської та термокапілярної течій розглядалися у різний спосіб, перша як класична течія Стокса, а для другої спочатку розшукувалося поле тиску як розв'язок відповідної задачі Діріхле, а потім знаходилося поле швидкості. Якщо течія Стефана була суттєвою для задачі по внеску у загальну схему переносу, то потрібен був ітераційний процес, оскільки величина $V_{p,t}$ суттєво залежить від температури на межі фазового переходу.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науково-дослідною роботою, у якій розв'язана актуальна наукова задача про створення теоретичних засад інженерного розрахунку гідродинамічних та тепломасообмінних процесів при малих числах Рейнольдса, зокрема, у багатофазних середовищах, у задачах мікрогідродинаміки та в умовах мікрогравітації, із застосуванням сучасних методів обчислювальної теорії потенціалу, асимптотичного аналізу та лагранжевих методів гідромеханіки

Основними науковими і практичними результатами є:

– Проаналізовано сучасний стан чисельного аналізу та показано, що методи обчислювальної теорії потенціалу не можна вважати універсальними, їх доцільно використовувати для вузьких класів задач, де вони демонструють високу ефективність завдяки притаманним їм певним перевагам.

– Запропоновано принципово новий клас регулярних алгоритмів методу граничних елементів з точками колокації всередині області розв'язку. Переваги цих алгоритмів полягають у тому, що вони ґрунтуються на наближених регулярних граничних інтегральних рівняннях другого роду, які завжди коректні, тобто такі алгоритми мають високу функціональну надійність.

– Запропоновано новий клас алгоритмів методу дискретних особливостей прямих регулярні методи з точками коллокації всередині області розв'язку, які мають гіршу точність у порівнянні з запропонованими алгоритмами граничних елементів, але більшу швидкість розрахунку.

– Запропоновано новий асимптотичний алгоритм методу граничних елементів для визначення малих збурень межі області розв'язку чи крайових умов та новий асимптотичний адаптивний алгоритм методу граничних елементів.

- Запропонована вдосконалена методика тестування алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу.
- Побудовано розкладання Уайтхеда для течій в'язкої рідини у обмежених областях та показано, що наближення Стокса співпадає з першим членом цього розкладання.
- Методом Хьормандера побудовані матриці фундаментальних розв'язків для системи рівнянь Стокса у різних формулюваннях.
- Для розрахунку багатофазних течій Стокса було застосовано метод М. Смолуховського, який було узагальнено та вдосконалено.
- Побудовано асимптотичну математичну модель повільних фазових переходів, до якої потім успішно застосовано метод граничних елементів. Запропоновано математичну модель гомотетичного зростання тіл при повільних фазових переходах.
- Показано, що течія Стефана повільного фазового переходу є течією Стокса.
- Вперше побудована матриця фундаментальних розв'язків для системи рівнянь Онзагера та проведено її асимптотичний аналіз.
- Сформульована та розв'язана за допомогою методу граничних елементів задача про міжфазову рівновагу у паливному баку ракети у тривалому інерціальному польоті.
- Побудована інтегральна математична модель та запропоновано метод розрахунку слабкої вільної конвекції. Для розрахунку багатофазних течій Стокса в умовах мікрогравітації було запропоновано математичну модель з урахуванням ефектів флотації, седиментації, термофорезу, дифузіїфорезу, ефекту Марангоні.
- Розглянута технічна проблема течій рідини та тепломасообміну у паливному баку космічного апарату у довготривалому інерційному польоті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гончаренко М. П. Решение задач гидродинамического взаимодействия малых частиц методом М. Смолуховского / М. П. Гончаренко, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту, 2014, № 3(50). – с. 249-253.
2. Евдокимов Д. В. Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения / Д. В. Евдокимов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2015, №2/7 (74). – С. 16-25. (**Index Copernicus**)
3. Бразалук, Ю. В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, О. А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Вып. 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56. (**Index Copernicus**)
4. Бразалук Ю. В. Асимптотическая математическая модель аблирующих теплозащитных покрытий / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, М. А. Стояновский // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – №3 (62) т.2, 2017. С.47 – 55.
5. Бразалук Ю. В. Применение метода граничных элементов для расчета течения Пуазейля в каналах сложного поперечного сечения / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Р. А. Шульга // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – № 3(66). Том 1. – 2018. – С. 24–31.
6. Амуров А. В. Численное исследование процесса эволюции жидкого контура / А. В. Амуров, Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – Херсон: ХНТУ, 2019. – № 2(69), часть 2. – С. 140–152.
7. Бразалук Ю. В. Математическое и численное моделирование систем теплоизоляции тел сложной геометрической формы / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, А. В. Давыдова, Д. В. Евдокимов, Ю. А. Малая, М. А. Стояновский

// Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць.
– Дніпро, 2019. – Випуск 2 (121). – С. 64–76 (**Index Copernicus**)

Публікації у наукових виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз даних SCOPUS та Web of Science:

8. Yevdokymov D.V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D. V. Yevdokymov // D. Durban and A. R. J. Pearson (Eds.) Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17-21 March, 1997. Kluwer Academic Publisher. - pp. 217-230. (**WoS**).

9. Brazaluk Iu. Asymptotic Approach and Boundary Element Method for Calculation of Slow Phase Transitions / Iu. Brazaluk, D. Yevdokymov / 4 th International Conference on Computational Methods for Thermal Problems, 2016, Georgia Tech, Atlanta, USA.- p.286-289.
<http://www.thermacomp.com/public/index.php?node=16&nm=ThermaComp>.

(**SCOPUS**).

10. Brazaluk Iu. V. Generalized Onsager's Equation System as Mathematical Model of Heat and Mass Transfer in Microgravity Conditions / Iu. V. Brazaluk, D. V. Yevdokymov // Fifth International Conference on Computational Methods for Thermal Problems. July 9-11, 2018. Bangalor. India. – P. 342–345. (**SCOPUS**).

11. Yevdokymov D. V. Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Diffusive Processes in Slow Changing Domains / D. V. Yevdokymov, Yu. L. Menshikov // Modeling and Simulation in Engineering - Selected Problems. – Електронний ресурс, доступ за адресою: <https://www.intechopen.com/online-first/mathematical-modelling-and-numerical-simulation-of-diffusive-processes-in-slow-changing-domains>

Інші публікації та матеріали конференцій:

12. Бразалук Ю. В. Метод граничних елементів в задачах гідродинаміки та теплопровідності / Ю. В. Бразалук, О. Г. Гоман, Д. В. Євдокимов, О. О. Кочубей, М. В. Поляков // Дніпро: Ліра, 2019. – 228 с. (монографія).

13. Беляев Н. М. Применение метода граничных элементов в задачах теплопроводности / Н. М. Беляев, Д. В. Евдокимов // Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 12-18.
14. Евдокимов Д. В. Интегральные уравнения процесса сушки капиллярнопористого тела / Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1998. – С. 52-55.
15. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. Випуск 2. Том 1, 1999. – С. 150-156.
16. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задач межфазового взаимодействия с неизвестными границами фаз / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Дніпропетровського ун-ту, 2001. сер. "Механіка", вып.5, том 1. – С. 109-116.
17. Евдокимов Д. В. Гидродинамическое взаимодействие малых объектов в потоке / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 1. – С. 157-161.
18. Бевза Э. К. Математическое моделирование процессов фазовых переходов в условиях микрогравитации / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 2. – С. 249-253.
19. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задачи Стефана в случае медленных фазовых переходов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Харьковского нац. ун-та, 2003, № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 26-31.
20. Евдокимов Д. В. Об одном интегральном представлении для уравнений Стокса в плоском случае / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 3-9.

21. Поляков Н. В. Матрицы фундаментальных решений для плоских нестационарных уравнений Стокса / Н. В. Поляков, Н. Г. Зинченко, Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: Изд-во ДНУ, 2005. – С. 3-11.
22. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 7 – 25.
23. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 2. Нелинейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 25 – 42.
24. Бевза Э. К. Математическая модель медленного фазового перехода на поверхности пузырьков и капель / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко, Т. Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 157-166.
25. Евдокимов Д. В. Расчет стационарных температурных полей в областях с малыми возмущениями границы / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Т. И. Тарасова // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 167-176.
26. Бевза Э. К. Об одном адаптивном алгоритме метода граничных элементов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 27-32.
27. Евдокимов Д. В. Математическое моделирование гидродинамических эффектов медленных фазовых переходов / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 114-119.
28. Евдокимов Д. В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, № 8, серія “Моделювання”, Випуск 1, 2009. с. 5 – 17.

29. Дидинская Е. О. Гомотетичный рост ансамбля пузырей (капель) / Е. О. Дидинская, А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 153-158.
30. Дидинская Е. О. Об одной модельной задаче теории кипения / Е. О. Дидинская, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Д. Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 159-164.
31. Дидинский А. В. Асимптотический анализ системы уравнений Онзагера / А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. – ДНУ, 2010. – Вып. 2. – №8. – С. 36-44.
32. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to calculation of fluid flow and heat and mass transfer in microgravity / D. V. Yevdokymov // Symposium on Advanced Math. and Comput. Aspects of BEM, Cracow, Poland, May 30 - June 3, 1999. – P. 92-93.
33. Polyakov M. V. Boundary element method application to the steady-state three-phase system calculation / M. V. Polyakov, D. V. Yevdokymov // IABEM2000, Symposium of the International Association for BEM, Brescia, Italy, July 4-7, 2000. – p. 189-191.
34. Yevdokymov D. V. Boundary element method accuracy investigation by numerical experiment / D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2000, Gottingen, Germany. – p. 166-167.
35. Bevza E. K. Effect of Density Jump during Slow Phase Transition / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2004, Dresden 2004. – p. 173.
36. Bevza E. K. Hydrodynamic Effect of Slow Phase Transitions in Microgravity / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM 2004, Warsaw 2004. – p. 38.
37. Yevdokymov D. Potential Theory Application to Onsager's Equation System. / D. Yevdokymov // Book of Abstracts. 77th Annual Meeting of the GAMM. March 27th - 31th, 2006, Technische Universitet Berlin. – p. 491.

38. Yevdokymov D. Boundary element method with collocation points inside the solution domain / D. Yevdokymov // IABEM 2014, Zhengzhou, China, August 13-15, 2014. Book of Abstracts. – p. 173-174.
39. Бабич А. П. Лабораторний практикум із курсу «Методи дослідження процесів тепломасообміну» / А. П. Бабич, Д. В. Євдокимов, О. В. Хамініч // Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2012. – 64 с.
40. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 928 с.
41. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика / Л. М. Милн-Томсон. – М.: Мир, 1964.
42. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.: Физматгиз, 1965. – Т. 1. – 758 с., Т. 2. – 772 с.
43. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904с.
44. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1966. – 448 с.
45. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса: Монография. / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
46. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости: Монография. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 520 с.
47. Whitehead A. N. Second approximation to viscous fluid motion / A. N. Whitehead // Quart. J. Math., 1889, 23. – P. 143–152.
48. Гольдштик М. А. Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. – Новосибирск: Наука, 1989. – 336с.
49. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
50. Oseen C.W. Uber die Stokessche Formel und uber eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik / C. W. Oseen // Ark. Mat., Astron., Fys. 1910, V. 6, No. 29.
51. Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 244 с.
52. Oseen C.W. Neure Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik / C. W. Oseen. – Leipzig, 1927. – 462 s.

53. Proudman I. Expansion at small Reynolds number for the flow past a sphere and a circular cylinder / I. Proudman, J. R. A. Pearson // *J. of Fluid Mechanics*, 1957, No. 2. – P. 237–262.
54. Белоносов С. М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С. М. Белоносов, К. А. Черноус. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
55. Pozrikidis C., *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow* / C. Pozrikidis. – New York: Cambridge University Press, 1992. – 259 p.
56. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
57. Морс Ф. Методы теоретической физики / Ф. Морс, Г. Фешбах // – М.: Изд-во иностранной лит., 1958, том 1. – 930 с.
58. Морс Ф. Методы теоретической физики / Ф. Морс, Г. Фешбах // – М.: Изд-во иностранной лит., 1960, том 2. – 886 с.
59. Салтанов Н. В. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения / Н. В. Салтанов, В. А. Горбань. – К.: Наукова думка, 1993.
– 244 с.
60. Кондратьев К. А. Слабая конвекция в больших объемах жидкости / К. А. Кондратьев, А. М. Никаноров, М. В. Заволженский. // Докл. АН СССР. – 1990. – 310, № 4. – С. 814–816.
61. Кондратьев К. А. Экмановский дрейф и другие течения в неограниченных областях / К. А. Кондратьев, А. М. Никаноров, Я. В. Пантюхин. // Докл. АН СССР. – 1990. – 310, №5. – С. 1070 – 1074.
62. Faxen H. Der Widerstand gegen die bewegung einer starren Kugel in einerzahren Flussigkeit, die zwischen zwei paralelen, ebenen Wanden eingeschlossen ist / H. Faxen. – *Arkiv Mat. Astron. Fys.* 18 (29), 1924. – 1–52 s.
63. Lauga E. Effective slip in pressure-driven Stokes flow / E. Lauga, H. A. Stone // *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, V. 489. – P. 55–77.
64. Пухначев В. В. Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. / В.

- В. Пухначев. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1969. – 198 с.
65. Темам Р. Уравнения Навье - Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
66. Гузь А. Н. О представлении решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса / А. Н. Гузь // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 253, № 4. – С. 825–827.
67. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Хан. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
68. Kopachevsky N. D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. – Birkhauser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2001.–384 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
69. Kopachevsky N. D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. – Birkhauser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2003.–444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)
70. Kim S. Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications / S. Kim, S. J. Karilla. – Mineola, New York: Dover Publications, 1991. – 511 p.
71. Sinayskiy E.G. Statistical Microhydrodynamics / E.G. Sinayskiy, L.I. Zaichik. – WILEY-VCH Verlag, 2008. – 470 p.
72. Kirby B. J. Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics. Transport in Microfluidic devices / B. J. Kirby. – Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press. 2010. – 537 p.
73. Barthes-Biesel D. Microhydrodynamics and Complex Fluids / D. Barthes-Biesel. – Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2012. – 230 p.
74. Conlisk T. A. Essentials of Micro- and Nanofluidics with Application to the Biological and Chemical Sciences / T. A. Conlisk. – Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press. 2012. – 512 p.
75. Youngren G. K. Stokes flow past a particle of arbitrary shapes. A numerical

method of solution / G. K. Youngren, A. Acrivos // *J. Fluid Mechanics*, 69, part 2, 1975. – P. 377–403.

76. Camp C. V. A boundary element method for viscous flows at low Reynolds numbers / C. V. Camp, G. S. Gipson // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 6, Issue 3, September 1989. – P. 144-151.

77. Zeb A. The boundary element method for the solution of Stokes equations in two-dimensional domains / A. Zeb, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 22, Issue 4, December 1998. – P. 317-326.

78. Pozrikidis C. Dynamic simulation of the flow of suspensions of two-dimensional particles with arbitrary shapes / C. Pozrikidis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 25, Issue 1, January 2001. – P. 19-30.

79. Pozrikidis C. Expansion of a two-dimensional foam / C. Pozrikidis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 26, Issue 6, June 2002. – P. 495-504.

80. Mai-Duy N. An effective high order interpolation scheme in BIEM for biharmonic boundary value problems / N. Mai-Duy, R. I. Tanner // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 29, Issue 3, March 2005 . – P. 210-223.

81. Mai-Duy N. A domain-type boundary-integral-equation method for two-dimensional biharmonic Dirichlet problem / N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, R. I. Tanner // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 30, Issue 10, March 2006. – P. 809-816.

82. Curteanu A. E. Laplacian decomposition and the boundary element method for solving Stokes problems / A. E. Curteanu, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 31, Issue 6, June 2007. – P. 501-513.

83. Dimitrakopoulos P. A spectral boundary element algorithm for interfacial dynamics in two-dimensional Stokes flow based on Hermitian interfacial smoothing / P. Dimitrakopoulos, J. Wang // *Engineering Analysis with Boundary*

Elements, Volume 31, Issue 7, July 2007. – P. 646-656.

84. Dijkstra W. Condition number of the BEM matrix arising from the Stokes equations in 2D / W. Dijkstra, R. M. M. Mattheij // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 32, Issue 9, September 2008. – P. 736-746.

85. Li X. A Galerkin boundary node method for biharmonic problems / X. Li, J. Zhu // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 33, Issue 6, June 2009. – P. 858-865.

86. Li X. Meshless analysis of two-dimensional Stokes flows with the Galerkin boundary node method / X. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 34, Issue 1, June 2010. – P. 79-91.

87. Tan F. Regular hybrid boundary node method for biharmonic problems / F. Tan, Y. H. Wang, Y. Miao // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 34, Issue 9, September 2010. – P. 761-767.

88. Shigeta T. Regularized solutions with a singular point for the inverse biharmonic boundary value problem by the method of fundamental solutions / T. Shigeta, D. L. Young // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 35, Issue 7, July 2011. – P. 883-894.

89. Wang J. Numerical studies of geometry effects of a two-dimensional microfluidic four-roll mill on droplet elongation and rotation / J. Wang, J. Han, D. Yu // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 36, Issue 10, October 2012. – P. 1453-1464.

90. Yang C. Meshless singular boundary methods for biharmonic problems / C. Yang, X. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 56, July 2015. – P. 39-48.

91. Mardanov R. F. Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method / R. F. Mardanov, S. J. Dunnett, S. K. Zaripov // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 68, July 2016. – P. 54-62.

92. Pei X. The MFS and MAFS for solving Laplace and biharmonic equations / X. Pei, C. S. Chen, F. Dou // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 80, July 2017. – P. 87-93.

93. Mikhaylenko M. A. An improved regularized fundamental solution to the 2-D steady-state Stokes equation / M. A. Mikhaylenko // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 91, June 2018. – P. 103-109.
94. Mardanov R. F. Two-dimensional Stokes flows in porous medium composed of a large number of circular inclusions / R. F. Mardanov, S. K. Zaripov, D. V. Maklakov // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 113, April 2020. – P. 204-218.
95. Power H. The low Reynolds number deformation of a gas bubble in shear flow: a general approach via integral equations / H. Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 9, Issue 1, 1992. – P. 31-37.
96. Power H. Solving Oseen's system of equations by boundary elements using multiple reciprocity method / H. Power, B. F. de Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 10, Issue 1, 1992. – P. 69-74.
97. Power H. Non-singular second kind integral equation for the two-dimensional exterior Stokes flow / H. Power, G. Miranda // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 10, Issue 3, 1992. – P. 187-191.
98. Amann N. Parallel computational microhydrodynamics: scalable load-balancing strategies / N. Amann, S. Kim // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 11, Issue 4, 1993. – P. 269-276.
99. Rego Silva J. J. A hypersingular integral equation formulation for Stokes' flow in ducts / J. J. Rego Silva, H. Power, C. Wrobel // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 12, Issue 3, 1993. – P. 185-193.
100. Li J. A numerical study of the lateral migration of spherical particles in Poiseuille flow / J. Li, M. S. Ingber // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 13, Issue 1, 1994. – P. 83-92.
101. Pakdel P. On the capabilities of the double-layer representation for Stokes flows. Part I. Analytical solutions / P. Pakdel, S. Kim // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 13, Issue 4, 1994. – P. 339-347.
102. Pakdel P. On the capabilities of the double-layer representation for Stokes flows. Part II. Iterative solutions / P. Pakdel, S. Kim // Engineering Analysis with

Boundary Elements, Volume 13, Issue 4, 1994. – P. 349-351.

103. Pakdel P. On the capabilities of the double-layer representation for Stokes flows. Part III. Numerical approximation / P. Pakdel, S. Kim // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 14, Issue 2, 1994. – P. 139-148.

104. Gomez J. E. A multipole direct and indirect BEM for 2D cavity flow at low Reynolds number / J. E. Gomez, H. Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 19, Issue 1, 1997. – P. 17-31.

105. Meric R. A. An optimization approach for Stokes flow in a channel with a cylindrical block by the BEM / R. A. Meric // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 19, Issue 2, March 1997. – P. 89-95.

106. Power H. The interaction of a deformable bubble with a rigid wall at small Reynolds number: A general approach via integral equations / H. Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 19, Issue 4, June 1997. – P. 291-297.

107. Ingber M. S. A comparison of integral formulations for the analysis of low Reynolds number flows / M. S. Ingber, A. A. Mammoli // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 23, Issue 4, June 1999. – P. 307-325.

108. Zeb A. Boundary element two-dimensional solution of an inverse Stokes problem / A. Zeb, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 24, Issue 1, January 2000. – P. 75-88.

109. Primo A. R. M. Boundary integral formulation for slow viscous flow in a deforming region containing a solid inclusion / A. R. M. Primo, L. C. Wrobel, H. Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 24, Issue 1, January 2000. – P. 53-63.

110. Fang Z. Analyzing irreversibilities in Stokes flows containing suspended particles using the traction boundary integral equation method / Z. Fang, A. A. Mammoli, M. S. Ingber // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 25, Issue 4-5, April 2001. – P. 249-257.

111. Zeb A. An inverse Stokes problem using interior pressure data / A. Zeb, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic // Engineering Analysis with Boundary Elements,

Volume 26, Issue 9, October 2002. – P. 739-745.

112. Alves C. J. S. Density results using Stokeslets and a method of fundamental solutions for the Stokes equations / C. J. S. Alves, A. L. Silvestre // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 28, Issue 10, October 2004. – P. 1245-1252.

113. Young D. L. Solutions of 2D and 3D Stokes laws using multiquadrics method / D. L. Young, S. C. Jane, C. Y. Lin, C. L. Chiu, K. C. Chen // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 28, Issue 10, October 2004. – P. 1233-1243.

114. Frangi A. A qualocation enhanced approach for Stokes flow problems with rigid-body boundary conditions method / A. Frangi, J. Tausch // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 29, Issue 9, September 2005. – P. 886-893.

115. Frangi A. A fast multipole implementation of the qualocation mixed-velocity–traction approach for exterior Stokes flows / A. Frangi // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 29, Issue 11, November 2005. – P. 1039-1046.

116. Tsai C. C. MFS with time-dependent fundamental solutions for unsteady Stokes equations / C. C. Tsai, D. L. Young, C. M. Fan, C. W. Chen // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 30, Issue 10, October 2006. – P. 897-908.

117. Zhu G. A 3-D indirect boundary element method for bounded creeping flow of drops / G. Zhu, A. A. Mammoli, H. Power // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 30, Issue 10, October 2006. – P. 856-868.

118. Wrobel L. C. Drop deformation in Stokes flow through converging channels / L. C. Wrobel, D. Soares, Jr. Claire, L. Das-Bhaumik // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 33, Issue 7, July 2009. – P. 993-1000.

119. Li M. A multiwavelet Galerkin method for Stokes problems using boundary integral equations / M. Li, J. Zhu, X. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 34, Issue 12, December 2010. – P. 1009-1017.

120. Zhao S. Three-dimensional boundary singularity method for partial-slip flows

/ S. Zhao, A. Povitsky // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 35, Issue 1, January 2011. – P. 114-122.

121. Li M. A multiwavelet Galerkin boundary element method for the stationary Stokes problem in 3D / M. Li, J. Zhu // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 35, Issue 8, August 2011. – P. 970-977.

122. Radcliffe A. J. A comparison between a symmetric and a non-symmetric Galerkin finite element—boundary integral equation coupling for the two-dimensional exterior Stokes problem / A. J. Radcliffe // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 35, Issue 8, August 2011. – P. 959-969.

123. Pozrikidis C. Passage of a liquid drop through a bifurcation / C. Pozrikidis // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 36, Issue 2, February 2012. – P. 93-103.

124. Nieto C. Boundary element solution of thermal creep flow in microfluidic devices / C. Nieto, H. Power, M. Giraldo // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 36, Issue 7, July 2012. – P. 1062-1073.

125. Golbabai A. A meshfree method based on radial basis functions for the eigenvalues of transient Stokes equations / A. Golbabai, H. Rabiei // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 36, Issue 11, November 2012. – P. 1555-1559.

126. Barrero-Gil A. The Method of Fundamental Solutions without fictitious boundary for axisymmetric Stokes problems / A. Barrero-Gil // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 37, Issue 2, February 2013. – P. 393-400.

127. Tan F. Development of a meshless hybrid boundary node method for Stokes flows / F. Tan, Y. Zhang, Y. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 37, Issue 6, June 2013. – P. 899-908.

128. Mikhaylenko M. A. Optimal allocation of boundary singularities for stokes flows about pairs of particles / M. A. Mikhaylenko, A. Povitsky // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 41, April 2014. – P. 122-138.

129. Jiang H. Force–moment line element method for Stokes flow around a slender

body / H. Jiang, Y. T. Wu, B. Yang, Y.-P. Zhao // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 44, July 2014. – P. 120-129.

130. Li X. A meshless interpolating Galerkin boundary node method for Stokes flows / X. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 51, February 2015. – P. 112-122.

131. Ren Q. Analytical evaluation of the BEM singular integrals for 3D Laplace and Stokes flow equations using coordinate transformation / Q. Ren, C. L. Chan // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 53, April 2015. – P. 1-8.

132. Pozrikidis C. Effect of surface slip on the relative motion and collision efficiency of slippery spherical particles / C. Pozrikidis // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 65, April 2016. – P. 95-100.

133. Nishad C. S. Flows in slip-patterned micro-channels using boundary element methods / C. S. Nishad, A. Chandra, G. P. Raja Sekhar // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 73, December 2016. – P. 95-102.

134. Gumgum S. DRBEM formulation for transient Stokes flow with slip boundary condition / S. Gumgum, L. C. Wrobel // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 75, February 2017. – P. 65-78.

135. Soares D. Jr. A coupled BEM/FEM formulation for drop interaction in Stokes flows with flexible and slip confining boundaries / D. Soares Jr., L. C. Wrobel // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 77, April 2017. – P. 112-122.

136. Zhang T. A variational multiscale interpolating element-free Galerkin method for convection-diffusion and Stokes problems / T. Zhang, X. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 82, September 2017. – P. 185-193.

137. Xue A. A variational multiscale interpolating element-free Galerkin method for convection-diffusion and Stokes problems / A. Xue, E. Graciani, L. J. Gray, V. Mantic, M. Garzon // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 84, November 2017. – P. 178-185.

138. Mardanov R. F. A Stokes–Brinkman model of the fluid flow in a periodic cell with a porous body using the boundary element method / R. F. Mardanov, S. K.

Zaripov, V. F. Sharafutdinov, S. J. Dunnett // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 88, March 2018. – P. 54-63.

139. Sahin K. A. M. An integral equation approach for the solution of the Stokes flow with Hermite surfaces / K. A. M. Sahin // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 96, November 2018. – P. 14-22.

140. Martin P. A. On the use of approximate fundamental solutions: Connections with the method of fundamental solutions and the method of regularized stokeslets / P. A. Martin // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 99, February 2018. – P. 23-28.

141. Wang J. A hybrid generalized interpolated element-free Galerkin method for Stokes problems / J. Wang, F. Sun // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 111, February 2020. – P. 88-100.

142. Verhnjak O. A novel two-way coupling *model* for Euler-Lagrange simulations of multiphase flow / O. Verhnjak, M. Hribersek, P. Steinmann, J. Ravnik // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 119, October 2020. – P. 119-132.

143. Ahmad M. Local radial basis function collocation method for stokes equations with interface conditions / M. Ahmad, Siraj-ul-Islam, B. Ullah // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 119, October 2020. – P. 246-256.

144. Кутателадзе С. С. Теплопередача при конденсации и кипении / С. С. Кутателадзе. – М.-Л.: Гос. Науч.-техн. изд-во. машиностроит. лит., 1952. – 234 с.

145. Присняков В. Ф. Кипение / В.Ф. Присняков. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.

146. Кутателадзе С. С. Основные закономерности развитого кипения в большом объёме жидкости. / С. С. Кутателадзе, Б. П. Авксентюк, И. И. Гогонин, И. Г. Маленков // Вопросы теплофизики в элементах атомных энергетических установок при двухфазном течении теплоносителя. Материалы межвузовской конференции. т. 2. – Обнинск, 1980, – С. 149–162.

147. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1970. – 660 с.
148. Кутателадзе С. С. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах / С. С. Кутателадзе, В. Е. Накоряков. – Новосибирск: Наука, 1984. – 300 с.
149. Кутателадзе С. С. Гидродинамика газожидкостных систем / С. С. Кутателадзе, М. А. Стырикович – М.: Энергия, 1976. – 296 с.
150. Толубинский В. И. Теплообмен при кипении / В.И. Толубинский. – К.: Наукова думка, 1980. – 316 с.
151. Григорьев В. А. Кипение криогенных жидкостей: Монография. / В. А. Григорьев, Ю. М. Павлов, Е. В. Аметистов. / Под ред. Д. А. Лабунцова. – М.: Энергия, 1977. – 290 с.
152. Несис Е. И. Кипение жидкости / Е. И. Несис. – М.: Наука, 1973. – 280 с.
153. Присняков В. Ф. Об отрыве паровых пузырей от поверхности нагрева / В. Ф. Присняков // Инж.-физ. Ж., 19, № 5, 1970. – С. 912–919.
154. Чigareва Т. С. Кинематографическое изучение механизма роста и отрыва пузырьков пара при кипении жидкостей на горизонтальных гладких поверхностях и порах / Т. С. Чigareва // Инж.-физ. журн., 1966, 11, № 6. – С. 773–778.
155. Бэнков С. Г. Вскипание на твердой поверхности в отсутствии растворенной газовой фазы / С. Г. Бэнков // Вопросы физики кипения. – М.: Мир, 1964. – С. 80–98.
156. Форстер Г. Рост парового пузырька в перегретой жидкости / Г. Форстер, Н. Зубер // Вопросы физики кипения. – М.: Мир, 1964. – С. 212–225.
157. Cooper M. G. The microlayer and bubble growth in nucleate pool boiling / M.G. Cooper // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1969, Vol. 12. – P. 915–933.
158. Cooper M. G. Shape and Departure of Single Bubbles Growing at a Wall / M. G. Cooper, A. M. Judd, R. Pike // 6th Int. heat transfer conf. – Toronto, 1978., Vol. 1. – 9 p.
159. Cooper M. G. Growth of diffusion controlled vapour bubbles at a wall in a known temperature gradient / M. G. Cooper, T. T. Chandratilleke // Int. J. Heat and

Mass Transfer, 1981, 24, № 9. – P. 1475–1492.

160. Zuber N. The dynamics of vapor bubble in nonuniform temperature fields / N. Zuber // Int. J. Heat and Mass Transfer, 2, 1961. – P. 83–102.

161. Лабунцов Д. А. Механизм роста паровых пузырьков на поверхности нагрева при кипении / Д. А. Лабунцов // ИФЖ, 1963, 6, № 4. – С. 33–37.

162. Лабунцов Д. А. Современные представления о механизме пузырькового кипения жидкости / Д. А. Лабунцов // Теплообмен и физическая газодинамика. – М.: Наука, 1974. – С. 98–115.

163. Кириченко Ю. А. Исследование динамики паровых пузырей в условиях имитации слабых гравитационных полей / Ю. А. Кириченко, А. П. Чаркин, М. Л. Долгой // Тр. ФТИНТ АН УССР, 1970. Вып. 1. – С. 184–190.

164. Кириченко Ю. А. Некоторые вопросы динамики паровых пузырей в условиях слабых полей массовых сил / Ю. А. Кириченко // ИФЖ, 1972. 22, № 2. – С. 5–12.

165. Кириченко Ю. А. Оценка условий отрыва паровых пузырей при пузырьковом кипении / Ю. А. Кириченко // ИФЖ, 1973. 25, № 1. – С. 5–13.

166. Кириченко Ю. А. Теплообмен при пузырьковом кипении жидкостей в условиях слабых полей массовых сил / Ю. А. Кириченко // Космич. исслед. на Украине. 1973. № 1. – С. 68–81.

167. Кириченко Ю. А. Об отрывных размерах пузырей при их квазистатическом росте на нагревателе / Ю. А. Кириченко, Л. А. Слобожанин, Н. С. Щербакова // ИФЖ, 1976, 30, № 5. – С. 841–847.

168. Кириченко Ю. А. Исследование внутренних характеристик кипения криогенных жидкостей в широких диапазонах давления насыщения и перегрузок / Ю. А. Кириченко // Тепло- и массообмен при кипении и течении криогенных жидкостей. – Минск, 1980. – С. 3–32.

169. Кириченко Ю. А. К расчету сил, действующих на паровой пузырь при кипении на горизонтальном нагревателе / Ю. А. Кириченко, В. Е. Серегин // Процессы теплообмена в сжижаемых и отвердевающих газах. – К.: Наукова думка, 1980. – С. 3–14.

170. Beysens D. Vapor spreading and the boiling crisis / D. Beysens, V.S. Nikolayev, Y. Garrabos // *J. Phys. Condensed Matter*, 2003, 15. – P. 435–442.
171. Beysens D. Liquid-vapor phase separation in a thermocapillary force field / D. Beysens, Y. Garrabos, V.S. Nikolayev, C. Lecoutre, J.-P. Delville, J. Hegseth // *Europhysics Letters*, 2002, 59 (2) – P. 245–251.
172. Nikolayev V.S. Growth of a dry spot under a vapor bubble at high heat flux and high pressure / V.S. Nikolayev, D.A. Beysens, G.-L. Lagier, J. Hegseth // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2001, 44. – P. 3499-3511.
173. Nikolayev V.S. Boiling crisis and non-equilibrium drying transition / V.S. Nikolayev, D.A. Beysens // *EuroPhysics Letters*, 1999, 47 (3). – P. 345–351.
174. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. В 2-х т. / Р. И. Нигматуллин. – М.: Наука, 1987.
175. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. – М-Л.: Гостехиздат, 1942. – 256 с.
176. Мейрманов А. М. Задача Стефана / А. М. Мейрманов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 239 с.
177. Саломатов В. В. Методы нелинейных процессов переноса тепла. Ч.1 / В. В. Саломатов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1976. – 245 с.
178. Саломатов В. В. Методы нелинейных процессов переноса тепла. Ч.2 / В. В. Саломатов. – Томск.: Изд-во ТГУ, 1978. – 181 с.
179. Lock G. S. H. A study of onedimensional ice formation with particular reference to periodic growth and decay / G. S. H. Lock, J. R. Gunderson, D. Quon, J. K. Donnelly // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1969, v.12, № 11.
180. Бразалук Ю. В. Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // *Вестник Харьковского национального университета. Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»*, 2003. – № 590. вып. 1. – С. 55–60.

181. Бразалук Ю. В. Расчет движения малых объектов в сложных потоках жидкости / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 63–68.
182. Беляев Н. М. Системы наддува топливных баков ракет / Н. М. Беляев – М.: Машиностроение, 1976.
183. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. Малые колебания идеальной жидкости / Н. Д. Копачевский // Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1966. – С. 141–144.
184. Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил. / Н. Д. Копачевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 1, 1967. – С. 128–146.
185. Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости / Н. Д. Копачевский // Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», ВЦ АН СССР, 1968. – С. 98–134.
186. Копачевский Н. Д. Малые колебания жидкости в сосуде в ослабленном потенциальном поле массовых сил / Н. Д. Копачевский // Сб. «Современные вопросы гидродинамики». – К.: Наукова думка, 1968. – С. 337–343.
187. Копачевский Н. Д. О влиянии капиллярных сил на частоты колебаний идеальной жидкости в малозаполненном сферическом сосуде / Н. Д. Копачевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9, № 6. 1969. – С. 1345–1353.
188. Копачевский Н. Д. О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости / Н. Д. Копачевский // Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, 1972. – С. 3–9.
189. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале / Н. Д. Копачевский // Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1972. – С. 3–13.
190. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О малых колебаниях идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде / Н. Д. Копачевский // Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1973. – С. 3–13.

191. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. Плоские задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде / Н.Д. Копачевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 13, № 4, 1973. – С. 952–970.
192. Копачевский Н. Д. О колебаниях несмешивающихся жидкостей / Н. Д. Копачевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 13, № 5, 1973. – С. 1249–1263.
193. Копачевский Н. Д. Применение метода С.Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости / Н. Д. Копачевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 16, № 2, 1976. – С. 426–439.
194. Копачевский Н. Д. О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости / Н. Д. Копачевский // ДАН СССР, 219, № 5, 1974. – С. 1065–1068.
195. Копачевский Н. Д. Задача Коши для малых движений идеальной капиллярной вращающейся жидкости / Н. Д. Копачевский // ДАН СССР, 219, № 6, 1974. – С. 1310–1313.
196. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил / Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 6, № 6, 1966.
197. Копачевский Н. Д. О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил в потенциальном поле массовых сил / Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 8, № 6, 1968. – С. 1291–1305.
198. Крейн С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде / С. Г. Крейн // ДАН СССР, 159, № 2, 1964. – С. 262–265.
199. Моисеев Н. Н. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения / Н. Н. Моисеев, Ф. Л. Черноусько // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 6, 1965. – С. 1071 – 1095.
200. Моисеев Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости / Н. Н. Моисеев // ПММ 22, № 5, 1958. – С. 612–621.
201. Моисеев Н. Н. О математических методах исследования нелинейных

- колебаний жидкости / Н. Н. Моисеев // Труды Междунар. симпозиума по нелинейн. колебан., 1961, т. 3. - К.: АН УССР, 1963. – С. 275–284.
202. Моисеев Н. Н. Вариационная задача теории колебаний жидкости и тела с жидкостью / Н. Н. Моисеев // Сб. «Вариационные методы в задача о колебаниях жидкости и тела с жидкостью». – М.: ВЦ АН СССР, 1962. – С. 8 – 118.
203. Моисеев Н. Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости / Н. Н. Моисеев, А.А. Петров. – М.: ВЦ АН СССР, 1966.
204. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. A. Ibrahim // Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.
205. Degtyarev K. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles / K. Degtyarev, V. Gnitko, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. 2016. Vol. 1, №. 1. – P.14–27.
206. Strelnikova E. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid / E. Strelnikova, E. Yeseleva, V. Gnitko, V. Naumenko // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010. Vol. 50. P. – 203–211.
207. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. / V. Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, 2017. Vol. 5(3). – P. 317–328.
208. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е Жуковский // Избр. соч, т. 1. М.: Гостехиздат, 1948. – С. 31–152.
209. Моисеев Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. – М.: Наука, 1965.
210. Микишев Г. Н. Динамика твердого тела с полостями, частично

- заполненными жидкостью / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
211. Микишев Г. Н. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.
212. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
213. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением / В. В. Румянцев // ПММ, 28, № 4. 1964. – С. 746–753.
214. Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью / В. В. Румянцев // ПММ, 30, № 4. 1966. – С. 51–66.
215. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими жидкость / Ф. Л. Черноусько. – ВЦ АН СССР, 1968.
216. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность / Н. Н. Моисеев // Матем. сборн., 32 (74), № 1, 1953. – С. 61–96.
217. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью / Г. С. Нариманов // ПММ, 20, № 1, 1956. – С. 21–38.
218. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью. Учет немалости движения последней / Г. С. Нариманов // ПММ, 21, № 4, 1957. – С. 513–524.
219. Нариманов Г. С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях / Г. С. Нариманов // Изв. АН СССР, отд. технич. наук, № 10, 1957. – С. 71–74.
220. Фещенко С. Ф. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях / С. Ф. Фещенко, И. А. Луковский, Б. И. Рабинович, Л. В. Докучаев. – К.: Наукова думка, 1969.
221. Черноусько Ф. Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 30,

№ 3, 1966. – С. 476–494.

222. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью // О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский / Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ» – 1997. – 348 с.

223. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость // И. А. Луковский / – Киев: Наук. думка, 1990. – 295 с.

224. Нариманов Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью // Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский / М., Машиностроение, 1977. – 208 с.

225. Черноусько Ф. Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 30, № 5, 1966. – С. 836–847.

226. Черноусько Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью в сосуде / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 30, № 6, 1966. – С. 977–992.

227. Черноусько Ф. Л. Колебания сосуда с вязкой жидкостью / Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, 1967. – С. 58–66.

228. Черноусько Ф. Л. Колебания твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью / Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1967. – С. 3 – 14.

229. Полежаев В. И. Конвективные процессы в невесомости / В. И. Полежаев, М. С. Белло, Н. А. Веризуб и др. – М.: Наука, 1991. – 239 с.

230. Бабский В. Г. Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. – М.: Наука, 1976. – 504 с.

231. Kelly S. Simulation of cryogenics cavitation / S. Kelly, C. Segal, J. Peugeot // AIAA Journal. Vol. 49, No.11, 2011. – P. 2502–2510.

232. Бенедикт Э. Общее поведение жидкости при полной или почти полной невесомости / Э. Бенедикт // Сб. «Невесомость». – М.: Мир, 1964. – С. 19–52.

233. Пейнтер Г. Жидкость в условиях невесомости / Г. Пейнтер // Сб.

- «Двигательные установки ракет на жидком топливе». – М.: Мир, 1966. – С. 149–199.
234. Повицкий А. С. Основы динамики и теплообмена жидкостей и газов при невесомости / А. С. Повицкий, Л. Я. Любин. – М.: «Машиностроение», 1972. – 252 с.
235. Черноусько Ф. Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения / Ф. Л. Черноусько // Сб. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости". – ВЦ АН СССР, 1968. – С. 69–97.
236. Шварц Е. Исследование поведения жидкости в условиях нулевой и уменьшенной гравитации / Е. Шварц // Сб. «Невесомость». – М.: Мир, 1964. – С. 138–148.
237. Шулейкин В. В. Еще о поведении жидкости, теряющей весомость / В. В. Шулейкин // ДАН СССР, 147, № 5, 1962. – С. 1075–1078.
238. Unterberg W. Zero gravity problems in space powerplants: A status survey / W. Unterberg, J. Congelliere // ARS Journal, 32, № 6, 1962. – P. 862–871.
239. Бабский В. Г. Приближенные методы в гидромеханике невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов // Сб. «Вопросы математической физики и функционального анализа». – К.: Наукова думка, 1976. – С. 83–92
240. Барняк М. Я. Определение формы равновесия свободной поверхности жидкости в сосуде, находящемся в слабом гравитационном поле / М. Я. Барняк // Труды семинара по математической физике. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1970. – С. 15–20.
241. Барняк М. Я. Нахождение собственных частот и форм малых колебаний идеальной жидкости в сосуде, находящемся в слабом гравитационном поле / М. Я. Барняк // Сб. «Математическая физика», вып. 9. – К.: Наукова думка, 1971. – С. 3–10.
242. Беляева М. А. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости / М. А. Беляева, А. Д. Мышкис,

- А. Д. Тюпцов // Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., № 5, 1964. – С. 39–46.
243. Беляева М. А. Гидростатика в слабых силовых полях / М. А. Беляева, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов // Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», ВЦ АН СССР, 1968. – С. 5–68.
244. Добролюбов Л. В. Многомерные задачи гидростатики в слабых силовых полях / Л. В. Добролюбов, В. М. Шашаин // Уч. записки ЦАГИ, 5, № 4, 1974. – С. 59–68.
245. Зенкевич В.Б. О поведении жидкости в условиях невесомости / В.Б. Зенкевич // Теплофиз. выс. темпер., 2, №2, 1964. – С. 230–237.
246. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. Равновесные формы вращающейся жидкости в условиях невесомости / Л. А. Слобожанин // Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1966. – С. 157–160.
247. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. О кольцеобразных фигурах равновесия вращающейся жидкости и об их устойчивости / Л. А. Слобожанин // Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, 1968. – С. 69–75.
248. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. Формы равновесия вращающейся невесомой жидкости / Л. А. Слобожанин // Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1969. – С. 116–124.
249. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости / А. Д. Тюпцов // Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1966. – С. 78–85.
250. Шулейкин В. В. Форма поверхности жидкости, теряющей весомость / В.В. Шулейкин // ДАН СССР, 147, № 1, 1962. – С. 92–95.
251. Ho S. H. Transient analysis of cryogenic liquid Hydrogen storage tank with intermittent forced Circulation / S. H. Ho, M. M. Rahman // AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer. Vol. 24, No. 2, 2010. – P. 374–380.
252. Varas D. Numerical analysis of the Hydrodynamic Ram phenomenon in aircraft fuel tanks. / D. Varas, J. Lopez-Puente, R. Zaera // AIAA Journal. Vol. 50, No.7, 2012. – P. 1621–1630.

253. Ahmad S. Hamiltonian structure and stability analysis for a partially filled container. / S. Ahmad, B. Yue, S.F. Shah // *Journal of Mechanics*. Vol. 29, 2013. – P. 79–83.
254. Bao-zeng Yue. Nonlinear coupled dynamics of liquid-filled spherical container in microgravity / Yue Bao-zeng // *App. Math. and Mech.* Vol. 29, 2008. – P. 1085–1092.
255. Salgado Sánchez P. Interfacial phenomena in immiscible liquids subjected to vibrations in microgravity / P. Salgado Sánchez, V. Yasnou, Y. Gaponenko, A. Myaldun, J. Porter, V. Shevtsova // *Journal of Fluid Mechanics* // V. 865. 2019. – P. 850–883.
256. Де Гроот С. Термодинамика необратимых процессов / М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы. – 1956. – 281 с.
257. Де Грот С. Неравновесная термодинамика / С. Де Грот, П. Мазур. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
258. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов / К.П. Гуров. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
259. Жоу Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва-Ижевск, 2006. г. – 538 с.
260. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов / И. Пригожин. – Москва-Ижевск. – 2001. – 160 с.
261. Пригожин И. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кондепуди. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
262. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов / Р. Хаазе. – М.: Мир, 1967. – 544 с.
263. Лыков А. В. Тепломассообмен (Справочник) / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
264. Гришин С. Д. Индустриализация космоса: Проблемы и перспективы. / С. Д. Гришин, Л. В. Лесков. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

265. Авдуевский В. С. Народнохозяйственные и научные космические комплексы / В. С. Авдуевский, Г. Р. Успенский. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
266. Беляков И. Т. Основы космической технологии / И. Т. Беляков, Ю. Д. Борисов. – М.: Машиностроение, 1980. – 185 с.
267. Боно Ф. Перспективы освоения космоса / Ф. Боно, К. Гатланд. – М.: Машиностроение, 1975. – 214 с.
268. Космонавтика СССР. – М.: Машиностроение, Планета, 1986. – 496 с.
269. Циолковский К. Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами / К. Э. Циолковский // Циолковский К. Э. Труды по космонавтике. – М.: Машиностроение, 1967.
270. Циолковский К. Э. Цели звездоплавания / К. Э. Циолковский // Циолковский К. Э. Труды по космонавтике. – М.: Машиностроение, 1967. – С. 278-309.
271. Авдуевский В. С. Технологии производства материалов в космосе / В. С. Авдуевский, Л. В. Лесков // Научные основы прогрессивной техники и технологии / Под ред. В. Н. Лымзина. – М.: Машиностроение, 1985. – С. 134-155.
272. Авдуевский В. С. Проблемы космического производства / В. С. Авдуевский, Л. В. Лесков // Гагаринские научные чтения по авиации и космонавтике / Под ред. А. Ю. Ишлинского. – М.: Наука, 1983. – С. 68 - 80.
273. Авдуевский В. С. Особенности теплопереноса в натуральных экспериментах с модельными веществами / В. С. Авдуевский, Л. В. Лесков, В. В. Савичев // Гагаринские научные чтения по авиации и космонавтике / Под ред. А. Ю. Ишлинского. – М.: Наука, 1984. – С. 121 - 126.
274. Анисимов Н. Ю. Особенности направленной кристаллизации расплавов в условиях невесомости / Н. Ю. Анисимов, Л. В. Лесков, В. В. Савичев // Теплофизика высоких температур, 1982, т. 20, № 2. – С. 323 - 327.
275. Ганиев Р. Ф. Проблемы механики в космической технологии / Р. Ф. Ганиев, В. Ф. Лапчинский. – М.: Машиностроение, 1978. – 119 с.

276. Гидромеханика и процессы переноса в невесомости / Под ред. В. С. Авдеевского. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. – 267 с.
277. Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости / Под ред. В. С. Авдеевского и В. И. Полежаева. – М.: Наука, 1982. – 263 с.
278. Гришин С. Д. О кристаллизации расплавов в невесомости / С. Д. Гришин, Л. В. Лесков // Проблемы механики и теплообмена в космической технике / Под редакцией О. М. Белоцерковского. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 207-224.
279. Острах С. Роль конвекции в технологических процессах / С. Острах // Космическая технология. – М.: Мир 1970. – С. 9-37.
280. Полежаев В. И. Исследование конвекции и тепломассообмена в условиях невесомости / В. И. Полежаев // Изв. АН СССР, серия физич., 1985, Т. 49, № 4. – С. 635-643.
281. Avduevsky V. S. Some Physical Aspects of Unidirectional Crystallization in Microgravity / V. S. Avduevsky, S. D. Grishin, L. V. Leskov // Acta Astronautica, 1982, V. 9, № 9. – P. 583-588.
282. Scientific Foundations of Space Manufacturing / V. S. Avduevsky, S. D. Grishin, L. V. Leskov etc. – М.: Mir Publishers, 1984. – 173 p.
283. Авдеевский В. С. Исследование особенностей термокапиллярной конвекции в невесомости / В. С. Авдеевский, С. Д. Гришин, Л. В. Лесков, В. В. Савичев // Доклад на XXXV конгрессе МАФ, 1984, IAF. – С. 84 - 142.
284. Бабский В. Г. Математическая теория электрофореза / В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, В. И. Юдович. – К.: Наукова думка, 1984. – 202 с.
285. Ганиев Р. Ф. Об управляемом вибрационном перемещении жидкости и газа в условиях, близких к невесомости / В. Ф. Ганиев, А. С. Охотин, В. Д. Лакиза, А. С. Цапенко // ДАН СССР, 1978, Т. 233, № 2. – С. 338 - 342.
286. Плавление, кристаллизация и фазообразование в невесомости / Л. И. Иванов, В. С. Земсков, В. Н. Кубасов и др. – М.: Наука, 1979. – 251 с.
287. Проблемы космического производства / В. С. Авдеевский, С. Д. Гришин, Л. В. Лесков и др. – М.: Машиностроение, 1980. – 221 с.

288. Регель Л. Л. Космическое материаловедение / Л. Л. Регель. – М.: ВИНТИ ГКНТ СССР, 1984. – 243 с.
289. Технологические эксперименты в невесомости / Под ред. В. С. Авдучевского. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. – 180 с.
290. Manufacturing in Space: Processing, Problems and Advances / V. S. Avduevsky, S. D. Grishin, L. V. Leskov etc. – М.: Mir Publishers, 1985. – 247 p.
291. Бабский В. Г. Электрофрез в космосе (состояние проблемы) / В. Г. Бабский // Известия АН СССР. Серия физич., 1985, Т. 49, № 4. – С. 724 - 729.
292. Космическая индустрия / Под ред. С. Д. Гришина, Л. В. Лескова. – М.: ИИЕТ АН СССР, 1981. – 124 с.
293. Перспективы и проблемы космического производства / Под ред. С. Д. Гришина, Л. В. Лескова. – М.: ИИЕТ АН СССР, 1983. – 100 с.
294. К. Э. Циолковский и проблемы космического производства / Под ред. С. Д. Гришина, Л. В. Лескова. – М.: ИИЕТ АН СССР, 1982. – 176 с.
295. Эрике К. Будущее космической индустрии / К. Эрике. – М.: Машиностроение, 1979. – 200 с.
296. Полежаев В. И. Гидромеханика и процессы теплообмена в условиях микрогравитации: история, этапы развития и современные направления фундаментальных и прикладных исследований / В. И. Полежаев // Институт Проблем механики РАН.: Препринт № 779. – М.: 2005. – 62 с.
297. Горбунов А. А. Метод возмущений и численное моделирование конвекции для задачи Релея в жидкостях с произвольным уравнением состояния / А. А. Горбунов, В. И. Полежаев // Институт Проблем механики РАН.: Препринт № 897. – М.: 2008. – 50 с.
298. Полежаев В. И. Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы / В. И. Полежаев, В. В. Сазонов // Институт Проблем механики РАН.: Препринт № 898. – М.: 2009. – 76 с.
299. Макарова А. С. Гидродинамические процессы в топливных баках ракетно космических летательных аппаратов / А. С. Макарова, С. А. Давыдов // Актуальні проблеми механіки: монографія / під редакцією М. В. Полякова.

- Дніпро: ЛІРА, 2018. – С. 141-164.
300. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости: Монография / В. Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
301. Kellog O. D. Foundation of potential theory: Monography / O. D. Kellog. – Berlin, Springer, 1929.
302. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики: Монография / Н. М. Гюнтер – М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.
303. Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники: Монография / С. Г. Михлин. – М.-Л.: Гос. изд. технико-теоретической лит., 1949. – 380 с.
304. Михлин С. Г. Маломерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения: Монография / С. Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
305. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения: Монография / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
306. Забрейко П. П. Интегральные уравнения: Монография / П. П. Забрейко, А. М. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Д. Стеценко. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
307. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочник / Верлань А. Ф., Сизиков В. С. – К.: «Наукова думка», 1986. – 544 с.
308. Купрадзе В. Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости: Монография / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
309. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: Монография / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
310. Партон В. З. Интегральные уравнения теории упругости: Монография / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
311. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке: Монография /

- Е. А Красильщикова. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
312. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости: Монография / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1963. – 192 с.
313. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учебник / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
314. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа: Монография / К. Миранда. – М.: Изд-во иностранной лит., 1957. – 256 с.
315. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными: Монография / Ф. Йон. – М.: Изд-во иностранной лит., 1958. – 158 с.
316. Морс Ф. Методы теоретической физики, том 1 / Морс Ф., Фешбах Г. – М.: Изд-во иностранной лит., 1958. – 930 с.
317. Морс Ф. Методы теоретической физики, том 2 / Морс Ф., Фешбах Г. – М.: Изд-во иностранной лит., 1960. – 886 с.
318. Гольдштейн Р. В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред / Р. В. Гольдштейн // Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике. – М.: Мир, 1978. – С. 183–209.
319. Положий Г. Н. Обобщения теории аналитических функций комплексного переменного: Монография / Г. Н. Положий. – К.: Изд-во КГУ, 1965. – 320 с.
320. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
321. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел Л. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
322. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики: Монография / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский А. А. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
323. Громадка Т. П. Комплексный метод граничных элементов: Монография / Т. П. Громадка, Ч. Лей – М.: Мир, 1990. – 303 с.

324. Верюжский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики: Монография / Ю. В. Верюжский – Киев: «Вища школа», 1978. – 184 с.
325. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными: Учебник / И. Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 426 с.
326. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики: Учебник / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. «Высшая школа», 1970. – 712 с.
327. Угодчиков А. Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела: Монография / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1986. – 296 с.
328. Мельников Ю. А. Функции и матрицы Грина для систем эллиптического типа: Монография / Ю. А. Мельников. – Д.: ДГУ, 1986. – 148 с.
329. Трикоми Ж. Интегральные уравнения: Монография / Ж. Трикоми. – М.: Наука, 1976. – 829 с.
330. Green G. An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism: Monography / G. Green. – Nottingham, 1828.
331. Михлин С. Г. Курс математической физики: Учебник / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
332. Белоцерковский С. М. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей: Монография / С. М. Белоцерковский, А. С. Гиневский. – М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. – 368 с.
333. Белоцерковский С. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел: Монография / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, П. М. Федоров. – М.: Наука, 1988. – 309 с.
334. Поляков Н. В. Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания: Монография / Н. В. Поляков. – Д.: Изд-во ДНУ, 2005. – 356 с.

335. Brebbia C. A. The Boundary Element Method for Engineers: Monography / C. A. Brebbia. – Plymouth: Pentech Press, 1978. – 189 p.
336. Hartmann F. Introduction to Boundary Elements: Monography / F. Hartmann. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 378 p.
337. Banerjee P. K. The Boundary Element Methods in Engineering: Monography / P. K. Banerjee. – London: McGraw-Hill, 1994.
338. Trevelyan J. Boundary Elements for Engineers: Theory and Applications: Monography. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
339. Bonnet M. Boundary Integral Equation Methods for Fluids and Solids: Monography / M. Bonnet. – New York: J. Wiley and Sons, 1999.
340. Jaswon M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics: Monography / M. A. Jaswon, G. T. Symm. – London: Academic Press, 1977. – 278 p.
341. Liggett J. A. Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow: Monography / J. A. Liggett, P. L. F. Liu. – London: Allen and Unwin, 1983. – 272 p.
342. Crouch S. L. Boundary Element Methods in Solid Mechanics: Monography / S. L. Crouch, A. M. Starfield. – London: Allen and Unwin, 1983. – 322 p.
343. Ingham D. B. Boundary Integral Equation Analysis of Singular Potential and Biharmonic Problems: Monography / D. B. Ingham, M. A. Kelmanson. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 173 p.
344. Gipson G. S. Boundary Element Fundamentals: Basic Concepts of Recent Developments in the Poisson Equation. Topics in Engineering, Vol. 2: Monography / G. S. Gipson. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1987. – 288 p.
345. Telles J. C. F. Two Dimensional Analysis using Boundary Elements: Monography / J. C. F. Telles. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1987. – 208 p.
346. Wrobel L. C. Two Dimensional Potential Analysis using Boundary Elements: Monography / L. C. Wrobel – Southampton: Computational Mechanics

Publications, 1987. – 186 p.

347. Manolis G. D. Boundary Element Methods in Elastodynamics: Monography / G. D. Manolis, D. E. Beskos. – London: Allen and Unwin, 1988. – 282 p.

348. Tang W. Transformation Domain into Boundary Integrals in BEM: Generalized Approach: Monography / W. Tang. – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – 209 p.

349. Umetani S. J. Adaptive Boundary Element Methods in Elastostatics: Monography / S. J. Umetani. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1988. – 107 p.

350. Lefeber D. Solving Problems with Singularities using Boundary Elements: Monography / D. Lefeber – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989. – 183 p.

351. Kitagawa K. Boundary Element Method Analysis of Viscous Flow: Monography / K. Kitagawa – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 136 p.

352. Bruch E. K. The Boundary Element Method for Groundwater Flow: Monography / K. Bruch E. – Berlin: Springer-Verlag, 1991.

353. Partridge P. W. The Dual Reciprocity Boundary Element Method: Monography / P. W. Partridge, C. A. Brebbia, L. C. Wrobel – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991.

354. Camp C. V. Boundary Element Analysis of Nonhomogeneous Biharmonic Phenomena: Monography / C. V. Camp, G. S. Gipson – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 260 p.

355. Pozrikidis C. Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow: Monography / C. Pozrikidis. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

356. Wrobel L. C. Boundary Element Methods in Heat Transfer: Monography / L. C. Wrobel, C. A. Brebbia. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.

357. Dominguez J. Boundary Elements in Dynamics: Monography / J. Dominguez – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993.

358. Ingham D. B. The Boundary Element Method for Solving Improperly Posed Problems: Monography / D. B. Ingham, Y. Yuan – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
359. Kane J. H. Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics: Monography / J. H. Kane. – London: Prentice Hall, 1994.
360. Power H. Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics: Monography / H. Power, L. C. Wrobel. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
361. Patterson C. A. Higher Order Boundary Element Method for Fluid Flow / C. Patterson, M. A. Sheikh // Finite Element Flow Analysis. – Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1982. – P. 256–279.
362. Patterson C. A. On the Use of Higher Order Weighting Functions in the Boundary Integral Method for Fluid Flow / C. A. Patterson, M. A. Sheikh // Num. Method in Laminar and Turbulent Flow. – Pineridge Press, Swansea, 1983. – P. 1163–1173.
365. Бевза Э. К. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» – Херсон, 2001 – С. 51–55.
366. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию: Справочник. / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина – М.: Наука, 1966. – 372 с.
367. Оран Э. Численное моделирование реагирующих потоков: Монография / Э. Оран, Дж. Борис. – М.: Мир, 1990. – 660 с.
368. Самарский А. А. Теория разностных схем: Монография / А. А. Самарский – М.: Наука, 1989. – 576 с.
369. Бабенко К. И. Основы численного анализа: Монография / К. И. Бабенко – М.: Наука, 1986. – 744 с.
370. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости: Монография / Л. Н. Сретенский. – М.: 1936. – 304 с.

371. Wu J. C. Boundary Element Method and Inhomogeneous Elliptic Differential Equations / J. C. Wu // Boundary Element VII. – Springer, Berlin, 1985. – P. 9/95–9/104.
372. Wu J. C. Boundary Element Method and Inhomogeneous Parabolic Equations / J. C. Wu // ВЕТЕСН'85. – Springer, Berlin, 1985. – P. 19–30.
373. Вабищевич П. Н. Вычислительный алгоритм конформного отображения / П. Н. Вабищевич, С. Л. Пулатов // Мат. моделирование. №1, Т. 1, 1989, №1. – С. 132–139.
374. Хрущ В. К. Сравнение эффективности некоторых алгоритмов численного решения уравнения теплопроводности путём численного эксперимента / В. К. Хрущ, Д. В. Евдокимов // «Вісник Дніпропетровського університету», сер. «Механіка», вып.6, том 1, 2002. – С. 9–16.
375. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред: Монография / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
376. Белоцерковский О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике: Монография / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 392с.
377. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях: Монография / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
378. Белоцерковский С. М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
379. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов // – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
380. Евдокимов Д. В. Приближенное интегральное представление для стационарного распределения температуры в слабонеоднородной среде / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 9–14.
381. Mikhaiklov S. E. Localized boundary-domain integral formulations for

- problems with variable coefficients // Engineering analysis with boundary elements. – Southampton, 2002. – V. 26. – P. 681-690.
382. Mikhaiklov S. E. Numerical solution of Neumann problem with variable coefficients by the localized boundary-domain integral equation method / S. E. Mikhaiklov, I. S. Nakhova // Proceeding of the 4th UK Conference on Boundary Integral Methods. – Salford, UK, 2003.
383. Mikhaiklov S. E. Some localized boundary-domain integro-differential formulations for quasi-linear problems with variable coefficients / S. E. Mikhaiklov // Advances in Boundary Element Techniques IV. – London, UK, 2003. – P. 289–294.
384. Mikhaiklov S. E. About localized boundary-domain integro-differential formulations for quasi-linear problems with variable coefficients / S. E. Mikhaiklov // Integral Methods in Science and Engineering, Analytical and Numerical Techniques. – Boston-Basel-Berlin, 2004. – P. 139–144.
385. Фихтенгольц Г. М. Курс интегрального и дифференциального исчисления, в 3-х томах. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1964. – Т. 1. – 539 с., Т. 2. – 560 с, Т. 3. – 546 с.
386. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
387. Bazhlekov I. B. Nonsingular boundary integral method for deformable drops in viscous flows [Text] / I. B. Bazhlekov, P. D. Anderson, H. E. H. Meijer // Physics of Fluids. – 2004. – Vol. 16, Issue 4. – P. 1060–1081.
388. Klaseboer E. Non-singular boundary integral methods for fluid mechanics applications [Text] / E. Klaseboer, Q. Sun, D. Y. C. Chan // Journal of Fluid Mechanics. – 2012. – Vol. 696. – P. 468–478.
389. Wendland W. L. On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation [Text] / W. L. Wendland, F. Cakoni, G. C. Hsiao // Complex Variables. – 2005. – Vol. 50, Issue 7-11. – P. 681–696.
390. Бразалук Ю. В. Расчет гидродинамического взаимодействия в

- сверхтекучей жидкости методами вычислительной теории потенциала / Ю. В. Бразалук // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 5/5(65). – С. 6–11.
391. Бразалук Ю. В. Расчет обтекания сложных гидродинамических конфигураций комбинированным методом граничных элементов и дискретных вихрей / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, В. Г. Решняк // Вісн. Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – Вип. 16. Т. 1. – Д., 2012. – С. 50-67.
392. Бразалук Ю. В. Численная реализация обобщенного метода Блоха-Гиневского / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – Вип. 17, Т. 1. – Д., 2013. – С. 35–51.
393. Ван Тассел Д. Стил, разработка, эффективность, отладка и испытание программ / Д. Ван Тассел. – М.: Мир, 1985. – 332 с.
394. Бразалук Ю. В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков. – Вісник ХНУ, № 703. – Харків, 2005. – С. 50–66.
395. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т1. Теория распределений и анализ Фурье: Монография / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
396. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами: Монография / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
397. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3. Псевдодифференциальные операторы: Монография / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
398. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.4. Интегральные операторы Фурье: Монография / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
399. Tosaka N. Integral equation formulations with the primitive variables for incompressible viscous fluid flow problems / N. Tosaka // Computational

Mechanics, 1989. v. 4, N. 2. – p. 89-103.

400. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1979. – 552 с.

401. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 4. Кинетика. Теплота / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Наука, 1972 – 258 с.

402. Демидович Б. П. Численные методы анализа: монография / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

403. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред: Монография. – М.: Наука, 1987. – ч. 1 – 464 с., ч. 2 – 360 с.

404. Оран Э. Численное моделирование реагирующих потоков: Монография / Э. Оран, Дж. Борис. – М.: Мир, 1990. – 660 с.

405 Бразалук Ю. В. Применение метода граничных элементов для численного решения линейных краевых задач в областях с сильно сегментированной границей / Ю. В. Бразалук // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8. – С. 34–40. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vcpimm_2019_8_7 Index Copernicus International World of Journals.

ДОДАТОК 1

Нові алгоритми обчислювальної теорії потенціалу

Д1.1 Методика тестування програмного забезпечення на основі методу граничних елементів

Необхідність оцінки властивостей обчислювального алгоритму при високій складності його теоретичного (формально-математичного) дослідження, що, як правило, нездійснено, ставить задачу визначення оцінок похибки такого алгоритму шляхом чисельного експерименту, тобто на евристичному рівні. Треба зазначити, що через високу точність методу граничних елементів традиційні шляхи контролю точності – порівняння з експериментом та порівняння з розрахунками інших авторів – втрачають переконливість. Існує два порогових значення щодо похибки алгоритму відносно збурень: поріг чутливості та поріг коректності. Якщо збурення, до яких входить і похибка апроксимації, менші порогу чутливості, то розрахункова схема «не відчуває» таких збурень, а збурення, більші за поріг коректності, то розрахункова схема відображає таке збурення з «прийнятним ступенем точності». Збурення, що знаходяться між цими двома порогамі, призводять до неконтрольованої похибки та мають, за можливості, виключатися з розрахунку. Відповідно, алгоритм з мінімальною різницею між зазначеними порогамі має бути визнаний найкращім та найнадійнішим.

Раніше вже була розроблена евристична методика тестування алгоритмів методу граничних елементів шляхом обчислювального експерименту [394], основана на тестових задачах з відомим аналітичним розв'язком, однак сучасні, більш складні задачі вимагають інших, вдосконалених методів. Зазначена методика передбачала не тільки порівняння результатів чисельного розрахунку з аналітичним розв'язком тієї ж задачі, а й пропонувала збурення крайових умов, подібне до того, що було розглянуто у підрозділі 2.3, визначення внутрішньої похибки алгоритму –

унікальна властивість методу граничних елементів, коли в наближене представлення шуканої функції у вигляді суми інтегралів по граничним елементам підставляються аналітичні межові значення шуканої функції та її нормальної похідної – тобто цей прийом дозволяє розділити похибку граничноелементної апроксимації та похибку, що генерується у процедурі розв'язання. Крім того, методика [394] передбачала і стандартні прийоми тестування, наприклад, перерахунок на подвоєній сітці. Але вся ця методика була спрямована на одноразовий розрахунок методом граничних елементів. Сучасні задачі пропонують для тестування більш складні системи, для розрахунку яких необхідно сумісно застосовувати алгоритми різної обчислювальної природи. Наприклад, у розділі 3 даної дисертаційної роботи розглядається рух малих об'єктів у багатофазній течії Стокса, який розраховується методом М. Смолуховського. Рух зазначених об'єктів описується задачами Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При чисельному розрахунку визначення поля течії методом граничних елементів формує помилку, яка вноситься у схеми розв'язання задачі Коші, а похибка розв'язання задачі Коші вносить збурення у граничноелементний розрахунок на наступному кроці. Зрозуміло, що підібрати аналітичний розв'язок для такої системи неможливо, тому потрібний був простий прийом, який би дозволив на евристичному рівні оцінити порядки похибок обох алгоритмів та їх взаємний вплив. Було запропоновано метод подвійного перерахунку, який полягає у наступному: для коректної за Адамаром задачі для кожного виду крайових умов існує тільки один розв'язок з відповідними крайовими значеннями, якщо була задана умова Діріхле, то розв'язок задачі передбачає єдине значення умов Неймана; якщо ж тепер з отриманими умовами Неймана знову розв'язати задачу, то мають бути отримані початкові умови Діріхле з точністю до похибки обчислення. Різниця між початково заданими та отриманими крайовими значеннями функції певним чином характеризує похибку алгоритму.

Як правило, сучасні задачі гідромеханіки передбачають визначення не тільки поля швидкостей, а й перенесення деякої субстанції, однак для таких задач описана вище методика вже не повністю релевантна, оскільки основний глобальний обчислювальний процес в даному випадку – це розрахунок еволюції гідродинамічної системи, в якій рухається субстанція. Груба математична модель генерує суттєву похибку, яка, як правило, має систематичний характер, до неї додається абсолютно незалежна від неї похибка чисельного визначення поля швидкостей течії, і тільки потім обидві ці похибки входять у розрахункову схему еволюції поля субстанції. Тобто, на кожному кроці по часу в процесі чисельного розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, які описують еволюцію поля субстанції, крім неминучих при чисельному розв'язанні помилок апроксимації в процедуру чисельного розв'язання вносяться систематичні і несистематичні похибки описаного вище походження. Оскільки три вищезгадані різновиди обчислювальної похибки мають абсолютно різну природу, їх величини можуть різнитися аж до декількох порядків у залежності від особливостей конкретної задачі. Отримати теоретичні оцінки похибки загальної розрахункової схеми, описаної вище, як правило, важко, а часто абсолютно неможливо, тому видається доцільним дослідити загальну похибку шляхом чисельного експерименту, для чого слід розробити відповідну методику, що являє собою досить нетривіальну проблему. Хоча структура й властивості погрішності схеми Ейлера докладно вивчені й на сьогоднішній день загальновідомі, ті ж самі властивості при внесенні додаткової систематичної або стохастичної похибки на кожному кроці за часом у ході розрахунку виявляються практично непіддатливими теоретичному визначенню. Частково перебороти виникаючі утруднення дозволяють спеціально розроблені методики дослідження похибки алгоритму за допомогою обчислювального експерименту. Нижче приведемо декілька евристичних засобів, що дозволяють одержати хоча б якісне представлення про похибку повного обчислювального процесу:

1. Найбільш простим і природним представляється знайти задачу про еволюцію поля субстанції (вихорової структури, рідинного контуру), що має відомий аналітичний розв'язок, бажано, побудований у квадратурах. Однак настільки спрощена задача не представляє практичного інтересу, і, в той же час, отриманий аналітичний розв'язок виявляється надто складним.

2. З іншого боку, використання аналітичних розв'язків для поля швидкості разом із чисельним розрахунком руху рідинної частинки створює додаткові можливості дослідження розрахункової схеми шляхом внесення заздалегідь визначених збурень поля швидкості. Такий підхід здатний забезпечити краще якісне розуміння особливостей розрахунку при застосуванні разом з описаними далі непрямими методами контролю погрішності.

3. Для стаціонарних течій, у яких траєкторії руху рідинних частинок збігаються з лініями течії, може бути запропоновано наступний прямий спосіб для аналізу точності: по відхиленню функції течії в точці поточного розташування рідинної частинки від його початкового значення можна визначити зсув частинки в напрямку, нормальному до лінії течії, що виникає внаслідок похибки розрахунку. Такий підхід дозволяє організувати корекцію положення рідинної частинки в процесі розрахунку, але, на жаль, не дає можливості визначити похибку процесу інтегрування уздовж лінії течії. Також цей метод не застосовується в просторових задачах і для нестаціонарних вихрових течій.

4. Як відзначалося вище, для замкнутого рідинного контуру γ_i площа охопленої ним області D_i в процесі течії зберігається ($S_i = \text{const}$). На цьому засновано ще один принцип непрямого контролю погрішності: у момент часу τ площа, обмежена контуром γ_i дорівнює

$$S_i(\tau) = \int_{D_i} dx dy = \int_{D_i} \text{div} \vec{A} dx dy = \int_{\gamma_i} \vec{A} \vec{n} ds, \quad (\text{Д1.1})$$

де $\operatorname{div} \vec{A} = 1$ і як вектор \vec{A} зручно вибрати $\vec{A} = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right\}$. Тоді, порівнюючи $S_i(\tau)$ з $S_i(\tau = 0)$, можна оцінити накопичення похибки розрахунку.

Описаний вище підхід до кількісного аналізу структурно-топологічних особливостей течій рідин, в яких присутній конвективний перенос, може бути, і не досить універсальним, проте вельми ефективним у межах своєї застосовності. В роботі, наскільки відомо автору, вперше здійснена спроба проаналізувати похибки розрахунку лагранжевого перенесення за допомогою чисельного експерименту. Чисельний експеримент жодною мірою не може вважатися доказовою оцінкою похибки розрахунку в силу дуже багатьох обставин, серед яких залежність результату від якості застосованого програмного забезпечення, обов'язкова неповнота набору тестових задач, залежність результату від форми області розв'язку та особливостей розглянутої задачі. Тим не менш, результати подібних чисельних експериментів виявляються зручним інструментом евристичного аналізу властивостей застосованого алгоритму.

ДОДАТОК 2

Течії Стокса

Д2.1 Побудова матриць фундаментальних розв'язків для альтернативних формулювань системи рівнянь Стокса

Цей підрозділ Додатку 2 є прямим продовженням підрозділу 2.2 з відповідного розділу. Розглянемо рівняння Стокса, визначене у термінах швидкість-завихорність:

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \Delta v = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \Delta \omega = 0. \end{cases} \quad (\text{Д2.1})$$

Матричний оператор системи (Д2.1) має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \Delta & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad (\text{Д2.2})$$

$$\det(L) = \Delta^3. \quad (\text{Д2.3})$$

Обернений оператору L оператор має вигляд:

$$R = \frac{1}{\det(L)} \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 \\ \Delta \frac{\partial}{\partial y} & -\Delta \frac{\partial}{\partial x} & \Delta^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{Д2.4})$$

Проводячи символічно «скорочення на оператор Лапласа», отримаємо:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \Delta \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{R}^*}{\Delta^2}. \quad (\text{Д2.5})$$

Аналогічно приведеному вище $\mathbf{U} = \mathbf{R}\delta\mathbf{E}$, звідки:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^* \varphi_1, \quad (\text{Д2.6})$$

де

$$\varphi_1 = -\frac{1}{8\pi} r^2 (\ln r - 1); \quad (\text{Д2.7})$$

із (Д26) отримаємо

$$\begin{aligned} U_{11} &= U_{22} = U_{33} = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \\ U_{12} &= U_{13} = U_{21} = U_{23} = 0, \\ U_{31} &= -\frac{1}{8\pi} \left(2(y - y_0) \left(\frac{1}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - 1 \right) + y - y_0 \right), \\ U_{31} &= \frac{1}{8\pi} \left(2(y - y_0) \left(\frac{1}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - 1 \right) + x - x_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{Д2.8})$$

Схожа система з'являється, якщо в рівняннях Стокса замінити рівняння нерозривності рівнянням Лапласа для тиску (котре являється слідством рівнянь Стокса та рівнянь нерозривності)

$$\begin{cases} \mu \Delta u = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \Delta p = 0. \end{cases} \quad (\text{Д2.9})$$

тоді

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mu \Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \mu \Delta & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{L}) = \mu^2 \Delta^3, \quad (\text{Д2.10})$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu\Delta^2} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & \mu\Delta \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{R}^*}{\mu\Delta^2}. \quad (\text{Д2.11})$$

Звідки $\mathbf{U} = \mathbf{R}^* \varphi_1$, де $\varphi_1 = -\frac{1}{8\pi} r^2 (\ln r - 1)$, отже:

$$\begin{aligned} U_{11} &= U_{22} = U_{33} = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln r, \\ U_{12} &= U_{13} = U_{21} = U_{23} = 0, \\ U_{31} &= -\frac{1}{8\pi\mu} \left(2(y - y_0) \left(\frac{1}{2} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) - 1 \right) + x - x_0 \right), \\ U_{32} &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(2(y - y_0) \left(\frac{1}{2} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) - 1 \right) + y - y_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{Д2.12})$$

Д2.2 Матриці фундаментальних розв'язків для плоских нестационарних рівнянь Стокса та їх застосування в прикладних дисциплінах

Дослідження фізико-хімічних процесів у навколишньому природному середовищі, особливо процесів циркуляції вологи в атмосфері, призводить до необхідності розгляду навколишнього середовища як багатофазних систем краплин, сніжинок і порошин у атмосфері чи різних твердих частинок, газових і парових бульбашок у водяному середовищі. Іншою, більш традиційною областю поширення течії при малих числах Рейнольдса є численні промислові технології обробки дисперсних матеріалів, такі технології широко поширені в хімічній промисловості, промисловості будівельних матеріалів, легкої і харчової промисловості. Приведені вище приклади відповідають випадку зовнішнього обтікання об'єктів при малих числах Рейнольдса. Зовсім інша картина має місце в різних пристроях мікроелектроніки і мікромеханіки, що інтенсивно розвиваються у наш час. У

таких пристроях переважно зустрічаються внутрішні течії при малих числах Рейнольдса, досвід математичного і чисельного дослідження яких дуже обмежений. Нарешті, дослідження й освоєння космічного простору призвели до вивчення ще одного класу течій при малих числах Рейнольдса, що виникають унаслідок дії малих масових сил. Протягом довгого часу такими течіями зневажали, однак розвиток космічних технологій змусив розглядати їх як один з механізмів еволюції неоднорідностей в місткостях орбітальних комплексів, що містять рідини чи гази, наприклад, у паливних баках космічних кораблів на орбіті. Приведені вище приклади переконливо демонструють актуальність обраної тематики дослідження.

Природним наслідком розширення класів задач, зв'язаних із течією нестисливої рідини при малих числах Рейнольдса, і збільшення самого числа таких класів, що відзначалося вище, є необхідність розвитку методів розв'язку таких задач. Специфіка математичних формулювань зазначених задач (про що буде докладніше сказано нижче) обмежує можливість їхнього ефективного розв'язку традиційними чисельними методами гідромеханіки – методом скінченних різниць і методом скінченних елементів, однак застосування теорії потенціалу до розглянутого класу задач традиційно приносило добрі результати. Природно очікувати, що й у випадках знову сформульованих задач методи теорії потенціалу виявляться досить ефективними. Ключовим моментом теорії потенціалу є побудова фундаментального розв'язку (функції Гріна), за допомогою якого потім будуються інтегральні співвідношення. Основною метою даної частини роботи є побудова фундаментальних розв'язків для ряду диференціальних операторів, що описують течію нестисливої в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса.

Існують значні різночитання в питанні про оцінку місця наближень Стокса й Озеена в гідромеханіці в'язкої рідини. У технічній літературі взяла гору точка зору, приведена в монографії [45], на наближення Озеена, як на наступне за Стоксом наближення, виправлення внесене яким дозволяє

поширити формулу Стокса до $Re \sim 1$. У той же час, у книзі [46] і ряді інших робіт, незважаючи на формальне згадування про наближення Стокса як частинний випадок наближення Озеєна, фактично наближення Озеєна трактується як альтернатива наближенню Стокса. Сам же Озеєн вважав [52] побудоване наближення узагальненням наближення Стокса, оскільки при $\overline{V}_0 = 0$ воно переходить у нестационарне наближення Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \nu \Delta \vec{v}, \quad (\text{Д2.13})$$

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (\text{Д2.14})$$

Наближення Озеєна не може вважатися ні узагальненням, ні альтернативою наближенню Стокса для задач, у яких не вдається в явному вигляді виділити постійний вектор швидкості \overline{V}_0 , а до таких задач відноситься більшість внутрішніх течій і задачі зовнішнього обтікання, зв'язані з обертальними рухами тіл, що обтікаються. Розглядати наближення Озеєна як наступне за Стоксом наближення в деякому асимптотичному розкладанні також недоцільно, оскільки побудувати таке розкладання не вдалося. Найбільш прийнятним представляється трактування, запропоноване в книзі [64], відповідно до якого наближення Озеєна є коректним для віддалених точок при зовнішнім обтіканні, а наближення Стокса для точок прилеглих. Дане трактування пояснює вищезгадане уточнення формули для коефіцієнта опору при урахуванні наближення Озеєна, однак «зшивання» розв'язків Стокса й Озеєна являє собою окрему непросту проблему.

Класичні рівняння Стокса і крайові задачі, що для них формулюються, добре вивчені як з теоретичної [56], так і з практичної точок зору [45]. Однак, як відзначалося вище, сучасною тенденцією є розгляд як зовнішніх, так і внутрішніх течій Стокса, а для останніх стаціонарні рівняння часто виявляються недостатньо загальними, тому все частіше використовується формулювання, розглянуті в монографії [59]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \nu \Delta \vec{V} + \gamma \vec{V} + \vec{F}, \quad (\text{Д2.15})$$

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (\text{Д2.16})$$

де $\gamma \vec{V}$ – сила Попова-Ері-Релея [59 – 61].

Система (Д2.15), (Д2.16) є очевидним узагальненням системи (Д2.13), (Д2.14). Слід зазначити, що формулювання рівнянь (Д2.15), (Д2.16), так само як і інших вищенаведених системах, неєдине – у гідромеханіці добре відомі і широко використовуються альтернативні формулювання, засновані на інших залежних змінних. Еквівалентність цих формулювань до кінця не вивчена, однак обчислювальна практика демонструє гарний збіг результатів розрахунків.

Метою даної частини звітної є поширення ідей і методів побудови матриць фундаментальних розв'язків, розв'язаних у роботах [395 - 398], на більш загальні випадки систем рівнянь Стокса.

Розглянемо формулювання системи рівнянь Стокса (Д2.15), (Д2.16) у змінних швидкість - тиск, запропоноване у монографії [59] (відзначимо, що фундаментальний розв'язок й інтегральне представлення для цієї системи у випадку $\gamma = 0$ отримано в монографії О. О. Ладиженської [52], однак цей розв'язок будувався як узагальнення згаданих вище розв'язку Кельвіна і формул Сомільяни, що не завжди зручно). Перепишемо систему (Д2.15), (Д2.16) у наступному вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u - \nu \Delta u + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma v - \nu \Delta v + \frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (\text{Д2.17})$$

де $p' = \frac{p}{\rho}$ (надалі, стислості заради, «штрих» будемо опускати); і застосуємо до неї метод Хьормандера, для чого знайдемо символічний визначник матричного диференціального оператора

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right)\Delta. \quad (\text{Д2.18})$$

Побудуємо оператор, обернений до (Д2.18), за правилами побудови обернених матриць.

$$R = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right) & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right)^2 & \end{pmatrix} = \frac{R^*}{D}, \quad (\text{Д2.19})$$

де під $\frac{1}{D}$ розуміється оператор, обернений до оператора D , тобто D^{-1} .

Позначимо матрицю фундаментальних розв'язків через U , тоді

$$U = R(E\delta), \quad (\text{Д2.20})$$

де E – одинична матриця; δ – дельта-функція Дірака. Одержимо

$$U = R^*(E(D^{-1}\delta)). \quad (\text{Д2.21})$$

Очевидно, що

$$D^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right)^{-1} \Delta^{-1}. \quad (\text{Д2.22})$$

Введемо позначення

$$\varphi_0 = \Delta^{-1}\delta \text{ та } \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma - v\Delta\right)^{-1}\delta. \quad (\text{Д2.23})$$

Очевидно також, що

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad \varphi = \frac{\exp[\gamma(t-\tau)]}{4\pi\nu(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu(t-\tau)}\right], \quad (\text{Д2.24})$$

де $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Тоді, позначивши $\varphi_1 = D^{-1}\delta$, одержимо

$$U = R^* \varphi_1, \quad \varphi_1 = -\frac{e^{\gamma(t-\tau)}}{4\pi} \int \frac{e^{-z}}{z} dz, \quad (\text{Д2.25})$$

$$\text{де } z = \frac{r}{4\nu(t-\tau)}.$$

Останній інтеграл у (Д2.25) зводиться до добре відомих спеціальних функцій. З урахуванням (Д2.20) зі співвідношень (Д2.25) легко одержати елементи матриці фундаментальних розв'язків.

$$\begin{aligned} U_{11} &= \varphi \left(\frac{2\nu(t-\tau)((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2)}{r^4} - \frac{(y-y_0)^2}{r^2} \right), \\ U_{12} &= U_{21} = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \varphi \left(\frac{2\nu(t-\tau)}{r^2} + 1 \right), \\ U_{13} &= U_{31} = \frac{x-x_0}{2\pi r^2}, \\ U_{22} &= \varphi \left(\frac{2\nu(t-\tau)((y-y_0)^2 - (x-x_0)^2)}{r^4} - \frac{(x-x_0)^2}{r^2} \right), \\ U_{23} &= U_{32} = \frac{y-y_0}{2\pi r^2}, \\ U_{33} &= -\gamma\varphi_0 - \nu\delta, \end{aligned} \quad (\text{Д2.26})$$

де функції φ_0 і φ визначені співвідношеннями (Д2.24).

Розглянемо альтернативне формулювання системи рівнянь Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \gamma v_x - \nu \Delta v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} - \gamma v_y - \nu \Delta v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \Delta p = 0. \end{cases} \quad (\text{Д2.27})$$

Аналогічно попередньому

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= U_{22} = \varphi, \\
 U_{12} &= U_{21} = U_{31} = U_{32} = 0, \\
 U_{13} &= -\frac{x - x_0}{2r^2} e^{\gamma(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu(t-\tau)}\right], \\
 U_{23} &= -\frac{y - y_0}{2r^2} e^{\gamma(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu(t-\tau)}\right], \\
 U_{33} &= \varphi_0
 \end{aligned} \tag{Д2.28}$$

де, як і раніше, функції φ_0 і φ визначені співвідношеннями (Д2.24).

У роботі [59] вказано на доцільність формулювання рівнянь Стокса в термінах $\vec{\omega} - \vec{v}$. Застосуємо операцію rot до першого двох рівнянням початкової системи (Д2.17), у результаті одержимо рівняння дифузії завихоренності:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \gamma \omega - \nu \Delta \omega = 0, \tag{Д2.29}$$

яке, взагалі кажучи, може бути розглянуте самостійно, наприклад, у необмеженій області, про що буде сказано нижче. Однак в обмежених областях постановка крайових умов безпосередньо для завихоренності може викликати істотні труднощі, тому рівняння (Д2.29) зазвичай доповнюється деякими рівняннями, що зв'язують завихоренність і швидкість, однак пряме використання зв'язку цих полів $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$ незручно, оскільки дане визначення включає тільки похідні першого порядку, тому, як правило, у цих цілях використовується плоска проекція просторового співвідношення $\text{rot } \vec{\omega} = \text{rot } \text{rot } \vec{V}$, звідкіля негайно випливає

$$\begin{cases}
 \Delta V_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \\
 \Delta V_y - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \\
 \frac{\partial \omega}{\partial t} - \gamma \omega - \nu \Delta \omega = 0.
 \end{cases} \tag{Д2.30}$$

Застосувавши до системи рівнянь (Д2.30) метод Хьормандера, одержимо

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= U_{22} = \varphi_0, \\
 U_{12} &= U_{21} = U_{31} = U_{32} = 0, \\
 U_{13} &= \frac{x - x_0}{2r^2} e^{\gamma(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu(t-\tau)}\right], \\
 U_{23} &= \frac{y - y_0}{2r^2} e^{\gamma(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu(t-\tau)}\right], \\
 U_{33} &= \varphi.
 \end{aligned} \tag{Д2.31}$$

Побудовані матриці фундаментальних розв'язків мають самостійну наукову цінність, оскільки описують поля відповідних фізичних величин (швидкості, тиску, завихоренності), що виникли в результаті впливу, локалізованого в точці (точкового джерела). Крім прямого використання як розв'язків рівнянь Стокса, що описують точковий вплив на необмежену в'язку рідину, отримані матриці фундаментальних розв'язків можуть бути використані для побудови граничних інтегральних рівнянь, за аналогією з побудованими в монографіях [52, 55]. Побудова нових граничних інтегральних рівнянь для системи рівнянь Стокса являє собою значний інтерес, як з теоретичної, так і з обчислювальної точок зору, і повинно стати темою окремого дослідження.

Відзначимо, що розв'язки (Д2.26), (Д2.28), (Д2.31) дозволяють шляхом простого інтегрування безпосередньо будувати розв'язки задач про течії, що виникають у необмеженій рідині під дією малих впливів, наприклад, малих масових сил, малих початкових полів завихоренності, малих джерел завихоренності, джерел тиску, тобто, вирішувати задачі Коші, що виникають при розгляді зазначених процесів. Такі стоксовські течії виникають, як правило, в умовах мікрогравітації, наприклад, на борті орбітальних космічних апаратів під дією малих масових сил і часто локально розподілених масових сил. В умовах мікрогравітації можливі поява і розподілених джерела тиску, що є наслідком онзагеровських ефектів, іншим

«джерелом тиску» в умовах мікрогравітації є дивергенція масових сил. Таким чином, задачі Коші, поставлені для системи рівнянь (Д2.27), описують маловивчену задачу про течію у необмеженій області, викликану джерелом тиску.

Найбільш широко розповсюдженим класом задач динаміки в'язкої рідини є задачі дифузії завихоренності. Для течії Стокса в необмеженій рідині, викликаній початковим розподілом завихоренності в деякій скінченній частині області течії і розподілом джерела завихоренності також у скінченній частині області течії, дифузія завихоренності буде описуватися задачею Коші для рівняння (Д2.29). При необхідності визначення полів швидкостей замість задачі Коші для рівняння (Д2.29) може бути використана задача Коші для системи рівнянь (Д2.30). Однак розгляд конкретних прикладів течій при малих числах Рейнольдса в умовах мікрогравітації являє собою окрему проблему і вимагає окремого дослідження.

У даній роботі вперше були побудовані фундаментальні розв'язки для рівнянь, у які включена сила Попова-Ері-Релея. Зазначена сила по своїй фізичній суті є силою дисипативною, тобто, силою опору, що приводить до дисипації енергії, що відбито й у структурі розв'язків (Д2.26), (Д2.28), (Д2.31) куди увійшов співмножник $e^{\gamma(t-\tau)}$, що відповідає додатковому загасанню в системі.

Нарешті, хотілося б підкреслити винятково простий вид отриманих розв'язків (Д2.26), (Д2.28), (Д2.31), що простіше відповідних розв'язків, побудованих у монографії [56], хоча початкові системи рівнянь у даному випадку складніші.

ДОДАТОК 3

Течії Пуазейля

Д3.1 Про один випадок течії Пуазейля

Задачі про течію в'язкої рідини навіть у найпростішому випадку ламінарної течії нестисливої рідини, як правило, не допускають ні аналітичного розв'язку, ні скільки-небудь істотних спрощень, що дозволяють без зусиль розв'язувати задачу чисельно. До рідкісних виключень з цього правила відноситься течія Пуазейля – ламінарна течія в'язкої рідини в каналі сталого поперечного перерізу. У найпростішому випадку круглої труби задача про течію Пуазейля має елементарний аналітичний розв'язок. У загальному ж випадку профіль швидкості в поперечному перерізі каналу, в якому відбувається течія Пуазейля, описується задачею Діріхле для рівняння Пуассона з константою в правій частині. Зрозуміло, що остання крайова задача не викликає яких-небудь виняткових обчислювальних труднощів. Більш того, простота обраної математичної моделі дозволяє застосувати для її розрахунку метод граничних елементів, завдяки чому вдається істотно просунути в іншій проблемі, яка, як правило, викликає обчислювальні труднощі, а саме: вирішення задач в областях складної геометричної форми. Під складною геометричною формою в даному випадку мається на увазі не тільки складний поперечний переріз каналу, але і наявність у каналі практично будь-якого числа циліндричних об'єктів довільного поперечного перерізу.

Традиційно задача про течію Пуазейля не виходила за рамки описаних вище формулювань, однак останнім часом в різного роду прикладних областях все частіше зустрічається необхідність врахувати поздовжній рух циліндричних об'єктів, розташованих в каналі паралельно стінкам останнього. Як буде показано нижче, урахування такого роду рухів можна без труднощів здійснити шляхом очевидної і елементарної модифікації крайових умов згаданої вище задачі Діріхле. Разом з тим, простота і

очевидність зміни математичної моделі течії, в певній мірі, камуфлюють значне ускладнення фізики задачі; дійсно, швидкість руху кожного з внутрішніх циліндричних об'єктів виступає додатковим визначальним параметром структури течії, що автоматично робить задачу багатопараметричною зі всіма складностями аналізу, що витікають звідси. Крім того, увагу дослідників нерідко привертає процес перенесення субстанції течією Пуазейля. Не можна сказати, що ця задача є принципово новою, скоріше навпаки. В теорії тепломасообміну добре відома задача про стале температурне поле течії Пуазейля в трубі, яка отримала назву задачі Герца. Однак, значні розширення форм поперечних перерізів каналів, різноманітність рідинних середовищ, нарешті, згадані вище поздовжні рухи внутрішніх циліндричних об'єктів, яким присвячена дана робота, змушують сформулювати новий, більш загальний погляд на течію Пуазейля не тільки як на спосіб транспортування рідини в трубах при малих та помірних витратах, відповідних ламинарному режиму течії, але і як на механізм транспортування бажаних і небажаних домішок.

Вищевикладені обставини служать підставою для перегляду трактування течії Пуазейля в сучасній гідромеханіці, змушуючи розглядати її як об'єкт чисельного, а не аналітичного аналізу, пов'язаний з моделюванням значного числа специфічних фізичних ефектів.

Навіть у каналах довільного, багатозв'язного, але сталого по довжині поперечного перерізу математична модель течії Пуазейля виявляється настільки проста, що допускає досить ефективне чисельне знаходження розв'язку. Дана обставина стимулювала останнім часом безліч спроб узагальнити течію Пуазейля, і дана робота цілком відповідає цій тенденції. Більшість подібних узагальнень відносять до течій Куетта-Пуазейля, втім, цей термін видається не зовсім вдалим, оскільки вносить термінологічну плутанину. Тому тут і далі будемо використовувати термін узагальнена течія Пуазейля. Поява в задачі, принаймні, ще одного додаткового керуючого параметра (пов'язаного з поздовжнім рухом внутрішнього співнаправленого

циліндра) істотно розширює спектр гідродинамічних ефектів, котрі досліджуються, що представляє незаперечний інтерес як з теоретичної, так і з практичної точок зору.

Традиційно процесам переносу течією Пуазейля не приділяли багато уваги, хоча, як зазначалося вище, задача ця добре відома і актуальна. Дійсно, в переважній більшості трубних течій рух рідини відбувається в турбулентному режимі, тобто, моделлю течії Пуазейля не описується, а саме, течія Пуазейля для таких застосувань може служити не більше, ніж модельною задачею. Правда, в останні десятиліття у зв'язку з тенденцією мініатюризації техніки, особливо в системах електроніки та мікроелектроніки, течія Пуазейля зустрічається все частіше, але, як видно з назв областей застосування, там течія Пуазейля не може відігравати визначальну роль. Однак, розглянута в даній статті узагальнена течія Пуазейля, згідно з якою, як буде показано нижче, рідина в каналі може рухатися в різні сторони, ставить питання про процеси переносу не тільки більш загальним чином, але і з абсолютно іншої точки зору, відкриваючи широкий спектр раніше не досліджених гідродинамічних ефектів. Скільки-небудь детальне вивчення специфічних ефектів переносу в узагальненій течії Пуазейля далеко виходить за рамки цієї роботи, оскільки вимагає розробки спеціалізованого обчислювального інструментарію і є очевидною тематикою подальших досліджень авторів. Настільки широкий спектр гідродинамічних ефектів, який відкриває розглянуте узагальнення моделі течії Пуазейля, не передбачає можливості їх практичного використання, оскільки вони поки ще не зовсім ясні і заслуговують спеціальних досліджень, також далеко відстоять від цілей цієї роботи і застосованих у ній методик дослідження, однак результати проведеного дослідження неминуче стануть теоретичними основами та прикладним інструментарієм для розробки зазначених систем.

Як і раніше незрозумілим залишається питання про стійкість течії Пуазейля. Як відомо, при зростанні числа Рейнольдса до деякого, що визначається експериментально, значення, ламінарна течія в трубі (каналі),

окремим випадком якого є течія Пуазейля, втрачає стійкість, внаслідок чого виникає перехідний режим, а при подальшому зростанні числа Рейнольдса перехідний режим змінюється турбулентним. Незважаючи на безпрецедентні за розмахом дослідження, механізм втрати стійкості при виникненні турбулентності так і залишився нез'ясованим досі. У розглянутому окремому випадку питання має бути поставлене дещо інакше: як форма каналу і додатковий рух циліндричних об'єктів впливають на втрату стійкості течії в каналі. Зрозуміло, питання такої складності і масштабності не може бути вирішене в обмежених рамках цієї роботи, однак автори сподіваються, що результати цієї роботи будуть корисні при проведенні досліджень у даному напрямку.

Задача про течію Пуазейля в традиційній постановці докладно описана як в класичних книгах по гідромеханіці [233, 234, 411], так і в спеціалізованих монографіях і статтях [412–416]. Більш повний відповідний аналіз висвітлення питань, пов'язаних з течією Пуазейля, але в рамках так само публікацій [233, 234, 411–416], наведено у попередній роботі авторів [18]. Тут же відзначимо лише, що розглянута в даній роботі узагальнена течія Пуазейля, пов'язана з поздовжнім рухом в каналі циліндричних об'єктів, раніше в літературі, присвяченій течіям Пуазейля, не зустрічалось. У цілому ця робота є логічним продовженням та узагальненням роботи [18]. Зокрема, далі буде застосовано обчислювальний інструментарій, описаний у статті [18] і заснований на класичних алгоритмах методу граничних елементів [287, 288] з використанням прийомів, запропонованих у попередніх роботах авторів цієї статті [331, 334, 348, 349, 356, 365]. Однак, позиціонування цього дослідження принципово відрізняється від роботи [18]. Якщо остання розвивала ідею, висловлену в статті [392], про доцільність використання методу граничних елементів для розв'язання лінійних крайових задач в областях складної геометричної форми, то дана робота, формально залишаючись у тому ж класі задач, спрямована на чисельне моделювання

специфічних гідродинамічних ефектів, властивих даній узагальненій течії Пуазейля.

Грунтуючись на вищевикладеному, мету даного дослідження можна сформулювати наступним чином: узагальнення класичної математичної моделі течії Пуазейля і вивчення особливостей таких течій шляхом аналітичного аналізу окремих випадків геометрії області та чисельного експерименту.

Оскільки дана робота є природним продовженням статті [18], представляється доцільним використовувати ті ж позначення, що і в роботі [18], а математичну постановку задачі провести коротко, дотримуючись того ж джерела, детально зупиняючись тільки на розходженнях у постановках; те ж саме має місце і для методу розв'язання задачі.

Отже, введемо в каналі, де відбувається течія Пуазейля, декартову ортогональну систему координат (x, y, z) , направивши вісь Oz вздовж твірної каналу, а осі Ox і Oy в площині його поперечного перерізу. Позначимо поздовжню швидкість рідини через w , а тиск через p . Тоді

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (Д3.1)$$

де μ – динамічна в'язкість рідини.

При цьому в перерізі каналу

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (Д3.2)$$

і

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}, \quad (Д3.3)$$

оскільки перетин каналу не змінюється по довжині. На відміну від роботи [18] введемо зовнішній контур перерізу каналу Γ_{out} і внутрішні контури перерізу Γ_i , тоді загальна межа течії Γ в кожному із поперечних перерізів каналу

$$\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i \cup \Gamma_{\text{out}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{Д3.4})$$

Вважаємо, що

$$\Gamma_{\text{out}} \cap \Gamma_i = \emptyset, \quad i = \overline{1, N}; \quad (\text{Д3.5})$$

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad \forall i, j < N, \quad i \neq j. \quad (\text{Д3.6})$$

Крайові умови:

$$w|_{\Gamma_{\text{out}}} = 0, \quad (\text{Д3.7})$$

$$w|_{\Gamma_i} = U_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (\text{Д3.8})$$

де U_i – відома швидкість поздовжнього руху внутрішніх контурів, що містяться в каналі.

На кожен з контурів діє сила

$$F_{\text{out}} = \mu \int_{\Gamma_{\text{out}}} \frac{\partial w}{\partial n} dS, \quad F_i = \mu \int_{\Gamma_i} \frac{\partial w}{\partial n} dS, \quad (\text{Д3.9})$$

але оскільки $\frac{\partial w}{\partial \tau} = 0$ (де τ – час), то

$$\frac{\partial p}{\partial z} = F_{\text{out}} - \sum_{i=1}^N F_i, \quad (\text{ДЗ.10})$$

оскільки сили, що діють на рідину, врівноважені.

Таким чином, основною відмінністю наведеної вище задачі, порівняно з формулюванням, даним в роботі [18], є крайові умови (ДЗ.7). Оскільки в рівняння (ДЗ.1) входить величина μ , яка досить мала, то слід очікувати, що поздовжня швидкість буде істотно залежати від $\frac{\partial p}{\partial z}$. Нульова швидкість у крайовій умові (ДЗ.6) не є принциповим моментом, однак у практичних застосуваннях такий рух важко собі уявити.

Розглянемо течію між двома співвісними циліндрами радіусів R_1 (зовнішній циліндр) і R_2 (внутрішній циліндр). Вважаємо, що зовнішній циліндр нерухомий, а внутрішній рухається зі швидкістю U (зі зрозумілих причин тут немає ніякої необхідності приписувати швидкості якийсь індекс). В силу очевидної симетрії рівняння (ДЗ.1) прийме вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{ДЗ.11})$$

і крайові умови будуть:

$$w(r = R_1) = 0, \quad (\text{ДЗ.12})$$

$$w(r = R_2) = U. \quad (\text{ДЗ.13})$$

Очевидно, що крайова задача для звичайного диференціального рівняння (Д3.11)–(Д3.13) легко інтегрується в квадратурах. Дійсно, перший інтеграл рівняння (Д3.11) має вигляд

$$w = \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + c_1 \ln r + c_2, \quad (\text{Д3.14})$$

де, підставляючи крайові умови, отримаємо значення невідомих сталих:

$$c_1 = \frac{U - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (\text{Д3.15})$$

$$c_2 = -\frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{U - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln R_1.$$

Очевидно, що якщо швидкість течії, викликаной перепадом тиску $\frac{\partial p}{\partial z}$, і швидкість U протилежно спрямовані, то обов'язково знайдеться така координата r_0 , що

$$w(r_0) = 0. \quad (\text{Д3.16})$$

Остання умова означає, що одна з точок гальмування змістилася всередину каналу, а друга залишилася на місці $r = R_1$. Знайдемо витрату рідини через перетин розглянутого каналу, який позначимо D :

$$Q = \iint_D w dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} w r dr d\varphi = 2\pi \int_{R_2}^{R_1} w r dr, \quad (Д3.17)$$

з урахуванням залежності (Д3.14)

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_1^4 - R_2^4) + c_1 \left(\frac{R_1^2}{2} \left(\ln R_1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_2^2}{2} \left(\ln R_2 - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{c_2}{2} (R_1^2 - R_2^2) \quad (Д3.188)$$

Для розглянутого вище випадку різноспрямованих течій, викликаних перепадом тиску і рухом внутрішнього циліндра, можна знайти такий режим, що $Q = 0$. У цьому випадку при заданій геометрії (радіусах R_1 і R_2) рівняння (Д3.18) можна розглядати як функціональне співвідношення між U і $\frac{\partial p}{\partial z}$. Режим $Q = 0$ потенційно представляє інтерес в різного роду застосуваннях, хоча авторам на сьогоднішній день подібні спроби не відомі. Більш того, при будь-якій заданій витраті Q_d з (Д3.18) можна отримати залежність

$$U = f\left(\frac{\partial p}{\partial z}, Q_d\right), \quad (Д3.19)$$

чи обернену до неї

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(U, Q_d). \quad (Д3.20)$$

Насправді визначення функцій f і f' не складає жодних труднощів, оскільки, з урахуванням явного вигляду (Д3.18) і представлення констант c_1 і c_2 не важко побачити, що $\frac{\partial p}{\partial z}$ і U входять в (Д3.18) лінійно, тобто, f і f' – лінійні залежності.

Явний вираз (ДЗ.14) дозволяє досить просто визначити положення максимуму модуля швидкості в потоці (в принципі їх може бути два при наявності різноспрямованого руху), який може розташовуватися як всередині потоку, так і на поверхні внутрішнього циліндра. Наявність та вплив екстремумів швидкості, так само як і нулів швидкості, має істотне значення для процесів переносу в узагальненій течії Пуазейля, і навіть більше того, якщо має місце перенесення твердих частинок, то сила Магнуса, діюча на ці частинки в здвиговому потоці, залежить від розташування частинки по відношенню до екстремуму швидкості і від градієнта швидкості в поперечному перерізі. Однак, останні порушені питання далеко виходять за рамки цілей цієї роботи, скоріше, можуть бути віднесені до тематики подальших перспективних досліджень.

Важливим окремим випадком розглянутої задачі є $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ (випадок $U = 0$ настільки тривіальний і добре вивчений, скажімо, в теорії теплообмінників, що викладати його тут просто нераціонально). У розглянутому випадку рух рідини в каналі кільцевої течії викликається тільки поздовжнім рухом внутрішнього циліндра. Кількісні співвідношення для цього випадку випливають із співвідношень (ДЗ.14), (ДЗ.18) прямою підстановкою умови $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ і досить елементарні.

На підставі вищевикладеного можна зробити висновок, що параметри $\frac{\partial p}{\partial z}$ і U при фіксованих геометричних розмірах R_1 і R_2 можна трактувати як керуючі параметри течії Пуазейля – з урахуванням отриманих явних залежностей поля швидкостей (ДЗ.14) і витрати (ДЗ.18) від них.

Хоча задача щодо течії Пуазейля в каналі кільцевого поперечного перерізу, взагалі кажучи, не нова, і в тій чи іншій формі згадується майже у всіх роботах [233, 234, 411–416], постановка (ДЗ.11)–(ДЗ.13) і наступний за

нею аналіз по своїй загальності не мають аналогів у зазначених роботах і містять безсумнівні елементи наукової новизни.

Для чисельного розв'язання поставленої задачі (Д3.1), (Д3.6), (Д3.7) було використано метод граничних елементів [287, 288] у алгоритмічній реалізації, запропонованій в роботі [18]. Запропонований в [18] підхід було реалізовано в складі комплексу програм, розробленого в попередніх дослідженнях авторів і описаного у статтях [411–416]. Тому далі обмежимося лише основними розрахунковими формулами, так як їх обґрунтування і пояснення наведено у роботі [18]. Щоб уникнути різночитань збережемо позначення зі статті [18]. Для функції

$$u = w - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} u_0, \quad (\text{Д3.21})$$

де

$$u_0(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4}, \quad (\text{Д3.22})$$

інтегральний аналог рівняння (Д3.1) має вигляд

$$\begin{aligned} & c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \\ & = \int_{\Gamma} g(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \end{aligned} \quad (\text{Д3.23})$$

де Γ – межа області течії в перерізі каналу D , що визначається співвідношенням (Д3.3);

$$c(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in D; \\ 1/2, & (x_0, y_0) \in \Gamma; \\ 0, & (x_0, y_0) \notin D, (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases} \quad (\text{ДЗ.24})$$

g – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа у плоскому випадку

$$g(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (\text{ДЗ.25})$$

При $(x_0, y_0) \in \Gamma$ співвідношення (ДЗ.23) являє собою сингулярне граничне інтегральне рівняння, подальша дискретизація якого проводилась традиційним способом [287, 288], що було зроблено в роботі [18] для методу граничних елементів нульового порядку з апроксимацією межі області розв’язку прямолінійними граничними елементами. Отримана наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c(x_{0m}, y_{0m})u(x_{0m}, y_{0m}) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{k \Gamma_k} \int g(x, x_{0m}, y, y_{0m}) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial g(x, x_{0m}, y, y_{0m})}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (\text{ДЗ.26})$$

де K – число граничних елементів.

Останній інтеграл у правій частині рівняння (ДЗ.26) не було апроксимовано згідно з крайовими умовами (ДЗ.6), (ДЗ.7), у відповідності до яких на межі u є відомою функцією. У роботі [18] наведено також наступні співвідношення для точок, що лежать всередині області течії:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \\ &- \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial^2 g(x, x_0, y, y_0)}{\partial x_0 \partial n} dS(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y_0}(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \\ &- \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial^2 g(x, x_0, y, y_0)}{\partial y_0 \partial n} dS(x, y), \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.27})$$

що дозволяють (з урахуванням співвідношення (ДЗ.21)) якісно дослідити поле швидкостей у перерізі каналу, визначити точки екстремумів швидкості та криву, на якій швидкість дорівнює нулю. Всі ці операції виконані на основі градієнтного алгоритму. Крім того, в роботі [18] дана досить проста і зручна формула для розрахунку витрати рідини у розглянутій течії.

Не вдаючись у деталі аналізу поля швидкостей розглянутої течії, які детально наведено в роботі [18], відзначимо лише, що описаний вище алгоритм чисельного розрахунку дозволяє отримувати для поля течії такий же обсяг інформації, як і наведений вище аналітичний розв'язок задачі, з можливим розглядом всіх тих окремих випадків, наприклад, $Q = Q_d$ або $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ і таке інше.

До основних результатів цього підпункту звіту слід віднести: постановку задачі про течію Пуазейля в каналі багатозв'язного поперечного перерізу з поздовжньо рухомими циліндричними об'єктами (ДЗ.1)–(ДЗ.9); побудова аналітичного розв'язку для окремого випадку співвісних циліндрів, внутрішній з яких рухливий; якісний аналіз отриманого розв'язку; застосування до розглянутої задачі в загальному випадку раніше розробленого алгоритму методу граничних елементів; кількісний аналіз отриманих чисельних розв'язків. При цьому проведені в ході дослідження чисельні розрахунки носили, скоріше ілюстративний характер, ніж містили принципові результати аналізу системи, що була предметом вивчення.

Основним теоретичним і потенційно практичним результатом роботи є доказова демонстрація можливості переходу від однопараметричної течії Пуазейля в каналі заданої геометрії (керуючий параметр – перепад тиску) до багатопараметричної узагальненої течії Пуазейля в каналі тієї ж геометрії (додаткові керуючі параметри – швидкості поздовжнього руху циліндричних об'єктів, що перебувають у каналі). При цьому керуючі параметри входять як в аналітичні, так і в чисельні представлення розв'язків лінійним чином, що значно полегшує вивчення подібних систем.

Можливість керування кількісними та якісними характеристиками встановленої ламінарної течії в каналі багатозв'язного поперечного перерізу, що включає скінченне число непересічних циліндричних об'єктів, твірні яких паралельні стінкам каналу і які можуть рухатися в поздовжньому напрямку, відноситься до головних висновків цієї роботи.

Паралельно в даній роботі було ще раз підтверджено сформульовану у роботі [18] тезу про ефективність застосування методу граничних елементів для розрахунку течії Пуазейля.

З практичної точки зору, інтерес викликає не тільки можливість управління витратою розглянутої узагальненої течії Пуазейля, але і управління процесами міграції в такій течії. Взагалі кажучи, в світлі результатів цієї роботи представляється, що процеси переносу течією Пуазейля не настільки тривіальні, як це прийнято було вважати при вивченні традиційних течій Пуазейля.

Включення розгляду течії Пуазейля та її узагальнення, наведеного вище, до даного звіту пояснюється простими обставинами: при кипінні криогенного палива у паливному баку внаслідок теплообміну з навколишнім середовищем формується тонкий шар, насичений паровими бульбашками, що зазнає флотації під дією сил Архімеда. Така течія якісно подібна течії Пуазейля у каналі складного поперечного перерізу. Тобто, описаний вище алгоритм цілком підходить для чисельного розрахунку концентраційної вільної конвекції у паливному баку з криогенним паливом.

ДОДАТОК 4

Повільні фазові переходи

Д4.1 Асимптотичні математичні моделі повільних фазових переходів

Четвертий розділ роботи присвячено застосуванню методів обчислювальної теорії потенціалу до асимптотичних задач тепломасообміну. Перший підрозділ цього розділу містить асимптотичну математичну модель повільного фазового переходу.

Розглянемо задачу Стефана у класичному вигляді. Нехай перша фаза займає область D_1 , а друга D_2 , межа між якими є межею фазового переходу $\Gamma_{\text{ф.п.}}$ і знаходиться при температурі фазового переходу $T_{\text{ф.п.}}$. Нехай також області D_1 і D_2 обмежені скінченими або нескінченними кривими Γ_1 і Γ_2 , відповідно. Заради простоти обмежимо розгляд випадком крайових умов першого і другого роду на зовнішніх межах Γ_1 і Γ_2 . Тоді, припускаючи теплофізичні властивості фаз сталими, розподіл температур у фазах описується рівняннями (у обезрозміреному вигляді, обезрозмірювання проводилося традиційним шляхом):

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T_{\text{ф.п.}}}{T_n - T_{\text{ф.п.}}}, \quad (\text{Д4.1})$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo_1} = \Delta^* \theta_1, \quad (\text{Д4.2})$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo_2} = \Delta^* \theta_2, \quad (\text{Д4.3})$$

де
$$Fo_1 = \frac{\tau a_1}{L^2}, \quad (\text{Д4.4})$$

$$Fo_2 = \frac{\tau a_2}{L^2}, \quad (Д4.5)$$

зірочка “*” в операторі Лапласа означає диференціювання по безрозмірених координатах $X^* = x/L$. Надалі зірочку будемо опускати. Безрозмірені аналоги крайових і початкових умов мають вигляд:

$$\theta_1|_{\Gamma_1} = \theta_{1s}, \quad (Д4.6)$$

$$\theta_2|_{\Gamma_2} = \theta_{2s}, \quad (Д4.7)$$

$$\theta_1|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = 0, \quad (Д4.8)$$

$$\theta_2|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = 0, \quad (Д4.9)$$

$$\theta_1(0, x) = 0, \quad (Д4.10)$$

$$\theta_2(0, x) = 0. \quad (Д4.11)$$

Умова Стефана

$$V_{\text{ф.п.}} = \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad (Д4.12)$$

в останньому виразі $\frac{\partial n}{\partial \tau}$ означає швидкість просування межі фазового

переходу в напрямку по нормалі до неї. Тоді при безрозмірюванні $n^* = n/L$:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} - f_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = \frac{\partial n^*}{\partial \tau_{st}}, \quad (Д4.13)$$

де $f_\lambda = \lambda_2/\lambda_1$, – безрозмірний параметр, що характеризує відношення коефіцієнтів теплопровідності фаз, безрозмірний час:

$$\tau_{st} = \frac{\tau \lambda_1 (T_n - T_{\text{ф.п.}})}{L^2 \sigma \rho}. \quad (Д4.14)$$

Таким чином, у приведеній безрозмірній постановці присутні три безрозмірних часи $F_{o1}, F_{o2}, \tau_{st}$, що ускладнює фізичне трактування результатів. Тому доцільно перейти до одного безрозмірного часу. За такий час використаємо τ_{st} , оскільки основний інтерес у розглянутій задачі викликає саме просування межі розподілу фаз, яке описується умовою Стефана, при обезрозмірюванні якої і з'явився безрозмірний час τ_{st} . Крім того, як правило, τ_{st} – «найповільніший» з безрозмірних часів. Тоді рівняння (Д4.2) зміниться на

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_{st}} St = \Delta \theta_1, \quad (\text{Д4.15})$$

де St – число Стефана, визначене як:

$$St = \frac{\tau_{st}}{F_{o1}} = \frac{\tau \lambda_1 (T_n - T_{\text{ф.п.}})}{L^2 \sigma \rho} = \frac{\lambda_1 (T_n - T_{\text{ф.п.}})}{a_1 \sigma \rho} = \frac{C(T_n - T_{\text{ф.п.}})}{\sigma}, \quad (\text{Д4.16})$$

а рівняння (Д4.3) перетвориться таким чином:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau_{st}} f_a St = \Delta \theta_2, \quad (\text{Д4.17})$$

$$\text{де } f_a = \frac{F_{o1}}{F_{o2}} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Фізичний сенс числа Стефана досить простий: число Стефана дорівнює відношенню кількості тепла, витраченого на нагрівання (охолодження), до кількості тепла, витраченого на фазовий перехід. Оскільки теплота фазового переходу σ у більшості випадків значна величина, то, як правило, $St < 1$.

Однофазна задача Стефана відповідає випадку, коли одна з фаз знаходиться при температурі фазового переходу і зазнає фазового переходу за рахунок теплопровідності другої фази. Зрозуміло, що в цьому випадку

фаза, що знаходиться при температурі фазового переходу, повинна бути виключена з розгляду. Таким чином:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_{st}} St = \Delta \theta, \quad (Д4.18)$$

$$\theta|_{\Gamma_1} = \theta_s, \quad (Д4.19)$$

$$\theta|_{\Gamma_{ф.п.}} = 0, \quad (Д4.20)$$

$$\theta(0, x) = 0, \quad (Д4.21)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial n}{\partial \tau_{st}}. \quad (Д4.22)$$

Розглянута вище задача Стефана є нелінійною задачею, внаслідок складної залежності поля температур від форми межі фазового переходу, яка визначається умовою Стефана. Хоча проблема існування і єдності розв'язку задачі Стефана ще цілком не вирішена, очевидна неперервна залежність розв'язку задачі Стефана від числа Стефана. У цьому легко переконатися, якщо записати інтегральне формулювання поля температур, а також дану роботу нижче), крім того з інтегрального формулювання температур видно, що температура всередині області може бути яку завгодно велику кількість раз продиференційована по числу Стефана. Тобто формальне поле температур може бути представлено у вигляді ряду по числу Стефана, що для випадку $St < 1$ буде збігатись, оскільки похідні від температури по числу Стефана існують і обмежені, і для повільних фазових переходів, коли $St \ll 1$, даний ряд буде збігатись швидко. Ґрунтуючись на вищесказаному, будемо знаходити температури у вигляді:

$$\theta_1 = \theta_1^0(x, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_1^k(x, \tau), \quad (Д4.23)$$

$$\theta_2 = \theta_2^0(x, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_2^k(x, \tau), \quad (Д4.24)$$

Тобто задача зводиться до знаходження послідовностей функцій $\theta_1^0, \dots, \theta_1^k, \dots; \theta_2^0, \dots, \theta_2^k, \dots$; Підставив розкладання (Д4.23), (Д4.24) у рівняння (Д4.2), (Д4.3) та дорівнюючи члени при однакових ступенях числа Стефана, одержимо:

$$\Delta \theta_1^0 = 0, \quad (Д4.25)$$

$$\Delta \theta_1^1 = \frac{\partial \theta_1^0}{\partial \tau}, \quad (Д4.26)$$

.....

$$\Delta \theta_1^i = \frac{\partial \theta_1^{i-1}}{\partial \tau}, \quad (Д4.27)$$

.....

$$\Delta \theta_2^0 = 0, \quad (Д4.28)$$

$$\Delta \theta_2^1 = f_a \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \tau}, \quad (Д4.29)$$

.....

$$\Delta \theta_2^i = f_a \frac{\partial \theta_2^{i-1}}{\partial \tau}, \quad (Д4.30)$$

.....

Крайові умови для рівнянь (Д4.25) - (Д4.30):

$$\theta_1^0 \Big|_{\Gamma_1} = \theta_{1s}, \quad (Д4.31)$$

$$\theta_1^0 \Big|_{\Gamma_{\Phi, \Pi}} = 0, \quad (Д4.32)$$

.....

$$\theta_1^i \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (Д4.33)$$

$$\theta_1^i \Big|_{\Gamma_{\Phi, \Pi}} = 0, \quad (Д4.34)$$

.....

$$\theta_2^0 \Big|_{\Gamma_2} = \theta_{2s}, \quad (Д4.35)$$

$$\theta_2^0 \Big|_{\Gamma_{\Phi, \Pi}} = 0, \quad (Д4.35)$$

.....

$$\theta_2^i \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (Д4.37)$$

$$\theta_2^i \Big|_{\Gamma_{\Phi, \Pi}} = 0. \quad (Д4.38)$$

.....

Аналогчно для умови Стефана на основі розкладу правої частини умови Стефана в ряд по числах Стефана для підлягаючих визначення функцій η^k :

$$\frac{\partial \theta_1^0}{\partial \mathbf{n}} - f_\lambda \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \eta^0}{\partial \tau}, \quad (Д4.39)$$

.....

$$\frac{\partial \theta_1^i}{\partial \mathbf{n}} - f_\lambda \frac{\partial \theta_2^i}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \tau}, \quad (Д4.40)$$

.....

Теорема 1. Якщо крайові і початкові умови в крайових задачах (Д4.25) - (Д4.27), (Д4.31) - (Д4.34) і (Д4.28) - (Д4.30), (Д4.35) - (Д4.38) такі, що їхні розв'язки можна яку завгодно кількість раз диференціювати за часом і похідні ці обмежені, то ряди (Д4.23), (Д4.24) відповідно збігаються при будь-якому числі Стефана, меншому за 1 ($St < 1$), а порядок залишкового члена при обрізанні ряду після j -го члена є $O(St^{j+1}M_{j+1})$, де $M_{j+1} = \max_{j+1 \leq m < \infty} \theta^m$.

Доказ теореми 8.1 очевидний і ґрунтується на побудові мажорантної послідовності в результаті заміни функцій θ^i на M_1 . Така послідовність являється геометричною прогресією з коефіцієнтом St , що в силу теореми менше за 1, тобто ряд збігається.

Однофазна задача Стефана

$$\Delta \theta^0 = 0, \quad (Д4.41)$$

$$\Delta \theta^1 = \frac{\partial \theta^0}{\partial \tau}, \quad (Д4.42)$$

.....

$$\Delta \theta^i = \frac{\partial \theta^{i-1}}{\partial \tau}, \quad (Д4.43)$$

.....

крайові умови:

$$\theta^0|_{\Gamma_1} = \theta_s, \quad (Д4.44)$$

$$\theta^0|_{\Gamma_{\text{ф.п.}}} = 0, \quad (Д4.45)$$

.....

$$\theta^i|_{\Gamma_1} = 0, \quad (Д4.46)$$

$$\theta^i \Big|_{\Gamma_{\Phi, \Pi}} = 0, \quad (\text{Д4.47})$$

.....

умова Стефана:

$$\frac{\partial \theta^0}{\partial n} = \frac{\partial \eta^0}{\partial \tau}, \quad (\text{Д4.48})$$

.....

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial n} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \tau}. \quad (\text{Д4.49})$$

Повільні фазові переходи в плоскому і просторовому випадках: оператор Лапласа Δ береться в декартовій ортогональній системі координат і має вигляд у плоскому випадку

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (\text{Д4.50})$$

і в просторовому випадку

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{Д4.51})$$

Перетворимо рівняння (Д4.25), (Д4.28) у граничні інтегральні рівняння

$$C(x_0)\theta_1^0(x_0) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_1^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \theta_1^0 \frac{\partial \varphi_0(x, x_0)}{\partial n} ds, \quad (\text{Д4.52})$$

$$C(x_0)\theta_2^0(x_0) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_2^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \theta_2^0 \frac{\partial \varphi_0(x, x_0)}{\partial n} ds. \quad (\text{Д4.53})$$

Потім запишемо інтегральні аналоги (Д4.27), (Д4.30)

$$\begin{aligned} C(x_0)\theta_1^i(x_0) = & \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_1^i}{\partial n} ds - \\ & - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{\Phi, \Pi}} \theta_1^i \frac{\partial \varphi_0(x, x_0)}{\partial n} ds + \int_{D_1} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_1^{i-1}}{\partial \tau} ds, \end{aligned} \quad (\text{Д4.54})$$

$$\begin{aligned}
C(x_0)\theta_2^i(x_0) = & \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{ф.п.}}} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_2^i}{\partial n} ds - \\
& - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{ф.п.}}} \theta_2^i \frac{\partial \varphi_0(x, x_0)}{\partial n} ds + \int_{D_2} \varphi_0(x, x_0) \frac{\partial \theta_2^{i-1}}{\partial \tau} ds,
\end{aligned} \tag{Д4.55}$$

де φ_0 – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, визначений в плоскому випадку як

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right), \tag{Д4.56}$$

і в просторовому випадку

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}. \tag{Д4.57}$$

Традиційна умова Стефана, доповнена завданням початкового положення межі фазового переходу, розглядається як задача Коші для звичайного диференціального рівняння, що дозволяє визначити рух межі фазового переходу. Однак у даному випадку аналітичне розв'язання цієї задачі Коші неможливо, тому її приходиться розв'язувати чисельно. Це було зроблено за схемою Ейлера

$$\eta^{i(k+1)} = \eta^{ik} + \Delta\tau \left(\left(\frac{\partial \theta_1^0}{\partial n} \right)_i^k - f_\lambda \left(\frac{\partial \theta_2^0}{\partial n} \right)_i^k \right), \tag{Д4.58}$$

.....

де індекс k – указує на номер кроку за часом; $\Delta\tau$ – величина кроку за часом.

Якщо зроблена дискретизація граничних інтегральних рівнянь (Д4.52) - (Д4.55) відповідно до одному з алгоритмів методу граничних елементів, то, якщо відоме положення межі фазового переходу в момент часу τ^k , для визначення положення межі фазового переходу в момент часу τ^{k+1} необхідно для всіх точок, що визначають положення і форму граничних елементів, застосувати перерахування положення межі фазового переходу, удержавши для цього потрібну кількість співвідношень (Д4.58).

ДОДАТОК 5

Стан палива у паливному баку під час тривалого польоту

Д5.1 Математична моделі повільних фазових переходів

Серед задач теплової міжфазової взаємодії варто виділити задачі з невідомими сталими межами розділу фаз, розв'язки яких відповідають розв'язкам задач про фазові переходи для нескінченно великого часу. Подібні задачі виникають при дослідженні, наприклад, випадку одночасного існування трьох основних фаз однієї речовини – твердої, рідинної і газоподібної – у деякому замкнутому об'ємі. Така ситуація має місце, наприклад, у паливному баці космічного апарату під час тривалого польоту, коли одна сторона бака інтенсивно нагрівається сонячними променями, а тіньова сторона остигає за рахунок теплового випромінювання в космічній простір.

Припустимо, що усі фазові переходи відбуваються при постійному тиску, тобто температура фазового переходу не змінюється. Простоти заради обмежимо розгляд плоским випадком. Тоді поля температур у відповідних фазах описуються рівнянням:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{Д5.1})$$

де індекс i означає номер фази і змінюється від 1 до 3 (1 відповідає твердій фазі, 2 – рідкої, 3 – газоподібної).

Також обмежимо розгляд плоским випадком крайових умов першого роду

$$T|_{\Gamma} = T_{\text{вн}}(x, y). \quad (\text{Д5.2})$$

Нехай зовнішня межа тіла складається з трьох частин: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, що визначаються в такий спосіб:

а) Γ_1 – це множина точок зовнішньої межі, де $T_{\text{вн}}(x, y)|_{\Gamma_1} \leq T_{\text{ф.п.1}}$. У силу уведеної вище нумерації $T_{\text{ф.п.1}}$ – це температура фазового переходу між рідкою і твердою фазами;

б) Γ_2 – множина точок зовнішньої межі, де $T_{\text{ф.п.1}} \leq T_{\text{вн}}(x, y)|_{\Gamma_2} \leq T_{\text{ф.п.2}}$, $T_{\text{ф.п.2}}$ – температура фазового переходу між рідкою і газоподібною фазами;

в) Γ_3 – множина точок зовнішньої межі, де $T_{\text{вн}}(x, y) \geq T_{\text{ф.п.2}}$.

На невідомих внутрішніх міжфазових межах $\Gamma_{\text{ф.п.1}}$ і $\Gamma_{\text{ф.п.2}}$ необхідно поставити наступні крайові умови:

$$T_1|_{\Gamma_{\text{ф.п.1}}} = T_{\text{ф.п.1}}, \quad (Д5.3)$$

$$T_2|_{\Gamma_{\text{ф.п.1}}} = T_{\text{ф.п.1}},$$

$$T_2|_{\Gamma_{\text{ф.п.2}}} = T_{\text{ф.п.2}}, \quad (Д5.4)$$

$$T_3|_{\Gamma_{\text{ф.п.2}}} = T_{\text{ф.п.2}},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.1}}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.2}}}, \quad (Д5.5)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.2}}} = \lambda_3 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\text{ф.п.2}}}, \quad (Д5.6)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – відповідні коефіцієнти теплопровідності.

Обезрозміримо задачу (Д5.2)-(Д5.6) у такий спосіб:

$$\Theta_1 = T_1 / (T_{\text{ф.п.2}} - T_{\text{ф.п.1}}),$$

$$\Theta_2 = T_2 / (T_{\text{ф.п.2}} - T_{\text{ф.п.1}}), \quad (Д5.7)$$

$$\Theta_3 = T_3 / (T_{\text{ф.п.2}} - T_{\text{ф.п.1}}),$$

$$x^* = x/L, y^* = y/L, \quad (Д5.8)$$

де L – деякий характерний розмір. Тоді

$$\frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial y^2} = 0. \quad (Д5.9)$$

Отримана система є замкнутою, тому що дві з умов (Д5.3) – (Д5.6) можуть бути використані для визначення положення невідомих меж. Пряме розв'язання сформульованої задачі важко через складну форму зв'язку між положенням межі і температурним полем. Доцільно організувати ітераційний процес визначення положення межі. При організації цього процесу треба на кожному кроці вирішувати задачу (Д5.) із крайовими умовами (Д5.3) – (Д5.4), що дозволяє розглядати визначення поле температур у кожній фазі як незалежну задачу, а ітераційний процес проводити по виконанню умов (Д5.4) – (Д5.5), відповідно. Для чисельного розв'язання розглянутих задач на кожному кроці ітераційного процесу був обраний метод граничних елементів

$$\frac{1}{2} \Theta_i^{(n)} = \int_{\Gamma^{i(n)}} \frac{\partial \Theta_i^{(n)}}{\partial n} P dS - \int_{\Gamma^{i(n)}} \Theta_i^{(n)} \frac{\partial P}{\partial n} dS, \quad (Д5.10)$$

де $\Gamma^{1(n)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_{\text{ф.п.1}}^{(n)}$; $\Gamma^{2(n)} = \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{ф.п.1}}^{(n)} \cup \Gamma_{\text{ф.п.2}}^{(n)}$; $\Gamma^{3(n)} = \Gamma_3 \cup \Gamma_{\text{ф.п.2}}^{(n)}$; n – номер ітерації;

$$P(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

Розіб'ємо межі областей деяким чином на граничні елементи, кількість яких виберемо достатньою для адекватного відображення геометрії областей, апроксимуємо форму граничних елементів відрізками прямих і будемо вважати на кожному із граничних елементів температуру і теплові потоки постійними. Тоді одержимо

$$\frac{1}{2} \Theta_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N_i} \frac{\partial \Theta_{ik}^{(n)}}{\partial n} \int_{\Gamma_k^{i(n)}} P dS - \sum_{k=1}^{N_i} \Theta_{ik}^{(n)} \int_{\Gamma_k^{i(n)}} \frac{\partial P}{\partial n} dS, \quad (Д5.11)$$

де N_i – кількість граничних елементів на i -ой межі області.

Рівняння (Д5.11) являють собою три системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих значень нормальної похідної від температури і можуть бути вирішені стандартними методами рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для визначення положення меж розділу фаз організуємо наступний ітераційний процес:

а) вважаючи, що в області тільки рідина, розв'язується рівняння Лапласа з крайовими умовами першого роду;

б) визначаються пари сусідніх граничних елементів, на одному з яких температура вище температури фазового переходу, а на другому – нижче. Точкою перетину межі фазового переходу з зовнішньою межею області вважається загальна кінцева точка визначених у такий спосіб граничних елементів;

в) з'єднаємо знайдені точки перетину межі розділу фаз із зовнішньою межею області деякими кривими (наприклад, у найпростішому випадку – відрізками прямих) і отримані області приймемо за початкове наближення форми областей відповідних фаз;

г) у кожній з областей методом граничних елементів знаходимо розподіл температури, вирішуючи рівняння із крайовими умовами першого роду на межі розділу фаз і аналогічними крайовими умовами на зовнішній межі;

д) визначимо різницю теплових потоків на кожному граничному елементі на межах розділу фаз;

е) зрушимо кожен граничний елемент пропорційно різниці потоків і нову межу приймемо за межу розділу фаз;

е) для нової форми областей знаходимо розподіл температури аналогічно пункту г);

ж) знаходимо різниці потоків на кожному із граничних елементів, якщо вони не перевищують деякого, заданого значення, що визначає точність ітераційного процесу, тоді задача вважається вирішеною, у протилежному випадку необхідно повторити розрахунки, починаючи з пункту г), до виконання умови пункту ж).

Для перевірки працездатності приведеного вище алгоритму була обрана задача про побудову межі розділу між частинами сегмента двошарової труби (рисунок 4.4). Для цієї задачі відомий аналітичний розв'язок.

Тестова задача полягала в тім, щоб довільним образом збурити межу між шарами і поставити на отриманій межі умову

$$T_1 = T_2 = T_{12},$$

де температура T_{12} відома.

У результаті ітераційного процесу потрібно домогтися збігу розрахункового і справжнього положення меж розділу шарів. Домогтися цього можна мінімізацією різниці потоків на межі розділу. Тобто, вибираючи зрушення межі розділу на кожному кроці ітерації пропорційним різниці потоків, у результаті одержимо виконання умови (Д5.5) з потрібним ступенем точності. При заданій точності ітераційного процесу в 0,01 ітераційний процес сходиться за 40 – 60 ітерацій (у залежності від кількості граничних елементів). При використанні 80 граничних елементів на контур погрішність визначення температури в шарах у порівнянні з аналітичним рішенням (Д5.6) не перевищувала 0,5 %, максимальне відхилення розрахункової форми межі розділу від справжньої не перевищувало 0,3 %.

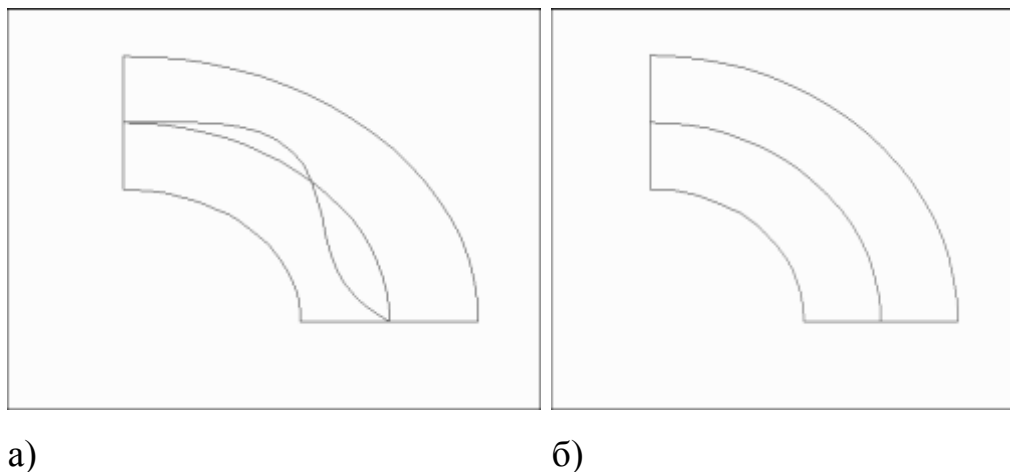


Рисунок 4.4 – Початкова і кінцева конфігурації для тестової задачі визначення невідомої межі розділу: а) – початкова конфігурація; б) – кінцева конфігурація

Розглянемо описаний вище випадок трьох фаз. Як приклад була розглянута область круглої форми, заповнена водою в рідкому, твердому і газоподібному стані при постійному тиску, рівному атмосферному тиску. На

межі області поставлені крайові умови першого роду, тобто розподіл температури за законом

$$T = \frac{(T_{\min} + T_{\max})}{2} + \frac{(T_{\max} - T_{\min})}{2} \cos \varphi,$$

де параметри T_{\max} , T_{\min} означають відповідно максимальну і мінімальну температури на межі, причому перша з них більше температури кипіння, а друга менше температури замерзання).

Можливими поверхневими ефектами на межі розділу рідина - пара зневажаємо. На рисунку 4.5 показані форми областей, зайнятих твердою, рідкою і газоподібною фазами, отримані в результаті чисельного рішення. Слід зазначити повільну збіжність ітераційного процесу в даному випадку. Очевидна опуклість твердої фази (на рисунку ліворуч) і увігнутість газоподібної фази (на рисунку праворуч) пояснюються різницею значень коефіцієнта теплопровідності.

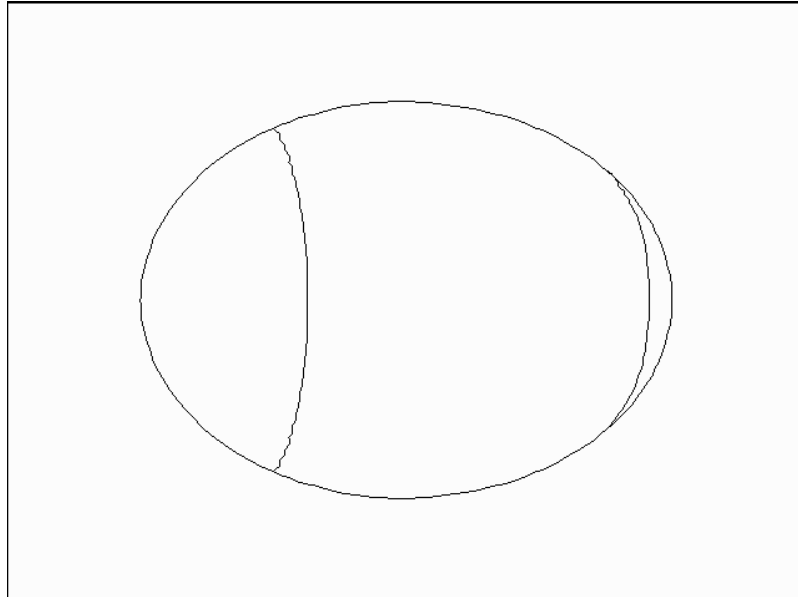


Рисунок 4.5 – Форми областей, зайнятих твердо, рідкою і газоподібною фазами для випадку $T_{\max} = 120^{\circ}\text{C}$, $T_{\min} = -40^{\circ}\text{C}$

Одним з найбільш істотних у прикладному плані механічних ефектів перерозподілу фаз усередині ємності є зсув центра мас системи, що утворилася, від положення центра мас тієї ж ємності, заповненою однорідною фазою. Визначення центра мас, так само як і площі, моментів інерції, маси, системи тіл неправильної геометричної форми являє собою досить складну обчислювальну задачу, зв'язану з обчисленням інтегралів по областях складної форми. Задача може значно ускладнюватися неоднорідністю густини фаз, викликаной тепловим розширенням. У даній роботі був використаний спосіб обчислення зазначених інтегралів за допомогою зведення їх до межового вигляду:

а) обчислення площі складної фігури, границя якої визначена множиною граничних елементів $S = \iint_D dx dy$. Введемо вектор $A = \left\{ \frac{x}{2}; \frac{y}{2} \right\}$, тоді $\operatorname{div} A = 1$,

звідкіля

$$S = \iint_D dx dy = \oint_{\Gamma} A \cdot nds = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left\{ \frac{x}{2} \cdot n_x + \frac{y}{2} \cdot n_y \right\} dS, \quad (Д5.12)$$

де Γ_i – множина граничних елементів;

б) обчислення маси (узятої на одиницю довжини циліндра) $m = \iint_D \rho dx dy$.

У розглянутих задачах густина ρ може значно змінюватися внаслідок теплового розширення, тобто

$$m = \iint_D \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) dx dy = \iint_D \rho_0 (1 + \alpha T_0) dx dy - \rho_0 \alpha \iint_D T dx dy, \quad (Д5.13)$$

де α – визначений експериментально коефіцієнт, якщо тепловим розширенням можна зневажити, то $\alpha = 0$; T_0 – температура, при якій була визначена густина ρ_0 .

Обчислення першого інтеграла в (Д5.13) аналогічно обчисленню інтеграла (Д5.12), обчислення другого інтеграла проведемо за умови $\Delta T = 0$.

Тоді введемо функцію $\varphi = \frac{x^2 + y^2}{4}$, очевидно, що $\Delta \varphi = 1$, звідкіля

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D \rho_0 (1 + \alpha T_0) dx dy - \rho_0 \alpha \iint_D T \Delta \varphi dx dy = \\
&= \rho_0 (1 + \alpha T_0) \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left\{ \frac{x}{2} \cdot n_x + \frac{y}{2} \cdot n_y \right\} ds - \\
&- \rho_0 \alpha \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} T \left(\frac{x}{2} n_x + \frac{y}{2} n_y \right) ds - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{x^2 + y^2}{4} \frac{\partial T}{\partial n} ds \right\};
\end{aligned} \tag{Д5.14}$$

в) обчислення моментів інерції (узятих на одиницю довжини циліндра)

$$J_x = \iint_D x \rho dx dy, \quad J_y = \iint_D y \rho dx dy, \quad \text{введемо функції } \varphi_1 = \frac{x^3}{6}; \varphi_2 = \frac{y^3}{6}, \quad \text{тоді}$$

$$J_x = \iint_D \Delta \varphi_1 \rho dx dy, \quad J_y = \iint_D \Delta \varphi_2 \rho dx dy.$$

Аналогічно попередньому случаю з урахуванням теплового розширення

$$\begin{aligned}
J_x &= \iint_D x \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) dx dy = \rho_0 (1 + \alpha T_0) \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{x^2}{2} n_x ds - \\
&- \rho_0 \alpha \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left(T \frac{x^2}{2} n_x - \frac{x^3}{6} \frac{\partial T}{\partial n} \right) ds,
\end{aligned} \tag{Д5.15}$$

$$\begin{aligned}
J_y &= \iint_D y \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) dx dy = \rho_0 (1 + \alpha T_0) \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{y^2}{2} n_y ds - \\
&- \rho_0 \alpha \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left(T \frac{y^2}{2} n_y - \frac{y^3}{6} \frac{\partial T}{\partial n} \right) ds.
\end{aligned} \tag{Д5.16}$$

г) обчислення координат центра мас

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho dx dy}{\iint_D \rho dx dy}, \tag{Д5.17}$$

$$y_c = \frac{\iint_D y \rho dx dy}{\iint_D \rho dx dy}. \tag{Д5.18}$$

Практичний інтерес представляє застосування до областей, показаних на рисунку 4.5. У таблиці 4.1 приведені абсциси центра мас системи при різних

максимальній і мінімальній температурі (початок системи координат було розташовано у геометричному центрі кола).

Таблиця 4.1 – Абсциси центра мас системи при різній максимальній і мінімальній температурі

T_{\min}	T_{\max}	Безрозмірна абсциса центра мас
-20°C	160°C	$-0,09$
-40°C	140°C	$-0,04$
-20°C	200°C	$-0,17$

Запропонований алгоритм може бути використаний для розрахунку фазових станів палива усередині паливних баків космічних апаратів під час тривалих польотів.

ДОДАТОК 6

Розподіл температури у тонкому шарі

Д6.1 Асимптотична математична модель розподілу температури у тонкому шарі

Запропоновано асимптотичний алгоритм розрахунку розподілу температур і теплових потоків в неасимптотично тонких теплозахисних покриттях. Запропонований алгоритм дозволяє розраховувати температурні поля покриттів разом з аналогічними полями захищеного тіла, модифікуючи крайові умови для останнього, а також враховуючи теплові потоки вздовж теплозахисного шару. Для розрахунку полів температур в захищеному масивному тілі використовувався метод граничних елементів. Ефективність і точність запропонованого підходу підтверджено шляхом порівняння результатів з аналітичними розв'язками тестових задач. Запропонований підхід може бути використано при вирішенні різноманітних проблем енергозбереження.

Системи теплоізоляції (тобто так звані системами теплового захисту) уже досить давно стали невід'ємною частиною найрізноманітніших технологій та технічних систем. Найпростіші з них являють собою відносно тонкі покриття з матеріалу з досить малою теплопровідністю. Подібні теплозахисні покриття надзвичайно широко розповсюджені, що пояснюється їх простотою та високою технологічністю їх виробництва особливо в разі, коли об'єкт, що захищається, має просту канонічну форму. В останньому випадку розрахунок температурних та інших полів в розглянутих системах також не становитиме скільки-небудь істотних труднощів навіть при використанні аналітичних методів дослідження. Однак для неканонічних форм об'єктів, що підлягають тепловому захисту, значно ускладнюється не тільки завдання щодо виробництва розглянутих покриттів, але навіть їх

розрахунок, який у таких випадках представляє собою значні обчислювальні труднощі. Природа зазначених труднощів є прямим наслідком малої товщини теплозахисного покриття в порівнянні з геометричними масштабами об'єкта, що захищається. Тобто, даний клас задач можна, поза всяким сумнівом, віднести до так званих багатомасштабних задач. Для неканонічних форм об'єктів, що захищаються, необхідно вдаватися до чисельних, а не аналітичних методів. Але для досягнення прийнятної точності розрахунку необхідна відповідність розрахункових сіток всередині тіла, що захищається, і всередині теплозахисного покриття. Отже, для досягнення прийнятної точності довелося би будувати розрахункові сітки з кроками, які забезпечили б коректний розрахунок поля температур і теплових потоків в напрямку, перпендикулярному до теплозахисного покриття, тобто, у найменшому з усіх можливих в даній задачі геометричних масштабів.

На жаль, традиційно в інженерних розрахунках виникла тенденція нехтувати товщиною захисних покриттів, навіть якщо вони неасимптотично тонкі, а мають скінченну товщину. Як за правило, наявність теплозахисного покриття в інженерному тепловому розрахунку враховується через експериментально визначений коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем. Цілком очевидно, що такий підхід є надто витратним, оскільки вимагає проведення теплофізичного експерименту в широкому діапазоні теплофізичних параметрів для кожної заданої товщини захисного шару. Крім того, подібні експериментальні дані, як правило, важко формалізуються для використання в розрахункових моделях.

Іншим, на жаль, ще дуже мало розробленим підходом до розрахунку теплозахисних покриттів є застосування асимптотичних підходів спільно з чисельним моделюванням. Зазначена альтернатива представляється досить перспективною, оскільки вона усуває труднощі, нездоланні для аналітичних та чисельних методів. Остання обставина і послужила спонукальним мотивом для подальших досліджень в цій області.

Загальна технічна проблема управління тепловими режимами технічних об'єктів є центральною в сучасній теплотехніці. Не зупиняючись на численних і вельми різноманітних теоретичних і прикладних аспектах цієї проблеми, відзначимо лише, що сучасна енергетична криза зробила виключно актуальними розв'язок задач управління тепловими режимами, що забезпечують енергозбереження, зокрема, задач по теплоізоляції та тепловому захисту. Актуальність подібних завдань для економіки України не викликає жодного сумніву. Як на стадії проектування теплоізоляції, так і на стадії її експлуатації можливість ефективного і точного комп'ютерного моделювання відповідних процесів теплообміну забезпечує прийняття раціональних рішень, а при необхідності, – і оптимізацію параметрів системи теплового захисту, створюючи таким чином додаткові можливості енергозбереження та економії матеріальних ресурсів.

З огляду на актуальність даної проблеми для надзвичайно широкого спектру напрямків господарської та науково-технічної діяльності, здається цілком природним, що їй присвячено досить велику кількість літератури. Тому обмежимося тут лише короткими оцінками сучасного стану питання, зробивши основний акцент на недостатньо ще розроблених обчислювальних аспектах комп'ютерного моделювання теплоізоляційних покриттів. Напевне, найбільше число публікацій, у тому числі і монографій, довідників і гостів, проблема теплоізоляції стимулювала в сфері будівельних наук та у комунальній сфері, де вона є найважливішою складовою частиною загальної проблеми комунального енергозбереження. На жаль, особливості тих задач, що виникають у цій області, такі, що дозволяють задовольнятися самими примітивними математичними моделями, заснованими на припущеннях про стаціонарність та одномірність по простору полів температур в теплоізоляційному покритті, що відповідає твердженню про лінійний розподіл температури в даному покритті. Хоча, з точки зору авторів цієї роботи, такі спрощення не завжди достатньо виправдані, що буде ще докладніше обговорюватися нижче, вони стали стандартом *de facto* в даній

області. Прямим результатом описаних вище спрощень є абсолютно незадовільний стан математичного та чисельного моделювання в зазначеній галузі, що не дозволяє навіть привести вдалі приклади розрахунків, що виходять за рамки тривіального випадку прийняття сталих температур всередині та зовні споруди. Набагато більш загальні постановки задач стали традиційними для математичного моделювання систем теплового захисту, що застосовуються в авіаційній та ракетно-космічній техніці, а також в окремих технологіях теплової та атомної енергетики, металургійної та хімічної промисловості. Систематичне дослідження подібних систем теплового захисту, що характеризуються великими перепадами температур, зростанням температур до меж зміни внутрішньої структури речовини покриття (тобто меж фазових переходів), наведено в монографії [257]. Однак і ця наукова праця, викликана необхідністю підсумувати значні дослідження, проведені, перш за все, в ракетно-космічній галузі, не вільна від недостатньо обґрунтованих спрощень та припущень, наприклад, про одновимірний локальний характер теплообміну в теплозахисному покритті. Неявною справжньою причиною, яка змусила вдаватися до згаданих припущень, обґрунтованим неналежним чином, є реальна багатомасштабність розглянутої задачі. До самого останнього часу, не дивлячись на численні спроби [258, 259], подолати зазначену негативну тенденцію не вдавалось.

Асимптотичні методи традиційно широко використовувалися в теорії тепломасообміну, в тому числі і в теорії теплопровідності [260–262]. Правда, переважна більшість таких робіт була спрямована на подолання труднощів, пов'язаних з фізичною нелінійністю використовуваних рівнянь, але, тим не менше, питання геометричної асимптотики, тобто дослідження випадків тонких тіл, також були розглянуті в зазначених книгах. Першою спробою застосування асимптотичного підходу до задачі розрахунку теплофізичних процесів в неасимптотически тонкому теплозахисному покритті була робота [263]. Однак у роботі [263] розгляд обмежувався випадками найпростішої

геометрії, а про тепловий захист тіл складної геометричної форми там сказано лише як про потенційну можливість запропонованого підходу.

На підставі вищевикладеного мету даного розділу можна визначити як розробку алгоритму розрахунку теплових полів у захищеному тілі та у теплозахисному покритті на основі чисельних методів за допомогою асимптотичного підходу.

Оскільки мова йде про розробку принципів аспектів розрахункової методики, то для спрощення міркувань і розрахунків весь подальший аналіз буде стосуватися найпростішого стаціонарного плоского випадку, залишивши більш складні випадки для подальших досліджень.

Розглянемо неасимптотично тонкий теплоізоляційний шар у плоскому випадку. Позначимо область, яку займає теплоізолююче тіло, через D_1 , а її межа через Γ_1 . У свою чергу, хай теплоізолюване тіло займає область D_2 з межею Γ_2 . Загальну частину межі позначимо через $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma$. Простоти заради, матеріал шару вважаємо однорідним та ізотропним, теплофізичні властивості матеріалу шару і контактуючих з ним тіл, а також діапазон температур вважаємо такими, що поля температур в них з належною точністю можуть бути описані лінійними стаціонарними рівняннями теплопровідності, геометричну форму шару і тіла вибираємо довільними, але такими, щоб межа між ними Γ була гладкою, тобто мала єдину нормаль. Під припущенням про неасимптотичну товщину шару будемо розуміти наступне: нехай задано деяке досить мале, але скінченне значення максимальної товщини шару δ^* , тоді для кожної точки спільної межі Γ існує хоча б одна точка на решті частини межі Γ_1 , яка віддалена від першої на відстань, меншу або рівну δ^* .

Враховуючи постульовану гладкість межі Γ , останнє визначення можна спростити таким чином: для кожної точки спільної межі Γ відстань від цієї точки до точки перетину перпендикуляра, з неї проведеного, з іншою частиною межі Γ_1 , менше або дорівнює δ^* . Далі ми будемо розглядати тільки

такі випадки, коли зазначений перпендикуляр і решта межі Γ_1 мають єдину точку перетину, проте у загальному випадку це може бути і не так.

Згідно до монографій [262, 264], у довільних ортогональних системах координат маємо такі диференціальні рівняння теплопровідності:

$$\frac{1}{H_{11} \cdot H_{12}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1} \right) \right] = Q_1, \quad (\text{Д6.1})$$

$$\frac{1}{H_{21} \cdot H_{22}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \eta_2} \right) \right] = Q_2, \quad (\text{Д6.2})$$

де $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ – довільні системи координат; $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ – відповідні їм коефіцієнти Ляме, які мають скінченні позитивні значення. Свобода вибору систем координат обмежується тільки міркуваннями щодо зручності при виборі крайових умов і умов сполучення на спільній межі Γ . Джерельні члени Q_1, Q_2 вважаємо відомими. З фізичних міркувань, природно, першу з координатних систем, використовувану для опису поля температури в ізолюючому шарі, зв'язати з межею Γ , і першу з координат відраховувати по нормалі до цієї кривої, а другу – по дотичній.

На спільній межі Γ доцільно поставити умови сполучення (ідеального теплового контакту):

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma}, \quad (\text{Д6.3})$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (\text{Д6.4})$$

де λ_1, λ_2 – відповідні коефіцієнти теплопровідності.

На зовнішній межі теплоізолюючого шару можуть бути поставлені стандартні крайові умови одного з трьох типів:

першого роду

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_a, \quad (Д6.5)$$

другого роду

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = q_a, \quad (Д6.6)$$

третього роду

$$\lambda_1 \cdot \left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \alpha_1 (T_1 - T_a), \quad (Д6.7)$$

де всі позначення розуміються у традиційному сенсі [6, 8]. Крайові умови на межах масивного тіла, що не контактує з ізолюючим шаром, також ставляться традиційним способом.

Наведемо сформульовану вище задачу до безрозмірного вигляду, а саме припустимо, що в задачі є дві характерні температури T_* і T^* (як правило, визначаються з крайових умов), які можуть відноситись як до масивного тіла, так і до тонкого шару; тоді:

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T_*}{T^* - T_*}, \quad (Д6.8)$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 - T_*}{T^* - T_*}. \quad (Д6.9)$$

Нехай товщина неасимптотично тонкого шару має характерний розмір $L_1 = \delta^*$, а розміри масивного тіла характеризуються величиною L_2 (очевидно, що $L_1 \ll L_2$), тоді обезрозмірені координати ξ_1 , η_1 у тонкому шарі запишуться в наступному вигляді

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{L_1}, \quad \bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{L_2}, \quad (Д6.10)$$

а ξ_2 , η_2 в масивному тілі будуть мати вид:

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2}{L_2}, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{\eta_2}{L_2}, \quad (\text{Д6.11})$$

Обезрозмірені рівняння (4.1), (4.2) набудуть вигляду

$$\frac{1}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + \frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\eta}_1} \right) = \bar{Q}_1 H_{11} \cdot H_{12}, \quad (\text{Д6.12})$$

$$\frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}_2} \right) + \frac{1}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\eta}_2} \right) = \bar{Q}_2 H_{21} \cdot H_{22}, \quad (\text{Д6.13})$$

Після очевидного перетворення стає видно, що у рівняння (Д6.12) входить малий параметр

$$\varepsilon = \frac{L_1^2}{L_2^2}, \quad (\text{Д6.14})$$

і це рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\eta}_1} \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}. \quad (\text{Д6.15})$$

Відповідно до алгоритму методу малого параметра, розв'язок рівняння (Д6.15) будемо відшукувати у вигляді ряду за малим параметром:

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \varepsilon \cdot \theta_1^1 + \varepsilon^2 \cdot \theta_1^2 + \dots + \varepsilon^n \cdot \theta_1^n + \dots, \quad (\text{Д6.16})$$

де верхні індекси при θ означають номер наближення, а при ε – ступінь даного параметра. Аналогічно і розв'язок рівняння (Д6.13) будемо шукати у вигляді

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \varepsilon \cdot \theta_2^1 + \varepsilon^2 \cdot \theta_2^2 + \dots + \varepsilon^n \cdot \theta_2^n + \dots \quad (\text{Д6.17})$$

Підстановка розкладів (Д6.16) і (Д6.17) у вихідні рівняння дає

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} (\theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_1^k) \right) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} (\theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_1^k) \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}. \end{aligned} \quad (\text{Д6.18})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\frac{H_{22}}{H_{21}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} (\theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_2^k) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \left(\frac{H_{21}}{H_{22}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} (\theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \theta_2^k) \right) = \bar{Q}_2 L_2^2 H_{21} \cdot H_{22}. \end{aligned} \quad (Д6.19)$$

Прирівнюючи члени при однакових ступенях ε , одержимо послідовність крайових задач для визначення невідомих функцій. Зокрема, для θ_1^0 матимемо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \theta_1^0 \right) = \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12}, \quad (Д6.20)$$

звідки знаходимо:

$$\theta_1^0 = \int \left[\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \left(\int \bar{Q}_1 L_1^2 H_{11} \cdot H_{12} d\bar{\xi}_1 + C_1 \right) \right] d\bar{\xi}_1 + C_2. \quad (Д6.21)$$

Очевидно, що вираз (Д6.21) є загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння (Д6.20), а невідомі постійні C_1 і C_2 можуть бути знайдені з відповідних граничних умов. Слід зазначити, що коефіцієнти Ляме є функціями координат і теж можуть бути розкладені по параметру ε , що характеризує геометричні розміри, подібно (Д6.16), (Д6.17). У цьому випадку в нульовому наближенні розв'язок (Д6.21) помітно спроститься, що може забезпечити обчислення відповідного інтеграла в квадратурі. Однак наступні наближення у такому випадку ускладняться. Аналогічно для першого наближення будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\frac{H_{12}}{H_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \theta_1^1 \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \theta_1^0 \right). \quad (Д6.22)$$

Відзначимо, що права частина рівняння (Д6.22) є відомою в силу (Д6.21); тоді

$$\theta_1^1 = \int \left[\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \left(\int \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \left(\frac{H_{11}}{H_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} \theta_1^0 \right) d\bar{\xi}_1 + C_1^1 \right) \right] d\bar{\xi}_1 + C_2^1. \quad (Д6.23)$$

Вираз (Д6.23) є загальним аналітичним розв'язком, а невідомі сталі, можуть бути визначені на підставі відповідних граничних умов. Відзначимо, що розв'язок (Д6.23) відображає теплові потоки вздовж теплоізолюючого шару, чого не враховувалось в традиційних математичних моделях

теплоізоляції. При практично використовуваних товщинах теплозахисних шарів впритул до 0,1 – 0,2 розмірів захищеного тіла наступні члени в розкладах (Д6.16), (Д6.17) мають порядок $10^{-3} - 10^{-4}$, а це, у свою чергу означає, що нульового і першого наближення (Д6.21), (Д6.23) цілком достатньо для розрахунку з прийнятною в інженерних застосуваннях точністю. Підстановка розкладів (Д6.16), (Д6.17) в граничні умови (Д6.3) – (Д6.7) абсолютно тривіальна, однак при використанні граничних умов другого або третього роду на зовнішній межі теплоізолюючого шару слід враховувати, що нормаль до зазначеної поверхні шару може значно відхилитися від нормалі до межі Γ у відповідній точці (правда, в застосуваннях така ситуація виникає вкрай рідко). У такому випадку реалізація граничних умов дещо ускладнюється, але ці ускладнення не носять принципового характеру. Особливо простим розв'язком (Д6.21), а за ним і (Д6.23), виявляються у разі $Q_1 = 0$.

Зрозуміло, що вибір системи координат ξ_1, η_1 обумовлений формою межі Γ , проте для системи координат ξ_2, η_2 подібні обмеження не передбачалися, тому ця система координат може бути обрана довільно з міркувань зручності розв'язання відповідних крайових задач. Оскільки тут основна увага приділяється тілам складної геометричної форми, а рівняння (Д6.2) – лінійне рівняння Пуассона, то для чисельного розв'язання цієї задачі доцільно використовувати метод граничних елементів, для якого найкращою є декартова ортогональна система координат. Тоді рівняння (Д6.2) має вигляд

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = Q_2, \quad (\text{Д6.24})$$

а рівняння (Д6.13) – вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{y}^2} = \bar{Q}_2, \quad (\text{Д6.25})$$

звідки

$$\frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{y}^2} = \bar{Q}_2, \quad (\text{Д6.26})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2^1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^1}{\partial \bar{y}^2} = 0. \quad (\text{Д6.27})$$

Для чисельного розрахунку поля температур всередині захищеного тіла будемо використовувати метод граничних елементів [184, 185]. Для цього кожне з рівнянь (Д6.26), (Д6.27) замінимо його граничним інтегральним аналогом:

$$\begin{aligned} C(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \theta(\bar{x}_0, \bar{y}_0) &= \oint_{\Gamma_2} \varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) \frac{\partial \theta}{\partial n}(\bar{x}, \bar{y}) ds(\bar{x}, \bar{y}) - \\ &- \oint_{\Gamma_2} \theta(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) ds(\bar{x}, \bar{y}) + \\ &+ \int_{D_2} \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}) \varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) d\bar{x} d\bar{y}, \end{aligned} \quad (\text{Д6.28})$$

де n – зовнішня нормаль до межі;

функція C дорівнює «1» для точок, що лежать всередині області розв’язок, « $1/2$ » для точок, що лежать на її межі і «0» для точок поза областю;

φ_0 – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа, який у плоскому випадку має вигляд

$$\varphi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_0)^2}}. \quad (\text{Д6.29})$$

Подальша процедура чисельного розв’язання граничних інтегральних рівнянь (Д6.28) полягає у введенні на межі області та всередині її сіток, подібних до скінченноелементних сіток; апроксимації на них відомих та невідомих величин за допомогою досить простих функцій, при чому апроксимації невідомих функцій повинні включати набір довільностей, що підлягають визначенню, і, нарешті, в отриманні розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Більш детально на алгоритмі методу граничних елементів зупинятися не будемо, оскільки його у деталях описано у монографіях [184, 185]. Єдиною особливістю процедури розв’язання є модифікація граничних умов для рівнянь (Д6.28) з урахуванням розв’язків (Д6.21) та (Д6.23).

Оскільки основною метою даного розділу є розробка методики застосування асимптотичних підходів до задач теплового захисту, то

основним отриманим результатом слід вважати тестування даної методики на задачах, що мають аналітичний розв'язок. Зокрема, для тестування було обрано задачу про стаціонарний розподіл температури в товстостінному циліндрі з внутрішнім або зовнішнім теплозахисним покриттям сталої товщини, розв'язок якої відомо в квадратурах. При відносній товщині теплозахисного покриття 0,1 від товщини циліндра і використанні по зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра по 200 граничних елементів похибка чисельного розрахунку не перевищувала 0,1%. Крім наведеного тестового розрахунку були чисельно розв'язані ще декілька задач для випадків більш складної форми тіл, що захищаються, включаючи еліпсоїдальні тіла, прямокутні тіла, тіла канонічних геометричних форм з внутрішніми порожнечами при сталих або змінних товщинах теплозахисного покриття. Всі проведені розрахунки підтвердили високу ефективність запропонованого підходу.

Запропонований у даній роботі підхід узагальнює попередні спроби наближеного аналізу теплозахисних покриттів. Даний підхід дозволяє оцінити теплові потоки в тангенціальному напрямку, чого не робилося раніше, а також забезпечує оцінку точності наближення. Аналітичний характер отриманих уявлень дозволяє використовувати для розрахунку вже існуюче програмне забезпечення з мінімальними змінами в крайових умовах.

Напрямки подальших досліджень абсолютно очевидні. Перший з таких напрямків полягає в узагальненні вихідної проблеми, поширенні запропонованого підходу на нестаціонарні та нелінійні задачі, а також на випадок, коли в захисному шарі відбуваються фазові переходи або хімічні реакції. Другим напрямком розвитку результатів роботи є їх застосування до широкого спектру прикладних проблем теплозбереження, вельми актуальних у зв'язку з енергетичною кризою.

В цілому, дана робота дає досить успішну спробу вирішення багатомасштабної задачі без втрати ефективності існуючих обчислювальних підходів. Застосування даної методики дає можливість виключити з розрахункової практики великі обсяги експериментальних даних і зменшити загальний обсяг дорогих і тривалих експериментальних досліджень.

ДОДАТОК 7

Документи, що підтверджують впровадження результатів роботи

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник Генерального конструктора
з наукової і навчальної роботи

Пеховцов В. С.
_____ 2021 р.


АКТ

**впровадження наукових та практичних результатів досліджень
у виробничий процес**

Результати досліджень Євдокимова Дмитра Васильовича, що представлені в його дисертаційній роботі «Математичні моделі та чисельні методи теорії потенціалу для задач гідродинаміки і тепломасообміну при малих числах Рейнольдса», застосовуються у ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» під час виконання робіт з розробки перспективних ракет-носіїв та космічних літальних апаратів, а саме:


- 1) Алгоритми та методики розрахунку повільних фазових переходів застосовуються для розрахунку та дослідження фазового стану компонентів ракетного палива у паливних баках перспективних космічних літальних апаратів у польоті;
- 2) Математичні моделі, алгоритми та методики розрахунку еволюції стану багатофазного середовища в умовах мікрогравітації з урахуванням ефектів флотатії та седиментації у слабких полях масових сил, термофорезу, дифузійфорезу, ефекту Марангоні та інших явищ, притаманних для стану мікрогравітації, застосовуються для аналізу процесів у паливних баках космічних апаратів та розробки перспективних технологій використання космічних апаратів;
- 3) Математичні моделі, алгоритми та методики розрахунку процесів тепломасообміну у неповністю заповнених паливних баках з урахуванням ефектів Соре, Дюфора, термо-капілярної та концентраційно-капілярної конвекції, фазових переходів використовуються для проектування систем

збереження та транспортування компонентів рідинного ракетного палива, призначених для довготривалих інерційних польотів.

Заступник Генерального конструктора
з конструювання і супроводження
конструкцій – головний конструктор
і начальник КБ-2

 С. І. Шевцов

Начальник ЛСНД-216

 Д. Е. Смоленський

