

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

САФРОНОВА ІНГА АНАТОЛІЇВНА

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛІ І АЛГОРИТМИ
ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ
В ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ І ОПТИМІЗАЦІЇ
ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ І. А. Сафронова

Науковий керівник
Дзюба Анатолій Петрович,
доктор технічних наук, професор

Дніпро – 2021

АНОТАЦІЯ

Сафронова І. А. Моделі і алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів в задачах розрахунку і оптимізації оболонкових елементів конструкцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04. «Механіка деформівного твердого тіла» (фізико-математичні науки). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розробці методів розрахунку оболонкових конструкцій з неоднорідними параметрами.

Об'єктом дослідження є ітераційні процеси розв'язування нелінійних задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій.

Предметом дослідження є гнучкі тонкостінні неоднорідні оболонкові елементи конструкцій з нерегулярними параметрами (кільцеві пластинки, оболонки обертання з довільною формою меридіану, мембрани синусоїдального профілю, сільфони, оболонки обертання зі змінною у поздовжньому та в обох напрямках товщиною при несиметричному навантаженні, тощо).

Розроблено ефективний алгоритм прискорення збіжності ітераційних процесів, що виникають при розв'язуванні нелінійних задач розрахунку і вибору оптимальних параметрів оболонкових елементів конструкцій сучасної техніки (зокрема, кільцевих пластин, чутливих мембран синусоїдального профілю, динамометричних шайб, сільфонів), несиметрично навантажених неоднорідних оболонок обертання з довільною формою меридіану та змінною жорсткістю при великих переміщеннях.

Вдосконалено прийоми перетворень нелінійних крайових задач механіки оболонок (їх лінеаризація) для побудови ефективних ітераційних схем та прискорення збіжності їх розв'язування.

Подані результати обширного числового експерименту застосування різних методів та алгоритмів прогнозування (екстраполяції) та їх комбінацій для зменшення обчислювальних витрат на розв'язування нелінійних задач механіки оболонок.

Запропоновано новий підхід до визначення зазначеної проблеми, який ґрунтується на використанні авторських прийомів спільного застосування методу релаксуючих множників (лінійна екстраполяція), поліномів Лагранжа і Ньютона (в формі методу Адамса) та ітераційного процесу Ейткена – Стеффенсена для прискорення збіжності послідовності лінеаризованих крайових задач механіки оболонок.

Суть підходу полягає в зменшенні кількості етапів ітераційного процесу розв'язування послідовності лінійних крайових задач шляхом періодичної екстраполяції значень лінійних складових на основі вдалих попередніх кроків, замість проведення всього обсягу обчислень на k -му кроці.

Побудовані ефективні алгоритми та наведені результати числового розв'язування нелінійних крайових задач для різних математичних моделей опису поведінки таких оболонок з нерегулярними параметрами. Достовірність підходу підтверджена відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач, добрим узгодженням результатів досліджень отриманих різними методами, з опублікованими результатами інших авторів, а також результатами спеціальних експериментальних досліджень напружено-деформованого стану гнучких кільцевих пластин та сільфонів.

Розроблено алгоритм прогнозування значень коефіцієнтів розкладень функцій в ряди Фур'є, який застосовано для зменшення кількості розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Задача розв'язується шляхом застосування дискретно-континуального методу прямих, коли в окружному напрямку використовується скінченно-

різницевий підхід, в меридіональному – задача інтегрування. Запропонований в дисертації алгоритм прискорення збіжності застосовано також для зменшення кількості розв’язувань одновимірних крайових задач, що виникають в задачах розрахунку оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості.

Результати дисертації подані у вигляді опису алгоритмів, графіків і таблиць числових розрахунків та даних експериментальних досліджень, що можуть бути безпосередньо використані для скорочення обчислювальних витрат в задачах розрахунку і вибору оптимальних параметрів широкого спектру задач механіки оболонок.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

Розроблено нові ефективні алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв’язання задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом прогнозування (на окремих кроках) значень нелінійних параметрів за результатами обчислень, отриманих на попередніх ітераціях.

Вдосконалено прийоми перетворень нелінійних крайових задач механіки оболонок (їх лінеаризації) для побудови ефективних ітераційних схем та прискорення збіжності їх розв’язування.

Проведено оригінальні експериментальні дослідження поведінки гнучкої кільцевої пластинки і сільфона та отримані нові результати порівняльного аналізу експериментальних даних та результатів числових досліджень, отриманих шляхом безпосереднього інтегрування крайових задач для існуючих математичних моделей методами прогонки за С. К. Годуновим та скінченних елементів. Обґрунтовано ефективність розроблених алгоритмів.

Розроблено нову методологію зменшення обчислювальних витрат для розв’язування задач розрахунку оболонок обертання змінної вздовж меридіану жорсткості при несиметричному навантаженні при спільному використанні методу Фур’є та запропонованого алгоритму прискорення збіжності.

Побудовано новий ефективний підхід до дослідження напружено-деформованого стану оболонок обертання зі змінною у двох напрямках жорсткістю,

шляхом спільного застосування модифікованого дискретно-континуального методу прямих та запропонованого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

Вперше, за допомогою розробленого алгоритму прискорення збіжності, отримано числові розв'язки низки прикладних задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних гнучких оболонкових елементів конструкцій зі складною формою меридіану (мембран синусоїдального профілю, сильфонів та ін.), гнучких кільцевих пластин та оболонок обертання змінної жорсткості.

Теоретична цінність роботи полягає у побудові коректного та ефективного підходу і на цій основі методології та алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних крайових задач механіки неоднорідних оболонок, суть якого полягає у заміні (на окремих етапах ітераційного процесу) повного, часто досить трудомісткого, розрахунку математичної моделі стану конструкції на певні прогнозні значення нелінійних змінних задачі, отриманих на попередніх кроках ітераційного процесу.

Область застосування запропонованої методики може бути поширена на розв'язання багатьох інших проблем нелінійної механіки оболонок та нелінійних задач в інших галузях, а одержані в роботі результати – методологія, алгоритми, дані числових та експериментальних досліджень можуть служити науково-методичною основою для перспективних розробок.

Практична цінність результатів дослідження полягає у можливості безпосереднього використання запропонованого підходу в процесі розробки конструкцій авіа-, ракето-, енерго-, судно- і космічного машинобудування та в інших галузях, як ефективного засобу розв'язування нелінійних (зокрема крайових) задач та задач оптимізації параметрів оболонкових елементів зі складною формою меридіану, зокрема, при проектуванні мембран синусоїдального профілю найбільшої чутливості, розрахунку гнучких сильфонів, оболонок з раціональною, змінною уздовж меридіана та у двох напрямках жорсткістю, тощо.

ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ, ЧИСЛОВІ АЛГОРИТМИ, ЗМІННА
ЖОРСТКІСТЬ, ГНУЧКІ ОБОЛОНКОВІ ЕЛЕМЕНТИ, ВЕЛИКІ
ПЕРЕМІЩЕННЯ, ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ.

ABSTRACT

Safronova I. A. Models and algorithms for accelerating the convergence of iterative processes in the problems of calculation and optimization of shell elements of structures. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertations for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04. "Mechanics of a deformable solid" (physical and mathematical sciences). – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

The dissertation is devoted to the development of methods for calculating shell structures with inhomogeneous parameters.

The object of research is iterative processes of solving nonlinear problems of calculation and optimization of parameters of inhomogeneous shell elements of structures.

The subject of research is flexible thin-walled inhomogeneous shell elements of structures with irregular parameters (ring plates, shells of rotation with arbitrary meridian shape, sinusoidal profile membranes, bellows, shells of rotation with variable longitudinal and in both directions thickness at asymmetric, etc.).

An effective algorithm for accelerating the convergence of iterative processes that arise when solving nonlinear problems of calculation and selection of optimal parameters of shell elements of modern technology structures (in particular, annular plates, sensitive membranes of sinusoidal profile, dynamometric washers, bellows) and asymmetrically loaded inhomogeneous shells of rotation with arbitrary meridian shape and variable stiffness at large displacements has been developed.

The methods of transformations of nonlinear boundary value problems of shell mechanics (their linearization) for construction of effective iterative schemes and acceleration of convergence of their solution are improved.

The results of an extensive numerical experiment using different methods and algorithms for forecasting (extrapolation) and their combinations to reduce computational costs for solving nonlinear problems of shell mechanics are presented.

A new approach to the definition of this problem is proposed, which is based on the use of the author's methods of joint application of the relaxing multipliers method (linear extrapolation), Lagrange and Newton polynomials (in the form of the Adams method) and the Aitken-Steffensen iterative process to accelerate shells.

The essence of the approach is to reduce the number of stages of the iterative process of solving a sequence of linear boundary value problems by periodically extrapolating the values of linear components based on successful previous steps, instead of performing the entire volume of calculations on the k -th step.

Effective algorithms are constructed and the results of numerical solution of nonlinear boundary value problems for various mathematical models of describing the behavior of such shells with irregular parameters are given. The reliability of the approach is confirmed by the conformity of the obtained results to the physical content of the tasks, good coordination of the research results obtained by different methods with the published results of other authors, as well as the results of special experimental studies of the stress-strain state of flexible ring plates and bellows.

An algorithm for predicting the values of the coefficients of expansions of functions into Fourier series has been developed, which is used to reduce the number of solutions of boundary value problems for systems of ordinary differential equations with variable coefficients.

The problem is solved, by applying the discrete-continuous method of lines, when the finite-difference approach is used in the circumferential direction, and the integration problem is used in the meridional direction. The convergence acceleration algorithm proposed in the dissertation is also used for reduce the number of solutions of one-dimensional boundary value problems that arise in the problems of calculating the shells of rotation of a variable in two directions of rigidity.

The results of the dissertation are presented in the form of a description of algorithms, graphs and tables of numerical calculations and experimental research data that can be directly used to reduce computational costs in calculation problems and selection of optimal parameters of a wide range of shell mechanics problems.

The scientific novelty of the obtained results is as follows:

New effective algorithms for accelerating the convergence of iterative processes for solving problems of calculating and optimizing the parameters of inhomogeneous shell elements of structures by predicting (in separate steps) the values of nonlinear parameters based on the results of calculations obtained in previous iterations.

The methods of transformations of nonlinear boundary value problems of shell mechanics (their linearization) for construction of effective iterative schemes and acceleration of convergence of their solution are improved.

Original experimental researches of behavior of a flexible ring plate and a bellows are carried out and new results of the comparative analysis of experimental data and results of the numerical researches received by direct integration of boundary value problems for existing mathematical models by methods of run by SK Godunov and finite elements are received. The efficiency of the developed algorithms is substantiated.

A new methodology for reducing computational costs has been developed to solve the problems of calculating the shells of rotation of a variable along the meridian of stiffness under asymmetric loading when using the Fourier method and the proposed algorithm for accelerating convergence.

A new effective approach to the study of the stress-strain state of shells of rotation with variable stiffness in two directions is constructed by joint application of the modified discrete-continuous method of lines and the proposed algorithm for accelerating the convergence of iterative processes.

For the first time, with the help of the developed convergence acceleration algorithm, numerical solutions of a number of applied problems of calculation and optimization of parameters of inhomogeneous flexible shell elements of structures with complex meridian shape (sinusoidal profile membranes, bellows, etc.), flexible annular plates and rigidity.

The theoretical value of the work lies in the construction of a correct and effective approach and on this basis the methodology and algorithm for accelerating the convergence of iterative processes for solving nonlinear boundary value problems

of inhomogeneous shell mechanics, the essence of which is to replace (at some stages of the iterative process) mathematical model of the state of the structure for certain predictive values of nonlinear variables of the problem obtained in the previous steps of the iterative process.

The scope of the proposed technique can be extended to solve many other problems of nonlinear shell mechanics and nonlinear problems in other fields, and the results obtained in the work - methodology, algorithms, data from numerical and experimental studies can serve as a scientific and methodological basis for future developments.

The practical value of the results of the study lies in the possibility of direct use of the proposed approach in the development of aircraft, rocket, energy, ship and space engineering and in other fields as an effective means of solving nonlinear (including boundary) problems and problems. optimization of parameters of shell elements with a complex shape of the meridian, in particular, when designing membranes of sinusoidal profile of the highest sensitivity, calculation of flexible bellows, shells with rational, variable along the meridian and in two directions stiffness, etc.

CONVERGENCE ACCELERATION, NUMERICAL ALGORITHMS,
VARIABLE STIFFNESS, FLEXIBLE SHELL ELEMENTS, LARGE
DISPLACEMENTS, EXPERIMENTAL STUDIES.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковано основні наукові результати

1. Safronova I. A. Algorithm for computational costs reducing in problems of calculation of asymmetrically loaded shells of rotation / Dzyuba A. P., Safronova I. A., Levitina L. D / Strength of Materials and Theory of Structures, 2020. – № 105. – С. 107-122 (Web of science)

2. Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій / Дзюба А. П., Сіренко В. М., Сафронова І. А., Дзюба О. А. // Актуальні проблеми механіки: Монографія серії: Підсумки науки до 100-річчя заснування Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара / під редакцією М. В. Полякова. – Дніпро: ЛПРА, 2018. – 225-243 с.

3. Сафронова І. А. Розробка методики розрахунку напружено-деформованого стану циліндричної оболонки зі змінної у двох напрямках товщиною стінки / Дзюба А. П., Сафронова І. А., Левитіна Л. Д. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дніпро: ДНУ. – Вип. 30, 2019. – С. 53-67

4. Сафронова І. А. Числові та експериментальні дослідження великих переміщень в оболонкових елементах конструкцій / А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник Дніпропетровського університету: серія «Механіка неоднорідних структур», Дн-ськ, 2016. – Вип. 1(20). – С. 11–20.

5. Сафронова І. А. Числові та експериментальні дослідження поведінки осесиметричних кільцевих пластин при великих переміщеннях / А. Г. Пацюк, І. А. Сафронова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць - Дн-ськ: ДНУ. – Вип. 25. - 2016. - С. 158-170.

6. Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих переміщеннях / А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник

Дніпропетровського університету. Серія «Механіка» Т 2., Д., 2015. – Вип. 19.– С.38-55

7. Сафронова І. А. Прискорення збіжності ітераційного алгоритму розв'язування задач розрахунку оболонок при великих переміщеннях / П. І. Булакаєв, Л. Д. Левитіна, І. А. Сафронова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць – Дн-ськ: ДНУ. – Вип. 13. – 2012. – С. 69–76.

8. Сафронова І. А. Дискретно-континуальний алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості / П. І. Булакаєв, А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дн-ськ: Ліра. – 2011. – Вип. 16. – С. 69–78.

9. Сафронова І. А. Розробка математичної моделі та методики розрахунку і оптимізації параметрів динамометричної шайби / А. П. Дзюба, І. А. Філяшина (І. А. Сафронова) // Геотехническая механіка. – Дн-ськ. – 2005. – Вип. 56. – С. 219–226.

10. Дзюба А. П. Розрахунок та оптимізація форми меридіану оболонок обертання як чутливих елементів манометричних пристроїв / А. П. Дзюба, Л. Д. Левитіна, І. А. Філяшина (І. А. Сафронова) // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дн-ськ: ДНУ. – 2003. – Вип. 5. – С. 40–46.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

11. Safronova I. A. Research adequacy of the mathematical models of deformation shell elements with large displacements / A. P. Dzyuba, I. A. Safronova // Proc. of the III Intern. Scient. and Pract. Conf. «Science and Education – Our Future, Ajman, UAE, 2016» – P. 39-44.

12. Сафронова І. А. Прогнозування значень коефіцієнтів в методі Фур'є для зниження обчислювальних витрат в задачах розрахунку оболонок обертання при несиметричному навантаженні / Дзюба А. П., Сафронова І. А., Левитіна Л. Д. //

Актуальные проблемы инженерной механики / Тезисы докладов VII Международной научно-практической конференции. Общая редакция – Н. Г. Сурьянинов. Одесса: ОГАСА, 2020. – С. 96-99. – Режим доступа до ресурсу: <https://drive.google.com/file/d/1RIruKchAIDCfvCfEtoi33HkeKcIpoLSx/view>.

13. Сафронова І.А. Алгоритм прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку і оптимального проектування конструкцій / Сафронова І. А. // Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 2. – С.194-195. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

14. Сафронова І. А. Алгоритм розв'язування задачі оптимізації форми гнучких гофрованих мембран / І. А. Сафронова // «Scientific and Practical Results. Prospects for Their Development» (2016, Abu-Dhabi, UAE). – P. 35-39.

15. Сафронова І. А. Числовий аналіз збіжності ітераційних алгоритмів розрахунку оболонок обертання при великих переміщеннях / І. А. Сафронова // III Международная конференция «Актуальные проблемы инженерной механики»: Тезисы докладов. – Одесса. – 2016. – 178-181.

16. Safronova I. A. Algorithms of optimal designing for materially and geometrically nonlinear thin elements of metallurgical equipments under thermal loading / I. A. Safronova, L. D. Levitina // Summaries of lectures 9th international symposium of Croatian metallurgical society. – Shibenik, Croatia, june 20 – 24, 2010: SHMD'2010 Materials and metallurgy. – Metallurgy. – 2010. – Vol.49, N.3. – P.222.

17. Сафронова І. А. Прискорення збіжності методу прямих для розв'язування задач теорії оболонок змінної у двох напрямках жорсткості / І. А. Сафронова // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2010»: тези доповідей. -Дніпродзержинськ. –2010. –С.136.

18. Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних крайових задач механіки розрахунку оболонок обертання / І. А. Сафронова // Міжнародна наукова конференція «Математичні

проблеми технічної механіки»: Тези доповідей. Том 2. – Дніпродзержинськ. – 2016. – С.14.

19. Сафронова І. А. Алгоритм прискорення збіжності методу прямих для розв'язування крайових задач механіки оболонок обертання /Левитіна Л. Д., Сафронова І. А., Рябчекно Є. Д. // Тези доповідей II МНТК пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя з дня народження) «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпро, 2019. – С. 181.

ЗМІСТ

Анотація	2
Abstract	7
Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації	11
Вступ	17
Розділ 1. Аналітичний огляд проблеми розрахунку і зниження обчислювальних витрат в механіці неоднорідних оболонок	25
1.1. Математичні моделі та існуючі підходи до розв’язання нелінійних задач механіки оболонок обертання.....	26
1.2. Методи та засоби розв’язування нелінійних задач механіки оболонок	28
1.3. Розрахунок гнучких неоднорідних оболонок обертання з довільною формою меридіану	34
1.4. Прискорення збіжності алгоритмів оптимізації	38
1.5. Висновки до розділу	41
Перелік джерел посилань до розділу 1	43
Розділ 2. Розробка алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів	55
2.1. Рівняння напружено-деформованого стану оболонок обертання при великих переміщеннях. Основні співвідношення.....	55
2.2. Лінеаризація нелінійних крайових задач розрахунку оболонок обертання	60
2.3. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів	63
2.4. Числові дослідження прискорення збіжності ітераційних процесів в задачах розрахунку і оптимізації оболонкових конструкцій.....	687
2.5. Експериментальні дослідження деформування гнучкої кільцевої пластинки для верифікації розрахункових даних.....	81
2.6. Висновки до розділу	84
Перелік джерел посилань до розділу 2	86

	16
Розділ 3. Застосування підходу в задачах розрахунку і оптимізації гнучких елементів конструкцій	90
3.1. Розрахунок та експериментальні дослідження повздовжніх переміщень сільфонів, як гнучких гофрованих оболонок обертання	90
3.2. Нелінійне деформування та вибір оптимальних параметрів гофрованих мембран синусоїдального профілю	98
3.3. Дослідження деформування динамометричних шайб	101
3.4. Прискорення збіжності алгоритму оптимізації пружних пластин ...	110
3.5. Висновки до розділу	112
Перелік джерел посилань до розділу 3	114
Розділ 4. Застосування підходу для побудови ефективних алгоритмів розрахунку оболонок обертання змінної жорсткості.	117
4.1. Алгоритм прогнозування коефіцієнтів розкладення в тригонометричні ряди Фур'є	117
4.2. Визначення напружено-деформованого стану несиметрично-навантажених оболонок обертання змінної вздовж меридіану товщини стінки.....	121
4.3. Застосування методу прямих для розрахунку оболонок обертання з жорсткістю змінною у двох напрямках.....	124
4.4. Зменшення обчислювальних витрат алгоритму дискретно-континуального методу прямих розрахунку оболонок обертання змінної жорсткості	130
4.5. Висновки до розділу	134
Перелік джерел посилань до розділу 4	135
Загальні висновки	139
Додатки	141

ВСТУП

Актуальність теми. Проблема розробки ефективних підходів, моделей, методів та алгоритмів розв'язування нелінійних крайових задач механіки оболонок, які широко використовуються в багатьох конструкціях аерокосмічної, хімічної, нафтогазової та інших галузей, та вибір їх оптимальних параметрів належить до однієї з найбільш актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла.

Для оболонок з відносно малою товщиною стінки, нерегулярними параметрами жорсткості та складною формою меридіану, до яких відносяться силфони, як компенсатори теплових переміщень трубопроводів, оболонкові елементи у вигляді мембран, як чутливі елементи вимірювальних приладів та ін., в процесі деформування характерними є значні переміщення, тому відповідна крайова задача є суттєво нелінійною, і для її розв'язання необхідно застосовувати ефективні ітераційні числові алгоритми.

Зменшення обчислювальних витрат на розв'язування таких нелінійних задач є важливим і при розв'язанні задач оптимального проектування складних багатопараметричних конструкцій. Відомо, що кількість ітерацій пошукового оптимізаційного алгоритму часто виявляється досить значною, а враховуючи, що і прямий розрахунок таких об'єктів оптимізації (результати якого необхідні на кожному кроці пошуку для обчислення цільової функції, обмежень, а у деяких випадках і похідних від них) теж достатньо трудомісткий, може бути поставлена під сумнів і сама можливість оптимізації. Очевидною при цьому є необхідність розробки підходів, методів та алгоритмів зменшення обчислювальних витрат на розв'язання таких задач шляхом, зокрема, прискорення збіжності відповідних числових алгоритмів.

Аналіз літературних джерел свідчить про те, що ряд аспектів цієї проблеми залишається все ще недостатньо дослідженим, а відомі моделі і алгоритми прискорення збіжності при практичному використанні часто виявляються недостатньо ефективними, обчислювально трудовитратними та складними.

Тому тема дисертаційної роботи, яка спрямована на розробку алгоритмів прискорення збіжності і, таким чином, на зменшення кількості розрахунків при розв'язуванні нелінійних задач механіки оболонок є досить актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені у дисертаційній роботі дослідження виконувались у відповідності до тематики держбюджетних науково-дослідних робіт:

Математичне та експериментальне моделювання втрати несучої здатності елементів конструкцій в умовах накопичення пошкоджень різної природи. № 1–258–12 № ДР 0112U000188 (2012-2014 рр.); - Теоретичні та експериментальні дослідження поведінки та оптимізація конструкцій в умовах накопичення пошкоджень суцільності, корозійного ураження та наявності отворів. № 1–186–09 № ДР 0109U000131 (2009- 2011 рр.); - Моделі і методи оптимального проектування неоднорідних конструкцій в умовах контактної взаємодії та агресивних середовищ. № 1–108–06 № ДР 0106U000780 (2006-2008 рр.); - Моделі та методи оптимізації оболонкових та масивних силових елементів конструкцій при екстремальних параметрах зовнішнього навантаження № 1–045–03 № ДР 0103U000537 (2003-2005 рр.), а також науково-дослідних робіт кафедр обчислювальної механіки і міцності конструкцій та теоретичної та комп'ютерної механіки, які виконуються за рахунок другої половини робочого дня:

Дослідження математичних моделей фізичних процесів методами ідентифікації та рекурентного аналізу із застосуванням інформаційних технологій, № ДР 0119U101053 (2018-2020); - Моделі, методи та алгоритми дослідження неоднорідних елементів конструкцій при статичному та динамічному навантаженнях Рег. № ММФ–803–16, № ДР 0116U003316 (2016-2018 рр.); - Актуальні проблеми комп'ютерної механіки динаміки, міцності, стійкості, довговічності та зниження матеріалоємності Рег. № ММФ–83–13 (2013-2015 рр.); - Математичне, комп'ютерне та експериментальне моделювання механічних процесів в задачах контактної взаємодії пружних тіл, несучої здатності та оптимального проектування конструкцій Рег. № ММФ–93–10 (2010-2012 рр.); - Теоретичні, чисельні та експериментальні дослідження контактної

взаємодії пружних тіл, динаміки, міцності і стійкості та оптимального проектування конструкцій Рег. № ММФ–96–07 (2007-2009 рр.); - Теоретичне, комп'ютерне та експериментальне моделювання контактної взаємодії динаміки, міцності, несучої спроможності та оптимального проектування в механіці деформівного твердого тіла Рег. № ММФ–102–04 (2004-2006 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових ефективних методів та алгоритмів прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних задач розрахунку і оптимізації неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом комп'ютерного моделювання відповідних ітераційних процесів, прогнозування значень наступних кроків послідовних наближень та їх застосування до розв'язання конкретних задач механіки оболонок.

Досягнення мети здійснюється вирішенням наступних основних задач:

Розробка схем ітераційних алгоритмів шляхом прогнозування значень нелінійних складових за результатами попередніх кроків ітераційного процесу із застосуванням методів імітаційного прогнозування, релаксації, Ейткена – Стеффенсена, квадратичної екстраполяції, екстраполяцій Ньютона та Лагранжа, їх комбінацій та проведення відповідного порівняльного аналізу.

Узагальнення та модифікація методики перетворень нелінійної крайової задачі до послідовності лінійних задач з використанням аналогів методів змінних параметрів пружності, послідовних навантажень та ін. для різних математичних моделей опису поведінки оболонкових елементів з великими переміщеннями.

Проведення експериментальних досліджень та порівняння отриманих даних з результатами числових експериментів для обґрунтування достовірності розроблених алгоритмів та адекватності існуючих математичних моделей.

Розробка ефективних алгоритмів розв'язування нелінійних задач розрахунку і оптимізації параметрів гнучких оболонок обертання зі складною формою меридіану, зокрема, чутливих елементів у вигляді мембран синусоїдального профілю, сільфонів, динамометричних шайб, тощо.

Побудова алгоритму зменшення обчислювальних витрат в задачах розрахунку оболонок обертання змінної в меридіональному напрямку товщини при несиметричному навантаженні шляхом спільного використання розкладень в ряди Фур'є та розробленого алгоритму прискорення збіжності.

Розробка моделей та ефективних алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану несиметрично навантажених оболонок обертання зі змінною у двох напрямках жорсткістю із застосуванням дискретно-континуального підходу та алгоритму прискорення збіжності.

Об'єктом дослідження є ітераційні процеси розв'язування нелінійних задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій.

Предметом дослідження є гнучкі тонкостінні неоднорідні оболонкові елементи конструкцій з нерегулярними параметрами (кільцеві пластинки, оболонки обертання з довільною формою меридіану, мембрани синусоїдального профілю, сильфони, оболонки обертання зі змінною у поздовжньому та в обох напрямках товщиною при несиметричному навантаженні, тощо).

Методи дослідження. У роботі застосовано чисельно-аналітичне моделювання процесів нелінійного пружного деформування неоднорідних оболонок обертання. Для розв'язання поставлених задач використовувались математичні моделі нелінійної моментної механіки оболонок, методи числового комп'ютерного моделювання поведінки нелінійних неоднорідних оболонкових елементів; методи розв'язання нелінійних крайових задач; моделі, методи та алгоритми розв'язування задач оптимізації параметрів оболонкових конструкцій; експериментальні методи механіки оболонок.

Наукова новизна отриманих результатів:

Розроблено нові ефективні алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язання задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом прогнозування (на окремих кроках) значень нелінійних параметрів за результатами обчислень, отриманих на попередніх ітераціях.

Вдосконалено прийоми перетворень нелінійних крайових задач механіки оболонок (їх лінеаризації) для побудови ефективних ітераційних схем та прискорення збіжності їх розв'язування.

Проведено оригінальні експериментальні дослідження поведінки гнучкої кільцевої пластинки і сільфона та відповідні порівняльні числові дослідження шляхом безпосереднього інтегрування крайових задач для існуючих математичних моделей методами прогонки за С. К. Годуновим та скінченних елементів. Обґрунтовано ефективність розроблених алгоритмів.

Розроблено методологію зменшення обчислювальних витрат для розв'язування задач розрахунку оболонок обертання змінної вздовж меридіану жорсткості при несиметричному навантаженні при спільному використанні методу Фур'є та запропонованого алгоритму прискорення збіжності.

Розроблено ефективний підхід до дослідження напружено-деформованого стану оболонок обертання зі змінною у двох напрямках жорсткістю, шляхом спільного застосування модифікованого дискретно-континуального методу прямих та запропонованого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

Отримано числові розв'язки низки прикладних задач розрахунку і оптимізації параметрів неоднорідних гнучких оболонкових елементів конструкцій зі складною формою меридіану (мембран синусоїдального профілю, сільфонів та ін.), гнучких кільцевих пластин та оболонок обертання змінної жорсткості.

Обґрунтованість та достовірність наукових результатів забезпечується:

- коректністю розробки розрахункових схем та побудови математичних моделей досліджуваних об'єктів з використанням основних положень механіки неоднорідних оболонкових конструкцій при великих переміщеннях; - застосуванням на окремих етапах досліджень відомих і добре апробованих числових методів та подальшим аналізом практичної збіжності ітераційних процесів у цілому; - контрольованою точністю обчислень з використанням результатів числових експериментів; - апробацією підходу на тестових задачах; - відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач та добрим узгодженням результатів досліджень отриманих різними методами, а також з

опублікованими результатами інших авторів; - результатами проведеного в роботі спеціального експериментального дослідження поведінки гнучких кільцевих пластин та сильфонів.

Теоретичне і практичне значення результатів.

Теоретична цінність роботи полягає у побудові коректного та ефективного підходу і на цій основі методології та алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних крайових задач механіки неоднорідних оболонок, суть якого полягає у заміні (на окремих етапах ітераційного процесу) повного, часто досить трудомісткого, розрахунку математичної моделі стану конструкції на певні прогнозовані значення нелінійних змінних задачі, отриманих на попередніх кроках ітераційного процесу.

Область застосування запропонованої методики може бути поширена на розв'язання багатьох інших проблем нелінійної механіки оболонок та нелінійних задач в інших галузях, а одержані в роботі результати – методологія, алгоритми, дані числових та експериментальних досліджень можуть служити науково-методичною основою для перспективних розробок.

Практична цінність результатів дослідження полягає у можливості безпосереднього використання запропонованого підходу в процесі розробки конструкцій авіа-, ракето-, енерго-, судно- і космічного машинобудування та в інших галузях, як ефективного засобу розв'язування нелінійних (зокрема крайових) задач та задач оптимізації параметрів оболонкових елементів зі складною формою меридіану, зокрема, при проектуванні мембран синусоїдального профілю найбільшої чутливості, розрахунку гнучких сильфонів, оболонок з раціональною, змінною уздовж меридіана та у двох напрямках жорсткістю, тощо.

Теоретичні та практичні результати, які склали основу дисертації у вигляді методичного, алгоритмічного і програмного забезпечення та результатів їх реалізації, вже знайшли своє застосування при виконанні низки держбюджетних тем: №№ ДР: 0103U000537 (2003-2005 pp.), 0106U000780 (2006-2008 pp.), 0109U000131 (2009-2011 pp.), 0112U000188 (2012-2014 pp.), 0116U003316 (2016-2018 pp.), 0119U101053 (2018-2020 pp.), що виконувались у відповідності до

координаційного плану розвитку пріоритетних напрямів науки і техніки МОН України, а також у навчальному процесі спеціальності 113 «Прикладна математика» (спеціалізація «комп'ютерна механіка») механіко-математичного факультету ДНУ імені Олеся Гончара.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на - Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», м. Львів (2005, 2013, 2018 pp.); - Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Москальовського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій», м. Дніпро (Дніпропетровськ) (2007, 2019 pp.); - III International Scientific and Practical Conference «Science and Education – Our Future (November 29 – 30, 2016, Ajman, UAE)»; - 9th International symposium of Croatian metallurgical society (June 20 – 24, 2010, Shibenik, Croatia); - Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», м. Одеса, (2016, 2020 pp.); - Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» м. Кам'янське (Дніпродзержинськ) (2003, 2006, 2010 – 2012, 2014 – 2016 pp.); - Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій» м. Запоріжжя (2015 p.); - Міжнародній молодіжній науково-практичній конференції «Людина і космос», м. Дніпропетровськ (2004, 2005, 2010 pp.)

У повному обсязі результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на - науковому семінарі «Проблеми механіки деформівних тіл і конструкцій» при Придніпровському науковому центрі НАН України та Науковій раді з механіки деформівного твердого тіла при відділенні «Механіка» НАН України (керівники – чл.-кор. НАН України, д. т. н., професор В. С. Гудрамович, засл. діяч науки і техніки України д. т. н., професор А. П. Дзюба); - об'єднаному (міжкафедральному) науковому семінарі «Сучасні питання оптимізації, дискретної математики, інформаційних технологій та математичного моделювання» на базі діючого наукового семінару «Сучасні питання оптимізації та дискретної математики» при Науковій раді НАН України з проблеми «Кібернетика» факультету прикладної математики Дніпровського національного універ-

ситету імені Олеся Гончара (керівник – чл.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., професор О. М. Кісельова).

Публікації та особистий внесок здобувача. За результатами проведених у дисертаційній роботі досліджень всього опубліковано 35 наукових праць. Основні результати дисертаційної роботи викладено в 19 наукових роботах, серед яких 1 стаття [1] у журналі, який входить до переліку Web of science; підрозділ монографії [2]; 8 статей [3 – 10] у журналах та збірниках, що входять до переліку наукових фахових видань України, з яких індексуються у Index Copernicus [3, 5] та у Google Scholar [4]; 3 публікації у зарубіжних виданнях [11, 14, 16]; 6 публікації [12, 13, 15, 17 – 19] у збірниках тез і матеріалах наукових конференцій.

Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. Праці [13 – 15, 17, 18] опубліковані автором одноосібно. У працях [1 – 12, 16, 19], опублікованих у співавторстві, автору належать теоретична і комп'ютерна реалізація ідеї прогнозування значень нелінійних змінних шляхом використання результатів попередніх кроків; побудова ефективних алгоритмів розв'язування нелінійної крайової задачі шляхом її зведення до стійких алгоритмів розв'язування послідовності відповідних лінеаризованих крайових задач; моделювання процесів прискорення збіжності алгоритмів послідовних наближень розв'язування задач розрахунку і оптимізації; проведення порівняльного аналізу їх застосування; розробка програм отримання числових результатів розв'язування конкретних задач; обробка числових розрахунків і їх аналіз; участь у обговоренні отриманих результатів і висновків.

Структура та обсяг дисертації Дисертація складається із анотацій, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел із 138 найменувань та додатку, вона містить 32 рисунки, 2 таблиці. Загальний обсяг роботи складає 147 сторінок.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику, доктору технічних наук, професору, Заслуженому діячу науки і техніки України Дзюбі Анатолію Петровичу за постійну увагу, доброзичливе ставлення та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1.

Аналітичний огляд проблеми розрахунку і зниження обчислювальних витрат в механіці неоднорідних оболонок

Широке застосування оболонкових конструкцій у різних галузях сучасної техніки визначається вимогами міцності та надійності, архітектурними рішеннями, технологічними потребами, економічною ефективністю та іншими обставинами, що призводять до ускладнення геометричної та фізичної структур оболонки. В проблемах підвищення надійності та зниження матеріаломісткості оболонкових конструкцій складної структури істотне значення приділяється як створенню уточнених та узагальнених методів їх розрахунку, так і вдосконаленню самих конструкцій. Оболонки проектуються гладко- та ступінчасто-змінної товщини, гранованими, підкріпленими ребрами та накладками, послабленими отворами, виїмками та каналами, багатошаровими. Велике практичне значення мають питання нелінійного деформування, визначення критичних навантажень і напружень, визначення раціонального розподілу матеріалу в об'ємі конструкції, тощо.

Дослідження, окреслені метою і завданням дисертації, мають за теоретичне підґрунтя результати робіт Л. Є. Андрєєвої, В. А. Баженова, В. Л. Бідермана, І. А. Біргера, П. І. Булакаєва, А. Т. Василенка, А. С. Вольміра, К. З. Галімова, Е. І. Григолюка, В. З. Грищака, С. К. Годунова, Я. М. Григоренка та О. Я. Григоренка, І. В. Григорьєва, В. С. Гудрамовича, А. П. Дзюби, О. А. Ілюшина, Ж. Йосса та Д. Джозефа, А. В. Кармішина, М. С. Корнішина, І. Б. Лазарева, Л. Д. Левитіної, В. П. Малкова, В. І. Мяченкова, В. В. Новожилова, Н. І. Ободан, Дж. Ортегі та В. Рейнболдта, В. В. Петрова, С. Д. Понамарьова, П. О. Стеблянка, В. В. Торопова, В. І. Феодосьєва, В. Ф. Формалева, Д. Хіммельблау, Е. Хога, В. І. Шалашиліна, В. Є. Шаманського та інших.

1.1. Математичні моделі та існуючі підходи до розв'язання нелінійних задач механіки оболонок обертання.

Значний внесок у розвиток нелінійної теорії пружних оболонок зробили Н. А. Алумяє [6], М. О. Алфутів [7], С. О. Амбарцумян [9], І. Я. Аміро [10], В. А. Баженов [16], Н. В. Валішвілі [23], А. С. Вольмір [28], І. І. Ворочич [29], К. З. Галімов [31], Є. О. Гоцуляк [36, 47], Е. І. Григолюк [37, 38], Я. М. Григоренко [39 – 45], О. М. Гузь [46], В. І. Гуляєв [47, 48], Л. Г. Доннел [51], В. О. Заруцький [54], Б. Я. Кантор [56], Я. Ф. Каюк [63], М. С. Корнішин [64], Х. М. Муштарі [74], В. В. Новожилов [78], Дж.Оден [80], В. Г. Піскунов [85], Ю. М. Почтман [54, 86], С. П. Тимошенко [93], В. І. Феодосьєв [96] та багато інших вчених. Для математичного опису процесів геометрично нелінійного деформування оболонок широко використовуються формулювання визначальних рівнянь у приростах [79, 105]. Огляд літератури з класичної та уточнених теорій оболонок і методів їх розрахунку міститься у роботах [21, 23, 28, 31, 51, 74, 78, 93, 96, 98], як і подальші перспективи їх розвитку. У більшості робіт розглядаються конструкції з ізотропних матеріалів.

Дослідження нелінійного деформування та стійкості оболонок складної геометричної форми наведені в роботах [15, 28, 43, 48].

Практичне значення мають дослідження поведінки оболонок ступінчато-змінної товщини [47, 56, 62, 83], які є простішими у виготовленні ніж оболонки з гладко-змінною товщиною. Поведінка ребристих оболонок розглянута в роботах Н. П. Абовського [1], І. Я. Аміра і В. О. Заруцького [10], Г. Д. Гавриленка [30], В. В. Карпова [57, 62], А. І. Маневича [68, 69] та інших.

Існують різні варіанти підходу до побудови рівнянь нелінійної теорії, що моделюють напружено-деформований стан кільцевих пластин та оболонок обертання, які зазнають великих переміщень при малих деформаціях [1, 18, 41] та ґрунтуються на різних гіпотезах та припущеннях, пов'язаних з врахуванням додаткових (нелінійних) складових. Суть відомих в сучасній літературі підходів до розробки алгоритмів розрахунку таких оболонок, які мають значні переміщення, полягає в лінеаризації відповідної нелінійної системи рівнянь і подальшій побудові числових ітераційних схем уточнення результатів їх

розв'язування або у зведенні нелінійної крайової задачі до задачі Коші з невідомими початковими умовами, що уточнюються надалі за допомогою різних методів (зокрема, Ньютона – Канторовича) [1, 3, 57].

Слід мати при цьому на увазі, що математичні моделі, які описують напружено-деформований стан таких оболонкових елементів, мають наближений характер, а забезпечення збіжності використовуваних алгоритмів часто є проблемним, що не завжди дозволяє отримувати результати, які були б адекватними реальній поведінці відповідних конструктивних елементів. Тому встановлення відповідності розрахункових результатів параметрам поведінки реальних конструктивних елементів є досить важливою для практичних застосувань задачею.

Дослідженню напружено-деформованого стану різних конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності присвячені роботи [1, 48, 83, 114, 117, 120]. В роботі [77] розглядаються різні варіанти постановок геометрично нелінійних співвідношень і на прикладі деяких завдань показані плюси і мінуси кожного з підходу. Оцінена похибка яку вносить кожної з розглянутих постановок.

Для формулювання і розв'язання задачі оптимізації оболонок обертання змінної як у меридіональному, так і в окружному напрямі товщини при несиметричному навантаженні пропонується використання методу прямих, що належить до групи наближених методів розв'язання крайових задач, заснованих на зниженні розмірності розв'язуваної задачі.

В основі метода закладена ідея зведення двовимірних крайових задач теорії пластин і оболонок до одномірних і подальшому застосуванню чисельних методів. Розв'язання крайових задач математичної фізики і механіки був запропонований і розвинутий у роботах Л. В. Канторовича [57], Ю. П. Петрова [84], Я. М. Григоренка [39 – 45] й інших авторів.

1.2. Методи та засоби розв'язування нелінійних задач механіки оболонок.

Сучасний розвиток обчислювальної техніки стимулює розробку нових уточнених методів дослідження оболонок, які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Важливе значення набуває розробка програмних комплексів (в тому числі і автоматизованих), які є необхідним інструментом для практичного вирішення розглянутої проблеми шляхом проведення числових досліджень.

Метод скінчених елементів (МСЕ), який є визнаним провідним методом числового аналізу напружено деформівного стану складних оболонкових систем, дозволяє, з достатньою точністю, наближати розрахункову дискретну модель до реального об'єкту, надаючи можливість для розрахунку оболонкових систем довільної форми при різних граничних умовах і зовнішніх навантаженнях. Неперервне вдосконалення обчислювальної техніки стимулює подальший розвиток МСЕ. Дослідженню методом скінчених елементів нелінійного деформування неоднорідних оболонок складної форми та структури присвячені роботи [1, 22, 49, 58, 97, 99, 101, 106, 108, 110]. Важливими перевагами МСЕ є можливість проведення досліджень на основі математичних моделей, що максимально наближені до реальної роботи конструкції, та виконання розрахунків різних типів конструкцій за одною універсальною методикою. Головною складністю при цьому є вибір скінченно-елементної моделі конструкції, оскільки не всі елементи, що добре працюють у лінійних задачах статички забезпечують отримання прийнятних результатів у нелінійних задачах.

При деформуванні гнучких оболонок характерною є поява великих переміщень, що створює проблему коректного урахування зміщення скінченного елемента як жорсткого цілого. В монографії О. І. Голованова та М. С. Корнішина [32] виконаний докладний огляд значної кількості найвідоміших на той час плоских і криволінійних скінчених елементів тонких пологих і непологих оболонок (біля 70 СЕ) та пластин (більше 30 СЕ). Наведені різні способи

покращення властивостей оболонок з аналізом можливості поширення цих прийомів з одних типів елементів на інші.

Проблемі реалізації методик дослідження нелінійного деформування оболонок з різноманітними конструктивними особливостями у вигляді обчислювальних комплексів присвячені роботи [49, 58, 101]. Наразі існує більше сотні різноманітних обчислювальних комплексів в яких розрахунки конструкції виконуються методом скінчених елементів у формі переміщень, але не всі з них мають можливість врахування в розрахунках геометричної нелінійності.

При розробці програмних систем для розрахунку тонкостінних оболонкових конструкцій в основному застосовуються два підходи. Перший полягає у використанні в скінченно-елементній моделі конструкції значної кількості спеціалізованих скінчених елементів для апроксимації різних видів напружено деформівного стану в різноманітних конструктивних елементах оболонки. Наприклад, в бібліотеках скінчених елементів відомих обчислювальних систем «ЛИРА» [35], «SCAD» [60], ANSYS [73, 116] міститься декілька десятків скінчених елементів. Для користувачів це викликає певні труднощі, як при їх вивченні так і при практичному застосуванні. Другий підхід базується на використанні малої кількості універсальних скінчених елементів та побудові на їхній основі загальних методик розрахунків, які простіші у застосуванні. Цей підхід є перспективним як для наукових досліджень так і для практичного застосування. Прикладом такого підходу є обчислювальні комплекси «АПРОКС» та «ПРОЧНОСТЬ-75».

Методи дослідження та програмні засоби для розрахунку задач втрати стійкості та закритично поведінки гнучких оболонок у геометрично нелінійній постановці в промислових обчислювальних системах подано недостатньо. Для розв'язування подібних задач існує небагато обчислювальних комплексів, до яких, наприклад, можна віднести: «ЛИРА», «ПРОЧНОСТЬ-75», «SCAD», «ANSYS», «SOLIDWORKS». В обчислювальному комплексі «NASTRAN» існує режим розрахунку «Нелінійний статичний аналіз», в якому передбачена

можливість аналізу стійкості ліанеризованої системи в припущенні пружної поведінки її матеріалу. Не всі типи скінчених елементів, що наведені в цьому обчислювальному комплексі, можуть застосовуватись у нелінійному аналізі, що значно обмежує його можливості.

Розроблений в [14, 17] метод дослідження нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки неоднорідних оболонок реалізованого у вигляді обчислювального комплексу, що орієнтований на персональні комп'ютери. Він відповідає сучасним вимогам щодо інтелектуалізації обчислювальних і сервісних можливостей програм з питань завдання вихідної інформації, генерації розрахункових схем, автоматизованої роботи алгоритмів розв'язування задачі, способів обробки, аналізу та візуалізації результатів розрахунку. Розв'язування геометрично нелінійної задачі стійкості неоднорідної оболонки організовано з автоматизованим проходженням докритичної та закритичної ділянок узагальненої діаграми «навантаження – прогин» та визначення особливих точок. Передбачена можливість перетворення точок розгалуження на критичні за допомогою початкових недосконалостей вихідної форми конструкції, також передбачені широкі можливості візуалізації результатів розрахунку.

Також певні труднощі з використанням МСЕ виникають в задачах оптимізації конструкцій, бо на кожному кроці оптимізації необхідно переробляти і уточнювати сітку скінчених елементів.

Тому поряд з усе більш популярним у обчислювальній практиці МСЕ актуальним лишається і використання інших числових методів.

Огляд літератури та аналіз крокових, ітераційних і комбінованих методів розв'язування нелінійних задач наведено у роботах М. О. Алфутова [7], І. Я. Аміро [10], В. А. Баженова [14 – 17], Н. В. Валішвілі [23], А. С. Вольміра [28], І. І. Воровича [29], Є. О. Гоцуляка [36], Я. М. Григоренка [39 – 45], Е. І. Григолюка [37, 38], О. М. Гузя [46], В. І. Гуляєва [47], Б. Я. Кантора [56], М. С. Корнішина [64], Н. І. Ободан [118], Дж. Одена [80], Дж. Ортегі і В. Рейн-

болдта [82], С. П. Тимошенка [93], В. І. Феодосьєва [96], В. І. Шалашилїна [104, 105] та інших.

Розв'язування задачі розрахунку напружено-деформованого стану оболонки у геометрично нелїнійній постановці пов'язане з побудовою загального алгоритму, в якому формування та розв'язування нелїнійних рївнянь є найбільш трудомістким етапом при дослідженні нелїнійного деформування конструкції. Проблема зменшення загального об'єму обчислювальних робіт зумовлює необхідність застосування ефективних обчислювальних методів і алгоритмів розв'язування системи нелїнійних рївнянь.

Систематизація крокових алгоритмів розв'язування задач нелїнійного деформування з позиції методу продовження за параметром подана в монографії Е. І. Григолюка, В. І. Шалашилїна [38]. Вибір параметру продовження є одним із центральних моментів, що забезпечує успішне продовження розв'язку в околі особливих точок.

Зміна параметру продовження в околі граничної точки розроблена Д. Ф. Давиденко [48] з посиланнями на дослідження У. Левер'є та А. Пуанкаре. Крокові алгоритми дозволяють визначити напружено-деформований стан конструкції на кожному кроці навантаження (для будь-якої точки діаграми «навантаження – прогин») та моделювати різні варіанти взаємодії силових і температурних полів: їхню спільність, послїдовність, залежність, тощо. При цьому збіжність розв'язку може бути досягнена регулюванням величину кроку навантаження. Залучення алгоритму продовження розв'язку за параметром дає можливість, обравши необхідний параметр, проходити криву «навантаження – прогин» незалежно від її вигляду та неоднозначності. Оптимальний вибір параметрів алгоритму дає змогу розв'язувати нелїнійну задачу з максимально можливим прирощенням кроку та у найшвидший час. Будучи, по суті, аналогом методу Ейлера, цей метод характерний тим, що в ньому не передбачена компенсація похибки обчислень, викликаної лінеаризацією нелїнійних рївнянь на кожному кроці. Тому досягнення необхідної точності може бути отримано

шляхом, зменшення величини збільшення навантаження. Є такі варіанти неявних схем інтегрування задачі Коші по параметру із застосуванням різних способів поліпшення збіжності ітераційних процесів типу методу Ньютона – Рафсона [33, 59, 112].

Для пошуку коренів системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відомо чимало методів, зокрема: Ньютона, бісекції, хорд, градієнтного спуску. Серед них свою ділянку займає і метод простої ітерації, завдяки своїй простій реалізації. Окрім нелінійних рівнянь його також використовують для розв’язування лінійних алгебраїчних рівнянь та розрахунку періодичних режимів. Найкращим за своїми характеристиками серед наведених є безумовно метод Ньютона. Однак, для певних видів нелінійних рівнянь, а особливо тих в яких не лінійність зумовлена ще й табличними кривими, використання методу Ньютона є ускладненим через необхідність взяття похідної. І в цих випадках для спрощення реалізації досліджуваної задачі використовують метод простої ітерації. Варто зауважити, що цей метод часто має погану збіжність, тобто розбігається чи зациклюється, що зумовлено погано вибраним початковим наближенням або невдалим приведенням рівнянь до вигляду, зручного для ітерації.

Відомий метод послідовних навантажень, сформульований В. З. Власовим, і В. В. Петровим незалежно від методу продовження рішення по параметру, може бути зрозумілий як алгоритм інтегрування задачі Коші по параметру, методом Ейлера. Таке розуміння методу послідовних навантажень вперше, мабуть, було досягнуто в роботі [84], що дозволило модифікувати його на основі схеми Рунге – Кутта, істотно підвищивши тим самим його точність і позбавивши його в значній мірі від накопичення похибки, особливо властивою методу Ейлера .

Суть ряду методів полягає в лінеаризації вихідної нелінійної системи рівнянь (до таких методів можуть бути віднесені, зокрема, методи змінних параметрів пружності, додаткових навантажень та ін.) і подальшого розв’язування відповідних лінійних крайових задач. При цьому питання про доцільність вибору

того чи іншого методу залишається складним у зв'язку з відсутністю надійних і практично зручних критеріїв оцінки збіжності існуючих методів послідовних наближень розв'язування нелінійних крайових задач теорії оболонок.

Проблема оптимізації параметрів і зниження матеріаломісткості конструкцій машинобудування належить до найбільш актуальних задач механіки деформівного твердого тіла. Алгоритми вагової оптимізації визначення нерегулярних (залежних від координат серединної поверхні оболонкового елемента) параметрів конструкцій ґрунтуються, як правило, на використанні різних варіантів методу послідовних наближень. Задача оптимального проектування характеризується, як правило, наявністю досить значної кількості таких варійованих параметрів, обумовленою суттєвою нерегулярністю сучасних конструкцій. При цьому застосування дискретних методів оптимізації та методу скінчених елементів досить часто обмежується значними труднощами, що обумовлені, як великою розмірністю оптимізаційної задачі, так і складнощами зміни скінчено-елементної сітки у зв'язку зі зміною товщини стінки чи інших параметрів тонкостінних елементів конструкцій на кожному кроці пошукового алгоритму.

Альтернативою такого підходу є застосування дискретно-континуальних методів розрахунку та методів теорії оптимальних процесів до розв'язування таких задач.

У задачах визначення оптимального розподілу матеріалу [50] або розрахунку довговічності оболонок з урахуванням деградації їх поверхні в умовах агресивного середовища [79] параметри жорсткості змінюються на кожному кроці ітерацій. Це призводить до труднощів перебудови сітки при використанні відомих пакетів кінцево-елементного аналізу [8, 49] на кожному кроці ітераційного розрахункового (пошукового) алгоритму.

Досить поширеним підходом до дослідження поведінки таких конструктивних елементів є безпосереднє розв'язання крайових задач які описують їх стан системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, де невідомими є компоненти напружено-деформованого стану [42, 76].

У разі оболонок обертання зі змінною вздовж меридіана товщиною стінки використовується метод розподілу змінних з використанням розкладів компонентів напружено-деформованого стану та навантаження в тригонометричні ряди Фур'є за круговою координатою [18, 39, 42, 52, 76, 113]. В результаті задача розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться, в загальному випадку, до вирішення $n + 1$ систем звичайних диференціальних рівнянь для відшукування n гармонік розкладів шуканих функцій в ряди Фур'є. Тут параметри неоднорідності (зміна товщини стінки оболонки) враховуються досить просто, оскільки вони виявляються складовими коефіцієнтів цих систем. Далі основні обчислювальні витрати при використанні такого підходу пов'язані, головним чином, тільки з необхідністю вирішення великої кількості таких одновимірних крайових задач. Тому зниження обчислювальних витрат на пошук їх вирішення є досить важливим.

1.3. Розрахунок гнучких неоднорідних оболонок обертання з довільною формою меридіану.

Тонкостінні конструкції типу пластин і оболонок забезпечують економічність і водночас міцність та жорсткість споруд, конструктивним елементам яких вони є, та знаходять широке застосування у різних областях техніки, машинобудування. Одним із різновидів таких конструкцій є сільфони, які знаходять широке застосування в промисловості при розв'язанні різноманітних технічних задач. Вони використовуються як пружні чутливі елементи в приладах різного призначення, виконують функції компенсаторів теплових розширень трубопроводів, роздільників середовищ, геометричних ущільнювачів та ін.

Сільфони є дуже важливим елементами приладів. Термін служби і надійність сільфонів, як правило, визначають термін служби і надійність роботи приладів і приборів в цілому. Цим пояснюється та увага, яка сьогодні надається питанням розрахунку сільфонів. Сільфони, як чутливі елементи, застосовують у приладобудуванні з початку минулого сторіччя. Протягом

багатьох років визначення властивостей сільфонів, їхніх характеристик здійснювали винятково експериментально. Досить обґрунтовані дослідження, присвячені розрахунку сільфонів, з'явилися тільки на початку 40-х рр. ХХ ст. Це пояснюється великою кількістю труднощів, з якими довелося зустрітися при виборі доступної для теоретичного аналізу розрахункової схеми, що добре відбиває реальний сільфон.

Плідним виявився енергетичний підхід до розрахунку сільфонів. Уперше його застосував В. І. Феодосьєв [95]. Рішення було отримане методом Рітца. Воно дозволило визначати чутливий сільфон з урахуванням особливостей геометрії гофра в припущенні, що товщина стінки обернено пропорційна відстані від осі. Контур меридіонального перетину вважався складеним з прямих, сполучених дугами однакового радіуса. Розрахунок дає результати, що добре збігаються з експериментом. Ця обставина сприяла популярності методу розрахунку, запропонованого В. І. Феодосьєвим. Однак перше наближення за методом Рітца не давало настільки добрих результатів при визначенні напружень, і питання розрахунку напружень у сільфоні довгий час залишалося відкритим.

Пізніше енергетичний метод використовували такі дослідники, як Н. А. Алфутов [7], Л. Е. Андрєєва [11], Лаупа і Н. А. Вейл [66], Міяїрі й ін. [72], Такедзоно С. [92].

У ряді випадків при наближеному визначенні жорсткості вводилося допущення, що енергія деформації залежить тільки від меридіонального вигину гофра («балкова» теорія) [27, 53].

Найпростішою і розповсюдженою в ранніх роботах була розрахункова схема, у якій сільфон розглядався як ряд кільцевих пластин, послідовно скріплених по зовнішніх і внутрішніх контурах жорсткими циліндрами [11]. Отримані на основі такої схеми розрахункові формули прості, однак їхнє застосування можливе тільки при проведенні дуже наближених розрахунків.

Інший простий, але досить неточний підхід до задачі визначення жорсткості сільфонів полягає в прирівнюванні жорсткості сільфона і гофрованої смуги такого ж профілю [27]. Іноді автори звертаються до простих емпіричних співвідношень [87].

Залучення теорії тонких пружних оболонок до розрахунку сільфонів мало на меті дати більш вимогливе і точне рішення задачі, по можливості, вільне від спрощень геометричного і крайового характеру. Перша робота в цьому напрямку виконана В. І. Феодосьєвим [95]. Рішення побудоване на основі сполучення конічної і тороїдальної оболонок, рівняння яких отримані із загальних рівнянь Мейсснера. Радіуси торових ділянок прийняті однаковими. Вперше було проведено дослідження напруженого стану в різних точках меридіонального перетину сільфона. Однак, незважаючи на прийняті спрощення, рішення відрізняється великою складністю. Несприятливе співвідношення між труднощами одержання рішення і недостатньою, у силу прийнятих спрощень, точністю його стримувало більш глибоке вивчення сільфонів на основі теорії тонких оболонок. Тому дослідники зверталися до розрахункових схем, що включають уже ретельно досліджені тонкостінні елементи. Так, розрахункову схему, складену з торових ділянок і кільцевої пластини, розглядали Лаупа і Вейл [66], Хамада і Такедзоно [92], Міяїрі й ін. [72]. У цих роботах складові елементи гофра розглядаються окремо, а потім зістиковуються. При аналізі торових ділянок, як правило, автори звертаються до теорії тонкостінних оболонок. Рішення для тороїдальних ділянок гофра в степеневих рядах застосовано, коли оболонка досить товстостінна. У протилежному випадку велика точність досягається при асимптотичному методі рішення.

Значна кількість робіт присвячена розрахунку сільфонів, у яких гофри складаються зі сполучених тороїдальних ділянок, при невеликій глибині, обкреслені по деякій періодичній кривій.

Майже у всіх роботах з розрахунку сильфонів товщина стінки гофра прийнята постійною або ступінчато змінною від кільцевої (конусної) ділянки до торової. Так, Н. А. Алфутов [7], В. И. Феодосьев [95], В. Б. Жуков [53] приймали гіперболічну зміну товщини стінки гофра уздовж радіуса

$$h = h_0 \frac{R_B}{r},$$

де r і R_B – поточний і внутрішній радіуси сильфона; h і h_0 – товщина стінки на поточному і внутрішньому радіусах.

На основі припущення, що при гідроформуванні гофрів пластична деформація в меридіональному напрямку відбувається також безперешкодно, як і зміна товщини, Е. Л. Аксельрад [4] ввів більш загальний зв'язок

$$h = h_0 \left(\frac{R_B}{r} \right)^\gamma.$$

В. А. Сухарев [94] запропонував апроксимувати зміну товщини поліномом, ступінь якого підбирається за заданим значенням товщини в окремих точках меридіана відповідно до числа інтерполяційних вузлів. Л. Є. Андрєєва і Л. Н. Горячова [97] прийняли функцію товщини у вигляді тригонометричного ряду.

Введення в розрахункову практику ЕОМ дозволило відмовитися від багатьох спрощень при виборі розрахункової схеми, а також сформулювати і вирішити низку нових задач.

Принципи чисельного рішення пластин і оболонок кінцево-різницеvim методом застосовані Арчером [107], Сепетоски та ін.

У роботах [20, 71] розглянуто питання про крайовий ефект у сильфоні.

В усіх згаданих працях розрахунок сильфонів наведено в лінійній постановці. Він характеризується тією чи іншою точністю (залежно від обраної розрахункової схеми) поводження сильфонів на початку навантаження, коли

зміна форми серединної поверхні незначна. Зі збільшенням навантаження первісна форма сільфона істотно змінюється, що викликає перерозподіл внутрішніх зусиль у сільфоні і приводить до нелінійної залежності між навантаженням, напруженням і переміщеннями.

Вперше розрахунок сільфона в нелінійній постановці виконав Н. Н. Бабаєв. Ним прийнята дуже спрощена розрахункова схема: сільфон розглядається як ряд круглих кільцевих пластин постійної товщини, жорстко стиснених по контурах; отримані рішення в двох наближеннях. Э. Л. Аксельрад [4] запропонував дослідження сільфонів при кінцевих переміщеннях на основі отриманих ним нелінійних рівнянь теорії тонких оболонок. Рішення [4] проводиться в тригонометричних рядах для довільної форми напівхвилігофра сільфона, нелінійність урахується шляхом розкладань по ступенях параметрів зміни кривизни і навантаження. Розвиток ідей Э. Л. Аксельрада втілено в роботах Н. М. Савкіна, що стосуються в основному лінійних задач.

У [90] наведено розв'язання задачі розрахунку сільфонів у нелінійній постановці на основі методу Ньютона та показано, що чисельне рішення нелінійних задач розрахунку сільфонів може виконуватися наближено, на основі методу послідовних навантажень.

1.4. Прискорення збіжності алгоритмів оптимізації.

Проблемі прискорення збіжності основних ітераційних методів присвячено низку фундаментальних праць [1, 70, 81, 94, 100, 122].

Так, у роботі [1] побудовано швидкозбіжний ітераційний метод розв'язування лінійних систем з довільними дійсними не виродженими погано зумовленими матрицями великих порядків з довільною структурою ненульових елементів.

Серед методів неполіноміального прискорення використовують методи адитивної та мультиплікативної корекції [70, 94, 122]. Проте, і тут головною

проблемою є побудова методів, що мають високу швидкість збіжності й достовірні критерії отримання «прийняттого наближеного розв'язку».

У роботі [89] пропонується покращити збіжність методу простої ітерації за допомогою усередненого демпфування.

Ітераційні методи розглянуті в монографії [82], яка присвячена числовим методом розв'язування систем нелінійних рівнянь. Докладно досліджені ітераційні процедури методу Ньютона та питання їх збіжності. Ці методи базуються на багаторазовому розв'язанні лінеаризованих рівнянь. Вони дають можливість отримувати розв'язки, які з необхідною точністю відповідають нелінійним рівнянням. Серед ітераційних алгоритмів найчастіше застосовуються метод Ньютона – Рафсона та модифікований метод Ньютона – Канторовича [3]. Дослідження [33, 59, 112] показали, що перший метод, який має квадратичну швидкість зменшення похибки, веде до великих витрат комп'ютерного часу, оскільки вимагає формування та обернення матриці розв'язуваної системи рівнянь на кожній ітерації. Другий метод, що має меншу швидкість збіжності, для слабо нелінійних задач вимагає значно меншого обсягу обчислень, оскільки формування та обернення матриці системи рівнянь виконуються тільки на першій ітерації. До недоліків методу Ньютона – Рафсона необхідно віднести його більшу нестійкість у порівнянні з методом Ньютона – Канторовича на сильно нелінійних ділянках (особливо в районі точок біфуркації) через погану визначеність лінеаризованих матриць).

В роботі французьких вчених [109] оцінено дві методики прискорення збіжності: модифікований метод мінімальної поліноміальної екстраполяції та апроксимації Паде. Застосовується модифікований метод Ньютона – ітераційний коректор із великим порядком, та оригінальний алгоритм вібрації в'язко-пружні конструкції на прикладі розв'язання нелінійних задач з теорії тонких оболонок. Представлені дві техніки прискорення, проведені чисельні числові тести які демонструють переваги та недоліки кожної прискорювальної техніки. У роботі продемонстровані методики прискорення збіжності з використанням

простих засобів, які ведуть до побудови простих, ефективних та надійних алгоритмів, які значно «легші», ніж алгоритми типу Ньютона.

У роботі [119] розглядається прискорення збіжності ітеративних нелінійних методів. Ефективний ітераційний алгоритм, названий 3-х точковим методом, застосовується до нелінійного аналізу структур. З точки зору обчислювальних витрат, кожна ітерація 3-х точкового методу відповідно вимагає трьох оцінок функції. Авторами описано ефективні функції для прискорення процесу збіжності. Запропонований метод має порядок збіжності вісім, а його реалізація не вимагає обчислення похідних вищого порядку порівняно з більшістю інших методів того самого порядку збіжності.

При розв'язанні задач оптимального проектування складних багатопараметричних конструкцій кількість ітерацій пошукового оптимізаційного алгоритму часто виявляється досить значною, а враховуючи, що і прямий розрахунок таких об'єктів оптимізації (результати якого необхідні на кожному кроці пошуку для обчислення цільової функції, обмежень, а у деяких випадках і похідних від них) теж достатньо трудомісткий, може бути поставлена під сумнів і сама можливість оптимізації. Тому питання про зменшення кількості таких розрахунків є досить актуальним. Можливими підходами до розв'язування проблеми є застосування апроксимацій стану конструкції [65], проведення попереднього аналізу чутливості [103] або імітаційного моделювання об'єкту оптимізації [67, 121], яке полягає у використанні на окремих етапах пошуку певних моделей простішої структури, описуючих поведінку конструкції з контрольованого похибкою. Питання про зменшення кількості етапів одержання екстремуму функцій є актуальним і для задач нелінійного програмування, які по своїй суті є ітераційними [88, 102].

Аналіз існуючих алгоритмів розв'язування нелінійних задач доводить, що найбільшу ефективність мають комбіновані алгоритми, які базуються на сполученні крокових та ітераційних процедур. Більшість з відомих алгоритмів

розрахунку пов'язані зі зведенням вихідної нелінійної крайової задачі до задачі Коші з невідомими початковими умовами, які уточнюються надалі із умов виконання крайових умов на правій границі інтегрування за допомогою методу Ньютона – Канторовича. Побудова та ефективне застосування таких алгоритмів чисельного розв'язання нелінійних крайових задач часто включає елементи певного «мистецтва», а їх реалізація є досить трудовитратною і, крім того, не завжди дозволяє отримати достовірні розв'язки відповідних задач розрахунку.

1.5. Висновки до розділу.

Із аналізу літературних джерел випливає, що більшість із відомих алгоритмів розв'язання нелінійних задач механіки неоднорідних оболонок пов'язані зі зведенням вихідної нелінійної крайової задачі до задачі Коші з невідомими початковими умовами, які уточнюються надалі у процесі задоволення крайових умов із умов виконання крайових умов на правій границі інтегрування з використанням методів пристрілки, Ньютона – Канторовича та інших підходів.

Суть іншої групи методів, до яких можна віднести, зокрема, методи змінних параметрів пружності, додаткових навантажень та інші, полягає в лінеаризації вихідної нелінійної системи рівнянь і подальшому розв'язуванні сукупності відповідних лінійних крайових задач.

Огляд публікацій, аналіз проблеми в цілому і основних досягнутих результатів у цій галузі, а також методів розрахунку стану оболонок з нелійними параметрами, що знайшли відображення в досить значній кількості оглядових робіт, монографій та наукових статей, вказує на те, що побудова та ефективне застосування числових алгоритмів розв'язання нелінійних крайових задач часто включає елементи певного «мистецтва», а їх реалізація, як правило, є досить трудовитратною і, крім того, не завжди дозволяє отримати достовірні розв'язки. При цьому питання про доцільність вибору того чи іншого методу все ще

залишається дискусійним у зв'язку з відсутністю надійних і практично зручних критеріїв оцінки збіжності існуючих методів послідовних наближень розв'язування нелінійних крайових задач теорії оболонок.

За результатами огляду зроблено висновки щодо місця роботи серед сучасних досліджень з даної проблематики і обґрунтовано актуальність та основні задачі дисертаційної роботи.

Перелік джерел посилань до розділу 1

1. Абовский Н. П. О применении метода конечных элементов совместно и другими методами. Труды КПИ, вып. 8, Красноярск, 1975.
2. Абовский Н. П., Шоева Е. Т. Ребристые оболочки: Учебное пособие / КПИ. Ч. II. Смешанный метод расчета. – Красноярск, 1970. – 100с.
3. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. – Москва: Физматлит, 2002. – 320 с.
4. Аксельрад Э. Л. Периодические решения осесимметричной задачи теории оболочек. -"Механика твердого тела", 1966. – № 2. – С. 77-83.
5. Аксельссон М. Т. CAD для новичков: LibreCAD, QCAD, FreeCAD, OpenSCAD SolveSpace (рус.) // Linux Format : журнал. – СПб., 2017. – Май (№ 05 (223)). – С. 24-29.
6. Алумяэ Н. А. О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек. Прикл. математика и механика, 1956. – 20. – № 1. – С. 136-139.
7. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1984. – 264 с.
8. Алямовский А. А. SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – Москва: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.
9. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. –Москва: Наука, 1974. – 448 с.
10. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек: Методы расчета оболочек (в 5 т.): – Киев: Наук. Думка, 1980. – Т.2. – 367с.
11. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. – Москва: Машгиз., 1962. – 456 с.

12. Андреева Л. Е., Горячева Л. Н. Уточненный расчет жесткости и напряжений в сильфоне. // Сб. "Расчеты на прочность". – Москва: Машиностроение, 1969. – Вып.14. – С. 17-35.
13. Бабушка И, Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений: монография. – Москва: Мир, 1969. 368 с.
14. Баженов В. А. та ін. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – Киев, 2000. – 386 с.
15. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей М. О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури : монографія. – Киев: Віпол, 2010. – 315 с.
16. Баженов В. А. и др. Оптимизация оболочек вращения при ограничениях прочности // Строит. мех. и расчет сооруж. – 1988. – №6. – С.1-5.
17. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры – монография. – Москва, 2012. – 336 с.
18. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
19. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика. –Москва: Наука, 1983. – 328 с.
20. Булгаков В. Н. Напряжения и перемещения сильфонов // Численные методы в прикладной теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1968. – С. 211-248.
21. Вайнберг Д. В. Розрахунок пластин, Київ: Будівельник, 1970. – 436 с.
22. Вайнберг Д. ФВ., Городецкий А. С., Киричевский В. В., Сахаров А. С. Метод конечных элементов в механике деформируемых тел // Прикладная механика, т. 8, №8, 1972
23. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278с.

24. Вешемірський А. Прискорення збіжності ітераційних методі розв'язування систем лінійних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика, 2006. – Вип. 11. – С. 29-34.
25. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М.; Д.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
26. Воеводин В. В. Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – Москва: Наука, 1984. – 320 с.
27. Волков А. Н. Определение продольной жесткости гофрированных оболочек применительно к расчету сильфонов. "Инженерный журнал", 1962. – Т.2. – Вып.2. –№2. – С. 368-372.
28. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
29. Ворович И. И., Лебедев Л. П. Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций // Прикл. механіка, 2002. – 38. – № 4. – С. 3-19.
30. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Устойчивость подкрепленных оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего (внешнего) давления // Доповіді Національної академії наук України, 2010. – № 4. – С. 48-52.
31. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
32. Голованов А. И., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Монография. – Казань, 1989. – 270 с.
33. Головин В. М., Самарский А. А., Фаворитовский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидромеханике. //ДАН СССР, 1977. – Т 235. – №6. – С. 1285-1288
34. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Гостехиздат, 1953.

35. Городецкий А. С., Олин А. И., Батрак Л. Г., Домащенко В. В., Маснуха А. М. «Лира-ПК» – программный комплекс для расчёта и проектирования конструкций на персональных компьютерах. – К.: Изд-во НИИАСС, 1988.
36. Гоцуляк Е. А., Прусов Д. Э. Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Прикладная механика, 2000. – Т. 36. – № 11. – С. 82-87
37. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Проблемы построения теории тонких пластин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2006. Вип. 3. – С. 56-71.
38. Григолюк Э. И. Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела, 1988. – Москва. – 232 с.
39. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1981. – Т. 4. – 544 с.
40. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикладная механика, 1991. – № 10. – С.3-33.
41. Григоренко Я. М., Драйгор Н. Д., Шинкарь А. И. К решению задач о напряженном состоянии ортотропных цилиндрических оболочек с переменной жесткостью в двух направлениях // Сопротивление материалов и теория сооружений. М. 1977. Вып. 30. С. 3–10.
42. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1979. – 280 с.
43. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. 1996. – 32. – № 6. – С. 3-31.
44. Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Захарийченко Л. И. Исследование влияния геометрических параметров на напряженное состояние цилиндри-

ческих оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Приклад. механика, 2009. – 45, N 2. – С. 91-98.

45. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Приклад. механика. – 2004. – 40, N 2. – С. 67-73.

46. Гузь А. Н., Хорошун Л. П., Ванин Г. А. и др. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Том 1: Механика материалов. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с.

47. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. Расчет оболочек сложной формы. – К.: Будівельник, 1990. – 192с.

48. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // укр. мат журнал 1955. Т.7. №1 с. 18-28.

49. Дащенко А. Ф., Лазарева Д. В., Сурьянинов Н. Г. ANSYS в задачах инженерной механики: монография. Изд 2-е перероб и доп. / под ред. Сурьянинова Н. Г. Харьков: «Бурун и К», 2011. 504 с.

50. Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба А. А., Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій // в кн.: Актуальні проблеми механіки: монографія / під ред. М. В. Полякова. – Д.: Ліра, 2018. – 225–243 с.

51. Доннел Л. Г. Балки, пластины, оболочки. – Москва: Наука, 1982. – 568 с.

52. Емельянов И. Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // Вычислительная механика сплошных сред, 2015. – Т.8. – № 3. – С 245-253.

53. Жуков В. Б. Осевая жесткость бесшовного сильфона. "Вестник машиностроения", 1968. – № 2. – С. 27-29.

54. Заруцкий В. А., Почтман Ю. М., Скалозуб В. В. Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек. – Киев: Вища школа, 1990. – 138с.

55. Зуев Н. Н., Князев Э. Н., Костриченко А. Б., Шалашилин В. И. Реализация продолжения по наилучшему параметру в геометрически и физически нелинейных статических задачах метода конечных элементов // Изв. РАН. МТТ, 1997. – № 6. – С. 136-147.
56. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – Киев: Наукова думка, 1974. – 136 с.
57. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа., М.-Л.: Физматгиз, 1962.
58. Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера. – Москва: УРСС, 2003.
59. Капустин С. А. Численный анализ нелинейных квазистатических процессов деформирования составных конструкций // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Горький. 1979. Вып. 10. с. 68-80.
60. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Малярченко А. А. и др. SCAD OFFICE. Вычислительный комплекс SCAD. – Москва: АСВ, 2007.
61. Карпов В. В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения. Москва – Санкт-Петербург, 1999.
62. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСВ, СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
63. Каюк Я. Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1987. – 208 с.
64. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С. Гибкие пластины и панели. – Москва: Наука, 1968. – 260 с
65. Лазарев И. Б., Круглов А. И., Редьков Е. В. Поэтапная оптимизация с использованием аппроксимаций состояния конструкций // Численные методы расчета и оптимизации строительных конструкций: труды ин-та ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. – 1989. – С. 39-46.

66. Лаупа А., Вейл Н. А. Расчет компенсаторов с V-образными гофрами. "Прикладная механика", пер. с англ., 1962. – Т.29. – сер. Е.
67. Малков В. П. Торопов В. В., Филатов А. А. Имитационный подход к оптимизации деформируемых систем // Прикл. пробл. прочн. и пластичности: всесоюзн. межвуз. сб. – Горький. – 1982. – С.62–69.
68. Маневич А. И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикл. математика и механика, 1982. – 46. – № 2. – С. 337-345.
69. Маневич А. И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев; Донецк: Вища школа, 1979. - 152 с.
70. Мартыненко С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках // Журнал вычислительная математика и программирование, 2000. –Т. 1. – С. 83-102.
71. Миткевич В. М., Шулика А. К. К численному решению краевых задач статики осесимметричных оболочек методом сведения к задачам Коши // Прикладная механика, 1972. –№5. – С. 34-40.
72. Мияри Кируо, Хосия Масаясу, Накахара Итиро. Напряжения и прогибы, возникающие в V-образном сильфона при действии внутреннего давления и осевой нагрузки. "Нихон кикай гаккай ромбунсю, Tzans. ISM E ", 1966, 32, II 238.
73. Морозов Е. М., Муйземнек А. Ю., Шадский А. С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. - Москва: ЛЕНАНД, 2008. - 456 с.
74. Муштари Х. М. К теории изгиба оптимальных круглых пластин переменной толщины // Некоторые вопросы теории пластин и оболочек: Сб. научн. тр. Казань, 1976. – С. 10-14.
75. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.

76. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1981. – 212 с.
77. Никиреев В. М. К решению нелинейных уравнений строительной механики методом последовательных нагружений // Строительная механика и расчет сооружений, 1970. – № 3. – С. 61-62.
78. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
79. Овчинников И. Г., Почтман Ю. М. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа: монография. – Д., 1995. – 192 с.
80. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1976. – 464 с.
81. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – Москва: Мир, 1991. – 364 с.
82. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 560 с.
83. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. // – Москва: Наука, 1964. – 336 с.
84. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. – 119 с.
85. Пискунов В. Г., Вережко В. Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев, 1986. – 178 с.
86. Почтман Ю. М. Оптимальное проектирование методами математического программирования некоторых стержневых и континуальных систем с учетом потери устойчивости (обзор) // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск: ДГУ, 1975. – Вып. 19. – С. 107-114.

87. Расчет и проектирование систем трубопроводов. Перевод с англ. под ред. Камерштейна А. Г., Рождественского В. В. – Москва: Гостоптехиздат, 1961.– 474 с.
88. Реклейтис Г. Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: в 2-х кн. – Москва: Мир. – 1986. – Кн.1. – 349 с. – Кн.2. – 320 с.
89. Самотий В., Павельчак А., Дзелендзяк У. Покращання збіжності методу простої ітерації за допомогою усередненого демпфування // Вісник НУ «Львівська політехніка» : Комп'ютерні системи і мережі, 2011. – № 717. – С. 153-157.
90. Сильфоны. Расчет и проектирование. Под ред. Л. Е. Андреевой. – Москва: Машиностроение, 1975. – 156 с.
91. Сухарев В. А. Расчет сильфонов. Численные методы в прикладной теории упругости. –Киев: Наукова думка, 1968. – С. 176-210.
92. Такэдзоно С. и др. Данные для расчета на прочность тороидальных компенсаторов сосудов давления. "Нихон кикай гаккай ромбунсю. J. Japan. Soc. m«ch. Eagr.," ,1969. – 72. – № 608.
93. Тимошенко С. Н., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 635с.
94. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961. – С. 892-927.
95. Феодосьев В. И. Расчет гофрированных коробок (сильфонов) методом Ритца. "Труды кафедры "Соппротивление материалов" МВТУ", 1947, разд.2.
96. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. Издание девятое, переработанное: рец. ак. В. В. Новожилов // Учебник для вузов. – Москва: Наука, 1986. –512 с.

97. Филин А. П. Расчет оболочек на основе дискретной расчетной схемы /МКЭ/ с применением ЭЦВМ. Сб.: Большепролетные оболочки. – Т. 1. – Москва: Стройиздат, 1969.
98. Филин А. П. Элементы теории оболочек. – Ленинград: Стройиздат, 1987. – 384 с.
99. Форсберг К. Оценка методов конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек. Сб.: Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. – Т.2. – Ленинград: Судостроение, 1974.
100. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
101. Хечумов Р. А., Кеплер Х., Прокопьев В. И. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. – Москва: АСВ, 1994.
102. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – Москва: Мир, 1975. – 534 с.
103. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. – Москва: Мир, 1988. – 428 с.
104. Шалашилин В. И. Алгоритмы метода продолжения по параметру для больших осесимметричных прогибов оболочек вращения // Численные и экспериментальные методы исследования прочности, устойчивости и колебаний конструкций. – Москва: МАИ, 1983. - С. 6871.
105. Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки // Изв. АН СССР. МТТ, 1979. – №4. – С. 178-184.
106. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC. Visual Nastran for Windows. – Москва: ДМК, 2004.
107. Archer R. R. On the numerical solution of the non-linear equations for shell of rotations // J. math and phys., 1962. –16. –No 3. – P. 165-178.

108. Barraco A. Application de la methode des elements finis au calcul des plaques flechies. "Constr. Metal." – №3. – 10, 1973.

109. Cadou J.-M., Duigou L., Damil N., Potier-Ferry M. Convergence acceleration of iterative algorithms. Applications to thin shell analysis and Navier-Stokes equations. Computational Mechanics, Springer Verlag, 2009. – 43 (2). – P. 253-264. [ff10.1007/s00466-008-0303-1](https://doi.org/10.1007/s00466-008-0303-1) [ffhal00403320f](https://doi.org/10.1007/s00466-008-0303-1)

110. Clough R.W.: The Finite Element in Plane Stress Analysis. -Proceedings 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation, Pittsburg. Pa. Sept, 1960.

111. Fisher C. A., Bert C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers // Trans ACME. Ser., E, 1973. – 40. – №3. –P. 736-740.

112. Gouveia B. P. P .A., Rodrigues J. M. C., Martins P. A. F. Finite element modeling of cold forward extrusion using updated Lagrangian and combined Eulerian-Lagrangian formulations // J. of Materials Processing Technology, 1998. – 80-81. – P. 647-652.

113. Hudramovich V. S., Dzyuba A. P. Contact interaction and optimization of locally loaded shell structures, Journal of mathematical Science - Springer Science + Business media. – 162, 2009. –P. 231-245.

114. Klee K. D., Paulun J. On numerical treatment of large elastic-visco-plastic defomiations // Arch. mech. stosow., 1980. – V. 32. – N 3. – P. 333-345.

115. Lahaye M. E. Solution of sistem of transcendental equations // Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci, 1948.

116. Lee H.-H. (Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 17. SDC Publications, 2017).– 50 p.

117. Moresi L., Dufour F., Muhlhaus H.-B. A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials // J. of Comput. Physics, 2003. – V. 184. – P. 476-497.

118. Obodan, N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. – N.-Y.: Springer, 2013. – 180 p.

119. Saffari H., Mirzai N., Mansouri I. An accelerated incremental algorithm to trace the nonlinear equilibrium path of structures. Latin American Journal of Solids and Structures [online]. 2012, – V. 9. – №. 4 [Accessed 15 June 2021] , – P. 425-442. Available from: <<https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000400001>>. Epub 21 Jan 2013. ISSN 1679-7825. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000400001>.

120. Synka J., Kainz A. A novel mixed Eulerian-Lagrangian finite-element method for steady-state hot rolling processes // Int. J. of Mech. Sc, 2003. – V. 45. – P. 2043-2060.

121. Toropov V. V. Simulation approach to structural optimization // Structural Optimization, 1989. – №1(1). – P. 37–46.

122. Wesseling P. An introduction to multigrid methods. – Chichester, 1991. – 284 p.

РОЗДІЛ 2.

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Другий розділ присвячено побудові алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів, що виникають при дослідженні нелінійних математичних моделей неоднорідних оболонок обертання з довільною формою меридіану.

Демонструється методика розробки та проводиться порівняльний аналіз ефективності авторських та існуючих підходів до побудови і прискорення збіжності алгоритмів розв'язування таких нелінійних крайових задач теорії оболонок шляхом проведення комп'ютерного числового моделювання процесів послідовних наближень з застосуванням різних методів до вирішення конкретних задач та оцінки недоліків і переваг кожного із підходів.

2.1. Рівняння напружено-деформованого стану оболонок обертання при великих переміщеннях. Основні співвідношення.

Використовується нелінійна моментна теорії оболонок. Вважається, що оболонки (з довільною в загальному випадку формою меридіану) є ізотропними, пружними і тонкостінними. Приймається справедливність гіпотез Кірхгоффа, малості деформацій і кутів повороту порівняно з одиницею. Товщина стінки оболонки приймається змінною вдовж меридіану $h = h(s)$. Слід зазначити, що зміна товщини $h(s)$ оболонок обертання має бути досить плавною $dh/ds \ll 1$ [3, 16, 31]. Інакше прийняті вихідні гіпотези будуть порушені, а отримані при розрахунках результати – не достатньо надійними.

При цьому встановлення вірогідності результатів, отриманих за допомогою різних підходів до побудови нелінійної теорії, їх порівняльний аналіз, оцінка похибок, яку у цьому випадку дає розрахунок за лінійною та відповідними нелінійними теоріями, а також відповідності розрахункових результатів поведінки реальних конструктивних елементів є досить важливими [2, 6, 7, 25].

Рівняння стану, що описують великі деформації оболонки обертання з довільною формою меридіану під дією осесиметричного навантаження приво-

дяться до крайової задачі для системи нелінійних диференціальних рівнянь. При цьому в рівняннях стану, у порівнянні з лінійною постановкою, враховуються нелінійні складові (другого порядку малості) кута повороту нормалі серединної поверхні та їх вплив на решту компонентів напружено-деформованого стану.

Слід зазначити, що у випадку загальноприйнятого подання сил і переміщень системи рівнянь стану оболонки в локальній системі координат, коефіцієнти системи можуть мати розриви у точках, де стрибками змінюється кривина меридіану. Якщо ж меридіан оболонки складається з декількох ділянок з кутовими точками між ними, виявляється необхідним складати рівняння сумісності для стиковки різних ділянок, що досить незручно.

Ці труднощі можна обійти, якщо перейти до глобальних координат [3]. Для цього сили і переміщення серединної поверхні оболонки проектуються не на дотичну і нормаль до меридіану, а на нормаль до осі симетрії оболонки і на саму вісь (рис. 2.1.).

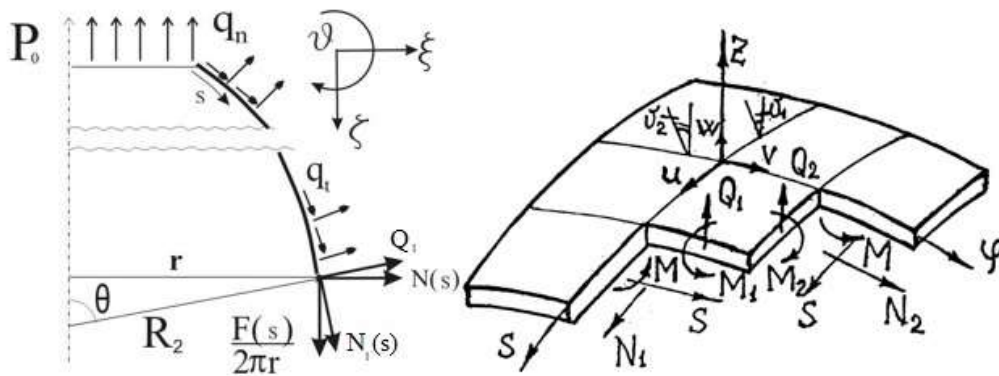


Рисунок 2.1. – Розрахункова модель

У відповідності до підходу (запропонованого В. Л. Бідерманом) [3] кільцева пластина розглядається як оболонка обертання, меридіан якої збігається з радіусом пластини, коли крім врахування нелінійних доданків вважається, що кут θ між нормаллю і віссю обертання оболонки змінюється в процесі деформації

$$\theta^+ = \theta + \vartheta_r.$$

Рівняння деформацій подаються у вигляді:

$$\frac{d\xi}{dr} = \varepsilon_r \cos \vartheta_r + \cos \vartheta_r - \cos \theta; \quad \frac{d\zeta}{dr} = \varepsilon_r \sin \vartheta_r + \sin \vartheta_r;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\xi}{r}; \quad \kappa_r = \frac{d\vartheta_r}{dr}; \quad \kappa_\theta = \frac{\sin \vartheta_r}{r}.$$

Використовуючи рівняння пружності

$$N_r = D_N (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = D_N (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r);$$

$$M_r = D_M (\kappa_r + \mu \kappa_\theta); \quad M_\theta = D_M (\kappa_\theta + \mu \kappa_r),$$

де $D_N = Eh/(1-\mu^2)$, $D_M = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ – тангенціальна і згинна жорсткості; E – модуль Юнга; μ – коефіцієнт Пуассона, після деяких нескладних перетворень отримуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора змінних $\bar{Z}^T(s) = \{\xi, \theta^+, N_r, M_r, \zeta\}$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\mu}{r} \cos \theta^+ \xi + \cos \theta^+ - \cos \theta + \frac{1}{Kr} \cos^2 \theta^+ (Nr) + \frac{1}{2Kr} \sin 2\theta^+ \frac{F(s)}{2\pi},$$

$$\frac{d\theta^+}{ds} = \frac{1}{Dr} (M_1 r) - \frac{\mu}{r} \sin \theta^+ + \frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{r} \sin \theta,$$

$$\frac{d(Nr)}{ds} = \frac{K(1-\mu^2)}{r} \xi + \frac{\mu}{r} \cos \theta^+ (Nr) + \frac{\mu}{r} \sin \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi} - q_r r,$$

$$\frac{d(M_1 r)}{ds} = \frac{D(1-\mu^2)}{2r} \sin 2\theta^+ - \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos \theta^+ \sin \theta + \sin \theta^+ (Nr) +$$

$$+ \frac{\mu}{r} \cos \theta^+ (M_1 r) - \cos \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi},$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\mu}{r} \sin \theta^+ \xi + \frac{1}{2Kr} \sin 2\theta^+ (Nr) + \sin \theta^+ - \sin \theta + \frac{1}{Kr} \sin^2 \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi},$$

де $s_0 \leq s \leq s_l$ – довжина меридіану; $r(s)$ – радіус паралельного круга; $\theta(s)$, $\theta^+(s) = \theta(s) + \vartheta_r(s)$ – кут між віссю обертання та нормаллю до недеформованої та деформованої поверхні, відповідно; ϑ_r – кут повороту нормалі до серединної поверхні в процесі деформації; u , w – радіальне та осьове переміщення; N_r – розпірне зусилля; M_r – згинаючий момент; $F(s)$, $q_r(s)$ – сумарна осьова та радіальна складові зовнішнього розподіленого навантаження;

$K = Eh/(1-\mu^2)$, $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ – жорсткість на розтяг та циліндрична жорсткість, відповідно; E , μ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона; $h(s)$ – змінна (у загальному випадку) уздовж меридіану товщина стінки оболонки.

Отримана вище система диференціальних рівнянь може бути записана відносно вектора змінних $\bar{Z}^T(s) = \{\xi, \vartheta_r, N_{rr}, M_{rr}, \zeta\}$ у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{ds} &= -\frac{\mu}{r}(\cos\vartheta_r \cos\theta - \sin\vartheta_r \sin\theta)\xi - \vartheta_r \sin\theta + \frac{1}{Kr} \cos^2(\theta + \vartheta_r)(N_{rr}) + \\
&\quad + \frac{1}{Kr} \sin(\theta + \vartheta_r) \cos(\theta + \vartheta_r) \frac{F(s)}{2\pi} + \cos(\theta + \vartheta_r) - \cos\theta + \vartheta_r \sin\theta, \\
\frac{d\vartheta_r}{ds} &= \frac{1}{Dr}(M_{rr}) - \vartheta_r \frac{\mu}{r} \cos\theta + \frac{\mu}{r}(-\sin(\theta + \vartheta_r) + \sin\theta + \vartheta_r \cos\theta), \\
\frac{d(N_{rr})}{ds} &= \frac{K(1-\mu^2)}{r} \xi + \frac{\mu}{r} \cos(\theta + \vartheta_r)(N_{rr}) + \frac{\mu}{r} \sin(\theta + \vartheta_r) \frac{F(s)}{2\pi} - q_{rr}, \\
\frac{d(M_{rr})}{ds} &= \vartheta_r \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos(\theta + \vartheta_r) \cos\theta + \sin(\theta + \vartheta_r)(N_{rr}) + \\
&\quad + \frac{\mu}{r} \cos(\theta + \vartheta_r)(M_{rr}) - \cos(\theta + \vartheta_r) \frac{F(s)}{2\pi} + \\
&\quad + \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos(\theta + \vartheta_r)(\sin(\theta + \vartheta_r) - \sin\theta - \vartheta_r \cos\theta), \\
\frac{d\zeta}{ds} &= -\frac{\mu}{r} \sin(\theta + \vartheta_r)\xi + \vartheta_r \cos\theta + \frac{1}{2Kr} \sin(2(\theta + \vartheta_r))(N_{rr}) + \\
&\quad + \frac{1}{Kr} \sin^2(\theta + \vartheta_r) \frac{F(s)}{2\pi} + \sin(\theta + \vartheta_r) - \sin\theta - \vartheta_r \cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Крайові умови для основних змінних $\{\xi, \vartheta_r, N_r, M_r, \zeta\}$ стану оболонки для системи (2.1) приймаються у відповідності до умов закріплення її контурів:

- а) жорстке затиснення: $\xi = \vartheta_r = \zeta = 0$;
- б) шарнірне обпирання: $\xi = \zeta = M_r = 0$;
- в) вільний край: $N_r = M_r = 0$ або $N_r = N_0, M_r = M_0$.

(2.2)

Зауважимо, що коли обидва краї оболонки обертання жорстко затиснені або шарнірно обперті, то додатково виникає необхідність розкриття статичної невизначеності одним із відомих методів.

Розв'язок системи (2.1) суттєво ускладнений тим, що значення однієї із змінних \mathfrak{A}_r є нелінійною складовою коефіцієнтів системи.

У відповідності до підходу, запропонованого Я. М. Григоренко [15], на відміну від лінійної теорії, в рівняннях рівноваги і співвідношеннях для деформацій враховуються малі другого порядку.

Після деяких перетворень можна отримати систему рівнянь відносно вектора змінних $\bar{Z}^T(s) = \{N_r, \xi, Q_r, M_r, \mathfrak{A}_r, \zeta\}$ у вигляді

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dr} &= -\frac{1}{K} N_r - \frac{\mu}{r} \xi - \frac{1}{2} \mathfrak{A}_r^2; \\
 \frac{d\mathfrak{A}_r}{dr} &= \frac{1}{D} M_r - \frac{\mu}{r} \mathfrak{A}_r; \\
 \frac{dN_r}{dr} &= -\frac{1-\mu}{r} N_r + \frac{(1-\mu^2)K}{r^2} \xi; \\
 \frac{dQ_r}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r - \frac{(1-\mu^2)K}{r^2} \xi \mathfrak{A}_r - \frac{1}{D} N_r M_r + q_n; \\
 \frac{dM_r}{dr} &= -Q_r - \frac{1-\mu}{r} M_r + \frac{(1-\mu^2)D}{r^2} \mathfrak{A}_r; \\
 \frac{d\zeta}{dr} &= -\mathfrak{A}_r.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

де Q_r , – поперечне зусилля; q_n – інтенсивність поперечного навантаження.

Система (2.3) доповнюється крайовими умовами відповідно закріпленню контурів оболони у вигляді:

- а) жорсткого затиснення $\xi = \mathfrak{A}_r = \zeta = 0$;
- б) шарнірного обпирання $\xi = \zeta = M_r = 0$;
- в) вільного краю $N_r = M_r = Q_r = 0$ або $N_r = N_0, M_r = M_0, Q_r = Q_0$.

У загальному вигляді рівняння напружено-деформованого стану таких оболонок обертання, за наявності великих переміщень при осесиметричному деформуванні, подаються у формі відповідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = A(\bar{z}(s), s) \times \bar{z} + B(\bar{z}(s), s), \quad (2.5)$$

які доповнюються відповідною кількістю крайових умов

$$f_j(\bar{z}(s_p)) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.6)$$

що відповідають різним варіантам закріплення торців оболонки у початковій $s_p = s_0$ і кінцевій $s_p = s_l$ точках меридіану оболонки. Тут $\bar{z}(s)$ – вектор змінних стану оболонки.

2.2. Лінеаризація нелінійних крайових задач розрахунку оболонок обертання.

Оскільки розв'язування нелінійної крайової задачі (2.5) з відповідними граничними умовами (2.6) ускладнюється тим, що коефіцієнти є суттєво нелінійними від компонентів вектора $\bar{z}(s)$, пропонується провести лінеаризацію системи рівнянь (2.5), де частина нелінійних складових відноситься до матриці коефіцієнтів $A(\bar{z}(s), s)$ (як аналогу методу змінних параметрів пружності), а частина – до стовпця вільних складових $B(\bar{z}(s), s)$ (як аналогу методу додаткових навантажень) з подальшим застосуванням методу прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим [8] для інтегрування лінійних крайових задач на кожному кроці ітераційного процесу уточнення нелінійних складових.

При цьому матриці $A(\bar{z}(s), s)$ і $B(\bar{z}(s), s)$ для системи (2.1) приймають вигляд:

$$A(\bar{z}(s), s) = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r} \cos \theta^+ & 0 & \frac{1}{Kr} \cos^2 \theta^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Dr} & 0 \\ \frac{K(1-\mu^2)}{r} & 0 & \frac{\mu}{r} \cos \theta^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta^+ & \frac{\mu}{r} \cos \theta^+ & 0 \\ -\frac{\mu}{r} \sin \theta^+ & 0 & \frac{1}{2Kr} \sin(2\theta^+) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$B(\bar{z}(s), s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2Kr} \sin(2\theta^+) \frac{F(s)}{2\pi} + \cos \theta^+ - \cos \theta \\ -\frac{\mu}{r} (\sin \theta^+ - \sin \theta) + \frac{1}{R_1} \\ \frac{\mu}{r} \sin \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi} - q_r r \\ -\cos \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi} + \frac{D(1-\mu^2)}{2r} (\sin(2\theta^+) - 2 \cos \theta^+ \sin \theta) \\ \frac{1}{Kr} \sin^2 \theta^+ \frac{F(s)}{2\pi} + \sin \theta^+ - \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Числові дослідження з використанням різноманітних ітераційних процесів (див. далі рис. 2.3 – 2.6), де за початкове наближення обирався розв’язок задачі у лінійній постановці, за змінною $\theta^+(s)$ розв’язання крайової задачі (2.1), (2.2) з неструктурованими матрицями коефіцієнтів (2.7), (2.8) продемонстрували нестабільну (спостерігалась збіжність до різних розв’язків) і низьку збіжність (а часто і її відсутність).

Для подолання зазначених труднощів в роботі було запропоновано подати матриці (2.7), (2.8) системи нелінійних рівнянь при великих переміщеннях у структурованій формі – наближеній до матриць системи лінійних рівнянь, розв’язування яких достатньо апробовано [3, 21]. З цією метою з урахуванням $\theta^+(s) = \theta(s) + \vartheta(s)$ в системі (2.1) була проведена заміна невідомої функції $\theta^+(s)$ на $\vartheta(s)$, як однієї з компонент вектора \bar{z} , який тепер для цієї системи набув вигляду $\bar{z}^T(s) = \{\xi, \vartheta, Nr, Mr, \zeta\}$. Крім того до правих частин кожного з 5-

ти рівнянь системи (2.5) було додано по два однакові доданки з різними знаками відповідно:

$$\begin{aligned}
 & 1) -\vartheta \sin \theta + \vartheta \sin \theta; \quad 2) -\vartheta \frac{\mu}{r} \cos \theta + \vartheta \frac{\mu}{r} \cos \theta; \quad 3) -0 + 0; \\
 & 4) \vartheta \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos(\theta + \vartheta) \cos \theta - \vartheta \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos(\theta + \vartheta) \cos \theta; \quad (2.9) \\
 & 5) \vartheta \cos \theta - \vartheta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

При цьому перший з доданків було віднесено до матриці A , а другий – до матриці B . Незважаючи на те, що такий штучний прийом збільшив кількість нелінійних складових цих матриць, це дозволило не тільки підвищити обумовленість матриці A , але і подати її у вигляді відповідної матриці для лінійної системи [3].

$$A(\bar{Y}(s)) = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r} \cos(\theta + \vartheta) & -\sin \theta & \frac{1}{Kr} \cos^2(\theta + \vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{r} \cos \theta & 0 & \frac{1}{Dr} & 0 \\ \frac{K(1-\mu^2)}{r} & 0 & \frac{\mu}{r} \cos(\theta + \vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eh^3}{12r} \cos(\theta + \vartheta) \cos \theta & \sin(\theta + \vartheta) & \frac{\mu}{r} \cos(\theta + \vartheta) & 0 \\ -\frac{\mu}{r} \sin(\theta + \vartheta) & \cos \theta & \frac{1}{2Kr} \sin(2(\theta + \vartheta)) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$B(\bar{Y}(s)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Kr} \sin(\theta + \vartheta) \cos(\theta + \vartheta) \frac{F(s)}{2\pi} + \cos(\theta + \vartheta) - \cos \theta + \vartheta \sin \theta \\ \frac{\mu}{r} (-\sin(\theta + \vartheta) + \sin \theta + \vartheta \cos \theta) \\ \frac{\mu}{r} \sin(\theta + \vartheta) \frac{F(s)}{2\pi} - q_r r \\ -\cos(\theta + \vartheta) \frac{F(s)}{2\pi} + \frac{D(1-\mu^2)}{r} \cos(\theta + \vartheta) (\sin(\theta + \vartheta) - \sin \theta - \vartheta \cos \theta) \\ \frac{1}{Kr} \sin^2(\theta + \vartheta) \frac{F(s)}{2\pi} + \sin(\theta + \vartheta) - \sin \theta - \vartheta \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Оскільки із (2.10), (2.11) випливає, що всі нелінійні складові є залежними лише від одного параметра – кута повороту нормалі \mathcal{G} , то цю функцію і було обрано для побудови відповідних ітераційних процесів та оцінки їх збіжності. Відносна похибка методу послідовних наближень обчислювалась наступним чином

$$\sqrt{\frac{\sum_i (\mathcal{G}^{n+1}(s_i) - \mathcal{G}^n(s_i))^2}{\sum_i (\mathcal{G}^n(s_i))^2}} \leq \varepsilon, \quad (2.12)$$

де ε – задана точність.

Як показали результати проведених системних обширних числових експериментів подання матриць A і B системи (2.5) у вигляді (2.10), (2.11) дозволило зробити ітераційний процес розв'язання крайової задачі стабільно збіжним та позитивно чутливим до застосовуваних методів прискорення збіжності, що створило можливості суттєвого скорочення загальної кількості ітерацій (див. далі рис. 2.3).

2.3. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів.

При реалізації алгоритму послідовних наближень було досліджено застосування найбільш поширених (та простих у реалізації) методів прискорення збіжності ітераційних процесів.

Для методу *складної ітерації* (релаксуючих множників) значення змінної $z_i^{(n+1)}$ в i -ій точці проміжку інтегрування $(n + 1)$ -го наближення визначалось за формулою [39]

$$z_i^{(n+1)} = z_i^n - \gamma (z_i^n - z_i^{(n-1)}), \quad (2.13)$$

де коефіцієнт γ обирався за результатами окремого числового експерименту (див. далі рис. 2.5) і залежав від параметрів процесу, зокрема, від величини навантаження. Випадок, коли $\gamma = 0$, як видно з (2.13), відповідає методу простої ітерації.

Для забезпечення збіжності розв'язання нелінійної крайової задачі використовувався також і більш досконалий алгоритм *методу Ейткена – Стеффенсена* [39], для якого були необхідні значення 3-х попередніх ітерацій. У цьому випадку для кожного i -го вузла інтегрування змінна $z_i^{(n+1)}$ обчислювалася за формулою

$$z_i^{(n+1)} = \frac{z_i^n z_i^{(n-2)} - \left(z_i^{(n-1)}\right)^2}{z_i^{(n-2)} - 2z_i^{(n-1)} + z_i^n}, \quad (2.14)$$

де обчислення значень $z_i^{n-2}, z_i^{n-1}, z_i^n$ здійснювалось в роботі методом релаксації (2.13).

Якщо в процесі наближень в окремих точках інтервалу інтегрування рівняння (2.5) знаменник (2.14) виявлявся рівним нулю, а інтегральна оцінка збіжності процесу у вигляді (2.12) на той час все ще не була виконана, то значення $z_i^{(n+1)}$ приймалось рівним z_i^n .

Слід зазначити, що шляхом очевидних алгебраїчних перетворень формула (2.14) може бути подана у вигляді

$$z_i^{(n+1)} = z_i^n - \frac{\left(z_i^n - z_i^{(n-1)}\right)}{z_i^{(n-2)} - 2z_i^{(n-1)} + z_i^n} \left(z_i^n - z_i^{(n-1)}\right), \quad (2.15)$$

що є, з одного боку, узагальненням (2.13) при

$$\gamma = \frac{\left(z_i^n - z_i^{(n-1)}\right)}{z_i^{(n-2)} - 2z_i^{(n-1)} + z_i^n},$$

а з іншого (приймавши до уваги, що в знаменнику (2.15) знаходиться друга, а в чисельнику – перша похідні функції z_i) – одним із варіантів квазіньютонівського методу [39].

Екстраполяція (імітація) значень прогноз-точок $z_i^{(n+1)}$ для наступного кроку ітераційного процесу може бути здійснена також із застосуванням

алгоритму *методу імітаційного прогнозування* [22, 40] за результатами 3-х попередніх кроків z_i^{n-2} , z_i^{n-1} , z_i^n , отриманих шляхом розв'язування відповідних лінеаризованих систем для кожної із точок s_i , які, крім того, також уточнюються за допомогою (2.13).

Для випадку, коли послідовність $z_i^{n-2}, z_i^{n-1}, z_i^n$ була немонотонна, тобто $(z_i^{n-1} - z_i^{n-2})(z_i^n - z_i^{n-1}) < 0$, то координати прогноз-точки обчислювались у вигляді

$$z_i^{(n+1)} = \frac{z_i^{(n-2)} + a_1 z_i^{(n-1)} + a_2 z_i^{(n)}}{1 + a_1 + a_2}, \quad n \geq 2, \quad (2.16)$$

а для випадку, коли послідовність $z_i^{n-2}, z_i^{n-1}, z_i^n$ була монотонною, тобто $(z_i^{n-1} - z_i^{n-2})(z_i^n - z_i^{n-1}) \geq 0$, тоді

$$z_i^{(n+1)} = z_i^{(n)} + \frac{z_i^{(n-1)} - z_i^{(n-2)} + b(z_i^{(n)} - z_i^{(n-1)})}{1 + b}, \quad n \geq 2. \quad (2.17)$$

Далі, за основним алгоритмом, знову здійснювалось розв'язування лінеаризованої системи на двох наступних послідовних кроках і процес продовжувався з урахуванням одержаних трьох нових точок, починаючи з прогноз-точки, до досягнення заданої точності.

Слід зазначити, що алгоритм методу імітаційного прогнозування носить досить загальний характер і деякі із відомих методів можуть бути подані як його часткові випадки. Так, при $b = \pm\infty$ із (2.17) впливає формула лінійної екстраполяції, яка співпадає з (2.13) при $\gamma = 1$, а при $b = -2$ отримуємо формулу квадратичної апроксимації.

У той же час визначення коефіцієнтів a_1 , a_2 , b у формулах прогнозу для такого підходу вдається здійснювати, як і для випадку (2.13), лише за результатами окремого числового експерименту шляхом моделювання самого ітераційного процесу [40]. Ці коефіцієнти для окремих груп задач виявляються

досить стабільними, що дозволяє їх встановлювати за результатами розв'язування сукупності окремих більш простих задач.

У поданій роботі для прискорення збіжності розв'язування нелінійних задач розрахунку та оптимізації неоднорідних елементів конструкцій запропоновано алгоритм, суть якого полягає в зменшенні кількості етапів ітераційного процесу розв'язування послідовності лінійних крайових задач шляхом моделювання ітераційного процесу з використанням періодичних екстраполяцій значень нелінійних складових та (або, для задач оптимізації) варійованих змінних. Замість проведення всього обсягу обчислень n -го кроку наближень пропонується використовувати результатів вдалих попередніх кроків розрахунку та будувати прогноз-точки.

У цілому, запропонований алгоритм прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язання нелінійних задач механіки оболонок побудовано за результатами порівняльного аналізу широкомасштабного числового експерименту з використанням комбінацій різних методів, таких як аналоги методів змінних параметрів пружності, додаткових навантажень, екстраполяцій стану конструкцій, лінійної та квадратичної апроксимації, імітаційного прогнозування, екстраполяційних поліномів Лагранжа та Ньютона, ітераційного процесу Ейткена – Стеффенсена та ін.

Найбільш ефективним виявився підхід, пов'язаний з використанням авторських прийомів спільного застосування методів релаксуючих множників (лінійної екстраполяції), поліномів Лагранжа і Ньютона (в формі аналогу методу Адамса) та ітераційного процесу Ейткена – Стеффенсена.

Визначення нелінійних складових компонентів вектора $\bar{z}_i^{(n+1)}$ для наступного кроку ітераційного процесу пропонується здійснювати шляхом екстраполяції (імітації) їх значень за результатами значень нелінійних параметрів \bar{z}_i^{n-2} , \bar{z}_i^{n-1} , \bar{z}_i^n для кожної із вузлових точок s_i ($i = \overline{0, L}$) проміжку $s_0 \leq s_i \leq s_L$ інтегрування, обчислених на трьох попередніх кроках ітераційного процесу розв'язування послідовності відповідних лінеаризованих систем.

Здійснюються три кроки ітераційного процесу, на яких нелінійні складові уточнюються з використанням методу верхньої релаксації (лінійної екстраполяції)

$$\bar{z}_i^{(n+1)} = \bar{z}_i^n - \gamma \left(\bar{z}_i^n - \bar{z}_i^{(n-1)} \right), \quad (2.18)$$

(для $n = 0$ лінеаризована задача розв'язується при початковому значенні \bar{z}^0 , що відповідає розв'язку лінійної задачі), де $0 \leq \gamma \leq 1$ – множник релаксації.

Далі форма прогнозу для кожного нелінійного j -го компонента вектора \bar{z}_i поділяється за виглядом ітераційного процесу (рис. 2.2): у випадку, коли для певного j (надалі індекс j опускається) послідовність $z_i^{n-2}, z_i^{n-1}, z_i^n$ немонотонна $(z_i^{n-1} - z_i^{n-2})(z_i^n - z_i^{n-1}) < 0$, прогноз пропонується здійснювати за формулою Ейткена – Стеффенсена

$$z_i^{(n+1)} = \frac{z_i^n z_i^{(n-2)} - (z_i^{(n-1)})^2}{z_i^{(n-2)} - 2z_i^{(n-1)} + z_i^n}, \quad n \geq 2, \quad (i=\overline{0, L}), \quad (2.19)$$

а у випадку, коли процес монотонний $(z_i^{n-1} - z_i^{n-2})(z_i^n - z_i^{n-1}) \geq 0$ – у формі аналогу методу Адамса [39]

$$z_i^{(n+1)} = \frac{23z_i^n - 16z_i^{(n-1)} + 5z_i^{(n-2)}}{12}, \quad n \geq 2, \quad (i=\overline{0, L}), \quad (2.20)$$

який ґрунтується на екстраполяційних залежностях Лагранжа і Ньютона.

Далі, за основним алгоритмом, знову здійснюється розв'язування лінеаризованої системи для двох наступних (з використанням (2.18)) послідовних кроків, і процес продовжується до досягнення заданої точності з урахуванням одержаних трьох нових точок, починаючи з прогноз-точки.

Оцінка точності ітераційного процесу обчислюється у такий спосіб

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^N (z_{i(j)}^{n+1}(s_i) - z_{i(j)}^n(s_i))^2}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^N (z_{i(j)}^n(s_i))^2}} \leq \varepsilon, \quad (2.21)$$

де ε – задана точність.

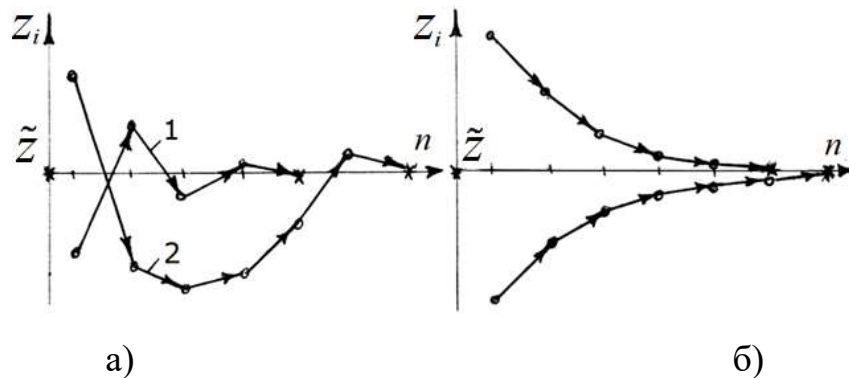


Рисунок 2.2 – Можливі траєкторії

послідовних кроків пошукового алгоритму для кожної j -ї компоненти \bar{z}_i

Такий підхід дозволяє уникнути необхідності «зайвого» розв’язання задачі розрахунку на кожному третьому кроці, що дозволяє суттєво прискорити метод послідовних наближень. Крім того, обчислювані прогностичні значення $\bar{z}_i^{(n+1)}$ часто виявляються більш близькими до відшукуваного розв’язку \tilde{z}_i ніж ті, що були отримані за основним ітераційним процесом. Все це дозволяє відчутно прискорити метод послідовних наближень.

В особливо складних випадках нелінійності (зокрема, значних переміщеннях) для забезпечення збіжності додатково може застосовуватись і метод додаткових навантажень [4, 41]. При цьому достатньо всього декількох ступенів збільшення зовнішнього навантаження з глибиною ітераційного процесу.

2.4. Числові дослідження прискорення збіжності ітераційних процесів в задачах розрахунку і оптимізації оболонкових конструкцій.

В процесі розробки, апробації та демонстрації ефективності розроблених методик були проведені числові дослідження збіжності ітераційних процесів розв’язування нелінійної крайової задачі (2.5), (2.6) для випадків, коли матриці

A і B приймалися як у їх безпосередньому вигляді (2.7), (2.8), так і в упорядкованому – (2.10), (2.11).

Вигин гнучкої кільцевої пластини. В якості першого об'єкта для досліджень було обрано тонку ($h = 0,5$ мм) кільцеву сталеву ($E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм², $\mu = 0,3$) пластинку з жорстко-затиснутим внутрішнім ($r_1 = 10$ мм) і вільним зовнішнім ($r_2 = 50$ мм) краєм, яка під дією розподіленого зовнішнього тиску ($q_n = 0,01$ Н/мм²) отримує достатньо великі прогини.

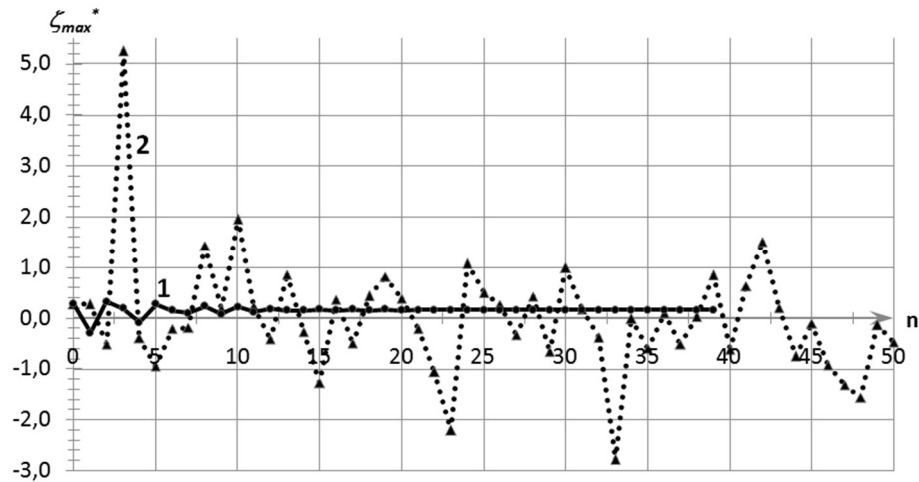
Збіжність процесів оцінювалась за відносною похибкою (2.21) при $\varepsilon = 10^{-4}$. Параметром для демонстрації збіжності ітераційного процесу було обране безвимірне значення максимального прогину $\zeta_{max}^* = \zeta_{max} / \sqrt{hr_2}$ на вільному краю пластинки у зв'язку з тим, що цей параметр є характерним для опису поведінки, у тому числі і нелінійної, пластини.

В процесі системних числових експериментів для випадку упорядкованих (структурованих) матриць A і B у вигляді (2.10), (2.11) встановлено, що при застосуванні методу релаксації (2.18) найбільш вдалим виявилось значення коефіцієнта $\gamma = 0,3$. При цьому, для досягнення заданої точності $\varepsilon = 10^{-4}$, кількість ітерацій становила $n = 39$ (лінія 1 на рис. 2.3,а, де зображено характер збіжності ζ_{max}^* в залежності від кількості ітерацій n).

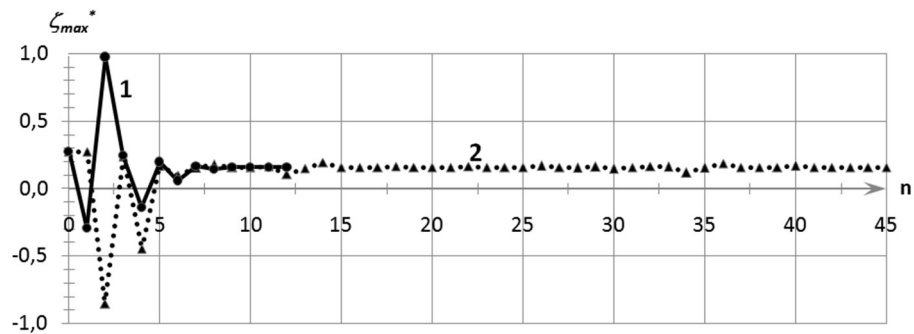
Використання запропонованого алгоритму (2.19), (2.20) дозволило зменшити кількість загальних ітерацій до $n = 12$ (рис. 2.3,б, лінія 1). Таку ж швидкість збіжності ($n = 12$, рис. 2.3,в, лінія 1) було отримано і при застосуванні методу імітаційного прогнозування (2.16), (2.17). При цьому найбільш вдалою комбінацією коефіцієнтів виявилась: $a_1 = 5$, $a_2 = 2$, $b = 1$, коли на кожному 2-му і 3-му кроках ітераційного процесу використовувалась формула (10) при $\gamma = 0,1$.

Для порівняння було досліджено також характер збіжності ітераційних процесів, побудованих з використанням описаних вище методів розв'язування крайової задачі (2.5), (2.6) і для випадку неструктурованих матриць A і B у вигляді (2.7), (2.8). З рис. 2.3 видно, що при використанні методу складної (рис. 2.3,а, лінія 2) ітерації, а також імітаційного прогнозування (рис. 2.3,в, лінія 2) для різноманітних комбінацій їх коефіцієнтів зупинити «шугання»

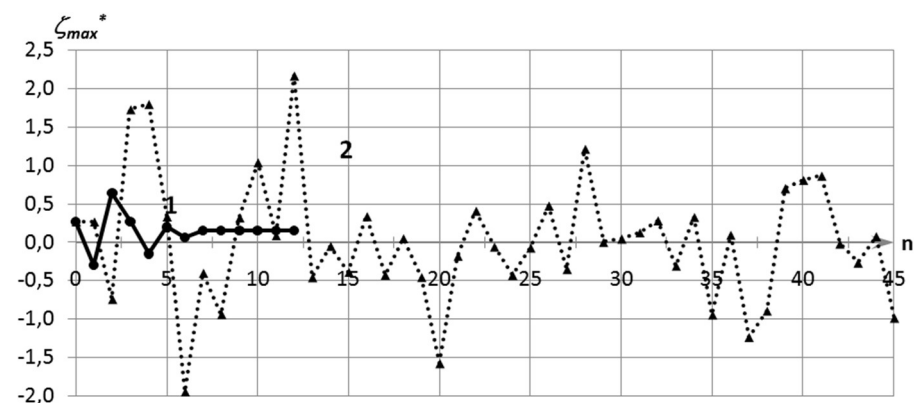
алгоритму не вдалося. При використанні запропонованого методу прискорення збіжності (2.19), (2.20) збіжність процесу візуально спостерігається (рис. 2.3,б, лінія 2), але досягти заданої точності не вдається навіть при значному зростанні n (на рис. 2.3 кількість наведених ітерацій обмежена $n \leq 50$).



а)



б)



в)

Рисунок 2.3. – Характер збіжності процесу обчислення ζ_{max}^* гнучкої кільцевої пластини з використанням методу а) складної ітерації; б) запропанованого методу; в) імітаційного прогнозування

Числовий експеримент було проведено і для випадку, коли для прискорення збіжності алгоритму розв'язання нелінійної крайової задачі (2.5), (2.6) додатково було використано *метод послідовних навантажень* [4, 32, 41]. При цьому збіжність ітераційного процесу досліджувалась для випадку матриць A і B , поданих як у структурованому вигляді (2.10), (2.11), так і у неструктурованому вигляді (2.7), (2.8). Навантаження пластинки змінювалось з $q_n = 0 \text{ Н/мм}^2$ до $q_n = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Н/мм}^2$ з кроком $0,05 \cdot 10^{-2} \text{ Н/мм}^2$. На кожному кроці навантаження розв'язання послідовності лінеаризованих крайових задач прискорювалось одним із методів (2.16) – (2.20). При цьому отриманий результат при поточному навантаженні відігравав роль початкового наближення для наступного кроку навантаження.

Було виявлено, що залучення методу послідовних навантажень в комбінації з методом простої ітерації не дозволило досягнути збіжності алгоритму, як для випадку матриць (2.10), (2.11), так і (2.7), (2.8). При цьому процес виявлявся розбіжним, коли максимальний прогин перевищував товщину пластинки. Застосування методу складної ітерації (рис. 2.3,а) було ускладнено, виявленою в процесі чисельного експерименту, залежністю коефіцієнта γ в (2.18) від величини навантаження, що призводило до значного зростання загальної кількості ітерацій n у зв'язку з необхідністю додаткового уточнення значення коефіцієнта γ на кожному кроці навантаження.

Характер процесів збіжності методу послідовного навантаження в комбінації з методом (2.19) для різних видів матриць A і B був якісно близьким, але при використанні матриць у структурованому вигляді (2.10), (2.11) цей процес збігався у 1,7 разів швидше при такому ж самому кроці за навантаженням. При використанні запропонованого методу (2.19), (2.20) загальна кількість ітерацій зменшувалась більше, ніж у 3 рази, де за одну ітерацію вважалось одне розв'язування лінеаризованої крайової задачі.

Слід зазначити, що застосування методу послідовних навантажень з малим кроком за навантаженням дозволило отримати збіжність ітераційного процесу навіть для випадків матриць A і B у неструктурованому вигляді (2.7), (2.8), хоча

загальна кількість ітерацій n , при цьому, перевищувала 10^3 , а збільшення кроку за навантаженням приводило до розбіжності процесу.

Використання запропонованого методу або методу імітаційного прогнозування для прискорення збіжності розв'язування послідовності лінеаризованих крайових задач з матрицями A і B у структурованому вигляді (2.10), (2.11), отриманих за допомогою перетворень (2.9), для кінцевого значення навантаження збігається (рис. 2.3,б,в) всього за 12 ітерацій. Це вказує на доцільність використання матриць A і B у вигляді (2.10), (2.11) та застосування для прискорення збіжності розв'язування послідовності лінеаризованих крайових задач комбінацій методів (2.19), (2.20).

З метою дослідження доцільності застосування двох різних математичних моделей, що описують напружено-деформований стан конструкції, які були запропоновані Я. М. Григоренко [15] і В. Л. Бідерманом [3] було проведено розв'язування відповідних нелінійних задач і порівняльний аналіз отриманих результатів на прикладі визначення напружено-деформованого стану кільцевих пластин при поперечному навантаженні з використанням запропонованого алгоритму.

Числовий розрахунок проведено з використанням розробленого ітераційного алгоритму для сталеві кільцевої пластинки з параметрами $r_0 = 31,5$ мм, $r_1 = 100$ мм, $h = 0,35$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$ для випадку жорстко затисненого зовнішнього і навантаженого силою Q_0 вільного внутрішнього краю.

Відповідні крайові умови (2.6) мають вигляд:

для системи (2.1) при $r = r_0$ $\xi = 0$, $Q_r = Q_0$, $\mathcal{G}_r = 0$; при $r = r_1$ $\xi = \mathcal{G}_r = \zeta = 0$;

для системи (2.3) при $r = r_0$ $\xi = \mathcal{G}_r = 0$; при $r = r_1$ $\xi = \mathcal{G}_r = \zeta = 0$.

Розв'язування кожної з наведених нелінійних систем диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами здійснюється шляхом її лінеаризації і подальшого застосування методу прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим для розв'язування виникаючих лінійних крайових задач на кожному кроці ітераційного процесу уточнення нелінійних складових. Ітераційний процес для виникаючої послідовності відповідних лінеаризованих крайових задач

побудовано комбінацією методу послідовних навантажень з використанням запропонованого в роботі методу (2.19), (2.20) на кожному кроці навантаження.

В табл. 2.1 наведено значення максимального прогину пластинки – $w_{\text{лн}}$, обчисленого за поданою у [31] формулою для лінійної системи рівнянь для різних значень Q_0 , а також максимальних прогинів $w_{\text{гр}}$ і $w_{\text{бд}}$, отриманих шляхом розв’язування системи рівнянь (2.3) і (2.1) відповідно. Наведено відповідну кількість ітерацій $n_{\text{гр}}$ і $n_{\text{бд}}$, для досягнення збіжності ітераційного процесу з відносною похибкою $\varepsilon = 10^{-3}$.

Отримані числові результати демонструють, що для малих значень зовнішнього навантаження і, як наслідок, досить малих прогинів розрахункові значення максимального прогину, обчислені за лінійною і нелінійною теоріями, співпадають, але вже для випадку, коли максимальний прогин складає половину товщини ($w_{\text{max}} \cong h/2$, $Q_0 = 2,5 H$, табл. 2.1), тобто розв’язок теоретично ще знаходиться в рамках лінійної теорії, значення прогинів, отриманих з використанням нелінійних рівнянь, відрізняються від лінійних (отриманих за формулою, наведеною в [31]) майже на 6,7%, а розбіжність результатів, отриманих з використанням різних підходів до складання нелінійних систем (2.1) і (2.3), між собою становить 6,2%. При збільшенні навантаження, коли значення максимального прогину наближається до значення двох товщин, розбіжність зазначених результатів, отриманих з використанням різних підходів до складання нелінійних систем (2.1), (2.3), збільшується в 2÷3 рази (табл. 2.1).

Слід зазначити, що ітераційний процес, який ґрунтується на використанні системи (2.3), потребує більшої кількості ітерацій ніж той, який побудований на базі системи (2.1), і більше того, такий процес втрачає стабільність та починає розбігатися при $w_{\text{max}} > 2h$. Ці особливості ітераційного процесу відповідають результатам [15], де теж спостерігалась розбіжність ітераційного процесу при розв’язування виникаючої крайової задачі з використанням алгоритму, що ґрунтується на комбінації методів Ньютона та продовженням за параметром навантаження, а за початкове наближення обирався лінійний розв’язок задачі.

Таблиця 2.1 – Значення максимального прогину пластинки,
обчислене за різними підходами

Q_0 (Н)	$w_{лн}$ (мм)	$w_{гр}$ (мм)	$n_{гр}$	$w_{бд}$ (мм)	$n_{бд}$
0,5	0,0362	0,0378	2	0,0376	4
1,0	0,0723	0,0755	3	0,0749	4
1,5	0,1085	0,1129	3	0,1094	4
2,0	0,1446	0,1474	3	0,1405	6
2,5	0,1808	0,1799	3	0,1686	6
3,0	0,2169	0,2101	6	0,1941	6
4,0	0,2892	0,2650	8	0,2387	8
5,0	0,3615	0,3132	8	0,2768	8
6,0	0,4338	0,3559	9	0,3101	8
7,0	0,5061	0,3943	10	0,3393	10
8,0	0,5784	0,4293	11	0,3659	10
9,0	0,6507	0,4613	11	0,3902	10

Q_0 (Н)	$w_{лн}$ (мм)	$w_{гр}$ (мм)	$n_{гр}$	$w_{бд}$ (мм)	$n_{бд}$
10,0	0,7230	0,4909	13	0,4126	10
11,0	0,7953	0,5185	13	0,4340	12
12,0	0,8676	0,5443	15	0,4529	10
13,0	0,9399	0,5686	17	0,4713	10
14,0	1,0122	0,5915	21	0,4891	12
15,0	1,0845	0,6133	23	0,5053	14
16,0	1,1569	0,6341	25	0,5216	12
17,0	1,2292	0,6539	25	0,5360	14
18,0	1,3015	0,6731	24	0,5505	14
19,0	1,3738	0,6910	39	0,5646	14
20,0	1,4461	0,7085	54	0,5777	14
21,0	1,5184	0,7256	143	0,5907	14

Зазначена задача розв'язувалась також з використанням розробленого алгоритму для системи (2.3) за підходом, запропонованим в [15] (стор. 107), у відповідності до якого автори пропонують будувати ітераційний процес одночасно за чотирма невідомими. Це призводить до певного збільшення витрат машинного ресурсу, але швидкість збіжності ітераційного процесу вдалося прискорити та збільшити діапазон навантажень. При цьому отримані результати розрахунку (рис. 2.13, крива 4) відрізняються від отриманих при розв'язанні системи (2.3) для випадку, коли ітерації здійснюються лише за однією змінною \mathcal{Q}_r (рис. 2.13, крива 2) не більше, ніж на 4%.

У той же час слід зазначити, що підхід до розв'язання нелінійних задач, пов'язаний з побудовою ітераційного процесу за 4-ма параметрами, для системи (2.3) (як і для ряду інших нелінійних задач оболонок обертання) виявився неможливим, оскільки одна з невідомих, за якою здійснюється ітераційний процес, входить до коефіцієнтів системи як аргумент тригонометричної функції, тобто у неявному вигляді.

Таким чином, запропонований підхід має певні переваги, оскільки для розглядуваної задачі при фактично однаковій швидкості збіжності з 4-х параметричним ітераційним процесом, він є ефективним і для задачі у вигляді (2.1), тобто є більш універсальним.

Вигин гофрованої мембрани синусоїдального профілю. За досліджуваний об'єкт було обрано оболонку у вигляді гнучкої мембрани синусоїдального профілю

$$y(r) = A(r) \sin(\omega(r - r_1)), \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dr}, \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad (2.22)$$

яка знаходиться під дією осьового зовнішнього тиску. Розрахункову схему такої оболонки наведено на рис. 2.4. Параметри конструкції були обрані наступними [3]: $r_1 = 1,9$ мм; $r_2 = 25$ мм; $h = 0,22$ мм; $A = 0,375$ мм; $w = 6,6$ мм; $q_n = 0,1$ Н/мм²; $E = 10^5$ Н/мм²; $\mu = 0,33$. Сумарне осьове та радіальне навантаження визначались за формулами:

$$F(r) = q_n \pi r^2, \quad q_r = q_n \sin(\theta + \vartheta),$$

де q_n – нормальне розподілене навантаження.

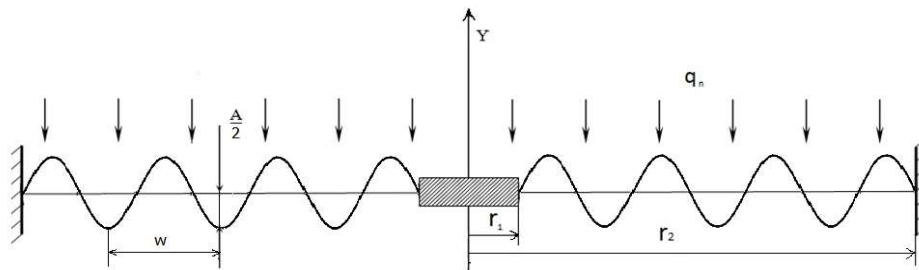


Рисунок. 2.4. – Розрахункова схема синусоїдальної мембрани

У зв'язку з тим, що профіль мембрани задається як функція від координати r доцільно перейти до інтегрування системи (2.5) за змінною r . Для цього кожне з рівнянь системи помножується на коефіцієнт $1/\cos \theta$.

Розв'язок крайової задачі (2.5), (2.6) із застосуванням методів (2.16) – (2.20) для мембрани синусоїдального профілю з матрицями A і B у неструктурованому вигляді (2.7), (2.8) вдалося отримати лише для значень амплітуди не більшої за товщину мембрани і тому в подальшому досліджувався лише випадок матриць системи у структурованому вигляді (2.10), (2.11).

Застосування методу складної ітерації (2.18) для розв'язання крайової задачі (2.5), (2.6) з матрицями A і B у структурованому вигляді (2.10), (2.11) дозволило побудувати збіжний ітераційний процес для всіх коефіцієнтів $0 \leq \gamma < 1$. Залежність кількості ітерацій n (для заданого навантаження) від коефіцієнта γ подано на рис. 2.5 (лінія 1), звідки видно, що для розглядуваної конструкції найкраща збіжність ітераційного процесу (2.18) досягається при $\gamma = 0,2$ ($n = 12$), що дозволило скоротити кількість ітерацій n у 7,5 разів порівняно з методом простої ітерації. Збіжність процесу оцінювалась за відносною похибкою (2.21), а значення ε обиралися на порядок вищим за точність розв'язання лінеаризованої крайової задачі методом прогонки.

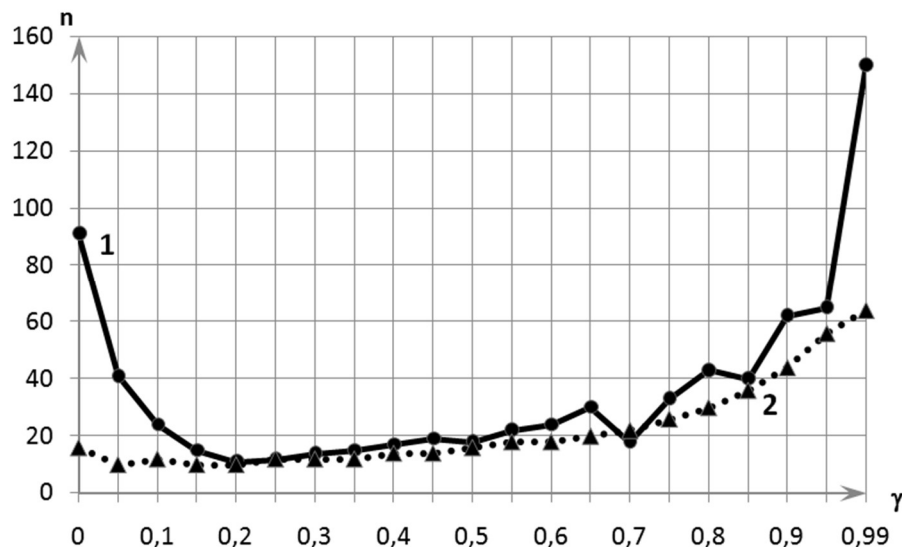


Рисунок 2.5. – Залежність кількості ітерацій n від коефіцієнта γ для метода релаксації (лінія 1), метода Ейткена – Стеффенсена з методом складної ітерації (лінія 2)

Використання запропонованого методу (2.19), (2.20) дозволило отримати збіжний процес розв'язуваної послідовності лінеаризованих крайових задач за 10 ітерацій (рис. 2.5, лінія 2, частинний випадок). Для порівняння слід зазначити, що метод простої ітерації збігався за 91 ітерацію (рис. 2.5, лінія 1). Якщо значення попередніх ітерацій методу (2.19) обчислювати з використанням

методу складної ітерації (2.18), то загальна кількість ітерацій, залежно від вибору γ , змінюється від 10 до 64 (рис. 2.5, лінія 2).

В процесі чисельного експерименту були також знайдені раціональні значення $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b = 1$ коефіцієнтів методу імітаційного прогнозування (2.16), (2.17), при яких процес збігався за $n = 10$ ітерацій.

На рис. 2.6 зображено недеформований профіль мембрани (лінія 1) та профілі мембрани під дією рівномірного тиску на окремих кроках ітераційного процесу, побудованого з використанням методів (2.18), (2.19) при $\gamma = 0,2$. Тут лінія 2 відповідає розв'язку крайової задачі у лінійній постановці, лінія 5 (при $n = 10$) – у нелінійній, а лінії 3, 4 – профілю мембрани на окремих кроках ітераційного процесу при $n = 1$ та $n = 3$, відповідно.

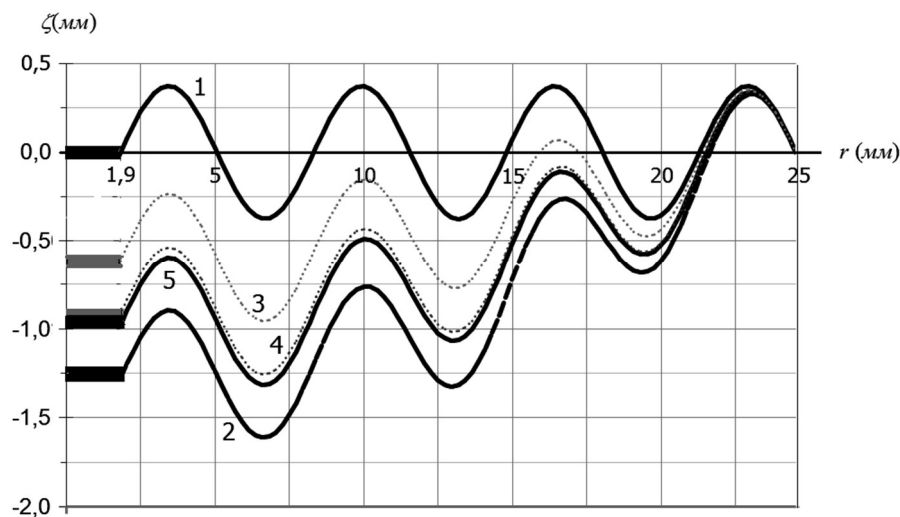


Рисунок. 2.6. – Характер зміни профілю мембрани на окремих кроках ітераційного процесу

На рис. 2.7 наведено безвимірні значення прогину жорсткого центру мембрани $\zeta_{max}^* = \zeta_{max} / \sqrt{hr_2}$ для кожного кроку методу послідовних наближень розв'язання лінеаризованих крайових задач з використанням методів прискорення збіжності (2.18) – (2.20).

Порівняння характеристик збіжності ζ_{max}^* для різних розглянутих ітераційних схем (2.18) – (2.20) розв'язування задачі рис. 2.4 наведено на рис. 2.8 Тут лінія 1 відображає процес збіжності алгоритму складної ітерації (при найвдалі-

шому значенні $\gamma = 0,2$, див. рис. 2.5 та рис. 2.7,а, лінія 1), де збіжність процесу отримана при $n = 12$; лінія 2 відповідає запропонованому методу ($n = 10$); а лінія 3 – методу імітаційного прогнозування ($n = 10$ при сукупності коефіцієнтів $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 1$, які забезпечили найкращу швидкість збіжності).

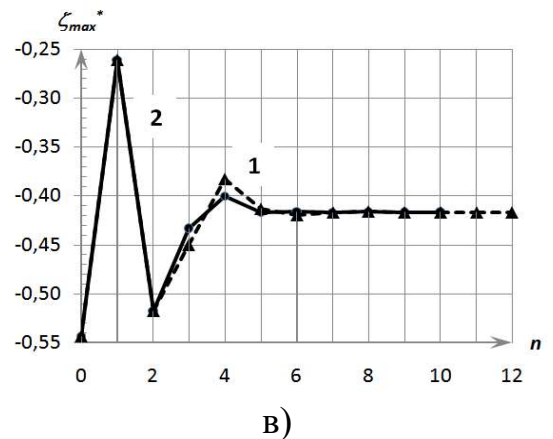
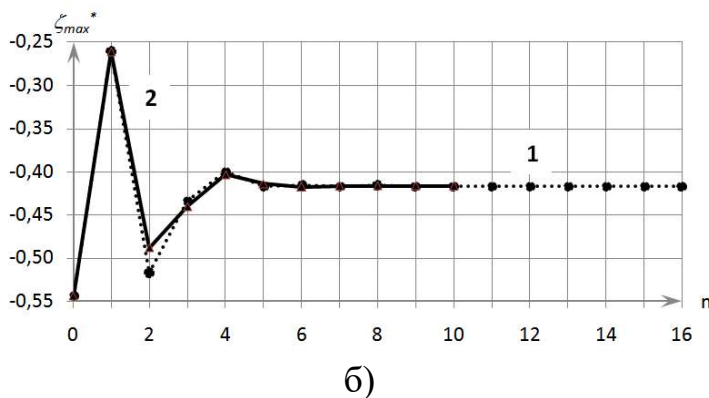
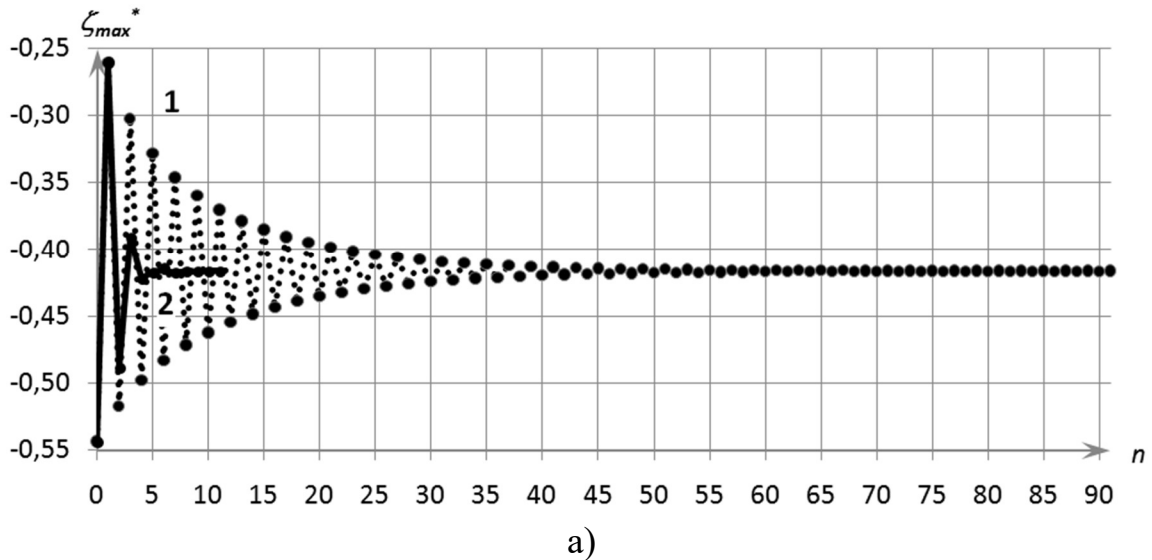


Рисунок 2.7. – Характер збіжності процесу обчислення ζ_{max}^* мембрани синусоїдального профілю з використанням методу

- а) простої (лінія 1, $\gamma = 0$) та складної (лінія 2, $\gamma = 0,2$) ітерації;
- б) Ейткена – Стеффенсена спільно з методом простої ітерації (лінія 1) запропанований метод (лінія 2);
- в) імітаційного прогнозування спільно з методом простої ітерації (лінія 1: $a_1 = 2, a_2 = 1, b = 1$; лінія 2: $a_1 = 4, a_2 = 2, b = 1$)

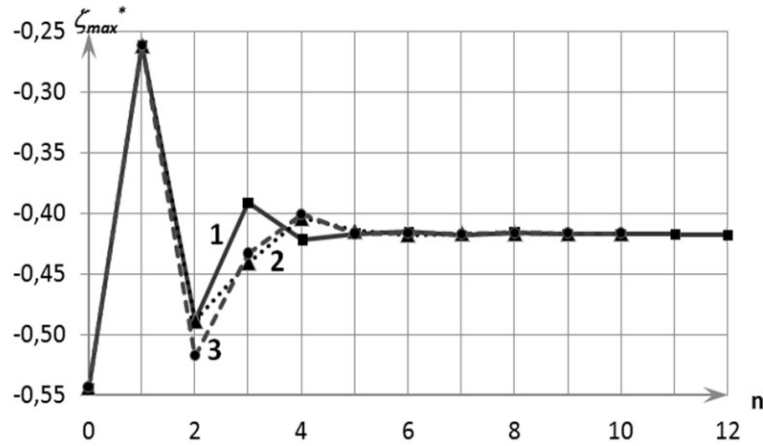


Рисунок 2.8 – Порівняння характеру збіжності ζ_{max}^* для розглянутих ітераційних процесів

(лінія 1 – складна ітерація, $\gamma = 0,2$;

лінія 2 – запропанований метод;

лінія 3 – метод імітаційного прогнозування $\gamma = 0, a_1 = 2, a_2 = 1, b = 1$)

Було проведено також дослідження ефективності використання *методу послідовних навантажень* у поєднанні з розглянутими вище методами прискорення збіжності. На рис. 2.9 подано залежність загальної кількості ітерацій n від навантаження q_n (від $q_n = 0$ до $q_n = 0,1 \text{ Н/мм}^2$ з кроком $0,05 \text{ Н/мм}^2$), коли для забезпечення збіжності на кожному кроці навантаження використовувались ітераційні методи (2.18) – (2.20).

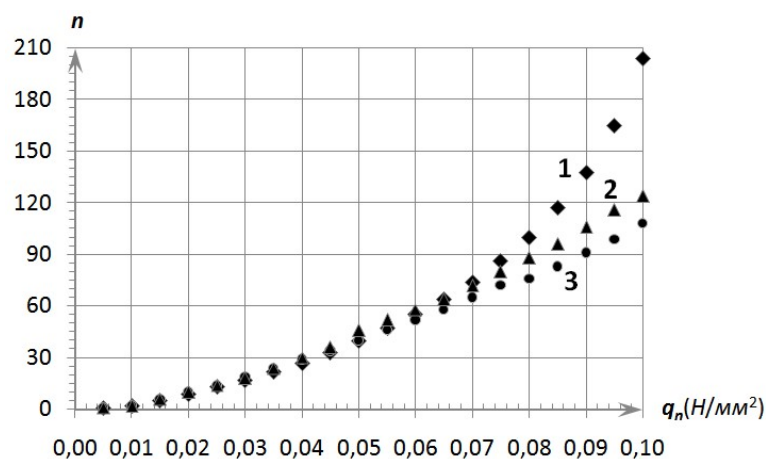


Рис. 2.9. – Кількість ітерацій n методу послідовного навантаження з використанням методів простої (лінія 1), складної (лінія 2, $\gamma = 0,2$) ітерації і запропанованого методу (лінія 3)

Як видно з рис. 2.8, методи (2.16) – (2.20) збігаються за $n \cong 10$ ітерацій, у той же час метод послідовних навантажень (при обраному кроці за навантаженням) збігається за $n = 108 \div 204$ ітерацій (рис. 2.9), що вказує на неефективність його застосування у даному випадку.

Вплив нелінійних складових на максимальні переміщення характерних точок досліджуваних об'єктів наведено на графіках «навантаження – прогин» (рис. 2.10).

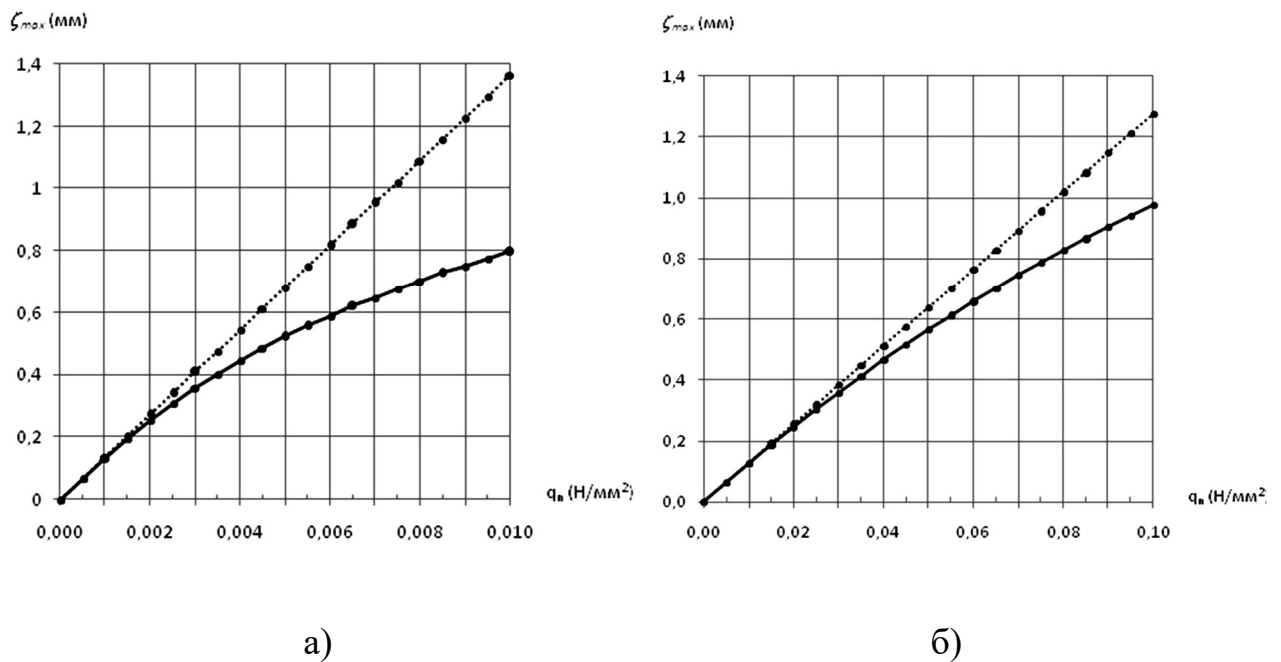


Рисунок 2.10. – Графік «навантаження – прогин»
в лінійній і нелінійній постановці

а) для кільцевої пластинки; б) для мембрани синусоїдального профілю

З рис. 2.10,а видно, що реальна поведінка гнучких оболонкових елементів конструкції при великих переміщеннях може бути описана лише з використанням нелінійної системи рівнянь. Так у випадку, коли відношення максимального прогину до товщини пластини стає більшим за 0,5 (при навантаженні $q_n = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ H/мм}^2$) спостерігається відхилення ліній, які відповідають лінійному та нелінійному розв'язку. Пластинка при цьому вважається гнучкою і її стан повинен бути описаним нелінійною системою рівнянь. Для мембрани з обраним співвідношенням амплітуди гофрування ($A/h = 1,7$) до товщини стінки

$h = 0,22$ нелінійність проявляється при навантаженні $q_n = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н/мм}^2$ (рис. 2.10,б).

Зауважимо, що при заданому навантаженні розв'язок крайової задачі (2.5), (2.6) збігається до одних і тих самих значень незалежно від обраного методу, загальної кількості ітерацій або вибору коефіцієнтів, що може свідчити про достовірність отриманих результатів.

Проведені числові дослідження на прикладі гнучкої мембрани синусоїдального профілю показали ефективність використання матриць A і B у вигляді (2.10), (2.11) при розв'язанні нелінійної крайової задачі для оболонок обертання зі складною формою меридіану при великих переміщеннях та дали змогу рекомендувати до практичного використання розглянуті в роботі комбінації методів (2.18) – (2.20), що дозволяє суттєво прискорити (у 10÷20 разів) процес збіжності розв'язання послідовності відповідних лінеаризованих крайових задач.

2.5. Експериментальні дослідження деформування гнучкої кільцевої пластинки для верифікації розрахункових даних.

З метою оцінки та верифікації результатів, отриманих за допомогою авторського розрахункового програмного пакету на мові PGI Visual Fortran з застосуванням різних математичних моделей, що описують НДС кільцевої пластинки при великих переміщеннях, були проведені експериментальні дослідження*. Для цього було створено спеціальний випробувальний пристрій для визначення згину кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження рівномірно розподіленого за контуром внутрішнього отвору (рис. 2.11), який складався з трьох частин – систем закріплення, навантаження і замірів.

Для круглої кільцевої пластини 1 в якості закріплювальних елементів була використана система фланцевих з'єднань, що дозволило варіювати параметрами тонкостінності пластини D/h та співвідношенням D_1/D_2 , де D_1 – діаметр пластини; D_2 – діаметр внутрішнього отвору; h – товщина пластини. Фланець з вибіркою 2 складався з двох кілець: основного, у який вставлялася пластинка, і

*експериментальні дослідження проведені спільно з канд. техн. наук А. Г. Пацюком [34]

допоміжного, яким вона закріплювалася. Товщина основного кільця фланцю складала 10 мм, глибина вибірки – 5 мм, товщина допоміжного кільця – 4,5 мм. Кільця фланцевого з'єднання з пластиною закріплювались 8 гвинтами М4. Таке з'єднання дозволило отримати жорстке затиснення зовнішнього контуру пластини.

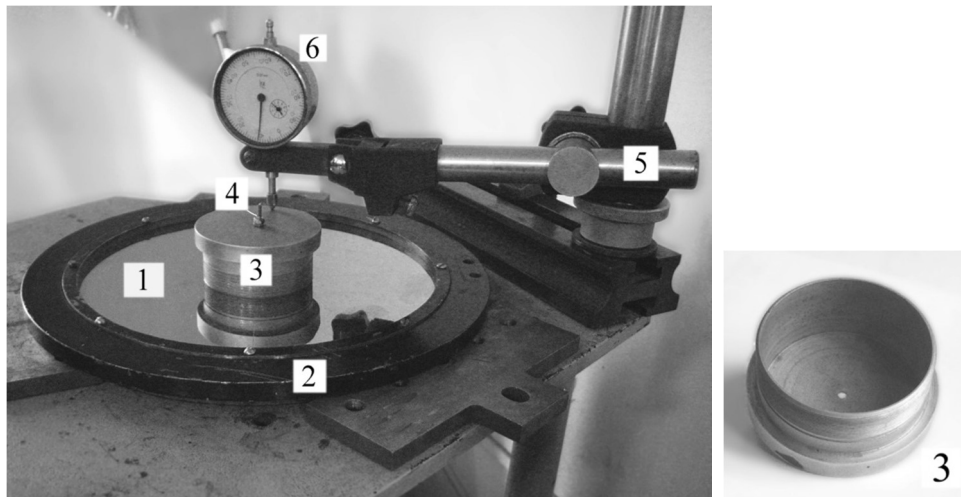


Рисунок 2.11. – Пристрій для визначення згину кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження, розподіленому за внутрішнім отвором

Для осесиметричного навантаження пластини, розподіленого за внутрішнім отвором, була виготовлена тонкостінна циліндрична шайба-заглушка 3 з мікрометричною різьбою, що дозволяло точно загвинчувати шайбу і, таким чином, отримувати рівномірно розподілене за внутрішнім отвором навантаження пластини. У центрі шайби було виконано отвір для закріплення стійки з платформою 4, на яку встановлювалися гирі для навантаження пластини.

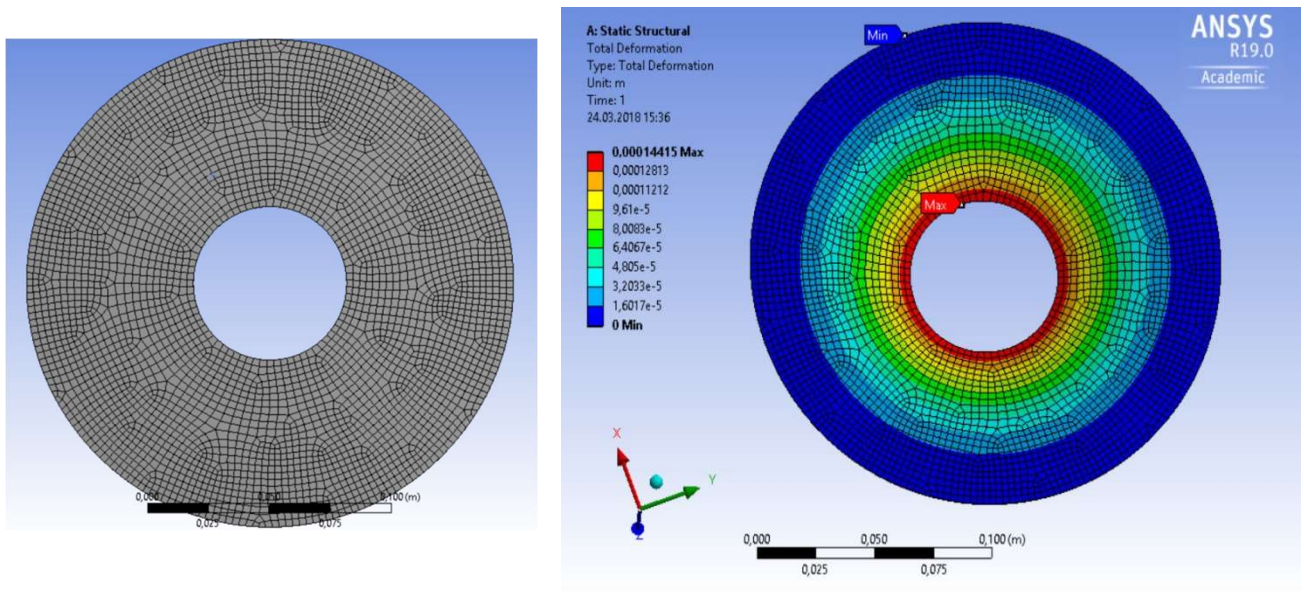
Система замірів складалась з Г-подібної стійки 5 з закріпленням на кінці індикатором годинникового типу 6. Стійка встановлювалась на станині та могла обертатися. Всі елементи пристрою були встановлені на жорсткій металевій основі.

Пластини для досліджень виготовлялись із сталі з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, зовнішнім діаметром $D_1 = 200$ мм, та діаметром отвору $D_2 = 63$ мм. Товщина пластини складала $h = 0,35$ мм. Пластини навантажувалися

лись дискретно силою зі змінним кроком від $1,7\text{ H}$ до $20,7\text{ H}$. Значення максимального прогину пластини при цьому $\sim 2h$.

Заміри прогинів пластини здійснювались в чотирьох точках, які знаходились на кінцях взаємно перпендикулярних діаметрів отвору пластини. В якості значення прогину обиралось середнє-арифметичне значення цих замірів.

Також для аналізу отриманих результатів, даний експеримент було змодельовано і відтворено в пакеті Ansys R19.0 Academic (рис. 2.12).



Кінцево-елементна сітка моделі
кільцевої пластини

Деформації кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження ($1,7\text{ H}$), розподіленому по внутрішньому отвору

Рисунок. 2.12. – Моделювання експерименту в скінченно-елементному пакеті Ansys R19.0 Academic

На рис. 2.13 подані графіки «навантаження – прогин» за результатами розрахунків у відповідності до:

- поданої у [31] формули для лінійної системи рівнянь (лінія 1);
- нелінійної теорії з використанням підходу, запропонованого Я. М. Григоренко [15], коли ітераційний процес здійснювався за однією змінною (лінія 2) та чотирма змінними (лінія 4);
- нелінійної теорії з використанням підходу, запропонованого В. Л. Бідерманом [3] (лінія 3);

- результати експерименту зображені позначкою «O»;
- результати числового експерименту у пакеті Ansys R19.0 Academic зображені позначкою «▲».

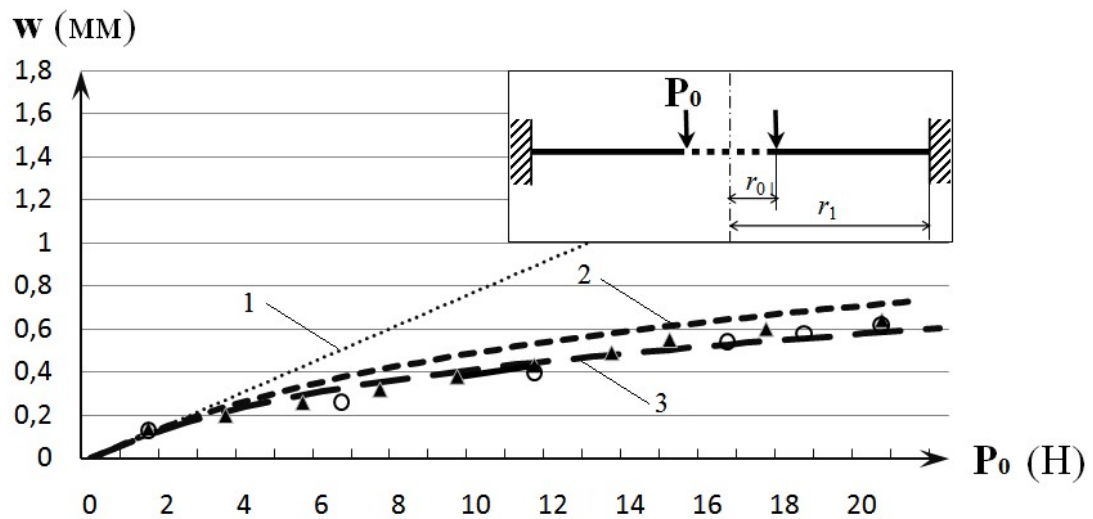


Рисунок 2.13. – Графік «навантаження – прогин» для кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження, розподіленому по внутрішньому отвору

Результати порівняльного аналізу числового розрахунку НДС симетрично навантажених кільцевих пластинок з урахуванням великих переміщень при малих деформаціях за двома різними математичними моделями з експериментальними даними дають добру збіжність. Так, розбіжність експериментальних і числових результатів для досліджених значень навантаження у цьому випадку не перевищує 5,5%, а для варіанту теорії, запропонованої в [15], вона досягає 16%.

У цілому, отримані експериментальні дані підтверджують, що запропонована методика розрахунку нелінійних крайових задач є досить ефективною, оскільки алгоритм має достатньо добру збіжність, а отримані результати є близькими до реальної поведінки конструкції.

2.6. Висновки за розділом

Розроблено нові ефективні алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач розрахунку напружено-деформованого стану неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом

прогнозування (на окремих кроках) значень нелінійних параметрів за результатами попередніх ітерацій.

Проведені на основі числового експерименту дослідження різних варіантів *лінеаризації* переконливо вказують, що матриці лінеаризованих крайових задач повинні бути подані у формі, наближеній до матриць системи лінійних рівнянь. Було модифіковано прийоми перетворень нелінійних крайових задач механіки оболонок (їх лінеаризації) для побудови ефективних ітераційних схем та прискорення збіжності їх розв'язування. Це дозволяє не тільки підвищити обумовленість матриці A , але і подати її у вигляді матриць для відповідних лінійних систем, розв'язування яких достатньо апробовано.

За результатами досить обширного числового експерименту встановлено, що запропоновані алгоритми прискорення збіжності дозволяють суттєво (в декілька разів) скоротити обчислювальні витрати на розв'язування нелінійних крайових задач механіки оболонок та відшукати оптимальні проекти оболонок обертання і пластин за 12÷16 ітерацій, що в 1,5÷3 рази менше, ніж у випадку відомих ітераційних процесів.

Проведено експериментальні дослідження поведінки гнучкої кільцевої пластинки і порівняльні числові дослідження адекватності існуючих математичних моделей і ефективності розроблених алгоритмів.

Результати числового порівняльного аналізу та отримані експериментальні дані підтверджують, що запропонована методика розрахунку нелінійних крайових задач є досить ефективною, оскільки алгоритм має достатньо добру збіжність, а отримані результати є близькими до реальної поведінки конструкцій.

Перелік джерел посилань до розділу 2

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. – М., 1981. – 392 с.
2. Баженов В.А. Кривенко О. Л., Соловей М. О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К., 2010. – 316 с.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций – М., 1977. – 488 с.
4. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. – М., 1964. – 340 с.
5. Биргер И.А., Иосилевич Г.Б. Резьбовые и фланцевые соединения. – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с.
6. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехизат, 1956. – 420 с.
7. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во КГУ, 1975. – 326 с.
8. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16. – Вып. 3 (99). – С. 171-174.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. – М., 1976. – 512 с.
10. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. – М., 1997. – 272 с.
11. Григолюк Э. И., Шалашин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М., 1988. – 232 с.
12. Григоренко Я. М. Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. О численном решении нелинейных краевых задач статики гибких оболочек. – ДАН УССР. Сер. А, 1980. – № 6. – С. 44-48.
13. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.

14. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. К решению нелинейных задач о деформации гибких оболочек численным методом. – ДАН УССР. Сер. А, 1981. – № 5. – С. 43-45.
15. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вища школа, 1983. – 286 с.
16. Григоренко Я. М., Василенко А. Г. Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. – К., 1981. – Т.4. – 544 с.
17. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикладная механика, 1991. – № 10. – С.3-33.
18. Дзюба А. П. Метод послідовних наближень розв'язування задач оптимального керування з обмеженими фазовими координатами для оптимізації силових елементів конструкцій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць – Дн-ськ: Навчальна книга. – Т.5, 1999. – С. 61-85.
19. Дзюба А. П., Левитина Л. Д. Гофрированная мембрана синусоидального профиля: Авторское свидетельство № 1170295 // Открытия и изобретения, 1985. – № 28. – С.156.
20. Дзюба А. П., Левитина Л. Д. Оптимизация формы круглых пластин и оболочек вращения. – Дн-ск: ДГУ, 1985. – 124с.
21. Дзюба А. П., Левитина Л. Д., Філяшина І. А. Розрахунок та оптимізація форми меридіану оболонок обертання як чутливих елементів манометричних пристроїв // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Зб. наук. праць . – Дн-ськ. – Вип. 5, 2003. – С. 40-46.
22. Дзюба А. П., Садовников С. С. Комп'ютерне моделювання та дослідження збіжності ітераційних алгоритмів оптимального проектування оболонкових конструкцій // Системные технологии. – Дн-ск, 2005. – Вып. 3(38). – С. 102-116.
23. Жернаков В. С., Пернаков Е. Н., Якубов Р. Г. Ресурс и надежность резьбовых соединений –М.: Машиностроение, 2003. – 292 с.
24. Кармишин А. В. Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М., 1975. – 376 с.

25. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М., 1964. – 192 с.
26. Моссаковский В. И. Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. – М., 1978. – 248 с.
27. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Л., 1962. – 432 с.
28. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 120 с.
29. Понамарев С. Д. Андреева А. Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. Л. – М., 1980. – 326 с.
30. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
31. Прочность, устойчивость, колебания / Справочник в трёх томах. Том 1. / под ред. И. А. Биргера, А. Г. Панвко. – М.: Машиностроение, 1968. – 832 с.
32. Сафронова І. А., Дзюба А. П. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих переміщеннях // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – Т. 2. – Дн-ск: Вид-во ДНУ, 2015. – Вып. 19. – С. 38–55.
33. Сафронова І. А., Дзюба А. П. Числові та експериментальні дослідження великих переміщень в оболонкових елементах конструкцій // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка неоднорідних структур. – Дн-ск: Вид-во ДНУ, 2016. – Вып. 1(20). – С.11-20.
34. Сафронова І. А., Пацюк А. Г. Числові та експериментальні дослідження поведінки осесиметричних кільцевих пластин при великих переміщеннях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дн-ськ: ДНУ. – Вып. 25, 2016. – С. 158-170.
35. Справочник машиностроения (в 6-ти томах). –Т.4 // Под ред. Н.С. Ачеркана. –М.: Гос. НТИ машин. литературы, 1956. – 852 с.
36. Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. – М., 1949. – 344 с.

37. Феодосьев В.И. К расчету гофрированных коробок (сильфонов) // Инж. сборник АН СССР. – М., 1947. – Т.4. – Вып.1. – С.137-139.
38. Формалев В. Ф. Ревизников Д. Л. Численные методы. – М., 2004. – 400 с.
39. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. – К.: Наукова думка, 1963. – Ч. 1. – 196 с. – К., 1966. – Ч. 2. – 244 с.
40. Bulakajev P. I. Dzujba A. P. An algorithm for the prediction of search trajectory in nonlinear programming problems and optimum design // Structural Optimization: Research Journal of Intern. Society for St ruct. and Multisimplinary Optimiz. (ISSMO). – Springer – Verlag, 1997. – V. 13. – № 2. – P.199 – 202.
41. Safronova I. A. Dzyuba A. P. Research adequacy of the mathematical models of deformation shell elements with large displacements // Proc. of the III Intern. Scient. and Pract. Conf. «Science and Education – Our Future, Ajman, UAE, 2016», 2016. – P. 39-44.

РОЗДІЛ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ПІДХОДУ В ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ І ОПТИМІЗАЦІЇ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Розділ присвячено використанню запропонованого в роботі алгоритму для зменшення обчислювальних витрат в задачах розрахунку гнучких гофрованих оболонок обертання (сильфонів), дослідженню поведінки та вибору оптимальних параметрів чутливих елементів приладів у вигляді гофрованих мембран синусоїдального профілю, розрахунку параметрів динамометричних шайб, вагової оптимізації круглих пластин та демонстрації ефективності підходу.

3.1. Розрахунок та експериментальні дослідження повздовжніх переміщень сильфонів, як гнучких, гофрованих оболонок обертання.

Для підтвердження працездатності, ефективності та достовірності запропонованого в роботі підходу для розрахунку гнучких оболонок обертання, були проведені числові та експериментальні дослідження сильфону, як гнучкої гофрованої оболонки обертання.

Геометрія серединної поверхні сильфону, як оболонки обертання, зображена на рис. 3.1,а, яка на окремих ділянках подається (рис. 3.1,б) наступним чином:

AB (пластинка): $R_b \leq s < AB$,	$r(s) = s$,
	$\theta = 0$;
BC (тор): $AB \leq s < ABC$,	$r(s) = r_z * \sin \theta + AB$,
	$\theta(s) = (s - AB) / r_H$;
CD (пластинка): $ABC \leq s < ABCD$,	$r(s) = AB - (s - ABC)$,
	$\theta(s) = \pi$;

$$\begin{aligned}
 \text{DE (тор):} \quad ABCD \leq s < ABCDE, \quad r(s) &= R_{\delta} + r_{\delta} - |r_{\delta} * \sin \theta|, & (3.1) \\
 \theta(s) &= \pi - (s - ABCD) / r_B; \\
 \text{EF (пластинка):} \quad ABCDE \leq s < ABCDEF, \quad r(s) &= s - ABCDE + R_B + r_B, \\
 \theta(s) &= 0; \\
 \text{FK (тор):} \quad ABCDEF \leq s < ABCDEFK, \quad r(s) &= AB + |r_3 * \sin \theta|, \\
 \theta(s) &= (s - ABCDEF) / r_H. \\
 \text{KL (пластинка):} \quad ABCDEFK \leq s < ABCDEFKL, \quad r(s) &= AB - (s - ABCDEFK), \\
 \theta(s) &= \pi,
 \end{aligned}$$

де s – відстань точки від полюса (або деякої початкової паралелі); r_3, r_B – радіуси зовнішнього та внутрішнього торів, відповідно; R_3, R_B – зовнішній та внутрішній радіуси сільфону; h – товщина його стінки.

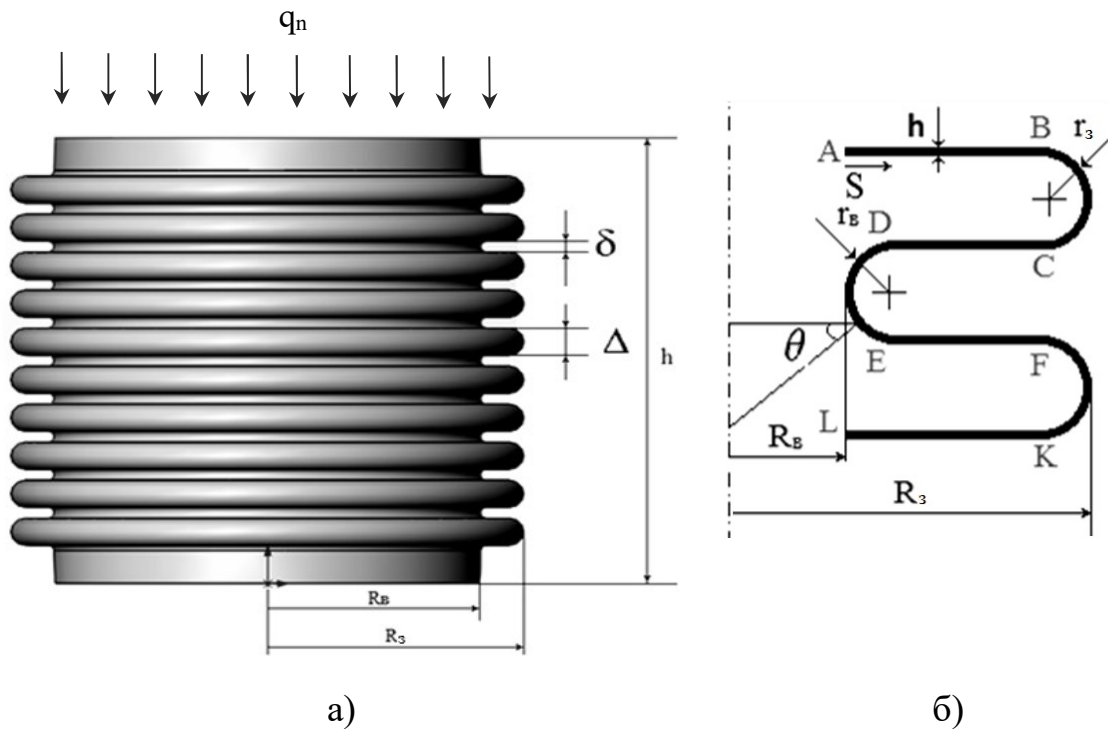


Рисунок 3.1. – Геометрія сільфону, як гофрованої оболонки обертання

При інтегруванні системи (2.5), яка описує поведінку сільфону кожна з ділянок розбивалась таким чином, щоб вузлова точка була на межі переходу від

ділянки до ділянки, а з'єднання між умовними ділянками вважалось механічно ідеальним.

Крайові умови були наступні: нижній торець вважався жорстко затиснутим, а верхній – навантаженим рівномірно розподіленою по верхньому краю повздовжньою силою:

$$\text{при } s = s_0 = 0; M_r = 0; N_r = 0; \quad \text{при } s = s_n; \quad \xi = 0; \vartheta_r = 0; \zeta = 0.$$

Розв'язування задачі здійснювалося шляхом інтегрування системи (2.5) з урахуванням геометрії серединної поверхні оболонки у вигляді (3.1) з застосуванням, розробленого у розділі 2 алгоритму прискорення збіжності. Результати розрахунку параметрів напружено-деформованого стану (осьових переміщень) сільфону, було отримано з використанням розробленого підходу, який реалізовано у вигляді авторського програмного пакету на мові PGI Visual Fortran та подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати розрахунку осьових переміщень сільфону

Осьове переміщення, ζ , мм \diagdown Навантаження $P*9,8, H$	0	10	20	30	33	34	40
Visual Fortran	0	2.1	4.1	6.4	7	7.2	10.2
пакет Abaqus	0	2.18	4.36	6.54	7.19	7.41	10
експеримент	0	2	4	6	7	7.5	11

Для проведення експериментальних досліджень з визначення осьового переміщення сільфону під дією осесиметричного навантаження рівномірно розподіленого за контуром верхнього отвору була розроблена спеціальна установка (рис. 3.2). Вона складалась з наступних елементів: 1 – індикатор годинникового типу з ціною поділки 0,01 мм; 2 – торці для закріплення сільфону; 3 – сільфон; 4 – рама; 5 – гирі для осьового навантаження.

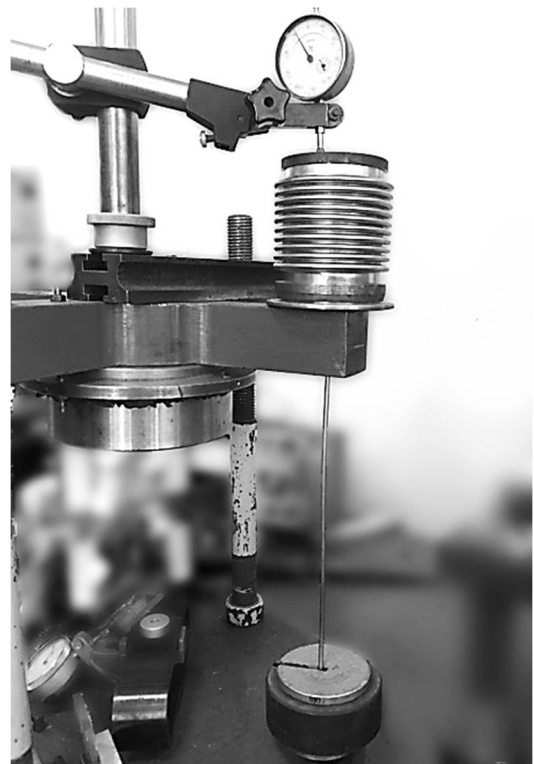
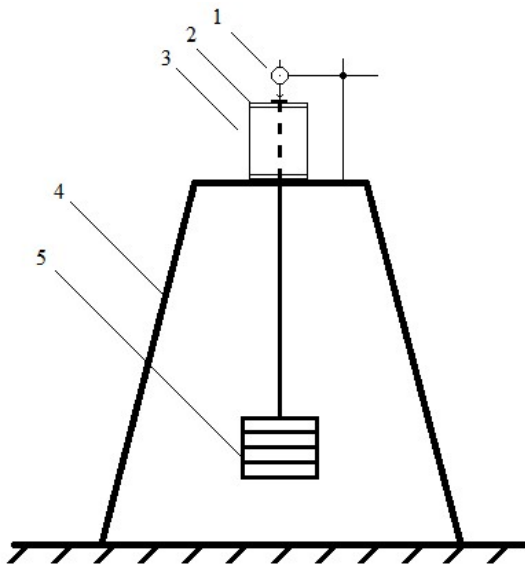


Рисунок 3.2. – Експериментальна установка

Осьове переміщення вимірювалось індикатором годинникового типу з ціною поділки $0,01 \text{ мм}$, а навантаження здійснювалось за схемою «мертвого» вантажу (рис. 3.2, рис. 3.3).



а)



б)

Рисунок 3.3. – Початковий (а) та деформований (б) стан сільфону

Фізичні параметри сільфону були наступними: висота, внутрішній та зовнішній радіуси сільфону $h = 83$ мм, $Rв = 37,5$ мм, $Rз = 45$ мм, відповідно; діаметр внутрішнього та зовнішнього тору $\delta = 2$ мм, $\Delta = 5$ мм відповідно; матеріал – 12х18н10т (нержавіюча сталь) з відповідними фізичними характеристиками.

Результати проведення експерименту подані у табл. 3.1.

Також для обчислення поведінки сільфону, як гофрованої оболонки обертання, використовувався пакет Abaqus 6.12-1. Геометричні та фізичні параметри сільфону обиралися такі ж самі як і в експерименті.

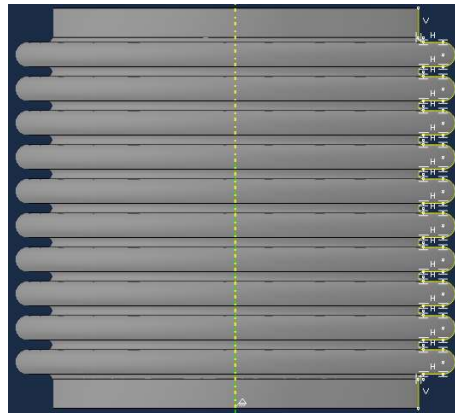
Сільфон був заданий як оболонка обертання з відповідним меридіаном (рис. 3.4,а). Отриманий об'єкт було розбито на трикутні скінченні елементи розміром 1–2 мм (рис. 3.4,б). Отримані результати розрахунку в пакеті Abaqus 6.12-1 наведені в табл. 3.1 у відповідному рядку.

Також сільфон розраховувався і за допомогою чотирикутних кінцевих елементів із 8-м вузлами (рис. 3.4,в). Отримані результати відрізнялися від результатів, отриманих з використанням трикутних скінчених елементів, лише на 0,5%, але час на розрахунок збільшився майже в 5 разів, що продемонструвало недоцільність використання схеми з чотирикутними скінченими елементами в даній постановці задачі.

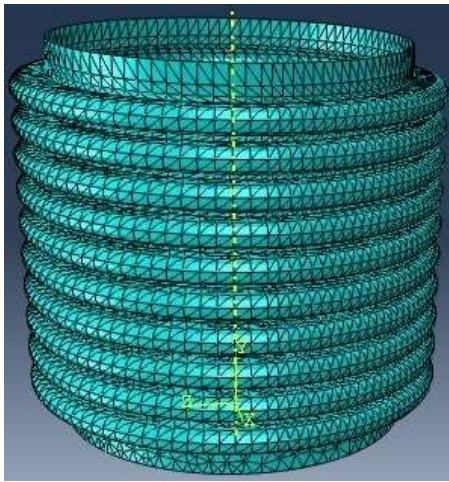
Графік залежності переміщення від навантаження наведено на рис. 3.5., де «•» позначено дані отримані у ході експериментальних досліджень, лінія 1 – при розрахунку у авторському програмному пакеті на мові PGI Visual Fortran, лінія 2 – у пакеті Abaqus 6.12-1.

Дані отримані у програмі відрізняються від отриманих в експерименті приблизно на 4%, та на 2% від отриманих у пакеті.

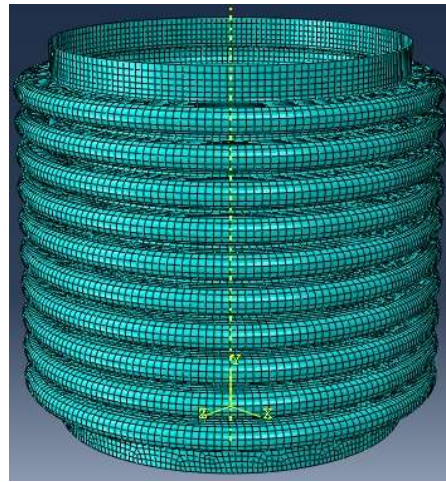
Також у програмі та пакеті проводився розрахунок напруження у сільфоні при осьовому стиску, розтягу та внутрішньому тиску (рис. 3.6).



а)



б)



в)

Рисунок 3.4. – Скінченно елементна модель сільфону у пакеті Abaqus 6.12-1

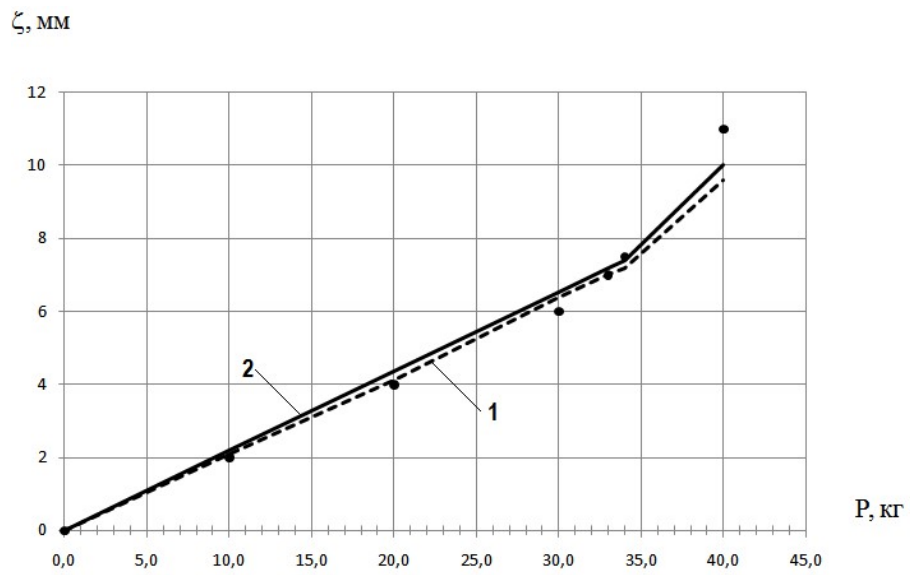
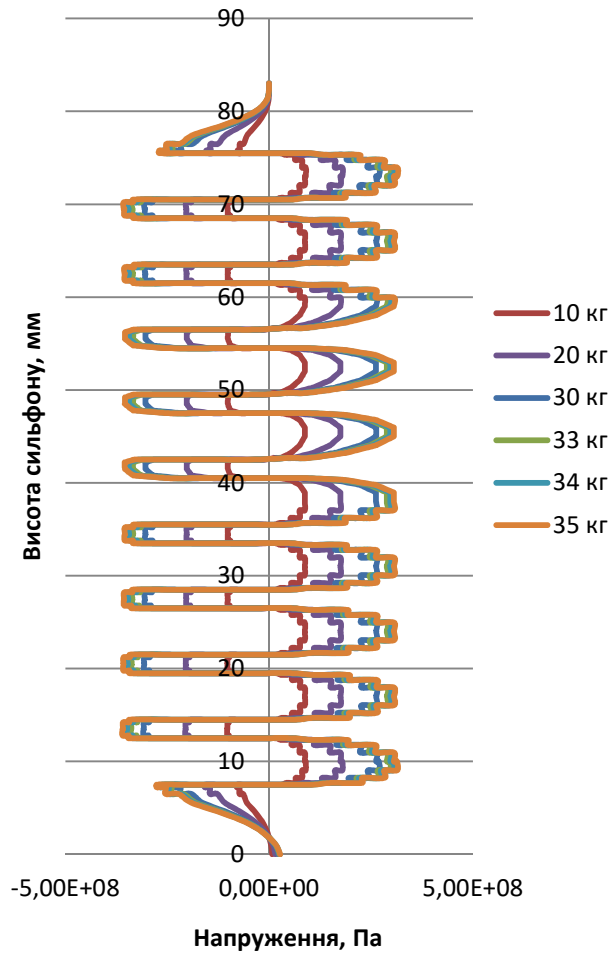
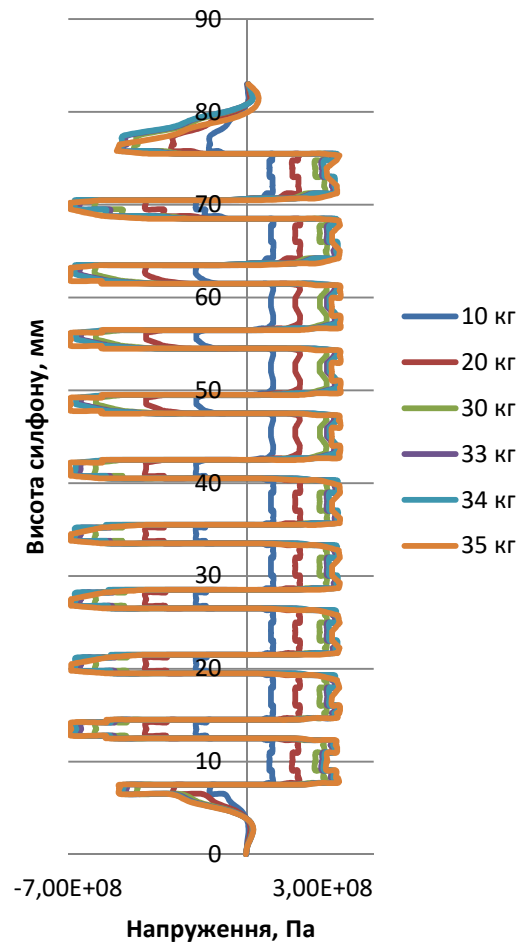


Рисунок 3.5. – Графік залежності переміщення сільфону від навантаження

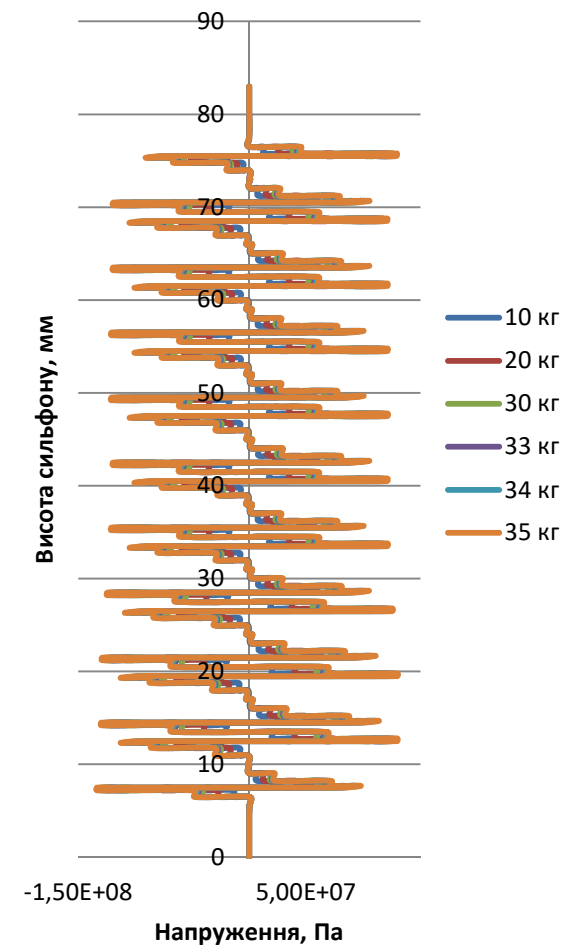
Напруження σ_{11} при стиску



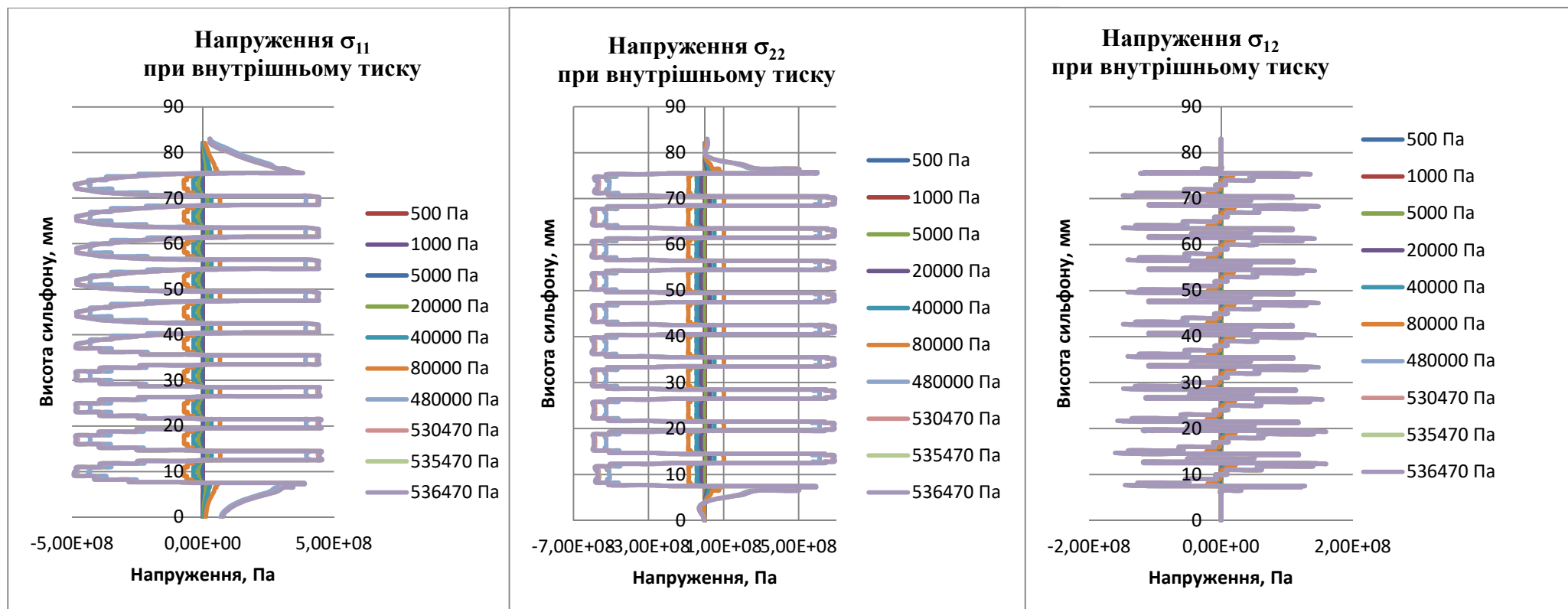
Напруження σ_{22} при стиску



Напруження σ_{12} при стиску



a)



б)

Рисунок 3.6. – Напруження у сільфоні при осьовому стиску (а) та під дією внутрішнього тиску (б)

Отримані результати числових розрахунків та експериментальних досліджень демонструють достовірність та ефективність застосування розробленого алгоритму для розрахунку оболонок обертання при великих переміщеннях, що, крім того, суттєво, до $1,5 \div 1,8$ разів дозволяє скоротити кількість прямих розрахунків у порівнянні з відомими алгоритмами прямого інтегрування крайових задач механіки оболонок.

3.2. Нелінійне деформування та вибір оптимальних параметрів гофрованих мембран синусоїдального профілю.

Чутливість вимірювального пристрою, який містить мембрану, зокрема синусоїдального профілю (рис. 2.4, рис. 3.7), визначається кутом нахилу характеристичної кривої, що виражає залежність між прогином w в центрі і тиском на мембрану q_n . Пружна характеристика гофрованої мембрани залежить від форми середньої поверхні оболонки (2.22), яка утворює мембрану.

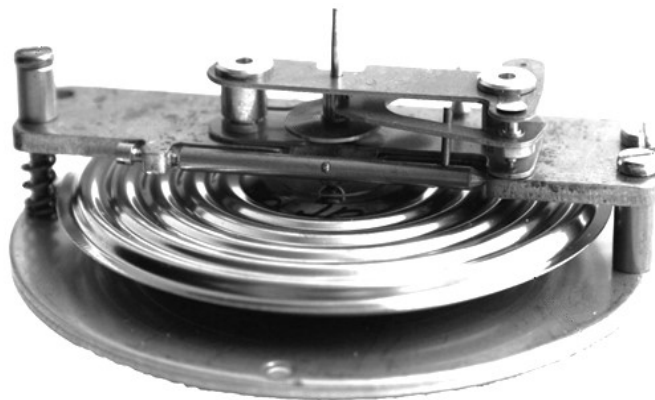


Рисунок 3.7 – Гофрована мембрана з передавальним механізмом

При цьому чутливість мембрани збільшується зі зменшенням глибини гофрування таким чином, що найбільшу чутливість серед круглих мембран має тонка гладка мембрана (пластинка), поведінка якої вже при малих навантаженнях стає суттєво нелінійною (див. рис. 2.13). Це є недоліком при практичному

застосуванні мембран, як чутливого елемента, оскільки зменшує діапазон вимірювальних тисків за шкалою з рівномірною ціною поділки.

Створення мембрани бажаної чутливості та з широким діапазоном вимірюваних тисків можливе шляхом вибору раціональної глибини її гофрування. Варіаційна задача оптимізації мембрани найбільшої чутливості полягає в максимізації її прогину в центрі (рис. 2.4, рис. 2.6, рис. 2.8)

$$w(r_0) = - \int_{r_0}^{r_1} \left(- \frac{\mu}{r} \sin(\theta + \vartheta_r) u + \vartheta_r \cos \theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2Kr} \sin(2(\theta + \vartheta_r))(N_r r) + \frac{1}{Kr} \sin^2(\theta + \vartheta_r) \frac{F(s)}{2\pi} + \right. \\ \left. + \sin(\theta + \vartheta_r) - \sin \theta - \vartheta_r \cos \theta \right) \cos \theta dr, \quad (3.2)$$

при обмеженні довжини меридіану (і таким чином – глибини гофрування амплітуди $A(r)$ у відповідності з (2.22)) мембрани у вигляді

$$L = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + y'^2} dr = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + tg^2 \theta} dr. \quad (3.3)$$

та наявності вимог міцності

$$\max_z \sigma_i \leq [\sigma], \quad \text{де } \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{1z}^2}.$$

Приймається також, що найбільші напруження виникають на поверхні оболонки $z = \pm h/2$.

Використання запропонованого у роботі підходу дозволило отримати збіжний процес розв'язування нелінійної задачі деформування мембрани у вигляді послідовності лінеаризованих крайових задач за 8 ітерацій (рис. 2.8, лінія 2). Для порівняння слід зазначити, що метод простої ітерації збігався за 91 ітерацією (рис. 2.7, а лінія 1).

Оптимальна форма меридіану гофрованої мембрани найбільшої чутливості, отримана як результат розв'язування варіаційної (ізопериметричної) задачі

відшукування максимуму функціоналу (3.2) при обмеженні (3.3). Профіль мембрани оптимальної форми з семи гофрів з параметрами $l=1.8 \cdot 10^{-3}$ м; $h=0.2 \cdot 10^{-3}$ м; $R=25 \cdot 10^{-3}$ м; $E=1 \cdot 10^{11}$ Н/м² приведено на рис. 3.8, де $H_1=0.47 \cdot 10^{-3}$ м; $H_2=1.1 \cdot 10^{-3}$ м. (У загальному випадку для мембрани найбільшої чутливості H_1/H_2 змінюється у діапазоні $0.44 \div 0.75$) [12].

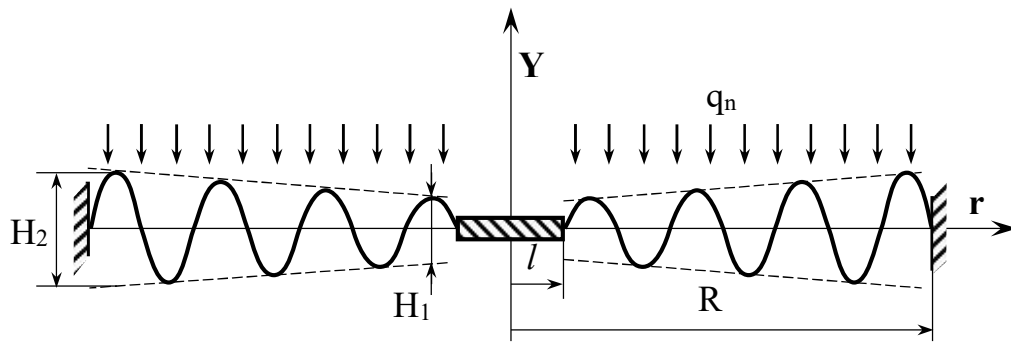


Рисунок 3.8 – Оптимальна форма гофрованої мембрани найбільшої чутливості

Пружні характеристики такої мембрани подані на рис. 3.9. Тут, для порівняння, зображені характеристики спроектованої мембрани (лінія 1) і двох мембран постійного гофрування, одна з яких має таку ж, як і для оптимальної, довжину ($OA = OA'$) лінійної ділянки характеристики «навантаження – прогин» (лінія 2), а друга (лінія 3) – має таку ж чутливість, що і мембрана оптимального профілю.

Із отриманих результатів випливає, що чутливість $\delta' = tg \gamma_1$ запропонованої мембрани у 2,1 рази більша чутливості $\delta'' = tg \gamma_2$ мембрани з постійною глибиною гофрування, а у випадку однакової чутливості $\delta' = \delta''$ довжина OA лінійної ділянки пружної характеристики запропонованої мембрани на 12% більша відповідної ділянки OA'' для мембрани з постійною глибиною гофрування.

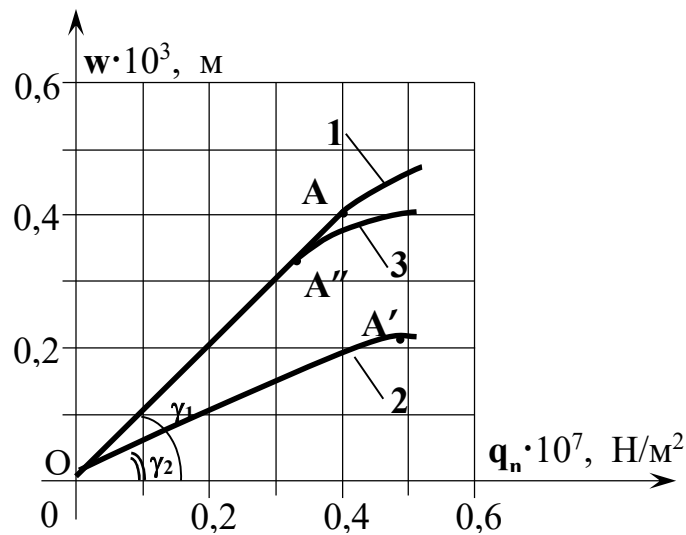


Рисунок 3.9 – Пружні характеристики мембран

Приведені порівняння дозволяють зробити висновок про ефективність використання спроектованої мембрани, що дозволяє підвищити чутливість вимірних приладів і покращити їх якість, розширивши діапазон вимірюваних тисків у межах лінійної характеристики чутливого елемента. Таким чином, запропонований підхід, у загальному вигляді може бути ефективним засобом розв'язування задач проектування форми середньої поверхні оболонок з наперед заданими властивостями.

3.3. Дослідження деформування динамометричних шайб.

Запропонований у роботі підхід було застосовано також для розрахунку і відшукання оптимальних параметрів динамометричних шайб спеціальної конфігурації (рис. 3.10).

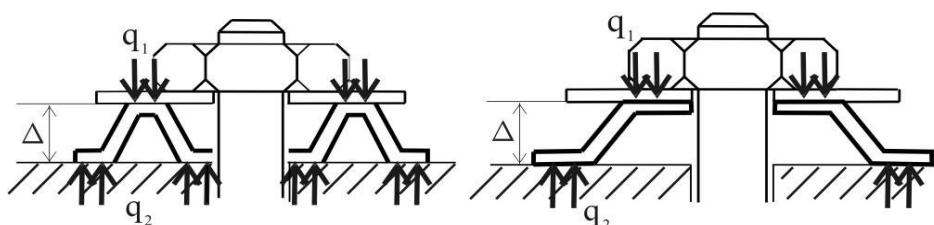


Рисунок 3.10. – Розрахункові моделі динамометричної шайби

Різьбові з'єднання деталей машин і механізмів, а також конструкцій між собою і з фундаментами є найбільш поширеним способом їх з'єднання [3, 16, 20]. Багаточисленні дослідження і практика роботи болтових, гвинтових, шпилькових і інших різьбових з'єднань показує важливість визначення оптимальних зусиль затяжки різьби для покращення їх експлуатаційних якостей. Контроль натягу більшої частини різьбових з'єднань виконується, як правило, на стадії збірних операцій при монтажі і визначає працездатність, надійність і довговічність роботи агрегатів у подальшому. На підприємствах з високою культурою виробництва контролюються натяги 70–80% використовуваних різьбових з'єднань, а в ракетобудуванні, авіації, при виготовленні сучасних транспортних засобів – 95–100%. Відсутність же контролю натягу різьб погіршує експлуатаційні якості машин і механізмів, приводить до підвищення трудовитрат і безпеки їх використання. Серед причин такого становища є існуюча недооцінка розробниками устаткування серйозності наслідків безконтрольного затягування різьб та дефіцит ефективних засобів проведення такого контролю.

Серед існуючих засобів контролю зусиль затяжки різьбових з'єднань можна виділити контроль величини зусилля за величиною моменту закручування. У цьому випадку величина натягу болтів контролюється, як правило, заміром прикладеного до гайки крутного моменту за допомогою спеціальних ключів. У формулі для підрахунку моменту затяжки, крім величин, що характеризують параметри болта і інструменту, присутній, так званий, коефіцієнт закручування, що виражає залежність між прикладеним до гайки крутним моментом і величиною натягу болта. Його величина залежить від цілого ряду факторів, таких як коефіцієнт тертя на опорній поверхні різьби болта і гайки, кута нахилу різьби, якості її змащення. Як наслідок, використання динамометричних ключів може мати значні похибки, оскільки безпосередні обчислення деяких із зазначених факторів досить утруднені і їх визначення здійснюється, як правило, експериментально для кожної партії болтів, або в лабораторних умовах.

Контроль натягу болта можна здійснювати також за величиною кута повороту гайки. У цьому випадку спочатку забезпечують щільне стягування з'єднуваного пакету і початковий натяг болтів, а далі додатково повертають гайку на необхідний кут. Слід зазначити, що у цьому випадку натяг безпосередньо не вимірюється, а його величина суттєво залежить від фактично непрогнозованої жорсткості з'єднувального пакету і стану поверхні кріплення.

Контроль натягу за допомогою механічного заміру лінійного подовження болта (гвинта, шпильки) має більш високу, у порівнянні з іншими способами, точність, яка залежить, в основному, від можливостей пристроїв для вимірювання пружного (підпорядкованому закону Гука) подовження частини болта, яка розтягується, з використанням штанген- або мікрометричними інструментів, індикаторів і т.ін., якщо це дозволяє місце встановлення з'єднувального елемента.

Тензометричний контроль натягу є більш точним, хоча і досить затратним методом контролю. У той же час такі вимірювання можуть проводитись лише при наявності спеціалізованого обладнання і то лише за певних умов використання різьбового з'єднання, оскільки тензодатчики повинні бути наклеєними безпосередньо на болт.

Крім установки звичайних шайб, серед методів і засобів контролю різьбових з'єднань ефективним є використання шайб спеціальної конфігурації, натяг яких контролюється шляхом вимірювання деформацій деяких проміжних елементів з'єднання, наприклад, величини пластичних деформацій спеціальних виступів на опорній поверхні шайби. Такі шайби є досить надійними і можуть бути встановленими як під гайки, так і під головки болтів, включаючи їх використання в різьбових з'єднаннях за допомогою шпильок, анкерів і в інших випадках.

У той же час слід також звернути увагу на можливість падіння зусиль затяжки у всіх розглянутих вище випадках, внаслідок релаксації напружень у різьбовому з'єднанні, пов'язану з температурами, недостатніми пружними ви-

довженнями болтів, особливо при випадкових перевантаженнях і, як наслідок, появи в них залишкових деформацій; нерівності поверхні та елементів з'єднувального пакету, відгвинчування гайки в результаті вібрації та ін. Тому достатньо важливим є дослідження проблем, пов'язаних з забезпеченням машинобудівників, монтажників та гірників високоефективними засобами контролю натягу в болтах, гвинтах і т. д.

З метою дослідження окремих аспектів цієї досить важливої проблеми у даному розділі наводиться розрахунок і відшукання оптимальних параметрів динамометричної шайби спеціальної конфігурації, як тонкої пружної оболонки обертання [2] з меридіаном, у загальному випадку, довільної форми.

Такі шайби виготовляються з пружинної сталі з підвищеною межею пружності матеріалу, що дає можливість установлювати їх під гайку і здійснювати досить простий контроль зусиль затяжки відповідальних різьбових з'єднань за допомогою набору спеціальних щупів, а високі пружні властивості шайби зменшують потребу періодичної дозатягування болта внаслідок дії післязбірних монтажно-експлуатаційних навантажень на болтове з'єднання. При цьому деформування шайби при затяжці гайки відбувається до заданого припустимого зазору, величина якого попередньо визначається за результатами комп'ютерного моделювання та верифікаційних експериментальних досліджень.

Шайба має рівномірно розміщені по периметру контактуючі поверхні (рис. 3.10) і у загальному випадку є тонкою пружною оболонкою обертання з меридіаном довільної конфігурації.

Задача вибору раціональних параметрів такої пружної динамометричної шайби, як складеної оболонки обертання, формулюється аналогічно оптимізації параметрів гофрованої мембрани і полягає у визначенні товщини стінки і геометричних параметрів форми меридіану та товщини стінки, що забезпечують максимальну жорсткість (надають мінімуму осьовим переміщенням такої оболонкової конструкції для створення можливості користування щупами після її

навантаження натягом гайки для певного набору параметрів Δ (рис. 3.10)) при збереженні властивостей пружності матеріалу (виконанні умов міцності) та вдоволенні низки конструктивних вимог. Додатково обмежується кількість матеріалу (що теж варіюється), необхідного для виготовлення такої шайби. Відсутність такого обмеження вочевидь привела б (виходячи із необхідності виконання вихідного критерію задачі) до проекту шайби із необмеженої кількості матеріалу.

В дисертаційній роботі досліджено нелінійне деформування динамометричної шайби у вигляді рис. 3.10,а, геометрія якої, як пружної оболонки обертання, складається з трьох кільцевих пластинок та двох конічних оболонок (рис. 3.11).

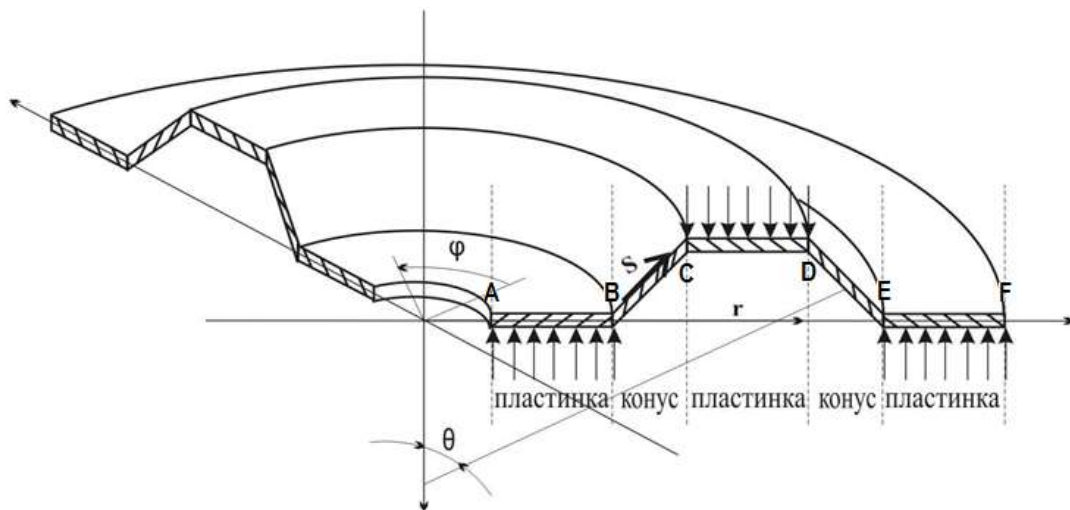


Рисунок 3.11. – Розрахункова модель шайби,
яка складається з трьох круглих пластинок та двох конічних оболонок

Геометрія серединної поверхні динамометричної шайби, як оболонки обертання, зображена на рис. 3.11, яка на окремих ділянках може бути подана наступним чином:

$$\mathbf{AB} \text{ (пластинка): } R = s \quad s_0 \leq s < s_1 \quad \theta = 0;$$

$$\mathbf{BC} \text{ (конус): } R = \frac{s - s_1}{\cos \alpha} + s_1 \quad s_1 \leq s < s_2 \quad \theta = -\alpha;$$

$$\mathbf{CD} \text{ (пластинка): } R = s \quad s_2 \leq s < s_3 \quad \theta = 0;$$

$$\mathbf{DE} \text{ (конус):} \quad R = s_4 - \frac{s_4 - s}{\cos \alpha} \quad s_3 \leq s < s_4 \quad \theta = \alpha;$$

$$\mathbf{EF} \text{ (пластинка):} \quad R = s \quad s_4 \leq s \leq s_5 \quad \theta = 0.$$

Зусилля натягу болта може бути визначене із залежності

$$T = \sigma F_{\sigma} = q_1 F_1 = q_2 F_2, \quad (3.4)$$

де σ – напруження затяжки; F_{σ} – площа болта; F_1, F_2 – площі контактуючих поверхонь; q_1, q_2 – розподілені навантаження на гайку і контактну поверхню. Співвідношення між контактними тисками q_1, q_2 (які приймаються рівномірно розподіленими) визначається контактною міцністю контактуючих поверхонь, а регулюються площами F_1, F_2 контактуючих поверхонь.

Використання шайби такої конфігурації дає можливість установлювати її під гайку і здійснювати контроль зусиль затяжки за допомогою простого щупа, через локальні отвори зовнішньої конічної поверхні. При цьому високі пружні властивості шайби зменшують потребу періодичного дозатягування болта внаслідок дії післяскладальних монтажно-експлуатаційних навантажень на болтове з'єднання. При цьому деформування шайби при затяжці гайки відбувається до заданого припустимого зазору, величина якого попередньо визначається за результатами комп'ютерного моделювання та верифікаційних експериментальних досліджень.

Задача оптимізації параметрів оболонки обертання полягає у відшуванні кусково-змінної вздовж меридіана товщини стінки оболонки $h(s)$, що надає мінімуму осьовим переміщенням такої складеної оболонки

$$s_L = \int_{s_0}^{s_N} \left(-\mu \frac{\sin \theta}{r} \zeta - \frac{\sin 2\theta}{2Kr} (Nr) + \vartheta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2K\pi r} F(s) \right) ds$$

при виконанні рівнянь системи (2.5) з прийнятими крайовими умовами

$$s = s_0 : \quad \xi = 0; M = 0; \quad s = s_0 : \quad M = 0; N = 0, \quad (3.5)$$

вдоволенні обмеженням міцності та конструктивним вимогам, відповідно

$$\text{а) } \bar{\sigma}(h, \bar{Y}, s) \leq [\bar{\sigma}]; \quad \text{б) } h(s) \geq h_0, \quad (3.6)$$

та наявності обмеження на кількість матеріалу, необхідного для виготовлення динамометричної шайби

$$\min_{s_0} 2\pi\rho \int_{s_0}^{s_N} r(s)h(s)ds = V_0. \quad (3.7)$$

Діючі напруження σ_1 , σ_2 як і τ_{1z} , можуть бути виражені [4, 6] через компоненти фазових змінних у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\cos \theta}{rh} (Nr) + \frac{12z}{rh^3} (M_1 r) + \frac{\sin \theta}{rh} \frac{F(s)}{2\pi}; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{r} + \frac{Ez \cos \theta}{r} \vartheta + \frac{\mu \cos \theta}{rh} (Nr) + \frac{12\mu z}{rh^3} (M_1 r) + \frac{\mu \sin \theta}{rh} \frac{F(s)}{2\pi}; \\ \tau_{1z} &= \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \left(\frac{\sin \theta}{r} (Nr) - \frac{\cos \theta}{r} \frac{F(s)}{2\pi}\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

а обмеженнями міцності (3.6, а) (далі приймається, що найбільші напруження виникають на поверхні оболонки $z = \pm h/2$) служать умови

$$\max_z \sigma_i \leq [\sigma], \quad \text{де } \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{1z}^2}. \quad (3.9)$$

Для розв'язання задачі використовуються необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна [18]. Гамільтоніан задачі має вигляд

$$\begin{aligned}
H = & \mu \frac{\sin \theta}{r} \xi - \frac{\sin 2\theta}{2Kr} (Nr) - \vartheta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2K\pi r} F(s) + \\
& + \lambda_1 \left(-\mu \frac{\cos \theta}{r} \zeta - \vartheta \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{Kr} (Nr) + \frac{\sin 2\theta}{4K\pi r} F(s) \right) + \\
& + \lambda_2 \left(-\mu \frac{\cos \theta}{r} \vartheta + \frac{1}{Dr} (M_1 r) \right) + \\
& + \lambda_3 \left(\frac{Eh}{r} \xi + \mu \frac{\cos \theta}{r} (Nr) + \mu \frac{\sin \theta}{2\pi r} F(s) - r q_r \right) + \\
& + \lambda_4 \left(\frac{Eh^3}{12r} \vartheta \cos^2 \theta + \sin \theta (Nr) + \mu \frac{\cos \theta}{r} (M_1 r) - \frac{\cos \theta}{2\pi} F(s) \right) + \\
& + \lambda_5 r(s) h(s) + \psi(\sigma - [\bar{\sigma}]).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Тут ψ – множник Лагранжа для врахування обмеження (3.8), $\bar{\lambda}_i(s)$ ($i = 1, 4$) – спряжені функції, що визначаються розв’язуванням системи

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}; & \frac{d\lambda_2}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}; \\
\frac{d\lambda_3}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial (Nr)}; & \frac{d\lambda_4}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial (M_1 r)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

з крайовими умовами трансверсальності [12] $\lambda_1(s_L) = \lambda_2(s_L) = 0$; $\lambda_2(s_0) = \lambda_3(s_0) = 0$, а $\lambda_5 = c = const$ – із нелінійного алгебраїчного відносно «с» рівняння (3.7), після підстановки в нього оптимального керування $h^*(s)$, яке визначається із умови максимуму гамільтоніана

$$\sup_{h \in Dm} H(\bar{Y}^*, \bar{\lambda}^*, h, s).$$

Числовий розв’язок задачі у цілому і відшукування оптимального розподілу товщини $h=h(s)$ динамометричної шайби здійснюється шляхом вдоволення одержаним вище необхідним умовам оптимальності з використанням запропонованого в [8] методу послідовних наближень, а для оптимізації форми меридіану шайби – методика викладена у розділі 2.

У той же час, незважаючи на переваги отриманої оболонкової конструкції неперервно-змінної жорсткості за вибраним критерієм та результатами виконання всіх накладених обмежень, її використання, як динамометричної шайби, з точки зору технологічних і експлуатаційних якостей є досить проблематичним. У зв'язку з цим виникає необхідність відшукування оптимального керування у класі кусково-постійних функцій. Задачу у такій постановці звичайно прийнято формулювати у термінах задачі нелінійного програмування, хоча при її реалізації і виникає ціла низка своїх труднощів. У той час як застосування принципу максимуму виявляється ефективним і у цьому випадку.

Задача раціонального проектування полягає в доробці проекту оптимальної змінної жорсткості за умовами технологічності шляхом найкращої апроксимації функції товщини стінки $h(s)$ оболонки обертання певною кусково-постійною товщиною h_i з довжинами ділянок l_i ($i=\overline{1,k}$), що зводиться до відшукування мінімуму функції

$$V = \min_{h_i, l_i \in D_k} (V_{\text{var}} - V_c)^2, \quad (3.11)$$

де для оболонок обертання

$$V_{\text{var}} = 2\pi \int_{s_0}^{s_L} h(s)r(s)ds; \quad (\text{а})$$

$$V_c = 2\pi \sum_{i=1}^k l_i h_i r_i, \quad (\text{б}) \quad (3.12)$$

а область D_k визначається умовами:

$$h_i \geq \max_{s_i \in [s_e, s_j]} h_\sigma(s_i); \quad h_i \geq h_0; \quad (\text{а})$$

$$\sum_{i=1}^k l_i = L = s_L - s_0; \quad l_i \geq 0, \quad (\text{б}) \quad (3.13)$$

Тут k – кількість ділянок кусково-постійної жорсткості; $e, j \in \{\overline{1, k}\}$; $e < j$; а $r_0 \leq \dots < r_e < r_j < \dots \leq r_k$ – граничні точки k інтервалів постійної жорсткості, що співпадають з вузловими точками s_i проміжку інтегрування крайової задачі; $h_\sigma(s_i)$ – товщини оболонки, що визначаються із вимоги сталості керування $h_i = \text{const}$ на k проміжках $s_i \in [s_e, s_k]$. При цьому умова (3.13, а) еквівалентна виконанню обмеження (3.6, а) на окремих підінтервалах, довжини ділянок l_i при необхідності можна фіксувати, а розв'язування допоміжної задачі нелінійного програмування (3.11) – (3.13) реалізується на кожній ітерації загальної схеми методу послідовних наближень розв'язування задачі оптимального керування.

Отримані результати розрахунків показують, що площа горизонтального поперечного перерізу шайби (із міркувань пружності і міцності) повинна бути співвимірною з площею поперечного перерізу болта, динамометричні властивості шайби забезпечуються головним чином лише пружними конструктивними елементами, що працюють на згин (конічними оболонками), оскільки деформації розтягу – стиску є недостатніми для забезпечення рівня чутливості шайби, що відповідає стандартному набору щупів або застосовуваним індикаторам інших типів. Максимальні осьові переміщення розглянутих оболонок-шайб з оптимальними кусково-постійними параметрами товщини стінки виявляються в $1,62 \div 1,66$ рази меншими, ніж для динамометричних шайб постійної товщини.

3.4. Прискорення збіжності алгоритму оптимізації пружних пластин.

Ефективність підходу для задач зниження матеріаломісткості конструкції продемонстрована на результатах прискорення збіжності алгоритму побудови вагової оптимізації товщини кільцевої пластини при поперечному навантаженні (рис. 3.12,а).

Метод послідовних наближень проектування рівномірної пластини приймається у вигляді

$$\bar{h}(s_i)^{k+1} = \bar{h}(s_i)^k + \gamma \bar{h}^* \frac{\bar{\sigma}(s_i)^k - \bar{\sigma}(s_i)^{k-1}}{[\sigma]}. \quad (3.14)$$

Характер збіжності при застосуванні розробленого алгоритму продемонстровано на рис. 3.12,б, де подані графіки зміни товщини пластини вздовж радіусу ($r = s$) на окремих кроках пошукового алгоритму, починаючи від початкового проекту пластинки постійної жорсткості (лінія 0) до проекту пластинки оптимальної конфігурації (лінія 15).

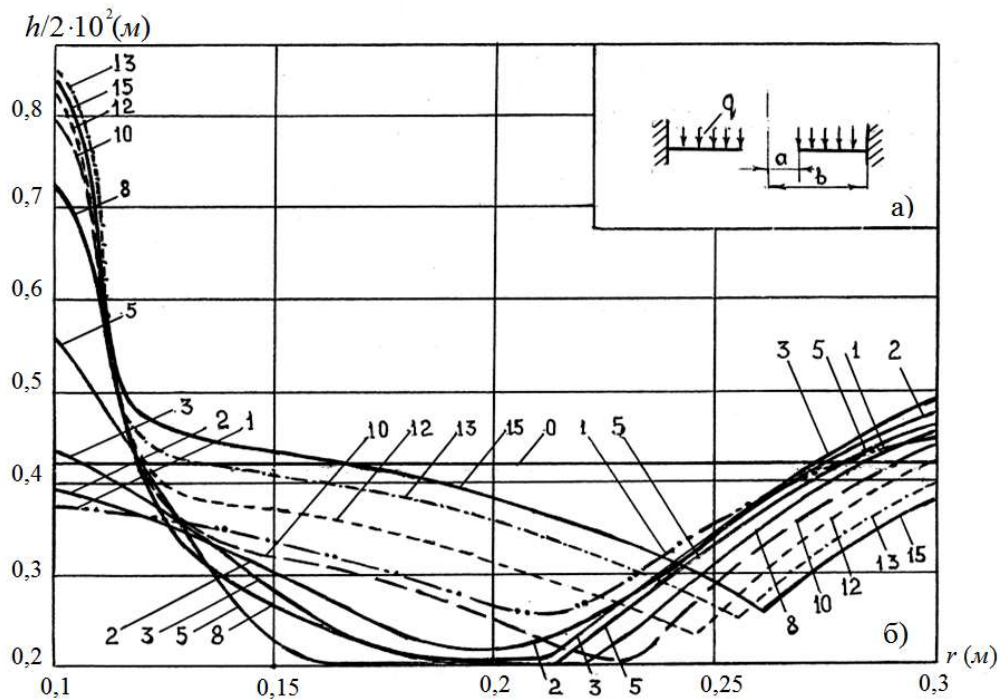


Рисунок 3.12 – Характер збіжності алгоритму оптимізації кільцевої пластини

Номери кривих на рис. 3.12 відповідають номерам ітерацій, на яких вони одержані. Прогнозування значень товщини пластини здійснювалось на кожному третьому кроці з використанням залежностей (2.19), (2.20) для всіх вузлових точок (для даного випадку $N = 100$) інтегрування системи (2.5).

На рис. 3.13 наведені траєкторії зміни значень контрольних точок алгоритму оптимізації товщини кільцевої пластини у точках: $r = 0,1$ м (лінія 1), $r = 0,15$ м (лінія 2), $r = 0,2$ м (лінія 3), $r = 0,25$ м (лінія 4), $r = 0,3$ м (лінія 5),

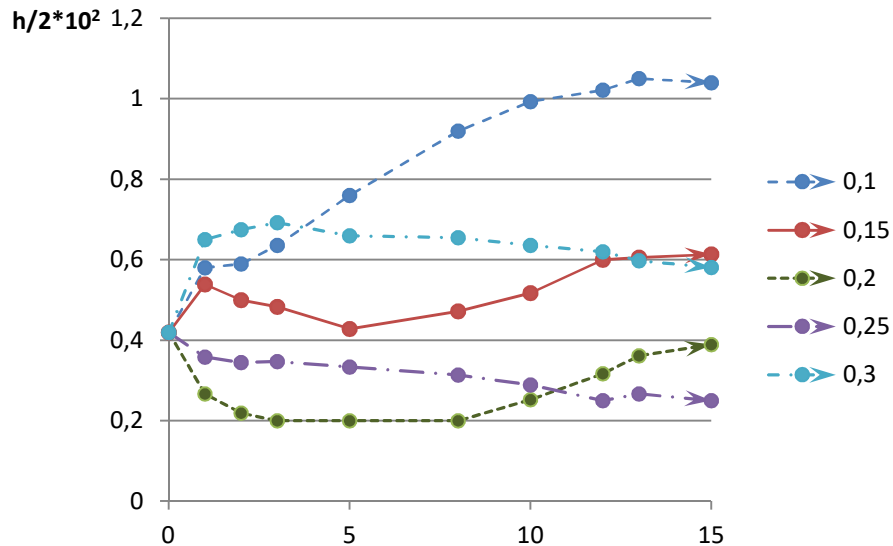


Рисунок 3.13 – Траєкторії зміни значень контрольних точок алгоритму оптимізації кільцевої пластини

За результатами досить обширного числового експерименту встановлено, що запропоновані алгоритми прискорення збіжності дозволяють суттєво (в декілька разів) скоротити обчислювальні витрати на розв'язування нелінійних крайових задач та знайти оптимальні проекти оболонок обертання і пластин за 12÷16 ітерацій, що в 1,5÷3 рази менше, ніж у випадку, зокрема, ітераційних процесів відшукування рівнонапруженого проекту з урахуванням конструктивного обмеження ($h(r) \geq h_0$, $h_0 = 0,2$ мм) рис. 3.12.

Висновки до розділу

Проведено експериментальні дослідження осьових переміщень гофрованої оболонки (сильфона) та відповідні порівняльні числові розрахунки з використанням авторського програмного пакету спільно з запропонованою методикою прискорення збіжності та з застосуванням скінченно-елементного аналізу. Отримані результати вказують на високу достовірність підходу.

Отримані результати розрахунків та оптимальні параметри динамометричних шайб при нелінійному деформуванні, які показують, що максимальні осьові переміщення розглянутих оболонок-шайб з оптимальною неперервною змінною товщиною стінок (яку можна приймати за теоретично найкращий проект – «еталон») є в $1,80 \div 1,85$ рази меншими, ніж вихідної оболонки, виготовленої з такої ж кількості матеріалу, а для шайби з оптимальними кусково-постійними параметрами товщини, цей показник складає $1,62 \div 1,66$ разів.

Це вказує на те, що розроблений підхід є ефективним засобом визначення оптимальних параметрів широкого кола динамометричних елементів та може бути досить корисним для практичних розробок динамометричних шайб спеціальних конфігурацій з високими експлуатаційними властивостями.

За результатами обширного числового експерименту направлено на зниження матеріаломісткості кільцевих пластин змінної жорсткості встановлено, що запропоновані алгоритми прискорення збіжності дозволяють проводити прямі розрахунки та відшукувати оптимальні проекти оболонок обертання і пластин за $12 \div 16$ ітерацій, що в $1,5 \div 3$ рази менше, ніж у випадку відомих ітераційних процесів.

У цілому у цьому підрозділі отримані корисні, у прикладному відношенні, результати розв'язування низки задач розрахунку напружено-деформованого стану та вибору оптимальних параметрів неоднорідних гнучких оболонкових елементів конструкцій зі складною формою меридіану. Зокрема, кільцевих пласти, гофрованих мембран синусоїдального профілю, динамометричних шайб.

Перелік джерел посилань до розділу 3

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов / Л. Е. Андреева. – М. : Машгиз, 1962. – 455 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика / В. Л. Бидерман. – М. : Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Резьбовые и фланцевые соединения. М.: Машиностроение. 1990. 368с.
4. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И. А. Биргер. – М. : Оборонгиз, 1964. – 340 с.
5. Булакаєв П. І. Дискретно-континуальний алгоритм розрахунку напруженодеформованого стану оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості / П.І. Булакаєв, А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : Ліра, 2011. – Вип. 16. – С. 69-78. ISSN 2079-1836.
6. Булакаєв П. І., Левитіна Л. Д., Сафронова І. А. Прискорення збіжності ітераційного алгоритму розв'язування задач розрахунку оболонок при великих переміщеннях / // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. Дніпропетровськ: ДНУ. Вип. 13. 2012. С. 69–76.
7. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16. – Вып.3 (99). – С. 171 – 174.
8. Дзюба А. П. Метод послідовних наближень розв'язування задач оптимального керування з обмеженими фазовими координатами для оптимізації силових елементів конструкцій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць – Дн-ськ: Навчальна книга, 1999, т.5. – С.61-85.
9. Дзюба А. П., Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану

- при великих переміщеннях // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. Т. 2. Дн-ск: Вид-во ДНУ. 2015. Вып. 19. С. 38–55.
10. Дзюба А. П., Філяшина І. А. (Сафронова І. А.) Розробка математичної моделі та методики розрахунку і оптимізації параметрів динамометричної шайби // Геотехническая механика. – Дніпропетровськ. 2005. Вып. 56. С. 219–226.
 11. Дзюба А.П. Метод послідовних наближень розв'язування задач оптимального керування з обмеженими фазовими координатами для оптимізації силових елементів конструкцій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць – Дн-ськ: Навчальна книга. – Т.5. – 1999. – С. 61-85.
 12. Дзюба А.П., Левитина Л.Д. Гофрированная мембрана синусоидального профиля: Авторское свидетельство №1170295 // Открытия и изобретения, 1985, №28. – С. 156.
 13. Дзюба А.П., Левитина Л.Д. Оптимизация формы круглых пластин и оболочек вращения. – Дн-ск: ДГУ. – 1985. – 124с.
 14. Дзюба А.П., Левитина Л.Д., Філяшина І.А Оптимізація параметрів пружних гофрованих мембран методами теорії оптимальних процесів // III Всеукраїнська наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки”: Тези доповідей. –Дніпродзержинськ, 2003. – С. 12.
 15. Дзюба А.П., Левитина Л.Д., Філяшина І.А. Розрахунок та оптимізація форми меридіану оболонок обертання як чутливих елементів манометричних пристроїв // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дн-ськ: ДНУ. – 2003. – Вып.7. – С.34-40
 16. Жернаков В. С., Пернаков Е. Н., Якубов Р. Г. Ресурс и надежность резьбовых соединений –М.: Машиностроение. 2003. 292 с.
 17. Понамарев С. Д. Расчет упругих элементов машин и приборов / С. Д. Понамарев, Л. Е. Андреева. – М. : Машиностроение, 1980. – 326 с.
 18. Понтрягин Л. С. , Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов / М.: Наука. 1969. 384 с.

19. Сафронова І. А. Алгоритм розв'язування задачі оптимізації форми гнучких гофрованих мембран // «Scientific and Practical Results. Prospects for Their Development» (2016, Abu-Dhabi, UAE). P. 35-39.
20. Справочник машиностроения (в 6-ти томах). –Т.4 // Под ред. Н. С. Ачеркана. М.: Гос.НТИ машин. литературы. 1956. 852с.
21. Bulakajev P. I. An algorithm for the prediction of search trajectory in nonlinear programming problems optimum design / P. I. Bulakajev, A. P. Dzjuba // Structural Optimization: Research Journal of Intern. Society of Struct. and Multidisciplinary Optimiz. (ISSMO, Germany).- Springer – Verlag. - 1997. – Vol.13. – №2,3. – P.199-202.

РОЗДІЛ 4.

ЗАСТОСУВАННЯ ПІДХОДУ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЕФЕКТИВНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Розділ присвячено застосуванню розробленого підходу для зменшення обчислювальних витрат при розрахунку несиметрично навантажених оболонок обертання зі змінними параметрами жорсткості (товщини стінки) вздовж меридіану з використанням розкладень відшукуваних функцій і навантажень в ряди Фур'є в окружному напрямку і інтегрування крайових задач для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладань в меридіональному напрямку; а також побудовані алгоритми дискретно-континуального методу прямих розрахунку оболонок обертання з товщиною, змінною у двох напрямках, шляхом застосування скінченно-різницевих розкладань в окружному напрямку та безпосереднього інтегрування крайових задач вздовж меридіану. Задача в цілому розв'язується методом послідовних наближень з використанням розробленого в розділі 2 алгоритму прискорення збіжності.

4.1. Алгоритм прогнозування коефіцієнтів розкладення в тригонометричні ряди Фур'є.

Ідея застосування та достовірність запропонованого підходу була апробована за результатами системного чисельного експерименту шляхом прогнозування значень коефіцієнтів розкладів в ряди Фур'є відомих функцій однієї змінної.

Відомо [27], що наближення деякої функції $g(z)$, $z \in [-\pi, \pi]$ може бути подано у вигляді тригонометричного ряду Фур'є:

$$\tilde{g}(z) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kz) + b_k \sin(kz)) \quad (4.1)$$

де коефіцієнти a_0, a_k, b_k (послідовності значень яких зі збільшенням номерів гармонік сходяться, не обов'язково монотонно, до нуля) визначаються за відомими формулами Ейлера – Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) dz, & a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos(kz) dz, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin(kz) dz, & k &= 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Суть запропонованого підходу полягає в зменшенні кількості обчислень коефіцієнтів (4.2) розкладання (4.1) шляхом періодичного екстраполювання значень коефіцієнтів розкладань з використанням результатів обчислень попередніх коефіцієнтів ряду (4.1), замінюючи їх, таким чином, деякими прогноз-значеннями, обчисленими за простими формулами.

Для побудови таких прогноз-значень в задачах оптимізації в [31] використовувався алгоритм імітаційного прогнозування, однією зі складностей застосування якого була необхідність визначення вагових коефіцієнтів формули прогнозу з використанням результатів спеціального числового експерименту, а інтерполювання кубічними сплайнами при розв'язанні задач розрахунку оболонок – в [13].

У даній дисертаційній роботі для вирішення цього завдання пропонується застосування розробленої методики (викладеної у другому розділі), яка передбачає спільне використання екстраполяційних залежностей Ейткена – Стеффенсена [30] і в формі збільшення методу Адамса [14], який є досить ефективним при розв'язанні задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь і заснований на екстраполяційних залежностях Лагранжа і Ньютона.

Таким чином, такий підхід дозволяє уникнути необхідності обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є на кожному 3-му кроці.

Перевірка достовірності запропонованого підходу здійснювалася за результатами системного числового експерименту шляхом прогнозування значень коефіцієнтів розкладання в ряди Фур'є відомих функцій.

Як приклад на рис. 4.1,а зображена послідовність значень коефіцієнтів (4.2) для $k = \overline{0, 20}$, де значком «•» позначені прогнозні значення (2.19), (2.20) коефіцієнтів a_k для функції:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq d, \\ 0, & d < z \leq \pi, \end{cases} \quad d = \pi/10, \quad (4.3)$$

коефіцієнти розкладання якої в ряд Фур'є за косинусами мають вигляд: $a_0 = 2d / \pi$; $a_k = 2 \sin(kd) / (k\pi)$; $k = \overline{1, \infty}$.

На рис. 4.1,б поданий графік зміни значень, які монотонно спадають, обчислених та прогнозованих коефіцієнтів розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(z) = \pi - z$, $z \in [0, 2\pi]$, які мають вигляд $b_k = 2 / k$, $k = \overline{1, \infty}$.

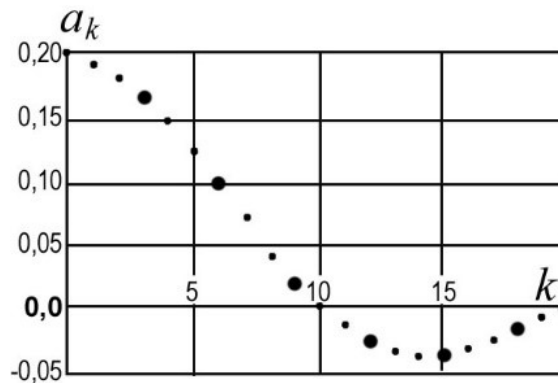
Зміна коефіцієнтів розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(z) = z$, $z \in [-\pi, \pi]$, для якої $a_0 = \pi^2 / 3$; $a_k = a_k = (-1)^k 4 / k^2$, $k = \overline{1, \infty}$; $a_k = (-1)^k 4 / k^2$, $k = \overline{1, \infty}$, наведені на рис. 4.1,в.

Відносна похибка обчислення, наприклад, значення функції $f(z) = 1$ (при $z = 0$) (рис. 4.1,а) при використанні перших 20 гармонік розкладання, з яких 7 визначені за результатами прогнозу, склала 1,4%, а при використанні точних значень коефіцієнтів – 0,3%.

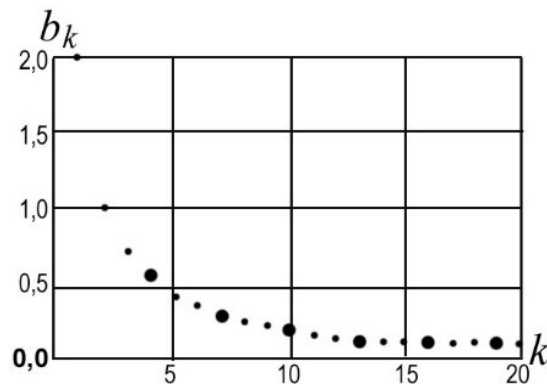
Слід зауважити, що для старших гармонік відносна похибка при прогнозному визначенні значень коефіцієнтів ряду Фур'є може зростати. Однак, з огляду на те, що зі зростанням k коефіцієнти ряду Фур'є зменшуються до нуля, їх внесок в остаточне значення функції зменшується, що в цілому на точність розв'язання задачі практично не впливає. З аналізу наведених на рис. 4.1 результатів випливає, що при необхідності частина коефіцієнтів Фур'є може

бути визначена приблизно, тобто не звичайним шляхом обчислення інтегралів (4.2), а в результаті інтерполяції за деякими опорними точками.

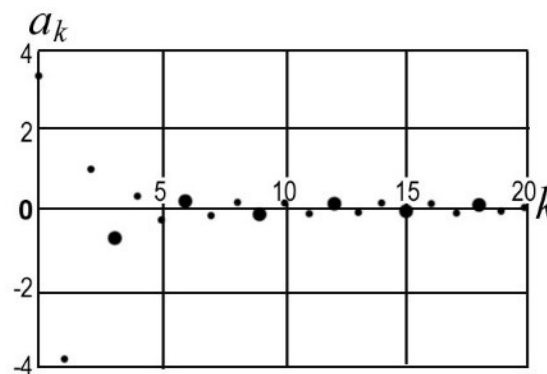
Слід зазначити, що розглянуті вище, для ілюстрації основний ідеї запропонованого підходу, приклади прогнозування коефіцієнтів Фур'є не мають самостійного практичного значення, оскільки для розглянутих функцій однієї змінної процес інтерполяції коефіцієнтів вимагає не менших обчислювальних витрат, ніж звичайний спосіб отримання коефіцієнтів у вигляді (4.1), (4.2).



а)



б)



в)

Рисунок 4.1. – Обчислені (\circ) і прогнозні (\bullet) значення коефіцієнтів розкладання в ряди Фур'є заданих функцій

4.2. Визначення напружено-деформованого стану несиметрично-навантажених оболонок обертання змінної вздовж меридіану товщини стінки.

Підхід виявляється досить ефективним в задачах розрахунку несиметрично навантажених оболонок обертання зі змінною вздовж меридіана товщиною, коли коефіцієнти розкладання шуканих функцій в ряди Фур'є є функціями поздовжньої координати і обчислюються в результаті розв'язання відповідної крайової задачі.

Для випадку оболонок обертання з товщиною стінки, змінною вздовж меридіану, рівняння зводяться до сукупності крайових задач ($k = \overline{0, \infty}$) для систем звичайних диференціальних рівнянь у вигляді (2.5) відносно змінних уздовж меридіану коефіцієнтів розкладень

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k^c \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^t \sin k\varphi; \\ \psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^c \sin k\varphi - \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^t \cos k\varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

параметрів напружено-деформованого стану в тригонометричні ряди Фур'є. Тобто розв'язок задачі у цілому складається із суми розв'язків зазначеної послідовності крайових задач у відповідності до (4.4). Тут в загальноприйнятих позначеннях [10] функції f означають $u, w, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta_1, \chi_1, \chi_2, N_1, N_2, Q_1, M_1, M_2, q_1, q_3$; функції ψ – $v, \gamma_{12}, \vartheta_2, \chi_{12}, S, Q_2, M, q_2$, а $f_k^c(s), f_k^t(s), \psi_k^c(s), \psi_k^t(s)$ – коефіцієнти їх розкладань в тригонометричні ряди.

В цьому випадку підхід дозволяє вирішувати системи диференціальних рівнянь відносно амплітуд розкладань $f_k^c(s), f_k^t(s), \psi_k^c(s), \psi_k^t(s)$ в тригонометричні ряди тільки для окремих «опорних» гармонік. А амплітуди для кожної 3-ої гармоніки обчислюються за результатами інтерполяції їх значень для всіх

вузлових точок ($s_0 \leq s^* \leq s_L$) інтегрування відповідної крайової задачі за (2.19) (2.20). Це дозволяє істотно скоротити обчислювальні витрати на отримання розв'язку в цілому.

Обчислювальна ефективність запропонованого підходу найбільш яскраво проявляється також при його використанні в задачах оптимального проектування конструкцій, оскільки багатокрокові ітераційні оптимізаційні алгоритми передбачають розв'язання прямих задач розрахунку напружено-деформівного стану конструкції на кожному кроці пошуку, що призводить до досить великих обчислювальних витрат.

Ефективність підходу ілюструється результатами розрахунку тонкої пружної сталеві кільцевої пластинки (рис. 4.2,а) під дією несиметричного навантаження

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} q(r), & -\pi/5 \leq \varphi \leq \pi/5, \\ 0, & \varphi \notin [-\pi/5; \pi/5], \end{cases}$$

поданої своїм розкладанням в ряд Фур'є за косинусами:

$$q(r, \varphi) = \frac{q_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^N q_k(r) \cos(k\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Розв'язання виникаючих систем звичайних диференціальних рівнянь (2.5), (2.6) відносно коефіцієнтів розкладання здійснювалося методом прогонки з ортогоналізації за С. К. Годуновим для різних значень геометричних параметрів і варіантів закріплення контуру. На рис. 4.2,б наведена залежність від номера k значень коефіцієнтів розкладання параметра $w_k E / q_k$ радіального прогину в точці $r = r_2$ в ряд Фур'є за косинусами, а на рис. 4.2,в параметра $M_{1(k)}^{(k)} / q_k$ поздовжнього моменту в точці $r = r_1$ для випадку кільцевої пластинки

(рис. 4.2,а) товщиною $h = 0,05 \text{ м}$ з затисненим внутрішнім і вільним зовнішнім контуром $r_2 = 1 \text{ м}$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $\mu = 0,3$.

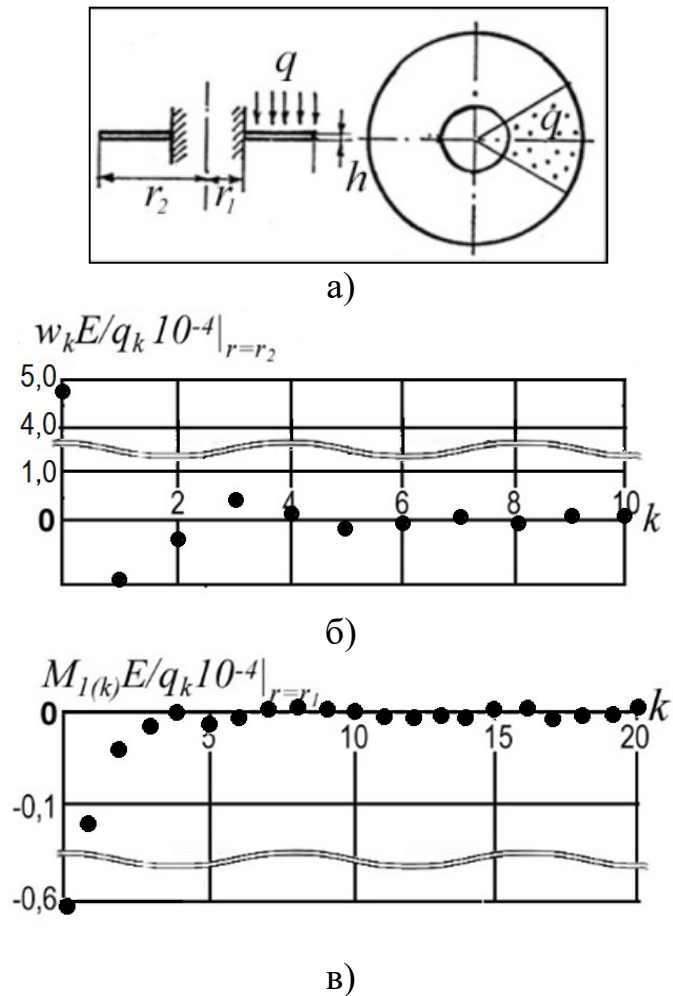


Рисунок 4.2. – Значення коефіцієнтів розкладання в ряди Фур'є прогину (б) і поздовжнього моменту (в) для кільцевої пластини (а)

В цьому випадку для обчислення членів ряду Фур'є $w_k(s)$, $M_{1k}(s)$, ($k = \overline{0,20}$) знадобилося 14 розв'язків крайових задач (2.5), (2.6) без помітної втрати точності (близько 0,07%) у порівнянні з використанням коефіцієнтів Фур'є, отриманих в результаті розв'язання 21 такої крайової задачі.

4.3. Застосування методу прямих для розрахунку оболонок обертання з жорсткістю змінною у двох напрямках.

При довільному несиметричному навантаженні основні співвідношення, що описують напружено деформований стан оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості подаються у вигляді системи з 8-ми рівнянь в частинних похідних [3, 4, 32]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial s} &= -\frac{\mu}{r}u + \frac{1}{Kr}(N_1r) - \frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \\
 \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{K(1-\mu)r}(S_1^*r) - \left(\frac{1}{r} + \frac{4D}{Kr^3}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\
 \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta; \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} &= \frac{(M_1r)}{Dr} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}; \\
 \frac{\partial(N_1r)}{\partial s} &= \frac{2(1-\mu)}{r^3}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2(1-\mu)}{r^2}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \frac{2D(1-\mu)}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \\
 &\quad - \frac{2D(1-\mu)}{r^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial(S_1^*r)}{\partial \varphi} - rq_1; \\
 \frac{\partial(S_1^*r)}{\partial s} &= -\frac{(1-\mu^2)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial K}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial(M_1r)}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial(N_1r)}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{K(1-\mu^2)}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{(1-\mu^2)}{r}\left(\frac{1}{r}K + \frac{1}{r^3}D\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{(1-\mu^2)}{r}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - rq_2; \\
 \frac{\partial(Qr)}{\partial s} &= \frac{K(1-\mu^2)}{r}w + \frac{\mu}{r}(N_1r) - \frac{\mu}{r}\frac{\partial^2(M_1r)}{\partial \varphi^2} - \frac{2D(1-\mu)}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \\
 &\quad - \frac{2D(1-\mu)}{r^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{D(1-\mu^2)}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \frac{(1-\mu^2)}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} - K\right)\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{2(1-\mu^2)}{r^3}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{2(1-\mu^2)}{r^3}\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{D(1-\mu^2)}{r^3}\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \\
 &\quad + \frac{2(1-\mu^2)}{r^3}\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - rq_3;
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial(M_1 r)}{\partial s} = (Q r) - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{2(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2D(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2D(1-\mu)}{r} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2};$$

де $s_0 \leq s \leq s_l$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – координати в меридіональному та окружному напрямках; $u, v, w, \vartheta_1, N_1 r, S_1^* r, Q_1^* r, M_1 r$ – компоненти (в загальноприйнятих позначеннях [10]) вектора основних змінних напружено-деформованого стану циліндричної оболонки, під дією розподіленого зовнішнього навантаження $q_1(s, \varphi)$, $q_2(s, \varphi)$, $q_3(s, \varphi)$; $K = Eh/(1-\mu^2)$, $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ – жорсткість на розтяг та циліндрична жорсткість, відповідно; E, μ, r – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і радіус оболонки, відповідно. В узагальненому вигляді система (4.5) матиме вигляд

$$\frac{\partial z_i}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 \sum_{j=1}^8 \left(a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^{(m)} z_j}{\partial \varphi^{(m)}} + f_i^{(m)} \right), \quad i = \overline{1, 8}, \quad (4.6)$$

де вектор $\bar{z} = (u, v, w, \vartheta_1, N_1 r, S_1^* r, Q_1^* r, M_1 r)^T$.

Оскільки у цьому зведення двовимірної задачі випадку до сукупності одновимірних методом Фур'є є неможливим, для побудови числового алгоритму прямого розрахунку пропонується застосування диференційно-різницевого (дискретно-континуального) методу прямих [4, 8, 10, 30], суть якого полягає в тому, що в коловому напрямку використовується різницева подання рівнянь стану оболонки, а у поздовжньому – у вигляді диференційних рівнянь, що дозволяє отримати сукупність одновимірних задач вздовж кожного m -го ($m = \overline{1, M}$) меридіану (рис. 4.3), розв'язок яких здійснюється методом прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим [4, 5] за вузловими точками уздовж s .

Слід зазначити, що метод прямих, як правило, вносить меншу похибку у порівнянні з методом сіток, хоча іноді вимагає більших обчислювальних витрат для доведення результату «до числа». При цьому питання збіжності наближе-

них розв'язків, отриманих по методу прямих, для рівнянь теорії оболонок питання залишаються все ще мало дослідженими.

Після заміни похідних за координатою φ в системі рівнянь (4.5) у відповідності з (4.7) та зведення подібних членів при компонентах вектора напружено-деформованого стану $\bar{z} = (u, v, w, \vartheta_1, N_1 r, S_1^* r, Q_1^* r, M_1 r)^T$ для кожної m -ої ($i = 1, 2, \dots, M$) смуги можна отримати крайову задачу для системи 8^*M звичайних диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\frac{du_m}{ds} = -\mu \frac{1}{r} w_m + \frac{1}{K_m r} (N_1 r)_m - \mu \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (v_{m-2} - 8v_{m-1} + 8v_{m+1} - v_{m+2});$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_m}{ds} = & \frac{2}{K_m (1-\mu)} \frac{1}{r} (S_1^* r)_m - \left(\frac{1}{r} + \frac{4D_i}{K_m r^3} \right) \frac{1}{12\Delta} (u_{m-2} - 8u_{m-1} + 8u_{m+1} - u_{m+2}) + \\ & + \frac{4D_m}{K_m r^2} \frac{1}{12\Delta} (\vartheta_{1m-2} - 8\vartheta_{1m-1} + 8\vartheta_{1m+1} - \vartheta_{1m+2}); \end{aligned}$$

$$\frac{dw_m}{ds} = -\vartheta_{1m};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_{1m}}{ds} = & -\mu \frac{1}{r^2} \frac{30}{12\Delta^2} w_m + \frac{1}{D_m r} (M_1 r)_m - \\ & - \mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta} (v_{m-2} - 8v_{m-1} + 8v_{m+1} - v_{m+2}) + \\ & + \mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{m-2} + 16w_{m-1} + 16w_{m+1} - w_{m+2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(N_1 r)_m}{ds} = & -\frac{2D_m (1-\mu)}{r^3} \frac{30}{12\Delta^2} u_m - \frac{2D_m (1-\mu)}{r^2} \frac{30}{12\Delta^2} \vartheta_{1m} + \\ & + \frac{2(1-\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_m \frac{1}{12\Delta} (u_{m-2} - 8u_{m-1} + 8u_{m+1} - u_{m+2}) - \\ & - \frac{2(1-\mu)}{r^2} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_m \frac{1}{12\Delta} (\vartheta_{1m-2} - 8\vartheta_{1m-1} + 8\vartheta_{1m+1} - \vartheta_{1m+2}) - \\ & - \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (S_1^* r)_{m-2} + \frac{2D_m (1-\mu)}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-u_{m-2} + 16u_{m-1} + 16u_{m+1} - u_{m+2}) - \\ & - \frac{2D_m (1-\mu)}{r^2} \frac{1}{12\Delta^2} (-\vartheta_{1m-2} + 16\vartheta_{1m-1} + 16\vartheta_{1m+1} - \vartheta_{1m+2}) - r q_{1m}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathcal{S}_1^* r)_m}{\partial s} = & -\left(\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right)_m (1-\mu^2) \frac{1}{r} w_m - \\
& -(1-\mu^2) \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right)_m + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)_m \right) \frac{1}{12\Delta} (v_{m-2} - 8v_{m-1} + 8v_{m+1} - v_{m+2}) - \quad (4.8) \\
& -K_m (1-\mu^2) \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (w_{m-2} - 8w_{m-1} + 8w_{m+1} - w_{m+2}) - \\
& -\mu \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} \left((N_1 r)_{m-2} - 8(N_1 r)_{m-1} + 8(N_1 r)_{m+1} - (N_1 r)_{m+2} \right) - \\
& -\mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta} \left((M_1 r)_{m-2} - 8(M_1 r)_{m-1} + 8(M_1 r)_{m+1} - (M_1 r)_{m+2} \right) - \\
& -(1-\mu^2) \left(K_m \frac{1}{r} - D_i \frac{1}{r^3} \right) \frac{1}{12\Delta^2} (-v_{i-2} + 16v_{m-1} - 30v_m + 16v_{m+1} - v_{m+2}) + \\
& + \frac{1}{r^3} (1-\mu^2) \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)_m \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{m-2} + 16w_{m-1} - 30w_m + 16w_{m+1} - w_{m+2}) + \\
& + (1-\mu^2) D_m \frac{1}{r^3} \frac{1}{8\Delta^3} (w_{m-3} - 8w_{m-2} + 16w_{m-1} - 13w_{m+1} + 8w_{m+2} - w_{m+3}) - \\
& -rq_{2m};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(Q_1^* r)_m}{ds} = & \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)_m (1-\mu^2) \frac{2}{r^3} \frac{30}{12\Delta^2} v_m + (1-\mu^2) \times \\
& \times \left(K_m \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\right)_m \frac{1}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} + D_m \frac{1}{r^3} \frac{56}{6\Delta^4} \right) w_m + \mu \frac{1}{r} (N_1 r)_m + \\
& + \frac{\mu}{r^2} \frac{30}{12\Delta} (M_1 r)_m - (1-\mu^2) \frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\right)_m \frac{1}{r^2} - K_m \right) \times \\
& \times \frac{1}{12\Delta} (v_{m-2} - 8v_{m-1} + 8v_{m+1} - v_{m+2}) - \\
& - \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)_m (1-\mu^2) \frac{2}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-v_{m-2} + 16v_{m-1} + 16v_{m+1} - v_{m+2}) - \\
& - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\right)_m (1-\mu^2) \frac{1}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{m-2} + 16w_{m-1} + 16w_{m+1} - w_{m+2}) - \\
& - \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{12\Delta} \left((M_1 r)_{m-2} + 16(M_1 r)_{m-1} + 16(M_1 r)_{m+1} - (M_1 r)_{m+2} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D_m(1-\mu^2)\frac{1}{r^3}\frac{1}{8\Delta^3}(v_{m-3}-8v_{m-2}+13v_{m-1}-13v_{m+1}+8v_{m+2}-v_{m+3})+ \\
& +\left(\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right)_m(1-\mu^2)\frac{2}{r^3}\frac{1}{8\Delta^3}(w_{m-3}-8w_{m-2}+13w_{m-1}-13w_{m+1}+8w_{m+2}-w_{m+3})+ \\
& +D_m(1-\mu^2)\frac{1}{r^3}\frac{1}{6\Delta^4}\times \\
& \times(-w_{m-3}+12w_{m-2}-39w_{m-1}-39w_{m+1}+12w_{m+2}-w_{m+3})-rq_{3m};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(M_1r)_m}{ds} & = -2D_m(1-\mu)\frac{1}{r^2}\frac{30}{12\Delta^2}u_m + 2D_m(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{30}{12\Delta^2}\vartheta_{1m} + (Q_1^*r)_m + \\
& + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right)_m\frac{1}{r^2}\frac{1}{12\Delta}(u_{m-2}-8u_{m-1}+8u_{m+1}-u_{m+2})- \\
& - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right)_m\frac{1}{r}\frac{1}{12\Delta}(\vartheta_{1m-2}-8\vartheta_{1m-1}+8\vartheta_{1m+1}-\vartheta_{1m+2})+ \\
& + 2D_m(1-\mu)\frac{1}{r^2}\frac{1}{12\Delta^2}(-u_{m-2}+16u_{m-1}+16u_{m+1}-u_{m+2})- \\
& - 2D_m(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{1}{12\Delta^2}(-\vartheta_{1m-2}+16\vartheta_{1m-1}+16\vartheta_{1m+1}-\vartheta_{1m+2}).
\end{aligned}$$

Тут

$$\Delta = \Delta\varphi_m, \Delta\varphi_m = 2\pi/M, \varphi_m = \Delta\varphi_m(m-1);$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial K}{\partial\varphi}\right)_m & = \frac{K_{m-2}-8K_{m-1}+8K_{m+1}-K_{m+2}}{12\Delta}; \\
\left(\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right)_m & = \frac{D_{m-2}-8D_{m-1}+8D_{m+1}-D_{m+2}}{12\Delta};
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial\varphi^2}\right)_m = \frac{-D_{m-2}+16D_{m-1}-30D_m+16D_{m+1}-D_{m+2}}{12\Delta^2}.$$

Вирази для N_2 , M_2 і M записуються, за необхідності, через основні змінні з використанням скінченних різниць. Для чисельного розв'язування виникаючої одновимірної крайової задачі використовується метод дискретної ортогоналізації С. К. Годунова [2, 5].

В узагальненому вигляді система (4.8) матиме вигляд

$$\frac{dz_i^m}{ds} = \sum_{j=1}^8 (A_{ij}^m z_j^m + F_i^m), \quad i = \overline{1,8}, \quad m = \overline{1,M}. \quad (4.10)$$

Слід зазначити, що для замкненої циліндричної оболонки при заміні похідних в окружному напрямку їх різницевиими поданнями використовуються лише центральні різниці. Що стосується виконання крайових умов, то для випадку відкритої оболонки на кінцях інтервалу апроксимації застосовуються однобічні різниці, де для прямих 0 і n враховуються значення відповідних параметрів, обумовлених умовами закріплення. Граничні умови на меридіональних краях оболонки ($s = 0, s = L$, де L – довжина оболонки) враховуються при розв'язанні крайової задачі вздовж меридіана методом прогонки.

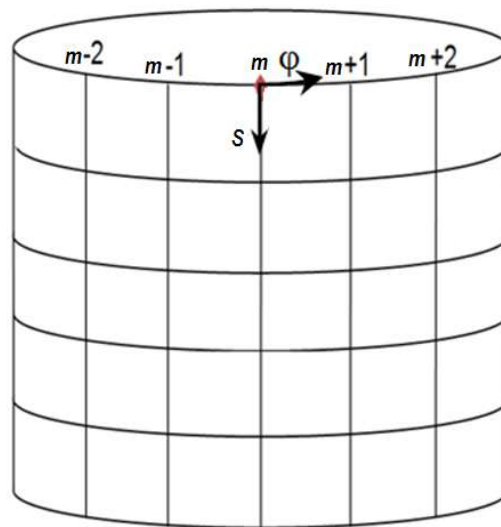


Рисунок 4.3. – Схема поділу поверхні оболонки вузловими точками

До труднощів реалізації такого підходу слід віднести забезпечення стійкості розв'язування крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з досить значною $8 \cdot M$ кількістю невідомих та змінними коефіцієнтами, а також близькістю значень коефіцієнтів рівнянь для двох сусідніх прямих. Розв'язування всієї системи $8 \cdot M$ рівнянь вздовж меридіональної координати s методом

прогонки при великих значеннях M призводить до слабкої обумовленості в матриці \bar{A} , що пов'язане з близькістю значень коефіцієнтів на сусідніх вузлових лініях $m-1, m, m+1, \dots, i$, як наслідок, до труднощів забезпечення стійкості алгоритму.

4.4. Зменшення обчислювальних витрат алгоритму дискретно-континуального методу прямих розрахунку оболонок обертання змінної жорсткості.

У дисертаційній роботі розв'язування задачі пропонується здійснювати шляхом декомпозиції розглядуваної системи з застосуванням методу прямих і послідовних наближень.

Суть підходу полягає в розв'язуванні системи (4.10) послідовно для кожної із ліній $m = \overline{1, M}$, замінюючи складові похідних за окружною координатою значеннями, отриманими на попередніх ітераціях з використанням ідеї прогнозування їх значень на кожному 3-му кроці у відповідності з (2.19), (2.20).

Модифікації підходу полягає в тому, що замість розв'язування крайової задачі для всієї системи із $8 \cdot M$ рівнянь (4.3) в загальній схемі послідовних наближень M раз розв'язуються окремі системи по 8 рівнянь для кожного $m = \overline{1, M}$. При цьому значення параметрів в (4.3) з відмінними від m індексами приймаються до розгляду за результатами розрахунку на попередній ітерації. Якщо на першому кроці рішення (хоча б якесь наближене) поставленої задачі виявляється невідомим, то ці значення приймаються нульовими. Критерієм збіжності служить умова близькості двох послідовних розв'язків на ω -ому і $(\omega + 1)$ -ому кроці наближень по одній або декільком змінним, зокрема, у вигляді

$$\max_{m,j} \left| \frac{\bar{z}^{(\omega+1)} - \bar{z}^{\omega}}{\bar{z}^{(\omega+1)}} \right| \leq \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.11)$$

Таким чином, якщо процес збігається за ω кроків, то для розв'язування задачі розрахунку необхідно $\omega * M$ разів розв'язати крайову задачу для системи 8-ми звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Як приклад, що ілюструє можливості підходу, розглянута задача розрахунку кругової циліндричної оболонки, геометрія та інші параметри якої відповідають прийнятим в [10] (стор. 168). Несиметричне навантаження внутрішнім тиском задається у вигляді $q_n(s, \varphi) = q_0(1 + 0.3 \cos \varphi) \sin(\pi s / L)$, а товщина оболонки змінюється за законом $h = h_0(1 + 0.3 \cos \varphi)$, $q_0 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$. Поперечний перетин такої оболонки для $s = L/2$ зображено на рис. 4.4.

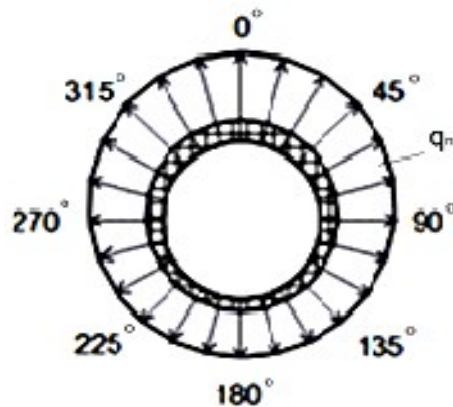


Рисунок 4.4 – Навантаження та розподіл матеріалу у поперечному перетині оболонки

Розглянуто випадки для затиснутих та шарнірно-закріплених торців оболонки. Крайові умови для цих випадків приймаються у вигляді:

$$1) \omega = u = v = \vartheta_1 = 0; \quad 2) u = v = w = M_1 = 0. \quad (4.12)$$

У відповідності до методу прямих кількостей смуг вздовж напрямної (для половини перерізу оболонки у зв'язку з симетрією) була прийнята $M = 30$, а точок інтегрування за методом С. Г. Годунова – 60. Слід зазначити, що на відміну від [10] збільшення цих параметрів (за необхідності більш точного

врахування параметрів неоднорідності оболонки) не призводить до зниження ефективності підходу.

На рис. 4.5 подані розподіл прогинів w та напружень σ_2 на внутрішній поверхні оболонки уздовж твірної при $\varphi = 0$, лінія 1, лінія 2 відповідно для випадків закріплення країв (4.12). Відхилення від даних, наведених в [10], не перебільшує 0,15%.

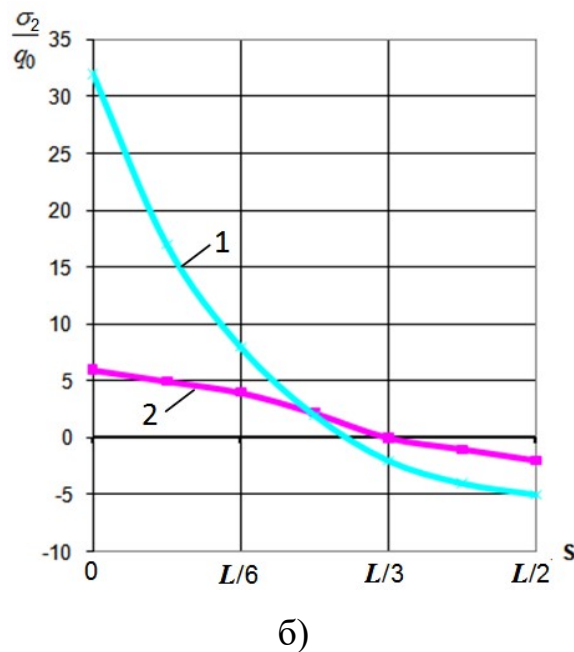
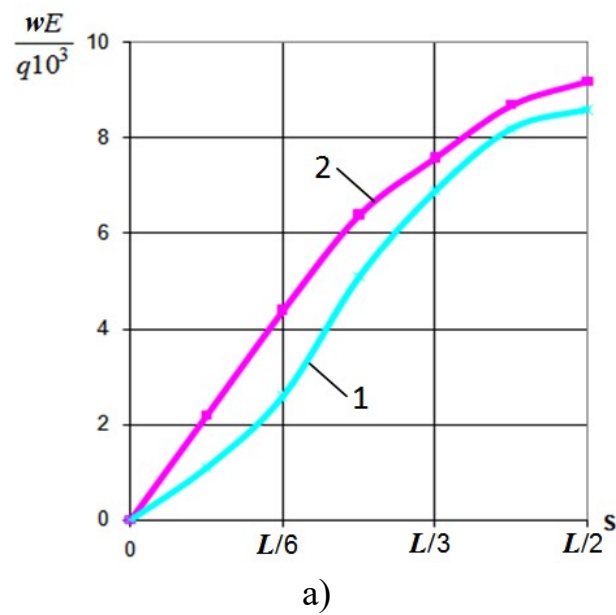


Рисунок 4.5. – Розподіл прогинів (а) та напружень (б) в оболонці з різними граничними умовами

Далі приведені результати розрахунку циліндричної оболонки під внутрішнім тиском $q = 1$ МПа з параметрами $r = 0,5$ м; $L = 2,5$ м; $\mu = 0,3$; $E = 1,9 \cdot 10^{11}$ Па; $h = h_0(1 + \cos(\varphi/2))$; $h_0 = 0,005$ м. При $s = 0$ крайові умови прийняті у вигляді затиснення, а при $s = L$ – шарнірного закріплення (див. (4.12)). На рис. 4.6 приведені графіки залежностей згинального моменту M_1 уздовж оболонки при $\varphi = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180^\circ$ – лінії (1) – (7), відповідно.

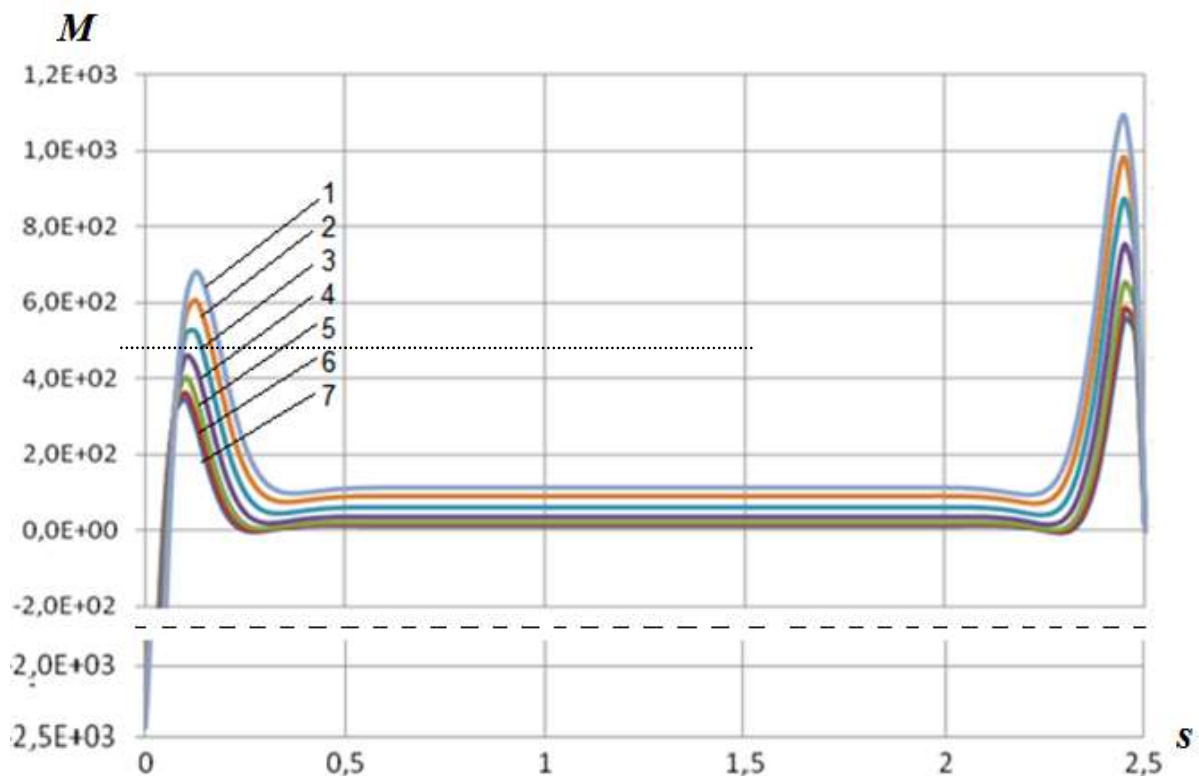


Рисунок 4.6. – Залежності згинального моменту M_1 за довжиною оболонки

Збіжність методу послідовних наближень, на кожному кроці якого розв'язувалась по M крайових задач для системи із 8-ми рівнянь, була забезпечена за 7 ітерацій. Тобто, для отримання необхідної точності 7 разів по колу було проінтегровано $M = 30$ крайових задач для 8-ми рівнянь (4.10). Розрахунки основних параметрів напружено-деформованого стану для випадку оболонки постійної товщини співпадають з точним

(аналітичним) розв'язком з розбіжністю не більше 0,2%, що вказує на високу достовірність розробленого алгоритму.

4.5. Висновки до розділу.

У цьому розділі розроблено методологію зменшення обчислювальних витрат в задачах розрахунку несиметрично навантажених оболонок обертання змінної вздовж меридіана жорсткості при спільному використанні методу Фур'є та розробленого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

Розроблено ефективний підхід до дослідження напружено-деформованого стану і визначення параметрів оболонок зі змінною у двох напрямках жорсткістю, шляхом спільного застосування модифікованого дискретно-континуального методу прямих та розробленого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

Розроблено модифікований варіант алгоритму реалізації дискретно-континуального методу прямих для дослідження впливу довільно змінної (в окружному та меридіональному напрямках) товщини стінки циліндричної оболонки на параметри її напружено-деформованого стану.

Поєднання різницевого (в окружному напрямку) та континуального (в меридіональному напрямку) подання рівнянь стану оболонки у вигляді сукупності крайових задач для системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами і подальшого застосування методу послідовних наближень та методики прискорення збіжності дозволило побудувати ефективний алгоритм реалізації підходу.

Запропонований підхід може бути ефективним засобом розрахунку нелінійних задач механіки неоднорідних оболонок, їх вагової оптимізації, дослідження деформування оболонок обертання в умовах корозійної деградації матеріалу стінок, а також при вирішенні досить широкого кола задач механіки оболонок, рідини, газу та плазми і в інших областях.

Перелік джерел посилань до розділу 4

1. Алямовский А. А. SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – Москва: ДМК Пресс, 2004.- 432 с.
2. Бабушка И, Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений: монография. – Москва: Мир, 1969. – 368 с.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
4. Булакаев П. І., Дзюба А. П., Сафронова І. А. Дискретно – континуальний алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дн-ськ: Ліра, 2011. – Вип. 16. – С. 69-78.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук, 1961. – Т. 16. – Вып.3 (99). – С. 171-174.
6. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П., Яремченко С. Н. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях // Доп. НАН Украины, 2016. – № 6. – С.31-37.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1981. – Т. 4. – 544 с.
8. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
9. Григоренко Я. М., Драйгор Н. Д., Шинкарь А. И. К решению задач о напряженном состоянии ортотропных цилиндрических оболочек с переменной жесткостью в двух направлениях // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Москва, 1977. – Вып. 30. С. 3-10.

10. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1979. – 280 с.
11. Дашенко А. Ф., Лазарева Д. В., Сурьянинов Н. Г. ANSYS в задачах инженерной механики: монография. Изд 2-е перероб и доп. / под ред. Сурьянинова Н. Г. – Харьков: «Бурун и К», 2011. – 504 с.
12. Дзюба А. П., Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих переміщеннях // Вісник Дніпропетровського університету. Сер.: Механіка. – Дн-ськ, 2015. – Вип. 19. – Т 2. – С.38-55.
13. Дзюба А. П., Сафронова І. А., Левитіна Л. Д. Алгоритм розрахунку циліндричної оболонки зі змінною в окружному напрямку жорсткістю на основі дискретно-континуального підходу//Прблеми обч. мех. і міцності конструкій. Зб. наук. праць, 2019. – Вип. 30. – С. 53-67.
14. Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба А. А., Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій // в кн.: Актуальні проблеми механіки: монографія / під ред. М. В. Полякова. – Дн-ськ: Ліра, 2018. – С. 225-243.
15. Дзюба А. П., Бобильов О. О., Булакаєв П. І. Алгоритм зменшення обчислювальних витрат при використанні методу Фур'є в задачах механіки оболонкових конструкцій // Вісник Дніпропетровського держуніверситету: Механіка, 1999. – Вип.2. – Т.2. – С. 47-57.
16. Емельянов И. Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов фурье //вычислительная механика сплошных сред, 2015. – Т.8. – № 3. – С. 245-253.
17. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – Москва: Мир,1975. – 544 с.
18. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986. –584 с.

19. Лазарев И. Б., Круглов А. И., Редьков Е. В. Поэтапная оптимизация с использованием аппроксимаций состояния конструкций // Численные методы расчета и оптимизации строительных конструкций: труды ин-та ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, 1989. – С.39-46.

20. Малков В. П., Торопов В. В., Филатов А. А. Имитационный подход к оптимизации деформируемых систем // Прикл. пробл. прочн. и пластичности: всесоюзн. межвуз. сб. – Горький, 1982. – С.62-69.

21. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288с.

22. Мяченков В. И., Григорьев И. В.. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1981. – 212 с.

23. Овчинников И. Г., Почтман Ю. М. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа: Расчет и оптимизация. – Дн-ськ, 1995. – 190 с.

24. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т.1 – 832 с.

25. Реклейтис Г. Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: в 2-х кн. – Москва: Мир, 1986. – Кн.1. – 349 с. – Кн.2. – 320 с.

26. Синева Н. Ф., Селиванов Ф. С., Никитюк Д. В. Расчёт цилиндрической оболочки переменной жесткости, взаимодействующей с нелинейно упругим основанием // Вестн. Саратовского ГТУ, Сер.: Строительство и архитектура. 2011. № 4(60). – Вып. 2. – С.15–21.

27. Толстов Г. П. Ряды Фурье. – Москва: Физматгиз, 1960. – 392 с.

28. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – Москва: Мир, 1975. – 534 с.

29. Хог Э. Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. – Москва: Мир, 1988. – 428 с.

30. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. – К.: АН УССР, 1963. – Ч. 1. – 196 с., 1966. – Ч. 2. – 242 с.

31. Bulakajev P. I., Dzyuba A. P. An algorithm for the prediction of search trajectory in nonlinear programming problems optimum design, *Structural Optimization: Research Journal of Intern. Society of Struct. and Multidisciplinary Optimiz.* - Springer – Verlag, 13 Iss. 2,3, 1997. – P. 199-202.

32. Hudramovich V. S., Dzyuba A. P., Contact interaction and optimization of locally loaded shell structures, *Journal of mathematical Science - Springer Science + Business media*, 2009. – P. 231-245.

33. Toropov V. V. Simulation approach to structural optimization // *Structural Optimization*, 1989. – №1(1). – P. 37–46.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою роботою у якій розроблено нові моделі, прості та ефективні алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних задач розрахунку і відшукування оптимальних параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом комп'ютерного моделювання ефективних ітераційних процесів, що ґрунтуються на прогнозуванні значень наступних кроків послідовних наближень.

Використання запропонованого підходу дозволяє суттєво скоротити обчислювальні витрати і отримати розв'язки різноманітних практично важливих задач механіки оболонок.

– Розроблено нові ефективні алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язання задач розрахунку напружено-деформованого стану і визначення оптимальних параметрів неоднорідних оболонкових елементів конструкцій шляхом прогнозування (на окремих кроках) значень нелінійних параметрів за результатами попередніх ітерацій.

– За результатами досить обширного числового експерименту встановлено, що запропоновані алгоритми прискорення збіжності дозволяють суттєво (в декілька разів) скоротити обчислювальні витрати на розв'язування нелінійних крайових задач механіки оболонок та відшукати оптимальні проекти оболонок обертання і пластин за 12÷16 ітерацій, що в 1,5÷3 рази менше, ніж у випадку відомих ітераційних процесів.

– Модифіковано прийоми перетворень нелінійних крайових задач механіки оболонок (їх ліанеризації) для побудови ефективних ітераційних схем та прискорення збіжності їх розв'язування.

– Проведено експериментальні дослідження поведінки гнучкої кільцевої пластинки та гофрованої оболонки (сильфона) і порівняльні числові дослідження адекватності існуючих математичних моделей і ефективності розроблених алгоритмів.

– Розроблено методологію зменшення обчислювальних витрат в задачах розрахунку несиметрично навантажених оболонок обертання змінної вздовж меридіана жорсткості при спільному використанні методу Фур'є та розробленого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

– Розроблено ефективний підхід до дослідження напружено-деформованого стану і визначення параметрів оболонок зі змінною у двох напрямках жорсткістю, шляхом спільного застосування модифікованого дискретно-континуального методу прямих та розробленого алгоритму прискорення збіжності ітераційних процесів.

– Отримані корисні, у прикладному відношенні, результати розв'язування низки задач розрахунку напружено-деформованого стану та вибору оптимальних параметрів неоднорідних гнучких оболонкових елементів конструкцій зі складною формою меридіану. Зокрема, кільцевих пласти, гофрованих мембран синусоїдального профілю, динамометричних шайб, оболонок обертання довільної конфігурації і змінною вздовж меридіану та окружному і меридіональному напрямкам товщиною стінки.

Отримані в дисертації результати можуть бути безпосередньо використані для скорочення обчислювальних витрат в задачах розрахунку і вибору оптимальних параметрів широкого спектру задач механіки оболонок.

ДОДАТОК А

ДОКУМЕНТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

ЗАТВЕРДЖЕНО

Проректор з науково-педагогічної
роботи Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара

_____ Дмитро СВИНАРЕНКО

“ _____ ” _____ 2021 р.

А К Т

про впровадження результатів кандидатської дисертації
Сафронової Інги Анатоліївни
«Моделі і алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів
в задачах розрахунку і оптимізації оболонкових елементів конструкцій»
в освітній процес спеціальності 113 – Прикладна математика
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара

Комісія у складі: член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Кісельової О.М., д.ф.-м.н.,
проф. Гук Н.А., д.ф.-м.н. проф. Лободи В.В. склади цей акт про те, що наукові
дослідження, виконані Сафроновою І.А. у кандидатській дисертації
впровадженні у навчальний процес і використовуються при викладанні курсів
«Стійкість неперервних та дискретних моделей», «Big Data Application and
Analytics застосування» та при виконанні кваліфікаційних робіт здобувачами
першого і другого освітнього рівня спеціальності 113 – Прикладна математика.

Члени комісії

Декан факультету
прикладної математики,
член-кор. НАНУ,
д.ф.-м.н., проф.

Олена КІСЕЛЬОВА

Завідувач кафедри
комп'ютерних технологій,
д.ф.-м.н., проф.

Наталія ГУК

Завідувач кафедри
теоретичної та комп'ютерної механіки,
д.ф.-м.н., проф.

Володимир ЛОБОДА

ДОДАТОК Б

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗАТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ І ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковано основні наукові результати

1. Safronova I. A. Algorithm for computational costs reducing in problems of calculation of asymmetrically loaded shells of rotation / Dzyuba A. P., Safronova I. A., Levitina L. D / Strength of Materials and Theory of Structures, 2020. – № 105. – С. 107-122 (Web of science)
2. Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій / Дзюба А. П., Сіренко В. М., Сафронова І. А., Дзюба О. А. // Актуальні проблеми механіки: Монографія серії: Підсумки науки до 100-річчя заснування Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара / під редакцією М. В. Полякова. – Дніпро: ЛПРА, 2018. – 225-243 с.
3. Сафронова І. А. Розробка методики розрахунку напружено-деформованого стану циліндричної оболонки зі змінної у двох напрямках товщиною стінки / Дзюба А.П., Сафронова І. А., Левитіна Л.Д. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дніпро: ДНУ. – Вип. 30, 2019. – С. 53-67
4. Сафронова І. А. Числові та експериментальні дослідження великих переміщень в оболонкових елементах конструкцій / А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник Дніпропетровського університету: серія «Механіка неоднорідних структур», Дн-ськ, 2016. –Вип. 1(20). –С.11–20.
5. Сафронова І. А. Числові та експериментальні дослідження поведінки осесиметричних кільцевих пластин при великих переміщеннях / А. Г. Пацюк, І. А. Сафронова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць - Дн-ськ: ДНУ. –Вип. 25. - 2016. -С. 158-170.
6. Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих

переміщеннях / А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка» Т 2., Д., 2015. – Вип. 19.–С.38-55

7. Сафронова І. А. Прискорення збіжності ітераційного алгоритму розв'язування задач розрахунку оболонок при великих переміщеннях / П. І. Булакаєв, Л. Д. Левитіна, І. А. Сафронова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць – Дн-ськ: ДНУ. –Вип. 13. – 2012. – С. 69–76.

8. Сафронова І. А. Дискретно-континуальний алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості / П. І. Булакаєв, А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дн-ськ: Ліра. – 2011. – Вип. 16. – С. 69–78.

9. Сафронова І.А. Розробка математичної моделі та методики розрахунку і оптимізації параметрів динамометричної шайби / А. П. Дзюба, І. А. Філяшина (І. А. Сафронова) // Геотехническая механіка. – Дн-ськ. –2005. – Вып. 56. – С. 219–226.

10. Дзюба А. П. Розрахунок та оптимізація форми меридіану оболонок обертання як чутливих елементів манометричних пристроїв / А. П. Дзюба, Л. Д. Левитіна, І. А. Філяшина (І. А. Сафронова) // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дн-ськ: ДНУ. –2003. – Вип. 5. – С. 40–46.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

11. Safronova I. A. Research adequacy of the mathematical models of deformation shell elements with large displacements / A. P. Dzyuba, I. A. Safronova // Proc. of the III Intern. Scient. and Pract. Conf. «Science and Education – Our Future, Ajman, UAE, 2016 » – P. 39-44.

12. Сафронова І. А. Прогнозування значень коефіцієнтів в методі Фур'є для зниження обчислювальних витрат в задачах розрахунку оболонок обертання при

несиметричному навантаженні /Дзюба А. П., Сафронова І. А., Левитіна Л. Д.// Актуальные проблемы инженерной механики / Тезисы докладов VII Международной научно-практической конференции. Общая редакция – Н. Г. Сурьянинов. Одесса: ОГАСА, 2020. – С. 96-99. – Режим доступа до ресурсу: <https://drive.google.com/file/d/1RIruKchAIDCfvCfEtoi33HkeKcIpoLSx/view>.

13. Сафронова І.А. Алгоритм прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку і оптимального проектування конструкцій / Сафронова І. А. // Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 2. – С.194-195. – Режим доступу до ресурсу: www.iarpm.lviv.ua/mpmm2018.

14. Сафронова І. А. Алгоритм розв'язування задачі оптимізації форми гнучких гофрованих мембран / І. А. Сафронова // «Scientific and Practical Results. Prospects for Their Development» (2016, Abu-Dhabi, UAE). – P. 35-39.

15. Сафронова І. А. Числовий аналіз збіжності ітераційних алгоритмів розрахунку оболонок обертання при великих переміщеннях / І. А. Сафронова // III Международная конференция «Актуальные проблемы инженерной механики»: Тезисы докладов. – Одесса. – 2016. – 178-181.

16. Safronova I. A. Algorithms of optimal designing for materially and geometrically nonlinear thin elements of metallurgical equipments under thermal loading / I. A. Safronova, L. D. Levitina // Summaries of lectures 9th international symposium of Croatian metallurgical society. – Shibenik, Croatia, june 20 – 24, 2010: SHMD'2010 Materials and metallurgy. – Metallurgy. – 2010. – Vol.49, N.3. – P.222.

17. Сафронова І. А. Прискорення збіжності методу прямих для розв'язування задач теорії оболонок змінної у двох напрямках жорсткості / І. А. Сафронова // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2010»: тези доповідей. -Дніпродзержинськ. –2010. –С.136.

18. Сафронова І. А. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розв'язування нелінійних крайових задач механіки розрахунку оболонок

обертання / І. А. Сафронова // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки»: Тези доповідей. Том 2. – Дніпродзержинськ. – 2016. – С.14.

19. Сафронова І. А. Алгоритм прискорення збіжності методу прямих для розв'язування крайових задач механіки оболонок обертання /Левитіна Л. Д., Сафронова І. А., Рябчекно Є. Д. // Тези доповідей ІІ МНТК пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя з дня народження) «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпро, 2019. – С. 181.