

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДНІПРОВСЬКИЙ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ШПОРТА АННА ГРИГОРІВНА

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ  
ЗАДАЧ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ  
МАТЕРІАЛІВ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

01– фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



А.Г. Шпорта

Науковий керівник

**Кагадій Тетяна Станіславівна,  
доктор фізико-математичних наук, професор**

Дніпро – 2021

## АНОТАЦІЯ

**Шпорта А.Г.** Застосування методу збурень до розв'язання контактних задач та його узагальнення для електропружних матеріалів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» (фізико-математичні науки). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено застосуванню методу збурень до розв'язання контактних задач та його узагальненню для електропружних матеріалів.

**Об'єктом дослідження є** тонка пружна пластина у вигляді криволінійного сектора з циліндричною анізотропією, на яку діє жорсткий штамп.

**У першому розділі** проведено огляд літератури за темою дисертації. На основі огляду можна зазначити що задачі контактної взаємодії, а також методи їх розв'язання не втрачають своєї актуальності як і раніше. Проблеми контакту мають особливе значення для машинобудування та будівництва, оскільки вони визначають процеси зносу, міцності, руйнування та довговічності конструкцій та споруд. Виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Практичні потреби розв'язання цих питань обумовили важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження конкретних задач.

Проведено огляд наукових публікацій у яких для отримання розв'язків плоских контактних задач теорії пружності дослідники використовували математичний апарат, основою якого є застосування теорії функцій комплексного змінного. Окрім того розглянуто літературні джерела, у яких

проводиться розрахунок напруженого стану в задачах з тертям і частинним зчепленням, також проведено огляд наукових робіт, присвячених розробці та застосуванню асимптотичних методів розв'язання контактних задач лінійної теорії пружності.

Дослідження напружено-деформованого стану деталей контакту, виготовлених з п'єзоелектричних матеріалів викликає суттєві математичні труднощі під час необхідних розрахунків. Важливість вирішення цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила необхідність розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної і п'єзоелектромагнітної складової. У огляді літератури проведено аналіз останніх наукових публікацій з цього питання.

Метою дисертаційної роботи є:

- розв'язання контактної задачі теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Пластина являє собою скінченний круговий сектор з криволінійною анізотропією, закріплений за кромками. Жорсткий штамп вдавлюється у вільну грань сектора. На штамп діють нормальні та дотичні зусилля. У процесі розв'язання враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії. Необхідно отримати розподіл напружень під штампом.

- розв'язання контактних задач теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор з циліндричною анізотропією. Півнескінченна пластина або пластина скінченних розмірів закріплена за кромками. На вільну границю сектору діє жорсткий штамп нормальним зусиллям. Припускається, що в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Необхідно показати що, крайові задачі теорії пружності для

плоских ортотропних тіл зводяться до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язати.

Для розв'язання поставлених контактних задач теорії пружності був використаний метод збурень, запропонований та розроблений у працях А.В. Павленка, Т.С. Кагадій. Згідно з цим методом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних середовищ відбувається з використанням параметра, що характеризує анізотропні властивості матеріалу пластини. В процесі розв'язання вихідні складні задачі теорії пружності зводяться до послідовного розв'язання більш простих крайових задач. У першому розділі дисертаційної роботи наведено основну ідею використаного асимптотичного методу.

Перевагою узагальненого методу збурень є те, що він дозволяє звести розв'язання складних задач лінійної теорії пружності до послідовного розв'язання більш простих крайових задач (інтегрування рівнянь Лапласа, у складніших випадках рівняння Пуассона).

Доведено, що в усіх випадках вихідної постановки можуть бути сформульовані крайові умови для основних функцій.

Розв'язок знаходиться як суперпозиція розв'язків для кожного напруженого стану.

У другому розділі пропонується розв'язання контактної задачі теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії. Для розв'язання поставленої задачі використовується метод малого параметра. Згідно з цим методом НДС тіла розкладається на дві складові. Щоб урахувати всі можливі співвідношення між компонентами вектора переміщень та швидкостями їх зміни за координатами вводяться афінні перетворення координат та шуканих функцій. Ці перетворення залежать від малого параметру фізичного характеру, а саме - це відношення характеристик жорсткості матеріалу пластини.

Також у даному розділі продемонстровано, що узагальнення

асимптотичного підходу може бути успішно застосовано для розв'язання контактних задач теорії пружності, коли урахування реальних властивостей матеріалу призводить до значних складнощів у процесі розв'язання.

Для розв'язаної у розділі задачі отримано розподіл напружень під штампом. Встановлено зв'язок між розмірами області взаємодії, кута розкриття сектора та коефіцієнтом тертя. Досліджено вплив розмірів пластини на розподіл нормальних напружень під штампом для окремих значень параметрів жорсткості матеріалу.

Знайдено розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для різних значень  $(G / B_1)^{1/2}$  і  $h_1 / \gamma$ . Графічно побудовано відповідні залежності.

У третьому розділі наведено розв'язання контактної задач теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний сектор з циліндричною анізотропією. При цьому враховано, що в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними.

За допомогою асимптотичного методу НДС пластини розкладається на дві складові, пов'язані між собою через граничні умови. Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ) в першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння Лапласа для основної функції  $U$  при вихідних граничних умовах.

Визначено закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення. Відстежується вплив зростання значення коефіцієнта тертя на збільшення розміру ділянки зчеплення.

Також у цьому розділі дисертаційного дослідження розглянуто більш складний випадок для кругової пластини скінченних розмірів. Аналогічним чином враховано існування ділянок ковзання та зчеплення в області контакту штамп з пластиною.

Для задачі у вказаній постановці розв'язання складних задач лінійної пружності (за допомогою розглянутого методу збурень) зведено до крайових задач теорії потенціалу. Були отримані аналітичні розв'язки поставленої задачі.

Отримані також значення параметра  $\alpha_*$ , який характеризує розмір ділянки зчеплення, у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G / B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1), 0.348 (склопластик), 0.524 (свинець).

Обчислено значення осідання штампа  $C_0^*$  для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G / B_1)^{1/2}$ , при фіксованому значенні параметра  $\lambda / \gamma = 0,409$ . Графічно побудовано відповідні залежності.

У четвертому розділі проведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Показано, що цілком можливо звести такі задачі до послідовного розв'язування крайових задач теорії потенціалу.

Механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

При механічному навантаженні п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються в напружених, переміщеннях або їх комбінаціях, розв'язки відповідних крайових задач будемо представляти у вигляді суперпозиції розв'язків двох типів напружено-деформованого стану. Наведено розв'язки ряду модельних задач, які підтверджують коректність та доцільність застосування методу збурень для дослідження напружено-деформованого стану деталей взаємодії з урахуванням п'єзоелектричної складової.

Актуальність даної роботи полягає в тому, що в ній досліджені важливі задачі контактної взаємодії у більш складній постановці, використаний при цьому метод збурень дозволяє враховувати складну геометрію області контакту і вплив неідеальних властивостей матеріалу.

Наприклад знайдено аналітичні розв'язки задачі, аналогічної тій, що

була поставлена і розв’язана Л.О. Галінім про вдавлювання жорсткого штампа у вільну грань тонкої пластини з урахуванням існування ділянок ковзання і зчеплення в області контакту. Ускладнення постановки полягає в тому, що розглядається криволінійний сектор з циліндричною анізотропією.

Дослідження поведінки конструкцій, виготовлених з сучасних матеріалів, наприклад п’єзоелектриків, виявляє суттєві математичні труднощі під час відповідних розрахунків. Запропонований у роботі підхід дозволяє дослідити напружений стан деталей взаємодії з урахуванням п’єзоелектричної складової.

Отримані аналітичні розв’язки можуть бути використані для попередньої оцінки НДС при розв’язанні контактних задач іншими методами, наприклад чисельними.

**Ключові слова:** теорія пружності, контактні задачі, вдавлювання штампа, криволінійна анізотропія, тертя та зчеплення, ковзання, асимптотичний метод, напружено-деформований стан, електропружність та електромагнітопружність.

## ABSTRACT

**Shporta A. H. Perturbation method application to solving contact problems and its generalization for electroelastic materials. – Qualification research paper, manuscript copyright.**

Thesis for Science Candidate Degree in Physics and Mathematics by specialty 01.02.04 “Mechanics of the Deformable Solids” (Physics and Mathematics). – Oles Honchar Dnipro University, Dnipro, 2021.

The dissertation is devoted to the perturbation method application to solving contact problems and its generalization for electroelastic materials.

**The object of the study is** a thin elastic plate in the form of a curved sector with a cylindrical anisotropy on which a rigid stamp acts.

**The first section** reviews the literature on the topic of the dissertation. Based

on the review, it can be noted that the problems of contact interaction, as well as methods for solving them do not lose their relevance as before. Contact problems are of particular importance for mechanical engineering and construction, as they determine the processes of wear, strength, destruction and durability of structures and structures. There is a need for a correct preliminary assessment of the stress-strain state of the problem.

The practical need to address these issues has led to the importance of developing methods for calculating contact interactions, as well as the study of specific problems.

A review of scientific publications in which researchers used a mathematical apparatus based on the application of the theory of functions of a complex variable to obtain solutions of plane contact problems of the theory of elasticity was conducted. In addition, the literature sources in which the stress state is calculated in problems with friction and partial adhesion are considered, as well as a review of scientific papers on the development and application of asymptotic methods for solving contact problems of linear elasticity theory.

The study of the stress-strain state of contact parts made of piezoelectric materials causes significant mathematical difficulties in the necessary calculations. The importance of solving these issues, which manifested itself in practice, necessitated the development of methods for calculating contact interactions, as well as the study of contact problems taking into account the piezoelectric and piezoelectromagnetic components. The literature review analyzes the latest scientific publications on this issue.

*The purpose of the dissertation is:*

- solving the contact problem of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic plate with cylindrical anisotropy. The plate is a finite circular sector with curvilinear anisotropy attached to the edges. The rigid stamp is pressed into the free face of the sector. Normal and tangential forces act on the stamp. The solution takes into account the friction force that occurs during the interaction. It is necessary to obtain the stress distribution under the stamp.



- solving contact problems of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic curvilinear sector with cylindrical anisotropy. A semi-infinite plate or a plate of finite dimensions is attached to the edges. The free boundary of the sector is exposed to stamp with normal force. It is assumed that in the area of contact of the stamp with the plate there are two sliding areas adjacent to the end points of the contact area, and the area of adhesion located between them. It is necessary to determine the laws of stress distribution under the stamp and the size of the clutch zone.

- generalization of the small parameter method to two-dimensional problems of electroelasticity. It should be shown that the boundary value problems of the theory of elasticity for flat orthotropic bodies are reduced to the problems of the theory of potential, which can be solved sequentially.

To solve contact problems of elasticity theory, the perturbation method is used, proposed and developed in the works of A.V. Pavlenka, T.S. Kagadiy. According to this method, the asymptotic analysis of the equations of the theory of elasticity for orthotropic media occurs using a parameter that characterizes the anisotropic properties of the plate material. The initial complex problems of the elasticity theory in the process of solving are reduced to the sequential solution of simpler boundary value problems. The first section of the dissertation presents the main idea of the used asymptotic method.

The advantage of the generalized perturbation method is that it reduces the solution of complex problems of linear elasticity theory to the sequential solution of simpler boundary value problems (integration of Laplace equations, in more complex cases Poisson equations).

It is proved that in all cases of the initial statement the boundary conditions for the main functions can be formulated.

The solution is found as a superposition of solutions for each stress state.

***The second section*** proposes to solve the contact problem of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic plate with cylindrical anisotropy. The force of friction that occurs during the interaction is

taken into account. The small parameter method is used to solve this problem. According to this method, the body stress-strain state of is decomposed into two components. To take into account all possible relationships between the components of the displacement vector and the rates of their change in coordinates, affine transformations of coordinates and required functions are introduced. These transformations depend on a small parameter of a physical nature, namely the ratio of the stiffness characteristics of the plate material.

This section also demonstrates that the generalization of the asymptotic approach can be successfully applied to solve contact problems of the theory of elasticity, when taking into account the real properties of the material leads to significant difficulties in the solution process.

For the problem solved in this section, the stress distribution under the stamp is obtained. The relationship between the size of the interaction area, the angle of opening of the sector and the coefficient of friction. The influence of plate sizes on the distribution of normal stresses under the stamp for individual values of material stiffness parameters was investigated.

The distribution of normal stresses under the stamp depending on the size of the free face of the plate and the contact area for different values of  $(G / B_1)^{1/2}$  and  $h_1 / \gamma$ . The corresponding dependencies are graphically constructed.

**The third section** solves the contact problems of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic curvilinear semi-infinite sector with cylindrical anisotropy. It is taken into account that in the area of contact of the stamp with the plate there are two sliding areas adjacent to the end points of the contact area, and the area of adhesion located between them.

Using the asymptotic method, the stress-strain state of the plate is decomposed into two components, interconnected through boundary conditions. The determination of the stress state of the first type (which slowly changes in the direction of the  $\xi$ ) coordinate in the first approximation is reduced to the integration of the Laplace equation for the principal function  $U$  under the initial boundary

conditions.

The laws of stress distribution under the stamp and the size of the clutch area are determined. The effect of increasing the value of the coefficient of friction on the increase in the size of the clutch area is tracked.

Also, in this section of the dissertation research a more complex case for a circular plate of finite dimensions is considered. Similarly, the existence of areas of slip and adhesion in the area of contact of the stamp with the plate is taken into account.

For the problem in the specified formulation, the solution of complex problems of linear elasticity (using the considered perturbation method) is reduced to the boundary value problems of the potential theory. Analytical solutions of the problem were obtained.

The values of the parameter  $\alpha_*$  that characterizes the size of the clutch area, depending on the coefficient of friction  $\rho$  for several values  $(G/B_1)^{1/2}$ : 0.134 (carbon fiber KMU-1), 0.348 (fiberglass), 0.524 (lead).

The value of the settling of the stamp  $C_0^*$  for different values of the characteristics of the material stiffness  $(G/B_1)^{1/2}$ , at a fixed value of the parameter  $\lambda/\gamma = 0,409$ . The corresponding dependencies are graphically constructed.

***In the fourth section***, the generalization of the small parameter method to two-dimensional problems of electroelasticity is performed. It is shown that it is quite possible to reduce such problems to the sequential solution of boundary value problems of potential theory.

Mechanical and electrical components can be separated, but have a mutual influence due to boundary conditions.

In the case of mechanical loading of piezoelectric materials, when the boundary conditions are set in stresses, displacements or their combinations, the solutions of the corresponding boundary value problems will be represented as a superposition of solutions of two types of stress-strain state. The solutions of a number of model problems are given, which confirm the correctness and expediency

of the application of the perturbation method for the study of the stress-strain state of the interaction details taking into account the piezoelectric component.

The relevance of this work is that it explores the important problems of contact interaction in a more complex setting, the method of perturbations used allows to take into account the complex geometry of the contact area and the influence of imperfect material properties.

For example, analytical solutions of a problem similar to the one posed and solved by L.O. Galin about pressing a rigid stamp into the free face of a thin plate, taking into account the existence of areas of slip and adhesion in the contact area. The complication of the formulation is that the curvilinear sector with cylindrical anisotropy is considered.

The study of the behavior of structures made of modern materials, such as piezoelectrics, reveals significant mathematical difficulties in the relevant calculations. The approach proposed in this paper allows us to investigate the stress state of the details of the interaction, taking into account the piezoelectric component.

The obtained analytical solutions can be used for preliminary assessment of VAT when solving contact problems by other methods, such as numerical.

**Keywords:** elasticity theory, contact problems, stamp indentation, curvilinear anisotropy, friction and adhesion, sliding, asymptotic method, stress-strain state, electroelasticity and electromagnetic elasticity.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шпорта А.Г. Контактна взаємодія стрингера та ортотропної пластини з криволінійною анізотропією. *Проблеми механіки суцільного середовища*. Дніпро, 2020. Вип. 30. С. 185-194. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219037>.
2. Shporta A., Kagadiy T., Onopriyenko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2020. № 1. P. 130-134. DOI: [130-134  
https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130](https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130)
3. Kagadiy T., Shporta A. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing element. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2019. № 5. P. 60-64. DOI: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10>.
4. Kagadiy T. S., Shporta, A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2015. № 3. P. 76-81.  
URL: <http://nvngu.in.ua/index.php/ru/component/jdownloads/finish/54-03/8331-2015-03-shporta/0>.
5. Шпорта А., Кагадій Т. Застосування методу збурень до розв'язання деяких контактних задач. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій* : матеріали міжнародної наук.-тех. конф., присвяч. 100-й річниці з дня народження акад. В.І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.) Дніпро, 2019. С.136-137.
6. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Урахування тертя та зчеплення у контактній задачі для криволінійного сектора. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2019. № 1. С. 126-133.
7. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 3. № 2.1, 2020. С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>

8. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Математичне моделювання в задачах електропружності. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2019. № 2(69). Ч.3. С. 216-221.

9. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Решение задач для пластин с эллиптическим и гипотрохоидным отверстием. 2012 р., *СевНТУ, конференція*

10. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Точные решения некоторых задач для пластин с отверстием. 2013р., *конференція, присвячена 100-ччю кафедри вищої математики НГУ*.

**ЗМІСТ**

<b>ВСТУП</b> .....	17
<b>РОЗДІЛ 1. Загальний огляд методів розв’язання контактних задач теорії пружності</b> .....	23
1.1 Огляд методів розв’язання окремих контактних задач.....	23
1.2 Огляд методів розв’язання контактних задач з урахуванням п’єзоелектричної складової.....	33
1.3 Застосування асимптотичних методів до розв’язання задач контактної взаємодії.....	45
1.4 Основи асимптотичного методу.....	51
1.4.1 Метод збурення для тіл з прямолінійною анізотропією.....	51
1.4.2 Основні співвідношення та крайові задачі у криволінійних ортогональних координатах.....	64
Висновки до розділу 1.....	73
<b>РОЗДІЛ 2. Задача про дію жорсткого штампу на пружну анізотропну пластину з урахуванням сили тертя</b> .....	74
2.1 Постановка задачі .....	74
2.2 Метод розв’язання та отримані результати .....	76
2.3 Аналіз отриманих результатів.....	86
Висновки до розділу 2 .....	93
<b>РОЗДІЛ 3. Задача про дію жорсткого штампу на пружну анізотропну пластину з урахуванням тертя та зчеплення</b> .....	94
3.1 Взаємодія жорсткого штампу та півнескінченної пружної анізотропної пластини .....	94
3.1.1 Постановка задачі.....	94
3.1.2 Метод розв’язання .....	95
3.1.3 Аналіз результатів і висновки.....	107
3.2 Взаємодія жорсткого штампу та пружної анізотропної пластини скінченних розмірів .....	112
3.2.1 Постановка задачі.....	112

3.2.2	Метод розв'язання та отримані результати .....	114
3.2.3	Аналіз результатів і висновки.....	124
	Висновки до розділу 3.....	126
<b>РОЗДІЛ 4.</b>	<b>Асимптотичний метод у двомірних задачах</b>	
	<b>електропружності.....</b>	<b>127</b>
4.1	Постановка задачі .....	127
4.2	Метод розв'язання .....	128
	Висновки до розділу 4.....	141
	<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>142</b>
	<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>144</b>
	<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>159</b>
	<b>Додаток А .....</b>	<b>159</b>



## ВСТУП

**Актуальність теми дослідження.** Розв'язання контактних задач не втрачає актуальності багато десятиріч. Ускладнюються постановки, розробляються нові підходи та методи, враховуються властивості, що все більше наближають моделі до поведінки реальних конструкцій та взаємодіючих деталей.

Передача зусиль та тисків від одних деталей взаємодії до інших відбувається при їх взаємному дотику. Проблема контакту має особливе значення для машинобудування та будівництва, оскільки вони визначають процеси зносу, міцності, руйнування та довговічності конструкцій та споруд. Виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Практичні потреби розв'язання цих питань обумовили важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження конкретних задач.

Методи малого параметра (геометричного або фізичного) широко використовуються в теорії пружності.

Асимптотичний аналіз являє собою ефективний математичний апарат, який дозволяє нам побудувати розумне рівняння апроксимації і оцінити застосування різних гіпотез. Безумовно, вивченню напружено-деформованого стану деталей та механізмів під час контактної взаємодії присвячені численні наукові дослідження. На даний час суттєвого розвитку набули також різноманітні чисельні методи розв'язання контактних задач теорії пружності.

Але, разом з цим, потреба в аналітичних рішеннях дуже значна. Оскільки врахування реальних властивостей матеріалу, таких як анізотропія або в'язкопружність, і, тим більше, нелінійність, призводять до значних математичних труднощів.

У згаданих вище випадках наближені аналітичні рішення допомагають знаходити розв'язки задач з урахуванням якісних характеристик, отримувати

асимптотики, аналізувати особливі точки і часто є основою для чисельних розрахунків.

У зв'язку з цим необхідно узагальнити підхід до вирішення плоских і просторових задач пружності, заснований на теорії кінцевої деформації або фізично нелінійної пружності. Аналітичні рішення дозволяють визначити правильність результатів, отриманих іншими методами, досліджувати особливі точки.

Для пружних (в'язкопружних) ортотропних матеріалів був розроблений асимптотичний метод [72,73], який дозволив звести дослідження задач механіки до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. Згаданий метод, який використовується у дослідженні, дозволяє розширити коло задач нелінійної і лінійної теорії пружності (в'язкопружності), які можуть бути розв'язані аналітичними методами.

У зазначеній дисертаційній роботі розглянуті актуальні контактні задачі, під час розв'язання яких необхідною умовою є урахування циліндричної анізотропії матеріалу, а також урахування нелінійної геометрії.

Широке застосування п'єзоелектриків у сучасній техніці змушує дослідників розглядати електромагнітопружність як єдину науку, яка поєднує електродинаміку, теорію магнетизму та механіку суцільного середовища. Раніше ці науки на практиці вивчались окремо. Необхідність нового погляду пов'язана з тим, що при деформуванні деяких матеріалів на їх поверхнях з'являються електричні заряди пропорційні деформації. Але, виявляється, неможна нехтувати і зворотнім ефектом, який проявляється у виникненні механічних напружень під впливом електричного поля. Докладний огляд і останні оригінальні результати у цьому напрямку можна знайти у монографіях [37, 50-52, 104].

Оскільки ізотропні матеріали в електропружності не викликають інтересу, то, природно, особливу увагу слід приділити анізотропним матеріалам, а також матеріалам із сильною анізотропією. Активні матеріали, перш за все п'єзоелектричні і п'єзоелектромагнітні, часто використовуються в

якості функціональних частин різних електронних пристроїв, включаючи датчики, перетворювачі і виконавчі механізми, оскільки ці матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного поля. У багатьох випадках розміри згаданих пристроїв надзвичайно малі, але тим не менше вони можуть піддаватися впливу дуже великих механічних, електричних і магнітних полів. Крім того, ці пристрої зазвичай складаються з елементів, які можуть бути виготовлені з різних матеріалів (п'єзоелектричні або п'єзоелектромагнітні елементи, електроди тощо).

У даному дисертаційному дослідженні пропонується застосування методу збурень, розробленого в роботах А.В. Павленка, до розв'язання двовимірних контактних задач електропружності. При цьому під час дослідження розглядаються електропружні матеріали з прямолінійною анізотропією.

**Мета та завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є:

- розв'язання контактної задачі теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Пластина являє собою скінченний круговий сектор з криволінійною анізотропією, закріплений за кромками. Жорсткий штамп вдавлюється у вільну грань сектора. На штамп діють нормальні та дотичні зусилля. У процесі розв'язання враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії. Необхідно отримати розподіл напружень під штампом.

- розв'язання контактних задач теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор з циліндричною анізотропією. Півнескінченна пластина або пластина скінченних розмірів закріплена за кромками. На вільну границю сектору діє жорсткий штамп нормальним зусиллям. Припускається, що в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Необхідно показати що, крайові задачі теорії пружності для плоских ортотропних тіл зводяться до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язати.

**Об'єкт дослідження.** У роботі вивчається напружено-деформований стан криволінійної пластини з циліндричною анізотропією, на яку діє жорсткий штамп з нормальним зусиллям.

**Предмет дослідження.** Можливість та зручність застосування розробленого методу збурень до розв'язання складних нелінійних задач теорії пружності з урахуванням анізотропних властивостей матеріалу.

**Методи дослідження.** Для розв'язання згаданих конкретних контактних задач теорії пружності був використаний метод збурень, запропонований та розроблений у працях А.В. Павленко та Л.І. Маневича. Згідно з цим методом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних середовищ відбувається з використанням параметра, що характеризує анізотропні властивості матеріалу пластини (далі малий параметр). В процесі розв'язання вихідні складні задачі нелінійної теорії пружності зводяться до розв'язання послідовних крайових задач теорії потенціалу.

Достовірність отриманих результатів забезпечується застосуванням коректних підходів математичної теорії пружності, методів теорії функцій комплексного змінного а також використанням вже апробованого асимптотичного методу. Проводяться важливі порівняння отриманих результатів з відомими розв'язками інших авторів, а також можливими граничними переходами.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Отримані аналітичні розв'язки наступних нових важливих задач:

- про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії.

- про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний або скінченний сектор з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання було враховане існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом. Визначені закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- наведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Показано що, цілком можливо сформулювати відповідні крайові задачі теорії пружності для основних рівнянь і у подальшому вони зводяться до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язати. Як наслідок, це відкриває нові можливості для дослідження багатьох практично важливих задач, які не мали не тільки аналітичних, а й численних розв'язків.

**Публікації і особистий внесок здобувача.** Основні наукові результати дисертаційного дослідження опубліковані у 10 наукових працях [1-10], у тому числі 4 статті у наукових журналах, що затверджені ВАК України, як фахові з механіки деформівного твердого тіла [1,6-8], 3 статті у науковому журналі, що індексується в найбільшій міжнародній реферативній наукометричній базі наукової періодики Scopus [2-4], 3 публікації у матеріалах та тезисах міжнародних наукових конференцій [5,9,10].

Основні розв'язки та результати роботи, які виносяться на захист, отримані автором самостійно.

У праці [2], написаній у співавторстві з Т.С. Кагадій, О.Д. Онопрієнко здобувачу належить участь у постановці проблеми, визначенні методу дослідження та побудові математичної моделі, отриманні та обговоренні результатів, розв'язанні модельних задач.

У роботах [4,5], написаних разом з науковим керівником, доктором фізико-математичних наук, професором Т.С. Кагадій, здобувачу належить участь у постановці задачі, обговоренні математичної моделі поставленої задачі, аналізі отриманих аналітичних розв'язків, апробація результатів.

У роботах [3,6,8] співавтором самостійно побудовано математичні моделі, виконано застосування методу для розв'язування задач, отримано аналітичні та чисельні розв'язки, проведено аналіз отриманих результатів.

Роботу [1] опубліковано без співавторів.

**Апробація матеріалів дисертації.** Деякі результати праці були представлені та обговорювались на наступних конференціях: Прикладні завдання математики та механіки ("ПЗММ" - 2012): матеріали XX міжнар. наук.-техн. конф. (Севастополь, 2011), Прикладні завдання математики та механіки ("ПЗММ" - 2012): матеріали XX міжнар. наук.-техн. конф. (Севастополь, 2012 ), конференція, присвячена 100-річчю кафедри вищої математики НГУ «Шлях сучасної математики: освіта, наука індустрія» (Дніпропетровськ, 2013), XX Ювілейна міжнародна конференція з математичного моделювання (Херсон, 2019), VII міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 2019), Друга міжнародна науково-технічна конференція присвячена пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (до сторіччя від дня народження) (Дніпро, 2019).

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.** Наукова робота виконувалась в рамках бюджетної наукової тематики кафедри вищої математики НТУ «Дніпровська політехніка», номер держреєстрації 0114U000623 «Розробка методів математичного моделювання в задачах гірничого виробництва» (2017 – 2019 рр).

## РОЗДІЛ 1

### Загальний огляд методів розв'язання контактних задач теорії пружності

#### 1.1 Огляд методів розв'язання окремих контактних задач.

Розв'язання контактних задач не втрачає актуальність багато десятиріч. Ускладнюються постановки, розробляються нові підходи та методи, враховуються властивості, що все більше наближують моделі до поведінки реальних конструкцій та взаємодіючих деталей.

Передача зусиль та тисків від одних деталей взаємодії до інших відбувається при їх взаємному дотику. Проблеми контакту мають особливе значення для машинобудування та будівництва, оскільки вони визначають процеси зносу, міцності, руйнування та довговічності конструкцій та споруд. Виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Практичні потреби розв'язання цих питань обумовили важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження конкретних задач.

Значна кількість дослідників для отримання розв'язків плоских контактних задач теорії пружності використовували математичний апарат, основою якого є застосування теорії функцій комплексного змінного. У роботах одного із засновників такого підходу Н.І. Мусхелішвілі сформульовані та розв'язані різноманітні контактні задачі, наприклад, основна мішана задача для напівплощини, коли на деяких ділянках її границі задані компоненти вектора переміщень, а на іншій частині – компоненти вектора напружень [82]. Задача була розв'язана шляхом дослідження нескінченної системи лінійних рівнянь. Також була розглянута задача про штамп з урахуванням сил тертя, при цьому на ділянках контакту задані нормальна складова вектора переміщень і головний вектор діючих сил, а інша частина границі вважалась вільною від зусиль. Розв'язання цієї задачі було зведене до

знаходження функції комплексної змінної для граничних умов мішаного типу [81].

Схожа задача була розв'язана Н.І. Глаголевим [29], також ним були розглянуті випадки, коли коефіцієнт тертя залежить від розташування ділянки контакту, або основа штампу має довільну форму [30].

Контактна задача для напівплощини у випадку одного штамп з плоскою основою була також розглянута В.М. Абрамовим [2]. Ним був отриманий більш ефективний розв'язок даної задачі з використанням інтегралів Меліна. Цей розв'язок справедливий всюди, окрім околу кутових точок штамп, де нормальне напруження змінює знак незчисленну кількість разів, та порушується закон Гука. Для усунення цього недоліку можна припустити наявність у околі кутових точок штамп ділянок ковзання.

Розв'язання задач про штамп, зчеплений з півплощиною були отримані П.І. Клубінім [56], А.И. Бегіашвілі [15], М.Н. Афонькінім [13].

Задача про штамп, що переміщується з постійною швидкістю на границі пружного тіла розв'язана Л.А. Галінім [28]. Ним же вперше була поставлена і розв'язана задача, коли в області контакту були присутні ділянки зчеплення і ковзання [27]. У цьому випадку був розглянутий вплив жорсткого штамп на напівплощину з тим припущенням, що ділянки ковзання симетричні відносно центра області контакту, а ділянка зчеплення розташована між ними. У той самий час С.В. Фальковичем була розв'язана аналогічна задача [121], але в більш простій постановці. Автор на ділянках ковзання нехтував тертям, і розв'язок задачі був отриманий у замкненому вигляді за допомогою складання і розв'язання рівняння класу Фукса. Л.А. Галінім була поставлена більш загальна задача з кулонівським тертям на ділянках ковзання. Метод розв'язання задачі полягав у введенні у розгляд деякої області, конформне відображення якої на вихідну напівплощину, визначалось шуканими функціями, які описують напружено-деформований стан напівплощини. Необхідно було визначити це конформне відображення напівплощини на відому область, що призвело до розв'язання рівняння класу Фукса, але більш



складного ніж у [121]. У цій роботі було встановлено відношення довжини ділянки зчеплення до всієї лінії контакту при різних значеннях коефіцієнта тертя.

Дослідження осадки та розподілу напружень під штампом еліптичної форми було проведено у монографії І.Я. Штаєрмана [128]. Автором були виявлені області виникнення найбільших контактних напружень а також показані способи зведення окремих еліптичних інтегралів до канонічного вигляду. Отримані у монографії результати належать до класичних при розв'язанні контактних задач разом із результатами Л.А. Галіна та М.І. Мусхелішвілі.

В.І. Моссаковський та В.В. Петров [79] експериментальним шляхом досліджували зміну фактичних розмірів площадки контакту в залежності від навантаження, що прикладається. Ними була отримана деяка крива, що якісно співпадає з результатами робіт Л.А. Галіна. У роботах [77,78] контактну задачу з урахуванням тертя та зчеплення авторам вдалося звести до двох задач лінійного спряження для добутку та частки двох функцій. Для розв'язання кожної з цих задач був використаний метод Н.І. Мусхелішвілі.

Багатьма дослідниками були отримані розв'язки парних інтегральних рівнянь. В.І. Моссаковський [80] скористався уявленням функції Бесселя у вигляді контурних інтегралів Бернса, після чого отримав парні рівняння. До їх розв'язання застосував метод перетворюючих операторів.

Розрахунок напруженого стану в задачах з тертям і частинним зчепленням, які були розглянуті в [77,142] виконувався покроково (інкрементальний підхід) при збільшенні ділянки контакту зі зростанням навантаження. При цьому припускалося, що має місце стан статичної рівноваги на кожній стадії. Д.А. Спенсом аналогічна задача [168] була розв'язана безпосередньо, на основі того, що в усі миті навантаження зберігається поле напружень і відношення розмірів ділянок зчеплення та ковзання є постійним.

Контактна задача зі зчепленням для клиновидного штампа розглянута І.А. Солдатенковим [115]. Її розв'язок побудований за допомогою обернення сингулярних інтегральних рівнянь для контактних напружень і аналізу додаткових умов, які роблять таке обернення коректним.

Задача Галіна для періодичної системи штампів з тертям і адгезією, які вдавлюються у пружну напівплощину вертикальними силами, прикладеними в середині кожного штампа, розглянута у роботі Ю.О. Антипова [162]. Контактна область кожного штампа ділиться на три області: дві області ковзання з тертям, і між ними – зону зчеплення. Задача зводиться до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта і потім до рівняння Вінера Хопфа. Вивчена залежність величини зони ковзання від відстані між штампамі та коефіцієнта тертя. Показано, що довжина зони зчеплення та інтенсивність напружень у кутових точках штампів збільшуються з наближенням штампів один до одного.

У статтях [95, 96, 120] А.Ф. Улітко та В.І.Острика міститься розв'язання контактних задач методом Віннера-Хопфа. Так, стаття [120] описує розв'язання осесиметричної задачі про вдавлювання жорсткого конуса в пружний напівпростір, при цьому враховується тертя і часткове зчеплення, що виникає в області контакту під час взаємодії. Аналітичний розв'язок задачі, поставленої авторами, отриманий за допомогою узагальненого методу Віннера-Хопфа [97]. Знайдені параметри області контакту, ділянки зчеплення, а також розподіл контактних напружень в зоні взаємодії об'єктів дослідження.

Трохи пізніше В.І. Остриком у монографії [98] були розглянуті просторові контактні задачі про взаємодію еліптичного штампу з пружним півпростором. Розв'язки згаданих вище задач були записані за допомогою повних еліптичних інтегралів першого, другого та третього роду. В.І. Острик у своїй статті [99] досліджує симетрію інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клину. Розв'язки згаданих задач знайдені із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна.

Опис розробок у області пружного контакту з частковим ковзанням представлений у статті [185]. Автором зроблено акцент на вклади у розв'язання контактних задач із суттєвими аналітичними перевагами.

Авторами В.М. Александровим та М.І. Чебаковим у роботі [9] викладені аналітичні методи розв'язання великого спектру неklasичних контактних задач механіки пружних тіл. А саме статичні та динамічні контактні задачі теорії пружності для неоднорідних тіл та тіл складної конфігурації. При цьому розглянуті ускладнені умови в зоні контакту. У роботі застосовані розроблені авторами аналітичні методи розв'язання парних рядів-рівнянь, інтегральних рівнянь, нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримані важливі висновки щодо залежності напружень в зоні контакту, розмірів зони контакту, деформацій вільної поверхні від вихідних умов задачі.

Розв'язання контактних задач методом парних інтегралів вперше було здійснено у роботі В.М. Абрамова [1] на прикладі задачі про вдавлення у пружний напівпростір круглого штампа з плоскою основою при дії ексцентрично прикладеної сили.

Дослідження задач за допомогою метода парних інтегральних рівнянь було проведене А.М. Данилевським [40], Вайнштейном [17], З.С. Аграновичем, В.А. Марченко, В.П. Шестопаловим [24], Ноблом [92], та іншими авторами [140, 169, 181, 182].

Метод, заснований на використанні парних інтегральних рівнянь за функціями Лежандра з комплексним нижнім індексом був введений В.Т. Грінченко та А.Ф. Улітко [35, 36]. Під час розв'язання таких рівнянь був використаний метод підстановки. Цей метод полягає у виборі лінійного оператора, після введення якого одне з вихідних рівнянь виявляється тотожно задовільненим. А.Ф. Улітко та його учнями досліджена задача про контактну взаємодію жорсткого клину з пружною півплощиною з урахуванням зон зчеплення та ковзання методом парних рівнянь [94].

В.В. Копасенко [57] були розглянуті задачі про рівновагу півсмуги, жорстко закріпленої з торця, на повздовжніх гранях якої відсутні дотичні

напруження; про стискання півсмуги двома симетрично розташованими або двома нормальними зосередженими зусиллями; а також випадок згину вказаної півсмуги моментом, прикладеним на нескінченності. Автор звів задачу до розв'язання рівняння Фредгольма відносно контактної тиску і нормального напруження у закріпленні. Для розв'язання інтегральних рівнянь у цих роботах використаний метод Бубнова-Гальоркіна.

Для тривимірних крайових задач теорії пружності, де відсутні лінії зміни граничних умов, найбільш ефективними виявляються методи теорії потенціалу. Однозначна розв'язність цих задач була доведена ще на початку двадцятого сторіччя спочатку Корном, а потім Ліхтенштейном, якраз за допомогою даних методів.

Якщо ж у задачі мають місце лінії або точки розділу граничних умов, то ефективними є методи теорії функцій комплексного змінного, а також функціональні методи. Під час розв'язання задач функціональними методами вкрай важливо дотримуватись коректності у постановці крайових задач, бо протилежне може призвести до неоднозначної їх розв'язності. З використанням функціонального методу можна дослідити широкий клас задач. Наприклад, тут можна згадати задачі про штампи з ковзанням, зчепленням, задачі спряження пружних тіл з одновимірними та двовимірними стрижнями та оболонками. Усі дослідження подібних задач проводились з припущенням того, що потенційна енергія деформованого тіла є скінченною. Порушення цього припущення також призводить до випадку неоднозначної розв'язності задач.

Академік В.Д. Кубенко у своїх дослідженнях [60-64] розглянув деякі конкретні контактні задачі. А саме дослідив процеси деформування пружної напівплощини під дією жорсткого штампа. У своїх дослідженнях він використав інтегральне перетворення Лапласа для змінної за часом і перетворення Фур'є для просторових змінних. Велику увагу у роботах приділено процесам нестационарної взаємодії та деформування тіл. Розроблені методики аналізу та управління згаданими вище процесами.

У роботах Г.Я. Попова [107-111] під час дослідження складних мішаних задач теорії пружності з великим успіхом застосований метод ортогональних поліномів, коли мішана задача зводиться до розв'язання інтегрального рівняння першого роду. Автор розглядав ту чи іншу частину безрозмірних параметрів, що входять у ядро інтегрального рівняння, виділяв головну частину ядра, після чого знаходив власні функції інтегрального оператора, які і були у більшості випадків системою ортогональних поліномів. За цими поліномами відома функція і розв'язок були розкладені у ряди, за допомогою яких інтегральні рівняння були зведені до нескінченної алгебраїчної системи.

За рахунок вибору поліномів нескінченні системи що утворюються, виявляються майже діагональними і зручними для чисельного розв'язання.

Такий самий підхід до розв'язання задач був використаний В.М. Александровим [4-8], П.І. Клубіним [56] та ін.

В.І. Кузьменко у своїх роботах [65,223] досліджує напружено-деформований стан тіл у контактних задачах руху. Наприклад, його стаття [66] у співавторстві з Плащенко С.О. приділяється увага дослідженню взаємодії кругового штампу із півпростором у процесі поступально-обертального руху штампа за повного зчеплення і наявності тертя. У даній роботі описується процес розщеплення зв'язаної задачі про взаємодію штампа, який, під дією прикладених сил і моментів здійснює гвинтоподібний рух, та півпростору на дві класичні контактні задачі.

Вивченню напружено-деформованого стану деталей та механізмів під час контактної взаємодії присвячені численні наукові дослідження. На даний час суттєвого розвитку набули також різноманітні чисельні методи розв'язання контактних задач теорії пружності.

Наприклад, О.В. Грабко у своїй праці [33] застосовує обрані ітераційні процеси для розв'язання статичної пружної контактної задачі. В роботі розглянута взаємодія шорстких тіл.

Контактні задачі для різних штампів розглянув О.В. Нехайчук. У своїй роботі [86] він наводить результати розв'язання задачі про вдавлювання

плоского штампу в жорстко-пластичний матеріал. Розв'язання проводиться із використанням методу кінцевих елементів. У іншій своїй статті [87] О.В. Нехайчук розглянув задачу про взаємодію штампа закругленої форми з пластичним півпростором.

У працях [26,134] задачі про передачу навантаження розв'язуються чисельно-аналітичними методами.

Вайсфельд Н.Д. у своїх роботах [18-21] розглядає задачі про контактну взаємодію пружного циліндра з жорсткою перешкодою, осесиметричну задачу теорії пружності для кругового конуса та досліджує напружено-деформований стан зрізаного конуса.

Авторами А.О. Камінським, М.Ф. Селівановим [53] запропоновано алгоритм розв'язання задачі про повільне поширення тріщини нормального відриву з частковою зоною контакту берегів. В основу алгоритму покладено модель тріщини з зоною зчеплення, ітеративний метод побудови розв'язку для пружного відриву та принцип пружно-в'язкопружної аналогії, який дозволяє записати залежний від часу відрив у формі Больцмана-Вольтерра. В якості критерію поширення тріщини використовується деформаційний критерій зі сталою величиною критичного відриву та міцності зчеплення протягом квазістатичного зростання тріщини. Алгоритм проілюстровано числовим прикладом.

Авторами У.А. Antipov, А.В. Smirnov була досліджена двовимірна задача про півнескінченну тріщину у ізотропному тілі [132]. Тіло складалося з нескінченної смуги та півплощини, які з'єднані між собою та мають однакові пружні сталі. Тріщина розповсюджується по границі розділу з постійною швидкістю та не залежить від часу навантаження. За допомогою перетворень Фур'є та Лапласа задача сформульована як векторна задача Римана-Гільберта, як у роботі [131]. При збільшенні до нескінченності відстані тріщини від границі задача допускає розв'язання в замкненій формі. А для загального випадку запропонований метод матричної факторизації. Як доповнення до факторизації деяких скалярних функцій потрібно розв'язання визначеної

системи інтегральних рівнянь, чисельний розв'язок якої знаходиться методом колокації. У якості результатів отримані коефіцієнти інтенсивності напружень і зв'язані з ними вагові функції. Такі функції використовуються для опису розповсюдження півнескінченної тріщини нижче границі півплощини з кусково-постійною швидкістю.

У праці [135] авторів J.E. Campbell, R.P. Thompson, J. Dean, T.W. Clyne містяться результати експериментальних досліджень на вдавлювання інденторів сферичної форми, виготовлених з п'яти видів різних металів. Під час експериментів враховується важливість однорідності структури штампів, що використовуються у дослідках. Обговорюється питання про коефіцієнт проникнення. Наведені істинні залежності напруження-деформації для всіх вказаних випадків. Описана ітераційна процедура (основана методі скінченних елементів) для отримання надійних результатів стосовно параметрів пластичності у експериментальних дослідженнях на вдавлювання.

У роботі [158] викладені основи метода віртуальних елементів (VEM) для задач лінійної пружності, наводиться також порівняння методу віртуальних елементів з класичним методом кінцевих елементів. Ефективність методу (VEM) вивчена на прикладі різноманітних задач.

И.В. Станкевич у своїй роботі [119] розглядає алгоритм побудови чисельного рішення контактної задачі теорії пружності стосовно тіла, яке має виражену односторонню дискретну контактну взаємодію з абсолютно пружним півпростором. Особливістю розглянутого алгоритму є спеціально розроблена процедура корекції дотичних сил у дискретних контактних точках, що дозволяє досягти досить точного виконання прийнятого закону тертя. Алгоритм вбудований в загальну кінцево-елементну технологію, за допомогою якої була створена прикладна програма. Досліджена обчислювальна ефективність алгоритму за допомогою розв'язання модельних задач.

Досліджує напружено-деформований стан пружних тіл з включеннями [89] та багатокомпонентних тіл [90] Ніколаєв О.Г. Його стаття [90] містить

обчислення напружень, що виникають у пружному просторі з чотирма стиснутими сфероїдальними включеннями. Розв'язана неосесиметрична крайова задача для рівняння Ламе. Припускається, що центри сфероїдальних включень знаходяться у вершинах квадрату, а на нескінченності прикладене однорідне постійне навантаження. Згадані вище включення знаходяться в умовах ідеального контакту з пружним простором. Для побудови загального розв'язку використаний узагальнений метод Фур'є [88,91]. У статті проведений також чисельний аналіз розподілу напружень на лінії між центрами сусідніх включень у залежності від їх геометричних параметрів.

Узагальнений метод Фур'є також використовують автори статті [164] під час розв'язання мішаної задачі теорії пружності для однорідного ізотропного півпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною, паралельною до його поверхні. Зазначений метод застосовується для розв'язання однорідного рівняння Ламе з відповідними граничними умовами. Загальний розв'язок задачі представляється у вигляді суперпозиції базисних розв'язків для циліндра і півпростору. За принципом суперпозиції розв'язків задача зводиться нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У подальшому система розв'язується методом редукції.

Напружено-деформований стан багатошарової плити досліджують у своїй монографії [31] С.І. Гоменюк та О.Г. Спиця. Автори порівнюють результати отримані за допомогою аналітичного підходу з використанням функції податливості та прямим чисельним методом з використанням методу скінченних елементів. Проведено також аналіз отриманих результатів.

У статті [39] розглянуто плоску квазістатичну задачу про ковзання без нахилу штампа з плоскою основою по поверхні пружного шорсткого шару (смуги) при нелінійних (степеневому та експоненціальному) законах деформування шорсткості. Під час розв'язання враховується тертя та нормальні переміщення штампа. Інтегральне рівняння задачі зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна в операторному вигляді для кожного



закону. За допомогою методу редукції та методу послідовних наближень отримано наближені розв'язки задачі.

Були також використані інші наукові підходи до розв'язання різноманітних важливих контактних задач [32,130,136,154,167,184].

Пошук чисельних розв'язків контактних задач теорії пружності здійснюється багатьма авторами та у різних напрямках. Але разом з цим отримання аналітичних розв'язків, нехай навіть наближених, залишається актуальним. Такі розв'язки дозволяють провести коректну попередню оцінку напружено-деформованого стану деталей взаємодії, тим самим вони можуть бути основою для використання чисельних методів. Також аналітичні розв'язки дозволяють дізнатися про якісні особливості сформульованих задач та дослідити особливі точки.

## **1.2 Огляд методів розв'язання контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної складової.**

Велика кількість задач механіки деформованого твердого тіла може бути віднесена до класу контактних задач. Разом з цим, на даний час багато уваги приділяється питанням зміни поведінки конструкцій виготовлених із використанням матеріалів з ускладненими властивостями.

При створенні сучасної техніки виникає потреба у широкому використанні матеріалів зі складними властивостями. Наприклад, активні матеріали, а саме п'єзоелектричні і п'єзоелектромагнітні матеріали, часто використовуються в якості функціональних частин різних електронних пристроїв (датчики, перетворювачі і виконавчі механізми включно). Це пов'язано з тим, що такі матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного поля [68]. У багатьох випадках розміри згаданих пристроїв надзвичайно малі, але, тим не менш, вони можуть піддаватися впливу дуже великих механічних, електричних і магнітних полів. Крім того, ці пристрої зазвичай виготовляються з елементів, які можуть бути виготовлені

з різних матеріалів (п'єзоелектричні або п'єзоелектромагнітні елементи, електроди і т. д.).

Застосування п'єзоелектриків в сучасній техніці змушує дослідників розглядати електромагнітопружність як єдину науку, яка об'єднує електродинаміку, теорію магнетизму і механіку суцільного середовища, які практично вивчалися окремо. Це пов'язано з тим, що при деформації деяких матеріалів на їх поверхнях з'являються електричні заряди, пропорційні деформації. Але, виявляється, не можна нехтувати і зворотним ефектом, який проявляється виникненням механічної напруги при наявності впливу електричного поля [104].

Дослідження поведінки конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, виявляє суттєві математичні труднощі під час відповідних розрахунків.

Необхідність у вирішенні цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної і п'єзоелектромагнітної складової.

В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга у своїй монографії [37] запропонували основні співвідношення лінійної теорії деформування пружних середовищ із сильним п'єзо ефектом, що пов'язує механічні деформації та внутрішнє електричне поле. Для граничних умов, які можливо фізично реалізувати, сформульовані коректні крайові задачі електропружності, зроблена їх варіаційна постановка.

У статті [172] досліджується осесиметричний контакт без тертя функціонально-градієнтного п'єзоелектричного шаруватого півпростору, що піддається вдавненню трьох типових жорстких штампів, а саме – плоского круглого штампа, сферичного штампа і конічного штампа. Штамп вважається ідеальним провідником з постійним електричним потенціалом. Електромеханічні властивості функціонально градуйованих п'єзоелектричних матеріалів (FGPM) змінюються експоненціально уздовж напрямку товщини. За допомогою методу інтегрального перетворення Ханкеля, як і в [133], задача

зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Ці рівняння потім дискретизуються та вирішуються чисельно, щоб визначити невідомий нормальний контактний тиск та електричний заряд. Детально обговорюється вплив показника градієнта та геометрії штампу на поведінку форми під час поверхневого електромеханічного контакту.

Ефективний метод розв'язання задачі про взаємодію жорсткого циліндричного штампу, та функціонально-градієнтної п'єзоелектричної півплощини з п'єзоелектричним покриттям представлений у статті [170]. Для штампі передбачається постійний електричний потенціал на поверхні, а тертя – кулонівського типу. Задача зведена до системи зв'язаних сингулярних інтегральних рівнянь Коші. При цьому враховані теорема про суперпозицію та перетворення Фур'є. Подальше розв'язання відбувається з використанням методу найменших квадратів.

У роботі [178] Volkov Sergei, Vasiliev Andrey, Aizikovich S., Mitrin Boris розглядають п'єзоелектричний електропружний півпростір з функціонально-градієнтним п'єзоелектричним покриттям. За допомогою методу інтегрального перетворення задача зводиться до розв'язання системи двох подвійних інтегральних рівнянь на зображеннях функцій, що описують нормальний тиск та електричну індукцію на поверхні. Двосторонній асимптотичний метод авторами був розповсюджений на випадок системи подвійних інтегральних рівнянь, на основі цього побудований наближений аналітичний розв'язок задачі. Розв'язок виявився асимптотично точним як для малих, так і для великих значень відносної товщини покриття.

Зручність використання п'єзоелектричних матеріалів в окремих сферах промисловості під час створення елементів датчиків, наприклад для апаратури вимірювання, перетворювачів енергії, тощо потребує вивчення силових та електричних полів у електропружних тілах при наявності в них концентраторів напруги типу порожнин, включень, тріщин.

Вивченню саме цього питання присвятили дослідження В.С. Кирилук, О.І. Левчук, О.В. Гавриленко [55]. Автори на основі математичного

моделювання вперше дослідили розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту кругової тріщини в електропружному ортотропному матеріалі і пружних ортотропних матеріалах при однорідних навантаженнях. Застосований аналітично-чисельний підхід, в основі якого лежать перетворення Фур'є за трьома просторовими змінними. Також використовується поняття Фур'є-образа функції Гріна для нескінченного п'єзоелектричного середовища. Тестування підходу проводилося для випадку розташування тріщини в площині ізотропії трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного матеріалу, для якого існує точний розв'язок задачі. Порівняння результатів обчислень підтверджує високу ефективність використаного підходу.

Випадок для біматеріального тіла з міжфазною тріщиною розглядають Лобода В.В. і Онопрієнко О.Д. [93]. В роботі отримані основні характеристики напружено-деформованого стану тіла при різних властивостях матеріалів, а також залежно від зовнішнього навантаження. У якості навантаження виступають розтягувальні та зсувні напруження, а також електричне поле. Зокрема, досліджено випадок з міжфазною тріщиною для нескінченного п'єзоелектричного біматеріалу. Вважається, що тріщину заповнено електропровідною рідиною і враховується контакт берегів тріщини, а також електричне поле в зоні контакту. А в роботі [157] розглянута електропровідна модель міжфазної тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. Таку модель можна використовувати для тріщин, поверхні яких покриті електродами, або для тріщин, заповнених провідною рідиною.

Дослідження плоскої задачі для електрично проникної тунельної тріщини між двома п'єзоелектричними півпросторами міститься у статті [144] авторів V. Govorukha, M. Kamlah, A. Sheveleva. До поверхонь тріщини прикладене концентроване навантаження, а також вона піддається віддаленому навантаженню мішаного типу. Пружні зміщення та стрибки потенціалу, а також напруження та електричні зміщення вздовж границі задані

з використанням голоморфних векторних функцій. Задача зводиться до об'єднаних крайових задач Діріхле-Римана, які розв'язуються аналітично.

Проблема плоскої деформації для двох п'єзоелектричних півпросторів, скріплених між собою дуже тонким ізотропним прошарком з тріщиною під дією механічного навантаження мішаного типу і електричного потоку розглянута в роботі [155]. Зони передруйнування тут моделюються за допомогою подовження тріщин з невідомими когезійними напруженнями на їхніх гранях. Такий підхід допомагає звести питання до аналізу пружних границь розділу, а фактично – до задачі Гільберта. У запропонованій авторами моделі виключені будь-які особливості, пов'язані з тріщиною, тобто усі механічні та електричні характеристики обмежені у області, близькій до тріщини. Отримані та проаналізовані чисельні результати, що відповідають деяким конкретним комбінаціям матеріалів. В роботі [156] розглянута плоска задача для двох однакових п'єзоелектричних просторів, з'єднаних тонким ізотропним прошарком. У проміжному шарі паралельно його граням виникає тріщина з обмеженою проникністю.

Задачу з тріщиною також розв'язує А.А. Гриневич у роботі [34]. Автором запропоноване дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з електродованою та магнітно-проникною електрично зарядженою тріщиною, розташованою на межі розділу його компонент. Розглянуті модельні задачі для відкритої тріщини та для тріщини, за умов гладкого контакту її берегів. Для першого випадку сформульована задача Гільберта, для другого – комбінована крайова задача Діріхле-Римана та задача Гільберта. Отримані аналітичні розв'язки та досліджено поведінку електромеханічних характеристик в околі тріщини, а також їх залежність від впливу електричного поля та механічних навантажень.

Задача з тріщиною між двома різнорідними магнітоелектропружними матеріалами дією теплового потоку та віддалених механічних навантажень розглянута також у статті [139]. Припускається, що відкрита частина тріщини є електрично непроникною та магнітопроникною. Поверхні тріщини

передбачають теплоізоляцію. Для зазначеної моделі сформульовані та аналітично розв'язані комбіновані граничні задачі Діріхле-Рімана та Гільберта.

П'єзоелектричні матеріали в процесі експлуатації витримують вплив високих напруг та концентрацій електричного поля, внаслідок чого пристрої, в яких використовуються такі матеріали можуть вийти з ладу через руйнування. Хоча існує багато аналітичних та експериментальних робіт з механіки руйнування п'єзоелектриків, на сьогоднішній день досить мало досліджень щодо питання виявлення пошкоджень. Проте, це є цікавим способом запобігання виходу кераміки з ладу. Запропоновано ітераційний метод розв'язання зворотної проблеми виявлення тріщин та порожнеч у п'єзоелектричних структурах. Для вирішення такої зворотної задачі в роботі [159] використовується розширений метод кінцевих елементів (XFEM). Отримані результати показують, що методологія набору рівня XFEM ефективно визначає кількість порожнеч у структурі п'єзоелектрика та відповідні місця їх розташування.

Питаннями концентрації напружень у ізотропних та анізотропних тілах під дією силових, температурних та електромагнітних полів займається С.О. Калоєров. Наприклад, у роботі [51] запропоновано (у співавторстві з А.А. Самодуровим) метод розв'язання задачі електров'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задача зведена до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, які розв'язуються з використанням комплексних потенціалів. Авторами розроблено методику визначення за комплексними потенціалами наближень основних характеристик електропружного стану (напружень, компонент векторів індукції та напруженості електричного поля) у будь-який момент часу після прикладення навантаження. Чисельними дослідженнями встановлено значний вплив часу на значення основних характеристик електропружного стану. У іншій роботі С.О. Калоєрова, А.В. Петренко [48] був запропонований метод розв'язання зв'язаних двомірних і плоских задач електромагнітопружності для

багатозв'язних областей. Отримані основні співвідношення для двомірної та плоскої задач, введені та досліджені узагальнені комплексні потенціали електромагнітопружності, отримані граничні умови для їх визначення та запису через них основних характеристик електромагнітопружного стану (напружень, переміщень, векторів напруженості та індукції, потенціалів електричного та магнітного полів). Наведено розв'язок задачі для пластинки з еліптичним отвором або тріщиною.

Основні співвідношення електромагнітопружності з точки зору впливу значень п'єзомодулів на п'єзоефект досліджено у роботі С.О. Калоєрова та [50]. А в роботах [52,152] досліджується електромагнітопружний стан п'єзопластини з підкріпленими отворами. Наприклад, стаття [152] містить метод дослідження термоелектромагнітопружного стану кусочно-однорідної п'єзоелектричної пластини під дією лінійного теплового потоку. Для розв'язання поставленої задачі автори використали комплексні потенціали, а також узагальнений метод найменших квадратів. Далі розшуковують розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за невідомими коефіцієнтами розкладення в ряди Лорана та поліноми Фабера. Для випадку пластини з одним включенням автори отримали точний аналітичний розв'язок.

У роботах [174-176] досліджується проблема розповсюдження та взаємодії тріщин у магнітоелектропружних тілах під впливом механічних, електричних, магнітних полів. Розглянуті авторами задачі зводяться до розв'язання систем інтегральних рівнянь різними чисельними методами. Також проведений докладний аналіз отриманих результатів та зроблені цінні висновки щодо коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричного зміщення, магнітної індукції.

Принципи узагальненого підходу та алгоритм розв'язку плоских двовимірних задач статичної електричної пружності з урахуванням п'єзоелектричного ефекту викладено у роботах В.К. Шиндера зі співавторами [74,75,124-126]. Опрацьовані алгоритми, що ґрунтуються на запропонованих дослідниками методах. Автоматизовано математичну симуляцію

взаємопов'язаних електричних і механічних полів в неоднорідних п'єзоелектричних пластинах під прямим п'єзоелектричним ефектом.

Проблема, яка аналізується у статті [160], стосується магнітоелектропружного покриття, пов'язаного з ортотропною смугою з множиною тріщин. Задача розв'язується при зсуві та в площині електричного і магнітного навантаження. Задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою перетворень Фур'є. Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень на кінчиках тріщин знаходять розв'язки інтегральних рівнянь у вигляді Коші. Результати ілюструють залежність факторів інтенсивності напружень на кінцях тріщини від геометрії тріщини, властивостей матеріалу ортотропної підложки тощо.

Робота [147] містить дослідження поведінки тріщини у магнітоелектропружній смузі при площинних механічних, електричних та магнітних ударних навантаженнях. Розглядається випадок магнітоелектрично непроникних та проникних граничних умов на поверхні тріщини. Для зведення мішаної крайової задачі до подвійних інтегральних рівнянь, які виражаються через інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, використовуються перетворення Лаласа і Фур'є. Явище викривлення тріщин вивчається із застосуванням критерія максимальних коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Автори К.Р. Herrmann, V.V. Loboda [145,146] вивчають електрично непроникну границю розділу між двома півнескінченими п'єзоелектричними площинами при віддаленому механічному розтягненні-зсуві та електричному навантаженні. Вирази для пружного зміщення і стрибків потенціалу, також для напружень та електричного зміщення вздовж границі розділу знайдені через секційно-голоморфну функцію. Проблема зводиться до комбінації мішаних крайових задач Діріхле-Римана та Гільберта. У результаті розв'язання цих задач отримані чіткі аналітичні вирази для характерних механічних та електричних параметрів. Крім того, було проведене порівняння з відповідним розв'язком для електрично проникної тріщини.



Вклад поверхневої п'єзоелектрики у антиплоскі деформації гексагонального п'єзоелектричного матеріалу, ослабленого тріщиною, досліджується у [180]. П'єзоелектрика на поверхні враховується за допомогою розширеної версії моделі Гуртіна-Мердока. Початкова крайова задача зводиться до системи двох зв'язаних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь першого порядку Коші з урахуванням розподілу електричного потенціалу. Після діагональних перетворень згадана система може бути розв'язана чисельно методом колокацій. Отриманий розв'язок демонструє, що напруження, деформації, електричні переміщення проявляють логарифмічну особливість на кінчиках тріщин.

Проблема періодичних тріщин типу Іофе (III вид), які розповсюджуються дозвуком вздовж границь розділу у багатошаровому п'єзомагнітному/п'єзоелектричному композиті в плоскому магнітному або електричному полі розглянута в роботі [183]. Завдяки періодичності умов аналіз багатошарової задачі спрощується до двошарової моделі з міжфазною тріщиною типу Іофе, яка зведена до сингулярного інтегрального рівняння Коші першого роду з використанням перетворень Фур'є. Нормований коефіцієнт інтенсивності динамічного напруження (NDSIF) отриманий чисельно. Також авторами був проведений докладний аналіз отриманих результатів.

Робота [179] містить дослідження багатошарового п'єзомагнітного/п'єзоелектричного композиту з періодичними міжфазними тріщинами, що піддається дії плоских магнітних або електричних полів. Модель аналізується на предмет антиплоскої деформації. Коефіцієнт інтенсивності напружень отриманий методом сингулярного інтегрування Коші. Аналіз показує, що комбінація матеріалів істотно впливає на коефіцієнт інтенсивності напружень в залежності від товщини шару.

Антиплоску задачу для включення (електрода) на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів розглядають Kryvoruchko A.G., Sheveleva A.E., Loboda V. V. [153]. Представлення механічних, електричних та

магнітних факторів через кусково-аналітичні вектор-функції отримані за допомогою методу комплексних потенціалів. Далі на основі цього авторами була сформульована векторна задача лінійного спряження з відповідними умовами на нескінченності. Точний розв'язок представлений в аналітичному вигляді. Також на основі точного розв'язку отримані формули для знаходження стрибка компонент тензора напружень, векторів електричної та магнітної індукції при переході через електрод. Дотичне напруження і компоненти векторів електричної та магнітної індукції мають кореневу особливість при наближенні до кінців електрода.

П'єзоелектричні матеріали в різному вигляді та формах використовуються в інтелектуальних системах. Однією з найрозповсюдженіших форм для датчиків або виконавчих пристроїв є форма плівки. У роботі [165] аналізуються п'єзоелектричні плівки при наявності тертя у тривимірному просторі. Для моделювання п'єзоелектричних скінченних товстих та тонких плівок в умовах ортотропного фрикційного вдавлювання автори використовують власне формулювання методу граничних елементів. Дане формулювання було застосоване з метою проведення аналізу впливу тертя і тангенціальних навантажень на електромеханічний відгук п'єзоелектричних плівок скінченної товщини. Результати показують, що ці змінні повинні враховуватись при вивченні реакції на вдавлювання, в іншому випадку є ризик некоректно оцінити п'єзоелектричний відгук і його розподіл по зоні контакту.

Контактна задача про вдавлювання сферичного жорсткого пуансона в електропружний п'єзоелектричний півпростір розглянута у статті [177]. Розглянутий у роботі простір складається з функціонально градуйованого шару (покриття) з довільною зміною електромеханічних властивостей вглибину та однієї півнескінченної підложки. Матеріали покриття та підложки є поперечно-ізотропними. Штамп розглядається як ідеальний електричний провідник. На пуансон діють нормальне зусилля, що прикладається по центру та електричний заряд. Це призводить до електропружної деформації

півпростору. Задача була математично описана в термінах лінійної електропружності та зведена до розв'язання системи інтегральних рівнянь. Для побудови наближеного розв'язку цієї системи було застосоване узагальнення двостороннього асимптотичного методу. Автор наводить аналітичні вирази для контактних напружень, електричної індукції та величин, що пов'язують силу вдавлювання, електричний заряд, електричний потенціал та глибину вдавлювання. Отримані результати є асимптотично точними як для тонких, так і для товстих покриттів. Для покриттів середньої товщини результати є високоточними.

Електропружні особливості у вершині прямолінійно поляризованого п'єзоелектричного клину у статті [148] досліджені з використанням тривимірної теорії електропружності. Тут для знаходження асимптотичних розв'язків у вершині клину поєднані підхід розширення власних функцій з методом розв'язання за допомогою степеневих рядів. Безпосередньо розв'язуються тривимірні рівняння рівноваги і Максвелла у переміщеннях. Дане дослідження є першим, що розглядає розв'язання задач, у яких напрямок поляризації п'єзоелектричного матеріалу не обов'язковий, або є паралельним до нормалі серединної площини клину. Правильність запропонованого розв'язання підтверджується дослідженнями збіжності та порівнянням з опублікованими раніше результатами.

У роботі [69] автори дослідили узагальнений плоский напружений стан п'єзоелектричної пластини. Були застосовані перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання, внаслідок чого отримана матриця фундаментальних розв'язків системи рівнянь, що описують НДС задачі. Елементи матриці наведені у замкненому вигляді та виражені через елементарні функції.

На сьогоднішній день активного розвитку набули методи аналізу взаємодії механічного, електричного та магнітного полів в анізотропних інтелектуальних матеріалах [105]. Автори роботи [23] акцентують увагу на тому, що ефективним методом при розв'язуванні таких задач є підхід

заснований на методах теорії функції комплексної змінної і формалізму Стро. Наприклад, у роботі [163] авторами для аналізу граничних елементів анізотропного термоелектропружного біматеріалу з отворами, тріщинами і тонкими включеннями одержані граничні інтегральні рівняння типу Сомільяні. Подібний підхід був застосований для біматеріального твердого тіла з інтерфейсом типу Капіці у праці [162]. Тут наводиться дослідження термомагнітоелектропружного анізотропного біматеріалу із високою теплопровідністю межі поділу складових. Вважається, що складові моделі пов'язані ідеальним механічним контактом. крайові інтегральні рівняння сформульованої задачі побудовані у замкнутій формі. Застосований метод граничних елементів, що дає можливість ефективно і швидко отримати розв'язування. Особливістю запропонованого підходу є те, що при моделюванні тонких включень застосовується принцип спряження континуумів різної вимірності. Такий підхід дає можливість розв'язувати із достатньо високою точністю задачі термомагнітоелектропружності для біматеріальних тіл з інтерфейсом високої теплопровідності із тонкими стрічковими деформівними включеннями чи тріщинами, що не завжди вдається зробити із застосуванням традиційних числових підходів.

Огляд останніх досягнень у теоретичних та експериментальних дослідженнях функціональних (інтелектуальних) матеріалів та конструкцій наведений у статті [106]. Особлива увага приділяється матеріалам, які можуть працювати як датчики або виконавчі механізми, а саме – п'єзоелектричним і магнітопружним матеріалам. Ці матеріали внутрішньо пов'язують механічні, електричні та магнітні поля.

На практиці часто виникає необхідність у цілеспрямованому впровадженні тонких прошарків, які змінюють функціональні тіл. Зазвичай, для створення таких біматеріалів, використовують механічне поєднання піроелектричних та п'єзомагнітних матеріалів. Виділяють два типи неідеальних теплових умов контакту тонкого шару із середовищем [133,149],

та два типи неідеальних механічних умов. Мається на увазі висока та слабка теплопровідність і податлива та жорстка межа контакту.

Важливою також залишається необхідність розробки екологічно чистих матеріалів, які б володіли чудовими п'єзоелектричними властивостями. Про це свідчить велика кількість наукових публікацій – ця тема є актуальною для дослідників у всьому світі. На сьогодні добре відомі своїми чудовими п'єзоелектричними властивостями матеріали на основі свинцевого цирконату титанату (PZT). Однак, враховуючи токсичність свинцю та його сполук, існує загальна необхідність розробки екологічно чистого свинцю, як це засвідчено законодавством, прийнятим урядом Європейського Союзу. Зараз декілька класів матеріалів розглядаються як потенційно привабливі альтернативи (PZT) для застосування. У роботі [161] були зроблені спроби переглянути недавні розробки п'єзоматеріалів, що не містять свинцю, акцентуючи увагу на їх виготовленні, співвідношеннях структури та властивостей тощо.

### **1.3 Застосування асимптотичних методів до розв'язання задач контактної взаємодії**

Розв'язання некласичних мішаних задач теорії пружності, зазвичай, на практиці викликає у дослідників труднощі різного характеру. У цьому випадку доцільним є використання асимптотичних методів. Під час їх створення використовують природні геометричні або фізичні параметри, що фігурують у задачах [12, 137, 143]

Наявність анізотропних властивостей матеріалу викликає додаткові складнощі. Наприклад, при розгляді напружено-деформованого стану матеріалів з яскраво вираженою анізотропією неможливо було застосувати відомий метод С.Г. Лехницького [70], розроблений для ортотропних матеріалів зі слабкою анізотропією, оскільки у цьому методі породжуючим розв'язком є розв'язок для ізотропного середовища. Г.Н. Савін [14] застосував формулу Шварца і отримав ефективний розв'язок для пластини з отвором з

прикладеними по контуру отвору зосередженими зусиллями. Г.Н. Савін першим розв'язав контактні задачі для анізотропної напівплощини. Однак, наявність сильної анізотропії призводило до нездоланих труднощів.

Це призвело до пошуку нових підходів проведення досліджень зносостійкості та довговічності конструкцій.

У матеріалах із сильною анізотропією відношення жорсткостей у різних напрямках є достатньо малими (великими). Зокрема, якщо розглядати узагальнений плоский напружений стан ортотропної пластини, головні напрямки анізотропії якої співпадають з напрямками декартових прямокутних координатних осей, то для реальних матеріалів відношення квадрата жорсткості на зсув до добутку жорсткостей на розтягнення-стискання є дуже малим. Також малим (або великим) може бути і відношення жорсткостей на розтягнення-стискання у різних напрямках.

Асимптотичні методи дозволяють змінювати складну вихідну постановку задачі на більш прості. Причому, це відбувається не за рахунок простого відкидання членів, а доволі коректно – рівності залишаються рівностями.

Великий внесок у розвиток асимптотичних методів також зробили у своїх монографіях М. Ван-Дайк [22], А.Н. Гузь [38], Д. Коул [59], Я.Ф. Каюк [54], Д.Д. Івлєв і Л.В. Єршов [42], В.А. Ломакін [71], А. Найфе [84, 85], А.Н. Спорихін [116], Н.Н. Моїсєєв [76].

Найбільш раціональним у даному випадку є використання наближених аналітичних методів. Одним з таких підходів є метод збурень. Він дозволяє знаходити розв'язки, які максимально наближені до точних. Вибір параметру збурення (малого параметру) відбувається з урахуванням геометричних або фізичних властивостей матеріалу.

У 1959 році різновид асимптотичного методу запропонував Ворочич І.І. [25]. У його роботі була розглянута осесиметрична задача для пружного шару. Г.Я. Попов [58], В.М. Александров [8] застосували метод малого параметру для дослідження задач про вдавлювання штампа у пружну напівполосу. У

якості малого параметра автори використовували геометричні властивості тіл взаємодії. Пізніше С.М. Айзикович та Г.Я. Попов під час розв'язання задачі про дію кільцевого штампа на пружний напівпростір вперше побудували логарифмічно степеневу асимптотику. Це дозволило розширити клас задач, які можна досліджувати методом збурень.

Метод малого параметру знайшов застосування у різних розділах механіки, фізики, математики. В теорії стійкості тривимірних деформованих тіл метод збурень згадується у роботах М.Т. Алімжанова [10], А.Н. Спорихіна [117].

Окрім лінеаризації нелінійних рівнянь теорії пластичності, які входять до математичної моделі процесу, що розглядається, метод дозволяє враховувати складну геометрію області контакту, вплив неідеальних властивостей матеріалу тощо. Для розв'язання пружно-пластичних задач першим застосував метод малого параметру А.П. Соколов. Він знайшов розв'язок у першому наближенні задачі про двоосне розтягнення тонкої пластини з круглим отвором за умови пластичності Треска-Сен-Венана. Розв'язки деяких пружно-пластичних задач, отримані з використанням методу малого параметру, викладені у монографії Г.Н. Савіна [113].

Оскільки метод збурень є наближеним аналітичним, для нього важливим є питання збіжності наближень. Історія та практика застосування зазначеного методу ілюструють, що два-три наближення у багатьох випадках визначають розв'язок задачі [22]. Точний розв'язок задачі про розтягнення пластини з круговим отвором для випадку плоского напруженого стану знайдене Г.П. Черепановим і Л.С. Рібаковим [112,122]. Д.Д. Івлєв провів розклад точних розв'язків за малим параметром та їх порівняння з розв'язками, отриманими методом малого параметру [42]. У якості малого параметру Д.Д. Івлєв розглядав різницю між розтягувальними зусиллями.

У роботах А.С. Космодам'янівського [58] асимптотичні методи набули подальшого розвитку. Він досліджував напружено-деформований стан пружних тіл з включеннями (пружними та жорсткими) і, з використанням

асимптотичного методу, отримав прості розв'язки ряду складних контактних задач. А.С. Космодаміанський, а пізніше і його послідовники, застосували асимптотичний метод інтегрування рівняння Гельмгольца та метод однорідних розв'язків. Задачу для ізотропної напівплощини з круговими отворами, коли на її границі тиснуть жорстко зчеплені штампи під дією деяких сил розглянули С.А. Калоєров [47], М.В. Вакуленко [46]. В результаті дослідження автори отримали розподіл напружень у залежності від відстані отвору від границі напівплощини.

Методом малого параметра з використанням узагальнених комплексних потенціалів задачу термов'язкопружності для кусково-однорідної пластинки зводять до рекурентної послідовності задач термопружності у своїй роботі С.А. Калоєров, О.А. Петренко [49]. В отриманому розв'язку всі величини залежать від ступенів малого параметра, заміна яких операторними виразами дозволяє знаходити напруження в будь-який момент часу. Наведено аналітичний розв'язок задачі для пластини з одним включенням, описані результати чисельних досліджень.

Асимптотичний метод та його модифікації для розв'язання різноманітних мішаних контактних задач був використаний у роботах В.А. Бабешко [14]. Зведення вихідної задачі до послідовності крайових задач теорії потенціалу викладено в роботах Л.І. Маневича, А.В. Павленка [72,101]. Тут вибір малого параметру був пов'язаний з фізичними властивостями матеріалу, завдяки чому з'явилась можливість урахувати сильну анізотропію. А саме, у якості малого параметру було розглянуте відношення характеристик жорсткості матеріалу. Отримані розв'язки були представлені через дві складові, кожна за яких була розв'язком крайової задачі для гармонічного рівняння. При цьому частина заданих крайових умов задовольнялась при розв'язанні однієї крайової задачі, а інша частина – при розв'язанні другої. Розв'язок був отриманий у вигляді ряду за малим параметром. При розширенні смуги до напівплощини, побудовані ряди збігалися до точного розв'язку. Застосування методу збурень до розв'язання як лінійних, так і нелінійних



задач теорії пружності відображене у роботах Т.С. Кагадій [44, 45,103], І.В. Щербини[129], О.В. Белової [16].

Значний внесок у дослідження напружено-деформованого стану анізотропних прямокутних балок, пластин та оболонок зробив Л.А. Агаловян [3]. Автор та його учні застосували асимптотичний метод до розв'язання ряду контактних задач для прямокутника та смуги з яскраво вираженими анізотропними властивостями матеріалу. Дослідники побудували ітераційний процес визначення напружено-деформованого стану анізотропної смуги, пружні характеристики якої є функціями від координат точок. Шукані величини виражаються через дві функції від поздовжньої координати. Для їх визначення була отримана система з двох диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та інтегральними характеристиками за поперечною координатою. Л.А. Агаловян поєднав асимптотичний розв'язок з розв'язком задачі Фламана-Бусінеска та отримав розв'язки неklasичних крайових задач для смуг та пластин при наявності зосереджених та кусково-неперервних навантажень. Методи асимптотичного інтегрування рівнянь теорії пружності він застосував також для розрахунку стрижнів, пластин, оболонок. Використовував для визначення напружено-деформованого стану у тих випадках, коли на лицьових поверхнях задані значення переміщень або умови мішаного типу.

Д.І. Шерман [123] звів розв'язання задачі про напружений стан багатозв'язної анізотропної пластинки до інтегрального рівняння Фредгольма. Методом Шермана Л.Н. Нагібін [83] дослідив напружений стан пластини з двома круговими отворами. У всіх цих випадках анізотропія вважалася слабкою. Близькі відстані між отворами не розглядались. Задачі для різноманітних анізотропних багатозв'язних середовищ розглянуті А.С. Космодаміанським та його учнями у роботах [58,71]. У цих роботах запропонований розвиток методів, розроблених Д.І. Шерманом. Узагальнення різноманітних напрямків застосування методів збурень викладене у монографії І.В. Андріанова та Л.І. Маневича [11]

Поряд з тим, що чисельні методи активно розвиваються, асимптотичні методи і різного роду оцінки залишаються актуальними навіть для суто інженерних задач, які виникають на практиці при розрахунках різного роду конструкцій [141].

У роботі [141] варіаційний асимптотичний метод (VAM), який є потужним методом розв'язання задач з тонкостінними балками, використовується для нелінійного статичного аналізу та аналізу стійкості композитних балок. Для розрахунку пружної деформації балок автор використовує методи кінцевих елементів та кінцевих різностей.

Математичні труднощі, що виникають під час різноманітних досліджень, також призводять до необхідності використання асимптотичних методів, які потребують у свою чергу більш строгих обґрунтувань.

Основні методи, які можуть бути використані для отримання асимптотичних розкладень інтегралів [173]: лема Ватсона, метод Лапласа, метод сідлової точки та метод стаціонарної фази. У роботі також йдеться про те, що класичні методи можуть бути модифіковані для отримання розкладень, які збігаються рівномірно за додатковими параметрами. Наведений огляд прикладів, де спеціальні функції, такі як функція похибки, функції Ейрі та функції Бесселя, використовуються у якості наближень у рівномірних асимптотичних розкладеннях.

У другій половині шістдесятих років минулого століття Л.І. Маневич сформулював ідею про можливість використання таких співвідношень у якості малого параметра при асимптотичному аналізі крайових задач механіки. Зазначена ідея передбачає використання афінних перетворень для врахування можливих співвідношень між компонентами вектора переміщень та швидкостями їх змінності вздовж координат. Вигляд цих перетворень демонструє, що розв'язки відповідних їм систем рівнянь, отриманих при асимптотичному інтегруванні, володіють властивостями, які різняться між собою. Це проявляється у відмінності порядків компонент, а також у відмінній швидкості зміни розв'язків.

## 1.4 Основи асимптотичного методу.

### 1.4.1 Метод збурення для тіл з прямолінійною анізотропією.

**Аналіз диференціальних рівнянь.** Задачі, що представлені у даній роботі, розв'язані за допомогою асимптотичного методу, запропонованого Л.І. Маневичем, А.В. Павленко [72,101,102] та узагальненого у [45].

Основи даного методу полягають у наступному. Розглянемо плоске пружне тіло, матеріал якого є ортотропним і головні напрямки анізотропії якого співпадають з декартовими осями координат  $Ox, Oy$ .

Співвідношення між деформаціями та напруженнями у цьому випадку можуть бути записані наступним чином:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}, \\ e_{12} &= \frac{1}{G} \sigma_{12}, \\ \nu_{12} E_1 &= \nu_{21} E_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Компоненти тензора деформацій  $e_{11}, e_{22}, e_{12}$  через проєкції  $u, v$  вектора переміщень записуються за допомогою формул

$$e_{11} = u_x; \quad e_{22} = v_y; \quad e_{12} = u_y + v_x. \quad (1.2)$$

Тут  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж головних  $Ox; Oy$ ,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коефіцієнти Пуасона,  $G$  – модуль зсуву,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  – нормальні напруження,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  – дотичні напруження; індекси  $x$  та  $y$  позначають диференціювання за відповідними координатами.

З рівнянь (1.1) та співвідношень (1.2) отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B_1 u_x + G(m-1) v_y, \\ \sigma_{22} &= B_1 v_y + G(m-1) u_x, \\ \sigma_{12} &= G(u_y + v_x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{де } B_j = \frac{E_j h_*}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad G = G_{12} h_*, \quad m = 1 + \nu_{21} \frac{B_1}{G}.$$

З урахуванням зроблених припущень питання про напружено-деформований стан ортотропного тіла зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0. \quad (1.4)$$

Система (1.4) з урахуванням (1.3) зводиться до системи наступних рівнянь

$$\begin{aligned} B_1 u_{xx} + G u_{yy} + m G v_{xy} &= 0, \\ B_2 v_{yy} + G v_{xx} + m G u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

або

$$\begin{aligned} u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + m \varepsilon v_{xy} &= 0, \\ \varepsilon v_{xx} + q v_{yy} + m \varepsilon u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{G}{B_1}; \quad q = \frac{B_2}{B_1}.$$

Відношення модулів пружності у реальних конструкціях можуть бути досить різноманітними ( $q > 1$ ,  $q < 1$ ,  $q = 1$ ). Розглянемо докладно один з випадків:  $q = 1$  (аналіз інших випадків проводиться аналогічно). У якості

малого параметра будемо розглядати величину  $\varepsilon = \frac{G}{B_1}$ . Матеріали з такими

пружними характеристиками широко застосовуються на практиці. Крім того, тут можливий перехід до ізотропного середовища.

Щоб урахувати можливі співвідношення між компонентами вектора переміщень та швидкостями їх зміни за координатами, введемо афінні перетворення координат та шуканих функцій [151]:

$$\xi_1 = \alpha \varepsilon^{1/2} x; \quad \eta_1 = y, \quad u = U^{(1)}; \quad v = \varepsilon^{3/2} V^{(1)}; \quad (1.7)$$

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = \beta \varepsilon^{1/2} y, \quad u = \varepsilon^{3/2} U^{(2)}, \quad v = V^{(2)}. \quad (1.8)$$

Із (1.7), (1.8) видно, що розв'язки системи, отриманої з (1.6) після введення перетворень (1.7) більш повільно змінюються вздовж координати  $x$ , у порівнянні з аналогічними розв'язками системи, отриманої після застосування (1.8). Компоненти вектора переміщень будемо записувати у вигляді суперпозиції розв'язків обох типів, а функції  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$  ( $n=1,2$ ) будемо шукати у вигляді рядів за дробовими степенями параметра  $\varepsilon$ . При цьому вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь та порядком по  $\varepsilon$  похибки у крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі у нульовому наближенні (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Щоб урахувати усі можливі випадки, функції  $U^{(n)}$  та  $V^{(n)}$  ( $n=1,2$ ) будемо визначати у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (з перетворень (1.7), (1.8) видно, що менших степенів параметрів  $\varepsilon$  виникнути не може).

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}, \quad V^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}. \quad (1.9)$$

Коефіцієнти  $\alpha$  та  $\beta$  також представимо у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$ :

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j; \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j, \quad (1.10)$$

причому,  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ , а коефіцієнти  $\alpha_j; \beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) обчислюються у процесі розв'язання і використовуються для спрощення рівнянь у вищих наближеннях.

Підставимо (1.7) в (1.6) з використанням відповідних розкладень (1.9), (1.10). Після розщеплення отриманої системи за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  прийдемо до нескінченної системи рівнянь відносно функцій  $U^{1,j}; V^{1,j}$  ( $j=0,1,2,\dots$ ), які визначають розв'язки, що порівняно повільніше змінюються вздовж координати  $x$  (такий напружено-деформований стан будемо називати станом *першого типу*):

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} &= -\sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{1,v} C_{j-v} - m \sum_{v=0}^{j-4} \left( V_{\xi\eta}^{1,v} \alpha_{j-v-4} \right), \\
V_{\eta\eta}^{1,j} + mU_{\xi\xi}^{1,j} &= -m \sum_{v=0}^{j-1} U_{\eta\eta}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} V_{\xi\xi}^{1,v} C_{j-v-4}, \\
C_p &= \sum_{s=0}^p \alpha_s \alpha_{p-s}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Після підстановки (1.8) у (1.6.) з використанням відповідних розкладень (1.9) та розщеплення за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (1.10) отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій  $U^{2,j}$ ,  $V^{2,j}$  ( $j=0,1,2,\dots$ ), які визначають розв'язки напружено-деформованого стану *другого типу*:

$$\begin{aligned}
V_{\xi\xi}^{2,j} + mV_{\xi\eta}^{2,j} &= -m \sum_{v=0}^{j-1} V_{\xi\eta}^{2,v} \beta_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} U_{\eta\eta}^{2,v} d_{j-v-4}, \\
V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} &= -\sum_{v=0}^{j-1} V_{\eta\eta}^{2,v} d_{j-v} - m \sum_{v=0}^{j-4} U_{\xi\eta}^{2,v} \beta_{j-v-4}, \\
\alpha_p &= \sum_{s=0}^p \beta_s \times \beta_{p-s}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Тут і далі приймаємо, що диференціювання (індекси  $\xi$  та  $\eta$ ) проводиться за тими координатами  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  ( $n=1,2$ ), індекси яких співпадають з першими верхніми індексами функцій. Крім того, слід зазначити, якщо верхня границя суми менша за нижню або для якої-небудь з функцій  $U^{n,k}$ ,  $V^{n,k}$  ( $n=1,2$ ) другий верхній індекс від'ємний, тоді такі суми та функції необхідно вважати рівними нулю.

Так при  $j=0$  з (1.11), (1.12) отримаємо напружено-деформований стан першого типу

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad V_{\eta\eta}^{1,0} + mU_{\xi\xi}^{1,0} = 0, \tag{1.13}$$

і напружено-деформований стан другого типу

$$U_{\xi\xi}^{2,0} + mV_{\xi\eta}^{2,0} = 0, \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \tag{1.14}$$

З виразів (1.13), (1.14) випливає, що функції  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$  визначаються з рівнянь Лапласа, а функції  $V^{1,0}$ ,  $U^{2,0}$  виражаються через  $U^{1,0}$  і  $V^{2,0}$  простим інтегруванням.

Коефіцієнти  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) поки ще не визначені. Вони визначаються у процесі розв'язання так, щоб обертались на нуль праві частини першого рівняння системи (1.11) і другого в (1.12). При такому виборі коефіцієнтів  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) усі функції  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа, тобто будуть гармонійними функціями. Оскільки функції  $V^{1,j}$ ,  $U^{2,j}$  визначаються через  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  простим інтегруванням, то вони також будуть гармонійними.

Доведемо, що для системи (1.11), (1.12) справедлива наступна теорема: якщо коефіцієнти  $\alpha_j$  та  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) рівні між собою та визначаються за формулами:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1, \quad \alpha_j = \beta_j = \frac{1}{2} m^2 \left( \omega_{j-4} + \sum_{k=0}^{j-4} \alpha_k \omega_{j-4-k} \right) \quad (j=1,2,\dots) \quad (1.15)$$

$$\omega_s = \alpha_s + (1-m) \sum_{n=0}^{s-2} (2\alpha_n - C_n) \omega_{s-n-2}, \quad (s \geq 0), \quad (1.16)$$

то права частина першого рівняння системи (1.11) обертається на нуль, тобто функції  $U^{1,j}$  и  $V^{2,j}$  можуть бути знайдені з рівнянь Лапласа.

Доведемо теорему спочатку для першого рівняння системи (1.11). Для доведення будемо використовувати метод математичної індукції.

При  $j=0$  справедливість цієї теореми випливає з (1.13).

При  $j=1$  отримуємо

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = -U_{\xi\xi}^{1,0} C_1, \quad V_{\eta\eta}^{1,1} = -m U_{\eta\xi}^{1,1} - m U_{\xi\eta} \alpha_1, \quad (1.17)$$

де  $C_1 = \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0 = 2\alpha_1$ .

Тоді перше рівняння (1.17) має вигляд:

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = -2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,0},$$

а щоб функція  $U^{1,1}$  була гармонійною, достатньо узяти  $\alpha_1 = 0$ , що відповідає рівнянням (1.15), (1.16). Тобто, при  $j=0,1$  теорема справедлива. Аналогічно можна впевнитись, що теорема справедлива при  $j=2,3$ , тобто  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Припустимо, що теорема справедлива при  $j \leq p$  та доведемо її для  $j = p+1$ . Зазначимо, якщо функції  $U^{1,j}$  ( $j \leq p$ ) гармонійні, то функції  $V^{1,j}$  ( $j \leq p$ ), що визначаються як частинні інтеграли других рівнянь системи (1.11) також будуть гармонійними, тобто  $V_{\xi\xi}^{1,j} = -V_{\eta\eta}^{1,j}$ . Враховуючи це, з другого рівняння системи (1.11) отримуємо:

$$V_{\eta\eta}^{1,j} = -mU_{\xi\eta}^{1,j} - m \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\eta}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} V_{\eta\eta}^{1,v} C_{j-v-4}. \quad (1.18)$$

Проінтегруємо (1.18) за  $\eta_1$  та продиференціюємо за  $\xi_1$  отримаємо

$$V_{\xi\eta}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^j U_{\xi\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} V_{\xi\eta}^{1,v} C_{j-v-4} \quad (1.19)$$

Систему (1.19) можна розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій  $V_{\xi\eta}^{1,j}$  ( $j=0,1,2,\dots,p$ ). Вона має трикутну матрицю з нульовими елементами по головній діагоналі, а це означає, що система завжди розв'язна.

Покажемо, з використанням індукції, що розв'язок системи має вигляд

$$V_{\xi\eta}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^j U_{\xi\xi}^{1,v} \omega_{j-v}. \quad (1.20)$$

Після підстановки (1.4.20) у перше рівняння системи (1.11) при  $j = p+1$  і враховуючи (1.15), (1.16) отримаємо, що права частина рівняння обертається на нуль, тобто функція  $U^{1,p+1}$  – гармонійна.

Із доведеної теореми випливає, що коефіцієнт  $\alpha$  розкладається у ряд за степенями  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon^{1/2}$  як припускалося раніше.



Аналогічні теореми можна довести і для  $\beta_j$ , при цьому  $\beta_j$ , визначається за формулою (1.15).

Таким чином, якщо коефіцієнти  $\alpha_j$  та  $\beta_j$  визначаються за формулами (1.15), то функції  $U^{1,j}$  та  $V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа у кожному наближенні, а функції  $V^{1,j}$  і  $U^{2,j}$  записуються через функції  $U^{1,j}$  і  $V^{2,j}$  простим інтегруванням. Звідси випливає, що для напружено-деформованого стану першого типу

$$U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} = 0,$$

$$V_{\eta\eta}^{1,j} = -mU_{\xi\eta}^{1,j} - m \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\eta}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} V_{\xi\xi}^{1,v} C_{j-v-4}, \quad (1.21)$$

для напружено-деформованого стану другого типу

$$V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = 0,$$

$$U_{\xi\xi}^{2,j} = -mV_{\xi\eta}^{2,j} - m \sum_{v=0}^{j-1} V_{\xi\eta}^{2,v} \beta_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} U_{\eta\eta}^{2,v} \alpha_{j-v-4}. \quad (1.22)$$

Використаємо перетворення (1.17), (1.18) і розкладення (1.9), (1.10) у виразах для переміщень та напружень (1.3). Подамо переміщення та напруження у вигляді рядів, при цьому враховуємо, що компоненти вектора переміщень розшуковуються у вигляді суперпозиції розв'язків усіх типів:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} u_j, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} v_j, \quad \sigma_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \sigma_{nk}^j \quad (n, k = 1, 2).$$

Після розщеплення за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  отримаємо:

$$u_j = U^{1,j} + U^{2,j-3}; \quad v_j = V^{2,j} + V^{1,j-3},$$

$$B_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{11}^j = \sum_{v=0}^j U_{\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} + U_{\xi}^{2,j-2} + v_{21} \sum_{v=0}^{j-2} V_{\eta}^{2,v} \alpha_{j-v-2} + v_{21} (V_{\eta}^{1,j-4}),$$

$$B_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{22}^j = \sum_{v=0}^j V_{\eta} \alpha_{j-v} + V_{\eta}^{1,j-2} + v_{21} \sum_{v=0}^{j-2} U_{\xi}^{1,v} \alpha_{j-v-2} + v_{21} U_{\xi}^{2,j-4}, \quad (1.23)$$

$$B_1 \varepsilon^{-1/2} \sigma_{12}^j = U_{\eta}^{1,j} + V_{\xi}^{2,j} + \sum_{v=0}^{j-4} (U_{\eta}^{2,v} + V_{\xi}^{1,v}) \alpha_{j-v-4}.$$

Для напружено-деформованого стану першого типу вирішальну роль відіграють компоненти переміщень  $U$ , відповідне даному типу НДС нормальне напруження  $\sigma_{11}$  та компонента дотичного напруження  $\sigma_{12}^{(1)}$ , яка отримується через переміщення  $U$ . Основними складовими НДС другого типу є переміщення  $V$ , відповідне даному типу НДС нормальне напруження  $\sigma_{22}$  та компонента дотичного напруження  $\sigma_{12}^{(2)}$ , яка виражається через  $V$ .

Повне дотичне напруження можна представити у вигляді суми складових

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)}.$$

Напружено-деформований стан першого та другого типів пов'язані лише через граничні умови по дотичним напруженням. Оскільки функції  $U^{1,j}, V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа, то ефективність метода залежить від того, чи вдасться сформулювати відповідні граничні умови для знаходження цих функцій.

Аналіз граничних умов. У випадку першої крайової задачі теорії пружності на обмежувальній лінії (наприклад  $x = const$ ) відоме нормальне напруження  $\sigma_{11}$  і дотичне напруження  $\sigma_{12}$

$$\sigma_{11} = \phi_1(y); \quad \sigma_{12} = \phi_2(y).$$

Припускаємо, що функції  $\phi_1(y)$  та  $\phi_2(y)$  можуть бути представлені у вигляді рядів

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \phi_{1,j}, \\ \phi_2(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \phi_{2,j}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

У протилежному випадку усі коефіцієнти при  $\varepsilon^{j/2}$  ( $j \geq 1$ ) обертаються на нуль. Тоді на обмежувальній прямій  $x = const$  напруження

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^j &= \phi_{1,j}, \\ \sigma_{12}^j &= \phi_{2,j}. \end{aligned}$$

Якщо використати висновки попереднього пункту, прийдемо до інтегрування рівнянь напружено-деформованого стану першого типу (1.11) при наступних граничних умовах для функцій  $U^{1,j}$

$$U_{\xi}^{1,j} = B_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \phi_{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} - U_{\xi}^{2,j-2} - \nu_{21} \sum_{\nu=0}^{j-2} (V_{\eta}^{2,\nu} \alpha_{j-\nu-2}) - \\ - \nu_{21} V_{\eta}^{1,j-4} \quad (j=0,1,\dots), \quad (1.25)$$

та рівнянь для НДС другого типу (1.4.12) з граничними умовами для функцій  $V^{2,j}$

$$V_{\xi}^{2,j} = (B_1 \varepsilon)^{-1} - U_{\eta}^{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-4} (U_{\eta}^{2,\nu} + V_{\xi}^{1,\nu}) \alpha_{j-\nu-4} \quad (j=0,1,2,\dots). \quad (1.26)$$

Для другої основної крайової задачі на обмежувальній прямій  $x = const$  задані переміщення

$$u = \psi_1(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}, \\ v = \psi_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j}. \quad (1.27)$$

Тоді на обмежувальній лінії  $u_j = \psi_{1,j}$ ;  $v_j = \psi_{2,j}$  та з (1.23) граничні умови для функцій  $U^{1,j}$ ;  $V^{2,j}$  запишуться відповідно:

$$U^{1,j} = \psi_{1,j} - U^{2,j-3}, \quad (j=0,1,2,\dots) \quad (1.28) \\ V^{2,j} = \psi_{2,j} - V^{1,j-3}.$$

Аналіз граничних умов демонструє, що для всіх крайових задач граничні умови у нульовому наближенні ( $j=0$ ) НДС першого типу не залежать ні від більш високих наближень, ні від розв'язків рівнянь для НДС другого типу. Тому перше рівняння (1.21) розв'язується незалежно від інших, а розв'язок другого рівняння (1.21) знаходимо простим інтегруванням. Після цього повністю визначаються граничні умови для першого рівняння (1.22). Після знаходження його розв'язку та визначення функції  $U^{2,0}$ , отримаємо граничні

умови для першого рівняння системи (1.21) НДС першого типу у першому наближенні.

Таким самим чином отримаємо більш високі наближення  $j = 2, 3, \dots$

Звідси випливає, що розв'язання задач лінійної теорії пружності для ортотропного середовища зводиться до рівнянь Лапласа при відповідних граничних умовах.

Інші випадки вибору малого параметру. Аналогічно проводиться аналіз основних крайових задач, для випадків  $q = \frac{B_2}{B_1} < 1$ , та  $q > 1$ .

Нехай  $q < 1$ . У якості малого параметра візьмемо  $\varepsilon = \frac{B_2}{B_1}$ , тоді  $\frac{G_*}{B_1}$  також

буде менше одиниці і  $\frac{G_*}{B_1} = \frac{G_*}{B_2} \cdot \frac{B_2}{B_1} = \lambda_1 \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^2 = \lambda_1 \varepsilon^2$ , де  $\lambda \sim 1$ .

З урахуванням цих міркувань рівняння (1.6) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} u_{xx} + \lambda_1 \varepsilon^2 u_{yy} + \lambda_1 \varepsilon^2 m v_{xy} &= 0, \\ \lambda_1 \varepsilon v_{xx} + v_{yy} + \lambda_1 \varepsilon m u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

Введемо наступні афінні перетворення координат та шуканих функцій

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_1 \alpha \varepsilon x, \quad \eta_1 = y, \quad u = U^{(1)}, \quad v = V^{(1)}, \\ \xi_2 &= x, \quad \eta_2 = \lambda_1^{1/2} \beta \varepsilon^{1/2} y, \quad u = \varepsilon^{5/2} U^{(2)}, \quad v = V^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Тоді визначення НДС першого типу зводиться до інтегрування рівнянь:

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{1,j} + V_{\eta\eta}^{1,j} &= - \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{1,v} C_{j-v} - \lambda_1^{1/2} \sum_{v=0}^{j-6} m V_{\xi\eta}^{1,v} \alpha_{j-v-6}, \\ V_{\eta\eta}^{1,j} &= -m \lambda_1^{3/2} U_{\xi\eta}^{1,j} - m \lambda_1^{3/2} \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\eta}^{1,v} \alpha_{j-v} - \lambda_1^2 \sum_{v=0}^{j-6} V_{\xi\xi}^{1,v} C_{j-v-6}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

при наступних граничних умовах для функцій  $U^{1,j}$

перша основна задача

$$U_{\xi}^{1,j} = (B_1 \varepsilon)^{-1} \lambda_1^{-1/2} \phi_{1,j} - \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} - U_{\xi}^{2,j-3} - \mu \lambda_1^{1/2} V_{\eta}^{1,j-6} - \mu \lambda_1 \sum_{v=0}^{j-3} V_{\xi}^{2,v} \beta_{j-3-v} \quad (1.32)$$

Друга основна задача

$$U^{1,j} = \psi_{1,j} - U^{2,j-5} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) . \quad (1.33)$$

Визначення напружено-деформованого стану другого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} &= -\sum_{v=0}^{j-1} V_{\eta\eta}^{2,v} \alpha_{j-v} - m\lambda_1^{1/2} \sum_{v=0}^{j-6} U_{\eta\eta}^{2,v} \beta_{j-v-6}, \\ U_{\xi\xi}^{2,j} &= -\lambda_1^{3/2} m \sum_{v=0}^j V_{\xi\eta}^{2,v} \beta_{j-v} - \lambda_1^2 \sum_{v=0}^{j-6} U_{\eta\eta}^{2,v} \alpha_{j-v-6}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

при наступних граничних умовах для функцій  $V^{2,j}$

перша основна задача

$$V_{\xi\xi}^{2,j} = G^{-1} \phi_{2,j} - U_{\eta}^{1,j} - \lambda_1^{1/2} \sum_{v=6}^{j-6} (U_{\eta}^{2,j} \beta_{j-v-6} + V_{\xi}^{1,v} \alpha_{j-v-6}), \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.35)$$

Друга основна задача

$$V^{2,j} = \psi_{2,j} - V^{1,j-4} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Тут  $\phi_{n,j}$ ,  $\psi_{n,j}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – відомі функції. Аналогічно формуються крайові умови для функцій  $U^{1,j}$  у випадку мішаної задачі.

Якщо  $q > 1$ ,  $B_2 > B_1$ , то в якості малого параметра прийемо величину

$$\varepsilon = B_1 / B_2, \quad \left( q = \varepsilon^{-1}, \quad \frac{G_*}{B_2} = \frac{G_*}{B_1} \cdot \frac{B_1}{B_2} = \lambda_2 \varepsilon^2, \quad \lambda_2 \sim 1 \right).$$

У цьому випадку рівняння (1.6) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{B_2} u_{xx} + \frac{G_*}{B_2} u_{yy} + m \frac{G_*}{B_2} v_{xy} &= 0, \\ v_{yy} + \frac{G_*}{B_2} v_{xx} + m \frac{G_*}{B_2} u_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} u_{xx} + \lambda_2 \varepsilon u_{yy} + m \lambda_2 \varepsilon v_{xy} &= 0, \\ v_{yy} + \lambda_2 \varepsilon^2 v_{xx} + m \varepsilon^2 u_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Вводимо наступні перетворення координат та шуканих функцій:

$$\xi_1 = x, \quad \eta_1 = \alpha \varepsilon y, \quad u = \varepsilon^2 U^{(1)}, \quad v = V^{(1)},$$

$$\xi_2 = \lambda_2^{1/2} \beta \varepsilon^{1/2} x, \quad \eta_2 = y, \quad u = U^{(2)}, \quad v = \varepsilon^{5/2} V^{(2)}.$$

Визначення НДС першого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$U_{\xi\xi}^{1,j} = -\lambda_2^{3/2} \sum_{\nu=0}^j V_{\xi\eta}^{1,0} \alpha_{j-\nu} - \lambda_2^2 \sum_{\nu=0}^{j-6} U_{\eta\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-6},$$

$$V_{\xi\xi}^{1,j} + V_{\eta\eta}^{1,j} = -\sum_{\nu=0}^{j-6} V_{\eta\eta}^{1,\nu} C_{j-\nu} - \lambda_2^{1/2} \sum_{\nu=0}^{j-6} V_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-6}.$$

При наступних граничних умовах для функцій  $V^{1,j}$

для першої основної задачі

$$V_{\xi}^{1,j} = \left[ G_*^{-1} \phi_{2,j} - U_{\eta}^{2,j} - \lambda_2^{1/2} \sum_{\nu=0}^{j-6} (U_{\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-6} + V_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-6}) \right], \quad (j=0,1,2,\dots)$$

для другої основної задачі

$$V^{1,j} = \psi_{2,j} - V^{2,j-5}, \quad (j=0,1,2,\dots).$$

Напружено-деформований стан другого типу знаходимо після інтегрування рівняння

$$U_{\xi\xi}^{2,j} + U_{\eta\eta}^{2,j} = -\sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{2,\nu} \alpha_{j-\nu} - \lambda_2^{1/2} \sum_{\nu=0}^{j-6} V_{\xi\eta}^{1,j} \beta_{j-\nu-6},$$

$$V_{\eta\eta}^{2,j} = -\lambda_2^{3/2} \sum_{\nu=0}^j U_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} + \lambda_2^2 \sum_{\nu=0}^{j-6} V_{\xi\xi}^{2,\nu} \alpha_{j-\nu-6}.$$

Граничні умови для визначення функцій  $U^{2,j}$  мають вигляд:

Перша основна задача

$$U_{\xi}^{2,j} = \left[ B_1 \varepsilon^{1/2} \right]^{-1} \lambda_2^{-1/2} \phi_{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} - \lambda_2^{-1/2} U_{\xi}^{1,j-3} +$$

$$+ \mu \left[ \sum_{\nu=0}^{j-3} V_{\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-3} - \lambda_2^{-1/2} V_{\eta}^{2,j-6} \right] \quad (j=0,1,2,\dots)$$

Друга крайова задача

$$U^{1,j} = \psi_{1,j} - U^{1,j-4} \quad (j=0,1,2,\dots).$$

Коефіцієнти  $\alpha_j, \beta_j$  обираються з тих самих міркувань, що і раніше. При  $q \neq 1$ , має місце наступна теорема:

якщо коефіцієнти  $\alpha_j, \beta_j$  знаходяться за формулами

$$\alpha_j = \beta_j = \frac{1}{2} \left[ \lambda_i^2 \gamma_{j-6} m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \lambda_i^2 m^2 \gamma_{j-k-6} - \alpha_{j-k} \right] \right], \quad (1.36)$$

$$\gamma_s = \alpha_s + \lambda_i^2 \sum_{n=0}^{s-6} C_n \gamma_{s-n-6}, \quad s \geq 0, \quad \gamma_0 = 1, \quad C_n = \sum_{s=0}^n \alpha_s \alpha_{n-s}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$(\text{при } s < 0, \quad \gamma_s = 0),$$

то праві частини перших рівнянь обертаються на нуль, тобто основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа.

Доведення теореми проводиться так само, як і для випадку  $q = 1$ .

Тоді якщо коефіцієнти  $\alpha_j$ , та  $\beta_j$  визначаються за формулами (1.36), то функції  $U^{1,j} (V^{1,j})$  і  $V^{2,j} (U^{2,j})$  у випадку  $q < 1 (q > 1)$  є гармонійними, а функції  $V^{1,j} (U^{1,j})$ ,  $U^{2,j} (V^{2,j})$  виражаються через  $U^{1,j} (V^{1,j})$  і  $V^{2,j} (U^{2,j})$  простим інтегруванням.

Таким чином, при будь-якому значенні параметру  $q$  вихідні рівняння для контактних задач теорії пружності можна розщепити таким чином, щоб розв'язання кожної отриманої задачі зводилось до розв'язання рівнянь Лапласа при відповідних граничних умовах.

### 1.4.2 Основні співвідношення та крайові задачі у криволінійних ортогональних координатах

Розглянемо пластинку, матеріал якої володіє властивостями криволінійної анізотропії. Ця пластинка займає скінченну або нескінченну область та має у кожній своїй точці площину пружної симетрії, паралельну серединній площині  $xOy$ . Пластинка, яка працює в умовах узагальненого плоского напружено-деформованого стану, є ортотропною, причому головні напрямки пружності співпадають з криволінійними ізометричними координатами  $(\xi, \eta)$ , які пов'язані з декартовими координатами  $(x, y)$  через деяку функцію комплексного змінного

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re}[\varpi(\zeta)] = x(\xi, \eta); \quad y = \operatorname{Im}[\varpi(\zeta)] = y(\xi, \eta); \quad z = \varpi(\zeta) \\ (z = x + iy; \quad \zeta = e^{\xi+i\eta}; \quad i = \sqrt{-1}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ізометрична система криволінійних координат на площині володіє тією властивістю, що обидва її параметра Ляме у кожній точці  $(\xi, \eta)$  рівні:

$$H_1 = H_2 = H(\xi, \eta) = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.38)$$

Питання про напружено-деформований стан пружної анізотропної пластинки зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\Gamma_{22}^2 \tau = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 2\Gamma_{11}^1 \tau = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

При відповідних граничних умовах. Припускається, що границя області, яку займає пластинка, співпадає з лінією  $\xi = \text{const}$ . До рівнянь рівноваги (1.39) слід додати рівняння сумісності деформацій

$$2 \frac{\partial^2 (H^2 e_{12})}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 (H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 (H^2 e_{11})}{\partial \eta^2} + 3\Gamma_{22}^2 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \eta} +$$



$$\begin{aligned}
& +3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial(H^2 e_{22})}{\partial \xi} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial(H^2 e_{11})}{\partial \xi} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial(H^2 e_{22})}{\partial \eta} - \\
& -2\Gamma_{22}^2 \frac{\partial(H^2 e_{12})}{\partial \xi} - 2\Gamma_{11}^1 \frac{\partial(H^2 e_{12})}{\partial \eta} - 2H^2 \left[ (\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Фізичні проєкції тензора напружень  $\sigma_{11}$ ;  $\sigma_{22}$ ;  $\tau$  через фізичні компоненти тензора деформацій  $e_{11}$ ;  $e_{22}$ ;  $e_{12}$  визначаються співвідношеннями

$$\sigma_{11} = E_*(e_{11} + \mathcal{G}_1 q e_{22}); \quad \sigma_{22} = E_* q (e_{22} + \mathcal{G}_1 e_{11}); \quad \tau = G e_{12}, \tag{1.41}$$

а фізичні компоненти тензора деформацій виражаються через фізичні проєкції  $u_1, u_2$  вектора переміщень за формулами

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \Gamma_{22}^2 u_2 \right); \quad e_{22} = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 u_1 \right), \\
e_{12} &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \Gamma_{11}^1 u_2 - \Gamma_{22}^2 u_1 \right).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Тут  $E_* = E_1 t / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ;  $q = E_2 / E_1$ ;  $\mathcal{G}_2 E_1 = \mathcal{G}_1 E_2$ ;  $G = G_* t$ ,  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж головних напрямків  $(\xi, \eta)$ ;  $t$  – товщина пластини,  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  – коефіцієнти Пуассона;  $G_*$  – модуль зсуву;  $\sigma_{11}$  – нормальна компонента напружень на кривій  $\xi = const$ ;  $\sigma_{22}$  – нормальна компонента напружень на кривій  $\eta = const$ ;  $\tau$  – дотична компонента на обох кривих. Символи Кристофеля  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^2$  пов'язані з параметрами Ляме (1.38) наступним чином:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \xi}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

При розв'язанні тих чи інших крайових задач можливі випадки, коли компоненти тензора напружень в усій області, яку займає пластинка, задовольняють умовам

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H^2 \sigma_{11}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (H^2 \sigma_{22}) = 0; \quad \tau = 0, \tag{1.43}$$

тобто дотичні напруження і коваріантна похідна тензора  $\sigma_{ij}$  за координатою  $\eta$  обертаються на нуль.

Для даного напружено-деформованого стану рівняння рівноваги (1.39) та сумісності деформацій (1.40) приймають наступний вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \Gamma_{11}^1 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0; \quad \Gamma_{22}^2 (\sigma_{22} + \sigma_{11}) = 0, \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - 3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{22})}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \xi} + \\ & + 2H^2 \left[ (\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Якщо  $\Gamma_{22}^2 \neq 0$ , то з другого рівняння (1.8) маємо  $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ , а з першого рівняння (с урахуванням (1.43)) знаходимо  $\sigma_{11} = C / H^2$ ,  $C = const$ . При цьому рівняння сумісності деформацій (1.45) обертається на тотожність лише у випадку  $q = 1$ .

Звідси випливає, що існування напружено-деформованого стану, який задовольняє умовам (1.43), у загальних криволінійних координатах ( $\Gamma_{22}^2 \neq 0$ ) можливе лише при умові рівності модулів пружності вздовж головних напрямків  $\xi, \eta$ . У цьому випадку розв'язання приймають вигляд

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = C / H^2; \quad \tau = 0. \quad (1.46)$$

Вказаний стан, вочевидь, можна реалізувати у чистому вигляді, або він може бути складовою частиною для загального напружено-деформованого стану. Стала  $C$  у рівності (1.46) визначається з відповідних граничних умов.

Якщо  $\Gamma_{22}^2 = 0$  (параметри Ляме не залежать від координати  $\eta$ ), то друге рівняння (1.44) обертається на тотожність. Напруження  $\sigma_{22}$  виражається через  $\sigma_{11}$  з першого рівняння (1.44), а для визначення напруження  $\sigma_{11}$  необхідно використовувати рівняння сумісності (1.45). У цьому випадку при усіх значеннях  $q$  можливе існування напружено-деформованого стану, який задовольняє умовам (1.43), але вимоги рівності нулю коваріантних похідних переходять у вимоги рівності нулю частинних похідних, а розв'язок має вигляд

$$\sigma_{11} = A + C / H^2; \quad \sigma_{22} = A - C / H^2; \quad \tau = 0, \quad (1.47)$$

де  $A$  і  $C$  – довільні сталі.

Це має місце також у полярних координатах. Наприклад, для пластини з циліндричною анізотропією, коли граничні умови і розв'язки не залежать від координати  $\eta = \theta$ , тобто симетричні відносно осі анізотропії. Такі задачі називають осесиметричними.

Напружено-деформований стан, який задовольняє умовам (1.43), будемо звати «квазіосесиметричним».

Якщо граничні умови не задовольняють умовам (1.43), то розв'язання основних крайових задач теорії пружності спряжене зі значними труднощами. Це стосується пластин з циліндричною або загальною криволінійною анізотропією. Ці труднощі викликані, в першу чергу, неможливістю безпосереднього застосування ефективних методів, заснованих на використанні апарата теорії аналітичних функцій. Для розв'язання таких крайових задач доцільне застосування асимптотичного методу.

*Різні випадки характеристик жорсткості.* Аналогічним чином проводиться аналіз основних крайових задач теорії пружності для ортотропних пластинок, для яких  $E_1 \neq E_2$ . Розглянемо коротко деякі випадки.

Нехай ортотропна пластинка володіє властивістю криволінійної анізотропії та має місце відношення  $E_1 > E_2$  ( $q = \lambda_1 G / E_*$ ,  $\lambda_1 \approx 1$ ). Величину  $\varepsilon = G / E_*$  розглядаємо у якості малого параметру. В процесі асимптотичного аналізу рівнянь рівноваги (1.44) та граничних умов вводимо наступні перетворення координат та шуканих функцій:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha \varepsilon^{-1/2} \xi; & \eta_1 &= \varepsilon^{-1} \eta; & u_1 &= \varepsilon^{1/2} U^{(1)}; & u_2 &= \varepsilon^{1/2} V^{(1)}, \\ \xi_2 &= \beta \varepsilon^{-1} \lambda_1^{1/2} \xi; & \eta_2 &= \varepsilon^{-1} \eta; & u_1 &= \varepsilon^{3/2} U^{(2)}; & u_2 &= \varepsilon^{1/2} V^{(2)}. \end{aligned}$$

При цьому визначення НДС першого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} = & -\sum_{\nu=0}^{j-1} \left[ U_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu} + mV_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-1} + V_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-1} \right] - \\
& -\sum_{\nu=0}^{j-2} \left( V^{1,\nu} f_{4,j-\nu-2} - (1 + \lambda_1) V_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} \right) - \sum_{\nu=0}^{j-3} V_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-3} + \\
& + \sum_{\nu=0}^{j-4} \left[ \left( \lambda_1 \phi_{1,j-\nu-4} + \phi_{2,j-\nu-4} - m f_{3,j-\nu-4} \right) U^{1,\nu} + \left( m \phi_{12,j-\nu-4} + f_{4,j-\nu-4} \right) V^{1,\nu} \right]; \\
\lambda_1 V_{\eta\eta}^{1,j} = & -\sum_{\nu=0}^{j-1} \left( m U_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-1} - U_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-1} \right) - \\
& -\sum_{\nu=0}^{j-2} \left( V_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu-2} + (1 + \lambda_1) U_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} - V^{1,\nu} \phi_{2,j-\nu-2} \right) + \\
& + \sum_{\nu=0}^{j-3} U_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-3} + \sum_{\nu=0}^{j-4} \left[ \left( m \phi_{12,j-\nu-4} + (1 - \lambda_1) f_{4,j-\nu-4} \right) U^{1,\nu} + \right. \\
& \left. + \left( \phi_{1,j-\nu-4} + m f_{3,j-\nu-4} \right) V^{1,\nu} \right]
\end{aligned}$$

при наступних граничних умовах на контурі  $\Gamma$  для функцій  $U^{1,j}$ :  
у випадку ПЕРШОЇ основної задачі

$$\begin{aligned}
U_{\xi}^{1,j} = & \frac{1}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{1,\nu} h_{j-\nu} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \left[ U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} + \lambda_1^{1/2} U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1} + \right. \\
& \left. + \left( V^{1,\nu} + V^{2,\nu} \right) f_{2,j-\nu-1} \right] - \mu \left( V_{\eta}^{1,j-1} + V_{\eta}^{2,j-1} \right) - \\
& - \mu \sum_{\nu=0}^{j-3} U^{1,\nu} f_{1,j-\nu-3} - \mu \sum_{\nu=0}^{j-5} U^{2,\nu} f_{1,j-\nu-5} \quad (j = 0, 1, 2, \dots);
\end{aligned}$$

для ДРУГОЇ основної задачі

$$U^{1,j} = \varepsilon^{-1/2} u_j^0 - U^{2,j-2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \text{ на } \Gamma,$$

$$\psi_{1,j}, u_j^0 - \text{відомі функції координати } \eta.$$

Визначення НДС другого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi}^{2,j} + m\lambda_1^{-1/2} V_{\xi\eta}^{2,j} + \lambda_1^{-1/2} V_{\xi}^{2,j} B_0 = & \sum_{\nu=0}^{j-1} \left( U_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + m\lambda_1^{-1/2} V_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} + \right. \\
& \left. + \lambda_1^{-1/2} V_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu} \right) - \lambda_1^{-1} \left[ U_{\eta\eta}^{2,j-2} + \sum_{\nu=0}^{j-2} \left( \lambda_1^{1/2} V_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-2} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(1 + \lambda_1\right) V_{\eta}^{2, \nu} f_{1, j-\nu-2} + V^{2, \nu} f_{4, j-\nu-2} \Big] + \lambda_1^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-4} \left( m \phi_{12, j-\nu-4} + \right. \\
& \left. + f_{4, j-\nu-4} \right) V^{2, \nu} + \lambda_1^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-6} \left( \lambda_1 \phi_{1, j-\nu-6} + \phi_{2, j-\nu-6} - m f_{3, j-\nu-6} \right) U^{2, \nu}, \\
V_{\xi\xi}^{2, j} + V_{\eta\eta}^{2, j} = & - \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\xi}^{2, \nu} d_{j-\nu} - \lambda_1^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{j-2} \left( m U_{\xi\eta}^{2, \nu} \beta_{j-\nu-2} - \right. \\
& \left. - U_{\xi}^{2, \nu} B_{j-\nu-2} - \lambda_1^{-1/2} V^{2, \nu} \phi_{2, j-\nu-2} \right) - \lambda_1^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-4} \left[ \left( 1 + \lambda_1 \right) U_{\eta}^{2, \nu} f_{1, j-\nu-4} - \right. \\
& \left. - \lambda_1^{1/2} U_{\xi}^{2, \nu} B_{j-\nu-4} - \left( \phi_{1, j-\nu-4} + m f_{3, j-\nu-4} \right) V^{2, \nu} \right] + \\
& + \lambda_1^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-6} \left[ m \phi_{12, j-\nu-6} + \left( 1 - \lambda_1 \right) f_{4, j-\nu-6} \right] U^{2, \nu}.
\end{aligned}$$

Тут граничні умови для функцій  $V^{2, j}$  записуються наступним чином:

ПЕРША основна задача

$$\begin{aligned}
V_{\xi}^{2, j} = & \frac{\left( \lambda_1 \varepsilon \right)^{-1/2}}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{2, \nu} h_{j-\nu} - \lambda_1^{-1/2} U_{\eta}^{1, j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \left( V_{\xi}^{2, \nu} \beta_{j-\nu} + \right. \\
& \left. + \lambda_1^{-1/2} V_{\xi}^{1, \nu} \alpha_{j-\nu-1} \right) - \lambda_1^{-1/2} U_{\eta}^{2, j-2} + \lambda_1^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{j-2} \left[ \left( V^{1, \nu} + V^{2, \nu} \right) f_{1, j-\nu-2} + \right. \\
& \left. + U^{1, \nu} f_{2, j-\nu-2} \right] + \lambda_1^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{j-4} U^{2, \nu} f_{2, j-\nu-4} \quad (j = 0, 1, 2, \dots);
\end{aligned}$$

ДРУГА основна задача

$$V^{2, j} = \varepsilon^{-1/2} v_j - V^{1, j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \text{ на } \Gamma,$$

$\psi_{2, j}, v_j$  - відомі функції.

Отримані відношення дозволяють сформулювати крайові умови для функцій  $U^{1, j}, V^{2, j}$  у випадку МІШАНОЇ задачі.

Якщо  $E_2 > E_1$  ( $q^{-1} = \lambda_2 G / E^*$ ,  $\lambda_2 \approx 1$ ,  $E^* = E_2 t / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ), то при асимптотичному інтегруванні рівнянь (1.44) у якості малого параметра приймаємо величину  $\varepsilon = G / E^*$ , а відповідні перетворення координат та шуканих функцій вводимо наступним чином:

$$\xi_1 = \alpha \lambda_2^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} \xi; \quad \eta_1 = \varepsilon^{-1/2} \eta; \quad u_1 = U^{(1)}; \quad u_2 = \varepsilon^{1/2} V^{(1)},$$

$$\xi_2 = \beta \varepsilon^{-1} \xi; \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1/2} \eta; \quad u_1 = \varepsilon U^{(2)}; \quad u_2 = \varepsilon^{1/2} V^{(2)}.$$

Знаходження НДС першого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} = & - \sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu} + \sum_{\nu=0}^j (V_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu} + U^{1,\nu} \phi_{1,j-\nu}) - \\ & - m \lambda_2^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-1} - \sum_{\nu=0}^{j-2} \left[ \lambda_2^{1/2} (1 + \lambda_2^{-1}) V_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-2} - V_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} - \right. \\ & \left. - (\phi_{2,j-\nu-2} - m f_{3,j-\nu-2}) U^{1,\nu} \right] + \sum_{\nu=0}^{j-3} \left[ m \phi_{12,j-\nu-3} + (1 - \lambda_2) f_{4,j-\nu-3} \right] V^{1,\nu}, \\ (V_{\eta}^{1,j} + U^{1,j} f_{1,0})_{\eta} = & - \sum_{\nu=0}^{j-1} \left[ (U^{1,\nu} f_{1,j-\nu})_{\eta} + m \lambda_2^{-1/2} U_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-1} \right] - \\ & - \sum_{\nu=0}^{j-2} \left[ \lambda_2^{-1} V_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu-2} + U_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} - \lambda_2^{1/2} (1 + \lambda_2^{-1}) U_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-2} \right] + \\ & + \sum_{\nu=0}^{j-3} (m \phi_{12,j-\nu-3} + f_{4,j-\nu-3}) U^{1,\nu} + \sum_{\nu=0}^{j-4} (\phi_{1,j-\nu-4} + \lambda_2 \phi_{2,j-\nu-4} + m f_{3,j-\nu-4}) V^{1,\nu} \end{aligned}$$

при наступних граничних умовах на контурі  $\Gamma$  для функцій  $U^{1,j}$ :

для ПЕРШОЇ основної задачі

$$\begin{aligned} U_{\xi}^{1,j} = & \frac{(\lambda_2 \varepsilon)^{-1/2}}{E^*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{1,\nu} h_{j-\nu} - \sum_{\nu=0}^{j-1} (U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} + \lambda_2^{1/2} U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1}) - \\ & - \mu \lambda_2^{-1/2} V_{\eta}^{2,j-1} - \mu \lambda_2^{-1/2} \left( V_{\eta}^{1,j-1} + \sum_{\nu=0}^{j-1} U^{1,\nu} f_{1,j-\nu-1} \right) - \end{aligned}$$

$$-\lambda_2^{1/2} \sum_{\nu=0}^{j-2} (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{2,j-\nu-2} - \mu \lambda_2^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{j-3} U^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3} \quad (j = 0, 1, 2, \dots);$$

для ДРУГОЇ основної задачі

$$U^{1,j} = u_j^0 - U^{2,j-2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \text{ на } \Gamma.$$

Визначення НДС другого типу зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{2,j} + m\lambda_2^{-1} V_{\xi\eta}^{2,j} - (\lambda_2)^{-1} V_{\eta}^{2,j} f_{1,0} = & - \sum_{\nu=0}^{j-1} \left[ U_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + \right. \\ & \left. + m\lambda_2^{-1} V_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} - (\lambda_2)^{-1} V_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu} + (1 + \lambda_2^{-1}) V_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-1} \right] - \\ & - \lambda_2^{-1} U_{\eta\eta}^{2,j-2} + \lambda_2^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-2} (V_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-2} + U^{2,\nu} \phi_{1,j-\nu-2}) + \\ & + \lambda_2^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-3} \left[ m\phi_{12,j-\nu-3} + (1 - \lambda_2) f_{4,j-\nu-3} \right] V^{2,\nu} + \lambda_2^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-4} (\phi_{2,j-\nu-4} - mf_{3,j-\nu-4}) U^{2,\nu}, \\ V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = & - \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} - \sum_{\nu=0}^{j-2} (mU_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-2} + \\ & + U_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-2}) - \sum_{\nu=0}^{j-3} (U^{2,\nu} f_{4,j-\nu-3} - (1 + \lambda_2) U_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-3}) - \\ & - \sum_{\nu=0}^{j-4} \left[ U_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-4} - (\phi_{1,j-\nu-4} + \lambda_2 \phi_{2,j-\nu-4} + \right. \\ & \left. + mf_{3,j-\nu-4}) V^{2,\nu} \right] + \sum_{\nu=0}^{j-3} (m\phi_{12,j-\nu-5} + f_{4,j-\nu-5}) U^{2,\nu} \end{aligned}$$

при наступних граничних умовах для функцій  $V^{2,j}$ :

ПЕРША основна задача

$$\begin{aligned} V_{\xi}^{2,j} = & \frac{\varepsilon^{-1/2}}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{2,\nu} h_{j-\nu} - U_{\eta}^{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} (V_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} + \\ & + \lambda_2^{-1/2} V_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-1} - U^{1,\nu} f_{2,j-\nu-1}) - U_{\eta}^{2,j-2} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{j-2} (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{1,j-\nu-2} + \sum_{\nu=0}^{j-3} U^{2,\nu} f_{2,j-\nu-3} \quad (j = 0, 1, 2, \dots);$$

ДРУГА основна задача

$$V^{2,j} = \varepsilon^{-1/2} v_j - V^{1,j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \text{ на } \Gamma.$$

Далі розв'язання тієї або іншої крайової задачі теорії пружності зводиться до послідовного інтегрування крайових задач, більш простих для розв'язання. Напружено-деформований стан, що задовольняє умовам (1.43), можливий лише за умови  $\Gamma_{22}^2 = 0$ .

Застосування методу малого параметру доцільне у різноманітних розділах механіки, математики, фізики (теорія коливань, теорія стійкості, аерогідромеханіка, тощо).

Також досить результативним є застосування асимптотичного методу для розв'язання крайових задач теорії пружності. Особливо у тих випадках, коли тіла, що контактують володіють складними фізико-математичними властивостями.



## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Огляд досліджень щодо контактних задач теорії пружності, проведений у першому розділі, підтверджує актуальність розглянутих у даній дисертаційній роботі задач, а також важливість отриманні їх аналітичних розв'язків.

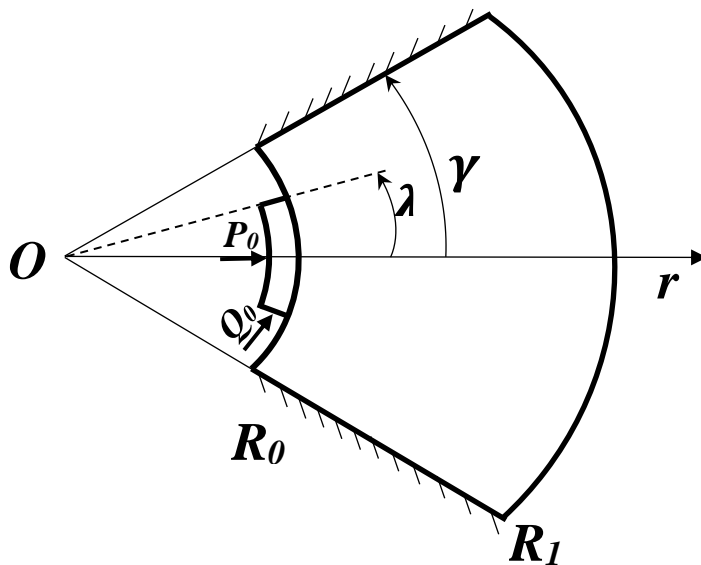
2. Наведені основи асимптотичного методу, який застосовується в даній роботі для розв'язання розглянутих задач. Згідно з цим методом напружено-деформований стан ортотропного тіла, що розглядається розкладається на дві складові з різними властивостями, зв'язок між якими здійснюється через граничні умови. Розв'язок вихідної задачі знаходиться у вигляді суперпозиції зазначених складових. Наведено формулювання граничних умов для знаходження основних функцій, відповідних напружено-деформованим станам першого та другого типу. Це дозволяє звести розв'язання крайової задачі теорії пружності до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

## РОЗДІЛ 2.

### Задача про дію жорсткого штампа на пружну анізотропну пластину з урахуванням сили тертя

В даному розділі наводиться розв'язання контактної задачі для пластини скінченних розмірів з криволінійною анізотропією та жорсткого штампа за умови, що між штампом та пластиною враховується тертя, яке підпорядковується закону Кулона.

#### 2.1. Постановка задачі.



Розглядається задача про вдавлювання жорсткого штампа у вільну грань пружної ортотропної пластини, яка являє собою частину кругового кільця. Нехай пружна пластина  $R_0 \leq r \leq R_1$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ , закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ . На границю

пластини  $r = R_0$  діє жорсткий штамп. Вдавлювання відбувається на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ . Штамп діє нормальним зусиллям  $P_0$  і дотичним  $Q_0$  (рис.1). При цьому між штампом та пластиною враховується тертя, яке підпорядковується закону Кулона (розглядається стан граничної рівноваги штампа). Інша границя  $r = R_1$ , залишається вільною.

Пластину, товщиною  $\delta$ , працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії

співпадають з полярними координатами  $r, \theta$ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і в пластині.

Для розв'язання поставленої задачі використовується метод малого параметра [127]. Якщо замість полярних координат  $r, \theta$  ввести безрозмірні координати  $\xi, \eta$  за допомогою співвідношень  $r = R_0 e^\xi$ ,  $\theta = \eta$ , то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь пластини у переміщеннях

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta &= 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} - G (u_\eta - v) &= 0 \end{aligned}$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0, \quad (\xi = 0, \quad \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u &= c_0 = const, \quad \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, \quad |\eta| < \lambda), \\ \sigma &= \tau = 0, \quad (\xi = h, \quad |\eta| < \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm \gamma), \end{aligned}$$

Крім того, повинні виконуватись умови рівноваги штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

Оскільки розглядається стан граничної рівноваги ( $\tau = \rho \sigma_1$ ), то друга умова зводиться до першої. Тут  $u = u_r, v = u_\theta$  – компоненти вектора переміщень пластини;  $B_1 = E_1 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ,  $B_2 = E_2 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ,  $G = G_* \delta$  – характеристики жорсткості пластини на розтягнення-стискання;  $\sigma_1$  – нормальне у напрямку

координати  $\xi$  напруження;  $\tau$  – дотичне напруження;  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж головних напрямків;  $G_*$  – модуль зсуву;  $m = 1 + \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G$ ;  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини  $\mathcal{G}_1 B_2 = \mathcal{G}_2 B_1$ ;  $EF$  – жорсткість стрингера на розтягнення-стискання;  $h = \ln(R_1 / R_0)$ ;  $\rho$  – коефіцієнт тертя ( $\rho < 1$ ); індекси  $\xi, \eta$  позначають диференціювання за відповідними координатами.

Оскільки математичні труднощі не дозволяють отримати точний аналітичний розв’язок поставленої задачі, для її розв’язання доцільно застосувати асимптотичний метод, розроблений у [72,73]. Цей метод дозволяє розкласти напружено-деформований стан пластини на дві складові, при чому кожна з них може бути знайдена про послідовному розв’язанні крайових задач теорії потенціалу.

## 2.2. Метод розв’язання та отримані результати.

В першу чергу необхідно отримати розв’язок для **напруженого стану першого типу** (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ). Визначення цього стану у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (2.1)$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{1,0} &= 0 && \left( \begin{array}{l} \xi = 0, \quad \lambda < |\eta| < \gamma \\ \xi = h, \quad |\eta| < \gamma \end{array} \right); \\ u^{1,0} &= C_0 = const && (\xi = 0, \quad |\eta| < \lambda) \\ u^{1,0} &= 0 && (\eta = \pm\gamma) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Оскільки при  $\eta = \pm\gamma$ , компонента вектора переміщення  $u$  дорівнює нулю, то і  $u_{\xi}^{1,0}$  при  $\eta = \pm\gamma$ , також буде дорівнювати нулю. Переміщення  $v^{1,0}$ , відповідне даному напружено-деформованому стану знаходиться зі співвідношення [73,101]

$$v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0 \quad (2.3)$$

Введемо нові незалежні змінні  $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi$ ,  $y_1 = \eta$ , тоді крайова задача (2.1), (2.2) приймає вигляд

$$u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} = 0; \quad (2.4)$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} x_1 = 0, \quad \lambda < |y_1| < \gamma \\ x_1 = h_1, \quad |y_1| < \gamma \end{array} \right);$$

$$u^{1,0} = C_0 = const \quad (x_1 = 0, \quad |y_1| < \lambda); \quad (2.5)$$

$$u_{y_1}^{1,0} = 0 \quad (y_1 = \pm\gamma),$$

де  $h_1 = (G/B_1)^{1/2} \cdot h$ .

Таким чином, потрібно знайти аналітичну у півсмузі  $0 \leq x_1 \leq h_1$ ,  $|y_1| \leq \gamma$  функцію  $u^{1,0}$  за заданими граничними умовами (2.5). Цю задачу будемо розв'язувати відображенням прямокутника з площини  $z_1$  ( $z_1 = y_1 + ix_1$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$ ).

Відображення верхньої півплощини на прямокутник реалізує функція

$$z_1 = C_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k_1^2 \zeta_1^2)}}, \quad (2.6)$$

причому для визначення параметрів  $k_1$  ( $0 < k_1 < 1$ ) і  $C_1$  маємо рівняння [67]

$$\gamma = C_1 \int_0^{l_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}} = C_1 K(k_1),$$

$$h_1 = C_1 \int_0^{1/k_1} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k_1^2 t^2)}} = C_1 K(k_1'), \quad (2.7)$$

де  $K(k_1)$  - повний еліптичний інтеграл першого роду,  $k_1' = \sqrt{1-k_1^2}$ .

Із рівнянь (2.7) знаходимо відношення

$$\frac{K(k_1')}{K(k_1)} = \frac{h_1}{\gamma} = \chi_1. \quad (2.8)$$

За відомим відношенням (2.8) з урахуванням [118, таб.17.3] визначаємо  $k_1$ , а потім і  $K(k_1)$ . Тоді з першого рівняння (2.7) отримаємо  $C_1 = \gamma/K(k_1)$ . Крім того, знаючи відношення (2.8) можна визначити величину  $q_1$  [67, с. 702]

$$q_1 = e^{-\pi\chi_1}, \quad (2.9)$$

Значення  $k_1$

$$k_1 = 4 \left( \left[ \sum_{g=0}^{\infty} q_1^{(g+1/2)^2} \right] \left[ 1 + 2 \sum_{g=0}^{\infty} q^{g^2} \right]^{-1} \right)^2, \quad (2.10)$$

та інтеграл

$$K(k_1) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + 2 \sum_{g=1}^{\infty} q^{g^2} \right). \quad (2.11)$$

Функція, що обертає інтеграл (2.6) (тобто яка реалізує відображення прямокутника на півплощину) з урахуванням того, що  $C_1 = \gamma/K(k_1)$  має вигляд

$$\zeta_1 = sn(K(k_1)z_1/\gamma; k_1) \quad (2.12)$$

та має назву еліптичний синус.

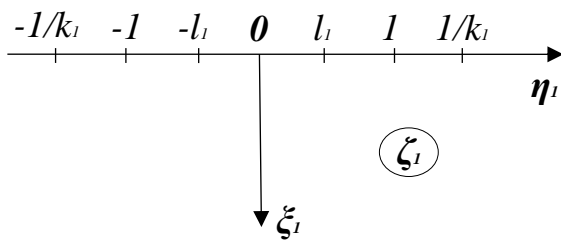


Рис.2

При цьому початок координат залишається без змін, точка  $z_1 = \gamma$  переходить у точку  $\zeta_1 = 1$ ; точка  $z_1 = \gamma + ih_1$  у точку  $\zeta_1 = 1/k_1$ ; точка  $z_1 = ih_1$  - у точку  $\zeta_1 = \infty$ . Оскільки  $sn(-z) = -sn(z)$ , то точка  $z_1 = -\gamma$  переходить у точку  $\zeta_1 = -1$ ; точка  $z_1 = -\gamma + ih_1$  у точку  $\zeta_1 = -1/k_1$ ; точка

$z_1 = \pm \lambda$  відображаються у точки  $\zeta_1 = sn(K(k_1)\chi/\gamma; k_1) = \pm l_1$  (рис. 2).

Нехай  $\phi^0 = u^{1,0} + iQ^{1,0}$  ( $Q^{1,0}$  – гармонічна функція, спряжена з  $u^{1,0}$ ). Тоді  $\phi_1^0 = \phi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + iQ_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}$ . Функцію  $\phi_1^0(x_1, y_1)$  можна визначити у півплощині  $\zeta_1$ . З умов (2.5) і співвідношення (2.12) випливає, що на дійсній осі півплощини у інтервалі  $|\eta_1| < l_1$  відома дійсна частина функції  $\phi_1^0$ , а на решті частини осі  $\eta_1$  відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у півплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на інших уявна частина шуканої функції, розв'язується за допомогою формули Келдиша-Седова [82]. Оскільки з умов (2.5) отримуємо, що на границі півплощини  $\zeta_1$  в інтервалі  $|\eta_1| < l_1$  дійсна частина функції  $\phi_1^0$  дорівнює нулю, а на решті частини уявна частина дорівнює нулю, то розв'язок для функції  $\phi_1^0$  в усій півплощині має вигляд [114]

$$\phi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}}, \quad (2.13)$$

де  $A$  – дійсна стала; обирається та гілка кореня, що є додатною при додатних значеннях аргументу.

Дійсна та уявна частини  $\phi_1^0(\zeta_1)$  визначають функції  $u_{x_1}^{1,0}, u_{y_1}^{1,0}$ . Зокрема, при  $\xi_1 = 0$  ( $x_1 = 0$ ; або  $y_1 = \pm \gamma$ ; чи  $x_1 = h_1, |y_1| < \gamma$ )

$$\phi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}, \quad (2.14)$$

тобто при  $\xi_1 = 0$

$$u_{y_1}^{1,0} = 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \eta_1^2}} \quad (|\eta_1| < l_1), \quad (2.15)$$

$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (|\eta_1| > l_1).$$

де  $\eta_1 = sn(K(k_1)y_1/\gamma; k_1)$ .

Нормальне напруження  $\sigma_1^0$  та складова дотичного напруження  $\tau^{1,0}$ , що відповідає функції  $u^{1,0}$ , знаходяться за формулами

$$\sigma_1^0 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} u_{\xi}^{1,0} = \sqrt{GB_1} (R_0 e^\xi)^{-1} u_{x_1}^{1,0},$$

$$\tau^{1,0} = G u_{\eta}^{1,0} (R_0 e^\xi)^{-1} u_{\xi}^{1,0} = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_{\eta}^{1,0}.$$

Стала  $A$  визначається з умови рівноваги штампа. Врахуємо формули

$$\sigma_1^0 = \sqrt{GB_1} (R_0 e^\xi)^{-1} u_{x_1}^{1,0},$$

$$z_1 = y_1 + ix_1, \quad \zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1,$$

$$x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi, \quad y_1 = \eta,$$

$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1/\gamma; k_1),$$

$$z_1 = C_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k_1^2\zeta_1^2)}}.$$

При  $x_1 = 0$  ( $\xi_1 = 0$ )

$$y_1 = C_1 \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)(1-k_1^2\eta_1^2)}}.$$



Тоді  $dy_1 = C_1 \frac{d\eta_1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)(1-k_1^2\eta_1^2)}}$ , де  $C_1 = \gamma/K(k_1)$ . При  $x_1 = 0$

$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1/\gamma; k_1).$$

Умови рівноваги штампя:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \Rightarrow \int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, y_1) dy_1 + P_0 = 0.$$

При  $y_1 = \pm\lambda$   $\eta_1 = \pm sn(\lambda/C_1; k_1) = \pm l_1$ .

$$\text{Тоді } \int_{-l_1}^{l_1} \sqrt{GB_1} \cdot R_0^{-1} A \frac{1}{\sqrt{(l_1^2 - \eta_1^2)}} C_1 \frac{d\eta_1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)(1-k_1^2\eta_1^2)}} + P_0 = 0$$

$$\text{або } 2\sqrt{GB_1} \cdot R_0^{-1} C_1 A \int_0^{l_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{(l_1^2 - \eta_1^2)(1-\eta_1^2)(1-k_1^2\eta_1^2)}} + P_0 = 0.$$

Нехай  $B = \int_0^{l_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{(l_1^2 - \eta_1^2)(1-\eta_1^2)(1-k_1^2\eta_1^2)}}$ , при цьому попередній вираз

буде виглядати наступним чином:  $2\sqrt{GB_1} \cdot R_0^{-1} C_1 AB + P_0 = 0$ .

Звідси

$$A = -\frac{P_0 R_0}{2\sqrt{GB_1} \cdot C_1 B}, \quad (2.16)$$

$$\text{де } C_1 = \gamma/K(k_1), \quad B = \int_0^{l_1} \frac{dt}{\sqrt{(l_1^2 - t_1^2)(1-t_1^2)(1-k_1^2 t_1^2)}}.$$

Напруження під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0\pi}{2C_1B} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \quad (2.17)$$

а функція  $u_{y_1}^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  знаходиться за формулою

$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}, \quad (2.18)$$

де  $A$  визначається рівністю (2.16).

Складова  $v^{1,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна даному напруженому стану, у цьому наближенні визначається з рівняння (2.3). Причому, функція  $u^{1,0}$  знаходиться із співвідношень для  $u_{x_1}^{1,0}, u_{y_1}^{1,0}$  відповідно при  $|\zeta_1| < l_1$  та  $|\zeta_1| > l_1$  з урахуванням того, що при  $y_1 = \eta = \pm\gamma$ ,  $u^{1,0} = 0$ . Зокрема, при  $x_1 = 0$  ( $\xi = 0$ ),  $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$ ,  $u^{1,0} = c_0 = (2\gamma / \pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$ . Ця величина визначає осідання штампа. При  $x_1 = 0$  та достатньо близьких  $y_1$  до кутової точки штампа на вільній границі, переміщення  $u^{1,0}$  знаходиться за формулою

$$u^{1,0} = \frac{2\gamma}{\pi} A \frac{\ln\left(\sin(\pi y_1 / 2\gamma) + \sqrt{\sin^2(\pi y_1 / 2\gamma) - l_1^2}\right)}{\cos(\pi y_1 / 2\gamma)}$$

Далі слід отримати розв'язок для **напруженого стану другого типу**.

Друга складова  $v^{2,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , що відповідає напруженому стану другого типу пограничного шару, знаходиться із рівняння [73,101]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0 \quad (2.19)$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \tau^0 &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \text{ і } \xi = h, |\eta| < \gamma), \\ \tau^0 &= \rho\sigma_1^0 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda) \\ v^0 &= 0 \quad (\eta = \pm\gamma). \end{aligned}$$

Відзначимо, що складові  $v^{1,0}$  і  $v^{2,0}$  мають той самий порядок за  $\varepsilon = G / B_1$ , але похідна  $v_{\xi}^{2,0}$  більша за похідну  $v_{\xi}^{1,0}$  на два порядки при  $q = B_2 / B_1 \approx 1$  [73,101]. Тому у даному наближенні граничні умови для визначення  $v^{2,0}$  з рівняння (2.19) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} v_{\xi}^{2,0} &= -u_{\eta}^{1,0} \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \text{ і } \xi = h, |\eta| < \gamma), \\ Gv_{\xi}^{2,0} &= \rho R_0 \sigma_1^0 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \\ v_{\xi}^{2,0} &= 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \end{aligned} \quad (2.20)$$

При цьому, як і передбачалось у постановці задачі,  $\rho < 1$  ( $\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}$ ,  $\rho_0 \approx 1$ ). Компонента  $u^{2,0}$ , відповідна даному напруженому стану, задовольняє умові [73,101]  $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$ .

Після введення нових незалежних змінних  $x_1 = (B_2 / G)^{1/2} \xi$ ,  $y_2 = \eta$  крайова задача (2.19), (2.20) приймає вигляд

$$\begin{aligned} v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} &= 0 \quad (2.21) \\ v_{x_2}^{2,0} &= -\left(G / B_2\right)^{1/2} u_{y_2}^{1,0} \quad \left( \begin{array}{l} x_2 = 0, \lambda < |y_2| < \gamma \\ x_2 = h_2, |y_2| < \gamma \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0 \quad (x_2 = 0, |y_2| < \lambda), \quad (2.22)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y_2 = \pm \gamma).$$

Задача (2.21), (2.22) є задачею Неймана для функції  $v^{2,0}(x_2, y_2)$ , що може бути розв'язана відображенням прямокутника  $0 \leq x_2 \leq h_2, -\gamma \leq y_2 \leq \gamma$  з площини  $z_2$  ( $z_2 = y_2 + ix_2$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_2$  ( $\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$ ). Функція відображення має вигляд (2.12) з заміною  $\zeta_1$  на  $\zeta_2$ ,  $z_1$  на  $z_2$ ,  $k_1$  на  $k_2$ , причому модуль  $k_2$  визначається з рівняння (2.8) також при заміні  $k_1$  на  $k_2$  та  $h_1$  на  $h_2$ .

Оскільки  $G < B_1$  ( $B_2 \approx B_1$ ,  $G/B_1 = \varepsilon$  є малим параметром [73,101]), то  $h_2 \gg h_1$  ( $\chi_2 \gg \chi_1$ ),  $q_2$ , що визначається за формулою (2.9), мало відрізняється від нуля і  $k_2$  виявляється близьким до нуля. Але при малих  $k_2$   $K(k_2) \approx \pi/2$  і функція відображення (2.12) переходить [67, 118] у функцію

$$\zeta_2 = C_2 \sin(\pi z_2 / 2\gamma), \quad (2.23)$$

дійсна та уявна частини якої записуються відповідно:

$$\eta_2 = C_2 \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma}, \quad \xi_2 = C_2 \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma}. \quad (2.24)$$

Стала  $C_2$  визначається з тієї умови, щоб точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm \lambda$  відображуються у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \sin(\pi \lambda / 2\gamma) = \pm l_1$ . У цьому випадку отримаємо  $C_2 = l_1 / \sin \frac{\pi \lambda}{2\gamma}$ , а точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm \gamma$  переходять в точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm C_2$ .

Таким чином, для напруженого стану другого типу (стану типу пограничного шару [72,73,101]) у першому наближенні замість прямокутника

фактично маємо півсмугу і задача у цьому випадку з урахуванням (2.22), (2.17), (2.18) зводиться до знаходження аналітичної у півплощині  $\zeta_2$  функцію  $v^{2,0}$  за умови, що на дійсній осі ( $\xi_2 = 0$ ) півплощини  $\zeta_2$  функція  $v_{x_2}^{2,0}$  приймає значення

$$\begin{aligned} v_{x_2}^{2,0} &= \rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{A}{\sqrt{l_1^2 - \eta_2^2}} & (|\eta_2| < l_1), \\ v_{x_2}^{2,0} &= -\sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{A}{\sqrt{\eta_2^2 - l_1^2}} & (l_1 < |\eta_2| < C_2), \\ v_{x_2}^{2,0} &= 0 & (|\eta_2| > C_2), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де  $A$  виражається співвідношенням (2.16).

Якщо  $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$  ( $Q^{2,0}$  – гармонічна функція, спряжена зі  $v^{2,0}$ ), то  $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$ . Функцію  $\psi_1^0$  у будь-якій точці верхньої півплощини  $\zeta_2$  можна визначити за допомогою інтеграла типу Коші [82]

$$\psi_1^0(\zeta_2) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{1 - \zeta_2} + ik, \quad (2.26)$$

де  $L$  – границя півплощини ( $\xi_2 = 0$ ),  $f(t) = v_{x_2}^{2,0}(\eta_2)$ ,  $k$  – довільна дійсна стала, яку у подальшому будемо вважати рівною нулю.

З формули (2.26) з урахуванням (2.25) отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\zeta_2) &= \rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{A}{\sqrt{l_1^2 - \zeta_2^2}} - \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{A}{\sqrt{\zeta_2^2 - l_1^2}} \times \\ &\times \left[ \ln \frac{\zeta_2 - C_2}{\zeta_2 + C_2} + \ln \frac{(C_2 \zeta_2 + l_1^2) + \sqrt{(\zeta_2^2 - l_1^2)(C_2^2 - l_1^2)}}{(C_2 \zeta_2 - l_1^2) + \sqrt{(\zeta_2^2 - l_1^2)(C_2^2 - l_1^2)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Похідні  $v_{x_2}^{2,0}, v_{y_2}^{2,0}$  через функцію  $\psi_1^0(\zeta_2)$  визначаються наступним чином:

$$v_{x_2}^{2,0} = \operatorname{Re}\psi_1^0(\zeta_2), \quad v_{y_2}^{2,0} = \operatorname{Im}\psi_1^0(\zeta_2).$$

### 2.3 Аналіз отриманих результатів.

На цьому етапі розв'язання задачі у першому наближенні завершується. Напруження під штампом визначається формулою (2.17), а дотичне напруження  $\tau$  під ним має вигляд  $\tau^0 = \rho\sigma_1^0$ . Оскільки  $u_{\xi}^{2,0} = 0$ , то граничні умови для визначення функцій  $u^{1,1}, v^{2,1}$  у другому наближенні виявляються нульовими [73]. Відповідно нульовими є функції  $u^{2,1}, v^{1,1}$ . Тому і розв'язки є нульовими, тобто друге наближення не вносить корективів до першого наближення (розкладання розв'язків ведеться за цілими степенями параметра  $\varepsilon$  [73]).

Вплив тертя на розподіл напружень під штампом враховується лише у третьому наближенні. У цьому випадку виникає похибка за напруженням  $\sigma_1$  при  $\xi = 0$ ,  $\lambda < |\eta| < \gamma$  (у вихідних змінних  $\xi, \eta$ ), яка знімається під час розв'язання рівняння (2.1) для функції  $u^{1,2}$ . Граничними умовами для визначення  $u^{1,2}$  при  $\xi = 0$  будуть:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{1,2} &= u_{\xi}^{1,0} - \mu v_{\eta}^{1,0} & (\lambda < |\eta| < \gamma), \\ u_{\eta}^{1,2} &= 0 & (|\eta| < \lambda). \end{aligned}$$

Границя  $\xi = h$ ,  $|\eta| < \gamma$  залишається вільною. Оскільки  $u_{\xi}^{1,0} = 0$  ( $|\eta| > \lambda$ ) (2.15), то  $u_{\xi}^{1,2} = -\mu v_{\eta}^{1,0} = \mu u^{1,0}(\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma)$ . Тут  $\mu = \mathcal{G}_1 B_2 / G = \mathcal{G}_2 B_1 / G$  і врахований зв'язок між  $v_{\eta}^{1,0}$  та  $u^{1,0}$ , обумовлена рівністю (2.3).

Таким чином, похибка за нормальними напруженнями  $\sigma_1$  при  $\xi = 0$ ,  $\lambda < |\eta| < \gamma$  викликана лише урахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язання сформульованої задачі повторює викладене раніше (п. 2.2

розв'язок для напруженого стану першого типу), але при вказаних вище граничних умовах.

Розв'язок задачі у околі особливих точок  $\eta_1 = l_1$  визначається формулою

$$\sigma = -B \left( 1 - \frac{\eta_1}{l_1} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{B_1}{A} \rho_0 l_1},$$

де  $A, B, B_1, \rho_0$  - деякі сталі. Отже, отримана особливість контактних напружень у кутових точках штампа у першому наближенні співпадає з першим членом розкладання точної особливості. Для гладкого ж штампа  $\rho = 0$  особливість співпадає з точною. Поблизу особливих точок отримані розв'язки можна скорегувати за допомогою зрощування з особливими розв'язками. При зменшенні кута  $\theta$  точка зрощування наближається до границі області контакту.

Проведемо дослідження впливу характеристик жорсткості матеріалу пластини на розподіл напружень під штампом при різних значеннях параметра  $\lambda / \gamma$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини).

Нехай  $\sigma^* = -\frac{2\gamma}{P_0} \sigma_1^0$ , тоді з урахуванням формул (3.37) та (3.36)

отримаємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{C_1 B} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} = \frac{K(k_1)}{B} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\eta_1}{l_1} \right)^2}}.$$

Якщо позначити  $t = \frac{\eta_1}{l_1}$  при  $x_1 = 0$ ,  $|y_1| < \lambda$  і враховуючи те, що

$\eta_1 = \operatorname{sn}(K(k_1)y_1 / \gamma; k)$  і  $l_1 = \operatorname{sn}(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$ , маємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)l_1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < l_1 < 1; \quad -1 < t < 1).$$

Вплив тертя на розподіл напружень під штампом позначається лише з третього наближення.

Величина  $\sigma^*$  залежить від  $l_1 = sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$ , що характеризує розмір ділянки під штампом. Встановимо залежність  $l_1 = sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$  від відношення  $\lambda / \gamma$  (таб.1).

Таблиця 1.

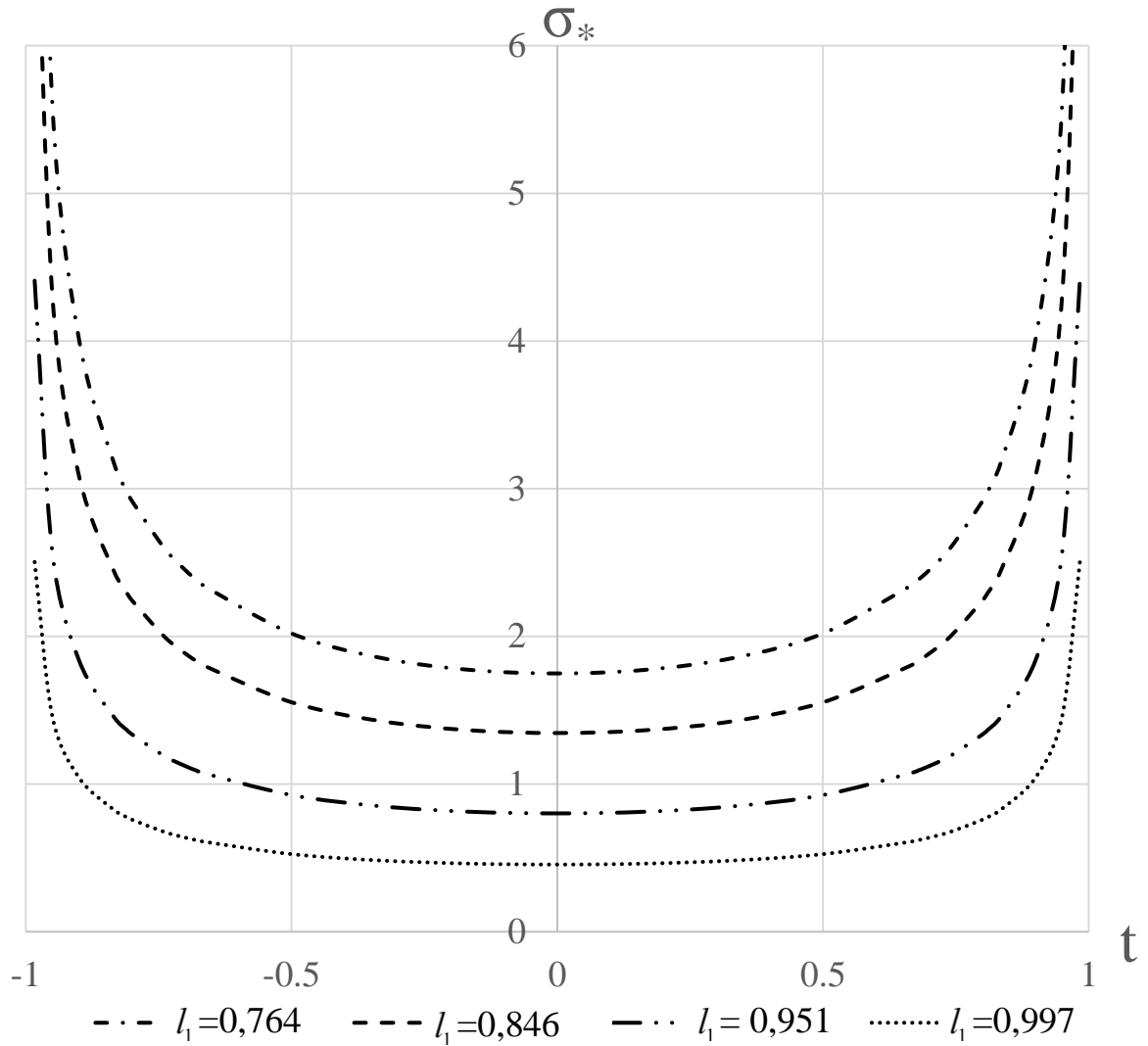
Залежність  $l_1 = sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$  від відношення  $\lambda / \gamma$ .

$\lambda / \gamma$	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
$l_1$	0,018	0,189	0,366	0,764	0,846	0,951	0,997	0,9998

У подальших розрахунках, використовуючи результати таб.1, встановимо розподіл нормального напруження під штампом в залежності від значення відношення розміру області контакту до розміру вільної грані пластини. Розглянемо при цьому випадки для різних значень  $(G / B_1)^{1/2}$  при однакових розмірах пластини.

Так, наприклад, для  $(G / B_1)^{1/2} = 0,59$  (сталь 20) і  $h_1 / \gamma = 0,5$  маємо таку картину розподілу нормальних напружень під штампом (Рис. 2). Не зважаючи на те, що метод збурень розроблений для анізотропних матеріалів, він дозволяє провести розрахунки і для ізотропних матеріалів  $(G / B_1)^{1/2} > 0,3$  (Рис.2).





*Рис. 2. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для  $(G / B_1)^{1/2} = 0,59$  (сталь 20) і  $h_1 / \gamma = 0,5$ .*

Для випадку  $(G / B_1)^{1/2} = 0,348107$  і при таких самих розмірах пластини маємо  $h_1 / \gamma = 0,29$  (Рис. 3). У розрахунках використовуємо результати таб.2, де встановлено залежність нормального напруження під штампом в залежності від значення відношення розміру області контакту до розміру вільної грані пластини для даного випадку.

Таблиця 2.

Залежність  $l_1 = \operatorname{sn}(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$  від відношення  $\lambda / \gamma$ .

$\lambda / \gamma$	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
$l_1$	0,035	0,353	0,628	0,958	0,982	0,998	0,99995	1

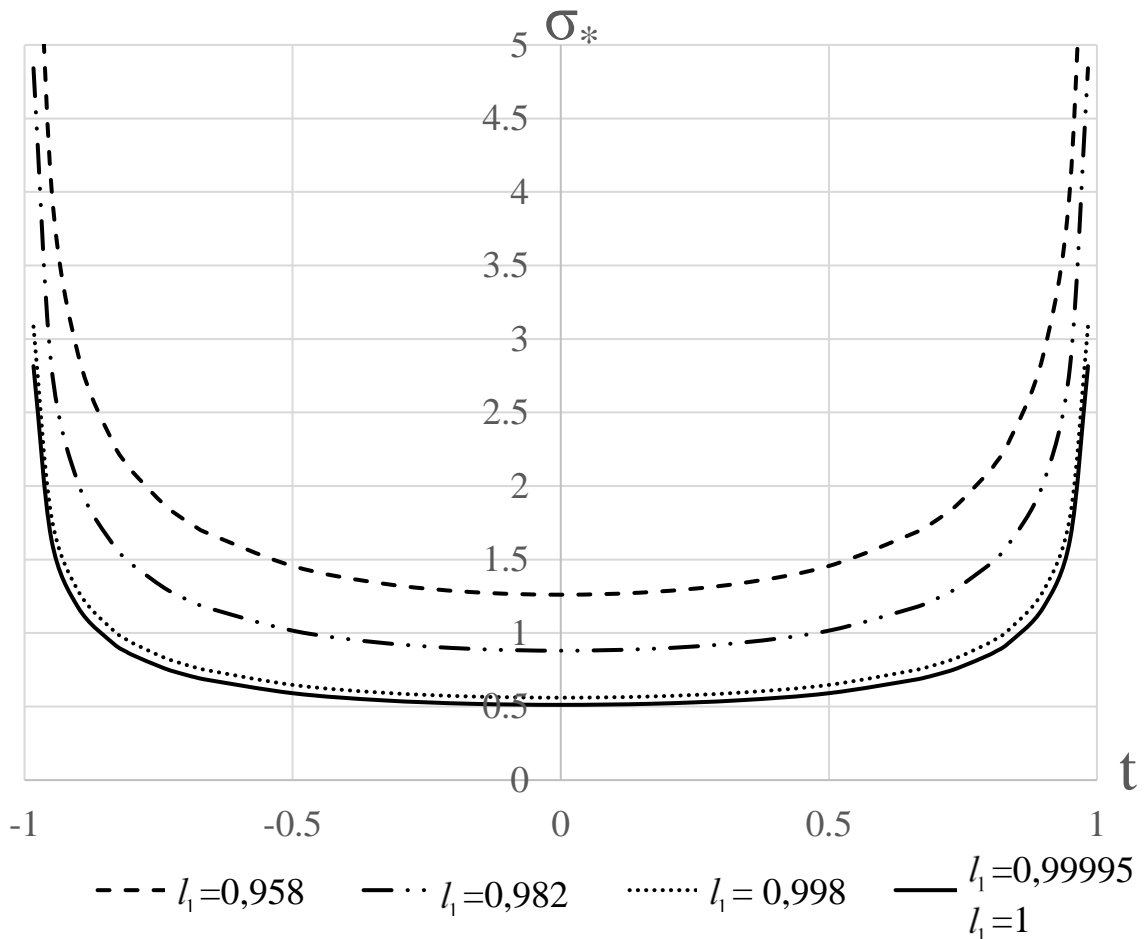


Рис. 3. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для  $(G / B_1)^{1/2} = 0,348107$  (склопластик) і  $h_1 / \gamma = 0,29$ .

Для випадку  $(G / B_1)^{1/2} = 0,134264$  і при таких самих розмірах пластини маємо  $h_1 / \gamma = 0,1$  (Рис. 4).

Таблиця 3.

Залежність  $l_1 = sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$  від відношення  $\lambda / \gamma$ .

$\lambda / \gamma$	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
$l_1$	0,09603	0,77292	0,967719	0,999955	0,999996	1	1	1

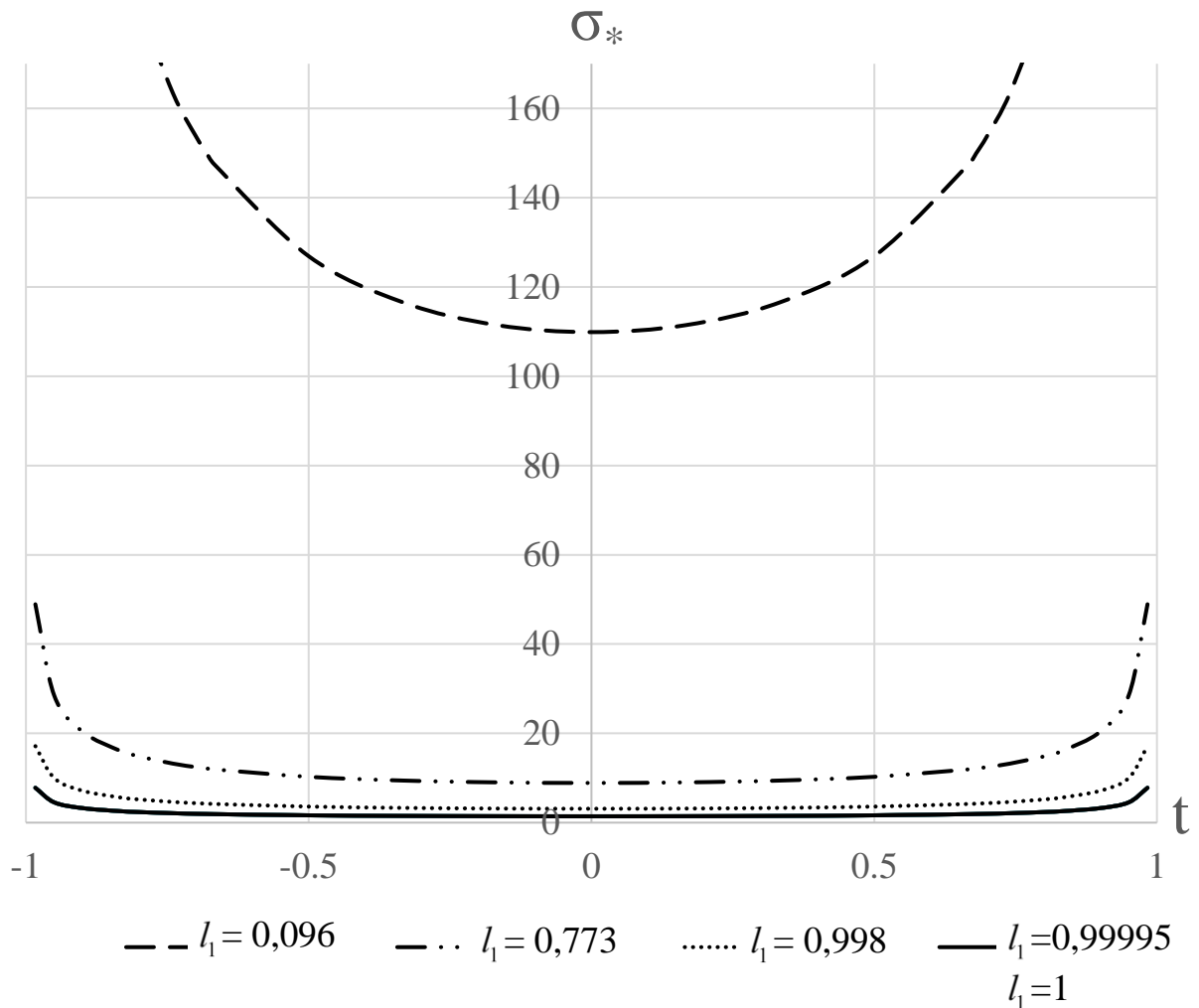


Рис. 4. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для  $(G / B_1)^{1/2} = 0,134264$  (вуглепластик КМУ-1) і  $h_1 / \gamma = 0,1$ .

Залежність розподілу напружень під штампом від параметра  $h_1 / \gamma$  (тобто мова йде про радіус пластини) для випадку  $(G / B_1)^{1/2} = 0,348107$  виглядає наступним чином (Рис.5). Тут розглядається фіксоване значення величини

$\lambda / \gamma = 0,409$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини).

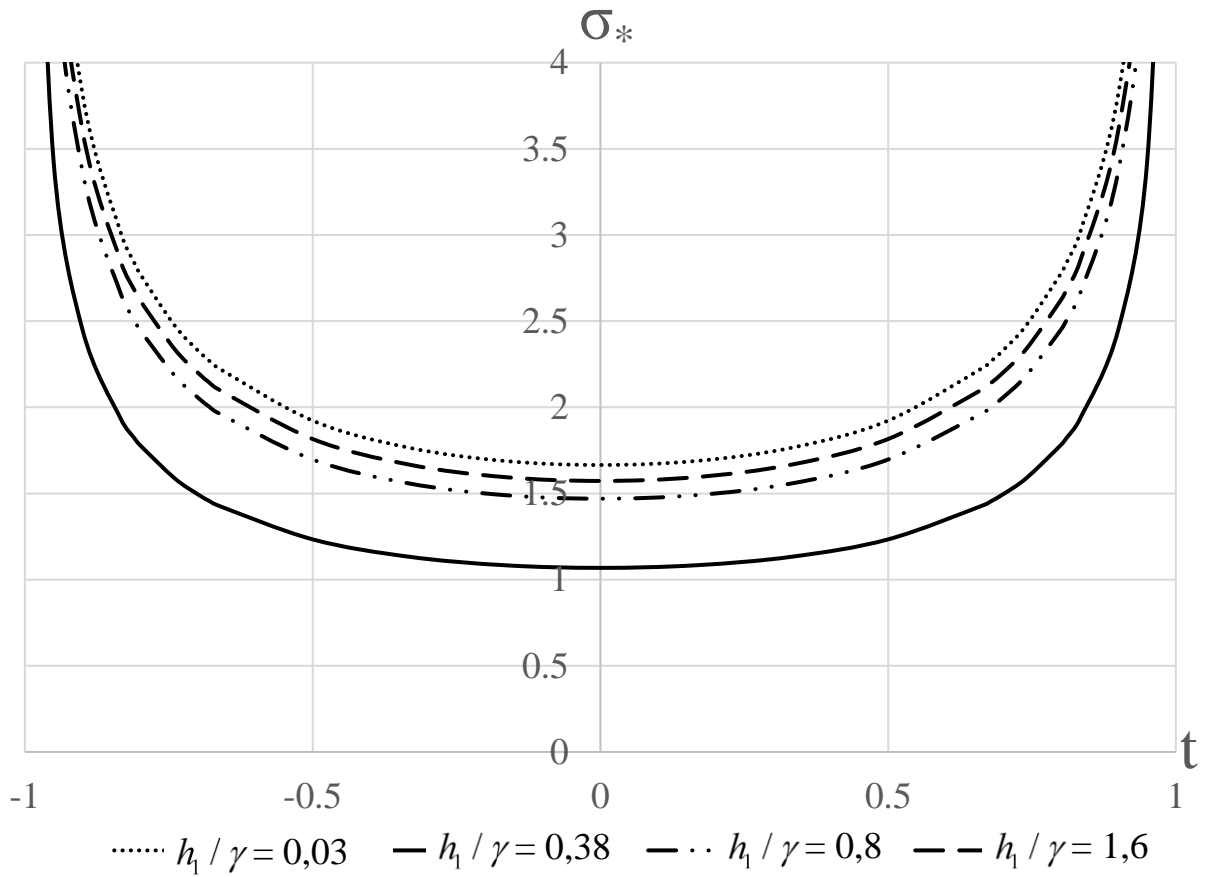


Рис. 5. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів пластини  $h_1 / \gamma$  для  $(G / B_1)^{1/2} = 0,348107$  (склопластик) і  $\lambda / \gamma = 0,409$ .

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. В другому розділі дисертаційної роботи розглянута задача про вдавлювання жорсткого штампа у вільну грань тонкої пружної анізотропної пластини у вигляді криволінійного сектора скінченних розмірів. При цьому враховується сила тертя, що виникає в зоні контакту під час взаємодії.

2. В процесі розв'язання поставленої задачі був встановлений зв'язок між розмірами області взаємодії, кута розкриття сектора та коефіцієнтом тертя.

3. Показано, що узагальнення розробленого раніше асимптотичного підходу може бути успішно застосовано для розв'язання контактної задачі теорії пружності. Описаний підхід можна застосувати у випадках, коли урахування реальних властивостей матеріалу призводить до значних складнощів у процесі розв'язання.

4. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для різних значень  $(G / B_1)^{1/2}$  і  $h_1 / \gamma$ .

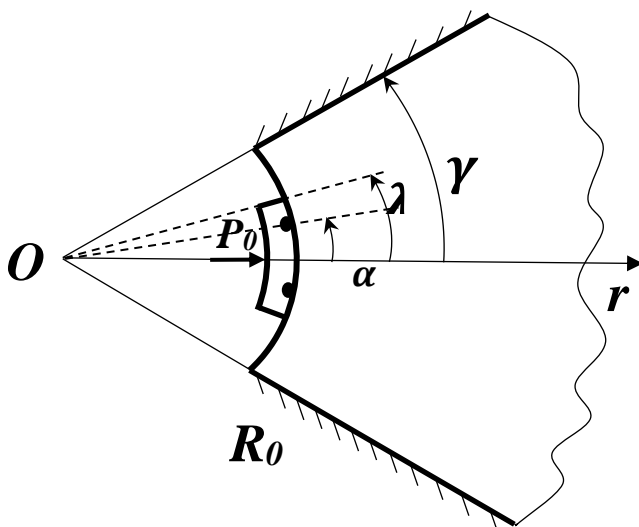
## РОЗДІЛ 3

### Задача про дію жорсткого штампу на пружну анізотропну пластину з урахуванням тертя та зчеплення

В даному розділі наводиться розв'язання контактної задачі для пластини з криволінійною анізотропією. Враховується, що під час взаємодії в області контакту виникають ділянка зчеплення та ділянки ковзання (аналог задачі Галіна для випадку з криволінійною анізотропією).

#### 3.1. Взаємодія жорсткого штампу та півнескінченної пружної анізотропної пластини.

##### 3.1.1. Постановка задачі.



Нехай пружна пластина

$$R_0 \leq r < \infty, \quad -\gamma \leq \theta \leq \gamma$$

закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ . На границю  $r = R_0$  на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ , навантаженою нормальним зусиллям  $P_0$  (штамп переміщується

поступально, паралельно осі  $r$ ). Припускається, що в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Граничні точки ділянки зчеплення ( $\theta = \pm\alpha$ ), які заздалегідь невідомі та повинні бути визначені у ході розв'язання задачі, розташовані симетрично відносно осі  $r$  (рис. 1).

Напруження в цих точках повинні бути обмежені та безперервні. Пластина товщиною  $\delta$  працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами  $r, \theta$ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

**3.1.2. Метод розв'язання.** Якщо замість полярних координат  $r, \theta$  ввести безрозмірні координати  $\xi, \eta$  співвідношеннями  $r = R_0 e^\xi$ ,  $\theta = \eta$ , то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

при наступних граничних умовах:

– зовні штампі

$$\sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0,$$

$$\tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma),$$

$$u = v = 0 \quad (\eta = \pm \gamma);$$

– під штампом

$$u = \text{const} = c_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda),$$

$$v = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha),$$

$$\tau = \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda),$$

– на нескінченності переміщення та напруження дорівнюють нулю.

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штампі. Тут  $u = u_r, v = u_\theta$  – компоненти вектора переміщень пластини;  $B_1 = E_1 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ,  $B_2 = E_2 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$ ,  $G = G_* \delta$ ;  $\sigma_1$  – нормальне в напрямку координати  $\xi$  напруження;  $\tau$  – дотичне напруження;  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж

головних напрямків;  $G_*$  – модуль зсуву;  $m = 1 + \mu$ ,  $\mu = \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G$ ;  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини;  $\rho$  – коефіцієнт тертя ( $\rho < 1$ ); індекси  $\xi, \eta$  позначають диференціювання за відповідними координатами.

Математичні труднощі не дозволяють отримати точний аналітичний розв'язок поставленої задачі. Для її дослідження застосуємо асимптотичний метод, розроблений у [72,73]. Цей метод дозволяє розглянути напружено-деформований стан пластини, виділивши дві складові, причому кожна з них знаходиться при послідовному розв'язанні крайових задач теорії потенціалу.

Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0 \quad (3.1)$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{1,0} = B_1 R_0^{-1} u_{\xi}^{1,0} &= 0 & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma); \\ u^{1,0} &= const & (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 & (\eta = \pm \gamma); \end{aligned} \quad (3.2)$$

на нескінченності виконуються нульові умови для шуканої функції та її похідних.

Оскільки при  $\eta = \pm \gamma$  компонента вектора переміщення  $u$  дорівнює нулю, то й  $u_{\xi}^{1,0}$  при  $\eta = \pm \gamma$  також буде дорівнювати нулю. Переміщення  $v^{1,0}$ , яке відповідає даному напружено-деформованому стану, знаходиться зі співвідношення [73]

$$v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3.3)$$

Введемо нові незалежні змінні  $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi$ ,  $y_1 = \eta$ , тоді крайова задача (3.1), (3.2) приймає вигляд



$$u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} u_{x_1}^{1,0} &= 0 & (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma); \\ u^{1,0} &= \text{const} & (x_1 = 0, |y_1| \leq \lambda), \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 & (y_1 = \pm \gamma); \end{aligned} \quad (3.5)$$

на нескінченності похідні дорівнюють нулю.

Таким чином, потрібно знайти аналітичну у прямокутнику  $0 \leq x_1 < \infty$ ,  $|y_1| \leq \gamma$  функцію  $u^{1,0}$  за заданими граничними умовами (3.5). Цю задачу будемо розв'язувати відображенням прямокутника з площини  $z_1$  ( $z_1 = y_1 + ix_1$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$ ). Вказане відображення можна виконати за допомогою функції відображення.

Якщо дотримуватись вимоги, щоб початок координат зберігав своє розташування, а точки  $z_1 = \pm \gamma$  переходили у точки  $\zeta_1 = \pm 1$ , то функція відображення буде мати вигляд

$$\zeta_1 = \sin \frac{\pi z_1}{2\gamma}. \quad (3.6)$$

Її дійсна та уявна частини записуються наступним чином:

$$\eta_1 = \sin \frac{\pi y_1}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{2\gamma}, \quad \xi_1 = \cos \frac{\pi y_1}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{\pi x_1}{2\gamma}, \quad (3.7)$$

причому точки  $z_1 = \pm \lambda$  відображуються у точки  $\zeta_1 = \pm l_1$ ,  $l_1 = \sin(\pi \lambda / 2\gamma)$ .

Нехай  $\varphi^0 = u^{1,0} + iQ^{1,0}$  ( $Q^{1,0}$  - гармонічна функція, спряжена з  $u^{1,0}$ ). Тоді  $\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + iQ_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} + iu_{x_1}^{1,0}$ . Функцію  $\varphi_1^0(x_1, y_1)$  можна визначити у півплощині  $\zeta_1$ . З умов (3.5) та співвідношень (3.7) випливає, що на дійсній осі

півплощини у інтервалі  $|\eta_1| < l_1$  відома дійсна частина функції  $\varphi_1^0(x_1, y_1)$ , а на іншій частині осі  $\eta_1$  відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у півплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на інших уявна частина шуканої функції розв'язується за допомогою формули Келдиша – Седова [43]. Оскільки з умов (3.5) випливає, що на границі півплощини  $\zeta_1$  у інтервалі  $|\eta_1| < l_1$  дійсна частина функції  $\varphi_1^0$  дорівнює нулю, а на іншій частині границі уявна її частина дорівнює нулю, то розв'язок для функції  $\varphi_1^0$  буде мати вигляд [43]

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (3.8)$$

де  $A$  - дійсна стала; обирається та гілка кореня, яка додатна при додатних значеннях аргументу.

Дійсна та уявна частини  $\varphi_1^0(\zeta_1)$  визначають функції  $u_{y_1}^{1,0}, u_{x_1}^{1,0}$ . Зокрема, при  $\xi_1 = 0$  ( $x_1 = 0$  або  $y_1 = \pm \gamma$ )

$$\varphi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (3.9)$$

тобто при  $\xi_1 = 0$

$$\begin{aligned} u_{y_1}^{1,0} &= 0, & u_{x_1}^{1,0} &= \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} & (|\eta_1| < \ell_1), \\ u_{y_1}^{1,0} &= \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, & u_{x_1}^{1,0} &= 0 & (|\eta_1| > \ell_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Нормальне напруження  $\sigma_1^0$  та складова дотичного напруження  $\tau^{1,0}$ , відповідна функції  $u^{1,0}$ , знаходяться за формулами

$$\sigma_1^0 = B_1(R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} = (R_0 e^\xi)^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0},$$

$$\tau^{1,0} = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_{y_1}^{1,0}.$$

Стала  $A$  визначається з умови рівноваги штампа та дорівнює

$$A = -P_0 \left[ (4\gamma / \pi) R_0^{-1} \sqrt{GB_1} K(l_1) \right]^{-1}, \quad (3.11)$$

де  $l_1 = \sin(\pi\lambda / 2\gamma)$ ,  $K(l_1)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Напруження під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (3.12)$$

а дотичне напруження  $\tau^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  знаходиться за формулою

$$\tau^{1,0}(\eta_1) = -\frac{P_0}{4\gamma K(l_1)} \sqrt{\frac{G}{B_1}} (\eta_1^2 - l_1^2)^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Складова  $v^{1,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна даному напруженому стану, визначається з рівняння (3.3). Функція  $u^{1,0}$  знаходиться зі співвідношень для  $u_{x_1}^{1,0}$ ,  $u_{y_1}^{1,0}$  відповідно при  $|\zeta_1| < l_1$  і  $|\zeta_1| > l_1$  з урахуванням того, що при  $y_1 = \eta = \pm\gamma$   $u^{1,0} = 0$ . Зокрема, при  $x_1 = 0$  ( $\xi = 0$ ),  $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$ ,  $u^{1,0} = c_0 = (2\gamma / \pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$ . Ця величина визначає осідання штампа.

Друга складова  $v^{2,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна напруженому стану типу пограничного шару, знаходиться з рівняння [73]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (3.14)$$

Оскільки  $v^{1,0}$  і  $v^{2,0}$  мають той самий порядок за  $\varepsilon = G/B_1$ , а похідна  $v_{\xi}^{2,0}$  більша за похідну  $v_{\xi}^{1,0}$  на два порядки при  $q = B_2/B_1 \approx 1$  [73], то у даному наближенні граничні умови для визначення  $v^{2,0}$  з рівняння (3.11) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \tau^0 &= 0 & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ v_{\xi}^{2,0} &= 0 & (\eta = \pm\gamma), \\ \tau^0 &= \text{sign}(\eta)\rho\sigma_1^0 & (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda), \\ v^0 &= v^{1,0} + v^{2,0} = 0 & (\xi = 0, |\eta| < \alpha), \end{aligned}$$

на нескінченності усі функції обертаються на нуль.

Оскільки  $\tau^0 = G(R_0e^{\xi})^{-1}(u_{\eta}^{1,0} + v_{\xi}^0)$ , а складова  $u_{\eta}^{1,0}$  та напруження  $\sigma_1^0$  відомі з напруженого стану першого типу, то вказані граничні умови з урахуванням того, що  $u_{\eta}^{1,0}$  та  $v_{\xi}^0$  у цьому наближенні дорівнюють нулю, приймають вигляд:

$$\begin{aligned} v_{\xi}^{2,0} &= -u_{\eta}^{1,0} & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ v_{\xi}^{2,0} &= 0 & (\eta = \pm\gamma), \\ v_{\xi}^{2,0} &= \text{sign}(\eta)(\rho R_0/G)\sigma_1^0 & (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda), \\ v^{1,0} + v^{2,0} &= 0 & (\xi = 0, |\eta| < \alpha), \end{aligned} \quad (3.15)$$

При цьому, як припускалося в постановці задачі,  $\rho < 1$  ( $\rho = \rho_0\varepsilon^{1/2}$ ,  $\rho_0 \approx 1$ ,  $\varepsilon = G/B_1$ ), а  $\sigma_1^0$  під штампом знаходиться за формулою (3.12).

Компонента  $u^{2,0}$ , відповідна даному напруженому стану, задовольняє умові [73]  $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$ .

Після введення нових незалежних змінних  $x_2 = (B_2 / G)^{1/2} \xi$ ,  $y_2 = \eta$  крайова задача (3.14), (3.15) приймає вигляд

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0, \quad (3.16)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -(G / B_2)^{1/2} u_{y_2}^{1,0} \quad (x_2 = 0, \quad \lambda < |y_2| < \gamma),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y_2 = \pm \gamma),$$

$$v^{2,0} = -v^{1,0} \quad (x_2 = 0, \quad |y_2| < \alpha), \quad (3.17)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \text{sign}(y_2) \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0 \quad (x_2 = 0, \quad \alpha < |y_2| < \lambda).$$

Задачу (3.16), (3.17) будемо розв'язувати шляхом відображення півсмуги  $(0 \leq x_2 < \infty, |y_2| < \gamma)$  з площини  $z_2$  ( $z_2 = y_2 + ix_2$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_2$  ( $\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$ ). Функція відображення має вигляд (3.6) із заміною  $\zeta_1$  на  $\zeta_2$ ,  $z_1$  на  $z_2$ .

$$\zeta_2 = \sin \frac{\pi z_2}{2\gamma}.$$

Її дійсна та уявна частини записуються наступним чином:

$$\eta_2 = \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma}, \quad \xi_2 = \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma},$$

При цьому точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm \lambda$  відображуються у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm \sin(\pi \lambda / 2\gamma) = \pm l_1$ , точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm \gamma$  - в точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm 1$ . Точки ж  $x_2 = 0, y_2 = \pm \alpha$  переходять у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm \alpha_1$ , де

$\alpha_1 = \sin(\pi\alpha / 2\gamma)$ . Оскільки  $\alpha < \lambda$ , то  $\alpha_1 < \lambda_1$ . Крім того, при  $\eta = \pm\gamma$  ( $y_1 = y_2 = \pm\gamma$ )  $\xi_2 = \xi_1 = 0$ , а  $\eta_1, \eta_2$  змінюється від  $\pm 1$  до  $\pm\infty$ . Тому із співвідношень (3.17) з урахуванням (3.12), (3.13) випливає, що на дійсній осі ( $\xi_2 = 0$ ) півплощини  $\zeta_2$  похідні функції  $v^{2,0}$  приймають значення

$$\begin{aligned} v_{x_2}^{2,0} &= -A \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - l_1^2}} \quad (l_1 < |\eta_2| < 1), \\ v_{x_2}^{2,0} &= 0 \quad (|\eta_2| \geq 1) \\ v_{y_2}^{2,0} &= -v_{\eta}^{1,0} = C_0 \quad (|\eta_2| < \alpha_1), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \text{sign}(\eta_2) \rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_2^2}} \quad (\alpha_1 < |\eta_2| < l_1).$$

Тут стала  $A$  виражається формулою (3.11), враховане співвідношення (3.3),  $C_0$  - осідання штампа.

Якщо  $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$  ( $Q^{2,0}$  – гармонійна функція, спряжена з  $v^{2,0}$ ), то  $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$ . Функцію  $\psi_1^0$  у будь-якій точці верхньої півплощини можна визначити за допомогою формули Келдиша – Седова [43], яка при вказаних умовах (3.18) і обмеженості у точках  $\zeta_2 = \pm\alpha_1$  дає

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\zeta_2) &= -\frac{A}{\pi i} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left( \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ \int_{-1}^{-l_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{l_1}^1 \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left[ \int_{-l_1}^{-\alpha_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_1}^{l_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] \right) + \frac{C_0}{\pi i} i \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha_1^2}} \frac{dt}{t - \zeta_2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де  $f(t) = \left[ (t^2 - \alpha_1^2)(|t^2 - l_1^2|) \right]^{-1/2}$ .

Для спадання напружень на нескінченності необхідно, щоб  $\psi_1^0(\zeta_2) \rightarrow 0$  при  $|\operatorname{Re} \zeta_2| \rightarrow \infty$ . Оскільки останній доданок у (3.19) прямує до нуля при  $|\operatorname{Re} \zeta_2| \rightarrow \infty$ , то зі вказаної умови отримаємо співвідношення

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \left( \int_{-1}^{-l_1} f(t) dt + \int_{l_1}^1 f(t) dt \right) = \rho \left( \int_{-l_1}^{-\alpha_1} f(t) dt + \int_{\alpha_1}^{l_1} f(t) dt \right).$$

Оскільки функція  $f(t)$  є парною, то останнє співвідношення може бути записане у вигляді

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{l_1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - l_1^2)(t^2 - \alpha_1^2)}} = \rho \int_{\alpha_1}^{l_1} \frac{dt}{\sqrt{(l_1^2 - t^2)(t^2 - \alpha_1^2)}}, \quad (3.20)$$

$$(1 > l_1 > \alpha_1 > 0).$$

Інтеграл, який стоїть у лівій частині співвідношення (3.20) є неповним еліптичним інтегралом першого роду  $F(\varphi, \alpha_1/l_1)$ , причому  $\varphi$  визначається рівністю

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{1 - l_1^2}{1 - \alpha_1^2}}. \quad (3.21)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині рівності (3.20) є повним еліптичним інтегралом першого роду  $(1/l_1)K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = (1/l_1)K(\alpha'_*)$ ,  $\alpha_* = \alpha_1/l_1$  де  $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ .

Тому рівність (3.20) може бути записана наступним чином:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1 / G)^{1/2} K'(\alpha_*). \quad (3.22)$$

Співвідношення (3.22) установлює зв'язок між розмірами ділянки зчеплення, області контакту, кута відкриття сектора, а також коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини.

З рівності (3.19) при  $\xi_2 = 0$ ,  $|\eta_2| < \alpha_1$  (на ділянці зчеплення) отримуємо

$$\psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2A}{\pi} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_1^2 - \eta_2^2} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{\ell_1}^1 \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_1^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} - \right. \\ \left. - \rho \int_{\alpha_1}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_1^2)(\ell_1^2 - t^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} \right) \quad (3.23)$$

Останній доданок у виразі (3.19) при  $\xi_2 = 0$ ,  $|\eta_2| < \alpha_1$  дає чисто уявну величину  $iC_0$ .

У записаному раніше виразі (3.23) останній доданок у дужках можна записати  $\int_{\alpha_1}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_1^2)(\ell_1^2 - t^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} = \frac{1}{\ell_1(t^2 - \eta_2^2)} \Pi_1 \left( \frac{l_1^2 - \alpha_1^2}{l_1^2 - \eta_2^2}, \alpha'_* \right)$ , де

$\Pi_1 \left( \frac{l_1^2 - \alpha_1^2}{l_1^2 - \eta_2^2}, \alpha'_* \right)$  - повний еліптичний інтеграл третього роду,  $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ .

Перший доданок в дужках виразу (3.23)

$$\int_{\ell_1}^1 \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_1^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} = -\frac{1}{\ell_1(\eta_2^2 - \ell_1^2)(\eta_2^2 - \alpha_1^2)} \times \\ \times \left[ (l_1^2 - \alpha_1^2) \Pi \left( \varphi, \frac{\eta_2^2 - \alpha_1^2}{\eta_2^2 - l_1^2}, \alpha'_* \right) + (\eta_2^2 - l_1^2) F(\varphi, \alpha_*) \right],$$

$\Pi \left( \varphi, \frac{\eta_2^2 - \alpha_1^2}{\eta_2^2 - l_1^2}, \alpha'_* \right)$  - повний еліптичний інтеграл третього роду,  $\varphi$  визначається рівністю (3.21).



Враховуючи вигляд інтегралів зазначений вище, вираз (3.23) можна записати так

$$\begin{aligned}
 v_{x_2}^{2,0} = & \frac{2A}{\pi \ell_1} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_1^2 - \eta_2^2} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(\alpha_1^2 - \eta_2^2)} \times \right. \\
 & \times \left[ (\ell_1^2 - \alpha_1^2) \Pi \left( \varphi, \frac{\alpha_1^2 - \eta_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) - \right. \\
 & \left. \left. - (\ell_1^2 - \eta_2^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \frac{\rho}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)} \Pi_1 \left( \frac{\ell_1^2 - \alpha_1^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_*' \right) \right), \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

де  $\alpha_* = \alpha_1 / \ell_1$  знаходиться з (3.22).

Дотичне напруження під штампом ( $\xi = 0$ ,  $|\eta| < \lambda$ ) у першому наближенні визначається за формулами

$$\begin{aligned}
 \tau &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 & (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\
 \tau &= GR_0^{-1} v_{\xi}^{2,0} = R_0^{-1} \sqrt{GB_2} v_{x_2}^{2,0} & (|\eta| \leq \alpha),
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $\sigma_1^0$ ,  $v_{x_2}^{2,0}$  виражаються співвідношеннями (3.12) та (3.24).

Оскільки  $\alpha_1 < \ell_1 < 1$ , то  $\frac{l_1^2 - \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} \ll 1$ . Тоді можна записати

$$\sqrt{\frac{1 - l_1^2}{1 - \alpha_1^2}} = 1 - \varepsilon_1, \text{ де}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{l_1^2 - \alpha_1^2}{\sqrt{1 - \alpha_1^2} (\sqrt{1 - \alpha_1^2} + \sqrt{1 - l_1^2})} \ll 1.$$

Тому рівність (3.21) може мати вигляд

$$\varphi = \arcsin(1 - \varepsilon_1).$$

Але відомо, що

$$\arcsin(1 - \varepsilon_1) = \frac{\pi}{2} - (2\varepsilon_1)^{1/2} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^{2k} (2k+1)k!} \varepsilon_1^k \right],$$

звідси випливає, що

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (2\varepsilon_1)^{1/2} - O\left((2\varepsilon_1)^{1/2}\right).$$

У першому наближенні по  $\varepsilon_1$   $\varphi^0 = \pi/2$ , інтеграл  $F(\varphi^0, \alpha_*^0)$  стає повним еліптичним інтегралом першого роду  $F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_*^0\right) = K(\alpha_*^0)$ , а рівність (3.22) приймає вигляд

$$K(\alpha_*^0) = \rho(G/B_1)^{-1/2} K'(\alpha_*^0),$$

яке можна переписати наступним чином:

$$K'(\alpha_*^0) / K(\alpha_*^0) = (G/B_1)^{1/2} / \rho. \quad (3.26)$$

У цьому випадку визначається величина  $q$

$$q = \exp\left(-\frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{G}{B_1}}\right), \quad \alpha_*^0 = 4 \left( \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(\nu+1/2)^2} \right] \left[ 1 + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} \right]^{-1} \right)^2,$$

та інтеграл

$$K(\alpha_*) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \right).$$

Крім того, для визначення  $\alpha_*^0$  при заданому відношенні (3.26) можна використовувати таблиці [118, таб.17.3] з урахуванням того, що в зазначеній таблиці використовується позначення  $m = (\alpha_*^0)^2$ .

**3.1.3. Аналіз результатів і висновки.** На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Оскільки  $u_\xi^{2,0} = 0$ , то граничні умови для визначення функцій  $u^{1,1}, v^{2,1}$  у другому наближенні виявляються нульовими [72,103]. Відповідно нульовими є і розв'язки, тобто друге наближення не вносить корективів до першого.

Вплив тертя на розподіл напружень під штапом позначається лише з третього наближення. У цьому випадку виникає відхил за деформацією  $u_\xi$  ( $\xi = 0$ ,  $\ell_1 < |\eta_1| < 1$ ), яка знімається при розв'язанні рівняння (3.1) для функції  $u^{1,2}$  з граничними умовами

$$\begin{aligned} u_\xi^{1,2} &= u_\xi^{1,0} - \mu v_\eta^{1,0} & (\ell_1 < |\eta_1| < 1), \\ u_\eta^{1,2} &= 0 & (|\eta_1| < \ell_1). \end{aligned}$$

На нескінченності усі функції обертаються на нуль. Оскільки  $u_\xi^{1,0} = 0$  ( $|\eta_1| > \ell_1$ ) то  $u_\xi^{1,2} = -\mu v_\eta^{1,0} = \mu u^{1,0}$  ( $\xi = 0$ ,  $\ell_1 < |\eta_1| < 1$ ). Тут  $\mu = \mathcal{G}_1 B_2 / G = \mathcal{G}_2 B_1 / G$  і врахований зв'язок між  $v_\eta^{1,0}, u^{1,0}$ , обумовлений рівністю (3.3).

Таким чином, відхил за нормальними напруженнями  $\sigma_1$  при  $\xi = 0$ ,  $\ell_1 < |\eta_1| < 1$  викликаний лише врахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язок останньої задачі повторює викладене вище, але при вказаних вище умовах.

Далі наведені значення параметра  $\alpha_*$  у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G / B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1),

0.348 (склопластик), 0.524 (свинець) (таб.4). У таб.4 записані значення  $\alpha_*$  при  $\rho = 0.5$  для декількох значень  $(G / B_1)^{1/2}$ .

Таблиця 4.

Значення параметра  $\alpha_*$  у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G / B_1)^{1/2}$ .

$\rho$ $\sqrt{\frac{G}{B_1}}$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.134	0	0.458248	0.992872	0.999934	0.99997	0.99999
0.348	0	0.0168766	0.584593	0.915952	0.985666	0.997628
0.524	0	0.0010584	0.253	0.669	0.886234	0.964

Таблиця 5.

Значення  $\alpha_*$  при  $\rho = 0.5$  для декількох значень  $(G / B_1)^{1/2}$ .

$\sqrt{\frac{G}{B_1}}, \rho = 0.5$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\alpha_*$	0.9999	0.9576	0.7068	0.4228	0.2332

На основі отриманих результатів можна відмітити, якщо коефіцієнт тертя  $\rho$  дорівнює нулю, то  $q = 0$ ,  $\alpha_*^0 = 0$ , тобто ділянка зчеплення зникає. Зі зростанням  $\rho$  вона зростає, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини (величина  $(G / B_1)^{1/2}$ ). Так, при зменшенні  $(G / B_1)^{1/2}$  та постійному  $\rho \neq 0$  розмір ділянки зчеплення збільшується [150].

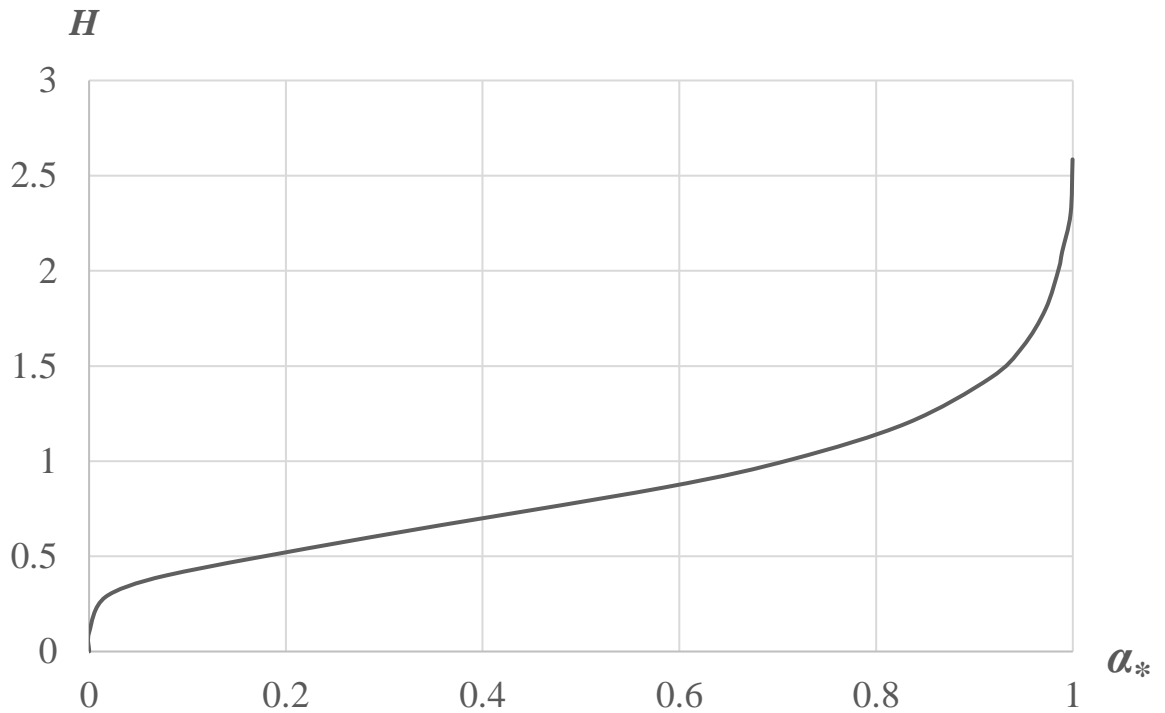


Рис. 3. Залежність розміру ділянки зчеплення  $\alpha_*$  від параметру  $H = \rho(G/B_1)^{-1/2}$  для  $(G/B_1)^{1/2} = 0.348$  та наступних значень коефіцієнта тертя  $\rho$ : 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9.

Проведемо дослідження впливу параметра  $\lambda/\gamma$  (відношення розміру області контакту до розміру вільної границі пластини) на розподіл напружень під штампом.

Нехай  $\sigma^* = -\frac{4\gamma}{P_0\pi}\sigma_1^0$ , тоді з урахуванням формули (3.12) отримаємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} = \frac{1}{K(l_1)l_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{l_1}\right)^2}}.$$

Якщо позначити  $t = \frac{\eta_1}{l_1} = \frac{\sin(\pi y_1/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$  при  $x_1 = 0$ ,  $|y_1| < \lambda$  і враховуючи

те, що вплив тертя на розподіл напружень під штампом позначається лише з третього наближення, маємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)l_1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < l_1 < 1; \quad -1 < t < 1).$$

Величина  $\sigma^*$  залежить від  $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ , що характеризує розмір ділянки під штампом. Встановимо залежність  $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$  від відношення  $\lambda/\gamma$  (таб.6).

Таблиця 6.

*Залежність  $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$  від відношення  $\lambda/\gamma$ .*

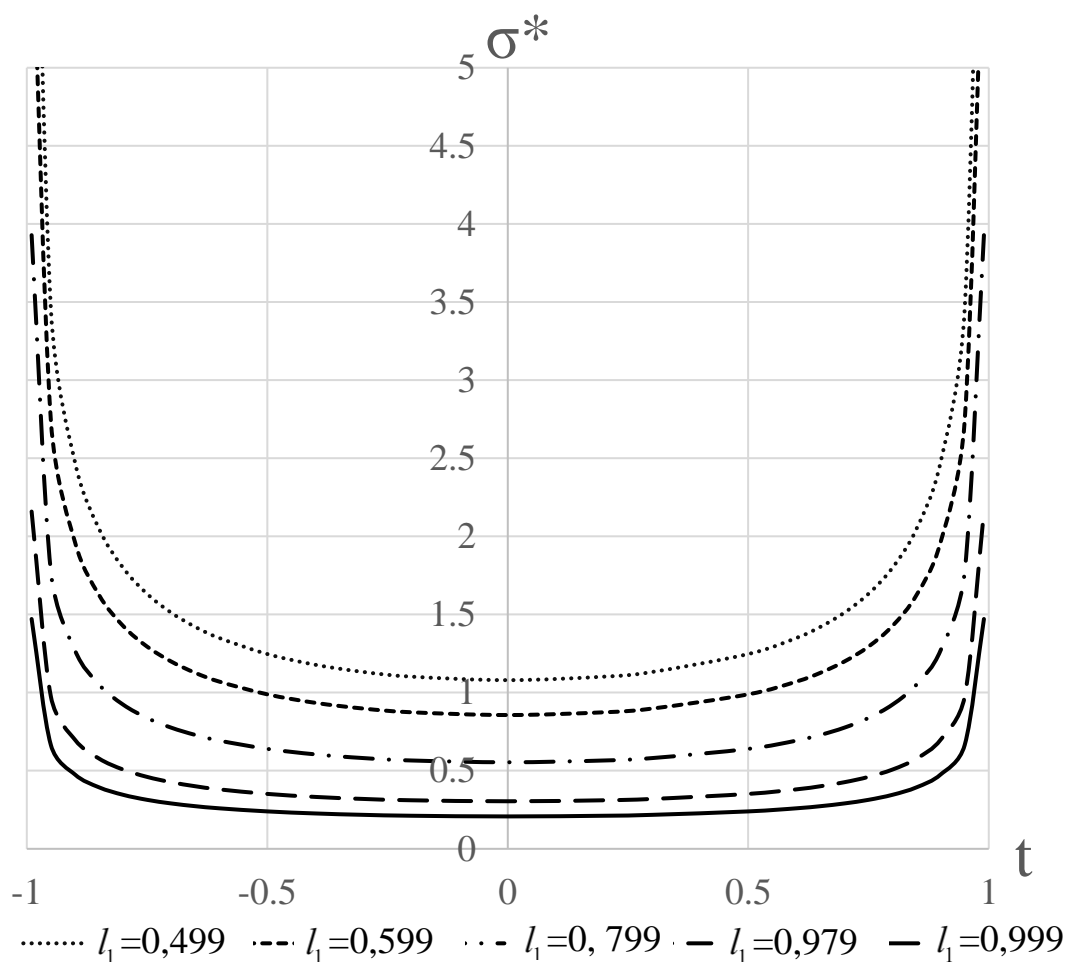
$\lambda/\gamma$	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
$l_1$	0,0094	0,1004	0,1997	0,4995	0,5992	0,7997	0,9799	0,9991

У подальших розрахунках, використовуючи результати таб.6, встановимо залежність нормального напруження під штампом в залежності від значення відношення розміру області контакту до розміру вільної грані пластини (таб.7).

Таблиця 7.

*Розподіл нормальних напружень рід штампом з урахуванням впливу розмірів вільної грані пластини та штампку.*

$t$		0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9
$\sigma^*$	$l_1=0,0094$	67,39	68,78	70,64	77,81	84,24	88,68	154,6
	$l_1=0,1004$	6,179	6,306	6,477	7,135	7,724	8,131	14,18
	$l_1=0,1997$	3,017	3,081	3,163	3,484	3,772	3,971	6,922
	$l_1=0,4995$	1,081	1,102	1,132	1,247	1,351	1,421	2,477
	$l_1=0,5992$	0,856	0,874	0,898	0,989	1,071	1,127	1,965
	$l_1=0,7997$	0,554	0,566	0,581	0,631	0,693	0,729	1,271
	$l_1=0,9799$	0,305	0,311	0,319	0,352	0,381	0,401	0,699
	$l_1=0,9991$	0,208	0,212	0,218	0,241	0,259	0,273	0,476

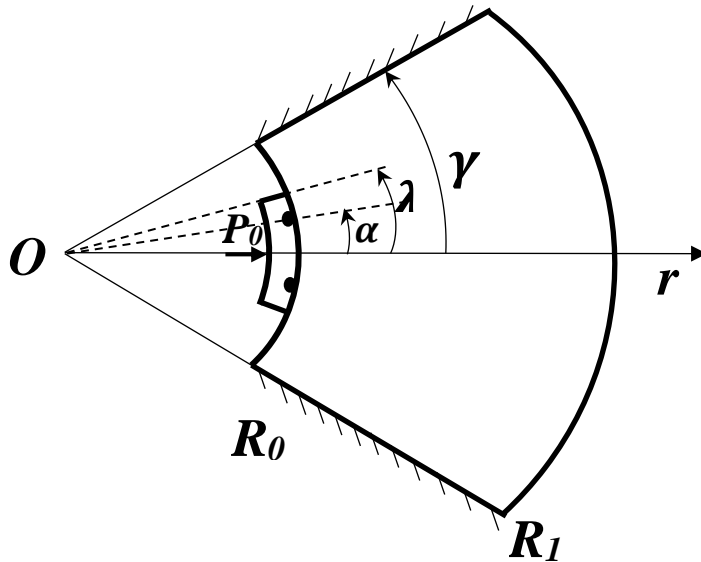


*Рис. 1. Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту.*

Як видно з рис.1, розмір штампа також впливає на значення нормальних напружень, які виникають у області контакту.

## 3.2. Взаємодія жорсткого штампу та пружної анізотропної пластини скінченних розмірів.

### 3.2.1. Постановка задачі.



Нехай пружна пластинка  $R_0 \leq r \leq R_1$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$  закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ . На границю  $r = R_0$  на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ , навантаженою нормальним зусиллям  $P_0$  (штамп

переміщується поступально, паралельно осі  $Ox$ ). Інша границя,  $r = R_1$ , залишається вільною.

Припускається, що в області контакту штампа з пластинкою існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Граничні точки ділянки зчеплення ( $\theta = \pm\alpha$ ), які заздалегідь не відомі та повинні бути визначені у ході розв'язання задачі, розташовані симетрично відносно осі  $Ox$ . Напруження в цих точках повинні бути обмежені та безперевні. Пластина, товщиною  $\delta$ , працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами  $r, \theta$ .

Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.



Якщо замість полярних координат  $r, \theta$  ввести безрозмірні координати  $\xi, \eta$  співвідношеннями  $r = R_0 e^\xi, \theta = \eta$ , то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta &= 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) &= 0 \end{aligned}$$

при наступних граничних умовах:

зовні штампі

$$\begin{aligned} \sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ \tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u = v = 0 & \quad (\eta = \pm \gamma); \end{aligned}$$

під штампом

$$\begin{aligned} u = const = C_0 & \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ v = 0 & \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha), \\ \tau = sign(\eta) \rho \sigma_1 & \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda) \end{aligned}$$

на границі  $\xi = h, \quad |\eta| < \gamma \quad (r = R_1, \quad |\theta| < \gamma), \quad \sigma_1 = \tau = 0.$

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штампі. Тут  $u = u_r, \quad v = u_\theta$  – компоненти вектора переміщень пластини;  $B_1 = E_1 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2),$   
 $B_2 = E_2 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2), \quad G = G_* \delta;$   $\sigma_1$  – нормальне в напрямку координати  $\xi$  напруження;  $\tau$  – дотичне напруження;  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж головних напрямків;  $G_*$  – модуль зсуву;  $m = 1 + \mu, \quad \mu = \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G;$   
 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини;  $\rho$  – коефіцієнт тертя ( $\rho < 1$ ); індекси  $\xi, \eta$  позначають диференціювання за відповідними координатами.

### 3.2.2. Метод розв'язання та отримані результати.

Для дослідження сформульованої задачі застосуємо асимптотичний метод, розроблений у [72,103]. Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (3.27)$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1 R_0^{-1} u_{\xi}^{1,0} = 0 & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \text{ і } \xi = h, |\eta| < \gamma) \\ u^{1,0} &= C_0 & (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 & (\eta = \pm\gamma). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оскільки при  $\eta = \pm\gamma$  компонента вектора переміщення  $u^{1,0}$  дорівнює нулю, то й  $u_{\xi}^{1,0}$  при  $\eta = \pm\gamma$  також буде дорівнювати нулю. Переміщення  $v^{1,0}$ , яке відповідає даному напружено-деформованому стану знаходиться зі співвідношення [72,103]

$$v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3.29)$$

Введемо нові незалежні змінні  $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi$ ,  $y_1 = \eta$ , тоді крайова задача (3.27), (3.28) приймає вигляд

$$\begin{aligned} u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} &= 0, & (3.30) \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 & (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma; \text{ і } x_1 = h_1, |y_1| < \gamma); \\ u^{1,0} &= C_0 & (x_1 = 0, |y_1| \leq \lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{x_1}^{1,0} &= 0 \quad (y_1 = \pm\gamma); \\ h_1 &= (G / B_1)^{1/2} h. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Таким чином, потрібно знайти аналітичну у прямокутнику  $0 \leq x_1 \leq h_1$ ,  $|y_1| \leq \gamma$  функцію  $u^{1,0}$  за заданими граничними умовами (3.31). Цю задачу будемо розв'язувати відображенням прямокутника з площини  $z_1$  ( $z_1 = y_1 + ix_1$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$ ). Функція відображення має вигляд [67]

$$\zeta_1 = sn(K(k_1)z_1 / \gamma; k_1) \quad (3.32)$$

При цьому початок координат зберігає своє розташування, а точка  $z_1 = \gamma$  переходить у точку  $\zeta_1 = 1$ ;  $z_1 = \gamma + ih_1$  переходить у  $\zeta_1 = 1/k_1$ ;  $z_1 = ih_1$  – у  $\zeta_1 = \infty$ . Оскільки  $sn(-z) = -sn(z)$ , то точка  $z_1 = -\gamma$  переходить у точку  $\zeta_1 = -1$ ;  $z_1 = -\gamma + ih_1$  – у точку  $\zeta_1 = -1/k_1$ , а точки  $z_1 = \pm\lambda$  у точки  $\zeta_1 = \pm sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k) = \pm\ell_1$ . Тут  $sn(z)$  – еліптичний синус,  $K(k_1)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду, причому модуль  $k_1$  знаходиться з рівняння [67]

$$K(k'_1) / K(k_1) = h_1 / \gamma \quad (k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2}) \quad (3.33)$$

Нехай  $\varphi^0 = u^{1,0} + i\theta^{1,0}$  ( $\theta^{1,0}$  – гармонічна функція, сполучена з  $u^{1,0}$ ). Тоді  $\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\theta_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}$ .

Функцію  $\varphi_1^0(x_1, y_1)$  можна визначити у півплощині  $\zeta_1$ . Із умов (3.31) і співвідношення (3.32) випливає, що на дійсній осі півплощини в інтервалі  $|\eta_1| < \ell_1$  відома дійсна частина функції  $\varphi_1^0$ , а на інших інтервалах осі  $\eta_1$  відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у півплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на деяких інших уявна частина шуканої функції, розв'язується за допомогою формули Келдиша-Сєдова. Оскільки з умов (3.31) випливає, що на границі півплощини  $\zeta_1$  у інтервалі  $|\eta_1| < \ell_1$  дійсна частина функції  $\varphi_1^0$  дорівнює нулю, а на решті частини границі уявна її частина дорівнює нулю, то розв'язання для функції  $\varphi_1^0$  в усій півплощині має вигляд

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}},$$

де  $A$  - дійсна стала; обирається та гілка кореня, яка додатна при додатних значеннях аргументу.

Дійсна та уявна частини  $\varphi_1^0(\zeta_1)$  визначають функції  $u_{y_1}^{1,0}, u_{x_1}^{1,0}$ . Зокрема, при  $\xi_1 = 0$  ( $x_1 = 0$  або  $y_1 = \pm\gamma$ ; чи  $x_1 = h_1, |y_1| < \gamma$ )

$$\varphi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (3.34)$$

$$u_{y_1}^{1,0} = 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \quad (|\eta_1| < \ell_1),$$

$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (|\eta_1| > \ell_1), \quad (3.35)$$

$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1 / \gamma; k).$$

Нормальне напруження  $\sigma_1^0$  та складова дотичного напруження  $\tau^{1,0}$ , відповідна функції  $u^{1,0}$ , знаходяться за формулами

$$\sigma_1^0 = B_1(R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} = (R_0 e^\xi)^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0},$$

$$\tau^{1,0} = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_{y_1}^{1,0}.$$

Стала  $A$  визначається з умови рівноваги штампа та дорівнює

$$A = -P_0 R_0 \left[ 2\sqrt{GB_1 C_1 B} \right]^{-1}, \quad (3.36)$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{K(k_1)}, \quad B = \int_0^{\ell_1} \frac{dt}{\sqrt{(l_1^2 - t^2)(1 - t^2)(1 - k_1^2 t^2)}}.$$

Тоді напруження під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{2C_1 B} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (3.37)$$

а функція  $u_{y_1}^{1,0}$  при  $\xi = 0, |\eta_1| > \ell_1$  знаходиться за формулою

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - \ell_1^2)^{-1/2}, \quad (3.38)$$

де  $A$  подається рівністю (3.36).

Складова  $v^{1,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна даному напруженому стану, визначається з рівняння (3.29). Функція  $u^{1,0}$  знаходиться зі співвідношень для  $u_{x_1}^{1,0}, u_{y_1}^{1,0}$  відповідно при  $|\zeta_1| < \ell_1, |\zeta_1| > \ell_1$  з урахуванням того, що при  $y_1 = \eta = \pm\gamma$   $u^{1,0} = 0$ .

Друга складова  $v^{2,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна напруженому стану типу пограничного шару, знаходиться з рівняння [73]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2 v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (3.39)$$

Оскільки  $v^{1,0}$  і  $v^{2,0}$  мають той самий порядок за  $\varepsilon = G / B_1$ , а похідна  $v_\xi^{2,0}$  більша за похідну  $v_\xi^{1,0}$  на два порядки при  $q = B_2 / B_1 \approx 1$ , то у даному наближенні граничні умови для визначення  $v^{2,0}$  з рівняння (14) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} v^0 &= v^{1,0} + v^{2,0} = 0 & (\xi = 0, \quad |\eta| \leq \alpha), \\ GR_0^{-1} v_\xi^{2,0} &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 & (\xi = 0, \quad \alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ v_\xi^{2,0} &= -u_\eta^{1,0} & (\xi = 0, \quad \lambda \leq |\eta| < \gamma; \quad \text{і} \quad \xi = h, \quad |\eta| < \gamma), \\ v_\xi^{2,0} &= 0 & (\eta = \pm \gamma). \end{aligned} \quad (3.40)$$

При цьому, як припускалося в постановці задачі,  $\rho < 1$  ( $\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}$ ,  $\rho_0 \approx 1$ ), а  $\sigma_1^0$  під штампом знаходиться за формулою (3.37).

Компонента  $u^{2,0}$ , відповідна даному напруженому стану, задовольняє умові [103]  $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$ . Після введення нових незалежних змінних  $x_2 = (B_2 / G)^{1/2} \xi$ ,  $y_2 = \eta$  крайова задача (3.39), (3.40) приймає вигляд

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} v^{2,0} &= -v^{1,0} & (x_2 = 0, \quad |y_2| \leq \alpha), \\ v_{x_2}^{2,0} &= 0 & (y_2 = \pm \gamma), \\ v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0 & (x_2 = 0, \quad \alpha < |y_2| < \lambda) \\ v_{x_2}^{2,0} &= -\sqrt{\frac{G}{B_2}} u_{y_2}^{1,0} & (x_2 = 0, \quad \lambda < |y_2| < \gamma; \quad \text{і} \quad x_2 = h_2, \quad |y_2| < \gamma), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$h_2 = (B_2 / G)^{1/2} h.$$

Задача (3.41), (3.42) є мішаною задачею для аналітичної функції  $v^{2,0}$  у прямокутнику  $0 \leq x_2 \leq h_2, -\gamma \leq y_2 \leq \gamma$ , яка може бути розв'язана відображенням прямокутника з площини  $z_2$  ( $z_2 = y_2 + ix_2$ ) у верхню півплощину зображень  $\zeta_2$  ( $\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$ ). Функція відображення має вигляд (3.32) із заміною  $z_1$  на  $z_2$ ,  $k_1$  на  $k_2$ , причому модуль  $k_2$  визначається з рівняння (3.33) також при заміні  $k_1$  на  $k_2$ ,  $h_1$  на  $h_2$ .

В основі дослідження задачі лежить асимптотичний метод [72,103], де припускається, що  $G/B_1 = \varepsilon$  є малим параметром,  $B_2 \approx B_1$ . Тому  $h_2 = (B_2/G)^{1/2}h$  багато більше за  $h_1 = (G/B_2)^{1/2}h$  ( $h_2/h_1 \gg 1$ ) і  $k_2$  виявляється близьким до нуля. Але при малих значеннях  $k_2$   $K(k_2) \approx \pi/2$  і функція відображення (3.32) переходить у функцію  $\zeta_2 = C_2 \sin(\pi z_2 / 2\gamma)$ , дійсна та уявна частини якої записуються відповідно

$$\eta_2 = C_2 \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma}, \quad \xi_2 = C_2 \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma}.$$

Сталу  $C_2$  визначають із тієї умови, щоб точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm\lambda$  відображалися у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm\ell_1$ . Тоді отримуємо:

$$C_2 = \ell_1 / \sin(\pi\lambda / 2\gamma), \quad \ell_1 = \operatorname{sn}(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1)$$

Точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm\gamma$  переходять у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm C_2$ , а точки  $x_2 = 0, y_2 = \pm\alpha$  - у точки  $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm\alpha_2$  де

$$\alpha_2 = C_2 \sin \frac{\pi\alpha}{2\gamma} = \frac{\operatorname{sn}(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1) \sin(\pi\alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)}.$$

Таким чином, для другого напруженого стану (типу пограничного шару [72,103]) замість прямокутника фактично маємо півсмугу. Задача, з

урахуванням (3.37), (3.38), (3.42), у цьому разі зводиться до наступної: знайти аналітичну у півплощині  $\zeta_2$  функцію  $v^{2,0}$  за умови, що на дійсній осі півплощини похідні функції  $v^{2,0}$  приймають значення

$$\begin{aligned}
 v_{y_2}^{2,0} &= -v_{\eta}^{1,0} = C_0 && (|\eta_2| \leq \alpha_2), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= 0 && (|\eta_2| \geq C_2), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_2^2}} && (\alpha_2 < |\eta_2| < \ell_1), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= -A \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}} && (\ell_1 < |\eta_2| < C_2).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Тут  $A$  виражається формулою (3.36), враховане співвідношення (3.29),  $C_0$  - осідання штампа. На нескінченності напруження спадають.

Якщо  $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$  ( $Q^{2,0}$  - гармонійна функція, спряжена з  $v^{2,0}$ ), то  $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$ . Функцію  $\psi_1^0$  у будь-якій точці верхньої півплощини  $\zeta_2$  можна визначити за допомогою формули Келдиша-Седова, яка при вказаних умовах (3.43) і обмеженості у точках  $\zeta_2 = \pm\alpha_2$  записується наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^0(\zeta_2) &= -\frac{A}{\pi i} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left( \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[ \int_{-C_2}^{-\ell_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left[ \int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} \right] \right) + \frac{C_0}{\pi i} i \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_2^2} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha_2^2}} \frac{dt}{t - \zeta_2},
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

де  $f(t) = \left[ (t^2 - \alpha_2^2) (|t^2 - \ell_1^2|) \right]^{-1/2}$ .

Для спадання напружень на нескінченності необхідно, щоб  $\psi_1^0(\zeta_2) \rightarrow 0$  при  $|\text{Re} \zeta_2| \rightarrow \infty$ . Оскільки останній доданок у (3.44) прямує до нуля, то зі вказаної умови отримуємо співвідношення



$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \left( \int_{-c_2}^{-\ell_1} f(t) dt + \int_{\ell_1}^{c_2} f(t) dt \right) = \rho \left( \int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} f(t) dt + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} f(t) dt \right).$$

Яке може бути записане у вигляді

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^c \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} = \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}}, \quad (3.45)$$

де

$$\tau = \frac{t}{\ell_1}, \quad c = \frac{C_2}{\ell_1} = \frac{1}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)},$$

$$\alpha_* = \frac{\alpha_2}{\ell_1} = \frac{\sin(\pi\alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)},$$

$$c > 1 > \alpha_* > 0.$$

Інтеграл, який стоїть у лівій частині співвідношення (3.45) є неповним еліптичним інтегралом першого роду  $F(\varphi, \alpha_*)$ , причому  $\varphi$  визначається рівністю

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2}} \quad (3.46)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині рівності (3.45) є повним еліптичним інтегралом першого роду  $K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = K(\alpha'_*) = K'(\alpha_*)$ , де  $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ . Тому рівність (3.45) може бути записана наступним чином:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1 / G)^{1/2} K'(\alpha_*). \quad (3.47)$$

Співвідношення (3.47) установлює зв'язок між розмірами ділянки зчеплення, області контакту, кута відкриття сектора, а також коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини. Воно виявляється таким самим, як і у випадку, якби пластини представляла собою напівнескінченний круговий сектор. Це пов'язано з характером даного напруженого стану (напруженого стану типу пограничного шару), яке швидко змінюється у напрямку координати  $\xi$ .

З рівності (3.44) при  $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$  (на ділянці зчеплення) отримаємо

$$\psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2A}{\pi} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} - \rho \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(\ell_1^2 - t^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} \right) \quad (3.48)$$

Останній доданок у виразі (3.44) при  $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$  дає чисто уявну величину  $iC_0$ .

Враховуючи вигляд інтегралів, вираз (3.48) можна записати так

$$v_{x_2}^{2,0} = \frac{2A}{\pi \ell_1} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left( \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(\alpha_2^2 - \eta_2^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[ (\ell_1^2 - \alpha_2^2) \Pi \left( \varphi, \frac{\alpha_2^2 - \eta_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\ell_1^2 - \eta_2^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \frac{\rho}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)} \Pi_1 \left( \frac{\ell_1^2 - \alpha_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_*' \right) \right), \quad (3.49)$$

де  $\alpha_* = \alpha_2 / \ell_1$  знаходиться з (3.47),  $|\eta_2| < \alpha_2$ ,  $\Pi_1(\varphi, \alpha_*')$  - повний еліптичний

інтеграл третього роду,  $\alpha_*' = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ ,  $\Pi(\varphi, \mu, \alpha_*)$  - неповний еліптичний

інтеграл третього роду,  $\varphi$  визначається рівністю (3.46). Дотичне напруження під штампом у першому наближенні визначається за формулами

$$\begin{aligned}\tau &= \text{sign}(\eta)\rho\sigma_1^0 & (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ \tau &= R_0^{-1}\sqrt{GB_2}v_{x_2}^{2,0} & (|\eta| \leq \alpha),\end{aligned}\tag{3.50}$$

де  $\sigma_1^0, v_{x_2}^{2,0}$  виражаються співвідношеннями (3.37) та (3.49).

Оскільки  $0 < \alpha_* < \ell_1 < c > 1$ , то  $\frac{C_2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2} = 1 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \ll 1$

Тоді рівність (3.46) може мати вигляд

$$\varphi = \arcsin \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \arcsin(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \dots) \approx \arcsin(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1)$$

Звідси випливає, що

$$\varphi = \pi/2 - \varepsilon_1^{1/2} - o(\varepsilon_1^{3/2}).$$

У першому наближенні по  $\varepsilon_1$   $\varphi^0 = \pi/2$ , інтеграл  $F(\varphi^0, \alpha_*^0)$  стає повним еліптичним інтегралом першого роду  $K(\alpha_*^0)$ , а рівність (3.47) можна переписати наступним чином:

$$K'(\alpha_*^0) / K(\alpha_*^0) = (G / B_1)^{1/2} / \rho.\tag{3.51}$$

У цьому випадку визначається величина  $q$

$$q = \exp\left(-\frac{\pi}{\rho}\sqrt{\frac{G}{B_1}}\right), \quad \alpha_*^0 = 4\left(\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(\nu+1/2)^2}\right] \left[1 + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2}\right]^{-1}\right)^2,$$

та інтеграл

$$K(\alpha_*) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \right).$$

Якщо коефіцієнт тертя  $\rho$  дорівнює нулю, то  $q=0$ ,  $\alpha_*^0=0$ , тобто ділянка зчеплення зникає. Зі зростанням  $\rho$  вона зростає, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Так, при зменшенні  $(G/B_1)^{1/2}$  та постійному  $\rho \neq 0$  розмір ділянки зчеплення збільшується.

**3.2.3. Аналіз результатів і висновки.** На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Оскільки  $u_{\xi}^{2,0}=0$ , то граничні умови для визначення функцій  $u^{1,1}, v^{2,1}$  у другому наближенні виявляються нульовими [72, 103]. Відповідно нульовими є і розв'язки, тобто друге наближення не вносить корективів до першого.

Відзначимо також, що якщо у напруженому стані типу пограничного шару розглядати не напівполосу, а прямокутник, то відображення його на напівплощину краще здійснювати не так, як вказано вище, а вимагати, щоб точки  $x_2=0, y_2=\pm\lambda; x_2=0, y_2=\pm\gamma$  відображались відповідно у точки  $\xi_2=0, \eta_2=\pm\ell_1; \xi_2=0, \eta_2=\pm 1$ .

Це дозволить уникнути переходу від одних координат до інших при формуванні граничних умов і досягається вибором однієї зі сталих у функції відображення. Друга стала (модуль  $k_2$ ) при цьому визначається з умови, що точки  $z_2=\pm\gamma+ih_2$  відображуються у точки  $\zeta_2=\pm 1/k_2$ . Подальший аналіз здійснюється аналогічно викладеному вище, проте це можливо лише при достатньо малих значеннях  $h=\ln(R_1/R_0)$ .

Вплив тертя на напруження під штампом позначається лише з третього наближення. У цьому випадку виникає відхил за деформацією  $u_\xi$  ( $\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$ ), яка знімається при розв'язанні рівняння (3.27) для функції  $u^{1,2}$  з граничними умовами

$$\begin{aligned} u_\xi^{1,2} &= u_\xi^{1,0} - \mu v_\eta^{1,0} \quad (\ell_1 < |\eta_1| < 1), \\ u_\eta^{1,2} &= 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1). \end{aligned}$$

На границі  $\xi = h$  усі функції обертаються на нуль.

Оскільки  $u_\xi^{1,0} = 0$  ( $|\eta_1| > \ell_1$ ) то  $u_\xi^{1,2} = -\mu v_\eta^{1,0} = \mu u^{1,0}$  ( $\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$ ). Тут  $\mu = \mathcal{G}_1 B_2 / G = \mathcal{G}_2 B_1 / G$  і врахований зв'язок між  $v_\eta^{1,0}, u^{1,0}$ , обумовлений рівністю (3.29).

Таким чином, відхил за нормальними напруженнями  $\sigma_1$  при  $\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$  викликаний лише врахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язок останньої задачі повторює викладене вище, але при вказаних вище умовах.

Розглянемо  $u^{1,0} = c_0 = (2\gamma / \pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$  при  $x_1 = 0$  ( $\xi = 0$ )  $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$ . Цей вираз описує осідання штампа. З використанням (3.36), а також враховуючи вираз  $C_1 = \gamma / K(k_1)$  отримаємо

$$c_0 = -\frac{P_0 R_0}{\pi} K(k_1) \ln(l_1) \left[ \sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma) \right]^{-1}. \text{ Нехай } C_0^* = -\frac{\pi}{P_0 R_0} C_0, \text{ тоді}$$

вираз для обчислення шуканої сталої набуває вигляду  $C_0^* = K(k_1) \ln(l_1) \left[ \sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma) \right]^{-1}$ .

Обчислимо значення  $C_0^*$  (таб.8) для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G / B_1)^{1/2}$ , обравши при цьому конкретне значення параметра  $\lambda / \gamma = 0,409$ .

Таблиця 8.

Осідання штамп  $C_0^*$  (таб.8) для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G / B_1)^{1/2}$  при  $\lambda / \gamma = 0,409$ .

$(G / B_1)^{1/2}$	$B$	$K(kl)$	$\lambda/\gamma$	$II$	$C0$
0,524401	2,99	3,36	0,409	0,882338	-0,02109
0,348107	5,03	4,86	0,409	0,963352	-0,00541
0,134264	11,32	16,06	0,409	0,999996	-8,5*10 <sup>-7</sup>

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. У третьому розділі дисертації наведено розв'язання контактної задачі для пластини з криволінійною анізотропією. При постановці задачі враховано, що під час взаємодії в області контакту виникають ділянка зчеплення та ділянки ковзання (аналог задачі Галіна для випадку з криволінійною анізотропією).

2. За допомогою розглянутого методу збурень зведено розв'язання складних задач лінійної пружності до крайових задач теорії потенціалу. Отримані аналітичні розв'язки поставленої задачі.

3. Отримані значення параметра  $\alpha_*$ , який характеризує розмір ділянки зчеплення, у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G / B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1), 0.348 (склопластик), 0.524 (свинець).

4. Обчислено значення осідання штамп  $C_0^*$  для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G / B_1)^{1/2}$ , при фіксованому значенні параметра  $\lambda / \gamma = 0,409$ .

## РОЗДІЛ 4

### Асимптотичний метод у двомірних задачах електропружності

В даному розділі пропонується застосування методу збурень до розв'язання контактних задач електропружності.

**4.1. Постановка задачі.** Нехай через кожну точку однорідної анізотропної пластини проходять дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Припускаючи, що ці площини перпендикулярні відповідно декартовим координатним осям  $x, y$  отримаємо наступні рівняння рівноваги, електростатики, електропружного стану і співвідношень Коші [51]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = 0; \quad (4.2)$$

$$e_x = s_{11}^D \sigma_x + s_{12}^D \sigma_y + g_{11}^{\sigma_0} D_x;$$

$$e_y = s_{21}^D \sigma_x + s_{22}^D \sigma_y + g_{12}^{\sigma_0} D_x;$$

$$\gamma_{xy} = s_{66}^D \tau_{xy} + g_{26}^{\sigma, D} D_y;$$

$$\mathcal{E}_x = -g_{11}^{\sigma, D} \sigma_x - g_{12}^{\sigma, D} \sigma_y + \beta_{11}^{\sigma} D_x; \quad \mathcal{E}_y = -g_{26}^{\sigma, D} \tau_{xy} + \beta_{22}^{\sigma} D_y; \quad (4.3)$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Тут  $\sigma_x, \sigma_y (\tau_{xy})$  - нормальні (дотичні) напруження;  $D_x, D_y$  і  $\mathcal{E}_x; \mathcal{E}_y$  - компоненти вектора індукції і напруженості електричного поля;  $s_{ij}^D$  - коефіцієнти деформації матеріалу тіла, виміряні при постійній індукції електричного поля;  $g_{kj}^{\sigma, D}$  - п'єзоелектричні модулі деформації і напруженості, виміряні при постійних напругах індукції;  $\beta_{kl}^{\sigma}$  - коефіцієнти діелектричної

сприйнятливості, виміряні при постійних напруженнях;  $U, V$  - компоненти вектора переміщення пластини.

**4.2. Метод розв'язання.** З першого рівняння системи (4.2) випливає, що існує деяка скалярна функція  $\phi = \phi(x, y)$ , така, що

$$D_1 = D_x = \frac{\partial \phi}{\partial y};$$

$$D_2 = D_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Розв'язання тієї чи іншої крайової задачі може бути зведено до інтегрування системи рівнянь

$$\begin{aligned} U_{xx} + \varepsilon U_{yy} + \varepsilon m V_{xy} - (a_{11} - \varepsilon a_{26}) \phi_{xy} &= 0; \\ \varepsilon V_{xx} + q V_{yy} + \varepsilon m U_{xy} + \varepsilon a_{26} \phi_{xx} - q a_{12} \phi_{yy} &= 0; \\ -(a_{11} - \varepsilon a_{26}) U_{xy} + \varepsilon a_{26} V_{xx} - q a_{12} V_{yy} + \\ &+ \varepsilon b_{22} \phi_{xx} + b_{11} \phi_{yy} = 0; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon = \frac{G}{B_1}; \quad q = \frac{B_2}{B_1}; \quad m = 1 + \frac{\nu_2 B_1}{G} = 1 + \frac{\nu_1 B_2}{G};$$

$$a_{11} = g_{11}^{\sigma, D} + \nu_2 g_{12}^{\sigma, D};$$

$$a_{26} = g_{26}^{\sigma, D}; \quad a_{12} = g_{12}^{\sigma, D} + \nu_1 g_{11}^{\sigma, D};$$

$$b_{22} = a_{26}^2 + \beta_{22}^{\sigma} \frac{\sigma}{G};$$

$$b_{11} = g_{11}^{\sigma, D} a_{11} + g_{12}^{\sigma, D} a_{12} \frac{B_2}{B_1} + \beta_{11}^{\sigma} \frac{\sigma}{B_1},$$

при відповідних граничних умовах.

Компоненти тензора напружень і вектора напруженості в цьому випадку записуються наступним чином:

$$\sigma_1 = B_1 (U_x + \nu_2 V_y - a_{11} \phi_y);$$

$$\sigma_2 = B_2 (\nu_1 U_x + V_y - a_{12} \phi_y);$$

$$\tau = G (U_y + V_x + a_{26} \phi_x);$$



$$\mathfrak{A}_1 = -B_1 a_{11} U_x - B_2 a_{12} V_y + B_1 b_{11} \phi_y; \quad (4.6)$$

$$\mathfrak{A}_2 = -G a_{26} U_y - G a_{26} V_x + G b_{22} \phi_x.$$

$$\text{Тут } \sigma_1 = \delta \sigma_x, \quad \sigma_2 = \delta \sigma_y, \quad \tau = \delta \tau_{xy}, \quad \mathfrak{A}_1 = \delta \mathfrak{A}_x, \quad \mathfrak{A}_2 = \delta \mathfrak{A}_y, \quad B_1 = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$B_2 = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad G = G_* \delta, \quad \delta - \text{товщина пластини. Індокси } x, y \text{ у рівняннях (4.5) і}$$

співвідношеннях (4.6) позначають диференціювання по координатах;  $E_1, E_2$  - модулі пружності уздовж головних напрямків  $x, y$ ;  $G_x$  - модуль зсуву;  $\nu_1, \nu_2$  - коефіцієнти Пуассона.

У реальних ортотропних матеріалах величина  $\varepsilon = \frac{G}{B_1}$  завжди значно

менша за одиницю. Відношення  $q = \frac{B_2}{B_1}$  може бути різним ( $q \leq 1$  або  $q \geq 1$ ),

але завжди залишається більше за  $\varepsilon$ . Тому величину  $\varepsilon$  можна розглядати як малий параметр при асимптотичному інтегруванні системи (4.5). Значення  $q$  в подальшому будемо вважати порядку одиниці. Якщо ж  $q < 1$ , то аналіз проводиться аналогічним чином з урахуванням, що  $\varepsilon < q$  [72].

Формальний граничний перехід у системі (4.5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  призводить до найпростішої розрахункової схеми двох взаємно перпендикулярних стрижнів, не зв'язаних один з одним. Але при такому граничному переході передбачається, що усі невідомі функції мають той самий порядок за  $\varepsilon$ , а диференціювання за координатами не змінює порядку.

Щоб урахувати усі можливі відмінності між величинами шуканих функцій та їх швидкостями зміни вздовж координат  $x, y$  у пружних матеріалах вводяться афінні перетворення координат та шуканих функцій.

$$\xi_1 = \alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} x; \quad \eta_1 = y; \quad U = U^{(1)};$$

$$V = \varepsilon^{\frac{3}{2}} V^{(1)}; \quad \phi = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \phi^{(1)}; \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\xi_2 = x; \eta_2 = \beta \varepsilon^{\frac{1}{2}} y; U = \varepsilon^{\frac{3}{2}} U^{(2)}; \\ V = V^{(2)}; \phi = \varepsilon^2 \phi^{(2)}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Із перетворень (4.7), (4.8) видно, що розв'язки системи рівнянь, отриманої з (4.5) після введення перетворень (4.7) (або (4.8)), відносно повільно змінюються вздовж координати  $x$  (або  $y$ ) в порівнянні з аналогічними розв'язками системи, отриманої після застосування інших перетворень. При цьому в напруженому стані першого типу (повільно змінюється уздовж координати  $x$ ; перетворення (4.7)) основну роль грають компоненти переміщення  $u$ , нормальне напруження  $\sigma_1$ , складова дотичного напруження  $\tau$ , що залежить від переміщення  $U$ . У напруженому стані другого типу (перетворення (4.8)) переважає переміщення  $V$ , напруження  $\sigma_2$  і складова дотичного напруження  $\tau$ , що залежить від компоненти переміщення  $V$ . Повне дотичне напруження складається з суми обох складових; через нього ж і здійснюється зв'язок між цими двома типами напружених станів. Залежно від навантаження, одне з них має характер приграничного шару.

Таким чином, при механічному навантаженні п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються в напружених, переміщеннях або їх комбінаціях, розв'язки відповідних крайових задач будемо представляти у вигляді суперпозиції розв'язків цих двох типів напружено-деформованого стану:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}; V = V^{(1)} + V^{(2)}; \phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}.$$

Розшукуючи функції  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$ ,  $\phi^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) у вигляді ряду за степенями параметра  $\varepsilon$ , необхідно вибрати відповідні асимптотичні послідовності. Вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь (4.5) і порядком по  $\varepsilon$  похибки в крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі в нульовому наближенні ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Щоб урахувати всі можливі випадки,

ці функції визначатимемо у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (з перетворень (4.7), (4.8) видно, що рядів за меншими ступенями параметра  $\varepsilon$  виникнути не може):

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j};$$

$$V^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}; \quad (4.9)$$

$$\phi^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{n,j}, \quad (n=1,2).$$

Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  також представимо у вигляді рядів по параметру  $\varepsilon^{1/2}$

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j, \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j \quad \text{причому} \quad \alpha_0 = \beta_0 = 1, \quad \text{а коефіцієнти} \quad \alpha_j, \beta_j$$

( $j=1,2,\dots$ ) знаходяться з тих же умов, що і для пружних матеріалів [166], а саме: в кожному з наближень в лівій частині рівнянь для визначення основних функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  повинні залишатися оператори Лапласа цих функцій, а в правій частині відсутні компоненти вектора переміщень або їх похідні (в пружною задачі для визначення основних функцій в кожному з наближень праві частини звертаються в нуль). Допоміжні ж функції  $V^{1,j}$ ,  $U^{2,j}$ ,  $\phi^{1,j}$ ,  $\phi^{2,j}$  через основні виражаються простим інтегруванням. Зокрема, при  $q=1$  коефіцієнти  $\alpha_j = \beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) визначаються за формулою

$$\alpha_j = \frac{1}{2} m^2 \left( \omega_{j-4} + \sum_{k=0}^{j-4} \alpha_k \omega_{j-4-k} \right);$$

$$\omega_s = \alpha_s + (1-m) \sum_{n=0}^{s-2} (2\alpha_n - c_n) \omega_{s-n-2}, \quad (4.10)$$

$$c_n = \sum_{s=0}^n \alpha_s \alpha_{n-s}, \quad (s \geq 1; \text{при } s < 0, \omega_s = 0).$$

З цієї формули випливає, що коефіцієнт  $\alpha$  розкладається в ряд по ступенях,  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon^{1/2}$ . Якщо  $m=1$  (при цьому коефіцієнти Пуассона приймаються рівними нулю), то  $\alpha$  розкладається в ряд за ступенями  $\varepsilon^2$ .

Підставимо перетворення (4.7) в систему (4.5) і використаємо відповідні розкладання з урахуванням (4.10). Після розщеплення отриманої системи по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  прийдемо до нескінченної системи рівнянь щодо функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{1,j}$ ,  $\phi^{1,j}$  ( $j=0,1,\dots$ ). При цьому будемо вважати, що  $\alpha_{11} \sim \varepsilon\beta_{11}$ ,  $b_{22} \sim \varepsilon^2b_{11}$ ,  $a_{12} \sim a_{26} \sim \varepsilon^3b_{11}$ . Наведемо ці рівняння для перших трьох наближень ( $j=0,1,2$ )

При  $j=0$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,0} + mU_{\xi\eta}^{1,0} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,0} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,0} = 0;$$

При  $j=1$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,1} + mU_{\xi\eta}^{1,1} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,1} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,1} = 0; \quad (4.11)$$

При  $j=2$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,2} + U_{\eta\eta}^{1,2} - a_{11}\phi_{\xi\eta}^{1,0} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,2} + mU_{\xi\eta}^{1,2} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,2} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,2} = 0.$$

Тут і далі прийнято, що диференціювання (індекси  $\xi$ ,  $\eta$ ) виконуються за тими координатами  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  ( $n=1,2$ ), індекси яких збігається з першими верхніми індексами функцій.

Після підстановки перетворень (4.8) в систему (4.5) з використанням відповідних розкладів і розщеплення за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій  $U^{2,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $\phi^{2,j}$  ( $j=0,1,\dots$ ), які визначають рішення другого типу.

Тут при  $j=0$ :

$$U_{\xi\xi}^{2,0} + mV_{\xi\eta}^{2,0} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + mV_{\eta\eta}^{2,0} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{2,0} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{2,0} = 0;$$

при  $j=1$ :

$$U_{\xi\xi}^{2,1} + mV_{\xi\eta}^{2,1} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,1} + mV_{\eta\eta}^{2,1} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{2,1} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{2,1} = 0;$$

при  $j = 2$ :

$$U_{\xi\xi}^{2,2} + mV_{\xi\eta}^{2,2} - a_{11}\phi_{\xi\eta}^{2,0} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,2} + qV_{\eta\eta}^{2,2} = 0; \quad (4.12)$$

$$-a_{11}U_{\xi\eta}^{2,2} + a_{26}V_{\xi\xi}^{2,0} - qa_{1,2}V_{\eta\eta}^{2,0} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{2,2} = 0$$

і так далі.

Із системи (4.11) випливає, що в перших двох наближеннях ( $j = 0,1$ ) основні функції  $U^{1,j}$  ( $V^{2,j}$  для другого напруженого стану) визначаються з рівнянь Лапласа (при  $q = 1$  або очевидній заміні однієї зі змінних), а допоміжні функції виражаються простим інтегруванням через основні.

У третьому наближенні ( $j = 2$ ) і далі для напруженого стану першого типу функції  $U^{1,j}$  знаходяться з рівняння Пуассона при відомій правій частині, яка містить тільки функцію  $\phi$ , знайдену в попередніх наближеннях. Аналогічна ситуація має місце в напруженому стані другого типу для функції  $V^{2,j}$ , але починаючи з четвертого наближення ( $j = 3$ ) і далі. Використовуємо перетворення (4.7), (4.8) і розкладання в виразах для переміщень, напружень і напруженостей (4.6) і представимо їх у вигляді рядів:

$$\begin{aligned} U &= U^{1,0} + \varepsilon^{1/2}U^{1,1} + \varepsilon U^{1,2} + \dots; \\ V &= V^{2,0} + \varepsilon^{1/2}V^{2,1} + \varepsilon V^{2,2} + \varepsilon^{3/2}(V^{2,3} + V^{1,0}) + \dots; \\ \sigma_1 &= \sigma_{1,0} + \varepsilon^{1/2}\sigma_{1,1} + \varepsilon\sigma_{1,2} + \dots = \\ &= B_1\varepsilon^{1/2}\left[U_{\xi}^{1,0} + \varepsilon^{1/2}(U_{\xi}^{1,1} + \nu_2 U_{\eta}^{2,0}) + \varepsilon(U_{\xi}^{1,2} + U_{\xi}^{2,0} + \nu_2 U_{\eta}^{2,1} - a_{11}\phi_{\eta}^{1,0}) + \dots\right]; \\ \sigma_2 &= \sigma_{2,0} + \varepsilon^{1/2}\sigma_{2,1} + \varepsilon\sigma_{2,2} + \dots = B_2\varepsilon^{1/2}\left[V_{\eta}^{2,0} + \varepsilon^{1/2}(V_{\eta}^{2,1} + \nu_1 U_{\xi}^{1,0}) + \dots\right]; \\ \tau &= \tau_0 + \varepsilon^{1/2}\tau_1 + \varepsilon\tau_2 + \dots = G\left[U_{\xi}^{1,0} + V_{\xi}^{2,0} + \varepsilon^{1/2}(U_{\eta}^{1,1} + V_{\xi}^{2,1}) + \varepsilon(U_{\eta}^{1,2} + V_{\xi}^{2,2}) + \dots\right]; \\ \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{A}_{1,0} + \varepsilon^{1/2}\mathfrak{A}_{1,1} + \varepsilon\mathfrak{A}_{1,2} + \dots = -B_1 a_{11}\varepsilon^{1/2}\left[U_{\xi}^{1,0} + \varepsilon^{1/2}U_{\xi}^{1,1} + \varepsilon(U_{\xi}^{1,2} + U_{\xi}^{2,0}) + \dots\right] - \\ &\quad - B_2 a_{12}\varepsilon^{1/2}V_{\eta}^{2,0} + B_1 b_{11}\varepsilon\varepsilon^{1/2}\left[\phi_{\eta}^{1,0} + \varepsilon^{1/2}\phi_{\eta}^{1,1} + \varepsilon(\phi_{\eta}^{1,2} + \phi_{\eta}^{2,0}) + \dots\right]; \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_{2,0} + \varepsilon^{1/2} \mathfrak{E}_{2,1} + \varepsilon \mathfrak{E}_{2,2} + \dots = -Ga_{26} \left[ (U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2} (U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}) + \right. \\ \left. + (U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2} (U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}) + \dots \right] - Gb_{22} \varepsilon^2 \left[ (\phi_\xi^{1,0} + \phi_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2} (\phi_\xi^{1,1} + \phi_\xi^{2,1}) + \right. \\ \left. + \varepsilon (\phi_\xi^{1,2} + \phi_\xi^{2,2}) + \dots \right].; \end{aligned}$$

При цьому враховувалося, що коефіцієнти Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  порядку  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $a_{12}$  порядку  $\varepsilon^2 b_{11}$ ,  $a_{11}$  порядку  $\varepsilon b_{11}$ . Зі співвідношень (4.11), (4.12) видно, що напружено-деформовані стани першого і другого типів пов'язані тільки через граничні умови. Оскільки основні функції  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа (Пуассона), то ефективність методу залежить від того, чи вдається сформулювати відповідні крайові задачі для знаходження цих функцій.

**Аналіз граничних умов.** Нехай на лінії, яка обмежує (наприклад,  $x = const$ ) відомі нормальні  $\sigma_1$  і дотичні  $\tau$  напруження

$$\sigma_1 = f_1(y); \quad \tau = f_2(y).$$

Припускаємо, що ці функції можуть бути представлені рядами

$$f_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{n,j}(y), \quad (n=1,2).$$

(У іншому випадку усі коефіцієнти при  $\varepsilon^{j/2}$  обертаються на нуль.)

Тоді на лінії, що обмежує  $x = const$

$$\sigma_{1,j} = f_{1,j}; \quad \tau_j = f_{2,j}.$$

Для наочності докладно розглянемо нульове наближення ( $j=0$ ).

Використовуючи результати попереднього пункту, приходимо до інтегрування рівнянь напруженого стану:

- першого типу (4.11) ( $j=0$ ) при наступних граничних умовах для функції  $U_\xi^{1,0}$ :

$$U_\xi^{1,0} = (B_1 \varepsilon^{1/2})^{-1} f_{1,0};$$

- напруженого стану другого типу (4.12) ( $j=0$ ) з крайовими умовами для функції  $V_\xi^{2,0}$ :

$$V_\xi^{2,0} = G^{-1} f_{2,0} - U_\eta^{1,0}.$$

Якщо на лінії, що обмежує  $x = const$  задані зміщення,

$$U = \psi_1(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}, \quad V = \psi_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j}.$$

На цій лінії ( $x = const$ )  $U_j = \psi_{1,j}$ ,  $V_j = \psi_{2,j}$  та з (4.13) граничні умови для функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  при  $j = 0$  запишуться відповідно

$$U^{1,0} = \psi_{1,0}, \quad V^{2,0} = \psi_{2,0}.$$

Аналогічним чином неважко отримати крайові умови для функцій  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$  в разі мішаної задачі. Аналіз граничних умов показує, що для всіх крайових задач граничні умови в нульовому наближенні ( $j = 0$ ) напруженого стану першого типу не залежать ні від більш високих наближень, ні від рішень рівнянь напруженого стану другого типу. Тому функція  $U^{1,0}$  знаходиться незалежно від інших. Потім простим інтегруванням через  $U^{1,0}$  визначаються функції  $\phi^{1,0}$ . Після цього повністю визначаються граничні умови для знаходження функції  $V^{2,0}$  також з рівняння Лапласа. Розв'язавши це рівняння і визначивши функції  $U^{2,0}$  і  $\phi^{2,0}$ , отримаємо граничні умови для знаходження функції  $U^{1,1}$  і так далі.

Отже, розв'язання основних крайових задач зводиться до послідовного інтегрування рівнянь (4.11), (4.12). Оскільки функції  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа (Пуассона) при відповідних граничних умовах, то на кожному етапі процесу та чи інша крайова задача електропружності зводиться до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

Зауважимо, що отримані вище результати повністю відповідають задачам магнітопружності, якщо виконати відповідні заміни [51].

Якщо відбувається лише електрична взаємодія, то компоненти вектора переміщень будуть суттєво меншими, ніж при механічному навантаженні. Припускаючи, що ці компоненти порядку  $\varepsilon^2$ , а диференціювання за координатами не змінює порядку, у нульовому наближенні ( $j = 0$ ) у вихідних змінних  $x, y$  функція  $\varphi^{\mathcal{E}}(x, y)$  визначається з рівняння

$$\varepsilon b_{22} \varphi_{xx}^{\vartheta} + b_{11} \varphi_{yy}^{\vartheta} = 0 \quad (4.14)$$

при відповідних граничних умовах, а компоненти вектора переміщень  $U^{\vartheta}$ ,  $V^{\vartheta}$  через функцію  $\varphi^{\vartheta}(x, y)$  знаходяться за формулами

$$U_x^{\vartheta} = a_{11} \varphi_y^{\vartheta}, \quad V_y^{\vartheta} = a_{12} \varphi_y^{\vartheta},$$

звідки

$$U_y^{\vartheta} = -a_{11} k^{-2} \varphi_x^{\vartheta}, \quad V_x^{\vartheta} = a_{12} \varphi_x^{\vartheta}, \quad (4.15)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{b_{11}}{\varepsilon b_{22}}.$$

Якщо ж урахувати, що  $\varepsilon b_{22} < b_{11}$ , то у рівнянні (4.14) у першому наближенні взагалі може залишитись лише другий доданок. Але, оскільки граничні умови для функції  $\varphi^{\vartheta}(x, y)$  можуть бути довільними, її слід знаходити з рівняння (4.14).

При комбінованому, механічному та електричному (або ж магнітному), навантаженні завдяки лінійності можна розглядати ці дві задачі (три види напружених станів) окремо. Повний же розв'язок представляти у вигляді суперпозиції розв'язків окремих задач.

Таким чином, **при механічному навантаженні** у нульовому наближенні ( $j = 0$ ) з (4.11) - (4.13) у вихідних змінних  $x, y$  у напруженому стані першого типу основна компонента  $U_0 = U^{1,0}$  вектора переміщень знаходиться з рівняння

$$B_1 U_{0xx} + G U_{0yy} = 0 \quad (4.16)$$

при відповідних граничних умовах.

Допоміжні функції  $V^{1,0}$ ,  $\varphi_0 = \varepsilon^{3/2} \varphi^{1,0}$  через основну визначаються зі співвідношень

$$B_2 V_y^{1,0} + G m U_{0x} = 0, \quad -a_{11} U_{0x} + b_{11} \varphi_{0y} = 0, \quad (4.17)$$

(оскільки  $\varphi_0 = \varepsilon^{3/2} (\varphi^{1,0} + \varepsilon^{1/2} \varphi^{2,0})$ ), а нормальне напруження  $\sigma_{1,0}$  та складова дотичного напруження  $\tau_0^{(1)}$  записуються наступним чином:



$$\sigma_{1,0} = B_1 U_{0x}, \tau_0^{(1)} = G U_{0y}. \quad (4.18)$$

У напруженому стані другого типу основна компонента  $V_0 = V^{2,0}$  вектора переміщень визначається з рівняння

$$G V_{0xx} + B_2 V_{0yy} = 0 \quad (4.19)$$

при відповідних граничних умовах.

Допоміжні функції  $U^{2,0}$ ,  $\varphi^{2,0}$  через основну визначаються зі співвідношень

$$B_1 U_x^{2,0} + G m V_{0y} = 0, -a_{11} U_x^{2,0} + b_{11} \varphi_y^{2,0} = 0. \quad (4.20)$$

Нормальне напруження  $\sigma_{2,0}$  і складова  $\tau_0^{(2)}$  запишуться так:

$$\sigma_{2,0} = B_2 V_{0y}, \tau_0^{(2)} = G V_{0x}. \quad (4.21)$$

Повне дотичне напруження  $\tau = \tau_0^{(1)} + \tau_0^{(2)}$ , тобто

$$\tau = G(U_{0y} + V_{0x}). \quad (4.22)$$

Компоненти вектора індукції  $D_{1,0}$ ,  $D_{2,0}$  і вектора напруженості електричного поля  $\mathcal{E}_{1,0}$ ,  $\mathcal{E}_{2,0}$  при цьому знаходяться із співвідношень

$$\begin{aligned} D_{1,0} = \varphi_{0y} &= \left( \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) U_{0x}, \quad D_{2,0} = -\varphi_{0x} = \left( \frac{a_{11} G}{b_{11} B_1} \right) U_{0y}; \\ \mathcal{E}_{1,0} &= B_1 (-a_{11} U_{0x} + b_{11} \varphi_{0y}) = 0; \\ \mathcal{E}_{2,0} &= -G_1 a_{26} (U_{0y} + V_{0x}) = -a_{26} \tau_0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

**Під електричним впливом** функція  $\varphi(x, y)$  визначається з рівняння (4.14) при відповідних граничних умовах, похідні компонент вектора переміщень через функцію  $\varphi(x, y)$  записуються за допомогою формул (4.15), нормальні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  дорівнюють нулю (коефіцієнти Пуассона мають порядок  $\varepsilon^{1/2}$ ), дотичне напруження знаходиться за формулою

$$\tau_0^{\mathcal{E}} = G(-a_{11} k^{-2} + a_{12} + a_{26}) \varphi_x^{\mathcal{E}}, \quad (4.24)$$

а компоненти  $D_1^{\mathcal{E}}$ ,  $D_2^{\mathcal{E}}$  і  $\mathcal{E}_1^{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{E}_2^{\mathcal{E}}$  записуються наступним чином:

$$D_1^{\vartheta} = \varphi_y^{\vartheta}, \quad D_2^{\vartheta} = -\varphi_x^{\vartheta};$$

$$\mathfrak{E}_1^{\vartheta} = B_1 \left( -a_{11}^2 U_{0x} - a_{12}^2 \frac{B_2}{B_1} + b_{11} \right) \varphi_y^{\vartheta}; \quad (4.25)$$

$$\mathfrak{E}_2^{\vartheta} = -G \left( -a_{11} k^{-2} a_{26} + a_{26} a_{12} + b_{22} \right) \varphi_x^{\vartheta},$$

причому, якщо не враховувати коефіцієнти Пуассона, то  $a_{11} = g_{11}^{\sigma,D}$ ,  $a_{12} = g_{12}^{\sigma,D}$ ,  
 $b_{11} = (g_{11}^{\sigma,D})^2 + B_2 (g_{12}^{\sigma,D})^2 / B_1 + \beta_{11}^{\sigma} \delta / B_1$ , а компонента  $\mathfrak{E}_1^{\vartheta}$  приймає вигляд

$$\mathfrak{E}_1^{\vartheta} = \beta_{11} \delta \varphi_y^{\vartheta}.$$

Аналогічно записуються основні співвідношення для інших наближень.

Відмітимо також, якщо виявиться, наприклад,  $q = \frac{B_2}{B_1} < 1 \sim \varepsilon$  (або

$\frac{B_1}{B_2} < 1 \sim \varepsilon$ ), то відповідно результатам [72] також приходимо до того самого

аналізу, причому  $\frac{G}{B_1}$  (або  $\frac{G}{B_2}$ ) у цьому випадку має порядок  $\varepsilon^2$ . Аналогічно і

при інших співвідношеннях між  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{26}$ . Але у всіх випадках при даному підході у кожному з наближень основні невідомі  $U$ ,  $V$ ,  $\varphi$  знаходяться з послідовного розв'язання тих або інших задач теорії потенціалу.

*Розглянемо деякі конкретні приклади.*

1. Прямокутна пластина  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  розтягується у напрямку осей  $Ox$  і  $Oy$  зусиллями  $p_1$  і  $p_2$  відповідно. Дотичні зусилля, а також індукція на сторонах пластини дорівнюють нулю. Тоді  
при  $x=0$ ,  $x=a$ :  $\sigma_1 = p_1$ ,  $\tau = 0$ ,  $D_1 = 0$ ;  
при  $y=0$ ,  $y=b$ :  $\sigma_2 = p_2$ ,  $\tau = 0$ ,  $D_2 = 0$ .

Шукані функції  $U$ ,  $V$ ,  $\varphi$  представимо у вигляді

$$U = C_1 x + C_2 y, \quad V = C_3 x + C_4 y, \quad \varphi = d_1 x + d_2 y,$$

де постійні коефіцієнти будемо знаходити з граничних умов.

Оскільки  $D_1 = \varphi_y = 0$ ,  $D_2 = -\varphi_x = 0$ , то  $d_1 = d_2 = 0$ , тобто  $\varphi = 0$ . Сталі  $C_1, C_2, C_3, C_4$  знаходяться з інших граничних умов та мають вигляд

$$C_1 = \frac{P_1 - \nu P_2}{B_1(1 - \nu_1 \nu_2)}, C_4 = \frac{P_2 - \nu_2 P_1}{B_2(1 - \nu_1 \nu_2)}, C_3 = -C_2.$$

Тому компоненти вектора переміщень записуються наступним чином:

$$U = C_1 x + C_2 y, V = -C_2 x + C_4 y.$$

Якщо поворот пластини як жорсткого цілого відсутній, то  $C_2 = 0$ .

Компоненти вектора напруженості електричного поля знаходимо за формулами

$$\mathcal{E}_1 = -B_1 a_{11} C_1 - B_2 a_{12} C_4, \mathcal{E}_2 = 0.$$

При цьому напружено-деформований стан у околі кутових точок прямокутника не обговорюється. Якщо застосовувати вище зазначений метод, то у нульовому наближенні ( $j = 0$ ) будемо мати

$$C_1 = \frac{P_1}{B_1}, C_4 = \frac{P_2}{B_2},$$

оскільки коефіцієнти Пуассона мають порядок  $\varepsilon^{1/2}$ . Наступне ж наближення ( $j = 1$ ) дає точний розв'язок, вказаний вище.

2. Якщо при  $x = 0, x = a$ :  $\sigma_1 = \tau = 0, D_1 = d_1^0$ ; при  $y = 0, y = b$ :  $\sigma_2 = \tau = 0, D_2 = d_2^0$ , то у цьому випадку  $U = V = 0$  (при  $C_2 = 0$ ),  $\varphi^\vartheta = -d_2^0 x + d_1^0 y$ , а напруження, які виникають від електричного впливу, і компоненти вектора напруженості електричного поля визначаються за формулами

$$\sigma_1^\vartheta = -B_1 a_{11} d_1^0, \sigma_2^\vartheta = -B_2 a_{12} d_1^0, \tau^\vartheta = -G a_{26} d_2^0;$$

$$\mathcal{E}_1^\vartheta = B_1 b_{11} d_1^0, \mathcal{E}_2^\vartheta = G b_{22} d_2^0.$$

3. Нехай на границю півплощини  $x \geq 0, |y| < \infty$  у початку координат  $(0; 0)$  діє нормальна зосереджена сила  $P_0$ , дотичні напруження при  $x = 0$

відсутні, на нескінченності похідні компонент вектора переміщень обертаються на нуль, тобто граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_1 = -P_0 \delta(y), \quad \tau = 0 \quad (x=0), \quad (4.26)$$

на нескінченності усі умови нульові. Тут  $\delta(y)$  - дельта-функція Дірака.

Використовуючи результати, отримані у пунктах 4.1 - 4.3, у першому наближенні приходимо до інтегрування рівнянь (4.16) наступних граничних умовах:

$$U_{0x} = -(P_0 / B_1) \delta(y) \quad \text{при } x=0,$$

на нескінченності похідні обертаються на нуль, а рівняння (4.19) з граничними умовами:

$$V_{0x} = -U_{0y} \quad \text{при } x=0,$$

на нескінченності похідні обертаються на нуль.

При послідовному розв'язанні вказаних крайових задач отримаємо

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1^{-1} x}{\pi (\omega_1^{-2} x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1 y}{\pi (\omega_1^{-2} x^2 + y^2)},$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} = \frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1 y}{\pi (\omega_2^2 x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1 x}{\pi (\omega_2^2 x^2 + y^2)},$$

де  $\omega_1^2 = B_1/G$ ,  $\omega_2^2 = B_2/G$ .

Компоненти тензора напружень визначаються формулами (4.18), (4.21), (4.22), а допоміжні невідомі знаходяться із співвідношень (4.17), (4.20).

$$\text{Оскільки } \tau = G(U_{0y} + V_{0x}), \text{ а } \lim_{\omega_1^{-1}x \rightarrow 0+0} \frac{\omega_1^{-1}x}{\pi (\omega_1^{-2}x^2 + y^2)} = \delta(y),$$

то граничні умови (4.26) виконуються повністю.

Похибки, які виникають за рахунок допоміжних функцій, мають більш високий порядок малості та знімаються при розв'язанні аналогічних задач у наступних наближеннях. Компоненти векторів індукції і напруженості електричного поля виражаються формулами (4.23).

4. Якщо на границі півплощини  $x \geq 0$ ,  $|y| < \infty$  у початку координат заданий вектор індукції електричного поля

$$D_1 = \varphi_y^{\ominus} = d_1^0 \delta(y), \quad D_2 = -\varphi_x^{\ominus} = d_2^0 \delta(y), \quad (x=0),$$

то розв'язання рівняння (4.14) при вказаних граничних умовах має вигляд

$$D_1 = \frac{1}{\pi k} \frac{d_1^0 k^2 x - d_2^0 y}{k^2 x + y^2}, \quad D_2 = \frac{k}{\pi} \frac{d_1^0 y + d_2^0 x}{k^2 x + y^2}, \quad k^2 = \frac{B_1 b_{11}}{G b_{22}}.$$

При завданні на границі півплощини функції  $\varphi^{\ominus}$  як  $\varphi^{\ominus} = \varphi_0 \delta(y)$ ,  $(x=0)$  отримаємо

$$\varphi^{\ominus}(x, y) = \frac{\varphi_0 k x}{\pi(k^2 x^2 + y^2)},$$

$$D_1 = -\frac{\varphi_0 2k}{\pi} \frac{xy}{(k^2 x^2 + y^2)^2}, \quad D_2 = \frac{\varphi_0 k}{\pi} \frac{k^2 x^2 - y^2}{(k^2 x^2 + y^2)^2}.$$

Інші невідомі розшуковуються за формулами (4.24), (4.25).

Згадані вище приклади запропоновані у якості модельних.

#### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. У четвертому розділі дисертації наведено узагальнення асимптотичного методу на двовимірні задачі електропружності.

2. Показано, що при розв'язанні тієї чи іншої крайової задачі електропружності з відповідними крайовими умовами методом збурень механічні та електричні складові можуть бути відокремлені але мають взаємний вплив через крайові умови.

3. Показано, що це дійсно можна сформулювати відповідні крайові задачі для основних функцій, що дозволяє звести крайові задачі теорії пружності для плоских ортотропних тіл до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язати.

4. Розв'язано ряд модельних задач.

## ВИСНОВКИ

У дисертації наведено теоретичне узагальнення та нове вирішення актуального питання в галузі науки «Механіка деформівного твердого тіла» щодо можливості та зручності застосування асимптотичного методу до розв'язання двовимірних задач електропружності. Також отримані розв'язки нових складних контактних задач.

Результати дисертаційного дослідження дають підставу сформулювати відповідні висновки:

1. Отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину скінченних розмірів з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання враховано силу тертя, що виникає під час взаємодії.

2. Проведено дослідження впливу характеристик жорсткості матеріалу пластини на розподіл напружень під штампом при різних значеннях параметра  $\lambda/\gamma$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини). Графічно побудовано відповідні залежності.

3. В процесі розв'язання контактної задачі асимптотичним методом зроблено висновки щодо зв'язку між розмірами області взаємодії, кута розкриття сектора та коефіцієнтом тертя.

4. Отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний сектор з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання було враховане існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом. Визначені закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- для цієї задачі наведені значення параметра  $\alpha_*$  (розмір ділянки зчеплення) у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G/B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1), 0.348 (склопластик), 0.524 (свинець).

5. Знайдено розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту.

6. Отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор скінченних розмірів з циліндричною анізотропією. У постановці задачі зазначено існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом.

- для цієї задачі отримані закони розподілу напружень під штампом, розмір ділянки зчеплення, обчислено значення  $C_0^*$  (величину осідання штампу) для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G / B_1)^{1/2}$ .

7. Наведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності.

8. Показано що, цілком можливо сформулювати відповідні крайові задачі для основних функцій, що дозволяє представити вихідну задачу електропружності у вигляді суперпозиції більш простих крайових задач, де механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

9. За допомогою запропонованого узагальненого методу розв'язаний ряд модельних задач.

З використанням застосованого підходу можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей при різних умовах контакту, можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих задач.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов В.М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство. *ДАН СССР*, 1939. Т.23, № С. 759-763.
2. Абрамов В.М. Распределение напряжений в плоском безграничном клине при произвольной нагрузке. *Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений*. НИИММ ЛГУ и НИИМех. МГУ. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с. 134-142.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука, 1997. 414с.
4. Александров В.М. Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы. *ПММ*, 2006. Т.70. №1. С.139-149.
5. Александров В.М. К решению некоторых задач теории упругости. *ПММ*, 1963. Т.27. вып.5. С.970-972.
6. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. *ПММ*, 1970. Т.34. вып.2. С.246-257.
7. Александров В.М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. *ПММ*, 1962. Т.26. вып.5. С.934-943.
8. Александров В.М., Александрова Г.П. Контактная задача теории упругости для упругой полосы. Точные и естественные науки: материалы науч. конф. аспирантов, Ростов -на-Дону: изд. РГУ, 1960.
9. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.304 с.
10. Алимжанов М.Т., Естаев Е.К. Уругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием. *Механика деформ. тверд. тела*. 1982. №8. С. 105-115.
11. Андрианов И.В., Маневич Л.И. Асимптотические методы и физические теории. М: Знание, 1989. 64 с.
12. Аргатов И.И. Асимптотические модели упругого контакта. СПб типогр.: «Наука», 2005. 448 с.
13. Афонькин М. Н. Расчет фундаментов разрезного типа. *Гидротехн. строительсво*, 1941. 30. вып. 4.
14. Бабешко В.А. Новый метод решений краевых задач механики сплошной среды и математической физики для неклассических областей. *Докл. АН СССР*. 1985. Т. 28. №1. С.73-76.



15. Бегиашвили А.И. Решение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости. Докл. АН СССР, 1940. 27. №9.

16. Белова О.В. Метод возмущений в приложении к задачам механики. Збірник наукових праць Національного гірничого університету. 2013. № С. 41. 113-120.

17. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М. Сов. радио, 1960.

18. Вайсфельд Н.Д. Соударение конечного упругого цилиндра с жесткой преградой. Прикладная механика. 2007. № 9. С. 58–69.

19. Вайсфельд Н.Д. Удар кругового полого конечного цилиндра о неподвижную преграду. Теоретическая и прикладная механика. 2003. № 37. С. 162–167.

20. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я., Реут А.В. Осесимметричная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса. Математичні методи та фізикомеханічні поля. 2013. Т. 56, № 1. С. 185–196.

21. Вайсфельд Н.Д., Реут А.В. Осесимметричная задача теории упругости для кругового конуса с острием при учете его собственного веса. Вестник Одесского университета. Т.17, № 3 2012. С. 99–107.

22. Ван-Дайк М. Методі возмущений в механіке жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.

23. Васишин А., Сулим Г., Пастернак Я. Термомагнітоелектропружність біматеріальних тіл із тонкими включеннями та тріщинами за неідеального контакту фаз. Актуальні проблеми МСС і міцності конструкцій. Контактні задачі. Механіка руйнування та термоміцність деформівних тіл і конструкцій Дніпро, 2019, С. 63-65.

24. Велиев Э.И., Шестопалов В.П. Об одном общем методе решения парных интегральных уравнений. ДАН СССР. 1988. т.300, N4. с.827-831

25. Ворович И.И., Копасенко В.В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966. Т.30. вып.І. С.109-115.

26. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б. Численный метод расчета круглых плит в геометрически нелинейной постановке. Вестник МГСУ. 2017. Вып. 12. №6(105). С. 631-635. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.6.631-635.

27. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413-434.

28. Галин Л. А. Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. Докл. АН СССР, 1943. Т. 39. №3. С. 88-93.
29. Глаголев Н.И. Определение напряжений при давлении системы жестких профилей. ПММ, 1943. Т.7. Вып.5. С.283-388.
30. Глаголев Н.И. Упругие напряжения вдоль основания плотины. Докл. АН СССР, 1942. Т.34. №7. С.204-209.
31. Гоменюк С.І., Спиця О.Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с.
32. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном скольжении. Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 5, С. 695-709.
33. Грабко О.В. Ітераційні процеси для розв'язання статичної задачі про контакт пружних шорстких тіл. Труды Института прикладной математики и механики. 2013. Т. 27. С. 104–112.
34. Гриневич А.А. Міжфазна тріщина з зоною контакту в п'єзоелектричному/п'єзوماгнітному біматеріалі. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. №5. Т.2015. Вип.19. С. 86-95. ISSN 2312 - 2897.
35. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Контактная задача теории упругости для системы кольцевых штампов. Респуб. межвед. науч.-тех. сб. мат. физ., 1965. Вып.5.
36. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. журнал, 1963. Т.6. № 10. С. 67-71.
37. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. К.: Наук. думка. 1989. 280с.
38. Гузь А.Н., Рудницкий Т.В. Контактное взаимодействие упругих штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями. Прикл. механ. 2007. Т.№12. С. 28-40.
39. Д'яченко Н.М., Мухін В.В., Містюк В.Ю., Юрченко А.К. Розв'язання плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за нелінійними законами. Вісник Запорізького національного університету. 2018. №2. С. 29-43. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04
40. Данилевський А.М. Про розподіл струму в циліндровому електроді. Зап. Наук.-досл. ін-та мат. і мех. Харк. держ. Ун-та, 1936. 13.

41. Зінчук М.О., Святовец І.Ф., Тетерятник О.В. Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова тп Ріккати для майже консервативних систем. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, 2016. Т. 2. С. 110-121.
42. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
43. Ильинский Н.Б., Абзалилов Д.Ф. Математические основы обратных краевых задач. Учебное пособие к курсу “Обратные краевые задачи механики жидкости и газа”, часть I. Казань, Изд.-во УНИПРЕСС. 2005 г. 56 с.
44. Кагадий Т.С. Метод возмущений в плоских задачах теории упругости с учетом конечных деформаций. Вісник Донецького університету. 2005. №2. С. 90-94.
45. Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монографія. Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1998. 260 с.
46. Калоеров С.А., Вакуленко М.В. Об общих представлениях комплексных потенциалов для изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями. Теор. и прикл. мех. 2001. №32. С.79-93.
47. Калоеров С. А., Космодамианский А.С. Действие сосредоточенной силы в анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Теор. и прикл. механика. 1970, Вып. 1. С. 28-34.
48. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. Донецк: Юго-Восток, 2011. 232 с.
49. Калоеров С.А., Петренко О.А. Задача термовязкоупругости для кусочно-однородной анизотропной пластинки. Математичні методи та фізико-механічні поля, 2012. Т.55, № 2. С. 131-143.
50. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости. Теорет. и прикладная механика. 2011. Вып. 7. С. 118-130.
51. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2014. Т. 57, № С. 62-77.
52. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями. Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. 2013. Вып. 1. С. 42-48.

53. Камінський А.О., Селіванов М.Ф. Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту. Доров. Нас. acad. nauk Ukr. 2017. №1. С. 38-43.
54. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев: Наук.думка. 1980. 166 с.
55. Кирилюк В.С., Левчук О.І., Гавриленко О.В. Математическое моделирование и анализ напряженного состояния в ортотропной пьезоэлектрической среде с круговой трещиной. Системні дослідження та інформаційні технології. 2017. Том 3. 117-126.
56. Клубин П.И. Напряженное состояние упругой среды, нагруженной бесконечно жесткой полосой постоянной ширины. Труды Ленингр. ин-та инж. пром. стр-ва, 1936.
57. Копасенко В.В. Две задачи теории упругости для полуполосы. Инженерный журнал, МТТ, 1958. С.145-149.
58. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев-Донецк: Вища школа, 1976, 200 с.
59. Коул Д. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир. 1972. 277с.
60. Кубенко В.Д. Волновые процессы в упругой полуплоскости при ударе затупленным твердым телом. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 118-129.
61. Кубенко В.Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды. Прикладная механика. 2004. Т. 40, № 11. С. 3-44
62. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В., Жук Я.О. Нестационарная плоская контактная задача теории упругости для согласованных цилиндрических поверхностей. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2009. №10. С. 162-178.
63. Кубенко В.Д., Гавриленко О.В. Плоска симетрична задача про удар твердого циліндричного тіла по поверхні каверни при суперкавітаційному обтіканні. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2007. Т. 50, № 1. С. 8
64. Кубенко В.Д., Марченко Т.А. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя. Прикладная механика. 2008. Т. 44, № 3. С. 55-65.
65. Кузьменко В.І., Михальчук Г.Й. Контактні задачі руху пружних тіл уздовж твердих поверхонь. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. № 1. С. 84-93.
66. Кузьменко В.І., Плащенко С.О. Зв'язані задачі контактної взаємодії. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. Т. 60. № С. 75-84.

67. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
68. Ландау Л.Д., Лившиц Е. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 214 с.
69. Левада В.С., Левицкая Т.И., Пожужева И.С., Хижняк В.К. Построение матрицы фундаментальных решений системы уравнений, описывающих обобщенное плоское электроупругое состояние пьезоэлектрической пластины. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2017. № 1. С. 252-261.
70. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 463 с.
71. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Моск.унта. 1976. 367с.
72. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища шк., 1991.
73. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев-Донецк: Вища школа, 1982, 152 с.
74. Мартинович Т.Л., Шиндер В.К. Узагальнений плоский напряжений стан тонких п'єзоелектричних пластин з криволінійними отворами. Львів: ДУ "Львівська політехніка", 1994. 1В ДНТБ України 01.03.1194, №415 Ук 94.
75. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К., Ткаченко П.А. Двумерные задачи электроупругости для неоднородной пьезоэлектрической среды. Актуальные проблемы неоднородной механики: Мат. Всесоюзного научного семинара. Ереван, 1991. С. 169-174.
76. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Учебное пособие. М.: Наука, Физматлит, 1969. 380 с.
77. Моссаковский В.И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления. *ПММ*, 1963. Т.27. Вып.3. С.418-427.
78. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г., Моссаковская Л.В. Решение контактной задачи с трением и сцеплением. *Докл. АН СССР*, 1989. Т. 309. №3. С. 562-566.
79. Моссаковский В.И., Петров В.В. О влиянии трения на микроскольжение. *Докл. АН СССР*, 1976. 231. №3. С. 603-606.
80. Моссаковский В.И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. *ПММ*. 1958. Т. 22. № 1. С. 123-125.

81. Мусхелишвили Н.И. К задаче равновесия жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения. Сообщения АН Грузинской ССР, 1942. № 5. С.413-418.

82. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

83. Нагибин Л.Н. О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1967. Вып.3. С. 32-44.

84. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 526с.

85. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 456с.

86. Нахайчук О.В. Оценка деформируемости при внедрении плоского штампа в металл с использованием мкэ. Вібрації в техніці та технологіях. 2008. №3. С. 58-61.

87. Нахайчук О.В., Мізрах А.А., Пухтіцька Н.О., Музичук В.І. Дослідження впливу тертя на напружений стан при вдавлюванні заокругленого індентора. Проблеми трибології. №4. С. 11-16.

88. Николаев А.Г., Проценко В.С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344с.

89. Николаев А.Г., Танчик Е.А. Распределение напряжений в области четырех сжатых сфероидальных включений в упругом пространстве. Вісник Запорізького нац. унів. Фіз.-мат. науки. 2015. №3. С. 189-198.

90. Николаев А.Г., Танчик Е.А. Упругая механика многокомпонентных тел: монография. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т". Харьков: ХАИ, 2014. 271с.

91. Николаев А.Г., Щербакова Ю.А. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения. Мат. методи та фіз.-мех. поля. Т. 52. № 3. С. 160-169.

92. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М., ИЛ, 1962. 280с.

93. Онопрієнко О.Д., Лобода В.В. Електропровідна тріщина між різнорідними п'єзоелектричними матеріалами з контактуючими берегами. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2015. № 1. С. 117-127.

94. Острик В.И., Улитко А.Ф. Контактное взаимодействие жесткого клина с упругой полуплоскостью с учетом зон сцепления и проскальзывания в области контакта. МТТ, 2003. №1. С.93-106.
95. Острик В.И. Вдавливание штампа в упругую полосу при наличии трения и сцепления. Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. №5. С.118-129.
96. Острик В.И. Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. Теоретическая и прикладная механика. 2011. №48. С.22-28.
97. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Виннера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 2006. №48. 328 с.
98. Острик В.И. Контактна механіка: підруч. / Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2015. 560 с.
99. Острик В.И. Симетрія інверсії розв’язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. Т. 60. № 4. С. 90-110.
100. Павленко А.В. Передача нагрузки от стержня к упругому анизотропному полупространству. Изв. АН СССР, сер. мех. твердого тела. 1981. № 3. С.103-111.
101. Павленко А.В. Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией. Изв. АН СССР, сер. мех. твердого тела. 1976. № 3. С. 70–82.
102. Павленко А.В. Применение асимптотического метода к пространственной задаче теории упругости для композитных материалов. Изв. АН СССР, сер. мех. твердого тела. 1980, №3. 50–61.
103. Павленко А.В., Кагадий Т.С. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией. Методи розв’язування прикладних задач механіки. Дніпропетровськ, 2012. С. 320-327.
104. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
105. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М. Дія зосереджених джерел тепла в піроелектрику з тріщинами за сталої температури на їх берегах. Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2015. Т. 51, С. 55-61.
106. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М. Вивчення напруженого стану тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. Опір матеріалів і теорія споруд. 2015. № 95. С. ISSN 2410-2547

107. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963. Т.27. вып.5. С.821-832.
108. Попов Г.Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений. Изв. вузов. математика, 1967. №4.
109. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Журнал. тех. физики, 1965. Вып.35. №3.
110. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН Арм.ССР. механика, 1967. Т.20. №2. С.19-36.
111. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966. Т.30. вып.3. С.551-563.
112. Рыбаков Л.С., Черепанов Г.П. Дискретное взаимодействие пластины с полубесконечным стрингером. Прикл. матем. механ. 1977. С. 322-328.
113. Савін Г.Н., Тульчий В.И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев: Наук.думка. 1981. 324с.
114. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448с.
115. Солдатенков И.А. Постановка и решение задачи о вдавливании штампа в упругую полуплоскость. Изв. РАН ММТ, 2000. №4. С.39-52.
116. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж. 1997. 360с.
117. Спорыхин А.Н., Щеглова Ю.Д. Метод возмущений в задачах упругопластического кручения стержней. Мех. тв. тела. 2000. №5. С. 54-64.
118. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 736 с.
119. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с односторонним дискретным контактом. Математика и математическое моделирование. 2015. №4. С. 93-110.
120. Улітко А.Ф., Острик В.І. Фрикційний контакт жорсткого конуса з пружним півпростором. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2012. Т. 54, №4. С.106-116.
121. Фалькович С.В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. ПММ, 1945. Т.9. Вып.5. С.425-432.
122. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1972. 88 с.



123. Шерман Д.И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. Прикл. матем. механ. 19Т.6. Вып. 6, С. 509-514.

124. Шиндер В.К., Ткаченко П.А., Томецька С.І. Математичне моделювання взаємодії фізико-механічних полів в кусково-однорідному анізотропному тілі із врахуванням піро- та п'єзоелектричних ефектів. Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2006. № 562. С. 109-114.

125. Шиндер В.К. Математична модель напруженого стану анізотропної пластини із врахуванням п'єзо- та піроелектричних ефектів: Мат. Всеукраїнської наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науковотехнічних дослідженнях". Львів, 5-7 жовтня 1995 р

126. Шиндер В.К. Розв'язок задачі магнітопружності для пластинчастої конструкції з криволінійним вирізом: Зб. наук. ст. "Проблеми теорії та практики будівництва". Т. 2 "Сталеві конструкції. Теоретична і будівельна механіка". 1997. С. 142-145.

127. Шпорта А.Г. Контактна взаємодія стрингера та ортотропної пластини з криволінійною анізотропією. Проблеми механіки суцільного середовища. Дніпро, 2020. Вип. 30. С. 185-194. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219037>.

128. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 270с.

129. Щербина И.В., Белова О.В., Кагадий Т.С. Применение асимптотического метода к решению задачи о передаче нагрузки для тел конечных размеров. Вестник Херсонского национального технического университета. 2017. Т. 2, №3(62). С. 240-246.

130. Antipov Y.A., Dickinson B.T. Dynamic problem of coupled thermoelasticity for a thin composite structure. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. P. 1274-1290.

131. Antipov Y.A., Mkhitaryan S.M. A crack induced by a thin rigid inclusion partly debonded from the matrix. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2016. Vol. 70. P. 153-185.

132. Antipov Y.A., Smirnov A.V. Fundamental solution and the weight functions of the transient problem on a semi-infinite crack propagating in a half-plane. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. 2016. Vol. 96. P. 1156-1174.

133. Benvensite Y.A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphace between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids*, 2006. V. 54. Pp. 708-734.

134. Bojtár G., Csizmadia B.M., Égert J. Numerical Estimation Method of Orthotropic Material Properties of a Roving for Reinforcement of Composite Materials. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2016. Vol. 13, No. 6. Pp. 163-182.
135. Campbell J.E., Thompson R.P., Dean J., Clyne T.W. Experimental and computational issues for automated extraction of plasticity parameters from spherical indentation. *Mechanics of Materials*. 2018. V.124, Pp. 118-131.
136. Chi H., Beirão da Veiga L., Paulino G.H. Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017. Vol. 31 148-192.
137. Dini D., Hills D.A., Bounded asymptotic solutions for incomplete contacts in partial slip. *International journal of solids and structures*. 2004. Vol.41, Iss. 24-25. P. 7049-7062.
138. Felger J., Becker W. A complex potential method for the asymptotic solution of wedge problems using first-order shear deformation plate theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2017.V. 61, Pp. 383-392. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.016>
139. Feng W.J., Ma P., Su R.K.L. An electrically impermeable and magnetically permeable interface crack with a contact zone in magnetoelastic bimaterials under a thermal flux and magnetoelastomechanical loads. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 49, Issues 23-24, pp. 3472-3483.
140. Gao Y.C., Mai Y.-W. The contact problem of a rubber half-space dented by a rigid cone apex. *Arch. Appl. Mech*, 2002. 72. №4-5. Pp.213-238.
141. Ghorashi M. Nonlinear static and stability analysis of composite beams by the variational asymptotic method. *International Journal of Engineering Science*, 2018. V. 128, Pp. 127-150. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.03.011>
142. Goodman L.E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres. *J. Appl. Mech.*, 1962. V. 29. № 3. P. 515.
143. Goryacheva I.G., Murthy H., Farris T.N. Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges. *International journal of fatigue*. 2002. Vol. 24, No.11. P. 1191-1201.
144. Govorukha V., Kamlah M., Sheveleva A. Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field. *Acta Mechanica*, 2015. V. 226, Iss. 7, pp. 2379-2391.
145. Herrmann K. P., Loboda V.V., Govorucha V.B. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial. *International J. of Fracture*. 2001. V. 111. P. 203-227.

146. Herrmann K.P., Loboda V.V. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models. *Archive of Applied Mechanics*. 2000. V. 70. P. 127-143.
147. Hu K., Chen Z. Pre-curving analysis of an opening crack in a magneto-electroelastic strip under in-plane impact loadings. *Journal of Applied Physics*. 2012. 112(12). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4770395>
148. Huang C., Hu C. Three-dimensional analyses of stress singularities at the vertex of a piezoelectric wedge. *Applied Mathematical Modelling*, 2013. V. 37, pp. 4517-4537.
149. Kaessmair S., Javili A., Steinmann P., Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces. *Archive of Applied Mechanics*, 2014. V. 84, Pp. 1409-1426.
150. Kagadiy T., Shporta A. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing element. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. Dnipro*, 2019. № 5. P. 60-64. DOI: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10>.
151. Kagadiy T.S., Shporta A.H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Науковий вісник НГУ*, 2015. №3. С.76-81.
152. Kaloerov S., Glushankov E. Determining the Thermo-Electro-Magneto-Elastic State of Multiply Connected Piecewise-Homogeneous Piezoelectric Plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018. № 59. pp 1036-1048. 10DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894418060093>.
153. Kryvoruchko A.G., Sheveleva A.E., Loboda V.V. An antiplane problem for piezoelectromagnetic bimaterial with inclusion at the interface. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2018. № 2. С. 64-73. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-07
154. Li Z.H., Ma Q., Cui J.Z. Multi-scale modal analysis for axisymmetric and spherical symmetric structures with periodic configurations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 317, P. 1068-1101.
155. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Electro-mechanical pre-fracture zones for an electrically permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial. *International Journal of Solids and Structures*, 2007. V. 44, Iss. 17. Pp. 5538-5553.
156. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding. *International Journal of Solids and Structures*, 2010. V. 47, Iss. 14–15. pp. 1795-1806.

157. Loboda V., Sheveleva A., Lapusta Y. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51. P. 63-73.

158. Mengolini M., Benedetto M. F., Aragón A. M. An engineering perspective to the virtual element method and its interplay with the standard finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019. Vol. 350, P. 995-1023.

159. Nanthakumar S.S., Lahmer T., Rabczuk T. Detection of flaws in piezoelectric structures using extended FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2013. V. 6. Pp. 373-389.

160. Nourazar M., Ayatollahi M., Miandari J., Varasteh S. Fracture analysis of a cracked orthotropic strip bonded to a magneto-electro-elastic layer. In *Procedia Structural Integrity*. 2016. Vol. 2, pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.06.427>

161. Panda P. Review: Environmental Friendly Lead-Free Piezoelectric Materials. *Journal of Materials Science*, 2009. V.44. Pp. 5049-5062. DOI:10.1007/s10853-009-3643-0.

162. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015. V. 61. Pp. 194-206.

163. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014. V. 48. Pp. 87-101.

164. Protsenko V.S., Ukraynets N.A. Justification of the Generalized Fourier method for the mixed problem of elasticity theory in the half-space with the cylindrical cavity. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. 2016. V.2. Pp. 213-221.

165. Rodríguez-Tembleque L., Sáez A., Aliabadi M.H. Indentation response of piezoelectric films under frictional contact. *International Journal of Engineering Science*, 2016. Volume 107, Pages 36-53.

166. Shporta A., Kagadiy T., Onopriyenko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. Dnipro*, 2020. № 1. P. 130-134. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130>.

167. Slobodyan B.S., Lyashenko B.A., Malanchuk N.I., Marchuk V.E., Martynyak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 1. Pp. 110-120.

168. Spence D.A. An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1973. V. 73, Iss. 1. pp. 249-268. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100047666>

169. Srivastava K.N., Palaiya R.M. Asymmetric Distribution of Thermal Stress in a Semi- Infinite Elastic Solid Containing a Penny-Shaped Crack. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970. V.50, Iss.12. Pp. 721-735. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19700501203>.

170. Su J., Ke L.-L., El-Borgi S., Xiang Y., Wang Y.-Sh. An effective method for the sliding frictional contact of a conducting cylindrical punch on FGPMs. *International Journal of Solids and Structures*, 2018. V. 141–142. Pp. 127-136.

171. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered halfspace under a conducting punch. *International Journal of Solids and Structures*, 2016. V. 90, pp. 45-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.011>.

172. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Axisymmetric torsional fretting contact between a spherical punch and an FGPM coating. *Applied Mathematical Modelling*, 2017. V. 52. pp. 576-589.

173. Temme N.M. Uniform asymptotic methods for integrals. *Indagationes Mathematicae*, 2013. V. 24, Iss. 4, Pp. 739-765. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2013.08.001>

174. Tian W.Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *Europ. J. Mech. Part A*. 2004. Vol. 2 P. 599-614.

175. Tian W.Y., Rajapakse R.K.N.D. Theoretical model for crack branching in magneto-electroelastic solids. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2008. 27(1–2). P. 53-74. DOI: <https://doi.org/10.3233/jae-2008-932>.

176. Tian W.Y., Rajapakse, R.K.N.D. Field intensity factors of a penny-shaped crack in a magneto-electroelastic layer. *Journal of Alloys and Compounds*. 2008. 449(1–2). 161–171. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2005.11.097>

177. Vasiliev A.S. Penetration of a spherical conductive punch into a piezoelectric half-space with a functionally graded coating. *International Journal of Engineering Science*, 2019 V. 142. P. 230-241.

178. Volkov S., Vasiliev A., Aizikovich S., Mitrin B. Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch. *Acta Mechanica*. 2017. № 2. pp. 1-14.

179. Wan Y., Yue Y., Zhong Z. Multilayered piezomagnetic/piezoelectric composite with periodic interface cracks under magnetic or electric field. *Eng. Fract. Mech.*, 2012. V. 84, pp. 132-145.

180. Wang X., Zhou K. A crack with surface effects in a piezoelectric material. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017. V 22. I. 1. pp. 3-19.

181. Westmann R.A. Asymmetric Mixed Boundary-Value Problems of the Elastic Half-Space. *J. Appl. Mech.*, 1965, V. 32(2): Pp. 411-417. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3625815>.

182. Westmann R.A. Simultaneous pairs of dual integral equations. *SIAM Review. Ser.*, 1965. V.7. P.341-348.

183. Yue Y., Wan Y. Multilayered piezomagnetic/piezoelectric composite with periodic interfacial Yoffe-type cracks under magnetic or electric field. *Acta Mech*. 2014. V. 225, Pp. 21.

184. Zhang J., van den Boom S.J., Keulen F., Aragón A.M. A stable discontinuity-enriched finite element method for 3-D problems containing weak and strong discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019. Vol. 355, P. 1097-1123.

185. Zhupanska O.I. On the Analytical Approach to Galin's Stick-Slip Problem. A Survey. *Journal of Elasticity*. 2008. Vol. 90. Iss. 3, pp. 315-333.

## ДОДАТКИ

### Додаток А

#### Список публікацій за темою дисертації і відомості про апробацію результатів дисертації

#### Праці, у яких опубліковано основні наукові результати

1. Шпорта А.Г. Контактна взаємодія стрингера та ортотропної пластини з криволінійною анізотропією. *Проблеми механіки суцільного середовища*. Дніпро, 2020. Вип. 30. С. 185-194. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219037>.

2. Shporta A., Kagadiy T., Onopriyenko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2020. № 1. P. 130-134. DOI: [130-134  
https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130](https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130)

3. Kagadiy T., Shporta A. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing element. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2019. № 5. P. 60-64. DOI: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10>.

4. Kagadiy T. S., Shporta, A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2015. № 3. P. 76-81.

URL: <http://nvngu.in.ua/index.php/ru/component/jdownloads/finish/54-03/8331-2015-03-shporta/0>.

5. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Урахування тертя та зчеплення у контактній задачі для криволінійного сектора. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2019. № 1. С. 126-133.

6. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні*

питання математичного моделювання. Т. 3. № 2.1, 2020. С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>

7. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Математичне моделювання в задачах електропружності. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2019. № 2(69). Ч.3. С. 216-221.

### **Праці апробаційного характеру**

1. Шпорта А., Кагадій Т. Застосування методу збурень до розв'язання деяких контактних задач. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: матеріали міжнародної наук. - тех. конф., присвяч. 100-й річниці з дня народження акад. В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.)* Дніпро, 2019. С.136-137.

2. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Решение задач для пластин с эллиптическим и гипотрохоидным отверстием. 2012 р., *СевНТУ, конференція*

3. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Точные решения некоторых задач для пластин с отверстием. 2013р, *конференція, присвячена 100-чю кафедри вищої математики НГУ*.

4. T Kagadiy, A Shporta, I Scherbina and O Onopriienko. Modeling Issues in Problems of the Elasticity and Viscoelasticity Theory. *CAD in Machinery Design: Implementation and Educational Issues (CADMD 2020) 26th -27th November 2020, Lviv, Ukraine*. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1016/1/012010> .