

ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури”

Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Зеленський Анатолій Григорович

УДК.539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ПРИ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

01. 02. 04 – механіка деформівного твердого тіла

фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А. Г. Зеленський

Науковий консультант Приварников Аркадій Костянтинович,

докт. фіз.-мат. наук, професор

Дніпро – 2021

АНОТАЦІЯ

Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії нетонких пружних пластин і пологих оболонок при статичному навантаженні. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, МОН України, м. Дніпро, 2021.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури”, м. Дніпро.

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів математичної теорії (МТ) нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної теорії пружності (ТП), розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв’язання систем диференціальних рівнянь (СДР) високих порядків, отриманні частинних і загальних розв’язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей напружено-деформованого стану (НДС) від механіко-геометричних характеристик (МГХ), типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв’язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Побудова нових варіантів МТ вказаних елементів оснований на комплексному методі зведення тривимірної задачі до двовимірної, який поєднує варіаційний принцип Рейснера, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену методику взаємозв’язаних рівнянь, метод збурень (для однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин і пологих

оболонок) і метод послідовних наближень (МПН) (для шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок). Тривимірні задачі статичної механіки для нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин і пологих оболонок (нелінійно пружних шаруватих елементів) на основі МТ методом збурень (МПН) зведена до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач. Розроблені нові методи інтегрування неоднорідних СДР рівноваги (СДРР) високих порядків МТ нетонких пластин і пологих оболонок, ґрунтовані на математичних перетвореннях ДР і зведенні їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку (для пологих оболонок з використанням методів збурень і послідовних наближень); нові наближені методи розв'язання отриманих СДР; розвинуті методи математичної фізики. Отримані в явному вигляді СДРР у високих наближеннях для вказаних елементів, частинні і загальні розв'язки граничних задач при поперечних навантаженнях різного типу і числові результати, які дали можливість одержати з високою точністю НДС і нові якісні ефекти впливу на нього МГХ, типу навантаження, крайових ефектів (КЕ) і наближень варіантів МТ.

Об'єкт дослідження – процес пружного деформування нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні.

Предмет дослідження – побудова нових ефективних варіантів МТ нетонких однорідних фізично лінійних (транстропних і ортотропних) і нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок та шаруватих пластин і пологих оболонок з транстропними та нелінійно пружними шарами при довільному статичному поперечному навантаженні; розробка аналітичних методів розв'язання граничних задач варіантів МТ, які зводяться до СДРР високих порядків; отримання загальних розв'язків, аналітичних та числових залежностей НДС вказаних елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах МТ.

Методи дослідження. Дослідження здійснювалися з використанням: створеної методології побудови варіантів МТ, яка поєднує метод розвинення компонент НДС і граничних умов, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних пластин та пологих оболонок) або ж їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів) і методу взаємозв'язаних рівнянь;

методу збурень лінійно пружних та ізотропних властивостей матеріалу (для фізично нелінійних і ортотропних пластин та оболонок); операторного методу (при перетворенні СДРР і отриманні форм загальних розв'язків), операторного методу (при перетворенні СДРР і отриманні форм загальних розв'язків), нового розробленого і узагальненого операторного методу зведення неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку; нового розробленого методу інтегрування систем ДРР високих порядків; методів одинарних та подвійних тригонометричних рядів (для розв'язання граничних задач); методу осереднення (в МТ пологих оболонок); прямих методів інтегрування звичайних ДР; методів математичної фізики (знаходження частинних і загальних розв'язків); методу інтегрального перетворення Ганкеля (при знаходженні частинних розв'язків ДР); методу спеціальних функцій (в задачах з переривчастими і локальними навантаженнями); нових розроблених наближених методів розв'язання СДР високого порядку для пластин і пологих оболонок; МПН (у варіантах МТ пологих трансропних оболонок та фізично нелінійних шаруватих пластин і пологих оболонок), методу колокацій (для шаруватих пластин).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1) Розроблено нову методологію побудови нових варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної товщини, основу на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує варіаційний принцип Рейснера, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій в межах кожного шару (для шаруватих елементів симетричної і несиметричної структур), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену методику взаємозв'язаних рівнянь, метод збурень (для однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин (ФНП) і пологих фізично нелінійних оболонок (ФНО)) і МПН (для однорідних трансропних пологих оболонок і шаруватих ФНП і пологих ФНО).

2) На основі створеної методології уперше побудовані нові варіанти МТ: нетонких однорідних трансропних пластин та пологих оболонок у високих наближеннях,

нетонких однорідних ортотропних та ізотропних ФНП та пологих ФНО, шаруватих трансропних і ФНП і пологих ФНО симетричної та несиметричної структур.

3) Уперше отримані в явному вигляді СДРР у вищих наближеннях варіантів МТ указаних елементів, що дає можливість визначати їх НДС з високою точністю.

4. Уперше тривимірна задача статки для нетонких ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин та пологих оболонок на основі МТ методом збурень пружних властивостей зведена у явному вигляді до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач, у яких праві частини ДР залежать лінійно (для ортотропних елементів) і нелінійно (для фізично нелінійних елементів) від компонент НДС попередніх наближень, що дає реальну можливість розв'язувати прикладні задачі.

5) Розроблено новий і узагальнено операторний метод зведення неоднорідних ДР з частинними похідними високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку.

6) Уперше: розроблено новий метод інтегрування неоднорідних СДРР нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і ФНП, оснований на алгебраїчних, диференціальних та операторних перетвореннях СДР і методі зведення їх до однорідних (для лінійних елементів) і неоднорідних (для лінійних і нелінійних елементів) ДР 2-го порядку.

7) Уперше в МТ нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і ФНП новим розробленим методом отримані загальні розв'язки неоднорідних СДРР через загальні розв'язки однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку.

8) Уперше розроблені нові наближені аналітичні методи розв'язання СДР високих порядків МТ пластин і пологих оболонок довільної товщини, згідно з якими СДР для пластин порядку $4N$ зводяться до послідовного розв'язання N ДР 4-го порядку, а СДР для оболонок порядку $4N$ – до розв'язання ДР 8-го порядку і $(N - 2)$ ДР 4-го порядку.

9) Уперше в МТ розроблені нові наближені методи зведення систем ДРР пологих оболонок довільної сталої товщини (з використанням методів збурень і МПН) до рекурентної послідовності систем ДРР для пластин (задачі обтискання і згину), розв'язання яких визначаються диференціальними рівняннями 2-го порядку.

10) Доведені теореми про збіжність рядів для напружень за поліномами Лежандра, переміщень (у методі збурень), обґрунтована однозначність розв'язків другої основної граничної задачі.

11) У новій постановці отримані аналітичні розв'язки СДР варіантів МТ нетонких трансропних пластин та пологих оболонок в тригонометричних рядах при плавних, швидкозмінюваних у області, локальних і зосереджених навантаженнях.

12) Уперше в МТ товстих трансропних пластин:

- отримані частинні і загальні розв'язки систем ДР високих порядків при вісесиметричних переривчастих і зосереджених навантаженнях (по колу, кільцю, кругу, в центрі) з використанням інтегрального перетворення Ганкеля до отриманих неоднорідних ДР 2-го порядку;
- одержані аналітичні розв'язки граничних задач з урахуванням крайових ефектів для півнескінчених, круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах на бічній поверхні і різних поперечних навантаженнях;
- розроблено нову методологію знаходження фундаментальних розв'язків ДР у високих наближеннях; отримані фундаментальні розв'язки з полюсом у довільній точці, які використані для знаходження розв'язків при довільних навантаженнях.

13) Уперше в МТ поставлені граничні задачі для ортотропних і ізотропних ФНП та ФНО і отримані загальні розв'язки в тригонометричних рядах; у новій постановці отримані аналітичні розв'язки для ФНП і ФНО при граничних умовах Нав'є.

14) Розроблені алгоритми і створені пакети математичних програм на мові ФОРТ-РАН для розв'язання в новій постановці граничних задач по знаходженню внутрішнього НДС однорідних пластин і пологих оболонок (трансропних, ортотропних, фізично нелінійних), двошарових і тришарових трансропних пластин довільної сталої товщини при різних поперечних навантаженнях, і крайових ефектів однорідних пластин. Отримані числові результати дали можливість оцінити НДС залежно від МГХ та типу навантаження, установити якісний вплив крайових ефектів на НДС пластин, визначити межі застосування теорії Тимошенка-Рейснера та наближень варіантів МТ в залежності від МГХ і типу навантаження, одержати нові якісні ефекти та важливі висновки.

Теоретичне значення дисертаційної роботи полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ, розробленні на їх основі нових аналітичних математичних методів розв'язання граничних задач теорії нетонких однорідних, шаруватих, фізично лінійних та ФНП і пологих ФНО, які дають можливість звести СДРР високих порядків до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку з подальшим використанням методів математичної фізики

для отримання їх загальних розв'язків і дослідження НДС та крайових ефектів з високою точністю, що особливо є важливим при наявності локальних навантажень, отворів, та у випадках немалої товщини вказаних елементів. Одержані матеріали дисертаційної роботи впроваджені в наукові програми і теми ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури” (ПДАБА) на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів за планами наукових досліджень держбюджетної науково-дослідної тематики (є довідка, у додатку Ж). Теоретичні результати впроваджені в навчальному процесі з курсу ТП для студентів будівельного факультету ДВНЗ “ПДАБА” (є акт впровадження, у додатку Ж), можуть бути також використані в курсах теорії пластин і оболонок, спецкурсах, як матеріал навчального посібника та в науковій роботі аспірантів, магістрів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання їх в НДІ, проектних організаціях та в інших дослідних установах високоточних розрахунків і проектування сучасних конструкцій. Це дасть змогу створювати надійні та довговічні споруди і конструкції з високою питомою міцністю і жорсткістю. Впровадження в практичних цілях матеріалів дисертаційної роботи підтверджено актом впровадження результатів досліджень у ООО “Укррезервуарсервіс”, у додатку Ж).

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що представлені до захисту, отримані здобувачем самостійно. У наукових публікаціях із співавторами особистий внесок здобувача полягає в наступному. У [44, 46] побудовано варіант МТ нетонких транстропних пластин високого наближення, отримані основні рівняння, розроблено метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми, отримані числові результати, разом зі співавтором здійснювалась постановка задач і обговорювались результати. У [6, 8, 84, 85] виведені ДР, розроблені методи їх розв'язання, отримані аналітичні розв'язки; у [10–12, 60–65] розроблені метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми; разом з науковим консультантом і співавторами здійснювалась постановка задач і обговорювались результати.

У першому розділі наведений огляд наукових праць в області лінійно та нелінійно пружних однорідних та шаруватих пластин та оболонок. Виконано аналіз класичних, уточнюючих, математичних теорій, тривимірних граничних задач ТП.

У другому розділі обґрунтовується вибір аналітичного напрямку досліджень, формулюється методологія побудови нових варіантів МТ нетонких однорідних і ша-

руватих лінійно і нелінійно пружних пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні; наводяться нові розроблені і розвинуті методи зведення неоднорідних СДР високих порядків в МТ до ДР 2-го порядку.

У третьому розділі на основі розробленої методології побудовано новий варіант МТ однорідних транстропних пластин довільної товщини з позицій тривимірної ТП. Уперше побудовані загальні розв'язки неоднорідних СДРР високих порядків. Розроблені аналітичні методи розв'язання граничних задач, отримані числові результати і важливі висновки.

У четвертому розділі уперше побудовано новий варіант МТ нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин, розроблені методи розв'язання СДРР, одержані числові результати і нові висновки.

У п'ятому розділі побудовано новий варіант МТ нетонких однорідних трансверсально ізотропних пологих оболонок. Розроблені аналітичні методи розв'язання граничних задач і знаходження загальних розв'язків СДРР. Досліджено НДС.

У шостому розділі уперше побудовано новий варіант МТ нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пологих оболонок, розроблені методи розв'язання граничних задач, отримані нові висновки.

У сьомому розділі уперше побудовано новий варіант МТ нетонких шаруватих транстропних і фізично нелінійних пластин і пологих оболонок, розроблені методи розв'язання СДРР граничних задач, одержані числові результати і сформульовані важливі висновки.

У восьмому розділі розроблені нові наближені аналітичні методи розв'язання СДРР нетонких пластин і пологих оболонок на основі побудованих варіантів МТ, розв'язані задачі для круглих і півнескінченних пластин при різних навантаженнях і граничних умовах; побудовані фундаментальні розв'язки.

Ключові слова: нові варіанти математичної теорії, нетонкі лінійно і нелінійно пружні однорідні та шаруваті пластини і пологі оболонки, поліноми Лежандра, варіаційний принцип Рейснера, диференціальні рівняння високих порядків, методи, загальні розв'язки, напружено-деформований стан, крайові ефекти.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Зеленський А. Г. Фундаментальні розв’язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин. Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки. Visnyk of Zaporizhzhya National University, Physical and Mathematical Sciences. Запоріжжя, 2018. № 1. С. 13–29. (**Index COPERNICUS, ICV 2017: 80.00, CiteFactor, ResearchBib, Journal Factor**). DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-1-02.

Статті у зарубіжних англomовних наукових виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Zelensky A. G. Mathematical Theory of Transversally Isotropic Shells of Arbitrary Thickness at Static Load. *Materials Science Forum. Actual problems of engineering mechanics*. Switzerland: Trans Tech Publications Ltd, 2019. V. 968. P. 496–510. **Scopus**. ISSN: 1662–9752, doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.496.

3. Zelensky A. G. The Method of Successive Approximations in the Mathematical theory of Shallow Shells of Arbitrary Thickness. *World Science, Multidisciplinary Scientific Edition, Physics and Mathematics*. RS Global Sp. z O.O.: Warsaw, 2019. V. 1, №11(51). P. 31–39. (Наукометричні бази даних: **RS Global, Google Scholar, Index Copernicus, Academia.edu, Library.ru, Biblioteka Narodowa, CiteFactor**). ISSN 2413–1032; DOI:https://doi.org/10.31435/rsglobal_ws/30112019/6764; <http://ws-conference.com/>.

4. Zelensky A. G. Analytical and Practical Development of Variant of Mathematical Theory of Shells of Small Curvature of Arbitrary Thickness. *New Stages of Development of Modern Science in Ukraine and eu Countries. Chapter “Physical and Mathematical Sciences”*. **Monograph**. Riga, Latvia: “**Baltija Publishing**”, 2019. P. 308–328. ISBN:978-9934-588-15-0, DOI:<https://doi.org/10.30525/978-9934-588-15-0-63>.

5. Zelensky A. G. Some theorems of Variant of Mathematical Theory of Plates and Shallow Shells of Arbitrary Thickness. Proceedings of the XX1 International Scientific and Practical Conference. International Trends in Science and Technology. Multidisciplinary Scientific Edition. Physics and Mathematics. RS Global Sp. z O.O., Warsaw, Poland, January 31, 2020. P. 3–11. ISBN 978-83-956628-1-2. Indexed by: **RS Global, Academia.edu, Google Scholar.**

6. Zelensky Anatoly, Privarnikov Arkady. The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1). *Innovative scientific researches: european development trends and regional aspect. Chapter «Physical and Mathematical Sciences»*. **Collective monograph**, Riga, Latvia: “**Baltija Publishing**”, 2020. P. 221–255. ISBN: 978-9934-588-38-9, DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-588-38-9-6>.

7. Zelensky A. G. Development of a Variant of Mathematical Theory of Thick Transversal-isotropic Plates, *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*. Karlsruhe, 2020. Issue № 11. Part 1. P. 27–41. ISSN 2567-5273, DOI: 10.30890/2567-5273.2020-11-01-041. Indexed in **INDEXCOPERNICUS** high impact factor(ICV:84.35). <http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit11-01-041>.

**Статті у наукових виданнях України,
які входять до міжнародних наукометричних баз:**

8. Зеленський А. Г. Приварников А. К. Про метод розв’язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *International Scientific Journal. Международный научный журнал. Сб. научн. трудов. Физико-математические науки*. Київ, 2015. № 2. С. 154–159. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Журнал зареєстр. в наукометр. базах ланих: **Open Academic Journal Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitetsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, ПИИЦ, CiteFactor**).

9. Zelensky A. G. Method of solution equation system within the variant of mathematical theory of non-thin shallow shells. *International scientific journal. Фізико-математические науки*. Київ, 2016. №7. Р. 137–142. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Наукометр. бази даних: **Open Academic Journal Index, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, CiteFactor, ПИИЦ, Cosmos Impact Factor**).

Статті у наукових фахових виданнях України:

10. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Расчет пологой панели при поперечном локальном нагружении по неклассической теории изгиба. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Теоретичні основи будівництва*. Зб. наук. праць Міжнар. конф. (Дніпропетровськ, 24.06–29.06.1999). Теоретичні основи будівництва. Дн-вськ, ПДАБА, 1999. № 7. Р. 157–162. ISBN 5–7763–8880–5.

11. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант некласичної теорії згину трансверсально ізотропних пластин і пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дніпропетровськ, 1999. В. 2, т. 2. С. 58 – 65.

12. Зеленський А. Г. Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант зведення тривимірної задачі згину оболонок до двовимірної. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, 26.06–30.06 2000). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2000. № 8. Р. 426–430. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

13. Зеленський А. Г. Формулювання варіаційного принципу Рейснера для фізично-нелінійного тіла. *Строительство, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2000. В. 11. С. 133 – 138.

14. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пластин. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2000. В. 3, т. 2. С. 30–37.

15. Зеленський А. Г. Про взаємозв'язок варіаційних принципів Рейснера і Ху-Вашіцу для фізично нелінійного тіла. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2000. № 12. С. 31–36.

16. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину фізично нелінійних однорідних пластин. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 2. С. 7–13.

17. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину однорідних нелінійно пружних пологих оболонок. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 3. С. 20–26.

18. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 4, т. 1. С. 56–64.

19. Зеленський А. Г. Основні рівняння згину однорідних фізично нелінійних пластин із урахуванням обтискання. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropetrovsk, 27.06–01.07 2001). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, 2001. № 9. Р. 63–68. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

20. Зеленський А. Г. Про побудову уточнених рівнянь згину для нелінійно пружних круглих пластин з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 5, т. 1. С. 167–173.

21. Зеленський А. Г. Розвинення методу збурень для побудови уточненої теорії згину нетонких сферичних оболонок. *Вестник национального технического ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин*. Харьков, 2002. Т. 8, № 9. С. 83–88.

22. Зеленський А. Г. До питання про розрахунок ортотропних пластин за неklasичною теорією. *Перспективні задачі інженерної науки. Зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2002. В. 4. С. 134–143. ISBN 966–7282–70–8.

23. Зеленський А. Г. Метод збурень в одній неklasичній теорії згину нелінійно пружних круглих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warszaw, june 2002). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2002. № 10. Р. 644–649. ISBN 5–7763–8880–5.

24. Зеленський А. Г. Застосування методу збурень в теорії розрахунку ортотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 1. С. 131–140.

25. Зеленський А. Г. Уточнена теорія згину фізично нелінійних пологих сферичних оболонок з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механі-*

ка. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 2. С. 43–50.

26. Зеленский А. Г. Метод возмущения упругих свойств в неклассической теории изгиба анизотропных оболочек. *Вісник Донецького ун-ту. Серія А. Природничі науки*. Донецьк, 2003. № 1. С. 103–108.

27. Зеленський А. Г. Про розрахунок багат шарових пластин симетричної структури за не класичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Dnipropetrovsk-Warsaw, June 2003). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw; 2003. № 11. Р. 121–126. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

28. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за не класичною теорією. *Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фізико-математичні науки*. Київ, 2003. В. 5. С. 36–44.

29. Зеленський А. Г. Застосування поліномів Лежандра в одній теорії згинання нетонких багат шарових фізично нелінійних оболонок симетричної структури. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2003. В 7, т. 1. С. 140–147.

30. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь не класичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2003. В. 5. С. 70–79.

31. Зеленський А. Г. Рівняння не класичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Вестник национального технического ун-та „ХПИ”. Динамика и прочность машин*. Харьков, 2004. № 19. С. 89–96.

32. Зеленський А. Г. Зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної для шаруватих трансверсально-ізотропних пологих оболонок несиметричної структури. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw–Dnepropetrovsk, June 2004). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw–Dnepropetrovsk, 2004. V. 2, № 12. Р. 679–686. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

33. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2004. В. 6. С. 58–67.

34. Зеленський А. Г. Розрахунок на згин фізично нелінійних товстих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions*

(Dnepropetrovsk–Warsaw, June 2005). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Dnepropetrovsk–Warsaw, 2005. № 13. Р. 139–144. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

35. Зеленський А. Г. Використання поліномів Лежандра для побудови уточненої некласичної теорії згину фізично нелінійних шаруватих оболонок несиметричної структури. *Новини науки Придніпров'я*. Дніпропетровськ, 2005. №2. С. 12–17.

36. Зеленський А. Г. Наближений розрахунок багат шарових плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2005, № 10/1. *Серія механіка*. В. 9, т. 1. С. 167–173.

37. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2005. № 10/2. *Серія механіка*. В. 9, т. 2. С. 51–58.

38. Зеленський А. Г. Наближений метод в аналітичній теорії трансверсально-ізотропних круглих плит. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2006. В. 7. С. 47–56.

39. Зеленський А. Г. Аналітична теорія розрахунку нетонких пластин та оболонок і її застосування. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw–Vilnius, June 2006). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2006. № 14. Р. 569–578. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

40. Зеленський А. Г. Про метод розрахунку круглих трансверсально-ізотропних плит. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, May 2007). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2007. № 15. Р. 721–730. ISBN 5 978–83–7207–683–0.

41. Зеленський А. Г. Метод розв'язування задачі згину круглої транстропної плити. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007, № 2/1. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 97–104.

42. Зеленський А. Г. Варіант аналітичної теорії розрахунку пологих оболонок при кососиметричному навантаженні з урахуванням наближень вищих порядків. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2007. В. 11. С. 63–70.

43. Зеленський А. Г. Метод взаємозв'язаних рівнянь вищого порядку в аналітичній теорії пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2007. В. 8. С. 67–83.

44. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналі-

тичній теорії транстропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007. №2/2. *Серія механіка*. В. 11, т. 2. С. 84–94.

45. Зеленський А. Г. Розрахунок методом збурень анізотропної оболонки за уточненою теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, June 2008). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2008. № 16. Р. 383–392. ISBN 978–83–7207–763–9.

46. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. До розрахунку пластин на згин з урахуванням наближень вищих порядків. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2008. Т. 16, №5. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 127–136.

47. Зеленський А. Г. Метод розв'язування системи диференціальних рівнянь високого порядку в аналітичній теорії нетонких оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2008. В. 9. С. 93–103.

48. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів у розрахунку нелінійно пружних товстих пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2008. В. 12. С. 82–95.

49. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів в аналітичній теорії нетонких фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 1. С. 121–132.

50. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 2. С. 54–62.

51. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування систем диференціальних рівнянь в теорії нетонких пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2010. В. 14. С. 175–182.

52. Зеленський А. Г. Практичні висновки по результатам розрахунку однорідних пластин та пологих оболонок довільної товщини за аналітичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2010. V. 18. Р. 325–330. ISBN 978–83–7207–894–0.

53. Зеленський А. Г. Моделі і методи аналітичної теорії нетонких пластин та пологих оболонок при статичному навантаженні. *Вісник Придніпровської державної ака-*

демії будівництва та архітектури. Зб. наук. праць. Дн-вськ: ПДАБА, 2011. №1–2. С. 21–30.

54. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування системи диференціальних рівнянь теорії нетонких пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-ськ, 2011. В. 12. С. 131–139.

55. Зеленський А. Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010)*. *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2011. V. 18. P. 263–267. ISBN 978–83–7207–894–0.

56. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2012. В. 13. С. 188–196.

57. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2012. Т. 20, № 5. *Серія механіка*. В.16, т. 2/1. С. 60–66.

58. Зеленський А. Г. Використання методу зниження порядку диференціальних рівнянь в неklasичній теорії пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, September 2012)*. *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2012. V. 20. P. 191–196. ISBN 978–83–7814–034–4.

59. Зеленський А. Г. Про розв'язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2015. № 2. С. 79–86.

Статті у наукових виданнях України:

60. Прусаков А. П., Вовченко Н. Г., Зеленский А. Г. Об изгибе пологих оболочек в рамках одной неклассической теории. Тезисы докладов IV-й Междунар. науч. конф. “*Материалы для строительных конструкций, ИСМБ’96*” (Дн-вск, 29-31 мая 1996). Днепропетровск: ПГАСА. 1996. С. 123. ISBN 5-7763-8886-4.

61. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering (Polish-Ukrainian Seminar)* (Dnepropetrovsk–Warsaw, June 1996). *Теоретические основы строительства*. Дн-вск: ПГАСА. 1996. V. 1, Part 2. С. 304–307. ISBN 5–7763–8880–5.

62. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Ukrainian- Polish seminar* (Dnepropetrovsk, 30.06–06.07 1997). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, 1997. № 5. Р. 191–198. ISBN 5–7763–8880–5.

63. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. НДС пластин в рамках одной неклассической теории при поперечном локальном нагружении. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish–Ukrainian seminar* (Warsaw, 6.07–11.07.1998). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw; 1998. № 6. Р. 539–542. ISBN 5–7763–8880–5.

64. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Вариант неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек произвольной толщины. Зб. наук. праць ПДАБА. *Управління проектами та розвиток виробництва*. Дн-вськ: ПДАБА. 2000. С. 65–69.

Тези наукових доповідей:

65. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Про згин пластин в рамках однієї некласичної теорії. Materials of II International Symposium „*Fracture Mechanics and Physics of Construction Materials and Structures*”. Lviv-Dubliany, Ukraine, 1996. С. 105.

66. Зеленский А. Г. К вопросу о построении уточненной теории изгиба физически нелинейных однородных пластин. *Проблемы современного материаловедения, машиностроения*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2001. С. 247.

67. Зеленский А. Г. О методе решения задач изгиба нелинейно упругих толстых пластин. Тезисы докл. X междунар. конф. “*Математика. Экономика. Образование*”. Ростов на Дону, 2002. С. 69–70.

68. Зеленський А. Г. Метод возмущений в неклассической теории изгиба физически нелинейных пластин и оболочек. *Стр-во, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2002. В. 15, Ч. 2. С. 54. ISBN 966–7282–65–1.

69. Зеленський А. Г. Метод збурень в уточненій теорії розрахунку анізотропних пластин. *Стр-во, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2003. В. 22, ч. 3. С. 118. ISBN 966–7282–80–5.

70. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за некласичною теорією. *Сучасні проблеми механіки*. Тези доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 2003). Київ, 2003. С. 24.

71. Зеленський А. Г. Про одну теорію згинання шаруватих пластин. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Третьої Всеукр. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 2003). Дніпродзержинськ, 2003. С. 151.

72. Зеленський А. Г. Уточнені рівняння згину нелінійно пружних шаруватих пластин несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали 4-ї Всеукр. наук. конф. (Дн-вськ, 19-21 квітня 2004). Дн-вськ, 2004. С. 79.

73. Зеленський А. Г. Рівняння некласичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*. Анотації доповідей XII Міжнар. наук.-практ. конф. (Харків, 20-21 травня 2004). Харків, 2004. С. 66.

74. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. *Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13-15 травня 2004 р.). Київ, 2004. С. 115. ISBN № 966-794466-2.

75. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування тривимірної задачі про згин товстої багатошарової пластини несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ, 18-21 квітня 2005 р.). Дніпродзержинськ, 2005. С. 88.

76. Зеленський А. Г. Розвинення методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь просторової задачі теорії пружності. *Матеріали XI Міжнаар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 18-20 травня 2006 р.). Київ, 2006. С. 107. ISBN № 966-7944-66-2.

77. Зеленський А. Г. Аналітична теорія пластин та пологих оболонок. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*. Тези доповідей Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007 р.). Дн-вськ, 2007. С. 192.

78. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь з частинними похідними в аналітичній теорії пластин. *Матеріали XII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15-17 травня 2008 р.). Київ, 2008. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 156. ISBN 978-966-432-031-0.

79. Зеленський А. Г. Метод збурень фізичних властивостей матеріалу в аналітичній теорії нетонких пластин та пологих оболонок. *Сучасні проблеми механіки та математики*. Матеріали конференції. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 2008. Т. 1. С. 156–158.

80. Зеленський А. Г. Розв'язування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку в уточненій теорії нетонких пластин. *Матеріали XIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 167.

81. Зеленський А. Г. Метод зведення неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними високого порядку до неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку. *Матеріали XIV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–21 квітня 2012 р.). Київ, 2012. Т.1. *Диференціальні. та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 190. ISBN 978-617-696-014-0,

82. Зеленський А. Г. Сингулярний розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15–17 травня 2014 р.). Київ, 2014. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 106. ISBN 978-617-7021-18-5.

83. Зеленський А. Г., Розв'язування системи диференціальних рівнянь із частинними похідними 12-го порядку в математичній теорії нетонких пластин. *Математичні проблеми технічної механіки–2014*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ–Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2014 р.). Дн-нськ, Дн-вськ, 2014. С. 45.

84. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Про знаходження частинних розв'язків

неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 14–15 травня 2015 р.). Київ, 2015. Т. 1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 97–98. ISBN 978-617-7021-27-7.

85. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Спосіб розв’язування однієї задачі згину нескінченної плити на основі варіанта математичної теорії. *Математичні проблеми технічної механіки–2015*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2015 р.). Дн-нськ, 2015. С. 103.

86. Зеленський А. Г. Про варіант математичної теорії нетонких пластин і пологих оболонок. *Матеріали XVII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–20 травня 2016 р.). Київ, 2016. Т. 1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 116–117. ISBN 978-617-7021-42-0.

87. Зеленський А. Г. Зведення розв’язувальних рівнянь варіанта математичної теорії пологих оболонок до рівнянь другого і четвертого порядків. Тезиси докладов III Междунар. конф. “Актуальные проблемы инженерной механики” (Одесса, 10–14 мая 2016 г.). Одесса, 2016. С. 255–259.

88. Зеленський А. Г. Взаємозв’язок операторного методу і методу зведення неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними до рівнянь нижчого порядку. *Математичні проблеми технічної механіки–2016*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-нськ, Дн-вськ, Київ, 18–21 квітня 2016 р.). Дн-нськ, 2016. Т. 1. С. 108.

89. Зеленський А. Г. Про обчислення одного невласного інтеграла з параметром. *Матеріали XVIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Луцьк–Київ, 7–10 жовтня 2017 р.). Київ, 2017. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 58–59. ISBN 978-617-7021-57-4.

90. Зеленський А. Г. До розв’язування граничної задачі для півнескінченної товстої плити. Тези доповідей V Міжнар. конф. “Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 22–25 травня 2018 р.). Одеса, 2018. С. 93–94. ISBN 978-617-7195-62-6.

91. Зеленський А. Г. Загальні основні рівняння теорії пластин довільної сталої товщини. *Актуальні проблеми гуманітарних та природничих наук* (Харків, 30–31 березня 2018 р.). Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. *Фізико-математичні науки*. Хар-

ків: Молодий вчений, 2018. С. 167–170. ISBN 978-617-7640-10-2.
www.molodyvcheny.in.ua.

92. Зеленський А. Г. Про розв’язування рівнянь рівноваги нетонкої транстропної плити на пружній основі. *Перспективні напрями розвитку науки та техніки* (Вінниця, 23 березня 2018 р.). Збірн. наук. матеріалів 18-ї Міжнар. наук.-практ. інтернет-конференції. Ч. 1. Вінниця, 2018. С. 16–20.

93. Зеленський А. Г. Про першу граничну задачу для півнескінченної товстої пластини. *Математичні проблеми технічної механіки–2018*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Київ, Черкаси, Кам’янське, 16–19 квітня 2018 р.). Кам’янське, 2018. С. 50.

94. Зеленський А. Г. Про знаходження загального розв’язку системи диференціальних рівнянь в теорії згину нетонких пластин. Тези Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Львів, 2018. С. 164–165.

95. Зеленський А. Г. Метод послідовних наближень в теорії нетонких пологих трансверсально-ізотропних оболонок. Тези доповідей I Міжнар. наук.-техн. конф. “Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні” (Харків, 10-14 вересня 2018 р.). Харків, 2018. С. 98. ISBN 978-966-02-8575-0.

96. Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії трансверсально-ізотропних оболонок довільної товщини при статичному навантаженні. Тези доповідей VI Міжнар. конф. ”Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 20–24 травня 2019 р.). Одеса, 2019. С. 115–116. ISBN 978-617-7195-87-9.

97. Zelensky A. An Option of Mathematical Theory of non-thin Elastic Plates and Shells of Low Curvature with Static Loading, *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*, Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 342–343.

98. Зеленський А. Г. Про фундаментальні розв’язки системи рівнянь високого порядку математичної теорії транстропних пластин. *Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики– 2019*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпро, Кам’янське, 15–18 квітня 2019 р.). Кам’янське, 2019. С. 45–46.

99. Zelensky A. G. Perturbation Method in the Mathematical Theory of Physically

Nonlinear Plates of Arbitrary Thickness. Eurasioan Scientific Congress. *Abstracts of II International Scientific and Practical Conference*. Barselona, Spain, 24-25 February 2020. Barselona, 2020. P.225–229. ISBN 978–84–15927–31–0. <http://sci-conf.com.ua>.

100. Зеленський А. Г. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач варіанта математичної теорії пластин довільної товщини. Тези доповідей VII Міжнар. конф. "Актуальні проблеми інженерної механіки" (Одеса, 12–15 травня 2020 р.). Одеса, 2020. С. 119–122.

ABSTRACT

Zelensky A.G. A Variant of the Mathematical Theory of Non-Thin Elastic Plates and Shallow Shells at Static Load.– Qualifying Research Paper as Manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of physical and mathematical sciences on a specialty 01.02.04 - mechanics of a deformable firm body - Oles Honchar Dnieper National University, MES of Ukraine, Dnipro, 2021.

The work was performed at the Department of Structural Mechanics and Material Resistance of the State Higher Educational Institution "Prydniprovskya State Academy of Civil Engineering and Architecture", city of Dnipro.

The actual scientific problem of mechanics of deformed solids is solved in the work: construction of new effective variants of mathematical theory (MT) of physically linear and nonlinear on homogeneous and layered plates and shallow Kauderer shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity (TE); development of approximate methods for solving systems of high-order differential equations (SDE); obtaining partial and general solutions of boundary value problems of MT variants of the specified elements and numerical dependences of the stress-strain state (SSS) on mechanical-geometrical characteristics (MGC), type of loading, boundary conditions and approximations in the constructed variants. Important in solving the scientific problem is that the constructed versions of MT provide a real opportunity to analytically solve the boundary value problems for these elements and determine the SSS with high accuracy.

The construction of new MT variants of these elements is based on a complex method of reducing a three-dimensional problem to a two-dimensional one, which combines the Reisner variational principle (RVP), the method of developing all SSS components and boundary conditions in infinite series by transverse coordinates using Legendre polynomials for homogeneous elements and their combinations within each layer for layered elements, exact satisfaction of boundary conditions on front planes (surfaces) and conditions of rigid adhesion of layers, generalized technique of interconnected equations (TIE), perturbation method for homogeneous orthotropic and iso-

tropic physically nonlinear plates and shallow shells and method of successive approximations (MSA) for layered nonlinearly elastic plates and shallow shells. The three-dimensional static problem for nonfine homogeneous orthotropic and isotropic physically nonlinear plates and shallow shells (nonlinear elastic layered elements) based on MT by perturbation (MSA) is reduced to an infinite repeating sequence of two-dimensional linear boundary value problems. Developed: new methods of integration of inhomogeneous SDE of equilibrium of high orders of MT of non thin plates and shallow shells, based on mathematical transformations of DE and their reduction to homogeneous and inhomogeneous DE of the 2nd order (for shallow shells using perturbation methods and successive approximations); new approximate methods for solving the obtained SDE. Systems of equations in high approximations for these elements, partial and general solutions of boundary value problems at different types of transverse loads and numerical results are obtained, which allowed to obtain with high accuracy SSS and new qualitative effects.

The object of the study is a process of elastic deformation of non-thin homogeneous and multilayer, physically linear and nonlinear plates and shallow shells of arbitrary constant thickness at arbitrary static transverse loads.

The subject of the study is the development of new efficient variants of MT of non-thin homogeneous physically linear (transversely isotropic and orthotropic) and Kauderer nonlinear plates and shallow shells, as well as multilayer plates and shallow shells with transtropic and nonlinear elastic layers at arbitrary transverse loading; the development of analytical methods for solving boundary value problems of MT, which are reduced to DE systems high-orders; obtaining of complete solutions; analytical and numerical dependences of SSS of the specified elements on MGC, type of loading and approximations in the developed variants of MT.

Research methods. The following methods were used in the research: a new method for developing MT variants, which combines the method of extending SSS components and boundary conditions as a function of three variables in infinite series using transverse coordinates using Legendre polynomials (for homogeneous elements) or combinations thereof in each layer (for layered elements); perturbation method (for

physically nonlinear and orthotropic plates and shells); operator method for obtaining equations and solutions, recently developed method of high-order SDE integration; trigonometric series method; homogenization method; direct methods of integration of standard DE; methods of mathematical physics (for finding general solutions); Hankel integral transformation (for partial DE solutions); method of special functions (for problems with rupture and local loads); new developed approximate methods for solving high-order SDE for plates and shallow shells; MSA (in MT variants of flat trans-tropic shells and physically nonlinear layered plates and shallow shells), collocation method (for layered plates).

Scientific novelty of the results is as follows:

1) A new methodology for constructing new variants of MT of homogeneous and layered physically linear and nonlinear Kauderer plates and shallow shells of arbitrary thickness, based on a complex method of reducing the three-dimensional problem of the TE to a two-dimensional RVP, a method of developing all components of SSS and boundary conditions as functions of 3 variables, in infinite series on the transverse coordinate using Legendre polynomials (for homogeneous elements) and their combinations within each layer (for layered elements of symmetric and asymmetric structures) , exact satisfaction of boundary conditions on front planes (surfaces) and conditions of rigid coupling of layers, TIE, perturbation method (for homogeneous orthotropic and isotropic physically nonlinear plates and shallow shells) and MSA (for layered nonlines) elastic plates and shallow shells).

2) For the first time, new variants of MT of nonfine homogeneous transtropic plates and shallow shells in high approximations, nonthin orthotropic and isotropic physically nonlinear plates and shallow shells, layered transtropic and physically non-linear plates and shallow shells were constructed.

3) For the first time, a SDE in the higher approximations of the variants of the MT of these elements is obtained explicitly, which makes it possible to determine their SSS with high accuracy.

4) For the first time a three-dimensional static problem for nonfine orthotropic and isotropic physically nonlinear plates and shallow shells based on the MT by per-

turbation of elastic properties is clearly reduced to an infinite repeating sequence of two-dimensional linear boundary value problems in which parts of DE on the right depend on previous approximations. This gives a real opportunity to solve applied problems.

5) A new and generalized operator method for reducing inhomogeneous DE with partial derivatives of high orders to inhomogeneous DE of the 2nd order is developed.

6) A new method was first developed to integrate inhomogeneous SDE of non-fine homogeneous and layered physically linear and nonlinear plates, based on algebraic, differential and operator transformations of DE and using the method of reducing equations to homogeneous and inhomogeneous equations of the second order.

7) For the first time in the MT of nonfine homogeneous and layered physically linear and nonlinear plates a new method was developed, on the basis of which general solutions of inhomogeneous SDE are obtained, which are expressed through solutions of homogeneous and inhomogeneous DE of the second order.

8) For the first time new approximate analytical methods for solving high-order equations of the theory of plates and shallow shells of arbitrary thickness were developed, according to which the equations for plates are reduced to sequential solutions of fourth-order DE, and for shells the system of DE is reduced to sequential eighth-order equations, then the fourth.

9) Systems of equilibrium equations of shallow shells of arbitrary constant thickness are reduced for the first time by a new approximate method (using perturbation and MSA) to a recurrent sequence of SDE for plates (compression and bending problems), the solutions of which are determined by second order DE.

10) Theorems on the convergence of series for stresses on Legendre polynomials, displacements (in the perturbation method) are proved, the unambiguity of the solutions of the second main boundary value problem is substantiated.

11) Analytical solutions of variants of non-thin theories transtropic plates and shallow shells are constructed in trigonometric series at smooth, non-smooth, local and concentrated loads.

12) For the first time in the MT of thick transtropic plates:

- obtained partial and general solutions of SDE of high orders at axisymmetric intermittent and concentrated loads (in a circle, ring, circle, in the center) using the Hankel integral transformation to the obtained inhomogeneous DE of the second order;
- analytical solutions of boundary value problems are obtained taking into account boundary effects for semi-infinite, round and annular plates under different boundary conditions on the lateral surface and different transverse loads;
- a new method for finding fundamental solutions of DE in high approximations is proposed; obtained fundamental solutions with a pole at an arbitrary point, which are used to find solutions at arbitrary loads.

13) For the first time in MT, boundary value problems for orthotropic and isotropic physically nonlinear plates and shallow shells are set and general solutions in trigonometric series are obtained; in the new production, analytical solutions under Navier boundary conditions are obtained.

14) The algorithms and mathematical software packages in FORTRAN have been developed to solve boundary value problems on finding the internal SSS of plates and shallow shells (transtropic and physically nonlinear), two-layer and three-layer transtropic plates, edge effects of homogeneous plates; the numerical results have been obtained; which provided for the estimation of SSS depending on MGC and the type of loading, the establishment of the qualitative effect of edge effects on the SSS of plates, the identification of the limits to applicability of approximate theories and approximations of MT versions, the new qualitative effects and important conclusions.

The theoretical relevance of the results lies in a new methodology and a new approach to solving boundary value problems for non-thin homogeneous, layered, physically linear and nonlinear plates and shallow shells, allowing the use of new developed MT of high accuracy and new developed mathematical methods. The thesis materials obtained have been introduced into scientific agenda and projects of the Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture (PSACEA) at the Department of Structural Mechanics and Structural Performance of Materials according to the research plans of the state-financed research projects (reference in the annex). Theoreti-

cal results have been implemented in the educational process, in the course of the theory of elasticity for students of the Faculty of Civil Engineering of PSACEA (there is an act of implementation), they can also be used for the courses on the theory of shells and plates and for the scientific efforts of the post-graduate students, masters.

The practical relevance of the results lies in the possibility of their use by research institutes, design companies and other research institutions that perform high-precision calculations and design of structures (the annex contains an act of implementation of research results in LLC "Ukrrezervuarservis").

Personal contribution of the applicant. The main provisions of the work submitted for defense are obtained by the applicant independently. In scientific publications with co-authors, the personal contribution of the applicant is as follows. In [44, 46], a variant of MT of non-thin transotropic plates of high approximation was constructed, the basic equations were obtained, the method of solving SDE and numerical algorithms and programs were developed, numerical results were obtained; together with the co-author the tasks were set and the results were analyzed. In [6, 8, 84, 85] DE are derived, methods for their solution are developed, analytical solutions are obtained; in [10-12, 60-65] developed a method for solving systems of differential equations and numerical algorithms and programs; together with the scientific consultant and co-authors the tasks were set and the results were discussed.

The first section provides an overview of scientific papers in the field of linearly and nonlinearly elastic homogeneous and layered plates and shells. The analysis of classical, clarifying, mathematical theories, three-dimensional boundary value problems of TE is performed.

The second section substantiates the choice of the analytical direction of research, formulates the methodology of construction of new variants of MT of non-thin homogeneous and layered linearly and nonlinearly elastic plates and shallow shells at arbitrary static transverse loading; new methods of reduction of inhomogeneous SDE of equilibrium of high orders in theory to DE of the 2nd order are given.

In the third section, based on the developed methodology, a new version of the MT of homogeneous transotropic plates of arbitrary thickness from the standpoint of

three-dimensional TE is constructed. For the first time, general solutions of inhomogeneous systems of high-order equilibrium equations are constructed. Analytical methods for solving boundary value problems have been developed, numerical results and important conclusions have been obtained.

In the fourth section, a new variant of the MT of nonfine homogeneous orthotropic and isotropic physically nonlinear plates is constructed for the first time, methods for solving SDE of equilibrium are developed, numerical results and new conclusions are obtained.

In the fifth section, a new version of the MT of nonfine homogeneous transversely isotropic shallow shells is constructed. Analytical methods for solving boundary value problems and finding general solutions SDE of equilibrium have been developed. SSS researched.

In the sixth chapter, a new version of the MT of nonfine homogeneous orthotropic and isotropic physically nonlinear shallow shells is constructed for the first time, methods for solving boundary value problems are developed, and new conclusions are obtained.

In the seventh chapter, a new version of the MT of nonfine layered transtropic and physically nonlinear plates and shallow shells is constructed for the first time, methods for solving SDE of equilibriums of boundary value problems are developed, numerical results are obtained and important conclusions are formulated.

In the eighth section new approximate analytical methods for solving SDE of equilibrium non-thin plates and shallow shells are developed on the basis of constructed variants of the MT, problems for round and semi-infinite plates under different loads and boundary conditions are solved; fundamental solutions are built.

Key words: variants of mathematical theory, non-thin linearly and nonlinearly elastic homogeneous and layered plates and shallow shells, Legendre polynomials, Reisner's variational principle, differential equations, physical nonlinearity, methods, solutions, stress-strain state, boundary effects.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ІНДЕКСІВ І СКОРОЧЕНЬ	39
ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.....	44
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ТЕОРІЙ РОЗРАХУНКУ ОДНОРІДНИХ ТА ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК.....	55
1.1. Класичні лінійні задачі тонких однорідних та шаруватих пластин і оболонок.....	55
1.2. Некласичні теорії лінійно пружних однорідних пластин та оболонок, які ґрунтуються на методі гіпотез.....	56
1.3. Некласичні теорії лінійно пружних однорідних пластин та оболонок, які ґрунтуються на аналітичних методах	61
1.3.1. Метод асимптотичного інтегрування тривимірних рівнянь ТП.....	61
1.3.2. Символічний метод Лур'є. Метод однорідних розв'язків	63
1.3.3. Метод розкладання компонент НДС по товщині	65
1.4. Теорії лінійно пружних шаруватих пластин і оболонок	74
1.4.1. Шаруваті пластини та оболонки. Дискретно-структурні моделі (ДСМ).....	74
1.4.2. Неперервно-структурні моделі. Метод гіпотез	77
1.4.3. Неперервно-структурні моделі. Аналітичні методи	83
1.5. Тривимірні лінійні задачі ТП для пластин і оболонок.....	85
1.6. Фізично нелінійні задачі. Метод збурень. Числово-аналітичні методи.....	86
1.7. Висновки по огляду.....	88
РОЗДІЛ 2. МЕТОДОЛОГІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ І РОЗРОБЛЕНІ МЕТОДИ.....	90
2.1 Вибір напрямку досліджень. Методологія побудови варіантів МТ.....	90
2.2. Метод інтегрування СДР нетонких лінійно пружних однорідних і багат шаруватих пластин.....	94
2.2.1. Ідея методу інтегрування СДР рівноваги.....	94
2.2.2. Новий розроблений метод зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку з невідомими правими частинами.....	96
2.2.3. Про розв'язки неоднорідних ДР 2-го і 4-го порядків.....	99

2.2.4. Метод зведення з відомими правими частинами.....	101
2.2.4.1. Неоднорідні ДР 8-го і 12-го порядків.....	101
2.2.4.2. Неоднорідні ДР порядку $2(N+1)$	102
2.3. Про метод інтегрування СДРР нетонких однорідних і шаруватих фізично нелінійних пластин і пологих оболонок.....	103
2.4. Висновки по розділу.....	104
РОЗДІЛ 3. ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ОДНОРІДНИХ	
ТРАНСТРОПНИХ ПЛАСТИН ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ.....	
3.1. Постановка проблеми.....	105
3.2. Основні рівняння.....	107
3.2.1 Апроксимація переміщень, деформацій і поперечних напружень.....	107
3.2.2. Варіаційне рівняння Рейснера. Залежності між напруженнями та переміщеннями.....	109
3.2.3. Диференціальні рівняння рівноваги та крайові умови.....	111
3.3. Наближення $K0-N$	113
3.3.1. Компоненти НДС.....	113
3.3.2. Диференціальні рівняння рівноваги.....	114
3.3.3. Крайові умови.....	115
3.3.4. Кососиметричне деформування. Перетворення СДР рівноваги.....	117
3.3.4.1. Розв'язувальні рівняння.....	117
3.3.4.2. Диференціальні рівняння ВКЕ. Загальні розв'язки.....	119
3.3.4.3. Визначальні ДР внутрішнього НДС і ПКЕ. Загальні розв'язки.....	120
3.3.5. Симетричне деформування. Перетворення СДР рівноваги.....	122
3.3.5.1. Розв'язувальні рівняння.....	122
3.3.5.2. ДР вихрового КЕ. Загальні розв'язки.....	123
3.3.5.3. Визначальні ДР внутрішнього НДС і ПКЕ. Загальні розв'язки.....	124
3.4. Частинні випадки наближень. Наближення $K01$, $K0-3$	126
3.4.1. Наближення $K01$	126
3.4.2. Наближення $K0-3$	129
3.4.2.1. Кососиметричне деформування. Наближення $K13$	130

3.4.2.2. Симетричне деформування. Наближення K02.....	134
3.5. Вищі наближення. Наближення K0-5.....	139
3.5.1. Основні рівняння.....	139
3.5.2. Наближення K135. Загальні розв'язки.....	143
3.5.3. Наближення K024. Загальні розв'язки.....	146
3.5.4. Алгоритм розв'язання граничних задач для пластин.....	150
3. 6. Методи розв'язання граничних задач в тригонометричних рядах.....	151
3.6.1. Метод розв'язання в одинарних тригонометричних рядах.....	151
3.6.1.1. Кососиметричне деформування.....	151
3.6.1.2. Симетричне деформування.....	154
3.6.2. Метод розв'язання в подвійних тригонометричних рядах.....	156
3.6.2.1. Кососиметричне деформування.....	156
3.6.2.2. Симетричне деформування.....	158
3.6.2.3. Локальні і зосереджені навантаження.....	160
3.7. Числові результати і їх аналіз.....	162
3.7.1. Обґрунтування ефективності варіанта МТ. ВНДС прямокутних пластин довільної товщини при різних навантаженнях.....	162
3.7.2. Крайові ефекти.....	166
3.7.2.1. Крайові ефекти при кососиметричному деформуванні.....	166
3.7.2.2. Крайові ефекти при симетричному деформуванні.....	169
3.8. Основні прикладні висновки до розрахунку транстропних пластин довільної товщини.....	170
3.9. Обґрунтування використання математичних рядів у варіанті МТ.....	170
3.10. Висновки по розділу.....	176
РОЗДІЛ 4. МЕТОД ЗБУРЕНЬ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ У МТ	
ОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ.....	179
4.1. Метод збурень ізотропних властивостей в МТ ортотропних пластин.....	179
4.1.1. Основні співвідношення.....	179
4.1.2. Наближення K0-3 за поліномами Лежандра.....	181

4.1.2.1. Основні залежності.....	181
4.1.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги.....	183
4.1.2.3. Крайові умови.....	185
4.1.2.4. Перетворення ДР рівноваги.....	186
4.1.2.5. Кососиметричне деформування (НК13) в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за малим параметром ε . Загальні розв'язки.....	186
4.1.2.6. Симетричне деформування (НК02) в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за параметром ε . Загальні розв'язки	188
4.2. Метод збурень лінійно пружних властивостей в МТ однорідних ФНП.....	190
4.2.1. Основні співвідношення.....	190
4.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги і крайові умови в НК0-3.....	193
4.3. Метод тригонометричних рядів у граничних задачах для фізично нелінійних пластин. Числові результати.....	195
4.3.1. Метод одинарних тригонометричних рядів.....	195
4.3.2. Метод подвійних тригонометричних рядів.....	200
4.3.3. Числові результати для фізично нелінійних пластин.....	203
4.3.4. Числові результати для транстропних пластин з використанням методу збурень ізотропних властивостей матеріалу.....	208
4.4. Основні рівняння для фізично нелінійних пластин у полярних координатах.....	210
4.5. Висновки по розділу.....	210

РОЗДІЛ 5. ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ

ОДНОРІДНИХ ТРАНСТРОПНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК	213
5.1. Постановка проблеми.....	213
5.2. Основні рівняння.....	214
5.2.1. Апроксимація компонент НДС. ДДР та крайові умови. Теорема 3 (про збіжність рядів для напружень).....	214
5.2.2. Наближення К01.....	217
5.2.3. Наближення К0-3.....	218

5.2.4. Наближення K0-5	221
5.3. Перетворення систем ДР рівноваги для різних наближень.	
Форми загальних розв'язків	225
5.3.1. Наближення K01	225
5.3.2. Наближення K0-3	226
5.3.3. Кососиметричне деформування. Наближення K013	229
5.3.4. Наближення K0-5	232
5.4. Методи розв'язання граничних задач в тригонометричних рядах	234
5.4.1. Метод одинарних тригонометричних рядів	234
5.4.2. Метод подвійних тригонометричних рядів	237
5.4.3. Локальні і зосереджені навантаження	238
5.5. Числові результати розрахунків і їх аналіз	239
5.6. Основні прикладні висновки до розрахунку транстропних	
Пологих оболонок довільної товщини	242
5.7. Висновки по розділу	242
РОЗДІЛ 6. МЕТОД ЗБУРЕНЬ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ У ВАРІАНТІ	
МТ НЕТОНКИХ ОДНОРІДНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК	245
6.1. Метод збурень ізотропних властивостей в МТ нетонких ортотропних	
пологих оболонок в НК0-3 за поліномами Лежандра	245
6.1.1. Основні співвідношення	245
6.1.2. Диференціальні рівняння рівноваги і крайові умови	247
6.1.3. Перетворення СДРР в теорії ортотропних оболонок	249
6.1.3.1. ДР вихрового КЕ в наближенні $l = 1, 2, \dots$ по ε	250
6.1.3.2. Рівняння ВНДС з ПКЕ у наближенні $l = 1, 2, \dots$ по ε .	
Форми загальних розв'язків	251
6.2. Метод збурень лінійно пружних властивостей в МТ	
нетонких пологих ФНО	253
6.2.1. Основні співвідношення	253
6.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги та крайові умови	254

6.3. Метод тригонометричних рядів.....	257
6.4. Основні співвідношення і рівняння в циліндричній системі координат.....	260
6.5. Числові результати.....	260
6.5.1. Числові результати для фізично нелінійних пологих оболонок.....	260
6.5. 2. Числові результати для транслопних оболонок з використанням методу збурень ізотропних властивостей матеріалу.....	262
6.6. Висновки по розділу.....	263
РОЗДІЛ 7. ВАРІАНТ МТ НЕТОНКИХ БАГАТОШАРОВИХ ЛІНІЙНО І НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК.....	
7.1. Фізично нелінійні багатошарові пологі оболонки несиметричної структури.....	265
7.1.1. Постановка проблеми.....	265
7.1.2. Апроксимація переміщень, деформацій і напружень.....	267
7.1.3. Варіаційне рівняння Рейснера. Крайові умови.....	273
7.1.4. Диференціальні рівняння рівноваги в НК0-3.....	278
7.1.5. Метод послідовних наближень.....	279
7.1.6. Перетворення систем ДР.....	280
7.2. Фізично нелінійні багатошарові оболонки симетричної структури.....	282
7.2.1. Основні співвідношення.....	282
7.2.2. Система диференціальних рівнянь. Метод розв'язування.....	283
7.3. Транслопні шаруваті оболонки.....	285
7.3.1. Оболонки несиметричної структури.....	285
7.3.2. Оболонки симетричної структури.....	285
7.4. Фізично нелінійні шаруваті пластини несиметричної структури.....	286
7.5. Фізично нелінійні шаруваті пластини симетричної структури.....	288
7.6. Шаруваті транслопні пластини.....	292
7.6.1. Пластини несиметричної структури.....	292
7.6.2. Пластини симетричної структури.....	292
7.7. Числові результати і їх аналіз.....	293
7.8. Висновки по розділу.....	296

РОЗДІЛ 8. СПРОЦЮЮЧИ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ВАРІАНТА МТ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК.....	299
8.1. Наближений метод розв'язання СДР для пластин.....	299
8.1.1. Наближення К13.....	299
8.1.2. Наближення К135.....	301
8.1.3. Вісесиметричний згин круглої трансропної пластини при кососиметричному навантаженні.....	303
8.1.3.1. Основні рівняння.....	303
8.1.3.2. Кругла пластина при рівномірно розподіленому навантаженні.....	305
8.1.3.3. Кругла пластина при дії зосередженої сили.....	307
8.1.3.4. Числові результати і їх аналіз.....	310
8.2. Наближений метод розв'язання СДР для пологих оболонок.....	310
8.2.1. Суть методу.....	311
8.2.2. Числові результати.....	314
8.3. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач для півнескінченних пластин.....	315
8.4. Інтегрування СДР рівноваги пластин довільної товщини при дії вісесиметричних переривчастих поперечних навантажень.....	321
8.4.1. Частинні розв'язки.....	321
8.4.1.1. Рівномірне навантаження q_0 по колу радіуса r_0	321
8.4.1.2. Рівномірне навантаження q_0 по кільцю з радіусами r_1 і r_2	324
8.4.1.3. Рівномірне навантаження пластини по колу радіуса r_2	326
8.4.1.4. Навантаження пластини зосередженою силою в центрі.....	326
8.4.1.5. Довільне в радіальному напрямку поперечне навантаження.....	327
8.4.2. Загальні розв'язки.....	327
8.4.2.1. Загальні розв'язки визначальних ДР.....	327
8.4.2.2. Загальні розв'язки для переміщень і напружень.....	328
8.4.2.3. Аналітичне розв'язання граничних задач.....	329
8.5. Фундаментальні розв'язки для нетонких трансропних пластин.....	331

8.5.1. Фундаментальні розв'язки в наближенні $K13$	331
8.5.2. Фундаментальні розв'язки в наближенні $K135$	334
8.5.3. Застосування фундаментальних розв'язків	336
8.5.3.1. Поперечне навантаження пластини по дузі кола	336
8.5.3.2. Поперечне навантаження пластини по довільній області	337
8.6. Інтегрування СДР варіанта МТ нетонких пологих оболонок	338
8.6.1. Метод збурень геометричних параметрів. Теорема 4	338
8.6.2. Метод послідовних наближень	340
8.6.3. Числові результати	342
8.7. Висновки по розділу	342
ВИСНОВКИ	344
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	349
ДОДАТКИ	387
ДОДАТОК А. Транстропні однорідні пластини довільної товщини.	
Коефіцієнти, ілюстрації, висновки	388
А.1. Коефіцієнти рівнянь	388
А.2. Ілюстрації компонент НДС у вигляді таблиць і графіків	394
А.3. Основні прикладні висновки до розрахунку транстропних пластин довільної товщини	410
ДОДАТОК Б. Ілюстрації компонент НДС однорідних фізично нелінійних і транстропних пластин з використанням методу збурень	414
ДОДАТОК В. Транстропні пологі оболонки довільної товщини.	
Коефіцієнти, ілюстрації, висновки	419
В.1. Коефіцієнти рівнянь і залежностей	419
В.2. Ілюстрації компонент НДС у вигляді таблиць і графіків	425
В.3. Основні прикладні висновки до розрахунку нетонких транстропних пологих оболонок	439
ДОДАТОК Г. Фізично нелінійні та транстропні нетонкі пологі оболонки.	
Коефіцієнти, рівняння, ілюстрації	442
Г.1. Коефіцієнти в операторах	442

Г.2. Основні співвідношення і ДР в циліндричній системі координат.....	443
Г.3. Ілюстрації НДС фізично нелінійних і транстропних пологих оболонок з використанням методу хбурень.....	448
ДОДАТОК Д. Багатошарові нетонкі пластини і пологі оболонки. Залежності, рівняння, ілюстрації.....	455
Д.1. Залежності і рівняння для шаруватих пологих оболонок.....	455
Д.2. Точний розв'язок для багатошарових транстропних пластин.....	471
Д.3. Числові результати для тришарових і двошарових пластин.....	473
ДОДАТОК Е. Залежності та рівняння на основі наближених методів. Числові результати для НДС нетонких пластин.....	479
Е.1. Числові результати для круглих пластин.....	479
Е.2. Загальні розв'язки для переміщень і напружень при вісесиметричному кільцевому навантаженні товстих пластин в НК13.....	480
Е.2.1. Загальні розв'язки для переміщень.....	480
Е.2.2. Загальні розв'язки для напружень.....	484
ДОДАТОК Є. Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....	486
ДОДАТОК Ж. Акти впровадження і довідка про використання результатів досліджень.....	500

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ІНДЕКСІВ І СКОРОЧЕНЬ

ВП, ВПР – варіаційний принцип, варіаційний принцип Рейснера;

ВР, ВРР – варіаційне рівняння, варіаційне рівняння Рейснера;

ГП – геометричні параметри (сталі, які залежать від ГХ);

ГХ – геометричні характеристики (пластини, оболонки):

a, b – розміри пластини (оболонки) в плані; h – товщина пластини (оболонки);

R_1, R_2 – головні радіуси кривини серединної поверхні оболонки;

k_1, k_2 – головні кривини серединної поверхні оболонки;

$k'_1 = k_1; k'_2 = k_2$ – головні кривини серединної поверхні оболонки, що входять у деформації поперечного зсуву;

ГХ багат шарової пластини (оболонки):

h – товщина шаруватої пластини (оболонки); j – кількість шарів пластини (оболонки); h_i – товщина i -го шару ($1 \leq i \leq j$); R_{1i}, R_{2i} та k_{1i}, k_{2i} – головні радіуси кривини та головні кривини серединної поверхні i -го шару оболонки; $k'_{1i} = k_{1i}, k'_{2i} = k_{2i}$ – головні кривини серединної поверхні i -го шару оболонки, що входять у деформації поперечного зсуву;

ДР, СДР, СДРР – диференціальне рівняння, система ДР, СДР рівноваги;

ЕАМ – енергоасимптотичний метод;

КЕ, ВКЕ, ПКЕ – крайовий ефект, вихровий КЕ, потенціальний КЕ;

КТ, МТ, ВМТ – класична теорія, математична теорія, варіант МТ;

ЛАР – лінійне алгебраїчне рівняння;

МВР – методика взаємозв'язаних рівнянь;

МГП – механіко-геометричні параметри – сталі, які залежать від механічних та геометричних параметрів пластини, оболонки;

МП – механічні параметри (матеріалу пластини, оболонки) – сталі, які залежать від МХ матеріалу: $d_0, d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{40}$;

МПН – метод послідовних наближень;

МХ – механічні характеристики (матеріалу пластини, оболонки);

E – модуль Юнга для напрямків у площині ізотропії;

E' – модуль Юнга для напрямку, перпендикулярному площині ізотропії;

G, G' – модулі зсуву в площині ізотропії і в перпендикулярних неї площинах;

ν – коефіцієнт Пуассона (характеризує скорочення в площині ізотропії при розтягу в тій же площині); ν' – коефіцієнт Пуассона, який характеризує скорочення в площині ізотропії при розтягу в напрямку, перпендикулярному до неї;

МХ матеріалу i -го транстропного шару пластини (оболонки): $E_i, E'_i, G_i, G'_i, \nu_i, \nu'_i$ – мають той же фізичний зміст, що й для однорідної пластини (оболонки);

НС, НДС, ВНДС – напружений стан, напружено-деформований стан, внутрішній НДС;

ПШ, ППШ, ВПШ – пограничний шар, потенціальний ПШ, вихровий ПШ;

ТП – теорія пружності;

ТТ, ТР – точна теорія (за тривимірною ТП), точний розв'язок;

ФНП, ФНО – фізично нелінійна пластина, оболонка;

частинні похідні: $f_{1,x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, f_{1,xy} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}$ і т. п. ;

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа;

$q(x, y)$ – поперечне кососиметричне навантаження відносно серединної площини (поверхні), $p(x, y)$ – поперечне симетричне навантаження;

$X_\nu(x, y), Y_\nu(x, y), Z_\nu(x, y)$ – компоненти інтенсивності зовнішнього навантаження;

l_x, l_y – напрямляючі косинуси нормалі до контуру;

$Oxyz$ – прямокутна система координат: осі Ox, Oy напрямлені в площині ізотропії, яка співпадає з серединною площиною (поверхнею); вісь Oz напрямлена перпендикулярно до серединної поверхні (площини) вбік опуклості оболонки;

$P_i(2z/h) (i = 0, 1, \dots)$ – поліноми Лежандра, залежать від координати z ;

$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ – компоненти переміщень;

$u_i(x, y), v_i(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots$) і $w_i(x, y)$ ($i = 1, \dots$) – складові компонент тангенціальних і поперечних переміщень;

НК0-N – наближення К0-N варіанта МТ, який ураховує у рядах розвинення компонент тангенціальних переміщень при допомозі поліномів Лежандра складові компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 0, 1, \dots, N$;

НК1, НК13, НК135, НК02, НК024, НК0-3, НК0-5 – наближення варіанта МТ, які відповідають індексам $k = 1$; $k = 1, 3$; $k = 1, 3, 5$; $k = 0, 2$; $k = 0, 2, 4$; $k = 0, 1, 2, 3$; $k = 0, 1, \dots, 5$ у складових компонент тангенціальних переміщень;

$\sigma_x(x, y, z), \dots, \sigma_z(x, y, z), \sigma_{yx}(x, y, z), \dots, \sigma_{yz}(x, y, z)$ – компоненти напружень;

$\tilde{U}(x, y, z), \dots, \tilde{\sigma}_x(x, y, z), \dots, \tilde{\sigma}_{yz}$ – безрозмірні компоненти НДС:

$\tilde{U}(x, y, z) = U(x, y, z)E / (q(x, y)h)$ ($U \rightarrow V \rightarrow W$) (для однорідних елементів),

$\tilde{\sigma}_x(x, y, z) = \sigma_x(x, y, z) / q(x, y)$ ($\sigma_x \rightarrow \sigma_y \rightarrow \sigma_z \rightarrow \sigma_{yx} \rightarrow \sigma_{xz} \rightarrow \sigma_{yz}$);

\tilde{z} – безрозмірна поперечна координата ($\tilde{z} = z / h$);

$L_{i,j}, H_{ij}$ – диференціальні оператори в СДР кососиметричного деформування транстропних пластин, в СДР вихрового КЕ;

$H_0; H_{ij}^0$ – диференціальний визначник системи вихрового КЕ (з операторами $H_{ij}, H_0 = |H_{ij}|$); ад'юнкти диференціального визначника $|H_{ij}|$ (алгебраїчні доповнення до елемента H_{ij});

$\Pi_{ij}, \Pi_0, \Pi_{ij}^0$ – диференціальні оператори в СДР кососиметричного деформування НДС і ПКЕ, диференціальний визначник системи з операторами Π_{ij} ($\Pi_0 = |\Pi_{ij}|$), ад'юнкти диференціального визначника Π_0 ;

$M_{i,j}$ – диференціальні оператори в СДР симетричного деформування транстропних пластин,

$T_{ij}; T_0; T_{ij}^0$ – диференціальні оператори в СДР симетричного деформування транстропних пластин (які описують ВНДС і ПКЕ); диференціальний визначник систем з операторами T_{ij} ($T_0 = |T_{ij}|$); ад'юнкти диференціального визначника T_0 ;

$D_{i,j}$ – диференціальні оператори в СДР для транстропних оболонок;

$P_{iu0}, P_{iv0}, P_{iw1}, P_{iw2}, \dots$ – диференціальні оператори взаємозв'язаної СДР для транстропних оболонок, яка описує ВНДС і ПКЕ;

P_0, P_{ij}^0 – диференціальний визначник СДР для транстропних оболонок ВНДС і ПКЕ, ад'юнкти диференціального визначника P_0 ;

$\Phi_i(x, y)$ – функції, через які зображуються складові поперечних переміщень $w_n(x, y)$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) при кососиметричному деформуванні пластин;

$\psi(x, y)$ – функція, через яку операторним методом зображуються вихрові функції $\psi_i(x, y)$ при кососиметричному і симетричному деформуванні;

$F_i(x, y)$ – функції, через які зображуються складові компонент переміщень $u_0(x, y), v_0(x, y), w_2(x, y), w_4(x, y), \dots$ при симетричному деформуванні пластин;

$D_i(x, y)$ – функції, через які операторним методом зображуються складові компонент переміщень $u_0(x, y), v_0(x, y), w_1(x, y), w_2(x, y), \dots$ оболонки;

$U_i(x, y, z), V_i(x, y, z), W_i(x, y, z)$ – компоненти переміщень в i -му шарі;

$u_{ji}(x, y), v_{ji}(x, y)$ ($j = 0, 1, \dots$) і $w_{1i}(x, y), w_{2i}(x, y), \dots$ – складові тангенціальних і поперечних переміщень в i -му шарі;

$\sigma_{xi}(x, y, z), \dots, \sigma_{yzi}(x, y, z)$ – компоненти напружень в i -му шарі;

$\tilde{U}_i(x, y, z), \dots, \tilde{\sigma}_{yzi}(x, y, z)$ – безрозмірні компоненти НДС i -го шару:

$$\tilde{U}_i(x, y, z) = U_i(x, y, z) E_i / (q(x, y) h) \quad (U_i \rightarrow V_i \rightarrow W_i);$$

$$\tilde{\sigma}_{xi}(x, y, z) = \sigma_{xi}(x, y, z) / q(x, y) \quad (\sigma_{xi} \rightarrow \sigma_{yi} \rightarrow \sigma_{zi} \rightarrow \sigma_{yxi} \rightarrow \sigma_{xzi} \rightarrow \sigma_{yzi});$$

запис $(x, y; u, v)$ означає, що не наведені залежності отримуються із попередніх одночасною заміною позначень x на y , y на x , u на v , v на u ;

запис $(x \rightarrow y; u \rightarrow v)$ означає, що не наведені залежності отримуються із попередніх одночасною заміною позначень x на y , u на v ;

ε – малий фізичний параметр для однорідних пластин (оболонок);

ε_i – малий фізичний параметр для i -го шару пластини (оболонки);

Лінії на графіках залежностей компонент НДС від поперечної координати і символічна назва теорій при аналізі НДС і формулюванні висновків:

лінія 1 $\text{---}\square\text{---}$ – згідно точного розв’язку (ТР) за тривимірною теорією пружності (точна теорія – ТТ);

лінія 2 $\text{---}\triangle\text{---}$ – з урахуванням складових компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ (K0-5) (для пластин і оболонок) при поперечному навантаженні з урахуванням поперечного обтискання; або ж з урахуванням складових тангенціальних переміщень з індексами $k = 1, 3, 5$ (K135) (для пластин) і $k = 0, 1, 3, 5$ (K0135) (для оболонок) при кососиметричному навантаженні;

лінія 3 $\text{---}\blacksquare\text{---}$ з урахуванням складових компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 0, 1, 2, 3$ (K0-3) (для пластин і оболонок) при поперечному навантаженні з урахуванням поперечного обтискання; або ж з урахуванням складових компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 1, 3$ (K13) (для пластин) і $k = 0, 1, 2, 3$ (K0-3) (для оболонок) при кососиметричному деформуванні;

лінія 4 $\text{---}\blacktriangle\text{---}$ – з урахуванням складових компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 0, 1$ (K01) (для пластин і оболонок) при поперечному навантаженні з урахуванням поперечного обтискання; або ж з урахуванням складових компонент тангенціальних переміщень з індексами $k = 1$ (K1) (для пластин) і $k = 0, 1$ (K01) (для оболонок) при кососиметричному деформуванні;

лінія 5 $\text{---}\triangle\text{---}$ – за класичною теорією (КТ);

лінія 6 $\text{---}\bigcirc\text{---}$ – згідно фізично нелінійної (ФН) теорії.

ВСТУП

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів математичної теорії (МТ) нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної теорії пружності (ТП), розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання систем диференціальних рівнянь (СДР) високих порядків, отриманні частинних і загальних розв'язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей напружено-деформованого стану (НДС) від механіко-геометричних характеристик (МГХ), типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Однорідні та шаруваті пластини і оболонки застосовуються в різних об'єктах енергетики, машинобудування, техніки, у будівництві та в інших галузях сучасної промисловості. Забезпечення надійної роботи таких конструкцій потребує залучення для їх розрахунку високоточних теорій та адекватних їм математичних методів розв'язування відповідних граничних задач, які б ураховували усі компоненти НДС, як функції трьох змінних, та крайові ефекти (КЕ) типу пограничного шару.

Відомо, що розрахунки на основі класичних теорій (КТ) нетонких пластин і оболонок та у випадках з великим градієнтом змінювання НДС дають результати, які можуть суттєво відрізнятися від точних, отриманих у тривимірній постановці. Некласичні уточнені теорії пластин та оболонок, які ґрунтуються на різних гіпотезах, зокрема, теорії типу Тимошенка-Рейснера, які на сьогодні в основному використовуються в працях вітчизняних і особливо зарубіжних авторів, також не можуть гарантовано з достатньою точністю описувати НДС пластин і оболонок, оскільки знаходження НДС з будь-якою точністю в принципі неможливо, що обумовлено рамками відповідних гіпотез; ці теорії потребують у кожному випадку обґрунтованого використання для розв'язання граничних задач, що пов'язано зі встановленням конкретних рамок придатності їх

в залежності від класу задач. З іншого боку, існуючі варіанти МТ, які ґрунтуються на розвиненні компонент НДС у нескінченні ряди, потребують вдосконалення і підвищення ефективності по точності і можливості аналітичного розв'язання отримуваних СДР рівноваги (СДРР) з одержанням числових результатів. Розв'язання граничних задач для лінійно пружних пластин та оболонок довільної товщини в тривимірній постановці пов'язано з достатніми математичними труднощами. Тільки в обмежених випадках тривимірні задачі ТП для пластин і оболонок допускають можливість знаходження аналітичного розв'язку. Складність розв'язання у точній тривимірній постановці значно підвищується, якщо розглядаються непрості крайові умови, шаруваті елементи або фізично нелінійні задачі. Числові результати на основі тривимірних рівнянь ТП для пластин і пологих оболонок отримані на сьогодні в обмеженій кількості і не дають повної можливості оцінити точність НДС вказаних елементів за різними теоріями.

Таким чином, розв'язання граничних задач статичної механіки для однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин та пологих оболонок довільної сталого товщини в рамках КТ та уточнених теорій, що базуються на основі гіпотез, для широкого класу задач не дає гарантованих високоточних результатів, а з іншого боку – розв'язання їх на основі тривимірної ТП є занадто складною задачею математичної фізики, в якій невідомі функції залежать від трьох змінних. Звідси і випливає обґрунтування вибору актуальної наукової проблеми для дослідження, вирішення якої полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ нетонких пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні, розробленні ефективних аналітичних методів інтегрування отримуваних СДРР високих порядків, і щоб аналітичне розв'язання граничних задач для вказаних елементів було простішим від розв'язку відповідних тривимірних задач ТП і давало реальну можливість отримання числових залежностей НДС цих елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень варіантів МТ.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є: 1) побудова нових варіантів МТ однорідних і шаруватих лінійно та нелінійно пружних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної сталого товщини з позицій тривимірної ТП на основі методології, яка поєднує метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра, точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення між шарами, використання варіаційного принципу Рейснера (ВПР), узагальнення методики взаємозв'язаних

рівнянь (МВР); 2) розроблення нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання СДРР високих порядків, до яких зводяться граничні задачі статички варіантів МТ; 3) отримання частинних і загальних розв'язків граничних задач для вказаних елементів та числових залежностей НДС від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах МТ.

Досягнення поставленої мети передбачає:

- нову постановку граничних задач статички для вказаних пластин та пологих оболонок при їх довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної ТП і зведення їх до розв'язання двовимірних крайових задач;

- побудову нових варіантів МТ: 1) нетонких однорідних трансропних пластин та пологих оболонок у високих наближеннях; 2) нетонких однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин (ФНП) та пологих фізично нелінійних оболонок (ФНО), оснований на комплексному методі зведення тривимірних задач ТП до двовимірних, який базується на ВІР, поєднанні методу розвинення компонент НДС у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра і методу збурень пружних властивостей матеріалу з використанням МВР; 3) нетонких шаруватих лінійно і нелінійно пружних пластин та пологих оболонок симетричної і несиметричної структур, які базуються на методі зведення тривимірних задач ТП до двовимірних, основаному на розвиненні компонент НДС в межах кожного шару у ряди за комбінаціями поліномів Лежандра в поєднанні (для фізично нелінійних елементів) з методом послідовних наближень (МПН);

- узагальнення і розробку єдиної методики математичних перетворень отриманих СДРР високих порядків до зручних (визначальних) СДР;

- аналіз і дослідження отриманих СДРР з частинними похідними для різних наближень МТ, які описують внутрішній НДС (ВНДС), вихровий і потенціальний КЕ (ВКЕ, ПКЕ);

- обґрунтування єдності розв'язків другої граничної задачі і збіжності рядів за поліномами Лежандра та за малим параметром;

- розробку нового і узагальнення операторного методу зведення неоднорідних ДР високих порядків із частинними похідними МТ нетонких пластин до неоднорідних ДР 2-го порядку;

- розробку нового методу інтегрування одержаних СДРР високих порядків нетонких пластин і отримання частинних і загальних розв'язків;

- побудову: 1) нових наближених методів розв'язання отриманих СДРР високих порядків для пластин і пологих оболонок довільної товщини, які спрощували б знахо-

дження частинних і загальних розв'язків; 2) аналітичних розв'язків граничних задач для вказаних елементів в одинарних та подвійних тригонометричних рядах;

– отримання аналітичних розв'язків граничних задач варіанта МТ товстих трансропних пластин при переривчастих і локальних навантаженнях, та побудову фундаментальних розв'язків одержаних СДРР високих порядків;

– розвинення методу спеціальних функцій (у граничних задачах для круглих пластин) і інтегральних перетворень для розв'язання СДРР високих порядків;

– розробку алгоритмів і пакетів математичних програм для визначення НДС і крайових ефектів та дослідження НДС і КЕ в залежності від МГХ, типу навантаження та наближення варіанта МТ і аналіз збіжності розвинень компонент НДС у ряди.

Об'єкт дослідження – процес пружного деформування нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні.

Предмет дослідження – побудова нових ефективних варіантів МТ нетонких однорідних фізично лінійних (трансропних і ортотропних) і нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок, та шаруватих пластин і пологих оболонок з трансропними та нелінійно пружними шарами при довільному статичному поперечному навантаженні; розробка аналітичних методів розв'язання граничних задач варіантів МТ, які зводяться до СДРР високих порядків; отримання загальних розв'язків, аналітичних та числових залежностей НДС вказаних елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах МТ.

Методи дослідження. Дослідження здійснювалися з використанням: створеної методології побудови варіантів МТ, яка поєднує метод розвинення компонент НДС і граничних умов, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних пластин та пологих оболонок) або ж їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів) і МВР; методу збурень лінійно пружних та ізотропних властивостей матеріалу (для фізично нелінійних і ортотропних пластин та пологих оболонок); операторного методу (при перетворенні СДРР і отриманні форм загальних розв'язків), нового розробленого і узагальненого операторного методу зведення неоднорідних ДР високих порядків із частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку; нового розробленого методу інтегрування систем ДРР високих порядків; методів одинарних та по-

двійних тригонометричних рядів (для розв'язання граничних задач); методу осереднення (в МТ пологих оболонок); прямих методів інтегрування звичайних ДР; методів математичної фізики (знаходження частинних і загальних розв'язків); методу інтегрального перетворення Ганкеля (при знаходженні частинних розв'язків ДР); методу спеціальних функцій (в задачах з переривчастими і локальними навантаженнями); нових розроблених наближених методів розв'язання СДР високого порядку для пластин і пологих оболонок; МПН (у варіантах МТ пологих трансропних оболонок та фізично нелінійних шаруватих пластин і пологих оболонок), методу колокацій (для шаруватих пластин).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Розроблено нову методологію побудови нових варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної товщини, основу на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує ВПР, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів симетричної і несиметричної структур), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену МВР, метод збурень (для однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин і пологих оболонок) і МПН (для однорідних трансропних пологих оболонок і шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок).

2. Уперше на основі створеної методології побудовані нові варіанти МТ: нетонких однорідних трансропних пластин та пологих оболонок у високих наближеннях, нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин та пологих оболонок, шаруватих трансропних і фізично нелінійних пластин і пологих оболонок симетричної та несиметричної структур.

3. Уперше отримані в явному вигляді СДРР у вищих наближеннях варіантів МТ указаних елементів, що дає можливість визначати їх НДС з високою точністю.

4. Уперше тривимірна задача статки для нетонких ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин та пологих оболонок на основі МТ методом збурень пружних властивостей зведена у явному вигляді до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач, у яких праві частини ДР залежать лінійно (для орто-

тропних елементів) і нелінійно (для фізично нелінійних елементів) від компонент НДС попередніх наближень, що дає реальну можливість розв'язувати прикладні задачі.

5. Розроблено новий і узагальнено операторний метод зведення неоднорідних ДР з частинними похідними високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку.

6. Уперше розроблено новий метод інтегрування неоднорідних СДРР нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин, оснований на алгебраїчних, диференціальних та операторних перетвореннях СДР і методі зведення їх до однорідних (для лінійних елементів) і неоднорідних (для лінійних і нелінійних елементів) ДР 2-го порядку.

7. Уперше в МТ нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин новим розробленим методом отримані загальні розв'язки неоднорідних СДРР через загальні розв'язки однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку.

8. Уперше розроблені нові наближені аналітичні методи розв'язання СДР високих порядків МТ пластин і пологих оболонок довільної товщини, згідно з якими СДР для пластин порядку $4N$ зводяться до послідовного розв'язання N ДР 4-го порядку, а СДР для оболонок порядку $4N$ – до розв'язання ДР 8-го порядку і $(N - 2)$ ДР 4-го порядку.

9. Уперше в МТ розроблені нові наближені методи зведення систем ДРР пологих оболонок довільної сталого товщини (з використанням методів збурень і МПН) до рекурентної послідовності систем ДРР для кососиметричного і симетричного деформування пластин, розв'язання яких визначаються диференціальними рівняннями 2-го порядку.

10. Доведені теореми про збіжність рядів для напружень за поліномами Лежандра, переміщень (у методі збурень), обґрунтована однозначність розв'язків другої основної граничної задачі.

11. У новій постановці отримані аналітичні розв'язки СДР варіантів МТ нетонких транстропних пластин та пологих оболонок в одинарних і подвійних тригонометричних рядах при плавних, швидкозмінюваних по області, локальних і зосереджених навантаженнях.

12. Уперше в МТ товстих транстропних пластин:

а) отримані частинні і загальні розв'язки систем ДР високих порядків при вісесиметричних переривчастих і зосереджених навантаженнях (по колу, кільцю, кругу, в центрі) з використанням інтегрального перетворення Ганкеля до отриманих неоднорідних ДР 2-го порядку;

б) одержані аналітичні розв'язки граничних задач з урахуванням крайових ефектів для півнескінченних, круглих і кільцевих пластин при різних граничних

умовах на бічній поверхні і різних поперечних навантаженнях;

в) розроблено нову методологію знаходження фундаментальних розв'язків ДР у високих наближеннях; отримані фундаментальні розв'язки з полюсом у довільній точці, які використані для знаходження розв'язків при довільних навантаженнях.

13. Уперше в МТ поставлені граничні задачі для ортотропних і ізотропних ФНП та ФНО і отримані загальні розв'язки в тригонометричних рядах; у новій постановці отримані аналітичні розв'язки для ФНП і ФНО при граничних умовах Нав'є.

14. Розроблені алгоритми і створені пакети математичних програм на мові ФОРТРАН для розв'язання в новій постановці граничних задач по знаходженню внутрішнього НДС однорідних пластин і пологих оболонок (транстропних, ортотропних, фізично нелінійних), двошарових і тришарових транстропних пластин довільної сталі товщини при різних поперечних навантаженнях і КЕ однорідних пластин. Отримані числові результати дали можливість оцінити НДС залежно від МГХ та типу навантаження, установити якісний вплив КЕ на НДС пластин, визначити межі застосування теорії Тимошенка-Рейснера та наближень варіантів МТ в залежності від МГХ та типу навантаження, одержати нові якісні ефекти та важливі висновки.

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечуються: математичною та фізичною коректністю формулювання граничних задач; строгим математичним підходом до їх розв'язування з формулюванням і доведенням необхідних теорем про збіжність рядів і єдиність розв'язку; дослідженням точності розв'язків; аналітичними граничними переходами, які приводять до відомих теорій пластин і оболонок; перевіркою на тестових задачах; порівняннями з деякими точними результатами та для окремих частинних випадків порівняннями з відомими в літературі результатами, які одержані з рамок інших теорій.

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що представлені до захисту, отримані здобувачем самостійно. У наукових публікаціях із співавторами особистий внесок здобувача полягає в наступному. У [44, 46] побудовано варіант МТ нетонких транстропних пластин високого наближення, отримані основні рівняння, розроблено метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми, отримані числові результати, разом зі співавтором здійснювалась постановка задач і обговорювались результати. У [6, 8, 84, 85] виведені ДР, розроблені методи їх розв'язання, отримані аналітичні розв'язки; у [10–12, 60–65]

розроблені метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми; разом з науковим консультантом і співавторами здійснювалась постановка задач і обговорювались результати. Наведені публікації повною мірою відображають основні положення та висновки роботи.

Тема докторської дисертації не співпадає з темою кандидатської дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фіз.-мат. наук “Влияние истории активного нагружения на бифуркацию процесса деформирования прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек” (Дн-вськ, 1980 р.) і не є її розвиненням. Всі наукові праці, що склали докторську дисертацію, опубліковані після захисту кандидатської дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати наукових досліджень, що наведені в дисертації, доповідались та обговорювались на 2-х Всеукраїнських і 55-х міжнародних наукових конференціях: II-му Інтернаціональному симпозиумі “Механічні і фізичні руйнування будівельних матеріалів і конструкцій” (Львів, 1996); Польсько-Українських міжнародних наукових семінарах “Теоретичні основи будівництва” (Варшава: 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2007, 2011 рр.; Дніпропетровськ: 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2008, 2010, 2012 рр.); Всеукраїнських наукових конференціях “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпропетровськ, 2003, 2004 рр.); Міжнародних наукових конференціях “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпропетровськ, 2005, 2014, 2015, 2016, 2018 рр.; Дніпро, 2019 р.); XII-й Міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я” (Харків, 2004 р.); Міжнародних наукових конференціях “Проблемы современного материаловедения, машиностроения” (Дніпропетровськ, 2001 р.), “Строительство, материаловедение, машиностроение” (Дніпропетровськ, 2002, 2003 рр.); X-й Міжнародній конференції “Математика, экономика, образование” (Ростов-на-Дону, 2002 р.); Міжнародній конференції “Актуальные проблемы механики сплошных сред” (Донецьк, 2002 р.); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки” (Київ, 2003 р.); Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій” (Дніпропетровськ, 2007 р.; Дніпро, 2019 р.); Міжнародних наукових конференціях “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2008, 2018 рр.); 10–18-й міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2015, 2016, 2017 рр.); Міжнародних науково-технічних конференціях “Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій” (м. Ялта, 2011 р.; м. Запоріжжя,

2012, 2015, 2019 pp.); III, V, VI, VII міжнародних конференціях ”Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 2016, 2018, 2019, 2020 pp.); V Міжнародній науково-практичній конференції (Харків, 2018 р.); 18-й Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції “Перспективні напрями розвитку науки та техніки” (м. Вінниця, 2018 р.); I-й Міжнародній науково-технічній конференції “Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні” (Харків, 2018 р.); 2-й Інтернаціональній науково-практичній конференції (Іспанія, м. Барселона, 2020 р.).

Основна частина роботи доповідалась і здобула позитивну оцінку на міжвузівському науковому семінарі кафедри обчислювальної механіки і міцності конструкцій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара при Придніпровському науковому центрі та науковій раді з механіки деформівного твердого тіла НАН України (наукові керівники семінару: чл.-кор. НАН України, д. т. н., проф. В. С. Гудрамович; д. т. н., проф. А. П. Дзюба, 2009 р.); на міжвузівському науковому семінарі “Проблеми нелінійної механіки” (Дніпропетровськ, кафедра БМОМ ДВНЗ “ПДАБА”; наукові керівники семінару: д. т. н., проф. А. І. Маневич; д. т. н., проф. Е. М. Кваша, 2009 р.); на об’єднаному науковому семінарі кафедр динаміки і міцності машин, теоретичної механіки, опору матеріалів і прикладної математики у Харківському національному технічному університеті (ХПТ) (головуючий семінару д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Міхлін, 2009 р.).

У повному обсязі робота доповідалась і здобула позитивну оцінку на Міжнародній науково-технічній конференції пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій” (Дніпро, жовтень 2019 р.); науково-технічному семінарі “Проблеми нелінійної механіки” (Дніпро, кафедра БМОМ ДВНЗ “ПДАБА”, голова семінару д. т. н., проф. В. В. Данішевський, 2020 р.); науковому семінарі “Математичні проблеми механіки” Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро, ДНУ, керівники семінару: д. ф.-м. н., проф. В. В. Лобода; д. ф.-м. н., проф. Ю. А. Черняков, 2020 р.); науковому семінарі відділу моделювання композитних структур і складних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, ІППММ, керівник семінару д. ф.-м. н., проф. М. В. Марчук, 2020 р.); апробована і схвалена на міжвузівському науковому семінарі “Актуальні проблеми прикладної математики і механіки” (Запоріжжя, Запорізький національний університет; керівник семінару д. т. н., проф. В. З. Грищак, 2020 р.); на об’єднаному науковому семінарі кафедр “Прикладна математика” і “Механіка суцільних сере-

довищ та опір матеріалів” Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут” (Харків, НТУ “ХПІ”; голова семінару д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Міхлін, 2020 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 100 наукових праць (85 праць в одноосібному авторстві), з яких 64 наукові статті (52 статті в одноосіб. авт.): 51 стаття – у фахових виданнях України з фізико-математичних і технічних наук (46 в одноосіб. авт.), з яких 29 статей у фахових виданнях України з фізико-математичних наук (26 в одноосіб. авт., 1-а з яких входить у міжнародні наукометричні бази); 6 статей (5 в одноосіб. авт.) у зарубіжних англomовних виданнях: 1 стаття в **Scopus** (в одноосіб. авт.); 3 статті (в одноосіб. авт.), які входять до міжнародних наукометричних баз: **Index Copernicus, RS Global, Google Scholar** та ін.; 2 статті (1 стаття в одноосіб. авт.) у зарубіжних колективних **англomовних монографіях** сумарним об’ємом 56 с.; 2 статті у виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз (1 стаття в одноосіб. авт.); 5 статей (у співавторстві) у наукових виданнях України і 36 тез доповідей (33 тези в одноосіб. авт.).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи – 503 сторінки, з яких основного тексту дисертації – 305 сторінок. Вона містить також 47 рисунків, 70 таблиць, список використаних джерел із 453 найменувань на 38 сторінках та 8 додатків на 117 сторінках.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури” (ПДАБА) на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів (БМОМ) за планами наукових досліджень держбюджетної науково-дослідної тематики: “Розробка математичних моделей ітераційних теорій, точних та асимптотичних методів розрахунку тонкостінних конструкцій” (№ держреєстрації 0197U001652, 1997-1999 рр.), “Розроблення математичних моделей та ітераційних теорій розрахунку однорідних та шаруватих оболонок і пластин із фізично лінійних та нелінійних матеріалів (№ держреєстрації 0100U003689, 2000-2001 рр.), “Розроблення математичних моделей і уточнених теорій розрахунку пружних основ та фізично нелінійних пологих оболонок” (№ держреєстрації 0102U005582, 2002-2003 рр.), “Розробка методик розрахунку фізично лінійних та нелінійних оболонок, пластин і балок на основі уточнених теорій” (№ держреєстрації 0104U000230, 2004-2006 рр.), “Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властиво-

стей матеріалів” (№ держреєстрації 0106U005339, 2006-2010 рр.), “Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властивостей матеріалів” (№ держреєстрації 0111U606484, 2011-2015 рр.), “Міцність, жорсткість, стійкість і коливання однорідних і неоднорідних стержнів, пластин, оболонок та композиційних конструкцій, включаючи об’єкти біологічного походження” (№ держреєстрації 0116U006049, 2016-2020 рр.) та за планом досліджень теми докторської дисертації. Результати докторської дисертації висвітлювались у розділах по розв’язанню граничних задач для нетонких лінійно і нелінійно пружних пластин і пологих оболонок.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів.

Теоретичне значення дисертаційної роботи полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ, розробленні на їх основі нових аналітичних математичних методів розв’язання граничних задач теорії нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок, які дають можливість звести СДРР високих порядків до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку з подальшим використанням методів математичної фізики для отримання їх загальних розв’язків і дослідження НДС та КЕ з високою точністю, що особливо є важливим при наявності локальних навантажень, отворів, та у випадках немалої товщини вказаних елементів. Одержані матеріали дисертаційної роботи впроваджені в наукові програми і теми ДВНЗ “ПДАБА” на кафедрі БМОМ за планами наукових досліджень держбюджетної науководослідної тематики (є довідка, у додатку Ж). Теоретичні результати впроваджені в навчальному процесі з курсу ТП для студентів будівельного факультету ДВНЗ “ПДАБА” (є акт впровадження, у додатку Ж), можуть бути також використані в курсах теорії пластин і оболонок, спецкурсах, як матеріал навчального посібника та в науковій роботі аспірантів, магістрів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання їх в НДІ, проектних організаціях та в інших дослідних установах високоточних розрахунків і проектування сучасних конструкцій. Це дасть змогу створювати надійні та довговічні споруди і конструкції з високою питомою міцністю і жорсткістю. Впровадження в практичних цілях матеріалів дисертаційної роботи підтверджено актом впровадження результатів досліджень у ООО “Укррезервуарсервіс”, у додатку Ж).

Автор вшановує пам’ять д. т. н., професора О. П. Прусакова, який допоміг визначити напрям наукових досліджень і підтримував їх на початковому етапі виконання даної роботи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ТЕОРІЙ РОЗРАХУНКУ ОДНОРІДНИХ ТА ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

Основні напрямки розвитку теорій, методів розрахунку однорідних і багат шарових пластин та оболонок і розв'язки прикладних задач викладено в багатьох монографіях, оглядах та фундаментальних працях в т. ч. у [1, 8, 10–15, 18, 21, 22, 24, 26, 28, 32, 33, 40, 41, 48, 55, 56–58, 61, 72, 74, 78, 81–89, 94, 95, 97, 98, 100–108, 199, 205–212, 214, 221, 222, 224, 227, 228, 231, 234, 239, 240, 245, 249, 250, 252, 253, 257, 261, 264, 265, 268–272, 274, 279, 280, 283, 287, 293, 294, 300, 306, 310, 324, 326–328, 330, 341, 342, 351, 352, 363, 366, 367, 369–371, 373, 381–385, 390, 400, 401, 408, 412, 416–420, 422, 425–429, 431, 435–438, 440, 453].

1.1. Класичні лінійні задачі тонких однорідних та шаруватих пластин і оболонок

В основу класичної теорії (КТ) лінійно пружних однорідних тонких пластин і оболонок покладено гіпотези Кірхгофа – Лява. Розвиток теорії тонких лінійно пружних пластин та оболонок на основі вказаних гіпотез викладено в багаточисельних книгах, монографіях, наукових статтях [13, 14, 48, 56, 70, 72, 79, 80, 97, 227, 234, 240, 250, 252, 257, 270, 271, 272, 294, 328, 342, 351, 373, 381, 383 – 385, 403].

КТ коректна для тонких ізотропних та слабо анізотропних пластин і оболонок, у яких жорсткості шарів одного порядку, з повільнозмінюваним НДС. В інших випадках використання КТ для однорідних та шаруватих елементів конструкцій може призвести до значних похибок у визначенні НДС, а саме: у розрахунках товстих пластин і оболонок; якщо є лінії спотворення (лінії різкого змінення зовнішнього навантаження або геометрії пластини чи оболонки), тобто у випадках наявності різкого роду концентраторів напруження; якщо матеріал характеризується суттєвою анізотропією або ж є фізично нелінійним чи пружно пластичним та якщо жорсткості шарів відрізняються значним чином (навіть для

тонких пластин і оболонок); якщо елемент конструкції зазнає великих переміщень. Неточні результати, які дає КТ пластин та оболонок, призвели до необхідності розроблення теорій розрахунку, які б уточнювали КТ та давали б практичну можливість дослідження НДС нетонких елементів конструкцій.

Підходи до побудови уточнених теорій пластин та оболонок за класифікацією Й. І. Воровича [55] і А. Л. Гольденвейзера [72] поділено на дві групи. До першої відносяться підходи, які ґрунтуються на спрощуючих гіпотезах. Друга група базується на аналітичних методах, які містять процес зведення тривимірної задачі до рекурентної послідовності двовимірних задач. В свою чергу в аналітичних методах можна виділити чотири основних напрямки: асимптотичний метод, метод однорідних розв'язків, символічний метод та метод розвинення НДС по товщині.

1.2. Некласичні теорії лінійно пружних однорідних пластин та оболонок, які ґрунтуються на методі гіпотез

Важливим в розвитку нових теорій пластин та оболонок є врахування деформацій поперечного зсуву та обтискання. Уточнення теорії згину, яка ґрунтувалась на врахуванні деформацій поперечного зсуву, уперше було виконано в 1921 С. П. Тимошенко [438] для балки в задачі про згинальні коливання. Гіпотеза Кірхгофа – Лява замінювалась менш жорсткою гіпотезою – гіпотезою прямої лінії.

Ідея С. П. Тимошенко про врахування поперечного зсуву надалі знайшла своє втілення в розробці аналогічних теорій “типу Тимошенко” для пластин та оболонок.

Е. Рейснером у 1944 р. уперше побудовано неklasичну теорію згину пластин [425]. Згідно цієї теорії за гіпотезу приймалась лінійна залежність тангенціальних напружень від поперечної координати. Інші напруження визначались з ДР тривимірної задачі ТП, при цьому використовувався ВП Кастільяно. Вирази для моментів відрізнялись від класичних доданками, що містили множники h^2 . Розв'язувальна СДР мала вигляд:

$$D\nabla^4 w = q - h^2 \left[\nu \nabla^2 q / (10(1-\nu)) \right] \nabla^2 \Phi - 10\Phi / h^2 = 0, \quad (1.1)$$

де ν і D – коефіцієнт Пуассона та циліндрична жорсткість; $w(x, y)$, $\Phi(x, y)$ – функції прогину і напружень; $q(x, y)/2$ – поперечне згинальне навантаження, яке прикладене до верхньої та нижньої лицевих площин пластини (кососиметричне поперечне навантаження пластини). Порядок СДР відповідає кількості граничних умов на кожному краї. Перше ДР (1.1) описує НС, який розповсюджується на всю область пластини, а друге – НС, який швидко затухає при віддаленні від краю пластини, причому, швидкість затухання цього КЕ більша, ніж простого КЕ [69]. Надалі за термінологією А. Л. Гольденвейзера КЕ, одержаний в теорії Е. Рейснера, прийнято називати “крайовим ефектом Рейснера”. Теорія Е. Рейснера застосовувалась при розв’язанні задач для пластин у [430, 432, 433]. В 1952 р. Е. Рейснером узагальнено теорію пластин для оболонок [428]. Підхід Е. Рейснера розвинено для ортотропних пластин [405]. У [411] побудовано теорію, в якій поперечні напруження зображувались у вигляді $\sigma_z = \rho \langle x, y \rangle f_1 \langle x, y \rangle$, $\sigma_{iz} = Q_i \langle x, y \rangle f_2 \langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle = (x, y)$. Використовуючи основні рівняння ТП, одержано ДР та знайдені функції $f_1 \langle x, y \rangle$ та $f_2 \langle x, y \rangle$. Отримані розв’язувальні ДР враховували поперечні деформації зсуву, але не враховували деформацію поперечного стискання. Теорія [411] була розвинена для транстропних пластин [453].

У [416] узагальнено і розвинено теорію Е. Рейснера для оболонок з використанням ВП Рейснера (ВІР) [427]. Відмінність цієї теорії від попередніх полягала в тому, що в ній апроксимувались по товщині не тільки переміщення, а й напруження. Числові результати вказували, що КТ придатна для тонких оболонок ($h/R < 1/50$), коли поперечний зсув практично не впливає на НДС, а для нетонких оболонок необхідно враховувати деформацію поперечного зсуву.

Закон змінення тангенціальних переміщень по товщині задавався також у [46], але поперечні переміщення не залежали від товщинної координати. На основі розв’язку тривимірної задачі для товстої прямокутної плити показано, що нехтувати поперечними нормальними напруженнями не завжди вірно.

Результати перших робіт, оснований на теоріях типу Тимошенка – Рейснера і їм подібних, які враховували поперечний зсув, порівнювались тільки між со-

бою, а не з точними результатами тривимірної ТП, оскільки таких в достатній мірі ще не було. З цієї причини такі порівняння не давали відповіді, яка з уточнених теорій більш достовірно описує НДС пластин та оболонок.

Суттєвий вклад у розвиток методів розв'язування задач по розрахунку пластин і оболонок на основі теорії типу Тимошенка – Рейснера з різними їх модифікаціями і уточненнями отримали своє розвинення в працях українських вчених [232, 233, 246–248, 275, 343, 346, 242, 244, 273, 275, 279, 280, 356] та зарубіжних авторів [63, 394–398, 402, 404, 410, 413–415, 420, 421, 439, 451]. Огляд наукових праць цього напрямку викладено у [58, 61, 287, 408].

Теорія, яка більш точно описувала НДС пластин, ніж теорія Е. Рейснера, побудована С.А. Амбарцумяном [12] для анізотропних пластин на наступних гіпотезах: нормальні до серединної площини переміщення точок пластини не залежать від поперечної координати; поперечні дотичні напруження змінюються по товщині пластини згідно з заданим законом

$$\sigma_{i3} = (\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-) / 2 + z \left(\sigma_{i3}^+ + \sigma_{i3}^- \right) / h + f_i(x, y), \quad (i = 1, 2), \quad (1.2)$$

де $\sigma_{i3}^+(x, y)$, $\sigma_{i3}^-(x, y)$ – тангенціальні компоненти інтенсивності зовнішнього навантаження, прикладеного на лицевих площинах пластини (при $z = \pm h/2$); $f_i(x, y)$ – функції, які характеризують закон змінення поперечних дотичних напружень по товщині (задаються з фізичних міркувань у вигляді квадратичної параболи), причому $f_i(x, y) = \pm h/2 = 0$; $\varphi_i(x, y)$ – шукані функції координат x , y . Представлення (1.2) дає можливість задовольнити граничним умовам на лицевих площинах для поперечних дотичних напружень. Як і в теорії Е. Рейснера, поперечні переміщення не залежали, а поперечні напруження σ_z залежали нелінійно від z . Але на відміну від теорії Е. Рейснера компоненти тангенціальних переміщень і напружень містили нелінійні доданки від z . Одержана система п'яти ДР з частинними підхідними 10-го порядку відносно п'яти шуканих функцій двох змінних: $u, v, w, \varphi_1, \varphi_2$. Крайові умови в теорії [12] при довільно вибраних функціях $f_i(x, y)$ точно не задовольняють-

ся і тому автор пропонує “пом’якшення” крайових умов. Вказана теорія уточнює тільки основний НДС. Теорія [12] узагальнена для оболонок [13].

Х. Муштарі [254] на основі асимптотичного аналізу результатів теорії товстих плит [240], послідовним утриманням в залежностях величин порядку h^2/a^2 , методом ітерацій побудовано теорію пластин середньої товщини. За гіпотезу на першому кроці приймалось розподілення поперечних деформацій зсуву по товщині за законом квадратичної параболи. Для функції прогину одержано ДР 6-го порядку. Як і в теорії [12], в цій теорії компоненти напружень, тангенціальних переміщень і деформацій, поперечних деформацій зсуву також містили нелінійні доданки від z , але більш високого порядку для поперечних напружень та поперечних деформацій зсуву. Крім цього, поперечні переміщення, на відміну від [12], залежали від z . Теорія Х. Муштарі також уточнювала тільки основний НДС. У [255] теорію [254] узагальнено для оболонок середньої товщини.

Уточнення теорії Е. Рейснера для пластин проведено в [5]. Одержана система інтегро-диференціальних рівнянь. Теорія пластин, у якій тангенціальні переміщення прийняті у вигляді поліномів третього степеня, побудована в [386]. При цьому вважалось, що $\varepsilon_z = 0$, а σ_z малі в порівнянні з іншими напруженнями. Коефіцієнти в апроксимації тангенціальних переміщень визначались із граничних умов на лицевих площинах. При дії тільки поперечного навантаження отримана система ДР 6-го порядку, структурно подібна (1.1)

$$D\nabla^4 w = q - 4h^2\nabla^2 q / (5(1-\nu)), \quad \nabla^2\Phi - 5\Phi / (2h^2) = 0.$$

Теорія лінійно пружних оболонок на основі моделі прямих нормалей послідовно викладена і розвинена для трансропних оболонок у [280] і для ортотропних – в [104]. Уточнена теорія анізотропних пластин розроблена в [282]. За гіпотезу прийнято закон розподілення поперечних дотичних напружень згідно з частинною теорією С. А. Амбарцумяна [12], в якій поперечні переміщення визначалися за класичною теорією, а функція змінення поперечних дотичних напружень по товщині $f(\xi)$ – квадратична. Поперечні деформації зсуву мали ви-

гляд: $\gamma_{13} = f_1(x_1, x_2)$, $\gamma_{23} = f_2(x_1, x_2)$, де f_1, f_2 – шукані функції. Компоненти переміщень визначалися при умові $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = 0$. Тангенціальні переміщення нелінійні по товщині. Розв’язувальні ДР одержувалися із ВП Лагранжа. Система ДР мала 16-й порядок і розпадалася на систему плоского стану і згину. Задача згину описувалася СДР 12-го порядку з шістьма крайовими умовами. Для трансропного матеріалу СДР мала 8-й порядок, а кількість граничних умов – чотири. Числові розрахунки вказували на більшу точність цієї теорії в порівнянні з теоріями С. Амбарцумяна і Е. Рейснера. Одержано також, що для розв’язку задач з локальним навантаженням КТ неприйнятна, а гіпотеза прямих нормалей уточнює тільки нормальні напруження. Ускладнена апроксимація поперечних переміщень та поперечних дотичних напружень для трансропних плит і кругових циліндричних оболонок середньої товщини при поперечному навантаженні прийнята в [337]. Одержані рівняння для плити розпадалися на дві системи: одна описувала НДС при кососиметричному, а інша – при симетричному навантаженні. Обтискання суттєво уточнювало результати.

Ускладнена теорія ортотропних оболонок, що враховувала нелінійність розподілення всіх компонент переміщень та напружень по товщині, розроблена в [39]. За гіпотезу приймався наступний закон змінення компонент переміщень:

$$u_\alpha = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) u_0 + z^2 u_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right) u^- + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right) u^+, \quad (u_\alpha \rightarrow u_\beta; u \rightarrow v);$$

$$w = w_0 + zw_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3,$$

де u_0, v_0, \dots, w_3 – функції тангенціальних координат α, β ; u^\pm, v^\pm – тангенціальні переміщення лицевих поверхонь $z = \pm h/2$. Оскільки поперечні дотичні напруження поліноми 3-го степеня, то це дало можливість врахувати зміщення точки максимуму поперечних дотичних напружень вбік навантаженої поверхні. Компоненти тангенціальних та поперечних нормальних напружень є поліномами 4-го степеня. Модель дає прийнятні результати, але НДС уточнювати не можна.

1.3. Некласичні теорії лінійно пружних однорідних пластин та оболонок, які основані на аналітичних методах

1.3.1. Метод асимптотичного інтегрування тривимірних рівнянь ТП.

Асимптотичний метод (АМ) оснований на розкладанні НС у вигляді суми двох НС: основного та допоміжного. Основний НС відображує складову повільнозмінюваного стану вдалині від збурюючих факторів. Допоміжний НС характеризує швидкозмінюваний стан поблизу цих збурюючих факторів і описує напружений стан КЕ. Допоміжний НС швидко згасає по мірі віддалення від місць збурюючих факторів.

Ідея введення допоміжних швидкозатухаючих НС і побудова на її основі відповідної теорії пластин належить К. Фрідріксу [403]. Надалі АМ в теорії ізотропних пластин було розвинено в [70]. Шуканий НС пластини зображувався у вигляді суми повільнозгасаючого і швидкозгасаючого при віддаленні від країв НС. Повільнозмінюваний НС будувався за допомогою основного ітераційного процесу (ОІП). При цьому приймалось, що напруження і переміщення не швидко змінюються по тангенціальним змінним x та y і швидко змінюються по поперечній координаті z . Після заміни $z = h\xi$ одержувалась СДР рівноваги та залежності переміщення – напруження. Довільна компонента НС зображувалась у вигляді скінченного степеневого ряду виду

$$Q = h^{-q} \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} Q^{(s)},$$

де h – товщина пластини, q – ціле число, яке залежало від компонент

НС. Одержана неоднорідна СДР в S -му наближенні відносно компонент напружень та переміщень цього наближення. Вона зведена (для $S > 2$) до неоднорідного бігармонічного рівняння. Напруження ОІП задовольняли граничним умовам на лицевих площинах в 1-му наближенні і нульовим граничним умовам в наступних наближеннях (для $S > 1$). Із умови незалежності загальних, частинних розв'язків СДР та зовнішнього навантаження на лицевих площинах від h , отримувались значення для q .

При побудові допоміжного ітераційного процесу (ДІП), який описував НС, що згасав як завгодно швидко при достатньо малому h , вводилась заміна масштабу

за двома координатами $x = h\xi$, $z = h\zeta$. Приймалось, що швидкість змінення НС за змінними ξ, η, ζ невелика. Довільне напруження чи переміщення зображувалось при цьому у такому структурному вигляді $R = h^r \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} R^{(s)}$, де r визначалось із двох можливих варіантів і також залежало від компоненти НДС, надалі знаходилось в процесі розв'язку із специфічних умов.

В першому варіанті ДП основними є рівняння, з яких визначались напруження $\sigma_{xy}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}$ та переміщення $v^{(s)}$. СДР для цього варіанта зводилась до ДР Пуассона. В другому варіанті ДП основними є рівняння, з яких знаходились $\sigma_x^{(s)}, \sigma_y^{(s)}, \sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_z^{(s)}, u^{(s)}, w^{(s)}$. Відповідна СДР зводилась до неоднорідного бігармонічного рівняння. В обох варіантах ДП частинні і загальні розв'язки ДР повинні задовольняти однорідним граничним умовам на лицевих площинах і умові згасання при віддаленні від краю $\xi = 0$. Крім цього, для загальних розв'язків однорідних ДР повинні виконуватись деякі специфічні умови, щоб можна було задовольнити крайовим умовам на краях, зокрема, щоб послідовність крайових умов в кожному наближенні по s не знаходилась в суперечності з тими ДР, які відповідають даному наближенню. Основні результати [70] полягають у тому, що НС при згині тонкої пластини складається з основного НС (визначається ОП), НС крайового скручування (визначається першим варіантом ДП) та НС крайової плоскої деформації (визначається другим варіантом ДП). Показано також, що перше наближення ОП еквівалентно ДР і граничним умовам КТ згину пластин. Основними напруженнями (які змінюються швидше інших) в ОП є напруження $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y$. Вони збільшуються як h^{-2} ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \sim h^{-2}$). Основними напруженнями для крайового скручування є напруження σ_{xy}, σ_{yz} , а для крайової плоскої деформації – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}$. Із аналізу НС ОП та ДП випливає, що основні напруження крайового скручування і крайової плоскої деформації одного порядку з основними напруженнями ОП. АМ використовувався у [217, 424] при розв'язуванні задач для круглої пластини. АМ [70] було по-

ширено на ізотропні оболонки [71]. Як і для пластин, цей метод також базувався на побудові трьох аналогічних ітераційних процесів.

Надалі АМ [70] узагальнено для анізотропних пластин [3] і оболонок [4]. Показано, що НС в анізотропній оболонці, як і в ізотропній, зображується у вигляді суми НС ОП та ДП. АМ інтегрування рівнянь тривимірної ТП теоретично і практично розвинено у [110, 245, 271, 423, 429].

1.3.2. Символічний метод Лур'є. Метод однорідних розв'язків. Символічний метод інтегрування ДР тривимірної задачі ТП для плити було запропоновано А. І. Лур'є [239]. Ідея полягала в тому, що СДР рівноваги в переміщеннях розглядалась як система звичайних ДР з незалежною змінною z (поперечною координатою) відносно компонент переміщень з початковими умовами при $z = 0$; $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $\partial u / \partial z = u'_0$, $\partial v / \partial z = v'_0$, $\partial w / \partial z = w'_0$. При інтегруванні системи диференціальні оператори $\partial / \partial x$, $\partial / \partial y$, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, які входили в цю систему, розглядались як сталі параметри. Після символічного інтегрування одержувались компоненти переміщень u , v , w , виражені через u_0 , v_0 , w_0 , u'_0 , v'_0 , w'_0 , і МГП. Потім із закону Гука знаходились компоненти напружень. Для визначення u_0, \dots, w'_0 використовувались статичні граничні умови на лицевих площинах плити (по три умови для напружень $\sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ на кожній лицевій площині). В першу систему рівнянь, що відображала симетричні граничні умови (ГУ) на лицевих площинах плити, входили шукані функції u_0 , v_0 , w'_0 . Ця система рівнянь відповідала плоскій задачі. В другу систему, яка відображала кососиметричні ГУ на лицевих площинах плити, входили шукані функції u'_0 , v'_0 , w'_0 . Ця система відповідала задачі згину. Одержано по три групи незалежних частинних розв'язків відповідних однорідних рівнянь для обох систем – однорідні розв'язки.

Символічний метод А. І. Лур'є було узагальнено в [235] при одержанні однорідних розв'язків для транстропних товстих плит. Застосування і розвинення символічний метод А. І. Лур'є одержав, зокрема, у [51, 266]. Метод однорідних розв'язків в теорії лінійно пружних многозв'язних пластин в тривимірній поста-

новці розвивався у [224] з використанням методу теорії функцій комплексної змінної, у [10] з використанням ідеї методу Бубнова – Гальоркіна.

У [6] запропоновано АМ побудови розв’язків тривимірної задачі плит, відмінний від [70]. Цей метод оснований на застосуванні однорідних розв’язків для ізотропної плити при відсутності на лицевих площинах зовнішніх навантажень. Бічна поверхня плити знаходилась під дією зусиль статично еквівалентних нулю. НС плити зображувався у вигляді суми трьох НС: бігармонічного, вихрового та потенціального. Ці НС залежали від трьох координат $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$. Залежності від ξ та η визначались відповідними функціями: бігармонічною $\psi(\xi, \eta)$ та функціями $B_k(\xi, \eta)$ і $C_p(\xi, \eta)$ (позначення [6]). Останні дві функції для задачі згину знаходились із двох ДР:

$$\partial^2 B_k / \partial \xi^2 + \partial^2 B_k / \partial \eta^2 - \sigma_k^2 B_k / \lambda^2 = 0, \quad \sigma_k = (2k+1)\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.3)$$

$$\partial^2 C_p / \partial \xi^2 + \partial^2 C_p / \partial \eta^2 - \gamma_k^2 C_p / \lambda^2 = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

де $\lambda = h/a$, $2\gamma_p$ – корені рівняння $\sin x/x - 1 = 0$. Крайові умови для функцій ψ , B_k , C_p визначались за допомогою принципу можливих переміщень Лагранжа. Для дослідження асимптотики (при $\lambda \rightarrow 0$) розв’язків рівнянь (1.3) та (1.4) використано метод розтягання масштабу по нормалі до контуру. Шукані функції та граничні умови розкладались в степеневі ряди за малим параметром λ . Для знаходження функцій, які входять в розкладання ψ , B_k , C_p за малим параметром λ на краю пластини, отримано складну нескінченну систему ЛАР. Аналіз НДС показав, що КТ має обмежену область використання, навіть для достатньо тонких пластин. АМ [6] розвинено в багатьох роботах, зокрема, у [7, 53, 54, 340, 387]. У [7] побудовано НДС плити при вільних від зовнішніх зусиль лицевих площинах і при п’яти різних типах крайових умов. У [53] побудовані однорідні розв’язки для товстої плити при дії на її бічній поверхні системи зусиль, симетричної відносно серединної площини плити. Показано, що НС в плиті також складається із суми бігармонічного, вихрового та потенціального НС. Показано, що НДС вдалині

від краю контура плити прямує до деякого бігармонічного стану, який не повністю описується граничними умовами ПНС, тобто одержано, що принцип Сен-Венана в класичному розумінні фактично не виконується навіть при достатньому віддаленні від контура пластини. В [7, 53] при визначенні граничних умов для шуканих функцій використовувався ВП Лагранжа. У [340], [387] АМ [6] узагальнено для транстропних плит. Тільки на відміну від [6, 7, 53] знаходження крайових умов для шуканих функцій проводилось розвиненням їх у загальні ряди Фур'є. Для неоднорідних плит АМ [6] розвинено у [54]. АМ в теорії пластин та оболонок викладено в [55]. Методи, аналогічні [239], розвинені зокрема, в [47, 48, 241].

1.3.3. Метод розвинення компонент НДС по товщині. Метод зведення тривимірної задачі ТП для пластин та оболонок до двовимірної, оснований на розвиненні шуканих функцій в степеневі ряди з цілими показниками по поперечній координаті, використовувався ще Коші і Пуассоном в теорії тонких пластин. М. О. Кільчевський узагальнив указаний метод для розрахунку оболонок [211], запропонувавши метод розвинення НДС в тензорні ряди. Розвинення по товщині здійснювались при допомозі степеневих рядів у [9, 23, 66, 112, 236, 349, 380]. У [9] в степеневі ряди розвивалась функція напружень, а в [23] і [112] – компоненти переміщень при розв'язуванні задач для товстих плит від дії полігармонічних навантажень на лицевих площинах. В [236] застосовано метод розвинення НДС в степеневі ряди з цілим невід'ємним показником для товстих анізотропних оболонок при побудові ДР, які одержувались безпосередньо з тривимірних ДР рівноваги ТП. Граничні умови на лицевих поверхнях виконувались точно. Задача зводилась при врахуванні перших n наближень до системи $3n$ ДР з частинними похідними відносно $3n$ невідомих функцій двох тангенціальних змінних. Крайові умови на краю оболонки не обговорювались. У [349] розроблена теорія пластин середньої товщини на основі методу розвинення усіх компонент НДС у степеневі ряди за поперечною координатою з використанням ВП можливих переміщень. Отримана нескінченна СДР з частинними похідними відносно компонент переміщень.

Суттєво відмінний від [236, 349] варіант теорії розрахунку транстропних плит сталої товщини, які знаходилися під дією згинального навантаження на

краях і довільного поперечного навантаження на лицевій площині ($\sigma_z(z = -h) = -q(x, y)$), побудовано в [380]. Компоненти переміщень приймалися у вигляді розкладань за натуральними степенями поперечної координати.

Ідея М. О. Кільчевського знайшла своє втілення в подальшому розвитку теорії однорідних пластин та оболонок при розвиненні НДС використовувати поліноми Лежандра у працях [41, 49, 50, 60, 67, 106, 107, 203, 219, 247, 267, 288, 290, 299 – 302, 306–308, 310, 311, 320, 335, 358 – 365, 376, 377, 401, 407, 434, 435].

У [41] І. Н. Векуа в 1955 р. проєкційним способом побудував теорію призматичних оболонок довільної змінної товщини, яка була розвинена і узагальнена в його подальших роботах для довільних пологих оболонок. Граничні умови на лицевих поверхнях задовольнялись наближено. У [401] одержано ДР і граничні умови для оболонок обертання з принципу можливих переміщень. Числових результатів у працях І. Н. Векуа не отримано.

У [299] на основі ВП Кастильяно побудована теорія ізотропних пластин з використанням півоберненого методу Сен-Венана. В ряди за поліномами Лежандра розкладались тангенціальні напруження:

$$\sigma_x = \frac{T_{xx}}{h} + \frac{6\zeta}{h^2} M_x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\zeta) \sigma_{kx}, \quad \sigma_{xy} = \frac{T_{xy}}{h} + \frac{6\zeta}{h^2} M_{xy} + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\zeta) \sigma_{kxy},$$

де $P_k(\zeta)$ – поліноми Лежандра; $T_{xx}, T_{xy}, M_x, M_{xy}, \sigma_{kx}, \sigma_{kxy}$ – функції тангенціальних координат $\xi = x/a, \eta = y/a$ (a – ширина пластини), $\zeta = 2z/h$ (h – товщина). Граничні умови на лицевих площинах приймалися у вигляді

$$\sigma_z(\zeta = \pm h/2) = p \pm q, \quad \sigma_{xz}(\zeta = \pm h/2) = \sigma_{yz}(\zeta = \pm h/2) = 0,$$

де p і q – симетричні і косиметричні складові інтенсивності поперечного навантаження. ДРР в зусиллях і моментах та інші компоненти напружень одержувалися з урахуванням граничних умов і також виражались у вигляді рядів за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра. Одержано, що задача для пластини поділяється на задачу згину і плоску задачу. Тангенціальні напруження

ВНДС з урахуванням перших чотирьох членів і членів порядку $\left(\frac{h}{a}\right)^2$ та відкиданням членів порядку $\left(\frac{h}{a}\right)^4$ для задачі згину мають деякі додаткові члени, яких немає в теоріях С. А. Амбарцумяна, Х. М. Муштарі, Е. Рейснера, хоч вони того ж порядку, як і утримувані у вказаних роботах. Це говорило про більшу точність цієї теорії в порівнянні з теоріями [12, 254, 425]. В роботах [300, 301] метод статті [299] узагальнено для задач згину анізотропних пластин, матеріал яких має одну площину симетрії. В [300] розглянуто згин пластини при кососиметричному нормальному навантаженні на лицевих площинах. Для трансропної пластини асимптотичним методом побудовані інтеграли типу пограншару. Одержано, що пограншари при збільшенні номера наближення швидко затухають і їхній вплив на основний НДС суттєво зменшується. Показано, що для задач згину пластин вплив потенціальних пограншарів в другому та третьому наближеннях незначний. В [301] методом [299] розглянуто згин товстих трансропних плит від дії поперечних навантажень, прикладених на обох лицевих площинах. З ВП Кастільяно при допомозі методу невизначених множників Лагранжа отримано ДРР та статичні і геометричні крайові умови. НДС розкладено у вигляді суми основного (внутрішнього), потенціального та вихрового НДС. Виділені ДР, які описують потенціальний та вихровий НДС. Досліджена асимптотика (при $h \rightarrow 0$) розв'язків ДР внутрішнього, потенціального та вихрового НДС. Інтеграли ДР внутрішнього НДС, які характеризуються малою змінюваністю, знаходилися при допомозі звичайного методу малого параметра (параметра h). Для визначення інтегралів потенціального та вихрового пограничних шарів, які характеризуються швидким згасанням по мірі віддалення від краю пластини, розглядалися однорідні рівняння і для них загальним методом малого параметру відшукувалися швидкозгасаючі розв'язки. Показано, що НДС, викликаний самоврівноваженими крайовими навантаженнями, не зникає повністю при віддаленні від країв, але його величина в порівнянні з внутрішнім НДС набагато менша. Одержано, що біля границі поперечні і тангенціальні напруження одного порядку відносно h . Поправки до основного НДС, які вносить вихровий пограничний шар, більш суттєві, ніж поправки потенціального пограншару. Із зростанням E/G' вплив пограншарів на основний НДС збільшується

(пограншар згасає повільніше і область його дії розширюється). Числових результатів у роботах [299–302] не отримано.

Наближена теорія ізотропних оболонок обертання з використанням поліномів Лежандра запропонована у [203]. Застосовано напівобертаний метод Сен-Венана. В ряди за поліномами Лежандра від поперечної координати розвивались тангенціальні напруження. Із ДРР з урахуванням граничних умов на поверхнях оболонки визначались поперечні напруження через поліноми Лежандра. Основні рівняння одержані з ВП Кастільяно методом невизначених множників Лагранжа. При виведенні ДР утримувалися члени порядку h/R , а в рядах – перші чотири члени. Крайові умови задовольнялись наближено: статичні – інтегрально, а кінематичні – для серединної поверхні. КТ тонких оболонок і теорія Рейснера впливали як частинні випадки.

Тангенціальні напруження розвивались у ряди за поліномами Лежандра в [60]. Поперечні напруження знаходилися з ДРР. Із ВП Кастіліано побудовані ДР основного, потенціального та вихрового НС. Знайдені розв'язки першого потенціального та першого вихрового пограншарів. СДР задачі десятого порядку.

Для дослідження НДС анізотропних пластин та оболонок поліноми Лежандра застосовувались у багаточисельних наукових працях І. Ю. Хоми, зокрема в [358–365]. У [358] розвинено теорію І. Н. Векуа для ортотропних пластин. Побудовані основні рівняння з урахуванням 1-го наближення. Одержана СДР розпадалась на дві групи: одна описувала безмоментний НС, а інша – НС при згині. У [359] розглядався згин слабоортотропних пластин в 1-му наближенні. Лицеві площини вважались вільними від навантаження і пластина згиналась тільки від дії крайових сил. У [360] побудовано загальний розв'язок СДРР згину пластин теорії І. Н. Векуа в 3-му наближенні при відсутності зовнішнього навантаження на лицевих площинах. У [361] узагальнено і розвинуто ідею роботи [360] про знаходження загальних розв'язків лінійної однорідної СДР. Методами теорії функцій комплексної змінної побудовано загальний розв'язок однорідної СДР згину пластини для довільного скінченного числа наближень. У [362] досліджувалось розв'язування граничних задач теорії ортотропних пластин з урахуванням 1-го наближення при дії зовнішнього поперечного і дотичного навантажень на лицевих площинах. Одержано дві незалежні СДР пластини в переміщеннях, які описували

плоский НС і НС при згині. Розглянуто два варіанти крайових умов на бічній поверхні: коли задані тільки компоненти переміщень або тільки компоненти напружень. Побудовані загальні розв'язки задачі для ПНС у вигляді регулярної та сингулярної частин. Питання знаходження частинних розв'язків ДР високих порядків не обговорювалось. У [364] розроблено метод побудови загального розв'язку ДРР нетонких транстропних пластин сталої товщини, лицеві площини яких вільні від зовнішнього навантаження, а на бічній поверхні виконувались змішані граничні умови, симетричні відносно серединної площини. У [365] розглядалися неоднорідні транстропні пластини. Узагальнена теорія анізотропних пластин і оболонок викладена в монографії [363]. Зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної здійснено на основі методу розвинення компонент напружень та переміщень у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра з використанням ВП Гамільтона-Остроградського. Компоненти зображувались для задач статички у вигляді рядів Фур'є-Лежандра:

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(\xi_1, \xi_2) \left(u_i, \sigma_{ij}\right) \quad (1.5)$$

де P_k – поліноми Лежандра; u_i, σ_{ij} – коефіцієнти розкладань або так звані моменти; ζ – безрозмірна поперечна координата. З урахуванням (1.5) одержувалися компоненти деформацій через поліноми Лежандра. Отримано в k -му наближенні СДРР, а також статичні та геометричні граничні умови, які враховували задані на лицевих та бічних поверхнях переміщення та напруження. СДРР при незмінній метриці по товщині одержана в такому вигляді

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ c_{1i1j} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_1^2} + c_{1i2j} + c_{2i1j} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c_{2i2j} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_2^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^k \left[\frac{1}{h} \left(a_{jm}^{ik} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} + b_{jm}^{ik} \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{h^2} c_{jm}^{ik} u_i \right] \right\} F_j = 0 \quad (1.6)$$

$$\xi = 1, 2, 3; k = 0, 1, 2, \dots$$

де F_j – вантажні члени; c_{ijls} – пружні сталі; $a_{jm}^{ik}, b_{jm}^{ik}, c_{jm}^{ik}$ – коефіцієнти, що залежать від МГП оболонки; A_1, A_2 – параметри Ламе серединної поверхні. Система (1.6)

вався на покращеній скінченно-різницевій апроксимації похідних – так званому аналогу третього порядку точності. Узагальнений (без гіпотез) підхід до знаходження НДС дав можливість розв’язувати задачі для товстих оболонок з швидкозмінюваною геометрією, а також для оболонок при дії на них локальних навантажень. Зокрема отримано, що змінення НДС оболонки по товщині в області прикладання локального навантаження суттєво нелінійне, а поперечні нормальні напруження одного порядку з тангенціальними нормальними напруженнями.

Проекційний метод з використанням поліномів Лежандра використовувався у [376]. Побудовані ДР для визначення НДС товстих пластин при циліндричному згині, коли на лицевих площинах прикладені зовнішні навантаження. СДР розпалася на підсистеми симетричного і кососиметричного НДС. Граничні умови на бічній поверхні також розкладалися в ряди Фур’є-Лежандра і задовольнялись з будь-якою точністю. Розроблено методику розв’язання одержаних підсистем.

Метод побудови теорії згину нетонких транстропних пластин, оснований на енергетичних міркуваннях (енергоасимптотичний метод (ЕАМ)) і методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної з використанням поліномів Лежандра і ВПР, розроблено О. П. Прусаковим в [306] і надалі розвинуто у [49, 50, 219, 288, 307, 308, 320]. У [306] на лицевих площинах пластина зазнавала кососиметричного відносно серединної площини поперечного навантаження. Тангенціальні напруження і компоненти переміщень зображувались рядами при допомозі поліномів Лежандра. Поперечні напруження знаходилися інтегруванням ДРР з урахуванням граничних умов. Отримано:

$$\sigma_z = - \sum_{i=1,3}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x, y), \quad \sigma_{xz} = \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{d\alpha_i}{dz} Q_{ix}(x, y), \quad (1.7)$$

В (1.7) Q_{ix} , Q_{iy} (для $i \geq 2$) – полісили, $\alpha_i(z)$ – функції, які знаходилися із ДРР при їх інтегруванні. Надалі з ВПР одержано ДРР, крайові умови та залежності між зусиллями і узагальненими переміщеннями. Із збільшенням кількості членів рядів зростає порядок СДР, і тому в [306] запропоновано ЕАМ. Суть його полягала в тому, що в 1-му наближенні (коли береться тільки 1-й член рядів) варіюється енергія пластини тільки по 1-му НДС. В 2-му наближенні при відомому

уже 1-му НДС варіюється енергія тільки по 2-му НДС і т. п. В результаті такого асимптотичного процесу будь-яке наближення описується СДР 6-го порядку. Так, у 1-му наближенні одержується наступна СДР відносно функцій w_1 і ψ_1

$$D\nabla^4 w_1 = q - h^2(2G/G' - \nu'E/E')\nabla^2 q / (10(-\nu)); \quad D = Eh^3 / (12(-\nu^2)); \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \psi_1 - 10G'\psi_1 / (h^2G) = 0, \quad (\psi_1 = \partial u_1 / \partial y - \partial v_1 / \partial x). \quad (1.9)$$

Як впливає із (1.8), (1.9), в 1-му наближенні маємо теорію пластин Рейснера [425].

В 2-му наближенні (враховувався другий член рядів) СДР мала вигляд:

$$\mathbb{A}_4 \nabla^4 + A_2 \nabla^2 + A_0 \mathbb{W}_3 = \nabla^2 (\mathbb{B}_4 \nabla^2 + B_2 \mathbb{W}_1 + \mathbb{C}_2 \nabla^2 + C_0 \mathbb{Q}_2); \quad \mathbb{V}^2 - D_0 \mathbb{W}_3 = D_1 \psi_1, \quad (1.10)$$

де A_0, \dots, D_1 – МГП пластини.

У [288, 306] означені поняття основного НС (описується тільки переміщеннями w_1), вихрового НС (описується функціями $\psi_k, k \geq 1$) та потенціального НС (описується переміщеннями $w_k, k \geq 2$). Підкреслено, що вихровий НС має місце уже з 1-го наближення, а потенціальний – тільки з 2-го. При використанні ЕАМ порядок СДР в кожному наближенні не збільшується (шостий), але праві частини цих ДР з кожним наближенням ускладнюються і залежать лінійно від НДС попередніх наближень. У [288] ЕАМ побудовані основні рівняння для транстропної пластини при граничних умовах на лицевих площинах: $\sigma_z(\mathbb{C} = \pm h/2) = 0,5(\pm q(\mathbb{C}, y) - p(\mathbb{C}, y)); \quad \sigma_{xz}(\mathbb{C} = \pm h/2) = 0, (x, y)$. Із одержаних ДР випливало, що НС розділявся на симетричний (обтискующий) і косиметричний (згинальний). Розглянуто згин по циліндричній поверхні вільно обіпертої ізотропної пластини ($a=h, \nu=0.3$) від дії косиметричного синусоїдального поперечного навантаження. Одержано, що розв'язування задачі ЕАМ в 2-му наближенні мало відрізняється від точних, а розв'язування за методикою взаємозв'язаних рівнянь (МВР) (входить шукані функції з індексами 1 і 3) ще менше відрізняються від точних, що вказувало на більшу точність розв'язку за МВР. Досліджено також згин по циліндричній поверхні жорстко защемленої по довгим краям ізотропної пластини ($a=5h, \nu=0.3$) від дії рівномірного навантаження на лицевих

площинах. З'ясовано різку відмінність значень для σ_x в 2-му наближенні в порівнянні з 1-м у защемленні, що пов'язана з урахуванням у 2-му наближенні ПКЕ. Розглянуті приклади розрахунку пластин при циліндричному згині показали, що ВНДС з достатньою точністю визначається уже в 2-му наближенні. Напруження в області КЕ і при збільшенні h/a потрібно визначати в більш високих наближеннях. У [219] ЕАМ в перших трьох наближеннях розв'язана задача про згин трансропної пластини з круговим отвором при дії моментів, прикладених на нескінченності. У [307] ЕАМ узагальнено і розвинено для пологих трансропних оболонок. СДР для оболонки не розділялися на дві окремі підсистеми симетричного і кососиметричного деформування. Одержано розв'язувальні ДР для 1-го і 2-го НС. У [49] на основі ЕАМ одержані розв'язувальні ДР для пологої трансропної оболонки для 3-го та 4-го НС. Досліджувався НДС квадратної в плані рівнокривинної пологої оболонки, навантаженої на верхній лицевій поверхні синусоїдальним навантаженням. У [50] ЕАМ досліджувалась дія навантаження у вигляді піраміди на пологу трансропну оболонку з урахуванням поперечного обтискання. У [291] ЕАМ узагальнено для ортотропних оболонок. Розв'язувальні ДР в 1-му наближенні ($i = 0, 1$) описували НДС оболонки і ВКЕ в 1-му наближенні, в інших наближеннях ($i \geq 2$) одне ДР уточнювало НДС і описувало в різних наближеннях ПКЕ, а друге ДР уточнювало ВКЕ. СДР 1-го наближення – 10-го, а наступних наближень – 6-го порядку.

У [320] на основі ЕАМ для трансропної пологої оболонки побудовані ДР НДС та пограншарів при кососиметричному навантаженні. У [310] була започаткована МВР для кососиметричного поперечного навантаження, згідно з якою одночасно в зображенні компонент переміщень приймалися два доданки без розглядання їх як частинних сум рядів. Отримана з використанням ВПР СДР 12-го порядку розділялася на дві окремі підсистеми: 8-го порядку – описувала потенціальний НС і 4-го – описувала ВКЕ. У [311] запропоновано варіанти теорій пластин 4-го, 6-го, 8-го і 10-го порядків.

Поліноми Лежандра при апроксимації компонент НДС в задачах для пластин і оболонок використовувались у працях [67, 247, 335, 407, 434].

Огляд наукових праць з класичної і некласичної теорії пластин та оболонок здійснено в [61], [287]. Узагальнені теорії нетонких елементів викладено в [261].

1.4. Теорії лінійно пружних шаруватих пластин і оболонок

Як і теорії одношарових елементів конструкцій, так і теорії шаруватих систем ґрунтуються на різних підходах і методах. Згідно з [81] можна виділити два основні напрямки розвитку теорій шаруватих пластин та оболонок. Перший напрямок характеризується тим, що для виведення рівнянь використовуються кінематичні гіпотези для кожного окремого шару. При такому підході порядок ДР залежить від кількості шарів. Для другого напрямку характерним є виведення рівнянь із застосуванням гіпотез, які вводилися для всього пакету шарів у цілому. І тому при такому підході порядок ДР не залежить від кількості шарів. Теорії першого напрямку згідно з [281, 287] названо “дискретно-структурними” (ДСТ), а другого – “неперервно-структурними” (НСТ). З другого боку і ДСТ і НСТ ґрунтуються на методах гіпотез та аналітичних методах.

1.4.1. Шаруваті пластини та оболонки. Дискретно структурні моделі (ДСМ). Розрахунку тришарових елементів конструкцій присвячена велика кількість наукових робіт, як вітчизняних так і зарубіжних авторів. Розвиток теорій і методів розв'язування прикладних задач для тришарових пластин та оболонок викладено в багаточисельних працях, в тому числі, зокрема, в книгах [222, 371, 436], оглядах [8, 58, 61, 227, 412, 417].

Тришарові елементи конструкцій в залежності від припущень відносно заповнювача поділяються на конструкції з легким [78, 305] або жорстким [79, 80] заповнювачем. Тришарові елементи конструкцій розглядалися, зокрема, у [12, 13, 31, 58, 59, 65, 78, 79, 222, 256, 276, 305, 319, 347, 371, 426].

Однією з перших була робота Е. Рейснера [426] по розрахунку тришарових пластин з легким заповнювачем. Причому, вводилися додаткові припу-

щення: для внутрішнього шару приймалось $\varepsilon_z = 0$ і $G_{13} = G_{23}$; для несучих шарів приймалось рівномірне розподілення напружень по товщині.

Без використання вказаних припущень О. П. Прусаковим у [305] побудовані загальні рівняння згину пластин з легким заповнювачем, як для просторової задачі ТП для ортотропного тіла з кусково-сталими модулями пружності в межах кожного шару; для зовнішніх шарів приймалась гіпотеза Кірхгофа-Лява.

Найбільш загальним для розрахунку тришарових пластин та оболонок є підхід, згідно з яким для несучих шарів вважалася справедливою гіпотеза Кірхгофа-Лява, а для заповнювача — гіпотеза прямих. Такий підхід давав змогу врахувати для заповнювача деформації зсуву, а для зовнішніх шарів — згинальну жорсткість. Вказані вище уточнення НДС заповнювача, як зазначено у [31, 58], дають задовільні результати тільки у випадках гладкого навантаження. В інших же випадках розглядувані теорії мають обмежені границі застосування.

Теорія розрахунку шаруватих оболонок, основана на застосуванні кінематичних гіпотез для кожного шару, була розвинена в роботах [378], [80], [16]. Вводилась гіпотеза прямої лінії для кожного окремого шару. Вважалось також, що шари сприймають поздовжні сили та моменти і є нестисливими в поперечному напрямку. ДРР і граничні умови одержані варіаційним способом. Такий узагальнений підхід давав можливість граничними переходами одержувати ДР для оболонок з різними МГП. Порядок СДР залежав від кількості шарів. У [80], як частинні випадки, одержано ДР для шаруватих оболонок симетричної структури. Для тришарових оболонок отримано СДРР 12-го порядку відносно функції зусиль та функції переміщень.

У [25], виходячи з ВП Лагранжа, одержані ДР згину і крайові умови для шаруватої плити, яка складалася з переміжних жорстких та м'яких шарів. Прийнятті гіпотези: жорсткі шари задовольняли гіпотезі Кірхгофа-Лява; в м'яких шарах $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} \approx 0$, а поперечні дотичні напруження стали по товщині шару і пропорціональні відповідним поперечним деформаціям зсуву; для всієї плити $\varepsilon_z = 0$. Теорія (названо «мікроструктурною») розроблена при умові, що кількість шарів достатньо велика, МГП жорстких і м'яких шарів повільно змінювані від номера

шару функції. Методи [25] розвинуто у [26]. У [251] в постановці, дещо відмінній від [25], виведені скінченно-різницеві ДР для товстих багат шарових оболонок

Для ДСТ, основаних на спрощених гіпотезах, характерно порушення умов контакту шарів для поперечних дотичних напружень. Цей факт разом з неврахуванням поперечної стисливості шарів, поперечних нормальних напружень, нехтуванням, як правило, тангенціальними напруженнями в м'яких шарах, може призвести до суттєвих похибок в порівнянні з точними результатами.

Важливе місце в розвитку МТ шаруватих пластин і оболонок займають підходи, в яких компоненти НДС або частина компонентів розвивалися в степеневі ряди або в ряди за поліномами Лежандра по поперечній координаті. Основні положення вказаного підходу викладені в роботах [59], [302], [372]. У [59] для знаходження НДС у вигляді рядів за поліномами Лежандра зображувались компоненти переміщень для заповнювача, а для зовнішніх жорстких шарів приймалися гіпотези Кірхгофа-Лява. ДРР і крайові умови одержані з принципа можливих переміщень. У [302] в ряди за поперечною координатою в межах кожного шару при допомозі поліномів Лежандра розвивались компоненти напружень і переміщень. Для одержання ДРР і крайових умов використовувався підхід, аналогічний для однорідних пластин [300]. Шукані функції тангенціальних координат, які входили в ряди, були різними для різних шарів і визначались з ДРР, граничних умов на лицевих площинах, умов на границі суміжних шарів і рівнянь сумісності. Одержані ДР, які окремо описували ВНС та ПНС. Теорія [302] є МТ, основою на ДСМ. Порядок СДР залежав не тільки від кількості шарів, але і від кількості членів у розкладаннях компонент НДС. Застосування цієї теорії для розв'язання прикладних задач не знайшло розвитку із-за складності підходу і громіздкості рівнянь. МТ, основана на ДСМ з використанням поліномів Лежандра в розвиненнях компонент переміщень, розроблена у [372] для непологих багат шарових анізотропних оболонок. ДРР і крайові умови одержані з принципа можливих переміщень. В даній теорії не виконувалися умови спряження суміжних шарів за напруженнями, а граничні умови на лицевих поверхнях задовольнялися наближено.

Ускладненість теорії з причини застосування ДСМ і аналітичного підходу (порядок СДР залежав від кількості шарів і взятих членів кожного ряду) не давав можливості оцінити її точність.

1.4.2. Неперервно-структурні моделі. Метод гіпотез. У [12] побудована теорія тонких багатошарових ортотропних пластин симетричної структури. Вводились гіпотези для кожного шару окремо: а) нормальні переміщення в кожному шарі не залежать від поперечної координати; б) поперечні дотичні напруження або відповідні поперечні деформації зсуву по товщині кожного шару змінюються за заданим законом; в) при визначенні тангенціальних переміщень і нормальних напружень в кожному шарі нехтується впливом нормальних поперечних напружень. Приймалось, що пластина навантажена на лицевих площинах довільними поперечними силами, і всі шари пластини жорстко зчеплені між собою. Забезпечувалась неперервність поперечних напружень на границі шарів. СДР для шаруватої пластини симетричної структури за структурою співпадала з відповідною СДР для одношарової ортотропної пластини. Відрізнялись тільки сталі коефіцієнти, які входили в цю систему. Гіпотези типу (а) – (в) приймалися у [350] при виведенні варіаційним способом ДР теорії багатошарових анізотропних оболонок.

На основі принципу можливих переміщень у [330] побудовані рівняння 2-го наближення для багатошарових пластин та пологих оболонок при їх поперечному кососиметричному навантаженні на лицевих площинах (поверхнях). В 1-му наближенні, приймаючи кінематичні гіпотези Кірхгофа-Лява для всього пакету шарів і припущення про ненатискуваність матеріалу оболонки в поперечному напрямку, використовуючи залежності між деформаціями та переміщеннями, закон Гука, ДРР, в результаті 1-го наближення отримано вирази для тангенціальних компонент переміщень і напружень, уточнені вирази для інших компонент напружень, а також уточнені вирази для нормальних переміщень та поперечних деформацій зсуву і обтискання. При цьому задовольнялись граничні умови на лицевих поверхнях і умови контакту між шарами. Одержано, що в k -му шарі (якщо MX G_k і ν_k сталі по товщині кожного шару) поперечні дотичні напруження і поперечні переміщення змінювалися по товщині кожного шару за

квадратичним законом. В 2-му наближенні, одержані в 1-у наближенні вирази для поперечних дотичних напружень і деформацій зсуву та нормальних переміщень приймалися як нові гіпотези: для кожного k -го шару приймався нелінійний закон змінення поперечних переміщень по товщині шару

$$u_3^{(k)}(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2) + \varphi_k(z)\chi(x_1, x_2); \quad (1.11)$$

дотичні напруження $\sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}$ і відповідні їм деформації $\gamma_{13}^{(k)}, \gamma_{23}^{(k)}$ різні для різних шарів і нелінійно змінювалися по товщині k -го шару

$$\gamma_{i3}^{(k)} = A_i^{-1}(\varphi_k(z) + \partial\psi_k(z)/\partial z)\partial\chi(x_1, x_2)/\partial x_i; \quad \sigma_{i3}^{(k)} = G_k\gamma_{i3}^{(k)}, \quad (i=1,2), \quad (1.12)$$

де $\varphi_k(z), \psi_k(z)$ визначалися 1-м наближенням, а $w(x_1, x_2), \chi(x_1, x_2)$ – шукані функції, відмінні від однойменних функцій 1-го наближення. В 2-му наближенні, урахуваючи (1.11), (1.12), із співвідношень деформації зсуву – переміщення, інтегруючи їх по z , знаходилися (нелінійні від z) тангенціальні переміщення $u_i^{(k)}$

$$u_i^{(k)} = u_i(x_1, x_2) - \frac{z}{A_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\psi_k}{A_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2), \quad (1.13)$$

де u_i – тангенціальні переміщення точок координатної поверхні.

Маючи компоненти переміщень (1.11), (1.13), із співвідношень деформації \sim переміщення для тривимірної задачі визначалися всі компоненти деформацій. Поперечні дотичні напруження знаходилися з урахуванням (1.12), а поперечні нормальні напруження визначалися 1-м наближенням з ДРР. На основі ВП Лагранжа одержано СДР 10-го порядку відносно функцій w, χ та функції зусиль. Для пластин несиметричної (симетричної) структури СДР не розпадалася (розпадались) на рівняння згину і плоского НС. Рівняння згину мали шостий порядок.

Теорія пологих шаруватих оболонок, в якій вважались відсутніми поперечні деформації і напруження в кожному шарі, а закон змінення поперечних дотичних напружень по товщині був аналогічний закону в КТ, застосована в [113] при дослідженні концентрації напружень в сферичних шаруватих оболонках несиметричної структури з урахуванням поперечних деформацій зсуву.

Розрахунок неоднорідних циліндричних оболонок із матеріалів з низькою зсувною жорсткістю і змінними модулями пружності по товщині розроблено в [204] з уточненням моделі Тимошенка з урахуванням натискування шарів.

Уточнена теорія визначення НДС шаруватих ортотропних оболонок на основі гіпотези прямої лінії для всього пакету шарів і нелінійного змінення дотичних поперечних напружень по товщині кожного шару з неврахуванням поперечних нормальних напружень і поперечного обтискання запропонована в [36]. У [83] одержано ДР теорії шаруватих анізотропних оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву в кожному шарі і при змінненні тангенціальних переміщень за законом ламаної лінії. Виконувалася неперервність переміщень і напружень на поверхнях контакту суміжних шарів. Структура і порядок ДР такі ж, як і для однорідних оболонок із застосування гіпотези прямої лінії.

Для теорій [12, 13, 204, 330] характерна однакова структура ДР для шаруватих і одношарових пластин та оболонок. Має місце суперечність: внутрішні зусилля (основуються на гіпотезі прямої) не відповідають геометричній моделі (основується на врахуванні викривлення нормалі).

Теорії, основані на гіпотезах, в яких між зусиллями та переміщеннями є повна відповідність, розроблені в [281, 321, 322]. В [321] побудована теорія розрахунку багат шарових ортотропних пологих оболонок несиметричної структури. Враховано поперечні деформації зсуву, обтискання і поперечні нормальні напруження. Прийняті незалежні гіпотези відносно поперечних напружень і поперечної деформації по всій товщині оболонки. Функції розподілення напружень і деформацій по товщині єдині для всього пакету шарів:

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, z) = G_{13}(z) \frac{\partial f_i(z)}{\partial z} \psi_i(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2); \quad (1.14)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, z) = q^+ \frac{h_1 + z}{h} + q^- \frac{h_2 - z}{h} + \varphi(z) P(x_1, x_2); \quad (1.15)$$

$$e_{33} = \frac{\partial^2 f_3(z)}{\partial z^2} \psi_3(x_1, x_2), \quad h_1 + h_2 = h, \quad (1.16)$$

де q^+ , q^- – поперечне навантаження на верхній і нижній лицевих поверхнях.

Залежності (1.14) і (1.16) приймалися аналогічними розподіленню σ_{i3} та e_{33} по товщині, одержаному згідно гіпотези про недеформовану нормаль для всього пакету. На основі цієї вимоги визначалися функції $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$, які є неперервними по всій товщині і залежать від товщин і МХ шарів; поперечна координата z відраховувалася від поверхні зведення, яка знаходилася на відстані h_1 від нижньої лицевої поверхні оболонки. МХ— кусково-неперервні функції, які в межах кожного шару могли неперервно змінюватися. Сталі у виразах для $f_i(z)$, визначалися з умови відсутності дотичних напружень на верхній лицевій поверхні. Функція $\varphi(z)$, задовольняла граничним умовам на лицевих поверхнях для нормальних напружень і приймалася у вигляді $\varphi(z) = (z + h_1)(z - h_2)$. В цій теорії для поперечних дотичних і нормальних напружень задовольнялися умови на границі суміжних шарів і на лицевих поверхнях. З ВПР одержувалися ДР для визначення функції $P(x_1, x_2)$. Компоненти переміщень отримані з (1.14) – (1.16), закону Гука і співвідношень Коші, а компоненти поперечних деформацій зсуву знаходилися із (1.14) і закону Гука:

$$u_i(x_1, x_2, z) = u_i(x_1, x_2) - z \frac{\partial w}{\partial x_i} + f_i(z) \psi_i(x_1, x_2) - f_3(z) \frac{\partial \psi_3(x_1, x_2)}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2);$$

$$u_3(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2) + \frac{\partial f_3(z)}{\partial z} \psi_3(x_1, x_2); \quad e_{i3}(x_1, x_2, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial f_i(z)}{\partial z} \psi_i(x_1, x_2). \quad (i = 1, 2).$$

Деформації e_{11}, e_{22}, e_{12} визначалися із співвідношень Коші, а тангенціальні напруження знаходилися із закону Гука. Всі компоненти НДС нелінійні по товщині. ДРР і граничні умови одержані із ВПР. Шуканими функціями є $\psi_1, \psi_2, u_1, u_2, w$. Загальний порядок СДР для оболонок – 16-ий, для пластин – 12-ий.

У [27] розроблена методика числової реалізації СДР, отриманої у [321]. У [322] побудовано варіант теорії шаруватих ортотропних пластин, аналогічний [321], в припущенні сталості поперечної деформації по товщині всього пакету, а в [331]– варіант теорії згину неоднорідних по товщині пластин. У [325] побудовано варіант уточненої “зсувної теорії 2-го наближення”. Закон змінення поперечних дотичних напружень приймався у формі, структура якої знаходилася інтег-

руванням ДРР тривимірної ТП; тангенціальні напруження визначалися теорією 1-го наближення [321]. Поперечні дотичні напруження приймалися у вигляді:

$$\sigma_{i3} = F_i^{(1)}(z)\psi_{ii}^{(1)}(x_1, x_2) + F_i^{(2)}(z)\psi_{ii}^{(2)}(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2),$$

де $\psi_{ii}^{(1)}, \psi_{ii}^{(2)}$ – шукані функції зсуву 1-го та 2-го наближення; $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}$ – задані функції поперечної координати. Переміщення зображувалися так:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, z) &= v_i(x_1, x_2) - z \partial w(x_1, x_2) / \partial x_i - f_{ii}^{(s)}(z)\psi_{ii}^{(s)}(x_1, x_2), \\ u_3(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2), \quad (s = 1, 2; i = 1, 2), \end{aligned}$$

де $f_{ii}^{(s)}(z)$ – задані функції; по індексу s проводиться сумування. Тангенціальні переміщення містять поліноми 1-го, 3-го та 5-го степенів z . Порядок розв'язувальних ДР для оболонок 16-й, для пластин – 12-й. Зсувна модель 1-го наближення [321] є частинним випадком теорії 2-го наближення, а зсувна модель 0-го наближення відповідає КТ. Уточнена модель 2-го наближення вносить не тільки суттєві кількісні, а і якісні уточнення в розрахунок шаруватих елементів конструкцій. Так, модель 0-го наближення не ураховує розриву тангенціальних нормальних напружень на границі шарів; модель 1-го наближення враховує взаємний зсув зовнішніх шарів за рахунок податливості заповнювача, характеризує розрив для тангенціальних нормальних напружень на границі шарів, але поперечні дотичні напруження є гладкою функцією від z ; модель 2-го наближення враховує розрив на границі шарів не тільки тангенціальних нормальних напружень, але і розрив гладкості поперечних дотичних напружень, що відповідає фізичній картині деформування. Теорія [325] застосована у [285] для розв'язання задач згину ортотропних пластин і пологих оболонок. Розвинення теорії [321] дано в [324]. Розроблено методи розв'язання ДР теорії і наведено розв'язки прикладних задач.

У [281] розроблено варіант неklasичної теорії багатошарових пластин та пологих оболонок, який на відміну від теорій [321, 324, 330] ураховував змінення нормальних переміщень по товщині, пов'язаних не тільки з ефектом Пуассона, а й з різним навантаженням, прикладеним до лицевих поверхонь. Для пологих оболонок з транстропними шарами вводились гіпотези відносно деформацій поперечного зсуву, обтискання та поперечних нормальних напружень у вигляді:

$$\gamma_{i3}^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i} \approx \frac{\partial \chi_1}{\partial x_i} F_{1k}(z); \quad e_{33}^{(k)} = \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z} \approx \chi_p F_{pk}(z), \quad (p = 2, 3, 4, 5); \quad (1.17)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} \approx \chi_p F_{pk}(z) \quad (p = 3, 4, 5), \quad (1.18)$$

де $\chi_4(x_1, x_2) = -(q^+ - q^-)/2$, $\chi_5(x_1, x_2) = -(q^+ + q^-)/2$; $i = 1, 2$; k – номер шару оболонки; $q^+(x_1, x_2)$, $q^-(x_1, x_2)$ – інтенсивності зовнішнього поперечного навантаження на верхній і нижній лицевих поверхнях; F_{pk}, f_{pk} – відомі функції від z ; $\chi_1(x_1, x_2)$ – функція зсуву [330]; $\chi_2(x_1, x_2)$, $\chi_3(x_1, x_2)$ ураховують обтискання за рахунок ефекту Пуассона і нормальних сил інерції; $\chi_4(x_1, x_2)$, $\chi_5(x_1, x_2)$ ураховують поперечне обтискання від безпосереднього поперечного навантаження. Із (1.17) одержано компоненти переміщень в k -му шарі:

$$u_i^{(k)}(x_1, x_2, z) = u_i - z \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_i} \psi_{1k}(z) - \frac{\partial \chi_p}{\partial x_i} \psi_{pk}(z), \quad (i = 1, 2); \quad (1.19)$$

$$u_3^{(k)}(x_1, x_2, z) = w + \chi_p \phi_{pk}(z), \quad (p = 2, 3, 4, 5).$$

В залежностях (1.17) – (1.19) функції поперечної координати відповідають законам змінення відповідних переміщень, деформацій та напружень по товщині шару у формі співвідношень КТ. Вказані функції від z задовольняють умовам на границях між суміжними шарами. Компоненти тангенціальних деформацій визначаються із співвідношень Коші з урахуванням (1.19). Компоненти тангенціальних і поперечних дотичних напружень знаходяться із закону Гука за знайденими деформаціями. Шуканими функціями є функції тангенціальних координат $u_i(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $\chi_j(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$). Для одержання ДР руху і граничних умов використано ВП Остроградського-Гамільтона. СДР руху має загальний 20-й порядок. ДРР для оболонок зі стисливими (нестисливими) шарами мають 16-й (12-й) порядок.

Іншим підходом, ніж у [281], поперечні деформації зсуву та обтискання враховувались у [38]. Приймались для всього пакету шарів оболонки кінематична гіпотеза прямої лінії, кубічний закон змінення поперечних нормальних напружень, а

також, що на поперечні зсуви не впливає змінення поперечної лінійної деформації по товщині. Одержано, що поперечне переміщення змінювалось за квадратичним законом. СДР мала 10-й порядок. Розвинення і узагальнення теорії [281] для багат шарових елементів конструкцій при умові проковзування шарів виконано в роботах [303, 304]. У [284] переміщення зображувались аналогічно [304], що дало можливість задовольнити умовам «жорстокого» контакту шарів для переміщень. Для σ_{33} точно виконувались умови контакту шарів і наближено – умови на лицевих площинах. Вирази для поперечних дотичних напружень не задовольняли умовам на лицевих поверхнях і на границях суміжних шарів, але для цих задач вказана неточність в цілому не впливала суттєво на НДС. Дослідження КЕ у однорідних трансформних пластин на основі теорії 2-го наближення [325] проведено у [286].

У [109] розроблено варіант теорії шаруватих пластин і оболонок з урахуванням поперечного обтискання і введенням коректуючи функцій для задоволення умов на границях між шарами, а також на лицевих поверхнях при точному виконанні закону Гука в кожному шарі. Варіант уточненої геометрично нелінійної ітераційної теорії тонких тришарових оболонок розроблена в [277].

1.4.3. Неперервно-структурні моделі. Аналітичні методи. Одним з перспективних напрямків розвитку теорій шаруватих елементів конструкцій є аналітичні методи (АМ), основані на розкладанні НДС в ряди за поперечною координатою [289, 292, 308, 318, 319, 336, 399, 415]. До цих методів можна віднести також методи, в яких не використовуються кінематичні гіпотези [366, 367], а також ітераційні методи [73, 111].

Основні рівняння шаруватих ортотропних пластин та оболонок без використання кінематичних гіпотез на основі уявлення про однорідні НДС тонкостінного елемента шаруватої структури побудовані в [366]. Розглянуто два варіанта ДР: без урахування і з урахуванням поперечних дотичних напружень. Граничні умови на лицевих площинах (поверхнях) задовольнялися наближено. В [367] підхід [366] розвинено для задач статички, стійкості і коливань шаруватих пластин та оболонок. Узагальнена модель “типу Тимошенка” розроблена в [336]. Компоненти u_i^m

($i=1,2,3$; m – номер шару) розклалися по товщині шаруватої оболонки за трьома лінійно незалежними функціями. Порядок ДР не залежав від кількості шарів.

Ітераційно-аналітичну теорію деформування багатошарових оболонок запропоновано у [73]. Кожний крок ітерації поділений на два етапи. На 1-му етапі i -го кроку ітерації на основі відомого розподілення компонент переміщень ($i-1$)-го кроку уточнюються тангенціальні компоненти переміщень, а на 2-му етапі на основі відомих поперечних переміщень з ($i-1$)-го кроку і уточнених на 1-му етапі i -го кроку тангенціальних компонент переміщень знаходяться поперечні переміщення на i -му кроці. На 1-му етапі 1-го кроку використовуються функції усіх компонент переміщень і поперечних зсувів, отриманих в рамках теорії Тимошенко. На 2-му етапі 1-го кроку враховано поперечне обтискання. На кожному кроці ітерації виконувались умови спряження між шарами і граничні умови на лицевих поверхнях. На кожному кроці ітерації застосовувалась числово-аналітична процедура з використанням ВП Лагранжа. Розвинення теорії [73] і застосування її для розв'язування прикладних задач викладено в монографії [18]. У [111] отримані основні рівняння для багатошарових пластин та оболонок на основі зсувної моделі. ДР і граничні умови для m -го кроку одержані з ВП Лагранжа. Загальний порядок СДР не залежить від кількості шарів, але залежить від кількості ітерацій. Неврахування поперечних деформацій обтискання звужує рамки застосування теорії [111].

У [218, 289, 292, 308, 318, 319] ДР рівноваги та граничні умови одержані на основі ВП Рейснера методом розвинення компонент НДС в степеневі ряди. У [289, 292, 308] до того ж використано ЕАМ побудови основних рівнянь.

В [289] побудовано варіант МТ тришарових пластин симетричної структури, які навантажені на лицевих площинах кососиметричними поперечними силами. Компоненти НДС у k -му шарі пластини зображувались степеневими рядами

$$\sigma_z^{(k)} = -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(k)}(z) \omega_i(x, y), \quad (\omega_1(x, y) = -q(x, y)); \quad \sigma_{xz}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\alpha_i^{(k)}(z)}{dz} Q_{ix}(x, y), \quad (x, y);$$

$$\sigma_x^{(k)} = E^{(k)} [D_1(1 - \nu_k^2)]^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) M_{ix}(x, y), \quad (x, y; x, xy); \quad (1.20)$$

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) u_i(x, y), (u, v); w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{df_i(z)}{dz} w_i(x, y),$$

де $M_{ix}, M_{iy}, M_{ixy}, Q_{ix}, Q_{iy}$ ($i \geq 2$) – полімоменти та полісили, які визначають самоврівноважені по товщині напруження. Функції $f_i(z)$ та $\alpha_i^{(k)}(z)$ знаходилися аналогічно [288, 306]. Функції $f_i(z)$ – єдині і гладкі по всій товщині пакету шарів, а величини доданків у рядах для $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$ для різних шарів коректуються жорсткістю шарів, у зв'язку з чим змінення тангенціальних компонент напружень (1.20) по товщині характеризується вже кусково-гладкими функціями, що відповідає фізичному змісту. В той же час, як це впливає із (1.20), компоненти $u(x, y, z)$ та $v(x, y, z)$ є гладкими функціями по всій товщині, що суперечить фізичному змісту в місцях контакту суміжних шарів. Неперервність напружень $\sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ та всіх компонент переміщень згідно з (1.20) забезпечується. Підхід, аналогічний [289], застосовано у [308] для двошарових нетонких пластин при дії на лицевих площинах тільки поперечного навантаження. Напруження $\sigma_z^{(k)}, \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}$ і переміщення приймалися у вигляді (1.20). В зображення для тангенціальних напружень внесені додаткові члени, які враховували симетричне деформування від симетричного навантаження на лицевих площинах: В [292] розвинено ідею [289, 308].

1.5. Тривимірні лінійні задачі ТП для пластин і оболонок

Розв'язування граничних задач по визначенню НДС пластин та оболонок в тривимірній постановці є занадто складною проблемою математичної фізики, яка спряжена з суттєвими труднощами, пов'язаними із знаходженням розв'язків складних СДР відносно шуканих функцій від трьох змінних і, крім цього, необхідністю задовольнити граничним умовам на всій поверхні розглядуваних елементів. Складність значно підвищується при урахуванні неоднорідності, анізотропії матеріалу та криволінійності форми границі. Аналітичні розв'язки вдається отримати тільки для вузького кола задач, а саме для тих випадків граничних умов і форми границі, які

дають можливість розділити змінні в СДР. Крім того, на прикінцевих етапах розв'язування задач в більшості випадків приходиться суттєвим чином використовувати числові методи, що пов'язано не тільки із складністю отриманих СДР, але й із труднощами при задоволенні граничних умов на лицевих площинах (поверхнях).

В наукових працях українських вчених, зокрема в [35, 84, 87, 278] побудовані розв'язки СДР просторової ТП для товстостінних оболонок, які зображувались у вигляді подвійних тригонометричних рядів по тангенціальним координатам з амплітудними функціями від поперечної координати. Вказані ряди підбиралися так, щоб задовольнити крайовим умовам. Задача зводилась до знаходження амплітудних функцій, які повинні були задовольняти системі звичайних ДР 6-го порядку із змінними коефіцієнтами та граничним умовам на лицевих поверхнях. Для шаруватих елементів шукані функції поперечної координати повинні ще й задовольняти умовам спряження між шарами. Для інтегрування отриманих СДР надалі використовувались стійкі числові методи.

В циклі наукових праць [295–298], аналітично і числово-аналітично розв'язані граничні задачі для оболонок у пружному середовищі.

Тривимірні граничні задачі для лінійно пружних пластин розглядались у [10, 46, 62, 93, 239, 278, 284, 309, 338, 388, 418, 436, 441], а для оболонок – у [35, 37, 84, 87, 98, 100, 103, 225, 295–298]. Послідовний огляд робіт з просторових задач ТП виконано Ю. М. Немішем [264].

1.6. Фізично нелінійні задачі. Метод збурень. Числово-аналітичні методи

Для широкого класу матеріалів [207, 370] характерна нелінійна залежність між компонентами напружень і деформацій. Це призводить до необхідності ураховувати фізичну нелінійність при визначенні НДС елементів конструкцій. Складність таких задач значно підвищується в порівнянні з лінійними.

Нелінійно пружним задачам присвячені наукові публікації, огляди, книги в т. ч. [29, 30, 44, 64, 68, 95, 96, 99, 102, 105, 207, 213, 216, 221, 223, 231, 232, 243, 253, 260, 262, 263, 265, 275, 332, 333, 348, 368 – 371, 374, 389]. Плоскі нелінійні

задачі ТП з використанням методу теорії функцій комплексної змінної розглядались у [213, 216, 332]. Огляд робіт виконано в [333].

Метод збурень лінійно пружних властивостей матеріалу, згідно з яким функції задачі розвивались у степеневі ряди за малим параметром з невідомими цілими показниками, започатковано у наукових працях Г. Каудерера [207], І. А. Цурпала [370], О. М. Гузя, Г. М. Савіна, І. А. Цурпала [96], О. С. Космодаміанського, І. А. Цурпала [223] при розгляданні фізично нелінійних плоских задач. За малий параметр приймався малий фізичний параметр, який характеризував степінь відхилення нелінійних характеристик матеріалу від лінійних.

Метод збурень лінійно пружних властивостей використовувався в задачах згину тонких фізично нелінійних пластин [389], тонких оболонок [368]. Надалі цей метод з використанням гіпотез Кірхгофа-Лява було розвинено у [371] для тонких пластин та оболонок. У [99] в довільному наближенні розв'язана задача для фізично нелінійної товстостінної сферичної оболонки.

Послідовне викладення напрямку цих досліджень дано в [369] і [370].

Двовимірні задачі теорії фізично нелінійних пластин та оболонок на основі уточнюючих теорій в т. ч. і з уточненням деформацій поперечного зсуву по товщині розглянуті в [228, 229, 230, 243, 283, 348, 374]. В [283] теорія [281] узагальнена на нелінійно пружні шаруваті системи. Розроблена методика їх розрахунку на основі методів скінчених різниць та скінчених елементів. В [243, 374] з використанням ВП розроблено числово аналітичний метод розв'язання задач для анізотропних нелінійно пружних оболонок. В [348] побудовані нелінійні рівняння для тришарових оболонок. Для зовнішніх лінійно пружних шарів прийнята модель зсуву типу С. П. Тимошенка, а для фізично нелінійного за Каудерером заповнювача для тангенціальних переміщень застосована гіпотеза, аналогічна в [16]; для прогинів враховано поперечне обтискання за параболічним законом.

Ю. М. Немішем у [260] узагальнено метод збурень лінійно пружних властивостей на просторові задачі фізично нелінійної ТП, У [29, 30, 263] підхід [96, 260, 370] отримав своє розвинення в тривимірних нелінійно пружних задачах для пластин, замкнених циліндричних та сферичних оболонок.

У [334] Г. М. Савіним і Ю. М. Немішем метод збурень ізотропних лінійно пружних властивостей матеріалу узагальнено на граничні задачі механіки деформівних твердих тіл. Паралельно вказаним вище роботам метод збурень розвивався у [199], [200], [237]. В [96] (О. М. Гузь, Г. М. Савін, І. А. Цурпал) методом збурень форми границі в поєднанні з методом збурень лінійно пружних властивостей були розв'язані задачі про концентрацію напружень біля криволінійних отворів у тонкій фізично нелінійній пластині. Метод збурень форми границі надалі було розвинено у [259]. Асимптотичні методи, методи збурень та метод малого параметра в механіці деформівного твердого тіла розроблялись у [24, 77, 201, 202, 208, 215, 258, 406, 440] та в інших працях.

У [228, 264, 265] подано огляд робіт по застосуванню методу збурень у тривимірних задачах ТП, а в книгах О. М. Гузя і Ю. М. Неміша [101, 103] викладено постановку та методи розв'язування просторових граничних задач.

Числово-аналітичні методи розв'язання граничних задач розроблені в багатьох працях українських вчених [17–20, 68, 76, 86, 89–92, 102, 106, 107, 209, 243, 323, 326–328, 344, 345, 374, 375, 382] та інших авторів [11, 249, 342]..

1.7. Висновки по огляду

На основі поданого огляду зроблені наступні висновки:

- розрахунки на основі класичних теорій пластин та оболонок для переважної більшості граничних задач дають незадовільні результати, які можуть суттєво відрізнятися від точних, отриманих у тривимірній постановці;
- некласичні уточнені теорії, які основані на різних гіпотезах, потребують у кожному випадку обґрунтованого використання; знаходження НДС з довільною високою точністю за цими теоріями в принципі неможливо із-за введення гіпотез;
- для існуючих варіантів МТ (теорії, у яких відсутні гіпотези і використовуються нескінченні ряди для апроксимації компонент НДС) характерно наближене задоволення граничних умов на лицевих площинах, поверхнях (це знижує їх точність) і застосування, як правило, чисельних методів для знаходження

НДС, а ті одиничні варіанти МТ, у яких вказані граничні умови задовольняються точно, носять ускладнений чисто аналітичний характер без демонстрації чисельних результатів;

– характерна відсутність варіантів МТ нетонких фізично нелінійних однорідних і шаруватих пластин і оболонки;

– практично відсутні розробки аналітичних методів розв'язання неоднорідних систем ДРР високих порядків у граничних задачах для вказаних елементів, які б зводили їх до неоднорідних ДР 2-го порядку, і тим самим спрощували б знаходження їх частинних і загальних розв'язків;

– аналітичне розв'язування граничних задач для лінійно пружних пластин та оболонки у тривимірній постановці пов'язано з великими математичним труднощами; складність розв'язання значно підвищується, якщо розглядаються непрості крайові умови або ж фізично нелінійні задачі; обмежена множина отриманих чисельних результатів для НДС не дає можливості оцінити з позицій тривимірної ТП точність теорій, оснований на гіпотезах і різних моделях.

Таким чином, із аналізу огляду випливає необхідність побудови нових високоточних варіантів МТ вказаних елементів довільної товщини, які б ураховували всі компоненти НДС (як функції трьох змінних) і КЕ, та розроблення ефективних аналітичних методів розв'язання СДРР високих порядків, і щоб застосування цих варіантів і методів давало реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач і отримання чисельних результатів.

Із аналізу огляду зроблені висновки: 1) про необхідність побудови нових високоточних варіантів МТ лінійно і нелінійно пружних однорідних і шаруватих пластин і пологих оболонки довільної товщини, які б ураховували всі компоненти НДС (як функції трьох змінних) і КЕ; 2) про розроблення ефективних аналітичних методів розв'язання СДРР високих порядків вказаних елементів, і щоб застосування цих варіантів МТ і методів давало реальну можливість аналітичного розв'язку граничних задач і отримання числових результатів.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДОЛОГІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ І РОЗРОБЛЕНІ МЕТОДИ

У розділі обґрунтовується вибір аналітичного напрямку досліджень, сформульована методологія побудови варіантів МТ нетонких однорідних і шаруватих лінійно і нелінійно пружних пластин і пологих оболонок при будь-яких поперечних навантаженнях; наведені нові розроблені аналітичні методи розв'язання неоднорідних СДРР високих порядків, які зведені до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку для вказаних елементів.

2.1. Вибір напрямку досліджень. Методологія побудови варіантів МТ

Забезпечення надійної роботи однорідних та шаруватих пластин і оболонок, які застосовуються в різних галузях сучасної промисловості, потребує залучення для їх розрахунку високоточних теорій та адекватних їм математичних методів розв'язування відповідних граничних задач, які б урахували усі компоненти НДС як функції трьох змінних, та КЕ типу пограничного шару.

Відомо, що розрахунки на основі КТ пластин та оболонок при їх невеликій товщині, анізотропії, переривчастості МГХ та в інших випадках, які призводять до великого градієнта змінювання НДС, дають незадовільні результати, які можуть суттєво відрізнятись від точних, отриманих у тривимірній постановці.

Некласичні уточнені теорії пластин та оболонок, які ґрунтуються на різних гіпотезах, зокрема, теорії типу Тимошенка-Рейснера, які на сьогодні в основному використовуються в працях вітчизняних і особливо зарубіжних авторів, потребують у кожному випадку обґрунтованого використання їх для розв'язання граничних задач, що пов'язано зі встановленням конкретних рамок придатності їх в залежності від класу задач. Знаходження компонент НДС з довільною високою точністю за вказаними теоріями в принципі неможливо, оскільки їх точність зумовлена відповідними гіпотезами.

Ефективність варіантів МТ пластин та пологих оболонок залежить від методології побудови основних співвідношень, ДР, граничних умов на бічній поверхні, від точного чи наближеного задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях). Для оцінки ефективності варіантів МТ потрібні порівняння з точним розв'язком за тривимірною ТП або ж з варіантами МТ, які з високою точністю (у порівнянні з точним розв'язком) описують ВНДС і НДС крайових ефектів.

Основним недоліком уже існуючих варіантів МТ є те, що в одних теоріях граничні умови на лицевих площинах (поверхнях) елементів виконуються наближено, а отже, при цьому зменшується точність таких теорій, а ті варіанти МТ, у яких ці граничні умови виконуються точно, настільки складні з аналітичної точки зору, що не дають практичної можливості отримання чисельних результатів для НДС і порівняння їх з іншими теоріями.

Характерна відсутність варіантів МТ нетонких фізично нелінійних і анізотропних однорідних та шаруватих пластин і оболонок, основаних на методі збурень лінійно пружних та ізотропних властивостей матеріалу, що очевидно пов'язано зі складністю таких теорій.

Теорії розрахунку лінійно пружних багатошарових пластин і оболонок як правило основані на гіпотезах і потребують уточнення, а ті варіанти МТ шаруватих елементів, які на сьогодні існують в достатньо обмеженій кількості, суттєво ускладнені і неможливі для отримання чисельних результатів.

Практично відсутні на сьогодні у відомих варіантах МТ розробки аналітичних методів розв'язання неоднорідних систем ДРР високих порядків, які б зводили їх до неоднорідних ДР 2-го порядку, і тим самим спрощували б знаходження їх частинних і загальних розв'язків методами математичної фізики.

З іншого боку, розв'язання граничних задач для лінійно пружних пластин та пологих оболонок в тривимірній постановці пов'язано з великими математичним труднощами, причому, на прикінцевих етапах розв'язання суттєвим чином використовуються чисельні методи. Складність розв'язання у точній тривимірній постановці значно підвищується при непротистих крайових умовах або ж фізично нелінійних задачах. Чисельні результати на основі тривимірних рівнянь ТП отримані на сього-

дні в основному для пластин і замкнених оболонок при крайових умовах, які дають можливість розділити змінні. Обмежена множина отриманих чисельних результатів для НДС не дає можливості оцінити з позицій тривимірної ТП ефективність варіантів МТ, а також теорій, оснований на гіпотезах і різних моделях.

НДС вказаних пластин і пологих оболонок довільної товщини потребує більш глибоких, широких і точних досліджень в залежності від типу навантаження, КЕ, пов'язаних з граничними умовами, механічних і геометричних характеристик.

Звідси і впливає вибір актуальної наукової проблеми для дослідження, вирішення якої полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ нетонких пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні, розробленні ефективних аналітичних методів інтегрування отримуваних СДРР високих порядків, і щоб аналітичне розв'язання граничних задач для вказаних елементів було простішим від розв'язку відповідних тривимірних задач ТП і давало реальну можливість отримання числових залежностей НДС цих елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень варіантів МТ.

ВПр використовувався в обмеженій кількості наукових праць, в тих роботах, у яких застосовувалися гіпотези для розрахунку пластин і оболонок (п. 1.2). Варіанти МТ будувались в основному з одночасним використанням рядів за поліномами Лежандра і ВП Лагранжа, Кастільяно, Гамільтона-Остроградського, проекційного методу (п. 1.3.3), але без застосування ВПр. Тільки в [288–292, 305–308] для побудови основних рівнянь одночасно використовувались ряди за поліномами Лежандра і ВПр на основі енергоасимптотичного методу (ЕАМ)), суть якого описана в п.1.3.3. Недоліком ЕАМ є те, що при знаходженні компонент НДС деякого наближення варіюються тільки додаткові члени в цьому наближенні, а попередні наближення вважаються незмінними, що, очевидно зменшує точність ЕАМ, на це вказують отримані чисельні результати (див. табл. А.1 дод А.2). Очевидно, з цієї причини в [310] проф. О. П. Прусаков, який був основоположником ЕАМ, започаткував побудову основних рівнянь для кососиметричного відносно серединної площини поперечного навантаження транстропних пластин, прийнявши компоненти переміщень у вигляді двох доданків за поліно-

мами Лежандра, не розглядаючи таку апроксимацію як частинні суми нескінченних рядів. При цьому отримувалися взаємозв'язані рівняння. Надалі методика, при якій компоненти переміщень одночасно зображуються у вигляді декількох доданків, і на цій основі отримуються основні рівняння граничних задач, називатимемо методикою взаємозв'язаних рівнянь (МВР). Такий підхід дав поштовх для використання нескінченних математичних рядів для узагальненої побудови основних рівнянь не тільки для пластин, але і для пологих оболонок, однорідних і багат шарових, фізично лінійних і нелінійних. Оскільки одночасне урахування всіх членів частинних сум призводить до ускладнення основних рівнянь і до зростання порядку неоднорідних СДРР, то з'явилась математична необхідність розроблення аналітичних методів для ефективного розв'язання таких систем.

Методологія побудови варіантів МТ однорідних і шаруватих пластин і пологих оболонок полягає в наступному.

Усі компоненти НДС і граничні умови на бічній поверхні вважаються функціями трьох змінних. Компоненти переміщень зображуються при допомозі поліномів Лежандра за поперечною координатою у вигляді нескінченних рядів (3.9) (для однорідних елементів) і у вигляді рядів за комбінаціями поліномів Лежандра (7.5), (7.6) (для багат шарових елементів), у яких функції від двох тангенціальних змінних (називатимемо їх далі складовими компонент переміщень) є шуканими. Деформації виражаються з позицій тривимірної ТП через переміщення рядами за поліномами Лежандра. Поперечні напруження знаходяться у вигляді нескінченних рядів за поліномами Лежандра інтегруванням тривимірних ДР ТП таким чином, щоб точно виконувались граничні умови на лицевих площинах (поверхнях) і умови жорсткого зчеплення на границях між шарами; з урахуванням ВРР (3.18) ці напруження виражаються в остаточному вигляді через поліноми Лежандра і складові компонент переміщень. Тангенціальні напруження визначаються з ВРР через деформації і поперечні нормальні напруження, тобто, також зображуються в остаточному вигляді рядами при допомозі поліномів Лежандра і шуканих складових компонент переміщень. Ураховуючи зображення усіх компонент НДС нескінченними рядами за поліномами Лежандра та, використовуючи ВРР, одержуються системи ДРР. Із збільшенням кількості доданків у частинних сумах рядів для переміщень зростає порядок СДРР.

Якщо враховувати в тангенціальних компонентах переміщень (3.9) складові з індексами $0, 1, 2, \dots, N$ (в компонентах переміщень складові $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N$), де N вважатимемо надалі непарним натуральним числом, то таке наближення називатимемо наближенням $K0-N$ (НК0-N); якщо враховувати складові з індексами $1, 3, \dots, N$ – наближенням $K13\dots N$ (НК13...N, в компонентах переміщень складові $u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N$).

НДС розглядуваних елементів складається з ВНДС, ВКЕ і ПКЕ. ВНДС повільно змінюється і розповсюджується на всю область, ВКЕ і ПКЕ у вигляді пограншарів локалізуються біля країв і швидко згасають при віддаленні від них. ВКЕ визначається скручуючою дією в площинах, перпендикулярних до серединної, а ПКЕ спричиняється згинальною дією самоврівноважених напружень, які діють на бічній поверхні. ВКЕ і ПКЕ визначаються згасаючими розв'язками відповідних однорідних СДР, які будуть надалі наводитися для різних побудованих варіантів МТ.

Проблема в побудованих варіантах МТ полягає в розв'язанні СДРР високих порядків і побудові їх загальних розв'язків, що давало б можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних нетонких пластин і пологих оболонки і отримання чисельних результатів для НДС. Основна математична складність при знаходженні загальних розв'язків неоднорідних СДРР високих порядків – це знаходження їх частинних розв'язків, особливо, якщо поперечне навантаження є переривчастим або локальним. Така проблема, зокрема, характерна також і для інших, простіших теорій.

2.2. Метод інтегрування СДР нетонких лінійно пружних однорідних і багатошарових пластин

2.2.1. Ідея методу інтегрування СДР рівноваги. У роботах з теорії пластин і оболонки загальні і частинні розв'язки визначалися безпосередньо з початкових СДРР. При знаходженні частинних розв'язків, зокрема, застосовувалися методи інтегральних перетворень, Застосування методів інтегральних перетворень до початкових СДР високих порядків для знаходження частинних розв'язків

пов'язано з достатньо складними перетвореннями, а в деяких випадках практично неможливо використання вказаних методів із-за причин ускладнених і громіздких обернених інтегральних перетворень, оскільки необхідно знаходити громіздкі інтеграли з параметрами, які не наведені у відомій літературі, зокрема в [75]. Для систем високих порядків методика безпосереднього розв'язання початкових СДРР призводила до значних труднощів [42, 357, 381, 383].

Отримані СДРР побудованих варіантів МТ мають достатньо високий порядок: у наближенні К0-3 – 22-й порядок, у НК0-5–34-й. І тому безпосереднє аналітичне розв'язання таких СДРР пов'язане з достатніми складнощами.

В роботі розроблено новий метод інтегрування СДРР високих порядків, суть якого для граничних задач лінійно пружних нетонких пластин полягає в наступному.

1). Початкові СДРР зводились узагальненим методом алгебраїчних, диференціальних і операторних перетворень до незалежних однорідних підсистем ДР (описували ВКЕ) і неоднорідних (описували ВНДС і ПКЕ) при симетричному і кососиметричному деформуванні відносно серединної площини. Однорідна підсистема ДР зводились операторним методом до однорідного визначального ДР, а неоднорідна – до визначальних (зручних) ДР з однаковими лівими частинами відносно нових шуканих функцій, що суттєво спрощувало знаходження їх розв'язків, хоча складність і залишалась з причини високого порядку рівнянь.

2). Структура ДР була така, що ліві частини однорідних ДР ВКЕ зображувались у вигляді добутку операторів Гельмгольца над шуканою вихровою функцією, а однакові ліві частини кожного з визначальних ДР ВНДС з ПКЕ зображувались у вигляді добутку операторів бігармонічного і Гельмгольца над деякими іншими шуканими функціями.

3). Визначальне ДР ВКЕ розщеплювалось на однорідні ДР Гельмгольца, а неоднорідні ДР ВНДС з ПКЕ високого порядку зводились до неоднорідних ДР 2-го порядку (Пуассона і Гельмгольца). При цьому міг використовуватися один із двох методів розщеплення неоднорідних ДР високого порядку на неоднорідні ДР 2-го порядку: розроблений новий метод з невідомими правими частинами [158–163, 183–186] або операторний метод інтегрування [166, 189, 192, 194, 197, 198, 391, 447]. Це на порядок зменшува-

ло складність знаходження загальних розв'язків початкової СДРР, особливо, якщо поперечне навантаження було переривчастим, або ж зосередженим чи локальним. Частинні розв'язки неоднорідних ДР 2-го порядку могли відшукуватись різними відомими методами математичної фізики, описаними, зокрема в [45, 339, 354, 379], а НДС знаходився з відповідних залежностей через знайдені розв'язки визначальних ДР.

Вигляд правих частини СДРР не впливає на суть розробленого методу, і тому він може бути узагальнений і застосований також до СДРР фізично нелінійних і анізотропних нетонких пластин (у кожному наближенні), які розв'язуються методом збурень або МПН.

У [268] неоднорідне ДР 4-го порядку зведено до двох неоднорідних ДР Гельмгольца; інтегральні перетворення до отриманих рівнянь не застосовувались. У [381] частинний розв'язок ДРР 4-го порядку теорії тонких ізотропних сферичних оболонок малої кривини був знайдений прямим застосуванням інтегрального перетворення Ганкеля [339, 354], а в [409] до початкових ДРР застосовувались інтегральні перетворення Лапласа і Ганкеля. Уже для ДР невисокого порядку це призводило до достатніх математичних ускладнень.

Тому ідея розробленого методу—спростити визначення частинних і отже, загальних розв'язків ДР високих порядків. Спрощення пошуку частинних розв'язків досягається використанням методів зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку, до яких безпосередньо можна застосувати, зокрема, методи інтегральних перетворень. Частинні розв'язки неоднорідних ДР високих порядків будуть визначатися з відповідних залежностей п.2.2.

2.2.2. Новий розроблений метод зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку з невідомими правими частинами. Розглянемо ДР:

$$(A_n \nabla^{2n} + A_{n-1} \nabla^{2(n-1)} + \dots + A_0) \Phi(x, y) = f(x, y), \quad (2.1)$$

де $A_i \neq 0$ – МГП, $f(x, y)$ – відома функція, $\Phi(x, y)$ –шукана функція.

Рівняння (2.1) порядку $2n$ можна звести до ДР наступного вигляду:

$$(\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2) \dots (\nabla^2 - k_i) \dots (\nabla^2 - k_n) \Phi(x, y) = f(x, y), \quad (2.2)$$

де k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – корені відповідного характеристичного рівняння (будемо їх поки що вважати не рівними між собою), які залежать від МГП.

Зведемо розв'язування неоднорідного ДР (2.2) до n незалежних неоднорідних ДР 2-го порядку розробленим методом з невідомими правими частинами. Не звужуючи суті питання, покажемо суть застосування нового розробленого методу [158-163, 183-186] для ДР 4-го і 8-го порядків, які відповідають типу (2.2).

Розглянемо неоднорідні ДР 4-го порядку вигляду:

$$D_1 D_2 \Phi(x, y) = f(x, y), \quad D_i = (\nabla^2 - k_i). \quad (2.3)$$

Зобразимо частинний розв'язок $\Phi_r(x, y)$ ДР (2.3) і $f(x, y)$ у вигляді:

$$\Phi_r(x, y) = \Phi_{1r}(x, y) + \Phi_{2r}(x, y); \quad (2.4)$$

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y), \quad (2.5)$$

де функції $\Phi_{1r}(x, y)$, $\Phi_{2r}(x, y)$ – частинні розв'язки лінійних неоднорідних ДР:

$$D_1 \Phi_1 = f_1, \quad D_2 \Phi_2 = f_2, \quad (2.6)$$

у яких функції $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ підлягають визначенню.:

Знайдемо праві частини рівнянь (2.6).

Підставимо (2.5) у (2.3) і приймемо до уваги (2.6) і те, що $D_1 D_2 = D_2 D_1$. Дістанемо: $D_2 f_1 + D_1 f_2 = f$. Тоді з урахуванням (2.3) і (2.5), (2.6) отримаємо рівняння для визначення $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$:

$$f_1(x, y) = (1 + k_1 - \nabla^2) f(x, y) / (k_1 - k_2), \quad f_2(x, y) = (\nabla^2 - 1 - k_2) f(x, y) / (k_1 - k_2). \quad (2.7)$$

Отже, праві частини ДР 2-го порядку (2.6) визначилися згідно з (2.7) через $f(x, y)$, яка є правою частиною ДР 4-го порядку (2.3).

Таким чином, знаходження частинного розв'язку ДР (2.3) зведено до визначення частинних розв'язків двох незалежних неоднорідних ДР 2-го порядку із частинними похідними (2.6) з відомими правими частинами. Знайшовши загаль-

ні розв'язки $\Phi_{10}(x, y)$ та $\Phi_{20}(x, y)$ однорідних ДР $D_1\Phi_1 = 0$ та $D_2\Phi_2 = 0$, визначається загальний розв'язок $\Phi(x, y)$ неоднорідного ДР (2.3):

$$\Phi(x, y) = \Phi_{10}(x, y) + \Phi_{20}(x, y) + \Phi_{1r}(x, y) + \Phi_{2r}(x, y). \quad (2.8)$$

Якщо у (2.3) покласти $k_1 = k_2 = 0$, то дістанемо ДР

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = f(x, y). \quad (2.9)$$

Покладаючи

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = f_1(x, y), \quad (2.10)$$

отримаємо таке неоднорідне ДР для визначення $f_1(x, y)$:

$$\nabla^2 f_1(x, y) = f(x, y), \quad (2.11)$$

у якому в якості розв'язку можна взяти частинний розв'язок.

Таким чином, знаходження частинного розв'язку неоднорідного ДР (2.9) звелось до послідовного знаходження частинних розв'язків двох неоднорідних ДР 2-го порядку (2.11) і (2.10).

ДР типу (2.3) описують НДС пластин на пружній основі Вінклера [165].

Розглянемо тепер ДР 8-го порядку типу (2.2):

$$D_1 D_2 D_3 D_4 \Phi = f. \quad (2.12)$$

Зобразимо $f(x, y)$ у вигляді (2.5), а частинний розв'язок $\Phi_r(x, y)$ ДР (2.12) у вигляді (2.4), де $\Phi_{1r}(x, y)$ та $\Phi_{2r}(x, y)$ —частинні розв'язки неоднорідних ДР 4-го порядку відповідно:

$$D_1 D_2 \Phi_1 = f_1; \quad D_3 D_4 \Phi_2 = f_2. \quad (2.13)$$

Поступаючи аналогічно попередньому випадку, дістанемо ДР відносно $f_1(x, y)$:

$$(\lambda_1 \nabla^2 + \lambda_2) f_1 = -(\nabla^4 - \lambda_3 \nabla^2 + \lambda_4) f, \quad (2.14)$$

де $\lambda_1 = k_1 + k_2 - k_3 - k_4$; $\lambda_2 = k_3 k_4 - k_1 k_2$; $\lambda_3 = k_1 + k_2$; $\lambda_4 = k_1 k_2 - 1$.

Отже, для визначення правої частини 1-го ДР (2.13) дістали неоднорідне ДР 2-го порядку (2.14). В якості функції $f_1(x, y)$ можна взяти частинний розв'язок ДР (2.14). Знайшовши $f_1(x, y)$, потім із (2.5) визначається $f_2(x, y)$. Надалі знаходяться частинні розв'язки $\Phi_{1r}(x, y)$ та $\Phi_{2r}(x, y)$ ДР (2.13), у яких праві частини уже відомі; $\Phi_{1r}(x, y)$ та $\Phi_{2r}(x, y)$ зображуються як сума частинних розв'язків $\Phi_{11r}(x, y)$ і $\Phi_{12r}(x, y)$, $\Phi_{21r}(x, y)$ і $\Phi_{22r}(x, y)$ деяких незалежних неоднорідних ДР 2-го порядку.

Загальний розв'язок $\Phi(x, y)$ ДР 8-го порядку (2.12) зобразиться у вигляді:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^4 \Phi_{i0}(x, y) + \Phi_{11r}(x, y) + \Phi_{12r}(x, y) + \Phi_{21r}(x, y) + \Phi_{22r}(x, y),$$

де $\Phi_{i0}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – загальні розв'язки однорідних ДР $D_i \Phi_i = 0$.

Якщо $k_3 = k_4 = 0$, то дістанемо неоднорідне ДР вигляду: $\nabla^2 \nabla^2 D_1 D_2 \Phi = f$. Знаходження частинного розв'язку цього ДР далі зведеться до визначення частинних розв'язків відповідних неоднорідних ДР 2-го порядку.

Використання методу зведення неоднорідних ДР високого порядку до неоднорідних ДР 2-го порядку для різних поперечних навантажень (різних функцій у прямих частинах рівнянь) наведено в [159, 161].

2.2.3. Про розв'язки неоднорідних ДР 2-го і 4-го порядків.

Розглянемо неоднорідне ДР 2-го порядку:

$$\nabla^2 f_1(x, y) = f(x, y). \quad (2.15)$$

Загальний розв'язок (2.15): $f_1(x, y) = f_{10}(x, y) + f_{1r}(x, y)$, де $f_{10}(x, y)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного ДР, визначається методом Лагранжа:

$$f_{10}(x, y) = F_1(y - ix) + F_2(y + ix), \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (2.16)$$

де F_1, F_2 – довільні функції відповідних аргументів. Частинний розв'язок $f_{1r}(x, y)$

ДР (2.15) знаходиться методом Лагранжа [379] з використанням допоміжного рівняння:

$$f_{1r}(x, y) = \frac{1}{D + iD'} \frac{1}{D - iD'} f(x, y) = \frac{1}{D + iD'} q_1(x, y) = q_2(x, y), \quad (2.17)$$

де

$$D = \partial / \partial x; D' = \partial / \partial y; \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 = (D + iD')(D - iD'); \\ q_1(x, y) = \int f(x, c - ix) dx \Big|_{c=y+ix}; q_2(x, y) = \int q_1(x, c + ix) dx \Big|_{c=y-ix};$$

c під інтегралами вважається сталою величиною.

Неоднорідне ДР 4-го порядку:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = f(x, y). \quad (2.18)$$

Загальний розв'язок ДР (2.18): $\Phi(x, y) = \Phi_{00}(x, y) + \Phi_{00r}(x, y)$,

Загальний розв'язок $\Phi_{00}(x, y)$ однорідного ДР $\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = 0$ має вигляд:

$$\Phi_{00} = F_1(y - ix) + F_2(y + ix) + x F_3(y - ix) + x F_4(y + ix), \quad (2.19)$$

де F_1, \dots, F_4 – довільні функції від відповідних змінних.

Частинний розв'язок $\Phi_{00r}(x, y)$ (2.18) визначається на основі (2.11) і (2.10).

Частинний розв'язок $f_{1r}(x, y)$ ДР (2.11) має вигляд (2.17), а частинний розв'язок $\Phi_{00r}(x, y)$ ДР (2.18), тобто частинний розв'язок ДР (2.9), знаходиться так :

$$\Phi_{00r}(x, y) = \frac{1}{D + iD'} \frac{1}{D - iD'} f_{1r}(x, y) = \frac{1}{D + iD'} q_3(x, y) = q_4(x, y), \quad (2.20)$$

де $q_3(x, y) = \int f_{1r}(x, c - ix) dx \Big|_{c=y+ix}; q_4(x, y) = \int q_3(x, c + ix) dx \Big|_{c=y-ix}$.

Неоднорідне ДР Гельмгольца:

$$(\nabla^2 - s)f_1(x, y) = f(x, y), \quad (s - const). \quad (2.21)$$

Загальний розв'язок однорідного ДР, що відповідає рівнянню (2.21) в класі експоненціальних функцій з розділеними змінними, має вигляд:

$$f_{10}(x, y) = \sum_r C_r \exp(a_r x + b_r y), \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.22)$$

де C_r – довільні сталі; a_r і b_r – сталі, які задовольняють рівнянню $a_r^2 + b_r^2 = s$.

Як правило, загальні і частинні розв'язки ДР (2.21) у кожному конкретному випадку відшуковуються з урахуванням вигляду функції $f(x, y)$.

2.2.4. Метод зведення з відомими правими частинами. Розглянемо тепер метод зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку, вважаючи праві частини ДР низьких порядків відомими функціями.

2.2.4.1. Неоднорідні ДР 8-го і 12-го порядків.

Неоднорідні ДР 8-го порядку:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} q(x, y), \quad (k = 1, 3), \quad (2.23)$$

де $D_0 = \nabla^2$; $D_i = \nabla^2 - s_i$, ($i = 1, 2$); $D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}$; s з індексами – МГП.

До таких рівнянь зводиться СДР (3.112) внутрішнього НДС з потенціальним КЕ при кососиметричному деформуванні в НК13 з урахуванням (3.110) і (3.113). Зведемо ДР (2.23) до розв'язання неоднорідних ДР 2-го порядку.

Позначимо частинні розв'язки ДР

$$D_0 f_0(x, y) \equiv \nabla^2 f_0(x, y) = q(x, y); \quad (2.24)$$

$$D_0 D_0 f_{00}(x, y) \equiv \nabla^4 f_{00}(x, y) = q(x, y); \quad (2.25)$$

$$D_i f_i(x, y) \equiv (\nabla^2 - s_i) f_i(x, y) = q(x, y), \quad (i = 1, 2) \quad (2.26)$$

через $f_{0r}(x, y)$, $f_{00r}(x, y)$, $f_{ir}(x, y)$ відповідно. Тоді:

$$f_{0r}(x, y) = q(x, y) / D_0; \quad f_{00r}(x, y) = q(x, y) / (D_0 D_0); \quad f_{ir}(x, y) = q(x, y) / D_i. \quad (2.27)$$

Частинні розв'язки ДР (2.23) шукаємо операторним інтегруванням:

$$\begin{aligned}\Phi_{k_r}(x, y) &= a_{k_0} D_{k_0} \frac{q(x, y)}{D_0 D_0 D_1 D_1} = a_{k_0} D_{k_0} \frac{1}{D_0 D_1} \left(\frac{q(x, y)}{D_0 D_1} \right) = \\ &= a_{k_0} D_{k_0} \frac{1}{D_0 D_1} \left(\frac{1}{(D_0 - D_1)} \left(\frac{q}{D_1} - \frac{q}{D_0} \right) \right) = \frac{1}{s_1} a_{k_0} D_{k_0} \frac{1}{D_0} \left(\frac{q}{D_1 D_1} - \frac{q}{D_1 D_0} \right) = \dots\end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес і, ураховуючи (2.27), остаточно отримаємо частинні розв'язки ДР (2.23) у такому вигляді:

$$\Phi_{k_r}(x, y) = a_{k_0} D_{k_0} \left(\frac{1}{s_1^2 s_{12}} (f_{1r} - f_{0r}) + \frac{1}{s_2^2 s_{21}} (f_{2r} - f_{0r}) + \frac{f_{00r}}{s_1 s_2} \right), \quad s_{i,j} = s_i - s_j. \quad (2.28)$$

Неоднорідні ДР 12-го порядку:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \cdot \Phi_k(x, y) = a_{k_0} D_{k_0} q(x, y), \quad (k = 1, 3, 5). \quad (2.29)$$

До таких ДР зводиться СДР (3.151) внутрішнього НДС з потенціальним КЕ при кососиметричному деформуванні в НК135 з урахуванням (3.149) і (3.152). Частинні розв'язки ДР (2.29) визначаються аналогічно п. 2.2.4.1:

$$\begin{aligned}\Phi_{k_r}(x, y) &= a_{k_0} D_{k_0} \left((f_{1r} - f_{0r}) / (s_1^2 s_{12} s_{13} s_{14}) + (f_{2r} - f_{0r}) / (s_2^2 s_{21} s_{23} s_{24}) + \right. \\ &\left. + (f_{3r} - f_{0r}) / (s_3^2 s_{31} s_{32} s_{34}) + (f_{4r} - f_{0r}) / (s_4^2 s_{41} s_{42} s_{43}) + f_{00r} / (s_1 s_2 s_3 s_4) \right), \quad (2.30)\end{aligned}$$

де $f_{0r}(x, y)$, $f_{00r}(x, y)$, $f_{ir}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – частинні розв'язки ДР (2.24)–(2.26).

2.2.4.2. Неоднорідні ДР порядку $2(N + 1)$. Розглянемо ДР:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \cdots D_{N-2} D_{N-1} \cdot \Phi_k(x, y) = a_{k_0} D_{k_0} q(x, y), \quad (k = 1, 3, \dots, N). \quad (2.31)$$

До таких ДР відносяться ДР (3.55) в НК135 N з урахуванням (3.48). Показано, що частинні розв'язки ДР (2.31) визначаються так:

$$\begin{aligned}\Phi_{k_r}(x, y) &= a_{k_0} D_{k_0} \left((f_{1,r} - f_{0r}) / (s_1^2 s_{1,2} s_{1,3} \cdots s_{1,n}) + (f_{2,r} - f_{0r}) / (s_2^2 s_{2,1} s_{2,3} \cdots s_{2,n}) + \dots \right. \\ &\left. + (f_{n,r} - f_{0r}) / (s_n^2 s_{n,1} s_{n,2} \cdots s_{n,n-1}) + f_{00r} / (s_1 s_2 \cdots s_n) \right), \quad (n = N - 1; N = 3, 5, \dots), \quad (2.32)\end{aligned}$$

де $s_{m,l} = s_m - s_l$; $f_{i,r}(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) – частинні розв'язки ДР типу (2.26).

Значимо, що частинні розв'язки неоднорідних ДР 4-го порядку (2.25) тут і надалі визначаються згідно з (2.20) або ж можна звести знаходження частинних

розв'язків ДР (2.25) послідовним інтегруванням неоднорідних ДР 2-го порядку згідно з (2.11) і (2.10). Тобто, частинні розв'язки неоднорідних ДР високих порядків (2.23), (2.29), (2.31) виражаються диференціальним оператором від лінійної комбінації частинних розв'язків неоднорідних ДР 2-го порядку.

Загальні розв'язки ДР (2.23), (2.29), (2.31) визначаються сумою:

$$\Phi_k(x, y) = \Phi_{k00}(x, y) + \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{ki}(x, y) + \Phi_{kr}(x, y), \quad (2.33)$$

де $\Phi_{k00}(x, y)$ – загальний розв'язок (2.19) бігармонічного ДР; $\Phi_{ki}(x, y)$ – загальні розв'язки ДР Гельмгольца $(\nabla^2 - s_i)f_1(x, y) = 0$, $(s_i - \text{const})$.

Якщо ДР вигляду $D_0 D_0 D_1 D_2 \cdots D_{N-2} D_{N-1} \cdot \Phi(x, y) = f(x, y)$, то його частинний розв'язок $\Phi_r(x, y)$ знайдеться згідно з формули (2.32), у якій $a_{k0} D_{k0} \equiv 1$, а частинні розв'язки ДР (2.24)–(2.26) отримуються при заміні $q(x, y)$ на $f(x, y)$; загальний розв'язок отримується на основі залежності, аналогічній (2.33).

Якщо неоднорідне ДР має вигляд: $D_0 D_0 D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \Phi(x, y) = f(x, y)$ (шаруваті пластини несиметричної структури, п. 7.4), то його частинний розв'язок виражатиметься через частинні розв'язки $f_{0r}, f_{00r}, f_{000r}, f_{0000r}, f_{ir}$ ($i=1, \dots, 4$) таких ДР: $\nabla^2 f_{0r}(x, y) = f, \nabla^4 f_{00r}(x, y) = f, \nabla^6 f_{000r}(x, y) = f, \nabla^8 f_{0000r}(x, y) = f, (\nabla^2 - t_i) f_{ir}(x, y) = f$, де t_i – МГП. Знаходження частинних розв'язків неоднорідних ДР 4-го, 6-го, 8-го порядків зведуться аналогічно пп.2.2.2, 2.2.3 до визначення частинних розв'язків неоднорідних ДР 2-го порядку (або ж з використанням рекурентних формул (2.17), (2.20)), а загальні розв'язки відповідних однорідних ДР визначаються методом Лагранжа. (п. 2.2.3).

2.3. Про метод інтегрування СДРР нетонких однорідних і шаруватих пластин і пологих оболонок з використанням методів збурень і МПН

СДРР високих порядків для нетонких однорідних (ортотропних і фізично нелінійних) і шаруватих (фізично нелінійних) пластин, однорідних (транстропних, ортотропних і фізично нелінійних) і шаруватих (фізично нелінійних) пологих оболонок отримуються з використанням методу збурень і МПН (для однорідних пологих оболонок,

шаруватих ФНП і ФНО). Праві частини ДР залежать від компонент НДС попередніх наближень (у методі збурень) і від попереднього наближення (у МПН). СДРР у кожному наближенні також зводяться до неоднорідних ДР 2-го порядку (розділи 4, 6–8).

СДРР для нетонких пологих оболонок методами збурень і МПН зводяться до послідовності граничних задач для пластин (задачі обтискання і згину), для яких неоднорідні ДР високих порядків розщеплюються на ДР 2-го порядку (розд. 8) і отже, в кожному наближенні можна отримати загальні розв'язки для ДР 2-го порядку, а потім і загальні розв'язки для СДРР високих порядків для пологих оболонок.

2.4. Висновки по розділу

1. Сформульована методологія побудови нових варіантів МТ лінійно і нелінійно пружних нетонких однорідних і шаруватих пластин і пологих оболонок.

2. Уперше розроблено новий метод і узагальнено операторний метод зведення неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку.

3. Описано новий метод інтегрування СДРР високих порядків (який зводить їх до розв'язування ДР 2-го порядку) і отримання загальних розв'язків у граничних задачах варіантів МТ нетонких лінійно і нелінійно пружних однорідних і шаруватих пластин при довільних поперечних навантаженнях (плавних, неплавних, переривчастих, локальних, зосереджених).

4. Методи зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку можуть бути узагальнені для неоднорідних ДР класу $D_1 \cdots D_n \Phi(x, y) = D f(x, y)$, (D довільний диференціальний оператор,

$$D_i = a\partial^2 / \partial x^2 + b\partial^2 / \partial y^2 + c\partial^2 / (\partial x \partial y) + e\partial / \partial x + g\partial / \partial y + d_i, (i = 1, \dots, n); a, \dots, d_i - \text{const}).$$

5. Описано алгоритм розв'язування граничних задач і одержання загальних розв'язків у варіантах МТ фізично лінійних і нелінійних однорідних і багатошарових пологих оболонок довільної товщини.

6. Новий розроблений метод інтегрування СДРР високих порядків може також використовуватися в крайових задачах для тонких пластин, а наближені методи—в крайових задачах тонких пологих оболонок.

Наукові результати, наведені в другому розділі, опубліковано в працях автора [114, 115, 140, 142, 147, 158–163, 167, 178, 180, 183, 185, 186, 190, 194, 315, 447, 449].

РОЗДІЛ 3

ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ОДНОРІДНИХ ТРАНСТРОПНИХ ПЛАСТИН ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ

Побудовано новий варіант МТ однорідних транстропних пластин довільної сталої товщини з позицій тривимірної ТП. Варіант оснований на методі розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні (як функцій трьох змінних) в ряди за поліномами Лежандра по поперечній координаті з використанням ВПР і МВР. Виведені ДРР, розв'язувальні та визначальні ДР. Побудовані загальні розв'язки. Розроблені методи розв'язання граничних задач, отримані числові результати і нові висновки. Доведені теореми про збіжність рядів для напружень і однозначність розв'язку другої основної задачі ТП.

3.1. Постановка проблеми

З позицій тривимірної ТП розглядається транстропна пластина довільної сталої товщини h в прямокутній системі координат x, y, z (рис. 3.1а). Осі x, y належать серединній площині, яка є площиною ізоотропії, вісь z перпендикулярна до неї. На лицевих площинах пластини діє статичне поперечне навантаження $q_1(x, y), q_2(x, y)$ (рис. 3.1б). Граничні умови на лицевих площинах:

$$\sigma_z(z = \frac{h}{2}) = -q_1(x, y); \sigma_z(z = -\frac{h}{2}) = q_2(x, y); \sigma_{xz}(z = \pm \frac{h}{2}) = \sigma_{yz}(z = \pm \frac{h}{2}) = 0. \quad (3.1)$$

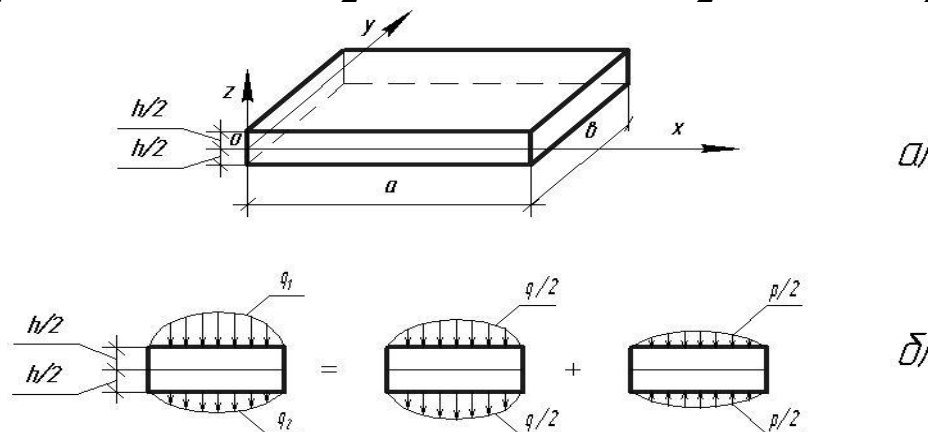


Рис. 3.1. Однорідна пластина під дією довільного поперечного навантаження.

Надалі поперечне навантаження на лицевих площинах (рис. 3.1б) представляється у вигляді суми двох складових: кососиметричного та симетричного навантажень відносно серединної площини і граничні умови (2.1) приймають вигляд:

$$\sigma_z(z = \pm \frac{h}{2}) = \frac{1}{2}(\mp q(x, y) - p(x, y)); \sigma_{xz}(z = \pm \frac{h}{2}) = \sigma_{yz}(z = \pm \frac{h}{2}) = 0, \quad (3.2)$$

де $p(x, y) = q_1(x, y) - q_2(x, y)$, $q(x, y) = q_1(x, y) + q_2(x, y)$.

Граничні умови на бічній поверхні пластини, яку вважатимемо перпендикулярною до серединної площини, можуть бути довільними:

на частині бічної поверхні Γ_1 , на якій задані переміщення,

$$U = U_{\Gamma_1}, (U, V); W = W_{\Gamma_1}; \quad (3.3)$$

на частині бічної поверхні Γ_2 , на якій задані напруження $P_{i\Gamma_2}$,

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \cos(\bar{\nu}, x_j) = P_{i\Gamma_2}, (i = 1, 2, 3). \quad (3.4)$$

Тут U, V, W та σ_{ij} – компоненти переміщень та напружень як функції x, y, z ; функції в правих частинах (3.3) та (3.4) – відомі функції від x, y, z , які визначені на бічній поверхні; $\bar{\nu}$ – вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні.

Співвідношення між деформаціями та переміщеннями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, (x, y; U, V). \quad (3.5)$$

Залежності між напруженнями та деформаціями для транстропної пластини, площина ізотропії якої паралельна серединній площині:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E - \nu' \sigma_z / E', (x, y); \varepsilon_z = (\sigma_z - \nu'(\sigma_x + \sigma_y)) / E'; \\ \gamma_{yx} &= \sigma_{yx} / G; \gamma_{xz} = \sigma_{xz} / G'; \gamma_{yz} = \sigma_{yz} / G', (G = E / (2(1 + \nu))). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Із залежностей (3.6) одержуються вирази для напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$:

$$\sigma_x = d_0(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + d_{10} \sigma_z, (x, y); \sigma_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (3.7)$$

де

$$G = E/(2(1+\nu)); d_0 = E/(1-\nu^2), \quad d_{10} = E\nu'/(E'(1-\nu)). \quad (3.8)$$

Тривимірну задачу ТП для пластин довільної сталої товщини зведемо до двовимірної методом розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні, як функцій трьох змінних, у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра з використанням ВПР. При цьому для одержання основних рівнянь узагальнимо МВР, започатковану в [310].

3.2. Основні рівняння

3.2.1. Апроксимація переміщень, деформацій і поперечних напружень. Переміщення розвинемо в ряди за поперечною координатою z при допомозі поліномів Лежандра $P_k(2z/h)$ [2, 226, 392]:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(2z/h)u_k(x, y), (U, u \rightarrow V, v); W(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(2z/h)w_k(x, y). \quad (3.9)$$

Тут функції u_k, v_k, w_k , – шукані, називатимемо їх складовими компонент переміщень. Вони повинні надалі задовольняти ДРР та крайовим умовам. Зображення компонент НДС у вигляді рядів за поліномами Лежандра дає змогу одержувати розв’язок з будь-якою точністю [41, 107, 363, 446]. Згідно з МВР [310] для кососиметричного відносно серединної площини поперечного навантаження транстропних пластин компоненти переміщень приймались у вигляді двох доданків за поліномами Лежандра, не розглядаючи таку апроксимацію як частинні суми нескінченних рядів. Далі показано (табл. А.1), що МВР точніша в порівнянні з ЕАМ [288, 306].

Компоненти переміщень можна також розвивати в ряди і за іншими ортогональними поліномами (Якобі, Лагерра, Чебишева та іншими). Але, як показує наш аналіз одержаних основних рівнянь, найбільш прийнятними є поліноми Лежандра, оскільки вони дають найпростіші рівняння через їх властивості [2, 226].

Слід підкреслити самоврівноваженість складових переміщень $U_k(x, y, z)$, $V_k(x, y, z)$, $W_k(x, y, z)$ по товщині пластини для $k \geq 2$.

Складові компонент переміщень (3.9) для $k=0, 1$ визначають несамоврівноважений, а для $k \geq 2$ – самоврівноважений деформований стан пластини. Деформації (3.5) в пластині з урахуванням (3.9) визначаються так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{xj}, (x, y); \quad \varepsilon_z = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{zj}, \quad \gamma_{yx} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{yxj}, \quad \gamma_{xz} = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{xzj}, (x, y); \\ \varepsilon_{xj} &= P_j u_{j,x}, (x, y; u, v); \quad \varepsilon_{zj} = P'_{j-1} w_j; \quad \gamma_{yxj} = P_j (u_{j,y} + v_{j,x}); \\ \gamma_{xzj} &= P'_j u_j + P_{j-1} w_{j,x}, (x, y; u, v). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для апроксимації компонент напружень $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ застосуємо підхід [288, 306], навівши числово-аналітичні обґрунтування, яких не було у вказаних працях. На основі тривимірних рівнянь ТП нами одержані чисельні значення безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xz}$ для квадратної ($a \times a \times h$) транслопної пластини, вільно обіпертої на краях від дії поперечного синусоїдального навантаження при різних МГП в залежності від поперечної координати (табл. А.2, А.3). У верхніх частинах рядків результати наведені для кососиметричного навантаження ($\sigma_z(z = \pm h/2) = \mp q(x, y)/2$), а в нижніх – при дії на пластину навантаження, прикладеного тільки на верхній лицевій площині ($\sigma_z(z = h/2) = -q(x, y), \sigma_z(z = -h/2) = 0$). Напруження $\tilde{\sigma}_z$ залежать тільки від z , а напруження $\tilde{\sigma}_{xz}$ – залежать від x, y і z (обчислювались при $x = y = a/4$). Відносні розходження Δ у відсотках визначалися по відношенню до значень напружень, обчислених для $\nu' = 0, \nu = 0,3$. Із зменшенням товщини пластини та із збільшенням податливості матеріалу пластини на поперечний зсув зменшується і вплив величини ν' на поперечні напруження, але для всіх указаних МГП цим впливом можна знехтувати. Для пластин середньої товщини ν' практично не впливає на поперечні напруження (Δ не перевищує 0,38%). Це буде використовуватися надалі при апроксимації напружень $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$.

Зобразимо напруження $\sigma_{xz}(x, y, z), \sigma_{yz}(x, y, z)$ у вигляді рядів:

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{xzk}, (x, y), \quad (3.11)$$

де

$$\sigma_{xzk} = \alpha_k(z) Q_{kx}(x, y); \quad \sigma_{yzk} = \alpha_k(z) Q_{ky}(x, y). \quad (3.12)$$

Функції $\alpha_k(z)$ знаходяться після перетворень з першого ДРР елемента пластини при деформуванні його по циліндричній поверхні при $\nu' = 0$:

$$\alpha_k(z) = \frac{3(P_{k-1} - P_{k+1})}{h(2k+1)}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Складові σ_{xzk} , σ_{yzk} для $k \geq 2$ самоврівноважені по товщині пластини.

Нормальні напруження $\sigma_z(x, y, z)$ також зобразимо у вигляді рядів так, щоб виконувались граничні умови на лицевих площинах (3.1), (3.2).

$$\sigma_z(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{zk}, \quad (3.14)$$

де

$$\sigma_{z0} = -0,5p(x, y); \quad \sigma_{zk} = \chi_k(z)\omega_k(x, y), \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.15)$$

Задовольняючи граничним умовам (3.2) на лицевих площинах, дістанемо:

$$\sigma_{z1}(z = \pm h/2) = \mp 0,5q(x, y), \quad \sigma_{zk}(z = \pm h/2) = 0, \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Із третього ДРР, ураховуючи (3.11)–(3.15), після перетворень знайдемо:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= q(x, y); \quad \chi_1(z) = -3P_1/5 + P_3/10; \quad \chi_2(z) = -1/10 + P_2/7 - 3P_4/70; \\ \chi_3(z) &= -3P_1/70 + P_3/15 - P_5/42, \end{aligned} \quad (3.16)$$

або в загальному вигляді:

$$\chi_k(z) = -\frac{3}{2} \left(\frac{P_{k-2}}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}}{(2k+1)(2k+3)} \right), \quad (k \geq 2). \quad (3.17)$$

Функції $Q_{kx}(x, y)$, $Q_{ky}(x, y)$, $\omega_k(x, y)$ – шукані. Зазначимо, що вирази для $\alpha_k(z)$, $\chi_k(z)$ співпадають з [299], де використано ВП Кастільяно в сполученні з методом невизначених множників Лагранжа.

3.2.2. Варіаційне рівняння Рейснера. Залежності між напруженнями та переміщеннями. Тривимірна задача ТП для пластин та оболонок може бути зведена до двовимірної за допомогою методу розкладання НДС в ряди за поперечною координатою з використанням різних ВП (див. 1.3.3). Як одержано в [310],

ВПР [1, 427], має певні переваги при визначенні НДС пластин. На цьому й ґрунтується вибір ВПР для побудови нового варіанта МТ пластин та пологих оболонок. Згідно з ВПР [114, 116, 427], відповідне рівняння Рейснера для лінійно і нелінійно пружних тіл (без урахування об'ємних сил) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \iiint \{ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{xy} \delta \gamma_{yx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + (\varepsilon_x - \varepsilon_x(\sigma_{ij})) \delta \sigma_x + \\ & + (\varepsilon_y - \varepsilon_y(\sigma_{ij})) \delta \sigma_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_z(\sigma_{ij})) \delta \sigma_z + (\gamma_{yx} - \gamma_{yx}(\sigma_{ij})) \delta \sigma_{yx} + \\ & + (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}(\sigma_{ij})) \delta \sigma_{xz} + (\gamma_{yz} - \gamma_{yz}(\sigma_{ij})) \delta \sigma_{yz} \} dx dy dz - \\ & - \int_A (X_\nu \delta U + Y_\nu \delta V + Z_\nu \delta W) dA = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де A – площа лицевих площин та бічної поверхні пластини; X_ν, Y_ν, Z_ν – інтенсивність складових поверхневих сил в проекціях на осі координат; вирази із знаком δ означають відповідні варіації; $\sigma_x, \dots, \sigma_{yz}, \varepsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$ – компоненти напружень і деформацій, які залежать від компонент переміщень (3.9); інтегрування в потрібному інтегралі виконується по всьому об'єму, а в подвійному – по всій поверхні A .

Із (3.18) одержуються залежності між напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ з одного боку та деформаціями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ і напруженнями σ_z з іншого боку у вигляді (3.7).

Розглядаючи у (3.18) інтеграли з $\delta \sigma_{xz}, \delta \sigma_{yz}$, з урахуванням (3.10) і (3.11) одержимо системи ЛАР відносно Q_{kx}, Q_{ky} , ($k=1, 2, \dots$). Вказані функції мають вигляд:

$$Q_{kx}(x, y) = \sum_{i=1,3}^{\infty} (h_{ki} w_{i,x} + l_{ki} u_i), \quad (k=1, 3, \dots); \quad (3.19)$$

$$Q_{ky}(x, y) = \sum_{i=2,4}^{\infty} (h_{ki} w_{i,x} + l_{ki} u_i), \quad (k=2, 4, \dots), \quad (x \rightarrow y; u \rightarrow v), \quad (h \text{ і } l \text{ з індексами-МГП}).$$

Функції $\omega_k(x, y)$ визначаються розглядаючи потрібний інтеграл із $\delta \sigma_z$. Із нескінченної системи ЛАР знаходяться $\omega_k(x, y)$, які мають вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= q(x, y); \quad \omega_k(x, y) = \sum_{3,5}^{\infty} q_{ki} w_i + \sum_{i=1,3}^{\infty} e_{ki} \varphi_i + e_k q, \quad (k=3, 5, \dots); \\ \omega_k(x, y) &= \sum_{2,4}^{\infty} q_{ki} w_i + \sum_{i=0,2}^{\infty} e_{ki} \varphi_i + e_{kp} p, \quad (k=2, 4, \dots), \end{aligned} \quad (3.20)$$

де e і q з індексами—МГП;

$$\varphi_k = u_{k,x} + v_{k,y} \quad (\text{потенціальні функції}). \quad (3.21)$$

Компоненти напружень на основі (3.7), (3.11), (3.14) з урахуванням (3.10), (3.12), (3.13), (3.15)–(3.17) зображуються у вигляді рядів за поліномами Лежандра:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2z/h) t_{xn}(x, y); \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2z/h) t_{yn}(x, y). \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2z/h) s_{zn}(x, y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2z/h) s_{xn}(x, y), \quad \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2z/h) t_{yxn}(x, y).$$

Множниками при поліномах Лежандра у рядах є функції, які залежать від складових компонент переміщень. Компоненти НДС можна знаходити з будь-якою наперед заданою точністю. Точність визначення НДС пластин довільної сталої товщини залежить від кількості утримуваних членів у цих рядах. Із їх збільшенням зростає точність знаходження НДС. Цим самим варіант МТ суттєвим чином відрізняється від інших теорій, побудованих на основі припущень і моделей (див. розд. 1), визначення НДС за якими з довільною точністю неможливо в принципі, оскільки точність таких теорій обумовлена рамками прийнятих гіпотез. Як буде показано далі, методика побудови нового варіанта МТ збільшує ефективність цього варіанта МТ також у порівнянні з іншими варіантами МТ.

3.2.3. Диференціальні рівняння рівноваги та крайові умови.

Підставляючи напруження (3.22) і варіації деформацій (3.10) у ВР Рейснера (3.18) і, перетворюючи потрібний інтеграл, дістанемо ДР рівноваги та крайові умови.

ДРР отримані в загальному випадку у вигляді:

$$\frac{\partial s_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx0}}{\partial y} = 0, \quad (s_{x0} \rightarrow s_{y0}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}), \quad (\text{при } \delta u_0; \delta v_0);$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2j+1} \left(\frac{\partial s_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yxj}}{\partial y} \right) - 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{j-1} t_{xn} = 0, \text{ (при } \delta u_j, \delta v_j), (j=2, 4, \dots), \\
& \quad (s_{xj} \rightarrow s_{yj}; t_{xn} \rightarrow t_{yn}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}); \\
& \frac{h}{2j+1} \left(\frac{\partial s_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yxj}}{\partial y} \right) - 2 \sum_{n=0,2,\dots}^{j-1} t_{xn} = 0, \text{ (при } \delta u_j, \delta v_j), (j=1, 3, \dots), \\
& \quad (s_{xj} \rightarrow s_{yj}; t_{xn} \rightarrow t_{yn}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}); \\
& h \left(\frac{\partial t_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial t_{y0}}{\partial y} \right) = q, \text{ (при } \delta w_1); \\
& \frac{h}{2j+1} \left(\frac{\partial t_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yj}}{\partial y} \right) - 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{j-1} s_{zn} = q, \text{ (при } \delta w_{j+1}), (j=2, 4, \dots); \\
& \frac{h}{2j+1} \left(\frac{\partial t_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yj}}{\partial y} \right) - 2 \sum_{n=0,2,\dots}^{j-1} s_{zn} = p, \text{ (при } \delta w_{j+1}), (j=1, 3, \dots).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Граничні умови на бічній поверхні зводяться до крайових умов таким чином. Розкладаючи в ряди за поліномами Лежандра по z навантаження X_v, Y_v, Z_v , яке задовольняє ДР рівноваги пластини, дістанемо:

$$X_v(z, s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(2z/h) x_{s,j}(s), \tag{3.24}$$

$$x_{s,j}(x, y) = \frac{2j+1}{h} \int X_v(x, y, z) P_j(2z/h) dz, \quad (X_v \rightarrow Y_v \rightarrow Z_v, x_{s,j} \rightarrow y_{s,j} \rightarrow z_{s,j}). \tag{3.25}$$

Тоді крайові умови на основі (3.18) зобразяться таким чином:

$$\begin{aligned}
& \int_{(s)} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h}{2j+1} [(s_{xj} l_x + t_{yxj} l_y - x_{sj}) \delta u_j + (t_{yxj} l_x + s_{yj} l_y - y_{sj}) \delta v_j + \right. \\
& \quad \left. + (t_{xj} l_x + t_{yj} l_y - z_{sj}) \delta w_{j+1}] \right\} ds = 0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

де l_x, l_y – напрямляючі косинуси нормалі до бічної поверхні; для симетричного деформування беруться доданки з парними індексами, а для косиметричного – з непарними.

Розвиваючи компоненти переміщень $U_{\Gamma_1}(x, y, z)$, $V_{\Gamma_1}(x, y, z)$, $W_{\Gamma_1}(x, y, z)$, які задані на бічній поверхні Γ_1 пластини, в ряди за поліномами Лежандра, дістанемо:

$$U_{\Gamma}(x, y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(2z/h) u_{jS}(x, y), (U_{\Gamma} \rightarrow V_{\Gamma}; u_{jS} \rightarrow v_{jS});$$

$$W_{\Gamma}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{j-1}(2z/h) w_{jS}(x, y). \quad (3.27)$$

Функції $u_{jS}(x, y)$, $v_{jS}(x, y)$, $w_{jS}(x, y)$, які визначені на контурі S пластини ($x, y \in S$), виражаються в такому вигляді:

$$u_{jS}(x, y) = \frac{2j+1}{h} \int_z U_{\Gamma}(x, y, z) P_j(2z/h) dz, (u_{jS} \rightarrow v_{jS}; U_{\Gamma} \rightarrow V_{\Gamma}), (j = 0, 1, \dots, N);$$

$$w_{jS}(x, y) = \frac{2j-1}{h} \int_z W_{\Gamma}(x, y, z) P_{j-1}(2z/h) dz, (j = 1, \dots, N). \quad (3.28)$$

На основі (3.24)–(3.28) отримуються різні крайові умови.

3.3. Наближення K0-N

Наведемо компоненти НДС, ДР рівноваги, крайові умови, розв'язувальні та визначальні ДР в наближенні K0-N (N – непарне натуральне число).

3.3.1. Компоненти НДС. Переміщення згідно з (3.9) мають вигляд:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^N P_k(2z/h) u_k(x, y), (U, u \rightarrow V, v); W(x, y, z) = \sum_{k=1}^N P_{k-1}(2z/h) w_k(x, y). \quad (3.29)$$

Напруження на основі (3.22), (3.11)–(3.17), (3.19)–(3.22), (3.29):

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N+1} P_n(2z/h) t_{xn}(x, y); \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N+1} P_n(2z/h) t_{yn}(x, y);$$

$$\sigma_z(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N+2} P_n(2z/h) s_{zn}(x, y); \quad (3.30)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N+2} P_n(2z/h) s_{xn}(x, y), (x, y); \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=0}^N P_n(2z/h) t_{yxn}(x, y).$$

У формулах (3.30) з урахуванням (3.11)–(3.17), (3.19)–(3.22), (3.29) функції t_{xn}, \dots, t_{yxn} мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 t_{xn}(x, y) &= \sum_{i=1,3}^N (h_{0ni}w_{i,x} + l_{0ni}u_i), \quad (n = 0, 2, \dots, N + 1); \\
 t_{xn}(x, y) &= \sum_{i=2,4}^{N-1} (h_{0ni}w_{i,x} + l_{0ni}u_i), \quad (n = 1, 3, \dots, N); \\
 s_{zn}(x, y) &= \sum_{i=2,4}^{N-1} p_{ni}w_i + \sum_{i=0,2}^{N-1} g_{ni}\varphi_i + g_{np}p, \quad (n = 0, 2, \dots, N + 1); \\
 s_{zn}(x, y) &= \sum_{i=3,5}^N p_{ni}w_i + \sum_{i=1,3}^N g_{ni}\varphi_i + g_{nq}q, \quad (n = 1, 3, \dots, N + 2); \\
 s_{xn}(x, y) &= d_0(u_{n,x} + \nu v_{n,y}) + d_{10}s_{zn}, \quad (n = 0, 1, \dots, N); \\
 s_{xn}(x, y) &= d_{10}s_{zn}, \quad (n = N + 1, N + 2), \quad (x, y; u_k, v_k); \\
 t_{yxn}(x, y) &= G(u_{n,y} + \nu v_{n,x}), \quad (n = 0, 1, \dots, N),
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

де h, l, p, g з індексами – МГП; d_0, d_{10}, G – механічні сталі матеріалу пластини.

Деформації визначаються за формулами (3.10) з урахуванням (3.29).

3.3.2. Диференціальні рівняння рівноваги. Зобразимо ДР рівноваги (3.23) через $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N$, урахувавши вирази для t_{xi}, \dots, t_{yxi} згідно з (3.31) і, приймаючи також до уваги, що на основі (3.8):

$$G - d_0 = -(d_0\nu + G) = -E/(2(1 - \nu)). \tag{3.32}$$

Надалі ця рівність суттєвим чином буде використовуватися при перетворенні ДР рівноваги.

Перетворюючи (3.23) з урахуванням (3.32), дістанемо СДР з частинними похідними відносно шуканих складових компонент переміщень. В наближенні $K0-N$ система ДР рівноваги має порядок $(6N+4)$. Показано, що ця СДР розділяється на дві окремі незалежні СДР, одна з яких описує НДС пластини при дії на неї симетричного відносно серединної площини навантаження, яке прикладене як на лицевих площинах так і на бічній поверхні (симетричне деформування з урахуванням поперечного обтискання), а інша описує НДС при поперечному косисиметричному навантаженні (при чисто згинальному деформу-

ванні). У всіх співвідношеннях і рівняннях потрібно приймати до уваги тільки ті складові компонент переміщень, які ураховуються в частинних сумах рядів розвинення тангенціальних компонент переміщень (3.9). Це стосується також і крайових умов.

Установлено, що в наближенні $K0-N$ СДР для кососиметричного навантаження має порядок $3(N+1)$, а для симетричного – порядок $(3N+1)$.

СДР, що описує кососиметричне деформування (наближення $K13\dots N$):

$$\sum_{j=1,3}^N (L_{iu_j} u_j + L_{iv_j} v_j + L_{iw_j} w_j) = L_{iq}(q(x, y)), \quad (i = 1, 2, \dots, 3(N+1)/2). \quad (3.33)$$

СДР, що описує симетричне деформування (наближення $K02\dots(N-1)$):

$$\sum_{j=0,2}^{N-1} (M_{iu_j} u_j + M_{iv_j} v_j) + \sum_{j=2,4}^{N-1} M_{iw_j} w_j = M_{ip}(p(x, y)), \quad (i = 1, 2, \dots, (3N+1)/2). \quad (3.34)$$

У ДР (3.33), (3.34) M_{ij} , L_{ij} – диференціальні оператори не вище 2-го порядку; $M_{ip}(p)$, $L_{iq}(q)$ – функції поперечного навантаження; вказані оператори і функції залежать від МГП пластини. Явні вирази лівих і правих частин ДР (3.33), (3.34) наведені далі для конкретних наближень: $K01$, $K13$, $K0-3$, $K135$, $K024$, $K0-5$.

Аналіз структури диференціальних операторів M_{ij} , L_{ij} показав, що диференціальні матриці систем ДР (3.33) і (3.34) симетричні.

3.3.3. Крайові умови. Крайові умови впливають із (3.26) і мають вигляд:

$$\int_{(s)} \left\{ \sum_{j=0,1}^N \frac{h}{2j+1} ((s_{xj} l_x + t_{yxj} l_y - x_{sj}) \delta u_j + (t_{yxj} l_x + s_{yj} l_y - y_{sj})) \delta v_j + \sum_{j=0,1}^{N-1} \frac{h}{2j+1} (t_{xj} l_x + t_{yj} l_y - z_{sj}) \delta w_{j+1} \right\} ds = 0. \quad (3.35)$$

Наведемо деякі конкретні крайові умови.

1). Якщо на бічній поверхні Γ пластини задаються компоненти переміщень $U_{\Gamma}(x, y, z)$, $V_{\Gamma}(x, y, z)$, $W_{\Gamma}(x, y, z)$, то на ній $\delta U = \delta V = \delta W = 0$ і крайові умови для $u_j(x, y)$, $v_j(x, y)$, $w_j(x, y)$ приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) = u_{jS}(x, y); v_j(x, y) = v_{jS}(x, y), (j = 0, 1, \dots, N); \\ w_j(x, y) = w_{jS}(x, y), (j = 1, \dots, N); x, y \in S. \end{aligned} \quad (3.36)$$

2). Якщо на бічній поверхні Γ задається тільки зовнішнє навантаження X_v, Y_v, Z_v (3.24) (отже, відомі функції x_{si}, y_{si}, z_{si} (3.25)), то дістанемо:

$$\begin{aligned} s_{xj}(x, y)l_x + t_{yxj}(x, y)l_y = x_{sj}(x, y); t_{yxj}(x, y)l_x + s_{yj}(x, y)l_y = y_{sj}(x, y), \\ (j = 0, 1, \dots, N); t_{xj}(x, y)l_x + t_{yj}(x, y)l_y = z_{sj}(x, y), (j = 0, 1, \dots, N - 1); (x, y \in S), \end{aligned} \quad (3.37)$$

де s_{xj}, \dots, t_{yj} – функції змінних x, y , які виражаються через складові u_j, v_j, w_j .

Отримаємо із (3.35) найбільш поширені в практиці крайові умови, наприклад, для прямокутної пластини ($a \times b \times h$) на краю пластини $x=a$.

1). На краю пластини $x=a=const$ ($l_x=1, l_y=0$) прикладене зовнішнє поверхневе навантаження X_v, Y_v, Z_v . Тоді згідно з (3.25) можна знайти x_{sj}, y_{sj}, z_{sj} . Оскільки на переміщення вільного краю обмежень немає, то варіації $\delta U, \delta V, \delta W$, а також $\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j$ є довільними і не рівними тотожно нулю. Звідси множники при $\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j$ в (3.35) повинні бути рівними нулю. Дістанемо:

$$\begin{aligned} s_{xj}(x=a, y) = x_{sj}(x=a, y); t_{yxj}(x=a, y) = y_{sj}(x=a, y), (j = 0, 1, \dots, N); \\ t_{xj}(x=a, y) = z_{sj}(x=a, y), (j = 0, 1, \dots, N - 1). \end{aligned} \quad (3.38)$$

2). Вільно обіпертий край $x=a$ (крайові умови Нав'є):

$$V(x=a, y, z) = 0; W(x=a, y, z) = 0; X_v(x=a, y, z) = 0.$$

Тоді із (3.24) та (3.29) випливає, що $v_j(x=a, y) = 0; w_j(x=a, y) = 0; x_{sj}(x=a, y) = 0$. Оскільки на краю $\delta v_j = 0, \delta w_j = 0$, а $\delta u_j(x=a, y) \neq 0$, то із (3.35) одержимо, що $s_{xj}(x=a, y) = x_{sj}(x=a, y) = 0$.

Таким чином, крайові умови для вільно обіпертого краю матимуть вигляд:

$$v_j(x=a, y) = 0; s_{xj}(x=a, y) = 0, (j = 0, 1, \dots, N); \quad (3.39)$$

$$w_j(x = a, y) = 0, (j = 0, 1, \dots, N - 1).$$

3). Жорстко защемлений край $x = a$. В цьому випадку

$$U(x = a, y, z) = V(x = a, y, z) = W(x = a, y, z) = 0.$$

На основі (3.29) крайові умови запишуться так:

$$u_j(x = a, y) = v_j(x = a, y) = 0, (j = 0, 1, \dots, N); w_j(x = a, y) = 0, (j = 0, 1, \dots, N - 1). \quad (3.40)$$

Зазначимо, що з (3.35) можна також отримати інші крайові умови.

3.3.4. Кососиметричне деформування. Перетворення СДР рівноваги.

3.3.4.1. Розв'язувальні рівняння. Перетворимо СДРР (3.33). Аналізуючи структуру операторів СДР (3.33) і, урахувавши (3.21) і (3.32), система (3.33) в НК13...N перетвориться до такої:

$$\sum_{j=1,3}^N (a_{Niu_j} u_j + a_{Ni\varphi_j} \varphi_{j,x} + a_{Ni w_j} w_{j,x}) + a_{N1} \psi_{i,y} = \beta_{ui} q_x, \quad (\text{при } \delta u_i); \quad (3.41)$$

$$\sum_{j=1,3}^N (a_{Niu_j} v_j + a_{Ni\varphi_j} \varphi_{j,y} + a_{Ni w_j} w_{j,y}) - a_{N1} \psi_{i,x} = \beta_{ui} q_y, \quad (\text{при } \delta v_i), (i = 1, 3, \dots, N);$$

$$\sum_{j=1,3}^N (b_{N1\varphi_j} \varphi_j + b_{N1 w_j} \nabla^2 w_j) = \beta_{w1} q, \quad (\text{при } \delta w_1); \quad (3.42)$$

$$\sum_{j=1,3}^N b_{Ni\varphi_j} \varphi_j + b_{Ni w_j} \nabla^2 w_1 + \sum_{j=3,5}^N (c_{Ni w_j} + b_{Ni w_j} \nabla^2) w_j = \beta_{wi} q, \quad (\text{при } \delta w_i), (i = 3, 5, \dots, N),$$

де $\psi_j(x, y)$ – вихрові функції:

$$\psi_j(x, y) = u_{j,y} - v_{j,x}, \quad (j = 1, 2, \dots, N); \quad (3.43)$$

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа; a, b, c з індексами залежать від МГХ; в дужках указано при якій варіації складової переміщення отримане рівняння.

Кількість ДР (3.41) дорівнює $(N+1)$, а ДР (3.42) $(N+1)/2$, Кількість ДР системи (3.41), (3.42) дорівнює $3(N+1)/2$. Така ж кількість і невідомих функцій $u_1, v_1, w_1, u_3, v_3, w_3, \dots, u_N, v_N, w_N$. Пронумеруємо рівняння так: ДР, отримане при δu_1 – перше рівняння, при δv_1 – друге рівняння, при δu_3 – третє рівняння і т. д.

Виділимо СДР, яка описує ВКЕ. Перетворимо ДР (3.41). Диференціюємо 1-е ДР по y , 2-е по x і віднімемо їх. Аналогічно поступимо з 3-м і 4-м і т. д. Отримаємо однорідну розв'язувальну СДР порядку $(N + 1)$ відносно вихрових функцій $\psi_j, (j = 1, 3, \dots, N)$:

$$\sum_{j=1,3}^N H_{ij} \psi_j(x, y) = 0; \quad (i = 1, 3, \dots, N), \quad (3.44)$$

де H_{ij} ($i = j$) – диференціальні оператори 2-го порядку; H_{ij} ($i \neq j$) нульового:

$$H_{ii} = (h_{i2\psi} \nabla^2 + h_{i0\psi}), \quad (i = 1, 3, \dots, N); \quad H_{ij} = h_{ij0\psi}, \quad (i \neq j). \quad (3.45)$$

В (3.45) h з індексами – МГП, причому $h_{ij0\psi} = h_{ji0\psi}$, тобто, диференціальна матриця СДР (3.44) симетрична: $H_{ij} = H_{ji}$ ($j = 1, 3, \dots, N$), ($i \neq j$).

Виділимо СДР, яка не містить вихрових функцій і описує внутрішній НДС і потенціальний КЕ. Знову перетворимо ДР (3.41). Диференціюємо 1-е ДР по x , 2-е по y і складемо їх; 3-е ДР по x , 4-е по y і складемо їх і т. д. Отримаємо групу ДР

$$\sum_{j=1,3}^N ((d_{i\varphi j0} + d_{i\varphi j2} \nabla^2) \varphi_j + d_{iwj2} \nabla^2 w_j) = \beta_{ui} \nabla^2 q, \quad (i = 1, 3, \dots, N), \quad (3.46)$$

де d з індексами залежать від МГП і визначаються через параметри ДР (3.41).

Далі виразимо з ДР (3.42) $\varphi_j(x, y)$ ($j = 1, 3, \dots, N$) через $w_j(x, y)$ і підставимо в (3.46). Дістанемо неоднорідну СДР порядку $2(N + 1)$ відносно функцій $w_j(x, y)$:

$$\sum_{j=1,3}^N \Pi_{ij} w_j(x, y) = \Pi_{iq} q(x, y) \quad (i = 1, 3, \dots, N), \quad (3.47)$$

де Π_{ij} – диференціальні оператори 4-го порядку. Π_{iq} – диференціальні оператори 2-го порядку. Всі оператори в (3.47) залежать від МГП. Аналізуючи якісну структуру операторів Π_{ij} і Π_{iq} встановлено, що вони мають такий вигляд:

$$\Pi_{11} = \mu_{114} \nabla^4; \quad \Pi_{1j} = \mu_{1j4} \nabla^4 + \mu_{1j2} \nabla^2, \quad \Pi_{j1} = \mu_{j14} \nabla^4 + \mu_{j12} \nabla^2, \quad (j = 2, 3, \dots, N);$$

$$P_{ij} = \mu_{ij4} \nabla^4 + \mu_{ij2} \nabla^2 + \mu_{ij0}, (i, j = 3, 5, \dots, N; i = j, i \neq j); P_{iq} = \mu_{i2} \nabla^2 + \mu_{i0}; \quad (3.48)$$

$$\mu_{114}, \dots, \mu_{i0} - \text{МГП.}$$

Диференціальні рівняння (3.44) і (3.47) називатимемо надалі розв'язувальними ДР при кососиметричному деформуванні. З цих ДР знаходяться вихрові функції $\psi_j(x, y)$, ($j = 1, 3, \dots, N$) і складові $w_j(x, y)$. Функції $\varphi_j(x, y)$ визначаються з (3.42); $u_j(x, y)$, $v_j(x, y)$ знаходяться із групи ДР (3.41) і виражаються через $\varphi_j(x, y)$, $w_j(x, y)$ і $\psi_j(x, y)$. Знаючи складові переміщень та функції $\varphi_j(x, y)$, $\psi_j(x, y)$, ($j = 1, 3, \dots, N$) на основі (3.30) і (3.31) знаходяться напруження.

3.3.4.2. Диференціальні рівняння ВКЕ. Загальні розв'язки. Зведемо розв'язувальну СДР вихрового КЕ (3.44) до більш зручного ДР. Перетворимо СДР (3.44) операторним методом (використовувався, зокрема, у [98, 100, 268, 310, 363]). Зобразимо шукані функції $\psi_j(x, y)$ через нову функцію $\psi(x, y)$ таким чином:

$$\psi_j(x, y) = H_{1j}^0 \psi(x, y), \quad (j = 1, 3, \dots, N; N \geq 3), \quad (3.49)$$

де H_{1j}^0 —ад'юнкти диференціального визначника H_0 СДР (3.44). Ураховуючи (3.49), СДР (3.44) зведеться до визначення $\psi(x, y)$ із однорідного ДР порядку $(N + 1)$ (називатимемо його визначальним ДР):

$$H_0 \psi(x, y) \equiv (\nabla^2 - r_1)(\nabla^2 - r_2) \cdot \dots \cdot (\nabla^2 - r_{(N+1)/2}) \psi(x, y) = 0, \quad (3.50)$$

де r з індексами – МГП, корені відповідного характеристичного рівняння ($r_i > 0$).

Загальний розв'язок ДР (3.50) зображується у вигляді:

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{(N+1)/2} \psi^{(i)}(x, y), \quad (3.51)$$

де $\psi^{(i)}(x, y)$ —загальні розв'язки (2.22) диференціальних рівнянь Гельмгольца

$$(\nabla^2 - r_i) \psi^{(i)}(x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, (N + 1)/2; N \geq 1). \quad (3.52)$$

На основі (3.49)–(3.52) і (2.22) отримаємо загальні розв’язки для вихрових функцій $\psi_j(x, y)$:

$$\psi_j(x, y) = H_{1j}^0 \sum_{i=1}^{(N+1)/2} \psi^{(i)}(x, y). \quad (3.53)$$

3.3.4.3. Визначальні ДР внутрішнього НДС і ПКЕ. Загальні розв’язки. Розглянемо СДР (3.47), яка описує внутрішній НДС і потенціальний КЕ. Операторним методом зобразимо w_j через нові шукані функції $\Phi_k(x, y)$:

$$w_j(x, y) = \sum_{k=1,3}^N \Pi_{kj}^0 \Phi_k(x, y), \quad (j = 1, 3, \dots, N; N \geq 3), \quad (3.54)$$

де Π_{kj}^0 є ад’юнктами визначника Π_0 системи (3.47).

На основі (3.47), (3.48), (3.54) отримується зручна СДР відносно функцій $\Phi_k(x, y)$ (називатимемо її визначальною), яка після розкладання на множники лівих частин матиме вигляд:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \dots D_{(N-1)} \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} q(x, y); \quad k = 1, 3, \dots, N; N \geq 3, \quad (3.55)$$

де

$$D_0 = \nabla^2; D_i = \nabla^2 - s_i; D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

s_i, s_{k0}, a_{k0} – МГП; s_i – корені відповідного характеристичного рівняння (для трансверсально-ізотропних пластин з малою жорсткістю поперечного зсуву $s_i > 0$).

СДР (3.55) зручніша, ніж (3.47), оскільки ліві частини цієї системи однакові. Форми загальних розв’язків СДР (3.55) отримуються в такому вигляді:

$$\Phi_k(x, y) = \Phi_{k0}(x, y) + \Phi_{kr}(x, y), \quad (k = 1, 3, \dots, N), \quad (3.56)$$

де $\Phi_{k0}(x, y)$ – загальні розв’язки відповідних однорідних ДР СДР (3.55), $\Phi_{kr}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних ДР (3.55). Оскільки однорідні ДР системи (3.55) однакові, можна покласти $\Phi_{k0}(x, y) \equiv 0$, ($k = 3, 5, \dots, N$), не збільшуючи порядок цієї СДР. Тоді загальні розв’язки (3.55) на основі (3.56) приймуть вигляд:

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1\Pi}(x, y) + \Phi_{1r}(x, y); \quad \Phi_k(x, y) = \Phi_{kr}(x, y), \quad (k = 3, 5, \dots, N). \quad (3.57)$$

У формулах (3.57): Φ_{1B} – загальний розв’язок (2.19) бігармонічного рівняння $\nabla^4 \Phi_1 = 0$; $\Phi_{1\Pi}$ – загальний розв’язок однорідного ДР порядку $2(N-1)$

$$D_1 D_2 \dots D_{(N-1)} \Phi_{1\Pi}(x, y) = 0; \quad (3.58)$$

$\Phi_{kr}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних ДР (3.55).

Загальний розв’язок $\Phi_{1\Pi}$ ДР (3.58) зобразиться у вигляді:

$$\Phi_{1\Pi} = \sum_{j=1,2}^{N-1} \Phi_{1\Pi j}(x, y), \quad (3.59)$$

де $\Phi_{1\Pi j}$ – загальні розв’язки ДР $(\nabla^2 - s_j)\Phi_{1\Pi j} = 0$, $(j = 1, 2, \dots, N-1)$ (п. 2.2.3).

Потенціальний КЕ описується однорідним ДР (3.58). Внутрішній НДС визначається сумою загального розв’язку Φ_{1B} бігармонічного рівняння і частинних розв’язків Φ_{kr} ($k = 1, 3, \dots, N$) неоднорідних ДР (3.55) порядку $2(N+1)$. Отже, ДР внутрішнього НДС і потенціального КЕ розділені.

Загальні розв’язки СДР (3.47) на основі (3.54), (3.57), (3.59):

$$w_j(x, y) = \Pi_{1j}^0(\Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1\Pi}(x, y)) + \sum_{k=1,3}^N \Pi_{kj}^0 \Phi_{kr}(x, y), \quad (j = 1, 3, \dots, N). \quad (3.60)$$

Складові u_k, v_k , ($k = 1, 3, \dots, N$) визначаються з групи ДР (3.41):

$$u_k(x, y) = \sum_{i=1,3}^N (\lambda_{k\varphi} \varphi_{i,x} + \lambda_{k\psi} \psi_{i,y} + \lambda_{kw} w_{i,x}) + \lambda_{kq} q_{,x}, \quad (3.61)$$

$$(u_k, \varphi_{,x}, \psi_{,y}, w_{,x}, q_{,x} \rightarrow v_k, \varphi_{,y}, -\psi_{,x}, w_{,y}, q_{,y}),$$

де

$$\varphi_i(x, y) = \lambda_{i1} \nabla^2 w_1 + \sum_{k=3,5}^N (\lambda_{ik} \nabla^2 + \lambda'_{ik}) w_k + \lambda_{iq} q, \quad (i = 1, 3, \dots, N), \quad (3.62)$$

λ з індексами – МГП.

Напруження визначаються на основі (3.30), (3.31) (3.53), (3.60)–(3.62).

3.3.5. Симетричне деформування. Перетворення СДР рівноваги.

3.3.5.1. Розв'язувальні рівняння. Перетворимо систему ДР рівноваги (3.34) симетричного деформування в N К02...(N-1)). Невідомі функції $u_0, v_0, u_2, v_2, w_2, \dots, u_{N-1}, v_{N-1}, w_{N-1}$.

Аналізуючи якісну структуру операторів СДР (3.34) та, приймаючи до уваги (3.21) і (3.32), система ДР рівноваги (3.34) перетвориться до такої:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,2}^{N-1} \gamma_{u0\varphi i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=2,4}^{N-1} \gamma_{u0w i} w_{i,x} + \gamma_{u0\psi 0} \psi_{0,y} &= \gamma_{u0} P_{,x}, \quad (\delta u_0); \\ \sum_{i=0,2}^{N-1} \gamma_{u0\varphi i} \varphi_{i,y} + \sum_{i=2,4}^{N-1} \gamma_{u0w i} w_{i,y} - \gamma_{u0\psi 0} \psi_{0,x} &= \gamma_{u0} P_{,y}, \quad (\delta v_0); \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,2}^{N-1} \gamma_{uk\varphi i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=2,4}^{N-1} (\gamma_{ukw i} w_{i,x} + \gamma_{uku i} u_i) + \gamma_{uk\psi 0} \psi_{k,y} &= \gamma_{uk} P_{,x}, \quad (\delta u_k); \\ \sum_{i=0,2}^{N-1} \gamma_{uk\varphi i} \varphi_{i,y} + \sum_{i=2,4}^{N-1} (\gamma_{ukw i} w_{i,y} + \gamma_{uku i} v_i) - \gamma_{uk\psi 0} \psi_{0,x} &= \gamma_{uk} P_{,y}, \quad (\delta v_k), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$(k = 2, 4, \dots, N-1);$

$$\sum_{i=0,2}^{N-1} \gamma_{wj\varphi i} \varphi_i + \sum_{i=2,4}^{N-1} (\gamma_{wjw i} \nabla^2 + \gamma_{wjw i0}) w_i = \gamma_{wj} P, \quad (\delta w_j), \quad (j = 2, 4, \dots, N-1). \quad (3.65)$$

Кількість рівнянь (3.64) дорівнює $(N-1)$, а рівнянь (3.65) $(N-1)/2$, Кількість рівнянь системи (3.63)–(3.65) дорівнює $(3N+1)/2$. Така ж кількість і невідомих функцій $u_0, v_0, u_2, v_2, w_2, \dots, u_{N-1}, v_{N-1}, w_{N-1}$.

ДР, які описують вихровий КЕ:

$$\sum_{j=2,4}^{N-1} S_{ij} \psi_j = 0; \quad (i = 2, 4, \dots, N-1), \quad (3.66)$$

де S_{ij} ($j = 2, 4, \dots, N-1$), ($i = j$) – диференціальні оператори другого порядку; S_{ij} ($i \neq j$) – диференціальні оператори нульового порядку:

$$S_{ii} = (\gamma_{i2\psi} \nabla^2 + \gamma_{i0\psi}) \psi_i \quad (i = 2, 4, \dots, N-1); \quad S_{ij} = \gamma_{ij0\psi} \psi_j, \quad (i \neq j). \quad (3.67)$$

В (3.67) γ з індексами–МГП, причому $\gamma_{ij0\psi} = \gamma_{ji0\psi}$, тобто, диференціальна матриця симетрична: $S_{ij} = S_{ji}$ ($i = 2, 4, \dots, N-1; j = 2, 4, \dots, N-1, (i \neq j)$). Як бачимо диференціальні матриці рівнянь вихрового КЕ (3.67) при симетричному деформуванні структурно такі ж, як і при кососиметричному (3.45).

Виділимо тепер СДР, яка не містить вихрових функцій і описує внутрішній НДС і потенціальний КЕ. Знову перетворимо групу рівнянь (3.64).

Диференціюємо перше рівняння по x , друге по y і складаємо їх. Аналогічно поступаємо з третім і четвертим і т. д. Отримується така група рівнянь:

$$\gamma_{i\varphi 0} \nabla^2 \varphi_0 + \sum_{j=2,4}^{N-1} ((\gamma_{i\varphi j 2} \nabla^2 + \gamma_{i\varphi j 0}) \varphi_j + \gamma_{i w j 2} \nabla^2 w_j) = \gamma_{ui} \nabla^2, (i = 2, 4, \dots, N-1). \quad (3.68)$$

Рівняння (3.68) разом з рівняннями (3.63) і (3.65) представляють СДР, яка описує ВНДС та ПКЕ при симетричному деформуванні. Перетворимо її. Для цього із ДР (3.65) виразимо $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{N-1}$ через $\varphi_0, w_2, w_4, \dots, w_{N-1}$. Дістанемо:

$$\varphi_i(x, y) = a_{i\varphi p} p(x, y) + a_{i\varphi 0} \varphi_0 + \sum_{j=2,4}^{N-1} (a_{i w j 2} \nabla^2 + a_{i w j 0}) w_j, (i = 2, 4, \dots, N-1). \quad (3.69)$$

Підставляючи (3.69) у (3.63) і (3.68), отримається розв'язувальна СДР внутрішнього НДС і потенціального КЕ (порядку $2N+2$) відносно $u_0, v_0, w_2, w_4, \dots, w_{N-1}$:

$$T_{i1} u_0 + T_{i2} v_0 + \sum_{n=1,2}^{(N+3)/2} T_{i(n+2)} w_{2n} = T_{ip} p(x, y), (i = 1, 2, \dots, (N+3)/2), \quad (3.70)$$

де T_{ij} –диференціальні оператори (для наближень К02 і К024 ці оператори надалі виписані в явному вигляді).

3.3.5.2. ДР вихрового КЕ. Загальні розв'язки. Зведемо розв'язувальні ДР (3.66) до зручного визначального рівняння. Введемо операторним методом нову шукану функцію $\psi(x, y)$, через яку виразимо шукані функції $\psi_j(x, y)$:

$$\psi_j(x, y) = S_{1j}^0 \psi(x, y), \quad (j = 2, 4, \dots, N-1; N \geq 3), \quad (3.71)$$

де S_{1j}^0 —ад'юнкти диференціального визначника S_0 СДР (3.66). Тоді СДР (3.66) на основі (3.71) зведеться до знаходження $\psi(x, y)$ з однорідного ДР порядку $(N-1)$:

$$S_0 \psi(x, y) \equiv (\nabla^2 - l_1)(\nabla^2 - l_2) \cdot \dots \cdot (\nabla^2 - l_{(N-1)/2}) \psi(x, y) = 0. \quad (3.72)$$

де l з індексами—МГП.

Загальний розв'язок ДР (3.72) зображується у вигляді:

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \psi^{(i)}(x, y), \quad (3.73)$$

де $\psi^{(i)}(x, y)$ —загальні розв'язки диференціальних рівнянь Гельмгольца:

$$(\nabla^2 - l_i) \psi^{(i)}(x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, (N-1)/2; N \geq 3). \quad (3.74)$$

Вихрові функції $\psi_j(x, y)$ визначаються на основі (3.71), (3.73), (3.74):

$$\psi_j(x, y) = S_{1j}^0 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \psi^{(i)}(x, y). \quad (3.75)$$

Формули (3.75) для $\psi_j(x, y)$ виражають на основі п. 2.2.3 загальні розв'язки для вихрового КЕ при симетричному деформуванні в НК02 (N-1).

3.3.5.3. Визначальні ДР внутрішнього НДС і ПКЕ. Загальні розв'язки.

Отримаємо визначальні ДР і загальні розв'язки СДР (3.70). Введемо нові шукані функції $F_j(x, y)$ ($j = 1, 2, \dots, ((N+3)/2)$) таким чином:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{j=1,2}^{(N+3)/2} T_{j1}^0 F_j(x, y); \quad v_0(x, y) = \sum_{j=1,2}^{(N+3)/2} T_{j2}^0 F_j(x, y); \\ w_{2n}(x, y) &= \sum_{j=1,2}^{(N+3)/2} T_{j(n+2)}^0 F_j(x, y), \quad (n = 1, 2, \dots, (N-1)/2), \end{aligned} \quad (3.76)$$

де T_{jm}^0 – ад’юнкти системи (3.70). Тоді функції $F_j(x, y)$ з урахуванням (3.70) і (3.76) знаходяться з визначальної СДР порядку $(2N+2)$:

$$T_0 F_j = T_{iP} p(x, y), \quad (3.77)$$

де T_0 – диференціальний визначник системи (3.70), який має вигляд:

$$T_0 = \nabla^4 \sum_{n=0,1}^{N-1} N_{2n\Pi} \nabla^{2n} \equiv \nabla^4 N_{2(N-1)\Pi} (\nabla^2 - m_1)(\nabla^2 - m_2) \cdot \dots \cdot (\nabla^2 - m_{N-1}),$$

m_i – корені відповідного характеристичного рівняння, залежать від МГП.

Аналогічно п. 3.3.4.3 загальні розв’язки ДР (3.77) зобразяться таким чином:

$$F_1(x, y) = F_{1B}(x, y) + F_{1\Pi}(x, y) + F_{1r}(x, y); \quad F_j(x, y) = F_{jr}(x, y), \quad j = 1, \dots, (N+1)/2. \quad (3.78)$$

В (3.78) F_{1B} – загальний розв’язок бігармонічного рівняння $\nabla^4 F_{1B} = 0$; $F_{jr}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних ДР (3.77); $F_{1\Pi}$ – загальний розв’язок ДР потенціального КЕ $(\nabla^2 - m_1)(\nabla^2 - m_2) \cdot \dots \cdot (\nabla^2 - m_{N-1}) F_{1\Pi}(x, y) = 0$ порядку $(2N-2)$:

$$F_{1\Pi} = \sum_{i=1,2}^{N-1} F_{1\Pi i}. \quad (3.79)$$

В (3.79) $F_{1\Pi i}$ – загальні розв’язки ДР Гельмгольца:

$$(\nabla^2 - m_i) F_{1\Pi i}(x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (3.80)$$

Отже, при симетричному деформуванні пластини рівняння ВНДС та ПКЕ також розділяються. На основі (3.76), (3.78)–(3.80) дістанемо $u_0, v_0, w_2, w_4, \dots, w_{N-1}$:

$$u_0(x, y) = T_{11}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=2}^{(N+3)/2} T_{j1}^0 F_{jr}; \quad v_0(x, y) = T_{12}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=2}^{(N+3)/2} T_{j2}^0 F_{jr}; \quad (3.81)$$

$$w_{2n}(x, y) = T_{1(n+2)}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=2}^{(N+3)/2} T_{j(n+2)}^0 F_{jr}, \quad (n = 1, 2, \dots, (N-1)/2).$$

Складові $u_2, v_2, u_4, v_4, \dots, u_{N-1}, v_{N-1}$ визначаються із групи ДР (3.64):

$$\begin{aligned}
u_k(x, y) &= \sum_{i=0,2}^{N-1} \lambda_{k\varphi i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=2,4}^{N-1} (\lambda_{k\psi i} \psi_{i,y} + \lambda_{kwi} w_{i,x}) + \lambda_{kp} p_{,x}; \\
v_k(x, y) &= \sum_{i=0,2}^{N-1} \lambda_{k\varphi i} \varphi_{i,y} + \sum_{i=2,4}^{N-1} (-\lambda_{k\psi i} \psi_{i,x} + \lambda_{kwi} w_{i,y}) + \lambda_{kp} p_{,y}, \quad (k = 2, 4, \dots, N-1),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

де $\lambda_{k\varphi i}, \lambda_{k\psi i}, \lambda_{kwi}, \lambda_{kp}$ – МГП пластини.

Знаючи усі складові переміщень (3.81), (3.82), з урахуванням (3.69), (3.75) за відповідними формулами (3.29)–(3.31) знаходяться всі компоненти НДС.

3.4. Частинні випадки наближень. Наближення К01, К0-3

У п. 3.3 в наближенні К0-N отримані основні залежності, ряди для переміщень, напружень, виведені ДР рівноваги, крайові умови, розв'язувальні та визначальні ДР і загальні розв'язки. Наведемо нижче основні рівняння в наближеннях К01, К0-3, не зупиняючись детально на методиці їх отримання, яка описана в п. 3.3. Зауважимо, що позначення деяких сталих і операторів для цих наближень не співпадають з позначеннями в загальному випадку для НК0-N.

3.4.1. Наближення К01. Ураховуються тільки складові u_0, v_0, u_1, v_1, w_1 .

Переміщення

$$U(x, y, z) = P_0 u_0 + P_1 u_1, \quad (U \rightarrow V; u_k \rightarrow v_k); \quad W(x, y, z) = P_0 w_1; \tag{3.83}$$

деформації

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x, y, z) &= P_0 u_{0,x} + P_1 u_{1,x}, \quad (\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_y; \partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial y; u \rightarrow v); \\
\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{yx}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^1 P_k (u_{k,y} + v_{k,x}); \quad \gamma_{xz}(x, y, z) = P_0 w_{1,x} + P_1 u_1, \\
(\gamma_{xz} \rightarrow \gamma_{yz}; \partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial y; u_1 \rightarrow v_1);
\end{aligned}$$

напруження

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}(x, y, z) &= P_0 t_{x0} + P_2 t_{x2}, \quad (\sigma_{xz} \rightarrow \sigma_{yz}; t_{xn} \rightarrow t_{yn}; n = 0, 2); \\
\sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=0}^3 P_n s_{zn}; \quad \sigma_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^3 P_n s_{xn},
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$(\sigma_x \rightarrow \sigma_y; s_{xn} \rightarrow s_{yn}); \quad \sigma_{yx}(x, y, z) = P_0 t_{yx0} + P_1 t_{yx1},$$

де

$$\begin{aligned}
t_{x0}(x, y) &= Q_{1x}(x, y)/h; t_{x2}(x, y) = -Q_{1x}(x, y)/h; (t_{xn} \rightarrow t_{yn}; Q_{1x} \rightarrow Q_{1y}); \\
s_{z0}(x, y) &= -p(x, y)/2; s_{z1}(x, y) = -3q(x, y)/5; s_{z2} = 0; s_{z3}(x, y) = q(x, y)/10; \\
s_{x0}(x, y) &= d_0(u_{0,x} + v v_{0,y}) + d_{10}s_{z0}; s_{x1}(x, y) = d_0(u_{1,x} + v v_{1,y}) + d_{10}s_{z1}; s_{x2} = 0; \quad (3.85) \\
s_{x3}(x, y) &= d_{10}s_{z3}, (s_{xn} \rightarrow s_{yn}; \partial/\partial x, \partial/\partial y; u_k, v_k); t_{yjk}(x, y) = G(u_{k,y} + v_{k,x}), (k = 0, 1). \\
Q_{1x}(x, y) &= h_{11}w_{1,x} + l_{11}u_1; Q_{1y}(x, y) = h_{11}w_{1,y} + l_{11}v_1; h_{11} = 5G'h/6; l_{11} = 5G'/3.
\end{aligned}$$

СДР рівноваги при кососиметричному деформуванні (СДР 6-го порядку):

$$L_{i,1}u_1 + L_{i,2}v_1 + L_{i,3}w_1 = L_{iq}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3.86)$$

при симетричному деформуванні (СДР 4-го порядку):

$$M_{i,1}u_0 + M_{i,2}v_0 = M_{ip}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.87)$$

У рівняннях (3.86), (3.87):

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; M_{1,2} = \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; M_{1p} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
M_{2,1} &= M_{1,2}; M_{2,2} = \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; M_{2p} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
L_{1,1} &= \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113}; L_{1,2} = \beta_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; L_{1,3} = \beta_{131} \frac{\partial}{\partial x}; \quad (3.88) \\
L_{1q} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}; L_{2,2} = \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113}; L_{2,3} = \beta_{131} \frac{\partial}{\partial y}; L_{2q} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; \\
L_{3,3} &= \beta_{331} \nabla^2, L_{3q} = -q; L_{i,j} = L_{j,i},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\gamma_{111} &= hd_0; \gamma_{112} = hG; \gamma_{121} = h(d_0v + G); \gamma_{u0} = hd_{10}/2; \beta_{111} = hd_0/3; \beta_{112} = hG/3; \\
\beta_{113} &= -2l_{11}/h; \beta_{121} = h(G + d_0v)/3; \beta_{131} = -2h_{11}/3; \beta_{u1} = hd_{10}/5; \beta_{331} = -h_{11}. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Перетворена СДР (3.86) з урахуванням (3.88), (3.89) при кососиметричному деформуванні має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\beta_{113}u_1 + \beta_{111}\varphi_{1,x} + \beta_{112}\psi_{1,y} + \beta_{131}w_{1,x} &= \beta_{u1}q_{,x}; \\
\beta_{113}v_1 + \beta_{111}\varphi_{1,y} - \beta_{112}\psi_{1,x} + \beta_{131}w_{1,y} &= \beta_{u1}q_{,y}; \\
\beta_{131}\varphi_1 + \beta_{331}\nabla^2 w_1 &= -q.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

ДР, яке описує вихровий КЕ:

$$\nabla^2 \psi_1 - \frac{10G'}{h^2 G} \psi_1 = 0. \tag{3.91}$$

ДР (3.91) з точністю до позначень для ізотропної пластини співпадає з рівнянням КЕ Рейснера (друге рівняння (1.1)).

Із перших двох рівнянь (3.90) отримаємо:

$$\beta_{113}\varphi_1 + \beta_{111}\nabla^2 \varphi_1 + \beta_{131}\nabla^2 w_1 = \beta_{u1}\nabla^2 q. \tag{3.92}$$

Третє ДР (3.90) і ДР (3.92) описують ВНДС (без ПКЕ). Указані ДР зводяться до одного ДР:

$$D\nabla^4 w_1 = \frac{\beta_{u1} - \beta_{111}\lambda_{14}}{\beta_{113}\lambda_{14}} \nabla^2 q - q, \quad (\lambda_{14} = \frac{3}{5G'}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}). \tag{3.93}$$

Для ізотропної пластини ДР (3.93) прийме вигляд: $D\nabla^4 w_1 = \frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)} \nabla^2 q - q$, що з точністю до позначень співпадає з першим ДР Рейснера (1.1).

Перетворимо СДР (3.87) операторним методом. Введемо нові функції $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ таким чином:

$$u_0 = M_{22}T_1 - M_{12}T_2; \quad v_0 = -M_{21}T_1 + M_{11}T_2. \tag{3.94}$$

На основі (3.87), (3.94) дістанемо ДР 4-го порядку відносно $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$:

$$\nabla^4 T_1 = M_{1p} / (h^2 d_0 G); \quad \nabla^4 T_2 = M_{2p} / (h^2 d_0 G). \tag{3.95}$$

Тоді складові компонент переміщень визначатимуться так:

$$u_0 = M_{22}(T_{10} + T_{1r}) - M_{12}T_{2r}; \quad v_0 = -M_{21}(T_{10} + T_{1r}) + M_{11}T_{2r},$$

де T_{10} – загальний розв’язок бігармонічного ДР, а T_{1r} , T_{2r} – частинні розв’язки неоднорідних ДР (3.95).

Таким чином, при симетричному деформуванні вихрової КЕ не виникає, а ВНДС (без ПКЕ) описується сумою розв’язків бігармонічного рівняння і частинними розв’язками двох неоднорідних ДР 4-го порядку (3.95).

3.4.2. Наближення К0-3. Виходячи з п. 3.3, ураховуючи складові $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3$, ($N = 3$), дістанемо переміщення:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0,1}^3 P_k \left(\frac{2z}{h} \right) u_k(x, y), (U, u \rightarrow V, v); W(x, y, z) = \sum_{k=1,2}^3 P_{k-1} \left(\frac{2z}{h} \right) w_k(x, y); \quad (3.96)$$

напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{n=0,1}^4 P_n(2z/h) t_{xn}(x, y); \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=0,1}^4 P_n(2z/h) t_{yn}(x, y). \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=0,1}^5 P_n(2z/h) s_{zn}(x, y); \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{n=0,1}^5 P_n(2z/h) s_{xn}(x, y), (x, y); \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=0,1}^3 P_n(2z/h) t_{yxn}(x, y),$$

де

$$\begin{aligned} t_{x0}(x, y) &= \frac{1}{h} Q_{1x}(x, y); t_{x1}(x, y) = \frac{3}{5h} Q_{2x}(x, y); t_{x2}(x, y) = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{7} Q_{3x}(x, y) - Q_{1x}(x, y) \right); \\ t_{x3}(x, y) &= -\frac{3}{5h} Q_{2x}(x, y); t_{x4}(x, y) = -\frac{3}{7h} Q_{3x}(x, y), (x, y); \\ s_{z0}(x, y) &= -0,5p(x, y) - \frac{1}{10} \omega_2(x, y); s_{z1}(x, y) = -\frac{3}{5} q(x, y) - \frac{3}{70} \omega_3(x, y); \\ s_{z2}(x, y) &= \frac{1}{7} \omega_2(x, y); s_{z3}(x, y) = \frac{1}{10} q(x, y) + \frac{1}{15} \omega_3(x, y); s_{z4}(x, y) = -\frac{3}{70} \omega_2(x, y); \\ s_{z5}(x, y) &= -\frac{1}{42} \omega_3(x, y); s_{xn}(x, y) = d_0(u_{n,x} + v v_{n,y}) + d_{10} s_{zn}, (n = 0, 1, 2, 3); \\ s_{xn}(x, y) &= d_{10} s_{zn}, (n = 4, 5); (x, y; u_k, v_k); t_{yxn}(x, y) = G(u_{ny} + v_{nx}), (n = 0, 1, 2, 3); \\ Q_{kx}(x, y) &= h_{k1} w_{1,x} + h_{k3} w_{3,x} + l_{k1} u_1 + l_{k3} u_3 (k = 1, 3); \\ Q_{2x}(x, y) &= h_{22} w_{2,x} + l_{22} u_2, (x \rightarrow y; u \rightarrow v); \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y) &= q(x, y); \omega_2(x, y) = q_{22}w_2 + e_{20}\varphi_0 + e_{22}\varphi_2 + e_{2p}p; \\ \omega_3(x, y) &= q_{33}w_3 + e_{31}\varphi_1 + e_{33}\varphi_3 + e_{3q}q; \\ h_{11} &= 14G'h/15; h_{13} = -G'h/15; l_{11} = 28G'/15; l_{13} = 6G'/5; \\ h_{22} &= 7G'h/6; l_{22} = 7G'; h_{31} = h_{33} = 7G'h/5; l_{31} = 14G'/5; l_{33} = 84G'/5; \\ q_{22} &= -14/(hd_{20}); e_{20} = -7d_{30}; e_{22} = 2d_{30}; e_{2p} = -7/2; q_{33} = -66/(hd_{20}); \\ e_{31} &= -11d_{30}; e_{33} = 22d_{30}/3; e_{3q} = -22/3; d_{20} = (1 - 2d_{10}\nu')/E'; d_{30} = d_{10}/d_{20}.\end{aligned}$$

3.4.2.1. Кососиметричне деформування. Наближення К13. В цьому наближенні (N=3), виходячи з (3.96)–(3.98), маємо: переміщення

$$U(x, y, z) = \sum_{k=1,3}^3 P_k\left(\frac{2z}{h}\right)u_k(x, y), (U, u \rightarrow V, v); W(x, y, z) = \sum_{k=1,3}^3 P_{k-1}\left(\frac{2z}{h}\right)w_k(x, y); \quad (3.99)$$

напруження

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{n=0,2}^4 P_n(2z/h)t_{xn}(x, y); \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=0,2}^4 P_n(2z/h)t_{yn}(x, y); \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=1,3}^5 P_n(2z/h)s_{zn}(x, y); \\ \sigma_x(x, y, z) &= \sum_{n=1,3}^5 P_n(2z/h)s_{xn}(x, y), (x, y); \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=1,3}^3 P_n(2z/h)t_{yxn}(x, y).\end{aligned} \quad (3.100)$$

СДР рівноваги має 12-й порядок (з точністю до позначень співпадає з СДР [114, 310, 314]):

$$L_{i,1}u_1 + L_{i,2}v_1 + L_{i,3}u_3 + L_{i,4}v_3 + L_{i,5}w_1 + L_{i,6}w_3 = L_{iq}, (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (3.101)$$

де

$$\begin{aligned}L_{1,1} &= \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113}; L_{1,2} = \beta_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; L_{1,3} = \beta_{131} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{133}; \\ L_{1,4} &= \beta_{141} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; L_{1,5} = \beta_{151} \frac{\partial}{\partial x}; L_{1,6} = \beta_{161} \frac{\partial}{\partial x}; L_{1q} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}; \\ L_{2,2} &= \beta_{221} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{222} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{223}; L_{2,3} = \beta_{231} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; L_{2,4} = \beta_{242} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{243};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{2,5} &= \beta_{251} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{2,6} = \beta_{261} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{2q} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; \quad L_{3,3} = \beta_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{333}; \quad (3.102) \\
L_{3,4} &= \beta_{341} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{3,5} = \beta_{351} \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{3,6} = \beta_{361} \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{3q} = \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial x}; \\
L_{4,4} &= \beta_{441} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{442} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{443}; \quad L_{4,5} = \beta_{451} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{4,6} = \beta_{461} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{4q} = \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial y}; \\
L_{5,5} &= \beta_{551} \nabla^2; \quad L_{5,6} = \beta_{561} \nabla^2; \quad L_{5q} = -q; \quad L_{6,6} = \beta_{661} \nabla^2 + \beta_{662}; \quad L_{6q} = -\frac{3}{7} q.
\end{aligned}$$

Аналітично показано, що диференціальна матриця лівої частини СДР (3.101) – симетрична, $L_{ij} = L_{ji}$. У (3.102) сталі–МГП, визначаються згідно з (А.1).

Після перетворень СДР (3.101) дістанемо:

$$\begin{aligned}
\beta_{113}u_1 + \beta_{133}u_3 + \beta_{111}\varphi_{1,x} + \beta_{131}\varphi_{3,x} + \beta_{112}\psi_{1,y} + \beta_{151}w_{1,x} + \beta_{161}w_{3,x} &= \beta_{u1}q_{,x}; \\
\beta_{113}v_1 + \beta_{133}v_3 + \beta_{111}\varphi_{1,y} + \beta_{131}\varphi_{3,y} - \beta_{112}\psi_{1,x} + \beta_{151}w_{1,y} + \beta_{161}w_{3,y} &= \beta_{u1}q_{,y}; \\
\beta_{133}u_1 + \beta_{333}u_3 + \beta_{131}\varphi_{1,x} + \beta_{331}\varphi_{3,x} + \beta_{332}\psi_{3,y} + \beta_{351}w_{1,x} + \beta_{361}w_{3,x} &= \beta_{u3}q_{,x}; \\
\beta_{133}v_1 + \beta_{333}v_3 + \beta_{131}\varphi_{1,y} + \beta_{331}\varphi_{3,y} - \beta_{332}\psi_{3,x} + \beta_{351}w_{1,y} + \beta_{361}w_{3,y} &= \beta_{u3}q_{,y}; \\
\beta_{151}\varphi_1 + \beta_{351}\varphi_3 + \beta_{551}\nabla^2 w_1 + \beta_{561}\nabla^2 w_3 &= \beta_{w1}q; \\
\beta_{161}\varphi_1 + \beta_{361}\varphi_3 + \beta_{561}\nabla^2 w_1 + \beta_{662}w_3 + \beta_{661}\nabla^2 w_3 &= \beta_{w3}q.
\end{aligned}$$

Розв'язувальна СДР 4-го порядку, яка описує ВКЕ:

$$\begin{aligned}
\beta_{113}\psi_1 + \beta_{112}\nabla^2\psi_1 + \beta_{133}\psi_3 &= 0, \\
\beta_{133}\psi_1 + \beta_{333}\psi_3 + \beta_{332}\nabla^2\psi_3 &= 0,
\end{aligned} \quad (3.103)$$

де вихрові функції $\psi_1(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ мають такий вигляд:

$$\psi_1 = (\beta_{333} + \beta_{332}\nabla^2)\psi; \quad \psi_3 = -\beta_{133}\psi. \quad (3.104)$$

В (3.104) функція $\psi(x, y)$ задовольняє визначальному ДР:

$$H_0\psi(x, y) = 0. \quad (3.105)$$

У (3.105) H_0 – диференціальний визначник системи (3.103):

$$H_0 = K_{4B} \nabla^4 + K_{2B} \nabla^2 + K_{0B} = K_{4B} (\nabla^2 - r_1)(\nabla^2 - r_2), \quad (3.106)$$

де $K_{4B} = \beta_{112} \beta_{332}$; $K_{2B} = \beta_{113} \beta_{332} + \beta_{112} \beta_{333}$; $K_{0B} = \beta_{113} \beta_{333} - \beta_{133}^2$.

З урахуванням (3.106) загальний розв'язок $\psi(x, y)$ ДР (3.105) має вигляд:

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1,2}^2 \psi^{(j)}(x, y), \quad (3.107)$$

де $\psi^{(j)}(x, y)$ – загальні розв'язки ДР Гельмгольца $(\nabla^2 - r_j) \psi^{(j)}(x, y) = 0$, ($j = 1, 2$).

Функції $\varphi_i(x, y)$, ($i = 1, 3$) виражаються через складові $w_i(x, y)$ таким чином:

$$\varphi_k = \lambda_{k1} \nabla^2 w_1 + \lambda_{k2} w_3 + \lambda_{k3} \nabla^2 w_3 + \lambda_{k4} q \quad (k = 1, 3), \quad (3.108)$$

де λ з індексами – МГП (формули А.2 дод. А).

Розв'язувальна СДР (8-го порядку) внутрішнього НДС з потенціальним КЕ:

$$\begin{aligned} P_{11} w_1 + P_{13} w_3 &= P_{1q} q; \\ P_{31} w_1 + P_{33} w_3 &= P_{3q} q; \end{aligned} \quad (3.109)$$

де $P_{11}, \dots, P_{33}, P_{1q}, P_{3q}$ – диференціальні оператори:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \mu_{114} \nabla^4; \quad P_{13} = \mu_{134} \nabla^4 + \mu_{132} \nabla^2; \quad P_{1q} = \mu_{12} \nabla^2 - \mu_{10}; \\ P_{31} &= \mu_{314} \nabla^4 + \mu_{312} \nabla^2; \quad P_{33} = \mu_{334} \nabla^4 + \mu_{332} \nabla^2 + \mu_{330}; \quad P_{3q} = \mu_{32} \nabla^2 - \mu_{30}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

В (3.110) μ з індексами – МГП, які визначаються згідно з додатку (А.3).

Загальний розв'язок СДР (3.109) 8-го порядку внутрішнього НДС з ПКЕ:

$$w_1(x, y) = P_{11}^0 \Phi_1(x, y) + P_{31}^0 \Phi_3(x, y); \quad w_3(x, y) = P_{13}^0 \Phi_1(x, y) + P_{33}^0 \Phi_3(x, y), \quad (3.111)$$

де $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_3(x, y)$ – нові шукані функції, $P_{11}^0, \dots, P_{33}^0$ – ад'юнкти диференціального визначника системи (3.109): $P_{11}^0 = P_{33}$; $P_{31}^0 = -P_{13}$; $P_{13}^0 = -P_{31}$; $P_{33}^0 = P_{11}$.

Визначальна СДР внутрішнього НДС з потенціальним КЕ:

$$\Pi_0 \Phi_k(x, y) = \Pi_{kq} q, \quad (k=1, 3), \quad (3.112)$$

де Π_0 – диференціальний визначник СДР (3.109) на основі (3.110) має вигляд:

$$\Pi_0 = K_{4\Pi} \nabla^8 + K_{2\Pi} \nabla^6 + K_{0\Pi} \nabla^4 = K_{4\Pi} \nabla^4 (\nabla^2 - s_1) \nabla^2 - s_2. \quad (3.113)$$

В (3.113):

$$K_{4\Pi} = \mu_{114} \mu_{334} - \mu_{134} \mu_{314}; \quad K_{2\Pi} = \mu_{114} \mu_{332} - \mu_{134} \mu_{312} - \mu_{132} \mu_{314}; \\ K_{0\Pi} = \mu_{114} \mu_{330} - \mu_{132} \mu_{312}.$$

Загальні розв'язки визначальних неоднорідних ДР (3.112):

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{10} + \Phi_{1r} = (\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi}) + \Phi_{1r}; \quad \Phi_3(x, y) = \Phi_{30} + \Phi_{3r} = \Phi_{3r}. \quad (3.114)$$

Тут $\Phi_{30} \equiv 0$, Φ_{1B} – загальний розв'язок бігармонічного ДР; $\Phi_{kr}(x, y)$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР (3.112), які виражаються через неоднорідні ДР 2-го порядку; $\Phi_{1\Pi}$ – загальний розв'язок ДР 4-го порядку:

$$(\nabla^2 - s_1) \nabla^2 - s_2 \Phi_{1\Pi}(x, y) = 0, \quad (3.115)$$

де $\Phi_{1\Pi}(x, y) = \sum_{j=1,2}^2 \Phi_{1\Pi j}(x, y)$; $\Phi_{1\Pi j}$ – загальні розв'язки ДР Гельмгольца:

$$(\nabla^2 - s_j) \Phi_{1\Pi j}(x, y) = 0 \quad (\text{п. 2.2.3}).$$

Тоді на основі (3.111) і (3.114) дістанемо:

$$w_1(x, y) = \Pi_{33} (\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}) - \Pi_{13} \Phi_{3r}; \\ w_3(x, y) = -\Pi_{31} (\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}) + \Pi_{11} \Phi_{3r}. \quad (3.116)$$

Визначальна СДР (3.112) при кососиметричному деформуванні пластини розділена на рівняння ВНДС та ПКЕ. Рівняння (3.115) відносно функції $\Phi_{1\Pi}(x, y)$ описує ПКЕ, а загальні розв'язки бігармонічного рівняння $\Phi_{1B}(x, y)$ разом з частинними розв'язками $\Phi_{kr}(x, y)$ неоднорідних ДР (3.112) описують ВНДС. Загальні розв'язки розв'язувальної СДР (3.109) зображені у вигляді (3.116).

Складові u_k, v_k через функції $\varphi_k(x, y), \psi_k(x, y), w_k(x, y)$ ($k = 1, 3$):

$$\begin{aligned} u_k(x, y) &= \lambda_{k\varphi 1}\varphi_{1,x} + \lambda_{k\varphi 3}\varphi_{3,x} + \lambda_{k\psi 1}\psi_{1,y} + \lambda_{k\psi 3}\psi_{3,y} + \lambda_{kw 1}w_{1,x} + \lambda_{kw 3}w_{3,x} + \lambda_{kq}q_{,x}; \\ v_k(x, y) &= \lambda_{k\varphi 1}\varphi_{1,y} + \lambda_{k\varphi 3}\varphi_{3,y} - \lambda_{k\psi 1}\psi_{1,x} - \lambda_{k\psi 3}\psi_{3,x} + \lambda_{kw 1}w_{1,y} + \lambda_{kw 3}w_{3,y} + \lambda_{kq}q_{,y}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

де сталі λ з індексами–МГП, визначаються за формулами (А.4) додатку А.

Кососиметричне деформування пластини може відбуватися також при $q = p = 0$, якщо на бічна поверхня зазнає кососиметричного відносно серединної площини навантаження або ж кососиметричних переміщень.

3.4.2.2. Симетричне деформування. Наближення К02. У формулах (3.96), (3.98) ураховуються складові компонент u_0, v_0, u_2, v_2, w_2 .

Переміщення мають вигляд:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0,2}^2 P_k\left(\frac{2z}{h}\right)u_k(x, y), (U, u \rightarrow V, v); W(x, y, z) = P_1\left(\frac{2z}{h}\right)w_2(x, y); \quad (3.118)$$

Напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{n=1,3}^3 P_n(2z/h)t_{xn}(x, y); \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=1,3}^3 P_n(2z/h)t_{yn}(x, y). \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=0,2}^4 P_n(2z/h)s_{zn}(x, y); \\ \sigma_x(x, y, z) &= \sum_{n=0,2}^4 P_n(2z/h)s_{xn}(x, y), (x, y); \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=0,2}^2 P_n(2z/h)t_{yxn}(x, y), \end{aligned} \quad (3.119)$$

де

$$\begin{aligned} t_{x1}(x, y) &= \frac{3}{5h}Q_{2x}(x, y); t_{x3}(x, y) = -\frac{3}{5h}Q_{2x}(x, y); (x, y); \\ s_{z0}(x, y) &= -0,5p(x, y) - \frac{1}{10}\omega_2(x, y); s_{z2}(x, y) = \frac{1}{7}\omega_2(x, y); s_{z4}(x, y) = -\frac{3}{70}\omega_2(x, y); \\ s_{xn}(x, y) &= d_0(u_{n,x} + \nu v_{n,y}) + d_{10}s_{zn}, (n = 0, 2); \\ s_{x4}(x, y) &= d_{10}s_{z4}, (x, y; u_k, v_k); t_{yxn}(x, y) = G(u_{ny} + \nu v_{nx}), (n = 0, 2); \\ Q_{2x}(x, y) &= h_{22}w_{2,x} + l_{22}u_2, (x \rightarrow y; u \rightarrow v); \\ \omega_2(x, y) &= q_{22}w_2 + e_{20}\varphi_0 + e_{22}\varphi_2 + e_{2p}p; h_{22} = 7G'h/6; l_{22} = 7G'; q_{22} = -14/(hd_{20}); \\ e_{20} &= -7d_{30}; e_{22} = 2d_{30}; e_{2p} = -7/2; d_{20} = (1 - 2d_{10}\nu')/E'; d_{30} = d_{10}/d_{20}. \end{aligned}$$

СДР (10-го порядку) при симетричному деформуванні у НК02 має таку форму:

$$M_{i,1}u_0 + M_{i,2}v_0 + M_{i,3}u_2 + M_{i,4}v_2 + M_{i,5}w_2 = M_{i,p}, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (3.120)$$

де

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M_{1,2} = \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad M_{1,3} = \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ M_{1,4} &= \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad M_{1,5} = \gamma_{151} \frac{\partial}{\partial x}, \quad M_{1,p} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad M_{2,2} = \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ M_{2,3} &= \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad M_{2,4} = \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M_{2,5} = \gamma_{151} \frac{\partial}{\partial y}, \quad M_{2,p} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.121) \\ M_{3,3} &= \gamma_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{333}, \quad M_{3,4} = \gamma_{341} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad M_{3,5} = \gamma_{351} \frac{\partial}{\partial x}, \quad M_{3,p} = \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ M_{4,4} &= \gamma_{332} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{331} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{333}, \quad M_{4,5} = \gamma_{351} \frac{\partial}{\partial y}, \quad M_{4,p} = \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ M_{5,5} &= \gamma_{551} \nabla^2 + \gamma_{552}, \quad M_{5,p} = \gamma_{w2} p. \end{aligned}$$

Показано, що диференціальна матриця СДР (3.120) симетрична: $M_{ij} = M_{ji}$.

У формулах (3.121) γ з індексами–МГП, визначаються згідно з (А.5) дод.А.

Із СДР (3.120) отримано перетворену СДР:

$$\begin{aligned} \gamma_{111}\varphi_{0,x} + \gamma_{112}\psi_{0,y} + \gamma_{131}\varphi_{2,x} + \gamma_{151}w_{2,x} &= \gamma_{u0}p_{,x}; \\ \gamma_{111}\varphi_{0,y} - \gamma_{112}\psi_{0,x} + \gamma_{131}\varphi_{2,y} + \gamma_{151}w_{2,y} &= \gamma_{u0}p_{,y}; \\ \gamma_{131}\varphi_{0,x} + \gamma_{333}u_2 + \gamma_{331}\varphi_{2,x} + \gamma_{332}\psi_{2,y} + \gamma_{351}w_{2,x} &= \gamma_{u2}p_{,x}; \quad (3.122) \\ \gamma_{131}\varphi_{0,y} + \gamma_{333}v_2 + \gamma_{331}\varphi_{2,y} - \gamma_{332}\psi_{2,x} + \gamma_{351}w_{2,y} &= \gamma_{u2}p_{,y}; \\ \gamma_{151}\varphi_0 + \gamma_{351}\varphi_2 + (\gamma_{551}\nabla^2 + \gamma_{552})w_2 &= \gamma_{w2}p. \end{aligned}$$

Із перших двох ДР цієї СДР виділяється розв'язувальне ДР 2-го порядку відносно функції $\psi_2(x, y)$, яке описує ВКЕ при симетричному деформуванні:

$$(\gamma_{332}\nabla^2 + \gamma_{333})\psi_2 = 0. \quad (3.123)$$

Із трьох останніх рівнянь (3.122) після перетворень дістанемо:

$$\gamma_{131}\nabla^2\varphi_0 + (\gamma_{331}\nabla^2 + \gamma_{333})\varphi_2 + \gamma_{351}\nabla^2w_2 = \gamma_{u2}\nabla^2p;$$

(3.124)

$$\varphi_2(x, y) = \eta_{20}\varphi_0(x, y) + (\eta_{21}\nabla^2 + \eta_{22})w_2(x, y) + \eta_{23}p(x, y),$$

де $\eta_{20} = -\gamma_{151}/\gamma_{351}$; $\eta_{21} = -\gamma_{551}/\gamma_{351}$; $\eta_{22} = -\gamma_{553}/\gamma_{351}$; $\eta_{23} = \gamma_{w2}/\gamma_{351}$.

СДР з перших двох ДР (3.122) і 1-го ДР (3.124) з урахуванням 2-го ДР (3.124), є розв'язувальною СДР внутрішнього НДС з потенціальним КЕ для симетричного деформування. Вона 8-го порядку відносно $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_2(x, y)$:

$$T_{j1}u_0 + T_{j2}v_0 + T_{j3}w_2 = T_{jP}p, \quad (j=1, 2, 3), \quad (3.125)$$

де

$$\begin{aligned} T_{11} &= \delta_{01} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad T_{12} = (\delta_{01} - \gamma_{112}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad T_{13} = (\delta_{02} \nabla^2 + \delta_{03}) \frac{\partial}{\partial x}; \\ T_{21} &= (\delta_{01} - \gamma_{112}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad T_{22} = \delta_{01} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad T_{23} = (\delta_{02} \nabla^2 + \delta_{03}) \frac{\partial}{\partial y}; \\ T_{31} &= (\delta_{05} \nabla^2 + \delta_{06}) \frac{\partial}{\partial x}; \quad T_{32} = (\delta_{05} \nabla^2 + \delta_{06}) \frac{\partial}{\partial y}; \quad T_{33} = \delta_{07} \nabla^4 + \delta_{08} \nabla^2 + \delta_{09}; \\ T_{1P} &= \delta_{04} \frac{\partial}{\partial x}; \quad T_{2P} = \delta_{04} \frac{\partial}{\partial y}; \quad T_{3P} = \delta_{010} \nabla^2 - \delta_{011}; \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \delta_{01} &= \gamma_{111} + \gamma_{131}\eta_{20}; \quad \delta_{02} = \gamma_{131}\eta_{21}; \quad \delta_{03} = \gamma_{131}\eta_{22} + \gamma_{151}; \quad \delta_{04} = \gamma_{u0} - \gamma_{131}\eta_{23}; \\ \delta_{05} &= \gamma_{131} + \gamma_{331}\eta_{20}; \quad \delta_{06} = \gamma_{333}\eta_{20}; \quad \delta_{07} = \gamma_{331}\eta_{21}; \quad \delta_{08} = \gamma_{331}\eta_{22} + \gamma_{333}\eta_{21} + \gamma_{351}; \\ \delta_{09} &= \gamma_{333}\eta_{22}; \quad \delta_{010} = \gamma_{u2} - \gamma_{331}\eta_{23}; \quad \delta_{011} = \gamma_{333}\eta_{23}. \end{aligned}$$

Отримаємо визначальну СДР і побудуємо загальні розв'язки ДР (3.125). Введемо нові шукані функції $F_j(x, y)$:

$$u_0(x, y) = \sum_{j=1}^3 T_{j1}^0 F_j(x, y), \quad v_0(x, y) = \sum_{j=1}^3 T_{j2}^0 F_j(x, y), \quad w_2(x, y) = \sum_{j=1}^3 T_{j3}^0 F_j(x, y), \quad (3.127)$$

де T_{jm}^0 – ад'юнкти системи ДР (3.125), які з урахуванням (3.126) мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= (n_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \nabla^4 + (n_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_4 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \nabla^2 + n_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ T_{21}^0 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(n_1 - n_2) \nabla^4 + (n_3 - n_4) \nabla^2 + n_5 - n_6]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{31}^0 &= -\gamma_{112} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 (\delta_{02} \nabla^2 + \delta_{03}); \quad T_{12}^0 = T_{21}^0; \\
T_{22}^0 &= (n_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \nabla^4 + (n_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \nabla^2 + n_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_5 \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (3.128) \\
T_{32}^0 &= -\gamma_{112} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 (\delta_{02} \nabla^2 + \delta_{03}); \quad T_{13}^0 = -\gamma_{112} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 (\delta_{05} \nabla^2 + \delta_{06}); \\
T_{23}^0 &= -\gamma_{112} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 (\delta_{05} \nabla^2 + \delta_{06}); \quad T_{33}^0 = n_7 \nabla^4; \\
n_1 &= \gamma_{112} \delta_{07}; \quad n_2 = \delta_{01} \delta_{07} - \delta_{02} \delta_{05}; \quad n_3 = \gamma_{112} \delta_{08}; \quad n_4 = \delta_{01} \delta_{08} - \delta_{02} \delta_{06} - \delta_{03} \delta_{05}; \\
n_5 &= \gamma_{112} \delta_{09}; \quad n_6 = \delta_{01} \delta_{09} - \delta_{03} \delta_{06}; \quad n_7 = \gamma_{112} \delta_{01}.
\end{aligned}$$

Із (3.125), (3.127), (3.128) дістанемо визначальну СДР відносно $F_j(x, y)$:

$$T_0 F_j = T_{jP} P, \quad (j=1,2,3). \quad (3.129)$$

Тут T_0 – диференціальний визначник системи (3.125):

$$T_0 = \nabla^4 (N_{4\Pi} \nabla^4 + N_{2\Pi} \nabla^2 + N_{0\Pi}) = N_{4\Pi} \nabla^4 (\nabla^2 - m_1)(\nabla^2 - m_2), \quad (3.130)$$

де

$$\begin{aligned}
N_{4\Pi} &= \gamma_{112} (\delta_{01} \delta_{07} - \delta_{05} \delta_{02}); \quad N_{2\Pi} = \gamma_{112} (\delta_{01} \delta_{08} - \delta_{03} \delta_{05} - \delta_{02} \delta_{06}); \\
N_{0\Pi} &= \gamma_{112} (\delta_{01} \delta_{09} - \delta_{03} \delta_{06});
\end{aligned}$$

m_i – корені відповідного характеристичного рівняння.

Загальні розв'язки СДР (3.129):

$$F_j(x, y) = F_{j0}(x, y) + F_{jr}(x, y), \quad (j=1, 2, 3), \quad (3.131)$$

де $F_{j0}(x, y)$ – загальні розв'язки однорідних рівнянь 8-го порядку:

$$T_0 F_j = 0; \quad (3.132)$$

$F_{jr}(x, y)$ – частинні розв'язки неоднорідних рівнянь (3.129).

Щоб не збільшувати порядок ДР покладемо $F_{20}(x, y) \equiv 0, F_{30}(x, y) \equiv 0$.

Тоді, ураховуючи (3.131), загальні розв'язки СДР (3.129) будуть такими:

$$F_1(x, y) = F_{1B}(x, y) + F_{1\Pi}(x, y) + F_{1r}(x, y), \quad F_j(x, y) = F_{jr}(x, y). \quad (j=2,3). \quad (3.133)$$

Тут на основі (3.130) і (3.132) $F_{1B}(x, y)$ і $F_{1II}(x, y)$ – загальні розв’язки ДР:

$$\nabla^4 F_{1B} = 0; (\nabla^2 - m_1)(\nabla^2 - m_2)F_{1II}(x, y) = 0, \quad (3.134)$$

де $F_{1II} = \sum_{j=1,2}^2 F_{1IIj}(x, y)$, $F_{1IIj}(x, y)$ – загальні розв’язки ДР $(\nabla^2 - m_j)F_{1IIj} = 0, (j=1,2)$.

Функція $F_{1II}(x, y)$ описує ПКЕ, а функція $F_{1B}(x, y)$ разом з частинними розв’язками $F_{jr}(x, y)$ ($j=1, 2, 3$) СДР (3.129) описують ВНДС при симетричному деформуванні пластини. Отже, окремо розділені розв’язки для ВНДС та ПКЕ.

Приймаючи до уваги (3.127), (3.133) і (3.134), дістанемо u_0, v_0, w_2 :

$$u_0(x, y) = T_{11}^0(F_{1B} + \sum_{j=1,2}^2 F_{1IIj}) + \sum_{j=1}^3 T_{j1}^0 F_{jr}; v_0(x, y) = T_{12}^0(F_{1B} + \sum_{j=1,2}^2 F_{1IIj}) + \sum_{j=1}^3 T_{j2}^0 F_{jr}; \quad (3.135)$$

$$w_2(x, y) = T_{13}^0(F_{1B} + \sum_{j=1,2}^2 F_{1IIj}) + \sum_{j=1}^3 T_{j3}^0 F_{jr}.$$

Складові $u_2(x, y), v_2(x, y)$ знаходяться з 3-го та 4-го ДР системи (3.122):

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \lambda_{2\varphi 0} \varphi_{0,x} + \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2,x} + \lambda_{2\psi 2} \psi_{2,y} + \lambda_{2w 2} w_{2,x} + \lambda_{2p} p_{,x}; \\ v_2(x, y) &= \lambda_{2\varphi 0} \varphi_{0,y} + \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2,y} - \lambda_{2\psi 2} \psi_{2,x} + \lambda_{2w 2} w_{2,y} + \lambda_{2p} p_{,y}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\text{де } \lambda_{2\varphi 0} = -\frac{\gamma_{131}}{\gamma_{333}}; \lambda_{2\varphi 2} = -\frac{\gamma_{331}}{\gamma_{333}}; \lambda_{2\psi 2} = -\frac{\gamma_{332}}{\gamma_{333}}; \lambda_{2w 2} = -\frac{\gamma_{351}}{\gamma_{333}}; \lambda_{2p} = \frac{\gamma_{u2}}{\gamma_{333}}.$$

Таким чином, симетричне деформування пластини описується СДР 10-го порядку. ДР, які описують ВКЕ, ПКЕ та ВНДС, розділяються. ВКЕ визначається ДР 2-го порядку (3.123) відносно функції ψ_2 ; ПКЕ описується другим ДР (3.134) 4-го порядку відносно функції F_{1II} ; ВНДС визначається бігармонічним ДР відносно функції F_{1B} та частинними розв’язками F_{jr} системи неоднорідних ДР (3.129).

Зазначимо, що симетричне деформування пластини має також місце, якщо на лицевих площинах $q(x, y) = p(x, y) = 0$, але на бічній поверхні діє симетричне відносно серединної площини навантаження, або ж коли бічна поверхня зазнає симетричних відносно серединної площини переміщень.

3.5. Вищі наближення. Наближення К0-5

3.5.1. Основні рівняння. Аналогічною методикою отримані залежності і ДР для НК0-5. Ураховуються складові переміщень $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N$.

Переміщення:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=1}^5 P_k u_k, \quad (U \rightarrow V; u_k \rightarrow v_k); \quad W(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k w_{k+1}; \quad (3.137)$$

Напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{n=0,1}^6 P_n (2z/h) t_{xn}(x, y); \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{n=0,1}^6 P_n (2z/h) t_{yn}(x, y); \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{n=0,1}^7 P_n (2z/h) s_{zn}(x, y); \\ \sigma_x(x, y, z) &= \sum_{n=0,1}^7 P_n (2z/h) s_{xn}(x, y), \quad (x, y); \quad \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{n=0,1}^5 P_n (2z/h) t_{yxn}(x, y). \end{aligned} \quad (3.138)$$

У формулах (3.138):

$$\begin{aligned} t_{x0}(x, y) &= \frac{1}{h} Q_{1x}; \quad t_{x1}(x, y) = \frac{3}{5h} Q_{2x}; \quad t_{x2}(x, y) = -\frac{1}{h} Q_{1x} + \frac{3}{7h} Q_{3x}; \\ t_{x3}(x, y) &= -\frac{3}{5h} Q_{2x} + \frac{1}{3h} Q_{4x}; \quad t_{x4}(x, y) = -\frac{3}{7h} Q_{3x} + \frac{3}{11h} Q_{5x}; \\ t_{x5}(x, y) &= -\frac{1}{3h} Q_{4x}; \quad t_{x6}(x, y) = -\frac{3}{11h} Q_{5x}, \quad (t_{xn} \rightarrow t_{yn}; Q_{n,x} \rightarrow Q_{n,y}); \\ s_{z0}(x, y) &= -\frac{1}{2} (p + \frac{1}{5} \omega_2); \quad s_{z1}(x, y) = -\frac{3}{5} (q + \frac{1}{14} \omega_3); \quad s_{z2}(x, y) = \frac{1}{7} (\omega_2 - \frac{1}{6} \omega_4); \\ s_{z3}(x, y) &= \frac{1}{10} q + \frac{1}{15} \omega_3 - \frac{1}{66} \omega_5; \quad s_{z4}(x, y) = -\frac{3}{7} (\frac{1}{10} \omega_2 - \frac{1}{11} \omega_4); \\ s_{z5}(x, y) &= -\frac{1}{3} (\frac{1}{14} \omega_3 - \frac{1}{13} \omega_5); \quad s_{z6}(x, y) = -\frac{1}{66} \omega_4; \quad s_{z7}(x, y) = -\frac{3}{286} \omega_5; \\ s_{xn}(x, y) &= d_0 (u_{n,x} + v v_{n,y}) + d_{10} s_{zn}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 5); \\ s_{xn}(x, y) &= d_{10} s_{zn}, \quad (n = 6, 7), \quad (s_{xn} \rightarrow s_{yn}; u_n, v_n; \partial / \partial x, \partial / \partial y); \\ t_{yxn}(x, y) &= G (u_{n,y} + v_{n,x}), \quad (n = 0, 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (3.139)$$

де

$$\begin{aligned}
Q_{nx}(x, y) &= h_{n1}w_{1,x} + h_{n3}w_{3,x} + h_{n5}w_{5,x} + \sum_{i=0}^5 l_{ni}u_i; \quad (n = 1, 3, 5); \\
Q_{nx}(x, y) &= h_{n2}w_{2,x} + h_{n4}w_{4,x} + \sum_{i=1}^5 l_{ni}u_i, \quad (n = 2, 4); \\
(x, y; Q_{kx} &\rightarrow Q_{ky}; \partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial y; u_i \rightarrow v_i); \\
\omega_n(x, y) &= \sum_{i=2}^5 q_{ni}w_i + e_{n1}\varphi_1 + e_{n3}\varphi_3 + e_{n5}\varphi_5 + e_{nq}q, \quad (n = 3, 5); \\
\omega_k(x, y) &= \sum_{i=1}^5 q_{ki}w_i + e_{k0}\varphi_0 + e_{k2}\varphi_2 + e_{k4}\varphi_4 + e_{kp}p, \quad (k = 2, 4).
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Сталі при функціях у (3.140) –МГП, визначаються за формулами (А.6) дод. А.

ДР рівноваги пластини для зручності подамо в єдиному вигляді:

$$\begin{aligned}
&D_{i,1}u_0 + D_{i,2}v_0 + D_{i,3}u_1 + D_{i,4}v_1 + D_{i,5}u_2 + D_{i,6}v_2 + D_{i,7}u_3 + D_{i,8}v_3 + D_{i,9}u_4 + \\
&+ D_{i,10}v_4 + D_{i,11}u_5 + D_{i,12}v_5 + D_{i,13}w_1 + D_{i,14}w_2 + D_{i,15}w_3 + D_{i,16}w_4 + D_{i,17}w_5 = D_{ipq}, \tag{3.141} \\
&(i = 1, 2, \dots, 17),
\end{aligned}$$

де $D_{i,j}$ – диференціальні оператори, D_{ipq} – функції зовнішнього навантаження.

Аналітично показано, що $D_{i,j} = D_{j,i}$ ($j = 1, 2, \dots, 17$).

Диференціальні оператори $D_{i,j}$ визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
D_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad D_{1,2} = \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{1,5} = \gamma_{151} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad D_{1,6} = \gamma_{161} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{1,3} &= D_{1,4} = D_{1,7} = D_{1,8} = D_{1,11} = D_{1,12} = D_{1,13} = D_{1,15} = D_{1,17} = 0; \quad D_{1,9} = \gamma_{191} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \\
D_{1,10} &= \gamma_{1101} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}; \quad D_{1,14} = \gamma_{1141} \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_{1,16} = \gamma_{1161} \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_{1,pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
D_{2,2} &= \gamma_{221} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{222} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad D_{2,5} = \gamma_{251} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{2,6} = \gamma_{261} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad D_{2,9} = \gamma_{291} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{2,10} &= \gamma_{2101} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad D_{2,14} = \gamma_{2141} \frac{\partial}{\partial y}; \quad D_{2,16} = \gamma_{2161} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{2,3} &= D_{2,4} = D_{2,7} = D_{2,8} = D_{2,11} = D_{2,12} = D_{2,13} = D_{2,15} = D_{2,17} = 0; \quad D_{2,pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
D_{3,3} &= \beta_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{333}; \quad D_{3,4} = \beta_{341} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{3,7} = \beta_{371} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{372}; \\
D_{3,8} &= \beta_{381} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{3,11} = \beta_{3111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{3112}; \quad D_{3,12} = \beta_{3121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{3,13} = \beta_{3131} \frac{\partial}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{3,15} &= \beta_{3151} \frac{\partial}{\partial x}; D_{3,17} = \beta_{3171} \frac{\partial}{\partial x}; D_{3,5} = D_{3,6} = D_{3,9} = D_{3,10} = D_{3,14} = D_{3,16} = 0; \\
D_{3,pq} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}; D_{4,4} = \beta_{441} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{442} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{443}; D_{4,7} = \beta_{471} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{4,8} &= \beta_{481} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{482}; D_{4,11} = \beta_{4111} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{4,12} = \beta_{4121} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{4122}; D_{4,13} = \beta_{4131} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{4,15} &= \beta_{4151} \frac{\partial}{\partial y}; D_{4,17} = \beta_{4171} \frac{\partial}{\partial y}; D_{4,5} = D_{4,6} = D_{4,9} = D_{4,10} = D_{4,14} = D_{4,16} = 0; \\
D_{4,pq} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; D_{5,5} = \gamma_{551} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{552} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{553}; D_{5,6} = \gamma_{561} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{5,9} = \gamma_{591} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{592}; \\
D_{5,10} &= \gamma_{5101} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{5,14} = \gamma_{5141} \frac{\partial}{\partial x}; D_{5,16} = \gamma_{5161} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{5,7} &= D_{5,8} = D_{5,11} = D_{5,12} = D_{5,13} = D_{5,15} = D_{5,17} = 0; D_{5,pq} = \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
D_{6,6} &= \gamma_{661} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{662} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{663}; D_{6,9} = \gamma_{691} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{6,10} = \gamma_{6101} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{6102}; \\
D_{6,14} &= \gamma_{6141} \frac{\partial}{\partial y}; D_{6,16} = \gamma_{6161} \frac{\partial}{\partial y}; D_{6,7} = D_{6,8} = D_{6,11} = D_{6,12} = D_{6,13} = D_{6,15} = D_{6,17} = 0; \\
D_{6,pq} &= \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial y}; D_{7,7} = \beta_{771} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{772} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{773}; D_{7,8} = \beta_{781} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{7,11} &= \beta_{7111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{7112}; D_{7,12} = \beta_{7121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{7,13} = \beta_{7131} \frac{\partial}{\partial x}; D_{7,15} = \beta_{7151} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{7,17} &= \beta_{7171} \frac{\partial}{\partial x}; D_{7,9} = D_{7,10} = D_{7,14} = D_{7,16} = 0; D_{7,pq} = \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial x}; \quad (3.142) \\
D_{8,8} &= \beta_{881} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{882} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{883}; D_{8,11} = \beta_{8111} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{8,12} = \beta_{8121} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{8122}; \\
D_{8,13} &= \beta_{8131} \frac{\partial}{\partial y}; D_{8,15} = \beta_{8151} \frac{\partial}{\partial y}; D_{8,17} = \beta_{8171} \frac{\partial}{\partial y}; D_{8,9} = D_{8,10} = D_{8,14} = D_{8,16} = 0; \\
D_{8,pq} &= \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial y}; D_{9,9} = \gamma_{991} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{992} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{993}; D_{9,10} = \gamma_{9101} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{9,14} = \gamma_{9141} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{9,16} &= \gamma_{9161} \frac{\partial}{\partial x}; D_{9,11} = D_{9,12} = D_{9,13} = D_{9,15} = D_{9,17} = 0; D_{9,pq} = \gamma_{u4} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
D_{10,10} &= \gamma_{10101} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{10102} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{10103}; D_{10,14} = \gamma_{10141} \frac{\partial}{\partial y}; D_{10,16} = \gamma_{10161} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{10,11} &= D_{10,12} = D_{10,13} = D_{10,15} = D_{10,17} = 0; D_{10,pq} = \gamma_{u4} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
D_{11,11} &= \beta_{11111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{11112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{11113}; D_{11,12} = \beta_{11121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; D_{11,13} = \beta_{11131} \frac{\partial}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11,14} = D_{11,16} = 0; & D_{11,15} = \beta_{11151} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11,17} = \beta_{11171} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11pq} = \beta_{u5} \frac{\partial q}{\partial x}; \\
D_{12,12} = \beta_{12121} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{12122} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{12123}; & D_{12,13} = \beta_{12131} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,14} = D_{12,16} = 0; \\
D_{12,15} = \beta_{12151} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,17} = \beta_{12171} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12pq} = \beta_{u5} \frac{\partial q}{\partial y}; & D_{13,13} = \beta_{13131} \nabla^2; \\
D_{13,14} = D_{13,16} = 0; & D_{13,15} = \beta_{13151} \nabla^2; & D_{13,17} = \beta_{13171} \nabla^2; & D_{13pq} = \gamma_{w1} p + \beta_{w1} q; \\
D_{14,14} = \gamma_{14141} \nabla^2 + \gamma_{14142}; & D_{14,15} = D_{14,17} = 0; & D_{14,16} = \gamma_{14161} \nabla^2 + \gamma_{14162}; \\
D_{14pq} = \gamma_{w2} p + \beta_{w2} q; & D_{15,15} = \beta_{15151} \nabla^2 + \beta_{15152}; & D_{15,16} = 0; & D_{15,17} = \beta_{15171} \nabla^2 + \beta_{15172}; \\
D_{15pq} = \gamma_{w3} p + \beta_{w3} q; & D_{16,16} = \gamma_{16161} \nabla^2 + \gamma_{16162}; & D_{16,17} = 0; & D_{16pq} = \gamma_{w4} p + \beta_{w4} q; \\
D_{17,17} = \beta_{17171} \nabla^2 + \beta_{17172}; & D_{17pq} = \gamma_{w5} p + \beta_{w5} q.
\end{aligned}$$

ДР (3.141) при $i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 14, 16$ описують симетричне деформування пластини, а при $i = 3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 17$ – кососиметричне. Як це впливає із (3.142) для операторів $D_{i,j}$, симетричне і кососиметричне деформування описуються незалежними СДР. СДР симетричного деформування має 16-й порядок, а кососиметричне – 18-й. У ДР (3.141) оператори $D_{i,j}$ над складовими компонент переміщень з парними індексами – це оператори ДР (3.34), позначені символом M ; оператори над складовими компонент переміщень з непарними індексами – оператори ДР (3.33), позначені символом L з відповідними нижніми індексами. Праві частини D_{ipq} ДР (3.141) для симетричного деформування – це праві частини (3.34), позначені символом M , а для кососиметричного деформування – праві частини (3.33), позначені символом L з відповідними індексами.

У (3.142) сталі γ і β з індексами –МГП, визначаються згідно з (А.7):

Крайові умови на контурі мають вигляд (3.35), де потрібно урахувати доданки з варіаціями складових компонент переміщень з відповідними нижніми індексами (при симетричному деформуванні – ураховуються доданки з варіаціями $\delta u_0, \delta v_0, \delta u_2, \delta v_2, \delta u_4, \delta v_4, \delta w_2, \delta w_4$, а при кососиметричному – з варіаціями $\delta u_1, \delta v_1, \delta u_3, \delta v_3, \delta u_5, \delta v_5, \delta w_1, \delta w_3, \delta w_5$).

3.5.2. Наближення К135. Загальні розв'язки. Ураховуючи в (3.141) складові $u_i, v_i, w_i, (i = 1, 3, 5)$ і, виконуючи перетворення, отримується СДР:

$$\begin{aligned}
& \beta_{333}u_1 + \beta_{331}\varphi_{1,x} + \beta_{332}\psi_{1,y} + \beta_{372}u_3 + \beta_{371}\varphi_{3,x} + \beta_{3112}u_5 + \\
& \quad + \beta_{3111}\varphi_{5,x} + \beta_{3131}w_{1,x} + \beta_{3151}w_{3,x} + \beta_{3171}w_{5,x} = \beta_{u1}q_x; \\
& \beta_{333}v_1 + \beta_{331}\varphi_{1,y} - \beta_{332}\psi_{1,x} + \beta_{372}v_3 + \beta_{371}\varphi_{3,y} + \beta_{3112}v_5 + \\
& \quad + \beta_{3111}\varphi_{5,y} + \beta_{3131}w_{1,y} + \beta_{3151}w_{3,y} + \beta_{3171}w_{5,y} = \beta_{u1}q_y; \\
& \beta_{372}u_1 + \beta_{371}\varphi_{1,x} + \beta_{773}u_3 + \beta_{771}\varphi_{3,x} + \beta_{772}\psi_{3,y} + \beta_{7112}u_5 + \\
& \quad + \beta_{7111}\varphi_{5,x} + \beta_{7131}w_{1,x} + \beta_{7151}w_{3,x} + \beta_{7171}w_{5,x} = \beta_{u3}q_x; \\
& \beta_{372}v_1 + \beta_{371}\varphi_{1,y} + \beta_{773}v_3 + \beta_{771}\varphi_{3,y} - \beta_{772}\psi_{3,x} + \beta_{7112}v_5 + \\
& \quad + \beta_{7111}\varphi_{5,y} + \beta_{7131}w_{1,y} + \beta_{7151}w_{3,y} + \beta_{7171}w_{5,y} = \beta_{u3}q_y; \\
& \beta_{3112}u_1 + \beta_{3111}\varphi_{1,x} + \beta_{7112}u_3 + \beta_{7111}\varphi_{3,x} + \beta_{11113}u_5 + \beta_{11111}\varphi_{5,x} + \\
& \quad + \beta_{11112}\psi_{5,y} + \beta_{11131}w_{1,x} + \beta_{11151}w_{3,x} + \beta_{11171}w_{5,x} = \beta_{u5}q_x; \\
& \beta_{3112}v_1 + \beta_{3111}\varphi_{1,y} + \beta_{7112}v_3 + \beta_{7111}\varphi_{3,y} + \beta_{11113}v_5 + \beta_{11111}\varphi_{5,y} - \beta_{11112}\psi_{5,x} + \\
& \quad + \beta_{11131}w_{1,y} + \beta_{11151}w_{3,y} + \beta_{11171}w_{5,y} = \beta_{u5}q_y; \\
& \beta_{3131}\varphi_1 + \beta_{7131}\varphi_3 + \beta_{11131}\varphi_5 + \beta_{13131}\nabla^2 w_1 + \beta_{13151}\nabla^2 w_3 + \beta_{13171}\nabla^2 w_5 = \beta_{w1}q; \\
& \beta_{3151}\varphi_1 + \beta_{7151}\varphi_3 + \beta_{11151}\varphi_5 + \beta_{13151}\nabla^2 w_1 + (\beta_{15151}\nabla^2 + \beta_{15152})w_3 + \\
& \quad + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172})w_5 = \beta_{w3}q; \\
& \beta_{3171}\varphi_1 + \beta_{7171}\varphi_3 + \beta_{11171}\varphi_5 + \beta_{13171}\nabla^2 w_1 + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172})w_3 + \\
& \quad + (\beta_{17171}\nabla^2 + \beta_{17172})w_5 = \beta_{w5}q.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Із системи (3.143) (18-го порядку) виділено дві СДР.

СДР 6-го порядку з симетричною диференціальною матрицею описує ВКЕ:

$$H_{i1}\psi_1 + H_{i3}\psi_3 + H_{i5}\psi_5 = 0; \quad (i = 1, 3, 5), \tag{3.144}$$

де

$$\begin{aligned}
& H_{11} = \beta_{332}\nabla^2 + \beta_{333}; \quad H_{13} = \beta_{372}; \quad H_{15} = \beta_{3112}; \quad H_{31} = \beta_{372}; \\
& H_{33} = \beta_{772}\nabla^2 + \beta_{773}; \quad H_{35} = \beta_{7112}; \quad H_{51} = \beta_{3112}; \quad H_{53} = \beta_{7112}; \quad H_{55} = \beta_{11112}\nabla^2 + \beta_{11113}.
\end{aligned}$$

СДР 12-го порядку з симетричною матрицею описує ВНДС і ПКЕ:

$$\begin{aligned}
& \beta_{333}\varphi_1 + \beta_{331}\nabla^2\varphi_1 + (\beta_{371}\nabla^2 + \beta_{372})\varphi_3 + (\beta_{3111}\nabla^2 + \beta_{3112})\varphi_5 + \beta_{3131}\nabla^2 w_1 + \\
& \quad + \beta_{3151}\nabla^2 w_3 + \beta_{3171}\nabla^2 w_5 = \beta_{u1}\nabla^2 q;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_{372}\varphi_1 + \beta_{371}\nabla^2\varphi_1 + (\beta_{771}\nabla^2 + \beta_{773})\varphi_3 + (\beta_{7111}\nabla^2 + \beta_{7112})\varphi_5 + \beta_{7131}\nabla^2w_1 + \\
& \quad + \beta_{7151}\nabla^2w_3 + \beta_{7171}\nabla^2w_5 = \beta_{u3}\nabla^2q; \\
& (\beta_{3111}\nabla^2 + \beta_{3112})\varphi_1 + (\beta_{7111}\nabla^2 + \beta_{7112})\varphi_3 + (\beta_{11111}\nabla^2 + \beta_{11113})\varphi_5 + \beta_{11131}\nabla^2w_1 + \\
& \quad + \beta_{11151}\nabla^2w_3 + \beta_{11171}\nabla^2w_5 = \beta_{u5}\nabla^2q; \tag{3.145} \\
& \beta_{3131}\varphi_1 + \beta_{7131}\varphi_3 + \beta_{11131}\varphi_5 + \beta_{13131}\nabla^2w_1 + \beta_{13151}\nabla^2w_3 + \beta_{13171}\nabla^2w_5 = \beta_{w1}q; \\
& \quad \beta_{3151}\varphi_1 + \beta_{7151}\varphi_3 + \beta_{11151}\varphi_5 + \beta_{13151}\nabla^2w_1 + \\
& \quad + (\beta_{15151}\nabla^2 + \beta_{15152})w_3 + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172})w_5 = \beta_{w3}q; \\
& \quad \beta_{3171}\varphi_1 + \beta_{7171}\varphi_3 + \beta_{11171}\varphi_5 + \beta_{13171}\nabla^2w_1 + \\
& \quad + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172})w_3 + (\beta_{17171}\nabla^2 + \beta_{17172})w_5 = \beta_{w5}q.
\end{aligned}$$

СДР (3.144)–розв’язувальна СДР вихрового КЕ. Введемо нову функцію ψ .

$$\psi_1(x, y) = H_{11}^0\psi(x, y); \quad \psi_3(x, y) = H_{13}^0\psi(x, y); \quad \psi_5(x, y) = H_{15}^0\psi(x, y), \tag{3.146}$$

де $H_{11}^0, H_{13}^0, H_{15}^0$ – ад’юнкти диференційного визначника СДР (3.144).

Визначальне ДР для функції $\psi(x, y)$:

$$H_0\psi(x, y) = 0. \tag{3.147}$$

де H_0 – диференціальний визначник системи (3.144):

$$\begin{aligned}
H_0 &= K_{6B}\nabla^6 + K_{4B}\nabla^4 + K_{2B}\nabla^2 + K_{0B} = K_{6B}\prod_{j=1}^3(\nabla^2 - r_j); \\
K_{6B} &= \beta_{332}n_{14}; \quad K_{4B} = \beta_{332}n_{12} + \beta_{333}n_{14}; \\
K_{2B} &= \beta_{332}n_{10} + \beta_{333}n_{12} - \beta_{372}n_{22} + \beta_{3112}n_{32}; \quad K_{0B} = \beta_{333}n_{10} - \beta_{372}n_{20} + \beta_{3112}n_{30}; \\
n_{14} &= \beta_{772}\beta_{11112}; \quad n_{12} = \beta_{772}\beta_{11113} + \beta_{773}\beta_{11112}; \quad n_{10} = \beta_{773}\beta_{11113} - \beta_{7112}^2; \quad n_{22} = \beta_{372}\beta_{11112}; \\
n_{20} &= \beta_{372}\beta_{11113} - \beta_{7112}\beta_{3112}; \quad n_{32} = -\beta_{772}\beta_{3112}; \quad n_{30} = \beta_{372}\beta_{7112} - \beta_{773}\beta_{3112};
\end{aligned}$$

r_j –корені відповідного характеристичного рівняння, залежать від МГП ($r_j > 0$).

Загальний розв’язок ДР (3.147): $\psi(x, y) = \sum_{j=1}^3 \psi^{(j)}(x, y)$, де $\psi^{(j)}(x, y)$ –

загальні розв’язки ДР $(\nabla^2 - r_j)\psi^{(j)} = 0$ (п. 2.2.3), а загальні розв’язки СДР (3.144)

визначатимуться на основі (3.146). Із СДР (3.145) знаходяться $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ через w_1, w_3, w_5 :

$$\varphi_i(x, y) = \lambda_{i1} \nabla^2 w_1 + \lambda_{i2} w_3 + \lambda_{i3} \nabla^2 w_3 + \lambda_{i4} w_5 + \lambda_{i5} \nabla^2 w_5 + \lambda_{i6} q, \quad (i = 1, 3, 5), \quad (3.148)$$

де λ з індексами–МГП, визначаються за формулами (А.8), у яких Δ –визначник системи останніх трьох рівнянь (3.145)) відносно $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$; A_{11}, \dots, A_{33} –алгебраїчні доповнення до відповідних елементів Δ .

Із перших трьох ДР (3.145) отримується розв’язувальна СДР 12-го порядку ВНДС і ПКЕ відносно функцій w_j ($j = 1, 3, 5$):

$$P_{i1} w_1 + P_{i3} w_3 + P_{i5} w_5 = P_{iq} q \quad (i = 1, 3, 5), \quad (3.149)$$

де

$$\begin{aligned} P_{11} &= \mu_{114} \nabla^4; \quad P_{13} = \mu_{134} \nabla^4 + \mu_{132} \nabla^2; \quad P_{15} = \mu_{154} \nabla^4 + \mu_{152} \nabla^2; \quad P_{1q} = \mu_{12} \nabla^2 + \mu_{10}; \\ P_{31} &= \mu_{314} \nabla^4 + \mu_{312} \nabla^2; \quad P_{33} = \mu_{334} \nabla^4 + \mu_{332} \nabla^2 + \mu_{330}; \quad P_{35} = \mu_{354} \nabla^4 + \mu_{352} \nabla^2 + \mu_{350}; \\ P_{3q} &= \mu_{32} \nabla^2 + \mu_{30}; \quad P_{51} = \mu_{514} \nabla^4 + \mu_{512} \nabla^2; \quad P_{53} = \mu_{534} \nabla^4 + \mu_{532} \nabla^2 + \mu_{530}; \\ P_{55} &= \mu_{554} \nabla^4 + \mu_{552} \nabla^2 + \mu_{550}; \quad P_{5q} = \mu_{52} \nabla^2 + \mu_{50}, \quad (\mu \text{ з індексами–МГП (А.9)}). \end{aligned}$$

Отже, у високому наближенні ДР рівноваги при кососиметричному деформуванні також розділені на дві окремі системи: одна (6-го порядку) описує ВКЕ, а інша (12-го порядку)– ВНДС та ПКЕ. Показано, що, як і для К13 остання система в свою чергу розділяється на систему ВНДС і систему, яка описує ПКЕ.

Загальний розв’язок системи (3.149) подається у вигляді:

$$w_k(x, y) = P_{1k}^0 \Phi_1(x, y) + P_{3k}^0 \Phi_3(x, y) + P_{5k}^0 \Phi_5(x, y), \quad (k = 1, 3, 5), \quad (3.150)$$

де P_{ij}^0 – ад’юнкти диференціального визначника системи (3.149).

З урахуванням (3.150) СДР (3.149), перетворюється до такої:

$$P_0 \Phi_i(x, y) = P_{iq} q, \quad (i = 1, 3, 5), \quad (3.151)$$

де P_0 – диференціальний визначник системи (3.149):

$$P_0 = \nabla^4 (K_{8\Pi} \nabla^8 + K_{6\Pi} \nabla^6 + K_{4\Pi} \nabla^4 + K_{2\Pi} \nabla^2 + K_{0\Pi}) = K_{8\Pi} \nabla^4 \prod_{j=1}^4 (\nabla^2 - s_j); \quad (3.152)$$

В (3.152) K з індексами–МГП, визначаються за формулами (А.10); s_j –МГП, корені відповідного характеристичного рівняння.

Загальні розв'язки ДР (3.151):

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1\Pi}(x, y) + \Phi_{1r}(x, y); \quad \Phi_k(x, y) = \Phi_{kr}(x, y), \quad (k = 3, 5). \quad (3.153)$$

Тут $\Phi_{1r}, \Phi_{3r}, \Phi_{5r}$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР (3.151); Φ_{1B} – загальний розв'язок бігармонічного рівняння $\nabla^4 \Phi_{1B} = 0$; $\Phi_{1\Pi}$ – загальний розв'язок ДР

$$\left(\prod_{j=1}^4 (\nabla^2 - s_j) \right) \Phi_{1\Pi}(x, y) = 0, \quad (3.154)$$

де $\Phi_{1\Pi}(x, y) = \sum_{j=1}^4 \Phi_{1\Pi j}(x, y)$, $\Phi_{1\Pi j}(x, y)$ – загальні розв'язки ДР $(\nabla^2 - s_j) \Phi_{1\Pi j} = 0$.

Отже, ПКЕ описується ДР (3.154), а загальний розв'язок Φ_{1B} бігармонічного рівняння $\nabla^4 \Phi_1 = 0$ разом з частинними розв'язками $\Phi_{1r}, \Phi_{3r}, \Phi_{5r}$ 3-х неоднорідних ДР 12-го порядку (3.151) описують ВНДС пластини. На основі (3.150), (3.153) і (3.154) дістанемо загальні розв'язки СДР (3.149):

$$w_k(x, y) = \Pi_{1k}^0 (\Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1\Pi}(x, y)) + \sum_{i=1,3}^5 \Pi_{ik}^0 \Phi_{ir}(x, y), \quad (k = 1, 3, 5). \quad (3.155)$$

Складові переміщень u_k, v_k ($k = 1, 3, 5$) знаходяться з 1-го–6-го ДР (3.143):

$$u_k(x, y) = \sum_{i=1,3}^5 (\lambda_{k\varphi i} \varphi_{i,x} + \lambda_{k\psi i} \psi_{i,y} + \lambda_{kwi} w_{i,x}) + \lambda_{kq} q_{,x}, \quad (3.156)$$

$(u_k, \partial/\partial x, \psi_{i,y} \rightarrow v_k, \partial/\partial y, -\psi_{i,x}); \quad \lambda_{k\varphi j}, \dots, \lambda_{kq} - \text{МГП.}$

3.5.3. Наближення К024. Загальні розв'язки. Ураховуючи у СДР (3.141) складові u_i, v_i, w_i ($i = 0, 2, 4$) після перетворень одержується СДР 16-го порядку:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{111}\varphi_{0,x} + \gamma_{112}\psi_{0,y} + \gamma_{151}\varphi_{2,x} + \gamma_{191}\varphi_{4,x} + \gamma_{1141}w_{2,x} + \gamma_{1161}w_{4,x} = \gamma_{u0}P_{,x}; \\
& \gamma_{111}\varphi_{0,y} - \gamma_{112}\psi_{0,x} + \gamma_{151}\varphi_{2,y} + \gamma_{191}\varphi_{4,y} + \gamma_{1141}w_{2,y} + \gamma_{1161}w_{4,y} = \gamma_{u0}P_{,y}; \\
& \gamma_{151}\varphi_{0,x} + \gamma_{553}u_2 + \gamma_{551}\varphi_{2,x} + \gamma_{552}\psi_{2,y} + \gamma_{592}u_4 + \gamma_{591}\varphi_{4,x} + \gamma_{5141}w_{2,x} + \gamma_{5161}w_{4,x} = \gamma_{u2}P_{,x}; \\
& \gamma_{151}\varphi_{0,y} + \gamma_{553}v_2 + \gamma_{551}\varphi_{2,y} - \gamma_{552}\psi_{2x} + \gamma_{592}v_4 + \gamma_{591}\varphi_{4,y} + \gamma_{5141}w_{2,y} + \gamma_{5161}w_{4,y} = \gamma_{u2}P_{,y};
\end{aligned} \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_{191}\varphi_{0,x} + \gamma_{592}u_2 + \gamma_{591}\varphi_{2,x} + \gamma_{993}u_4 + \gamma_{991}\varphi_{4,x} + \gamma_{992}\psi_{4,y} + \gamma_{9141}w_{2,x} + \gamma_{9161}w_{4,x} = \gamma_{u4}P_{,x}; \\
& \gamma_{191}\varphi_{0,y} + \gamma_{592}v_2 + \gamma_{591}\varphi_{2,y} + \gamma_{993}v_4 + \gamma_{991}\varphi_{4,y} - \gamma_{992}\psi_{4x} + \gamma_{9141}w_{2,y} + \gamma_{9161}w_{4,y} = \gamma_{u4}P_{,y}; \\
& \gamma_{1141}\varphi_0 + \gamma_{5141}\varphi_2 + \gamma_{9141}\varphi_4 + (\gamma_{14141}\nabla^2 + \gamma_{14142})w_2 + (\gamma_{14161}\nabla^2 + \gamma_{14162})w_4 = \gamma_{w2}P; \\
& \gamma_{1161}\varphi_0 + \gamma_{5161}\varphi_2 + \gamma_{9161}\varphi_4 + (\gamma_{14161}\nabla^2 + \gamma_{14162})w_2 + (\gamma_{16161}\nabla^2 + \gamma_{16162})w_4 = \gamma_{w4}P.
\end{aligned}$$

ВКЕ визначається СДР 4-го порядку відносно функцій $\psi_2(x, y)$, $\psi_4(x, y)$:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{553}\psi_2 + \gamma_{552}\nabla^2\psi_2 + \gamma_{592}\psi_4 = 0; \\
& \gamma_{592}\psi_2 + \gamma_{993}\psi_4 + \gamma_{992}\nabla^2\psi_4 = 0.
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Виконуючи перетворення 3-го – 6-го рівнянь системи (3.157), дістанемо:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{151}\nabla^2\varphi_0 + \gamma_{553}\varphi_2 + \gamma_{551}\nabla^2\varphi_2 + \gamma_{592}\varphi_4 + \gamma_{591}\nabla^2\varphi_4 + \gamma_{5141}\nabla^2w_2 + \gamma_{5161}\nabla^2w_4 = \gamma_{u2}\nabla^2P; \\
& \gamma_{191}\nabla^2\varphi_0 + \gamma_{592}\varphi_2 + \gamma_{591}\nabla^2\varphi_2 + \gamma_{993}\varphi_4 + \gamma_{991}\nabla^2\varphi_4 + \gamma_{9141}\nabla^2w_2 + \gamma_{9161}\nabla^2w_4 = \gamma_{u4}\nabla^2P.
\end{aligned} \tag{3.159}$$

ДР (3.159) разом з першими двома та останніми двома ДР (2.157) складають СДР 12-го порядку, яка описує ВНДС та ПКЕ. Зведемо вказану систему до чотирьох ДР відносно функцій u_0, v_0, w_2, w_4 . Із останніх двох рівнянь (3.157) дістанемо:

$$\varphi_i(x, y) = a_{\varphi_i P}P + a_{\varphi_i 0}\varphi_0 + (b_{\varphi_i 2}\nabla^2 + b_{\varphi_i 0})w_2 + (c_{\varphi_i 2}\nabla^2 + c_{\varphi_i 0})w_4, \quad (i = 2, 4), \tag{3.160}$$

де a, b, c з індексами–МГП, які визначаються залежностями (А.11).

Перші два ДР (3.157) і ДР (3.159) з урахуванням (3.160) перетворюються до СДР:

$$T_{i1}u_0 + T_{i2}v_0 + T_{i3}w_2 + T_{i4}w_4 = T_{ip}P, \quad (i=1, 2, 3, 4). \tag{3.161}$$

Показано, що диференціальна матриця СДР (3.161) симетрична. В (3.161):

$$\begin{aligned}
T_{11} &= d_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad T_{12} = d_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad T_{13} = \frac{\partial}{\partial x} (d_{131} \nabla^2 + d_{132}); \\
T_{14} &= \frac{\partial}{\partial x} (d_{141} \nabla^2 + d_{142}); \quad T_{1p} = (\gamma_{u0} - \gamma_{151} a_{\varphi 2p} - \gamma_{191} a_{\varphi 4p}) \frac{\partial}{\partial x}; \\
T_{22} &= d_{221} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_{222} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad T_{23} = \frac{\partial}{\partial y} (d_{231} \nabla^2 + d_{232}); \\
T_{24} &= \frac{\partial}{\partial y} (d_{241} \nabla^2 + d_{242}); \quad T_{2p} = (\gamma_{u0} - \gamma_{261} a_{\varphi 2p} - \gamma_{2101} a_{\varphi 4p}) \frac{\partial}{\partial y}; \\
T_{33} &= d_{331} \nabla^4 + d_{332} \nabla^2 + d_{333}; \quad T_{34} = d_{341} \nabla^4 + d_{342} \nabla^2 + d_{343}; \quad T_{3p} = d_{3p2} \nabla^2 + d_{3p0}; \\
T_{44} &= d_{441} \nabla^4 + d_{442} \nabla^2 + d_{443}; \quad T_{4p} = d_{4p2} \nabla^2 + d_{4p0},
\end{aligned} \tag{3.162}$$

де сталі d з індексами–МГП, визначаються згідно з (А.12).

Загальні розв'язки СДР вихрового КЕ (3.158) зображуються так:

$$\psi_2(x, y) = (\gamma_{992} \nabla^2 + \gamma_{993}) \psi; \quad \psi_4 = -\gamma_{592} \psi, \tag{3.163}$$

де $\psi(x, y)$ є розв'язком ДР 4-го порядку

$$S_0 \psi(x, y) = 0. \tag{3.164}$$

Тут S_0 – диференціальний визначник СДР (3.158): $S_0 = N_{4B} (\nabla^2 - t_1) (\nabla^2 - t_2)$,
 $N_{4B} = \gamma_{552} \gamma_{992}$; $N_{2B} = \gamma_{552} \gamma_{993} + \gamma_{553} \gamma_{992}$; $N_{0B} = \gamma_{553} \gamma_{993} - \gamma_{592}^2$; t_1, t_2 – корені характеристичного рівняння.

Після знаходження ψ із (3.164) визначаються функції ψ_2 та ψ_4 із (3.163).

Для отримання загальних розв'язків СДР (3.161) введемо нові шукані функції $F_j(x, y)$ ($j=1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned}
u_0(x, y) &= \sum_{j=1}^4 T_{j1}^0 F_j(x, y); \quad v_0(x, y) = \sum_{j=1}^4 T_{j2}^0 F_j(x, y); \\
w_2(x, y) &= \sum_{j=1}^4 T_{j3}^0 F_j(x, y); \quad w_4(x, y) = \sum_{j=1}^4 T_{j4}^0 F_j(x, y),
\end{aligned} \tag{3.165}$$

де T_{jm}^0 – ад'юнкти системи (3.161).

Функції $F_j(x, y)$ ($j=1, 2, 3, 4$) знаходяться з чотирьох визначальних ДР:

$$T_0 F_j = T_{jP} P, \quad (3.166)$$

де $T_0 = N_{8\Pi} \nabla^4 \prod_{i=1}^4 (\nabla^2 - m_i)$, $N_{8\Pi}$, m_i – МГП.

Загальні розв'язки ДР (3.166) зображуються у вигляді:

$$F_1(x, y) = F_{1B}(x, y) + F_{1\Pi}(x, y) + F_{1r}(x, y); \quad F_j(x, y) = F_{jr}(x, y), \quad (j=2, 3, 4), \quad (3.167)$$

де F_{1B} – загальний розв'язок ДР $\nabla^4 F_{1B} = 0$; $F_{jr}(x, y)$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР 12-го порядку (3.166); $F_{1\Pi}$ – загальний розв'язок ДР 8-го порядку:

$$\nabla^4 \left(\prod_{i=1}^4 (\nabla^2 - m_i) \right) F_{1\Pi} = 0. \quad (3.168)$$

Отже, і при симетричному деформуванні пластини розділені рівняння ВНДС та ПKE. Складові u_0, v_0, w_2, w_4 на основі (3.165) і (3.167) визначаються так:

$$u_0(x, y) = T_{11}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^4 T_{j1}^0 F_{jr}; \quad v_0(x, y) = T_{12}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^4 T_{j2}^0 F_{jr}; \quad (3.169)$$

$$w_2(x, y) = T_{13}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^4 T_{j3}^0 F_{jr}; \quad w_4(x, y) = T_{14}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^4 T_{j4}^0 F_{jr}.$$

Складові компонент u_2, v_2, u_4, v_4 , знаходяться із 3-го-6-го ДР (3.157):

$$u_k(x, y) = \sum_{i=0,2}^4 \lambda_{k\varphi i} \varphi_{i,x} + \lambda_{k\psi 2} \psi_{2,y} + \lambda_{k\psi 4} \psi_{4,y} + \lambda_{kw2} w_{2,x} + \lambda_{kw4} w_{4,x} + \lambda_{kP} P_{,x}; \quad (3.170)$$

$$v_k(x, y) = \sum_{i=0,2}^4 \lambda_{k\varphi i} \varphi_{i,y} - \lambda_{k\psi 2} \psi_{2,x} - \lambda_{k\psi 4} \psi_{4,x} + \lambda_{kw2} w_{2,y} + \lambda_{kw4} w_{4,y} + \lambda_{kP} P_{,y},$$

де λ з індексами – МГП пластини.

Таким чином, симетричне деформування пластини визначається СДР 12-го порядку, причому, рівняння, які описують ВKE, ПKE та ВНДС, розділяються. ВKE описується ДР 4-го порядку (3.164) відносно функції ψ ; ПKE визначається ДР 8-го порядку (3.168) відносно функції $F_{1\Pi}$; ВНДС описується загальними

розв'язками бігармонічного рівняння відносно функції F_{1B} та частинними розв'язками $F_{j,r}(x, y)$ чотирьох неоднорідних ДР 12-го порядку (3.166).

3.5.4. Алгоритм розв'язання граничних задач для пластин. Наведемо алгоритм розв'язання граничних задач для пластин довільної товщини в НК135.

1). Для заданих геометричних і механічних параметрів пластини визначаються всі інші МГП (формули (3.8), (A.6), (A.7)).

2). Розв'язки граничної задачі можна знаходити двома шляхами: 1-й–використовуючи СДР рівноваги (3.141) (при $i = 3,4,7,8,11,12,13,15,17$) з крайовими умовами (3.35) (при $N = 5$) урахувуючи $j = 1,3,5$; 2-й–використовуючи розв'язувальні та визначальні ДР. На наш погляд другий шлях простіший, якщо праві частини ДР (3.141) складні, або ж містять розривні функції (див. розд. 8). Зупинимось на 2-у способі. Із ДР (3.147) знаходиться функція $\psi(x, y)$ як загальний розв'язок цього ДР. Через функцію $\psi(x, y)$ визначаються вихрові функції $\psi_1(x, y)$ та $\psi_3(x, y)$ із залежностей (3.146).

3). Знаходяться загальні розв'язки $\Phi_{1B}(x, y)$ бігармонічного рівняння, загальний розв'язок $\Phi_{1D}(x, y)$ ДР 8-го порядку з частинними похідними (3.154) і частинні розв'язки $\Phi_{1r}(x, y), \Phi_{3r}(x, y), \Phi_{5r}(x, y)$ трьох неоднорідних ДР 12-го порядку (3.151). Визначаються загальні розв'язки $\Phi_i(x, y)$ СДР (3.151) згідно з (3.153).

4). За формулами (3.155) знаходяться $w_k(x, y)$ ($k = 1,3,5$).

5). Визначаються функції $\varphi_i(x, y)$ ($i = 1,3,5$) із залежностей (3.148).

6). Знаходяться складові компонент переміщень $u_k(x, y), v_k(x, y)$ (3.156).

7). За формулами (3.139), (3.140) визначаються функції Q, ω, t, s з індексами.

8). За формулами (3.141), (3.142) визначаються функції Q, ω, t, s з індексами.

9). Всі функції ψ, w, u, v, t, s з індексами залежать від сталих інтегрування (всього 16 сталих; 4 сталих ДР (3.147) і 12 сталих ДР (3.151)).

10). Згідно з (3.24) і (3.28) визначаються складові компонент зовнішнього навантаження і переміщень на бічній поверхні пластини.

11) На основі крайових умов (3.35)–(3.40) знаходяться сталі інтегрування. Легко впевнитись, що кількість крайових умов і сталих інтегрування однакова.

12). Згідно з (3.137) – (3.139) визначаються переміщення і напруження з урахуванням кососиметричних складових $u_k(x, y), v_k(x, y), w_k(x, y)$ ($k = 1, 3, 5$).

Аналогічний алгоритм розв'язання граничних задач при симетричному деформуванні, а також в інших наближеннях. Якщо розв'язуються граничні задачі для пластин з урахуванням поперечного обтискання, то потрібно урахувати компоненти НДС при кососиметричному і симетричному деформуваннях і результати скласти.

3.6. Методи розв'язання граничних задач в тригонометричних рядах

3.6.1. Метод розв'язання в одинарних тригонометричних рядах.

3.6.1.1. Кососиметричне деформування. Розглянемо застосування цього методу в НК13. В цьому випадку виконуються граничні умови (3.2) при $p(x, y) = 0$. На краях $y = 0, b$ пластина вільно обіперта, а крайові умови при $x = 0, x = a$ можуть бути довільними кососиметричними відносно серединної площини. Тоді згідно з (3.39) повинні виконуватися крайові умови:

$$u_k(x; y = 0, b) = 0; w_k(x; y = 0, b) = 0; s_{y_i}(x; y = 0, b) = 0, (k = 1, 3; i = 1, 3). \quad (3.171)$$

Розкладемо навантаження $q(x, y)$ в одинарний тригонометричний ряд:

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) S_{ny}, \quad q_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) S_{ny} dy, (S_{ny} = \sin \beta_n y; \beta_n = \pi n / b). \quad (3.172)$$

Розв'язок бігармонічного рівняння зобразиться у вигляді:

$$\Phi_{1B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Bn}(x) S_{ny}, \quad (3.173)$$

де функції $\Phi_{1Bn}(x)$ для кожного n містять по чотири сталі інтегрування.

Загальний розв'язок $\Phi_{1II}(x, y)$ ДР (3.115) шукаємо у формі:

$$\Phi_{1\Pi}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1\Pi n}(x) S_{ny}. \quad (3.174)$$

Ураховуючи (3.174), (3.113) і (3.115), дістанемо ДР для визначення $\Phi_{1\Pi n}(x)$:

$$K_{4\Pi} \Phi_{1\Pi n}^{IV} + (K_{2\Pi} - 2K_{4\Pi} \beta_n^2) \Phi_{1\Pi n}^{II} + (K_{4\Pi} \beta_n^4 - K_{2\Pi} \beta_n^2 + K_{0\Pi}) \Phi_{1\Pi n} = 0, \quad (3.175)$$

характеристичне рівняння якого має вигляд:

$$K_{4\Pi} k^4 + (K_{2\Pi} - 2K_{4\Pi} \beta_n^2) k^2 + (K_{4\Pi} \beta_n^4 - K_{2\Pi} \beta_n^2 + K_{0\Pi}) = 0, \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3.176)$$

Корені рівняння (3.176) залежать від МГП пластини. ДР (3.175) для кожного n функції $\Phi_{1Bn}(x)$ містять по чотири сталі інтегрування.

$$\Phi_{kr}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krn}(x) S_{ny}, \quad (k=1, 3). \quad (3.177)$$

Функції $\Phi_{krn}(x)$ згідно з (3.113) визначаються із рівнянь:

$$\Phi_{jrn}^{VIII} + b_{1n} \Phi_{jrn}^{VI} + b_{2n} \Phi_{jrn}^{IV} = b_{3k} q_n^{II} + b_{4kn} q_n, \quad (3.178)$$

де

$$b_{1n} = (K_{2\Pi} - 4K_{4\Pi} \beta_n^2) / K_{4\Pi}; \quad b_{2n} = (6K_{4\Pi} \beta_n^4 - 3K_{2\Pi} \beta_n^2 + K_{0\Pi}) / K_{4\Pi};$$

$$b_{3k} = \mu_{k2} / K_{4\Pi}; \quad b_{4kn} = -(\mu_{k2} \beta_n^2 + \mu_{k0}) / K_{4\Pi}, \quad (k=1, 3); \quad (b_{1n}, b_{2n}, b_{3k}, b_{4k} - \text{МГП}).$$

За функції $\Phi_{krn}(x)$ можна взяти частинні розв'язки неоднорідних ДР (3.178).

Розв'язки ДР ВКЕ (3.105) знаходимо у формі:

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(x) C_{ny}, \quad (C_{ny} = \cos \beta_n y), \quad (3.179)$$

де для визначення функцій $\Omega_n(x)$ матимемо ДР за структурою подібне рівнянню (3.115) із заміною в ньому коефіцієнтів $K_{4\Pi}$, $K_{2\Pi}$, $K_{0\Pi}$ відповідно на K_{4B} , K_{2B} , K_{0B} . Функції $\Omega_n(x)$ для кожного значення n містять чотири сталі інтегрування.

Функції $\psi_1(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ ДР (3.103), ураховуючи (3.179), матимуть форму:

$$\psi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{1n}(x) C_{ny}; \quad \psi_3(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{3n}(x) C_{ny}, \quad (3.180)$$

де функції $\Omega_{in}(x)$ визначаються через функції $\Omega_n(x)$.

Після знаходження $\Phi_{1Bn}(x)$, $\Phi_{1\Pi n}(x)$, $\Phi_{jrn}(x)$, $\Omega_n(x)$ з урахуванням (3.173), (3.174), (3.177), (3.179) одержуються $\Phi_{1B}(x, y)$, $\Phi_{1\Pi}(x, y)$, $\Phi_{jr}(x, y)$, $\psi(x, y)$. З урахуванням (3.104), (3.108), (3.116), (3.117) та (3.172) і (3.180) дістанемо вирази для $\varphi_k(x, y)$ та складових переміщень u_k, v_k, w_k ($k=1,3$) у вигляді:

$$\begin{aligned} w_k(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(x) S_{ny}, \quad \varphi_k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}(x) S_{ny}, \\ u_k(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(x) S_{ny}, \quad v_k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(x) C_{ny}, \end{aligned} \quad (3.181)$$

де функції $w_{kn}(x)$ та $\varphi_{kn}(x)$ залежать від $\Phi_{1Bn}(x)$, $\Phi_{1\Pi n}(x)$, $\Phi_{krrn}(x)$, $q_n(x)$, а функції $u_{kn}(x)$, $v_{kn}(x)$ – від $\Phi_{1Bn}(x)$, $\Phi_{1\Pi n}(x)$, $\Phi_{krrn}(x)$, $\Omega_n(x)$, $q_n(x)$.

Згідно (3.98) знаходяться функції $Q_{kx}(x, y)$, $Q_{ky}(x, y)$ ($k=1, 3$), $\omega_3(x, y)$:

$$\begin{aligned} Q_{kx}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kxn}(x) S_{ny}, \quad Q_{ky}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kyn}(x) C_{ny}, \quad (k=1,3); \\ \omega_3(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3n}(x) S_{ny}, \end{aligned} \quad (3.182)$$

де функції від x виражаються через $\Phi_{1Bn}(x)$, $\Phi_{1\Pi n}(x)$, $\Phi_{krrn}(x)$, $\Omega_n(x)$, $q_n(x)$.

На основі (3.98) і (3.182) функції t_{xi}, \dots, t_{yxk} ($k=1, 3$) мають вигляд:

$$\begin{aligned} t_{xi}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} t_{xin}(x) S_{ny}, \quad t_{yi}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{yin}(x) C_{ny}, \quad (i=0, 2, 4); \\ s_{zj}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{zjn}(x) S_{ny}, \quad (j=1, 3, 5); \quad s_{xm}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{xmn}(x) S_{ny}, \\ s_{ym}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{ymn}(x) S_{ny}, \quad (m=1, 3, 5); \quad t_{yxk}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{yxkn}(x) C_{ny}, \quad (k=1, 3), \end{aligned} \quad (3.183)$$

де $t_{xin}(x), \dots, t_{yxkn}(x)$ залежать від $\Phi_{1Bn}(x)$, $\Phi_{1\Pi n}(x)$, $\Phi_{krrn}(x)$, $\Omega_n(x)$, $q_n(x)$.

Як впливає з (3.181) та (3.183) крайові умови (3.171) виконуються.

Сталі інтегрування (12 сталих для кожного n) у функціях, що залежать тільки від x , визначаються із перетворених крайових умов для кососиметричного деформування при $x = 0, x = a$ ($l_x = 1, l_y = 0$):

$$\int_{(s)} \left\{ \sum_{i=1,3}^3 \frac{h}{2i+1} [(s_{xin} l_x - x_{isn}) \delta u_{in} + (t_{yxin} l_x - y_{isn}) \delta v_{in}] + \sum_{i=0,2}^2 \frac{h}{2i+1} (t_{xin} l_x - z_{isn}) \delta w_{i+1n} \right\} ds = 0.$$

На кожному краї задаються по 6 умов. Тут $s_{xin}(x), t_{yxin}(x), t_{xin}(x)$ – функції, що входять в одинарні тригонометричні ряди для $s_{xi}(x, y), t_{yxi}(x, y), t_{xi}(x, y)$:

$$s_{xi}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{xin}(x) S_{ny}, (s_{xi}, s_{xin} \rightarrow t_{xi}, xin); t_{yxi}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{yxin}(x) C_{ny},$$

де $x_{isn}, y_{isn}, z_{isn}$ – сталі коефіцієнти у розкладаннях функцій $x_{si}(x = 0, a; y), y_{si}(x = 0, a; y), z_{si}(x = 0, a; y)$ у тригонометричні ряди на краях $x = 0, a$:

$$x_{si}(x = 0, a; y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{isn} S_{ny}, (x_{si} \rightarrow z_{si}; x_{isn} \rightarrow z_{isn}); y_{si}(x = 0, a; y) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{isn} C_{ny}$$

(сталі $x_{isn}, y_{isn}, z_{isn}$ для $x = 0, x = a$ взагалі мають різні значення).

При постановці задач в переміщеннях маємо по одній умові на кожному із двох країв ($x = 0, x = a$) для кожної із функцій $u_{kn}(x), v_{kn}(x), w_{kn}(x), (k = 1, 3)$.

Маючи вирази для складових переміщень та напружень за формулами (3.99), (3.100) визначаються компоненти переміщень та напружень як функції x, y, z .

3.6.1.2. Симетричне деформування. Розглянемо застосування методу одинарних тригонометричних рядів при симетричному деформуванні транстропних пластин в наближенні К02. На лицевих площинах пластини виконуються граничні умови (3.2) при $q(x, y) = 0$. На краях $y = 0, b$ пластина вільно обіперта, а крайові умови при $x = 0, x = a$ можуть бути довільними симетричними відносно серединної площини пластини. Крайові умови приймають вигляд:

$$u_k(x; y = 0, b) = 0; w_k(x; y = 0, b) = 0; s_{yi}(x; y = 0, b) = 0, (k = 0, 2; i = 0, 2). (3.184)$$

Навантаження $p(x, y)$ розвинемо в одинарний тригонометричний ряд:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) S_{ny}, \quad p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b p(x, y) S_{ny} dy. \quad (3.185)$$

Загальний розв'язок ДР ВКЕ (3.123) зобразиться у вигляді:

$$\psi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n}(x) C_{ny}, \quad (3.186)$$

де $\psi_{2n}(x) = C_{1n} e^{\sqrt{\alpha_n} x} + C_{2n} e^{-\sqrt{\alpha_n} x}$, $(\alpha_n = \beta_n^2 - \gamma_{333} / \gamma_{332})$; C_{jn} ($j=1, 2$) – сталі інтегрування, $\alpha_n > 0$ для всіх МГП.

Загальний розв'язок $F_{1B}(x, y)$ бігармонічного ДР:

$$F_{1B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{1Bn}(x) S_{ny}, \quad (3.187)$$

де $\Phi_{1Bn}(x) = (C_{3n} + C_{4n}x) ch \beta_n x + (C_{5n} + C_{6n}x) sh \beta_n x$.

Загальний розв'язок $F_{1\Pi}(x, y)$ ДР (3.134) по структурі співпадає із (3.174):

$$F_{1\Pi}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{1\Pi n}(x) S_{ny}, \quad (3.188)$$

де $F_{1\Pi n}(x)$ визначаються із ДР

$$N_{4\Pi} F_{1\Pi n}^{IV} + (N_{2\Pi} - 2N_{4\Pi} \beta_n^2) F_{1\Pi n}^{II} + (N_{4\Pi} \beta_n^4 - N_{2\Pi} \beta_n^2 + N_{0\Pi}) F_{1\Pi n} = 0.$$

Частинні розв'язки неоднорідних ДР (3.129) шукаються у вигляді:

$$F_{jr}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{jrn}(x) S_{ny}, \quad (j=1, 3), \quad F_{2r}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{2rn}(x) C_{ny}, \quad (3.189)$$

де функції $F_{jrn}(x)$ визначаються як частинні розв'язки ДР:

$$c_1 F_{1rn}^{VIII} + c_2 F_{1rn}^{VI} + c_3 F_{1rn}^{IV} = \delta_{04} p'_n, \quad c_1 F_{2rn}^{VIII} + c_2 F_{2rn}^{VI} + c_3 F_{2rn}^{IV} = \delta_{04} \beta_n p_n,$$

$$c_1 F_{3rn}^{VIII} + c_2 F_{3rn}^{VI} + c_3 F_{3rn}^{IV} = \delta_{010} p''_n - (\delta_{010} \beta_n^2 + \delta_{011}) p_n, \quad (c_i - \text{МГП}).$$

Знайшовши $\psi_{2n}(x)$, $F_{1Bn}(x)$, $F_{1In}(x)$, $F_{jrn}(x)$ ($j=1, 2, 3$), одержуються із (3.186)–(3.189) функції $\psi_2(x, y)$, $F_{1B}(x, y)$, $F_{1I}(x, y)$, $F_{jr}(x, y)$, а потім з урахуванням (3.135) визначаються складові переміщень $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$:

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(x) S_{ny}, \quad v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n}(x) C_{ny}, \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n}(x) S_{ny}, \quad (3.190)$$

Функції $\varphi_0(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ зображуються згідно з (3.21) та (3.124):

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn}(x) S_{ny}, \quad (j=0, 2). \quad (3.191)$$

Складові переміщень $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ знаходяться на основі (3.136), приймаючи до уваги (3.185), (3.186), (3.190) і (3.191):

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x) S_{ny}, \quad v_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n}(x) C_{ny}. \quad (3.192)$$

Функції $u_{0n}(x)$, $v_{0n}(x)$, $\varphi_{0n}(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $w_{2n}(x)$ залежать від $p_n(x)$, $F_{1Bn}(x)$, $F_{1In}(x)$, $F_{jrn}(x)$ ($j=1, 2, 3$), а $u_{2n}(x)$ і $v_{2n}(x)$ із (3.192) залежать ще й від $\psi_{jn}(x)$.

Структура функцій двох змінних Q_{2x} , Q_{2y} , ω_2 , t_{xi} , t_{yi} ($i=1,3$), s_{zj} , ($j=0,2,4$); s_{xm} , s_{ym} ($m=0,2,4$), t_{yjk} ($k=0, 2$) аналогічна (3.181)–(3.183).

Крайові умови (3.184) виконуються. Сталі інтегрування (10 сталих для кожного значення n) знаходяться із крайових умов (3.35) (для $N=2$, $j=0,2$) на краях пластини при $x=0$, $x=a$, які відображають симетричне деформування. При постановці задач в переміщеннях маємо по одній умові на кожному із двох країв для кожної із функцій $u_{0n}(x)$, $v_{0n}(x)$, $u_{2n}(x)$, $v_{2n}(x)$, $w_{2n}(x)$.

3.6.2. Метод розв'язання в подвійних тригонометричних рядах.

3.6.2.1. Кососиметричне деформування. Розглянемо наближення К13. На лицевих площинах виконуються граничні умови (3.2) при $p=0$.

Прийmemo, що при $x=0, a$; $y=0, b$ виконуються крайові умови Нав'є:

$$v_k(x=0, a; y) = 0, \quad w_k(x=0, a; y) = 0, \quad s_{xi}(x=0, a; y) = 0;$$

$$u_k(x; y=0, b) = 0, \quad w_k(x; y=0, b) = 0, \quad s_{y_i}(x; y=0, b) = 0, \quad (k=1, 3; i=1, 3). \quad (3.193)$$

Розвинемо навантаження $q(x, y)$ в подвійний тригонометричний ряд Фур'є:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} S_{mx} S_{ny}, \quad q_{mn} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) S_{mx} S_{ny} dx dy; \quad (3.194)$$

де тут і надалі $S_{mx} = \sin \alpha_m x$, $C_{mx} = \cos \alpha_m x$, $\alpha_m = m\pi/a$.

При вказаних крайових умовах вихровий та потенціальний КЕ будуть відсутні ($\psi_j(x, y) \equiv 0$, ($j=1, 3$); $\Phi_{1\Pi} \equiv 0$) і ВНДС пластини визначатиметься частинними розв'язками Φ_{1r} , Φ_{3r} двох неоднорідних ДР 8-го порядку (3.112). Шукатимемо частинні розв'язки $\Phi_{1r}(x, y)$ та $\Phi_{3r}(x, y)$ рівнянь (3.112) у формі:

$$\Phi_{kr}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krmn} S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{krmn} = const, \quad (k=1, 3). \quad (3.195)$$

Із (3.112) з урахуванням (3.194) і (3.195) знаходяться коефіцієнти Φ_{krmn} :

$$\Phi_{krmn} = \frac{-q_{mn}(\mu_{k2}\alpha_{\beta} + \mu_{k0})}{\alpha_{\beta}^2(K_{4\Pi}\alpha_{\beta}^2 - K_{2\Pi}\alpha_{\beta} + K_{0\Pi})}; \quad \alpha_{\beta} = \alpha_m^2 + \beta_n^2; \quad (k=1, 3).$$

Складові $w_k(x, y)$ ($k=1, 3$) на основі (3.116) та (3.195) приймуть вигляд:

$$w_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kmn} S_{mx} S_{ny}, \quad (3.196)$$

де

$$w_{kmn} = a_{k1mn} \Phi_{1r mn} + a_{k3mn} \Phi_{3r mn}; \quad a_{11mn} = \mu_{334} \alpha_{\beta}^2 - \mu_{332} \alpha_{\beta} + \mu_{330};$$

$$a_{13mn} = -(\mu_{134} \alpha_{\beta}^2 - \mu_{132} \alpha_{\beta}); \quad a_{31mn} = -(\mu_{314} \alpha_{\beta}^2 - \mu_{312} \alpha_{\beta}); \quad a_{33mn} = \mu_{114} \alpha_{\beta}^2.$$

Функції $\varphi_k(x, y)$ ($k=1, 3$) на основі (3.108), (3.194) і (3.196) мають вигляд:

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmn} S_{mx} S_{ny}, \quad (3.197)$$

де $\varphi_{kmn} = -\lambda_{k1} \alpha_{\beta} w_{1mn} + (\lambda_{k2} - \lambda_{k3} \alpha_{\beta}) w_{3mn} + \lambda_{k4} q_{mn}$.

Складові компонент переміщень $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ ($k=1, 3$) на основі (3.117), (3.194), (3.196) та (3.197) визначаються таким чином:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kmn} C_{mx} S_{ny}; \quad v_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn} S_{mx} C_{ny}. \quad (3.198)$$

В (3.198) $u_{kmn} = \alpha_m (\lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1mn} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3mn} + \lambda_{kw1} w_{1mn} + \lambda_{kw3} w_{3mn} + \lambda_{kq} q_{mn})$,

$$v_{kmn} = \beta_n (\lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1mn} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3mn} + \lambda_{kw1} w_{1mn} + \lambda_{kw3} w_{3mn} + \lambda_{kq} q_{mn}).$$

Тоді функції Q_{kx}, \dots, t_{yxk} знаходяться згідно з формул (3.98) і (3.198):

$$\begin{aligned} Q_{kx}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kxmn} C_{mx} S_{ny}; \quad Q_{ky}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kymn} S_{mx} C_{ny}; \\ \omega_3(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3mn} S_{mx} S_{ny}; \\ t_{xi}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{ximn} C_{mx} S_{ny}, \quad t_{yi}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yimn} S_{mx} C_{ny}, \quad (i = 0, 2, 4); \quad (3.199) \\ s_{zj}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{zjmn} S_{mx} S_{ny}, \quad (j = 1, 3, 5); \quad s_{xl}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{xlmn} S_{mx} S_{ny}, \\ s_{yl}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{ylmn} S_{mx} S_{ny}, \quad (l = 1, 3, 5); \quad t_{yxk}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yxmn} C_{mx} C_{ny}, \quad (k = 1, 3), \end{aligned}$$

де $Q_{kxmn}, \dots, t_{yxmn}$ – сталі, що залежать від МГП пластини і $\Phi_{krmn}, \dots, v_{kmn}$.

Крайові умови (3.193) виконуються.

Компоненти НДС пластини визначатимуться згідно з (3.99) і (3.100).

3.6.2.2. Симетричне деформування. Розглянемо наближення К02. На лицевих площинах виконуються граничні умови (3.2), при $q = 0$, а на краях:

$$v_k(x = 0, a; y) = 0, \quad w_k(x = 0, a; y) = 0, \quad s_{xi}(x = 0, a; y) = 0; \quad (3.200)$$

$$u_k(x; y = 0, b) = 0, \quad w_k(x; y = 0, b) = 0, \quad s_{yi}(x; y = 0, b) = 0, \quad (k = 0, 2; i = 0, 2, 4).$$

Зобразимо $p(x, y)$ у вигляді подвійного тригонометричний ряду:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} S_{mx} S_{ny}, \quad p_{mn} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) S_{mx} S_{ny} dx dy. \quad (3.201)$$

Для розглядуваних крайових умов КЕ відсутні. ВНДС пластини визначається частинними розв'язками F_{jr} трьох неоднорідних ДР 8-го порядку (3.129).

Шукатимемо частинні розв'язки $F_{jr}(x, y)$ у вигляді:

$$F_{1r} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1r mn} C_{mx} S_{ny}; \quad F_{2r} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{2r mn} S_{mx} C_{ny}; \quad F_{3r} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{3r mn} S_{mx} S_{ny}, \quad (3.202)$$

де $F_{jrmn} = \text{const}$ ($j = 1, 2, 3$).

Підставляючи $p(x, y)$ та $F_{jr}(x, y)$ у (3.131), одержимо:

$$F_{1r mn} = \frac{\delta_{04} \alpha_m p_{mn}}{N_{mn}}; \quad F_{2r mn} = \frac{\delta_{04} \beta_n p_{mn}}{N_{mn}}; \quad F_{3r mn} = \frac{-p_{mn} [\delta_{010} (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + \delta_{011}]}{N_{mn}},$$

де $N_{mn} = [N_{4\Pi} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - N_{2\Pi} (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + N_{0\Pi}] (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2$.

Тоді для $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_2(x, y)$ із (3.135), (3.128) і (3.202) дістанемо:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} C_{mx} S_{ny}; \quad v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} S_{mx} C_{ny}; \quad (3.203)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{2mn} S_{mx} S_{ny},$$

де сталі u, v, w з індексами–МГП, визначаються за формулами (А.13).

Функції $\varphi_0(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ визначаються на основі (3.21), (3.124), (3.203):

$$\varphi_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{imn} S_{mx} S_{ny}, \quad (i = 0, 2), \quad (3.204)$$

де

$$\varphi_{0mn} = -(\alpha_m u_{0mn} + \beta_n v_{0mn}); \quad \varphi_{2mn} = \eta_{20} \varphi_{0mn} + (\eta_{22} - \eta_{21} \alpha_\beta) w_{2mn} + \eta_{23} p_{mn}.$$

Складові u_2 , v_2 , ураховуючи (3.201), (3.203), (3.204), знаходяться із (3.136)

$$u_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{2mn} C_{mx} S_{ny}; \quad v_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{2mn} S_{mx} C_{ny}, \quad (3.205)$$

де

$$u_{2mn} = \alpha_m (\lambda_{2\varphi 0} \varphi_{0mn} + \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2mn} + \lambda_{2w 2} w_{2mn} + \lambda_{2p} p_{mn});$$

$$v_{2mn} = \beta_n (\lambda_{2\varphi 0} \varphi_{0mn} + \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2mn} + \lambda_{2w 2} w_{2mn} + \lambda_{2p} p_{mn}).$$

Функції двох змінних $Q_{2x}, Q_{2y}, \omega_2, t_{xi}, t_{yi}, (i=1, 3); s_{zj}, (j=0, 2, 4); s_{xl}, s_{yl} (l=0, 2, 4); t_{yjk}, (k=0, 2)$ на основі (3.201), (3.203), (3.205) мають вигляд (3.199). Неважко впевнитись у тому, що крайові умови (3.200) виконуються.

НДС визначаються через складові компонент за відповідними формулами.

3.6.2.3. Локальні і зосереджені навантаження. Не зменшуючи загальності підходу, розглянемо НК13 і випадок кососиметричного деформування з поперечними навантаженнями $q(x, y)/2 = q_0/2 = const$, які напрямлені вниз і діють на прямокутні площинки з розмірами $2\xi, 2\eta$ з центрами площинок у точках $A_1(x=c; y=d; z=-h/2), A_2(x=c; y=d; z=h/2)$, $x \in [-\xi; c + \xi], y \in [-\eta; d + \eta]$. Виконуються граничні умови (3.2) при $p(x, y) = 0$. Граничні умови (3.3), (3.4) на бічній поверхні також кососиметричні відносно серединної площини пластини. Інтегруючи рівність (3.194) в області пластини, отримаємо:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{ab\alpha_m\beta_n} \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \eta). \quad (3.206)$$

Тоді $q(x, y)$ згідно (3.194) і (3.206) зобразиться тригонометричним рядом:

$$q(x, y) = \frac{16q_0}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m \beta_n} \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \eta) S_{mx} S_{ny}. \quad (3.207)$$

Якщо в точках A_1 і A_2 діють зосереджені сили $F_q/2$, які напрямлені вниз, то, покладаючи, що $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, q_0 \cdot 2\xi \cdot 2\eta \rightarrow F_q$, дістанемо із (3.206):

$$q_{mn} = 4F_q \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) / (ab) \quad (3.208)$$

і функція поперечного навантаження $q(x, y)$ зобразиться у вигляді ряду:

$$q(x, y) = \frac{4F_q}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m \beta_n} \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) S_{mx} S_{ny}. \quad (3.209)$$

Отже, при дії зосереджених поперечних сил $F_q/2$, прикладених у точках A_1, A_2 і напрямлених униз, навантаження $q(x, y)$ у правих частинах СДР (3.101),

(3.109) зображується у вигляді (3.209), що еквівалентно наявності в правих частинах цих СДР функції $F_q \delta(x-c, y-d)$, де $\delta(x-c, y-d)$ – функція Дірака:

$$\delta(x-c, y-d) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } x=c \text{ і } y=d; \\ 0 & \text{для інших } x \text{ і } y. \end{cases}$$

А це тоді означає, що на основі (3.208), (3.209), (3.195)–(3.199) отримані аналітичні розв’язки визначальних ДР і ДР рівноваги при кососиметричному деформування трансформних пластин довільної товщини при правих частинах цих рівнянь, які містять дельта – функцію і її похідні.

Аналогічні отримуються вирази для навантаження $p(x, y)$ при симетричному (обтискуючому) навантаженні відносно серединної площини. В цьому випадку на верхню і нижню лицеві грані на вказаних прямокутних площинках діють поперечні навантаження $p_0/2$, які стискають пластину. Умови (3.3), (3.4) на бічній поверхні також симетричні відносно серединної площини. Залежності (3.202)–(3.205) при дії зосереджених сил $F_p/2$ на верхній і на нижній лицевих гранях у точках A_1 і A_2 , які стискають пластину, дають фундаментальні розв’язки при обтискуючому деформуванні пластини.

Якщо на пластину при кососиметричному навантаженні в точках $A_{1i}(c_i, d_i, z = -h/2)$, $A_{2i}(c_i, d_i, z = h/2)$ ($i = 1, 2, \dots, l$) діють зосереджені сили $F_{qi}/2$, які напрямлені вниз, то функція поперечного навантаження $q(x, y)$ з урахуванням (3.194), (3.209) і принципу суперпозиції зобразиться у вигляді:

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mni} S_{mx} S_{ny} \right), \quad (3.210)$$

де згідно з (3.208):

$$q_{mni} = \frac{4F_{qi}}{ab} \sin(\alpha_m c_i) \sin(\beta_n d_i). \quad (3.211)$$

Тоді для розв’язків (3.195)–(3.199) потрібно взяти їх суми по i від 1 до l :

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(x, y) &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krmni} S_{mx} S_{ny} \right); \\ w_k(x, y) &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kmni} S_{mx} S_{ny} \right); \quad \varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmni} S_{mx} S_{ny} \right); \quad (3.212) \\ u_k(x, y) &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kmni} C_{mx} S_{ny} \right); \quad v_k(x, y) = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmni} S_{mx} C_{ny} \right) \quad (k = 1, 3). \end{aligned}$$

У рядах (3.212) сталі коефіцієнти при тригонометричних функціях залежать від q_{mni} згідно з (3.211) і (3.195)–(3.198). Компоненти напружень на основі (3.99), (3.100) також визначатимуться через сталі q_{mni} .

Аналогічно отримуються розв'язки при симетричному зосередженому навантаженні, а також в інших більш високих наближеннях. Структура тригонометричних рядів для різних наближень однакова.

3.7. Числові результати і їх аналіз

3.7.1. Обґрунтування ефективності варіанта МТ. НДС прямокутних пластин довільної товщини при різних навантаженнях. На основі одержаних ДР варіанта МТ досліджено НДС вільно обіпертих на краях прямокутних пластин ($a \times b \times h$) при дії навантаження:

$$q(x, y) = q_{mn} S_{mx} S_{ny}; \quad p(x, y) = p_{mn} S_{mx} S_{ny} \quad (q_{mn}, p_{mn} - \text{сталі}). \quad (3.213)$$

Числові розрахунки проведені на ПК на мові ФОРТРАН на основі складених пакетів математичних програм, які протестовані для різних частинних випадків з перевіркою достовірності отриманих результатів порівняннями їх у можливих випадках з відомими в літературі. Дослідження виконані для всіх компонент НДС і для широкого класу МГХ пластин при косиметричному навантаженні ($p_{mn}/q_{mn} = 0$) і при навантаженні тільки на верхній лицевій площині (згин з поперечним обтисканням: $p_{mn}/q_{mn} = 1$).

Складові компонент переміщень відшукувались у вигляді:

$$u_k(x, y) = A_{kmn} C_{mx} S_{ny}; v_k(x, y) = B_{kmn} S_{mx} C_{ny}; w_i(x, y) = C_{imn} S_{mx} S_{ny}, \quad (3.214)$$

де індекси k та i приймались відповідно розглядуваному наближенню, а саме: $k = 0, 1; i = 1$ (для НК01); $k = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3$ (НК0-3); $k = 0, 1, \dots, 5; i = 1, 2, \dots, 5$ (НК0-5). При цьому виконувались умови вільного обпирання на бічній поверхні. Сталі $A_{kmn}, B_{kmn}, C_{imn}$ визначались із відповідних систем ЛАР (підпрограма для розв'язування систем ЛАР на мові ФОРТРАН створена і апробована в задачах оптимізації к. т. н. доцентом кафедри будівельної механіки та опору матеріалів ПДАБА С. О. Шульгою). Компоненти переміщень та напружень знаходились згідно з (3.29)–(3.31) з урахуванням відповідного наближення.

При розгляданні циліндричного згину в паралельних Oxz площинах:

$$q(x, y) = q_m S_{mx}; p(x, y) = p_m S_{mx} \quad (q_m, p_m - const), \quad (3.215)$$

а складові компонент переміщень знаходились таким чином:

$$u_k(x, y) = A_{km} C_{mx}; w_i(x, y) = C_{im} S_{mx}, \quad (A_{km}, C_{im} - \text{сталі}); v_k(x, y) = 0. \quad (3.216)$$

Для з'ясування точності і ефективності побудованого варіанта МТ, знаходився також точний розв'язок задачі на основі тривимірних рівнянь ТП з використанням операторного методу. На основі (3.213)–(3.216) та (3.29)–(3.31) знаходились безрозмірні компоненти НДС; безрозмірні компоненти $\tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}, \tilde{U}, \tilde{V}$ визначались для квадратних пластин при $x = y = a/4$. В табл. А.4–А.19 наведені значення компонент НДС за різними наближеннями варіанта МТ (НК1, НК01, НК0-3, НК13, НК0-5, НК135) і за іншими теоріями (КТ-класична теорія, ТР-точний розв'язок за тривимірною ТП) для різних МГП пластин. В цих таблицях: Δ_i – розходження у % з точним розв'язком тривимірної ТП;

У табл. А.4 представлені компоненти НДС, які отримані у [280] на основі ВП Ху-Вашіцу і Лагранжа при урахуванні перших двох наближень. В табл. А.5 для порівняння точності і ефективності побудованого варіанта МТ наведені дані за різними теоріями. Побудований варіант МТ, оснований на ВПР і МВР, дає точніші результати, ніж оснований на ВПР енергоасимптотичний метод [306].

Табл. А.4, А.5 показують, що в НК13 результати варіанта МТ в цілому порівняльні з результатами ВП Ху-Вашіцу і точніші результатів, отриманих за ВП Лагранжа; НДС в НК0-3 варіанта МТ за МВР точніший, ніж за іншими теоріями.

Отже, розроблений варіант МТ при плавних навантаженнях описує достатньо точно НДС товстих пластин і практично точно НДС пластин середньої товщини уже в НК13 (кососиметричне деформування) і в НК0-3 (згинальне деформування з урахуванням поперечного обтискання). НК135 і НК0-5 фактично співпадає з точним розв'язком. Висока точність розробленого варіанта МТ уже в перших наближеннях є обґрунтуванням вибору підходу до побудови варіанта МТ за МВР для розв'язання граничних задач пластин і пологих оболонок.

На рис. А.1–А.14 зображені графіки залежностей безрозмірних компонент НДС від $\tilde{z} = z/h$ для ізотропних і трансропних квадратних пластин за точною теорією та різними наближеннями варіанта МТ для параметрів $m = n = 1$, а на рис. А.15, А.16 при $m = n = 9$. Рис. А.9 і інші чисельні дані вказують на високу точність визначення НДС за НК13 навіть для товстих плит. Для компонент $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{W}$ результати за КТ і НК1 суттєво відрізняються від ТТ. Напруження $\tilde{\sigma}_z$ за НК13, НК135 і ТТ відрізняються мало, залежність $\tilde{\sigma}_z$ від \tilde{z} в межах $-0,4 \leq \tilde{z} \leq 0,4$ практично лінійна, а поблизу лицевих площин слабо нелінійна.

Рис. А.10 та інші результати показують, що урахування поперечного обтискання призводить до зростання нелінійності змінення компонент НДС по товщині і деякому розходженню результатів за ТТ і НК0-3; для $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{yx}$ і \tilde{W} певні розходження мають місце на лицевих площинах, причому, на нижній лицевій площині вони більші, ніж на верхній, для $\tilde{\sigma}_z$ і $\tilde{\sigma}_{xz}$ результати за НК0-3 і ТТ практично не відрізняються. НК0-5 з високою точністю описує НДС навіть товстих плит.

Збільшення податливості на поперечний зсув призводить до зростання нелінійності змінення компонент $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{\sigma}_{xz}$ по товщині і зменшенню точності НК13, НК135, в основному на лицевих площинах – для $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{W}$. Для $\tilde{\sigma}_{xz}$ певні розходження з точними результатами мають місце приблизно для

$z \in (-0,35; -0,15)$; $z \in (-0,05; 0,05)$; $z \in (0,15; 0,35)$. Нелінійність змінення $\tilde{\sigma}_z$ по товщині при зростанні G/G' зменшується і близьке до лінійного; НК0-3, НК0-5 описують $\tilde{\sigma}_z$ достатньо точно.

Рис. А.15, А.16 і табл. А.12, А.13 характеризують НДС при швидкозмінюваних в області навантаженнях (полігармонічних; $m = n = 9$). Неплавність навантаження збільшує степінь нелінійного змінення НДС по товщині і може впливати на якісний характер цього змінення. Важливо зазначити, що навіть для тонких пластин вплив змінюваності поперечного навантаження може бути достатньо значним. Для $h/a = 0,1$ значення за класичною теорією менше від точних в 2,10 рази для $\tilde{\sigma}_x$ і в 6,49 рази для \tilde{W} , а за теорією Рейснера (НК1) відповідно в 1,35 і в 1,24 рази (табл. А.12). Як показують наведені результати і виконані додаткові дослідження, при неплavnих навантаженнях НК0-3 дає для тонких плит достатньо точні результати, але для середньої товщини і товстих плит НК0-3 не дає задовільних результатів для НДС ні при згинальному ні при згинально-обтискуючому деформуванні. НК0-5 дає для $\tilde{\sigma}_x$ значну різницю з точними значеннями, але з високою точністю описує поперечні переміщення. Аналіз даних табл. А.12, А.13 і додаткових чисельних результатів показує, що змінюваність поперечного навантаження, яку характеризуватимемо для ізотропних пластин параметром $\lambda = a/m$ (довжина півхвилі синусоїдального навантаження) впливає на точність результатів, одержаних на основі наближень варіанта МТ. Високоточні результати для НДС (розходження з точними менше 3%) при згинальному деформуванні дає наближення К13 при $\lambda \geq 1,8h$, а при згинально-обтискуючому деформуванні наближення К0-3 при $\lambda \geq 2h$.

Табл. А.6–А.13 характеризують компоненти НДС в залежності від \tilde{z} для різних навантажень і наближень. Наведені розходження Δ_{t5} , Δ_{t3} , Δ_{t1} у відсотках між ТТ (індекс t) і наближеннями варіанта МТ; Δ_{pq} характеризує розходження у % між НДС при урахуванні і без урахування поперечного обтискання, яке віднесене до компонентів з урахуванням поперечного обтискання. Вплив поперечного обтискання на НДС може бути достатньо суттєвим. Із зменшенням товщини, збільшенням податливості на поперечний зсув, зменшенням податливості на поперечне стискання вплив поперечного об-

тискання на НДС спадає. Збіжність результатів покращується із зменшенням податливості на поперечний зсув, із зменшенням товщини. Зазначимо високу збіжність при плавних навантаженнях ($m = n = 1$) в широких межах змінення МГХ навіть для товстих пластин.

В табл. А.16 – А.19 Δ – це розходження у відсотках між точними значеннями і наближеними К13, К0-3. Із цих табл. випливає, що НК0-3 дає високоточні результати (Δ менші 3%) у широких межах змінення МГХ пластин.

В табл. А.20 подані числові результати для компонент НДС квадратних ізотропних і трансропних пластин в різних наближеннях в залежності від кількості S членів ряду (3.194) для $q(x, y)$ при кососиметричному навантаженні. Для ізотропної пластини приймалось $m = n = 1, 3, \dots, 29$, а для трансропної – $m = n = 1, 3, \dots, 11$, що відповідало сумарному поперечному навантаженню на верхній і нижній лицевих площинах у вигляді, зображеному на рис. А.17, А.18 (тут позначено $q_{mm} = q_0$, див (3.213)). Це навантаження характеризується високою інтенсивністю в центрі пластини і невисокою – поза ним (називатимемо квазізосередженим навантаженням у центрі пластини). Слід зазначити, що теорія Тимошенко-Рейснера (НК1) дає незадовільні результати для $\tilde{\sigma}_x$ і особливо для $\tilde{\sigma}_z$, що вказує на неможливість її використання навіть для тонких пластин при квазізосереджених навантаженнях. З іншого боку НК13 дає в певній мірі достатню точність, а К135 практично точно описує НДС пластин із наведеними МГХ, що вказує на високу точність розглянутого варіанта МТ у високих наближеннях при квазізосереджених навантаженнях і дає впевненість у високій точності і при інших більш локальних навантаженнях. У [315] в НК13 розглядалась задача згину трансропної пластини ($a \cdot a \cdot h$), яка зазнає дії локального поперечного навантаження у вигляді піраміди з квадратною площинкою основи $a/3$. Числові результати добре співпадають для ізотропної пластини з точним розв'язком [388].

3.7.2. Крайові ефекти.

3.7.2.1. Крайові ефекти при кососиметричному деформуванні. Розглянемо НК13. У цьому випадку в ДР входять складові тангенціальних переміщень з індексами 1, 3. ВКЕ та ПКЕ описуються рівняннями 4-го порядку (3.105) і (3.115) відносно функцій $\psi(x, y)$ та $\Phi_{1II}(x, y)$.

Для дослідження ВКЕ та ПКЕ розглянемо аналогічно [53] півнескінченну пластину. Вісь Oy напрямимо вздовж краю пластини $x = 0$, біля якого локалізуються КЕ; вісь Ox – за нормаллю до контуру в глибину пластини. Вважатимемо, що напружений стан біля краю пластини $x = 0$ не залежить від координати y . Тоді рівняння (3.105) і (3.115) приймуть вигляд:

$$(h^2 \tilde{K}_{4B} d^4 / dx^4 + \tilde{K}_{2B} d^2 / dx^2 + \tilde{K}_{0B} / h^2) \psi(x) = 0; \quad (3.217)$$

$$(h^2 \tilde{K}_{4\Pi} d^4 / dx^4 + \tilde{K}_{2\Pi} d^2 / dx^2 + \tilde{K}_{0\Pi} / h^2) \Phi_{1\Pi}(x) = 0, \quad (3.218)$$

де $\tilde{K}_{4B}, \dots, \tilde{K}_{0\Pi}$ – безрозмірні МП, які одержуються із (3.106), (3.113).

Згасаючі розв'язки ДР ВКЕ (3.217) мають експоненціальний характер:

$$\psi(x) = C_1 \exp(-\tilde{\lambda}_1 x / h) + C_3 \exp(-\tilde{\lambda}_3 x / h),$$

де $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3$ – показники змінюваності (ПЗ) двох перших вихрових пограншарів (ПШ):

$$\tilde{\lambda}_1 = 10,106 \sqrt{G' / G}, \quad \tilde{\lambda}_3 = 3,142 \sqrt{G' / G}. \quad (3.219)$$

Згасаючі розв'язки рівняння (3.218) залежно від МП пластини мають експоненціальний або осцилюючий характер згасання. Так, якщо $\tilde{D}_K > 0$; $\tilde{k}_1 > 0$; $\tilde{k}_3 > 0$, де

$$\tilde{D}_K = \tilde{K}_{2\Pi}^2 - 4\tilde{K}_{4\Pi}\tilde{K}_{0\Pi}, \quad \tilde{k}_{1,3} = (-\tilde{K}_{2\Pi} \pm \sqrt{\tilde{D}_K}) / (2\tilde{K}_{4\Pi}), \quad (3.220)$$

то згасаючі розв'язки рівняння (3.221) мають експоненціальний характер:

$$\Phi_{1\Pi}(x) = D_1 \exp(-\tilde{\alpha}_1 x / h) + D_3 \exp(-\tilde{\alpha}_3 x / h); \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\tilde{k}_1}, \quad \tilde{\alpha}_3 = \sqrt{\tilde{k}_3}, \quad (3.221)$$

де $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3$ – ПЗ двох перших потенціальних пограншарів.

Якщо ж $\tilde{D}_K < 0$, то згасаючі розв'язки (3.218) будуть мати осцилюючий характер:

$$\Phi_{1\Pi}(x) = B_1 \exp(-\tilde{\alpha}_K x / h) \cos(\tilde{\beta}_K x / h) + B_3 \exp(-\tilde{\alpha}_K x / h) \sin(\tilde{\beta}_K x / h), \quad (3.222)$$

де

$$\tilde{\alpha}_K = \sqrt{\tilde{\rho}_K} \tilde{c}_K; \quad \tilde{\beta}_K = \tilde{d}_K \sqrt{\tilde{\rho}_K}; \quad \tilde{d}_K = \sqrt{\frac{\tilde{\rho}_K - \tilde{a}_K}{2\tilde{\rho}_K}}; \quad \tilde{\rho}_K = \sqrt{\tilde{a}_K^2 + \tilde{b}_K^2};$$

$$\tilde{c}_K = \sqrt{\frac{\tilde{a}_K + \tilde{\rho}_K}{2\tilde{\rho}_K}}; \quad \tilde{a}_K = -\tilde{K}_{2П} / (2\tilde{K}_{4П}); \quad \tilde{b}_K = \sqrt{|\tilde{D}_K|} / (2\tilde{K}_{4П}).$$

Із (3.219) – (3.222) показники змінюваності вихрових і потенціальних пограншарів не залежать від ГП пластини.

У табл. А.21 наведені ПЗ для вихрового і потенціального пограншарів пластини. У 4-й колонці наведені ПЗ $\tilde{\lambda}_K$ вихрового пограншару, якщо в даній теорії враховувати тільки ψ_1 . У 5-й колонці для порівняння наведені результати для $\tilde{\lambda}$, отримані в [286].

При збільшенні податливості на поперечний зсув ПЗ 1-го ($\tilde{\lambda}_1$) і 2-го ($\tilde{\lambda}_3$) вихрових пограншарів зменшуються, що призводить до більшої глибини проникнення обох вихрових пограншарів. Оскільки ПЗ $\tilde{\lambda}_3$ 2-го вихрового ПШ більше відповідного ПЗ $\tilde{\lambda}_1$ 1-го ПШ, то це означає, що глибина проникнення 2-го ПШ менше глибини проникнення 1-го ПШ, тобто другий ПШ уточнює НДС у більш вузькій області біля краю, ніж 1-й ПШ. Отже, можна виділити три області дії ВКЕ: область А ($0 \leq x \leq l_a$) – обмежена від краю $x = 0$ глибиною проникнення l_a 2-го ПШ, в ній ВНДС уточнюється 1-м і 2-м пограншарами; Область Б ($l_a \leq x \leq l_b$) – обмежена глибиною проникнення l_b 1-го ПШ і знаходиться за межами впливу 2-го ПШ, в ній основний НДС уточнюється тільки 1-м пограншаром; область С ($x \geq l_b$) – в ній ВКЕ практично не впливає на ВНДС.

ПКЕ, як показують додаткові чисельні розрахунки, при $G'/G = 0,7708$ має рівні ПЗ $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_K = 7,9478$. При $G'/G < 0,7708$ ПКЕ має експоненціальний характер, а при $G'/G > 0,7708$ – осцилюючий характер згасання. Причому, при збільшенні податливості на зсув, починаючи з $G'/G = 0,7708$, ПЗ 1-го ПШ зменшуються (і глибина проникнення збільшується). Одержані результати якісно узгоджуються для ізотропних пластин з дослідженнями Й. І. Воревича [55] і достатньо точно описують вплив КЕ на НДС (згідно з точною теорією ізотропних плит

А. І. Лур'є [238] ПЗ мають значення: $\tilde{\lambda}_1 = 3,142$; $\tilde{\lambda}_3 = 9,423$; $\tilde{\alpha}_1 = 7,498$; $\tilde{\alpha}_3 = 13,90$).
Зазначимо також, що отримані ПЗ для ізотропної пластини співпадають з [310].

3.7.2.2. Крайові ефекти при симетричному деформуванні. Розглянемо наближення К02. ДР містять складові тангенціальних переміщень з індексами 0, 2. ВКЕ та ПКЕ описуються ДР 2-го порядку відносно функції $\psi_2(x, y)$ (3.123) та 4-го порядку відносно функції $F_{1II}(x, y)$ (3.134).

Аналогічно кососиметричному деформуванню, отримуються рівняння ВКЕ та ПКЕ:

$$(d^2 / dx^2 - \tilde{\gamma}_{333} / h^2) \psi_2(x) = 0; \quad (3.223)$$

$$(h^2 \tilde{N}_{4II} d^4 / dx^4 + \tilde{N}_{2II} d^2 / dx^2 + \tilde{N}_{0II} / h^2) F_{1II}(x) = 0, \quad (3.224)$$

де $\tilde{\gamma}_{333}, \dots, \tilde{N}_{0II}$ – безрозмірні МП, що одержуються із (А.5), (3.130).

Згасаючий розв'язок рівняння (3.223) зобразиться у вигляді:

$$\psi_2(x) = C_2 \exp(-\tilde{\lambda}_2 x / h), \quad (\tilde{\lambda}_2 = \sqrt{42G' / G} \text{ – ПЗ вихрового КЕ}).$$

Згасаючі розв'язки (3.224) також можуть бути експоненціального (ПЗ $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_2$) або осцилюючого характеру (ПЗ α_s) залежно від МХ пластини. Як і при кососиметричному деформуванні, показники змінюваності вихрового та потенціального ПШ для симетричного деформування також не залежать від ГХ.

У табл. А.22 наведені ПЗ вихрового ($\tilde{\lambda}_2$) та потенціального ($\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_2, \alpha_s$) ПШ для симетричного деформування ізотропної та трансропної пластин.

Якісний характер змінення КЕ із зміненням податливості на поперечний зсув при симетричному деформуванні аналогічний як і для кососиметричного деформування. Слід відмітити, що на основі додаткових чисельних розрахунків ПКЕ при $G' / G = 0,6219$ має рівні ПЗ $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha_s = 4,7412$. При $G' / G < 0,6219$ ПКЕ має експоненціальний характер, а при $G' / G > 0,6219$ – осцилюючий.

Для ПЗ вихрових та потенціальних пограншарів при симетричному і кососиметричному деформуваннях характерні нерівності $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \tilde{\lambda}_3$ та

$\tilde{\alpha}_0 < \tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2 < \tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\alpha}_k > \tilde{\alpha}_s$ незалежно від G'/G . Отже, характерно більш глибоке проникнення ПКЕ для симетричного деформування у порівнянні з відповідним ПКЕ для кососиметричного деформування.

Урахування КЕ є важливим у визначенні НДС, особливо для пластин, суттєво податливих на поперечний зсув.

3.8. Основні прикладні висновки до розрахунку

транстропних пластин довільної товщини

Основні прикладні висновки до розрахунку транстропних пластин довільної товщини опубліковані в [155] і наведені в дод. А.3.

3.9. Обґрунтування використання математичних рядів у варіанті МТ

В процесі аналітичного отримання рівнянь варіанта МТ і при їх перетворенні використовувалися нескінченні математичні ряди для компонент НДС. Виконувались операції інтегрування і диференціювання рядів. З теоретичних позицій виникають питання збіжності рядів, правомірності інтегрування і диференціювання математичних рядів, однозначності розв'язків граничних задач.

Переміщення і напруження варіанта МТ визначаються рядами (3.9), (3.22).

Вирази для напружень (3.22) зобразимо в іншому вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_{xi}(z)u_i(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} B_{wi}(z)w_{i,x}(x, y); \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_{yi}(z)v_i(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} B_{wi}(z)w_{i,y}(x, y); \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_{zi}(z)(u_{i,x}(x, y) + v_{i,y}(x, y)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} B_{zi}(z)w_i(x, y) + C_{zp}(z)p(x, y) + C_{zq}(z)q(x, y); \quad (3.225)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} (A_i(z)u_{i,x}(x, y) + B_i(z)v_{i,y}(x, y)) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(z)w_i(x, y) + \\ &+ C_p(z)p(x, y) + C_q(z)q(x, y), \quad (\sigma_x, u_{i,x}, v_{i,y} \rightarrow \sigma_y, v_{i,y}, u_{i,x}); \\ \sigma_{yx}(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} G_i(z)(u_{i,y}(x, y) + v_{i,x}(x, y)).\end{aligned}$$

У залежностях (3.225):

$$\begin{aligned}A_{x0}(z) &= \sum_{n=0,2}^{\infty} l_{xn0} P_n; \quad A_{xi}(z) = \sum_{n=0,1}^{\infty} l_{xni} P_n, \quad (x \rightarrow y; i=1,2,\dots); \\ B_{wi} &= \sum_{n=1,3}^{\infty} h_{t ni} P_n, \quad (i=2,4,\dots); \quad B_{wi} = \sum_{n=0,2}^{\infty} h_{t ni} P_n, \quad (i=1,3,\dots); \\ A_{zi}(z) &= \sum_{n=0,2}^{\infty} g_{sni} P_n, \quad (i=0,2,\dots); \quad A_{zi}(z) = \sum_{n=1,3}^{\infty} g_{sni} P_n, \quad (i=1,3,\dots); \quad B_{z1} = \sum_{n=0,2}^{\infty} p_{sn1} P_n; \\ B_{zi} &= \sum_{n=0,1}^{\infty} p_{sni} P_n, \quad (i=1,2,\dots); \quad C_{zp} = \sum_{n=0,2}^{\infty} g_{snp} P_n; \quad C_{zq} = \sum_{n=1,3}^{\infty} g_{snq} P_n; \quad (3.226) \\ A_i(z) &= \sum_{n=0,2}^{\infty} a_{sni} P_n, \quad (i=0,2,\dots); \quad A_i(z) = \sum_{n=1,3}^{\infty} a_{sni} P_n, \quad (i=1,3,\dots); \\ B_i(z) &= \sum_{n=0,2}^{\infty} a_{sni} P_n, \quad (i=0,2,\dots; a_{sii} \rightarrow b_{sii}); \quad B_i(z) = \sum_{n=1,3}^{\infty} a_{sni} P_n, \quad (i=1,3,\dots; a_{sii} \rightarrow b_{sii}); \\ C_1 &= \sum_{n=0,2}^{\infty} a_{nw1} P_n; \quad C_i = \sum_{n=0,1}^{\infty} a_{nwi} P_n, \quad (i=2,3,\dots); \quad C_p(z) = \sum_{n=0,2}^{\infty} a_{np} P_n; \quad C_q(z) = \sum_{n=1,3}^{\infty} a_{nq} P_n; \\ G_i(z) &= G P_i; \quad P_k = P_k(2z/h), \quad (k=0,1,\dots),\end{aligned}$$

де l, h, g, p, a, b з індексами–МГП пластини. Числовий аналіз коефіцієнтів (3.226) показує, що із зростанням індексу n вони в цілому зменшуються.

Позначимо замкнену область трьох змінних x, y, z ($-h/2 \leq z \leq h/2$), яку займає пластина, через C_V , а відповідну область змінення x, y –через C_D .

Нехай функції $u_k(x, y), v_k(x, y), w_k(x, y)$ визначені і неперервні в C_D разом зі своїми першими і другими похідними за обома змінними.

Надалі розглядатимемо наступні математичні ряди:

1) математичні ряди для складових компонент переміщень:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y); \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y); \quad \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x, y); \quad (3.227)$$

2) математичні ряди із частинних похідних для рядів (3.227):

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k,x}(x, y); \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,y}(x, y); \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,x}(x, y); \dots; \sum_{k=1}^{\infty} w_{k,y}(x, y); \quad (3.228)$$

В [32, 107, 446] обґрунтовано розкладання неперервних функцій і їх похідних в рівномірно збіжні ряди за системою поліномів Лежандра. В [446] для цього використано класичний спосіб [52, 355]). Наведемо теореми про збіжність рядів для напружень і однозначність розв'язків для другої граничної задачі.

Теорема 1 (про збіжність рядів для напружень) Ряди для напружень (3.225) будуть збігатися в області C_V рівномірно і абсолютно, якщо: 1) збігаються рівномірно і абсолютно ряди (3.227) і (3.228) в області C_D ; 2) збігаються рівномірно і абсолютно ряди $C_{z_p}(z), C_{z_q}(z), C_p(z), C_q(z)$ для $z \in \left[\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$; 3) ряди $A_{xi}, A_{yi}, A_{zi}, A_i, B_{wi}, B_{zi}, B_i, C_i$, які визначаються згідно з (3.226), обмежені для всіх i та всіх $z \in \left[\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$; 4) функції $p(x, y), q(x, y)$ обмежені в C_D .

Доведення. Очевидно, що умови теореми щодо функцій і математичних рядів стосуються також всієї області C_V . Доведемо теорему для ряду (3.225), який визначає напруження $\sigma_x(x, y, z)$:

За теоремою ряди $A_i(z), B_i(z), C_i(z), p(x, y), q(x, y)$ – обмежені. Отже, існує таке $H > 0$, що для всіх $x, y, z \in C_V$ справедливі нерівності:

$$|A_i(z)| < H, |B_i(z)| < H, |C_i(z)| < H, |p(x, y)| < H, |q(x, y)| < H. \quad (3.229)$$

Крім цього, за умовою теореми ряди $\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,x}(x, y), \sum_{i=0}^{\infty} v_{i,y}(x, y), \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x, y),$

$\sum_{i=0,2}^{\infty} a_{ip} P_i(2z/h), \sum_{i=1,3}^{\infty} a_{iq} P_i(2z/h)$ збігаються в області C_V рівномірно і абсолютно.

Це означає, що із збільшенням n залишки цих рядів із модулів наближаються до нуля рівномірно і абсолютно в C_V :

$$r_{nu_x} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |u_{i,x}(x, y)| \rightarrow 0, r_{nv_y} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |v_{i,y}(x, y)| \rightarrow 0, r_{nw} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |w_i(x, y)| \rightarrow 0, \quad (3.230)$$

$$r_{np} = \sum_{i=2n, 2n+2}^{\infty} |a_{ip} P_i(2z/h)| \rightarrow 0, r_{nq} = \sum_{i=2n+1, 2n+3}^{\infty} |a_{iq} P_i(2z/h)| \rightarrow 0.$$

Виходячи з (3.225), (3.229), (3.230), для залишку $R_{n\sigma_x}$ ряду для $\sigma_x(x, y, z)$ маємо:

$$\begin{aligned}
 R_{n\sigma_x} &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (A_i(z)u_{i,x}(x, y) + B_i(z)v_{i,y}(x, y) + C_i(z)w_i(x, y)) + p(x, y) \sum_{i=2n, 2n+2}^{\infty} a_{ip}P_i(2z/h) + \\
 &+ q(x, y) \sum_{i=2n+1, 2n+3}^{\infty} a_{iq}P_i(2z/h) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} (A_i(z)u_{i,x}(x, y) + B_i(z)v_{i,y}(x, y) + C_i(z)w_i(x, y)) + \\
 &+ p(x, y) \sum_{i=2n, 2n+2}^{\infty} a_{ip}P_i(2z/h) + q(x, y) \sum_{i=2n+1, 2n+3}^{\infty} a_{iq}P_i(2z/h) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} (/A_i(z)/ /u_{i,x}(x, y)/ + \\
 &+ /B_i(z)/ /v_{i,y}(x, y)/ + /C_i(z)/ /w_i(x, y)/) + /p(x, y)/ \sum_{i=2n, 2n+2}^{\infty} /a_{ip}P_i(2z/h)/ + \\
 &+ /q(x, y)/ \sum_{i=2n+1, 2n+3}^{\infty} /a_{iq}P_i(2z/h) \leq H \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} (/u_{i,x}(x, y)/ + /v_{i,y}(x, y)/ + /w_i(x, y)/) + \right. \\
 &\left. + \sum_{i=2n, 2n+2}^{\infty} /a_{ip}P_i(2z/h)/ + \sum_{i=2n+1, 2n+3}^{\infty} /a_{iq}P_i(2z/h)/ \right) \leq H(r_{nu_x} + r_{nv_y} + r_{nw} + r_{np} + r_{nq}).
 \end{aligned}$$

Отже, при $n \rightarrow \infty$ залишок ряду $R_{n\sigma_x} \leq H(r_{nu_x} + r_{nv_y} + r_{nw} + r_{np} + r_{nq})$.

На основі (3.230) із останньої нерівності отримуємо, що при $n \rightarrow \infty$ залишок ряду для $\sigma_x(x, y, z)$ прагне до нуля рівномірно і абсолютно. Це означає, що ряд для $\sigma_x(x, y, z)$ збігається рівномірно і абсолютно. Теорему доведено. Аналогічно доводиться рівномірна і абсолютна збіжність рядів для інших напружень.

Про існування розв'язків можна погодитись із проф. Б. Л. Пелехом, який писав у [279]: “поскольку каждая задача оболочек—прежде всего задача физическая, то существование решения этой задачи не вызывает сомнения”. Те ж саме можна сказати і про пластини.

Надалі доведемо теорему про однозначність розв'язку другої основної задачі в довільному наближенні $K0-N$ для лінійно пружних пластин.

СДР рівноваги при відсутності об'ємних сил отримана відносно складових компонент $u_k(x, y), v_k(x, y), w_n(x, y)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, N$; $n = 1, 2, \dots, N$). Граничні умови на лицевих площинах пластини—умови (3.2). Граничні умови на бічній поверхні для першої основної задачі зводяться до задоволення граничних умов у компонентах напружень. Для другої основної задачі складові $u_k(x, y), v_k(x, y), w_n(x, y)$

повинні задовольняти на бічній поверхні граничним умовам у переміщеннях. У випадку змішаної задачі на деякій частині бічної поверхні потрібно задовольнити граничним умовам у напруженнях, а на іншій—у переміщеннях.

Позначимо ліві частини ДР рівноваги, які залежать від складових переміщень, їх перших і других похідних по обох змінних, через $U_{ij}(u_0, u_1, \dots, u_N; v_0, v_1, \dots, v_N; w_1, \dots, w_N)$, $(i, j = 1, 2, \dots, 3N + 2)$. Праві частини залежать від $p(x, y)$ і $q(x, y)$ і їх похідних першого порядку. Позначимо їх $U_{ipq}(p, q)$.

При виведенні теореми вважатимемо виконаними такі фізичні умови: 1) граничні умови виключають переміщення точок пластини як жорсткого цілого, тобто, переміщення викликаються виключно деформуванням пластини; 2) приймемо також гіпотезу про природний стан тіла.

У наближенні К0–N маємо наступні ДР рівноваги і крайові умови.

система ДР рівноваги:

$$U_{ij}(u_0, u_1, \dots, u_N; v_0, v_1, \dots, v_N; w_1, \dots, w_N) = U_i(p, q), (i, j = 1, 2, \dots, 3N + 2); \quad (3.231)$$

граничні умови (3.36) на бічній поверхні Γ :

$$u_i(x, y)_\Gamma = u_{i\Gamma}(x, y), u \rightarrow v, (i = 0, 1, \dots, N); w_j(x, y)_\Gamma = w_{j\Gamma}(x, y), (j = 1, \dots, N), \quad (3.232)$$

де $u_{i\Gamma}(x, y), v_{i\Gamma}(x, y), w_{i\Gamma}(x, y)$ —відомі складові переміщень на бічній поверхні Γ .

Теорема 2 (про однозначність розв'язку другої основної задачі). Якщо лінійно пружна гранична задача (3.231), (3.232) має розв'язок, то він однозначний при вказаних вище умовах 1), 2) і, якщо складові переміщень неперервні разом зі своїми похідними 1-го і 2-го порядків за обома змінними.

Доведення. Теорему доведемо класичним методом (від супротивного). Припустимо, що це не так. Тобто, вважатимемо, що є дві різні системи розв'язків:

$$u'_0, u'_1, \dots, u'_N; v'_0, v'_1, \dots, v'_N; w'_1, \dots, w'_N; \quad (3.233)$$

$$u''_0, u''_1, \dots, u''_N; v''_0, v''_1, \dots, v''_N; w''_1, \dots, w''_N, \quad (3.234)$$

які задовольняють СДР (3.231) і системі граничних умов (3.232). Тобто, маємо:

$$U_{ij}(u'_0, u'_1, \dots, u'_N; v'_0, v'_1, \dots, v'_N; w'_1, \dots, w'_N) = U_i(p, q), (i, j = 1, 2, \dots, 3N + 2); \quad (3.235)$$

$$u'_i(x, y)_\Gamma = u_{i\Gamma}(x, y), (u_i \rightarrow v_i), (i = 0, 1, \dots, N); w'_j(x, y)_\Gamma = w_{j\Gamma}(x, y), (j = 1, \dots, N); \quad (3.236)$$

$$U_{ij}(u''_0, u''_1, \dots, u''_N; v''_0, v''_1, \dots, v''_N; w''_1, \dots, w''_N) = U_i(p, q), (i, j = 1, 2, \dots, 3N + 2); \quad (3.237)$$

$$u''_i(x, y)_\Gamma = u_{i\Gamma}(x, y), (u_i \rightarrow v_i), (i = 0, 1, \dots, N); w''_j(x, y)_\Gamma = w_{j\Gamma}(x, y), (j = 1, \dots, N). \quad (3.238)$$

Віднімемо рівняння (3.237) від (3.235) і (3.238) від (3.236). Дістанемо:

$$U_{ij}(u'_0 - u''_0, \dots, u'_N - u''_N; v'_0 - v''_0, \dots, v'_N - v''_N; w'_1 - w''_1, \dots, w'_N - w''_N) = 0, (i, j = 1, 2, \dots, 3N + 2);$$

$$u'_i(x, y)_\Gamma - u''_i(x, y)_\Gamma = 0, \quad v'_i(x, y)_\Gamma - v''_i(x, y)_\Gamma = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, N); \quad (3.239)$$

$$w'_j(x, y)_\Gamma - w''_j(x, y)_\Gamma = 0, \quad (j = 1, \dots, N).$$

Оскільки задача лінійна і справедливий принцип незалежності дії сил, то функції $u'_0 - u''_0, \dots, u'_N - u''_N; v'_0 - v''_0, \dots, v'_N - v''_N; w'_1 - w''_1, \dots, w'_N - w''_N$ виражають систему розв'язків граничної задачі (3.239) в переміщеннях.

Система (3.239) показує, що нетривіальні розв'язки існують при відсутності об'ємних і поверхневих сил і при відсутності переміщень точок граничної поверхні, тобто, для природного стану пластини. Але цього бути не може. Отримали суперечність. Отже початкове припущення про різну систему розв'язків (3.233) і (3.234) невірне. Це означає, що функції $u'_0 - u''_0, \dots, u'_N - u''_N; v'_0 - v''_0, \dots, v'_N - v''_N; w'_1 - w''_1, \dots, w'_N - w''_N$ повинні бути тотожно рівними нулю. Звідси: $u'_0 = u''_0, \dots, u'_N = u''_N; v'_0 = v''_0, \dots, v'_N = v''_N; w'_1 = w''_1, \dots, w'_N = w''_N$. Тобто обидві системи функцій (3.233) і (3.234) співпадають, що і вказує на єдиність розв'язку цієї граничної задачі. Теорему доведено.

Аналогічна теорема про однозначність розв'язку другої основної задачі справедлива і для лінійно пружних оболонок.

3.10. Висновки по розділу

Для транстропних та ізотропних пластин довільної сталої товщини вирішені наступні проблеми.

1. Побудовано новий варіант МТ транстропних пластин, оснований на методі розкладання усіх компонент НДС і граничних умов (як функцій трьох змінних) у нескінченні математичні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра з використанням ВПР і узагальненням МВР.

2. Уперше розроблено новий метод інтегрування СДРР з частинними похідними високого порядку варіанта МТ вказаних пластин, оснований на математичних перетвореннях і на методі зведення неоднорідних ДР високого порядку до неоднорідних ДР 2-го порядку.

3. Отримані загальні розв'язки СДРР високих порядків МТ пластин, які з будь-якою високою точністю (в наближенні $K0-N$) описують НДС при довільних поперечних навантаженнях.

4. У новій постановці граничних задач варіанта МТ отримані аналітичні розв'язки СДРР у високих наближеннях в одинарних тригонометричних рядах для прямокутних пластин, дві паралельні сторони яких вільно обіперті, а дві інші закріплені довільно.

5. У новій постановці отримані загальні розв'язки та розв'язки граничних задач у подвійних тригонометричних рядах при довільних поперечних навантаженнях (плавних, швидко змінюваних по області, неперервних, переривчастих, локальних, зосереджених).

6. Одержано точний розв'язок тривимірної задачі ТП для транстропних пластин при крайових умовах Нав'є, який використано для порівняння числових результатів з різними наближеннями побудованого варіанта МТ.

7. Показано, що СДР з частинними похідними в граничних задачах для розглядуваних пластин у НК0-N (N – натуральне непарне число) має порядок $(6N+4)$; вона зведена до двох незалежних лінійних крайових задач: одна описує НДС при кососиметричному (має порядок $3(N+1)$), а інша – при симетричному деформуванні (порядок $(3N+1)$). ДР ВНДС, ПКЕ і ВКЕ розділяються. При кососиметричному деформуванні в наближенні $K13\dots N$ ВКЕ описується СДР порядку $(N+1)$, ПКЕ – СДР порядку $2(N-1)$, а ВНДС – бігармонічним рівнянням і частинними розв'язками групи неоднорідних ДР порядку $2(N+1)$. При симетричному деформуванні в НК02... $(N-1)$ ВКЕ описується СДР з частинними похідними порядку $(N-1)$, ПКЕ – СДР порядку $(2N-2)$, а ВНДС – бігармонічним ДР і частинними розв'язками групи неоднорідних ДР порядку $2(N+1)$.

8. Уперше в МТ високого наближення (K0-5, N=5) виведені в явному вигляді граничні умови і СДРР з частинними похідними (34-го порядку), які зведені до неоднорідних ДР 2-го порядку, і дають реальну можливість отримання частинних і загальних розв'язків граничних задач для вказаних пластин при довільному поперечному навантаженні з використанням методів математичної фізики.

9. Розроблені алгоритм визначення НДС пластин і пакети математичних програм на мові ФОРТРАН та отримані чисельні результати НДС пластин довільної сталі товщини при плавних, неплавних, зосереджених і квазізосереджених поперечних навантаженнях. Проведено глибокий аналіз впливу МГП та типу навантаження на НДС, а також збіжності результатів і їх точності в залежності від наближення варіанта МТ. Отримані в широких межах змінення МГХ числові результати вказують на більш високу точність НК0-3 і НК0-5 варіанта МТ в порівнянні з іншими МТ і теоріями, які ґрунтуються на різних гіпотезах, в т. ч. і з теорією типу Тимошенка-Рейснера.

10. Установлено, що НК0-3 з високою точністю описує ВНДС товстих ізотропних пластин при плавних навантаженнях (різниця з точним розв'язком менше 0,6 % для тангенціальних нормальних напружень) і з високою точністю ВНДС тонких та середньої товщини трансропних пластин в широких межах змінення МГП. При неплавних навантаженнях розрахунок за НК01, НК0-3 може давати неточні результати не тільки для пластин середньої товщини, але і для тонких пластин, що вказує на необхідність використання вищих наближень. Високоточні результати для НДС при кососиметричному навантаженні ізотропних пластин НК13 дає при $a/m \geq 1,8h$ (m – кількість півхвиль полігармонічного навантаження), а при згинально-обтискуючому – при $a/m \geq 2,0h$ (розходження з точними менше 3%).

11. Уперше в різних наближеннях МТ нетонких пластин одержані числові результати при квазізосереджених і швидкозмінюваних в області навантаженнях. НК135 дає високоточні результати для квазізосереджених навантажень, а теорія Рейснера – суттєво неточні результати для вказаних навантажень навіть для тонких пластин.

12. Теорія Тимошенка-Рейснера при плавних навантаженнях придатна для опису НДС таких пластин: ізотропних при кососиметричних навантаженнях (НК1) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними для σ_x складає менше 1,44 %, а

для поперечних переміщень—менше 3,92 %); ізотропних пластин при згинально-обтискуючих навантаженнях (уточнена ТТР, НК01) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними по σ_x складає менше 2,99 %, а для поперечних переміщень—5,11%); трансропних пластин ($0,1 \leq G'/G \leq 1,0; E' = E; \nu' = \nu$) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження по W з точними складає при кососиметричному навантаженні менше 2,90 % для $G'/G = 0,1$ і менше 3,92 % для $G'/G = 1$, а при згинально-обтискуючому навантаженні по уточненій теорії менше $(3,33 \div 5,11)$ %).

13. Уперше на основі МТ в НК0-3 для трансропних пластин встановлено якісно-кількісний вплив КЕ на НС, який характеризується показниками змінюваності (ПЗ) пограничарів (ПШ). Встановлено, що із збільшенням номера наближення зростають показники змінюваності НС. При кососиметричному деформуванні із збільшенням податливості на поперечний зсув глибина проникнення 1-го вихрового і потенціального ПШ збільшується, 2-го вихрового збільшується, а потенціального — зменшується. Для ізотропних і податливих на поперечний зсув пластин глибина проникнення вихрового ПШ більша, ніж потенціального, крім цього, для останніх 2-й потенціальний ПШ має невелику область проникання.

14. Встановлено, що НДС пластин найбільш суттєво залежить від змінюваності та локальності поперечного навантаження, товщини, податливості на поперечний зсув, Точність варіанта МТ зростає при зменшенні товщини, податливості на поперечний зсув і змінюваності поперечного навантаження.

15. Отримані нові якісно-кількісні характеристики компонент НДС ізотропних і трансропних пластин в залежності від МГП, типу навантаження і наближень, сформульовані прикладні висновки (дод. А.3).

16. На основі обґрунтованого використання поліномів Лежандра при зображенні переміщень і їх похідних у вигляді рядів доведені теореми про збіжність рядів для напружень і про однозначність розв'язку другої основної задачі ТП в розробленому варіанті МТ пластин.

Наукові результати, наведені в третьому розділі, опубліковано в працях автора [114, 115, 140, 142, 147, 149, 153–156, 164, 165, 167, 178, 180, 182, 188, 194, 314, 315, 447–449].

РОЗДІЛ 4

МЕТОД ЗБУРЕНЬ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ У МТ ОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ

В даному розділі вперше побудовано новий варіант МТ нетонких однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин за Каудерером [207] та розроблені на його основі методи розв'язування граничних задач. Варіант МТ базується на ВПР і новому комплексному методі, основанийому на поєднанні методу розвинення усіх компонент НДС і граничних умов у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра та методу збурень пружних властивостей матеріалу з використанням МВР.

4.1. Метод збурень ізотропних властивостей в МТ ортотропних пластин

4.1.1. Основні співвідношення. Розглядається ортотропна однорідна пластинка довільної сталої товщини h в прямокутній системі координат $Oxyz$ (рис. 3.1). Граничні умови на лицевих гранях мають вигляд (3.2), а умови на бічній поверхні можуть бути кінематичними, статичними або змішаними.

Фізичні залежності для ортотропного тіла мають вигляд [12]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; \quad \varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \quad (a_{ij} = a_{ji}); \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{xz} = a_{55}\sigma_{xz}, \quad \gamma_{xy} = a_{66}\sigma_{xy}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Вважаючи, що ортотропні властивості мало відрізняються від ізотропних, введемо осереднені сталі a_{110} , a_{120} , a_{440} , що відповідають деякому ізотропному тілу:

$$a_{110} = (a_{11} + a_{22} + a_{33})/3; \quad a_{120} = (a_{12} + a_{13} + a_{23})/3; \quad a_{440} = 2(a_{110} - a_{120}).\tag{4.2}$$

Тоді для ортотропного тіла, зведеного до осередненого ізотропного, маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{110}\sigma_x + a_{120}\sigma_y + a_{120}\sigma_z; \quad \varepsilon_y = a_{120}\sigma_x + a_{110}\sigma_y + a_{120}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= a_{120}\sigma_x + a_{120}\sigma_y + a_{110}\sigma_z; \quad \gamma_{xz} = a_{440}\sigma_{xz}; \quad \gamma_{yz} = a_{440}\sigma_{yz}; \quad \gamma_{xy} = a_{440}\sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Від коефіцієнтів $a_{110}, a_{120}, a_{440}$ можна перейти до сталих E_0, G_0, ν_0 (механічних сталих для осередненого ізотропного тіла) і навпаки: $a_{110} = 1/E_0$; $a_{120} = -\nu_0/E_0$; $a_{440} = 2(1+\nu_0)/E_0$. Коефіцієнти a_{ij} в (4.1) можна зобразити так:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a_{110}(1 + \alpha_{ii}\varepsilon), \quad (i = 1, 2, 3); \quad a_{ik} = a_{120}(1 + \alpha_{ik}\varepsilon), \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k); \\ a_{ij} &= a_{440}(1 + \alpha_{ij}\varepsilon), \quad (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \quad (4.4)$$

де ε додатний параметр, що дорівнює найменшому за абсолютним значенням одному із відношень $(a_{11} - a_{110})/a_{110}$, $(a_{22} - a_{110})/a_{110}$, $(a_{33} - a_{110})/a_{110}$, $(a_{12} - a_{120})/a_{120}, \dots, (a_{66} - a_{440})/a_{440}$. Далі параметр ε приймається малим.

Коефіцієнти α_{ij} в (4.4) – безрозмірні величини, які згідно з (4.2) характеризують для прийнятого ε відхилення пружних характеристик ортотропного тіла від ізотропного. При $\alpha_{ij} = 0$ із (4.1) отримуються (4.3).

Для одержання основних співвідношень використаємо комбінований метод, оснований на методі малого параметра в поєднанні з методом розвинення компонент НДС в ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра. Тривимірну задачу зведемо до двовимірної, застосовуючи ВПР і МВР.

Розкладаючи у ряди за параметром ε всі функції, одержимо:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{l=0}^{\infty} U^{(l)}(x, y, z) \varepsilon^l, \quad (U \rightarrow \dots, \varepsilon_x \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{yz}); \\ X_v(x, y, z) &= \sum_{l=0}^{\infty} X_v^{(l)}(x, y, z) \varepsilon^l; \quad p(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} p^{(l)}(x, y) \varepsilon^l; \quad q(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} q^{(l)}(x, y) \varepsilon^l, \end{aligned} \quad (4.5)$$

у яких переміщення, деформації і зовнішнє навантаження мають вигляд:

$$\begin{aligned} U^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k u_k^{(l)}(x, y), \quad (U \rightarrow V; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}); \\ W^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k w_{k+1}^{(l)}(x, y); \quad \varepsilon_x^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k u_{k,x}^{(l)} \varepsilon^l, \quad (x, y; u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P'_k w_{k+1}^{(l)}; \quad \gamma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k (u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}); \\ \gamma_{xz}^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (P_k w_{k+1,x}^{(l)} + P'_k u_k^{(l)}), \quad (x, y; u, v); \quad X_v^{(0)}(x, y, z) = X_v(x, y, z); \dots; \\ p^{(0)} &= p(x, y); \quad q^{(0)} = q(x, y); \quad X_v^{(l)} = Y_v^{(l)} = Z_v^{(l)} = 0, \quad p^{(l)} = q^{(l)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Із ВРР (3.18) для ортотропних пластин після асимптотичного розщеплення по ε [258], одержуються тангенціальні напруження в наближенні l по ε .

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(l)}(x, y, z) &= b_{110} \varepsilon_x^{(l)} + b_{120} \varepsilon_y^{(l)} + d_{10} \sigma_z^{(l)} - \Phi_{sx}^{(l-1)}; \\ \sigma_y^{(l)}(x, y, z) &= b_{120} \varepsilon_x^{(l)} + b_{110} \varepsilon_y^{(l)} + d_{10} \sigma_z^{(l)} - \Phi_{sy}^{(l-1)}; \quad \sigma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = G_0 \gamma_{xy}^{(l)} - \Phi_{s_{yx}}^{(l-1)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де

$$\begin{aligned} b_{110} &= a_{110} / \Delta, \quad b_{120} = -a_{120} / \Delta; \quad G_0 = 1 / a_{440}; \quad d_{10} = (a_{120} - a_{110} a_{120}) / \Delta; \quad \Delta = a_{110}^2 - a_{120}^2; \\ \Phi_{sx}^{(l-1)} &= c_{11} \sigma_x^{(l-1)} + c_{12} \sigma_y^{(l-1)} + c_{13} \sigma_z^{(l-1)}; \quad \Phi_{sy}^{(l-1)} = c_{21} \sigma_x^{(l-1)} + c_{22} \sigma_y^{(l-1)} + c_{23} \sigma_z^{(l-1)}; \\ \Phi_{s_{yx}}^{(l-1)}(x, y, z) &= \alpha_{66} \sigma_{xy}^{(l-1)}; \quad \Phi_{sx}^{(0-1)} = \Phi_{sy}^{(0-1)} = \Phi_x^{(0-1)} = \Phi_y^{(0-1)} = \Phi_{s_{yx}}^{(0-1)} \equiv 0; \quad (4.8) \\ c_{11} &= (a_{110}^2 \alpha_{11} - a_{120}^2 \alpha_{12}) / \Delta; \quad c_{12} = a_{110} a_{120} (\alpha_{12} - \alpha_{22}) / \Delta; \\ c_{13} &= a_{120} (a_{110} \alpha_{13} - a_{120} \alpha_{23}) / \Delta; \quad c_{21} = a_{110} a_{120} (\alpha_{12} - \alpha_{11}) / \Delta; \\ c_{22} &= (a_{110}^2 \alpha_{22} - a_{120}^2 \alpha_{12}) / \Delta; \quad c_{23} = a_{120} (a_{110} \alpha_{23} - a_{120} \alpha_{13}) / \Delta. \end{aligned}$$

У залежностях (4.8) $\varepsilon_x^{(l)}, \varepsilon_y^{(l)}, \gamma_{xy}^{(l)}, \sigma_z^{(l)}, \Phi_{sx}^{(l-1)}, \Phi_{sy}^{(l-1)}, \Phi_{s_{yx}}^{(l-1)}, \sigma_x^{(l-1)}, \sigma_y^{(l-1)}, \sigma_z^{(l-1)}$ – функції x, y, z , причому, тут і далі функції з індексом $(l-1)$ угорі залежать від компонент НДС від 0-го до $(l-1)$ -го наближення включно.

4.1.2. Наближення К0-3 за поліномами Лежандра.

4.1.2.1. Основні залежності. Не звужуючи суті проблеми, побудуємо варіант МТ в НК0-3 за поліномами Лежандра і в довільному наближенні l за малим параметром ε . На основі (4.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} U^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 P_k u_k^{(l)}(x, y), \quad (U \rightarrow V; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}); \\ W^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^2 P_k w_{k+1}^{(l)}(x, y); \quad \varepsilon_x^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k u_{k,x}^{(l)} \varepsilon^l, \quad (x, y; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}); \\ \varepsilon_z^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^2 P'_k w_{k+1}^{(l)}; \quad \gamma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k (u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}); \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\gamma_{xz}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 (P_k w_{k+1,x}^{(l)} + P'_k u_k^{(l)}), (x, y; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}); w_4^{(l)} = 0.$$

Напруження $\sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ зобразимо у вигляді (3.97), (3.98), ураховуючи функції $\omega_2(x, y), \dots, Q_{3y}(x, y)$ і розвинувши останні в ряди за параметром ε :

$$\omega_2(x, y) = \sum_{l=0} \omega_2^{(l)} \varepsilon^l; \dots Q_{3y}(x, y) = \sum_{l=0} Q_{3y}^{(l)} \varepsilon^l. \quad (4.10)$$

На основі (4.5)–(4.10), одержимо напруження через поліноми Лежандра:

$$\sigma_z^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k s_{zk}^{(l)}(x, y); \quad \sigma_{xz}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k t_{xk}^{(l)}(x, y), (x, y); \quad (4.11)$$

$$\sigma_x^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k s_{xk}^{(l)}(x, y) - \Phi_{sx}^{(l-1)}, (x, y); \quad \sigma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k t_{yxk}^{(l)}(x, y) - \Phi_{syx}^{(l-1)},$$

де

$$\begin{aligned} s_{z0}^{(l)}(x, y) &= -\frac{1}{2} p^{(l)} - \frac{1}{10} \omega_2^{(l)}; \quad s_{z1}^{(l)}(x, y) = -\frac{3}{5} (\omega_1^{(l)} + \frac{1}{14} \omega_3^{(l)}); \quad s_{z2}^{(l)}(x, y) = \frac{1}{7} \omega_2^{(l)}; \\ s_{z3}^{(l)}(x, y) &= \frac{1}{10} \omega_1^{(l)} + \frac{1}{15} \omega_3^{(l)}; \quad s_{z4}^{(l)}(x, y) = -\frac{3}{70} \omega_2^{(l)}; \quad s_{z5}^{(l)}(x, y) = -\frac{1}{42} \omega_3^{(l)}; \quad t_{x0}^{(l)} = \frac{1}{h} Q_{1x}^{(l)}; \\ t_{x1}^{(l)} &= \frac{3}{5h} Q_{2x}^{(l)}; \quad t_{x2}^{(l)} = -\frac{1}{h} Q_{1x}^{(l)} + \frac{3}{7h} Q_{3x}^{(l)}; \quad t_{x3}^{(l)} = -\frac{3}{5h} Q_{2x}^{(l)}; \quad t_{x4}^{(l)} = -\frac{3}{7h} Q_{3x}^{(l)}; \quad (4.12) \\ s_{xk}^{(l)}(x, y) &= b_{110} u_{k,x}^{(l)} + b_{120} v_{k,y}^{(l)} + d_{10} s_{zk}^{(l)} \quad (k = 0, 1, 2); \end{aligned}$$

$$s_{x3}^{(l)}(x, y) = b_{110} u_{3,x}^{(l)} + b_{120} v_{3,y}^{(l)} + d_{10} s_{z3}^{(l)}, \quad s_{x4}^{(l)}(x, y) = d_{10} s_{z4}^{(l)}; \quad s_{x5}^{(l)}(x, y) = d_{10} s_{z5}^{(l)}, (x, y);$$

$$t_{yxk}^{(l)}(x, y) = G_0 (u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}), (k = 0, 1, 2, 3).$$

У (4.12):

$$\begin{aligned} \omega_1^{(l)}(x, y) &= q^{(l)}(x, y); \quad \omega_2^{(l)}(x, y) = \sum_{k=1}^3 q_{2k} w_k^{(l)}(x, y) + e_{20} \varphi_0^{(l)}(x, y) + e_{22} \varphi_2^{(l)}(x, y) + \\ &\quad + e_{2p} p^{(l)}(x, y) + e_{2\omega} I_{\omega 2}^{(l-1)}(x, y) + e_{2\xi} A_1^{(l-2)}(x, y); \\ \omega_3^{(l)}(x, y) &= q_{32} w_2^{(l)}(x, y) + q_{33} w_3^{(l)}(x, y) + e_{31} \varphi_1^{(l)}(x, y) + e_{33} \varphi_3^{(l)}(x, y) + \\ &\quad + e_{3q} q^{(l)}(x, y) + e_{3\omega} I_{\omega 3}^{(l-1)}(x, y) + e_{3\xi} B_1^{(l-2)}(x, y); \quad (4.13) \\ Q_{kx}^{(l)}(x, y) &= h_{k1} w_{1,x}^{(l)} + h_{k3} w_{3,x}^{(l)} + \sum_{i=0}^3 l_{ki} u_i^{(l)} - \alpha_{55} Q_{kx}^{(l-1)}, (k = 1, 3); \\ Q_{2x}^{(l)}(x, y) &= h_{22} w_{2,x}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 l_{2i} u_i^{(l)} - \alpha_{55} Q_{2x}^{(l-1)}, (x, y; u_i \rightarrow v_i; \alpha_{55} \rightarrow \alpha_{44}); \end{aligned}$$

де коефіцієнти q, e, h, l з індексами–МГП, які дорівнюють однойменним коефіцієнтам для відповідної ізотропної пластини (3.98).

В (4.13):

$$\begin{aligned}
 I_{\omega_2}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{h}{15} (g_{01}^{(l-1)} - \frac{2}{7} g_{21}^{(l-1)} + \frac{1}{21} g_{41}^{(l-1)}) - A_0^{(l-1)}; \\
 I_{\omega_3}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{h}{7} (\frac{1}{10} g_{11}^{(l-1)} - \frac{1}{15} g_{31}^{(l-1)} + \frac{1}{66} g_{51}^{(l-1)}) - B_0^{(l-1)}; \\
 A_0^{(l-1)}(x, y) &= \int_z \left(\frac{P_0}{15} - \frac{2P_2}{21} + \frac{P_4}{35} \right) \Phi_0^{(l-1)}(x, y, z) dz; \quad (-h/2 \leq z \leq h/2); \\
 A_1^{(l-2)}(x, y) &= \int_z \left(\frac{P_0}{15} - \frac{2P_2}{21} + \frac{P_4}{35} \right) \Phi_1^{(l-2)}(x, y, z) dz; \\
 B_0^{(l-1)}(x, y) &= \int_z \left(\frac{3P_1}{70} - \frac{P_3}{15} + \frac{P_5}{42} \right) \Phi_0^{(l-1)}(x, y, z) dz; \\
 B_1^{(l-2)}(x, y) &= \int_z \left(\frac{3P_1}{70} - \frac{P_3}{15} + \frac{P_5}{42} \right) \Phi_1^{(l-2)}(x, y, z) dz; \\
 (A_0^{(0-1)} = A_1^{(0-1)} = B_0^{(0-1)} = B_1^{(0-1)} &\equiv 0); \quad (i = 1, 2); \\
 g_{il}^{(l-1)}(x, y) &= a_{120} (\alpha_{13} s_{xi}^{(l-1)} + \alpha_{23} s_{yi}^{(l-1)}) + a_{110} \alpha_{33} s_{zi}^{(l-1)}, \quad (i = 0, 1, \dots, 5);
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

$$\Phi_0^{(l-1)} = a_{120} (\Phi_{sx}^{(l-1)} + \Phi_{sy}^{(l-1)}); \quad \Phi_1^{(l-2)} = a_{120} (\alpha_{13} \Phi_{sx}^{(l-2)} + \alpha_{23} \Phi_{sy}^{(l-2)}).$$

Як це впливає із (4.12)–(4.14), функції $Q_{kx}^{(l)}(x, y)$, $Q_{ky}^{(l)}(x, y)$, $\omega_2^{(l)}(x, y)$,

$\omega_3^{(l)}(x, y)$ залежать від компонент НДС 0-го – l -го наближень по ε .

4.1.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги. Із ВРР, виконуючи асимптотичне розщеплення по степеням ε , дістанемо ДР рівноваги пластини та крайові умови в наближенні l по ε . Опускаючи громіздкі викладки, одержується наступна рекурентна СДР рівноваги пластини в наближенні l :

$$\begin{aligned}
 D_{i,1} u_0^{(l)} + D_{i,2} v_0^{(l)} + D_{i,3} u_1^{(l)} + D_{i,4} v_1^{(l)} + D_{i,5} u_2^{(l)} + D_{i,6} v_2^{(l)} + D_{i,7} u_3^{(l)} + \\
 + D_{i,8} v_3^{(l)} + D_{i,9} w_1^{(l)} + D_{i,10} w_2^{(l)} + D_{i,11} w_3^{(l)} = D_{ip}^{(l)} + D_{iq}^{(l)} + D_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 11),
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

де D_{ij} ($j = 1, 2, \dots, 11$) – диференціальні оператори; $D_{ip}^{(l)}, D_{iq}^{(l)}$ – функції l -го наближення від зовнішнього навантаження; $D_{i\xi}^{(l-1)}$ – функції, що залежать від компонент НДС попередніх наближень від 0-го до $(l-1)$ -го (далі функції, позначені з індек-

сом ξ унизу і індексом $(l-1)$ угорі матимуть аналогічний зміст). Зазначимо, що ці рівняння отримані прирівнюванням до нуля множників при варіаціях $\delta u_0^{(l)}, \delta v_0^{(l)}, \delta u_1^{(l)}, \dots, \delta v_3^{(l)}, \delta w_1^{(l)}, \delta w_2^{(l)}, \delta w_3^{(l)}$ у ВРР для ортотропної пластини.

Диференціальні оператори в лівій частині ДР (4.15) рівні диференціальним операторам лівих частин в (3.101) і (3.121) для ізотропної пластини з точністю до позначень операторів. Праві частини СДР (4.15):

$$\begin{aligned}
D_{1p}^{(l)} &= c_{1,13} p_{,x}^{(l)}; D_{1q}^{(l)} = 0; D_{1\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u01}^{(l-1)} - \Phi_{u02}^{(l-2)}); D_{2p}^{(l)} = c_{2,13} p_{,y}^{(l)}; D_{2q}^{(l)} = 0; \\
D_{2\xi}^{(l-1)} &= h(\Phi_{v01}^{(l-1)} - \Phi_{v02}^{(l-2)}); D_{3p}^{(l)} = 0; D_{3q}^{(l)} = c_{3,13} q_{,x}^{(l)}; D_{3\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u11}^{(l-1)} - \Phi_{u12}^{(l-2)})/3; \\
D_{4q}^{(l)} &= c_{4,13} q_{,y}^{(l)}; D_{4\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{v11}^{(l-1)} - \Phi_{v12}^{(l-2)})/3; D_{5p}^{(l)} = c_{5,13} p_{,x}^{(l)}; D_{5q}^{(l)} = 0; \\
D_{5\xi}^{(l-1)} &= h(\Phi_{u21}^{(l-1)} + \Phi_{u22}^{(l-2)})/5; D_{6p}^{(l)} = c_{6,13} p_{,y}^{(l)}; D_{6q}^{(l)} = 0; D_{6\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{v21}^{(l-1)} + \Phi_{v22}^{(l-2)})/5; \\
D_{7p}^{(l)} &= 0; D_{7q}^{(l)} = c_{7,13} q_{,x}^{(l)}; D_{7\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u31}^{(l-1)} + \Phi_{u32}^{(l-2)})/7; D_{8p}^{(l)} = 0; D_{8q}^{(l)} = c_{8,13} q_{,y}^{(l)}; (4.16) \\
D_{8\xi}^{(l-1)} &= h(\Phi_{v31}^{(l-1)} + \Phi_{v32}^{(l-2)})/7; D_{9p}^{(l)} = 0; D_{9q}^{(l)} = c_{9,15} q^{(l)}; D_{9\xi}^{(l-1)} = \Phi_{w11}^{(l-1)} - \Phi_{w12}^{(l-2)}; \\
D_{10p}^{(l)} &= c_{10,13} p^{(l)}; D_{10q}^{(l)} = 0; D_{10\xi}^{(l-1)} = (\Phi_{w21}^{(l-1)} - \Phi_{w22}^{(l-2)})/3; D_{11p}^{(l)} = 0; D_{11q}^{(l)} = c_{11,15} q^{(l)}; \\
D_{11\xi}^{(l-1)} &= -(\Phi_{w31}^{(l-1)} + \Phi_{w32}^{(l-2)})/5.
\end{aligned}$$

де функції D з верхнім індексом (l) при $l=0$ повністю співпадають з функціями правих частин для відповідної ізотропної пластини, при $l \geq 1$ вони дорівнюють нулю. Доданки, які входять у функції $D_{i\xi}^{(l-1)}$, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\Phi_{u01}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{21}{2h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + A_{u0}^{(l-1)}; \Phi_{u02}^{(l-2)}(x, y) = \frac{21}{2h} d_{30} \frac{\partial A_1^{(l-2)}}{\partial x}; \\
\Phi_{u11}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{33}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 3}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{6G_0}{h^2} \Phi_{1x}^{(l-1)} + A_{u1}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u12}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{33}{h} d_{30} \frac{\partial B_1^{(l-2)}}{\partial x}; \Phi_{u21}^{(l-1)}(x, y) = \frac{10G_0}{h^2} \Phi_{2x}^{(l-1)} - \frac{15}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + A_{u2}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u22}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{15}{h} d_{30} \frac{\partial A_1^{(l-2)}}{\partial x}; \Phi_{u31}^{(l-1)}(x, y) = \frac{6G_0}{h^2} \Phi_{3x}^{(l-1)} - \frac{154}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 3}^{(l-1)}}{\partial x} + A_{u3}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u32}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{154}{h} d_{30} \frac{\partial B_1^{(l-2)}}{\partial x}, (u, v; x, y); (4.17) \\
\Phi_{w11}^{(l-1)}(x, y) &= G_0 \left(\frac{\partial \Phi_{1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right); \Phi_{w12}^{(l-2)}(x, y) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{w21}^{(l-1)}(x, y) &= G_0 \left(\frac{\partial \Phi_{2x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{2y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{63}{hd_{20}} I_{\omega 2}^{(l-1)}; \quad \Phi_{w22}^{(l-2)}(x, y) = \frac{63}{hd_{20}} A_1^{(l-2)}; \\
\Phi_{w31}^{(l-1)}(x, y) &= G_0 \left(\frac{\partial \Phi_{1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) - \frac{3G_0}{7} \left(\frac{\partial \Phi_{3x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{3y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) - \frac{330}{hd_{20}} I_{\omega 3}^{(l-1)}; \\
\Phi_{w32}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{330}{hd_{20}} B_1^{(l-2)}; \quad \Phi_{1x}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{55}}{G_0} Q_{1x}^{(l-1)}; \quad \Phi_{2x}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{55}}{G_0} Q_{2x}^{(l-1)}; \\
\Phi_{3x}^{(l-1)} &= -\frac{\alpha_{55}}{G_0} Q_{3x}^{(l-1)}; \quad \Phi_{1y}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{44}}{G_0} Q_{1y}^{(l-1)}; \quad \Phi_{2y}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{44}}{G_0} Q_{2y}^{(l-1)}; \quad \Phi_{3y}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{44}}{G_0} Q_{3y}^{(l-1)}; \\
A_{ui}^{(l-1)} &= \frac{2i+1}{h} \left(\frac{\partial \Phi_{sxi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syxi}^{(l-1)}}{\partial y} \right); \quad A_{vi}^{(l-1)} = \frac{2i+1}{h} \left(\frac{\partial \Phi_{syi}^{(l-1)}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{syxi}^{(l-1)}}{\partial x} \right); \\
\Phi_{sxi}^{(l-1)}(x, y) &= \int_z P_i \Phi_{sx}^{(l-1)}(x, y, z) dz, \quad (x, y); \quad \Phi_{syxi}^{(l-1)} = \int_z P_i \Phi_{syx}^{(l-1)} dz, \quad (i = 0, 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Праві частини СДР l -го наближення (4.15), як це впливає із (4.17), лінійно залежать від компонент НДС попередніх $(l-1)$ -го наближення.

4.1.2.3. Крайові умови. Із ВРР, виконуючи асимптотичне розщеплення за степенями ε , дістанемо крайові умови в l -му наближенні за ε :

$$\begin{aligned}
\int_s \left\{ (N_{0u}^{(l)} - \tilde{N}_{0u}^{(l)}) \delta u_o^{(l)} + (N_{0v}^{(l)} - \tilde{N}_{0v}^{(l)}) \delta v_0^{(l)} + \sum_{k=1}^3 \left((M_{ku}^{(l)} - \tilde{M}_{ku}^{(l)}) \delta u_k^{(l)} + \right. \right. \\
\left. \left. + (M_{kv}^{(l)} - \tilde{M}_{kv}^{(l)}) \delta v_k^{(l)} + (Q_{kw}^{(l)} - \tilde{Q}_{kw}^{(l)}) \delta w_k^{(l)} \right) \right\} ds = 0,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{0u}^{(l)} &= (hs_{x0}^{(l)} - \Phi_{sx0}^{(l-1)}) l_x + (ht_{yx0}^{(l)} - \Phi_{syx0}^{(l-1)}) l_y; \quad \tilde{N}_{0u}^{(l)} = \int_z P_0 X_v^{(l)}(z, s) dz; \\
N_{0v}^{(l)} &= (hs_{y0}^{(l)} - \Phi_{sy0}^{(l-1)}) l_y + (ht_{yx0}^{(l)} - \Phi_{syx0}^{(l-1)}) l_x; \quad \tilde{N}_{0v}^{(l)} = \int_z P_0 Y_v^{(l)}(z, s) dz; \\
M_{ku}^{(l)} &= \left(\frac{h}{2k+1} s_{xk}^{(l)} - \Phi_{sxk}^{(l-1)} \right) l_x + \left(\frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(l)} - \Phi_{syxk}^{(l-1)} \right) l_y; \quad \tilde{M}_{ku}^{(l)} = \int_z P_k X_v^{(l)}(z, s) dz; \quad (4.19) \\
M_{kv}^{(l)} &= \left(\frac{h}{2k+1} s_{yk}^{(l)} - \Phi_{syk}^{(l-1)} \right) l_y + \left(\frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(l)} - \Phi_{syxk}^{(l-1)} \right) l_x; \quad \tilde{M}_{kv}^{(l)} = \int_z P_k Y_v^{(l)}(z, s) dz; \\
Q_{kw}^{(l)} &= \frac{h}{2k-1} (t_{xk-1}^{(l)} l_x + t_{yk-1}^{(l)} l_y); \quad \tilde{Q}_{kw}^{(l)} = \int_z P_{k-1} Z_v^{(l)}(z, s) dz, \quad (k = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Крайові умови у наближенні l як і ДР також лінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Отже, тривимірна гранична задача ТП для ортотропних пластин довільної товщини зведена до рекурентної нескінченної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для пластин з осередненими ізотропними характеристиками. Праві частини отриманих СДР (4.15) і крайові умови (4.19) в довільному наближенні за малим параметром лінійно залежать від НДС попередніх наближень.

4.1.2.4. Перетворення ДР рівноваги. Оскільки ліві частини СДР (4.15) в l -му наближенні по ε структурно співпадають із лівими частинами СДР для транстропної пластини в наближенні К0-3, то в кожному наближенні за малим параметром ε СДР (4.15) розділяється на дві незалежні системи, одна з яких описує НДС при кососиметричному, а інша – при симетричному деформуванні. Надалі в позначеннях сталих і диференціальних операторів в лівих частинах рівнянь дотримуватимемося позначень в п. 3.4.2.

В наближенні $l = 0$ за параметром ε всі ДР і залежності співпадають з відповідними ДР і залежностями п. 3.4.2.1 і 3.4.2.2 для ізотропної пластини при $\nu_0 = \nu$; $E_0 = E$; $b_{110} = E/(1-\nu^2)$. В наближенні $l = 1, 2, \dots$ за малим параметром ε деякі співвідношення і праві частини ДР мають суттєво іншу структуру, ніж у 0-му наближенні, оскільки залежать від компонент НДС попередніх наближень. Наведемо далі для цих наближень основні рівняння і співвідношення.

4.1.2.5. Кососиметричне деформування (НК13) в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за малим параметром ε . Загальні розв'язки. СДРР для ортотропної пластини в l -му наближенні за параметром ε має вигляд структурно аналогічний (3.101):

$$L_{i,1}u_1^{(l)} + L_{i,2}v_1^{(l)} + L_{i,3}u_3^{(l)} + L_{i,4}v_3^{(l)} + L_{i,5}w_1^{(l)} + L_{i,6}w_3^{(l)} = L_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (4.20)$$

де оператори $L_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, 6$), та функції $L_{i\xi}^{(l-1)}$ дорівнюють відповідним операторам та функціям системи (4.15):

$$\begin{aligned} L_{1,1} &= D_{3,3}, L_{1,2} = D_{3,4}, L_{1,3} = D_{3,7}, L_{1,4} = D_{3,8}, L_{1,5} = D_{3,9}, L_{1,6} = D_{3,11}, L_{1\xi}^{(l-1)} = D_{3\xi}^{(l-1)}; \\ L_{2,1} &= D_{4,3}, L_{2,2} = D_{4,4}, L_{2,3} = D_{4,7}, L_{2,4} = D_{4,8}, L_{2,5} = D_{4,9}, L_{2,6} = D_{4,11}, L_{2\xi}^{(l-1)} = D_{4\xi}^{(l-1)}; \\ L_{3,1} &= D_{7,3}, L_{3,2} = D_{7,4}, \dots, L_{3,6} = D_{7,11}, L_{3\xi}^{(l-1)} = D_{7\xi}^{(l-1)}; L_{4,1} = D_{8,3}, L_{4,2} = D_{8,4}, \dots, \\ L_{4,6} &= D_{8,11}, L_{4\xi}^{(l-1)} = D_{8\xi}^{(l-1)}; L_{5,1} = D_{9,3}, L_{5,2} = D_{9,4}, \dots, L_{5,6} = D_{9,11}, L_{5\xi}^{(l-1)} = D_{9\xi}^{(l-1)}; \end{aligned}$$

$$L_{6,1} = D_{11,3}, L_{6,2} = D_{11,4}, \dots, L_{6,6} = D_{11,11}, L_{6\xi}^{(l-1)} = D_{11\xi}^{(l-1)}.$$

Із СДР (4.20) виділено систему ВКЕ і окремо систему ВНДС і ПКЕ.

ВКЕ визначається відповідною однорідною СДР 4-го порядку:

$$\begin{aligned} \beta_{113}\psi_1^{(l)} + \beta_{112}\nabla^2\psi_1^{(l)} + \beta_{133}\psi_3^{(l)} &= \psi_{1\xi}^{(l-1)}; \\ \beta_{133}\psi_1^{(l)} + \beta_{333}\nabla^2\psi_3^{(l)} + \beta_{333}\psi_3^{(l)} &= \psi_{3\xi}^{(l-1)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

а частинні розв'язки неоднорідної СДР (4.21) уточнюють ВНДС, який залежить від НДС попередніх наближень.

Сталі β_{ijk} дорівнюють відповідно позначеним коефіцієнтам для ізотропної пластини. СДР (4.21) відрізняється від СДР (3.103) для трансропної пластини наявністю в ній правих частин, складність яких збільшується із зростанням номера наближення.

СДР ВНДС і ПКЕ в наближенні l по ε зводиться до СДР 8-го порядку :

$$P_{k1}w_1^{(l)} + P_{k3}w_3^{(l)} = P_{k\xi}^{(l-1)}, \quad (k = 1, 3), \quad (4.22)$$

де P_{11}, \dots, P_{33} – диференціальні оператори (3.110). Тут і далі в цьому п. функції, розв'язки і оператори без індекса угорі співпадають з відповідно позначеними в п. 3.4.2.1. Праві частини (4.22) отримуються з правих частин ДР (4.20) перетвореннями, аналогічними п. 3.4.2.1 і тут не наводяться із-за їх громіздкості.

Аналогічно п. 3.4.2.1 будуються загальні розв'язки СДР (4.22).

$$\begin{aligned} w_1^{(l)}(x, y) &= P_{33}(\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}^{(l)}) - P_{13}\Phi_{3r}^{(l)}; \\ w_3^{(l)}(x, y) &= -P_{31}(\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}^{(l)}) + P_{11}\Phi_{3r}^{(l)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

де $\Phi_{1r}^{(l)}, \Phi_{3r}^{(l)}$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР:

$$P_0\Phi_1^{(l)}(x, y) = P_{1\xi}^{(l-1)}; \quad P_0\Phi_3^{(l)}(x, y) = P_{3\xi}^{(l-1)}. \quad (4.24)$$

Загальні і частинні розв'язки ДР (4.24) визначаються загальними і частинними розв'язками неоднорідних ДР 2-го порядку згідно з пп. 2.2.3, 2.2.4.2.

Праві частини цих ДР бажано апроксимувати зручними функціями або рядами, а потім знаходити частинні розв'язки методами математичної фізики.

Потенціальні функції $\varphi_k^{(l)}(x, y)$ визначаються за формулами:

$$\varphi_k^{(l)}(x, y) = \lambda_{k1} \nabla^2 w_1^{(l)} + \lambda_{k2} w_3^{(l)} + \lambda_{k3} \nabla^2 w_3^{(l)} + \lambda_{k\xi}^{(l-1)}, \quad (k = 1, 3), \quad (4.25)$$

де λ з нижніми індексами – МГП (формули А.2 для ізотропної пластини).

Складові $u_k^{(l)}, v_k^{(l)}$ ($k = 1, 3$):

$$u_k^{(l)}(x, y) = \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,x}^{(l)} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,x}^{(l)} + \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,y}^{(l)} + \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,y}^{(l)} + \lambda_{kw 1} w_{1,x}^{(l)} + \lambda_{kw 3} w_{3,x}^{(l)} + \lambda_{uk\xi}^{(l-1)}; \quad (4.26)$$

$$v_k^{(l)}(x, y) = \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,y}^{(l)} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,y}^{(l)} - \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,x}^{(l)} - \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,x}^{(l)} + \lambda_{kw 1} w_{1,y}^{(l)} + \lambda_{kw 3} w_{3,y}^{(l)} + \lambda_{vk\xi}^{(l-1)},$$

де λ з нижніми індексами – МГП (формули А.4 для ізотропної пластини).

Отже, визначення НДС ортотропних пластин при кососиметричному деформуванні в НК0-3 з використанням методу збурень зводиться до розв'язання в кожному наближенні за параметром ε двох незалежних неоднорідних СДР 4-го і 8-го порядків. Ліві частини цих ДР співпадають з лівими частинами ДР для ізотропних пластин у НК0-3. Тому ВКЕ і ПКЕ описуються відповідними однорідними ДР 4-го порядку в наближенні $l = 0$. ВНДС в кожному наближенні по ε визначається загальним розв'язком бігармонічного ДР і частинними розв'язками вищеназваних неоднорідних ДР, які залежать від НДС попередніх наближень.

Оскільки всі визначальні ДР зводяться до ДР 2-го порядку, то загальні розв'язки СДРР у кожному наближенні отримуються аналогічно лінійній задачі.

4.1.2.6. Симетричне деформування (НК02) в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за параметром ε . Загальні розв'язки. СДРР для ортотропних пластин має вигляд:

$$M_{i,1} u_0^{(l)} + M_{i,2} v_0^{(l)} + M_{i,3} u_2^{(l)} + M_{i,4} v_2^{(l)} + M_{i,5} w_2^{(l)} = M_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (4.27)$$

де оператори $M_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) та функції $M_{i\xi}^{(l-1)}$ дорівнюють відповідним операторам та функціям системи (4.15):

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= D_{1,1}, M_{1,2} = D_{1,2}, M_{1,3} = D_{1,5}, M_{1,4} = D_{1,6}, M_{1,5} = D_{1,10}, M_{1\xi}^{(l-1)} = D_{1\xi}^{(l-1)}; \\
M_{2,1} &= D_{2,1}, M_{2,2} = D_{2,2}, M_{2,3} = D_{2,5}, M_{2,4} = D_{2,6}, M_{2,5} = D_{2,10}, M_{2\xi}^{(l-1)} = D_{2\xi}^{(l-1)}; \\
M_{3,1} &= D_{5,1}, M_{3,2} = D_{5,2}, \dots, M_{3,5} = D_{5,10}, M_{3\xi}^{(l-1)} = D_{5\xi}^{(l-1)}; M_{4,1} = D_{6,1}, M_{4,2} = D_{6,2}, \dots, \\
M_{4,5} &= D_{6,10}, M_{4\xi}^{(l-1)} = D_{6\xi}^{(l-1)}; M_{5,1} = D_{10,1}, M_{5,2} = D_{10,2}, \dots, M_{5,5} = D_{10,10}, M_{5\xi}^{(l-1)} = D_{10\xi}^{(l-1)}.
\end{aligned}$$

ВКЕ описується згасаючими розв'язками однорідного ДР 2-го порядку (3.123), яке відповідає ДР:

$$\gamma_{332} \nabla^2 \psi_2^{(l)} + \gamma_{333} \psi_2^{(l)} = \psi_{2\xi}^{(l-1)}, \quad (4.28)$$

де тут і надалі в п. 4.1.2.6 оператори і сталі в лівих частинах такі ж, як і в п. 3.4.2.2. для ізотропної пластини. Неоднорідне ДР (4.28) уточнює ВНДС.

СДР ВНДС і ПКЕ в l -му наближенні зводиться до системи трьох неоднорідних ДР 8-го порядку відносно функцій $u_0^{(l)}(x, y), v_0^{(l)}(x, y), w_2^{(l)}(x, y)$:

$$T_{i1} u_0^{(l)} + T_{i2} v_0^{(l)} + T_{i3} w_2^{(l)} = T_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.29)$$

де праві частини (4.29) отримуються з правих частин ДР (4.27) перетвореннями, аналогічними п. 3.4.2.2 і тут не наводяться із-за їх громіздкості.

Аналогічно п. 3.4.2.2 будуються загальні розв'язки СДР (4.29). Одержимо:

$$\begin{aligned}
u_0^{(l)}(x, y) &= T_{11}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{i=1}^3 T_{i1}^0 F_{ir}^{(l-1)}; \\
v_0^{(l)}(x, y) &= T_{12}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{i=1}^3 T_{i2}^0 F_{ir}^{(l-1)}; w_2^{(l)}(x, y) = T_{13}^0 (F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{i=1}^3 T_{i3}^0 F_{ir}^{(l-1)},
\end{aligned} \quad (4.30)$$

де $F_{ir}^{(l)}$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР:

$$T_0 F_i^{(l)}(x, y) = T_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.31)$$

які зводяться до неоднорідних ДР 2-го порядку.

Загальні розв'язки ДР (4.28) і (4.31) визначаються згідно з п.п. 2.2.3, 2.2.4.2.

Загальний розв'язок для функції $\varphi_2^{(l)}(x, y)$ визначиться таким чином:

$$\varphi_2^{(l)}(x, y) = \eta_{20}\varphi_0^{(l)} + (\eta_{21}\nabla^2 + \eta_{22})w_2^{(l)} + \eta_{2\xi}^{(l-1)}. \quad (4.32)$$

Загальні розв'язки для складових компонент переміщень $u_2^{(l)}, v_2^{(l)}$:

$$\begin{aligned} u_2^{(l)}(x, y) &= \lambda_{2\varphi 0}\varphi_{0,x}^{(l)} + \lambda_{2\varphi 2}\varphi_{2,x}^{(l)} + \lambda_{2\psi 2}\psi_{2,y}^{(l)} + \lambda_{2w 2}w_{2,x}^{(l)} + \lambda_{u 2\xi}^{(l-1)}; \\ v_2^{(l)}(x, y) &= \lambda_{2\varphi 0}\varphi_{0,y}^{(l)} + \lambda_{2\varphi 2}\varphi_{2,y}^{(l)} - \lambda_{2\psi 2}\psi_{2,x}^{(l)} + \lambda_{2w 2}w_{2,y}^{(l)} + \lambda_{v 2\xi}^{(l-1)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

Залежності (4.30) і (4.33), ураховуючи (4.32), визначають складові переміщень.

Таким чином, знаходження НДС ортотропної пластини при симетричному деформуванні методом збурень зводиться до розв'язання в кожному наближенні за ε неоднорідних ДР 2-го порядку і СДР 8-го порядку. Однорідне ДР 2-го порядку (4.28) описує ВКЕ, а однорідне 4-го порядку (3.134) відносно функції F_{1D} описує ПКЕ, тобто, КЕ визначаються наближенням $l = 0$ за ε . НДС характеризується загальним розв'язком бігармонічного ДР і частинними розв'язками ДР (4.28) і (4.31).

Загальні розв'язки отримуються аналогічно лінійній задачі.

4.2. Метод збурень лінійно пружних властивостей в МТ однорідних ФНП

У [239] наведено в узагальненій формі функціонал і ВР Рейснера для геометрично і фізично нелінійного тіла. У [116] функціонал і ВРР для фізично нелінійного тіла при малих деформаціях виводиться на основі принципу можливих переміщень. ВРР для фізично нелінійного тіла має вигляд (3.18), у якому деформації виражаються через напруження нелінійно за Каудерером.

4.2.1. Основні співвідношення. Розглядається фізично нелінійна за Каудерером [207] однорідна пластинка довільної сталої товщини h в прямокутній системі координат $Oxuz$ (рис. 3.1). Виконуються граничні умови (3.2), а на бічній поверхні вони можуть бути довільними статичного характеру.

Залежності між деформаціями і напруженнями згідно з [207]:

$$\varepsilon_i = \sigma_0 k(s_0)/(3K) + g(t_0^2)(\sigma_i - \sigma_0)/(2G); \quad \gamma_{ij} = g(t_0^2)\sigma_{ij}/G; \quad (4.34)$$

$$\sigma_i = 3K\varepsilon_0\chi(\varepsilon_0) + 2G(\varepsilon_i - \varepsilon_0)\gamma(\psi_0^2); \sigma_{ij} = G\gamma_{ij}\gamma(\psi_0^2), \quad (i, j = x, y, z; i \neq j),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \\ s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K}; \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2))^{1/2}; \\ t_0 &= \frac{\tau_0}{G}; \quad \psi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_x\varepsilon_z - \varepsilon_y\varepsilon_z) + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

У (4.34), (4.35) σ_0 – середнє напруження, ε_0 – середнє видовження; K і G – сталі матеріалу; ν ; s_0 і t_0 – зведене середнє напруження і зведена інтенсивність дотичних напружень; ψ_0 – інтенсивність зсуву; $\chi(\varepsilon_0)$, $\gamma(\psi_0^2)$ – функції видовження і зсуву. В загальному випадку функції видовження і зсуву зображуються у вигляді степеневих рядів, коефіцієнти яких визначаються експериментально [370], але для деяких матеріалів можна прийняти $\chi(\varepsilon_0)=1$; $\gamma(\psi_0^2)=1-g_2\psi_0^2$, де g_2 безрозмірна стала матеріалу порядку $10^4 \div 10^7$ (чиста мідь, алюмінієва бронза, мартенівська сталь). Між s_0 і ε_0 , t_0 і ψ_0 існують певні залежності [207]. В [370] описана методика визначення сталих і наведені механічні дані для деяких із них.

Виділяючи безрозмірний малий параметр $\varepsilon = 1/g_2$ у залежностях (4.34) і (4.35), одержуються залежності між деформаціями і напруженнями у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))/E + \varepsilon a_0 \tau_{00}^2 (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z); \\ \gamma_{xy} &= \sigma_{xy}/G + \varepsilon b_0 \tau_{00}^2 \sigma_{xy}; \quad a_0 = \frac{g_2^2}{27G^3}; \quad b_0 = 6a_0; \\ \tau_0 &= \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2))^{1/2}; \quad \tau_{00}^2 = 9\tau_0^2/2; \end{aligned} \quad (4.36)$$

(ε_y , ε_z , γ_{xz} , γ_{yz} отримуються циклічною перестановкою індексів x , y , z).

Розкладаючи у ряди за малим параметром ε компоненти НДС, одержимо залежності (4.5), (4.6), а на основі (4.35) і (4.36) дістанемо:

$$\tau_{00}^2 = \sum_{l=0} \tau_0^{(l)} \varepsilon^l, \quad (4.37)$$

де

$$\begin{aligned} \tau_0^{(l)} = \tau_0^{(i+j)} = & \sum_{i=0}^{i+j} \sum_{j=0}^l \left(\sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(i)} \sigma_y^{(j)} + \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} - \right. \\ & \left. - \left(\sigma_x^{(i)} \sigma_y^{(j)} + \sigma_x^{(i)} \sigma_z^{(j)} + \sigma_y^{(i)} \sigma_z^{(j)} \right) + 3 \left(\sigma_{xy}^{(i)} \sigma_{xy}^{(j)} + \sigma_{xz}^{(i)} \sigma_{xz}^{(j)} + \sigma_{yz}^{(i)} \sigma_{yz}^{(j)} \right) \right). \end{aligned}$$

Розглянемо НК0-3 за поліномами Лежандра. Розкладаючи його компоненти за параметром ε і, виконуючи асимптотичне розщеплення по ε у ВРР (3.18), записаному для нелінійно пружної пластини, дістанемо залежності (4.9)–(4.11). Функції $s_{z0}^{(l)}(x, y)$, ..., $t_{x4}^{(l)}(x, y)$ знаходяться на основі (4.12), в яких

$$\begin{aligned} \omega_1^{(l)}(x, y) &= q^{(l)}(x, y); \\ \omega_2^{(l)}(x, y) &= \sum_{k=1}^3 q_{2k} w_k^{(l)}(x, y) + e_{20} \varphi_0^{(l)}(x, y) + e_{22} \varphi_2^{(l)}(x, y) + \\ &+ e_{2p} p^{(l)}(x, y) + e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}(x, y); \\ \omega_3^{(l)}(x, y) &= q_{32} w_2^{(l)}(x, y) + q_{33} w_3^{(l)}(x, y) + e_{31} \varphi_1^{(l)}(x, y) + e_{33} \varphi_3^{(l)}(x, y) + \\ &+ e_{3q} q^{(l)}(x, y) + e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}(x, y); \\ Q_{kx}^{(l)}(x, y) &= h_{k1} w_{1,x}^{(l)} + h_{k3} w_{3,x}^{(l)} + \sum_{i=1,3}^3 l_{ki} u_i^{(l)} + b_0 GI_{qkx}^{(l-1)}(x, y), \quad (k=1,3); \\ Q_{2x}^{(l)}(x, y) &= h_{22} w_{2,x}^{(l)} + l_{22} u_2^{(l)} + b_0 GI_{q2x}^{(l-1)}, \quad (x, u_i \rightarrow y; v_i), \end{aligned} \quad (4.38)$$

де

$$\begin{aligned} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} &= \int_z (P_0/15 - 2P_2/21 + P_4/35) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (\sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} - 2\sigma_z^{(j)}) \right) dz; \\ I_{\omega 3\xi}^{(l-1)} &= \int_z (3P_1/70 - P_3/15 + P_5/42) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (\sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} - 2\sigma_z^{(j)}) \right) dz; \\ I_{q1x}^{(l-1)}(x, y) &= \int_z (-14P_0/15 + P_2/3 + 3P_4/5) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{xz}^{(j)} \right) dz; \\ I_{q2x}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{7}{2} \int_z (P_3 - P_1) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{xz}^{(j)} \right) dz; \\ I_{q3x}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{7}{5} \int_z (-P_0 - 5P_2 + 6P_4) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{xz}^{(j)} \right) dz; \\ e_{2\omega\xi} &= 105a_0(2\nu-1)/(hd_{20}(1-\nu)); \quad e_{3\omega\xi} = 770a_0(2\nu-1)/(hd_{20}(1-\nu)). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Компоненти напружень знаходяться згідно з (4.11). Функції $s_{x0}^{(l)}(x, y), \dots, t_{yx3}^{(l)}(x, y)$ та $\Phi_{sx}^{(l-1)}(x, y), \dots, \Phi_{syx}^{(l-1)}(x, y)$, що входять у (4.11), визначаються так:

$$\begin{aligned}
 s_{xk}^{(l)}(x, y) &= d_0(u_{k,x}^{(l)} + \nu v_{k,y}^{(l)}) + d_{10}s_{zk}^{(l)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3); \\
 s_{xi}^{(l)}(x, y) &= d_{10}s_{zi}^{(l)}, \quad (i = 4, 5), \quad (x, y; u, \nu); \quad t_{yxk}^{(l)}(x, y) = G(u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}), \quad (k = 0, 1, 2, 3); \\
 \Phi_{sx}^{(l-1)}(x, y, z) &= a_0 d_0 \Phi_{vx}^{(l-1)}, \quad \Phi_{vx}^{(l-1)}(x, y, z) = \Phi_x^{(l-1)} + \Phi_y^{(l-1)}, \\
 \Phi_x^{(l-1)}(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (2\sigma_x^{(j)} - \sigma_y^{(j)} - \sigma_z^{(j)}), \quad (x, y); \quad (4.40) \\
 \Phi_{syx}^{(l-1)}(x, y, z) &= b_0 G \Phi_{yx}^{(l-1)}; \quad \Phi_{yx}^{(l-1)}(x, y, z) = \sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{xy}^{(j)}; \\
 \tau_0^{(i)}(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{m+n=i} \sum_{n=0} (\sigma_x^{(m)} \sigma_x^{(n)} + \sigma_y^{(m)} \sigma_y^{(n)} + \sigma_z^{(m)} \sigma_z^{(n)} - \\
 & - (\sigma_x^{(m)} \sigma_y^{(n)} + \sigma_x^{(m)} \sigma_z^{(n)} + \sigma_y^{(m)} \sigma_z^{(n)}) + 3(\sigma_{xy}^{(m)} \sigma_{xy}^{(n)} + \sigma_{xz}^{(m)} \sigma_{xz}^{(n)} + \sigma_{yz}^{(m)} \sigma_{yz}^{(n)})).
 \end{aligned}$$

4.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги і крайові умови в НК0-3. Розвиваючи компоненти НДС у ВРР у ряди за малим параметром ε і, виконуючи асимптотичну процедуру, одержуються ДР рівноваги та крайові умови в довільному l -му наближенні за ε . Після достатньо складних і громіздких математичних викладок у НК0-3 отримується рекурентна СДР рівноваги фізично нелінійної пластини в l -му наближенні, яка має вигляд (4.15). Диференціальні оператори D_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 11$) дорівнюють відповідним операторам для ізотропної пластини, якщо покласти в них $\nu_0 = \nu; E_0 = E; G_0 = G; b_{110} = E/(1-\nu^2)$.

Праві частини ДР (4.15) для нелінійно пружної пластини визначаються так:

$$\begin{aligned}
 D_{1p}^{(l)} &= \gamma_{u0} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{1q}^{(l)} = 0, \quad D_{2p}^{(l)} = \gamma_{u0} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{2q}^{(l)} = 0, \quad D_{3p}^{(l)} = 0, \quad D_{3q}^{(l)} = \beta_{u1} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x}, \\
 D_{4p}^{(l)} &= 0, \quad D_{4q}^{(l)} = \beta_{u1} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{5p}^{(l)} = \gamma_{u2} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{5q}^{(l)} = 0, \quad D_{6p}^{(l)} = \gamma_{u2} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{6q}^{(l)} = 0, \\
 D_{7p}^{(l)} &= 0, \quad D_{7q}^{(l)} = \beta_{u3} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{8p}^{(l)} = 0, \quad D_{8q}^{(l)} = \beta_{u3} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{9p}^{(l)} = 0, \quad D_{9q}^{(l)} = \beta_{w1} q^{(l)}, \\
 D_{10p}^{(l)} &= \gamma_{w2} p^{(l)}, \quad D_{10q}^{(l)} = 0, \quad D_{11p}^{(l)} = 0, \quad D_{11q}^{(l)} = \beta_{w3} q^{(l)}, \\
 D_{1\xi}^{(l-1)} &= \frac{hd_{10}}{10} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{sx0}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx0}^{(l-1)}}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{3\xi}^{(l-1)} &= \frac{hd_{10}}{70} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{2b_0G}{h} I_{q^{1x}}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx1}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx1}^{(l-1)}}{\partial y}; \\
D_{5\xi}^{(l-1)} &= -\frac{hd_{10}}{35} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{6b_0G}{5h} I_{q^{2x}}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx2}^{(l-1)}}{\partial y}; \\
D_{7\xi}^{(l-1)} &= -\frac{hd_{10}}{105} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{6b_0G}{7h} I_{q^{3x}}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx3}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx3}^{(l-1)}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$(D_{i\xi} \rightarrow D_{i+1\xi}; x, y; i = 1, 3, 5, 7);$$

$$D_{9\xi}^{(l-1)} = b_0G \left(\frac{\partial I_{q^{1x}}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q^{1y}}^{(l-1)}}{\partial y} \right); \quad D_{10\xi}^{(l-1)} = \frac{b_0G}{5} \left(\frac{\partial I_{q^{2x}}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q^{2y}}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{e_{2\omega\xi}}{5} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)};$$

$$D_{11\xi}^{(l-1)} = -\frac{b_0G}{5} \left(\frac{\partial I_{q^{1x}}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q^{1y}}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3b_0G}{35} \left(\frac{\partial I_{q^{3x}}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q^{3y}}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3}{35} e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)};$$

$$\Phi_{sxm}^{(l-1)}(x, y) = a_0 d_0 \Phi_{vxm}^{(l-1)}, \quad \Phi_{sym}^{(l-1)}(x, y) = a_0 d_0 \Phi_{vym}^{(l-1)}, \quad \Phi_{syxm}^{(l-1)}(x, y) = b_0 G \Phi_{yxm}^{(l-1)};$$

$$\Phi_{vxm}^{(l-1)}(x, y) = \int_z P_m \Phi_{vx}^{(l-1)}(x, y, z) dz, \quad \Phi_{vym}^{(l-1)}(x, y) = \int_z P_m \Phi_{vy}^{(l-1)}(x, y, z) dz;$$

$$\Phi_{yxm}^{(l-1)} = \int_z P_m \Phi_{yx}^{(l-1)}(x, y, z) dz, \quad (m = 0, 1, 2, 3).$$

У (4.41) $\gamma_{u0}, \gamma_{u2}, \gamma_{w2}, \beta_{u1}, \beta_{u3}, \beta_{w1}, \beta_{w3}$ визначаються згідно залежностей (А.5).

Важливо зазначити, що на основі (4.40), (4.41) праві частини СДР для ФНП в l -му наближенні на відміну від ортотропних пластин нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень і тому складність розв'язання СДР зростає на порядок в порівнянні з лінійно пружними пластинами.

Оскільки структура ДРР в l -му наближенні для нелінійно пружної пластини і для ортотропної пластини з використанням методу збурень однакова, то і всі висновки, розділення СДР на кососиметричне і симетричне деформування, методика знаходження загальних розв'язів, визначення НДС і т. п. аналогічні.

Крайові умови в l -му наближенні мають вигляд (4.18) з урахуванням (4.19), (4.40) і (4.41). Вони також лінійно залежать від компонент НДС l -го наближення і суттєво нелінійно— від компонент попередніх наближень.

У НК0-N за поліномами Лежандра і в наближенні l за ε математична суть ДР і крайових умов аналогічна НК0-3 при будь-якому l (ліві частини СДР і крайових умов однакові, а праві— залежать нелінійно від НДС попередніх наближень.

Таким чином, тривимірна гранична задача ТП для фізично нелінійних пластин довільної товщини зведена до рекурентної нескінченної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для лінійно пружних ізотропних пластин. Праві частини отриманих СДР і крайові умови в довільному наближенні за малим параметром нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Знаходження частинних і загальних розв'язків СДРР в кожному наближенні за ε зводиться до розв'язання неоднорідних ДР 2-го порядку. Праві частини цих ДР, які нелінійно залежать від компонент НДС, бажано апроксимувати функціями, зручними для знаходження частинних розв'язків цих рівнянь.

4.3. Метод тригонометричних рядів у граничних задачах для фізично нелінійних пластин. Числові результати

Наведемо розв'язання СДР у кожному наближенні по ε методами одинарних і подвійних тригонометричних рядів аналогічно п. 3.6.1, 3.6.2, приймаючи до уваги, що структура ДР рівноваги в l -му наближенні за малим параметром ε при використанні методу збурень така, як і для транстропної пластини, тільки праві частини ДР для транстропної пластини залежать від зовнішнього навантаження, а в ДР із застосуванням методу збурень – від функцій попередніх наближень (для $l = 1, 2, \dots$) або від зовнішнього навантаження (в 0-му наближенні).

4.3.1. Метод одинарних тригонометричних рядів. Не зменшуючи загальності, побудуємо розв'язки в одинарних тригонометричних рядах для визначення НДС фізично нелінійних пластин при кососиметричному деформуванні в НК13, яке описується СДР типу (4.20). Вважаємо, що граничні умови на лицевих площинах задовольняють (3.2) при $p(x, y) = 0$, а зовнішнє навантаження $q(x, y)$ може бути розвинене в одинарний тригонометричний ряд (3.172). Приймемо, що при $y = 0, y = b$ виконуються крайові умови Нав'є:

$$U(x, z, y = 0, b) = 0; W(x, z, y = 0, b) = 0; \sigma_y(x, z, y = 0, b) = 0, \quad (4.42)$$

а умови при $x = 0, x = a$ довільні кососиметричні відносно серединної площини.

Крайові умови (4.42) згідно (4.18) в l -му наближенні по ε при $y = 0, y = b$ для кососиметричного деформування приймуть такий вигляд:

$$u_k^{(0)}(x; y = 0, b) = 0; w_k^{(0)}(x; y = 0, b) = 0; s_{yk}^{(0)}(x; y = 0, b) = 0; \quad (4.43)$$

$$u_k^{(l)}(x; y = 0, b) = 0, (u_k^{(l)} \rightarrow w_k^{(l)}); \frac{h}{2k+1} s_{yk}^{(l)}(x; y = 0, b) = \Phi_{syk}^{(l-1)}(x; y = 0, b), \quad (4.44)$$

$$(l = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, 3).$$

В 0-му наближенні по ε задача для ФНП зводиться до задачі для лінійно пружної ізотропної пластини. В цьому наближенні згідно з п. 3.6.1.1 маємо:

$$\begin{aligned} \Phi_{1B}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Bn}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad \Phi_{1П}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Пn}^{(0)}(x) S_{ny}, \\ \Phi_{kr}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krn}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad \Pi_{kq}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{kqn}^{(0)}(x) S_{ny}, \\ \psi_k^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1n}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad \varphi_k^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad w_k^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}^{(0)}(x) S_{ny}, \\ u_k^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad v_k^{(0)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{kn}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad Q_{kx}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kxn}^{(0)}(x) S_{ny}; \\ Q_{ky}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{kyn}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 3); \quad \omega_3^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3n}^{(0)}(x) S_{ny}, \\ t_{xi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} t_{xin}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad t_{yi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{yin}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (i = 0, 2, 4); \\ s_{zi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{zin}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 5); \quad s_{xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{xin}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (4.45) \\ s_{yi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{yin}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 5); \quad t_{yxi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{yxin}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (i = 1, 3); \\ U^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(0)}(x, z) S_{ny}; \quad V^{(0)}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(x, z) C_{ny}; \\ W^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(0)}(x, z) S_{ny}; \\ \sigma_x^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{xn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; \quad \sigma_y^{(0)}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{yn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; \\ \sigma_z^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zn}^{(0)}(x, z) S_{ny}, \quad \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{xzn}^{(0)}(x, z) S_{ny}, \\ \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{yzn}^{(0)}(x, z) C_{ny}, \quad \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{yxn}^{(0)}(x, z) C_{ny}. \end{aligned}$$

Крайові умови (4.43) при цьому виконуються. Функції, що входять множниками при синусах та косинусах у залежностях (4.45), є відомими функціями 0-го наближення, які знаходяться аналогічно п. 3.6.1.1 з урахуванням крайових умов при $x = 0, x = a$.

Аналізуючи вирази (4.39), (4.40) з індексом (0) угорі та, урахувавши відомі формули тригонометрії, показано, що нижчезаписані функції можна зобразити так:

$$\begin{aligned}
\tau_o^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{on}^{(0)}(x, z) C_{ny}; & \Phi_x^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{xn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; \\
\Phi_y^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{yn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; & \Phi_{yx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{yxn}^{(0)}(x, z) C_{ny}; \\
\Phi_{vx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vxn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; & \Phi_{vy}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vyn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; \\
\Phi_{vxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vxin}^{(0)}(x) S_{ny}; & \Phi_{vyi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vyin}^{(0)}(x) S_{ny}; & \Phi_{yxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{yxin}^{(0)}(x) C_{ny}; \\
\Phi_{sxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{sxin}^{(0)}(x) S_{ny}; & \Phi_{syi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{syin}^{(0)}(x) S_{ny}; & & (4.46) \\
\Phi_{syxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{syxin}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (i = 0, 1, 2, 3); & \Phi_{sx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{sxn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; \\
\Phi_{sy}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{syn}^{(0)}(x, z) S_{ny}; & \Phi_{syx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{syxn}^{(0)}(x, z) C_{ny}; \\
I_{qkx}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{qkxn}^{(0)}(x) S_{ny}; & I_{qky}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{qkyn}^{(0)}(x) C_{ny}; & I_{\omega 3}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{\omega 3n}^{(0)}(x) S_{ny},
\end{aligned}$$

де множники при синусах та косинусах – відомі функції 0-го наближення. Функції змінної x залежать від складових, а змінних x і z – від компонент НДС. Значимо складність указаних функцій (4.46), оскільки згідно з (4.39) і (4.40) вони є подвійними та потрійними добутками одинарних тригонометричних рядів.

Наведемо у першому наближенні за параметром ε структурний вигляд правих частин ДР (4.15), (4.20) та (4.24) з урахуванням (4.41), (4.45), (4.46):

$$\begin{aligned}
D_{k\xi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_{k\xi n}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (k = 3, 7, 9, 11); & D_{k\xi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{k\xi n}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 4, 8); \\
\Pi_{k\xi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{k\xi n}^{(0)}(x) S_{ny}; & \Psi_{k\xi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{k\xi n}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 3),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

де функції від x – відомі функції нульового наближення.

Приймаючи до уваги, що структура лівих частин ДР в 0-му і інших наближеннях однакова, а в одинарних тригонометричних рядах згідно з п. 3.6.1.1 праві частини цих ДР також аналогічні за структурою, одержується такий висновок: загальні та частинні розв'язки ДР 0-го та 1-го наближень в одинарних тригонометричних рядах структурно однакові. На основі цього та формул (4.45) маємо:

$$\begin{aligned} \Phi_{1B}^{(1)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Bn}^{(1)}(x) S_{ny} ; \quad \Phi_{1П}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Пn}^{(1)}(x) S_{ny} ; \quad \Phi_{kr}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krn}^{(1)}(x) S_{ny} ; \\ \psi_k^{(1)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn}^{(1)}(x) C_{ny} ; \quad \psi_{kr}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{krn}^{(1)}(x) C_{ny}, \quad (k=1, 3), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де функції $\Phi_{1Bn}^{(1)}(x)$, $\Phi_{1Пn}^{(1)}(x)$, $\psi_{kn}^{(1)}(x)$ для кожного значення n містять по 4-и сталих інтегрування. Оскільки вказані розв'язки за структурою аналогічні 0-му наближенню, то і складові компонент НДС в одинарних тригонометричних рядах у 1-му наближенні по структурі аналогічні 0-му наближенню (4.45). Сталі інтегрування (12 сталих) знаходяться із крайових умов (4.18) при $x=0$, $x=a$:

$$\int_{(s)} \left\{ \sum_{k=1,3}^3 (M_{ku}^{(1)} \delta u_k^{(1)} + M_{kv}^{(1)} \delta v_k^{(1)} + Q_{kw}^{(1)} \delta w_k^{(1)}) \right\} ds = 0, \quad (4.49)$$

де

$$M_{ku}^{(1)} = \frac{h}{2k+1} s_{xk}^{(1)} - \Phi_{sxk}^{(0)}, \quad M_{kv}^{(1)} = \frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(1)} - \Phi_{syxk}^{(0)}, \quad Q_{kw}^{(1)} = \frac{h}{2k-1} t_{xk-1}^{(1)}, \quad (k=1, 3). \quad (4.50)$$

Тут $\Phi_{sx0}^{(0)}$, $\Phi_{syx0}^{(0)}$, $\Phi_{sxk}^{(0)}$, $\Phi_{syxk}^{(0)}$ – відомі функції (4.46) 0-го наближення від x, y , які в інтегралі (4.49) беруться при $x=0$, $x=a$, тобто це відомі функції від однієї змінної y . Функції $s_{xk}^{(1)}$, $t_{yxk}^{(1)}$, $t_{xk-1}^{(1)}$ мають структуру аналогічну 0-му наближенню (4.45) і залежать від двох змінних x, y . У ці функції входять невідомі сталі інтегрування. В (4.49) вказані функції приймаються при $x=0$, $x=a$, тобто це функції однієї змінної y , що містять 12 невідомих сталих. Якщо на краях при $x=0$, $x=a$ задані тільки силові фактори, а на компоненти переміщень не накладено ніяких умов, то,

оскільки тригонометрична структура кожного доданку у (4.50) однакова, одержуємо, що сталі інтегрування визначаються із ЛАР, які отримуються прирівнюванням до нуля множників при варіаціях компонент переміщень у (4.49).

Якщо ж при $x = 0, x = a$ задані компоненти переміщень, то сталі знаходяться із 12 – ти умов: по одній умові на кожному краї для $u_k^{(1)}, v_k^{(1)}, w_k^{(1)}$ ($k = 1, 3$).

В інших наближеннях по ε ($l = 2, 3, \dots$) структура функцій, розв'язків, складових і компонент НДС аналогічна (4.45) – (4.48). зокрема:

$$\begin{aligned} \Phi_{1B}^{(l)}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1Bn}^{(l)}(x) S_{ny}; \quad \Phi_{1\Pi}^{(l)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1\Pi n}^{(l)}(x) S_{ny}; \quad \Phi_{kr}^{(l)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{krn}^{(l)}(x) S_{ny}; \\ \psi_k^{(l)}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn}^{(l)}(x) C_{ny}; \quad \psi_{kr}^{(l)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{krn}^{(l)}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 3), \end{aligned}$$

де $\Phi_{1Bn}^{(l)} = (D_{1n}^{(l)} + D_{3n}^{(l)}x)ch\beta_n x + (D_{2n}^{(l)} + D_{4n}^{(l)}x)ch\beta_n x$, ($D_{jn}^{(l)}$ – сталі інтегрування).

Для визначення $\Phi_{1\Pi n}^{(l)}(x)$ отримується таке ДР (індекс l угорі опущений):

$$K_{4\Pi} \Phi_{1\Pi n}^{IV} + (K_{2\Pi} - 2K_{4\Pi} \beta_n^2) \Phi_{1\Pi n}^{II} + (K_{4\Pi} \beta_n^4 - K_{2\Pi} \beta_n^2 + K_{0\Pi}) \Phi_{1\Pi n} = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$K_{4\Pi} k^4 + (K_{2\Pi} - 2K_{4\Pi} \beta_n^2) k^2 + (K_{4\Pi} \beta_n^4 - \beta_n^2 K_{2\Pi} + K_{0\Pi}) = 0,$$

або $K_{4\Pi} \xi^2 + (K_{2\Pi} - K_{4\Pi} \beta_n^2) \xi + (\beta_n^4 K_{4\Pi} - \beta_n^2 K_{2\Pi} + K_{0\Pi}) = 0$, де $k^2 = \xi$,

де корені останнього рівняння залежать від товщини пластини і МХ матеріалу.

Розглянемо різні випадки.

Перший випадок. Обидва корені ξ_{1n} та ξ_{2n} характеристичного рівняння додатні ($\xi_{1n} > 0, \xi_{2n} > 0$) і різні ($\xi_{1n} \neq \xi_{2n}$). Тоді маємо чотири дійсних різних корені: $k_{1n} > 0, k_{2n} < 0, k_{3n} > 0, k_{4n} < 0, |k_{2n}| = k_{1n}, |k_{4n}| = k_{3n}$. Загальний розв'язок для $\Phi_{1\Pi n}(x)$ буде: $\Phi_{1\Pi n}(x) = A_{1n} e^{k_{1n}x} + A_{2n} e^{k_{2n}x} + A_{3n} e^{k_{3n}x} + A_{4n} e^{k_{4n}x}$.

Другий випадок. $\xi_{1n} > 0, \xi_{2n} > 0, \xi_{1n} = \xi_{2n}$. Тоді $k_{1n} = k_{3n}, k_{2n} = k_{4n}, k_{1n} > 0, k_{2n} < 0, |k_{2n}| = k_{1n}; k_{1n} = k_{3n} = \sqrt{\xi_{1n}}; k_{2n} = k_{4n} = -\sqrt{\xi_{1n}}$;

$$\Phi_{1\Pi n}(x) = (A_{1n} + A_{3n}x) e^{k_{1n}x} + (A_{2n} + A_{4n}x) e^{k_{2n}x}.$$

Третій випадок. $\xi_{1n} > 0$, $\xi_{2n} < 0$. Тоді $k_{1n} > 0$, $k_{2n} < 0$, $|k_{2n}| = k_{1n}$; k_{3n} , k_{4n} – комплексні числа виду $k_{3n,4n} = \pm s_n i$, де $i = \sqrt{-1}$; $k_{1n,2n} = \pm \sqrt{\xi_{1n}}$, $s_n = \sqrt{|\xi_{2n}|}$;

$$\Phi_{1In}(x) = A_{1n} e^{k_{1n}x} + A_{2n} e^{k_{2n}x} + A_{3n} \cos s_n x + A_{4n} \sin s_n x.$$

Четвертий випадок. $\xi_{1n} < 0$, $\xi_{2n} < 0$, $\xi_{1n} \neq \xi_{2n}$. Тоді $k_{1n,2n} = \pm s_n i$, $k_{3n,4n} = \pm r_n i$; $s_n = \sqrt{|\xi_{1n}|}$, $r_n = \sqrt{|\xi_{2n}|}$; $\Phi_{1In}(x) = A_{1n} \cos s_n x + A_{2n} \sin s_n x + A_{3n} \cos r_n x + A_{4n} \sin r_n x$.

П'ятий випадок. $\xi_{1n} < 0$, $\xi_{2n} < 0$, $\xi_{1n} = \xi_{2n}$. Тоді маємо два двократних корені для k виду $k_1 = k_3 = s_n i$, $k_2 = k_4 = -s_n i$; $s_n = \sqrt{|\xi_{1n}|}$;

$$\Phi_{1In}(x) = (A_{1n} + A_{3n}x) \cos s_n x + (A_{2n} + A_{4n}x) \sin s_n x.$$

Шостий випадок. ξ_{1n} , ξ_{2n} – комплексні: $\xi_{1n} = a + bi$, $\xi_{2n} = a - bi$, де a , b – дійсні числа. Тоді k_{in} ($i=1, \dots, 4$) – комплексні числа вигляду: $k_{1,2} = \pm c \pm di$,

$$k_{3,4} = \pm c \mp di, \text{ де } c = ((a + \sqrt{a^2 + b^2})/2)^{1/2}, d = b/(2((a + \sqrt{a^2 + b^2})/2)^{1/2});$$

$$\Phi_{1In}(x) = (A_{1n} e^{cx} + A_{2n} e^{-cx}) \cos dx + (A_{3n} e^{cx} + A_{4n} e^{-cx}) \sin dx.$$

Для знаходження $\psi_{kn}^{(l)}(x)$ будемо мати ДР по структурі подібне рівнянню по визначенню $\Phi_{1In}^{(l)}(x)$. Аналогічно розглядається шість випадків для коренів.

Для знаходження частинних розв'язків відповідних неоднорідних ДР може бути використано метод зведення неоднорідного ДР високого порядку до неоднорідних ДР 2-го порядку (див. п. 2.2.4).

Крайові умови (4.44) виконуються. Умови на краях $x=0$, $x=a$ визначаються рівнянням (4.49) і залежностями (4.50), в яких замість верхнього індекса «1» записується індекс « l », а замість індекса «0» – індекс « $l-1$ ». Таким чином, отримано рекурентний процес визначення НДС фізично нелінійної пластини.

4.3.2. Метод подвійних тригонометричних рядів. Розглянемо метод подвійних тригонометричних рядів при розв'язанні граничних задач для ФНП при згинальному деформуванні з урахуванням обтискання (НК0-3).

Граничні умови на лицевих площинах задовольняють (3.2), а зовнішнє навантаження $q(x, y)$ і $p(x, y)$ розкладемо в подвійні тригонометричні ряди (3.194),

(3.201). Прийmemo, що при $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ виконуються крайові умови вільного обпирання, які згідно з (4.18) в l -му наближенні по ε мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_k^{(0)}(x, y = 0, b) = 0, w_k^{(0)}(x, y = 0, b) = 0, s_{yi}^{(0)}(x, y = 0, b) = 0, \\ v_k^{(0)}(x = 0, a; y) = 0, w_k^{(0)}(x = 0, a; y) = 0, s_{xi}^{(0)}(x = 0, a; y) = 0, (i = 0, 1, \dots, 5); \quad (4.51) \\ u_k^{(l)}(x, y = 0, b) = 0, w_k^{(l)}(x, y = 0, b) = 0, \frac{h}{2k+1} s_{yi}^{(l)}(x, y = 0, b) = a_0 E_0 \Phi_{v_{yi}}^{(l-1)}(x, y = 0, b), \\ v_k^{(l)}(x = 0, a; y) = 0, w_k^{(l)}(x = 0, a; y) = 0, \frac{h}{2k+1} s_{xi}^{(l)}(x = 0, a; y) = a_0 E_0 \Phi_{v_{xi}}^{(l-1)}(x = 0, a; y), \\ (l = 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots, 5). \end{aligned}$$

На основі п. 3.6.2 наведемо вигляд розв'язків, виразів для складових та компонент НДС нульового наближення, а також для нелінійних функцій НДС з індексом «0» угорі з урахуванням (4.38)–(4.40):

$$\begin{aligned} u_k^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kmn}^{(0)} C_{mx} S_{ny}, v_k^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn}^{(0)} S_{mx} C_{ny}, \\ \varphi_k^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, (k = 0, 1, 2, 3); w_k^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kmn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, \\ Q_{kx}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kxmn}^{(0)} C_{mx} S_{ny}, Q_{ky}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kymn}^{(0)} S_{mx} C_{ny}, (k = 1, 2, 3); \\ \omega_i^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{imn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, (i = 2, 3); \\ t_{xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{ximn}^{(0)} C_{mx} S_{ny}, t_{yi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yimn}^{(0)} S_{mx} C_{ny}, (i = 0, 1, \dots, 4); \\ s_{zi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{zimn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, s_{xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{ximn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, \\ s_{yi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{yimn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, (i = 0, 1, \dots, 5); t_{yxk}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yxkmn}^{(0)} C_{mx} C_{ny}, (k = 0, 1, 2, 3); \\ U^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^{(0)}(z) C_{mx} S_{ny}; V^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^{(0)}(z) S_{mx} C_{ny}; \\ W^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \\ \sigma_x^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{xmn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \sigma_y^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{ymn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{yxmn}^{(0)}(z) C_{mx} C_{ny}; \quad \sigma_z^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zmn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad (4.52) \\
\sigma_{xz}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{xzm}^{(0)}(z) C_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{yzmn}^{(0)}(z) S_{mx} C_{ny}; \\
\tau_o^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{0mn}^{(0)}(z) C_{mx} C_{ny}; \quad \Phi_x^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{xmn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \\
\Phi_y^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{ymn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{yx}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{yxmn}^{(0)}(z) C_{mx} C_{ny}; \\
\Phi_{vx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vxmn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{vy}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vymn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \\
\Phi_{vxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vximn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{vyi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{vyimn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}; \\
\Phi_{yxi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{yximn}^{(0)} C_{mx} C_{ny}; \quad \Phi_{sxi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{sximn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}; \\
\Phi_{syi}^{(0)}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{syimn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{syxi}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{syximn}^{(0)} C_{mx} C_{ny}, \quad (i = 0, 1, 2, 3); \\
\Phi_{sx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{sxmn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \Phi_{sy}^{(0)}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{symn}^{(0)}(z) S_{mx} S_{ny}; \\
\Phi_{syx}^{(0)}(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{syxmn}^{(0)} C_{mx} C_{ny}; \quad I_{qkx}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{qkxmn}^{(0)} C_{mx} S_{ny}; \\
I_{qky}^{(0)}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{qkymn}^{(0)} S_{mx} C_{ny}, \quad (k = 1, 2, 3); \quad I_{\omega i}^{(0)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\omega imn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, \quad (i = 2, 3).
\end{aligned}$$

Крайові умови (4.51) в нульовому наближенні при цьому виконуються.

Праві частини ДР типу (4.15) в 1-му наближенні на основі (4.41) та (4.52):

$$\begin{aligned}
D_{i\xi}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{i\xi mn}^{(0)} C_{mx} S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 5, 7); \\
D_{i\xi}^{(0)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{i\xi mn}^{(0)} S_{mx} C_{ny}, \quad (i = 2, 4, 6, 8); \quad D_{i\xi}^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{i\xi mn}^{(0)} S_{mx} S_{ny}, \quad (i = 9, 10, 11).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Вони співпадають структурно з правими частинами ДР в нульовому наближенні.

Оскільки КЕ в даній задачі відсутні, то розв'язання зводиться до визначення частинного розв'язку СДР типу (4.15), який з урахуванням (4.53) шукається у вигляді:

$$u_k^{(1)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{k mn}^{(1)} C_{mx} S_{ny}, \quad v_k^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{k mn}^{(1)} S_{mx} C_{ny}, \quad (k = 0, 1, 2, 3);$$

$$w_k^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{k mn}^{(1)} S_{mx} S_{ny}, \quad (k = 1, 2, 3),$$
(4.54)

де $u_{k mn}^{(1)}$, $v_{k mn}^{(1)}$, $w_{k mn}^{(1)}$ – шукані сталі.

Підставляючи (4.54) у СДР вигляду (4.15) і, урахувавши (4.53), отримаємо для кожної пари значень m і n систему одинадцяти ЛАР відносно шуканих сталих. Далі одержимо складові компонент переміщень і функції $\varphi_k^{(1)}(x, y)$:

$$\varphi_k^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k mn}^{(1)} S_{mx} S_{ny}, \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$
(4.55)

де $\varphi_{k mn}^{(1)}$ – уже відомі коефіцієнти.

На основі (4.38) та (4.40), урахувавши (4.11), (4.54) і (4.55), отримуються складові напружень і компоненти напружень в 1-му наближенні, які структурно аналогічні 0-му наближенню (4.52). Крайові умови (4.51) в 1-му наближенні також виконуються.

На основі рекурентності формул для складових і компонент НДС, можна побудувати розв'язки в тригонометричних рядах і в інших наближеннях за ε , структурно аналогічні 0-му і 1-му наближенню. Зазначимо складність в отримванні коефіцієнтів розвинення у вказаних тригонометричних рядах.

4.3.3. Числові результати для фізично нелінійних пластин. Для з'ясування якісного характеру змінення НДС розглянемо циліндричний згин (плоска деформація) ФНП, вільно обіпертої вздовж довгих країв $x = 0, x = a$, при дії кососиметричного навантаження $q(x, y)$. Не рівні нулю компоненти НДС залежатимуть від x і z . На краях $x = 0, x = a$ виконуються умови Нав'є. СДР рівноваги (4.20), в якій, урахувавши варіаційний метод їх одержання, потрібно взяти 1-е, 3-е, 5-е, 6-е ДР, які відповідають у перетвореному рівнянні Рейснера рівностям нулю множників при варіаціях $\delta u_1^{(l)}, \delta u_3^{(l)}, \delta w_1^{(l)}, \delta w_3^{(l)}$.

Введемо деякі спрощення в правих частинах ДР рівноваги в наближеннях $l = 1, 2, \dots$ за параметром ε , а саме: урахувуватимемо тільки ті доданки, що залежать від складових $u_1^{(l-1)}(x), w_1^{(l-1)}(x)$, а доданками, які містять $u_3^{(l-1)}(x), w_3^{(l-1)}(x)$ нехтуватимемо, що логічно з фізичних міркувань.

Розглянемо послідовність визначення НДС в 1-му наближенні за ε .

Опускаючи проміжні громіздкі викладки, наведемо деякі вирази і функції з індексом “0” угорі, які входять у праві частини ДР:

$$\begin{aligned} \tau_0^{(0)}(x, y) &= \sum_{i,j=0}^3 P_i P_j T_{ij}^{(0)} \quad (i \leq j); \\ \sigma_x^{(0)}(x, z) \tau_0^{(0)}(x, z) &= \sum_{i,j,n=0}^3 P_i P_j P_n T_{xijn}^{(0)}; \quad \sigma_y^{(0)}(x, z) \tau_0^{(0)}(x, z) = \sum_{i,j,n=0}^3 P_i P_j P_n T_{yijn}^{(0)}; \quad (4.56) \\ \sigma_z^{(0)}(x, z) \tau_0^{(0)}(x, z) &= \sum_{i,j,n=0}^3 P_i P_j P_n T_{zijn}^{(0)}; \quad \sigma_{xz}^{(0)}(x, z) \tau_0^{(0)}(x, z) = \sum_{i,j,n=0}^3 P_i P_j P_n T_{xzijn}^{(0)}, \quad (i \leq j \leq n), \end{aligned}$$

де функції $T_{ij}^{(0)}, T_{xijn}^{(0)}, \dots, T_{xzijn}^{(0)}$ залежать від МГП пластини і складових $u_1^{(0)}(x), w_1^{(0)}(x)$. Тут і далі сталі і функції не наводяться із-за їх громіздкості.

Приймаючи до уваги (4.39), (4.41) і, ураховуючи (4.56), одержимо :

$$\begin{aligned} \Phi_{sx0}^{(0)}(x) &= I_{0000} T_{00000}^{(0)} + I_{0011} T_{00011}^{(0)} + I_{0022} T_{00022}^{(0)} + I_{0033} T_{00033}^{(0)}, \\ \Phi_{sx1}^{(0)}(x) &= I_{1001} T_{11001}^{(0)} + I_{1122} T_{11122}^{(0)} + I_{1111} T_{11111}^{(0)} + I_{1133} T_{11133}^{(0)} + I_{1012} T_{11012}^{(0)} + \\ &+ I_{1113} T_{11113}^{(0)} + I_{1223} T_{11223}^{(0)} + I_{1023} T_{11023}^{(0)} + I_{1333} T_{11333}^{(0)}, \\ \Phi_{sx2}^{(0)}(x) &= I_{2011} T_{22011}^{(0)} + I_{2022} T_{22022}^{(0)} + I_{2033} T_{22033}^{(0)} + I_{2002} T_{22002}^{(0)} + I_{2013} T_{22013}^{(0)}, \\ \Phi_{sx3}^{(0)}(x) &= I_{3003} T_{33003}^{(0)} + I_{3122} T_{33122}^{(0)} + I_{3111} T_{33111}^{(0)} + I_{3133} T_{33133}^{(0)} + I_{3012} T_{33012}^{(0)} + \\ &+ I_{3113} T_{33113}^{(0)} + I_{3223} T_{33223}^{(0)} + I_{3333} T_{33333}^{(0)} + I_{3023} T_{33023}^{(0)}, \\ I_{qkx}^{(0)}(x) &= \sum_{i,j,n=0}^3 a_{kxijn} T_{xzijn}^{(0)}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad I_{\omega 3}^{(0)}(x) = \sum_{i,j,n=0}^3 (c_{xijn} T_{xijn}^{(0)} + c_{yijn} T_{yijn}^{(0)} + c_{zijn} T_{zijn}^{(0)}), \\ &(i \leq j \leq n), \end{aligned}$$

де $I_{ijmn} = \int_z P_i P_j P_m P_n dz$; P_k – поліноми Лежандра; $a_{kxijn}, c_{xijn}, c_{yijn}, c_{zijn}$ – сталі, виражаються через інтеграли I_{ijmn} ; $T_{ijmk}^{(0)}$ – функції від МГП і $u_1^{(0)}(x), w_1^{(0)}(x)$.

В подальшому послідовність визначення НДС наступна. Після знаходження $u_1^{(1)}, u_3^{(1)}, w_1^{(1)}, w_3^{(1)}$ із СДР з урахуванням крайових умов за формулами (4.9) і (4.11) визначаються компоненти переміщень і напружень в наближенні $l=1$ за ε з урахуванням наближення $k=1,3$ за поліномами Лежандра:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x, z) &= \sum_{k=1,3}^3 P_k u_k^{(1)}; W^{(1)}(x, z) = \sum_{k=0,2}^2 P_k w_{k+1}^{(1)}; \sigma_z^{(1)}(x, z) = \sum_{k=1,3}^5 P_k s_{zk}^{(1)}; \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x, z) &= \sum_{k=0,2}^4 P_k t_{xk}^{(1)}; \sigma_x^{(1)}(x, z) = \sum_{k=1,3}^5 P_k s_{xk}^{(1)} - \Phi_{sx}^{(0)}; \sigma_y^{(1)}(x, z) = \sum_{k=1,3}^5 P_k s_{yk}^{(1)} - \Phi_{sy}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

де $s_{zk}^{(1)}(x), \dots, s_{zk}^{(1)}(x), \Phi_{sx}^{(0)}(x, z), \Phi_{sy}^{(0)}(x, z)$ знаходяться згідно з (4.40).

Компоненти НДС в наближенні $l=0,1$; $k=1,3$ знаходяться таким чином:

$$\begin{aligned} U(x, z) &= U^{(0)}(x, z) + \varepsilon U^{(1)}(x, z) \quad (U \rightarrow W \rightarrow \sigma_x \rightarrow \sigma_y \rightarrow \sigma_z \rightarrow \sigma_{xz}); \\ V &= 0; \sigma_{yx} = 0; \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

де функції з індексом «0» угорі – компоненти НДС нульового наближення, визначаються розв'язком лінійної задачі для ізотропної пластини.

Числові розрахунки виконані для циліндричного згину вільно обіпертої на краях пластини від дії кососиметричного поперечного навантаження $q(x)$:

$$q(x) = q_m S_{mx}; (q_m = const); q_m = \sum_{l=0}^{\infty} q_m^{(l)} \varepsilon^l; q_m^{(0)} = q_m; q_m^{(l)} = 0, \text{ якщо } l \geq 1.$$

В НК13 і $l=0$ складові $u_k^{(0)}(x, y), w_k^{(0)}(x, y)$ шукатимемо у вигляді:

$$u_k^{(0)}(x) = A_{k0m} C_{mx}, w_k^{(0)}(x) = C_{k0m} S_{mx}, (k=1,3), \quad (4.59)$$

де A_{k0m}, C_{k0m} – невідомі сталі, які знаходяться із системи чотирьох ЛАР, до якої зведеться система (3.101) для ізотропної пластини, що складається із 1-го, 3-го, 5-го та 6-го рівнянь, після підстановки в неї (4.59).

Одержавши значення сталих A_{k0m} , C_{k0m} , далі визначаються праві частини системи ДР (4.20), що складається із 1-го, 3-го, 5-го та 6-го рівнянь. Не виписуючи через громіздкість явно вирази для функцій, що входять у праві частини цих рівнянь, наведемо їх структурний вигляд через тригонометричні функції:

$$\begin{aligned} \Phi_{vxi}^{(0)}(x) &= (\Phi_{vxi0s} S_{mx}^2 + \Phi_{vxi0cs} C_{mx}^2) S_{mx}, \quad \Phi_{sxi}^{(0)}(x) = (\Phi_{sxi0s} S_{mx}^2 + \Phi_{sxi0cs} C_{mx}^2) S_{mx}, \\ (i = 0, 1, 2, 3); \quad I_{\omega3\xi}^{(0)}(x) &= (I_{\omega30s} S_{mx}^2 + I_{\omega30cs} C_{mx}^2) S_{mx}; \\ I_{qix}^{(0)}(x) &= (Q_{ix0sc} S_{mx}^2 + Q_{ix0c} C_{mx}^2) C_{mx}, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.60)$$

де множники при синусах і косинусах – сталі, які залежать від МГП пластини.

Ураховуючи (4.41) і (4.60), отримаємо праві частини СДР в НК13, $l = 1$:

$$D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi0sc}(x) C_{mx}, \quad (i = 3, 7); \quad D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi0sc}(x) S_{mx}, \quad (i = 9, 11), \quad (4.61)$$

де

$$\begin{aligned} D_{i\xi0sc}(x) &= D_{i0sc} S_{mx}^2 + D_{i0c} C_{mx}^2, \quad (i = 3, 7); \quad D_{i\xi0sc}(x) = D_{i0s} S_{mx}^2 + D_{i0cs} C_{mx}^2, \quad (i = 9, 11) \\ &(D_{i0sc}, D_{i0c}, D_{i0s}, D_{i0cs} - \text{МГП}). \end{aligned}$$

Розв'язок СДР (4.20) в НК13, $l = 1$ шукаємо у формі:

$$u_k^{(1)}(x) = A_{k1m} C_{mx}, \quad w_k^{(1)}(x) = C_{k1m} S_{mx}, \quad (k = 1, 3), \quad (4.62)$$

де A_{k1m} , C_{k1m} – невідомі сталі, які знаходяться із вказаної системи (4.20) після підстановки в неї (4.62) з урахуванням (4.61). Після перетворень одержимо систему

$$D_{isc} = D_{i\xi0sc}(x), \quad (i = 3, 7, 9, 11), \quad (4.63)$$

де D_{isc} – сталі, що залежать від МГП і лінійно – від шуканих коефіцієнтів A_{k1m} , C_{k1m} .

Осереднимо праві частини системи (4.63) сталими величинами. Цей крок є обґрунтованим, оскільки праві частини цієї системи – парні функції на проміжку $x \in [0; a]$ відносно $x = a/2$. Замінюючи праві частини системи (4.63) сталими h_{isc} , де

$$h_{isc} = \frac{1}{a} \int_0^a D_{i\xi0sc}(x) dx, \quad (i = 1, 3, 7),$$

одержується система 4-х ЛАР, із якої знаходяться A_{k1m}, C_{k1m} , а потім – $u_k^{(1)}(x)$ та $w_k^{(1)}(x)$ ($k = 1, 3$) згідно з (4.62) і компоненти НДС з індексом «1» угорі (4.57). Далі на основі (4.58) визначаються компоненти НДС в НК13, $l = 0, 1$:


$$\begin{aligned} U(x, z) &= a\tilde{q}_m (\tilde{f}_{u0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2 \tilde{f}_{u1m}(z)) C_{mx}; \quad W(x, z) = a\tilde{q}_m (\tilde{f}_{w0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2 \tilde{f}_{w1m}(z)) S_{mx}; \\ \sigma_z(x, z) &= G\tilde{q}_m (\tilde{\sigma}_{z0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2 \tilde{\sigma}_{z1m}(x, z)) S_{mx}; \\ \sigma_x(x, z) &= G\tilde{q}_m (\tilde{\sigma}_{x0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2 \tilde{\sigma}_{x1m}(x, z)) S_{mx}; \\ \sigma_{xz}(x, z) &= G\tilde{q}_m (\tilde{\sigma}_{xz0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2 \tilde{\sigma}_{xz1m}(x, z)) C_{mx}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

де $\tilde{f}_{u0m}, \dots, \tilde{f}_{w1m}, \tilde{\sigma}_{z0m}, \tilde{\sigma}_{xz0m}, \tilde{\sigma}_{x0m}$ – безрозмірні функції z , а $\tilde{\sigma}_{z1m}, \dots, \tilde{\sigma}_{x1m}$ – безрозмірні функції x і z , які залежать від МГП пластини; $\tilde{q}_m = q_m / G$.

Слід зазначити, що у (4.64) додаткові члени з параметром ε містять множники \tilde{q}_m^3 , в той час як доданки, які визначають наближення $l = 0$ містять множник \tilde{q}_m .

Крайові умови в 0-му і 1-му наближеннях на краях $x = 0, a$ виконуються.

Числові результати отримані на ПК на мові ФОРТРАН. Розроблена програма обчислення НДС ФНП від дії кососиметричного навантаження при циліндричному згині в наближеннях К13, $l = 0$ та К13, $l = 0, 1$. Для числового знаходження інтегралів від поліномів Лежандра використовувався метод Сімпсона, який протестовано на різних класах функцій. Чисельно знайдені інтеграли і точні їх значення співпадали до 6-го десяткового знаку.

На рис. Б.1 – Б.4 наведені графіки залежностей компонент НДС від поперечної координати для ФНП в наближенні $k = 1, 3$; $l = 0, 1$ по ε (криві ). Для порівняння представлені також графіки за лінійною теорією в НК135.

В табл. Б.1 – Б.3 наведені безрозмірні значення компонент НДС по товщині ($\tilde{\sigma}_x = \sigma_x(x, z) / q(x)$, $\tilde{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}(x = a/4, z) / q(x)$, $\tilde{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}(x = a/4, z) / q(x)$, $\tilde{W} = W(x, z)E / (q(x)h)$, $\tilde{U} = U(x = a/4, z)E / (q(x)h)$) для ФНП із чистої міді ($G = 44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$), а в табл. Б.4 – із мартенівської сталі ($G = 83650$ МПа; $\nu = 0,294$; $g_2 = 0,085 \cdot 10^6$) для різних h/a .

В 2-й колонці наведені результати за КТ тонких пластин; у 3-й – 5-й колонках – у 0-му наближенні за ε (при $l = 0$) з урахуванням НК1, НК13, НК135 за поліномами Лежандра; у 6-й, 8-й колонках – в наближенні $l = 0,1$ за ε і з урахуванням НК13 за поліномами Лежандра для $q_m = 10$ Мпа і $q_m = 15$ МПа (табл. Б.1, Б.2, Б.4) та $q_m = 2$ Мпа і $q_m = 4$ МПа (табл. Б.3). В 7-й та 9-й колонках вказано розходження Δ у % між результатами, отриманими за фізично нелінійною (ФН) та фізично лінійною (ФЛ) (для НК135) теоріями (по відношенню до ФЛ теорії).

Як впливає із наведених результатів і додаткових числових досліджень вплив фізичної нелінійності на НДС пластин (детальніше у висновках) зростає і може досягати суттєвих значень із зменшенням її товщини, при збільшенні поперечного навантаження, м'якості матеріалу (зменшенні модуля зсуву G).

4.3.4. Числові результати для транстропних пластин з використанням методу збурень ізотропних властивостей матеріалу. Розглянемо однорідну шарнірно обіперту на краях транстропну пластину $a \times b \times h$, яка знаходиться під дією гармонічного поперечного навантаження. Граничні умови (3.2), де

$$q(x, y) = q_{mn} S_{mx} S_{ny}, \quad p(x, y) = p_{mn} S_{mx} S_{ny}. \quad (4.65)$$

Вважатимемо, що на краях пластини виконуються крайові умови Нав'є (4.53). Для з'ясування ефективності методу збурень ізотропних властивостей матеріалу розв'яжемо вказану задачу за методом збурень і безпосередньо в НК0-3.

В 0-му наближенні по ε складові переміщень шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_k^{(0)}(x, y) &= A_{kmn0} C_{mx} S_{ny}, \quad v_k^{(0)}(x, y) = B_{kmn0} S_{mx} C_{ny} \quad (k = 0, 1, 2, 3); \\ w_i^{(0)}(x, y) &= C_{imn0} S_{mx} S_{ny}, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.66)$$

де A_{kmn0} , B_{kmn0} , C_{imn0} – сталі, які визначаються із системи 11-ти ЛАР, до яких зведеться система (4.15) в 0-му наближенні після підстановки в неї (4.65) і (4.66). Визначивши вказані сталі, одержуються компоненти НДС пластини із осередненими ізотропними властивостями.

Підставляючи (4.66) у праві частини системи ДР (4.15) і, опускаючи громіздкі викладки, одержимо такий структурний вигляд правих частин:

$$\begin{aligned} D_{i\xi}^{(0)}(x, y) &= D_{i0p} C_{mx} S_{ny}, \quad (i=1,3,5,7); \quad D_{i\xi}^{(0)}(x, y) = D_{i0p} S_{mx} C_{ny}, \quad (i=2,4,6,8); \\ D_{i\xi}^{(0)}(x, y) &= D_{i0p} S_{mx} S_{ny}, \quad (i=9,10,11); \quad D_{ip}^{(1)}(x, y) = D_{iq}^{(1)}(x, y) = 0, \quad (i=1,2,\dots,11), \quad (4.67) \\ & \quad (D_{i0p} \quad (i=1,2,\dots,11) - \text{МГП пластины}). \end{aligned}$$

Розв'язок СДР 1-го наближення (4.15) за параметром ε шукається у формі:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(x, y) &= A_{kmnl} C_{mx} S_{ny}, \quad v_k^{(1)}(x, y) = B_{kmnl} S_{mx} C_{ny}, \quad (k=0,1,2,3); \\ w_i^{(1)}(x, y) &= C_{imnl} S_{mx} S_{ny}, \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (4.68)$$

де A_{kmnl} , B_{kmnl} , C_{imnl} – невідомі сталі, які знаходяться із системи 11-ти ЛАР.

Знаючи вказані коефіцієнти, на основі (4.9), (4.11), (4.12), (4.66), (4.68) визначаються складові та компоненти НДС в 1-му наближенні за ε :

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x, y, z) &= U_1(z) C_{mx} S_{ny}; \quad V^{(1)}(x, y, z) = V_1(z) S_{mx} C_{ny}; \quad W^{(1)}(x, y, z) = W_1(z) S_{mx} S_{ny}; \\ \sigma_z^{(1)}(x, y, z) &= \sigma_{z1}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, z) = \sigma_{xz1}(z) C_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, z) = \sigma_{yz1}(z) S_{mx} C_{ny}; \\ \sigma_x^{(1)}(x, y, z) &= \sigma_{x1}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_y^{(1)}(x, y, z) = \sigma_{y1}(z) S_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, z) = \sigma_{yx1}(z) C_{mx} C_{ny}, \end{aligned}$$

де функції від z залежать від поліномів Лежандра.

Знайшовши компоненти НДС в 0-му ($l=0$) і 1-му ($l=1$) наближеннях по ε , визначаються компоненти НДС з урахуванням 0-го і 1-го наближень за параметром ε ($l=0, 1$) в наближенні К0-3 за поліномами Лежандра:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= (U_0(z) + \varepsilon U_1(z)) C_{mx} S_{ny}; \quad V(x, y, z) = (V_0(z) + \varepsilon V_1(z)) S_{mx} C_{ny}; \\ W(x, y, z) &= (W_0(z) + \varepsilon W_1(z)) S_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_z(x, y, z) = (\sigma_{z0}(z) + \varepsilon \sigma_{z1}(z)) S_{mx} S_{ny}; \\ \sigma_{xz}(x, y, z) &= (\sigma_{xz0}(z) + \varepsilon \sigma_{xz1}(z)) C_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = (\sigma_{yz0}(z) + \varepsilon \sigma_{yz1}(z)) S_{mx} C_{ny}; \\ \sigma_x(x, y, z) &= (\sigma_{x0}(z) + \varepsilon \sigma_{x1}(z)) S_{mx} S_{ny}; \quad \sigma_y(x, y, z) = (\sigma_{y0}(z) + \varepsilon \sigma_{y1}(z)) S_{mx} S_{ny}; \\ \sigma_{yx}(x, y, z) &= (\sigma_{yx0}(z) + \varepsilon \sigma_{yx1}(z)) C_{mx} C_{ny}. \end{aligned}$$

Крайові умови (4.51) при цьому виконуються.

Чисельно досліджено НДС квадратних пластин від дії навантаження (4.65).

В табл. Б.5, Б.6 наведені компоненти НДС для квадратних пластин за побудованим варіантом МТ в НК0-3 та за методом збурень ізотропних властивостей матеріалу ($\varepsilon = (G - G')/G$). Вказані розходження Δ у % для результатів, отриманих при $l = 0, 1$ з урахуванням НК0-3 та в НК0-3. Прийняті позначення $\tilde{\sigma}_x = \sigma_x(x, y, z)/q(x, y)$; $\tilde{W} = W(x, y, z)E_0/(q(x, y)h)$. Верхні значення в табл. Б.5, Б.6 наведені при граничних умовах: $\sigma_z(z = \pm h/2) = \mp q/2$; $\sigma_{xz}(z = \pm h/2) = 0$ (x, y), а нижні – при $\sigma_z(z = h/2) = -q$; $\sigma_z(z = -h/2) = 0$; $\sigma_{xz}(z = \pm h/2) = 0$ (x, y).

Отримані методом збурень числові розрахунки уже в перших двох наближеннях за параметром ε достатньо точно описують НДС трансропних пластин із матеріалів, пружні сталі яких мало відрізняються від ізотропних.

4.4. Основні рівняння для ФНП у полярних координатах

Основні рівняння для ФНП впливають із рівнянь для фізично нелінійної сферичної оболонки [128] (дод. Г.2) при рівних нулю кривинах.

Основні рівняння та алгоритм визначення НДС круглих пластин з використанням методу збурень пружних властивостей матеріалу одержані у [123, 126].

4.5. Висновки по розділу

Для однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних за Каудером пластин довільної сталої товщини вирішені наступні проблеми.

1. Уперше побудовано новий варіант МТ для вказаних елементів і розроблено на його основі методи розв'язування граничних задач. Варіант МТ базується на ВПР і новому комплексному методі, оснований на поєднанні методу розвинення усіх компонент НДС і граничних умов у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра, методу збурень пружних властивостей матеріалу і МВР.

2. Уперше в МТ на основі нового розробленого варіанта МТ тривимірна задача ТП для ортотропних (фізично нелінійних) пластин довільної сталої товщини зведена до рекурентної нескінченної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для пластин із осередненими ізотропними властивостями (для пластин лінійно пружних ізотропних). Праві частини отриманих СДР з частинними похідними і крайові умови в довільному наближенні за малим параметром ε лінійно (нелінійно) залежать від компонент НДС попередніх наближень.

3. Уперше на основі МТ з використанням методу збурень пружних властивостей матеріалу виведені в явному вигляді в НК0-3 СДР 22-го порядку і крайові умови для довільного наближення l за малим параметром ε . Кожна СДР рекурентної послідовності узагальненою методикою перетворень ДР зведена до розв'язання двох незалежних неоднорідних СДР: одна описувала кососиметричне деформування (КД) (12-го порядку), а інша—симетричне (СД) (10-го порядку).

4. При КД в наближеннях $l = 1, 2, \dots$ за ε СДР розділена на дві незалежні неоднорідні підсистеми ДР: одна (4-го порядку) описувала ВКЕ (однорідні ДР) і уточнювала ВНДС (частинні розв'язки неоднорідних ДР), а інша—(8-го порядку) описувала ВНДС (визначався загальним розв'язком бігармонічного ДР і частинними розв'язками двох неоднорідних ДР 8-го порядку) і ПКЕ (визначався швидкозгасаючим розв'язком однорідного ДР 4-го порядку). ВНДС залежав від НДС попередніх наближень (лінійно для ортотропних і нелінійно для фізично нелінійних пластин), а ПКЕ і ВКЕ визначалися 0-м наближенням за ε .

5. При СД в наближеннях $l = 1, 2, \dots$ за ε СДР розділена на дві незалежні групи неоднорідних ДР: одне ДР (2-го порядку) описувало ВКЕ (однорідне ДР) і уточнювало ВНДС (частинні розв'язки неоднорідного ДР), а інша група—СДР 8-го порядку описувала ВНДС (визначався загальними розв'язками бігармонічного ДР і частинними розв'язками трьох неоднорідних ДР 8-го порядку) та ПКЕ (визначався швидкозгасаючим розв'язком однорідного ДР 4-го порядку). ВНДС залежав від НДС попередніх наближень (лінійно для ортотропних і нелінійно для фізично нелінійних пластин). ПКЕ і ВКЕ визначалися 0-м наближенням за ε .

6. Уперше з використанням МТ і збурення пружних властивостей матеріалу отримані загальні розв'язки СДРР високого порядку ортотропних і фізично нелінійних ізотропних пластин на основі узагальненої методики математичних перетворень СДР, операторного методу інтегрування і зведенням неоднорідних ДР високого порядку до неоднорідних ДР 2-го порядку.

7. Побудовані розв'язки граничних задач у вигляді одинарних та подвійних тригонометричних рядів у перших двох наближеннях за малим параметром.

8. Досліджено якісно НДС нетонких ФНП за НК13 для задач циліндричного згину при гармонічному навантаженні в широких межах змінення МГХ. Фізична нелінійність може суттєво впливати на компоненти НДС. Вплив фізичної нелінійності зростає із зменшенням товщини, із збільшенням відхилення нелінійних властивостей від лінійних та із збільшенням поперечного навантаження. Розраховуючи тонкі пластини, потрібно враховувати нелінійно пружні властивості матеріалу, але при цьому достатньо використовувати класичну теорію. Визначаючи НДС товстих пластин, фізичною нелінійністю можна нехтувати, але розкласти компоненти НДС в ряди за поперечною координатою. При розрахунку пластин із відношенням $h/a = 1/8 \div 1/3$ потрібно використовувати метод розкладання НДС по товщині і враховувати нелінійно пружні властивості матеріалу. При неплavnих навантаженнях і в інших випадках, які призводять до НДС з високим градієнтом змінювання, також потрібно враховувати фізичну нелінійність сумісно з розкладанням компонент НДС у ряди за поперечною координатою.

9. Ефективність методу збурень ізотропних властивостей матеріалу зростає при наближенні МХ ортотропного матеріалу до ізотропного. Розроблений метод збурень ізотропних властивостей матеріалу варіанта МТ нетонких пластин може бути узагальнено для розрахунку анізотропних пластин із суттєвою анізотропією.

Наукові результати, наведені в четвертому розділі, опубліковано в працях автора [116–119, 122, 123, 125–128, 133, 137, 142, 151, 155, 156, 168–171, 176, 178, 179, 181, 182, 449, 450].

РОЗДІЛ 5

ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ОДНОРІДНИХ ТРАНСТРОПНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Розділ присвячено побудові нового варіанта МТ однорідних транстропних пологих оболонок довільної сталої товщини, що знаходяться під дією довільного поперечного навантаження. Уперше виведені в явному вигляді взаємозв'язані основні рівняння у НК02, НК0-3, НК0135, НК024, НК0-5, які придатні для прикладних цілей. Розроблені методи розв'язування граничних задач. Отримані форми і загальні розв'язки отриманих СДР високого порядку. Досліджено НДС в різних наближеннях в залежності від типу навантаження та МГХ. Одержані нові важливі висновки.

5.1. Постановка проблеми

З позицій тривимірної теорії пружності розглядається нетонка транстропна полого оболонка товщини h подвійної кривини в прямокутній системі координат $Oxyz$ (рис. 5.1). Вісі Ox та Oy напрямлені вздовж сторін плана оболонки, які приймемо відповідно рівними a і b . Вісь Oz направлена вбік опуклості оболонки. На лицевих поверхнях оболонки граничні умови мають вигляд (3.1), (3.2).

Граничні умови на бічній поверхні, яку вважатимемо перпендикулярною до серединної поверхні оболонки, яка є поверхнею ізотропії, можуть бути довільними статичного характеру і формулюються у вигляді (3.3), (3.4).

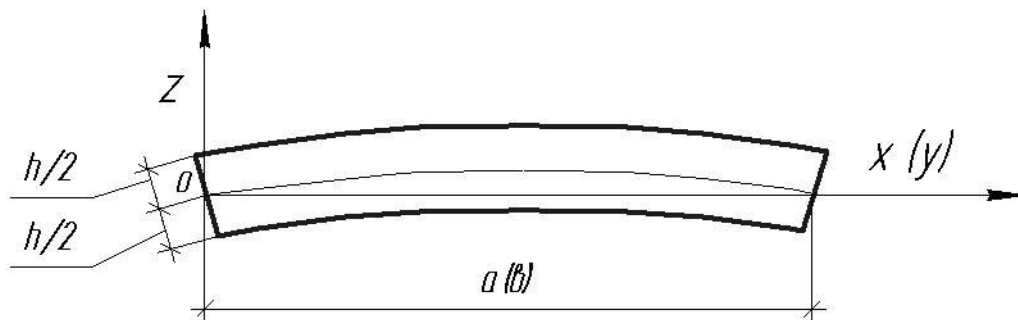


Рис. 5.1. Однорідна полого оболонка сталої товщини.

Співвідношення між деформаціями та переміщеннями як функціями трьох змінних визначаються залежностями [240], в яких, оскільки оболонка є нетонкою, ураховуються компоненти тангенціальних переміщень у виразах для поперечних кутових деформацій γ_{xz} , γ_{yz} (в теорії тонких оболонок ними нехтують):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= U_{,x} + k_1 W; \varepsilon_y = V_{,y} + k_2 W; \varepsilon_z = W_{,z}; \gamma_{xy} = U_{,y} + V_{,x}; \\ \gamma_{xz} &= W_{,x} + U_{,z} - k'_1 U; \gamma_{yz} = W_{,y} + V_{,z} - k'_2 V; (k_i = 1/R_i, k'_i = k_i, i = 1, 2), \end{aligned} \quad (5.1)$$

де R_1 , R_2 – головні радіуси кривини серединної поверхні оболонки; уточнюючі складові у виразах для поперечних кутових деформацій містять множники k'_1 , k'_2 .

Залежності між поперечними деформаціями та напруженнями виражаються згідно з (3.6), а для тангенціальних напружень згідно з (3.7). Матимемо:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_0(U_{,x} + \nu V_{,y} + k_{1\nu} W) + d_{10}\sigma_z; \sigma_y = d_0(V_{,y} + \nu U_{,x} + k_{2\nu} W) + d_{10}\sigma_z; \\ \sigma_{yx} &= G(U_{,y} + V_{,x}), (k_{1\nu} = k_1 + k_{2\nu}; k_{2\nu} = k_2 + k_{1\nu}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Як і для пластин, тривимірну задачу ТП для нетонких пологих оболонок сталої товщини зведемо до двовимірної на основі ВПР та методу розвинення усіх компонент НДС у ряди за товщинною координатою при допомозі поліномів Лежандра з використанням методики взаємозв'язаних рівнянь.

5.2. Основні рівняння

5.2.1. Апроксимація компонент НДС. ДРР та крайові умови. Теорема 3 (про збіжність рядів для напружень). Компоненти переміщень $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ апроксимуються рядами за допомогою поліномів Лежандра у вигляді (3.9). Деформації в оболонці також зображуються рядами:

$$\varepsilon_x = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{xj}, (x, y); \varepsilon_z = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{zj}; \gamma_{yx} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{yxj}; \gamma_{xz} = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{xzej}, (x, y), \quad (5.3)$$

де з урахуванням (5.1) і (3.9):

$$\varepsilon_{xj}(x, y, z) = P_j \left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial x} + k_1 w_{j+1}(x, y) \right), (x, y; u \rightarrow v; k_1 \rightarrow k_2);$$

$$\varepsilon_{zj}(x, y, z) = P'_j w_{j+1}(x, y); \gamma_{yxj}(x, y, z) = P_j \left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial x} \right); \quad (5.4)$$

$$\gamma_{xzj}(x, y, z) = P_j \frac{\partial w_{j+1}(x, y)}{\partial x} + P'_j u_j(x, y) - k'_1 P_j u_j(x, y), \quad (x, y; u \rightarrow v; k'_1 \rightarrow k'_2).$$

Напруження $\sigma_{xz}(x, y, z)$ і $\sigma_{yz}(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$ приймаються у вигляді (3.1)–(3.17), які задовольняють граничні умови (3.1), (3.2) на лицевих поверхнях.

ВРР для пологої оболонки має вигляд (3.18).

Послідовність побудови основних рівнянь для пологих оболонок на основі ВРР з використанням поліномів Лежандра і МВР аналогічна як і для пластин.

Для функцій $Q_{kx}(x, y)$, $Q_{ky}(x, y)$, опускаючи викладки, отримаємо:

$$Q_{kx}(x, y) = \sum_{i=1,3}^{\infty} h_{ki} w_{i,x} + \sum_{i=0,1}^{\infty} l_{kxi} u_i, \quad (k = 1, 3, \dots);$$

$$Q_{ky}(x, y) = \sum_{i=2,4}^{\infty} h_{ki} w_{i,x} + \sum_{i=1,2}^{\infty} l_{kxi} u_i, \quad (k = 2, 4, \dots); \quad (5.5)$$

$$(Q_{kx} \rightarrow Q_{ky}; \partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial y; l_{kxi} \rightarrow l_{kyi}; u_i \rightarrow v_i),$$

де h_{ki} – МГП, що залежать від МХ та товщини оболонки; l_{kxi}, l_{kyi} – МГП, сталі, які залежать від МГХ оболонки. Вказані параметри для різних наближень мають різні значення. Слід підкреслити наявність у залежностях (5.5) доданків, що містять кривини k'_1 та k'_2 . З цієї причини вирази для Q_{kx}, Q_{ky} містять складові переміщень з парними і непарними індексами. Якщо покласти у (5.5) $k'_1 = k'_2 = 0$, то одержуються $Q_{kx}(x, y)$, $Q_{ky}(x, y)$, що відповідають пластині.

Для функцій $\omega_k(x, y)$ отримаємо:

$$\omega_1(x, y) = q(x, y); \omega_k(x, y) = \sum_{i=2,3}^{\infty} q_{ki} w_i + \sum_{i=1,3}^{\infty} e_{ki} \varphi_i + e_{kq} q, \quad (k = 3, 5, \dots); \quad (5.6)$$

$$\omega_k(x, y) = \sum_{i=1,2}^{\infty} q_{ki} w_i + \sum_{i=0,2}^{\infty} e_{ki} \varphi_i + e_{kp} p, \quad (k = 2, 4, \dots),$$

де e_{ki}, e_{kq}, e_{kp} – МС; q_{ki} – МГП, які залежать від МХ, товщини та кривин оболонки (вказані параметри також для різних наближень мають різні значення).

Зазначимо, що $\omega_k(x, y)$ для оболонки на відміну від пластини залежать від

складових переміщень з парними і непарними індексами. Якщо в (5.6) покласти кривини $k_1 = k_2 = 0$, то одержимо відповідні функції для транстропної пластини.

Залежності між напруженнями та складовими переміщень для пологої транстропної оболонки одержуються аналогічно пластині і мають вигляд:

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i t_{xi}; \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i t_{yi}, \quad \sigma_z(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i s_{zi}; \quad (5.7)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i s_{xi} \quad (\sigma_x \rightarrow \sigma_y; \quad s_{xi} \rightarrow s_{yi}); \quad \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i t_{yxi},$$

де $t_{xi} = t_{xi}(Q_{kx})$, $t_{yi} = t_{yi}(Q_{ky})$, $s_{zi} = s_{zi}(\omega_k)$, $s_{xi} = s_{xi}(u_k, v_k)$, $s_{yi} = s_{yi}(u_k, v_k)$,

$t_{yxi} = t_{yxi}(u_k, v_k)$, а функції $Q_{kx}(x, y)$, $Q_{ky}(x, y)$, $\omega_k(x, y)$ визначаються за формулами (5.5), (5.6) через складові компонент переміщень і МГП. Поперечні напруження σ_{xz} , σ_{yz} , σ_z (5.7) задовольняють граничним умовам (3.1), (3.2).

Напруження (5.7) за структурою аналогічні напруженням (3.225) для пластин, тільки множники в (3.226) змінної z залежать ще й від кривин. І тому справедлива **теорема 3** про збіжність рядів для напружень в пологій оболонці (**аналогічна теоремі 1** для пластин).

ДР рівноваги транстропної пологої оболонки, навантаженої на лицевих поверхнях поперечними силами, на основі ВРР зображуються так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx0}}{\partial y} + k_1' t_{y0} &= 0; \quad \frac{\partial s_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yx0}}{\partial x} + k_2' t_{y0} = 0; \\ \frac{h}{2i+1} \left(\frac{\partial s_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yxi}}{\partial y} + k_1' t_{xi} \right) - 2 \sum_{n=0,2}^{i-1} t_{xn} &= 0, \quad (\text{для } i=1,3,\dots); \\ \frac{h}{2i+1} \left(\frac{\partial s_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yxi}}{\partial y} + k_1' t_{xi} \right) - 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{i-1} t_{xn} &= 0, \quad (\text{для } i=2,4,\dots); \\ (s_{xi} \rightarrow s_{yi}; \quad t_{xn} \rightarrow t_{yn}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}; \quad k_1' \rightarrow k_2'); & \\ h \left(\frac{\partial t_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial t_{y0}}{\partial y} - k_1 s_{x0} - k_2 s_{y0} \right) &= q; \\ \frac{h}{2i+1} \left(\frac{\partial t_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yi}}{\partial y} - k_1 s_{xi} - k_2 s_{yi} \right) - 2 \sum_{n=0,2}^{i-1} s_{zn} &= p, \quad (\text{для } i=1,3,\dots); \\ \frac{h}{2i+1} \left(\frac{\partial t_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yi}}{\partial y} - k_1 s_{xi} - k_2 s_{yi} \right) - 2 \sum_{n=1,3}^{i-1} s_{zn} &= q, \quad (\text{для } i=2,4,\dots). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Крайові умови мають вигляд (3.26), тільки на відміну від пластини, функції $t_{xi}, t_{yi}, t_{yxi}, s_{xi}, s_{yi}$ від двох змінних x, y залежать також від радіусів кривини оболонки, тобто крайові умови для оболонки містять кривини серединної поверхні. Функції x_{si}, y_{si}, z_{si} мають той же зміст, що і для пластин (3.25).

Не зупиняючись на різних випадках, зазначимо, що, як і для пластин, із (3.26) можна отримати різні крайові умови.

Далі, не зупиняючись на НК0-N, дослідимо конкретні наближення.

5.2.2. Наближення К01. В цьому наближенні у всіх залежностях, рівняннях рівноваги (5.8) та крайових умовах (3.26) ураховуються тільки складові компоненти переміщень u_0, v_0, u_1, v_1, w_1 .

Компоненти переміщень мають вигляд (3.83).

Деформації:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= P_0(u_{0,x} + k_1 w_1) + P_1 u_{1,x}; \quad \varepsilon_y(x, y, z) = P_0(v_{0,y} + k_2 w_1) + P_1 v_{1,y}; \quad \varepsilon_z = 0; \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^1 P_k(u_{k,y} + v_{k,x}); \quad \gamma_{xz}(x, y, z) = P_0(w_{1,x} - k'_1 u_0) + P_1 u_1 - k'_1 P_1 u_1, \quad (5.9) \\ &(x, y; u \rightarrow v; k'_1 \rightarrow k'_2). \end{aligned}$$

Напруження:

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = P_0 t_{x0} + P_2 t_{x2}, (x, y); \quad \sigma_z(x, y, z) = \sum_{n=0}^3 P_n s_{zn}; \quad (5.10)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^3 P_n s_{xn}, (x, y); \quad \sigma_{yx}(x, y, z) = P_0 t_{yx0} + P_1 t_{yx1},$$

де

$$\begin{aligned} t_{x0}(x, y) &= Q_{1x}(x, y)/h; \quad t_{x2}(x, y) = -Q_{1x}(x, y)/h; \quad (t_{xn} \rightarrow t_{yn}; Q_{1x} \rightarrow Q_{1y}); \\ s_{z0}(x, y) &= -p(x, y)/2; \quad s_{z1}(x, y) = -3q(x, y)/5; \quad s_{z2} = 0; \quad s_{z3}(x, y) = q(x, y)/10; \\ s_{x0}(x, y) &= d_0(u_{0,x} + v v_{0,y} + k_{1v} w_1) + d_{10} s_{z0}; \quad s_{x1}(x, y) = d_0(u_{1,x} + v v_{1,y}) + d_{10} s_{z1}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$s_{x2} = 0; \quad s_{x3}(x, y) = d_{10} s_{zk}, (x, y; u, v; k_{1v} \rightarrow k_{2v}); \quad t_{yjk}(x, y) = G(u_{k,y} + v_{k,x}), (k = 0; 1);$$

$$Q_{1x}(x, y) = h_{11} w_{1,x} + l_{1x0} u_0 + l_{1x1} u_1, (x, y; u \rightarrow v);$$

$$h_{11} = 5G'h/6; \quad l_{1x0} = -5G'hk'_1/6; \quad l_{1x1} = 5G'/3; \quad l_{1y0} = -5G'hk'_2/6; \quad l_{1y1} = l_{1x1}.$$

ДР рівноваги оболонки (10-го порядку) з урахуванням (5.8)–(5.11):

$$D_{i,1}u_0 + D_{i,2}v_0 + D_{i,3}u_1 + D_{i,4}v_1 + D_{i,5}w_1 = D_{ipq} \quad (i=1,2,\dots,5), \quad (5.12)$$

де

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k'_1 l_{1x0}; \quad D_{1,2} = \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{1,3} = k'_1 l_{1x1}; \\ D_{1,4} &= 0; \quad D_{1,5} = k_{1w1} \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_{1pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad D_{2,2} = \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k'_2 l_{1y0}; \quad D_{2,3} = 0; \\ D_{2,4} &= k'_2 l_{1y1}; \quad D_{2,5} = k_{2w1} \frac{\partial}{\partial y}; \quad D_{2pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad D_{3,3} = \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113}; \quad (5.13) \\ D_{3,4} &= \beta_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad D_{3,5} = \beta_{151} \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_{3pq} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}; \quad D_{4,4} = \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113}; \\ D_{4,5} &= \beta_{151} \frac{\partial}{\partial y}; \quad D_{4pq} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; \quad D_{5,5} = \beta_{551} \nabla^2 + r_{1w1}, \quad D_{5pq} = \frac{hd_{10}}{2} k_{12} p - q; \quad D_{ij} = D_{ji}. \\ \gamma_{111} &= hd_0; \quad \gamma_{112} = hG; \quad \gamma_{121} = h(d_0 v + G); \quad \gamma_{u0} = \frac{1}{2} hd_{10}; \quad \beta_{111} = \frac{hd_0}{3}; \quad \beta_{112} = \frac{hG}{3}; \\ \beta_{113} &= -\frac{2l_{1x1}}{h}; \quad \beta_{121} = \frac{h}{3}(G + d_0 v); \quad \beta_{151} = -\frac{2h_{11}}{h}; \quad \beta_{551} = -h_{11}; \quad \beta_{u1} = \frac{hd_0}{5}; \\ k_{1w1} &= hd_0 k_{1v} + h_{11} k'_1; \quad k_{2w1} = hd_0 k_{2v} + h_{11} k'_2; \quad r_{1w1} = hd_0 k_v, \quad k_{12} = k_1 + k_2; \quad k_v = k_1 k_{1v} + k_2 k_{2v}. \end{aligned}$$

СДР для оболонок (5.12) на відміну від СДР для пластин (3.86), (3.87) не розділяється на окремі незалежні системи ДР симетричного і кососиметричного деформування, що вказує на їх взаємний вплив. Крайові умови отримуються із (3.26) при урахуванні складових компонент переміщень u_0, v_0, u_1, v_1, w_1 . Покладаючи в (5.11) і (5.13) кривини $k_1 = k_2 = 0$, отримуємо СДР відповідних пластин.

5.2.3. Наближення К0-3. В цьому наближенні ураховуються тільки складові компонент переміщень $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, w_1, w_2, w_3$.

Компоненти переміщень мають вигляд:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k \left(\frac{2z}{h} \right) u_k(x, y), \quad (U, V; u, v); \quad W(x, y, z) = \sum_{k=1}^3 P_{k-1} \left(\frac{2z}{h} \right) w_k(x, y); \quad (5.14)$$

деформації:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \sum_{k=0}^2 P_k (u_{k,x} + k_1 w_{k+1}) + P_3 u_{3,x}, \quad (x, y; u \rightarrow v; k_1 \rightarrow k_2);$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) = \sum_{k=0}^2 P'_k w_{k+1}; \quad \gamma_{xy}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k (u_{k,y} + v_{k,x}); \quad (5.15)$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \sum_{k=0}^2 (P_k (w_{k+1,x} - k'_1 u_k) + P'_k u_k) + P'_3 u_3 - k'_1 P_3 u_3, \quad (x, y; u \rightarrow v; k'_1 \rightarrow k'_2);$$

напруження:

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k t_{zk}; \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k t_{yk}, \quad \sigma_z(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k s_{zk}; \quad (5.16)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k s_{xk}, \quad (\sigma_x \rightarrow \sigma_y; s_{xk} \rightarrow s_{yk}); \quad \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k t_{yxk},$$

де

$$t_{x0}(x, y) = Q_{1x}/h; \quad t_{x1}(x, y) = 3Q_{2x}/(5h); \quad t_{x2}(x, y) = -Q_{1x}/h + 3Q_{3x}/(7h);$$

$$t_{x3}(x, y) = -3Q_{2x}/(5h); \quad t_{x4}(x, y) = -3Q_{3x}/(7h), \quad (t_{xk} \rightarrow t_{yk}; Q_{kx} \rightarrow Q_{ky});$$

$$s_{z0}(x, y) = -(p + \omega_2/5)/2; \quad s_{z1}(x, y) = -3(q + \omega_3/14)/5; \quad s_{z2}(x, y) = \omega_2/7;$$

$$s_{z3}(x, y) = q/10 + \omega_3/15; \quad s_{z4}(x, y) = -3\omega_2/70; \quad s_{z5}(x, y) = -\omega_3/42;$$

$$s_{xk}(x, y) = d_0(u_{k,x} + v v_{k,y} + k_{1v} w_{k+1}) + d_{10} s_{zk}, \quad (k=0, 1, 2);$$

$$s_{x3}(x, y) = d_0(u_{3,x} + v v_{3,y}) + d_{10} s_{z3}; \quad s_{xk}(x, y) = d_{10} s_{zk}, \quad (k=4, 5),$$

$$(s_{xk}, u_{k,x}, k_{1v} \rightarrow s_{yk}, v_{k,y}, k_{2v}); \quad t_{yxk}(x, y) = G(u_{k,y} + v_{k,x});$$

$$Q_{kx}(x, y) = h_{k1} w_{1,x} + h_{k3} w_{3,x} + \sum_{i=0,1}^3 l_{kxi} u_i; \quad (k=1, 3); \quad (5.17)$$

$$Q_{2x}(x, y) = h_{22} w_{2,x} + \sum_{i=1,2}^3 l_{2xi} u_i, \quad (Q_{kx}, \partial/\partial x, l_{kxi}, u_i, k'_1 \rightarrow Q_{ky}, \partial/\partial y, l_{kyi}, v_i, k'_2);$$

$$\omega_2(x, y) = q_{21} w_1 + q_{22} w_2 + q_{23} w_3 + e_{20} \varphi_0 + e_{22} \varphi_2 + e_{2p} p;$$

$$\omega_3(x, y) = q_{32} w_2 + q_{33} w_3 + e_{31} \varphi_1 + e_{33} \varphi_3 + e_{3q} q;$$

$$l_{1x0} = -\frac{14}{15} G' h k'_1; \quad l_{1x1} = \frac{28}{15} G'; \quad l_{1x2} = \frac{1}{15} G' h k'_1; \quad l_{1x3} = \frac{6}{5} G'; \quad l_{3x0} = -\frac{7}{5} G' h k'_1;$$

$$l_{3x1} = \frac{14}{5} G'; \quad l_{3x2} = -\frac{7}{5} G' h k'_1; \quad l_{3x3} = \frac{84}{5} G'; \quad l_{2x1} = -\frac{7}{6} G' h k'_1; \quad l_{2x2} = 7G'; \quad l_{2x3} = \frac{1}{2} G' h k'_1;$$

$$h_{11} = \frac{14}{15} G' h; \quad h_{13} = -\frac{1}{15} G' h; \quad h_{22} = \frac{7}{6} G' h; \quad h_{31} = \frac{7}{5} G' h; \quad h_{33} = h_{31}, \quad (x, k'_1 \rightarrow y; k'_2);$$

$$q_{21} = -7d_{30} k_{12}; \quad q_{22} = -\frac{14}{hd_{20}}; \quad q_{23} = 2d_{30} k_{12}; \quad q_{32} = -11d_{30} k_{12}; \quad q_{33} = -\frac{66}{hd_{20}};$$

$$e_{20} = -7d_{30}; \quad e_{22} = 2d_{30}; \quad e_{31} = -11d_{30}; \quad e_{33} = \frac{22}{3} d_{30}; \quad e_{2p} = -\frac{7}{2}; \quad e_{3q} = -\frac{22}{3}.$$

Поперечні напруження (5.16) точно задовольняють граничним умовам (3.2), (3.3) на лицевих поверхнях.

СДР рівноваги з частинними похідними має 22-й порядок:

$$D_{j,1}u_0 + D_{j,2}v_0 + D_{j,3}u_1 + D_{j,4}v_1 + D_{j,5}u_2 + D_{j,6}v_2 + D_{j,7}u_3 + D_{j,8}v_3 + D_{j,9}w_1 + D_{j,10}w_2 + D_{j,11}w_3 = D_{j pq}(x, y), (j = 1, 2, \dots, 11), \quad (5.18)$$

де

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_1' l_{1x0}, \quad D_{1,2} = \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{1,3} = k_1' l_{1x1}, \quad D_{1,4} = 0, \\ D_{1,5} &= \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1' l_{1x2}, \quad D_{1,6} = \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{1,7} = k_1' l_{1x3}, \quad D_{1,8} = 0, \quad D_{1,9} = k_{1w1} \frac{\partial}{\partial x}, \\ D_{1,10} &= \gamma_{151} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{1,11} = k_{1w3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{1pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ D_{2,2} &= \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2' l_{1y0}, \quad D_{2,3} = 0, \quad D_{2,4} = k_2' l_{1y1}, \quad D_{2,5} = \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ D_{2,6} &= \gamma_{131} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2' l_{1y2}, \quad D_{2,7} = 0, \quad D_{2,8} = k_2' l_{1y3}, \quad D_{2,9} = k_{2w1} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{2,10} = \gamma_{151} \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{2,11} &= k_{2w3} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{2pq} = \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad D_{3,3} = \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113} + k_1' l_{2x1} / 5, \\ D_{3,4} &= \beta_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{3,5} = k_1' k_{3u2}, \quad D_{3,6} = 0, \quad D_{3,7} = \beta_{131} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{133} + k_1' l_{2x3} / 5, \\ D_{3,8} &= \beta_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{3,9} = \beta_{151} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3,10} = k_{3w2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3,11} = \beta_{161} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3pq} = \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ D_{4,4} &= \beta_{112} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{111} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{113} + k_2' l_{2y1} / 5, \quad D_{4,5} = 0, \quad D_{4,6} = k_2' k_{3u2}, \quad D_{4,7} = \beta_{131} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ D_{4,8} &= \beta_{131} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{133} + k_2' l_{2y3} / 5, \quad D_{4,9} = \beta_{151} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{4,10} = k_{4w2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{4,11} = \beta_{161} \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{4pq} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; \quad D_{5,5} = \gamma_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{333} + (k_1')^2 k_{5u2}, \quad D_{5,6} = \gamma_{341} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad (5.19) \\ D_{5,7} &= k_1' k_{5u3}, \quad D_{5,8} = 0, \quad D_{5,9} = k_{5w1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5,10} = \gamma_{351} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5,11} = k_{5w3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5pq} = \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ D_{6,6} &= \gamma_{332} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{331} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{333} + (k_2')^2 k_{6v2}, \quad D_{6,7} = 0, \quad D_{6,8} = k_2' k_{5u3}, \quad D_{6,9} = k_{6w1} \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{6,10} &= \gamma_{351} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{6,11} = k_{6w3} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{6pq} = \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ D_{7,7} &= \beta_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{333} + (k_1')^2 k_{7u3}, \quad D_{7,8} = \beta_{341} \frac{\partial}{\partial x \partial y}, \quad D_{7,9} = \beta_{351} \frac{\partial}{\partial x}, \\ D_{7,10} &= k_{7w2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{7,11} = \beta_{361} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{7pq} = \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{8,8} &= \beta_{332} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{331} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{333} + (k_2')^2 k_{8v3}, \quad D_{8,9} = \beta_{351} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{8,10} = k_{8w2} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{8,11} &= \beta_{361} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{8pq} = \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial y}, \quad D_{9,9} = \beta_{551} \nabla^2 + r_{1w1}, \quad D_{9,10} = r_{1w2}, \quad D_{9,11} = \beta_{561} \nabla^2 + r_{1w3}, \\
D_{9pq} &= k_{9p} p + \beta_{w1} q, \quad D_{10,10} = \gamma_{551} \nabla^2 + \gamma_{552} + r_{2w2}, \quad D_{10,11} = r_{2w3}, \quad D_{10pq} = k_{10q} q + \gamma_{w2} p, \\
D_{11,11} &= \beta_{661} \nabla^2 + \beta_{662} + r_{3w3}, \quad D_{11pq} = \beta_{w3} q + k_{11p} p.
\end{aligned}$$

Показано, що диференціальна матриця СДР (5.18) симетрична ($D_{ij} = D_{ji}$).

У формулах (5.19) коефіцієнти наведені у дод. В.1.

СДР (5.18) також не розділяється на дві системи, які описують незалежно симетричне і кососиметричне деформування, що вказує на їх взаємозалежність. МГП (В.1) з однаковими позначеннями не співпадають з (5.13). Крайові умови отримуються із (3.26) при урахуванні складових компонент переміщень $u_0, v_0, u_1, u_1, \dots, w_1, w_2, w_3$.

5.2.4. Наближення К0-5. В цьому наближенні ураховуються складові компонент переміщень $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_5, v_5, w_1, w_2, \dots, w_5$.

Компоненти переміщень зображаються у вигляді:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k u_k \quad (U \rightarrow V; u_k \rightarrow v_k); \quad W(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k w_{k+1}. \quad (5.20)$$

Деформації:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x, y, z) &= \sum_{k=0}^4 P_k (u_{k,x} + k_1 w_{k+1}) + P_5 u_{5,x}, \quad (x, y; u \rightarrow v; k_1 \rightarrow k_2); \\
\varepsilon_z(x, y, z) &= \sum_{k=0}^4 P'_k w_{k+1}; \quad \gamma_{xy}(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k (u_{k,y} + v_{k,x}); \\
\gamma_{xz}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^4 (P_k (\frac{\partial w_{k+1}}{\partial x} - k'_1 u_k) + P'_k u_k) + P'_5 u_5 - k'_1 P_5 u_5, \quad (x, y; u \rightarrow v; k'_1 \rightarrow k'_2).
\end{aligned} \quad (5.21)$$

З урахуванням (5.20), (5.21) і ВР Рейснера дістанемо наступні залежності:

Напруження:

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \sum_{k=0}^6 P_k t_{xk}; \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \sum_{k=0}^6 P_k t_{yk}; \quad \sigma_z(x, y, z) = \sum_{k=0}^7 P_k s_{zk}; \quad (5.22)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \sum_{k=0}^7 P_k s_{xk}, (\sigma_x \rightarrow \sigma_y; s_{xk} \rightarrow s_{yk}); \sigma_{xy}(x, y, z) = \sum_{k=0}^5 P_k t_{yjk},$$

де

$$\begin{aligned} t_{x0}(x, y) &= \frac{1}{h} Q_{1x}; t_{x1}(x, y) = \frac{3}{5h} Q_{2x}; t_{x2}(x, y) = -\frac{1}{h} Q_{1x} + \frac{3}{7h} Q_{3x}; \\ t_{x3}(x, y) &= -\frac{3}{5h} Q_{2x} + \frac{1}{3h} Q_{4x}; t_{x4}(x, y) = -\frac{3}{7h} Q_{3x} + \frac{3}{11h} Q_{5x}; \\ t_{x5}(x, y) &= -\frac{1}{3h} Q_{4x}; t_{x6}(x, y) = -\frac{3}{11h} Q_{5x}; (t_{xk} \rightarrow t_{yk}; Q_{kx} \rightarrow Q_{ky}); \\ s_{z0}(x, y) &= -\frac{1}{2}(p + \frac{1}{5}\omega_2); s_{z1}(x, y) = -\frac{3}{5}(q + \frac{1}{14}\omega_3); s_{z2}(x, y) = \frac{1}{7}(\omega_2 - \frac{1}{6}\omega_4); \\ s_{z3}(x, y) &= \frac{1}{10}q + \frac{1}{15}\omega_3 - \frac{1}{66}\omega_5; s_{z4}(x, y) = -\frac{3}{7}(\frac{1}{10}\omega_2 - \frac{1}{11}\omega_4); \\ s_{z5}(x, y) &= -\frac{1}{3}(\frac{1}{14}\omega_3 - \frac{1}{13}\omega_5); s_{z6}(x, y) = -\frac{1}{66}\omega_4; s_{z7}(x, y) = -\frac{3}{286}\omega_5; \\ s_{xk}(x, y) &= d_0(u_{k,x} + \nu v_{k,y} + k_{1\nu} w_{k+1}) + d_{10} s_{zk} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4); \\ s_{x5}(x, y) &= d_0(u_{5,x} + \nu v_{5,y}) + d_{10} s_{z5}; s_{xk}(x, y) = d_{10} s_{zk}, \quad (k=6, 7), \\ (s_{xk} \rightarrow s_{yk}; u_{k,x}, v_{k,y}; k_{1\nu} \rightarrow k_{2\nu}); t_{yjk}(x, y) &= G(u_{k,y} + \nu v_{k,x}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

У (5.23):

$$\begin{aligned} Q_{kx}(x, y) &= h_{k1} w_{1,x} + h_{k3} w_{3,x} + h_{k5} w_{5,x} + \sum_{i=0}^5 l_{kxi} u_i, \quad (k=1, 3, 5); \\ Q_{kx}(x, y) &= h_{k2} w_{2,x} + h_{k4} w_{4,x} + \sum_{i=1}^5 l_{kxi} u_i, \quad (k=2, 4); \\ (Q_{kx} \rightarrow Q_{ky}; \partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial y; (l_{kxi} \rightarrow l_{kyi}; u_i \rightarrow v_i)); \\ \omega_k(x, y) &= \sum_{i=2}^5 q_{ki} w_i + e_{k1} \varphi_1 + e_{k3} \varphi_3 + e_{k5} \varphi_5 + e_{kq} q, \quad (k=3, 5); \\ \omega_k(x, y) &= \sum_{i=1}^5 q_{ki} w_i + e_{k0} \varphi_0 + e_{k2} \varphi_2 + e_{k4} \varphi_4 + e_{kp} p \quad (k=2, 4). \end{aligned} \quad (5.24)$$

У залежностях (5.24) коефіцієнти наведені у формулах (В.2).

Поперечні напруження точно задовольняють граничним умовам (3.1), (3.2).

Виведені із (5.8) взаємозв'язані ДР рівноваги мають 34-й порядок:

$$\begin{aligned} D_{i,1} u_0 + D_{i,2} v_0 + D_{i,3} u_1 + D_{i,4} v_1 + D_{i,5} u_2 + D_{i,6} v_2 + D_{i,7} u_3 + D_{i,8} v_3 + D_{i,9} u_4 + \\ D_{i,10} v_4 + D_{i,11} u_5 + D_{i,12} v_5 + D_{i,13} w_1 + D_{i,14} w_2 + D_{i,15} w_3 + D_{i,16} w_4 + D_{i,17} w_5 = D_{ipq}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$(i=1, 2, \dots, 17),$$

де $D_{i,j}$ ($j=1, 2, \dots, 17$) – диференціальні оператори, $D_{ipq} = D_{ipq}(p, q)$:

$$\begin{aligned}
D_{1,1} &= \gamma_{111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{11r}; & D_{1,2} &= \gamma_{121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{1,3} &= \gamma_{13r}; & D_{1,4} &= 0; & (5.26) \\
D_{1,5} &= \gamma_{151} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{15r}; & D_{1,6} &= \gamma_{161} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{1,7} &= \gamma_{17r}; & D_{1,8} &= 0; & D_{1,9} &= \gamma_{191} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{19r}; \\
D_{1,10} &= \gamma_{1101} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}; & D_{1,11} &= \gamma_{11r}; & D_{1,12} &= 0; & D_{1,13} &= \gamma_{113r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{1,14} &= \gamma_{1141} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{1,15} &= \gamma_{115r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{1,16} &= \gamma_{1161} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{1,17} &= \gamma_{117r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{1pq} &= \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
D_{2,2} &= \gamma_{221} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{222} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{22r}; & D_{2,3} &= 0; & D_{2,4} &= \gamma_{24r}; & D_{2,5} &= \gamma_{251} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{2,6} &= \gamma_{261} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{26r}; & D_{2,7} &= 0; & D_{2,8} &= \gamma_{28r}; & D_{2,9} &= \gamma_{291} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{2,10} &= \gamma_{2101} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{210r}; & D_{2,11} &= 0; & D_{2,12} &= \gamma_{212r}; & D_{2,13} &= \gamma_{213r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{2,14} &= \gamma_{2141} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{2,15} &= \gamma_{215r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{2,16} &= \gamma_{2161} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{2,17} &= \gamma_{217r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{2pq} &= \gamma_{u0} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
D_{3,3} &= \beta_{331} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{332} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{333} + \beta_{33r}; & D_{3,4} &= \beta_{341} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{3,5} &= \beta_{35r}; & D_{3,6} &= 0; \\
D_{3,7} &= \beta_{371} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{372} + \beta_{37r}; & D_{3,8} &= \beta_{381} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{3,9} &= \beta_{39r}; & D_{3,10} &= 0; \\
D_{3,11} &= \beta_{3111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{3112} + \beta_{311r}; & D_{3,12} &= \beta_{3121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{3,13} &= \beta_{3131} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{3,14} &= \beta_{314r} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{3,15} &= \beta_{3151} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{3,16} &= \beta_{316r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{3,17} &= \beta_{3171} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{3pq} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial x}; \\
D_{4,4} &= \beta_{441} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{442} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{443} + \beta_{44r}; & D_{4,5} &= 0; & D_{4,6} &= \beta_{46r}; & D_{4,7} &= \beta_{471} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{4,8} &= \beta_{481} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{482} + \beta_{48r}; & D_{4,9} &= 0; & D_{4,10} &= \beta_{410r}; & D_{4,11} &= \beta_{4111} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{4,12} &= \beta_{4121} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{4122} + \beta_{412r}; & D_{4,13} &= \beta_{4131} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{4,14} &= \beta_{414r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{4,15} &= \beta_{4151} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{4,16} &= \beta_{416r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{4,17} &= \beta_{4171} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{4pq} &= \beta_{u1} \frac{\partial q}{\partial y}; & D_{5pq} &= \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
D_{5,5} &= \gamma_{551} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{552} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{553} + \gamma_{55r}; & D_{5,6} &= \gamma_{561} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{5,7} &= \gamma_{57r}; & D_{5,8} &= 0; \\
D_{5,9} &= \gamma_{591} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{592} + \gamma_{59r}; & D_{5,10} &= \gamma_{5101} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{5,11} &= \gamma_{511r}; & D_{5,12} &= 0; \\
D_{5,13} &= \gamma_{513r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{5,14} &= \gamma_{5141} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{5,15} &= \gamma_{515r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{5,16} &= \gamma_{5161} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{5,17} &= \gamma_{517r} \frac{\partial}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6,6} &= \gamma_{661} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{662} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{663} + \gamma_{66r}; & D_{6,7} &= 0; & D_{6,8} &= \gamma_{68r}; & D_{6,9} &= \gamma_{691} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{6,10} &= \gamma_{6101} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{6102} + \gamma_{610r}; & D_{6,11} &= 0; & D_{6,12} &= \gamma_{612r}; & D_{6,13} &= \gamma_{613r}; \\
D_{6,14} &= \gamma_{6141} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{6,15} &= \gamma_{615r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{6,16} &= \gamma_{6161} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{6,17} &= \gamma_{617r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{6,pq} &= \gamma_{u2} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
D_{7,7} &= \beta_{771} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{772} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{773} + \beta_{77r}; & D_{7,8} &= \beta_{781} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{7,9} &= \beta_{79r}; & D_{7,10} &= 0; \\
D_{7,11} &= \beta_{7111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{7112} + \beta_{711r}; & D_{7,12} &= \beta_{7121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{7,13} &= \beta_{7131} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{7,14} &= \beta_{714r} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{7,15} &= \beta_{7151} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{7,16} &= \beta_{716r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{7,17} &= \beta_{7171} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{7,pq} &= \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial x}; \\
D_{8,8} &= \beta_{881} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{882} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{883} + \beta_{88r}; & D_{8,9} &= 0; & D_{8,10} &= \beta_{810r}; & D_{8,11} &= \beta_{8111} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{8,12} &= \beta_{8121} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{8122} + \beta_{812r}; & D_{8,13} &= \beta_{8131} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{8,14} &= \beta_{814r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{8,15} &= \beta_{8151} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{8,16} &= \beta_{816r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{8,17} &= \beta_{8171} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{8,pq} &= \beta_{u3} \frac{\partial q}{\partial y}; \\
D_{9,9} &= \gamma_{991} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{992} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{993} + \gamma_{99r}; & D_{9,10} &= \gamma_{9101} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{9,11} &= \gamma_{911r}; & D_{9,12} &= 0; \\
D_{9,13} &= \gamma_{913r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{9,14} &= \gamma_{9141} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{9,15} &= \gamma_{915r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{9,16} &= \gamma_{9161} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{9,17} &= \gamma_{917r} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{9,pq} &= \gamma_{u4} \frac{\partial p}{\partial x}; & D_{10,10} &= \gamma_{10101} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{10102} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_{10103} + \gamma_{1010r}; & D_{10,11} &= 0; \\
D_{10,12} &= \gamma_{1012r}; & D_{10,13} &= \gamma_{1013r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{10,14} &= \gamma_{10141} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{10,15} &= \gamma_{1015r} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{10,16} &= \gamma_{10161} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{10,17} &= \gamma_{1017r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{10,pq} &= \gamma_{u4} \frac{\partial p}{\partial y}; \\
D_{11,11} &= \beta_{11111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{11112} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{11113} + \beta_{1111r}; & D_{11,12} &= \beta_{11121} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\
D_{11,13} &= \beta_{11131} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11,14} &= \beta_{1114r} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11,15} &= \beta_{11151} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11,16} &= \beta_{1116r} \frac{\partial}{\partial x}; \\
D_{11,17} &= \beta_{11171} \frac{\partial}{\partial x}; & D_{11,pq} &= \beta_{u5} \frac{\partial q}{\partial x}; & D_{12,12} &= \beta_{12121} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{12122} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{12123} + \beta_{1212r}; \\
D_{12,13} &= \beta_{12131} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,14} &= \beta_{1214r} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,15} &= \beta_{12151} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,16} &= \beta_{1216r} \frac{\partial}{\partial y}; \\
D_{12,17} &= \beta_{12171} \frac{\partial}{\partial y}; & D_{12,pq} &= \beta_{u5} \frac{\partial q}{\partial y}; & D_{13,13} &= \beta_{13131} \nabla^2 + \beta_{1313r}; & D_{13,14} &= \beta_{1314r};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13,15} &= \beta_{13151} \nabla^2 + \beta_{1315r}; & D_{13,16} &= \beta_{1316r}; & D_{13,17} &= \beta_{13171} \nabla^2 + \beta_{1317r}; \\
D_{13pq} &= \gamma_{w1} p + \beta_{w1} q; & D_{14,14} &= \gamma_{14141} \nabla^2 + \gamma_{14142} + \gamma_{1414r}; & D_{14,15} &= \gamma_{1415r}; \\
D_{14,16} &= \gamma_{14161} \nabla^2 + \gamma_{14162} + \gamma_{1416r}; & D_{14,17} &= \gamma_{1417r}; & D_{14pq} &= \gamma_{w2} p + \beta_{w2} q; \\
D_{15,15} &= \beta_{15151} \nabla^2 + \beta_{15152} + \beta_{1515r}; & D_{15,16} &= \beta_{1516r}; & D_{15,17} &= \beta_{15171} \nabla^2 + \beta_{15172} + \beta_{1517r}; \\
D_{15pq} &= \gamma_{w3} p + \beta_{w3} q; & D_{16,16} &= \gamma_{16161} \nabla^2 + \gamma_{16162} + \gamma_{1616r}; & D_{16,17} &= \gamma_{1617r}; \\
D_{16pq} &= \gamma_{w4} p + \beta_{w4} q; & D_{17,17} &= \beta_{17171} \nabla^2 + \beta_{17172} + \beta_{1717r}; & D_{17pq} &= \gamma_{w5} p + \beta_{w5} q.
\end{aligned}$$

Показано, що диференціальна матриця СДР (5.25) симетрична.

У (5.26) γ і β з індексами –МГП, визначаються згідно з (В.3) дод. В.

МГП (В.3) переходять при рівних нулю кривинах у МГП для пластин.

Крайові умови на контурі для оболонки мають вигляд (3.26) з урахуванням відповідних доданків з індексами від «0» до «5».

Система ДР (5.25) (34-го порядку) описує взаємозалежні між собою симетричне і кососиметричне деформування.

5.3. Перетворення систем ДР рівноваги для різних наближень. Форми загальних розв'язків

СДР (5.8) у всіх наближеннях не розділяється на СДР симетричного і кососиметричного деформування, не виділяються ДР ні ВКЕ, ні ПКЕ, ні ВНДС. Для нетонких середньопологих або сильнопологих оболонок ($R_{1,2}/a \geq 1$, $a \geq b$), як показують додаткові числові дослідження, у (5.8) можна покласти $k'_1 = k'_2 = 0$ і тоді виділяються ДР ВКЕ та система, яка описує ВНДС з ПКЕ.

5.3.1. Наближення К01. Після перетворень, аналогічних пластині, система 10-го порядку (5.12) при $k'_1 = k'_2 = 0$ зобразиться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\gamma_{111} \varphi_{0,x} + \gamma_{112} \psi_{0,y} + k_{1w1} w_{1,x} &= \gamma_{u0} p_{,x}; \\
\gamma_{111} \varphi_{0,y} - \gamma_{112} \psi_{0,x} + k_{2w1} w_{1,y} &= \gamma_{u0} p_{,y}; \\
\beta_{113} u_1 + \beta_{111} \varphi_{1,x} + \beta_{112} \psi_{1,y} + \beta_{151} w_{1,x} &= \beta_{u1} q_{,x}; \\
\beta_{113} v_1 + \beta_{111} \varphi_{1,y} - \beta_{112} \psi_{1,x} + \beta_{151} w_{1,y} &= \beta_{u1} q_{,y}; \\
k_{1w1} u_{0,x} + k_{2w1} v_{0,y} + \beta_{151} \varphi_1 + (\beta_{551} \nabla^2 + r_{1w1}) w_1 &= D_{5pq}.
\end{aligned}$$

Із цієї СДР виділяється рівняння ВКЕ, що має вигляд (3.91) (як і для пластин) та СДР, яка описує ВНДС з ПКЕ:

$$\begin{aligned} \gamma_{111}\varphi_{0,x} + \gamma_{112}\psi_{0,y} + k_{1w1}w_{1,x} &= \gamma_{u0}p_{,x}; \quad \gamma_{111}\varphi_{0,y} - \gamma_{112}\psi_{0,x} + k_{2w1}w_{1,y} = \gamma_{u0}p_{,y}; \\ \beta_{113}\varphi_1 + \beta_{111}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{151}\nabla^2w_1 &= \beta_{u1}\nabla^2q. \\ k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y} + \beta_{151}\varphi_1 + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 &= D_{5pq}; \end{aligned} \quad (5.27)$$

Четверте ДР системи (5.27) співпадає із ДР (3.92) для пластин. Виражаючи із 3-го ДР (5.27) φ_1 через інші функції і, підставляючи в 4-е ДР (5.27) та, замінюючи φ_0 і ψ_0 через u_0 та v_0 , одержимо систему трьох ДР відносно u_0 , v_0 , w_1 , для якої операторним методом одержуються форми загальних розв'язків.

5.3.2. Наближення К0-3. Покладаючи $k'_1 = 0$, $k'_2 = 0$, СДР (5.18) (22-го порядку) після відповідних перетворень прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \gamma_{111}u_{0,xx} + \gamma_{112}u_{0,yy} + \gamma_{121}v_{0,xy} + \gamma_{131}\varphi_{2,x} + k_{1w1}w_{1,x} + \gamma_{151}w_{2,x} + k_{1w3}w_{3,x} &= \gamma_{u0}p_{,x}; \\ \gamma_{121}u_{0,xy} + \gamma_{112}v_{0,xx} + \gamma_{111}v_{0,yy} + \gamma_{131}\varphi_{2,y} + k_{2w1}w_{1,y} + \gamma_{151}w_{2,y} + k_{1w3}w_{3,y} &= \gamma_{u0}p_{,y}; \\ \beta_{113}u_1 + \beta_{133}u_3 + \beta_{111}\varphi_{1,x} + \beta_{112}\psi_{1,y} + \beta_{131}\varphi_{3,x} + \beta_{151}w_{1,x} + k_{3w2}w_{2,x} + \beta_{161}w_{3,x} &= \beta_{u1}q_{,x}; \\ \beta_{113}v_1 + \beta_{133}v_3 + \beta_{111}\varphi_{1,y} - \beta_{112}\psi_{1,x} + \beta_{131}\varphi_{3,y} + \beta_{151}w_{1,y} + k_{4w2}w_{2,y} + \beta_{161}w_{3,y} &= \beta_{u1}q_{,y}; \\ \gamma_{333}u_2 + \gamma_{131}\varphi_{0,x} + \gamma_{331}\varphi_{2,x} + \gamma_{332}\psi_{2,y} + k_{5w1}w_{1,x} + \gamma_{351}w_{2,x} + k_{5w3}w_{3,x} &= \gamma_{u2}p_{,x}; \\ \gamma_{333}v_2 + \gamma_{131}\varphi_{0,y} + \gamma_{331}\varphi_{2,y} - \gamma_{332}\psi_{2,x} + k_{5w1}w_{1,y} + \gamma_{351}w_{2,y} + k_{6w3}w_{3,y} &= \gamma_{u2}p_{,y}; \\ \beta_{133}u_1 + \beta_{333}u_3 + \beta_{131}\varphi_{1,x} + \beta_{331}\varphi_{3,x} + \beta_{332}\psi_{3,y} + \beta_{351}w_{1,x} + k_{7w2}w_{2,x} + \beta_{361}w_{3,x} &= \beta_{u3}q_{,x}; \\ \beta_{133}v_1 + \beta_{333}v_3 + \beta_{131}\varphi_{1,y} + \beta_{331}\varphi_{3,y} - \beta_{332}\psi_{3,x} + \beta_{351}w_{1,y} + k_{7w2}w_{2,y} + \beta_{361}w_{3,y} &= \beta_{u3}q_{,y}; \\ k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y} + \beta_{151}\varphi_1 + k_{5w1}\varphi_2 + \beta_{351}\varphi_3 + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 + \\ &+ r_{1w2}w_2 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_3 = \beta_{w1}q + k_{9p}p; \\ \gamma_{151}\varphi_0 + k_{3w2}u_{1,x} + k_{4w2}v_{1,y} + \gamma_{351}\varphi_2 + k_{7w2}\varphi_3 + \\ &+ r_{1w2}w_1 + (\gamma_{551}\nabla^2 + \gamma_{553} + r_{2w2})w_2 + r_{2w3}w_3 = k_{10q}q + \gamma_{w2}p; \\ k_{1w3}\varphi_0 + \beta_{161}\varphi_1 + k_{5w3}u_{2,x} + k_{6w3}v_{2,y} + \beta_{361}\varphi_3 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_1 + \\ &+ r_{2w3}w_2 + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{662} + r_{3w3})w_3 = \beta_{w3}q + k_{11p}p. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Виконуючи перетворення, аналогічні п. 3.4.2 для пластин, із СДР (5.28) виділяються розв'язувальні рівняння, у які входять вихрові функції:

$$\begin{aligned}
\beta_{113}\psi_1 + \beta_{112}\nabla^2\psi_1 + \beta_{133}\psi_3 + (k_{3w2} - k_{4w2})w_{2,xy} &= 0; \\
\gamma_{333}\psi_2 + \gamma_{332}\nabla^2\psi_2 + (k_{5w3} - k_{6w3})w_{3,xy} &= 0; \\
\beta_{133}\psi_1 + \beta_{333}\psi_3 + \beta_{332}\nabla^2\psi_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Із (В.1) дод. В випливає, що система ДР 6-го порядку (5.29) не є СДР, яка описує тільки вихровий КЕ із-за наявності в ній складових $w_2(x, y)$ і $w_3(x, y)$.

Але якщо полога оболонка квазірівнокривинна ($R_1 \approx R_2$), то СДР (5.29) міститиме тільки вихрові функції $\psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) і отже, співпадатиме з відповідними ДР вихрового КЕ для пластин при кососиметричному (3.103) і симетричному (3.123) деформуванні. Тобто, для квазірівнокривинної пологої оболонки ДР вихрового КЕ виділяються окремо і розділяються на дві окремі групи, одна з яких описує ВКЕ при кососиметричному (1-е та 3-е ДР (5.29)), а 2-е ДР (5.29) визначає ВКЕ при симетричному деформуванні. Загальні розв'язки ВКЕ співпадають із загальними розв'язками відповідних пластин.

Диференціюючи третє ДР (5.25) по x , четверте – по y і складаючи їх, та виконуючи аналогічні дії з п'ятим і шостим, сьомим і восьмим ДР, дістанемо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,3}^3 (\beta_{1i3} + \beta_{1i1}\nabla^2)\varphi_i + \beta_{151}\nabla^2 w_1 + k_{3w2}w_{2,xx} + k_{4w2}w_{2,yy} + \beta_{161}\nabla^2 w_3 &= \beta_{u1}\nabla^2 q; \\
\gamma_{131}\nabla^2 \varphi_0 + (\gamma_{333} + \gamma_{331}\nabla^2)\varphi_2 + k_{5w1}\nabla^2 w_1 + \gamma_{351}\nabla^2 w_2 + k_{5w3}w_{3,xx} + k_{6w3}w_{3,yy} &= \gamma_{u2}\nabla^2 p; \\
\beta_{133}\varphi_1 + \beta_{131}\nabla^2 \varphi_1 + \beta_{333}\varphi_3 + \beta_{331}\nabla^2 \varphi_3 + \beta_{351}\nabla^2 w_1 + k_{7w2}\nabla^2 w_2 + \beta_{361}\nabla^2 w_3 &= \beta_{u3}\nabla^2 q.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

СДР, яка складається із ДР (5.29), (5.30), перших двох і останніх трьох ДР системи (5.28) описує взаємозалежні ВНДС, ПКЕ і ВКЕ. Отже, різні кривини оболонки пов'язують ВНДС, потенціальний і вихровий КЕ.

Для квазірівнокривинної пологої оболонки СДР (5.30) з першими двома і останніми трьома ДР системи (5.28) визначає внутрішній НДС із ПКЕ. Вказана система ВНДС з ПКЕ зводиться до простішої, якщо виконати осереднення групи доданків $k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y}$, $k_{3w2}u_{1,x} + k_{4w2}v_{1,y}$ та $k_{5w3}u_{2,x} + k_{6w3}v_{2,y}$, що входять у останні три ДР (5.28). Матимемо:

$$k_{1w1} \approx k_{2w1} = k_{1w}; k_{3w2} \approx k_{4w2} = k_{3w}; k_{5w3} \approx k_{6w3} = k_{5w}, \quad (5.31)$$

де

$$k_{1w} = (k_{1w1} + k_{2w1})/2; k_{3w} = (k_{3w2} + k_{4w2})/2; k_{5w} = (k_{5w3} + k_{6w3})/2.$$

Тоді $k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y} \approx k_{1w}\varphi_0$; $k_{3w2}u_{1,x} + k_{4w2}v_{1,y} \approx k_{3w}\varphi_1$; $k_{5w3}u_{2,x} + k_{6w3}v_{2,y} \approx k_{5w}\varphi_2$ і останні три рівняння системи (5.28) запишуться так:

$$\begin{aligned} & k_{1w}\varphi_0 + \beta_{151}\varphi_1 + k_{5w1}\varphi_2 + \beta_{351}\varphi_3 + \\ & + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 + r_{1w2}w_2 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_3 = \beta_{w1}q + k_{9p}p; \\ & \gamma_{151}\varphi_0 + k_{3w}\varphi_1 + \gamma_{351}\varphi_2 + k_{7w2}\varphi_3 + \\ & + r_{1w2}w_1 + (\gamma_{551}\nabla^2 + \gamma_{552} + r_{2w2})w_2 + r_{2w3}w_3 = k_{10q}q + \gamma_{w2}p; \\ & k_{1w}\varphi_0 + \beta_{161}\varphi_1 + k_{5w}\varphi_2 + \beta_{361}\varphi_3 + \\ & + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_1 + r_{2w3}w_2 + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{663} + r_{3w3})w_3 = \beta_{w3}q + k_{11p}p. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Виражаючи із (5.32) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ через φ_0, w_1, w_2, w_3 та їх похідні, дістанемо:

$$\varphi_k = \lambda_{\varphi_0}\varphi_0 + \sum_{i=1}^3 (\lambda_{ki2}\nabla^2 w_i + \lambda_{ki0}w_i) + \lambda_{kq}q + \lambda_{kp}p, \quad (k=1, 2, 3), \quad (5.33)$$

де $\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{2kn}, \lambda_{0kn}, \lambda_{kq}, \lambda_{kp}$ – МГС.

Підставляючи (5.33) у перші два ДР (5.28) та ДР (5.30), одержимо СДР з частинними похідними 16-го порядку відносно функцій u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 :

$$P_{iu0}u_0 + P_{iv0}v_0 + P_{iw1}w_1 + P_{iw2}w_2 + P_{iw3}w_3 = P_{iq}q + P_{ip}p, \quad (i=1, 2, \dots, 5), \quad (5.34)$$

де P з нижніми індексами – диференціальні оператори, зокрема:

$$\begin{aligned} P_{1q} &= p_{1q} \frac{\partial}{\partial x}; P_{1p} = p_{1p} \frac{\partial}{\partial x}; P_{2q} = p_{2q} \frac{\partial}{\partial y}; P_{2p} = p_{2p} \frac{\partial}{\partial y}; \\ P_{iq} &= p_{iq2}\nabla^2 + p_{iq0}; P_{ip} = p_{ip2}\nabla^2 + p_{ip0}, \quad (i=3, 4, 5), \quad (p \text{ з індексами – МГП}). \end{aligned}$$

Для СДР (5.34) побудовані форми загальних розв'язків:

$$u_0(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{i1}^0 D_i(x, y); v_0(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{i2}^0 D_i(x, y); w_{k-2}(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{ik}^0 D_i(x, y), \quad (5.35)$$

де $k = 3, 4, 5$), P_{ik}^0 – ад’юнкти системи (5.34), а $D_i(x, y)$ – нові шукані функції, які отримуються на основі (5.34) і (5.35) із СДР:

$$PD_i(x, y) = P_{iq}q(x, y) + P_{ip}p(x, y), \quad (5.36)$$

в якій P – диференціальний визначник системи (5.34), який має такий вигляд:

$$P = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{i=0,2}^{12} a_i \nabla^i + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \sum_{i=0,2}^{12} b_i \nabla^i + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \sum_{i=0,2}^{12} c_i \nabla^i, \quad (a_i, b_i, c_i - \text{МГП}). \quad (5.37)$$

Загальні розв’язки системи (5.36) представляються у вигляді:

$$D_1(x, y) = D_{10}(x, y) + D_{1r}(x, y); \quad D_i(x, y) = D_{ir}(x, y), \quad (i = 2, 3, \dots, 5), \quad (5.38)$$

де $D_{10}(x, y)$ – загальний розв’язок однорідного рівняння $PD_{10}(x, y) = 0$; $D_{ir}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних ДР (5.36) 16-го порядку.

Приймаючи до уваги (5.35) та (5.38), дістанемо:

$$u_0(x, y) = P_{11}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{i1}^0 D_{ir}(x, y); \quad v_0(x, y) = P_{12}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{i2}^0 D_{ir}(x, y); \quad (5.39)$$

$$w_{k-2}(x, y) = P_{1k}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{ik}^0 D_{ir}(x, y), \quad (k = 3, 4, 5).$$

Складові $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ визначаються з 3-го – 8-го ДР (5.28) з урахуванням (5.31):

$$u_k(x, y) = \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,x} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,x} + \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,y} + \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,y} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{kwi} w_{i,x} + \lambda_{kq} q_{,x};$$

$$v_k(x, y) = \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,y} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,y} - \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,x} - \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,x} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{kwi} w_{i,y} + \lambda_{kq} q_{,y}, \quad (k = 1, 3); \quad (5.40)$$

$$u_2(x, y) = \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2,x} + \lambda_{2\psi 2} \psi_{2,y} + \sum_{i=1}^2 \lambda_{2wi} w_{i,x} + \lambda_{2p} p_{,x}, \quad (u_2, \partial / \partial x, \partial / \partial y \rightarrow v_2, \partial / \partial y, -\partial / \partial x),$$

де λ з нижніми індексами – МГП.

Компоненти НДС визначаються з урахуванням (5.14) – (5.17).

5.3.3. Кососиметричне деформування. Наближення K013. СДР при кососиметричному навантаженні при $k'_1 = 0, k'_2 = 0$ отримується із системи (5.28)

або СДР (5.18)), якщо в ній урахувати згідно ВРР перші чотири ДР, а також 7-е, 8-е, 9-е і 11-е ДР цієї системи і, крім цього, у вказаних ДР не приймати до уваги доданки з u_2, v_2, w_2, p , а залишити тільки доданки із функціями $u_0, v_0, u_1, v_1, u_3, v_3, w_1, w_3$. Дістанемо СДР з частинними похідними 16-го порядку:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{111}u_{0,xx} + \gamma_{112}u_{0,yy} + \gamma_{121}v_{0,xy} + k_{1w1}w_{1,x} + k_{1w3}w_{3,x} = 0; \\
& \gamma_{121}u_{0,xy} + \gamma_{112}v_{0,xx} + \gamma_{111}v_{0,yy} + k_{2w1}w_{1,y} + k_{1w3}w_{3,y} = 0; \\
& \beta_{113}u_1 + \beta_{133}u_3 + \beta_{111}\varphi_{1,x} + \beta_{112}\psi_{1,y} + \beta_{131}\varphi_{3,x} + \beta_{151}w_{1,x} + \beta_{161}w_{3,x} = \beta_{u1}q_{,x}; \\
& \beta_{113}v_1 + \beta_{133}v_3 + \beta_{111}\varphi_{1,y} - \beta_{112}\psi_{1,x} + \beta_{131}\varphi_{3,y} + \beta_{151}w_{1,y} + \beta_{161}w_{3,y} = \beta_{u1}q_{,y}; \\
& \beta_{133}u_1 + \beta_{333}u_3 + \beta_{131}\varphi_{1,x} + \beta_{331}\varphi_{3,x} + \beta_{332}\psi_{3,y} + \beta_{351}w_{1,x} + \beta_{361}w_{3,x} = \beta_{u3}q_{,x}; \quad (5.41) \\
& \beta_{133}v_1 + \beta_{333}v_3 + \beta_{131}\varphi_{1,y} + \beta_{331}\varphi_{3,y} - \beta_{332}\psi_{3,x} + \beta_{351}w_{1,y} + \beta_{361}w_{3,y} = \beta_{u3}q_{,y}; \\
& k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y} + \beta_{151}\varphi_1 + \beta_{351}\varphi_3 + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 + \\
& \quad + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_3 = \beta_{w1}q; \\
& k_{1w3}\varphi_0 + \beta_{161}\varphi_1 + \beta_{361}\varphi_3 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_1 + \\
& \quad + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{662} + r_{3w3})w_3 = \beta_{w3}q.
\end{aligned}$$

Виконуючи перетворення, аналогічні п. 5.2.3, одержується СДР ВКЕ 4-го порядку із 1-го та 3-го ДР (5.29) і отже, співпадає з СДР ВКЕ для пластин (3.103).

Із СДР (5.41) виділено також взаємозалежні рівняння ВНДС з ПКЕ, причому, без додаткових умов (5.31) на відміну від загального випадку наближення К0-3 (п. 5.3.2). Указані рівняння (12-го порядку) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{111}u_{0,xx} + \gamma_{112}u_{0,yy} + \gamma_{121}v_{0,xy} + k_{1w1}w_{1,x} + k_{1w3}w_{3,x} = 0; \\
& \gamma_{121}u_{0,xy} + \gamma_{112}v_{0,xx} + \gamma_{111}v_{0,yy} + k_{2w1}w_{1,y} + k_{1w3}w_{3,y} = 0; \\
& \beta_{113}\varphi_1 + \beta_{111}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{133}\varphi_3 + \beta_{131}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{151}\nabla^2w_1 + \beta_{161}\nabla^2w_3 = \beta_{u1}\nabla^2q; \quad (5.42) \\
& \beta_{133}\varphi_1 + \beta_{131}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{333}\varphi_3 + \beta_{331}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{351}\nabla^2w_1 + \beta_{361}\nabla^2w_3 = \beta_{u3}\nabla^2q; \\
& k_{1w1}u_{0,x} + k_{2w1}v_{0,y} + \beta_{151}\varphi_1 + \beta_{351}\varphi_3 + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_3 = \beta_{w1}q; \\
& k_{1w3}\varphi_0 + \beta_{161}\varphi_1 + \beta_{361}\varphi_3 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_1 + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{662} + r_{3w3})w_3 = \beta_{w3}q.
\end{aligned}$$

Із останніх двох рівнянь системи (5.42) дістанемо:

$$\varphi_k = \alpha_{ki0}u_{0,x} + \alpha_{kv0}v_{0,y} + \sum_{i=1,3}^3 (\lambda_{ki2}\nabla^2w_i) + \alpha_{k10}w_1 + (\lambda_{k30} + \alpha_{k30})w_3 + \lambda_{kq}q \quad (k=1,3), \quad (5.43)$$

де коефіцієнти α з індексами залежать від кривин оболонки.

Підставляючи (5.43) у перші чотири ДР (5.42), отримується СДР ВНДС із ПКЕ:

$$P_{iu0}u_o + P_{iv0}v_o + P_{iw1}w_1 + P_{iw3}w_3 = P_{iq}q, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.44)$$

де P з індексами – диференціальні оператори (інші, ніж у (5.34)). Складові компоненти переміщень СДР (5.44) подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 P_{i1}^0 D_i(x, y); v_0(x, y) = \sum_{i=1}^4 P_{i2}^0 D_i(x, y); \\ w_1(x, y) &= \sum_{i=1}^4 P_{i3}^0 D_i(x, y); w_3(x, y) = \sum_{i=1}^4 P_{i4}^0 D_i(x, y); \end{aligned} \quad (5.45)$$

В (5.45) P_{ik}^0 – ад'юнкти системи (5.44); $D_i(x, y)$ – нові шукані функції, для визначення яких на основі (5.44) і (5.45) одержується розв'язувальна СДР:

$$P_0 D_i(x, y) = D_{iq} q(x, y), \quad (5.46)$$

в якій D_{iq} – диференціальні оператори другого, першого та нульового порядків; P_0 – диференціальний визначник системи (5.44) 12-го порядку:

$$P_0 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{i=0,2}^8 a_i \nabla^i + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \sum_{i=0,2}^8 b_i \nabla^i + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \sum_{i=0,2}^8 c_i \nabla^i, \quad (a_i, b_i, c_i - \text{МГП}). \quad (5.47)$$

Форми загальних розв'язків системи (5.46) можна подати у вигляді:

$$D_1(x, y) = D_{10}(x, y) + D_{1r}(x, y); D_i(x, y) = D_{ir}(x, y), \quad (i = 2, 3, 4). \quad (5.48)$$

Ураховуючи (5.45) та (5.48), дістанемо:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= P_{11}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^4 P_{i1}^0 D_{ir}(x, y); v_0(x, y) = P_{12}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^4 P_{i2}^0 D_{ir}(x, y); \\ w_1(x, y) &= P_{13}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^4 P_{i3}^0 D_{ir}(x, y), w_3(x, y) = P_{14}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^4 P_{i4}^0 D_{ir}(x, y). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Складові переміщень u_1, v_1, u_3, w_3 визначаються з 3-го–6-го ДР (5.41):

$$u_k(x, y) = \lambda_{k\varphi 1}\varphi_{1,x} + \lambda_{k\varphi 3}\varphi_{3,x} + \lambda_{k\psi 1}\psi_{1,y} + \lambda_{k\psi 3}\psi_{3,y} + \sum_{i=1,3}^3 \lambda_{kwi}w_{i,x} + \lambda_{kq}q_{,x}; \quad (5.50)$$

$$v_k(x, y) = \lambda_{k\varphi 1}\varphi_{1,y} + \lambda_{k\varphi 3}\varphi_{3,y} - \lambda_{k\psi 1}\psi_{1,x} - \lambda_{k\psi 3}\psi_{3,x} + \sum_{i=1,3}^3 \lambda_{kwi}w_{i,y} + \lambda_{kq}q_{,y}, (k=1,3),$$

де λ з нижніми індексами – МГП (інші, ніж у (5.40)).

Компоненти переміщень, складові напружень та компоненти напружень визначаються за відповідними формулами п. 5.2.3, урахуваючи (5.49), (5.50).

5.3.4. Наближення К0-5. Ураховуються складові переміщень $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_5, v_5, w_5$. Граничні умови на лицевих поверхнях відповідають (3.1), (3.2). Послідовність одержання основних залежностей і рівнянь для цього наближення аналогічна п. 5.3.2. СДР (5.25) при $k'_1 = k'_2 = 0$ і спрощеннями типу (5.31) може бути зведена до двох систем, одна з яких описує ВКЕ, а інша – ВНДС з ПКЕ. СДР ВКЕ – 10-го порядку – така ж, як і для пластин, і отже, розділяється на незалежні системи ДР – (3.144) (6-го порядку) і (3.158) (4-го порядку). Система рівнянь ВНДС з ПКЕ при умовах, аналогічних (5.31), також спрощується і зводиться до СДР 24-го порядку відносно $u_0, v_0, w_1, w_2, \dots, w_5$, для якої форми загальних розв'язків також можуть бути побудовані операторним методом.

Розглянемо при $k'_1 = k'_2 = 0$ кососиметричне навантаження ($q \neq 0, p = 0$) без урахування складових компонент переміщень з парними натуральними індексами. Це відповідає частинному випадку цього наближення – наближенню К0135, яке зведеться до 1-го – 4-го, 7-го, 8-го, 11-го, 12-го, 13-го, 15-го, 17-го ДР рівноваги (5.25) і крайових умов (3.26) з урахуванням функцій $u_0, v_0, u_1, v_1, u_3, v_3, u_5, v_5, w_1, w_3, w_5, q$.

Система ДР в НК0135 на основі (5.25) (22-го порядку) має вигляд:

$$\begin{aligned} D_{i,1}u_0 + D_{i,2}v_0 + D_{i,3}u_1 + D_{i,4}v_1 + D_{i,7}u_3 + D_{i,8}v_3 + D_{i,11}u_5 + D_{i,12}v_5 + \\ + D_{i,13}w_1 + D_{i,15}w_3 + D_{i,17}w_5 = D_{ip}q, \\ (i=1, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 17), \end{aligned}$$

або в іншій формі:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{111}\varphi_{0,x} + \gamma_{112}\psi_{0,y} + \gamma_{113r}w_{1,x} + \gamma_{115r}w_{3,x} + \gamma_{117r}w_{1,x} = \gamma_{u0}p_{,x}; \\
& \gamma_{222}\varphi_{0,y} - \gamma_{221}\psi_{0,x} + \gamma_{213r}w_{1,y} + \gamma_{215r}w_{3,y} + \gamma_{217r}w_{5,x} = \gamma_{u0}p_{,y}; \\
& (\beta_{333}u_1 + \beta_{331}\varphi_{1,x} + \beta_{332}\psi_{1,y}) + (\beta_{372}u_3 + \beta_{371}\varphi_{3,x}) + \\
& + (\beta_{3112}u_5 + \beta_{3111}\varphi_{5,x}) + \beta_{3131}w_{1,x} + \beta_{3151}w_{3,x} + \beta_{3171}w_{5,x} = \beta_{u1}q_{,x}; \\
& (\beta_{333}v_1 + \beta_{331}\varphi_{1,y} - \beta_{332}\psi_{1,x}) + (\beta_{372}v_3 + \beta_{371}\varphi_{3,y}) + \\
& + (\beta_{3112}v_5 + \beta_{3111}\varphi_{5,y}) + \beta_{3131}w_{1,y} + \beta_{3151}w_{3,y} + \beta_{3171}w_{5,y} = \beta_{u1}q_{,y}; \\
& (\beta_{372}u_1 + \beta_{371}\varphi_{1,x}) + (\beta_{773}u_3 + \beta_{771}\varphi_{3,x} + \beta_{772}\psi_{3,y}) + \\
& + (\beta_{7112}u_5 + \beta_{7111}\varphi_{5,x}) + \beta_{7131}w_{1,x} + \beta_{7151}w_{3,x} + \beta_{7171}w_{5,x} = \beta_{u3}q_{,x}; \\
& (\beta_{372}v_1 + \beta_{371}\varphi_{1,y}) + (\beta_{773}v_3 + \beta_{771}\varphi_{3,y} - \beta_{772}\psi_{3,x}) + \\
& + (\beta_{7112}v_5 + \beta_{7111}\varphi_{5,y}) + \beta_{7131}w_{1,y} + \beta_{7151}w_{3,y} + \beta_{7171}w_{5,y} = \beta_{u3}q_{,y}; \\
& (\beta_{3112}u_1 + \beta_{3111}\varphi_{1,x}) + (\beta_{7112}u_3 + \beta_{7111}\varphi_{3,x}) + (\beta_{11113}u_5 + \\
& + \beta_{11111}\varphi_{5,x} + \beta_{11112}\psi_{5,y}) + \beta_{11131}w_{1,x} + \beta_{11151}w_{3,x} + \beta_{11171}w_{5,x} = \beta_{u5}q_{,x}; \\
& (\beta_{3112}v_1 + \beta_{3111}\varphi_{1,y}) + (\beta_{7112}v_3 + \beta_{7111}\varphi_{3,y}) + (\beta_{11113}v_5 + \\
& + \beta_{11111}\varphi_{5,y} - \beta_{11112}\psi_{5,x}) + \beta_{11131}w_{1,y} + \beta_{11151}w_{3,y} + \beta_{11171}w_{5,y} = \beta_{u5}q_{,y}; \\
& \gamma_{113r}u_{0,x} + \gamma_{213r}v_{0,y} + \beta_{3131}\varphi_1 + \beta_{7131}\varphi_3 + \beta_{11131}\varphi_5 + (\beta_{13131}\nabla^2 + \beta_{1313r})w_1 + \\
& + (\beta_{13151}\nabla^2 + \beta_{1315r})w_3 + (\beta_{13171}\nabla^2 + \beta_{1317r})w_5 = \beta_{w1}q; \\
& \gamma_{115r}u_{0,x} + \gamma_{215r}v_{0,y} + \beta_{3151}\varphi_1 + \beta_{7151}\varphi_3 + \beta_{11151}\varphi_5 + (\beta_{13151}\nabla^2 + \beta_{1315r})w_1 + \\
& + (\beta_{15151}\nabla^2 + \beta_{15152} + \beta_{1515r})w_3 + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172} + \beta_{1517r})w_5 = \beta_{w3}q; \\
& \gamma_{117r}u_{0,x} + \gamma_{217r}v_{0,y} + \beta_{3171}\varphi_1 + \beta_{7171}\varphi_3 + \beta_{11171}\varphi_5 + (\beta_{13171}\nabla^2 + \beta_{1317r})w_1 + \\
& + (\beta_{15171}\nabla^2 + \beta_{15172} + \beta_{1517r})w_3 + (\beta_{17171}\nabla^2 + \beta_{17172} + \beta_{1717r})w_5 = \beta_{w5}q.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

СДР ВКЕ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& \beta_{333}\psi_1 + \beta_{332}\nabla^2\psi_1 + \beta_{372}\psi_3 + \beta_{3112}\psi_5 = 0; \\
& \beta_{372}\psi_1 + \beta_{773}\psi_3 + \beta_{772}\nabla^2\psi_3 + \beta_{7112}\psi_5 = 0; \\
& \beta_{3112}\psi_1 + \beta_{7112}\psi_3 + \beta_{11113}\psi_5 + \beta_{11112}\nabla^2\psi_5 = 0;
\end{aligned} \tag{5.52}$$

СДР (5.52) 6-го порядку і вона співпадає із системою для пластин (3.144).

СДР, що описує ВНДС з ПКЕ–16-го порядку. Вона складається з перших двох, останніх трьох ДР (5.51) і трьох ДР, перетворених із 3-го – 8-го ДР (5.51):

$$\begin{aligned}
 & \beta_{333}\varphi_1 + \beta_{331}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{372}\varphi_3 + \beta_{371}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{3112}\varphi_5 + \\
 & + \beta_{3111}\nabla^2\varphi_5 + \beta_{3131}\nabla^2w_1 + \beta_{3151}\nabla^2w_2 + \beta_{3171}\nabla^2w_5 = \beta_{u1}\nabla^2q; \\
 & \beta_{372}\varphi_1 + \beta_{371}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{773}\varphi_3 + \beta_{771}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{7112}\varphi_5 + \\
 & + \beta_{7111}\nabla^2\varphi_5 + \beta_{7131}\nabla^2w_1 + \beta_{7151}\nabla^2w_2 + \beta_{7171}\nabla^2w_5 = \beta_{u3}\nabla^2q; \quad (5.53) \\
 & \beta_{3112}\varphi_1 + \beta_{3111}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{7112}\varphi_3 + \beta_{7111}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{11113}\varphi_5 + \\
 & + \beta_{11111}\nabla^2\varphi_5 + \beta_{11131}\nabla^2w_1 + \beta_{11151}\nabla^2w_2 + \beta_{11171}\nabla^2w_5 = \beta_{u5}\nabla^2q.
 \end{aligned}$$

СДР внутрішнього НДС з ПКЕ може бути зведена до СДР 16-го порядку відносно u_0, v_0, w_1, w_3, w_5 , розв'язування якої операторним методом в свою чергу зведеться до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння 16-го порядку та частинних розв'язків п'ятьох неоднорідних ДР 16-го порядку.

5.4. Методи розв'язання граничних задач в тригонометричних рядах

Розглянемо застосування тригонометричних рядів, наприклад, для НК0-3.

5.4.1. Метод одинарних тригонометричних рядів. Вважатимемо, що оболонка на лицевих поверхнях задовольняє граничним умовам (3.1), (3.2); на краях $y = 0$, $y = b$ оболонка вільно обіперта, а крайові умови при $x = 0$, $x = a$ можуть бути довільними. Тоді при $k = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $i = 0, 1, \dots, 5$):

$$u_k(x; y = 0, b) = 0; w_j(x; y = 0, b) = 0; s_{yi}(x; y = 0, b) = 0, \quad (5.54)$$

Розвинемо зовнішнє навантаження $q(x, y)$, $p(x, y)$ в одинарні тригонометричні ряди (3.172) і (3.185). Загальні розв'язки СДР ВКЕ (5.29) зображуються у вигляді (3.180), (3.186), і містять для кожного n шість сталих інтегрування.

Загальний розв'язок $D_{10}(x, y)$ однорідного ДР (5.36) шукаємо у формі:

$$D_{10}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{10n}(x) S_{ny}. \quad (5.55)$$

Тут функції $D_{10n}(x)$ – загальні розв’язки звичайних однорідних ДР 16-го порядку:

$$\sum_{i=0,2}^{16} A_{in} d^i D_{10n}(x) / dx^i = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

де A_{in} – сталі, які залежать від МГХ і параметра n . Загальні розв’язки $D_{10n}(x)$ містять 16 сталих інтегрування для кожного n .

Праві частини рівнянь (5.36) мають такий вигляд:

$$D_{iq}q + D_{ip}p = \sum_{n=1}^{\infty} D_{iqpn}(x) S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 4, 5); \quad D_{2q}q + D_{2p}p = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2qpn}(x) C_{ny}. \quad (5.56)$$

Частинні розв’язки $D_{ir}(x, y)$ ДР (5.36), ураховуючи (5.56), шукаємо у вигляді:

$$D_{ir}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{irn}(x) S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 4, 5); \quad D_{2r}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2rn}(x) C_{ny}. \quad (5.57)$$

Показано, що функції $D_{irn}(x)$ знаходяться із наступного ДР:

$$\sum_{l=0,2}^{16} B_{ln} d^l D_{irn}(x) / dx^l = f_{in}(x), \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (5.58)$$

де B_{ln} – сталі, які залежать від n і МГХ; $f_{in}(x)$ – відомі функції, залежать від $q_n(x)$, $p_n(x)$, МГС та параметра n .

Розв’язками $D_{irn}(x)$ ДР (5.58) можна взяти частинні розв’язки цих рівнянь.

Приймаючи до уваги вирази для ад’юнктів системи (5.34), а також вирази (5.55) та (5.57) для загального розв’язку $D_{10}(x, y)$ однорідного ДР (5.36) і частинних розв’язків неоднорідних ДР (5.36), на основі залежностей (5.35) отримано:

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(x) S_{ny}; \quad v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n}(x) C_{ny}; \quad w_k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(x) S_{ny}, \quad (5.59)$$

де $k = 1, 2, 3$; $u_{0n}(x)$, $v_{0n}(x)$, $w_{kn}(x)$ – функції, які виражаються через $D_{10n}(x)$, $D_{irn}(x)$ і, отже, для кожного n містять 16 сталих інтегрування.

Функції $\varphi_k(x, y)$ з урахуванням (5.33) зображаються таким чином:

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}(x) S_{ny}, \quad (5.60)$$

де $\varphi_{kn}(x)$ – функції, що залежать від $u_{0n}(x), v_{0n}(x), w_{kn}(x), q_n(x), p_n(x)$ і 16-ти сталих інтегрування для кожного n .

Складові $u_k(x, y), v_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) на основі (5.40) мають вигляд:

$$u_k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(x) S_{ny}; \quad v_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{kn}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5.61)$$

де $u_{kn}(x), v_{kn}(x)$ виражаються через вищезгадані функції від змінної x .

Слід зазначити, що структура виразів для складових переміщень, вихрових та потенціальних функцій для пологої оболонки і пластини однакова. Можна також одержати, що для оболонки структура виразів і для функцій двох змінних $Q_{kx}, Q_{ky}, (k = 1, 2, 3); \omega_2, \omega_3; t_{xi}, t_{yi}, (i = 0, 1, \dots, 4); s_{zj}, (j = 0, 1, \dots, 5); s_{xm}, s_{ym}, (m = 0, 1, \dots, 5); t_{yxk}, (k = 0, 1, \dots, 3)$ така ж, як і для пластин.

Неважно впевнитись, що крайові умови (5.54) виконуються. Сталі інтегрування (22 сталих для кожного n) у функціях, що залежать тільки від x , визначаються із перетворених крайових умов (3.26) при $x = 0, x = a$ ($l_x = 1, l_y = 0$):

$$\int_{(s)} \left\{ \sum_{i=0}^3 \frac{h}{2i+1} [(s_{xin} l_x - x_{isn}) \delta u_{in} + (t_{yxin} l_x - y_{isn}) \delta v_{in}] + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^2 \frac{h}{2i+1} (t_{xin} l_x - z_{isn}) \delta w_{i+1n} \right\} ds = 0. \quad (5.62)$$

На кожному краї задаються по 11 умов. У (5.62), як і в п. 3.6.1.1, $s_{xin}(x), t_{yxin}(x), t_{xin}(x)$ – функції, що входять у розкладання в одинарні тригонометричні ряди $s_{xi}(x, y), t_{yxi}(x, y), t_{xi}(x, y); x_{isn}, y_{isn}, z_{isn}$ – сталі у розкладаннях функцій $x_{si}(x = 0, a; y), y_{si}(x = 0, a; y), z_{si}(x = 0, a; y)$ у тригонометричні ряди.

При постановці задач у переміщеннях маємо по одній умові на кожному із двох країв для кожної із функцій $u_{kn}(x), v_{kn}(x), (k = 0, 1, 2, 3); w_{kn}(x), (k = 1, 2, 3)$.

Знайшовши сталі інтегрування для кожного n , далі визначаються усі функції від x , які входять у ряди розвинення складових компонент переміщень та напружень і відповідають розглядуваним значенням n . Потім знаходяться складові вказаних компонент і далі за формулами (5.14), (5.16), (5.17) визначається НДС.

Аналогічно будуються розв'язки задач для оболонок в інших наближеннях.

5.4.2. Метод подвійних тригонометричних рядів. Розглянемо наближення К0-3. Нехай краї оболонки $x=0$, $x=a$ та $y=0$, $y=b$ вільно обіперті. Тоді

$$\begin{aligned} v_k(x=0, a; y) = 0, \quad w_k(x=0, a; y) = 0, \quad s_{xi}(x=0, a; y) = 0; \\ u_k(x; y=0, b) = 0, \quad w_k(x; y=0, b) = 0, \quad s_{yi}(x; y=0, b) = 0, \quad (k=0, 1, 2, 3; i=0, 1, \dots, 5). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Розвинемо $q(x, y)$ та $p(x, y)$ у подвійні тригонометричні ряди Фур'є (3.194) і (3.201). При вказаних крайових умовах ВКЕ та ПКЕ будуть відсутні, а НДС оболонки визначатиметься частинними розв'язками $D_{ir}(x, y)$ п'яти неоднорідних ДР 16-го порядку (5.36), які шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned} D_{1r}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{1r mn} C_{mx} S_{ny}; \quad D_{2r}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2r mn} S_{mx} C_{ny}; \\ D_{ir}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{ir mn} S_{mx} S_{ny}, \quad (i=3, 4, 5); \quad D_{ir mn} = \text{const}, \quad (i=1, 2, \dots, 5). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Із СДР (5.36) з урахуванням (5.64) одержуються сталі $D_{ir mn}$ через МГП. З урахуванням (5.39) та (5.64) маємо для складові компонент переміщень:

$$\begin{aligned} w_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kmn} S_{mx} S_{ny}; \quad u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} C_{mx} S_{ny}; \\ v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} S_{mx} C_{ny}, \quad (u_{0mn}, v_{0mn}, w_{kmn} - \text{МГП}). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Урахувавши (3.194), (3.201), (5.33) і (5.65), маємо вирази для $\varphi_k(x, y)$ ($k=1, 2, 3$):

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmn} S_{mx} S_{ny}, \quad (\varphi_{kmn} - \text{МГП}). \quad (5.66)$$

На основі (5.40), (5.65), (5.66) отримуються складові u_k, v_k , ($k = 1, 2, 3$):

$$u_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kmm} C_{mx} S_{ny}; \quad v_k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmm} S_{mx} C_{ny}, \quad (u_{kmm}, v_{kmm} - \text{МГП}). \quad (5.67)$$

Функції Q_{lx}, Q_{ly} , ($l = 1, 2, 3$); ω_2, ω_3 ; t_{xi}, t_{yi} , ($i = 0, 1, \dots, 4$); s_{zj} , ($j = 0, 1, \dots, 4$); s_{xj} , s_{yj} , ($j = 0, 1, \dots, 5$); t_{yxk} , ($k = 0, 1, 2, 3$) визначаються на основі п. 5.2.3:

$$\begin{aligned} Q_{lx}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{lxmm} C_{mx} S_{ny}; & Q_{ly}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{lymn} S_{mx} C_{ny}; \\ \omega_i(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{imn} S_{mx} S_{ny}, \quad (i = 2, 3); \\ t_{xi}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{ximn} C_{mx} S_{ny}; & t_{yi}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yimn} S_{mx} C_{ny}; \\ s_{zj}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{zjmn} S_{mx} S_{ny}; & s_{xj}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{xjmn} S_{mx} S_{ny}; \\ s_{yl}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{ylmn} S_{mx} S_{ny}; & t_{yxk}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{yxkmn} C_{mx} C_{ny}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

де $Q_{kxmn}, \dots, t_{yxkmn}$ – МГП оболонки, що виражаються через сталі D_{irmn} .

Крайові умови (5.63), як це впливає із (5.65), (5.67), (5.68), виконуються.

Компоненти НДС оболонки визначатимуться згідно з (5.14), (5.16).

Аналогічно будуються розв'язки граничних задач в інших наближеннях.

5.4.3. Локальні і зосереджені навантаження. Якщо на лицеві поверхні оболонки (з розмірами a, b в плані) діють на прямокутні площинки з розмірами $2\xi, 2\eta$ з центрами площинок у точках $A_1(x = c; y = d, z = -h/2)$ і $A_2(x = c; y = d, z = +h/2)$ ($x \in [c - \xi; c + \xi], y \in [d - \eta; d + \eta]$) поперечні навантаження $q(x, y)/2 = q_0/2 = \text{const}$ (напрявлені вниз) і поперечні навантаження $p(x, y)/2 = p_0/2 = \text{const}$, які стискають оболонку, то члени рядів (3.194) і (3.201) q_{mn} і p_{mn} для оболонки аналогічно п. 3.6.2.3 виражатимуться у формі:

$$(q_{mn}; p_{mn}) = 16(q_0; p_0) \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \eta) / (ab \alpha_m \beta_n). \quad (5.69)$$

Якщо в точках A_1 і A_2 діють зосереджені поперечні сили $F_q/2$, які напрямлені вниз, і $F_p/2$, які стискають оболонку, то, дістанемо:

$$(q_{mn}; p_{mn}) = 4(F_q; F_p) \sin(\alpha_m c) \sin(\beta_n d) / (ab). \quad (5.70)$$

Отже, аналітичний розв'язок граничної задачі для пологої оболонки з крайовими умовами (5.63), яка знаходиться під дією локальних навантажень $q_0/2$ і $p_0/2$, прикладених до верхньої і нижньої площинок $(2\xi, 2\eta)$ з центрами в точках A_1 і A_2 , або ж якщо в точках A_1 і A_2 діють зосереджені сили $F_q/2$ (направлені вниз) і $F_p/2$ (направлені до оболонки), дається згідно з п. 5.4.2.

Якщо на оболонку діє система локальних або зосереджених навантажень, то використовується принцип суперпозиції і міркування, які аналогічні п. 3.6.2.3.

5.5. Числові результати розрахунків і їх аналіз

На основі одержаних ДР (5.12), (5.18), (5.25) досліджено ВНДС вільно обіпертих на краях прямокутних в плані ізотропних і транстропних пологих оболонок $(a \times b \times h)$ за різними наближеннями: K01, K013, K0-3, K0135, K0-5 при дії поперечного навантаження (3.194), (3.201). Наведені також чисельні результати для ізотропних тонких пологих оболонок за класичною теорією [224] для порівняння. Дослідження виконані для різних навантажень і МГХ: при кососиметричному навантаженні (згинальне деформування без поперечного обтискання) і при навантаженні тільки на верхній лицевій поверхні (згинальне деформування з поперечним обтисканням).

Числові розрахунки виконані на ПК на мові ФОРТРАН на основі розроблених пакетів математичних програм, які для перевірки достовірності результатів протестовані для різних частинних і граничних випадків.

Складові переміщень шукались у вигляді (3.214), де індекси k і i приймались відповідними розглядуваному наближенню. Сталі $A_{kmn}, B_{kmn}, C_{imn}$ визначались із відповідних систем ЛАР, приймаючи до уваги (5.12), (5.18) і (5.25). Компоненти НДС знаходились із залежностей п. 5.3.1–5.3.4, ураховуючи відповідне наближення.

Графіки на рис. В.1 – В.14 і дані табл. В.1–В.19 наведені для квадратних в плані пологих оболонок. Рисунки зображені для $k'_i = k_i = 1/R_i$ з урахуванням усіх складових відповідного наближення. На рис. В.1, В.2 лінії 2 і 3 практично співпадають, що вказує на високу точність за НК0-3 для оболонок середньої товщини. Для компонент НДС $\tilde{\sigma}_z$, \tilde{W} результати за НК01 і особливо за класичною теорією суттєво відрізняються від НК0-3, НК0-5. Залежність $\tilde{\sigma}_z$ від \tilde{z} в межах $-0,3 \leq \tilde{z} \leq 0,3$ практично лінійна.

Наведені тут і інші отримані результати вказують, що урахування поперечного обтискання ($p_{mm}/q_{mm} = 1$) призводить до зростання степені нелінійного змінення компонент НДС по товщині і певній різниці результатів за теоріями 2 і 3, особливо для $\tilde{\sigma}_z$, чого не помічається для пластин. Це вказує на те, що вплив поперечного обтискання на НДС може суттєво залежати від кривин оболонки. Збільшення податливості на поперечний зсув призводить, як і для пластин, до зростання степені нелінійного змінення $\tilde{\sigma}_x$ по товщині і зменшення точності НК0-3. Нелінійне змінення $\tilde{\sigma}_z$ по товщині при зростанні G/G' для кососиметричного навантаження зменшується і близьке до лінійного. Якісне змінення $\tilde{\sigma}_z$ за НК0-5 при урахуванні поперечного обтискання суттєво нелінійне. Зменшення пологості оболонки призводить до зростання степені нелінійності НДС по товщині. Швидкозмінюване поперечне навантаження (рис.В.10–В.14)) в цілому збільшує нелінійність НДС по товщині та розходження між НК0-3 і НК0-5.

У верхніх рядках табл. В.1, В.2, В.4–В.7 представлені результати при урахуванні в залежностях параметрів k'_1, k'_2 ($k'_1 = 1/R_1, k'_2 = 1/R_2$), а в нижніх – без їх урахування; розходження у % між ними за НК0-5 характеризується величиною Δ по відношенню до значень з урахуванням $k'_{1,2}$.

Для аналізу збіжності і порівняння результатів за різними наближеннями наведені розходження $\Delta_{1k}, \Delta_{31}, \Delta_{53}, \Delta_{51}, \Delta_{5k}$ у відсотках між НК01 і КТ, НК0-3 і НК01; НК0-5 і НК0-3; НК0-5 і НК01; НК0-5 і КТ відповідно.

Із наведених вище результатів та додаткових досліджень, параметри $k'_{1,2}$ найбільше впливають на НДС товстих слабопологих оболонок ($R_{1,2}/a = 29/40 \div 1.0$) і цей

вплив може бути достатньо суттєвим, особливо для прогинів. Для середньопологих ($R_{1,2}/a \approx 1.0-5.0$) і сильнопологих оболонок ($R_{1,2}/a \geq 5.0$) середньої товщини параметри $k'_{1,2}$ впливають на найбільші значення компонент НДС незначним чином і тому їхнім впливом на такі оболонки можна знехтувати. Збіжність результатів в цілому покращується із зменшенням товщини оболонки, податливості матеріалу на поперечний зсув та із зростанням пологості оболонки. Поперечне обтискання може суттєво впливати не тільки на величину НДС, але й на характер їх змінення (табл. В.1 – В.3, В.6, В.7, В.10-В.15) (Δ_{pq} характеризує відносне розходження у % між компонентами НДС при кососиметричному деформуванні і при навантаженні оболонки тільки на верхній лицевій поверхні по відношенню до останніх), Зростання податливості на поперечний зсув призводить до зменшення впливу обтискання на вказані компоненти НДС на нижній лицевій поверхні. Із збільшенням пологості оболонки вплив поперечного обтискання на нижній лицевій поверхні зменшується.

В табл. В.9 наведені значення для компонент НДС при кососиметричному навантаженні пологих оболонок з урахуванням і без урахування складових компонент тангенціальних переміщень (СКТП) з парними натуральними індексами. Розходження між ними у % (Δ'), віднесені до компонент НДС з урахуванням СКТП з парними натуральними індексами. Із збільшенням пологості оболонки вказані розходження зменшуються і, як показують додаткові чисельні розрахунки, СКТП з парними натуральними індексами (при $h/a = 0,5$) можна не враховувати для ізотропної оболонки при $R_{1,2}/a \geq 7$ (розходження менші 1%). Із зменшенням h/a вплив СКТП з парними натуральними індексами на компоненти НДС спадає і для $h/a = 0,2$ при $R_{1,2}/a \geq 4$ вказані компоненти також можна не приймати до уваги. Зменшення G'/G призводить до зростання впливу на $\tilde{\sigma}_x$ СКТП з парними індексами. В табл. В.10 – В.15 – результати для $\tilde{\sigma}_x$ і \tilde{W} при швидкозмінюваному в області навантаженні ($m = n = 9$) і різних МГП. Значення Δ_{pq} наведені для НК0-5. Результати за КТ можуть суттєво відрізнитися від отриманих за МТ. Це залежить, в першу чергу, від товщини оболонки та від змінюваності навантаження. Із зменшенням товщини вплив змінюваності поперечного навантаження спадає (табл. В.10 – В.15). Та навіть для тонких оболонок вплив

змінюваності навантаження (табл. В.12, В.13) з урахуванням поперечного обтискання може бути значним. При швидкозмінних в області навантаженнях НК0-3 не дає для товстих оболонок задовільних результатів по НДС. Аналіз числових результатів показує, що для нетонких трансропних оболонок з великою податливістю на поперечний зсув з урахуванням поперечного стискання і при швидкозмінюваних навантаженнях потрібно враховувати наближення вищих порядків (НК0-5 та інші). При плавних навантаженнях ($m = n = 1$) розроблений варіант МТ з урахуванням НК0-3 з високою точністю описує НДС навіть товстих оболонок. В табл. В.16 – В.19 наведені значення $\tilde{\sigma}_x$ і \tilde{W} для пластин (точний розв'язок) і оболонок за НК0-3 при $p_{mn}/q_{mn} = 0$ і $p_{mn}/q_{mn} = 1$ в залежності від h/a , $R_{1,2}/a$, G'/G і z/h . Вказані розходження Δ_{p_o} між ними по відношенню до точного розв'язку для пластин. Збільшення пологості оболонки призводить до зменшення розходжень. Дані таблиць дають можливість оцінити розходження між наведеними компонентами для пологих оболонок і відповідних пластин.

У [316] в НК13 розглядалась квадратна в плані полого панель при локальному рівномірному навантаженні по площинці і у вигляді піраміди з квадратною площинкою основи $a/3$.

5.6. Основні прикладні висновки до розрахунку

трансропних пологих оболонок довільної товщини

Основні прикладні висновки опубліковані в [155] і наведені в дод. В.3.

5.7. Висновки по розділу

Для трансропних та ізотропних пологих оболонок довільної сталогої товщини вирішені наступні проблеми.

1. Побудовано новий варіант МТ однорідних трансропних пологих оболонок довільногої сталогої товщини при будь-якому поперечному навантаженні на основі розробленої методології (розд. 2).

2. Уперше на основі МТ отримані в явному вигляді взаємозв'язані основні рівняння у високих наближеннях, які придатні для розв'язання прикладних граничних задач з високою точністю.

3. Установлено, що в наближенні $K0-N$ (N –непарне натуральне число) взаємозв'язана СДР має порядок $2(3N + 2)$. Системи ДР не розділяються на рівняння кососиметричного і симетричного деформування. Внутрішній НДС і крайові ефекти взаємозв'язані. Для квазірівнокривинних середньопологих та сильнопологих оболонок при h/a (h/b) $\leq 0,2$ виділяється СДР ВКЕ, яка має порядок $2N$, причому, системи симетричного і кососиметричного ВКЕ розділяються ($(N - 1)$ -го і $(N + 1)$ -го порядку відповідно). ВНДС із ПКЕ визначається взаємозв'язаною СДР порядку $4(N + 1)$. СДР у НК0-3 ($N = 3$) (враховується поперечне обтискання) має 22-й порядок; у НК013 (кососиметричне деформування, не враховується поперечне обтискання) – 16-й порядок; у НК0-5 СДР 34-го порядку, а в НК0135 – 22-го.

4. Розроблена нова узагальнена методика спрощення отриманих СДР, яка основана на алгебраїчних, диференціальних і операторних перетвореннях. Для різних наближень виведені СДР вихрових КЕ і взаємозв'язані зручні СДР ВНДС з ПКЕ відносно складових переміщень $u_0, v_0, w_1, w_2, \dots$.

5. Узагальнено операторний метод розв'язування нових СДР високих порядків варіанта МТ і на його основі побудовані загальні розв'язки ДР ВКЕ і форми загальних розв'язків СДР внутрішнього НДС з ПКЕ.

6. У новій постановці граничних задач для оболонок побудовані за розробленим варіантом МТ аналітичні розв'язки в одинарних і подвійних тригонометричних рядах при неперервних, локальних і зосереджених навантаженнях.

7. Доведена теорема про збіжність рядів для напружень.

8. Розроблені алгоритм визначення НДС нетонких транслопних пологих оболонок при довільних навантаженнях і крайових умовах та створені математичні пакети програм на мові ФОРТРАН для числового дослідження ВНДС.

9. Уперше виконані нові дослідження ВНДС пологих оболонок довільної товщини у високих наближеннях при плавних і неплavnих навантаженнях та отримані числові

результати в залежності від МГХ для різних наближень нового варіанта МТ. Теорія типу Тимошенка-Рейснера дає задовільні результати тільки для тонких оболонок з низькою податливістю на поперечний зсув при плавних навантаженнях.

10. Уперше в МТ в одержаних СДРР для пологих оболонок досліджено вплив кривин у деформаціях поперечного зсуву на НДС.

11. Установлена необхідність урахування вищих наближень для визначення НДС при неплавних, квазілокальних і локальних навантаженнях. Для слабологих товстих ($h/a \geq 0,5$; $R_{1,2}/a \leq 1$) транстропних оболонок потрібно враховувати залежність деформацій поперечного зсуву від кривин, а при кососиметричному навантаженні навіть при крайових умовах Нав'є – складові компонент тангенціальних переміщень (СКТП) з парними натуральними індексами у рядах для НДС.

12. Досліджено вплив обтискання на НДС оболонок, який може бути суттєвим не тільки для товстих, але і для оболонок середньої товщини ($h/a = 0,1 \div 0,2$), особливо при швидкозмінних в області навантаженнях.

13. Практична збіжність результатів у цілому покращується із зменшенням товщини, податливості матеріалу на поперечний зсув та із зростанням пологості оболонки.

14. Введені поняття і орієнтовні критерії степені пологості оболонок з товщинами ($h/a \approx 1/3 - 1/10$): якщо $R/a \approx 29/40 - 1,0$ – це слаболога оболонка (k'_i і СКТП з парними індексами впливають на НДС і їх потрібно враховувати), якщо $R/a \approx 1,0 - 5,0$ – це середньолога оболонка (k'_i і СКТП з парними індексами впливають на НДС незначним чином); якщо $R/a \geq 5,0$ – це сильно полога оболонка (k'_i і СКТП з парними індексами не впливають на НДС).

15. Наведені таблиці, які дають можливість виконувати наближений розрахунок пологих оболонок за НК0-3, замінюючи їх відповідними пластинами.

Наукові результати, наведені в п'ятому розділі, опубліковано в працях автора [142, 145, 146, 150, 155–157, 178, 179, 188, 196, 312–314, 316, 317, 443–445, 449].

РОЗДІЛ 6

МЕТОД ЗБУРЕНЬ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ У ВАРІАНТІ МТ НЕТОНКИХ ОДНОРІДНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

У цьому розділі уперше побудовано новий варіант МТ нетонких однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних за Каудерером пологих оболонок та розроблені на його основі методи розв'язування граничних задач. Варіант МТ, як і для пластин, оснований на ВПР, методі розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра в поєднанні з методом збурень пружних властивостей матеріалу і використанням МВР.

6.1. Метод збурень ізотропних властивостей в МТ нетонких ортотропних пологих оболонок в НК0-3 за поліномами Лежандра

З позицій тривимірної ТП розглядається ортотропна однорідна лінійно пружна полого оболонка прямокутна в плані ($a \times b$) довільної сталої товщини h в прямокутній системі координат $Oxyz$ (рис. 5.1). На лицевих поверхнях оболонки граничні умови мають вигляд (3.1), (3.2). Граничні умови на бічній поверхні формулюються у вигляді (3.3), (3.4). Аналогічно пластині (розд. 4) ортотропна оболонка зводиться до осередненої ізотропної оболонки з використанням методу малого параметра. Залежності (4.1) – (4.4) будуть справедливими і для оболонки.

6.1.1. Основні співвідношення. Для одержання основних співвідношень, як і у випадку пластин, розроблено комбінований метод, оснований на методі малого параметра [101, 258] в поєднанні з методом розвинення усіх компонент НДС у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра. Розвиваючи у ряди за малим параметром ε компоненти НДС і зовнішнє навантаження, одержимо залежності (4.5) і (4.6), але в (4.6) деформації інші:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, x \end{array} \right] + k_1 w_{k+1}^{(l)} \right) \mathcal{E}^l, \quad (x, y; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}; k_1 \rightarrow k_2); \\ \varepsilon_z^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P'_k w_{k+1}^{(l)}; \quad \gamma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, y \end{array} \right] + v_{k,x}^{(l)} \right); \\ \gamma_{xz}^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (P_k w_{k+1,x}^{(l)} + P'_k u_k^{(l)} - k'_1 P'_k u_k^{(l)}), \quad (x, y; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}; k'_1 \rightarrow k'_2).\end{aligned}\quad (6.1)$$

Для компонент тангенціальних напружень справедливі залежності (4.7), (4.8).

Розглядаючи НК0-3, дістанемо:

$$\begin{aligned}U^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 P_k u_k^{(l)}(x, y), \quad (U \rightarrow V; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}); \quad W^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^2 P_k w_{k+1}^{(l)}(x, y); \\ \varepsilon_x^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 P_k \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, x \end{array} \right] + k_1 w_{k+1}^{(l)} \right) \mathcal{E}^l, \quad w_4^{(l)} = 0; \quad \varepsilon_z^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^2 P'_k w_{k+1}^{(l)}; \\ \gamma_{xy}^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^3 P_k \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, y \end{array} \right] + v_{k,x}^{(l)} \right); \quad \gamma_{xz}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 (P_k w_{k+1,x}^{(l)} + P'_k u_k^{(l)} - k'_1 P'_k u_k^{(l)}), \\ &\quad (x, y; u_k^{(l)} \rightarrow v_k^{(l)}; k'_1 \rightarrow k'_2); \\ \sigma_z^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^5 P_k s_{zk}^{(l)}(x, y); \quad \sigma_{xz}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^4 P_k t_{xk}^{(l)}(x, y), \quad (x, y); \\ \sigma_x^{(l)}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^5 P_k s_{xk}^{(l)}(x, y) - \Phi_{sx}^{(l-1)}, \quad (x, y); \quad \sigma_{xy}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 P_k t_{yxk}^{(l)}(x, y) - \Phi_{s_{yx}}^{(l-1)},\end{aligned}\quad (6.2)$$

де функції $\Phi_{sx}^{(l-1)}$, $\Phi_{sy}^{(l-1)}$, $\Phi_{s_{yx}}^{(l-1)}$ визначаються згідно з (4.8), а множники при поліномах Лежандра мають вигляд:

$$\begin{aligned}s_{z0}^{(l)}(x, y) &= -\frac{1}{2} p^{(l)} - \frac{1}{10} \omega_2^{(l)}; \quad s_{z1}^{(l)}(x, y) = -\frac{3}{5} (\omega_1^{(l)} + \frac{1}{14} \omega_3^{(l)}); \quad s_{z2}^{(l)}(x, y) = \frac{1}{7} \omega_2^{(l)}; \\ s_{z3}^{(l)}(x, y) &= \frac{1}{10} \omega_1^{(l)} + \frac{1}{15} \omega_3^{(l)}; \quad s_{z4}^{(l)}(x, y) = -\frac{3}{70} \omega_2^{(l)}; \quad s_{z5}^{(l)}(x, y) = -\frac{1}{42} \omega_3^{(l)}; \quad t_{x0}^{(l)} = \frac{1}{h} Q_{1x}^{(l)}, \\ t_{x1}^{(l)} &= \frac{3}{5h} Q_{2x}^{(l)}, \quad t_{x2}^{(l)} = -\frac{1}{h} Q_{1x}^{(l)} + \frac{3}{7h} Q_{3x}^{(l)}, \quad t_{x3}^{(l)} = -\frac{3}{5h} Q_{2x}^{(l)}, \quad t_{x4}^{(l)} = -\frac{3}{7h} Q_{3x}^{(l)}, \quad (x, y); \\ s_{xk}^{(l)}(x, y) &= b_{110} \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, x \end{array} \right] + k_1 w_{k+1}^{(l)} \right) + b_{120} \left(\left[\begin{array}{c} (l) \\ k, y \end{array} \right] + k_2 w_{k+1}^{(l)} \right) + d_{10} s_{zk}^{(l)}; \quad (k = 0, 1, 2); \\ s_{x3}^{(l)}(x, y) &= b_{110} u_{3,x}^{(l)} + b_{120} v_{3,y}^{(l)} + d_{10} s_{z3}^{(l)}; \quad s_{x4}^{(l)}(x, y) = d_{10} s_{z4}^{(l)}; \quad s_{x5}^{(l)}(x, y) = d_{10} s_{z5}^{(l)}, \quad (x, y); \\ t_{yxk}^{(l)}(x, y) &= G_0(u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}), \quad (k = 0, 1, 2, 3).\end{aligned}\quad (6.3)$$

В залежностях (6.3) функції $\omega_k^{(l)}$, $Q_k^{(l)}$ ($k = 1, 2, 3$) визначаються згідно з (4.13), де

$$\begin{aligned}
q_{21} &= -7d_{30}k_{12}; \quad q_{22} = -\frac{14}{hd_{20}}; \quad q_{23} = 2d_{30}k_{12}; \quad e_{20} = -7d_{30}; \quad e_{22} = 2d_{30}; \\
e_{2p} &= -7/2; \quad e_{2\omega} = \frac{105}{hd_{20}}; \quad e_{2\xi} = -e_{2\omega}; \quad q_{32} = -11d_{30}k_{12}; \quad q_{33} = -\frac{66}{hd_{20}}; \quad e_{31} = -11d_{30}; \\
e_{33} &= \frac{22}{3}d_{30}; \quad e_{3q} = -\frac{22}{3}; \quad e_{3\omega} = \frac{770}{hd_{20}}; \quad e_{3\xi} = -e_{3\omega}; \quad h_{11} = \frac{14hG_0}{15}; \quad h_{13} = -\frac{hG_0}{15}; \\
& \hspace{20em} (6.4) \\
l_{ki} &\rightarrow l_{kxi}, \quad l_{1x0} = -\frac{14hG_0}{15}k'_1; \quad l_{1x1} = \frac{28G_0}{15}; \quad l_{1x2} = \frac{hG_0}{15}k'_1; \quad l_{1x3} = \frac{6G_0}{5}; \quad h_{22} = \frac{7hG_0}{6}; \\
l_{2x1} &= -\frac{7hG_0}{6}k'_1; \quad l_{2x2} = 7G_0; \quad l_{2x3} = \frac{hG_0}{2}k'_1; \quad h_{31} = \frac{7hG_0}{5}; \quad h_{33} = \frac{7hG_0}{5}; \\
l_{3x0} &= -\frac{7hG_0}{5}k'_1; \quad l_{3x1} = \frac{14G_0}{5}; \quad l_{3x2} = l_{3x0}; \quad l_{3x3} = \frac{84G_0}{5}, \quad (x \rightarrow y; k'_1 \rightarrow k'_2),
\end{aligned}$$

а для інших функцій справедливі співвідношення (4.14). Як це впливає із вищесказаного, функції $Q_{kx}^{(l)}(x, y)$, $Q_{ky}^{(l)}(x, y)$, $\omega_2^{(l)}(x, y)$, $\omega_3^{(l)}(x, y)$, як і для пластини, залежать від компонент НДС 0-го, 1-го, ..., $(l-1)$ -го наближень по ε .

6.1.2. Диференціальні рівняння рівноваги і крайові умови. Із ВРР для ортотропної оболонки в НК0-3 після асимптотичного розщеплення одержуються ДР рівноваги оболонки та крайові умови в наближенні l по ε . Опускаючи громіздкі викладки, отримана рекурентна система взаємозв'язаних ДР рівноваги:

$$\begin{aligned}
& D_{i,1}u_0^{(l)} + D_{i,2}v_0^{(l)} + D_{i,3}u_1^{(l)} + D_{i,4}v_1^{(l)} + D_{i,5}u_2^{(l)} + D_{i,6}v_2^{(l)} + D_{i,7}u_3^{(l)} + \\
& + D_{i,8}v_3^{(l)} + D_{i,9}w_1^{(l)} + D_{i,10}w_2^{(l)} + D_{i,11}w_3^{(l)} = D_{ip}^{(l)} + D_{iq}^{(l)} + D_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 11),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

де D_{ij} ($j = 1, 2, \dots, 11$) – диференціальні оператори (співпадають із аналогічними для ізотропної пологої оболонки (5.19)); $D_{ip}^{(l)}, D_{iq}^{(l)}$ – функції l -го наближення від зовнішнього навантаження; $D_{i\xi}^{(l-1)}$ – функції, що залежать від компонент НДС від 0-го до $(l-1)$ -го наближення по ε включно. Далі функції з індексом ξ унизу і індексом $(l-1)$ угорі матимуть аналогічний зміст.

Функції правих частин (6.5) мають такий вигляд:

$$D_{1p}^{(l)} = c_{1,13}P_{,x}^{(l)}; \quad D_{1q}^{(l)} = 0; \quad D_{1\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u01}^{(l-1)} - \Phi_{u02}^{(l-2)});$$

$$\begin{aligned}
D_{2p}^{(l)} &= c_{2,13} p_{,y}^{(l)}; D_{2q}^{(l)} = 0; D_{2\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{v01}^{(l-1)} - \Phi_{v02}^{(l-2)}); D_{3p}^{(l)} = 0; D_{3q}^{(l)} = c_{3,13} q_{,x}^{(l)}; \\
D_{3\xi}^{(l-1)} &= h(\Phi_{u11}^{(l-1)} - \Phi_{u12}^{(l-2)})/3; D_{4p}^{(l)} = 0; D_{4q}^{(l)} = c_{4,13} q_{,y}^{(l)}; D_{4\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{v11}^{(l-1)} - \Phi_{v12}^{(l-2)})/3; \\
D_{5p}^{(l)} &= c_{5,13} p_{,x}^{(l)}; D_{5q}^{(l)} = 0; D_{5\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u21}^{(l-1)} + \Phi_{u22}^{(l-2)})/5; D_{6p}^{(l)} = c_{6,13} p_{,y}^{(l)}; D_{6q}^{(l)} = 0; \\
D_{6\xi}^{(l-1)} &= h(\Phi_{v21}^{(l-1)} + \Phi_{v22}^{(l-2)})/5; D_{7p}^{(l)} = 0; D_{7q}^{(l)} = c_{7,13} q_{,x}^{(l)}; D_{7\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{u31}^{(l-1)} + \Phi_{u32}^{(l-2)})/7; \\
D_{8p}^{(l)} &= 0; D_{8q}^{(l)} = c_{8,13} q_{,y}^{(l)}; D_{8\xi}^{(l-1)} = h(\Phi_{v31}^{(l-1)} + \Phi_{v32}^{(l-2)})/7; D_{9p}^{(l)} = c_{9,14r} p^{(l)}; D_{9q}^{(l)} = c_{9,15} q^{(l)}; \\
D_{9\xi}^{(l-1)} &= \Phi_{w11}^{(l-1)} - \Phi_{w12}^{(l-2)}; D_{10p}^{(l)} = c_{10,13} p^{(l)}; D_{10q}^{(l)} = c_{10,14r} q^{(l)}; D_{10\xi}^{(l-1)} = (\Phi_{w21}^{(l-1)} - \Phi_{w22}^{(l-2)})/3; \\
D_{11p}^{(l)} &= c_{11,14r} p^{(l)}; D_{11q}^{(l)} = c_{11,15} q^{(l)}; D_{11\xi}^{(l-1)} = -(\Phi_{w31}^{(l-1)} + \Phi_{w32}^{(l-2)})/5.
\end{aligned}
\tag{6.6}$$

Коефіцієнти c з індексами, які входять в оператори лівих частин СДР (6.5) і у функції (6.6) правих частин СДР (6.5), наведені в (Г.1) дод. Г. Якщо в (Г.1) покласти $\nu_0 = \nu$; $E_0 = E$; $G_0 = G$; $b_{110} = E/(1-\nu^2)$, де ν , E , G –МС для ізотропно-го матеріалу, то коефіцієнти (Г.1) співпадатимуть з точністю до позначень із сталими (В.1), а диференціальні оператори в лівих частинах ДР (6.5) і функції без індекса ξ в правих частинах співпадатимуть з операторами і функціями (5.19), записаними для ізотропної оболонки.

Доданки у функціях $D_{i\xi}^{(l-1)}$ (6.6):

$$\begin{aligned}
\Phi_{u01}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{21}{2h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} - \frac{k'_1 G_0}{h} \Phi_{1x}^{(l-1)} + A_{u0}^{(l-1)}, \quad \Phi_{u02}^{(l-2)}(x, y) = \frac{21}{2h} d_{30} \frac{\partial A_1^{(l-2)}}{\partial x}; \\
\Phi_{u11}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{33}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 3}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{6G_0}{h^2} \Phi_{1x}^{(l-1)} - \frac{k'_1 G_0}{h} \Phi_{2x}^{(l-1)} + A_{u1}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u21}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{k'_1 G_0}{h} \Phi_{1x}^{(l-1)} + \frac{10G_0}{h^2} \Phi_{2x}^{(l-1)} - \frac{3k'_1 G_0}{7h} \Phi_{3x}^{(l-1)} - \frac{15}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + A_{u2}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u12}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{33}{h} d_{30} \frac{\partial B_1^{(l-2)}}{\partial x}, \quad \Phi_{u22}^{(l-2)}(x, y) = \frac{15}{h} d_{30} \frac{\partial A_1^{(l-2)}}{\partial x}; \\
\Phi_{u31}^{(l-1)}(x, y) &= \frac{k'_1 G_0}{h} \Phi_{2x}^{(l-1)} + \frac{6G_0}{h^2} \Phi_{3x}^{(l-1)} - \frac{154}{h} d_{30} \frac{\partial I_{\omega 3}^{(l-1)}}{\partial x} + A_{u3}^{(l-1)}; \\
\Phi_{u32}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{154}{h} d_{30} \frac{\partial B_1^{(l-2)}}{\partial x}, \quad (x, y; u \rightarrow v; k'_1 \rightarrow k'_2); \\
\Phi_{w11}^{(l-1)}(x, y) &= k_1 \Phi_{sx0}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy0}^{(l-1)} + G_0 \left(\frac{\partial \Phi_{1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{21}{2} k_{12} d_{30} I_{\omega 2}^{(l-1)}; \tag{6.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{w21}^{(l-1)}(x, y) &= 3(k_1\Phi_{sx1}^{(l-1)} + k_2\Phi_{sy1}^{(l-1)}) + G_0 \left(\frac{\partial\Phi_{2x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{2y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{63}{hd_{20}} I_{\omega 2}^{(l-1)} + 33k_{12}d_{30}I_{\omega 3}^{(l-1)}; \\
\Phi_{w12}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{21}{2}k_{12}d_{30}A_1^{(l-2)}; \quad \Phi_{w22}^{(l-2)}(x, y) = 33k_{12}d_{30}B_1^{(l-2)} + \frac{63}{hd_{20}} A_1^{(l-2)}; \\
\Phi_{w31}^{(l-1)}(x, y) &= G_0 \left(\frac{\partial\Phi_{1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) - \frac{3G_0}{7} \left(\frac{\partial\Phi_{3x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{3y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) - \\
&\quad - 5(k_1\Phi_{sx2}^{(l-1)} + k_2\Phi_{sy2}^{(l-1)}) + 15k_{12}d_{30}I_{\omega 2}^{(l-1)} - \frac{330}{hd_{20}} I_{\omega 3}^{(l-1)}; \\
\Phi_{w32}^{(l-2)}(x, y) &= \frac{330}{hd_{20}} B_1^{(l-2)} - 15k_{12}d_{30}A_1^{(l-2)}; \\
\Phi_{kx}^{(l-1)} &= -\frac{\alpha_{55}}{G_0} Q_{kx}^{(l-1)}; \quad \Phi_{ky}^{(l-1)} = -\frac{\alpha_{44}}{G_0} Q_{ky}^{(l-1)}, \quad (k=1, 2, 3), \\
A_{ui}^{(l-1)} &= \frac{2i+1}{h} \left(\frac{\partial\Phi_{sxi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{syxi}^{(l-1)}}{\partial y} \right), \quad A_{vi}^{(l-1)} = \frac{2i+1}{h} \left(\frac{\partial\Phi_{s yi}^{(l-1)}}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_{s y xi}^{(l-1)}}{\partial x} \right), \\
\Phi_{sxi}^{(l-1)}(x, y) &= \int_z P_i \Phi_{sx}^{(l-1)}(x, y, z) dz, \quad \Phi_{s yi}^{(l-1)}(x, y) = \int_z P_i \Phi_{sy}^{(l-1)}(x, y, z) dz, \\
\Phi_{syxi}^{(l-1)} &= \int_z P_i \Phi_{syx}^{(l-1)} dz, \quad (i=0, 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Праві частини СДР l -го наближення (6.5), як це впливає із (6.7), лінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Крайові умови в наближенні l по ε мають структурний вигляд (4.18), залежать від кривин оболонки і лінійно залежать від попередніх наближень.

6.1.3. Перетворення СДРР в теорії ортотропних оболонок. Оскільки ліві частини СДР (6.5) в наближенні l по ε з точністю до позначень структурно співпадають із лівими частинами СДР (5.18) для транстропної оболонки в наближенні К0-3, то ні в якому із наближень за малим параметром ε СДР (6.5) не розщеплюється на окремі СДР, що описують симетричне і кососиметричне деформування. Якщо k'_1 і k'_2 не рівні нулю, то із указаної системи не виділяються рівняння ні вихрового ні ПКЕ, ні ВНДС. Якщо ж покласти $k'_1 = k'_2 = 0$, то з цієї системи для квазірівнокривинної пологої оболонки виділяються СДР ВКЕ та система, яка описує внутрішній НДС з ПКЕ.

В 0-му наближенні по ε всі рівняння і залежності структурно співпадають з відповідними рівняннями і залежностями п. 5.2.3 і, якщо використати міркування п. 5.3 щодо кривин, то вони повністю переходять у рівняння і залежності п. 5.3.2, отриманих для ізотропної оболонки.

В l -му наближенні ($l = 1, 2, \dots$) за малим параметром ε компоненти НДС і праві частини СДР мають суттєво іншу структуру, оскільки залежать також від компонент НДС попередніх наближень. Наведемо для цих наближень основні рівняння і співвідношення, ввівши позначення в лівих частинах рівнянь, аналогічні транстропній оболонці та, використавши міркування п. 5.3 щодо параметрів k'_i (поклавши їх рівними нулю) та виразів (5.31), які містять кривини.

6.1.3.1. ДР вихрового КЕ в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за ε . ВКЕ для квазірівнокривинної пологої оболонки визначається згасаючими розв'язками $\psi_k(x, y)$ однорідної СДР, яка відповідає системі неоднорідних ДР 6-го порядку:

$$\begin{aligned} \beta_{113}\psi_1^{(l)} + \beta_{112}\nabla^2\psi_1^{(l)} + \beta_{133}\psi_3^{(l)} &= \psi_{1\xi}^{(l-1)}; \\ \gamma_{333}\psi_2^{(l)} + \gamma_{332}\nabla^2\psi_2^{(l)} &= \psi_{2\xi}^{(l-1)}; \\ \beta_{133}\psi_1^{(l)} + \beta_{333}\psi_3^{(l)} + \beta_{332}\nabla^2\psi_3^{(l)} &= \psi_{3\xi}^{(l-1)}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

де β і γ з індексами – МГП, які залежать від МХ ортотропної оболонки з осередненими ізотропними властивостями, товщини та радіусів кривини. Якщо перейти від ортотропної до ізотропної оболонки, то вказані коефіцієнти рівні відповідно позначеним коефіцієнтам для ізотропної оболонки. Праві частини СДР (6.8) залежать від попередніх $(l-1)$ -го наближень (ГХ і компонент НДС попередніх наближень).

1-е та 3-е однорідні ДР системи (6.8) описують ВКЕ при кососиметричному, а 2-е – при симетричному деформуванні. ВКЕ кососиметричного і симетричного деформування в кожному наближенні незалежні один від одного. Частинні розв'язки неоднорідних ДР (6.8) уточнюють НДС оболонки в наближенні l за ε . Загальні розв'язки СДР (6.8) отримуються аналогічно пп. 2.2, 3.4.2,1 і 3.4.2.2.

6.1.3.2. Рівняння ВНДС з ПКЕ в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за ε . Форми загальних розв'язків. СДР, яка описує ВНДС з ПКЕ для квазірівнокривинної пологої оболонки при $k'_1 = 0, k'_2 = 0$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{111} u_{0,xx}^{(l)} + \gamma_{112} u_{0,yy}^{(l)} + \gamma_{121} v_{0,xy}^{(l)} + \gamma_{131} \varphi_{2,x}^{(l)} + k_{1w1} w_{1,x}^{(l)} + \gamma_{151} w_{2,x}^{(l)} + k_{1w3} w_{3,x}^{(l)} = D_{1\xi}^{(l-1)}; \\
& \gamma_{121} u_{0,xy}^{(l)} + \gamma_{112} v_{0,xx}^{(l)} + \gamma_{111} v_{0,yy}^{(l)} + \gamma_{131} \varphi_{2,y}^{(l)} + k_{2w1} w_{1,y}^{(l)} + \gamma_{151} w_{2,y}^{(l)} + k_{2w3} w_{3,y}^{(l)} = D_{2\xi}^{(l-1)}; \\
& k_{1w1} u_{0,x}^{(l)} + k_{2w1} v_{0,y}^{(l)} + \beta_{151} \varphi_1^{(l)} + k_{5w1} \varphi_2^{(l)} + \beta_{351} \varphi_3^{(l)} + \\
& + (\beta_{551} \nabla^2 + r_{1w1}) w_1^{(l)} + r_{1w2} w_2^{(l)} + (\beta_{561} \nabla^2 + r_{1w3}) w_3^{(l)} = D_{9\xi}^{(l-1)}; \\
& \gamma_{151} \varphi_0^{(l)} + k_{1w} \varphi_1^{(l)} + \gamma_{351} \varphi_2^{(l)} + k_{7w2} \varphi_3^{(l)} + \\
& + r_{1w2} w_1^{(l)} + (\gamma_{551} \nabla^2 + \gamma_{553} + r_{2w2}) w_2^{(l)} + r_{2w3} w_3^{(l)} = D_{10\xi}^{(l-1)}; \quad (6.9) \\
& k_{1w3} \varphi_0^{(l)} + \beta_{161} \varphi_1^{(l)} + k_{2w} \varphi_2^{(l)} + \beta_{361} \varphi_3^{(l)} + \\
& + (\beta_{561} \nabla^2 + r_{1w3}) w_1^{(l)} + r_{2w3} w_2^{(l)} + (\beta_{661} \nabla^2 + \beta_{663} + r_{3w3}) w_3^{(l)} = D_{11\xi}^{(l-1)}; \\
& \beta_{113} \varphi_1^{(l)} + \beta_{111} \nabla^2 \varphi_1^{(l)} + \beta_{133} \varphi_3^{(l)} + \beta_{131} \nabla^2 \varphi_3^{(l)} + \beta_{151} \nabla^2 w_1^{(l)} + k_{3w2} \nabla^2 w_2^{(l)} + \beta_{161} \nabla^2 w_3^{(l)} = D_{3,4\xi}^{(l-1)}; \\
& \gamma_{131} \nabla^2 \varphi_0^{(l)} + \gamma_{333} \varphi_2^{(l)} + \gamma_{331} \nabla^2 \varphi_2^{(l)} + k_{5w1} \nabla^2 w_1^{(l)} + \gamma_{351} \nabla^2 w_2^{(l)} + k_{5w3} \nabla^2 w_3^{(l)} = D_{5,6\xi}^{(l-1)}; \\
& \beta_{133} \varphi_1^{(l)} + \beta_{131} \nabla^2 \varphi_1^{(l)} + \beta_{333} \varphi_3^{(l)} + \beta_{331} \nabla^2 \varphi_3^{(l)} + \beta_{351} \nabla^2 w_1^{(l)} + k_{7w2} \nabla^2 w_2^{(l)} + \beta_{361} \nabla^2 w_3^{(l)} = D_{7,8\xi}^{(l-1)},
\end{aligned}$$

де функції з індексом ξ унизу залежать від НДС 0-го – $(l-1)$ -го наближень.

Це система 16-го порядку, яка визначає взаємозалежні ВНДС і ПКЕ. Тобто, кривини оболонки взаємопов'язують ВНДС та ПКЕ.

Виражаючи із третього – п'ятого ДР (6.9) функції $\varphi_1^{(l)}, \varphi_2^{(l)}, \varphi_3^{(l)}$ через функції $u_0^{(l)}, v_0^{(l)}, w_1^{(l)}, w_2^{(l)}, w_3^{(l)}$ та їх похідні, одержимо:

$$\varphi_k^{(l)}(x, y) = \lambda_{u0} u_{0,x}^{(l)} + \lambda_{v0} v_{0,y}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 (\lambda_{2ki} \nabla^2 w_i^{(l)} + \lambda_{0ki} w_i^{(l)}) + \lambda_{k\xi}^{(l-1)}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (6.10)$$

де $\lambda_{u0}, \lambda_{v0}, \lambda_{2ki}, \lambda_{0ki}$ – МГС; $\lambda_{k\xi}^{(l-1)}$ – функції від складових компонент НДС до $(l-1)$ -го наближення включно.

З урахуванням (6.10) перші два і останні три ДР системи (6.19) зведені до СДР п'яти неоднорідних ДР 16-го порядку відносно $u_0^{(l)}, v_0^{(l)}, w_1^{(l)}, w_2^{(l)}, w_3^{(l)}$:

$$P_{iu0}u_0^{(l)} + P_{iv0}v_0^{(l)} + P_{iw1}w_1^{(l)} + P_{iw2}w_2^{(l)} + P_{iw3}w_3^{(l)} = P_{ipq}^{(l)} + P_{i\xi}^{(l-1)}, \quad (i=1, 2, \dots, 5), \quad (6.11)$$

де P_{iu0}, \dots, P_{iw3} – диференціальні оператори, які не залежать від номера наближення і співпадають з відповідними операторами системи (5.34) для ізотропної оболонки; $P_{ipq}^{(l)}$ – функції від зовнішнього навантаження у наближенні l ; $P_{i\xi}^{(l-1)}$ – функції попередніх $(l-1)$ -го наближень. Для СДР (6.11) побудовані операторним методом форми загальних розв'язків в кожному наближенні, які мають рекурентний вигляд. В наближенні l за ε :

$$\begin{aligned} u_0^{(l)}(x, y) &= P_{11}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{i1}^0 D_{ir}^{(l-1)}(x, y); \\ v_0^{(l)}(x, y) &= P_{12}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{i2}^0 D_{ir}^{(l-1)}(x, y); \\ w_{k-2}^{(l)}(x, y) &= P_{1k}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^5 P_{ik}^0 D_{ir}^{(l-1)}(x, y), \quad (k=3, 4, 5), \end{aligned} \quad (6.12)$$

де P_{ik}^0 – ад'юнкти системи (6.11); $D_{10}(x, y)$ – загальний розв'язок однорідного ДР

$$P_0 D_1^{(l)}(x, y) = 0; \quad (6.13)$$

$D_{1r}^{(l-1)}(x, y), \dots, D_{5r}^{(l-1)}(x, y)$ – частинні розв'язки неоднорідних ДР

$$P_0 D_i^{(l)}(x, y) = P_{i\xi}^{(l-1)}; \quad (6.14)$$

в l -му наближенні за ε , які залежать від компонент НДС попередніх $(l-1)$ наближень. В (6.13) і (6.14) P_0 – диференціальний визначник системи (6.11).

Складові компонент переміщень $u_1^{(l)}, v_1^{(l)}, u_2^{(l)}, v_2^{(l)}, u_3^{(l)}, v_3^{(l)}$ визначаються із третього – восьмого ДР системи (6.5) і з урахуванням (5.31) мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_k^{(l)}(x, y) &= \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,x}^{(l)} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,x}^{(l)} + \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,y}^{(l)} + \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,y}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{kwi} w_{i,x}^{(l)} + \lambda_{uk\xi}^{(l-1)}; \\ v_k^{(l)}(x, y) &= \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,y}^{(l)} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,y}^{(l)} - \lambda_{k\psi 1} \psi_{1,x}^{(l)} - \lambda_{k\psi 3} \psi_{3,x}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{kwi} w_{i,y}^{(l)} + \lambda_{vk\xi}^{(l-1)}, \quad (k=1, 3); \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(l)}(x, y) &= \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2,x}^{(l)} + \lambda_{2\psi 2} \psi_{2,y}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{2wi} w_{i,x}^{(l)} + \lambda_{u2\xi}^{(l-1)}; \\ v_2^{(l)}(x, y) &= \lambda_{2\varphi 2} \varphi_{2,y}^{(l)} - \lambda_{2\psi 2} \psi_{2,x}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{2wi} w_{i,y}^{(l)} + \lambda_{v2\xi}^{(l-1)}, \end{aligned}$$

де $\lambda_{k\varphi 1}, \dots, \lambda_{2wi}$ – МГП; $\lambda_{uk\xi}^{(l-1)}, \dots, \lambda_{v2\xi}^{(l-1)}$ – функції компонент НДС 0-го – $(l-1)$ -го наближень. Компоненти НДС визначаються через складові компонент переміщень за формулами (4.5) з урахуванням (6.2).

6.2. Метод збурень лінійно пружних властивостей в МТ нетонких пологих ФНО

З позицій тривимірної ТП розглядається нетонка фізично нелінійна за Каудерером однорідна прямокутна в плані $(a \times b)$ полого оболонка сталої товщини h в прямокутній системі координат $Oxyz$ (рис. 5.1). Граничні умови задовольняють (3.1)–(3.4). Залежності між деформаціями і напруженнями зображаються у вигляді (4.34) з урахуванням (4.35).

6.2.1. Основні співвідношення. Фізичні залежності після виділення малого параметра $\varepsilon = 1/g_2$ виражаються формулами (4.36), (4.37). ВР Рейснера для нелінійно пружної оболонки без урахування об'ємних сил має вигляд (3.18), приймаючи до уваги (4.36), (4.37), (6.1). Розглядаючи далі компоненти НДС в наближенні К0-3 за поліномами Лежандра та розвиваючи їх за малим параметром ε , одержимо вирази (4.5) для компонент НДС з урахуванням (6.2).

Розвиваючи функції $\omega_2(x; y), \dots, Q_{3y}(x; y), X_v(x, y), Y_v(x, y), Z_v(x, y), p(x; y), q(x; y)$ у ряди за параметром ε , отримуються співвідношення (4.10).

Виконавши асимптотичне розщеплення по ε у ВР Рейснера, одержуються для всіх компонент напружень залежності вигляду (6.2), тільки $s_{z0}^{(l)}(x, y), \dots, s_{z5}^{(l)}(x, y), t_{x0}^{(l)}(x, y), \dots, t_{x4}^{(l)}(x, y)$ знаходяться на основі (6.3), в яких

$$\begin{aligned} \omega_1^{(l)}(x, y) &= q^{(l)}(x, y); \omega_2^{(l)}(x, y) = \sum_{k=1}^3 q_{2k} w_k^{(l)}(x, y) + e_{20} \varphi_0^{(l)}(x, y) + e_{22} \varphi_2^{(l)}(x, y) + \\ &\quad + e_{2p} p^{(l)}(x, y) + e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}(x, y); \\ \omega_3^{(l)}(x, y) &= q_{32} w_2^{(l)}(x, y) + q_{33} w_3^{(l)}(x, y) + e_{31} \varphi_1^{(l)}(x, y) + e_{33} \varphi_3^{(l)}(x, y) + \\ &\quad + e_{3q} q^{(l)}(x, y) + e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}(x, y); \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$Q_{kx}^{(l)}(x, y) = h_{k1}w_{1,x}^{(l)} + h_{k3}w_{3,x}^{(l)} + \sum_{i=0}^3 l_{kxi}u_i^{(l)} + b_0GI_{qkx}^{(l-1)}(x, y), \quad (k = 1, 3);$$

$$Q_{2x}^{(l)}(x, y) = h_{22}w_{2,x}^{(l)} + \sum_{i=1}^3 l_{2xi}u_i^{(l)} + b_0GI_{q2x}^{(l-1)}, \quad (x, y; u_i \rightarrow v_i; k_1 \rightarrow k_2; k'_1 \rightarrow k'_2);$$

$$e_{2\omega\xi} = 105a_0 \llbracket v-1 \rrbracket (hd_{20} \llbracket -v \rrbracket); \quad e_{3\omega\xi} = 770a_0 \llbracket v-1 \rrbracket (hd_{20} \llbracket -v \rrbracket),$$

де сталі $a_0, b_0, q_{21}, \dots, q_{33}, e_{20}, \dots, e_{3q}, h_{11}, \dots, h_{22}, l_{1x0}, \dots, l_{2x3}$ такі ж як і для ізотропної оболонки, а функції $I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}, I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}, I_{qkx}^{(l-1)}, I_{qky}^{(l-1)}$ знаходяться за формулами (4.39).

Функції $s_{x0}^{(l)}(x, y), s_{y0}^{(l)}(x, y), \dots, s_{x5}^{(l)}(x, y), s_{y5}^{(l)}(x, y), t_{yx0}^{(l)}(x, y), \dots, t_{yx3}^{(l)}(x, y)$ визначаються так:

$$s_{xk}^{(l)}(x, y) = d_0(u_{k,x}^{(l)} + k_1w_{k+1}^{(l)} + v(v_{k,y}^{(l)} + k_2w_{k+1}^{(l)})) + d_{10}s_{zk}^{(l)}, \quad (k = 0, 1, 2);$$

$$s_{x3}^{(l)}(x, y) = d_0(u_{3,x}^{(l)} + v v_{3,y}^{(l)}) + d_{10}s_{z3}^{(l)}; \quad s_{xi}^{(l)}(x, y) = d_{10}s_{zi}^{(l)}, \quad (i = 4, 5), \quad (6.17)$$

$$(x, y; u, v; k_1 \rightarrow k_2; k'_1 \rightarrow k'_2); \quad t_{yxk}^{(l)}(x, y) = G(u_{k,y}^{(l)} + v_{k,x}^{(l)}), \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

6.2.2. Диференціальні рівняння рівноваги та крайові умови. Розвиваючи компоненти НДС фізично нелінійної оболонки у ряди за параметром ε і виконуючи у ВРР асимптотичне розщеплення по степеням цього параметра, одержуються ДР рівноваги та крайові умови в довільному наближенні по ε .

Не зупиняючись на складних і громіздких математичних викладках, наведемо отриману рекурентну СДР рівноваги фізично нелінійної пологої оболонки в l -му наближенні, яка має вигляд (6.5). Диференціальні оператори $D_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 11$) дорівнюють відповідним диференціальним операторам для ізотропної оболонки. Праві частини СДР (6.5) мають такий вигляд:

$$D_{1p}^{(l)} = \gamma_{u0} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{1q}^{(l)} = 0, \quad D_{2p}^{(l)} = \gamma_{u0} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{2q}^{(l)} = 0, \quad D_{3p}^{(l)} = 0, \quad D_{3q}^{(l)} = \beta_{u1} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x},$$

$$D_{4p}^{(l)} = 0, \quad D_{4q}^{(l)} = \beta_{u1} q_{,y}^{(l)}, \quad D_{5p}^{(l)} = \gamma_{u2} p_{,x}^{(l)}, \quad D_{5q}^{(l)} = 0, \quad D_{6p}^{(l)} = \gamma_{u2} p_{,y}^{(l)}, \quad D_{6q}^{(l)} = 0, \quad D_{7p}^{(l)} = 0,$$

$$D_{4p}^{(l)} = 0, \quad D_{4q}^{(l)} = \beta_{u1} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{5p}^{(l)} = \gamma_{u2} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{5q}^{(l)} = 0, \quad D_{6p}^{(l)} = \gamma_{u2} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{6q}^{(l)} = D_{7p}^{(l)} = 0,$$

$$D_{7q}^{(l)} = \beta_{u3} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x}, \quad D_{8p}^{(l)} = 0, \quad D_{8q}^{(l)} = \beta_{u3} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial y}, \quad D_{9p}^{(l)} = k_{9p} p^{(l)}, \quad D_{9q}^{(l)} = \beta_{w1} q^{(l)},$$

$$\begin{aligned}
D_{10p}^{(l)} &= \gamma_{w2} p^{(l)}, \quad D_{10q}^{(l)} = k_{10q} q^{(l)}, \quad D_{11p}^{(l)} = k_{11p} p^{(l)}, \quad D_{11q}^{(l)} = \beta_{w3} q^{(l)}; \\
D_{1\xi}^{(l-1)} &= \frac{hd_{10}}{10} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}}{\partial x} - k_1' b_0 G I_{q1x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx0}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx0}^{(l-1)}}{\partial y}, \quad (6.18) \\
D_{3\xi}^{(l-1)} &= \frac{hd_{10}}{70} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} - \frac{k_1' b_0 G}{5} I_{q2x}^{(l-1)} + \frac{2b_0 G}{h} I_{q1x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx1}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx1}^{(l-1)}}{\partial y}, \\
D_{5\xi}^{(l-1)} &= -\frac{hd_{10}}{35} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{k_1' b_0 G}{5} \left(I_{q1x}^{(l-1)} - \frac{3}{7} I_{q3x}^{(l-1)} \right) + \frac{6b_0 G}{5h} I_{q2x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx2}^{(l-1)}}{\partial y}, \\
D_{7\xi}^{(l-1)} &= -\frac{hd_{10}}{105} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{3k_1' b_0 G}{35} I_{q2x}^{(l-1)} + \frac{6b_0 G}{7h} I_{q3x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx3}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx3}^{(l-1)}}{\partial y}, \\
&\quad (D_{i\xi} \rightarrow D_{i+1\xi}; \quad x, y; \quad k_1' \rightarrow k_2'; \quad i = 1, 3, 5, 7); \\
D_{9\xi}^{(l-1)} &= b_0 G \left(\frac{\partial I_{q1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{hd_{10} k_{12}}{10} e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx0}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy0}^{(l-1)}, \\
D_{10\xi}^{(l-1)} &= \frac{b_0 G}{5} \left(\frac{\partial I_{q2x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q2y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{hd_{10} k_{12}}{70} e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)} + \frac{e_{2\omega\xi}}{5} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx1}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy1}^{(l-1)}, \\
D_{11\xi}^{(l-1)} &= -\frac{b_0 G}{5} \left(\frac{\partial I_{q1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3b_0 G}{35} \left(\frac{\partial I_{q3x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q3y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3}{35} e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)} - \\
&\quad - \frac{hd_{10} k_{12}}{35} e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx2}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy2}^{(l-1)},
\end{aligned}$$

де $\gamma_{u0}, \gamma_{u2}, \gamma_{w2}, \beta_{u1}, \beta_{u3}, \beta_{w1}, \beta_{w3}, k_{9p}, k_{10q}, k_{11p}$ – МГП (В.1) для ізотропної оболонки. У співвідношеннях (6.18) функції $\Phi_{sxm}^{(l-1)}(x, y)$, $\Phi_{sym}^{(l-1)}(x, y)$, $\Phi_{syxm}^{(l-1)}(x, y)$ знаходяться згідно з (4.41), ураховуючи (4.40).

На основі (4.40) та (4.41) дістанемо, що праві частини (6.18) СДР для фізично нелінійної оболонки в l -му наближенні ($l = 1, 2, \dots$) так же, як і для пластини, нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень і тому складність розв'язування цієї системи зростає із збільшенням кількості наближень.

Крайові умови в наближенні l по ε мають вигляд (4.18) з урахуванням (4.19), (4.40), (4.41), залежать від кривин оболонки згідно (6.17) і лінійно від НДС l -го наближення та нелінійно – від попередніх наближень.

Оскільки з використанням методу збурень СДР і крайові умови для нелінійно пружних оболонок структурно співпадають з відповідними рівняннями і умовами

для ортотропних оболонок в довільному наближенні l за малим параметром ε , то і всі міркування, перетворення СДР, форми їх загальних розв'язків та висновки аналогічні. Винятком є тільки те, що всі функції, які визначаються компонентами НДС від 0-го до $(l-1)$ -го наближення і входять до співвідношень і рівнянь l -го наближення, залежать від цих компонент нелінійно на відміну від ортотропних оболонок, де ці залежності лінійні. Тому складність розв'язування задач методом збурень для фізично нелінійних оболонок значно вища, ніж для анізотропних оболонок.

СДР для ФНО типу (6.5) не розщеплюється на окремі системи симетричного і косиметричного деформування. При не рівних нулю k'_1 і k'_2 із указаної системи не виділяються ДР ні ВКЕ, ні ПКЕ, ні ВНДС. Якщо ж прийняти $k'_1 = k'_2 = 0$, то для квазірівнокривинної пологої оболонку виділяються рівняння ВКЕ та СДР, яка описує ВНДС з ПКЕ.

В 0-му наближенні за параметром ε всі рівняння і залежності повністю переходять у рівняння і залежності п. 5.3.2, 5.3.3, отриманих для ізотропної оболонки.

В l -му наближенні ($l = 1, 2, \dots$) за малим параметром ε компоненти НДС і праві частини ДР залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Ввівши позначення в лівих частинах ДР, аналогічні транслопній оболонці та використавши спрощення п. 5.3.2 щодо параметрів k'_i (поклавши їх рівними нулю), приймаючи до уваги (5.31), одержуються рівняння ВКЕ та ВНДС із ПКЕ.

СДР вихрового КЕ в наближенні $l = 1, 2, \dots$ за параметром ε визначається функціями $\psi_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) і описується однорідною СДР 6-го порядку (6.8). Частинні розв'язки неоднорідної СДР (6.8) уточнюють ВНДС. Праві частини СДР (6.8) нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень, а коефіцієнти β і γ з нижніми індексами – МГП, які рівні відповідно позначеним МГП для ізотропної оболонки. Як і в методі збурень, для ортотропної оболонки ДР ВКЕ косиметричного і симетричного деформування розділяються. Аналогічно отримуються загальні розв'язки СДР (6.8).

СДР l -го наближення, яка описує ВНДС із ПКЕ при $k'_1 = 0$, $k'_2 = 0$ має вигляд (6.9), де функції з індексом ξ унизу нелінійно залежать від компонент НДС

попередніх наближень. Це система 16-го порядку взаємозв'язаних рівнянь, які описують ВНДС з ПКЕ. Кривини оболонки пов'язують ВНДС та ПКЕ.

Функції $\varphi_k^{(l)}(x, y)$ визначаються згідно з (6.10), де $\lambda_{u0}, \dots, \lambda_{oki}$ – МГС ізотропної оболонки. Перетворена СДР має форму (6.11), в якій P_{iu0}, \dots, P_{iw3} – диференціальні оператори СДР (5.34) для ізотропної оболонки. В (6.10) і (6.11) – $\lambda_{k\xi}^{(l-1)}$, $P_{i\xi}^{(l-1)}$ – нелінійні функції компонент НДС попередніх $(l-1)$ -х наближень. Складові переміщень знаходяться згідно з (6.12), (6.15), де коефіцієнти без індексу ξ унизу – МГП для ізотропної оболонки, а функції з індексом ξ унизу нелінійно залежать від компонент НДС попередніх $(l-1)$ -х наближень. Компоненти НДС з урахуванням перших l наближень за ε визначаються через складові компонент переміщень за формулами (4.5) з урахуванням (6.1), (6.2), (6.16), (6.17).

6.3. Метод тригонометричних рядів

Розглянемо застосування методу одинарних тригонометричних рядів для розв'язування граничних задач для пологих ФНО у наближенні К0-3 за поліномами Лежандра і в довільному наближенні l за ε . Вважатимемо, що при $y=0, y=b$ виконуються крайові умови вільного обпирання, які відповідно до (4.18) в наближенні l по ε мають вигляд (4.43), (4.44):

$$u_k^{(0)}(x; y=0, b) = 0; w_k^{(0)}(x; y=0, b) = 0; s_{yk}^{(0)}(x; y=0, b) = 0; \quad (6.19)$$

$$u_k^{(l)}(x; y=0, b) = 0, (u_k^{(l)} \rightarrow w_k^{(l)}); \frac{h}{2k+1} s_{yk}^{(l)}(x; y=0, b) = \Phi_{syk}^{(l-1)}(x; y=0, b), \quad (6.20)$$

де функції s з нижніми і верхніми індексами визначаються згідно з (6.17).

Навантаження $q(x, y)$, $p(x, y)$ зображуємо одинарними тригонометричними рядами (3.172) і (3.185).

В 0-му наближенні по ε , як уже було зазначено, задача для фізично нелінійної оболонки зводиться до задачі для лінійно пружної ізотропної оболонки, яка отримується із задачі для трансропної оболонки при МГХ, що відповідає

ізотропному матеріалу. В цьому наближенні складові компонент переміщень, напружень та функції, що входять у них, мають в одинарних тригонометричних рядах структурний вигляд відповідно п. 5.4.1. Крайові умови (6.19) при цьому виконуються. Функції, що входять множниками при синусах і косинусах у цих залежностях—функції 0-го наближення, що містять 22 сталих інтегрування, які знаходяться аналогічно п. 5.4.1 з урахуванням крайових умов при $x = 0, x = a$.

Показано, що і для ФНО функції, що нелінійно залежать від компонент НДС 0-го наближення, мають таку ж саму структуру тригонометричних рядів, що і однойменні функції для ФНП, тобто, будуть справедливими розвинення (4.45), (4.46), в яких множники при синусах та косинусах є відомими функціями нульового наближення.

Праві частини ДР (6.5) (6.8) і (6.11) для нелінійно пружної оболонки в 1-му наближенні за параметром ε мають такий вигляд:

$$D_{k\xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{k\xi n}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (k = 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11);$$

$$D_{k\xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{k\xi n}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 2, 4, 6, 8); \quad P_{i\xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{i\xi n}^{(0)}(x) S_{ny}, \quad (6.21)$$

$$(i = 1, 3, 4, 5); \quad P_{2\xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2\xi n}^{(0)}(x) C_{ny}; \quad \psi_{k\xi}^{(0)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{k\xi n}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

де функції від x – відомі функції 0-го наближення.

Ураховуючи однаковість структур ДР в 0-му і 1-му наближеннях, одержується наступний висновок: загальні та частинні розв'язки ДР 0-го та 1-го наближень в одинарних тригонометричних рядах структурно однакові. На основі цього отримуються такі загальні та частинні розв'язки в 1-му наближенні:

$$\psi_k^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn}^{(1)}(x) C_{ny}; \quad \psi_{kr}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{krn}^{(0)}(x) C_{ny}, \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$D_{10}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{10n}^{(1)}(x) S_{ny}; \quad D_{ir}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{irn}^{(1)}(x) S_{ny}, \quad (i = 1, 3, 4, 5); \quad (6.22)$$

$$D_{2r}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2rn}^{(1)}(x) C_{ny},$$

де для кожного значення n функції $\psi_{kn}^{(1)}(x)$ ($k=1,3$) містять по 4-и сталих інтегрування, $\psi_{2n}^{(1)}(x)$ – дві стали; $D_{10n}^{(1)}(x)$ – 16 сталих. Оскільки вказані розв'язки за структурою аналогічні 0-му наближенню, то і складові НДС в одинарних тригонометричних рядах у 1-му наближенні за структурою аналогічні 0-му наближенню; 22 сталих інтегрування знаходяться із крайових умов (4.18) при $x=0, x=a$:

$$\int_{(s)} \left\{ N_{0u}^{(1)} \delta u_o^{(1)} + N_{0v}^{(1)} \delta v_0^{(1)} + \sum_{k=1,2}^3 (M_{ku}^{(1)} \delta u_k^{(1)} + M_{kv}^{(1)} \delta v_k^{(1)} + Q_{kw}^{(1)} \delta w_k^{(1)}) \right\} ds = 0, \quad (6.23)$$

де

$$N_{0u}^{(1)} = h s_{x0}^{(1)} - \Phi_{sx0}^{(0)}; \quad N_{0v}^{(1)} = h t_{yx0}^{(1)} - \Phi_{syx0}^{(0)}; \quad M_{ku}^{(1)} = \frac{h}{2k+1} s_{xk}^{(1)} - \Phi_{sxk}^{(0)}, \quad (6.24)$$

$$M_{kv}^{(1)} = \frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(1)} - \Phi_{syxk}^{(0)}, \quad Q_{kw}^{(1)} = \frac{h}{2k-1} t_{xk-1}^{(1)}, \quad (k=1,2,3).$$

Тут $\Phi_{sx0}^{(0)}, \Phi_{syx0}^{(0)}, \Phi_{sxk}^{(0)}, \Phi_{syxk}^{(0)}$ – відомі функції (4.46) 0-го наближення від x, y , які в інтегралі (6.23) беруться при $x=0, x=a$, тобто це відомі функції від однієї змінної y . Функції $s_{x0}^{(1)}, t_{yx0}^{(1)}, s_{xk}^{(1)}, t_{yxk}^{(1)}, t_{xk}^{(1)}$ (мають структуру аналогічну 0-му наближенню (4.45)) – від двох змінних x, y , у які входять невідомі стали інтегрування. В (6.23) ці функції також приймаються при $x=0, x=a$, отже це функції однієї змінної y , що містять 22 невідомих сталих. Якщо на краях $x=0, x=a$ оболонки задані тільки силові фактори, а на компоненти переміщень не накладено ніяких умов, то, оскільки тригонометрична структура кожного доданку у виразах (6.24) однакова, одержуємо, що стали інтегрування визначаються із ЛАР, які отримуються прирівнюванням до нуля множників при варіаціях компонент переміщень. Якщо ж при $x=0, x=a$ задані компоненти переміщень, то стали знаходяться із 22 – х умов (по одній на кожному краї для $u_k^{(1)}, v_k^{(1)}$ ($k=0,1,2,3$); $w_i^{(l)}$ ($i=1,2,3$)).

В наближеннях за ε ($l=2,3,\dots$) структура функцій, розв'язків, складових компонент НДС аналогічна (4.45), (4.46), (6.21), (6.22). Крайові умови (6.20) виконуються. Умови на краях $x=0, x=a$ визначаються ДР (6.23) з урахуванням

(6.24), в яких замість верхнього індексу «1» записується індекс « l », а замість індексу «0» – індекс « $l-1$ ». Отже, отримано рекурентний процес визначення НДС ФНО.

Розглянемо тепер застосування методу подвійних тригонометричних рядів при розв'язуванні граничних задач для пологих ФНО при деформуванні з урахуванням обтискання, який описуються ДР типу (6.5) з урахуванням (6.16)–(6.18). Граничні умови на лицевих поверхнях (3.2), а навантаження $q(x, y)$ і $p(x, y)$ розвинені в подвійні тригонометричні ряди.

Показано, що і для пологої ФНО будуть справедливими крайові умови типу (4.51), а також залежності (4.52) для функцій нульового і інших наближень. Праві частини ДРР у всіх наближеннях по ε матимуть вигляд (4.53), а складові переміщень зображатимуться у формі (4.54). Структурно справедливими будуть також співвідношення (4.55). Послідовність визначення НДС аналогічна ФНП.

6.4. Основні співвідношення і рівняння в циліндричній системі координат

Основні рівняння в циліндричній системі координат наведені в дод. Г.2.

6.5. Числові результати

6.5.1. Числові результати для фізично нелінійних пологих оболонки.

Для з'ясування якісного впливу фізичної нелінійності розглянемо циліндричний згин ФНО, вільно обіпертої вздовж довгих країв $x=0, a$ при дії кососиметричного поперечного навантаження $q(x)$ (граничні умови (3.2) при $p(x)=0$). Компоненти НДС залежатимуть від x і z . При $x=0, a$ виконуються умови (4.51). СДРР має вигляд (6.5), в якій, урахувавши варіаційний метод їх одержання, потрібно взяти 1-е, 3-е, 7-е, 9-е та 11-е ДР, які відповідають у перетвореному ВР Рейснера рівностям нулю множників при варіаціях $\delta u_0^{(l)}, \delta u_1^{(l)}, \delta u_3^{(l)}, \delta w_1^{(l)}, \delta w_3^{(l)}$.

Далі, як і для ФНП, вводяться аналогічні спрощення при визначенні правих частин ДРР в наближеннях $l=1, 2, \dots$ за малим параметром ε , а саме: в правих

частинах ураховуються тільки ті доданки, що залежать від складових $u_0^{(l-1)}(x)$, $u_1^{(l-1)}(x)$, $w_1^{(l-1)}(x)$, а доданки з $u_3^{(l-1)}(x)$, $w_3^{(l-1)}(x)$, нехтуються.

Не зупиняючись на проміжних викладках, аналогічних п. 4.3.3 для ФНП, наведемо остаточні результати.

Кососиметричне поперечне синусоїдальне навантаження $q(x)$ зображується у вигляді $q(x) = q_m S_{mx} (q_m - const)$. В наближенні $l = 0$; $k = 0, 1, 3$ складові переміщень $u_0^{(0)}(x)$, $u_1^{(0)}(x)$, $u_3^{(0)}(x)$, $w_1^{(0)}(x)$, $w_3^{(0)}(x)$ відшукуватимемо у вигляді:

$$u_k^{(0)}(x) = A_{k0m} C_{mx}, (k = 0, 1, 3); w_k^{(0)}(x) = C_{k0m} S_{mx}, (k = 1, 3), \quad (6.25)$$

де A_{k0m} , C_{k0m} – невідомі сталі, які знаходяться із системи п'ятьох ЛАР, до якої зведеться система вказаних вище рівнянь (6.5) для ізотропної оболонки.

Після знаходження значень сталих A_{k0m} , C_{k0m} визначаються праві частини системи вказаних ДР (6.5) у наближенні $l = 1$; $k = 0, 1, 3$. Вони мають вигляд:

$$D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi 0sc}(x) C_{mx}, (i = 1, 3, 7); D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi 0sc}(x) S_{mx}, (i = 9, 11), \quad (6.26)$$

де

$$D_{i\xi 0sc}(x) = D_{i0sc} S_{mx}^2 + D_{i0c} C_{mx}^2, (i = 1, 3, 7); D_{i\xi 0sc}(x) = D_{i0s} S_{mx}^2 + D_{i0cs} C_{mx}^2, (i = 9, 11), \\ (D_{i0sc}, D_{i0c}, D_{i0s}, D_{i0cs} - \text{МГС}).$$

Розв'язок СДР (6.5) в наближенні $l = 1$; $k = 0, 1, 3$ шукається у формі:

$$u_k^{(1)}(x) = A_{k1m} C_{mx}, (k = 0, 1, 3); w_k^{(1)}(x) = C_{k1m} S_{mx}, (k = 1, 3), \quad (6.27)$$

де A_{k1m} , C_{k1m} – невідомі коефіцієнти, які знаходяться із вказаної системи з урахуванням (6.26) і (6.27). Після перетворень одержується система вигляду (4.63), яка після осереднення правих частин рівнянь, зводиться до п'ятьох ЛАР відносно шуканих коефіцієнтів. Подальший алгоритм визначення НДС і одержання числових результатів для ФНО аналогічні п. 4.3.3. Компоненти НДС у наближенні К013 і наближенні $l = 0, 1$ визначаються за формулами вигляду (4.64).

На рис. Г.1 – Г.6 наведені графіки залежностей компонент НДС від поперечної координати для ФНО при $q_m = 15$ МПа, $m = 1$, а на рис. Г.7 – Г.9 – при $m = 9$ в наближенні $l = 0, 1$ за ε і з урахуванням наближення К013 за поліномами Лежандра (криві $\text{---}\bigcirc\text{---}$). Для порівняння зображені також графіки за фізично лінійною (ФЛ) теорією в НК0135. В табл. Г.1–Г.4 наведені безрозмірні компоненти НДС $(\tilde{\sigma}_x = \sigma_x(x, z)/q(x), \quad \tilde{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}(x = a/4, z)/q(x), \quad \tilde{U} = U(x = a/4, z)E/(q(x)h), \quad \tilde{W} = W(x, z)E/(q(x)h))$ для ФНО із чистої міді, а в табл. Г.5 – із мартенівської сталі при циліндричному згині для різних ГХ оболонки.

У цих таблицях у 2-й–5-й колонках наведені значення без урахування фізичної нелінійності у різних наближеннях (за фізично лінійною теорією); у 6-й, 8-й колонках – за фізично нелінійною (ФН) теорією в наближенні $l = 0, 1$ по ε і з урахуванням НК013 за поліномами Лежандра. В 7-й та 9-й колонках вказано розходження Δ у % між результатами, отриманими за ФН і фізично лінійною (ФЛ) теоріями (для НК0135) по відношенню до лінійної теорії.

Із наведених результатів випливає, що якісні висновки для оболонок аналогічні пластинам (п. 4.3.3). Окрім цього, вплив фізичної нелінійності на НДС мало залежить від кривин середньопологих і сильнопологих оболонок, а величина навантаження може впливати по різному на компоненти НДС в залежності від ГХ (табл. Г.1, Г.4).

6.5.2. Числові результати для транстропних оболонок з використанням методу збурень ізотропних властивостей матеріалу. Для з'ясування ефективності і точності методу збурень розглядається однорідна шарнірно обіперта на краях нетонка транстропна оболонка ($a \times a \times h$), яка знаходиться під дією моногармонічного поперечного навантаження на лицевих поверхнях. Граничні умови (3.2), де $q(x, y), p(x, y)$ зображуються у вигляді (3.194) і (3.201).

Задача розв'язувалась методом збурень в наближенні $l = 0, 1$ за параметром ε і в НК0123 за поліномами Лежандра та безпосередньо згідно п. 5.5. Апробація була виконана при визначенні НДС квадратних в плані оболонок при $m = n = 1$ в широкому діапазоні змінення МГХ при кососиметричному навантаженні ($p_{mn}/q_{mn} = 0$) і при навантаженні на верхній лицевій поверхні ($p_{mn}/q_{mn} = 1$).

В табл. Г.7, Г.8 наведені значення безрозмірних компонент НДС (аналогічні пластинам) за НК0-3 варіанта МТ (4-а та 8-а колонки). В 2-й та 6-й колонках результати в НК03 за поліномами Лежандра з урахуванням нульового наближення за ε ($l = 0$); в 3-й та 7-й колонках результати в НК03 за поліномами Лежандра з урахуванням перших двох наближень за ε ($l = 0,1$), ε ($\varepsilon = (G - G')/G$). Вказані розходження Δ у % для результатів, отриманих при $l = 0,1$; $k = 0, \dots, 3$ та в НК0-3. Верхні значення в цих таблицях наведено при $p_{mn}/q_{mn} = 0$, а нижні – при $p_{mn}/q_{mn} = 1$. Як і для пластин, результати за методом збурень уже в перших двох наближеннях за ε достатньо точно описують НДС трансропних оболонок із матеріалів, МХ яких не суттєво відрізняються від ізотропних (табл. Г.7). Якщо ж МХ суттєво відрізняються від ізотропних (табл. Г.8), то потрібно ураховувати наближення за ε вищих порядків.

6.6. Висновки по розділу

Для пологих ортотропних і фізично нелінійних ізотропних оболонок довільної сталої товщини вирішені наступні проблеми.

1. Уперше побудовано новий варіант МТ нетонких пологих ортотропних і ізотропних ФНО, оснований на ВПР, розвиненні усіх компонент НДС у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра з використанням МВР та в поєднанні з методом збурень пружних властивостей матеріалу.

2. Уперше тривимірна задача ТП в МТ нетонких ортотропних оболонок зведена до нескінченної рекурентної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для оболонок із осередненими ізотропними властивостями. Праві частини отриманих СДР і крайові умови в довільному наближенні за малим фізичним параметром лінійно залежать від НДС попередніх наближень.

3. Уперше тривимірна задача фізично нелінійної ТП в МТ нетонких пологих оболонок зведена до нескінченної рекурентної послідовності лінійних двовимірних крайових задач. Праві частини отриманих СДР з частинними похідними і крайові умови в довільному наближенні за малим фізичним параметром суттєво нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень.

4. Уперше на основі МТ для вказаних оболонок отримані в явному вигляді для довільного наближення за малим параметром основні рівняння в НК0-3, які описують взаємозв'язані ВНДС, ВКЕ і ПКЕ і можуть безпосередньо використовуватися для розв'язання граничних задач в прикладних і практичних цілях.

5. Отримані системи неоднорідних ДР (22-го порядку) в кожному наближенні за ε перетворені і при певних умовах розділені на дві: одна описує ВКЕ і уточнює ВНДС, а інша – визначає взаємозв'язані ВНДС із ПКЕ. Система ВКЕ (система однорідних ДР 6-го порядку) розділена на дві групи ДР: при кососиметричному деформуванні – це СДР 4-го порядку, і при симетричному – ДР 2-го порядку. Частинні розв'язки неоднорідних ДР уточнюють ВНДС. Взаємозв'язана СДР ВНДС з ПКЕ (16-го порядку) розробленою методикою зведена до зручної неоднорідної системи п'яти ДР з однаковими лівими частинами.

6. Уперше на основі МТ побудовано операторним методом форми загальних розв'язків отриманих СДР високого порядку.

7. Розроблено метод розв'язання суттєво неоднорідних СДР у довільному наближенні за малим параметром, оснований на апроксимації правих частин ДР одинарними та подвійними тригонометричними рядами. Побудовані розв'язки крайових задач оболонок в одинарних та подвійних тригонометричних рядах.

8. Виконані з використанням методу збурень ізотропних властивостей числові дослідження НДС пологих транслопних оболонок (для порівняння результатів із прямим розв'язком) указують на ефективність підходу.

9. Досліджено якісно НДС нетонких ФНО за НК13 в задачі циліндричного згину при гармонічному навантаженні в широких межах змінення МГХ. В залежності від МГХ фізична нелінійність може суттєво впливати на компоненти НДС. Вплив фізичної нелінійності на НДС аналогічний п. 8 висновків 4.5 для пластин і мало залежить від змінення кривини середньопологих та сильнопологих оболонок ($R_{1,2}/a \geq 1$).

Наукові результати, наведені в шостому розділі, опубліковано в працях автора [120, 121, 124, 128, 129, 142, 148, 152, 155, 156, 170, 176, 178, 179, 181, 449].

РОЗДІЛ 7

ВАРІАНТ МТ НЕТОНКИХ БАГАТОШАРОВИХ ЛІНІЙНО І НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Розділ присвячено побудові нового варіанта МТ шаруватих (однорідних в межах кожного шару) транстропних і ізотропних фізично нелінійних зао Каудерером пластин і пологих оболонок симетричної та несиметричної структур і розробці методів розв'язання граничних задач на його основі. Варіант МТ оснований на ВПР, методі розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні у ряди за поперечною координатою в межах кожного шару *при допомозі комбінацій поліномів Лежандра*, МВР в поєднанні для фізично нелінійних елементів з МПН.

7.1. Фізично нелінійні багат шарові пологі оболонки несиметричної структури

7.1.1. Постановка проблеми. Досліджується нетонка багат шарова фізично нелінійна за Каудерером полого оболонка товщини h несиметричної структури з товщинами шарів h_i ($1 \leq i \leq j$; j – кількість шарів) і радіусами кривини серединних поверхонь кожного шару R_{1i} , R_{2i} . Для кожного шару вводиться місцева прямокутна система координат $O_i x y z_i$ (рис. 7.1). Осі $O_i x$ та $O_i y$ системи координат напрямлені вздовж сторін a і b плану оболонки. Вісь $O_i z_i$, початок якої належить серединній поверхні i -го шару оболонки, напрямлена вбік опуклості оболонки ($-h_i/2 \leq z_i \leq h_i/2$). Граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z=0) &= (q(x, y) - p(x, y))/2; \quad \sigma_z(z=h) = -(q(x, y) + p(x, y))/2; \\ \sigma_{xz}(z=0, h) &= \sigma_{yz}(z=0, h) = 0, \quad (0 \leq z \leq h). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Граничні умови на бічній поверхні, яку вважатимемо перпендикулярною до серединних поверхонь шарів оболонки, можуть бути довільними статичними, кінематичними або змішаними.

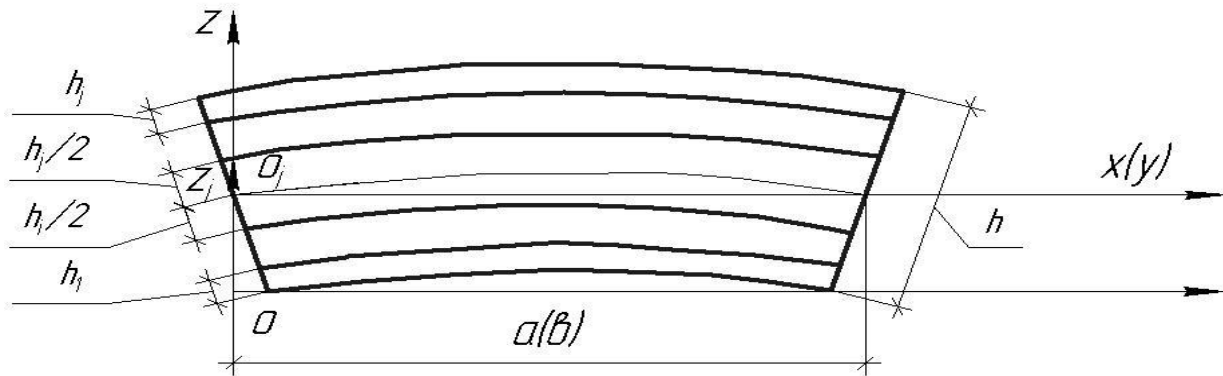


Рис. 7.1. Шарувата полога оболонка.

Нелінійно пружні шари вважаються різними за механічними властивостями. Залежності між деформаціями та напруженнями в i -му шарі зображуються у вигляді суми лінійної і нелінійної складових:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xi}(x, y, z_i) &= [\sigma_{xi}(x, y, z_i) - \nu_i \sigma_{yi}(x, y, z_i)] / E_i - \nu'_i \sigma_{zi}(x, y, z_i) / E'_i + g_{xi}(x, y, z_i, t), \\ &(xi, yi); \quad \gamma_{yxi}(x, y, z_i) = \sigma_{yxi}(x, y, z_i) / G_i + g_{yxi}(x, y, z_i, t); \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zi}(x, y, z_i) &= [\sigma_{zi}(x, y, z_i) - \nu'_i (\sigma_{xi}(x, y, z_i) + \sigma_{yi}(x, y, z_i))] / E'_i + g_{zi}(x, y, z_i, t); \\ \gamma_{zxi}(x, y, z_i) &= \sigma_{zxi}(x, y, z_i) / G'_i + g_{zxi}(x, y, z_i, t), \quad (zxi \rightarrow zyi), \end{aligned}$$

де сталі та функції i -го шару, які позначаються з індексом i унизу, визначаються так:

$$\begin{aligned} g_{xi} &= g_{xi}(x, y, z_i, t) = \varepsilon_i a_{0i} \Phi_{xi}(x, y, z_i, t), \quad (g_{xi} \rightarrow g_{yi} \rightarrow g_{zi}; \Phi_{xi} \rightarrow \Phi_{yi} \rightarrow \Phi_{zi}); \\ g_{yxi} &= g_{yxi}(x, y, z_i, t) = \varepsilon_i b_{0i} \Phi_{yxi}(x, y, z_i, t), \quad (g_{yxi} \rightarrow g_{zxi} \rightarrow g_{zyi}; \Phi_{yxi} \rightarrow \Phi_{zxi} \rightarrow \Phi_{zyi}); \\ \varepsilon_i &= 1 / g_{2i}; \quad a_{0i} = g_{2i}^2 / (27 G_i^3); \quad b_{0i} = 6 a_{0i}; \quad \Phi_{xi}(x, y, z_i, t) = \tau_{00i}^2 (2 \sigma_{xi} - \sigma_{yi} - \sigma_{zi}), \quad (7.3) \\ &(xi, yi; xi, zi); \quad \Phi_{yxi}(x, y, z_i, t) = \tau_{00i}^2 \sigma_{yxi}, \quad (\Phi_{yxi} \rightarrow \Phi_{zxi} \rightarrow \Phi_{zyi}; \sigma_{yxi} \rightarrow \sigma_{zxi} \rightarrow \sigma_{zyi}); \\ \tau_{00i}^2 &= \sigma_{xi}^2 + \sigma_{yi}^2 + \sigma_{zi}^2 - \sigma_{xi} \sigma_{yi} - \sigma_{xi} \sigma_{zi} - \sigma_{yi} \sigma_{zi} + 3(\sigma_{yxi}^2 + \sigma_{zxi}^2 + \sigma_{zyi}^2). \end{aligned}$$

В (7.3) E_i , E'_i , G_i , G'_i , ν_i , ν'_i , g_{2i} – МХ матеріалу i -го шару; $g_{xi}(x, y, z_i, t), \dots$, $g_{zyi}(x, y, z_i, t)$ – нелінійні складові (t в дужках вказує на нелінійність).

Залежності між деформаціями та переміщеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xi} &= \partial U_i / \partial x + k_{1i} W_i, \quad (x_i, U_i, k_{1i} \rightarrow y; V_i, V_i, k_{2i}); \quad \varepsilon_{zi} = \partial W_i / \partial z_i; \\ \gamma_{yxi} &= \partial U_i / \partial y + \partial V_i / \partial x; \quad \gamma_{zxi} = \partial W_i / \partial x + \partial U_i / \partial z_i - k'_{1i} U_i, \quad (x, y; U_i, k'_{1i} \rightarrow V_i, k'_{2i}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

де компоненти переміщень U_i, V_i, W_i та деформацій $\varepsilon_{xi}, \dots, \gamma_{zyi}$ є функціями x, y, z_i ; $k'_{ni} = k_{ni} = 1/R_{ni}$, ($n=1,2$).

7.1.2. Апроксимація переміщень, деформацій і напружень. Узагальнимо метод зображення компонент переміщень для однорідних пластин і оболонок у вигляді рядів за поліномами Лежандра на шаруваті елементи. Зобразимо компоненти переміщень в i -му шарі, на відміну від [26, 218, 292, 302, 318], у вигляді рядів за комбінаціями поліномів Лежандра:

$$U_i(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ki}(z_i) u_k(x, y), \quad (U, u \rightarrow V, v); \quad W_i(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ki}(z_i) w_{k+1}(x, y), \quad (7.5)$$

де функції $\varphi_{ki}(z_i)$ апроксимуємо в межах кожного i -го шару комбінаціями поліномів Лежандра $P_m(2z_i/h_i)$ таким чином:

$$\varphi_{0i}(z_i) \equiv a_{0i0} P_0, \quad (a_{0i0} = 1); \quad \varphi_{ki}(z_i) = \sum_{m=0}^k a_{kim} P_m(2z_i/h). \quad (7.6)$$

Функція $\varphi_{1i}(z_i)$ співпадає з [318], і через змінну z прийме для всіх i такий вигляд:

$$\varphi_{1i}(z) \equiv \varphi_1(z) = a_1 + b_1 z/h, \quad (7.7)$$

де коефіцієнти a_1 та b_1 визначаються із умов:

$$1). \quad \varphi_{1i}(z=h) \equiv \varphi_1(z=h) = 1; \quad 2). \quad \sum_{i=1}^j d_i \int_{h_i} \varphi_{1i}(z) dz = 0, \quad (d_i = E_i/(1-\nu_i^2)), \quad (7.8)$$

Зображення $\varphi_{ki}(z_i)$ при $k \geq 2$ принципово інше, ніж у вищеназваних працях інших авторів. Перейшовши від координати z до координати z_i , дістанемо коефіцієнти a_{1im} ($m=0,1$) для i -го шару. Наприклад, для двошарової оболонки матимемо:

$$a_1 = -\frac{d_1 t_1^2 + 2d_2 t_1 t_2 + d_2 t_2^2}{d_1 t_1^2 + 2d_1 t_1 t_2 + d_2 t_2^2}, \quad b_1 = \frac{h(d_1 t_1 + d_2 t_2)}{d_1 t_1^2 + 2d_1 t_1 t_2 + d_2 t_2^2},$$

$$a_{110} = a_1 + b_1 \frac{t_1}{h}, \quad a_{111} = b_1 \frac{h_1}{2h}, \quad a_{120} = a_1 + b_1 \frac{(h_1 + t_2)}{h}, \quad a_{121} = b_1 \frac{h_2}{2h}, \quad (t_i = h_i/2).$$

Не виникає принципових труднощів отримати вирази для a_1, b_1 та a_{1im} ($m=0,1$) для багат шарової оболонки $j \geq 3$.

Коефіцієнти a_{kim} ($k \geq 2$) для довільного шару при довільній кількості шарів j оболонки визначаються із наступних класичних умов [318]:

$$1) \quad \varphi_{kj}(z=h) = 1; \quad (7.9)$$

2) неперервності функцій φ_{ki} на границі шарів, тобто:

$$\varphi_{ki}(z_i = t_i) = \varphi_{k(i+1)}(z_{i+1} = -t_{i+1}), (i = 1, 2, \dots, j-1);$$

3) ортогональності φ_{ki} по всьому пакету шарів до всіх попередніх функцій:

$$\sum_{i=1}^j d_i \int_{h_i} \varphi_{ki}(z_i) \varphi_{ni}(z_i) dz_i = 0, (n = 0, 1, \dots, k-1);$$

4) найменшого середньоквадратичного відхилення функцій φ_{ki} від відповідних їм «базових» функцій, введених у [318], що зображуються у вигляді $\varphi_{ki} = b_{k0} + b_{k1}z/h + \dots + b_{kk}z^k/h^k$, де сталі b_{km} ($m = 0, \dots, k$) визначаються із k ЛАР, які впливають із першої та третьої умов (7.9).

Компоненти переміщень (7.5), як це впливає із (7.6) – (7.8) та другої умови (7.9) задовольняють умовам неперервності на границях шарів.

Аналітично показано, що зображення переміщень у вигляді (7.5), а функцій φ_{ki} у вигляді (7.6) при граничному переході до однорідної оболонки (пластини) відповідає апроксимації переміщень при допомозі поліномів Лежандра у вигляді (3.9).

Надалі під k -им наближенням за поліномами Лежандра розумітимемо наближення, в якому для тангенціальних компонент переміщень урахуються функції $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \dots, \varphi_{ki}$. У [318] функції φ_{ki} для тангенціальних компонент переміщень пропонувались приймати лінійними в межах кожного шару і у вигляді ламаної лінії для всього пакету, а поперечні переміщення зображувались у вигляді рядів за поперечною координатою при допомозі степеневих функцій, які визначались із інших позицій, ніж у нашому варіанті, що ускладнювало і не уточнювало процес апроксимації.

Деформації (7.4) в i -му шарі виражаються через поліноми Лежандра з урахуванням (7.5):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xi}(x, y, z_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{xik}(x, y) P_k(z_i) + k_{1i} \sum_{k=0}^{\infty} e_{ik}(x, y) P_k(z_i), (x, y; k_{1i}, k_{2i}); \\
\varepsilon_{zi}(x, y, z_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_{ik}(x, y) P'_k(z_i); \quad \gamma_{yxi} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{yxik}(x, y) P_k(z_i); \\
\gamma_{zxi}(x, y, z_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} [e_{xik}(x, y) P'_k(z_i) + \gamma_{xik}(x, y) P_k(z_i)] - k'_{1i} \sum_{k=0}^{\infty} e_{xik}(x, y) P_k(z_i); \\
\gamma_{zyi}(x, y, z_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} [e_{yik}(x, y) P'_k(z_i) + \gamma_{yik}(x, y) P_k(z_i)] - k'_{2i} \sum_{k=0}^{\infty} e_{yik}(x, y) P_k(z_i); \\
\varepsilon_{xi} + v_i \varepsilon_{yi} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) (f_{xik}(x, y) + k_{1vi} e_{ik}(x, y)); \\
\varepsilon_{yi} + v_i \varepsilon_{xi} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) (f_{yik}(x, y) + k_{2vi} e_{ik}(x, y)),
\end{aligned} \tag{7.10}$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xik}(x, y) &= \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} \partial u_m / \partial x, \quad (\varepsilon_{xik}, \partial u_m / \partial x \rightarrow \varepsilon_{yik}, \partial v_m / \partial y); \quad e_{ik}(x, y) = \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} w_{m+1}; \\
\gamma_{yxik}(x, y) &= \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} (\partial u_m / \partial y + \partial v_m / \partial x); \quad e_{xik}(x, y) = \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} u_m, \quad (e_{xik}, u_m \rightarrow e_{yik}, v_m); \\
\gamma_{xik}(x, y) &= \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} \partial w_{m+1} / \partial x, \quad (\gamma_{xik}, \partial / \partial x \rightarrow \gamma_{yik}, \partial / \partial y); \\
f_{xik}(x, y) &= \sum_{m=k}^{\infty} a_{mik} (\partial u_m / \partial x + v_i \partial v_m / \partial y), \quad (f_{xik}, \partial u_m / \partial x \rightarrow f_{yik}, \partial v_m / \partial y); \\
k_{1vi} &= k_{1i} + v_i k_{2i}; \quad k_{2vi} = k_{2i} + v_i k_{1i}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Як бачимо, функції від x, y в (7.10), (7.11) залежать від МГП a_{mik} (7.6).

Оскільки фізично нелінійна оболонка полога, то структуру дотичних напружень $\sigma_{zxi}, \sigma_{yzi}$ визначимо способом, аналогічним однорідній пластині. Крім цього, вважатимемо структуру залежностей поперечних напружень від шуканих функцій для нелінійно пружної і лінійно пружної транстропної пластини однаковою.

При циліндричному згині для i -го шару з урахуванням (7.4), (7.5):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xi}(x, z) &= \partial U_i(x, z) / \partial x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ki}(z_i) du_k(x) / dx; \\
\sigma_{xi}(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{xki}; \quad \sigma_{xki}(x, z) = d_i \varphi_{ki}(z_i) du_k(x) / dx.
\end{aligned}$$

Інтегруючи від 0 до z ($0 \leq z \leq h$) 1-е ДР рівноваги ТП при циліндричному згині для k -го наближення та, урахуваючи (7.1) на лицевій поверхні $z = 0$ і рівність поперечних дотичних напружень на границях шарів, одержимо:

$$\sigma_{z x k i}(x, z) = \alpha_{k i}(z) Q_{k x}(x), \quad (7.12)$$

де

$$\alpha_{k i}(z) = - \int_0^z d_i \varphi_{k i}(z) dz, \quad (Q_{k x}(x) - \text{шукані функції}),$$

або, вводячи координати z_i для кожного шару та, інтегруючи послідовно в межах кожного шару від першого до i -го шару включно, дістанемо в загальному випадку багатошарової пластини з j шарами наступні вирази для $\alpha_{k i}(z_i)$:

$$\alpha_{k i}(z_i) = - \left(d_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \varphi_{k 1}(z_1) dz_1 + d_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi_{k 2}(z_2) dz_2 + \dots + d_i \int_{-h_i/2}^{z_i} \varphi_{k i}(z_i) dz_i \right). \quad (7.13)$$

Функції $\alpha_{k i}(z_i)$, ураховуючи (7.6) та (7.13), визначаються так:

$$\alpha_{1i}(z_i) = \sum_{m=0}^2 e_{1im} P_m(z_i), \quad \alpha_{2i}(z_i) = \sum_{m=0}^3 e_{2im} P_m(z_i), \quad \dots, \quad \alpha_{ki}(z_i) = \sum_{m=0}^{k+1} e_{kim} P_m(z_i), \quad (7.14)$$

де e_{kim} залежать від МГХ шарів:

$$\begin{aligned} e_{1i0} &= \frac{1}{6} d_i h_i (a_{1i1} - 3a_{1i0}) - \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{1m0}; \quad e_{1i1} = -\frac{1}{2} d_i h_i a_{1i0}; \quad e_{1i2} = -\frac{1}{6} d_i h_i a_{1i1}; \\ e_{2i0} &= \frac{1}{6} d_i h_i (a_{2i1} - 3a_{2i0}) - \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{2m0}; \quad e_{2i1} = \frac{1}{10} d_i h_i (a_{2i2} - 5a_{2i0}); \quad e_{2i2} = -\frac{1}{6} d_i h_i a_{2i1}; \\ e_{2i3} &= -\frac{1}{10} d_i h_i a_{2i2}; \quad e_{3i0} = \frac{d_i h_i}{6} (a_{3i1} - 3a_{3i0}) - \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{3m0}; \quad e_{3i1} = \frac{1}{10} d_i h_i (a_{3i2} - 5a_{3i0}); \\ e_{3i2} &= \frac{1}{2} d_i h_i \left(\frac{1}{7} a_{3i3} - \frac{1}{3} a_{3i1} \right); \quad e_{3i3} = -\frac{1}{10} d_i h_i a_{3i2}; \quad e_{3i4} = -\frac{1}{14} d_i h_i a_{3i3}, \dots \end{aligned} \quad (7.15)$$

Вищезаписані тут і далі суми рівні нулю, якщо верхня межа менша нижньої.

Можна показати, що, знаючи коефіцієнти e_{41m} для першого шару, можна знайти коефіцієнти e_{4im} для інших шарів ($i = 2, 3, \dots, j$) за такими рекурентними формулами:

$$e_{4i0} = e_{4i0}(d_i, h_i, a_{4in}) - \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{4m0}, \quad (n = 0, 1); \quad e_{4im} = e_{41m}(d_i, h_i, a_{4in}), \quad (m = 1, 2, \dots, 5);$$

де $e_{41m}(d_i, h_i, a_{4in}) = e_{41m}(d_1 \rightarrow d_i, h_1 \rightarrow h_i; a_{41n} \rightarrow a_{4in}), \quad (m = 0, 1, \dots, 5)$.

У загальному вигляді:

$$e_{k10} = e_{k10}(d_i, h_i, a_{kin}) - \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{km0}; e_{kim} = e_{k1m}(d_i, h_i, a_{kin}), (m = 1, 2, \dots, k+1), \quad (7.16)$$

де $e_{k1m}(d_i, h_i, a_{kin}) = e_{k1m}(d_1 \rightarrow d_i, h_1 \rightarrow h_i; a_{k1n} \rightarrow a_{kin})$.

Таким чином, знаючи коефіцієнти e з нижніми індексами для 1-го шару, можна визначити за вищенаведеними формулами однойменні коефіцієнти для інших шарів, що спрощує обчислювальний процес.

На основі (7.12) напруження $\sigma_{zxi}(x, z)$ в i -му шарі визначаються так:

$$\sigma_{zxi}(x, z_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ki}(z_i) Q_{kx}(x),$$

або, узагальнюючи

$$\sigma_{zxi}(x, y, z_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ki}(z_i) Q_{kx}(x, y), (\sigma_{zxi} \rightarrow \sigma_{zyi}; Q_{kx} \rightarrow Q_{ky}), \quad (7.17)$$

В іншому вигляді через поліноми Лежандра, приймаючи до уваги (7.13), (7.14):

$$\sigma_{zxi}(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) t_{xik}(x, y), (x, y), \quad (7.18)$$

де

$$t_{xik}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} e_{mik} Q_{mx}(x, y), (k = 0, 1, 2); \quad (7.19)$$

$$t_{xik}(x, y) = \sum_{m=k-1}^{\infty} e_{mik} Q_{mx}(x, y), (k = 3, 4, \dots), (x, y);$$

$Q_{mx}(x, y)$, $Q_{my}(x, y)$ визначатимуться через переміщення на основі ВР Рейснера.

Зазначимо, що поперечні дотичні напруження згідно з (7.18), (7.19), (7.12) задовольняють граничним умовам на лицевих поверхнях оболонки і умовам неперервності їх на границях шарів.

Інтегруючи третє ДР рівноваги ТП по z та, використовуючи (7.17) для σ_{zxi} та σ_{zyi} , отримаємо з урахуванням граничних умов (7.1) і рівності нормальних поперечних напружень на границях шарів такі вирази для напружень σ_{zi} :

$$\sigma_{zi}(x, y, z_i) = -0,5 p(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{ki}(z_i) \omega_k(x, y), (\omega_1 = q(x, y)), \quad (7.20)$$

де

$$\chi_{ki}(z_i) = \sum_{m=0}^{k+2} q_{kim} P_m(z_i); \quad (7.21)$$

$\omega_k(x, y)$ ($k = 2, 3, \dots$) – шукані функції, а коефіцієнти q_{kim} визначаються так:

$$\begin{aligned}
 q_{1i0} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\chi_b} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m (h_m (a_{1m0} - \frac{1}{3} a_{1m1}) + h_i a_{1m0}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=2}^{i-1} (h_n \sum_{m=1}^{n-1} d_m h_m a_{1n0}) - \frac{1}{12} d_i h_i^2 (a_{1i1} - 2a_{1i0}) \right), \\
 q_{1i1} &= \frac{1}{\chi_b} \left(\frac{h_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{1m0} - \frac{d_i h_i^2}{2} \left(\frac{1}{5} a_{1i1} - \frac{1}{2} a_{1i0} \right) \right), \quad q_{1i2} = \frac{1}{12 \chi_b} d_i h_i^2 a_{1i0}, \\
 q_{1i3} &= \frac{1}{60 \chi_b} d_i h_i^2 a_{1i1}; \quad \chi_b = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^j d_m h_m^2 (a_{1m0} - \frac{1}{3} a_{1m1}) - \sum_{n=2}^j (h_n \sum_{m=1}^{n-1} d_m h_m a_{1n0}), \\
 q_{2i0} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m (h_m (a_{2m0} - \frac{1}{3} a_{2m1}) + h_i a_{2m0}) - \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{i-1} h_n \left(\sum_{m=1}^{n-1} d_m h_m a_{2n0} \right) + \frac{1}{6} d_i h_i^2 \left(\frac{1}{2} a_{2i1} - \frac{1}{10} a_{2i2} - a_{2i0} \right), \\
 q_{2i1} &= -\frac{h_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{2m0} + d_i h_i^2 \left(\frac{1}{10} a_{2i1} - \frac{1}{4} a_{2i0} \right), \quad q_{2i2} = \frac{1}{6} d_i h_i^2 \left(\frac{1}{7} a_{2i2} - \frac{1}{2} a_{2i0} \right), \\
 q_{2i3} &= -\frac{1}{60} d_i h_i^2 a_{2i1}, \quad q_{2i4} = -\frac{1}{140} d_i h_i^2 a_{2i2}, \\
 q_{3i0} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m (h_m (a_{3m0} - \frac{1}{3} a_{3m1}) + h_i a_{3m0}) - \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{i-1} (h_n \sum_{m=1}^{n-1} d_m h_m a_{3n0}) + \frac{1}{6} d_i h_i^2 \left(\frac{1}{2} a_{3i1} - \frac{1}{10} a_{3i2} - a_{3i0} \right), \\
 q_{3i1} &= -\frac{h_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{3m0} + d_i h_i^2 \left(\frac{1}{10} a_{3i1} - \frac{1}{140} a_{3i3} - \frac{1}{4} a_{3i0} \right), \quad q_{3i2} = \frac{1}{6} d_i h_i^2 \left(\frac{1}{7} a_{3i2} - \frac{1}{2} a_{3i0} \right), \\
 q_{3i3} &= \frac{1}{30} d_i h_i^2 \left(\frac{1}{3} a_{3i3} - \frac{1}{2} a_{3i1} \right), \quad q_{3i4} = -\frac{1}{140} d_i h_i^2 a_{3in}, \quad q_{3i5} = -\frac{1}{252} d_i h_i^2 a_{3i3}, \dots
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Показано в загальному вигляді, що, знаючи q з індексами для 1-го шару, аналогічні коефіцієнти для інших шарів шукаються за рекурентними формулами:

$$\begin{aligned}
 q_{ki0} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m (h_m (a_{km0} - \frac{1}{3} a_{km1}) + h_i a_{km0}) - \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{i-1} (h_n \sum_{m=1}^{n-1} d_m h_m a_{kn0}) + q_{k10} (d_1 \rightarrow d_i, h_1 \rightarrow h_i, a_{k1n} \rightarrow a_{kin}); \\
 q_{ki1} &= -\frac{h_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} d_m h_m a_{km0} + q_{k11} (d_1 \rightarrow d_i, h_1 \rightarrow h_i, a_{k1n} \rightarrow a_{kin}); \\
 q_{kim} &= q_{k1m} (d_1 \rightarrow d_i, h_1 \rightarrow h_i, a_{k1n} \rightarrow a_{kin}), \quad (m = 2, 3, \dots, k+2).
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Напруження $\sigma_{zi}(x, y, z)$, на основі (7.20) – (7.23), можна зобразити у вигляді:

$$\sigma_{zi}(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) s_{zik}(x, y), \quad (7.24)$$

де

$$s_{zi0}(x, y) = -0,5p(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{mi0} \omega_m(x, y); \quad (7.25)$$

$$s_{zik}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{mik} \omega_m(x, y), \quad (k=1,2,3); \quad s_{zik}(x, y) = \sum_{m=k-2}^{\infty} q_{mik} \omega_m(x, y), \quad (k=4,5,\dots),$$

а функції $\omega_m(x, y)$ визначатимуться далі через переміщення із ВРР.

Зазначимо, що поперечні нормальні напруження також неперервні на границях шарів і точно задовольняють граничним умовам на лицевих поверхнях.

7.1.3. Варіаційне рівняння Рейснера. Крайові умови. ВР Рейснера для шаруватих фізично нелінійних пологих оболонок прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \iint_{xy} \left(\sum_{i=1}^j \int_{h_i} \{ \sigma_{xi} \delta \varepsilon_{xi} + \sigma_{yi} \delta \varepsilon_{yi} + \sigma_{zi} \delta \varepsilon_{zi} + \sigma_{yxi} \delta \gamma_{yxi} + \sigma_{zxi} \delta \gamma_{zxi} + \sigma_{zyi} \delta \gamma_{zyi} + \right. \\ & + [\varepsilon_{xi} - (\frac{1}{E_i} (\sigma_{xi} - \nu_i \sigma_{yi}) - \frac{\nu'_i}{E_i} \sigma_{zi}) - g_{xi}] \delta \sigma_{xi} + [\varepsilon_{yi} - (\frac{1}{E_i} (\sigma_{yi} - \nu_i \sigma_{xi}) - \frac{\nu'_i}{E_i} \sigma_{zi}) - g_{yi}] \delta \sigma_{yi} + \\ & + [\varepsilon_{zi} - \frac{1}{E'_i} (\sigma_{zi} - \nu'_i (\sigma_{xi} + \sigma_{yi})) - g_{zi}] \delta \sigma_{zi} + (\gamma_{yxi} - \frac{\sigma_{yxi}}{G'_i} - g_{yxi}) \delta \sigma_{yxi} + \\ & + (\gamma_{zxi} - \frac{\sigma_{zxi}}{G'_i} - g_{zxi}) \delta \sigma_{zxi} + (\gamma_{zyi} - \frac{\sigma_{zyi}}{G'_i} - g_{zyi}) \delta \sigma_{zyi} \} dz_i) dx dy - \\ & \left. - \iint_A (X_v \delta U + Y_v \delta V + Z_v \delta W) dA = 0. \right. \quad (7.26) \end{aligned}$$

Напруження $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{yxi}$ визначаються на основі (7.26), (7.22):

$$\sigma_{xi}(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) s_{xik}(x, y) - f_{xi}(x, y, z_i, t), \quad (\sigma_{xi}, s_{xik}, f_{xi} \rightarrow \sigma_{yi}, s_{yik}, f_{yi}); \quad (7.27)$$

$$\sigma_{yxi}(x, y, z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) t_{yxi k}(x, y) - f_{yxi}(x, y, z_i, t),$$

де

$$s_{xik}(x, y) = d_i (f_{xik}(x, y) + k_{1vi} e_{ik}(x, y)) + d_{1i} s_{zik}(x, y), \quad (xik \rightarrow yik; k_{1vi} \rightarrow k_{2vi});$$

$$t_{yxi k}(x, y) = G_i \gamma_{yxi k}(x, y); \quad f_{xi}(x, y, z_i, t) = \varepsilon a_{0i} d_i \Phi_{xyi}(x, y, z_i, t),$$

$$(7.28)$$

$$(f_{xi} \rightarrow f_{yi}; \Phi_{xv yi} \rightarrow \Phi_{yv xi}); \Phi_{xv yi}(x, y, z_i, t) = \Phi_{xi}(x, y, z_i, t) + v_i \Phi_{yi}(x, y, z_i, t),$$

$$(\Phi_{xv yi} \rightarrow \Phi_{yv xi}; \Phi_{xi}, \Phi_{yi}); f_{yxi}(x, y, z_i, t) = \varepsilon b_{0i} G_i \Phi_{yxi}(x, y, z_i, t).$$

Для знаходження функцій $Q_{mx}(x, y)$, $Q_{my}(x, y)$ використовуємо на основі (7.26) відому методику (п. 3.2.2). Пропускаючи проміжні громіздкі викладки, дістанемо наступні вирази для перших k функцій Q_{mx}, Q_{my} ($m = 1, 2, \dots, k$):

$$Q_{mx}(x, y) = \sum_{n=1}^k h_{mn} \frac{\partial w_n(x, y)}{\partial x} + \sum_{n=0}^k l_{xmn} u_n(x, y) - h_{mx}(x, y, t), \quad (7.29)$$

де множники при функціях – МГП оболонки.

Зокрема, для перших трьох функцій матимемо:

$$Q_{mx}(x, y) = \sum_{n=1}^3 h_{mn} \frac{\partial w_n(x, y)}{\partial x} + \sum_{n=0}^3 l_{xmn} u_n(x, y) - h_{mx}(x, y, t), \quad (x, y; u \rightarrow v). \quad (7.30)$$

В (7.30):

$$h_{mn} = \frac{1}{\Delta} (b_{1n} A_{1m}^0 + b_{2n} A_{2m}^0 + b_{3n} A_{3m}^0), \quad (n, m = 1, 2, 3);$$

$$l_{xmn} = \frac{1}{\Delta} (c_{x1n} A_{1m}^0 + c_{x2n} A_{2m}^0 + c_{x3n} A_{3m}^0), \quad (m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3);$$

$$h_{mx}(x, y, z, t) = A_{1m}^0 b_{1x}(x, y, z, t) + A_{2m}^0 b_{2x}(x, y, z, t) + A_{3m}^0 b_{3x}(x, y, z, t), \quad (m = 1, 2, 3);$$

$$(x, y); \Delta = \det |A_{mn}|, \quad (m, n = 1, 2, 3);$$

$$A_{1m} = \sum_{n=0}^2 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{\min} e_{1in}, \quad (m = 1, 2, 3); \quad A_{21} = \sum_{n=0}^2 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{1in} e_{2in};$$

$$A_{2m} = \sum_{n=0}^3 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{2in} e_{\min}, \quad (m = 2, 3); \quad A_{31} = \sum_{n=0}^2 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{1in} e_{3in};$$

$$A_{32} = \sum_{n=0}^3 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{2in} e_{3in}; \quad A_{33} = \sum_{n=0}^4 \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{(2n+1)G'_i} e_{3in}^2; \quad b_{m1} = \sum_{i=1}^j h_i e_{mi0} a_{0i0};$$

$$b_{m2} = \sum_{i=1}^j h_i (e_{mi0} a_{1i0} + \frac{1}{3} e_{mi1} a_{1i1}); \quad b_{m3} = \sum_{i=1}^j h_i (e_{mi0} a_{2i0} + \frac{1}{3} e_{mi1} a_{2i1} + \frac{1}{5} e_{mi2} a_{2i2}); \quad (7.31)$$

$$c_{xm0} = -\sum_{i=1}^j h_i k'_{li} e_{mi0} a_{0i0}; \quad c_{xmi} = \sum_{i=1}^j [2e_{mi0} a_{1i1} - k'_{li} h_i (e_{mi0} a_{1i0} + \frac{1}{3} e_{mi1} a_{1i1})];$$

$$c_{xm2} = \sum_{i=1}^j [2(e_{mi0} a_{2i1} + e_{mi1} a_{2i2}) - k'_{li} h_i (e_{mi0} a_{2i0} + \frac{1}{3} e_{mi1} a_{2i1} + \frac{1}{5} e_{mi2} a_{2i2})], \quad (m = 1, 2, 3);$$

$$c_{x13} = \sum_{i=1}^j [2(e_{1i0} (a_{3i1} + a_{3i3}) + e_{1i1} a_{3i2} + e_{1i2} a_{3i3}) - k'_{li} h_i (e_{1i0} a_{3i0} + \frac{1}{3} e_{1i1} a_{3i1} + \frac{1}{5} e_{1i2} a_{3i2})];$$

$$\begin{aligned}
c_{xm3} &= \sum_{i=1}^j [2(e_{mi0}(a_{3i1} + a_{3i3}) + e_{mi1}a_{3i2} + e_{mi2}a_{3i3}) - k'_{1i}h_i(e_{mi0}a_{3i0} + \\
&\quad + \frac{1}{3}e_{mi1}a_{3i1} + \frac{1}{5}e_{mi2}a_{3i2} + \frac{1}{7}e_{mi3}a_{3i3})], \quad (m = 2,3); \\
b_{1x}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^i \sum_{n=0}^2 e_{1in} I_{zxin}(x, y, t); \quad b_{2x}(x, y, t) = \sum_{i=1}^i \sum_{n=0}^3 e_{2in} I_{zxin}(x, y, t); \\
b_{3x}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^i \sum_{n=0}^4 e_{3in} I_{zxin}(x, y, t); \quad I_{zxin}(x, y, t) = \int_{h_i} g_{zxi}(x, y, z_i, t) P_n(z_i) dz_i, \quad (x, y),
\end{aligned}$$

де A_{mn}^0 – алгебраїчні доповнення до елемента A_{mn} матриці (A_{mn}) .

Аналогічно однорідним оболонкам, пропускаючи проміжні громіздкі викладки, дістанемо функції $\omega_n(x, y)$ ($n = 2, 3, \dots, k$):

$$\omega_n(x, y, t) = \sum_{m=1}^k q_{nm} w_m(x, y) + \sum_{m=0}^k e_{nm} \varphi_m(x, y) + e_{np} p(x, y) + e_{nq} q(x, y) - e_{n\omega}(x, y, t), \quad (7.32)$$

де q_{nm}, \dots, e_{nq} – МГП оболонки, $e_{n\omega}(x, y, t)$ – функції, нелінійно залежать від НДС.

У наближенні К0-3 шукані функції $\omega_n(x, y, t)$ ($n = 2, 3$) мають вигляд:

$$\omega_n(x, y, t) = \sum_{m=1}^3 q_{nm} w_m(x, y) + \sum_{m=0}^3 e_{nm} \varphi_m(x, y) + e_{np} p(x, y) + e_{nq} q(x, y) - e_{n\omega}(x, y, t), \quad (7.33)$$

де

$$\begin{aligned}
q_{2m} &= C_{\omega 2} \tilde{e}_{2wm} - D_{\omega 2} \tilde{e}_{3wm}, \quad (m = 1, 2, 3); \quad e_{2m} = C_{\omega 2} \tilde{e}_{2m} - D_{\omega 2} \tilde{e}_{3m}, \quad (m = 0, 1, 2, 3); \\
e_{2p} &= C_{\omega 2} \tilde{e}_{2p} - D_{\omega 2} \tilde{e}_{3p}, \quad (p \rightarrow q); \quad e_{2\omega}(x, y, t) = C_{\omega 2} \tilde{I}_{\omega 2}(x, y, s) - D_{\omega 2} \tilde{I}_{\omega 3}(x, y, s); \\
q_{3m} &= C_{\omega 3} \tilde{e}_{2wm} - D_{\omega 3} \tilde{e}_{3wm}, \quad (m = 1, 2, 3); \quad e_{3m} = C_{\omega 3} \tilde{e}_{2m} - D_{\omega 3} \tilde{e}_{3m}, \quad (m = 0, 1, 2, 3); \\
e_{3p} &= C_{\omega 3} \tilde{e}_{2p} - D_{\omega 3} \tilde{e}_{3p}, \quad (p \rightarrow q); \quad e_{3\omega}(x, y, t) = C_{\omega 3} \tilde{I}_{\omega 2}(x, y, t) - D_{\omega 3} \tilde{I}_{\omega 3}(x, y, t); \\
\tilde{e}_{mw1} &= \sum_{i=1}^j k_{12i} h_i d_{1i} q_{mi0} a_{0i0}; \quad \tilde{e}_{mw2} = \sum_{i=1}^j [2q_{mi0} a_{1i1} + k_{12i} h_i d_{1i} (q_{mi0} a_{0i0} + \frac{1}{3} q_{mi1} a_{1i1})]; \\
\tilde{e}_{mw3} &= \sum_{i=1}^j [2(q_{mi0} a_{2i1} + q_{mi1} a_{2i2}) + k_{12i} h_i d_{1i} \sum_{n=0}^2 (\frac{1}{2n+1} q_{min} a_{2in})]; \\
\tilde{e}_{m0} &= \sum_{i=1}^j h_i d_{1i} q_{mi0} a_{0i0}; \quad \tilde{e}_{m1} = \sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (q_{mi0} a_{1i0} + \frac{1}{3} q_{mi0} a_{1i1}); \\
\tilde{e}_{m2} &= \sum_{i=1}^j (h_i d_{1i} (\sum_{n=0}^2 \frac{1}{2n+1} q_{min} a_{2in})); \quad \tilde{e}_{m3} = \sum_{i=1}^j (h_i d_{1i} (\sum_{n=0}^3 \frac{1}{2n+1} q_{min} a_{3in})); \quad (7.34) \\
\tilde{e}_{mp} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j h_i d_{2i} q_{mi0}; \quad \tilde{e}_{mq} = - \sum_{i=1}^j (h_i d_{2i} (\sum_{n=0}^3 \frac{1}{2n+1} q_{min} a_{1in})), \quad (m = 2, 3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\omega 2} &= \frac{A_{\omega 33}}{\Delta_{\omega}}; C_{\omega 3} = -\frac{A_{\omega 32}}{\Delta_{\omega}}; D_{\omega 2} = \frac{A_{\omega 23}}{\Delta_{\omega}}; D_{\omega 3} = -\frac{A_{\omega 222}}{\Delta_{\omega}}; \\
A_{\omega 22} &= \sum_{i=1}^j (h_i d_{2i} (\sum_{n=0}^4 \frac{q_{2in}^2}{2n+1})); A_{\omega 23} = \sum_{i=1}^j (h_i d_{2i} (\sum_{n=0}^4 \frac{1}{2n+1} q_{2in} q_{3in})); \\
A_{\omega 32} &= A_{\omega 23}; A_{\omega 33} = \sum_{i=1}^j (h_i d_{2i} (\sum_{n=0}^5 \frac{q_{3in}^2}{2n+1})); \Delta_{\omega} = \det |A_{\omega nm}| = A_{\omega 22} A_{\omega 33} - A_{\omega 32}^2; \\
\tilde{I}_{\omega 2} &= \tilde{I}_{\omega 2}(x, y, t) = \sum_{i=1}^j (\sum_{n=0}^4 q_{2in} I_{zin}(x, y, t)); \tilde{I}_{\omega 3} = \tilde{I}_{\omega 3}(x, y, t) = \sum_{i=1}^j (\sum_{n=0}^5 q_{3in} I_{zin}(x, y, t)); \\
I_{zin} &= I_{zin}(x, y, t) = \int_{h_i} \frac{1}{E_i} f_{\sigma i}(x, y, z_i, t) + g_{zi}(x, y, z_i, t) P_n(z_i) dz_i; \\
f_{\sigma i}(x, y, z_i, t) &= \varepsilon v_i' a_{0i} d_i (1 + v_i) (\Phi_{xi}(x, y, z_i, t) + \Phi_{yi}(x, y, z_i, t)), k_{12i} = k_{1i} + k_{2i}.
\end{aligned}$$

Отже, на основі (7.14)–(7.16), (7.18), (7.19), (7.24), (7.25), (7.27)–(7.29), (7.32)–(7.34) компоненти напружень виражаються через складові переміщень.

Опускаючи громіздкі перетворення ВРР (7.26) з урахуванням формул Остроградського–Гауса і прирівнюванням у подвійному інтегралі множників при варіаціях складових переміщень до нуля, отримуємо ДР рівноваги шаруватих фізично нелінійних пологих оболонок несиметричної структури, які в загальному випадку мають вигляд (Д.1) – (Д.5) додатку Д.

Із ВРР (7.26) отримуються також крайові умови умови:

$$\begin{aligned}
\int_s \{ (N_{0u} - \tilde{N}_{0u}) \delta u_0 + (N_{0v} - \tilde{N}_{0v}) \delta v_0 + \sum_{m=1}^k [(M_{mu} - \tilde{M}_{0u}) \delta u_m + \\
+ (M_{0v} - \tilde{M}_{0v}) \delta v_m + (Q_{mw} - \tilde{Q}_{mw}) \delta w_m] \} ds = 0, \quad (7.35)
\end{aligned}$$

де величини без (\sim) угорі залежать від НДС оболонки, а з (\sim) угорі – від зовнішнього навантаження на контурі. В (7.35):

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{0u} = \tilde{N}_{0u}(s) &= \sum_{i=1}^j \int_{hi} X_{vi}(z_i, s) \varphi_{0i}(z_i) dz_i, \quad \tilde{N}_{0v} = \tilde{N}_{0v}(s) = \sum_{i=1}^j \int_{hi} Y_{vi}(z_i, s) \varphi_{0i}(z_i) dz_i, \quad (7.36) \\
\tilde{M}_{ku} = \tilde{M}_{ku}(s) &= \sum_{i=1}^j \int_{hi} X_{vi}(z_i, s) \varphi_{ki}(z_i) dz_i, \quad \tilde{M}_{kv} = \tilde{M}_{kv}(s) = \sum_{i=1}^j \int_{hi} Y_{vi}(z_i, s) \varphi_{ki}(z_i) dz_i, \\
\tilde{Q}_{kw} = \tilde{Q}_{kw}(s) &= \sum_{i=1}^j \int_{hi} Z_{vi}(z_i, s) \varphi_{k-1}(z_i) dz_i, \\
N_{0u} &= l_x \sum_i [a_{0i0} (h_i s_{xi0} - I_{xi0})] + l_y \sum_i [a_{0i0} (h_i t_{xyi0} - I_{xyi0})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{0v} &= l_x \sum_i [a_{0i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0})] + l_y \sum_i [a_{0i0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0})], \\
M_{1u} &= l_x \sum_i [a_{1i0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{1i1}(h_i s_{xi1} / 3 - I_{xi1})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{1i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{1i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1})], \\
M_{1v} &= l_x \sum_i [a_{1i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{1i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{1i0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{1i1}(h_i s_{yi1} / 3 - I_{yi1})], \\
M_{2u} &= l_x \sum_i [a_{2i0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{2i1}(h_i s_{xi1} / 3 - I_{xi1}) + a_{2i2}(h_i s_{xi2} / 5 - I_{xi2})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{2i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{2i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1}) + a_{2i2}(h_i t_{yxi2} / 5 - I_{yxi2})], \\
M_{2v} &= l_x \sum_i [a_{2i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{2i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1}) + a_{2i2}(h_i t_{yxi2} / 5 - I_{yxi2})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{2i0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{2i1}(h_i s_{yi1} / 3 - I_{yi1}) + a_{2i2}(h_i s_{yi2} / 5 - I_{yi2})], \\
M_{3u} &= l_x \sum_i [a_{3i0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{3i1}(h_i s_{xi1} / 3 - I_{xi1}) + a_{3i2}(h_i s_{xi2} / 5 - I_{xi2}) + \\
&\quad + a_{3i3}(h_i s_{xi3} / 7 - I_{xi3})] + l_y \sum_i [a_{3i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{3i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1}) + \\
&\quad + a_{3i2}(h_i t_{yxi2} / 5 - I_{yxi2}) + a_{3i3}(h_i t_{yxi3} / 7 - I_{yxi3})], \\
M_{3v} &= l_x \sum_i [a_{3i0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{3i1}(h_i t_{yxi1} / 3 - I_{yxi1}) + a_{3i2}(h_i t_{yxi2} / 5 - I_{yxi2}) + \\
&\quad + a_{3i3}(h_i t_{yxi3} / 7 - I_{yxi3})] + l_y \sum_i [a_{3i0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{3i1}(h_i s_{yi1} / 3 - I_{yi1}) + \\
&\quad + a_{3i2}(h_i s_{yi2} / 5 - I_{yi2}) + a_{3i3}(h_i s_{yi3} / 7 - I_{yi3})], \\
Q_{1w} &= l_x \sum_i a_{0i0} h_i t_{xi0} + l_y \sum_i a_{0i0} h_i t_{yi0}, \\
Q_{2w} &= l_x \sum_i (a_{1i0} h_i t_{xi0} + a_{1i1} h_i t_{xi1} / 3) + l_y \sum_i (a_{1i0} h_i t_{yi0} + a_{1i1} h_i t_{yi1} / 3), \\
Q_{3w} &= l_x \sum_i (a_{2i0} h_i t_{xi0} + a_{2i1} h_i t_{xi1} / 3 + a_{2i2} h_i t_{xi2} / 5) + \\
&\quad + l_y \sum_i (a_{2i0} h_i t_{yi0} + a_{2i1} h_i t_{yi1} / 3 + a_{2i2} h_i t_{yi2} / 5), \\
M_{ku} &= l_x \sum_i [a_{ki0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{ki1}(\frac{1}{3} h_i s_{xi1} - I_{xi1}) + \dots + a_{kik}(\frac{1}{2k+1} h_i s_{xik} - I_{xik})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{ki0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{ki1}(\frac{1}{3} h_i t_{yxi1} - I_{yxi1}) + \dots + a_{kik}(\frac{1}{2k+1} h_i t_{yxi k} - I_{yxi k})], \\
M_{kv} &= l_x \sum_i [a_{ki0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{ki1}(\frac{1}{3} h_i t_{yxi1} - I_{yxi1}) + \dots + a_{kik}(\frac{1}{2k+1} h_i t_{yxi k} - I_{yxi k})] + \\
&\quad + l_y \sum_i [a_{ki0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{ki1}(\frac{1}{3} h_i s_{yi1} - I_{yi1}) + \dots + a_{kik}(\frac{1}{2k+1} h_i s_{yik} - I_{yik})],
\end{aligned}$$

$$Q_{kw} = l_x \sum_i [a_{(k-1)i0} h_i t_{xi0} + \frac{1}{3} a_{(k-1)i1} h_i t_{xi1} + \frac{1}{5} a_{(k-1)i2} h_i t_{xi2} + \dots + a_{(k-1)i(k-1)} \frac{h_i t_{xi(k-1)}}{2k+1}] +$$

$$+ l_y \sum_i [a_{(k-1)i0} h_i t_{yi0} + \frac{1}{3} a_{(k-1)i1} h_i t_{yi1} + \frac{1}{5} a_{(k-1)i2} h_i t_{yi2} + \dots + a_{(k-1)i(k-1)} \frac{h_i t_{yi(k-1)}}{2k+1}],$$

де сталі і функції у (7.36), визначаються за наведеними формулами і додатку Д.1.

7.1.4. Диференціальні рівняння рівноваги в НК0-3. СДРР (Д.1)–(Д.5) з урахуванням $u_0, v_0, u_1, \dots, v_3, w_1, w_2, w_3$ в НК0-3 отримана у вигляді:

$$D_{m,1}u_0 + D_{m,2}v_0 + D_{m,3}u_1 + D_{m,4}v_1 + D_{m,5}u_2 + D_{m,6}v_2 + D_{m,7}u_3 + D_{m,8}v_3 +$$

$$+ D_{m,9}w_1 + D_{m,10}w_2 + D_{m,11}w_3 = D_{mp}p + D_{mq}q + D_{m\xi}, \quad (m = 1, 2, \dots, 11), \quad (7.37)$$

де диференціальні оператори визначаються за формулами (Д.6).

СДР з частинними похідними (7.37) є системою 22-го порядку. Аналіз системи показує, що з неї не виділяються окремі групи рівнянь, які описують ВКЕ, ВНДС і ПКЕ. Це означає, що ВНДС і КЕ для фізично нелінійних пологих оболонок несиметричної структури взаємозв'язані, що ускладнює знаходження загальних розв'язків.

СДР (7.37) з урахуванням диференціальних операторів (Д.6) дод. 6 після перетворень, аналогічних для однорідної оболонки, зводиться до наступної:

$$\sum_{i=0}^3 c_{1,1+4i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{1,2+4i} \psi_{i,y} + \sum_{i=0}^3 c_{1,3+4i} u_i + \sum_{i=1}^3 c_{1,16+i} w_{i,x} = c_{1,20} p_{,x} + c_{1,21} q_{,x} + D_{1\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{1,1+4i} \varphi_{i,y} - \sum_{i=0}^3 c_{1,2+4i} \psi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{2,4+4i} v_i + \sum_{i=1}^3 c_{2,16+i} w_{i,y} = c_{1,20} p_{,y} + c_{1,21} q_{,y} + D_{2\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{3,1+4i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{3,2+4i} \psi_{i,y} + \sum_{i=0}^3 c_{3,3+4i} u_i + \sum_{i=1}^3 c_{3,16+i} w_{i,x} = c_{3,20} p_{,x} + c_{3,21} q_{,x} + D_{3\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{3,1+4i} \varphi_{i,y} - \sum_{i=0}^3 c_{3,2+4i} \psi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{4,4+4i} v_i + \sum_{i=1}^3 c_{4,16+i} w_{i,y} = c_{3,20} p_{,y} + c_{3,21} q_{,y} + D_{4\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{5,1+4i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{5,2+4i} \psi_{i,y} + \sum_{i=0}^3 c_{5,3+4i} u_i + \sum_{i=1}^3 c_{5,16+i} w_{i,x} = c_{5,20} p_{,x} + c_{5,21} q_{,x} + D_{5\xi}, \quad (7.38)$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{5,1+4i} \varphi_{i,y} - \sum_{i=0}^3 c_{5,2+4i} \psi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{6,4+4i} v_i + \sum_{i=1}^3 c_{6,16+i} w_{i,y} = c_{5,20} p_{,y} + c_{5,21} q_{,y} + D_{6\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{7,1+4i} \varphi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{7,2+4i} \psi_{i,y} + \sum_{i=0}^3 c_{7,3+4i} u_i + \sum_{i=1}^3 c_{7,16+i} w_{i,x} = c_{7,20} p_{,x} + c_{7,21} q_{,x} + D_{7\xi},$$

$$\sum_{i=0}^3 c_{7,1+4i} \varphi_{i,y} - \sum_{i=0}^3 c_{7,2+4i} \psi_{i,x} + \sum_{i=0}^3 c_{8,4+4i} v_i + \sum_{i=1}^3 c_{8,16+i} w_{i,y} = c_{7,20} p_{,y} + c_{7,21} q_{,y} + D_{8\xi},$$

$$c_{n,1} u_{0,x} + c_{n,2} v_{0,y} + c_{n,3} u_{1,x} + c_{n,4} v_{1,y} + c_{n,5} u_{2,x} + c_{n,6} v_{2,y} + c_{n,7} u_{3,x} + c_{n,8} v_{3,y} +$$

$$+ (c_{n,9} \nabla^2 + c_{n,10}) w_1 + (c_{n,11} \nabla^2 + c_{n,12}) w_2 + (c_{n,13} \nabla^2 + c_{n,14}) w_3 = c_{n,15} p + c_{n,16} q + D_{n\xi},$$

$$(n = 9, 10, 11).$$

де коефіцієнти c з індексами наведені у формулах (Д.7) дод. Д.

7.1.5. Метод послідовних наближень. Система (7.37) може розв'язуватися методом послідовних наближень (МПН). В 0-му наближенні розв'язок системи отримується, якщо покласти у правих частинах цих рівнянь нелінійні доданки $D_{m\xi}$ рівними нулю. Знайшовши розв'язок у 0-му наближенні, за вищенаведеними формулами визначаються функції $D_{m\xi}$, які нелінійно залежать від компонент НДС 0-го наближення. Таким чином, для розв'язування задачі в 1-му наближенні праві частини ДР (7.37) будуть відомими і залежатимуть на відміну від методу малого параметра не тільки від нелінійних доданків $D_{m\xi}$, але й від лінійних доданків $D_{mp} p$ та $D_{mq} q$, що залежать від зовнішнього навантаження. Надалі ітераційний процес МПН виконується аналогічно і будемо розуміти, що функції в лівих частинах ДР (7.37) і в наступних перетворених рівняннях є шуканими функціями в наближенні l МПН. Функції в правих частинах ДР (7.37) і в наступних перетворених ДР, які містять множники $p(x, y)$ і $q(x, y)$, лінійні відносно навантажень $p(x, y)$, $q(x, y)$ і залишаються однаковими для довільного наближення l . Функції з індексом ξ у правих частинах ДР (7.37) і в наступних перетворених ДР нелінійно залежать від компонент НДС попереднього $(l-1)$ -го наближення. Згідно з методом малого параметра функції в лівих частинах ДР (7.37) є шуканими доданками в ряді за малим параметром; функції в правих частинах не містять компонент зовнішнього навантаження у 1-му і наступних наближеннях (оскільки в цих наближеннях вони рівні нулю); функції з індексом ξ нелінійно залежать від компонент НДС від 0-го до $(l-1)$ -го наближень включно. Праві частини в крайових умовах в МПН у всіх наближеннях одні і ті ж самі, а в методі збурень, починаючи з 1-го наближення, вони однорідні. Ураховую-

чи степінь складності у знаходженні загальних розв'язків ДР і в задоволенні крайових умов, очевидно, що аналітична і чисельна реалізація МПН при розв'язуванні задач простіша, ніж методом малого параметра.

В кожному наближенні СДР (7.37) може розв'язуватися методом тригонометричних рядів. Для цього праві частини цих рівнянь потрібно апроксимувати відповідними тригонометричними рядами. Показано, що структура рядів, які апроксимують нелінійні доданки у правих частинах рівнянь аналогічна задачі для нелінійно пружних однорідних оболонок.

7.1.6. Перетворення систем ДР. Із СДР (7.38) виділяється дві групи ДР, одна з яких описує ВКЕ, а інша – ПКЕ із ВНДС, якщо ввести наступні спрощення:

1) вважати, що механічні сталі ν_i однакові для всіх шарів оболонки.

2) не урахувувати k'_{1i} та k'_{2i} , поклавши їх рівними нулю.

В цьому випадку, урахувавши (Д.7), (7.31) і третю умову (7.9), отримаємо:

$$\begin{aligned} c_{1,3} = c_{1,7} = c_{1,11} = c_{1,15} = c_{3,2} = c_{5,2} = c_{7,2} = c_{3,3} = c_{4,4} = c_{5,3} = c_{6,4} = c_{7,3} = c_{8,4} = 0; \\ c_{1,3} = c_{1,7} = c_{1,11} = c_{1,15} = c_{3,2} = c_{5,2} = c_{7,2} = c_{3,3} = c_{4,4} = c_{5,3} = c_{6,4} = c_{7,3} = c_{8,4} = 0; \\ c_{3,11} = c_{4,12} \neq 0; c_{7,11} = c_{8,12} \neq 0; c_{5,7} = c_{6,8} \neq 0; c_{5,15} = c_{6,16} \neq 0; \\ c_{7,7} = c_{8,8} \neq 0; c_{5,11} = c_{6,12} \neq 0; c_{7,15} = c_{8,16} \neq 0; c_{3,7} = c_{4,8} \neq 0; c_{3,15} = c_{4,16} \neq 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

3). Осереднити коефіцієнти третього – восьмого ДР системи (7.38) при похідних від складових компонент поперечних переміщень, а у дев'ятому – одинадцятому при похідних від складових компонент тангенціальних переміщень:

$$\begin{aligned} c_{3,17} = c_{4,17} \approx c'_{3,17} = (c_{3,17} + c_{4,17})/2; \dots; c_{7,19} = c_{8,19} \approx c'_{7,19} = (c_{7,19} + c_{8,19})/2; \\ c_{9,1} = c_{9,2} \approx c'_{9,1} = (c_{9,1} + c_{9,2})/2; \dots; c_{11,7} = c_{11,8} \approx c'_{11,7} = (c_{11,7} + c_{11,8})/2. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Перетворюючи ДР (7.38) аналогічно як і для однорідних оболонок і, урахувавши (7.39) та (7.40), отримується дві незалежні в кожному наближенні СДР.

Неоднорідна СДР 6-го порядку ВНДС з ВКЕ:

$$c_{3,6} \nabla^2 \psi_1 + c_{3,7} \psi_1 + c_{3,11} \psi_2 + c_{3,14} \nabla^2 \psi_3 + c_{3,15} \psi_3 = D_{3\xi,y} - D_{4\xi,x};$$

$$\begin{aligned}
c_{5,7}\psi_1 + c_{5,10}\nabla^2\psi_2 + c_{5,11}\psi_2 + c_{5,15}\psi_3 &= D_{5\xi,y} - D_{6\xi,x}; \\
c_{7,6}\nabla^2\psi_1 + c_{7,7}\psi_1 + c_{7,11}\psi_2 + c_{7,14}\nabla^2\psi_3 + c_{7,15}\psi_3 &= D_{7\xi,y} - D_{8\xi,x}.
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Неоднорідна СДР 16-го порядку ВНДС з ПКЕ:

$$\begin{aligned}
&c_{1,1}\varphi_{0,x} + c_{1,5}\varphi_{1,x} + c_{1,9}\varphi_{2,x} + c_{1,13}\varphi_{3,x} + c_{1,2}\psi_{0,y} + \\
&+ c_{1,17}w_{1,x} + c_{1,18}w_{2,x} + c_{1,19}w_{3,x} = c_{1,20}p_{,x} + c_{1,21}q_{,x} + D_{1\xi}; \\
&c_{1,1}\varphi_{0,y} + c_{1,5}\varphi_{1,y} + c_{1,9}\varphi_{2,y} + c_{1,13}\varphi_{3,y} - c_{1,2}\psi_{0,x} + \\
&+ c_{2,17}w_{1,y} + c_{2,18}w_{2,y} + c_{2,19}w_{3,y} = c_{1,20}p_{,y} + c_{1,21}q_{,y} + D_{2\xi}; \\
\sum_{i=0}^3 c_{3,1+4i}\nabla^2\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c_{3,3+4i}\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c'_{3,16+i}\nabla^2w_i &= c_{3,20}\nabla^2p + c_{3,21}\nabla^2q + D_{3\xi,x} + D_{4\xi,y}; \\
\sum_{i=0}^3 c_{5,1+4i}\nabla^2\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c_{5,3+4i}\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c'_{5,16+i}\nabla^2w_i &= c_{5,20}\nabla^2p + c_{5,21}\nabla^2q + D_{5\xi,x} + D_{6\xi,y}; \\
\sum_{i=0}^3 c_{7,1+4i}\nabla^2\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c_{7,3+4i}\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c'_{7,16+i}\nabla^2w_i &= c_{7,20}\nabla^2p + c_{7,21}\nabla^2q + D_{7\xi,x} + D_{8\xi,y}; \\
&c'_{n,1}\varphi_0 + c'_{n,3}\varphi_1 + c'_{n,5}\varphi_2 + c'_{n,7}\varphi_3 + (c_{n,9}\nabla^2 + c_{n,10})w_1 + \\
&+ (c_{n,11}\nabla^2 + c_{n,12})w_2 + (c_{n,13}\nabla^2 + c_{n,14})w_3 = c_{n,15}p + c_{n,16}q + D_{n\xi}, \quad (n = 9, 10, 11).
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Із СДР (7.41) випливає, що ВКЕ кососиметричного і симетричного деформування (описуються однорідною СДР) взаємозалежні на відміну від однорідної оболонки. Частинні розв'язки неоднорідної СДР (7.41) уточнюють ВНДС. Структура 3-го–5-го ДР (7.42) також відрізняється від відповідних ДР для нелінійно лружної однорідної оболонки. СДР (7.41) операторними перетвореннями зводиться до зручної СДР з однаковими лівими частинами відносно нових шуканих функцій. Методика розв'язання таких СДР і знаходження їх загальних розв'язків через загальні розв'язки трьох неоднорідних ДР Гельмгольців уже описана раніше (розд. 2). Це спрощуватиме використання методу одинарних та подвійних тригонометричних рядів в кожному наближенні МПН. Із системи (7.42) не виділяються ДР, які описують тільки ПКЕ.

Система (7.42) зводиться до СДР відносно функцій u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 . Для цього із останніх трьох рівнянь (7.42) функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ виражаються через функції

φ_0, w_1, w_2, w_3 та праві частини цих рівнянь і підставляються в перші п'ять ДР. Наведемо в структурному вигляді цю СДР відносно функцій u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 :

$$P_{nu0}u_0 + P_{nv0}v_0 + P_{nw1}w_1 + P_{nw2}w_2 + P_{nw3}w_3 = P_{np}p + P_{nq}q + P_{n\xi}, \quad (n = 1, 2, \dots, 5), \quad (7.43)$$

де P_{nu0}, \dots, P_{nq} – диференціальні оператори; $P_{n\xi}$ – функції, нелінійні від НДС.

СДР (7.43) 16-го порядку. не розділяється на ДР ВНДС і ПКЕ. Для СДР (7.43) операторним методом отримуються форми загальних розв'язків у кожному наближенні з наступним застосуванням методу тригонометричних рядів. Знайшовши функції u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 , визначаються потенціальні функції $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Одержавши з (7.41) вихрові функції ψ_1, ψ_2, ψ_3 , решта складових компонент переміщень $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ визначаються із 3-го – 8-го рівнянь системи (7.38). Компоненти переміщень і напружень знаходяться за відповідними співвідношеннями п. 7.1.2. У вирази для всіх складових компонент переміщень і напружень входять сталі інтегрування, які визначатимуться із крайових умов (7.35).

7.2. Фізично нелінійні багатошарові оболонки симетричної структури

7.2.1. Основні співвідношення. Розглядається нетонка багатошарова полого ФНО сталої товщини h фізично і геометрично симетричної структури з товщинами шарів h_i ($1 \leq i \leq j$; j – кількість шарів – непарне число) і радіусами кривини серединних поверхонь кожного шару R_{1i}, R_{2i} в прямокутній системі координат $Oxyz$ (див. п. 7.1.1). Симетричність структури полягає в тому, що товщини і МХ шарів з номерами i та $j - (i - 1)$ є однаковими.

Граничні умови на лицевих поверхнях задовольняють (7.1), а граничні на бічній поверхні можуть бути довільними. Виконуються залежності (7.2)–(7.4).

Переміщення у i -му шарі зображуватимемо у вигляді (7.5), а функції $\varphi_{ki}(z_i)$ в межах кожного шару у вигляді (7.6), але потребуємо, щоб ці функції відповідали кососиметричному деформуванню при непарному k і симетричному –

при парному k . Наприклад, для тришарової оболонки симетричної структури матимемо для функцій φ_{ki} ($k = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3$) такі вирази:

$$\begin{aligned} \varphi_{0i}(z_i) &\equiv a_{0i0}P_0, (a_{0i0} = 1); \varphi_{11}(z_1) = a_{110}P_0 + a_{111}P_1; \varphi_{21}(z_1) = a_{210}P_0 + a_{211}P_1 + a_{212}P_2, \\ \varphi_{31}(z_1) &= a_{310}P_0 + a_{311}P_1 + a_{312}P_2 + a_{313}P_3, P_i = P_i \left(z_i / h_i \right); \\ \varphi_{12}(z_2) &= a_{121}P_1; \varphi_{22}(z_2) = a_{220}P_0 + a_{222}P_2, \varphi_{32}(z_2) = a_{321}P_1 + a_{323}P_3, P_i = P_i \left(z_2 / h_2 \right); \\ \varphi_{13}(z_3) &= -a_{110}P_0 + a_{111}P_1, \varphi_{23}(z_3) = a_{210}P_0 - a_{211}P_1 + a_{212}P_2, \\ \varphi_{33}(z_3) &= -a_{310}P_0 + a_{311}P_1 - a_{312}P_2 + a_{313}P_3, P_i = P_i \left(z_3 / h_3 \right). \end{aligned}$$

Для оболонки з j шарами:

$$\begin{aligned} \varphi_{0i}(2z_i / h_i) &\equiv a_{0i0}P_0, (a_{0i0} = 1); \varphi_{1i}(2z_i / h_i) = a_{1i0}P_0 + a_{1i1}P_1; \\ \varphi_{2i}(2z_i / h_i) &= a_{2i0}P_0 + a_{2i1}P_1 + a_{2i2}P_2; \varphi_{3i}(2z_i / h_i) = a_{3i0}P_0 + a_{3i1}P_1 + a_{3i2}P_2 + a_{3i3}P_3; \\ \varphi_{1s}(2z_s / h_s) &= a_{1s1}P_1; \varphi_{2s}(2z_s / h_s) = a_{2s0}P_0 + a_{2s2}P_2; \varphi_{3s}(2z_s / h_s) = a_{3s1}P_1 + a_{3s3}P_3; (7.44) \\ \varphi_{1j-(i-1)}(z_{j-(i-1)}) &= -a_{1i0}P_0 + a_{1i1}P_1, \varphi_{2j-(i-1)}(z_{j-(i-1)}) = a_{2i0}P_0 - a_{2i1}P_1 + a_{2i2}P_2, \\ \varphi_{3j-(i-1)}(z_{j-(i-1)}) &= -a_{3i0}P_0 + a_{3i1}P_1 - a_{3i2}P_2 + a_{3i3}P_3, P_i = P_i \left(z_{j-(i-1)} / h_{j-(i-1)} \right), \end{aligned}$$

де s – номер середнього шару ($s = (j + 1) / 2$); шари з номерами i та $j - (i - 1)$ – симетрично розташовані шари.

Отже, в залежностях (7.6) для оболонки симетричної структури між коефіцієнтами i -го та $j - (i - 1)$ -го шарів виконуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} a_{k j-(i-1) m} &= -a_{kim} \quad (k \text{ непарне, } m \text{ парне}); \quad a_{k j-(i-1) m} = a_{kim} \quad (k \text{ непарне, } m \text{ непарне}); \\ a_{k j-(i-1) m} &= a_{kim} \quad (k \text{ парне, } m \text{ парне}); \quad a_{k j-(i-1) m} = -a_{kim} \quad (k \text{ парне, } m \text{ непарне}). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Коефіцієнти a_{kim} у (7.6), (7.44) визначаються на основі (7.7) – (7.9). Всі залежності і рівняння для пологої шаруватої ФНО симетричної структури отримуються із відповідних залежностей і рівнянь пп. 7.1.2 – 7.1.4 для оболонки несиметричної структури з урахуванням (7.44) і (7.45).

7.2.2. Система диференціальних рівнянь. Метод розв'язання. Для розв'язання СДРР пологих ФНО симетричної структури також використовуватиметься МПН. Аналітично показано, що в кожному наближенні ДРР для нелінійно пружних шаруватих оболонок симетричної структури на основі пп. 7.1.2, 7.1.3, 7.2.1, (Д.7) та спрощень в п. 7.1.6, розділяються на дві СДР.

Одна СДР, яка описує ВКЕ з уточненням ВНДС, має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} c_{3,6} \nabla^2 \psi_1 + c_{3,7} \psi_1 + c_{3,14} \nabla^2 \psi_3 + c_{3,15} \psi_3 &= D_{3\xi,y} - D_{4\xi,x}; \\ c_{5,10} \nabla^2 \psi_2 + c_{5,11} \psi_2 &= D_{5\xi,y} - D_{6\xi,x}; \\ c_{7,6} \nabla^2 \psi_1 + c_{7,7} \psi_1 + c_{7,14} \nabla^2 \psi_3 + c_{7,15} \psi_3 &= D_{7\xi,y} - D_{8\xi,x}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Інша група ДР описує ВНДС з ПКЕ:

$$\begin{aligned} c_{1,1} \varphi_{0,x} + c_{1,9} \varphi_{2,x} + c_{1,2} \psi_{0,y} + c_{1,17} w_{1,x} + c_{1,18} w_{2,x} + c_{1,19} w_{3,x} &= c_{1,20} p_{,x} + D_{1\xi}; \\ c_{1,1} \varphi_{0,y} + c_{1,9} \varphi_{2,y} - c_{1,2} \psi_{0,x} + c_{2,17} w_{1,y} + c_{2,18} w_{2,y} + c_{2,19} w_{3,y} &= c_{1,20} p_{,y} + D_{2\xi}; \\ \sum_{i=1,3}^3 c_{3,1+4i} \nabla^2 \varphi_i + \sum_{i=1,3}^3 c_{3,3+4i} \varphi_i + \sum_{i=1}^3 c'_{3,16+i} \nabla^2 w_i &= c_{3,21} \nabla^2 q + D_{3\xi,x} + D_{4\xi,y}; \\ \sum_{i=0,2}^2 c_{5,1+4i} \nabla^2 \varphi_i + c_{5,11} \varphi_2 + \sum_{i=1}^3 c'_{5,16+i} \nabla^2 w_i &= c_{5,20} \nabla^2 p + D_{5\xi,x} + D_{6\xi,y}; \\ \sum_{i=1,3}^3 c_{7,1+4i} \nabla^2 \varphi_i + \sum_{i=1,3}^3 c_{7,3+4i} \varphi_i + \sum_{i=1}^3 c'_{7,16+i} \nabla^2 w_i &= c_{7,21} \nabla^2 q + D_{7\xi,x} + D_{8\xi,y}; \quad (7.47) \\ c'_{n,1} \varphi_0 + c'_{n,3} \varphi_1 + c'_{n,5} \varphi_2 + c'_{n,7} \varphi_3 + (c_{n,9} \nabla^2 + c_{n,10}) w_1 + \\ + c_{n,12} w_2 + (c_{n,13} \nabla^2 + c_{n,14}) w_3 &= c_{n,15} p + c_{n,16} q + D_{n\xi}, \quad (n = 9, 11); \\ c'_{10,1} \varphi_0 + c'_{10,3} \varphi_1 + c'_{10,5} \varphi_2 + c'_{10,7} \varphi_3 + c_{10,10} w_1 + \\ + (c_{10,11} \nabla^2 + c_{10,12}) w_2 + c_{10,14} w_3 &= c_{10,15} p + c_{10,16} q + D_{10\xi}. \end{aligned}$$

Із СДР (7.46) випливає, що ВКЕ симетричного і кососиметричного деформування (описуються однорідною СДР) незалежні. 1-е і 3-є ДР системи операторним методом зводяться до 2-х неоднорідних ДР 4-го порядку відносно 2-х нових функцій, ліві частини яких зображуються у вигляді добутку двох операторів Гельмгольца над деякою шуканою функцією. Надалі розв'язки цих ДР виражаються через розв'язки неоднорідних ДР Гельмгольца.

Структура СДР (7.47) ВНДС із ПКЕ аналогічна структурі ДР (6.9) для

однорідної оболонки. Із неї також не виділяються окремі рівняння ВНДС і ПКЕ. У кожному наближенні вона зводиться до системи вигляду (7.43), яка розв'язується операторним методом з наступним використанням методу тригонометричних рядів. Алгоритм знаходження НДС аналогічний п. 7.1.

7.3. Транстропні шаруваті оболонки

7.3.1. Оболонки несиметричної структури. Якщо у всіх виразах, співвідношеннях, рівняннях і крайових умовах п. 7.1 покласти доданки, що нелінійно залежать від компонент НДС, рівними нулю, то отримуються відповідні вирази, співвідношення, рівняння і крайові умови для шаруватих транстропних оболонок несиметричної структури. Розв'язком задачі для шаруватої транстропної оболонки несиметричної структури буде розв'язок відповідної задачі для фізично нелінійної шаруватої оболонки несиметричної структури в нульовому наближенні.

СДР, яка описує ВНДС із ПКЕ – це система (7.42), в якій $D_{1\xi} = D_{2\xi} = \dots = D_{11\xi} = 0$. Із указаної СДР не виділяються рівняння ВНДС і ПКЕ.

Всі висновки п. 7.1.6 відносно ВКЕ, ВНДС і ПКЕ, які стосуються 0-го наближення, залишаються справедливими і для транстропних оболонок несиметричної структури. СДР типу ВКЕ (7.41) буде однорідною, а отже, описуватиме тільки виключно взаємозалежні ВКЕ при кососиметричному і симетричному деформуванні. Метод розв'язування отриманих СДР для нетонких шаруватих транстропних пологих оболонок аналогічний описаному в п. 7.1.6, урахувавши, що в правих частинах ДР доданки з індексом ξ рівні нулю.

7.3.2. Оболонки симетричної структури. Якщо в п. 7.2 покласти нелінійні доданки рівними нулю, то отримуються відповідні ДР і крайові умови для транстропних оболонок симетричної структури. Розв'язок задачі для шаруватої транстропної оболонки симетричної структури – це розв'язок відповідної задачі для фізично нелінійної шаруватої оболонки симетричної структури в 0-му наближенні.

СДР вихрового КЕ – це однорідна СДР (7.46) незалежних вихрових КЕ симетричного і кососиметричного деформування, яка якісно співпадає з СДР для однорідних транстропних оболонок і розв'язання такої СДР описано раніше.

СДР, яка описує ВНДС із ПКЕ – це взаємозв’язана система (7.47), в якій функції $D_{n\xi} = 0$ ($n = 1, 2, \dots, 11$). Вона також якісно співпадає з СДР для однорідних транстропних оболонок, розв’язання граничних задач для яких також уже описано.

Із указаної системи не виділяються окремо рівняння ВНДС і ПКЕ.

7.4. Фізично нелінійні шаруваті пластини несиметричної структури

Розглядаються шаруваті нетонкі ФНП сталої товщини h несиметричної структури з товщинами шарів h_i ($1 \leq i \leq j$; j – кількість шарів) (рис. 7.2).. Нелінійно пружні шари мають різні МХ. Вводиться прямокутна система координат $O_i x_i y_i z_i$ в межах кожного шару. Осі $O_i x_i$ та $O_i y_i$ напрямлені вздовж сторін пластини a і b . Початок осі $O z_i$ належить серединній площині i -го шару пластини ($-h_i/2 \leq z_i \leq h_i/2$).

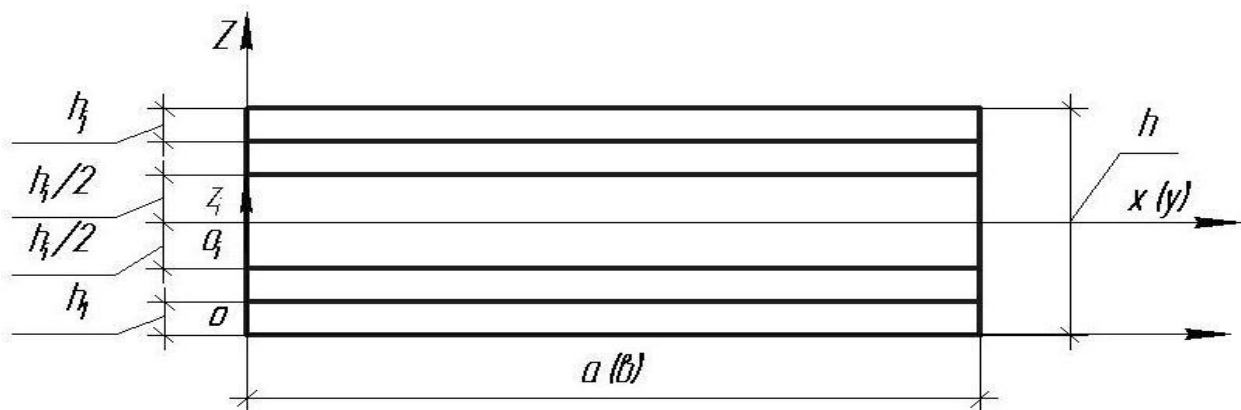


Рис. 7.2.

Граничні умови на лицевих площинах задовольняють (7.1), а граничні умови на бічній поверхні можуть бути довільними.

Основні співвідношення, ДР рівноваги та крайові умови отримуються на основі п. 7.1, якщо у всіх залежностях, формулах і рівняннях покласти

$$k_{1i} = k_{2i} = k'_{1i} = k'_{2i} = 0. \quad (7.48)$$

Система ДР рівноваги для ФНП має вигляд (7.37) з урахуванням (7.48). Вказана система ДР 22-го порядку неоднорідна із суттєво нелінійними правими частинами. Для розв’язання цієї системи може бути застосований МПН.

В кожному наближенні СДР розділяється на дві СДР. Одна СДР (6-го порядку) типу (7.41) описує ВКЕ з уточненням ВНДС, приймаючи до уваги (7.48). Інша СДР– 16-го порядку типу (7.42) – описує ВНДС з ПКЕ.

В кожному наближенні СДР типу (7.41) зводиться операторним методом до 3-х неоднорідних визначальних ДР 6-го порядку, кожне з яких зведене до розв'язування 3-х неоднорідних ДР Гельмгольца. Таким чином, згідно з розділом 2 отримуються загальні розв'язки СДР типу (7.41).

СДР ВНДС і ПКЕ типу (7.42) з урахуванням (7.48) зводиться для ФНП до СДР 16-го порядку відносно функцій u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 і має вигляд:

$$P_{iu0}u_0 + P_{iv0}v_0 + P_{iw1}w_1 + P_{iw2}w_2 + P_{iw3}w_3 = P_{ip}p + P_{iq}q + P_{i\xi}, \quad (7.49)$$

де $P_{iu0}, \dots, P_{iw3}, P_{ip}, P_{iq}$ – диференціальні оператори і $P_{i\xi}$ – функції ($i = 1, 2, \dots, 5$), які суттєво нелінійно залежать від НДС (не наводяться із-за їх громіздкості).

Наведемо розв'язання СДР (7.49). Зобразимо u_0, v_0, w_1, w_2, w_3 таким чином:

$$u_0(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{i1}^0 D_i(x, y); \quad v_0(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{i2}^0 D_i(x, y); \quad w_{k-2}(x, y) = \sum_{i=1}^5 P_{ik}^0 D_i(x, y), \quad (7.50)$$

де P_{ik}^0 ($k = 3, 4, 5$) – ад'юнкти системи (7.49), а $D_i(x, y)$ – нові шукані функції, які на основі (7.49) і (7.50) знаходяться з такої визначальної СДР:

$$P_0 D_i(x, y) = P_{ip}p + P_{iq}q + P_{i\xi} \quad (n = 1, 2, \dots, 5). \quad (7.51)$$

Тут P_0 – диференціальний визначник СДР (7.49) 16-го порядку, який з урахуванням (Д.6), (Д.7) дод. Д має вигляд:

$$P_0 = \nabla^8 (p_8 \nabla^8 + p_6 \nabla^6 + p_4 \nabla^4 + p_2 \nabla^2 + p_0), \quad (p_n - \text{МГП}), \quad (7.52)$$

який суттєво відрізняється від диференціального визначника СДР для транстропних пластин.

Отримано загальні розв'язки СДР (7.51):

$$D_1(x, y) = D_{1B}(x, y) + D_{1\Pi}(x, y) + D_{1r}(x, y); \quad D_i(x, y) = D_{ir}(x, y), \quad (i = 2, 3, \dots, 5), \quad (7.53)$$

де $D_{1B}(x, y)$ і $D_{1П}(x, y)$ – загальні розв’язки однорідних ДР рівнянь:

$$\nabla^8 D_{1B}(x, y) = 0; \quad (7.54)$$

$$(p_8 \nabla^8 + p_6 \nabla^6 + p_4 \nabla^4 + p_2 \nabla^2 + p_0) D_{1П} = 0; \quad (7.55)$$

$D_{1r}(x, y), \dots, D_{5r}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних ДР 16-го порядку (7.51). Загальний розв’язок ДР (7.54) визначається аналогічно п. 2.2.3, а загальний розв’язок ДР (7.55) зображується як сума загальних розв’язків чотирьох ДР Гельмгольца. Ліві частини неоднорідних ДР (7.51) з урахуванням (7.52) є добутком чотирьох операторів Лапласа і чотирьох операторів Гельмгольца над шуканими функціями $D_i(x, y)$. Такі неоднорідні ДР також зводяться остаточно операторним методом інтегрування (п. 2.2.4.2) з урахуванням п. 2.2.3 до неоднорідних ДР 2-го порядку. Отже, загальні розв’язки ДР (7.51) виражаються через загальні розв’язки неоднорідних ДР 2-го порядку.

Функції $D_{1B}(x, y)$ та частинні розв’язки $D_{1r}(x, y), \dots, D_{5r}(x, y)$ ДР (7.51) для пластин описують її ВНДС. Оператор ∇^8 в (7.54) і структура ДР (7.51) і (7.55) вказують на взаємозалежність ВНДС симетричного і кососиметричного деформування. Із ДР типу (7.41) випливає, що ВКЕ для нетонких шаруватих ФНП несиметричної структури поєднує в собі взаємозалежні вихрові КЕ кососиметричного і симетричного деформування. НДС наближення l МПН суттєво нелінійно залежить від НДС попереднього НДС.

На основі (7.50) та (7.53) отримуються загальні розв’язки для складових переміщень:

$$u_0(x, y) = P_{11}^0(D_{1B} + D_{1П}) + \sum_{i=1}^5 P_{i1}^0 D_{ir}; \quad v_0(x, y) = P_{12}^0(D_{1B} + D_{1П}) + \sum_{i=1}^5 P_{i2}^0 D_{ir}; \quad (7.56)$$

$$w_{k-2}(x, y) = P_{1k}^0(D_{1B} + D_{1П}) + \sum_{i=1}^5 P_{ik}^0 D_{ir}, \quad (k = 3, 4, 5).$$

Складові $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ визначаються із 3-го–8-го ДР (7.37), записаних для пластини. Далі за відповідними залежностями знаходяться загальні розв’язки для компонент НДС.

7.5. Фізично нелінійні шаруваті пластини симетричної структури

Розглядається багатошарова нетонка фізично нелінійна пластина сталої товщини h симетричної структури з товщинами шарів h_i ($1 \leq i \leq j$; j – кількість шарів – непарне число). Для кожного шару вводиться місцева система координат

аналогічна (п. 7.4). Граничні умови на лицевих площинах задовольняють (7.1).

Основні співвідношення, ДР рівноваги та крайові умови отримуються на основі п. 7.2 з урахуванням (7.44), (7.45), якщо у всіх залежностях, формулах і рівняннях перейти від оболонки до пластини, приймаючи до уваги (7.48).

СДРР для ФНП симетричної структури структурно аналогічні СДРР для однорідних ФНП. і мають вигляд (7.37) з урахуванням (7.44), (7.45) та (7.48). Вказана система ДР 22-го порядку розділена на дві СДР: одна описує НДС при кососиметричному навантаженні, а інша – при симетричному.

СДР (12-го порядку), що описує кососиметричне деформування:

$$D_{m,3}u_1 + D_{m,4}v_1 + D_{m,7}u_3 + D_{m,8}v_3 + D_{m,9}w_1 + D_{m,11}w_3 = D_{mq}q + D_{m\xi}, \quad (7.57)$$

де оператори $D_{m,n}$ ($m=3,4,7,8,9,11$; $n=3,4,7,8,9,11$), D_{mq} та функції $D_{m\xi}$ дорівнюють відповідним операторам та функціям системи (7.37) для пластини при умовах (7.44), (7.45) та (7.48).

СДР (7.57) в свою чергу розділена на дві окремі системи.

Одна СДР (4-го порядку) описує ВКЕ з уточненням ВНДС:

$$\begin{aligned} c_{3,6}\nabla^2\psi_1 + c_{3,7}\psi_1 + c_{3,14}\nabla^2\psi_3 + c_{3,15}\psi_3 &= D_{3\xi,y} - D_{4\xi,x}; \\ c_{7,6}\nabla^2\psi_1 + c_{7,7}\psi_1 + c_{7,14}\nabla^2\psi_3 + c_{7,15}\psi_3 &= D_{7\xi,y} - D_{8\xi,x}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Інша система (8-го порядку) визначає ВНДС з ПКЕ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,3}^3 c_{3,1+4i}\nabla^2\varphi_i + \sum_{i=1,3}^3 c_{3,3+4i}\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c_{3,16+i}\nabla^2w_i &= c_{3,21}\nabla^2q + D_{3\xi,x} + D_{4\xi,y}; \\ \sum_{i=1,3}^3 c_{7,1+4i}\nabla^2\varphi_i + \sum_{i=1,3}^3 c_{7,3+4i}\varphi_i + \sum_{i=1}^3 c_{7,16+i}\nabla^2w_i &= c_{7,21}\nabla^2q + D_{7\xi,x} + D_{8\xi,y}; \\ c_{9,3}\varphi_1 + c_{9,7}\varphi_3 + c_{9,9}\nabla^2w_1 + c_{9,13}\nabla^2w_3 &= c_{9,16}q + D_{9\xi}; \\ c_{11,3}\varphi_1 + c_{11,7}\varphi_3 + c_{11,9}\nabla^2w_1 + (c_{11,13}\nabla^2 + c_{11,14})w_3 &= c_{11,16}q + D_{11\xi}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

У СДР (7.58), (7.59) коефіцієнти c з індексами визначаються за формулами (Д.7) з урахуванням (7.44), (7.45) та (7.48) і співпадають з відповідними коефіцієнтами (з точністю до позначень) для транстропної однорідної пластини.

СДР (7.59) зведена до неоднорідної СДР з частинними похідними 8-го порядку відносно функцій $w_1(x, y), w_3(x, y)$ (як і для однорідних пластин):

$$P_{k1}w_1 + P_{k3}w_3 = P_{kq}q + P_{k\xi}, \quad (k=1,3), \quad (7.60)$$

де P_{k1}, P_{k3}, P_{kq} – диференціальні оператори, $P_{k\xi}$ – функції, які нелінійно залежать від компонент НДС $(l-1)$ -го наближення МПН.

Загальні розв'язки системи (7.60):

$$w_1 = P_{33}(\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}) - P_{13}\Phi_{3r}; \quad w_3 = -P_{31}(\Phi_{1B} + \Phi_{1\Pi} + \Phi_{1r}) + P_{11}\Phi_{3r}, \quad (7.61)$$

де Φ_{1B} і $\Phi_{1\Pi}$ загальні розв'язки рівнянь:

$$\nabla^4\Phi_{1B} = 0; \quad (P_{4\Pi}\nabla^4 + P_{2\Pi}\nabla^2 + P_{0\Pi})\Phi_{1\Pi} = 0; \quad (7.62)$$

Φ_{1r} і Φ_{3r} – частинні розв'язки неоднорідних ДР 8-го порядку:

$$\nabla^4(P_{4\Pi}\nabla^4 + P_{2\Pi}\nabla^2 + P_{0\Pi})\Phi_1 = P_{kq} + P_{k\xi}, \quad (k=1,3); \quad (P_{4\Pi}, P_{2\Pi}, P_{0\Pi} - \text{МГП}). \quad (7.63)$$

Функції Φ_{1B} , Φ_{1r} і Φ_{3r} визначають ВНДС, причому, Φ_{1r} і Φ_{3r} на кожному кроці МПН уточнюють ВНДС. Друге ДР (7.62) визначає ПКЕ. Інші складові компонент переміщень знаходяться із перших чотирьох рівнянь (7.57). Компоненти НДС знаходяться за відповідними формулами.

СДР, що описує симетричне деформування (10-го порядку):

$$D_{m,1}u_0 + D_{m,2}v_0 + D_{m,5}u_2 + D_{m,6}v_2 + D_{m,10}w_2 = D_{mp}p + D_{m\xi}, \quad (m=1,2,5,6,10). \quad (7.64)$$

Тут оператори $D_{m,n}$ ($n=1,2,5,6,10$), D_{mp} і функції $D_{m\xi}$ рівні відповідним операторам і функціям системи (7.37), якщо в них перейти до шаруватих пластин.

Із СДР (7.64) виділено рівняння ВКЕ з ВНДС та ВНДС з ПКЕ.

ДР, що визначає ВКЕ (однорідне ДР) і уточнює ВНДС (частинні розв'язки неоднорідного ДР):

$$c_{5,10}\nabla^2\psi_2 + c_{5,11}\psi_2 = D_{5\xi,y} - D_{6\xi,x}. \quad (7.65)$$

Система, яка описує ВНДС і ПКЕ:

$$\begin{aligned}
 D_{1,1}u_0 + D_{1,2}v_0 + D_{1,5}u_2 + D_{1,6}v_2 + D_{1,10}w_2 &= D_{1p}p + D_{1\xi}; \\
 D_{2,1}u_0 + D_{2,2}v_0 + D_{2,5}u_2 + D_{2,6}v_2 + D_{2,10}w_2 &= D_{2p}p + D_{2\xi}; \\
 \sum_{i=0,2}^2 c_{5,1+4i} \nabla^2 \varphi_i + c_{5,11} \varphi_2 + c_{5,18} \nabla^2 w_2 &= c_{5,20} \nabla^2 p + D_{5\xi,x} + D_{6\xi,y}; \\
 c_{10,1} \varphi_0 + c_{10,5} \varphi_2 + (c_{10,11} \nabla^2 + c_{10,12}) w_2 &= c_{10,15} p + D_{10\xi}.
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

Це СДР 8-го порядку, яка зводиться до СДР відносно u_0, v_0, w_2

$$T_{n1}u_0 + T_{n2}v_0 + T_{n3}w_2 = T_{np}p + T_{n\xi}, \quad (n = 1, 2, 3), \tag{7.67}$$

де $T_{n1}, T_{n2}, T_{n3}, T_{np}$ – диференціальні оператори, $T_{n\xi}$ – нелінійні функції від компонент НДС ($l-1$)-го наближення.

Загальні розв'язки СДР (7.67) одержуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= T_{11}^0(F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^3 T_{j1}^0 F_{jr}; \quad v_0(x, y) = T_{12}^0(F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^3 T_{j2}^0 F_{jr}; \\
 w_2(x, y) &= T_{13}^0(F_{1B} + F_{1\Pi}) + \sum_{j=1}^3 T_{j3}^0 F_{jr},
 \end{aligned} \tag{7.68}$$

де T_{ji}^0 – ад'юнкти визначника СДР (7.67); F_{1B} і $F_{1\Pi}$ загальні розв'язки ДР:

$$\nabla^4 F_{1B} = 0; \quad (N_{4\Pi} \nabla^4 + N_{2\Pi} \nabla^2 + N_{0\Pi}) F_{1\Pi} = 0, \quad (N_{4\Pi}, N_{2\Pi}, N_{0\Pi} - \text{МГП}); \tag{7.69}$$

F_{1r}, F_{2r}, F_{3r} – частинні розв'язки неоднорідних ДР 8-го порядку:

$$\nabla^4 (N_{4\Pi} \nabla^4 + N_{2\Pi} \nabla^2 + N_{0\Pi}) F_n = T_{np}p + T_{n\xi}, \quad (n = 1, 2, 3). \tag{7.70}$$

Функції $F_{1B}, F_{1r}, F_{2r}, F_{3r}$ знаходяться згідно з п. 2.2 і визначають ВНДС при симетричному деформуванні (Φ_{ir} на кожному кроці МПН уточнюють ВНДС); функція $F_{1\Pi}$ визначає ПКЕ. Складові u_2, v_2 знаходяться із перших двох рівнянь (7.66). Компоненти НДС знаходяться за наведеною раніше методикою.

На основі методу зведення неоднорідних ДР високого порядку до неоднорідних ДР 2-го порядку (п. 2.2) визначаються загальні розв'язки СДР (7.60), (7.67). Методика уже описана раніше для граничних задач пластин довільної товщини.

7.6. Шаруваті транстропні пластини

7.6.1. Пластини несиметричної структури. Покладаючи у всіх виразах, співвідношеннях, рівняннях і крайових умовах п. 7.4 нелінійні доданки рівними нулю, дістанемо відповідні вирази, співвідношення, рівняння і крайові умови для шаруватих транстропних нетонких пластин несиметричної структури.

Загальним розв'язком задачі для нетонкої шаруватої транстропної пластини несиметричної структури буде розв'язок відповідної задачі для фізично нелінійної шаруватої пластини несиметричної структури в нульовому наближенні.

СДР типу (7.41), записана для пластин, описує взаємозалежні КЕ симетричного і кососиметричного деформування. СДР (7.49) описує ВНДС із ПКЕ, якщо в ній покласти $P_{n\xi} = 0$. Всі висновки п. 7.4 (в 0-му наближенні МПН) відносно ВКЕ, ВНДС і ПКЕ залишаються справедливими для транстропних пластин несиметричної структури, тільки СДР ВКЕ типу (7.41) буде однорідною, а частинні розв'язки відповідних ДР (7.51) визначатимуться зовнішнім навантаженням.

7.6.2. Пластини симетричної структури. Якщо в п. 7.5 покласти нелінійні доданки рівними нулю, то матимемо рівняння і загальні розв'язки для транстропних пластин симетричної структури. Розв'язки задач для шаруватих транстропних пластин симетричної структури – це розв'язки відповідних задач для фізично нелінійних шаруватих пластин симетричної структури в нульовому наближенні.

СДР, яка описує НДС транстропної пластини симетричної структури, розділена на дві незалежні СДР, одна з яких описує НДС при кососиметричному, а інша при симетричному навантаженні. СДР, яка описує НДС при кососиметричному навантаженні – це система (7.57), в якій потрібно у правих частинах покласти функції $D_{m\xi} = 0$ ($m = 3, 4, 7, 8, 9, 11$). Із указаної системи виділено окремо СДР, яка описує ВКЕ (система (7.58) при $D_{3\xi} = D_{4\xi} = D_{7\xi} = D_{8\xi} = 0$) та система ВНДС і ПКЕ (система (7.60) при $P_{k\xi} = 0$). причому, загальний розв'язок (7.61) СДР (7.60) зображується у вигляді суми розв'язків, кожен з яких окремо характеризує ВНДС та ПКЕ.

СДР, яка описує НДС при симетричному навантаженні – це система (7.64) при $D_{m\xi} = 0$ ($m = 1, 2, 5, 6, 10$). Із указаної системи виділено окремо ДР, яке описує ВКЕ (рівняння (7.65) при $D_{5\xi} = D_{6\xi} = 0$), та система ВНДС і ПКЕ (система (7.67) при $T_{n\xi} = 0$), причому, як і при кососиметричному навантаженні, загальний розв'язок (7.68) системи (7.67) зображується у вигляді суми розв'язків, кожен з яких окремо характеризує ВНДС та ПКЕ згідно з рівняннями (7.69) та (7.70).

7.7. Числові результати і їх аналіз

На основі нового побудованого варіанта МТ шаруватих пластин та пологих оболонок довільної товщини для оцінки його точності проведено числові дослідження ВНДС квадратних ($a = b$) вільно обіпертих на краях тришарових та двошарових транслопних пластин довільної товщини для різних МГП при дії на лицевих площинах поперечного навантаження, в т. ч. і з урахуванням обтискання. Одержані результати порівнювались як і з деякими відомими в літературі, так і з точними, отриманими з позицій тривимірної ТП (див. дод. Д.2).

Виконувались граничні умови (7.1). НДС визначався з урахуванням складових компонент переміщень $u_0, v_0, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3$ (НК0-3).

Поперечне навантаження приймалось у вигляді:

$$q(x, y) = q_{11}S_{1x}S_{1y}, \quad p(x, y) = p_{11}S_{1x}S_{1y}, \quad (q_{11}, p_{11} - \text{сталі}). \quad (7.71)$$

Коефіцієнти a_{2im} ($m = 0, 1, 2$), a_{3im} ($m = 0, 1, 2, 3$), які входили у функції $\varphi_{2i}, \varphi_{3i}$ ($i = 1, 2, 3$), визначались наступним чином.

Для тришарової пластини несиметричної структури кількість невідомих коефіцієнтів a_{2im} дорівнює 9. Перші три умови (7.9) дають 5 рівнянь. Додаткові 4-и рівняння отримуються із четвертої умови (7.9) для 4-х точок колокації: $z_1 = 0, z_2 = -h_2/4, z_2 = h_2/4, z_3 = 0$. Кількість невідомих коефіцієнтів a_{3im} дорівнює 12. Перші три умови (7.9) дають 6 рівнянь. Додаткові 6 рівнянь отримуються

із четвертої умови (7.9) для 6-ти точок колокації: при $z_1 = \mp h_1/4$, $z_2 = \mp h_2/4$, $z_3 = \mp h_3/4$.

Для тришарової пластини симетричної структури кількість невідомих a_{2im} дорівнює 5. Перші 3-и умови (7.9) дають 4 незалежних рівняння. Додаткове рівняння отримується з 4-ї умови (7.9) для точки колокації $z_2 = 0$. Невідомих коефіцієнтів a_{3im} – шість. Перші 3-и умови (7.9) дають 5 рівнянь. Додаткове рівняння отримується із 4-ї умови (7.9) для точки колокації $z_2 = 0$.

Для двошарової пластини кількість невідомих коефіцієнтів a_{2im} дорівнює 6. Перші три умови (7.9) дають 4 рівняння. Ще два рівняння отримуються із 4-ї умови (7.9) для 2-х точок колокації: $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. Кількість невідомих коефіцієнтів a_{3im} дорівнює 8. Перші три умови (7.9) дають 5 рівнянь. Ще 3-и рівняння отримуються із 4-ї умови (7.9) для 3-х точок колокації: $z_1 = \mp h_1/4$, $z_2 = 0$.

Нумерація шарів відповідає рис. 7.3 а, б.

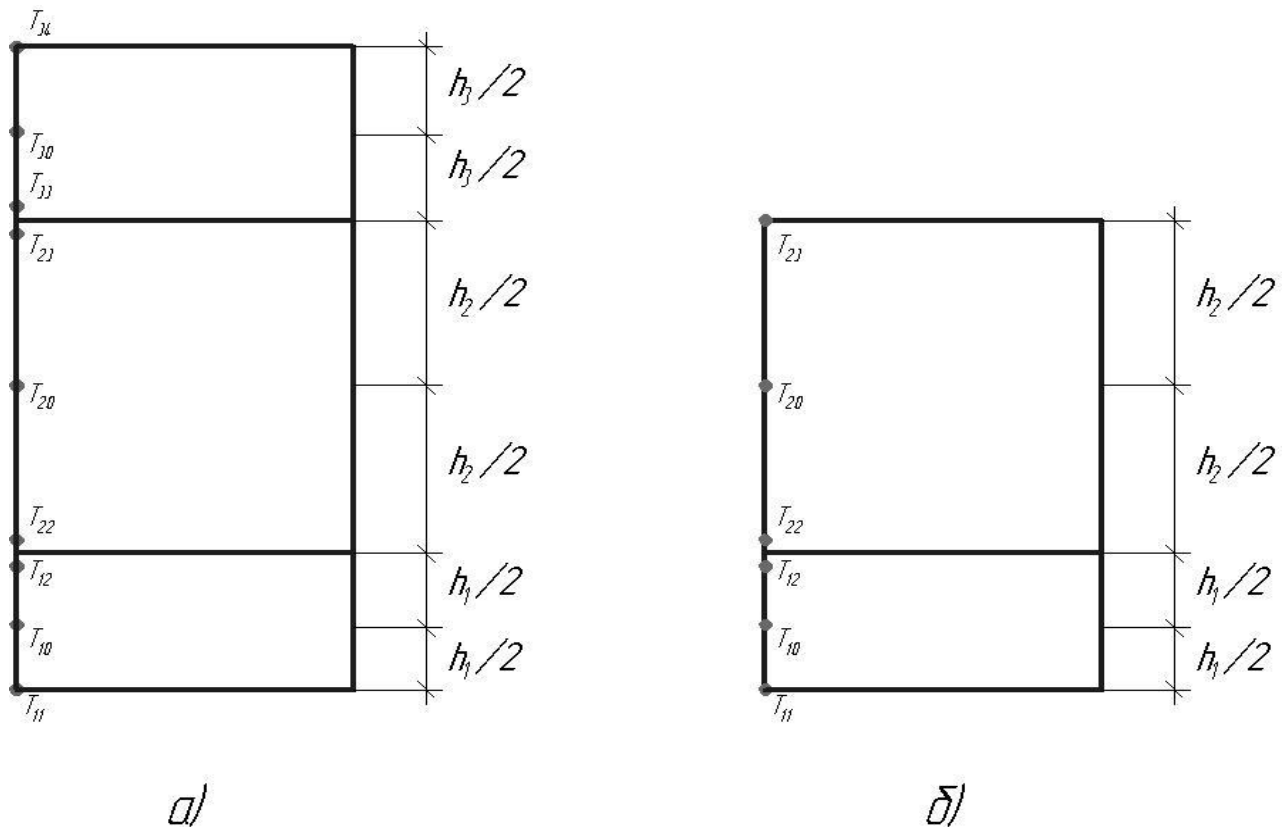


Рис. 7.3. Нумерація шарів і точок, в яких визначались компоненти НДС.

Складові компонент переміщень відшукувались у вигляді:

$$\begin{aligned} u_k(x, y) &= A_k C_{1x} S_{1y}; v_k(x, y) = B_k S_{1x} C_{1y}, (k = 0, 1, 2, 3); \\ w_k(x, y) &= C_k S_{1x} S_{1y}, (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7.72)$$

При цьому на бічній поверхні виконувалися крайові умови Нав'є. Сталі A_k, B_k, C_k визначались із системи 11-ти ЛАР, яка отримувалась на основі (7.37) (7.71) і (7.72). Компоненти переміщень і напружень знаходилися із залежностей п. 7.1, приймаючи до уваги МГП для транстропної пластини.

В табл. Д.1–Д.13 наведені значення компонент НДС для тришарових, двошарових та одношарових пластин у точках по висоті, які відповідають рис. 7.3 а, б. Безрозмірні компоненти $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_z, \tilde{W}$ не залежать від тангенціальних координат; компоненти $\tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{U}$ для квадратних пластин обчислені при $x = a/4, y = a/4$, а компоненти $\tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{U}$ для циліндричного згину – при $x = a/4$.

Для перевірки точності і достовірності розробленого варіанта МТ проведені числові розрахунки, що характеризують граничні переходи до одношарових пластин. Результати, наведені в табл. Д.3, вказують на достовірність граничного переходу до квадратної одношарової ізотропної пластини, вільно обіпертої на краях (табл. А.1), а результати, представлені в табл. Д.4, Д.5, підтверджують справедливість граничного переходу до однорідної ізотропної пластини при циліндричному згині. В табл. Д.6, Д.7 подані числові значення компонент $\tilde{\sigma}_x$ (в центрі на верхній лицевій площині) і \tilde{W} (в центрі серединної площини) які наведені у [283] для квадратних тришарових пластин з ізотропними шарами, що знаходяться під дією поперечного синусоїдального навантаження, прикладеного до верхньої лицевій площини. Там же в нижніх рядках наведені результати, які отримані за побудованим варіантом МТ. Як впливає з наведених даних і додаткових досліджень НК0-3 розробленого варіанта МТ практично точно описує НДС тришарових тонких пластин і пластин середньої товщини ($h/a \leq 0,2$) для $G_{1,3}/G_2 \leq 10^3$. Причому, точність збільшується при зменшенні відношень h/a , $G_{1,3}/G_2$, що також характерно для інших наближених теорій, зокрема для [324].

В табл. Д.8, Д.9 наведені результати для товстих тришарових пластин з ізотропними шарами для значень МГП пластин, при яких відомі наближені теорії (в т. ч. і теорії [283, 324]) дають результати з певною похибкою. Так, згідно теорії [324] отримуються задовільні результати тільки для $1 \leq G_{1,3} / G_2 \leq 800$, $h/a \leq 0,2$ (розходження з точними результатами для квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами ($h_{1,3} / h_2 = 0,4$) не перевищує 8% для поперечних переміщень в центрі і 6% для найбільших тангенціальних нормальних напружень).

В табл. Д.8, Д.9 Δ (у %) – розходження між наближеними теоріями і точним розв’язком на основі тривимірної ТП. Подані чисельні значення компонент НДС вказують на високу точність розробленого варіанта МТ.

Різниця з точним розв’язком для найбільших компонент НДС при розглянутих МГП (табл. Д1, Д2, Д.10–Д.13) не перевищує 3,89 % (табл. Д.9) для $\tilde{\sigma}_x$.

В табл. Д.14 – Д.16 подані результати точного розв’язку, які з наведеними результатами дають можливість сформулювати висновки впливу МГП на НДС.

7.8. Висновки по розділу

1. Уперше за розробленою методологією (розділ 2) побудовані нові варіанти МТ нетонких шаруватих фізично лінійних (транстропних) і нелінійних за Каудером пластин та пологих оболонок з позицій тривимірної ТП. Тривимірні задачі нелінійної ТП зведені до двовимірних. Ліві частини СДР лінійно залежать від складових компонент переміщень, а праві – від зовнішнього навантаження і суттєво нелінійно від компонент НДС. При граничному переході до однорідних оболонок (пластин) отримуються побудовані варіанти МТ однорідних фізично нелінійних оболонок (пластин). Виконуються точно граничні умови на лицевих поверхнях і умови жорсткого спряження на границях шарів для переміщень і поперечних напружень.

2. Уперше в МТ на основі НК0-3, для вказаних елементів отримані в явному вигляді СДРР, розв’язувальні та визначальні ДР і розроблені методи їх розв’язання. Розвинуто МПН для граничних задач побудованих варіантів МТ.

3. Уперше в МТ (на основі розробленого варіанта), вважаючи рівність коефіцієнтів Пуассона в площинах ізотропії для кожного шару та, нехтуючи кривиз-

нами у деформаціях поперечного зсуву, СДРР для ФНО несиметричної структури після математичних перетворень розділена на дві окремі системи: одна описує ВКЕ з уточненням ВНДС, а інша – взаємозалежні між собою ВНДС і ПКЕ.

4. Уперше в МТ одержана нова СДР 22-го порядку для нетонких пологих шаруватих ФНО симетричної структури, яка розділена на систему ВКЕ (6-го порядку) з уточненням ВНДС і систему ВНДС з ПКЕ (16-го порядку). Причому, із системи ВКЕ з ВНДС виділена СДР вихрового КЕ від кососиметричного деформування (4-го порядку) і ДР 2-го порядку від симетричного. Розв'язки для ВНДС і ПКЕ взаємозалежні і не розділяються.

5. Отримана в МТ нова СДРР для шаруватих ФНП несиметричної структури (22-го порядку), яка розділена на дві окремі системи: СДР ВКЕ з уточненнями ВНДС 6-го порядку (однорідна СДР 6-го порядку описує взаємозалежні ВКЕ при кососиметричному і симетричному навантаженнях, неоднорідна уточнює ВНДС) та СДР ВНДС із ПКЕ (16-го порядку). СДР 6-го порядку зведена до визначальної СДР трьох неоднорідні ДР, ліві частини яких однакові. Кожне рівняння розщеплене на три неоднорідні ДР Гельмгольца. ВНДС визначається загальними розв'язками однорідного ДР 8-го порядку (з оператором ∇^8) і частинними розв'язками п'яти неоднорідних визначальних ДР 16-го порядку, які також зводяться до неоднорідних ДР 2-го порядку. ПКЕ визначається однорідним ДР 8-го порядку з операторами Гельмгольца. При цьому частинні розв'язки всіх вищезазначених ДР суттєво нелінійно залежать від компонент НДС. Описано метод отримання загальних розв'язків.

6. Одержана в МТ нова СДРР для шаруватих ФНП симетричної структури, ліві частини яких по структурі аналогічні СДРР для однорідних ФНП, а праві частини ДР в кожному наближенні МПН залежать лінійно від поперечного навантаження і суттєво нелінійно від компонент НДС попереднього наближення.

7. Отримані нові СДР для транстропних шаруватих пластин і пологих оболонок несиметричної та симетричної структур довільної сталої товщини (як частинні випадки ФНП).

8. Знайдено точний аналітичний розв'язок тривимірних ДР просторової ТП шаруватих транстропних пластин несиметричної та симетричної структур з довільною кількістю шарів при їх поперечному навантаженні та крайових умовах Нав'є, розроблена

математична програма знаходження компонент НДС двошарових і тришарових транс-ропних пластин, і отримані числові результати для НДС.

9. Розвинуто операторний метод розв'язання одержаних нових СДР і на його основі описано побудову загальних розв'язків. Викладено підхід і алгоритм розв'язання отриманих СДР, які ґрунтуються на використанні МПН і зведенні СДР високого порядку до ДР 2-го порядку для шаруватих ФНП.

10. На основі порівняння з іншими теоріями і точним розв'язком розроблені варіанти МТ з високою точністю описують ВНДС при плавних поперечних навантаженнях двошарових та тришарових трансропних пластин в широких межах змінювання МГХ шарів, що на основі математичної і фізичної обґрунтованості отримання СДР, які описують ВНДС і крайові ефекти, дає впевненість у достовірному визначенні НДС і для інших елементів.

11. Отримані числові результати в загальних рисах характеризуються наступним. Компоненти НДС по товщині трансропних пластин змінюються нелінійно, степінь нелінійності залежить від МГХ і зростає при збільшенні товщини. При кососиметричному навантаженні тришарових пластин: із збільшенням податливості на поперечний зсув середнього шару найбільші напруження σ_x у крайніх шарах зростають; напруження і переміщення змінюються більш інтенсивно при змінюванні товщини, ніж при змінюванні податливості; переміщення W змінюються в порівнянні з напруженням σ_x більш інтенсивно при змінюванні товщини; екстремальних поперечних переміщень зазнають точки в центрі серединних площин крайніх шарів. Найменше впливає на НДС ν' . Згинально-обтискуюче деформування призводить до певного перерозподілу компонент НДС по товщині: із збільшенням товщини і податливості на поперечний зсув вплив поперечного обтискання збільшується; найбільші напруження σ_x виникають у центрі верхньої ліцевої площини. Розходження між найбільшими значеннями компонент НДС, отриманими в рамках нового побудованого варіанта МТ для широких меж змінювання МГХ ($h/a \leq 1/2$; $h_{1,2,3}/h \leq 10/11$; $G_{1,3}/G_2 \leq 10^4$; $1/10 \leq G'/G \leq 1$), відрізняються від точних менше ніж на 4 %, що на основі порівняння з іншими теоріями вказує на високу точність розробленого варіанта МТ.

Наукові результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в працях автора [130–132, 134–136, 138, 139, 172–175, 177–179, 181, 449].

РОЗДІЛ 8

СПРОЩУЮЧІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ВАРІАНТА МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Розділ присвячено розробці нових спрощуючих методів розв'язання граничних задач для нетонких транслопних пластин і пологих оболонок на основі нового побудованого варіанта МТ; розв'язанню граничних задач для товстих кругових пластин при різних навантаженнях і граничних умовах; побудові нового методу інтегрування СДР високих порядків для нетонких пластин при переривчастих і зосереджених навантаженнях; побудові фундаментальних розв'язків.

8.1. Наближений метод розв'язання СДР для пластин

8.1.1. Наближення К13. Розглянемо наближений метод розв'язування СДР (3.109) 8-го порядку при кососиметричному деформуванні для НК13. Дослідження СДР (3.109) показали, що основним доданком у першому рівнянні цієї системи є доданок, що містить функцію $w_1(x, y)$. Це відповідає суті ЕАМ [288, 306], згідно з яким 1-е наближення описується 1-м ДР (3.109) при $w_3(x, y) = 0$, а 2-ге наближення – ДР вигляду 2-го ДР (3.109) відносно $w_3(x, y)$, у якому $w_1(x, y)$ вважається відомою функцією з 1-го наближення.

Розроблений наближений метод розв'язання СДР (3.109) полягатиме в наступному. Покладаючи в 1-у ДР $w_3 = 0$, визначається функція $w_1(x, y)$ із цього рівняння. Далі розв'язується 2-е ДР системи відносно $w_3(x, y)$ при уже відомій функції $w_1(x, y)$, але з урахуванням точного 1-го ДР системи (3.109), а не наближеного рівняння $\Pi_{11}w_1 = \Pi_{1q}q$, як це мало місце в ЕАМ. Зауважимо, що коефіцієнти в операторах $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{33}$ залежать від кількості доданків у розкладанні НДС пластини в ряди. Тобто, із збільшенням номера наближення коефіцієнти в операторах уточнюються. В ЕАМ в 1-му наближенні (при врахуванні

тільки u_1 , v_1 і w_1) рівняння структурно співпадає з 1-м ДР (3.109) при $w_3 = 0$, але в 2-му наближенні ЕАМ рівняння для знаходження w_3 структурно відрізняється від 2-го ДР системи (3.109). Це пояснюється тим, що при застосуванні ЕАМ ДР 2-го наближення (для знаходження w_3) одержується в припущенні незмінності НДС попереднього (1-го) наближення. Очевидно, що взаємозв'язані рівняння (3.109) є більш точними, ніж відповідні рівняння ЕАМ. У зв'язку з цим розроблений метод розв'язання СДР (3.109) даватиме більш точний розв'язок, ніж ЕАМ, що підтверджують також чисельні дослідження.

Функція $w_1(x, y)$ визначається із наближеного 1-го рівняння (3.109)

$$\Pi_{11}w_1 = \Pi_{1q}q. \quad (8.1)$$

Для знаходження $w_3(x, y)$ виразимо $\nabla^4 w_1$ із точного 1-го ДР (3.109) через інші функції, ураховуючи (3.110), і підставимо в 2-е ДР (3.109). Отримаємо:

$$c_{12}\nabla^2 w_1 + c_{34}\nabla^4 w_3 + c_{32}\nabla^2 w_3 + c_{30}w_3 = c_{1q}q + c_{2q}\nabla^2 q, \quad (8.2)$$

де

$$c_{12} = \mu_{312}; \quad c_{34} = \mu_{314}d_{34} + \mu_{334}; \quad c_{32} = \mu_{314}d_{32} + \mu_{332}; \quad c_{30} = \mu_{330}; \quad c_{1q} = -(\mu_{314}d_{1q} + \mu_{30});$$

$$c_{2q} = \mu_{32} - \mu_{314}d_{2q}; \quad d_{34} = -\frac{\mu_{134}}{\mu_{114}}; \quad d_{32} = -\frac{\mu_{132}}{\mu_{114}}; \quad d_{1q} = -\frac{\mu_{10}}{\mu_{114}}; \quad d_{2q} = \frac{\mu_{12}}{\mu_{114}}.$$

Виконаємо заміну у (8.2), для чого введемо нову функцію $w_3^*(x, y)$:

$$w_3 = w_3^* + a_{12}\nabla^2 w_1 + a_{10}w_1, \quad (8.3)$$

де сталі a_{12} і a_{10} визначимо далі із певних умов. Підставимо (8.3) у (8.2). Одержимо:

$$c_{34}a_{12}\nabla^6 w_1 + (c_{34}a_{10} + c_{32}a_{12})\nabla^4 w_1 + (c_{12} + c_{32}a_{10} + c_{30}a_{12})\nabla^2 w_1 +$$

$$+ c_{30}a_{10}w_1 + c_{34}\nabla^4 w_3^* + c_{32}\nabla^2 w_3^* + c_{30}w_3^* = c_{1q}q + c_{2q}\nabla^2 q. \quad (8.4)$$

Ураховуючи рівняння (8.1) і, підставляючи у (8.4), отримаємо:

$$c_{34}\nabla^4 w_3^* + c_{32}\nabla^2 w_3^* + c_{30}w_3^* + n_{12}\nabla^2 w_1 + n_{10}w_1 = s_q q, \quad (8.5)$$

де $n_{12} = a_{12}c_{30} + a_{10}c_{32} + c_{12}$; $n_{10} = a_{10}c_{30}$;

$$s_q = c_{1q} - d_{1q}(c_{34}a_{10} + c_{32}a_{12}) + (c_{2q} - d_{2q}(c_{34}a_{10} + c_{32}a_{12}) - c_{34}a_{12}d_{1q})\nabla^2 - a_{12}c_{34}d_{2q}\nabla^4.$$

Покладемо в (8.5) множники при $\nabla^2 w_1$ і w_1 рівними нулю та визначимо сталі a_{12} та a_{10} . Одержимо $a_{10} = 0$; $a_{12} = -c_{12} / c_{30}$.

Тоді для знаходження функції $w_3^*(x, y)$ маємо наступне рівняння:

$$c_{34}\nabla^4 w_3^* + c_{32}\nabla^2 w_3^* + c_{30}w_3^* = s_q q, \quad (8.6)$$

в якому оператор s_q відомий, оскільки коефіцієнти a_{12} та a_{10} уже визначені.

Таким чином, наближене розв'язування СДР (3.109) з частинними похідними 8-го порядку відносно двох взаємозв'язаних функцій $w_1(x, y)$ і $w_3(x, y)$ звелось до розв'язування двох незалежних ДР з частинними похідними 4-го порядку відносно функції $w_1(x, y)$ (ДР (8.1)) і нової функції $w_3^*(x, y)$ (ДР (8.6)). Після знаходження $w_1(x, y)$ із (8.1) та $w_3^*(x, y)$ із (8.6), $w_3(x, y)$ визначиться із (8.3).

8.1.2. Наближення К135. Розглянемо наближений метод розв'язування СДР з частинними похідними 12-го порядку (3.149) при кососиметричному деформуванні в НК135. Це система відносно трьох функцій $w_i(x, y)$ ($i = 1, 3, 5$).

Функція $w_1(x, y)$ визначається із наближеного 1-го ДР (3.149):

$$P_{11}w_1 = P_{1q}q. \quad (8.7)$$

Функція $w_3(x, y)$ знайдеться із перших двох наближених рівнянь (3.149):

$$\begin{aligned} P_{11}w_1 + P_{13}w_3 &= P_{1q}q; \\ P_{31}w_1 + P_{33}w_3 &= P_{3q}q. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Метод наближеного визначення $w_3(x, y)$ із системи (8.8) описаний у п. 8.1.1.

Функція $w_5(x, y)$ знаходиться наступним чином. Із точних перших двох рівнянь (3.149) виразимо $\nabla^4 w_1$ та $\nabla^4 w_3$ через інші функції. Одержимо:

$$\begin{aligned}\nabla^4 w_1 &= d_{12} \nabla^2 w_1 + d_{32} \nabla^2 w_3 + d_{30} w_3 + d_{54} \nabla^4 w_5 + d_{52} \nabla^2 w_5 + d_{50} w_5 + d_{1q} q; \\ \nabla^4 w_3 &= e_{12} \nabla^2 w_1 + e_{32} \nabla^2 w_3 + e_{30} w_3 + e_{54} \nabla^4 w_5 + e_{52} \nabla^2 w_5 + e_{50} w_5 + d_{3q} q,\end{aligned}\quad (8.9)$$

де d_{1q}, e_{3q} – оператори; d_{ij}, e_{ij} – сталі, які виражаються через μ_{ijk}, μ_{mn} .

Підставляючи (8.9) у третє рівняння (3.149), отримаємо:

$$l_{12} \nabla^2 w_1 + l_{32} \nabla^2 w_3 + l_{30} w_3 + l_{54} \nabla^4 w_5 + l_{52} \nabla^2 w_5 + l_{50} w_5 = l_{5q} q, \quad (8.10)$$

де l_{ij} – відомі сталі; l_{5q} – відомий оператор, що залежить від $\mu_{ijk}, \mu_{mn}, d_{ij}, e_{ij}$.

Виконаємо заміну. Для цього введемо нову функцію $w_5^*(x, y)$ таким чином:

$$w_5(x, y) = w_5^*(x, y) + a_{512} \nabla^2 w_1 + a_{510} w_1 + a_{532} \nabla^2 w_3 + a_{530} w_3, \quad (8.11)$$

де $a_{512}, a_{510}, a_{532}, a_{530}$ – коефіцієнти, які визначаються далі із деяких певних умов.

Підставляючи (8.11) у (8.10), одержимо

$$\sum_{n=0,2}^6 p_{1n} \nabla^n w_1 + \sum_{n=0,2}^6 p_{3n} \nabla^n w_3 + \sum_{n=0,2}^4 l_{5n} \nabla^n w_5^* = l_{5q} q, \quad (8.12)$$

де сталі коефіцієнти p_{ij} лінійно залежать від $a_{512}, a_{510}, a_{532}, a_{530}$.

Урахуємо ДР (8.8) і виразимо з них $\nabla^4 w_1$ і $\nabla^4 w_3$ через інші функції:

$$\nabla^4 w_1 = d_{12} \nabla^2 w_1 + \sum_{n=0,2}^2 d_{3n} \nabla^n w_3 + d_{1q} q; \quad \nabla^4 w_3 = e_{12} \nabla^2 w_1 + \sum_{n=0,2}^2 e_{3n} \nabla^n w_3 + e_{3q} q. \quad (8.13)$$

Звідси

$$\begin{aligned}\nabla^6 w_1 &= k_{12} \nabla^2 w_1 + k_{32} \nabla^2 w_3 + k_{30} w_3 + k_{1q} q; \\ \nabla^6 w_3 &= r_{12} \nabla^2 w_1 + r_{32} \nabla^2 w_3 + r_{30} w_3 + r_{3q} q,\end{aligned}\quad (8.14)$$

де k_{ij}, r_{ij} – відомі сталі; k_{1q}, r_{3q} відомі оператори.

Підставляючи (8.13) і (8.14) у (8.12), одержимо:

$$l_{54} \nabla^4 w_5^* + l_{52} \nabla^2 w_5^* + l_{50} w_5^* + g_{12} \nabla^2 w_1 + g_{10} w_1 + g_{32} \nabla^2 w_3 + g_{30} w_3 = p_q q, \quad (8.15)$$

де g_{ij} – сталі, що лінійно залежать від $a_{512}, a_{510}, a_{532}, a_{530}$; p_q – відомий оператор.

Прирівнюючи у (8.15) множники при $\nabla^2 w_1, w_1, \nabla^2 w_3, w_3$ до нуля, визначаються коефіцієнти $a_{512}, a_{510}, a_{532}, a_{530}$ із системи ЛАР.

Отже, для знаходження функції $w_5^*(x, y)$ маємо таке ДР:

$$p_{54} \nabla^4 w_5^* + p_{52} \nabla^2 w_5^* + p_{50} w_5^* = p_q q. \quad (8.16)$$

Знайшовши $w_5^*(x, y)$ із (8.16), функція $w_5(x, y)$ визначається з урахуванням (8.11) і знайдених коефіцієнтів $a_{512}, a_{510}, a_{532}, a_{530}$.

Таким чином, наближене розв'язування СДР 12-го порядку (3.149) з частинними похідними зводиться до розв'язування трьох незалежних ДР 4-го порядку: рівняння (8.7) відносно функції $w_1(x, y)$, рівняння типу (8.6) відносно функції $w_3^*(x, y)$ та рівняння (8.16) відносно функції $w_5^*(x, y)$.

Як показують чисельні розрахунки конкретних транстропних нетонких пластин [154], розроблений метод варіанта МТ дає високоточні результати для НДС указаних елементів в широких межах змінювання МГП та поперечних навантажень (повільнозмінювані, швидкозмінювані, квазілокальні). Метод узагальнений для наближеного розв'язування СДР високих порядків. При кососиметричному деформуванні СДР порядку $4N$ зводяться до послідовного розв'язування N ДР 4-го порядку.

Аналогічно запропонований наближений метод може бути використано для розв'язання відповідних СДР при симетричному деформуванні.

8.1.3. Вісесиметричний згин круглої транстропної пластини при кососиметричному навантаженні.

8.1.3.1. Основні рівняння. Розглядається в НК13 кругла транстропна пластина радіуса a і товщини h . Граничні умови на лицевих площинах:

$$\sigma_z(z = \pm h/2) = \mp q(r)/2; \quad \sigma_{rz}(z = \pm h/2) = 0; \quad \sigma_{\theta z}(z = \pm h/2) = 0, \quad (8.17)$$

де $q(r)/2$ – поперечне осесиметричне навантаження.

Співвідношення в полярній системі координат (дод. Г.2):

$$\varepsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) / E - \nu'\sigma_z / E', (r, \theta); \varepsilon_z = (\sigma_z - \nu''(\sigma_r + \sigma_\theta)) / E'; \gamma_{rz} = \sigma_{rz} / G';$$

$$\varepsilon_r = \partial U / \partial r; \varepsilon_\theta = U / r; \varepsilon_z = \partial W / \partial z; \gamma_{rz} = \partial W / \partial r + \partial U / \partial z, \gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0,$$

де $U, W, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$ – функції від r, z .

Компоненти НДС зображуються у вигляді рядів:

$$U(r, z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} P_k(2z/h)u_k(r); V=0; W(r, z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} P_{k-1}(2z/h)w_k(r);$$

$$\sigma_r(r, z) = \sum_{k=1,3}^{\infty} P_k(2z/h)s_{rk}(r); (r, \theta); \sigma_z(r, z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} P_k(2z/h)s_{zk}(r); \quad (8.18)$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} P_k(2z/h)t_{rk}(r), \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0,$$

де з урахуванням складових u_1, u_3, w_1, w_3 ($k = 1; 3$) маємо:

$$s_{z1} = -3q/5 - 3\omega_3/70; s_{z3} = q/10 + \omega_3/15; s_{z5} = -\omega_3/42;$$

$$s_{r1}(r) = d_0u'_1 + d_0\nu u_1/r + d_{10}s_{z1}; s_{r3}(r) = d_0u'_3 + d_0\nu u_3/r + d_{10}s_{z3}; s_{r5}(r) = d_{10}s_{z5};$$

$$s_{\theta1}(r) = d_0\nu u'_1 + d_0u_1/r + d_{10}s_{z1}; s_{\theta3}(r) = d_0\nu u'_3 + d_0u_3/r + d_{10}s_{z3}; s_{\theta5}(r) = d_{10}s_{z5};$$

$$t_{r0} = Q_{1r}/h; t_{r2} = -Q_{1r}/h + 3Q_{3r}/(7h); t_{r4} = -3Q_{3r}/(7h); \quad (8.19)$$

$$Q_{kr}(r) = h_{k1}w'_1 + h_{k3}w'_3 + l_{k1}u_1 + l_{k3}u_3, (k = 1,3);$$

$$\omega_3(r) = q_{33}w_3 + e_{31}\varphi_1 + e_{33}\varphi_3 + e_{3q}q; \varphi_k(r) = u'_k + u_k/r.$$

Тут $l_{11} = 28G'/15; l_{11} = 6G'/5; l_{31} = 14G'/5; l_{33} = 84G'/5$, а $h_{k1}, h_{k3}, q_{33}, \dots, e_{3q}$ визначаються за формулами (3.25), (3.28).

Перетворена СДР рівноваги має вигляд:

$$\beta_{1k3}u_1 + \beta_{k33}u_3 + \beta_{1k1}\varphi'_1 + \beta_{k31}\varphi'_3 + \beta_{k51}w'_1 + \beta_{k61}w'_3 = \beta_{uk}q'; (k = 1,3);$$

$$\beta_{151}\varphi_1 + \beta_{351}\varphi_3 + \beta_{551}\nabla^2 w_1 + \beta_{561}\nabla^2 w_3 = \beta_{w1}q; \quad (8.20)$$

$$\beta_{161}\varphi_1 + \beta_{361}\varphi_3 + \beta_{561}\nabla^2 w_1 + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{662})w_3 = \beta_{w3}q, (\nabla^2 = d^2/d r^2 + d/dr/r),$$

де β з індексами –МГП, визначаються згідно з (А.1) дод. А.

Функції $\varphi_j(r)$ та $u_j(r)$ знаходяться із системи (8.20):

$$\begin{aligned}\varphi_j(r) &= \lambda_{j1} \nabla^2 w_1 + \lambda_{j2} w_3 + \lambda_{j3} \nabla^2 w_3 + \lambda_{j4} q; \\ u_j(r) &= \lambda_{j\varphi 1} \varphi_1' + \lambda_{j\varphi 3} \varphi_3' + \lambda_{jw 1} w_1' + \lambda_{jw 3} w_3' + \lambda_{jq} q', \quad (j=1,3),\end{aligned}\quad (8.21)$$

де сталі λ з нижніми індексами визначаються згідно з (A.2).

СДР (8.20) зводиться до системи двох ДР (3.109) відносно $w_1(r)$ та $w_3(r)$.

Для розв'язання системи (3.109) використаємо наближений метод.

8.1.3.2. Кругла пластина при рівномірно розподіленому навантаженні.

Виконуються граничні умови (8.17), $q(r) = q_0$.

Перше наближення. Для визначення $w_1(r)$ маємо 1-е ДР (3.109) при $w_3 = 0$, тобто, рівняння (8.1). Його загальний розв'язок згідно з [351] має вигляд:

$$w_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_{1r}, \quad (8.22)$$

де C_1, \dots, C_4 – сталі інтегрування; w_{1r} – частинний розв'язок (8.1).

Функція $\varphi_1(r)$ в 1-му наближенні визначається з 3-го ДР (8.20), покладаючи в ньому $\varphi_3 \equiv 0$, $w_3 \equiv 0$, а функція $u_1(r)$ з урахуванням $\varphi_1(r)$ знаходиться з 1-го ДР (8.20) при $u_3 \equiv 0$, $\varphi_3 \equiv 0$, $w_3 \equiv 0$:

$$\varphi_1(r) = \lambda_{11} \nabla^2 w_1 + \lambda_{14} q; \quad u_1(r) = \lambda_{1\varphi 1} \varphi_1' + \lambda_{1w 1} w_1' + \lambda_{1q} q', \quad (8.23)$$

де

$$\lambda_{11} = -\frac{\beta_{551}}{\beta_{151}}; \quad \lambda_{14} = \frac{\beta_{w1}}{\beta_{151}}; \quad \lambda_{1\varphi 1} = -\frac{\beta_{111}}{\beta_{113}}; \quad \lambda_{1w 1} = -\frac{\beta_{151}}{\beta_{113}}; \quad \lambda_{1q} = \frac{\beta_{u1}}{\beta_{113}}.$$

Переміщення і напруження визначаються згідно з (8.18), (8.19) при $k=1$.

Друге наближення. Функцію $w_3(r)$ зобразимо у вигляді:

$$w_3 = w_3^* + a_{10} \nabla^2 w_1, \quad (a_{10} = -\mu_{312} / \mu_{330}), \quad (8.24)$$

де функція $w_3^*(r)$ визначається із ДР:

$$\nabla^4 w_3^* + b_{10} \nabla^2 w_3^* + b_{20} w_3^* = q_2 \mathfrak{C}, \quad (8.25)$$

в якому

$$q_2 = \mathfrak{B}_4 \nabla^4 + \beta_2 \nabla^2 + \beta_0 \mathfrak{g}; \quad b_{10} = \frac{c_{02}}{c_{04}}; \quad b_{20} = \frac{c_{00}}{c_{04}}; \quad \beta_4 = -a_{10} \frac{\mu_{42}}{\mu_{114}};$$

$$\beta_2 = \frac{a_{10}}{\mu_{114}} \left(\mu_{10} - \mu_{12} \frac{c_{02}}{c_{04}} \right) + \frac{c_{2q}}{c_{04}}; \quad \beta_0 = \frac{1}{c_{04}} \left(c_0 + a_{10} c_{02} \frac{\mu_{10}}{\mu_{114}} \right); \quad c_{04} = \mu_{334} - \frac{\mu_{314} \mu_{134}}{\mu_{114}};$$

$$c_{02} = \mu_{332} - \frac{\mu_{314} \mu_{132}}{\mu_{114}}; \quad c_{00} = \mu_{330}; \quad c_{2q} = \mu_{32} - \frac{\mu_{314} \mu_{12}}{\mu_{114}}; \quad c_0 = \frac{\mu_{314} \mu_{10}}{\mu_{114}} - \mu_{30}.$$

Сталі μ_{ijk}, μ_{mn} визначаються згідно з (А.3).

Загальний розв'язок ДР (8.25) зобразиться таким чином:

$$w_3^* = w_{31}^* + w_{32}^* + w_{3r}^*, \quad (8.26)$$

де w_{3r}^* – частинний розв'язок ДР (8.25), w_{31}^* і w_{32}^* – загальні розв'язки ДР:

$$\nabla^2 - k_1 \rceil y_3^* = 0; \quad \nabla^2 - k_2 \rceil y_3^* = 0, \quad (k_{1,2} = (-b_{10} \pm \sqrt{D})/2; \quad D = b_{10}^2 - 4b_{20} \neq 0). \quad (8.27)$$

Загальні розв'язки ДР (8.27) залежать від знака коренів k_1 і k_2 . Чисельні дослідження показують, що при $E' = E$, $\nu' = \nu$, $G'/G \leq 0,4643$ обидва корені k_1 і k_2 додатні, а при $E' = E$, $\nu' = \nu$, $G'/G > 0,4643$ k_1 і k_2 комплексно спряжені.

Розглянемо випадок податливого на поперечний зсув матеріалу ($k_1 > 0; k_2 > 0$). З урахуванням (8.24)–(8.26) маємо загальний розв'язок для $w_3(r)$:

$$w_3 = C_5 I_0(\lambda_1 r) + C_6 K_0(\lambda_1 r) + C_7 I_0(\lambda_2 r) + C_8 K_0(\lambda_2 r) + a_{10} \nabla^2 w_1 + w_{3r}^*, \quad (8.28)$$

де $\lambda_i = \sqrt{k_i}$; $i = 1; 2$; C_5, \dots, C_8 – сталі інтегрування; $I_0(\lambda_1 r), I_0(\lambda_2 r)$ – модифіковані функції Бесселя 0-го порядку аргументів $\lambda_1 r$ та $\lambda_2 r$; $K_0(\lambda_1 r), K_0(\lambda_2 r)$ – функції Макдональда 0-го порядку тих же аргументів [2, 220, 226, 353].

Функції $\varphi_3(r)$ та $u_3(r)$ знаходяться на основі (8.21), (8.28), (А.2).

Із обмеженості при $r \rightarrow 0$ $U(r, z)$, $W(r, z)$ та функцій (8.18), дістанемо, що $u_1(r)$, $u_3(r)$, $w_1(r)$ і $w_3(r)$ при $r \rightarrow 0$ повинні бути також обмеженими. Звідси $C_3 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$ і, урахувавши (8.22) та (8.28), отримаємо:

$$w_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + w_{1r}; \quad w_3(r) = 4a_{10} C_2 + C_5 I_0(\lambda_1 r) + C_7 I_0(\lambda_2 r) + a_{10} \nabla^2 w_{1r} + w_{3r}^*, \quad (8.29)$$

де сталі C_1, C_2, C_5, C_7 знаходяться із граничних умов для пластини при $r = a$. Інші компоненти НДС визначаються на основі (8.18), (8.19), (8.21).

Функції $u_3(r)$ та $\varphi_3(r)$ знаходяться на основі (8.21), (8.29), у яких сталі λ з індексами визначаються в НК13 із залежностей (А.2) дод. А.

8.1.3.3. Кругла пластина при дії зосереджених сил. Зосереджені сили $F/2$, прикладені в центрах верхньої і нижньої лицевих площин ($q = 0$),

$$Z_\nu(r=0; z = \pm h/2) = -F/2; Z_\nu(r \neq 0; z = \pm h/2) = 0; (R_\nu, \theta_\nu)(r; z = \pm h/2) = 0,$$

де R_ν, θ_ν, Z_ν – складові інтенсивності зовнішніх сил в проекціях на осі.

Перше наближення. Загальний розв'язок однорідного ДР (8.1):

$$w_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r. \quad (8.30)$$

На основі (8.23), та (8.30) дістанемо:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= 4C_2 \lambda_{11} + 4C_4 \lambda_{11} (1 + \ln r); \\ u_1(r) &= 2C_2 \lambda_{1w1} r + C_3 \lambda_{1w1} r^{-1} + C_4 (\lambda_{1w1} r + 4\lambda_{11} \lambda_{1\varphi1} r^{-1} + 2\lambda_{1w1} r \ln r), \end{aligned} \quad (8.31)$$

де сталі C_3 і C_4 знаходяться аналогічно класичній теорії пластин [351].

З урахуванням обмеженості $w_1(r)$ при $r \rightarrow 0$ отримаємо $C_3 = 0$ і тоді:

$$\begin{aligned} w_1(r) &= C_1 + C_2 r^2 + C_4 r^2 \ln r; \\ u_1(r) &= 2C_2 \lambda_{1w1} r + C_4 (\lambda_{1w1} r + 4\lambda_{11} \lambda_{1\varphi1} r^{-1} + 2\lambda_{1w1} r \ln r), \end{aligned} \quad (8.32)$$

Сталу C_4 визначимо із умови рівноваги елемента в центрі пластини:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(2\pi\rho \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz}(r, z) dz \right) = F, \quad (8.33)$$

де $\sigma_{rz}(r, z)$ в 1-му наближенні визначається згідно з (8.18), (8.19):

$$\sigma_{rz}(r, z) = (P_0 - P_2) Q_{1r}(r) / h; \quad Q_{1r}(r) = h_{11} w_1' + l_{11} u_1. \quad (8.34)$$

Ураховуючи (8.31) – (8.34) та властивості поліномів Лежандра, одержимо:

$$C_4 = M_4 F; \quad M_4 = 1/(8\pi l_{11} \lambda_{11} \lambda_{1\varphi 1}).$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 знаходяться із крайових умов при $r = a$.

Друге наближення. Загальний розв'язок для $w_3(r)$ на основі (8.28), (8.25) (при $q \equiv 0$) і (8.32) набуває вигляду:

$$w_3(r) = C_5 I_0(\lambda_1 r) + C_6 K_0(\lambda_1 r) + C_7 I_0(\lambda_2 r) + C_8 K_0(\lambda_2 r) + 4a_{10}(C_2 + C_4(1 + \ln r)). \quad (8.35)$$

Функції $\varphi_3(r)$ та $u_3(r)$ визначаються згідно з (8.21) при $q \equiv 0$.

Далі користуватимемося рекурентними залежностями [220, 226, 392] для модифікованих функцій Бесселя $I_m(z)$ і Макдональда $K_m(z)$ та їх похідних. Модифіковані функції $K_0(\lambda r), K_1(\lambda r)$ для зручності зобразимо у вигляді:

$$K_0(\lambda r) = K_{0r}(\lambda r) + K_{0s}(\lambda r); \quad K_1(\lambda r) = K_{1r1}(\lambda r) + K_{1r2}(\lambda r) + K_{1s}(\lambda r), \quad (8.36)$$

У (8.36) і надалі функції з індексом r унизу прямують до нуля, якщо $r \rightarrow 0$, а функції з індексом s прямують до нескінченності при $r \rightarrow 0$.

Тоді, ураховуючи (8.21), (8.35) і (8.36), дістанемо:

$$w_3(r) = w_{3r} + w_{3s}; \quad \varphi_3(r) = \varphi_{3r} + \varphi_{3s}; \quad u_3(r) = u_{3r} + u_{3s}; \quad u'_3(r) = u'_{3(r)} + u'_{3(s)};$$

$$w_{3r}(r) = 4a_{10}C_2 + 4a_{10}C_4 + C_5 I_0(\lambda_1 r) + C_6 K_{0r}(\lambda_1 r) + C_7 I_0(\lambda_2 r) + C_8 K_{0r}(\lambda_2 r);$$

$$w_{3s}(r) = 4a_{10}C_4 \ln r + C_6 K_{0s}(\lambda_1 r) + C_8 K_{0s}(\lambda_2 r);$$

$$\varphi_{3r}(r) = 4C_2 e_1 + 4C_4 e_1 + C_5 e_5 I_0(\lambda_1 r) + C_6 e_5 K_{0r}(\lambda_1 r) + C_7 e_7 I_0(\lambda_2 r) + C_8 e_7 K_{0r}(\lambda_2 r);$$

$$\varphi_{3s}(r) = 4C_4 e_1 \ln r + C_6 e_5 K_{0s}(\lambda_1 r) + C_8 e_7 K_{0s}(\lambda_2 r);$$

$$u_{3r}(r) = C_2 T_2 r + C_4 \lambda_{3w1} r(1 + 2 \ln r) + C_5 T_5 I_1(\lambda_1 r) -$$

$$- C_6 T_5 K_{1r}(\lambda_1 r) + C_7 T_7 I_1(\lambda_2 r) - C_8 T_7 K_{1r}(\lambda_2 r); \quad (8.37)$$

$$u_{3s}(r) = C_4 T_4 r^{-1} - C_6 T_5 K_{1s}(\lambda_1 r) - C_8 T_7 K_{1s}(\lambda_2 r);$$

$$u'_{3(r)}(r) = C_2 T_2 + 3C_4 \lambda_{3w1} + C_5 T_5 (\lambda_1 I_0(\lambda_1 r) - r^{-1} I_1(\lambda_1 r)) + C_6 T_5 (\lambda_1 K_{0r}(\lambda_1 r) + r^{-1} K_{1r1}(\lambda_1 r)) +$$

$$+ C_7 T_7 (\lambda_2 I_0(\lambda_2 r) - r^{-1} I_1(\lambda_2 r)) + C_8 T_7 (\lambda_2 K_{0r}(\lambda_2 r) + r^{-1} K_{1r1}(\lambda_2 r));$$

$$u'_{3(s)}(r) = C_4(2\lambda_{3w1} \ln r - T_4 r^{-2}) + C_6 T_5 (\lambda_1 K_{0s}(\lambda_1 r) + r^{-1}(K_{1r2}(\lambda_1 r) + K_{1s}(\lambda_1 r))) + \\ + C_8 T_7 (\lambda_2 K_{0s}(\lambda_2 r) + r^{-1}(K_{1r2}(\lambda_2 r) + K_{1s}(\lambda_2 r)));$$

$$e_1 = \lambda_{31} + a_{10} \lambda_{32}; \quad e_5 = \lambda_{32} + \lambda_{33} \lambda_1^2; \quad e_7 = \lambda_{32} + \lambda_{33} \lambda_2^2; \quad T_2 = 2\lambda_{3w1};$$

$$T_4 = (\lambda_{3\phi1} \lambda_{11} + \lambda_{3\phi3} e_1 + \lambda_{3w3} a_{10}); \quad T_5 = \lambda_1 (\lambda_{3\phi3} e_5 + \lambda_{3w3}); \quad T_7 = \lambda_2 (\lambda_{3\phi3} e_7 + \lambda_{3w3}).$$

Функція $\omega_3(r)$ шукається з (8.19) (при $q = 0$) на основі (8.31), (8.35), (8.37).

Використовуючи обмеженість функцій $w_3(r)$ та $u_3(r)$ при $r \rightarrow 0$ і, урахувавши (8.36), (8.37), дістанемо систему ЛАР відносно C_6 і C_8 , з якої отримаємо:

$$C_6 = M_6 F; \quad C_8 = M_8 F, \quad (M_6 = M_4 \frac{T_4 - 4a_{10} T_7 \lambda_2^{-1}}{T_5 \lambda_1^{-1} - T_7 \lambda_2^{-1}}; \quad M_8 = 4a_{10} M_4 - M_6).$$

Сталі C_5 і C_7 знаходяться із крайових умов для пластини при $r = a$.

Розглянемо два випадки закріплення краю пластини при дії на неї зосереджених сил $F/2$, прикладених в центрі на лицевих площинах.

Жорстке защемлення краю: $W(r = a; z) = 0; \quad U(r = a; z) = 0$.

Звідси з урахуванням (8.18) одержується система ЛАР відносно C_1, C_2, C_5, C_7 :

$$w_1(r = a) = 0; \quad u_1(r = a) = 0; \quad w_3(a) = 0; \quad u_3(a) = 0, \quad (8.38)$$

з якої $C_i = M_i F$ ($i = 1, 2, 5, 7; M_i$ – МГП пластини).

Отже, всі сталі інтегрування C_1, C_2, \dots, C_8 визначені і компоненти НДС знаходяться на основі залежностей (8.18), (8.19). Показана неможливість граничного переходу для цих крайових умов до задачі для тонкої пластини при жорсткому защемленні краю, що співпадає з висновками [92].

Вільне обпирання краю. Граничні умови згідно з ВПР будуть такими:

$$w_1(r = a) = 0; \quad s_{r1}(r = a) = d_0(u'_1(a) + \nu u_1(a)/a) = 0; \\ w_3(r = a) = 0; \quad s_{r3}(r = a) = d_0(u'_3(a) + \nu u_1(a)/a) + d_{10} \omega_3(a)/15 = 0. \quad (8.39)$$

Сталі C_1, C_2 знаходяться із перших двох умов (8.39), а C_5, C_7 – із останніх.

8.1.3.4. Числові результати і їх аналіз. Проведено числові розрахунки при вільному обпиранні та жорсткому защемленні краю круглих пластин при рівномірному та зосередженому навантаженнях на лицевих площинах для різних МГП.

В табл. Е.1–Е.3 наведені числові результати для безрозмірних прогинів $\tilde{W}(r; z) = W(r, z)E/(qh)$ і напружень $\tilde{\sigma}_r(r; z) = \sigma_r(r, z)/q$ (табл. Е.1, кососиметричне стале навантаження) і для $\tilde{W}(r; z) = W(r, z)Ea^2/(Fh)$ і $\tilde{\sigma}_r(r; z) = \sigma_r(r, z)a^2/F$ (табл. Е.2, Е.3, кососиметричне зосереджене навантаження).

Аналізуючи наведені результати і результати додаткових досліджень при вільному і жорсткому закріпленні країв пластини для інших МГП пластин, отримано, що переміщення і напруження суттєво залежать від G'/G і a/h . При рівномірному навантаженні, як при шарнірному так і при жорсткому закріпленні краю, найбільший прогин для пластин із указаними параметрами і при $a/h \geq 2,5$ задовільно визначається уже 1-м наближенням, в той же час НС потребує уточнення в більш високих наближеннях для нетонких пластин та пластин з великою податливістю матеріала на поперечний зсув.

При зосередженому навантаженні НДС необхідно визначати у високих наближеннях навіть для порівняно тонких пластин (при $G'/G = 0,4$; $a/h = 10$; розходження між 1-м та 2-м наближеннями для $W(r=0; z=h/2)$ при ШЗ досягає 10,7%, а при ЖЗ – 22,9%). Зона впливу локальності навантаження (табл. Е.3) на прогини для траєкторної пластини (при $G'/G = 0,1 \div 0,4$) близько $(0,7 \div 0,8)h$.

В наближенні К13 із збільшенням зсувної податливості збільшується як \tilde{W} так і $\tilde{\sigma}_r$ (табл. Е.1). Розходження між результатами за НК1 і НК13 для фіксованого значення G'/G зменшуються при збільшенні відношення a/h .

8.2. Наближений метод розв'язання СДР для пологих оболонок

Побудуємо наближений метод розв'язання СДР 12-го порядку (5.42) ВНДС і ПKE у наближенні К013 згідно п. 2.3.

8.2.1. Суть методу. Розв'язання СДР (5.42) виконаємо у два етапи.

Перший етап. Розв'язується СДР, яка відповідає урахуванню у рядах для $U(x, y, z), V(x, y, z)$ двох членів (НК01). Це СДР, утворена із системи (5.41) рівняннями 1-м–4-м та 7-м (називатимемо її СДР (5.41а)) або ж СДР, утворена із системи (5.42) рівняннями 1-м–3-м та 5-м (називатимемо її СДР (5.42а)). В цих утворених системах потрібно покласти $\varphi_3 \equiv 0$ та $w_3 \equiv 0$, а МГП в них—це параметри (5.11) і (5.13) в НК01. Виражаючи із 4-го ДР системи (5.42а) $\varphi_1(x, y)$ через $u_{0,x}, v_{0,y}, w_1$ і, підставляючи її у 3-є ДР, дістанемо систему 3-х ДР (8-го порядку) відносно $u_0(x, y), v_0(x, y), w_1(x, y)$. Розв'язання цієї СДР не має особливих труднощів. Функції $u_1(x, y), v_1(x, y)$ визначаються із системи (5.41а).

Другий етап методу. Цей етап полягає у розв'язанні СДР (5.42), знаючи розв'язок $u_0(x, y), v_0(x, y), u_1(x, y), v_1(x, y), w_1(x, y)$ із 1-го етапу. Зведемо розв'язування системи (5.42) з урахуванням сказаного, до розв'язання одного ДР по визначенню функції $w_3(x, y)$. Для цього виконаємо деякі спрощення. Осереднимо коефіцієнти k_{1w1} і k_{2w1} , замінивши їх на середньоарифметичні значення $k_{1w1} = k_{2w1} \equiv k_{1w} \approx (k_{1w1} + k_{2w1})/2$, що відповідає квазірівнокривинній оболонці. У цьому випадку СДР (5.42) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \gamma_{111}u_{0,xx} + \gamma_{112}u_{0,yy} + \gamma_{121}v_{0,xy} + k_{1w}w_{1,x} + k_{1w3}w_{3,x} &= 0; \\ \gamma_{121}u_{0,xy} + \gamma_{112}v_{0,xx} + \gamma_{111}v_{0,yy} + k_{1w}w_{1,y} + k_{1w3}w_{3,y} &= 0; \\ \beta_{113}\varphi_1 + \beta_{111}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{133}\varphi_3 + \beta_{131}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{151}\nabla^2w_1 + \beta_{161}\nabla^2w_3 &= \beta_{u1}\nabla^2q; \\ \beta_{133}\varphi_1 + \beta_{131}\nabla^2\varphi_1 + \beta_{333}\varphi_3 + \beta_{331}\nabla^2\varphi_3 + \beta_{351}\nabla^2w_1 + \beta_{361}\nabla^2w_3 &= \beta_{u3}\nabla^2q; \\ k_{1w}\varphi_0 + \beta_{151}\varphi_1 + \beta_{351}\varphi_3 + (\beta_{551}\nabla^2 + r_{1w1})w_1 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_3 &= \beta_{w1}q; \\ k_{1w3}\varphi_0 + \beta_{161}\varphi_1 + \beta_{361}\varphi_3 + (\beta_{561}\nabla^2 + r_{1w3})w_1 + (\beta_{661}\nabla^2 + \beta_{663} + r_{3w3})w_3 &= \beta_{w3}q. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Виразимо із останніх двох ДР $\varphi_3(x, y)$ через інші функції. Одержимо:

$$\varphi_3(x, y) = \lambda_{3\varphi_0}\varphi_0 + \sum_{i=1,3}^3(\lambda_{3i2}\nabla^2 w_i + \lambda_{3i0}w_i) + \lambda_{3q}q \quad (k = 1, 3), \quad (8.41)$$

де сталі $\lambda_{3\varphi_0}, \dots, \lambda_{3q}$ – МГП у НК013.

Диференціюючи 1-е ДР системи (8.40) по x , а друге – по y , складаючи отримані рівняння з урахуванням (3.32), дістанемо:

$$\gamma_{111}\nabla^2\varphi_0 + k_{0w1}\nabla^2 w_1 + k_{0w3}\nabla^2 w_3 = 0. \quad (8.42)$$

Підставляючи φ_1 із 4-го рівняння системи (5.42a) (φ_1 із 1-го етапу) і φ_3 із (8.41) у третє та четверте рівняння (8.40), отримаємо:

$$(A_{21} + A_{22}\nabla^2)\varphi_0 + (A_{23}\nabla^4 + A_{24}\nabla^2 + A_{25})w_1 + (A_{26}\nabla^4 + A_{27}\nabla^2 + A_{28})w_3 = \\ = (A_{29}\nabla^2 + A_{210})q; \quad (8.43)$$

$$(A_{31} + A_{32}\nabla^2)\varphi_0 + (A_{33}\nabla^4 + A_{34}\nabla^2 + A_{35})w_1 + (A_{36}\nabla^4 + A_{37}\nabla^2 + A_{38})w_3 = \\ = (A_{39}\nabla^2 + A_{310})q, \quad (A_{21}, \dots, A_{310} - \text{МГП}). \quad (8.44)$$

У цій СДР $w_1(x, y)$ та $\varphi_0(x, y)$ – розв'язки на 1-му етапі. ДР (8.44) є основним для визначення функції $w_3(x, y)$. Для знаходження $w_3(x, y)$ із ДР (8.44) перетворимо систему (8.42) – (8.44). Із (8.42) маємо: $\nabla^2\varphi_0 = B_1\nabla^2 w_1 + B_3\nabla^2 w_3$, де $B_1 = -k_{0w1}/\gamma_{111}$, $B_3 = -k_{0w3}/\gamma_{111}$. Тоді рівняння (8.43) і (8.44) приймуть вигляд:

$$A_{21}\varphi_0 + (A_{23}\nabla^4 + A_{211}\nabla^2 + A_{25})w_1 + (A_{26}\nabla^4 + A_{212}\nabla^2 + A_{28})w_3 = \\ = (A_{29}\nabla^2 + A_{210})q; \quad (8.45)$$

$$A_{31}\varphi_0 + (A_{33}\nabla^4 + A_{311}\nabla^2 + A_{35})w_1 + (A_{36}\nabla^4 + A_{312}\nabla^2 + A_{38})w_3 = \\ = (A_{39}\nabla^2 + A_{310})q, \quad (8.46)$$

де $A_{k11} = A_{k2}B_1 + A_{k4}$, $A_{k12} = A_{k2}B_3 + A_{k7}$, ($k = 2, 3$).

Виразимо $\nabla^4 w_1$ із (8.45) і підставимо в (8.46). Одержимо:

$$c_1\varphi_0 + (c_2\nabla^2 + c_3)w_1 + (c_4\nabla^4 + c_5\nabla^2 + c_6)w_3 = (c_7\nabla^2 + c_8)q, \quad (c_1, \dots, c_8 - \text{МГП}). \quad (8.47)$$

У рівнянні (8.47) для визначення $w_3(x, y)$ виконаємо заміну:

$$w_3 = w_3^* + a_{12} \nabla^2 w_1 + a_{10} w_1 + a_{00} \varphi_0, \quad (8.48)$$

де невідомі a_{12} , a_{10} , a_{00} надалі визначатимуться з певних умов. Одержимо:

$$p_{34} \nabla^4 w_3^* + p_{32} \nabla^2 w_3^* + p_{30} w_3^* + s_{16} \nabla^6 w_1 + s_{14} \nabla^4 w_1 + s_{12} \nabla^2 w_1 + s_{10} w_1 + \\ + s_{\varphi 04} \nabla^4 \varphi_0 + s_{\varphi 02} \nabla^2 \varphi_0 + s_{\varphi 00} \varphi_0 = p_{q2} \nabla^2 q + p_{q0} q, \quad (8.49)$$

де сталі s із індексами лінійно залежать від невідомих коефіцієнтів a_{12} , a_{10} , a_{00} .

Виразимо $\nabla^2 \varphi_0$ та $\nabla^4 w_1$ через інші функції із наближених рівнянь 1-го етапу (рівнянь (5.42a) при осередненні коефіцієнтів k_{1w1}, k_{2w1}). Одержимо:

$$\nabla^2 \varphi_0 = B_1' \nabla^2 w_1; \quad \nabla^4 w_1 = e_{00} \varphi_0 + e_{12} \nabla^2 w_1 + e_{10} w_1 + e_{q2} \nabla^2 q + e_{q0} q, \quad (8.50)$$

де B_1' , e_{00}, \dots, e_{q0} – МГП.

Із останніх залежностей отримаємо:

$$\nabla^4 \varphi_0 = k_{00} \varphi_0 + k_{02} \nabla^2 w_1 + k_{01} w_1 + k_{q2} \nabla^2 q + k_{q0} q; \\ \nabla^6 w_1 = r_{00} \varphi_0 + r_{12} \nabla^2 w_1 + r_{10} w_1 + r_{q4} \nabla^4 q + r_{q2} \nabla^2 q + r_{q0} q, \quad (k_{00}, \dots, r_{q0} - \text{МГП}). \quad (8.51)$$

Тоді рівняння (8.49), ураховуючи (8.50) і (8.51), зобразиться у вигляді:

$$t_{00} \varphi_0 + t_{12} \nabla^2 w_1 + t_{10} w_1 + (p_{34} \nabla^4 + p_{32} \nabla^2 + p_{30}) w_3^* = (t_{q4} \nabla^4 + t_{q2} \nabla^2 + t_{q0}) q, \quad (8.52)$$

де t_{00}, \dots, t_{q0} – МГП оболонки, лінійно залежать від невідомих a_{12} , a_{10} , a_{00} .

У ДР (8.52) покладемо множники t_{00} , t_{12} , t_{10} рівними нулю. Одержимо систему 3-х ЛАР для знаходження коефіцієнтів a_{12} , a_{10} , a_{00} . Визначивши їх, дістанемо ДР 4-го порядку відносно $w_3^*(x, y)$:

$$(p_{34} \nabla^4 + p_{32} \nabla^2 + p_{30}) w_3^* = (t_{q4} \nabla^4 + t_{q2} \nabla^2 + t_{q0}) q, \quad (8.53)$$

у якому сталі t_{q4} , t_{q2} , t_{q0} відомі, оскільки коефіцієнти a_{12} , a_{10} , a_{00} уже знайдені.

Знайшовши розв'язок $w_3^*(x, y)$ ДР (8.53) і, ураховуючи визначені на 1-му етапі функції $u_0(x, y), v_0(x, y), w_1(x, y)$, одержимо на основі (8.48) шукану функцію $w_3(x, y)$. Надалі із (8.41) визначається функція $\varphi_3(x, y)$, а із рівнянь (5.41) – функції $u_3(x, y)$ і $v_3(x, y)$. Вихрові функції $\psi_k(x, y)$ знаходяться із СДР вихрового КЕ. Компоненти НДС визначаються через складові компонент переміщень. Сталі інтегрування, які з'являються при розв'язанні СДР вихрового КЕ та внутрішнього НДС із потенціальним КЕ, знаходяться із крайових умов .

8.2.2. Числові результати. Для перевірки ефективності наближеного методу проведено розрахунки трансропних оболонок, які зазнають дії кососиметричного поперечного синусоїдального навантаження $(0,5q(x, y))$, прикладеного до лицевих поверхонь $(q(x, y) = q_{11} \sin \pi x / a \sin \pi y / b)$ при граничних умовах Нав'є для різних МГП у широких межах їх змінювання згідно НК013 за точними рівняннями (5.42), за наближеним методом для НК013 і за НК01. У [157] наведені деякі з результатів для $\tilde{\sigma}_x$ і \tilde{W} для нижньої лицевої поверхні.

Результати показують, що компоненти НДС, які отримані на основі точних рівнянь (5.42) в НК013 і згідно запропонованого наближеного методу відрізняються не більше 5 % для достатньо широких меж змінювання МГП. НК01, як це впливає із розрахунків, може давати суттєві похибки. Дослідження ефективності наближеного методу для інших граничних умов і інших навантажень, очевидно, потребує додаткових досліджень. У той же час, у будь-якому випадку, метод суттєво уточнює розв'язок граничних задач, отриманих за теорією типу Тимошенка-Рейснера. Наближений метод дає можливість звести розв'язування взаємозв'язаної СДР із частинними похідними 12-го порядку варіанта МТ оболонок у НК013, яка описує внутрішній НДС із потенціальним КЕ, до розв'язування окремої СДР 8-го порядку в НК01 і окремого ДР 4-го порядку (8.53) відносно деякої нової функції поперечного переміщення w_3^* , причому, останнє ДР не залежить від розв'язку СДР 8-го порядку. Це є суттєвим спрощенням при розв'язанні граничних задач, що дає перспективу застосування даного методу для широкого класу задач механіки нетонких пологих трансропних і ізотропних оболо-

нок при довільних навантаженнях. Методика отримання рівнянь показує, що при косиметричному деформуванні СДР порядку $4N$ для пологих оболонок зводиться до послідовного розв'язання ДР 8-го порядку і $(N - 2)$ ДР 4-го порядку.

8.3. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач для півнескінченних пластин

Використаємо результати п. 2.2 для розв'язування граничної задачі про півнескінченну трансропну пластину довільної сталої товщини h ; $x \in [0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$, $z \in [h/2; h/2]$, на яку діє поперечне навантаження $q(x, y)$, яке зникає при $x \rightarrow \infty$:

$$q(x, y) = q_0 \exp(-\alpha x) \cos \beta y, \quad (\alpha > 0; \beta > 0; \alpha \neq \beta), \quad (q_0 = \text{const}). \quad (8.54)$$

Задача розв'язується аналітично в НК13 і зводиться до відшукування загальних розв'язків СДР (3.112) (або ж (2.23)) і (3.103) з урахуванням (3.113)–(3.115), (2.24)–(2.26) і (3.105)–(3.107). НДС цієї задачі складатиметься із суми ВНДС та вихрового і потенціального крайових ефектів.

Розв'язок ДР $\nabla^4 \Phi_{1B} = 0$ шукаємо у формі: $\Phi_{1B}(x, y) = \varphi_{1B}(x) \cos \beta y$. Отримаємо $\Phi_{1B}(x, y) = ((C_1 + C_2 x) \exp(-\beta x) + (C_3 + C_4 x) \exp(\beta x)) \cos \beta y$ (C_i – сталі інтегрування). Тут і далі сталі позначатимемо буквами C з індексами. Також враховуватимемо прямування до нуля на нескінченності всіх функцій. Тоді:

$$\Phi_{1B}(x, y) = (C_1 + C_2 x) \exp(-\beta x) \cos \beta y. \quad (8.55)$$

Не зупиняючись на проміжних викладках при отриманні розв'язків відповідних ДР, наведемо вирази для цих розв'язків і необхідних функцій.

Розв'язки рівнянь Гельмгольца $(\nabla^2 - s_j) \Phi_{1\Pi j}(x, y) = 0$:

$$\Phi_{1\Pi 1}(x, y) = C_5 \exp(-\beta \omega_1 x) \cos \beta y, \quad (\omega_1 = \sqrt{1 + s_1 / \beta^2} > 1);$$

$$\Phi_{1\Pi 2}(x, y) = C_7 \exp(-\beta \omega_2 x) \cos \beta y, \quad (\omega_2 = \sqrt{1 + s_2 / \beta^2} > 1).$$

Розв'язок ДР (3.115), яке описує потенціальний КЕ:

$$\Phi_{1II}(x, y) = (C_5 \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y. \quad (8.56)$$

Загальні розв'язки однорідних ДР (3.112):

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(x, y) = \\ = ((C_1 + C_2 x) \exp(-\beta x) + C_5 \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y, \end{aligned} \quad (8.57)$$

а $\Phi_{30}(x, y) \equiv 0$, як уже вказувалось у (3.114).

Частинні розв'язки неоднорідних ДР (2.24)–(2.26):

$$\begin{aligned} f_{0r}(x, y) &= A_0 \exp(-\alpha x) \cos \beta y; \quad A_0 = q_0 / (\alpha^2 - \beta^2); \\ f_{1r}(x, y) &= A_1 \exp(-\alpha x) \cos \beta y; \quad A_1 = q_0 / (\alpha^2 - \beta^2 - s_1); \\ f_{2r}(x, y) &= A_2 \exp(-\alpha x) \cos \beta y; \quad A_2 = q_0 / (\alpha^2 - \beta^2 - s_2); \\ f_{00r}(x, y) &= A_3 \exp(-\alpha x) \cos \beta y; \quad A_3 = q_0 / (\alpha^2 - \beta^2)^2. \end{aligned}$$

Частинні розв'язки неоднорідних ДР (2.23):

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(x, y) &= A_{kr} \exp(-\alpha x) \cos \beta y, \quad (k = 1, 3); \quad (8.58) \\ A_{kr} &= \frac{a_{k0}}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 (s_1 - s_2)} (A_1 - A_0) + \frac{s_1}{s_2 (s_2 - s_1)} (A_2 - A_0) + A_3 \right) (\alpha^2 - \beta^2 - s_{k0}). \end{aligned}$$

Загальні розв'язки неоднорідних ДР (2.23):

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= ((C_1 + C_2 x) \exp(-\beta x) + A_{1r} \exp(-\alpha x) + \\ &+ C_5 \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y; \quad (8.59) \\ \Phi_3(x, y) &= \Phi_{3r}(x, y) = A_{3r} \exp(-\alpha x) \cos \beta y. \end{aligned}$$

Таким чином, як це впливає з (8.55)–(8.59), доданки, які не містять сталих інтегрування, разом з доданками, які містять сталі C_1 і C_2 , описують внутрішній НДС; доданки зі сталими C_5 і C_7 характеризують потенціальний КЕ.

Загальні розв'язки СДР (3.109):

$$\begin{aligned}
w_1(x, y) &= ((C_1 b_1 + C_2 b_2(x)) \exp(-\beta x) + c_{1r} \exp(-\alpha x)) \cos \beta y + \\
&+ (C_5 b_5 \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 b_7 \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y; \\
w_3(x, y) &= (C_2 d_2 \exp(-\beta x) + c_{3r} \exp(-\alpha x)) \cos \beta y + \\
&+ (C_5 d_5 \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 d_7 \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y,
\end{aligned} \tag{8.60}$$

де

$$\begin{aligned}
b_1 &= \mu_{330}; \quad b_2(x) = \mu_{332} a_2 + \mu_{330} x; \quad c_{1r} = A_{1r} b_{1r} + A_{3r} b_{3r}; \quad b_5 = \mu_{334} a_5^2 + \mu_{332} a_5 + \mu_{330}; \\
b_7 &= \mu_{334} a_7^2 + \mu_{332} a_7 + \mu_{330}; \quad d_2 = -\mu_{312} a_2; \quad d_5 = -(\mu_{314} a_5^2 + \mu_{312} a_5); \quad c_{3r} = A_{1r} d_{1r} + A_{3r} d_{3r} \\
d_7 &= -(\mu_{314} a_7^2 + \mu_{312} a_7); \quad d_{1r} = -(\mu_{314} a_{1r}^2 + \mu_{312} a_{1r}); \quad d_{3r} = \mu_{114} a_{1r}^2; \\
b_{1r} &= \mu_{334} a_{1r}^2 + \mu_{332} a_{1r} + \mu_{330}; \quad b_{3r} = -(\mu_{134} a_{1r}^2 + \mu_{132} a_{1r}); \quad a_2 = -2\beta; \quad a_5 = \beta^2 (\omega_1^2 - 1); \\
a_7 &= \beta^2 (\omega_2^2 - 1); \quad a_{1r} = \alpha^2 - \beta^2.
\end{aligned}$$

Із (8.60) випливає, що поперечні переміщення визначаються ВНДС і ПКЕ і не залежать від ВКЕ.

Загальні розв'язки СДР (3.103), яка описує ВКЕ:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &= (C_9 k_{1r} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} k_{2r} \exp(-\beta \omega_4 x)) \sin \beta y; \\
\psi_3(x, y) &= (C_9 k_{3r} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} k_{3r} \exp(-\beta \omega_4 x)) \sin \beta y,
\end{aligned} \tag{8.61}$$

де $k_{1r} = \beta_{332} r_1 + \beta_{333}$; $k_{2r} = \beta_{332} r_2 + \beta_{333}$; $k_{3r} = -\beta_{133}$.

Із (8.61) слідує, що далі доданки із C_9 і C_{11} описують ВКЕ.

Тангенціальні переміщення:

$$\begin{aligned}
u_k(x, y) &= ((C_1 a_{k1\beta} \beta + C_2 a_{k2\beta}) \exp(-\beta x) - a_{k\alpha} \alpha \exp(-\alpha x)) \cos \beta y + \\
&+ (C_5 a_{k5\beta} (-\beta \omega_1) \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 a_{k7\beta} (-\beta \omega_2) \exp(-\beta \omega_2 x)) \cos \beta y + \\
&+ (C_9 a_{k9\beta} \beta \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} a_{k11\beta} \beta \exp(-\beta \omega_4 x)) \cos \beta y; \\
v_k(x, y) &= ((C_1 a_{k1\beta} \beta + C_2 b_{k2\beta}) \exp(-\beta x) - b_{k\alpha} \beta \exp(-\alpha x)) \sin \beta y + \\
&+ (C_5 a_{k5\beta} (-\beta) \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 a_{k7\beta} (-\beta) \exp(-\beta \omega_2 x)) \sin \beta y + \\
&+ (C_9 a_{k9\beta} \beta \omega_3 \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} a_{k11\beta} \beta \omega_4 \exp(-\beta \omega_4 x)) \sin \beta y.
\end{aligned} \tag{8.62}$$

У формулах (8.62):

$$\begin{aligned}
a_{k1\beta} &= -b_1 \lambda_{kw1}; \quad a_{k2\beta} = \lambda_{kw1} (\mu_{330} - \beta b_2(x)) - \beta (\lambda_{k\phi1} t_{12} + \lambda_{k\phi3} t_{32}) - d_2 \beta \lambda_{kw3}; \\
a_{k\alpha} &= \lambda_{k\phi1} (t_{10} + \lambda_{14} q_0) + \lambda_{k\phi3} (t_{30} + \lambda_{34} q_0) + (\lambda_{kw1} c_{1r} + \lambda_{kw3} c_{3r}) + \lambda_{kqx} q_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{k5\beta} &= \lambda_{k\varphi 1} t_{15} + \lambda_{k\varphi 3} t_{35} + \lambda_{kw1} b_5 + \lambda_{kw3} d_5; \\
a_{k7\beta} &= \lambda_{k\varphi 1} t_{17} + \lambda_{k\varphi 3} t_{37} + \lambda_{kw1} b_7 + \lambda_{kw3} d_7; \\
a_{k9\beta} &= \lambda_{k\psi 1} k_{1r} + \lambda_{k\psi 3} k_{3r}; a_{k11\beta} = \lambda_{k\psi 1} k_{2r} + \lambda_{k\psi 3} k_{3r}; b_{k2\beta} = a_{k2\beta} - \lambda_{kw1} \mu_{330}; \\
b_{k\alpha} &= \lambda_{k\varphi 1} (t_{10} + \lambda_{14} q_0) + \lambda_{k\varphi 3} (t_{30} + \lambda_{34} q_0) + (\lambda_{kw1} c_{1r} + \lambda_{kw3} c_{3r}) + \lambda_{kqy} q_0; \\
t_{k0} &= \lambda_{k1} a_{1r} c_{1r} + \lambda_{k2} c_{3r} + \lambda_{k3} c_{3r} (\alpha^2 - \beta^2); t_{k2} = \lambda_{k2} d_2 - 2\lambda_{k1} \beta \mu_{330}; \\
t_{k5} &= \lambda_{k1} a_5 b_5 + \lambda_{k2} d_5 + \lambda_{k3} a_5 d_5; t_{k7} = \lambda_{k1} a_7 b_7 + \lambda_{k2} d_7 + \lambda_{k3} a_7 d_7.
\end{aligned}$$

Напруження визначаються за формулами (3.100), у яких:

$$\begin{aligned}
s_{xn} = s_{xn}(x, y) &= \sum_{k=1,3}^3 ((C_1 c_{1xkn} + C_2 c_{2xkn}) \exp(-\beta x) + c_{\alpha xkn} \exp(-\alpha x) + \\
&+ C_5 c_{5xkn} \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 c_{7xkn} \exp(-\beta \omega_2 x) + \\
&+ C_9 c_{9xkn} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} c_{11xkn} \exp(-\beta \omega_4 x)) \cos \beta y, \quad (n=1,3,5),
\end{aligned} \quad (8.63)$$

де

$$\begin{aligned}
c_{1xkn} &= a_{k1\beta} \beta^2 (a_{nvk} - a_{nuk}); c_{2xkn} = a_{nvk} \beta (a_{k2\beta} - \lambda_{kw1} \mu_{330}) - a_{nuk} a_{k2\beta} \beta + a_{nw3} d_2; \\
c_{\alpha xkn} &= a_{nuk} a_{k\alpha} \alpha^2 - a_{nvk} b_{k\alpha} \beta^2 + a_{nw3} c_{3r} + a_{nq} q_0; \\
c_{5xkn} &= a_{k5\beta} \beta^2 (a_{nuk} \omega_1^2 - a_{nvk}) + a_{nw3} d_5; c_{7xkn} = a_{k7\beta} \beta^2 (a_{nuk} \omega_2^2 - a_{nvk}) + a_{nw3} d_7; \\
c_{9xkn} &= a_{k9\beta} \beta^2 \omega_3 (a_{nvk} - a_{nuk}); c_{11xkn} = a_{k11\beta} \beta^2 \omega_4 (a_{nvk} - a_{nuk}), \quad a_{nuk}, a_{nvk} - \text{МГП}.
\end{aligned} \quad (8.64)$$

Щоб отримати $s_{yn}(x, y)$ потрібно у (8.63) замінити $s_{xn}(x, y)$ на $s_{yn}(x, y)$ ($s_{xn} \rightarrow s_{yn}$), а у (8.64) індекс x замінити на індекс y , $a_{nuk} \rightarrow a_{nvk}$, $a_{nvk} \rightarrow a_{nuk}$.

Складові в інших компонентах напружень:

$$\begin{aligned}
t_{yxn} = t_{yxn}(x, y) &= ((C_1 c_{1tn} + C_2 c_{2tn}) \exp(-\beta x) + c_{\alpha tn} \exp(-\alpha x) + \\
&+ C_5 c_{5tn} \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 c_{7tn} \exp(-\beta \omega_2 x) + \\
&+ C_9 c_{9tn} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} c_{11tn} \exp(-\beta \omega_4 x)) \sin \beta y, \quad (n=1,3); \\
t_{xn} = t_{xn}(x, y) &= ((C_1 d_{1xn} + C_2 d_{2xn}) \exp(-\beta x) + d_{\alpha xn} \exp(-\alpha x) + \\
&+ C_5 d_{5xn} \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 d_{7xn} \exp(-\beta \omega_2 x) + \\
&+ C_9 d_{9xn} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} d_{11xn} \exp(-\beta \omega_4 x)) \cos \beta y, \quad (n=0,2,4), \\
(t_{xn} \rightarrow t_{yn}, d_{ixn} \rightarrow d_{iyn}, d_{\alpha xn} \rightarrow d_{\alpha yn}, \cos \beta y \rightarrow \sin \beta y);
\end{aligned} \quad (8.65)$$

$$s_{zn} = s_{zn}(x, y) = ((C_1 d_{1zn} + C_2 d_{2zn}) \exp(-\beta x) + d_{\alpha zn} \exp(-\alpha x) + \\ + C_5 d_{5zn} \exp(-\beta \omega_1 x) + C_7 d_{7zn} \exp(-\beta \omega_2 x) + \\ + C_9 d_{9zn} \exp(-\beta \omega_3 x) + C_{11} d_{11zn} \exp(-\beta \omega_4 x)) \cos \beta y, \quad (n=1,3,5),$$

де c і d з індексами залежать від α, β, n і параметрів пластини.

Таким чином, на основі (8.60), (8.62), (8.63), (8.65) складові у компонентах НДС мають такий вигляд:

$$w_1(x, y) = f_{w1}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, c_{1r}) \cos \beta y; \quad w_3(x, y) = f_{w3}(x, C_2, C_5, C_7, c_{3r}) \cos \beta y; \\ u_n(x, y) = f_{un}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, a_{n\alpha}) \cos \beta y; \\ v_n(x, y) = f_{vn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, b_{n\alpha}) \sin \beta y; \quad (n=1,3); \\ s_{xn}(x, y) = f_{xn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, c_{\alpha xkn}) \cos \beta y; \\ s_{yn}(x, y) = f_{yn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, c_{\alpha ykn}) \cos \beta y, \quad (n=1,3,5); \quad (8.66) \\ t_{yxn}(x, y) = f_{yxn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, c_{\alpha tn}) \sin \beta y, \quad (n=1,3); \\ t_{xn}(x, y) = f_{xn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, d_{\alpha xn}) \cos \beta y; \\ t_{yn}(x, y) = f_{yn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, d_{\alpha yn}) \sin \beta y, \quad (n=0,2,4); \\ s_{zn}(x, y) = f_{zn}(x, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, d_{\alpha zn}) \cos \beta y, \quad (n=1,3,5),$$

де коефіцієнти c, α, b, d з індексами залежать від α, β, n і МГП пластини.

Розглянемо деякі граничні задачі для півнескінченної пластини при дії на неї поперечного навантаження (8.54). У всіх нижченаведених граничних задачах граничні умови записуються на основі (3.35).

Гранична задача 1. Граничні умови при $x = 0$ (жорстке защемлення):

$$U(x=0, y, z)=0, \quad V(x=0, y, z)=0, \quad W(x=0, y, z)=0, \quad (8.67)$$

або, ураховуючи (3.99), в складових компонент переміщень:

$$u_n(x=0, y) = v_n(x=0, y) = w_n(x=0, y) = 0, \quad (n=1,3). \quad (8.68)$$

На основі (8.66) і (8.68) матимемо шість ЛАР відносно сталих:

$$u_n(x=0, y) = f_{un}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, a_{n\alpha}) = 0; \\ v_n(x=0, y) = f_{vn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, b_{n\alpha}) = 0, \quad (8.69) \\ w_n(x=0, y) = f_{wn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, c_{nr}) = 0, \quad (n=1,3).$$

У (8.69) після перетворень праві частини залежать від $c_{nr}, a_{n\alpha}, b_{n\alpha}$.

Гранична задача 2.

$$\begin{aligned} U(x=0, y, z) &= (A_1^0 P_1(2z/h) + A_3^0 P_3(2z/h)) \cos \beta y; \\ V(x=0, y, z) &= (B_1^0 P_1(2z/h) + B_3^0 P_3(2z/h)) \sin \beta y; \\ W(x=0, y, z) &= (C_1^0 P_0(2z/h) + C_3^0 P_2(2z/h)) \cos \beta y, \quad (A_1^0, \dots, C_3^0 - \text{const}). \end{aligned} \quad (8.70)$$

Отримаємо також систему шести ЛАР відносно $C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}$:

$$\begin{aligned} u_n(x=0, y) &= f_{un}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, a_{n\alpha}) = A_n^0, \\ v_n(x=0, y) &= f_{vn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, b_{n\alpha}) = B_n^0, \\ w_n(x=0, y) &= f_{wn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, c_{nr}) = C_n^0, \quad (n=1,3). \end{aligned} \quad (8.71)$$

Гранична задача 3.

$$\begin{aligned} X_v(x=0, y, z) &= (A_{1x} P_1(2z/h) + A_{3x} P_3(2z/h)) \cos \beta y, \quad A_{1x}, A_{3x} - \text{const}; \\ V(x=0, y, z) &= 0; \quad W(x=0, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Сталі $C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}$ визначатимуться з таких ЛАР:

$$\begin{aligned} s_{xn}(x=0, y) &= f_{xn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, a_{n\alpha}) = x_{sn} \equiv A_{nx}, \\ v_n(x=0, y) &= f_{vn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, b_{n\alpha}) = 0, \\ w_n(x=0, y) &= f_{wn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, c_{nr}) = 0, \quad (n=1,3). \end{aligned} \quad (8.73)$$

Гранична задача 4.

$$\begin{aligned} W(x=0, y, z) &= 0; \quad X_v(x=0, y, z) = (A_{1x} P_1(2z/h) + A_{3x} P_3(2z/h)) \cos \beta y; \\ Y_v(x=0, y, z) &= (A_{1y} P_1(2z/h) + A_{3y} P_3(2z/h)) \sin \beta y; \quad A_{1x}, \dots, A_{3y} - \text{const}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Сталі визначатимуться з таких алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} s_{xn}(x=0, y) &= f_{xn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, a_{n\alpha}) = x_{sn} \equiv A_{nx}, \\ t_{yxn}(x=0, y) &= f_{yxn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, C_9, C_{11}, c_{\alpha tn}) = y_{sn} \equiv A_{ny}, \\ w_n(x=0, y) &= f_{wn}(x=0, C_1, C_2, C_5, C_7, c_{nr}) = 0, \quad (n=1,3). \end{aligned} \quad (8.75)$$

Після визначення сталих інтегрування знаходяться компоненти НДС за відповідними наведеними раніше формулами.

Отже, у розглянутих вище граничних задачах для півнескінченної пластини, на яку діє навантаження (8.54), з граничними умовами (8.67), (8.70), (8.72), (8.74), які зводяться до крайових умов (8.69), (8.71), (8.73), (8.75) відповідно, для визначення 12-и сталих інтегрування систем ДР (3.103) і (3.112) маємо 12 умов: 1) 6 умов затухання функцій при $x \rightarrow \infty$ (визначаються $C_i = 0$, $i = 3, 4, 6, 8, 10, 12$); 2) 6 крайових умов, які зводяться до 6-и ЛАР відносно C_i ($i = 1, 2, 5, 7, 9, 11$).

Внутрішній НДС описується членами, які не містять сталих інтегрування, разом із доданками, які містять C_1, C_2 . Dodанки зі сталими C_5, C_7 визначають потенціальний КЕ, а доданки із сталими C_9, C_{11} – вихровий КЕ.

Не виникає принципівих труднощів розв'язку граничних задач для півнескінченної пластини, якщо поверхня пластини вільна від поперечних навантажень, а на краю $x \in [0, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [h/2; h/2]$ задаються компоненти переміщень або компоненти напружень при умові рівноваги пластини.

8.4. Інтегрування СДР рівноваги пластин довільної товщини при дії вісесиметричних переривчастих поперечних навантажень

Для демонстрації ефективності методу зведення неоднорідних ДР високих порядків до неоднорідних ДР низьких порядків розглянемо інтегрування СДР рівноваги пластин довільної сталої товщини при дії на них вісесиметричних переривчастих (розривних) навантажень. Використаємо цей метод згідно з п. 2.2.

В цьому випадку вихровий КЕ буде відсутній і розв'язання СДР рівноваги зведеться до розв'язувальної неоднорідної СДР (3.109) 8-го порядку, яка в свою чергу зводиться до визначальної СДР (2.23) відносно функцій $\Phi_1(r), \Phi_3(r)$.

8.4.1. Частинні розв'язки. Розглянемо різні переривчасті навантаження.

8.4.1.1. Рівномірне навантаження q_0 по колу радіуса r_0 . Має вигляд:

$$q(r) = q_0 \delta(r - r_0), \quad (8.76)$$

де $\delta(r - r_0)$ – дельта-функція: $\delta(r - r_0) = \begin{cases} 0, & (r \neq r_0); \\ \infty, & (r = r_0). \end{cases}$

Тоді ДР (2.23)–(2.26) у полярній системі координат приймуть вигляд:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(r) = a_{k0} D_{k0} q(r), (k=1,3); \quad (8.77)$$

$$D_0 f_0(r) \equiv \nabla^2 f_0(r) = q(r); \quad \nabla^2 = d^2/d r^2 + (1/r)d/dr; \quad (8.78)$$

$$D_0 D_0 f_{00}(r) \equiv \nabla^4 f_{00}(r) = q(r); \quad (8.79)$$

$$D_i f_i(r) \equiv (\nabla^2 - s_i) f_i(r) = q(r), (i=1,2). \quad (8.80)$$

Надалі використаємо метод інтегрального перетворення Ганкеля [354].

Наведемо основні залежності:

Зображення $F(p)$ функції $f(r)$ і оригінал $f(r)$ через зображення $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty r J_0(pr) f(r) dr, \quad f(r) = \int_0^\infty p J_0(pr) F(p) dp, \quad (8.81)$$

де $J_0(pr)$ - функція Бесселя першого роду нульового порядку [220].

Інші формули [269]:

$$\int_0^\infty r J_0(pr) \nabla^{2m} f(r) dr = (-1)^m p^{2m} F(p), m \in N; \quad \int_0^\infty r J_0(pr) \delta(r-r_0) dr = r_0 J_0(pr_0). \quad (8.82)$$

Вважається, що функції в обох частинах ДР (8.78)–(8.80) задовольняють умовам інтегрального перетворення Ганкеля, а саме: $r F(r) \rightarrow 0, r F'(r) \rightarrow 0, \dots$, якщо $r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$, де $F(r)$ – будь-яка функція лівої і правої частин цих рівнянь.

Не зупиняючись на розв'язанні ДР (8.78) і (8.79), наведемо їх частинні розв'язки.

Частинні розв'язки ДР (8.78):

$$f_{0r}(r) = q_0 r_0 \ln r_0, (r < r_0); \quad f_{0r}(r) = q_0 r_0 \ln r, (r > r_0). \quad (8.83)$$

Частинні розв'язки ДР (8.79):

$$f_{00r}(r) = q_0 r_0 ((r^2 + r_0^2) \ln r_0 + r^2) / 4, (r < r_0); \quad (8.84)$$

$$f_{00r}(r) = q_0 r_0 ((r^2 + r_0^2) \ln r + r_0^2) / 4, (r > r_0). \quad (8.85)$$

Перевіркою можна впевнитись, що (8.83)–(8.85) є частинними розв’язками ДР (8.78) і (8.79). Тут розмірні величини r і r_0 потрібно розуміти безрозмірними, які чисельно дорівнюють їх розмірним значенням. З урахуванням граничних умов розв’язки включатимуть уже відношення розмірних величин.

ДР (8.80) в просторі зображень Ганкеля:

$$\int_0^{\infty} r J_0(pr) (\nabla^2 - s_i) f_i(r) dr = \int_0^{\infty} r J_0(pr) q_0 \delta(r - r_0) dr, \quad (i = 1, 2).$$

Ураховуючи (8.81), (8.82), знаходиться $F_i(p) = -q_0 r_0 J_0(p r_0) / (p^2 + s_i)$.

Повертаючись до $f_{ir}(r)$ згідно з (8.81), дістанемо:

$$f_{ir}(r) = \int_0^{\infty} p J_0(pr) F_i(p) dp = -q_0 r_0 \int_0^{\infty} p J_0(pr) J_0(p r_0) / (p^2 + s_i) dp. \quad (8.86)$$

Для податливих на поперечний зсув транстропних пластин ($s_i > 0$), ураховуючи формули для останнього інтеграла [75], отримаємо:

$$\int_0^{\infty} p J_0(pr) J_0(p r_0) / (p^2 + s_i) dp = I_0(r \sqrt{s_i}) K_0(r_0 \sqrt{s_i}), \quad (r < r_0);$$

$$\int_0^{\infty} p J_0(pr) J_0(p r_0) / (p^2 + s_i) dp = I_0(r_0 \sqrt{s_i}) K_0(r \sqrt{s_i}), \quad (r > r_0),$$

де I_0 і K_0 – модифікована функція Бесселя і функція Макдональда 0-го порядку.

Тоді маємо частинні розв’язки $f_{ir}(r)$ ДР (8.80) з урахуванням (8.86):

$$f_{ir}(r) = -q_0 r_0 I_0(r \sqrt{s_i}) K_0(r_0 \sqrt{s_i}), \quad (r < r_0); \quad (8.87)$$

$$f_{ir}(r) = -q_0 r_0 I_0(r_0 \sqrt{s_i}) K_0(r \sqrt{s_i}), \quad (r > r_0). \quad (8.88)$$

Частинні розв’язки ДР (8.77) з урахуванням (8.83)–(8.85), (8.87), (8.88) виначаються формулами (2.28):

$$\Phi_{kr}(r) = -\frac{a_{k0} q_0 r_0 D_{k0}}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} I_0(r \sqrt{s_1}) K_0(r_0 \sqrt{s_1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} I_0(r \sqrt{s_2}) K_0(r_0 \sqrt{s_2}) + s_{12}^0 \ln r_0 - \frac{1}{4} ((r^2 + r_0^2) \ln r_0 + r^2) \right); \quad (8.89)$$

$$s_{12}^0 = s_2 / (s_1 s_{12}) + s_1 / (s_2 s_{21}); (r < r_0, k = 1, 3);$$

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0} q_0 r_0 D_{k0}}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} I_0(r_0 \sqrt{s_1}) K_0(r \sqrt{s_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} I_0(r_0 \sqrt{s_2}) K_0(r \sqrt{s_2}) + s_{12}^0 \ln r - \frac{1}{4} ((r^2 + r_0^2) \ln r + r_0^2) \right), (r > r_0, k = 1, 3). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Прийmemo до уваги [220] залежності:

$$\begin{aligned} \nabla^2 K_0(\sqrt{s_i} r) &= s_i K_0(\sqrt{s_i} r), \quad \nabla^4 K_0(\sqrt{s_i} r) = s_i^2 K_0(\sqrt{s_i} r), \\ \nabla^2 I_0(\sqrt{s_i} r) &= s_i I_0(\sqrt{s_i} r), \quad \nabla^4 I_0(\sqrt{s_i} r) = s_i^2 I_0(\sqrt{s_i} r), (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Тоді частинні розв'язки(8.89), (8.90) ДР (8.77) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0} q_0 r_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (s_1 - s_{k0}) I_0(r \sqrt{s_1}) K_0(r_0 \sqrt{s_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (s_2 - s_{k0}) I_0(r \sqrt{s_2}) K_0(r_0 \sqrt{s_2}) - \right. \\ & \left. - \ln r_0 - 1 + s_{k0} (-s_{12}^0 \ln r_0 + (r^2 + r_0^2) \ln r_0 / 4 + r^2 / 4) \right), (r < r_0,); \end{aligned} \quad (8.91)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0} q_0 r_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (s_1 - s_{k0}) I_0(r_0 \sqrt{s_1}) K_0(r \sqrt{s_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (s_2 - s_{k0}) I_0(r_0 \sqrt{s_2}) K_0(r \sqrt{s_2}) - \right. \\ & \left. - \ln r - 1 + s_{k0} (-s_{12}^0 \ln r + (r^2 + r_0^2) \ln r / 4 + r_0^2 / 4) \right), (r > r_0,). \end{aligned} \quad (8.92)$$

Умови спряження для $\Phi_{kr}(r)$ при $r = r_0$ виконуються.

8.4.1.2. Рівномірне навантаження q_0 по кільцю з радіусами r_1 і r_2 .

$$q(r) = \begin{cases} 0, & (r < r_1); \\ q_0, & (r_1 < r < r_2); \\ 0, & (r > r_2). \end{cases} \quad (8.93)$$

Частинні розв'язки ДР (8.77) в цьому випадку отримаємо, якщо у (8.91) і (8.92) q_0 заміниmo на $q_0 dr_0$ і проінтегруємо їх в межах від r_1 до r_2 . Дістанемо:

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0}q_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_1}) (r_1 K_1(r_1\sqrt{s_1}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_1})) \right. \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_2}) (r_1 K_1(r_1\sqrt{s_2}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_2})) - \frac{1}{4} (r_2^2 - r_1^2) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{k0} r^2}{4} - 1 - s_{k0} s_{12}^0 \right) (r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1) + \frac{s_{k0}}{16} (r_2^4 \ln r_2 - r_1^4 \ln r_1 + \\ & \left. + 4s_{12}^0 (r_2^2 - r_1^2) - \frac{1}{4} (r_2^4 - r_1^4) + r^2 (r_2^2 - r_1^2) \right), \quad (r \langle r_1); \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0}q_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_1}) (r_2 I_1(r_2\sqrt{s_1}) - r_1 I_1(r_1\sqrt{s_1})) \right. \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_2}) (r_2 I_1(r_2\sqrt{s_2}) - r_1 I_1(r_1\sqrt{s_2})) - \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 + \ln r + s_{k0} s_{12}^0 \ln r) (r_2^2 - r_1^2) + \frac{s_{k0}}{16} (2r^2 (r_2^2 - r_1^2) \ln r + (r_2^4 - r_1^4) (1 + \ln r)) \right), \quad (r \rangle r_2), \end{aligned} \quad (8.95)$$

де I_1 , K_1 – модифікована функція Бесселя і функція Макдональда 1-го порядку.

Щоб знайти частинні розв'язки ДР (8.77) для $r_1 \langle r \langle r_2$ потрібно (аналогічно [381]) скласти (8.94) і (8.95), замінюючи у (8.94) r_1 на r , а в (8.95) r_2 на r :

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0}q_0}{s_1 s_2} (A_{kr}(r) + B_{kr}(r)); \\ A_{kr}(r) = & \frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_1}) (r K_1(r\sqrt{s_1}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_1})) + \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_2}) (r K_1(r\sqrt{s_2}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_2})) + \\ & + \frac{1}{4} (r_2^2 - r^2) (s_{k0} s_{12}^0 - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{k0} r^2}{4} - 1 - s_{k0} s_{12}^0 \right) (r_2^2 \ln r_2 - r^2 \ln r); \\ B_{kr}(r) = & \frac{s_{k0}}{16} (r_2^4 \ln r_2 - r^4 \ln r - \frac{1}{4} (r_2^4 - r^4) + r^2 (r_2^2 - r^2)) + \\ & + \frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_1}) (r I_1(r\sqrt{s_1}) - r_1 I_1(r_1\sqrt{s_1})) + \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_2}) (r I_1(r\sqrt{s_2}) - r_1 I_1(r_1\sqrt{s_2})) - \\ & - \frac{1}{2} (1 + \ln r + s_{k0} s_{12}^0 \ln r) (r^2 - r_1^2) + \frac{s_{k0}}{16} (2r^2 (r^2 - r_1^2) \ln r + (r^4 - r_1^4) (1 + \ln r)). \end{aligned} \quad (8.96)$$

Умови спряження для $\Phi_{kr}(r)$ при $r = r_1$ (формули (8.94) і (8.96)) і при $r = r_2$ (формули (8.95) і (8.96)) виконуються.

8.4.1.3. Рівномірне навантаження пластини по кругу радіуса r_2 .

$$q(r) = \begin{cases} q_0, & (r \langle r_2); \\ 0, & (r \rangle r_2). \end{cases} \quad (8.97)$$

Частинні розв'язки ДР (8.77) отримаємо, якщо у формулах (8.95) і (8.96) покладемо $r_1 = 0$. Із (8.96) дістанемо $\Phi_{kr}(r)$ для $r \langle r_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0}q_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_1}) (r K_1(r\sqrt{s_1}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_1})) + \right. \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) I_0(r\sqrt{s_2}) (r K_1(r\sqrt{s_2}) - r_2 K_1(r_2\sqrt{s_2})) + \\ & + \frac{1}{4} (r_2^2 - r^2) (s_{k0} s_{12}^0 - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{k0} r^2}{4} - 1 - s_{k0} s_{12}^0 \right) (r_2^2 \ln r_2 - r^2 \ln r) + \\ & + \frac{s_{k0}}{16} (r_2^4 \ln r_2 - r^4 \ln r - \frac{1}{4} (r_2^4 - r^4) + r^2 (r_2^2 - r^2)) + \\ & + \frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_1}) r I_1(r\sqrt{s_1}) + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_2}) r I_1(r\sqrt{s_2}) - \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 + \ln r + s_{k0} s_{12}^0 \ln r) r^2 + \frac{s_{k0} r^4}{16} (3 \ln r + 1) \right). \end{aligned} \quad (8.98)$$

Із (8.95) дістанемо $\Phi_{kr}(r)$ для $r \rangle r_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_{kr}(r) = & -\frac{a_{k0}q_0}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12} \sqrt{s_1}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_1}) r_2 I_1(r_2\sqrt{s_1}) + \right. \\ & + \frac{s_1}{s_2 s_{21} \sqrt{s_2}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_2}) r_2 I_1(r_2\sqrt{s_2}) - \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 + \ln r + s_{k0} s_{12}^0 \ln r) r_2^2 + \frac{s_{k0}}{16} (2r^2 r_2^2 \ln r + r_2^4 (1 + \ln r)) \right). \end{aligned} \quad (8.99)$$

Умови спряження при $r = r_2$ виконуються.

8.4.1.4. Навантаження пластини зосередженою силою в центрі. Нехай пластинка навантажена зосередженою силою F у центрі пластини (в початку ко-

ординат). Частинні розв'язки ДР (8.77) отримаємо із (8.92) при $r_0 \rightarrow 0$. Тоді $2\pi r_0 q_0 \rightarrow F$, $q_0 \rightarrow F/(2\pi r_0)$, $I_0(r_0 \sqrt{s_i}) \rightarrow 1$. Дістанемо:

$$\Phi_{kr}(r) = -\frac{a_{k0} F}{2\pi s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r \sqrt{s_1}) + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r \sqrt{s_2}) - (1 + \ln r + s_{k0} (s_{12}^0 - r^2/4) \ln r) \right), \quad (k=1,3). \quad (8.100)$$

Частинні розв'язки ДР (8.77) можна також отримати із (8.99), якщо спрямувати r_2 до нуля. При цьому потрібно мати на увазі, що $\pi r_2^2 q_0 \rightarrow F$, $q_0 \rightarrow F/(\pi r_2^2)$, $I_1(r_2 \sqrt{s_i}) \rightarrow r_2 \sqrt{s_i}/2$. Дістанемо ті ж самі розв'язки (8.100).

8.4.1.5. Довільне в радіальному напрямку поперечне навантаження.

Частинні розв'язки ДР (8.77) при довільному в радіальному напрямку поперечному навантаженні $q(r)$ пластини по кільцю дістанемо, якщо у виразах (8.91) і (8.92) для частинних розв'язків замінимо q_0 на $q(r_0) dr_0$ і проінтегруємо їх у межах від r_1 до r_2 . Проінтегрований вираз (8.91) дасть частинний розв'язок при $r < r_1$, а (8.92) – при $r > r_2$. Для $r_1 < r < r_2$ частинний розв'язок дістанемо, якщо в проінтегрованому виразі (8.91) r_1 замінимо на r , а в проінтегрованому виразі (8.92) r_2 замінимо на r і результати складемо. Для отримання частинних розв'язків при навантаженні $q(r_0)$ пластини по круговій площинці радіуса r_2 з центром в початку координат потрібно поступити аналогічно п. 8.4.1.3.

8.4.2. Загальні розв'язки.

8.4.2.1. Загальні розв'язки визначальних ДР. Загальні розв'язки (8.77):

$$\Phi_1(r) = \Phi_0(r) + \Phi_{1r}(r); \quad \Phi_3(r) = \Phi_{3r}(r), \quad (8.101)$$

де $\Phi_0(r)$ загальний розв'язок відповідного однорідного ДР (8.77), $\Phi_{kr}(r)$ ($k=1,3$) – частинні розв'язки неоднорідних ДР (8.77).

Частинні розв'язки визначаються для різних навантажень згідно з п. 8.4.1.

Загальний розв'язок відповідного однорідного ДР (8.77):

$$\Phi_0(r) = f_{00}(r) + f_{10}(r) + f_{20}(r),$$

де $f_{00}(r)$ – загальний розв’язок бігармонічного рівняння $\nabla^4 f(r) = 0$:

$$f_{00}(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r;$$

$f_{i0}(r)$ ($i = 1, 2$) – загальні розв’язки ДР Гельмгольца $(\nabla^2 - s_i)f_i(r) = 0$:

$$f_{i0}(r) = A_i I_0(r\sqrt{s_i}) + B_i K_0(r\sqrt{s_i}), \quad (i = 1, 2).$$

У наведених формулах A_0, B_0, \dots, B_2 – сталі інтегрування.

Таким чином, загальні розв’язки (8.101) ДР (8.77) визначаються так:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + A_1 I_0(r\sqrt{s_1}) + B_1 K_0(r\sqrt{s_1}) + \\ + A_2 I_0(r\sqrt{s_2}) + B_2 K_0(r\sqrt{s_2}) + \Phi_{1r}(r); \quad \Phi_3(r) = \Phi_{3r}(r). \end{aligned} \quad (8.102)$$

На основі загальних розв’язків (8.102) визначальних ДР (8.77) за відповідними формулами в полярній системі координат (п. 6.4) знаходяться загальні розв’язки для всіх компонент НДС. Не зупиняючись на громіздких викладках, наведемо в п. 8.4.2.2 розв’язки при рівномірному навантаженні по кільцю (8.93).

8.4.2.2. Загальні розв’язки для переміщень і напружень. В дод. Е.2 наведені загальні розв’язки для переміщень і напружень у транстропних круглих і кільцевих пластинах довільної сталі товщини, які зазнають дії вісесиметричного поперечного навантаження q_0 , рівномірно розподіленого по кільцю.

Формули для компонент переміщень (Е.1), (Е.5) і напружень (Е.9), (Е.11), (Е.13), (Е.15) разом із їх складовими (Е.2)–(Е.4), (Е.6)–(Е.8), (Е.10), (Е.12), (Е.14), (Е.16) виражають загальний розв’язок для НДС цих пластин.

На основі отриманих вище залежностей для компонент переміщень і напружень можна ставити і розв’язувати у новій постановці граничні задачі для кругових транстропних пластин довільної товщини при різних граничних умовах на бічній поверхні.

Розглядаючи конкретні граничні умови на бічній поверхні пластини, відшукуються вісім сталих інтегрування $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ із восьми умов, а отже визначається НДС пластини.

8.4.2.3. Аналітичне розв'язання граничних задач. Розглянемо концептуально деякі вісесиметричні граничні задачі для круглих і кільцевих транстропних пластин довільної товщини, які зазнають дії кососиметричного навантаження. Виходимо із аналізу формул п. 8.4.2.1, дод. Е.2 і крайових умов (3.35).

1). Гранична задача А. Кругла пластина радіуса R_2 знаходиться під дією рівномірного навантаження q_0 , яке розподілене по колу радіуса r_0 ($r_0 \leq R_2$), кільцю радіусами r_1, r_2 ($r_1 < r_2; r_2 \leq R_2$), кругу радіусом r_2 ($r_2 \leq R_2$) або ж зазнає дії зосередженої сили в центрі. Граничні умови на бічній поверхні можуть бути статичними, кінематичними або мішаними.

У всіх задачах А складові переміщень u_1, u_3, w_1, w_3 при $r = 0$ повинні бути скінченними. Звідси отримаємо:

$$C_0 = 0, D_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0. \quad (8.103)$$

Задача А1. Шарнірне обпирання краю $r = R_2$ (умови Нав'є):

$$w_j(r = R_2) = 0, j = 1, 3; s_{rj}(r = R_2) = 0, j = 1, 3. \quad (8.104)$$

Сталі A_0, B_0, A_1, A_2 знаходяться однозначно із граничних умов (8.104).

Задача А2. Жорстке защемлення краю $r = R_2$:

$$w_j(r = R_2) = 0, j = 1, 3; u_j(r = R_2) = 0, j = 1, 3. \quad (8.105)$$

Із чотирьох умов (8.105) визначаються A_0, B_0, A_1, A_2 .

Задача А3. На бічній поверхні $r = R_2$ задані компоненти радіальних $R_v(z)$ і поперечних напружень $Z_v(z)$.

$$s_{ri}(r = R_2) = r_{si}, (i = 1, 3); t_{ri}(r = R_2) = z_{si}, (i = 0, 2), \quad (8.106)$$

де

$$r_{si}(x, y) = \frac{2i+1}{h} \int R_v(z, r = R_2) P_i(2z/h) dz, \quad R_v(z, r = R_2) = \sum_{i=1,3}^3 P_i(2z/h) r_{si}, (i = 1, 3);$$

$$z_{si}(x, y) = \frac{2i+1}{h} \int Z_v(z, r = R_2) P_i(2z/h) dz, \quad Z_v(z, r = R_2) = \sum_{i=0,2}^2 P_i(2z/h) z_{si}, (i = 0, 2),$$

причому, $Z_\nu(z, r = R_2)$ повинно урівноважити зовнішнє поперечне навантаження.

Із чотирьох крайових умов (8.106) визначаються сталі A_0, B_0, A_1, A_2 .

2). Гранична задача Б. Кільцева пластина з радіусами R_1, R_2 знаходиться під дією рівномірного навантаження q_0 , яке розподілене по колу або по кільцю. Для всіх можливих закріплень країв $r = R_1$ і $r = R_2$ матимемо по чотири граничних умови на кожному краї, із яких знаходитимуться 8-м невідомих сталих.

Після визначення сталих і їх підстановки у відповідні формули для компонент компонент НДС гранична задача вважається аналітично розв'язаною.

Не виникає принципових труднощів при виведенні загальних розв'язків для інших наближень варіанта МТ, використовуючи формули для переміщень і напружень у полярній системі координат, ураховуючи дод Г.2 для фізично лінійних пластин.

В НК135 невідомих сталих буде 12. Загальні розв'язки визначальних ДР (2.29) 12-го порядку у цьому наближенні матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) = & A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + A_1 I_0(r\sqrt{s_1}) + B_1 K_0(r\sqrt{s_1}) + \\ & + A_2 I_0(r\sqrt{s_2}) + B_2 K_0(r\sqrt{s_2}) + A_3 I_0(r\sqrt{s_3}) + B_3 K_0(r\sqrt{s_3}) + \\ & + A_4 I_0(r\sqrt{s_4}) + B_4 K_0(r\sqrt{s_4}) + \Phi_{1r}(r); \Phi_3(r) = \Phi_{3r}(r); \Phi_5(r) = \Phi_{5r}(r). \end{aligned}$$

За відповідними формулами п. 2.5 визначаються компоненти переміщень і напружень, які залежатимуть від 12-ти невідомих сталих інтегрування.

Для круглих пластин 6 сталих інтегрування $C_0 = 0, D_0 = 0, B_i = 0$ ($i = 1, \dots, 4$). Інші 6 сталих інтегрування визначатимуться із граничних умов на бічній поверхні. Для кільцевих пластин всі 12 сталих знаходитимуться із граничних умов на бічних циліндричних поверхнях пластин (по 6 умов на кожній).

Для інших наближень якісна відповідність кількості невідомих сталих інтегрування до кількості крайових умов зберігається.

Зазначимо, що в [341] знаходились аналітичні розв'язки вісесиметричних задач у математичних рядах для товстих кругових і кільцевих пластин та коротких циліндрів з використанням тривимірних рівнянь ТП. Граничні умови на лицевих площинах плит задовольнялись точно; на циліндричних поверхнях статичні умови виконувались в інтегральному сми-

слі, а кінематичні—задовольнялись тільки на деяких колах бічної поверхні. У побудованому варіанті МТ граничні умови на плоских гранях також задовольняються точно, СДР рівноваги менш точна, ніж у [341]. але на бічній поверхні граничні умови виконуються точно по всій товщині пластини в кожному наближенні на відміну від [341]. І тому можна стверджувати, що, оскільки із зростанням порядку наближень варіанта МТ точність ДР рівноваги збільшується (прямує до точності ДР ТП), то розв'язок варіанта МТ буде точніший, ніж у [341].

8.5. Фундаментальні розв'язки для нетонких транстропних пластин

У [42, 43, 357] були отримані фундаментальні розв'язки для тонкої оболонки методом інтегрального перетворення Фур'є; воно було застосовано безпосередньо до СДРР, отриманої на основі теорій, які базувались на певних припущеннях.

Завдання полягає в тому, щоб побудувати фундаментальні розв'язки СДРР (високого порядку) відносно багатьох функцій, тобто, потрібно побудувати фундаментальні розв'язки СДРР, праві частини яких залежать від дельта-функції Дірака і її похідних. З точки зору математичної реалізації це пов'язано з достатніми труднощами. Тут розроблено простіший метод знаходження фундаментальних розв'язків, оснований на використанні п. 2.2.1. Отже, замість відшукування фундаментальних розв'язків СДРР високих порядків, знаходяться фундаментальні розв'язки ДР 2-го порядку, потім за відповідними диференціальними залежностями визначаються фундаментальні розв'язки визначальних СДР високих порядків і початкових СДРР. Такий метод суттєво спрощує визначення фундаментальних розв'язків СДРР.

Оскільки з фізичної точки зору фундаментальні розв'язки ДР – це частинні розв'язки ДР, які описують НДС від дії зосереджених поперечних навантажень, то фундаментальні розв'язки потрібно побудувати для неоднорідних визначальних СДР, які описують внутрішній НДС із потенціальним КЕ.

8.5.1. Фундаментальні розв'язки в наближенні К13. Знаходження фундаментальних розв'язків СДР рівноваги зводиться до знаходження фундаментальних розв'язків розв'язувальної СДР (3.109) 8-го порядку при умові, що поперечне навантаження $q(x, y)$ представляє собою дві зосереджені поперечні сили

$F/2$, які прикладені в точках $(x=0, y=0, z=\pm h/2)$ кососиметрично відносно серединної площини. Отже, потрібно знайти частинні розв'язки такої СДР:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}w_1 + \Pi_{13}w_3 &= \Pi_{1q}F \delta(x, y); \\ \Pi_{31}w_1 + \Pi_{33}w_3 &= \Pi_{3q}F \delta(x, y), \end{aligned} \quad (8.107)$$

де (x, y) – координати довільної точки, $\delta(x, y)$ – двовимірний функція Дірака.

Для спрощення розв'язання СДР (8.107) зведемо її до знаходження фундаментальних розв'язків $E_k(x, y)$ ($k=1,3$) двох визначальних ДР 8-го порядку:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 E_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} F \delta(x, y), \quad (k=1,3), \quad (8.108)$$

де $D_0 = \nabla^2$, $D_i = \nabla^2 - s_i$, $D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}$; a і s з індексами – МГП пластини; s_i , як показують чисельні дослідження для транстропних пластин (при $E' = E$), приймають додатні або комплексні значення з додатною дійсною частиною.

Із (8.107) визначаються фундаментальні розв'язки $w_{1E}(x, y)$ і $w_{3E}(x, y)$:

$$w_{1E}(x, y) = \Pi_{33}E_1(x, y) - \Pi_{13}E_3(x, y), \quad w_{3E}(x, y) = -\Pi_{31}E_1(x, y) + \Pi_{11}E_3(x, y). \quad (8.109)$$

На основі (2.28) фундаментальні розв'язки ДР (8.108) мають вигляд:

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (E_{1r} - E_{0r}) + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (E_{2r} - E_{0r}) + E_{00r} \right), \quad (8.110)$$

де $E_{0r}(x, y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Пуассона:

$$D_0 f_0(x, y) = F \delta(x, y); \quad (8.111)$$

$E_{00r}(x, y)$ – фундаментальний розв'язок неоднорідного ДР 4-го порядку:

$$D_0 D_0 f_{00}(x, y) = F \delta(x, y); \quad (8.112)$$

$E_{ir}(x, y)$ – фундаментальні розв'язки неоднорідних ДР Гельмгольца:

$$D_i f_i(x, y) = F \delta(x, y), \quad (i=1,2). \quad (8.113)$$

Фундаментальні розв'язки ДР (8.111) і (8.112) відомі [210]:

$$E_{0r}(x, y) = F \ln r / (2\pi), \quad E_{00r}(x, y) = F r^2 \ln r / (8\pi), \quad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (8.114)$$

У [34] доволі складним чином визначався фундаментальний розв'язок ДР $\nabla^2 \nabla^2 \Sigma + i\mu^2 \Sigma = \delta(\rho) / N$, де $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$; (x_0, y_0) – координати полюса (точки прикладення одиничної зосередженої сили). Для знаходження фундаментального розв'язку ДР $\nabla^2 \Sigma + i\mu^2 \Sigma = \delta(\rho) / N$ застосовувався метод розкладання оператора зсуву $(\nabla^2 + i\mu^2)^{-1}$ за степенями ∇^2 .

Для знаходження фундаментального розв'язку ДР (8.113) поступимо методологічно по-іншому. Розглянемо навантаження пластини рівномірним навантаженням q_0 по колу радіуса r_0 , тобто, $q(r)$ зобразиться у вигляді (8.76). Знайдемо розв'язки ДР $D_i f_i(r) = q_0, \delta(r - r_0)$ ($i = 1, 2$). Вони зображуються формулами (8.87) і (8.88). Виконуючи у (8.88) граничний перехід при $r_0 \rightarrow 0$ та, урахувавши при цьому, що $I_0(r_0 \sqrt{s_i}) \rightarrow 1$, $2\pi r_0 q_0 \rightarrow F$, $q_0 \rightarrow F / (2\pi r_0)$, де F – зосереджена сила, прикладена в початку координат, отримуються фундаментальні розв'язки ДР (8.113):

$$E_{ir}(x, y) = -F K_0(r \sqrt{s_i}) / (2\pi), \quad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (8.115)$$

Зазначимо, що фундаментальні розв'язки (8.114) ДР (8.111), (8.112) можна також отримати з розв'язків (8.83) і (8.85) при вказаному граничному переході.

Із (8.110), (8.114), (8.115) дістанемо фундаментальні розв'язки ДР (8.108):

$$E_k(x, y) = -\frac{a_{k0} F}{2\pi s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r \sqrt{s_1}) + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r \sqrt{s_2}) - (1 + \ln r + s_{k0} (s_{12}^0 - r^2 / 4) \ln r) \right), \quad (k = 1, 3). \quad (8.116)$$

Підкреслимо, що фундаментальні розв'язки (8.116) ДР (8.108) співпадають із частинними розв'язками (8.100), розуміючи, що $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Фундаментальні розв'язки СДР (8.107) на основі (8.109) визначаються так:

$$w_{1E}(x, y) = \frac{F}{2\pi} (\gamma_{11} K_0(r\sqrt{s_1}) + \gamma_{12} K_0(r\sqrt{s_2}) + \gamma_{13} (\ln r + 1) - \gamma_{14} (c_{0r} \ln r + \frac{1}{4} r^2 \ln r)); \quad (8.117)$$

$$w_{3E}(x, y) = \frac{F}{2\pi} (\gamma_{31} K_0(r\sqrt{s_1}) + \gamma_{32} K_0(r\sqrt{s_2}) + \gamma_{33} (1 + \ln r)),$$

де

$$\gamma_{11} = (-a_{10}\alpha_{11s} + a_{30}\alpha_{13s})/(s_1s_2); \gamma_{12} = (-a_{10}\alpha_{12s} + a_{30}\alpha_{14s})/(s_1s_2);$$

$$\gamma_{13} = (-a_{10}(\mu_{332} s_{10} - \mu_{330}) + a_{30}\mu_{132} s_{30})/(s_1s_2); \gamma_{14} = -a_{10}\mu_{330} s_{10}/(s_1s_2);$$

$$\gamma_{31} = (a_{10}\alpha_{31s} - a_{30}\alpha_{33s})/s_1s_2; \gamma_{32} = (a_{10}\alpha_{32s} - a_{30}\alpha_{34s})/s_1s_2; \gamma_{33} = a_{10}\mu_{312}s_{10}/s_1s_2;$$

$$\alpha_{11s} = s_2(s_1 - s_{10})(\mu_{334}s_1^2 + \mu_{332}s_1 + \mu_{330})/(s_1s_{12});$$

$$\alpha_{12s} = s_1(s_2 - s_{10})(\mu_{334}s_2^2 + \mu_{332}s_2 + \mu_{330})/(s_2s_{21});$$

$$\alpha_{13s} = s_2(s_1 - s_{30})(\mu_{134}s_1 + \mu_{132})/s_{12}; \alpha_{14s} = s_1(s_2 - s_{30})(\mu_{134}s_2 + \mu_{132})/s_{21};$$

$$\alpha_{31s} = s_2(s_1 - s_{10})(\mu_{314}s_1 + \mu_{312})/s_{12}; \alpha_{32s} = s_1(s_2 - s_{10})(\mu_{314}s_2 + \mu_{312})/s_{21};$$

$$\alpha_{33s} = s_1s_2\mu_{114}(s_1 - s_{30})/s_{12}; \alpha_{34s} = s_1s_2\mu_{114}(s_2 - s_{30})/s_{21}.$$

Оскільки при $r \rightarrow 0$ функція $K_0(r\sqrt{s_i}) \rightarrow \ln 2/(r\sqrt{s_i})$, то з (8.117) при $r \rightarrow 0$

$$w_{1E}(x, y) \rightarrow \frac{F}{2\pi} (\gamma_{13} - \gamma_{11} - \gamma_{12} - \gamma_{14}c_{0r}) \ln r; \quad w_{3E}(x, y) \rightarrow \frac{F}{2\pi} (\gamma_{33} - \gamma_{31} - \gamma_{32}) \ln r,$$

тобто, фундаментальні розв'язки при $r = 0$ мають логарифмічну особливість.

Зауважимо, що в [381] інтегральне перетворення Ганкеля застосовувалось безпосередньо до ДР 4-го порядку $\nabla^2 \nabla^2 \sigma + i\mu^2 \sigma = q_0 \delta(r - r_0)/D$, (r_0, μ, D – сталі, i – уявна одиниця, $\sigma = \sigma(r)$), що вже призводило до певних ускладнень.

8.5.2. Фундаментальні розв'язки в наближенні К135. У цьому наближенні фундаментальні розв'язки визначатимуться з СДР 12-го порядку:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}w_1 + \Pi_{13}w_3 + \Pi_{15}w_5 &= \Pi_{1q}F \delta(x, y); \\ \Pi_{31}w_1 + \Pi_{33}w_3 + \Pi_{35}w_5 &= \Pi_{3q}F \delta(x, y); \\ \Pi_{51}w_1 + \Pi_{53}w_3 + \Pi_{55}w_5 &= \Pi_{5q}F \delta(x, y). \end{aligned} \quad (8.118)$$

Систему (8.118) зведемо до трьох неоднорідних ДР 12-го порядку для знаходження фундаментальних розв'язків для пластини довільної товщини:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} F_0 \delta(x, y), \quad (k = 1, 3, 5), \quad (8.119)$$

де $D_i = \nabla^2 - s_i$, ($i = 1, 3, 5$); $D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}$; a_{k0}, s_i – МГП (інші, ніж у НК13).

Із СДР (8.118) фундаментальні розв'язки $w_{iE}(x, y)$ знайдуться із залежностей:

$$w_{kE}(x, y) = \Pi_{1k}^0 E_1 + \Pi_{3k}^0 E_3 + \Pi_{5k}^0 E_5, \quad (8.120)$$

де $E_k(x, y)$ – фундаментальні розв'язки ДР (8.119), які виражаються через фундаментальні розв'язки ДР (8.111)–(8.113) за формулами (8.114) і (8.115).

$E_k(x, y)$ ($k = 1, 3, 5$) на основі (2.30) знаходяться таким чином:

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2 s_3 s_4} \left(\frac{s_2 s_3 s_4}{s_1 s_{12} s_{13} s_{14}} (E_{1r} - E_{0r}) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_2 s_{21} s_{23} s_{24}} (E_{2r} - E_{0r}) + \right. \\ \left. + \frac{s_1 s_2 s_4}{s_3 s_{31} s_{32} s_{34}} (E_{3r} - E_{0r}) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_4 s_{41} s_{42} s_{43}} (E_{4r} - E_{0r}) + E_{00r} \right).$$

З урахуванням (8.114) і (8.115) дістанемо:

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} F}{2\pi s_1 s_2 s_3 s_4} \left(\sum_{i=1}^4 b_i K_0(r\sqrt{s_i}) + b_5 \ln r + b_6 r^2 \ln r + b_7 \right), \quad (8.121)$$

де b з індексами – МГП.

Із (8.120) і (8.121) знаходяться фундаментальні розв'язки СДР (8.118):

$$w_{1E}(x, y) = F \left(\sum_{j=1}^4 a_{1j} K_0(r\sqrt{s_j}) + a_{15} + a_{16} \ln r + a_{17} r^2 \ln r \right) / (2\pi); \quad (8.122) \\ w_{iE}(x, y) = F \left(\sum_{j=1}^4 a_{ij} K_0(r\sqrt{s_j}) + a_{i5} + a_{i6} \ln r \right) / (2\pi), \quad (i = 3, 5).$$

де a з індексами – МГП пластини.

Отже, розв'язки (8.122) при $r = 0$ також мають логарифмічну особливість. Якщо сила F прикладена не в початку координат – точці $O(0, 0)$, а в полюсі

$O_1(x_0, y_0)$, то у формулах (8.116), (8.117), (8.121), (8.122) потрібно замінити r на ρ , де $\rho = (r_0^2 + r^2 - 2r r_0 \cos \varphi)^{1/2} = CO_1$, $r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} = OO_1$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = OC$; (x, y) – координати довільної точки C , $\varphi = \angle COO_1$.

Фундаментальні розв'язки для інших складових компонент переміщень виражаються за відповідними формулами через отримані вище фундаментальні розв'язки для складових поперечних переміщень і, отже, таким чином, визначаються фундаментальні розв'язки початкових СДРР.

8.5.3. Застосування фундаментальних розв'язків.

8.5.3.1. Поперечне навантаження пластини по дузі кола. Побудуємо в НК13 частинні розв'язки ДР $D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} q(x, y)$, ($k = 1, 3$), де $q(x, y)$ рівномірно розподілене навантаження ($q(x, y) = q_0$) діє на пластину по дузі AB кола радіуса r_0 , яка стягує центральний кут α ($\alpha = \angle AOB$). Введемо полярну систему координат r, θ з початком у точці O і віссю Ox , яка співпадає з напрямком OA . У цій системі точки A, B і довільна точка C мають такі координати: $A(r_0, 0), B(r_0, \alpha), C(r, \beta)$. Навантаження по елементарній дузі $q_0 r_0 d\theta$ з серединою в точці $O_1(r_0, \theta)$, де $0 \leq \theta \leq \alpha$, буде $q_0 r_0 d\theta$. Частинні розв'язки $\tilde{\Phi}_k(x, y)$ ДР (2.23) від елементарного навантаження, які залежать від координат (x, y) довільної точки C , знайдуться на основі (8.116) при заміні F на $q_0 r_0 d\theta$ і r на ρ :

$$\tilde{\Phi}_{kr}(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0 d\theta}{2\pi s_1 s_2} (a_1 K_0(\rho\sqrt{s_1}) + a_2 K_0(\rho\sqrt{s_2}) + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1),$$

де a_1, \dots, a_4 – відповідні сталі.

Записавши останню рівність з використанням теореми додавання для функції Макдональда [220] і, проінтегрувавши по θ від 0 до α , дістанемо:

$$\Phi_{kr}(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0}{2\pi s_1 s_2} \int_0^\alpha (a_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r_0\sqrt{s_1}) I_m(r\sqrt{s_1}) \cos m\varphi + a_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r_0\sqrt{s_2}) I_m(r\sqrt{s_2}) \cos m\varphi + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1) d\theta, \quad (r < r_0);$$

$$\Phi_{kr}(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0^\alpha}{2\pi s_1 s_2} \int_0^\alpha (a_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r\sqrt{s_1}) I_m(r_0\sqrt{s_1}) \cos m\varphi +$$

$$+ a_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r\sqrt{s_2}) I_m(r_0\sqrt{s_2}) \cos m\varphi + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1) d\theta, \quad (r > r_0), \varphi = \angle COC_1.$$

Прийнявши до уваги, що $\theta = \beta - \varphi$, отримаємо:

$$\Phi_{kr}(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0}{2\pi s_1 s_2} (\alpha(a_1 K_0(r\sqrt{s_1}) I_0(r\sqrt{s_1}) + a_2 K_0(r\sqrt{s_2}) I_0(r\sqrt{s_2}))) +$$

$$+ 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m(2\beta - \alpha)}{2} (a_1 K_m(r\sqrt{s_1}) I_m(r\sqrt{s_1}) + \right. \quad (8.123)$$

$$\left. + a_2 K_m(r\sqrt{s_2}) I_m(r\sqrt{s_2})) \right) + \int_{\beta - \alpha}^{\beta} (a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho) d\varphi + \alpha, \quad (r < r_0);$$

$$\Phi_{kr}(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0}{2\pi s_1 s_2} (\alpha(a_1 K_0(r\sqrt{s_1}) I_0(r_0\sqrt{s_1}) + a_2 K_0(r\sqrt{s_2}) I_0(r_0\sqrt{s_2}))) +$$

$$+ 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m(2\beta - \alpha)}{2} (a_1 K_m(r\sqrt{s_1}) I_m(r_0\sqrt{s_1}) + \right. \quad (8.124)$$

$$\left. + a_2 K_m(r\sqrt{s_2}) I_m(r_0\sqrt{s_2})) \right) + \int_{\beta - \alpha}^{\beta} (a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho) d\varphi + \alpha, \quad (r > r_0).$$

Частинні розв'язки (8.123) і (8.124) ДР (2.23) при $r = r_0$ співпадають і не мають особливостей. Якщо в (8.123) і (8.124) покласти $\alpha = 2\pi$, то отримаємо частинні розв'язки (8.91), (8.92) ДР (2.23) при дії навантаженні q_0 по колу радіуса r_0 .

8.5.3.2. Поперечне навантаження пластини по довільній області. Нехай пластина займає область D ($x, y \in D$) і навантажена по довільній своїй підобласті D_0 ($x_0, y_0 \in D_0$, $D_0 \subseteq D$) поперечним навантаженням $q = q_0(x_0, y_0)$. Тоді частинні розв'язки $w_{kr}(x, y)$ СДР (3.109) в НК13 і (3.149) в НК135 зобразяться в так:

$$w_{kr}(x, y) = \iint_{D_0} q_0(x_0, y_0) w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (8.125)$$

Тут $w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0)$ ($k = 1, 3$) – фундаментальні розв'язки від одиничної зосередженої сили $F = 1$, що діє в точці (x_0, y_0) пластини кососиметрично, тобто $w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0) = w_{kE}(F = 1, r \rightarrow \rho = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2})$,

де w_{kE} виражаються за формулами (8.117), (8.122).

Якщо ж на пластину у точках (x_i, y_i) діють ще й зосереджені сили F_i , то до розв'язків (8.125) потрібно додати розв'язки $w_{kE,i}(x, y)$, де

$$w_{kE,i}(x, y) = w_{kE}(F = F_i, r \rightarrow \rho_i = ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{1/2}).$$

8.6. Інтегрування СДР варіанта МТ нетонких пологих оболонок

8.6.1 Метод збурень геометричних параметрів. Теорема 4. Метод зведення СДР високих порядків варіанта МТ пластин довільної товщини до ДР 2-го порядку суттєво спрощує розв'язання граничних задач. Для пологих оболонок довільної товщини метод зведення до ДР 2-го порядку безпосередньо не може бути використаний, оскільки диференціальні оператори лівих частин визначальних ДР для пологих оболонок (наприклад, у НК0-3 це СДР (5.46)) мають іншу математичну структуру (5.47), ніж для пластин (3.112), (3.113). Це не дає можливості використати метод інтегрування для зниження порядку. І тому розроблено комплексний метод розв'язання СДР високих порядків для пологих оболонок з використанням методу збурень. На першому етапі складові компонент НДС, зовнішнє навантаження і крайові умови розвиваються в ряди за малим геометричним параметром, який містить кривини, тобто, застосовується метод збурень геометричних параметрів. Це дає можливість СДРР оболонки звести до рекурентної послідовності систем ДР для пластин, які в свою чергу в кожному наближенні розділяються на задачі симетричного і кососиметричного деформування. Праві частини цих СДР залежать лінійно від складових переміщень попередніх наближень. На другому етапі до СДР для пластин у кожному наближенні за малим параметром застосовується розроблена уже методика алгебраїчних, диференціальних і операторних перетворень для отримання визначальних ДР високого порядку (розділ 3). Визначальні ДР перетворюються методом зведення до диференціальних рівнянь 2-го порядку (розділи 2, 3), для яких знаходяться загальні розв'язки, а потім зворотними перетвореннями визначаються загальні розв'язки для компонент НДС в кожному наближенні. Для отримання розв'язків граничних задач у конкрет-

ному наближенні задовольняються відповідні крайові умови в даному наближенні. Надалі з урахуванням зображення компонент НДС у вигляді рядів визначаються і самі компоненти. Слід зазначити, що крайові умови в наближеннях за малим параметром, починаючи з 1-го, однорідні. В 0-му наближенні за малим параметром СДРР для пологих оболонок—це СДРР для відповідних пластин (при кривинах рівних нулю).

Складові компонент переміщень, поперечне навантаження $p(x, y), q(x, y)$ і граничні умови зображуються у вигляді рядів за малим параметром ε :

$$\begin{aligned} u_k(x, y, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_{ki}(x, y), (u, v); \quad w_k(x, y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_{ki}(x, y); \\ p(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i(x, y), q(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i q_i(x, y), \end{aligned} \quad (8.126)$$

де $u_{ki}(x, y), v_{ki}(x, y), w_{ki}(x, y)$ —шукані функції; $p_0(x, y) = p(x, y), q_0(x, y) = q(x, y); p_i(x, y) = 0, q_i(x, y) = 0, i = 1, 2, \dots$. Прийmemo за малий параметр $\varepsilon = h/(R_1 + R_2)$.

В 0-му наближенні за ε загальний розв'язок повинен задовольняти крайовим умовам для пологих оболонок, які впливають із (3.35), а в наступних—відповідним однорідним крайовим умовам.

Не звужуючи суті питання, розглянемо НК0-3 для пологої оболонки.

Підставляючи (8.126) у СДР (5.18) і, проводячи процедуру розщеплення рівнянь по ε , отримаємо в i -му наближенні по ε СДР рівноваги 22-го порядку:

$$\begin{aligned} D_{j,1}^{(p)} u_0^{(i)} + D_{j,2}^{(p)} v_0^{(i)} + D_{j,3}^{(p)} u_1^{(i)} + D_{j,4}^{(p)} v_1^{(i)} + D_{j,5}^{(p)} u_2^{(i)} + D_{j,6}^{(p)} v_2^{(i)} + D_{j,7}^{(p)} u_3^{(i)} + \\ + D_{j,8}^{(p)} v_3^{(i)} + D_{j,9}^{(p)} w_1^{(i)} + D_{j,10}^{(p)} w_2^{(i)} + D_{j,11}^{(p)} w_3^{(i)} = D_{j,pq}^{(i-1)}(x, y), (j = 1, 2, \dots, 11), \end{aligned} \quad (8.127)$$

де $D_{ji}^{(p)}$ —диференціальні оператори СДР відповідної пластини в НК0-3. Ці оператори не містять кривин. Функції $D_{j,pq}^{(i-1)}$ в правих частинах ДР (8.127) в наближеннях від 1-го до i -го відомі і залежать від кривин і складових компонент переміщень від 0-го до $(i-1)$ -го наближення включно. Розщеплені ДР 1, 2, 5, 6, 10 СДР (8.127) (10-го порядку) описують симетричне деформування відповідних пластин (плоску задачу), а ДР 3, 4, 7–9, 11—косиметричне (згинальне деформування

без обтискання, 12-го порядку). В 0-му наближенні СДР для пологої оболонки повністю співпадає з СДР для відповідних пластин.

Отже, у кожному наближенні по ε СДР для пологої оболонки розділяється на систему симетричного деформування у НК02 (плоска задача) і кососиметричного в НК13 (згинальне без обтискання). Далі для знаходження розв'язку граничної задачі для пологої оболонки в кожному наближенні використовується метод зведення ДР високого порядку до ДР 2-го порядку (див. розд. 2).

Справедлива наступна теорема про збіжність рядів (8.126).

Теорема 4 (про збіжність рядів для складових переміщень). Якщо в області \bar{C}_D (замкненій області оболонки за змінними (x, y)) функції $u_{ki}(x, y), v_{ki}(x, y), w_{ni}(x, y)$ ($k = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots$) рівномірно обмежені і неперервні разом зі своїми похідними до 2-го порядку включно, то ряди $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_{ki}(x, y), \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_{ki}(x, y), \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_{ki}(x, y)$ в цій області збігаються рівномірно і абсолютно. Теорема доведена класичним способом.

8.6.2. Метод послідовних наближень. Для того, щоб для розв'язання СДРР оболонок можна було використати метод зведення неоднорідних ДР високих порядків до ДР 2-го порядку, потрібно звести їх до СДР для пластин. Це можна виконати також і МПН.

Перенесемо всі доданки лівих частин СДР оболонок, які містять кривизни, в праві частини. Дістанемо СДР в наближенні i ($i = 1, 2, \dots$) вигляду (8.127), у якій $D_{ji}^{(p)}$ -диференціальні оператори СДР відповідних пластин у НК0-3, а праві частини (8.127) мають такий вигляд:

$$D_{1pq}^{(i-1)} = \gamma_{u0} p_{,x} - (k'_1 l_{1x0} u_0 + k'_1 l_{1x1} u_1 + k'_1 l_{1x2} u_2 + k'_1 l_{1x3} u_3 + k_{1w1} w_{1,x} + k_{1w3} w_{3,x})^{(i-1)};$$

$$D_{2pq}^{(i-1)} = \gamma_{u0} p_{,y} - (k'_2 l_{1y0} v_0 + k'_2 l_{1y1} v_1 + k'_2 l_{1y2} v_2 + k'_2 l_{1y3} v_3 + k_{2w1} w_{1,y} + k_{2w3} w_{3,y})^{(i-1)};$$

$$D_{3pq}^{(i-1)} = \beta_{u1} q_{,x} - (k'_1 l_{1x1} u_1 + k'_1 l_{2x1} u_1 / 5 + k'_1 k_{3u2} u_2 + k'_1 l_{2x3} u_3 / 5 + k_{3w2} w_{2,x})^{(i-1)};$$

$$D_{4pq}^{(i-1)} = \beta_{u1} q_{,y} - (k'_2 l_{1y1} v_1 + k'_2 l_{2y1} v_1 / 5 + k'_2 k_{3u2} v_2 + k'_2 l_{2y3} v_3 / 5 + k_{4w2} w_{2,y})^{(i-1)};$$

$$\begin{aligned}
D_{5pq}^{(i-1)} &= \gamma_{u2} p_{,x} - (k'_1 l_{1x2} u_0 + k'_1 k_{3u2} u_1 + (k'_1)^2 k_{5u2} u_2 + k'_1 k_{5u3} u_3 + k_{5w1} w_{1,x} + k_{5w3} w_{3,x})^{(i-1)}; \\
D_{6pq}^{(i-1)} &= \gamma_{u2} p_{,y} - (k'_2 l_{1y2} v_0 + k'_2 k_{3u2} v_1 + (k'_2)^2 k_{5u2} v_2 + k'_2 k_{5u3} v_3 + k_{6w1} w_{1,y} + k_{6w3} w_{3,y})^{(i-1)} \\
D_{7pq}^{(i-1)} &= \beta_{u3} q_{,x} - (k'_1 l_{1x3} u_0 + k'_1 l_{2x3} u_1 / 5 + k'_1 k_{5u3} u_2 + (k'_1)^2 k_{7u3} u_3 + k_{7w2} w_{2,x})^{(i-1)}; \\
D_{8pq}^{(i-1)} &= \beta_{u3} q_{,y} - (k'_2 l_{1y3} v_0 + k'_2 l_{2y3} v_1 / 5 + k'_2 k_{5u3} v_2 + (k'_2)^2 k_{8v3} v_3 + k_{8v2} w_{2,y})^{(i-1)}; \\
D_{9pq}^{(i-1)} &= k_{9p} p + \beta_{w1} q - \\
&= -(k_{1w1} u_{0,x} + k_{2w1} v_{0,y} + k_{5w1} u_{2,x} + k_{6w1} v_{2,y} + r_{1w1} w_1 + r_{1w2} w_2 + r_{1w3} w_3)^{(i-1)}; \\
D_{10pq}^{(i-1)} &= \gamma_{w2} p + k_{10q} q - \\
&= (k_{3w2} u_{1,x} + k_{4w2} v_{1,y} + k_{7w2} u_{3,x} + k_{8w2} v_{3,y} + r_{1w2} w_1 + r_{2w2} w_2 + r_{2w3} w_3)^{(i-1)}; \\
D_{11pq}^{(i-1)} &= k_{11p} p + \beta_{w3} q - \\
&= (k_{1w3} u_{0,x} + k_{2w3} v_{0,y} + k_{5w3} u_{2,x} + k_{6w3} v_{2,y} + r_{1w3} w_1 + r_{2w3} w_2 + r_{3w3} w_3)^{(i-1)}.
\end{aligned}$$

В 0-му наближенні ($i = 0$) члени з індексом $(i - 1)$ у правих частинах ДР (8.127) дорівнюють нулю.

Отже, в МПН СДРР звелась до рекурентної послідовності систем ДР, ліві частини яких у кожному наближенні i по ε співпадають для пластин, а праві частини залежать від поперечного навантаження і тільки від попереднього $(i - 1)$ -го наближення. В МПН у кожному наближенні загальні розв'язки повинні задовольняти одним і тим же крайовим умовам, які випливають із (3.35).

Як і в методі збурень, ДР 1, 2, 5, 6, 10 системи (8.128) (10-го порядку) описують симетричне деформування відповідних пластин у НК02, а ДР 3, 4, 7–9, 11–косоасиметричне у НК13 (12-го порядку). Отже, кожна із систем може бути розділена на підсистеми, які окремо описують ВКЕ і ВНДС з ПКЕ. Методи перетворень, розв'язування і знаходження їх загальних розв'язків через загальні розв'язки ДР 2-го порядку наведені в розділах 2, 3.

8.6.3. Числові результати. Ефективність МПН досліджувалась в НК0-3 в граничній задачі для пологих трансверсально-ізотропних оболонок, вільно-обіпєртих на бічній поверхні. Розглядалось поперечне косоасиметричне наванта-

ження $q(x, y) = q_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ ($q_{mn} - const$). Приймались такі МГХ: $G'/G = 0,1; E'/E = 1; a = b; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; k'_1 \neq 0; k'_2 \neq 0; R_1 = R_2; R_1/a = 10, 20, 40; h/a = 1/3, 1/5, 1/10$.

Числові результати показали, що в 0-му наближенні розходження компонент НДС з отриманими безпосереднім розв'язанням СДРР для пологих оболонок складає для $\tilde{\sigma}_x(x, y, z)$ менше 3,9 % (при $R_1/a = 20; h/a = 1/3; 1/5; 1/10; R_1/a = 40; h/a = 1/3; 1/5; 1/10$); для $\tilde{W}(x, y, z)$ – менше 1,1 %. У 1-му наближенні для тих же МГП розходження не перевищує 1 %. Це вказує на високу збіжність результатів сильнопологих оболонок довільної товщини ($h/a \leq 1/3$).

8.7. Висновки по розділу

1. Розроблено новий ефективний по точності наближений метод розв'язання неоднорідних СДР високих порядків трансропних пластин у НК13 та НК135, згідно з яким СДР порядку $4N$ для нетонких пластин зведена до послідовного розв'язання N ДР 4-го порядку. На його основі в НК13 розв'язані граничні задачі в спеціальних функціях для нетонких круглих вільно обіпертих і жорстко защемлених пластин при дії рівномірно розподіленого навантаження і зосередженої сили, прикладеної в центрі.

2. Уперше розроблено новий наближений метод розв'язання СДРР високих порядків МТ нетонких трансропних пологих оболонок у НК013 у граничних задачах. В загальному випадку при кососиметричному деформуванні СДР порядку $4N$ для пологих оболонок зводиться до послідовного розв'язання ДР 8-го порядку і $(N - 2)$ ДР 4-го порядку. Метод показав високу точність для широких меж зміння МГХ.

3. Уперше використано операторний метод зведення неоднорідних ДР високих порядків класу $D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \dots D_{2n} \Phi_k(x, y) = D_{k0} f(x, y)$ ($D_0; D_i, D_{k0}$ – оператори Лапласа, Гельмгольца і довільний оператор відповідно) до неоднорідних ДР 2-го порядку для отримання загальних розв'язків неоднорідних СДРР і розв'язання граничних задач МТ нетонких трансропних пластин.

4. У новій постановці отримані розв'язки граничних задач для нетонких піввнескінчених пластин з урахуванням вихрових і потенціальних КЕ.

5. Уперше в МТ товстих транслопних пластин:

– отримані загальні розв'язки СДРР в НК13 від дії переривчастих і зосереджених навантажень (рівномірне навантаження по колу, кільцю, кругу, зосередженою силою в центрі) з використанням інтегрального перетворення Ганкеля до неоднорідних ДР 2-го порядку (для отримання частинних розв'язків), і на їх основі одержані аналітичні розв'язки для круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах на бічній поверхні;

– розроблена нова методологія отримання фундаментальних розв'язків визначальних СДР вищих порядків; у точках прикладення зосереджених сил вони мають логарифмічну особливість;

– отримані загальні розв'язки для товстих пластин при навантаженні їх по дузі і по довільній області.

6. Розроблені нові наближені методи розв'язання СДРР високих порядків МТ однорідних пологих оболонок довільної товщини з використанням методу збурень геометричних характеристик оболонки і МПН, які дали можливість звести системи ДРР до рекурентної послідовності СДР симетричного і кососиметричного деформування відповідних пластин, у яких праві частини залежать від складових переміщень всіх попередніх наближень в методі збурень (від складових компонент переміщень попереднього наближення в МПН). В кожному наближенні неоднорідні СДРР високих порядків для відповідних пластин зведені до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку. Числові дослідження показують високу ефективність і збіжність результатів МПН в широких межах змінення МГХ оболонок.

7. Розроблені методи можуть також застосовуватися в інших теоріях.

Наукові результати, наведені у восьмому розділі, опубліковано в працях автора [141, 143, 144, 166, 178, 184, 187, 189, 191–193, 195, 197, 198, 442, 447, 449].

ВИСНОВКИ

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів МТ нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної ТП, розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання СДР високих порядків, отриманні частинних і загальних розв'язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей НДС від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Аналіз розроблених підходів, методології, варіантів МТ, методів розв'язання граничних задач, отриманих аналітичних частинних і загальних розв'язків СДРР та числових результатів і установлених закономірностей дає можливість зробити наступні висновки.

1. Сформульовані нові постановки граничних задач для однорідних та шаруватих лінійно і нелінійно пружних за Каудерером пластин та пологих оболонок довільної сталої товщини з позицій тривимірної задачі ТП.

2. Розроблена методологія побудови варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної товщини, основана на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує ВПР, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій в межах кожного шару (для шаруватих елементів), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену МВР, метод збурень (для однорідних ортотропних і ізотропних ФНП і пологих ФНО) і МПН (для шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок). На основі створеної методології побудовані нові варіанти МТ вказаних елементів і розроблені аналітичні методи розв'язання систем ДРР високих порядків, до яких зводяться граничні задачі.

3. У явному вигляді отримані СДРР у високих наближеннях варіантів МТ вказаних елементів. Це дає можливість безпосереднього їх використання для розв'язання граничних

задач. Отримані у варіантах МТ системи ДРР мають високий порядок: у НК0-N (для пластин і пологих оболонок)–порядок $(6N+4)$; для пластин у НК13... $(N-1)$ порядок СДР – $3(N+1)$, у НК02... $(N-1)$ – $(3N+1)$. Теорія Тимошенка-Рейснера для пластин і пологих оболонок є частинним випадком варіантів МТ указаних елементів (НК1 і НК01 відповідно; 6-го і 10-го порядків). Обґрунтовано використання рядів за поліномами Лежандра у варіантах МТ.

4. Для розглянутих лінійно пружних пластин довільної сталюї товщини СДРР у довірльому наближенні розділені на СДР кососиметричного і симетричного деформування. Із них виділені підсистеми ДР вихрового КЕ (однорідні) і внутрішнього НДС з потенціальним КЕ (неоднорідні). Однорідна підсистема ДР зведена операторним методом до одного визначального однорідного ДР, а неоднорідна–до визначальних неоднорідних ДР з однаковими лівими частинами відносно нових шуканих функцій. Виділені ДР, які описують ВНДС і ПКЕ.

5. Для розглянутих пологих оболонок системи ДР не розділяються на незалежні підсистеми кососиметричного і симетричного деформування, не виділяються також ДР вихрового КЕ. При неврахуванні кривин у деформаціях поперечного зсуву виділяються системи ДР взаємозв'язаних вихрових КЕ при кососиметричному і симетричному деформуванні. З'ясовані умови, при яких ДР кососиметричного і симетричного вихрових КЕ розділяються. Незалежні ДР, які описують ВНДС і ПКЕ, не виділяються.

6. Розроблено метод інтегрування неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними для нетонких пластин, який полягає в послідовному інтегруванні неоднорідних ДР 2-го порядку, праві частини яких в свою чергу є частинними розв'язками інших неоднорідних ДР 2-го порядку. Узагальнено операторний метод інтегрування стосовно неоднорідних ДР вищих порядків, згідно з яким частинні розв'язки вказаних ДР виражаються через частинні розв'язки ДР Пуассона і неоднорідні ДР Гельмгольца.

7. Розроблено у загальному вигляді метод розв'язання неоднорідних СДРР високих порядків для нетонких пластин, який полягає у зведенні їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку, отриманні їх загальних розв'язків з наступним визначенням зворотними математичними операціями загальних розв'язків початкових СДРР. Такий метод: 1) дає можливість значно спростити знаходження частинних (а отже і загальних) розв'язків початкових

СДРР, особливо при переривчастих, локальних і зосереджених навантаженнях; 2) суттєво змінює методологію застосування методів математичної фізики, зокрема, методів інтегральних перетворень, не до початкових СДРР високих порядків, а до отриманих неоднорідних ДР 2-го порядку. Розв'язані аналітично вказаним методом граничні задачі з урахуванням КЕ для товстих трансропних півнескінченних, круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах і різних навантаженнях. Розроблена суттєво інша методологія отримання фундаментальних розв'язків СДРР високих порядків, яка оснований на зведенні їх до ДР 2-го порядку з наступним граничним переходом у розв'язку від поперечного навантаження по колу (кругу) до зосередженої сили. Отримані фундаментальні розв'язки з полюсом у довільній точці товстої пластини. наведено їх використання при навантаженні по дузі кола і довільній області.

8. Тривимірна задача статки для нетонких ортотропних і ізотропних ФНП та пологих ФНО на основі МТ методом збурень пружних властивостей зведена у явному вигляді до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач, у яких праві частини ДР залежать від компонент НДС попередніх наближень.

9. Розроблені наближені аналітичні методи розв'язання систем ДРР високих порядків: 1) нетонких пологих оболонок з використанням методів збурень і МПН, які дали можливість звести їх до рекурентної послідовності систем ДРР для пластин (при кососиметричному і симетричному деформуванні) і значно спростити розв'язок граничних задач для оболонок; 2) пластин і пологих оболонок довільної товщини, згідно з якими СДР для пластин зводяться до послідовного розв'язання ДР 4-го порядку, а СДР для оболонок – до послідовного розв'язання ДР 8-го порядку і ДР 4-го порядку.

10. Поставлені граничні задачі для розглядуваних елементів і отримані загальні розв'язки в одинарних і подвійних тригонометричних рядах; у новій постановці отримані аналітичні розв'язки для ФНП і ФНО при граничних умовах Нав'є.

11. Отримані числові результати вказують на прийнятну збіжність і на зростаючу точність визначення НДС при збільшенні номера наближення. Збіжність результатів покращується із зменшенням товщини, податливості матеріалу на поперечний зсув та із зростанням пологості оболонки. Для слабкопологих товстих трансропних оболонок ($h/a \geq 0,5$; $29/40 \leq R_{1,2}/a \leq 1$) необхідно враховувати залежність

деформацій поперечного зсуву від кривин, а при кососиметричному навантаженні – складові переміщень з парними натуральними індексами у математичних рядах.

12. Розроблені алгоритми і створені пакети математичних програм на мові ФОРТРАН для розв’язання в новій постановці граничних задач по знаходженню: 1) внутрішнього НДС однорідних пластин і пологих оболонок (транстропних, ортотропних, фізично нелінійних) при різних навантаженнях, двошарових і тришарових транстропних пластин довільної сталого товщини при плавних навантаженнях; 2) КЕ однорідних пластин. Отримані числові результати дали можливість оцінити НДС в залежності від МГХ та типу навантаження, установити якісний вплив КЕ на НДС пластин, визначити межі застосування теорії Тимошенка-Рейснера та наближень варіантів МТ, одержати нові якісні ефекти та важливі висновки.

13. Теорія Тимошенка-Рейснера (ТТР) при плавних навантаженнях придатна для опису НДС таких пластин: ізотропних при кососиметричних навантаженнях (НК1) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними для σ_x складає менше 1,44 %, а для поперечних переміщень – менше 3,92 %); ізотропних пластин при згинально-обтискуючих навантаженнях (уточнена ТТР, НК01) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними по σ_x складає менше 2,99 %, а для поперечних переміщень – 5,11%); транстропних пластин ($0,1 \leq G'/G \leq 1,0; E' = E; \nu' = \nu$) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження по W з точними складає при кососиметричному навантаженні менше 2,90 % для $G'/G = 0,1$ і менше 3,92 % для $G'/G = 1$, а при згинально-обтискуючому навантаженні по уточненій теорії менше $(3,33 \div 5,11)$ %).

ТТР в НК01 з високою точністю описує при плавних поперечних навантаженнях напруження σ_x ізотропних пологих оболонок для $h/a \leq 1/5, R_{1,2}/a \geq 5, a = b$ (розходження з НК0-5 складає менше 1,54 % при кососиметричному і менше 2,55 % при згинально-обтискуючому навантаженні). Для транстропних оболонок ($E' = E; \nu' = \nu, 0,1 \leq G'/G \leq 1,0$) при $h/a \leq 1/5, R_{1,2}/a \geq 5, a = b$ ТТР з достатньою точністю описує W при кососиметричному навантаженні (найбільше розходження менші 3,24% для $G'/G = 0,1$ і менші 4,46 % для $G'/G = 1$). Із зменшенням G'/G розходження ТТР з НК0-5 по σ_x зростає, а по W спадає.

14. Внутрішній НДС пластин і пологих оболонок з високою точністю визначається НК13 і НК0-3 при плавних навантаженнях вказаних елементів ($h/a \leq 1/3$, $a \leq b$) і для широких меж змінення МГХ. НДС розглядуваних елементів в області дії КЕ, при швидкозмінюваних в області, локальних та зосереджених навантаженнях необхідно визначати у високих наближеннях МТ: НК135, НК0-5; результати, отримані на основі невисоких наближень для вказаних навантажень суттєво відрізняються від точних. На НДС у найбільшій мірі впливають локальність навантаження, товщина, кривина серединної поверхні, податливість на поперечний зсув.

15. При плавних навантаженнях, розраховуючи тонкі ФНП і пологі ФНО, потрібно враховувати нелінійно пружні властивості матеріалу, але достатньо використовувати класичну теорію; при розрахунку товстих елементів (для оболонок $R_{1,2}/a \geq 1$, $a \leq b$) фізичною нелінійністю можна нехтувати, але розвивати компоненти НДС у ряди за поперечною координатою; при розрахунку елементів із $h/a = 1/8 \div 1/3$ потрібно використовувати метод розвинення НДС по товщині і враховувати нелінійно пружні властивості матеріалу. При швидкозмінних в області навантаженнях і в інших випадках з високим градієнтом змінювання НДС, також потрібно враховувати фізичну нелінійність сумісно з розвиненням компонент НДС у ряди за поперечною координатою.

16. Розв'язані за побудованим варіантом МТ граничні задачі по визначенню внутрішнього НДС двошарових та тришарових трансропних пластин при плавних навантаженнях. Результати вказують на високу точність варіанта МТ, що на основі математичної і фізичної коректності побудови основних рівнянь дає впевненість у достовірності і прийнятності розробленого варіанта для інших класів задач у широких межах змінення МГХ.

17. Побудовані варіанти МТ дають реальну можливість розв'язання з високою точністю граничних задач для пластин і пологих оболонок.

18. Розроблені нові методи розв'язання СДРР можуть бути узагальнені для СДРР анізотропних елементів з використанням методів збурень трансропних властивостей матеріалів, а також застосовані для розв'язку крайових задач за класичною та за іншими-уточненими теоріями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
2. Абрамовиц М., Стиган М. Справочник по специальным функциям. Перевод с английского под редакцией Диткина В. А. и Кармазиной Л. И. М.: Наука, 1979. 832 с.
3. Аголовян Л. А. Применение метода асимптотического интегрирования к построению приближенной теории анизотропных оболочек. *Прикл. математика и механика*. 1966. Вып. 2. С. 388–398.
4. Аголовян Л. А. Об асимптотическом методе в теории пластин и оболочек. *Механика оболочек и пластин в XXI веке*: Межвуз. научн. сборник. Саратовский гос. технический университет. Саратов: Изд-во СГТУ, 1999. С. 129–151.
5. Айнола Л. Я. Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера. *Теория оболочек и пластин*. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1964. С. 171–177.
6. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. *Прикл. математика и механика*. 1963. № 27. С. 1057–1074.
7. Аксентян О. К., Устинов Ю. А. Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1972. Т. 36, № 2. С. 272–281.
8. Александров А. Я., Куршин Л. М. Многослойные пластины и оболочки. *Труды VII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластинок*. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 714–721.
9. Алексеев С. А. Две задачи теории толстых плит. *Расчет пространственных конструкций*. М.: Машиностроение, 1950. В. 1. С. 315–328.
10. Алтухов Е. В. Статические трёхмерные задачи для трансверсально изотропных пластин. *Механика композитов*. Т.7. Концентрация напряжений. Киев, 1998. С. 114–137.
11. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
12. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
13. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

14. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Методы расчёта оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. К.: Наук. думка, 1980. 368 с.
15. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, уст-ть, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
16. Баев Л. В. Чулков П. П. К расчету слоистых пластин. *Механика полимеров*. 1969. № 6. С. 11–18.
17. Баженов В. А., Гуляев В. И., Лизунов П. П. Исследование напряженного состояния сферической оболочки с упругим наполнителем на основе уточненных уравнений. *Динамика и прочность машин*. Харьков: Вища школа, 1979. № 30. С. 50–55.
18. Баженов В. А., Сахаров А. С., Гондлях А. В. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. К.: НДІ Будмеханіка, 1994. 264 с.
19. Баженов В. А., Сахаров А. С., Цыхановский В. К. Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошных сред. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 6. С. 24–63.
20. Баженов В. А., Гуляр А. И. Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды. *Прикл. механ.* 2003. 39, № 4. С. 34–71.
21. Бердичевский В. Л. Вариационные методы построения теории оболочек. *Прикл. математика и механика*. 1972. Т. 36, № 5. С. 788–804.
22. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 368 с.
23. Блох В. И. К общей теории упругих толстых плит. *Инженерный сборник*. 1954. № 18. С. 61–82.
24. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 238 с.
25. Болотин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большего числа слоёв. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*. 1964. № 1. С. 61–66.
26. Болотин В. В. Механика многослойных конструкции. В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
27. Бондарь А. Г. Исследование изгиба многослойной пластины на основе конечносдвиговой теории. *Прикл. механика*. 1982. Т. 18, № 12. С. 59–63.
28. Бондарь Н. Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. К.: Будіве-

льник, 1971. 140 с.

29. Борисов Е. Н. Физически нелинейная задача для толстых прямоугольных пластин. *Теоретическая и прикладная механика*. 2001. В. 33. С. 28–31.

30. Борисов Е. Н. Приближенное аналитическое решение физически нелинейной пространственной задачи упругого равновесия слоистой прямоугольной плиты. *Прикл. механика*. 2003. Т. 39, №8. С. 104–112.

31. Брюккер Л. Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трёхслойных пластин. *Расчёты элементов авиационных конструкций*. М.: Машиностроение, 1965. В. 3. С. 74–99.

32. Бурак Я. Й., Рудацький Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. Львів: «Інтелект-Захід», 2007. 240 с.

33. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л. Расчет оболочек. К.: Госстройизд, 1961. 119 с.

34. Ван Фо Фи. До задачі рівноваги пологої сферичної оболонки. *Доповіді АН УРСР*. 1960. №5. С. 609–611.

35. Василенко А. Т. Напружений стан ортотропних шаруватих товстостінних пологих оболонок. *Доповіді АН УРСР*. 1975. №6. С. 513–517.

36. Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М. Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке. *Прикл. механика*. 1976. Т. 12, № 2. С. 40–47.

37. Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Напряженное состояние трансверсально изотропных неоднородных толстостенных сферических оболочек. *Механика твердого тела*. 1976. №1. С. 59–66.

38. Василенко А. Т. К учету поперечного обжатия в задачах статики слоистых оболочек. *Прикл. механика*. 1986. Т. 22, № 8. С. 72–78.

39. Василенко А. Т., Урусова Г. П. Задачи деформирования ортотропных оболочек с учётом поперечных эффектов. *Теор. и прикл. механика*. 2001. №33. С. 112–117.

40. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

41. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. *Труды Тбилисского матем. ин-та*. 1955. Т. 21. С. 191–293.

42. Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках. *Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек* (Днепропетровск, 1969). М.: Наука, 1969. С. 142–145.
43. Величко П. М., Шевченко В. П. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1969. №2. С. 147–151.
44. Вериженко В. Е. К теории нелинейно упругих слоистых оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20, №9. С. 124–127.
45. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. Київ: "Воля". 2006. 332 с.
46. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. *Вестник МГУ*. 1957. №2. С. 25–34.
47. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости. *Изв. АН СССР. ОТН*. 1955. №7. С. 49–69.
48. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. *Избранные труды*. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 784 с.
49. Вовченко Н. Г., Плеханов А. В., Прусаков А. П. К уточненной теории трансверсально-изотропных пологих оболочек. *Известия вузов. Строительство и архитектура*. 1981. №1. С. 30–33.
50. Вовченко Н. Г. К решению задачи локального нагружения полой оболочки. Днепропетровск, 1981. 12 с. (*Рукопись представлена Днепропетр. инж.-строит. ин-том. Депонирована ВНИИИС Госстрой СССР*, 1982. №317182).
51. Воин А. М. Изгиб прямоугольных толстых плит при произвольных краевых условиях. *Прикл. механика*. 1967. Т. 3, №8. С. 11–16.
52. Воробьев Н. Н. Теория рядов. М.:Наука, 1979. 408 с.
53. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты. *Прикл. математика и механика*. 1967. Т. 31. С. 230–241.
54. Ворович И. И., Кадомцев И. Г. Качественное исследование напряженно деформированного состояния трехслойной плиты. *Прикл. математика и механика*. 1970. Т. 34, №5. С. 870–876.

55. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. *Материалы 1-ой Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин*. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 51–149.
56. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 391 с.
57. Галимов Ш. К. Уточненные теории пластин и оболочек. Саратов: Саратовский ун-т, 1990. 134 с.
58. Галимов К. З., Суркин Р. Г. О работах казанских учёных по теории пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 1967. В. 5. С. 3–55.
59. Галимов Н. К. О применении полиномов Лежандра к построению уточненной теории трехслойных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. В. 10. С. 371–385.
60. Галимов Ш. К. К расчету пластин средней толщины. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. В. 10. С. 98–110.
61. Галиныш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1967. В. 5. С. 66 – 92; 1970. В. 6–7. С. 25–64.
62. Галич В. А., Шалдырван В. А. К определению трехмерного напряженного состояния трехслойных пластин с трансверсально изотропными слоями. *Механика твердого тела*. 1982. № 6. С. 131–134.
63. Ганеева М. С., Корнишин М. С. Об одном варианте основных соотношений для оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. *Исслед. по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. В. 10. С. 260–271.
64. Ганиев Н. С. Изгиб двухслойных пластин, составленных из нелинейно-упругих материалов. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. В. 10. С. 186–195.
65. Ганиев Н. С. К теории трехслойных пологих оболочек несимметричного строения. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1967. В. 5. С. 243–249.
66. Гнатов Ю., Зозуляк Ю. Побудова уточненої математичної моделі пружних неоднорід-

них оболонки варіантним методом. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів: Інститут ППММ НАН України, 2000. С. 111–114.

67. Головчан В. Т. О решении граничных задач плоской теории упругости для прямоугольной области. *Прикл. механика*. 2006. Т. 42, № 1. С. 97–102.

68. Голуб Л. И., Максимюк В. А., Чернышенко И. С. Численный анализ нелинейно-упругого состояния ортотропных сферических оболочек с эллиптическим вырезом. *Прикл. механика*. 2002. Т. 38, № 2. С. 96–100.

69. Гольденвейзер А. Л. О теории изгиба пластинок Рейснера. *Изв. АН СССР. ОТН*. 1958. № 4. С. 102–109.

70. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1962. Т. 26, № 4. С. 668–686.

71. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1963. Т. 27, № 4. С. 593–608.

72. Гольдельвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

73. Гондляр А. В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. К.: Будівельник, 1988. В. 53. С. 33–37.

74. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. М.: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.

75. Градштейн И. С., Рьжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

76. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. К.: Либідь, 1992. 152 с.

77. Грищак В. З., Фатєєва Ю. О. Нелінійний динамічний аналіз пологих оболонок із функціонально градієнтних матеріалів з параметрами, залежними від часу, під дією статичних зусиль. *Вісник Запорізького національного уні-ту. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2016. № 2. С. 60–68.

78. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем. *Изв. АН*

СССР. ОТН. 1957. №1. С. 77–84.

79. Григолоук Э. И., Чулков П. П. К расчету трехслойных пластин с жестким наполнителем. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.* 1964. №1. С. 63–66.

80. Григолоук Э. И. Чулков П. П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем. *Изв. АН СССР. Механика.* 1965. №5. С. 68–80.

81. Григолоук Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек. *Прикл. механика.* 1972. Т. 8, № 6. С. 3–17.

82. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. К.: Наук. думка, 1973. 288 с.

83. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Об учете неоднородности деформаций поперечного сдвига по толщине в слоистых оболочках. *Прикл. механика.* 1977. Т. 13, № 10. С. 36–42.

84. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища школа, 1985. 190 с.

85. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1988. 264 с.

86. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения. *Прикл. механика.* 1991. 27, №10. С. 3–23.

87. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев: Наук. думка, 1991. 216 с.

88. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек. *Проблемы механики тонких деформационных тел.* Єреван: Гитупон. Институт механики НАН Армении, 2002. 39, №1. С. 155–166.

89. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. К.: Академперіодика, 2006. 472 с.

90. Григоренко А. Я., Бергулев А. С., Яремченко С. Н. О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин. *Доповіди НАН України.* 2011. № 9. С. 49–55.

91. Григоренко А. Я., Панкратьев С. А., Яремченко С. Н. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы в уточненной постановке. *Прикл. ме-*

ханика. 2017. Т. 53, № 6. С. 57–70.

92. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. *Прикл. механика*. 2019. Т. 55, № 5. С. 39–46.

93. Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф. Анализ напряженного состояния жестко защемленной пластины на основе решения пространственной задачи теории упругости. *Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин*. М.: Наука, 1970. С. 205–210.

94. Гудрамович В. С. Методы расчета оболочечных конструкций ракетно-космической техники при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях. *Космічна наука і технологія*. 2002. Т. 8, № 4. С. 11–24.

95. Гудрамович В. С. Особенности нелинейного деформирования и критические состояния оболочечных систем с геометрическими несовершенствами. *Прикл. механика*. 2006. Т. 42, № 12. С. 3–47.

96. Гузь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. *Arch. mech. Stos.* 1964. Vol. 16, №16. Pp. 1009–1021.

97. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. К.: Наук. думка, 1970. 324 с.

98. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К.: Наук. думка, 1971. 270 с.

99. Гузь А. Н., Цурпал И. А. О равновесии физически нелинейной толстостенной сферической оболочки. *Теория оболочек и пластин*. Труды симпозиума. Казань, 1971. М.: Наука, 1971. С. 82–84.

100. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин, оболочек. К.: Вища школа, 1980. 168 с.

101. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К.: Вища школа, 1982. 352 с.

102. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Гергиевский В. П., Максимюк В. А. О напряженном состоянии тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из нелинейно-упругих ортотропных композитных материалов. *Прикл. механика*. 1988. Т. 24, № 4. С. 25–32.

103. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных

сред. К.: Вища школа, 1989. 352 с.

104. Гузь А. Н., Шнеренко К. Н. Линейные задачи для оболочек с учётом деформаций поперечного сдвига. Механика композитов в 12 томах. Концентрация напряжений. Т. 7. Под общей редакцией А. Н. Гузя. Киев: “А.С.К.”, 1998. С. 288–328.

105. Гузь А. Н. О расчётных схемах в линеаризованной механике деформируемых тел. *Прикл. механика*. 2004. 40, №5. С. 30–47.

106. Гуляев В. И. Применение теории И. Н. Векуа для решения неклассических задач теории оболочек. *Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин*. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 321–351.

107. Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1978. 192 с.

108. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Гайдайчук В. В. Расчет оболочек сложной формы. Киев: Будівельник, 1990. 192 с.

109. Гуртовий А. Г. Об учёте поперечного обжатия в теориях многослойных оболочек и пластин. *Прикл. механика*. 2001. Т. 37, № 10. С. 90–97.

110. Гусейн-Заде М. И. К построению теории изгиба слоистых пластинок. *Прикл. математика и механика*. 1968. Т. 32, №. 2. С. 232–243.

111. Демчук О. Н. Расчет слоистых анизотропных оболочек и пластин на основе сдвиговой теории итерационного типа. *Пробл. прочности*. 1998. №1. С. 100–106.

112. Деєв В. М. До розрахунку товстих пружних плит. *Доп. АН УРСР*. 1969. №3. С. 252–255.

113. Забияка Г. И., Прусаков А. П. О концентрации напряжений в многослойных оболочках несимметричного строения. *Прикл. механ.* 1974. Т. 10, №. 6. С. 11-16.

114. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант некласичної теорії згину трансверсально ізотропних пластин і пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 1999. В. 2, т. 2. С. 58 – 65.

115. Зеленський А. Г. Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант зведення тривимірної задачі згину оболонок до двовимірної. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, 26.06–30.06 2000). Теоретичні основи будівництва, ПДАБА. Warsaw, 2000. № 8. P. 426–430. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.*

116. Зеленський А. Г. Формулювання варіаційного принципу Рейснера для фізично-нелінійного тіла. *Строительство, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2000. В. 11. С. 133 – 138.

117. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пластин. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2000. В. 3, т. 2. С. 30–37.

118. Зеленський А. Г. Про взаємозв'язок варіаційних принципів Рейснера і Ху-Вашіцу для фізично нелінійного тіла. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2000. № 12. С. 31–36.

119. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину фізично нелінійних однорідних пластин. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 2. С. 7–13.

120. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину однорідних нелінійно пружних пологих оболонок. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 3. С. 20–26.

121. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 4, т. 1. С. 56–64.

122. Зеленський А. Г. Основні рівняння згину однорідних фізично нелінійних пластин із урахуванням обтискання. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropetrovsk, 27.06–01.07 2001). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Дн-вськ, 2001. № 9. Р. 63–68. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

123. Зеленський А. Г. Про побудову уточнених рівнянь згину для нелінійно пружних круглих пластин з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 5, т. 1. С. 167–173.

124. Зеленський А. Г. Розвинення методу збурень для побудови уточненої теорії згину тонких сферичних оболонок. *Вестник национального технического ун-та «ХПИ»*. *Динамика и прочность машин*. Харьков, 2002. Т. 8, № 9. С. 83–88.

125. Зеленський А. Г. До питання про розрахунок ортотропних пластин за неklasичною теорією. *Перспективні задачі інженерної науки*. Зб. наук. праць. Дн-ськ, 2002. В. 4. С. 134–143. ISBN 966–7282–70–8.

126. Зеленський А. Г. Метод збурень в одній неklasичній теорії згину нелінійно пружних

круглих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions* (Warszawie, June 2002). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2002. № 10. P. 644–649. ISBN 5–7763–8880–5.

127. Зеленський А. Г. Застосування методу збурень в теорії розрахунку ортотропних плит. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 1. С. 131–140.

128. Зеленський А. Г. Уточнена теорія згину фізично нелінійних пологих сферичних оболонок з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 2. С. 43–50.

129. Зеленский А. Г. Метод возмущения упругих свойств в неклассической теории изгиба анизотропных оболочек. *Вісник Донецького ун-ту. Серія А. Природничі науки*. Донецьк, 2003. № 1. С. 103–108.

130. Зеленський А. Г. Про розрахунок багат шарових пластин симетричної структури за неklasичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.. Polish-Ukrainian Transactions* (Dnipropetrovsk-Warsaw, June 2003). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Дн-вськ, 2003. № 11. P. 121–126. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

131. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за неklasичною теорією. *Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фізико-математичні науки*. Київ, 2003. В. 5. С. 36–44.

132. Зеленський А. Г. Застосування поліномів Лежандра в одній теорії згинання нетонких багат шарових фізично нелінійних оболонок симетричної структури. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2003. В 7, т. 1. С. 140–147.

133. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь неklasичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2003. В. 5. С. 70–79.

134. Зеленський А. Г. Рівняння неklasичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Вестник национального технического ун-та „ХПИ”*. *Динамика и прочность машин*. Харьков, 2004. № 19. С. 89–96.

135. Зеленський А. Г. Зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної для шаруватих трансверсально-ізотропних пологих оболонок несиметричної структури. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions* (Warsaw–Dnepropetrovsk,

June 2004). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2004. V. 2, № 12. P. 679–686. ISBN 5–7763–8880–5.

136. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Донецьк, 2004. В. 6. С. 58–67.

137. Зеленський А. Г. Розрахунок на згин фізично нелінійних товстих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions* (Dnepropetrovsk–Warsaw, June 2005.). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Дн-вськ, 2005. № 13. P. 139–144. ISBN 5–7763–8880–5.

138. Зеленський А. Г. Використання поліномів Лежандра для побудови уточненої неklasичної теорії згину фізично нелінійних шаруватих оболонок несиметричної структури. *Новини науки Придніпров'я*. Дн-ськ, 2005. №2. С. 12–17.

139. Зеленський А. Г. Наближений розрахунок багатошарових плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2005, № 10/1. *Серія механіка*. В. 9, т. 1. С. 167–173.

140. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2005, № 10/2. *Серія механіка*. В. 9, т. 2. С. 51–58.

141. Зеленський А. Г. Наближений метод в аналітичній теорії трансверсально-ізотропних круглих плит. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2006. В. 7. С. 47–56.

142. Зеленський А. Г. Аналітична теорія розрахунку нетонких пластин та оболонок і її застосування. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions* (Warsaw–Vilnius, June 2006). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2006. № 14. P. 569–578. ISBN 5–7763–8880–5.

143. Зеленський А. Г. Про метод розрахунку круглих трансверсально-ізотропних плит. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions* (Warsaw, May 2007). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2007. № 15. P. 721–730. ISBN 5 978–83–7207–683–0.

144. Зеленський А. Г. Метод розв'язування задачі згину круглої транстропної плити. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007, № 2/1. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 97–104.

145. Зеленський А. Г. Варіант аналітичної теорії розрахунку пологих оболонок при косо-

симетричному навантаженні з урахуванням наближень вищих порядків. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2007. В. 11. С. 63–70.

146. Зеленський А. Г. Метод взаємозв'язаних рівнянь вищого порядку в аналітичній теорії пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-ськ, 2007. В. 8. С. 67–83.

147. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії транстропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007. №2/2. *Серія механіка*. В. 11, т. 2. С. 84–94.

148. Зеленський А. Г. Розрахунок методом збурень анізотропної оболонки за уточненою теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, June 2008). Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2008. № 16. P. 383–392. ISBN 978–83–7207–763–9.

149. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. До розрахунку пластин на згин з урахуванням наближень вищих порядків. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2008. Т. 16, №5. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 127–136.

150. Зеленський А. Г. Метод розв'язування системи диференціальних рівнянь високого порядку в аналітичній теорії нетонких оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2008. В. 9. С. 93–103.

151. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів у розрахунку нелінійно пружних товстих пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2008. В. 12. С. 82–95.

152. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів в аналітичній теорії нетонких фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 1. С. 121–132.

153. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 2. С. 54–62.

154. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування систем диференціальних рівнянь в теорії нетонких пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2010. В. 14. С. 175–182.

155. Зеленський А. Г. Практичні висновки по результатам розрахунку однорідних пластин

та пологих оболонки довірливої товщини за аналітичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2010. V. 18. P. 325–330. ISBN 978–83–7207–894–0.

156. Зеленський А. Г. Моделі і методи аналітичної теорії нетонких пластин та пологих оболонки при статичному навантаженні. *Вісник Придніпр. держ. академії будівництва та архітектури*. Зб. наук. праць. Дн-вськ: ПДАБА, 2011. №1–2. С. 21–30.

157. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування системи диференціальних рівнянь теорії нетонких пологих оболонки. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла*. Дн-ськ, 2011. В. 12. С. 131–139.

158. Зеленський А. Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2011. V. 18. P. 263–267. ISBN 978–83–7207–894–0.

159. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла*. Дн-вськ, 2012. В. 13. С. 188–196.

160. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2012. Т. 20, № 5. *Серія механіка*. В.16, т. 2/1. С. 60–66.

161. Зеленський А. Г. Використання методу зниження порядку диференціальних рівнянь в неklasичній теорії пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, September 2012). *Теоретичні основи будівництва*, ПДАБА. Warsaw, 2012. V. 20. P. 191–196. ISBN 978–83–7814–034–4.

162. Зеленський А. Г. Приварников А. К. Про метод розв'язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *International Scientific Journal. Международный научный журнал*. Сб. научн. трудов. *Физико-математические науки*. Київ, 2015. № 2. С. 154–159. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771P. ISSN 2410-213X. (Журнал зареєстрований в наукометричних базах ланях: **Open Academic Journal Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, Turkish Education Index, Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, Inter-**

national Institute of Organized Research, PИИЦ, CiteFactor).

163. Зеленський А. Г. Про розв'язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2015. № 2. С. 79–86.

164. Зеленський А. Г. Загальні основні рівняння теорії пластин довільної сталюї товщини. *Актуальні проблеми гуманітарних та природничих наук* (Харків, 30-31 березня 2018 р.). Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. *Фізико-математичні науки*. Харків: Молодий вчений, 2018. С. 167–170. ISBN 978-617-7640-10-2. www.molodyvcheny.in.ua.

165. Зеленський А. Г. Про розв'язування рівнянь рівноваги нетонкої трансропної плити на пружній основі. *Перспективні напрями розвитку науки та техніки* (Вінниця, 23 березня 2018 р., м.). Збірн. наук. матеріалів 18-ї Міжнар. наук.-практ. інтернет-конференції. Ч. 1. Вінниця, 2018. С. 16–20.

166. Зеленський А. Г. Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки*. *Visnyk of Zaporizhzhya National University, Physical and Mathematical Sciences*. Запоріжжя, 2018. № 1. С. 13–29. (**Index COPERNICUS, ICV 2017: 80.00, CiteFactor, ResearchBib, Journal Factor**). DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-1-02.

167. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Про згин пластин в рамках однієї неklasичної теорії. *Materials of II Intern. Symposium „Fracture Mechanics and Physics of Construction Materials and Structures”*. Lviv-Dubliany, Ukraine, 1996. С. 105.

168. Зеленский А. Г. К вопросу о построении уточненной теории изгиба физически нелинейных однородных пластин. *Проблемы современного материаловедения, машиностроения*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2001. С. 247.

169. Зеленский А. Г. О методе решения задач изгиба нелинейно упругих толстых пластин. Тезисы докл. X междунар. конф. “*Математика. Экономика. Образование*”. Ростов на Дону, 2002. С. 69–70.

170. Зеленський А. Г. Метод возмущений в неklassической теории изгиба физически нелинейных пластин и оболочек. *Стр-во, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. тру-

дов. Дн-вск: ПГАСА, 2002. В. 15, Ч. 2. С. 54. ISBN 966-7282-65-1.

171. Зеленський А. Г. Метод збурень в уточненій теорії розрахунку анізотропних пластин. *Строительство, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2003. В. 22, ч. 3. С. 118. ISBN 966-7282-80-5.

172. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за неklasичною теорією. *Сучасні проблеми механіки*. Тези доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 2003). Київ, 2003. С. 24.

173. Зеленський А. Г. Про одну теорію згинання шаруватих пластин. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Третьої Всеукр. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 2003 р.). Дніпродзержинськ, 2003. С. 151.

174. Зеленський А. Г. Уточнені рівняння згину нелінійно пружних шаруватих пластин несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали 4-ї Всеукр. наук. конф. (Дн-вськ, 19-21 квітня 2004 р.). Дн-вськ, 2004. С. 79.

175. Зеленський А. Г. Рівняння неklasичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*. Анотації доповідей XII Міжнар. наук.-практ. конф. (Харків, 20-21 травня 2004 р.). Харків, 2004. С. 66.

176. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. *Матеріали X Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13-15 травня 2004 р.). Київ, 2004. С. 115. ISBN № 966-794466-2.

177. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування тривимірної задачі про згин товстої багатошарової пластини несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-вськ, 18-21 квітня 2005 р.). Дн-вськ, 2005. С. 88.

178. Зеленський А. Г. Розвинення методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь просторової задачі теорії пружності. *Матеріали XI Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 18-20 травня 2006 р.). Київ, 2006. С. 107. ISBN № 966-7944-66-2.

179. Зеленський А. Г. Аналітична теорія пластин та пологих оболонок. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*. Тези доповідей Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (Дн-вськ, 17-19 жовтня 2007 р.). Дн-вськ, 2007. С. 192.

180. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь з час-

тинними похідними в аналітичній теорії пластин. *Матеріали XII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15-17 травня 2008 р.). Київ, 2008. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 156. ISBN 978-966-432-031-0.

181. Зеленський А. Г. Метод збурень фізичних властивостей матеріалу в аналітичній теорії нетонких пластин та пологих оболонок. *Сучасні проблеми механіки та математики*. Матеріали конференції. Львів: ПППММ ім. Я. С. Підстригача, 2008. Т. 1. С. 156–158.

182. Зеленський А. Г. Розв'язування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку в уточненій теорії нетонких пластин. *Матеріали XIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 167.

183. Зеленський А. Г. Метод зведення неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними високого порядку до неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку. *Матеріали XIV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–21 квітня 2012 р.). Київ, 2012. Т.1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 190. ISBN 978-617-696-014-0,

184. Зеленський А. Г. Сингулярний розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15–17 травня 2014 р.). Київ, 2014. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 106. ISBN 978-617-7021-18-5.

185. Зеленський А. Г., Розв'язування системи диференціальних рівнянь із частинними похідними 12-го порядку в математичній теорії нетонких пластин. *Математичні проблеми технічної механіки–2014*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-вськ–Дн-нськ, 14–17 квітня 2014 р.). Дн-нськ, Дн-вськ, 2014. С. 45.

186. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Про знаходження частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Матеріали XVI Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 14–15 травня 2015 р.). Київ, 2015. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 97-98. ISBN 978-617-7021-27-7.

187. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Спосіб розв'язування однієї задачі згину нескінченної плити на основі варіанта математичної теорії. *Математичні проблеми технічної механіки–2015*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2015 р.). Дн-нськ,

2015. С. 103.

188. Зеленський А. Г. Про варіант математичної теорії нетонких пластин і пологих оболонок. *Матеріали XVII Міжнар. наук. конф. ім. академіка Михайла Кравчука* (Київ, 19–189. 20 травня 2016 р.). Київ, 2016. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 116–117. ISBN 978-617-7021-42-0.

189. Зеленський А. Г. Зведення розв'язувальних рівнянь варіанта математичної теорії пологих оболонок до рівнянь другого і четвертого порядків. Тезиси докладов III Междунар. конф. “Актуальні проблеми інженерної механіки”. (Одеса, 10–14 мая 2016 г.). Одеса, 2016. С. 255–259.

190. Зеленський А. Г. Взаємозв'язок операторного методу і методу зведення неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними до рівнянь нижчого порядку. *Математичні проблеми технічної механіки–2016*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-нськ, Дн-вськ, Київ, 18–21 квітня 2016 р.). Дн-нськ, 2016. Т. 1. С. 108.

191. Зеленський А. Г. Про обчислення одного невласного інтеграла з параметром. *Матеріали XVIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Луцьк–Київ, 7–10 жовтня 2017 р.). Київ, 2017. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 58–59. ISBN 978-617-7021-57-4.

192. Зеленський А. Г. До розв'язування граничної задачі для півнескінченної товстої плити. Тези доповідей V Міжнар. конф. “Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 22–25 травня 2018 р.). Одеса, 2018. С. 93–94. ISBN 978-617-7195-62-6.

193. Зеленський А. Г. Про першу граничну задачу для півнескінченної товстої пластини. *Математичні проблеми технічної механіки–2018*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Київ, Черкаси, Кам'янське, 16–19 квітня 2018 р.). Кам'янське, 2018. Т. С. 50.

194. Зеленський А. Г. Про знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь в теорії згину нетонких пластин. Тези Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Львів, 2018. С. 164–165.

195. Зеленський А. Г. Метод послідовних наближень в теорії нетонких пологих трансверсально-ізотропних оболонок. Тези доповідей I Міжнар. наук.-техн. гонф. “Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні” (Харків, 10-14 вересня 2018 р.). Харків, 2018. С. 98. ISBN 978-966-02-8575-0.

196. Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії трансверсально-ізотропних оболонок

довільної товщини при статичному навантаженні. Тези доповідей VI Міжнар. конф. "Актуальні проблеми інженерної механіки" (Одеса, 20–24 травня 2019 р.). Одеса, 2019. С. 115–116. ISBN 978-617-7195-87-9.

197. Зеленський А. Г. Про фундаментальні розв'язки системи рівнянь високого порядку математичної теорії трансропних пластин. *Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики– 2019*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпро, Кам'янське, 15–18 квітня 2019 р.). Кам'янське, 2019. С. 45–46.

198. Зеленський А. Г. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач варіанта математичної теорії пластин довільної товщини. Тези доповідей VII Міжнар. конф. "Актуальні проблеми інженерної механіки" (Одеса, 12–15 травня 2020 р.). Одеса, 2020. С. 119–122.

199. . Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущения в теории упруго-пластического тел. М.: Наука, 1978. 208 с.

200. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Метод малого параметра в теории нелинейной вязкоупругости. *Прикл. механика*. 1966. Т. 2, № 5. С. 1 – 3.

201. Кагадий Т. С., Моссаковская Л. В., Павленко А. В. Метод возмущений в пространственной задаче линейной вязкоупругости анизотропных тел. *Прикл. математика и механика*. 1992. Т. 5. С. 167–171.

202. Кагадій Т. С., Павленко А. В. Метод збурення в задачах теорії пружності та в'язкопружності. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 1999. В. 2, т. 2. С. 66–73.

203. Калекин О. Ю. К приближенной теории оболочек средней толщины *Прикл. механика*. 1965. Т. 1, № 12. С. 29–37.

204. Кан С. Н., Каплан Ю. И. Расчет неоднородных цилиндрических оболочек с учетом поперечного сдвига и надавливания волокон. *Прикл. механика*. 1979. Т. 15, № 1. С. 34–42.

205. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наук. думка, 1971. 136 с.

206. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Влияние анизотропии и деформаций поперечного сдвига на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. *Прикл. механика*. 2018. Т. 54, №3. С. 97–105.

207. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд. иностр. лит-ры, 1961. 777 с.

208. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы метода разложения по параметру. Киев: Наук. дум-

ка. 1980. 165 с.

209. Кваша Э. Н. Контактные задачи слоистых анизотропных оболочек пневматических шин. Дн-вск: Изд-во ЭНЭМ, 2006. 286 с.

210. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с.

211. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. К.: Изд-во АН УССР, 1963. 354 с.

212. Кит Г. С., Максимук А. В. Метод интегральных уравнений Вольтера в контактных задачах для тонкостенных элементов конструкций. *Теор. и прикл. механика*. 1997. В. 27. С. 96–103.

213. Клойзнер С. М., Космодамианский А. С. Нелинейные задачи плоской теории упругости для многосвязных сред. *Прикл. механика*. 1969, Т. 5, № 8. С. 63–70.

214. Кобелев В. Н., Коварский П. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций. М.: Машиностроение, 1959. 304 с.

215. Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г. О приближенном методе решения пространственных задач теории упругости и вязкоупругости. *Прикл. механика*. 1969. Т. 5, № 8. С. 1–10.

216. Койфман Ю. И. Плоские нелинейные задачи упругого равновесия многосвязных тел. *Прикл. механика*. 1970. Т. 6, № 2. С. 58–65.

217. Колос А. В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. *Прикл. математика и механика*. 1964. Т. 28, № 3. С. 582–589.

218. Копытько О. А. К теории изгиба слоистых пластин несимметричного строения. *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ: ПДАБА, 1998. № 6. С. 477–180.

219. Кордюк О. Л., Плеханов А. В., Прусаков А. П. К решению задачи о концентрации напряжений в пластине. *Прикл. механика*. 1980. Т. 16, № 6. С. 134–137.

220. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

221. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.

222. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.

223. Космодамианський А. С., Цурпал І. А. Фізично нелінійні задачі для пластинки, посла-

бленой двома круговими отворами. *ДАН УРСР. Сер. А.* 1967, № 5. С. 14–18.

224. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. К: Наук. думка, 1978. 240 с.

225. Космодамианский А. С., Галич В. А. Общее решение пространственной задачи теории упругости для многослойной ортотропной цилиндрической оболочки. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1984. № 8. С. 46–48.

226. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

227. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. *Расчет пространственных конструкций.* М.: Гос. изд-во литературы по стр-ву, архитектуре и стройматериалам, 1962. В. 7. С. 163–192.

228. Кубенко В. Д., Немиш Ю.Н., Шнеренко К. И., Шульга Н. А. Метод возмущений в краевых задачах механики деформируемых тел. *Прикл. механика.* 1982. Т. 18, № 11. С. 3–20.

229. Кудин А. В., Тамуров Ю. Н. Вариант уравнений изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя, 2010. № 1. С. 72–76.

230. Кудин А. В., Тамуров Ю. Н., Чопоров С. В. Аналитический и численный анализ изгиба круглой трехслойной пластины под действием локальных нагрузок. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя, 2014. № 1. С. 67–81.

231. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Вид-во “Сполом”. 2003. 320 с.

232. Кушнір Р. М., Марчук М. В., Осадчук В. А. Нелінійні задачі статички і динаміки податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок. *Актуальні проблеми механіки деформованого твердого тела.* Донецк. 2006. С. 238–240.

233. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Жидик У. В., Флячок В. В. До теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2011. 54, № 3. С. 147–156. ISSN 0130–9420.

234. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины. М: Изд-во техн.-теор. лит., 1957. 463 с.

235. Лехницкий С. Г. К теории анизотропных толстых плит. *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* 1959. № 2. С. 142–145.

236. Либреску Л. И. К теории анизотропных упругих оболочек и пластинок. *Инженерный журнал*. 1964. Т. 4, в. 3. С. 475–485.
237. Ломакин В. А., Шейнин В. И. О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах. *Механика твердого тела*. 1972. № 3. С. 33–39.
238. Лурье А. И. К теории толстых плит. *Прикл. математика и механика*. 1942. Т. 6, № 2–3. С. 151–169.
239. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
240. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
241. Максимович В. М., Соляр Т. Я. Осесиметрична задача термопластичності для кусково-однорідного кільця. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. 57, № 4. С. 154–161. ISSN 0130–9420.
242. Максимук О. В., Гануліч Н. В. Термопружність циліндричної оболонки із низькою зсувною жорсткістю у локальному температурному полі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. 58, № 3. С. 26–34. ISSN 0130–9420.
243. Максимюк В. А. О решении физически нелинейных задач теории ортотропных оболочек с использованием смешанных функционалов. *Прикл. механика*. 2000. Т. 36, № 9. С. 96–101.
244. Маневич А. И., Колаковский З. К теории поперечных колебаний пластин с учетом сдвиговых деформаций. *Прикл. механіка*. 2014. Т.50, №2. С. 104–114.
245. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев, Донецк: Вища школа, 1982. 153 с.
246. Марчук М. В., Пакош В. С., Харченко В. М. Власні частоти шаруватих композитних пластин-смуг з податливими до трансверсальних зсуву та стиснення складовими. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56, № 2. С. 151–156. ISSN 0130–9420.
247. Марчук М.В., Тучапский Р.И. Динамика упругих геометрически нелинейных нетонких анизотропных оболочек переменной толщины. *Прикл. механика*. 2017. Т. 53, №6. С. 57–70.
248. Марчук М. В., Тучапський Р. І. Аналіз ідентичних за формою рівнянь деяких варіантів теорії пластинок у полярних координатах. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2017. Т. 60, № 4. С. 162–177. ISSN 0130–9420.

249. Метод конечных элементов / П. М. Варвак, И. М. Бузин, А. С. Городецкий и др.. К.: Вища школа, 1981. 176 с.
250. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов и др.. К.: Наук. думка, 1980. Т. 1. 636 с.
251. Москаленко В. Н., Новичков Ю. Н. Изгиб толстых многослойных оболочек. *Инж. журнал. Механика твердого тела*. 1968. № 3. С. 149–154.
252. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. К.: Наук. думка, 1988. 288 с.
253. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 432 с.
254. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1959. № 2. С. 107–113.
255. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. *ДАН СССР*. 1959. Т. 128, № 6. С. 1144–1147.
256. Муштари Х. М. К общей теории пологих оболочек с наполнителем. *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1961. № 2. С. 24–32.
257. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л.-М: Изд-во литры по строительству, 1966. 304 с.
258. Найфе А. Х. Введение в методы возмущений (Перевод с английского И. Е. Зино и Э. А. Троппа). М.: Мир, 1984. 536 с.
259. Немиш Ю. Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально изотропной среды. *Прикл. механика*. 1969. Т. 5, № 8. С. 26–34.
260. Немиш Ю. Н. Приближенное решение некоторых пространственных физически нелинейных задач теории упругости. *Прикл. механика*. 1970. Т. 6, № 7. С. 53–57.
261. Немиш Ю. Н., Хома И. Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (Обзор). *Прикл. механика*. 1993. Т. 29, № 11. С. 3–32.
262. Немиш Ю. М. Про один метод розв'язування фізично нелінійних задач про згин товстих прямокутних пластин. *Мат. методи і фізико-механічні поля*. 1997. Т. 40, № 1. С. 30–35.
263. Немиш Ю. Н., Левчук О. И. О напряженном состоянии слоистой нелинейно упругой толстостенной сферической оболочки. *Прикл. механика*. 1999. Т. 35, № 12. С. 26–32.

264. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел. *Прикл. механика*. 2000. Т. 36, № 2. С. 3–38.
265. Немиш Ю. Н. Физически нелинейные пространственные задачи об упругом равновесии деформируемых тел. *Прикл. механика*. 2000. Т. 36, № 9. С. 35–66.
266. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит. *Прикл. математика и механика*. 1963. Т. 27, в. 3. С. 583–588.
267. Нигул У. К. О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в краевых задачах статики. *Прикл. математика и механика*. 1964. В. 1. С. 131–134.
268. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
269. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Гос. изд. лит. по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. 376 с.
270. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
271. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
272. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластинки. М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. 695 с.
273. Опанасович В. К., Яцик І. М., Сулим Г. Т. Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. 54, № 4. С. 71-81. ISSN 0130–9420.
274. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. К.: Наук. думка, 1985. 224 с.
275. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2005. Вип. 3. С. 43–50.
276. Остерник Э. С. Инженерный метод расчета многослойных анизотропных пластин. *Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин*. М.: Изд. АН СССР, 1964. С. 758–763.
277. Паймушин В. Н. Вариант уточненной нелинейной теории тонких упругих трехслойных оболочек итерационного типа. *Прикл. математика и механика*. 1990. Т. 54, № 1. С. 86–92.

278. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке. *Прикл. механика*. 1990. Т. 26, № 2. С. 49–56.
279. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973. 248 с.
280. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек. Львів: Вища школа, 1978. 159 с.
281. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин. *Прикл. механика*. 1979. Т. 15, № 11. С. 76–81.
282. Пискунов В. Г., Гуртовой А. Г., Сипетов В. С. К уточнению теории анизотропных пластин. *Прикл. механика*. 1984. 20, № 5. С. 82–87.
283. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. К.: Будівельник, 1986. 176 с.
284. Пискунов В. Г., Марчук А. В. К расчету слоистых ортотропных плит в пространственной постановке. *Прикл. механика*. 1994. Т. 30, № 11. С. 32–36.
285. Пискунов В. Г., Рассказов А. А. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропных пологих оболочек и пластин на основе сдвиговой теории второго приближения. *Прикл. механика*. 1998. Т. 34, № 8. С. 103–110.
286. Пискунов В. Г., Бурьгина А. В., Рассказов А. А. Сдвиговые эффекты напряженного состояния в трансверсально-изотропных пластинах. *Проблемы прочности*. 1998. Сообщение 1. Вихревой эффект. № 1. С. 56–62. Сообщение 2. Потенциальный эффект. № 1. С. 63–71.
287. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 2. С. 22–57.
288. Плеханов А. В., Прусаков А. П. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины. *Мех. тв. тела*. 1976. № 3. С. 84–90.
289. Плеханов А. В., Прусаков А. П. О построении теории изгиба трехслойных пластин средней толщины энергоасимптотическим методом. *Изв. вузов. Строительство и архитектура*. 1977. № 7. С. 28–32.
290. Плеханов А. В., Вовченко Н. Г. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропных пологих оболочек при локальном нагружении. *Изв. вузов. Строительство и архитектура*. 1989. № 5. С. 23–25.
291. Плеханов А. В. Неклассическая теория деформирования ортотропных оболочек.

Прикл. механика. 1997. Т. 33, №4. С. 62–66.

292. Плеханов А. В. Итерационная теория деформирования слоистых оболочек. *Прикл. механика*. 1999. 35, № 11. С. 40–45.

293. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. К.: Наук. думка, 1979. 240 с.

294. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. К.: Наук. думка, 1978. 344 с.

295. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1976. № 1. С. 44–46.

296. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки, находящейся в трансверсально-изотропной среде, на действие подвижной нагрузки. *Прикл. механика*. 1980. Т. 16, № 11, С. 28–35.

297. Пожуев В. И., Фасоляк А. В. Динаміка коаксіальних циліндричних оболонок у пружному інерційному середовищі. *Техническая механика*. 2017. № 3. С. 90–99.

298. Пожуев В. И., Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Застосування біполярної системи координат до моделювання динаміки двох коаксіальних оболонок у пружному середовищі. *Вісник Запорізького національного ун-ту*. Запоріжжя, 2018. № 1. С. 97–108.

299. Понятовский В. В. К теории пластин средней толщины. *Прикл. математика и механика*. 1962. Т. 24, № 2. С. 335–341.

300. Понятовский В. В. К теории изгиба анизотропных пластинок. *Прикл. математика и механика*. 1964. Т. 28, № 6. С. 1033–1039.

301. Понятовский В. В. Уравнения теории анизотропных пластинок, *Исследования по упругости и пластичности*. Л.: ЛГУ, 1965. № 4. С. 3–28.

302. Понятовский В. В. Уравнения теории слоистых пластин. *Исследования по упругости и пластичности*. Л.: ЛГУ, 1968. №7. С. 53–61.

303. Присажнюк В. К., Пискунов В. Г. Учет поперечного обжатия в задачах изгиба многослойных ортотропных пластин. *Прикл. механика*. 1986. Т. 22, № 7. С. 66–72.

304. Присажнюк В. К., Пискунов В. Г. Модель пологих оболочек и пластин из слоистых композитных материалов для решения задач статики, динамики и контактного взаимодействия. *Механика композитных материалов*. Рига: Знание, 1987. № 6. С. 1014–1021.

305. Прусаков А. П. Основные уравнения трехслойных пластин с легким наполнителем.

Прикл. математика и механика. 1951. Т. 11, № 1. С. 27–36.

306. Прусаков А. П. О построении теории изгиба пластин средней толщины энергоасимптотическим методом. *Прикл. механика.* 1975. Т. 11, № 10. С. 44–51.

307. Прусаков А. П. О построении уточненной теории пологих оболочек энергоасимптотическим методом. *Изв. вузов. Стр-во и архитектура.* 1977. № 12. С. 25–29.

308. Прусаков А. П., Плеханов А. В. О построении уточненной теории двухслойных пластин. *Прикл. механика.* 1977. Т. 13, № 9. С. 59–65.

309. Прусаков А. П., Бондаренко В. Д., Прусаков В. А. Изгиб свободно опертых трехслойных плит несимметрического строения. *Стр-во и архитектура. Серия. Известия вузов.* 1991. № 7. С. 34–37.

310. Прусаков А. П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины. *Прикл. механика.* 1993. Т. 29, № 12. С. 51–58.

311. Прусаков А. П. Об анализе теорий изгиба трансверсально-изотропных пластин. *Прикл. механика.* 1996. Т. 32, № 7. С. 69–75.

312. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering (Polish-Ukrainian Seminar (Dnepropetrovsk–Warsaw, June 1996)). Теоретические основы строительства.* Дн-вск: ПГАСА, 1996. V. 1, Part 2. С. 304–307. ISBN 5–7763–8880–5.

313. Прусаков А. П., Вовченко Н. Г., Зеленский А. Г. Об изгибе пологих оболочек в рамках одной неклассической теории. Тезисы докладов IV-й Междунар. науч. конф. “*Материалы для строительных конструкций, ИСМБ’96*” (Дн-вск, 29-31 мая 1996). Днепропетровск: ПГАСА, 1996. С. 123. ISBN 5-7763-8886-4.

314. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineerin. Ukrainian- Polish seminar (Dnepropetrovsk, 30.06–06.07 1997).* *Теоретичні основи будівництва,* ПДАБА. Дн-вськ, 1997. № 5. Р. 191–198. ISBN 5–7763–8880–5.

315. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. НДС пластин в рамках одной неклассической теории при поперечном локальном нагружении. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish–Ukrainian seminar (Warsaw, 6.07–11.07.1998).* *Теоретичні основи будівництва,* ПДАБА. Warsaw, 1998. № 6. Р. 539–542. ISBN 5–7763–8880–5.

316. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Расчет пологой панели при поперечном локальном нагружении по неклассической теории изгиба. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Теоретичні основи будівництва. Зб. наук. праць Міжнар. конф. (Дніпропетровськ, 24.06–29.06.1999). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ: ПДАБА, 1999. № 7. Р. 157–162. ISBN 5–7763–8880–5.

317. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Вариант неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек произвольной толщины. Зб. наук. праць ПДАБА. *Управління проектами та розвиток виробництва*. Дн-вськ: ПДАБА, 2000. С. 65–69.

318. Прусаков А. П. К теории изгиба слоистых пластин. *Прикл. механика*. 1997. Т. 33, № 3. С. 64–70.

319. Прусаков А. П., Копытько О. А. Об одном способе расчета слоистых пластин. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 1999. № 11. С. 55–62.

320. Прусаков А. П. О построении погранслоев для пологой оболочки энергоасимптотическим методом. *Прикл. механика*. 2000. 36, №2. С. 99–104.

321. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. *Прикл. механика*. 1976. Т. 12, № 11. С. 50–56.

322. Рассказов А. О. К теории многослойных пластин с ортотропными слоями. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. К.: Будівельник, 1977. В. 30. С. 18–25.

323. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов. *Прикл. механика*. 1978. Т. 14, № 8. С. 51–57.

324. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. К.: Вища школа, 1986. 191 с.

325. Рассказов А. О., Бурыгина А. В. К уточнению сдвиговой теории слоистых пологих ортотропных оболочек. *Прикл. механика*. 1988. 24, № 4. С. 32–37.

326. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / [Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Оглобля А. И. та ін.]. К.: Будівельник, 1992. 136 с.

327. Расчёт неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов / [Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К. и др.]. К.: Вища школа, 1987. 200 с.

328. Рвачев В. Л., Курпа Л. В., Курпа Л. И. Компьютерное моделирование и решение задач теории тонких пластин и пологих оболочек сложной формы. *Проблемы нелинейной механики и физики материалов*. Дн-вск, 1999. С. 242–251.
329. Ревенко В. П. Згин осесиметрично навантажених товстих пластин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2019. Т. 55, № 4. С. 22–27.
330. Рябов О. Ф. Розрахунок багатошарових оболонок. К.: Будівельник, 1968. 96 с.
331. Рябов А. Ф., Рассказов А. О. К задаче изгиба толстых неоднородных по толщине пластин. *Прикл. механика*. 1982. 18, № 3. С. 55–59.
332. Савин Г. Н., Хорошун Л. П. Плоская задача физически нелинейных упругих тел. *Прикл. механика*. 1965. 1, № 4. С. 1–11.
333. Савин Г. Н., Койфман Ю. И. Общая нелинейная теория упругости (обзор). *Прикл. механика*. 1970. Т. 6, № 12. С. 3–26.
334. Савин Г. Н., Немиш Ю. Н. Метод возмущений упругих свойств в механике твердых деформируемых тел. *ДАН СССР*. 1974. Т. 216, №1. С. 53–55.
335. Сало В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. Харьков: НТУ “ХПИ”, 2003. 216 с.
336. Сахаров А. С., А., Козак А. Л., Гондлях А. В., Мельников С. Л. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1984. В. 44. С. 13–16.
337. Саченков А. В., Красновский И. Ю. Изгиб цилиндрических оболочек и плит с учетом поперечной деформации. *Изв. высших учебных заведений. Математика*. 1981. № 11. С. 49–57.
338. Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Напряженно-деформированное состояние толстых ортотропных плит. *Сопротивление материалов и расчёт сооружений*. 1988. № 53. С. 67–71.
339. Снеддон И. Преобразования Фурье. Перевод с английского Матвеева А. Н. Под редакцией Рабиновича Ю. Л. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
340. Соколовская Г. В., Шленев М. А. К теории анизотропных плит средней толщины. *Труды VIII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин*. М.: Наука, 1973. С. 70–75.
341. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. М.: Стройиздат, 1987. 338 с.

342. Статика и динамика толстостенных оболочечных конструкций / [Кармишин А. В., Лясковец А. Н., Мяченков В. И и др.]. М.: Наука, 1964. 487 с.
343. Сторожук Е. А., Яцура А. В. Точные решения краевых задач для цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения. *Прикл. механика*. 2016. 52, №4. С. 68–81.
344. Сторожук Е. А., Яцура А. В. Аналитически-численное решение задач статики для некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины. *Прикл. механика*. 2017. 53, №3. С. 91–103.
345. Сторожук Е. А., Чернышенко И. С., Пиголь О. В. Упругопластическое состояние цилиндрической оболочки эллиптического сечения, ослабленной круговым отверстием. *Прикл. механика*. 2017. 53, №6. С. 49–56.
346. Сторожук Е. А., Чернышенко И. С., Яцура А. В. Напряженно-деформированное состояние возле отверстия в податливой на сдвиг композитной цилиндрической оболочке эллиптического сечения. *Прикл. механика*. 2018. 54, №5. С. 78–86.
347. Тамуров Н. Г. Изгиб прехслойных анизотропных пластин с наполнителем. *Изв. вузов. Строительство и архитектура*. 1958. №7. С. 41–56.
348. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщенной теории трехслойных пологих оболочек с учетом обжатия физически нелинейного наполнителя. *Прикл. механика*. 1990. Т. 26, № 12. С. 39–45.
349. Терегулов И. Г. К теории пластин средней толщины. *Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек*. Казань, 1960. С. 319–327.
350. Терегулов И. Г. К теории многослойных анизотропных оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань, 1970. В. 6–7. С. 762–767.
351. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки М.: Физматиз, 1963. 635 с.
352. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. К.: Наук. думка, 1971. 508 с.
353. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
354. Трантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956. 204 с.
355. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 3. 656 с.

356. Харченко В. М., Марчук М. В., Пакош В. С. Варіант уточненої теорії мінімального порядку податливих до зсуву та стиснення пластин. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2016. Вип.14. С. 107–112.
357. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропных оболочек при сосредоточенных воздействиях. *Прикл. механика*. 1972. Т. 8, вып. 11. С. 21–27.
358. Хома И. Ю. Об уравнениях ортотропных пластин переменной толщины. *Прикл. механика*. 1968. Т. 4, № 6. С. 14–22.
359. Хома И. Ю. Про крайові задачі теорії згину слабоортотропних пластин. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1972. №3. С. 257–260.
360. Хома И. Ю. Загальний розв'язок системи рівнянь рівноваги згину пластин теорії І. Н. Векуа в третьому наближенні. *Доп. АН УССР. Сер. А*. 1972. №1. С. 83–86.
361. Хома И. Ю. Об общем решении системы уравнений равновесия изгиба пластин постоянной толщины. *Докл. АН СССР*. 1973. № 1. С. 59–62.
362. Хома И. Ю. О решении граничных задач обобщенной теории ортотропных пластин. *Прикл. механика*. 1980. Т. 16, № 12. С. 61–68.
363. Хома И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек К.: Наук. думка, 1986. 170 с.
364. Хома И. Ю. Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин. *Прикл. механика*. 2001. Т. 37, № 4. С. 68–75.
365. Хома И. Ю. О представлении решений уравнений равновесия функционально неоднородных трансверсально-изотропных пластин. *Прикл. механіка*. 2017. 53, №2. С. 97–109.
366. Хорошун Л. П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 1978. Т. 14, № 10. С. 3–21.
367. Хорошун Л. П., Козлов С. В., Иванов Ю. А., Кошевой И. К. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. К.: Наук. думка, 1988. 152 с.
368. Цурпал И. А., Шульга Н. А. Основные уравнения теории тонких пологих оболочек с учетом физической нелинейности. *Прикл. механ.* 1965. Т. 1, № 12. С. 15–21.
369. Цурпал И. А., Кулиев Г. Г. Задачи концентрации напряжений с учетом физической нелинейности материала (обзор). *Прикл. механика*. 1974. 10, №7. С. 3–22.
370. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов. К.:

Техніка, 1976. 176 с.

371. Цурпал И. А., Тамуров Н. Г. Расчет многосвязных слоистых и нелинейно упругих пластин и оболочек. К.: Вища школа, 1977. 224 с.

372. Чепига В. Е. К уточненной теории слоистых оболочек. *Прикл. механика*. 1976. Т.12, № 11. С. 45 – 49.

373. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, Ч. 1. Л.: Изд-во. Ленингр. ун-та. 1962. 252 с.

374. Чернышенко И. С., Максимюк В. А. О физически нелинейном деформировании ортотропных оболочек вращения. *Прикл. механ.* 1986. Т. 22, № 1. С. 52–56.

375. Черняков Ю.А. Вариационные принципы решения граничных задач теории микродеформации. Сб. научн. трудов. *Вопросы прочности и пластичности*. Днепропетровск: ДГУ, 1987. С. 5-13.

376. Чибыряков В. К. Об одном варианте цилиндрического изгиба нетонких пластин. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1977. В. 31. С. 59 – 67.

377. Чибыряков В. К. Уравнения напряженно-деформированного состояния толстых плит несимметричной структуры. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1978. В. 32. С. 82–87.

378. Чулков П. П. Общая теория слоистых оболочек. *Докл. АН СССР. Механика твердого тела*. 1967. № 6. С. 167–170.

379. Шарма Дж. Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров. М.: Техносфера. Перевод с английского Б. В. Карпова под редакцией А. Г. Коркчана. 2002. 320 с. ISBN 5-94836-004-0.

380. Швабюк В. И. Об одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит. *Прикл. механика*. 1974. Т. 10, № 11. С. 87–92.

381. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Розв'язок задач згину пологих сферичних оболонок. *Прикл. механіка*. 1964. Т. 10, №. 4. С. 382–391.

382. Шевченко Ю. Н. Численные методы решения прикладных задач. К.: Наук. думка, 1986. 272 с.

383. Шевченко В. П. К решению задач статики пологих оболочек под действием локальных нагрузок. *Прикл. механика*. 1971. Т. 7, в. 6. С. 37–42.

384. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболо-

чек. *Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений*. Киев, 1998. С. 159–196.

385. Шевченко В. П. Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек произвольной кривизны при локальных воздействиях. *Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений*. Киев, 1998. С. 197–211.

386. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К построению уточненной теории пластин. *Инж. журнал*. 1964. Т. 4, в. 3. С. 504–509.

387. Шленев М. А. Асимптотический метод решения краевых задач теории плит И. Н. Веква. *Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин*. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. С. 269–289.

388. Шойхет Б. А. Одна задача теории изгиба толстых плит. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1973. № 3. С. 58–68.

389. Шульга Н. А. Изгиб тонкой плиты, ослабленной криволинейным отверстием, при нелинейном законе упругости. *Прикл. механика*. 1966. Т. 2, в. 4. С. 50–54.

390. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. К.: Наук. думка, 1980. 200 с.

391. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

392. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.

393. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2009. V. 89, № 4. P. 242–256.

394. Altenbach H., Eremeyev V. A., Naumenko K. On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2015. V. 95, №10. P. 1004–1011.

395. Arnold D. N., Falk R. S. Asymptotic analysis of the boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model. *SIAM. J. Mathematical Analysis*. 1999. V. 27. P. 486–514.

396. Aydogdu M. An equivalent single layer shear deformation plate theory with superposed shape functions for laminated composite plates. *Archives of Mechanics*. 2019. V. 71, № 3. P. 239–262.

397. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2011. V. 91, № 6. P. 458–467.

398. Bouazza M., Zenkour A. M., Benseddiq N. Effect of material composition on bending analysis of FG plates via a two-variable refined hyperbolic theory. *Archives of Mechanics*. 2018. V. 70, №2. P. 107–129.
399. Bhaskar K., Ganapathysaran N. Elasticity solution for a laminated orthotropic cylindrical shell subjected to a localized longitudinal shear force. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2002. V. 69, №5. P. 700–703.
400. Carrera E. Transverse normal stress effects in multilayered plates. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1999. V. 66, №4. P. 1004–1012.
401. Cicala P. Sulla teria elastica della plate sottile. *Giorn genio Civile*. 1959. V. 97, №4. P. 238–256.
402. Daouadj T.H., Adim B. Mechanical behaviour of FGM sandwich plates using a quasi-3D higher order shear and normal deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 61, №1. P. 49–63.
403. Fridrichs K. O. Kirhchoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Proc. Simp. Appl. Math.* New York, 1950. Elasticity 3 rd. 1950. V.3. P. 117–124.
404. Ghasemabadian M. A., Saidi A. R. Stability analysis of transversely isotropic laminated Mindlin plates with piezoelectric layers using a Levy-type solution. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62, №6. P. 675–693.
405. Girkmann K., R. Beer R. Anwendung der Vershaften Plattentheorie nach Eric. Reissner auf ortotropen Platten. *Oster. Ingr. Arch.* 1985. V. 12, №1–2. P. 102–110.
406. Gristchak V. S., Ganilowa O. A. Application of a Hybrid WKB – Galerkin Method in Control of the Dynamic Instability of a Piezolaminated Imperfect Column. *Technische Mechanik*. 2006. №26. P. 106–116.
407. Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2015. V. 95, №1. P. 77–90.
408. Jemielita G. Plate Theory Meanders. Warsaw: Publisher of the Warsaw University of Teshnology. 1991. 220 p.
409. Kumar R, Miglani A., Rani R. Analysis of micropolar porous thermoelastic circular plate by eigenvalue approach. *Archives of Mechanics*. 2018. V. 68, №6. P. 423–439.
410. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. On the use of sampling surfaces method for solution of 3D

elasticity problems for thick shells. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2012. V. 92, № 11-12. P. 910–920. DOI: 10.1002/zamm.201200028.

411. Kromm A. Uber die Randquerkrafte bei gestutzten Platten. *ZAMM*. 1955. V. 35. № 6/7. P. 38–44.

412. Librescu L. Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions a survey. *Composite structures*. 2000. V. 48. P. 1–17.

413. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation-Part 1: Homogeneous plates. *J. applied mechanics*. 1977. V. 44. P. 663–668.

414. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates. *J. applied mechanics*. 1977. V. 44. P. 669–676.

415. Maleki S., Tahani M. Non-linear analysis of moderately thick laminated plates and shell panels under thermomechanical loadings. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2012. V. 92. I. 8. P. 652–667.

416. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shell. *Quart. J. Appl. Math.* 1957. V. 14, №4. P. 52–57.

417. Noor A. K., Burton W., S., Bert S. C. Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.* 1996. V. 9, №3. P. 155–199.

418. Pagano N. I. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mater.* 1969. №3. P. 398–411.

419. Pagano N. I. Exact solutions for rectangular bidirectional composite sandwich plates. *J. Comp. Mater.* 1979. №4. P. 20–34.

420. Peradze J. On an iteration method of finding a solution of a nonlinear equilibrium problem for the Timoshenko plate. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2011. V. 91, № 12. P. 993–1001.

421. Polizzotto C. A class of shear deformable isotropic elastic plates with parametrically variable warping shapes. *J. of applied math. and mech.* 2018. V. 98, № 2. P. 195–221.

422. Reddy I. N., Robbins D. N. Theories and computational models for composite laminates. *Appl. Math. Rev.* 1994. 47, №6. P. 21–35.

423. Reiss E. A. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells. *Comm. Pure and Appl.* 1960. V. 13. P. 143–148.

424. Reiss E. A. Symmetric bending of thick circular plates. *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*,

1962. 10, № 4. P. 596–609.

425. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Phys.* 1944. 33. P. 184–191.

426. Reissner E. Finite Deflections of Sandwich Plates. *J. Aero. Sci.* 1948. V. 15, № 17. P. 435–440.

427. Reissner E. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. and Phys.* 1950. V. 29, № 2. P. 90–95.

428. Reissner E. Stress strain relations in the theory of thin elastic shells. *J. Math. and Phys.* 1952. V. 31, № 1. P. 32–42.

429. Reissner E. On the derivation of the theory of thin elastic shells. *J. Math. and Phys.* 1963. V. 42, № 4. P. 121–126.

430. Rudiger D. Die Verfahren von Ritz und Trefftz in der Reissnerschen Plattentheorie. *Oster. Ingr.-Arch.* 1960. V. 13, № 4. P. 257–263.

431. Rudiger D. Zur Theorie elastischer Schalen. *Ingr. – Arch.* 1959. 28. P. 281–288.

432. Salerno V. L., Goldberg M. A. Effect of shear deformation on the bending of rectangular plates. *J. Appl. Mech.* 1960. 27, № 1. P. 54–58.

433. Schafer W. M. Über eine Verfeinerung der Klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. *Zamm.* 1952. 32. P. 161–171.

434. Schneider P., Kienzler R., Böhm M. You have free access to this content Modeling of consistent second-order plate theories for anisotropic materials. *J. of applied mathematics and mechanics.* 2014. V. 94, № 1-2. P. 21–42.

435. Soler A. Higher order effects in thick rectangular elastic beam *Int. J. Solids and Struct.* 1968. V. 4, № 7. P. 723–739.

436. Stamm K. Witte H. Sandwichkonstruktionen. Wien, New York: Springer, 1974. 220 p.

437. Strinivas S., Rao A. K., Joga Rao C. Y. Flexure of Simple Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates. *ZAMM.* 1966. 49. P. 449–458.

438. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine and Journal of science.* 1921. V. 41. Ser. 6, № 245. P. 744–746.

439. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates,

strongly heterogeneous in the thickness direction. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2017. V. 97, № 3. P. 296–308.

440. Vakakis A., Manewitch L, Mikhlin Y., Pilipshuk V., Zevin A. Normal modes and localization in nonlinear systems. New York: Wiley, 1996. 552 p.

441. Vel Senthil S., Batra R. S. Analytical solution for rectangular thick laminated plates subjected to arbitrary boundary conditions. *AIAA J.* 1999. V. 37, № 11. P. 1464–1473.

442. Zelensky A. G. Method of solution equation system within the variant of mathematical theory of non-thin shallow shells. *International scientific journal. Фізико-математическі науки*. 2016. №7. P. 137–142. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р (Наук. бази даних: **Open Academic Journal Index, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, CiteFactor, ПИИЦ, Cosmos Impact Factor**).

443. Zelensky A. G. Mathematical Theory of Transversally Isotropic Shells of Arbitrary Thickness at Static Load. Materials Science Forum. *Actual problems of engineering mechanics*. Switzerland: Trans Tech Publications Ltd. 2019. V. 968. P. 496–510. **Scopus**. ISSN: 1662–9752, doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.496.

444. Zelensky A. G. The Method of Successive Approximations in the Mathematical theory of Shallow Shells of Arbitrary Thickness. *World Science, Multidisciplinary Scientific Edition, Physics and Mathematics*. 2019. V. 1, №11(51). P. 31–39. (Наукометричні бази даних: **RS Global, Google Scholar, Index Copernicus, Academia.edu, Library.ru, Biblioteka Narodowa, CiteFactor**). ISSN 2413–1032; DOI:https://doi.org/10.31435/rsglobal_ws/30112019/6764; <http://ws-conference.com/>.

445. Zelensky A. G. Analytical and Practical Development of Variant of Mathematical Theory of Shells of Small Curvature of Arbitrary Thickness. *New Stages of Development of Modern Science in Ukraine and eu Countries. Chapter “Physical and Mathematical Sciences”*. **Monograph. Riga, Latvia: “Baltija Publishing”, 2019. P. 308–328. ISBN:978-9934-588-15-0, DOI:<https://doi.org/10.30525/978-9934-588-15-0-63>.**

446. Zelensky A. G. Some theorems of Variant of Mathematical Theory of Plates and Shallow Shells of Arbitrary Thickness. Proceedings of the XX1 International Scientific and Practical Conference. *International Trends in Science and Technology. Multidisciplinary Scientific Edition*.

Physics and Mathematics. RS Global Sp. zO.O., Warsaw, Poland, January 31, 2020, P. 3–11. ISBN 978-83-956628-1-2. Indexed by: **RS Global, Academia.edu, Google Scholar**.

447. Zelensky Anatoly, Privarnikov Arkady. The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1). *Innovative scientific researches: european development trends and regional aspect. Chapter «Physical and Mathematical Sciences»*. **Collective monograph. Riga, Latvia: ‘Baltija Publishing’**, 2020. P. 221–255. ISBN: 978-9934-588-38-9, DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-588-38-9-6>.

448. Zelensky A. G. Development of a Variant of Mathematical Theory of Thick Transversal-isotropic Plates, *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*, 2020. Is. №11, Part 1. P. 27-41. ISSN 2567-5273, DOI: 10.30890/2567-5273.2020-11-01-041. Indexed in **IndexCopernicus** high impact factor(ICV:84.35). <http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit11-01-041>.

449. Zelensky A. An Option of Mathematical Theory of non-thin Elastic Plates and Shells of Low Curvature with Static Loading, *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*, Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам’яті академіка В. І. Моссаковського (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 342–343.

450. Zelensky A. G. Perturbation Method in the Mathematical Theory of Physically Nonlinear Plates of Arbitrary Thickness. Eurasioan Scientific Congress. *Abstracts of II International Scientific and Practical Conference*. Barselona, Spain, 24-25 February 2020. Barselona, 2020. P.225–229. ISBN 978–84–15927–31–0. <http://sci-conf.com.ua>.

451. Zhang Jianwu, Li Qi, Shu Yongping. On the refined first-order shear deformation plate theory of Karman tipe. *Appl. Math. and Mech.* Engl. Ed. 2000. V. 21, № 5. P. 529–536.

452. Zhavoronok S. A Vekua-type linear theory of thick elastic shells. *J. of applied mathematics and mechanics*. 2014. V. 94, № 1-2. P. 164–184.

453. Zimmer K. Ein Beitrag zur verbesserten Platten theorie. *Wiss Z. Techn. Univ. Dresden*. 1963. V.12, № 5. P.17–24.

ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури”

Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Зеленський Анатолій Григорович

УДК.539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН І

ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ПРИ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

ТОМ 2

(ДОДАТКИ)

01. 02. 04 – механіка деформівного твердого тіла

фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А. Г. Зеленський

Науковий консультант Приварников Аркадій Костянтинович,

докт. фіз.-мат. наук, професор

Дніпро – 2021

Додаток А

Транстропні однорідні пластини довільної товщини.

Коефіцієнти, ілюстрації, висновки

А.1. Коефіцієнти рівнянь

$$\begin{aligned}
 \beta_{111} &= \frac{h}{3}(d_0 - \frac{3}{70}d_{10}e_{31}); \beta_{112} = \frac{hG}{3}; \beta_{113} = -\frac{2}{h}l_{11}; \\
 \beta_{121} &= \frac{h}{3}(d_0v + G - \frac{3}{70}d_{10}e_{31}); \beta_{131} = -\frac{h}{70}d_{10}e_{33}; \beta_{133} = -\frac{2}{h}l_{13}; \beta_{141} = -\frac{h}{70}d_{10}e_{33}; \\
 \beta_{151} &= -\frac{2}{h}h_{11}; \beta_{161} = -(\frac{2}{h}h_{13} + \frac{hd_{10}q_{33}}{70}); \beta_{u1} = \frac{2}{21}hd_{10}; \beta_{221} = \frac{hG}{3}; \beta_{222} = \beta_{111}; \\
 \beta_{223} &= \beta_{113}; \beta_{231} = \beta_{131}; \beta_{242} = \beta_{141} = \beta_{131}; \beta_{243} = \beta_{133}; \beta_{251} = \beta_{151}; \quad (A.1) \\
 \beta_{331} &= \frac{h}{7}(d_0 + \frac{1}{15}d_{10}e_{33}); \beta_{332} = \frac{hG}{7}; \beta_{333} = -\frac{6}{7h}l_{33}; \beta_{341} = \frac{h}{7}(d_0v + G + \frac{1}{15}d_{10}e_{33}); \\
 \beta_{351} &= -\frac{6}{7h}h_{31}; \beta_{361} = \frac{1}{105}hd_{10}q_{33} - \frac{6}{7h}h_{33}; \beta_{u3} = \frac{1}{18}hd_{10}; \beta_{441} = \beta_{332}; \beta_{442} = \beta_{331}; \\
 \beta_{443} &= \beta_{333}; \beta_{451} = \beta_{351}; \beta_{461} = \beta_{361}; \beta_{551} = -h_{11}; \beta_{561} = -h_{13}; \\
 \beta_{w1} &= -1; \beta_{661} = \frac{1}{35}(7h_{13} - 3h_{33}); \beta_{662} = -\frac{3q_{33}}{35}; \beta_{w3} = -\frac{3}{7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \frac{1}{\Delta}(\beta_{351}\beta_{561} - \beta_{361}\beta_{551}); \lambda_{12} = \frac{1}{\Delta}\beta_{351}\beta_{662}; \lambda_{13} = \frac{1}{\Delta}(\beta_{351}\beta_{661} - \beta_{361}\beta_{561}); \\
 \lambda_{14} &= \frac{1}{\Delta}(\beta_{361}\beta_{w1} - \beta_{351}\beta_{w3}); \lambda_{31} = \frac{1}{\Delta}(\beta_{161}\beta_{551} - \beta_{151}\beta_{561}); \lambda_{32} = -\frac{1}{\Delta}\beta_{151}\beta_{662}; \quad (A.2) \\
 \lambda_{33} &= \frac{1}{\Delta}(\beta_{161}\beta_{561} - \beta_{151}\beta_{661}); \lambda_{34} = \frac{1}{\Delta}(\beta_{151}\beta_{w3} - \beta_{161}\beta_{w1}); \Delta = \beta_{151}\beta_{361} - \beta_{161}\beta_{351}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{114} &= \beta_{111}\lambda_{11} + \beta_{131}\lambda_{31}; \mu_{134} = \beta_{111}\lambda_{13} + \beta_{131}\lambda_{33}; \\
 \mu_{132} &= \beta_{113}\lambda_{13} + \beta_{111}\lambda_{12} + \beta_{133}\lambda_{33} + \beta_{131}\lambda_{32} + \beta_{161}; \mu_{12} = \beta_{u1} - (\beta_{111}\lambda_{14} + \beta_{131}\lambda_{34}); \\
 \mu_{10} &= \beta_{113}\lambda_{14} + \beta_{133}\lambda_{34}; \mu_{314} = \beta_{131}\lambda_{11} + \beta_{331}\lambda_{31}; \mu_{312} = \beta_{133}\lambda_{11} + \beta_{333}\lambda_{31} + \beta_{351}; \quad (A.3) \\
 \mu_{334} &= \beta_{131}\lambda_{13} + \beta_{331}\lambda_{33}; \mu_{332} = \beta_{133}\lambda_{13} + \beta_{131}\lambda_{12} + \beta_{333}\lambda_{33} + \beta_{331}\lambda_{32} + \beta_{361}; \\
 \mu_{330} &= \beta_{133}\lambda_{12} + \beta_{333}\lambda_{32}; \mu_{32} = \beta_{u3} - (\beta_{131}\lambda_{14} + \beta_{331}\lambda_{34}); \mu_{30} = \beta_{133}\lambda_{14} + \beta_{333}\lambda_{34}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1\varphi 1} &= \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{131} - \beta_{333}\beta_{111}); \lambda_{1\varphi 3} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{331} - \beta_{333}\beta_{131}); \\
\lambda_{1\psi 1} &= -\frac{1}{\Delta_u} \beta_{333}\beta_{112}; \lambda_{1\psi 3} = \frac{1}{\Delta_u} \beta_{133}\beta_{332}; \lambda_{1w 1} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{351} - \beta_{333}\beta_{151}); \\
\lambda_{1w 3} &= \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{361} - \beta_{333}\beta_{161}); \lambda_{1q} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{333}\beta_{u1} - \beta_{133}\beta_{u3}); \quad (\text{A.4}) \\
\lambda_{3\varphi 1} &= \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{111} - \beta_{113}\beta_{131}); \lambda_{3\varphi 3} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{131} - \beta_{113}\beta_{331}); \lambda_{3\psi 1} = \frac{1}{\Delta_u} \beta_{133}\beta_{112}; \\
\lambda_{3\psi 3} &= -\frac{1}{\Delta_u} \beta_{113}\beta_{332}; \lambda_{3w 1} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{151} - \beta_{113}\beta_{351}); \lambda_{3w 3} = \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{133}\beta_{161} - \beta_{113}\beta_{361}); \\
\lambda_{3q} &= \frac{1}{\Delta_u} (\beta_{113}\beta_{u3} - \beta_{133}\beta_{u1}); \Delta_u = \beta_{113}\beta_{333} - \beta_{133}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{111} &= h(d_0 - d_{10}e_{20}/10); \gamma_{112} = hG; \gamma_{121} = h(d_0\nu + G - d_{10}e_{20}/10); \\
\gamma_{131} &= -hd_{10}e_{22}/10; \gamma_{151} = -hd_{10}q_{22}/10; \gamma_{u0} = 3hd_{10}/20; \gamma_{331} = h(d_0 + d_{10}e_{22}/7)/5; \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{332} &= hG/5; \gamma_{333} = -6l_{22}/(5h); \gamma_{341} = h(G + d_0\nu + d_{10}e_{22}/7)/5; \gamma_{u2} = hd_{10}/10; \\
\gamma_{351} &= (-6h_{22}/h + hd_{10}q_{22}/7)/5; \gamma_{551} = -h_{22}/5; \gamma_{552} = -q_{22}/5; \gamma_{w2} = -7/10, \\
h_{11} &= \frac{27}{28}G'h; h_{13} = -\frac{1}{28}G'h; h_{15} = -\frac{1}{28}G'h; h_{31} = h_{33} = \frac{11}{6}G'h; h_{35} = -\frac{1}{2}G'h; \\
h_{51} &= h_{53} = h_{55} = \frac{143}{84}G'h; h_{22} = \frac{10}{7}G'h; h_{24} = -\frac{5}{21}G'h; h_{42} = h_{44} = \frac{11}{7}G'h; l_{11} = \frac{27}{14}G'; \\
l_{13} &= \frac{11}{7}G'; l_{31} = \frac{11}{3}G'; l_{33} = 22G'; l_{22} = \frac{60}{7}G'; l_{24} = \frac{110}{21}G'; l_{42} = \frac{66}{7}G'; l_{44} = \frac{220}{7}G'; \\
l_{10} &= l_{12} = l_{14} = l_{30} = l_{32} = l_{34} = l_{50} = l_{52} = l_{54} = l_{21} = l_{23} = l_{25} = l_{41} = l_{43} = l_{45} = 0; \\
l_{15} &= \frac{13}{14}G'; l_{35} = 13G'; l_{51} = \frac{143}{42}G'; l_{53} = \frac{143}{7}G'; l_{55} = \frac{715}{14}G'; q_{33} = -\frac{286}{3hd_{20}}; \\
q_{35} &= -\frac{130}{9hd_{20}}; q_{32} = q_{34} = q_{52} = q_{54} = q_{21} = q_{23} = q_{25} = q_{41} = q_{43} = q_{45} = 0; \quad (\text{A.6}) \\
q_{22} &= -\frac{594}{35hd_{20}}; q_{24} = -\frac{22}{5hd_{20}}; q_{42} = -\frac{1716}{35hd_{20}}; q_{44} = -\frac{858}{5hd_{20}}; q_{53} = -\frac{572}{3hd_{20}}; \\
q_{55} &= -\frac{2990}{9hd_{20}}; e_{31} = -\frac{143}{9}d_{30}; e_{33} = \frac{52}{9}d_{30}; e_{35} = \frac{25}{9}d_{30}; e_{3q} = -\frac{91}{9}; e_{51} = -\frac{286}{9}d_{30}; \\
e_{53} &= -\frac{91}{9}d_{30}; e_{55} = \frac{260}{9}d_{30}; e_{5q} = -\frac{325}{18}; e_{20} = -\frac{297}{35}d_{30}; e_{22} = \frac{44}{35}d_{30}; e_{24} = \frac{23}{35}d_{30}; \\
e_{40} &= -\frac{858}{35}d_{30}; e_{42} = -\frac{429}{35}d_{30}; e_{44} = \frac{572}{35}d_{30}; e_{2p} = -\frac{297}{70}; e_{4p} = -\frac{429}{35}; \\
d_{20} &= (1 - 2d_{10}\nu')/E'; d_{30} = d_{10}/d_{20}. \\
\gamma_{111} &= h\left(d_0 - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right); \gamma_{112} = hG; \gamma_{121} = h\left(G + d_0\nu - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{151} = \gamma_{161} = \gamma_{251} = \gamma_{261} &= -\frac{he_{22}d_{10}}{10}; \quad \gamma_{191} = \gamma_{1101} = \gamma_{291} = \gamma_{2101} = -\frac{he_{24}d_{10}}{10}; \\
\gamma_{1141} &= -\frac{hq_{22}d_{10}}{10}; \quad \gamma_{1161} = -\frac{hq_{24}d_{10}}{10}; \quad \gamma_{u0} = \frac{53}{700}hd_{10}; \quad \gamma_{221} = hG; \\
\gamma_{222} &= h\left(d_0 - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right); \quad \gamma_{2141} = -\frac{hq_{22}d_{10}}{10}; \quad \gamma_{2161} = -\frac{hq_{24}d_{10}}{10}; \\
\beta_{331} = \beta_{442} &= h\left(\frac{d_0}{3} - \frac{e_{31}d_{10}}{70}\right); \quad \beta_{332} = \frac{1}{3}hG; \quad \beta_{333} = \frac{2}{h}l_{11}; \\
\beta_{341} &= h\left(\frac{1}{3}d_0v + \frac{G}{3} - \frac{1}{70}e_{31}d_{10}\right); \quad \beta_{371} = \beta_{381} = \beta_{471} = \beta_{481} = -\frac{1}{70}he_{33}d_{10}; \\
\beta_{372} &= -\frac{2}{h}l_{13}; \quad \beta_{3111} = \beta_{3121} = \beta_{4111} = \beta_{4121} = -\frac{1}{70}he_{35}d_{10}; \quad \beta_{3112} = -\frac{2}{h}l_{15}; \\
\beta_{3131} &= -\frac{2}{h}h_{11}; \quad \beta_{3151} = -\frac{1}{70}hq_{33}d_{10} - \frac{2}{h}h_{13}; \quad \beta_{3171} = -\frac{1}{70}hd_{10}q_{35} - \frac{2}{h}h_{15}; \quad \beta_{u1} = \frac{1}{18}hd_{10}; \\
\beta_{441} &= \frac{1}{3}hG; \quad \beta_{443} = -\frac{2}{h}l_{11}; \quad \beta_{482} = -\frac{2}{h}l_{13}; \quad \beta_{4122} = -\frac{2}{h}l_{15}; \\
\beta_{4131} &= -\frac{2}{h}h_{11}; \quad \beta_{4151} = -\frac{1}{70}hd_{10}q_{33} - \frac{2}{h}h_{13}; \quad \beta_{4171} = -\frac{1}{70}hd_{10}q_{35} - \frac{2}{h}h_{15}; \\
\gamma_{551} &= \frac{1}{5}h\left(d_0 + \frac{d_{10}}{7}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right)\right); \quad \gamma_{552} = \frac{1}{5}hG; \quad \gamma_{553} = -\frac{6}{5h}l_{22}; \\
\gamma_{561} &= \frac{h}{5}\mathbf{G} + d_0v \left. \right\} \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right); \quad \gamma_{591} = \gamma_{5101} = \gamma_{691} = \gamma_{6101} = \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{24} - \frac{e_{44}}{6}\right); \\
\gamma_{592} &= -\frac{6l_{24}}{5h}; \quad \gamma_{5141} = \gamma_{6141} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{22} - \frac{q_{42}}{6}\right) - \frac{6h_{22}}{5h}; \\
\gamma_{5161} = \gamma_{6161} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{24} - \frac{q_{44}}{6}\right) - \frac{6h_{24}}{5h}; \quad \gamma_{661} = \frac{hG}{5}; \tag{A.7} \\
\gamma_{662} &= \frac{hd_0}{5} + \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right); \quad \gamma_{663} = -\frac{6l_{22}}{5h}; \quad \gamma_{6102} = -\frac{6l_{24}}{5h}; \quad \gamma_{u2} = \frac{11hd_{10}}{175}; \\
\beta_{771} = \beta_{882} &= \frac{hd_0}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{33}}{5} - \frac{e_{53}}{22}\right); \quad \beta_{772} = \frac{1}{7}hG; \quad \beta_{773} = -\frac{6l_{33}}{7h}; \\
\beta_{781} &= \frac{h(G + d_0v)}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{33}}{5} - \frac{e_{53}}{22}\right); \\
\beta_{7111} = \beta_{7121} = \beta_{8111} = \beta_{8121} &= \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{35}}{5} - \frac{e_{55}}{22}\right); \quad \beta_{7112} = -\frac{6l_{35}}{7h}; \\
\beta_{7131} &= -\frac{6h_{31}}{7h}; \quad \beta_{7151} = \beta_{8151} = \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{33}}{5} - \frac{q_{53}}{22}\right) - \frac{6h_{33}}{7h}; \\
\beta_{7171} = \beta_{8171} &= \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{35}}{5} - \frac{q_{55}}{22}\right) - \frac{6h_{35}}{7h}; \quad \beta_{u3} = -\frac{17hd_{10}}{396}; \quad \beta_{881} = \frac{1}{7}hG; \\
\beta_{883} &= -\frac{6l_{33}}{7h}; \quad \beta_{8122} = -\frac{6l_{35}}{7h}; \quad \beta_{8131} = -\frac{6h_{31}}{7h}; \\
\gamma_{991} = \gamma_{10102} &= \frac{hd_0}{9} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{44}}{11} - \frac{e_{24}}{10}\right); \quad \gamma_{992} = \frac{hG}{9}; \quad \gamma_{993} = \frac{-2l_{44}}{3h};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{9101} &= \frac{h}{9} \mathbf{G} + d_0 v \Bigg\} \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{44}}{11} - \frac{e_{24}}{10} \right); \quad \gamma_{9141} = \gamma_{10141} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{42}}{11} - \frac{q_{22}}{10} \right) - \frac{2h_{42}}{3h}; \\
\gamma_{9161} &= \gamma_{10161} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{44}}{11} - \frac{q_{24}}{10} \right) - \frac{2h_{44}}{3h}; \quad \gamma_{u4} = \frac{23hd_{10}}{700}; \quad \gamma_{10101} = \frac{hG}{9}; \\
\gamma_{10103} &= \frac{-2l_{44}}{3h}; \quad \beta_{11111} = \beta_{12122} = \frac{hd_0}{11} + \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{e_{55}}{13} - \frac{e_{35}}{14} \right); \quad \beta_{11112} = \frac{hG}{11}; \\
\beta_{11113} &= \frac{-6l_{55}}{11h}; \quad \beta_{11121} = \frac{h}{11} \mathbf{G} + d_0 v \Bigg\} \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{e_{55}}{13} - \frac{e_{35}}{14} \right); \quad \beta_{11131} = \frac{-6h_{51}}{11h}; \\
\beta_{12151} &= \beta_{11151} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{53}}{13} - \frac{q_{33}}{14} \right) - \frac{6h_{53}}{11h}; \quad \beta_{u5} = \frac{2hd_{10}}{99}; \\
\beta_{11171} &= \beta_{12171} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{55}}{13} - \frac{q_{35}}{14} \right) - \frac{6h_{55}}{11h}; \quad \beta_{12121} = \frac{hG}{11}; \quad \beta_{12123} = \frac{-6l_{55}}{11h}; \\
\beta_{12131} &= \frac{-6h_{51}}{11h}; \quad \beta_{13131} = -h_{11}; \quad \beta_{13151} = -h_{13}; \quad \beta_{13171} = -h_{15}; \quad \gamma_{w1} = 0; \quad \beta_{w1} = -1; \\
\gamma_{14141} &= -\frac{h_{22}}{5}; \quad \gamma_{14142} = -\frac{q_{22}}{5}; \quad \gamma_{14161} = -\frac{h_{24}}{5}; \quad \gamma_{14162} = -\frac{q_{24}}{5}; \quad \gamma_{w2} = -\frac{297}{350}; \\
\beta_{w2} &= 0; \quad \beta_{15151} = \frac{1}{5} \left(h_{13} - \frac{3}{7} h_{33} \right); \quad \beta_{15152} = -\frac{3q_{33}}{35}; \quad \beta_{15171} = \frac{1}{5} \left(h_{15} - \frac{3}{7} h_{35} \right); \\
\beta_{15172} &= -\frac{3}{35} q_{35}; \quad \gamma_{w3} = 0; \quad \beta_{w3} = -\frac{2}{3}; \quad \gamma_{16161} = \frac{1}{7} \left(\frac{3}{5} h_{24} - \frac{1}{3} h_{44} \right); \\
\gamma_{16162} &= \frac{1}{7} \left(\frac{3}{5} q_{24} - \frac{1}{3} q_{44} \right); \quad \gamma_{w4} = -\frac{11}{50}; \quad \beta_{w4} = 0; \quad \beta_{17171} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} h_{35} - \frac{1}{11} h_{55} \right); \\
\beta_{17172} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} q_{35} - \frac{1}{11} q_{55} \right); \quad \gamma_{w5} = 0; \quad \beta_{w5} = -\frac{13}{198}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{11} \beta_{13131} + A_{21} \beta_{13151} + A_{31} \beta_{13171} \Bigg\} \lambda_{12} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{21} \beta_{15152} + A_{31} \beta_{15172} \Bigg\} \\
\lambda_{13} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{11} \beta_{13151} + A_{21} \beta_{15151} + A_{31} \beta_{15171} \Bigg\} \lambda_{14} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{21} \beta_{15172} + A_{31} \beta_{17172} \Bigg\} \\
\lambda_{15} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{11} \beta_{13171} + A_{21} \beta_{15171} + A_{31} \beta_{17171} \Bigg\} \lambda_{16} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{11} \beta_{w1} + A_{21} \beta_{w3} + A_{31} \beta_{w5} \Bigg\} \\
\lambda_{31} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{12} \beta_{13131} + A_{22} \beta_{13151} + A_{32} \beta_{13171} \Bigg\} \lambda_{32} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{22} \beta_{15152} + A_{32} \beta_{15172} \Bigg\} \\
\lambda_{33} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{12} \beta_{13151} + A_{22} \beta_{15151} + A_{32} \beta_{15171} \Bigg\} \lambda_{34} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{22} \beta_{15172} + A_{32} \beta_{17172} \Bigg\} \quad (\text{A.8}) \\
\lambda_{35} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{12} \beta_{13171} + A_{22} \beta_{15171} + A_{32} \beta_{17171} \Bigg\} \lambda_{36} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{12} \beta_{w1} + A_{22} \beta_{w3} + A_{32} \beta_{w5} \Bigg\} \\
\lambda_{51} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{13} \beta_{13131} + A_{23} \beta_{13151} + A_{33} \beta_{13171} \Bigg\} \lambda_{52} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{23} \beta_{15152} + A_{33} \beta_{15172} \Bigg\} \\
\lambda_{53} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{13} \beta_{13151} + A_{23} \beta_{15151} + A_{33} \beta_{15171} \Bigg\} \lambda_{54} = -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{23} \beta_{15172} + A_{33} \beta_{17172} \Bigg\} \\
\lambda_{55} &= -\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{13} \beta_{13171} + A_{23} \beta_{15171} + A_{33} \beta_{17171} \Bigg\} \lambda_{56} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{A}_{13} \beta_{w1} + A_{23} \beta_{w3} + A_{33} \beta_{w5} \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{114} &= \beta_{331}\lambda_{11} + \beta_{371}\lambda_{31} + \beta_{3111}\lambda_{51}; \\
\mu_{134} &= \beta_{331}\lambda_{13} + \beta_{371}\lambda_{33} + \beta_{3111}\lambda_{53}; \\
\mu_{132} &= \beta_{333}\lambda_{13} + \beta_{331}\lambda_{12} + \beta_{372}\lambda_{33} + \beta_{371}\lambda_{32} + \beta_{3112}\lambda_{53} + \beta_{3111}\lambda_{52} + \beta_{3151}; \\
\mu_{154} &= \beta_{331}\lambda_{15} + \beta_{371}\lambda_{35} + \beta_{3111}\lambda_{55}; \\
\mu_{152} &= \beta_{333}\lambda_{15} + \beta_{331}\lambda_{14} + \beta_{372}\lambda_{35} + \beta_{371}\lambda_{34} + \beta_{3112}\lambda_{55} + \beta_{3111}\lambda_{54} + \beta_{3171}; \\
\mu_{12} &= \beta_{u1} - \beta_{331}\lambda_{16} - \beta_{371}\lambda_{36} - \beta_{3111}\lambda_{56}; \quad \mu_{10} = -\beta_{333}\lambda_{16} - \beta_{372}\lambda_{36} - \beta_{3112}\lambda_{56}; \\
\mu_{314} &= \beta_{371}\lambda_{11} + \beta_{771}\lambda_{31} + \beta_{7111}\lambda_{51}; \quad \mu_{312} = \beta_{372}\lambda_{11} + \beta_{773}\lambda_{31} + \beta_{7112}\lambda_{51} + \beta_{7131}; \\
\mu_{330} &= \beta_{372}\lambda_{12} + \beta_{773}\lambda_{32} + \beta_{7112}\lambda_{52}; \quad \mu_{334} = \beta_{371}\lambda_{13} + \beta_{771}\lambda_{33} + \beta_{7111}\lambda_{53}; \\
\mu_{332} &= \beta_{372}\lambda_{13} + \beta_{371}\lambda_{12} + \beta_{773}\lambda_{33} + \beta_{771}\lambda_{32} + \beta_{7112}\lambda_{53} + \beta_{7111}\lambda_{52} + \beta_{7151}; \quad (\text{A.9}) \\
\mu_{352} &= \beta_{372}\lambda_{15} + \beta_{371}\lambda_{14} + \beta_{773}\lambda_{35} + \beta_{771}\lambda_{34} + \beta_{7112}\lambda_{55} + \beta_{7111}\lambda_{54} + \beta_{7171}; \\
\mu_{354} &= \beta_{371}\lambda_{15} + \beta_{771}\lambda_{35} + \beta_{7111}\lambda_{55}; \quad \mu_{350} = \beta_{372}\lambda_{14} + \beta_{773}\lambda_{34} + \beta_{7112}\lambda_{54}; \\
\mu_{32} &= \beta_{u3} - \beta_{371}\lambda_{16} - \beta_{771}\lambda_{36} - \beta_{7111}\lambda_{56}; \quad \mu_{30} = -\beta_{372}\lambda_{16} - \beta_{773}\lambda_{36} - \beta_{7112}\lambda_{56}; \\
\mu_{514} &= \beta_{3111}\lambda_{11} + \beta_{7111}\lambda_{31} + \beta_{11111}\lambda_{31}; \quad \mu_{512} = \beta_{3112}\lambda_{11} + \beta_{7112}\lambda_{31} + \beta_{11113}\lambda_{31} + \beta_{11131}; \\
\mu_{534} &= \beta_{3111}\lambda_{13} + \beta_{7111}\lambda_{33} + \beta_{11111}\lambda_{53}; \\
\mu_{532} &= \beta_{3112}\lambda_{13} + \beta_{3111}\lambda_{12} + \beta_{7112}\lambda_{33} + \beta_{7111}\lambda_{32} + \beta_{11113}\lambda_{53} + \beta_{11111}\lambda_{52} + \beta_{11151}; \\
\mu_{530} &= \beta_{3112}\lambda_{12} + \beta_{7112}\lambda_{32} + \beta_{11113}\lambda_{52}; \quad \mu_{554} = \beta_{3111}\lambda_{15} + \beta_{7111}\lambda_{35} + \beta_{11111}\lambda_{55}; \\
\mu_{552} &= \beta_{3112}\lambda_{15} + \beta_{3111}\lambda_{14} + \beta_{7112}\lambda_{35} + \beta_{7111}\lambda_{34} + \beta_{11113}\lambda_{55} + \beta_{11111}\lambda_{54} + \beta_{11171}; \\
\mu_{550} &= \beta_{3112}\lambda_{14} + \beta_{7112}\lambda_{34} + \beta_{11113}\lambda_{54}; \quad \mu_{52} = \beta_{u5} - \beta_{3111}\lambda_{16} - \beta_{7111}\lambda_{36} - \beta_{11111}\lambda_{56}; \\
\mu_{50} &= -(\beta_{3112}\lambda_{16} + \beta_{7112}\lambda_{36} + \beta_{11113}\lambda_{56}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{8\Pi} &= \mu_{114}m_{18} - \mu_{314}m_{28} + \mu_{514}m_{38}; \\
K_{6\Pi} &= \mu_{114}m_{16} - \mu_{314}m_{26} - \mu_{312}m_{28} + \mu_{514}m_{36} + \mu_{512}m_{38}; \\
K_{4\Pi} &= \mu_{114}m_{14} - \mu_{314}m_{24} - \mu_{312}m_{26} + \mu_{514}m_{34} + \mu_{512}m_{36}; \\
K_{2\Pi} &= \mu_{114}m_{12} - \mu_{314}m_{22} - \mu_{312}m_{24} + \mu_{514}m_{32} + \mu_{512}m_{34}; \\
K_{0\Pi} &= \mu_{114}m_{10} - \mu_{312}m_{22} + \mu_{512}m_{32}; \\
m_{18} &= \mu_{334}\mu_{554} - \mu_{354}\mu_{534}; \quad m_{16} = \mu_{334}\mu_{552} + \mu_{332}\mu_{554} - \mu_{354}\mu_{532} - \mu_{352}\mu_{534}; \\
m_{14} &= \mu_{334}\mu_{550} + \mu_{332}\mu_{552} + \mu_{330}\mu_{554} - \mu_{354}\mu_{530} - \mu_{352}\mu_{532} - \mu_{350}\mu_{534}; \quad (\text{A.10}) \\
m_{12} &= \mu_{332}\mu_{550} + \mu_{330}\mu_{552} - \mu_{352}\mu_{530} - \mu_{350}\mu_{532}; \quad m_{10} = \mu_{330}\mu_{550} - \mu_{350}\mu_{530}; \\
m_{28} &= \mu_{134}\mu_{554} - \mu_{154}\mu_{534}; \quad m_{26} = \mu_{134}\mu_{552} + \mu_{132}\mu_{554} - \mu_{154}\mu_{532} - \mu_{152}\mu_{534}; \\
m_{24} &= \mu_{134}\mu_{550} + \mu_{132}\mu_{552} - \mu_{154}\mu_{530} - \mu_{152}\mu_{532}; \\
m_{22} &= \mu_{132}\mu_{550} - \mu_{152}\mu_{530}; \\
m_{38} &= \mu_{134}\mu_{354} - \mu_{154}\mu_{334}; \quad m_{36} = \mu_{134}\mu_{352} + \mu_{132}\mu_{354} - \mu_{154}\mu_{332} - \mu_{152}\mu_{334};
\end{aligned}$$

$$m_{34} = \mu_{134}\mu_{350} + \mu_{132}\mu_{352} - \mu_{154}\mu_{330} - \mu_{152}\mu_{332};$$

$$m_{32} = \mu_{132}\mu_{350} - \mu_{152}\mu_{330};$$

$$\begin{aligned} a_{\varphi 2p} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9161}\gamma_{w2} - \gamma_{9141}\gamma_{w4}); & a_{\varphi 20} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9141}\gamma_{1161} - \gamma_{9161}\gamma_{1141}); \\ b_{\varphi 22} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9141}\gamma_{14161} - \gamma_{9161}\gamma_{14141}); & b_{\varphi 20} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9141}\gamma_{14162} - \gamma_{9161}\gamma_{14142}); \\ c_{\varphi 22} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9141}\gamma_{16161} - \gamma_{9161}\gamma_{14161}); & c_{\varphi 20} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{9141}\gamma_{16162} - \gamma_{9161}\gamma_{14162}); \\ a_{\varphi 4p} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5141}\gamma_{w4} - \gamma_{5161}\gamma_{w2}); & a_{\varphi 40} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5161}\gamma_{1141} - \gamma_{5141}\gamma_{1161}); \\ b_{\varphi 42} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5161}\gamma_{14141} - \gamma_{5141}\gamma_{14161}); & b_{\varphi 40} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5161}\gamma_{14142} - \gamma_{5141}\gamma_{14162}); \\ c_{\varphi 42} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5161}\gamma_{14161} - \gamma_{5141}\gamma_{16161}); & c_{\varphi 40} &= \frac{1}{\Delta}(\gamma_{5161}\gamma_{14162} - \gamma_{5141}\gamma_{16162}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} d_{111} &= \gamma_{111} + \gamma_{151}a_{\varphi 20} + \gamma_{191}a_{\varphi 40}; & d_{112} &= \gamma_{112}; & d_{121} &= \gamma_{121} + \gamma_{151}a_{\varphi 20} + \gamma_{191}a_{\varphi 40}; \\ d_{131} &= \gamma_{151}b_{\varphi 22} + \gamma_{191}b_{\varphi 42}; & d_{132} &= \gamma_{151}b_{\varphi 20} + \gamma_{191}b_{\varphi 40} + \gamma_{1141}; & d_{141} &= \gamma_{151}c_{\varphi 22} + \gamma_{191}c_{\varphi 42}; \\ d_{142} &= \gamma_{151}c_{\varphi 20} + \gamma_{191}c_{\varphi 40} + \gamma_{1161}; & d_{221} &= \gamma_{221}; & d_{222} &= \gamma_{222} + \gamma_{261}a_{\varphi 20} + \gamma_{2101}a_{\varphi 40}; \\ d_{231} &= \gamma_{261}b_{\varphi 22} + \gamma_{2101}b_{\varphi 42}; & d_{232} &= \gamma_{261}b_{\varphi 20} + \gamma_{2101}b_{\varphi 40} + \gamma_{2141}; & d_{241} &= \gamma_{261}c_{\varphi 22} + \gamma_{2101}c_{\varphi 42}; \\ d_{242} &= \gamma_{261}c_{\varphi 20} + \gamma_{2101}c_{\varphi 40} + \gamma_{2161}; & d_{331} &= \gamma_{551}b_{\varphi 22} + \gamma_{591}b_{\varphi 42}; \\ d_{332} &= \gamma_{553}b_{\varphi 22} + \gamma_{551}b_{\varphi 20} + \gamma_{592}b_{\varphi 42} + \gamma_{591}b_{\varphi 40} + \gamma_{5141}; & d_{333} &= \gamma_{553}b_{\varphi 20} + \gamma_{592}b_{\varphi 40}; \\ d_{341} &= \gamma_{551}c_{\varphi 22} + \gamma_{591}c_{\varphi 42}; & d_{342} &= \gamma_{553}c_{\varphi 22} + \gamma_{551}c_{\varphi 20} + \gamma_{592}c_{\varphi 42} + \gamma_{591}c_{\varphi 40} + \gamma_{5161}; \\ d_{343} &= \gamma_{553}c_{\varphi 20} + \gamma_{592}c_{\varphi 40}; & d_{3p0} &= -(\gamma_{553}a_{\varphi 2p} + \gamma_{592}a_{\varphi 4p}); \\ d_{3p2} &= \gamma_{u2} - \gamma_{551}a_{\varphi 2p} - \gamma_{591}a_{\varphi 4p}; & d_{441} &= \gamma_{591}c_{\varphi 22} + \gamma_{991}c_{\varphi 42}; \\ d_{442} &= \gamma_{592}c_{\varphi 22} + \gamma_{591}c_{\varphi 20} + \gamma_{993}c_{\varphi 42} + \gamma_{991}c_{\varphi 40} + \gamma_{9161}; & d_{443} &= \gamma_{592}c_{\varphi 20} + \gamma_{993}c_{\varphi 40}; \\ d_{4p2} &= \gamma_{u4} - \gamma_{591}a_{\varphi 2p} - \gamma_{991}a_{\varphi 4p}; & d_{4p0} &= -(\gamma_{592}a_{\varphi 2p} + \gamma_{993}a_{\varphi 4p}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} u_{0mn} &= \sum_{j=1}^3 b_{ujmn} F_{jrmn}; & v_{0mn} &= \sum_{j=1}^3 b_{vjmn} F_{jrmn}; & w_{2mn} &= \sum_{j=1}^3 b_{jmn} F_{jrmn}; \\ b_{u1mn} &= \alpha_m^2(\alpha_\beta n_3 - \alpha_\beta^2 n_1 - n_5) + \beta_n^2(\alpha_\beta n_4 - \alpha_\beta^2 n_2 - n_6); \\ b_{u2mn} &= -\alpha_m \beta_n [\alpha_\beta^2(n_1 - n_2) - \alpha_\beta(n_3 - n_4) + n_5 - n_6]; & b_{u3mn} &= \gamma_{112} \alpha_\beta \alpha_m (\delta_{03} n_4 - \delta_{02} \alpha_\beta); \\ b_{v1mn} &= b_{u2mn}; & b_{v2mn} &= \alpha_m^2(-n_2 \alpha_\beta^2 + n_4 \alpha_\beta - n_6) + \beta_n^2(-n_1 \alpha_\beta^2 + n_3 \alpha_\beta - n_5); \\ b_{v3mn} &= \gamma_{112} \alpha_\beta \beta_n (\delta_{03} - \delta_{02} \alpha_\beta); & b_{1mn} &= \gamma_{112} \alpha_\beta \alpha_m (\delta_{05} \alpha_\beta - \delta_{06}); \\ b_{2mn} &= \gamma_{112} \alpha_\beta \beta_n (\delta_{05} \alpha_\beta - \delta_{06}); & b_{3mn} &= n_7 \alpha_\beta^2. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

А.2. Ілюстрації компонент НДС у вигляді таблиць і графіків

Таблиця А.1

Циліндричний згин ізотропної пластини при кососиметричному навантаженні
 $(\nu = 0,3; p_{mm}/q_{mm} = 0; \tilde{\sigma}_x(x, z = -h/2); W(x, z = 0), m = 1)$

Теорії	$h/a = 1$				$h/a = 0,2$			
	$\tilde{\sigma}_x$	Δ_t %	\tilde{W}	Δ_t %	$\tilde{\sigma}_x$	Δ_t %	\tilde{W}	Δ_t %
Точний розв'язок	0,8737	-	-0,3508	-	15,402	-	-77,043	-
За теорією Рейснера [425]	0,6079	30,4	-0,3808	8,55	15,198	1,32	-76,783	0,34
За теорією [12] С.Амбарцумяна	0,8508	2,62	-0,3808	8,55	15,441	0,25	-76,783	0,34
Друге наближення за ЕАМ [288]	0,8566	1,96	-0,3609	2,88	15,401	0,01	-77,046	0,00
Третє наближення за ЕАМ [288]	0,8723	0,16	-0,3587	2,25	15,401	0,01	-77,044	0,00
За НК13 ВМТ	0,8527	2,40	-0,3529	0,60	15,401	0,01	-77,046	0,00
За НК135 ВМТ	0,8732	0,06	-0,3507	0,03	15,402	0,00	-77,043	0,00

Таблиця А.2

Компоненти напружень $\tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xz}$ квадратної трансропної пластини
 $(h/a = 0,5; m = n = 1; G'/G = 0,1; E'/E = 1)$

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_z$			$\tilde{\sigma}_{xz}$		
	$\nu' = \nu = 0,3$	$\nu' = 0; \nu = 0,3$	Δ %	$\nu' = \nu = 0,3$	$\nu' = 0; \nu = 0,3$	Δ %
0,5	-0,5000	-0,5000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
	-1,0000	-1,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
0,25	-0,2952	-0,2946	0,20	-0,3634	-0,3632	0,06
	-0,7905	-0,7895	0,13	-0,3696	-0,3699	0,08
0,00	0,0000	0,0000	0,00	-0,3801	-0,3790	0,29
	-0,4927	-0,4922	0,10	-0,3801	-0,3790	0,29
-0,25	0,2952	0,2946	0,20	-0,3634	-0,3632	0,06
	-0,2001	-0,2004	0,15	-0,3571	-0,3565	0,17
-0,5	0,5000	0,5000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,00

Таблиця А.3

Компоненти напружень $\tilde{\sigma}_z$, $\tilde{\sigma}_{xz}$ квадратної трансформованої пластини
($h/a = 0,2$; $m = n = 1$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_z$			$\tilde{\sigma}_{xz}$		
	$\nu' = \nu = 0,3$	$\nu' = 0; \nu = 0,3$	$\Delta \%$	$\nu' = \nu = 0,3$	$\nu' = 0; \nu = 0,3$	$\Delta \%$
0,5	-0,5000	-0,5000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
	-1,0000	-1,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
0,25	-0,3283	-0,3279	0,12	-0,9087	-0,9089	0,02
	-0,8280	-0,8276	0,05	-0,9100	-0,9103	0,03
0,00	0,0000	0,0000	-	-1,1090	-1,1069	0,19
	-0,4995	-0,4994	0,02	-1,1090	-1,1069	0,19
-0,25	0,3283	0,3279	0,12	-0,9087	-0,9089	0,02
	-0,1714	-0,1717	0,17	-0,9075	-0,9076	0,01
-0,5	0,5000	0,5000	0,00	0,0000	0,0000	0,00
	0,0000	0,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,00

Таблиця А.4

Компоненти НДС квадратної ізотропної однорідної пластини
($h/a = 1$; $\nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$)

Розв'язок	z/h	$\tilde{\sigma}_x$	$\Delta_t \%$	$\tilde{\sigma}_z$	$\Delta_t \%$	$\tilde{\sigma}_{xz}$	$\Delta_t \%$	\tilde{W}	$\Delta_t \%$
Точний розв'язок	0	0	-	0	-	-0,1883	-	-0,1282	-
	-0,25	0,0673	-	0,2967	-	-0,1862	-	-0,1618	-
	-0,5	0,4760	-	0,5	-	0	-	-0,2343	-
Теорія Рейснера (НК1)	-	0	-	0	-	-0,2387	26,8	-0,1748	36,3
	-	0,2063	-	0,3438	15,9	-0,1791	-	-0,1748	-
	-	0,3323	30,2	0,5	-	0	-	-0,1748	25,4
За НК13 ВМТ	-	0	-	0	-	-0,1852	1,65	-0,1295	1,01
	-	0,0651	-	0,2964	0,10	-0,1891	-	-0,1598	-
	-	0,4440	6,72	0,5	-	0	-	-0,2508	7,04
За НК135 ВМТ	-	0	-	0	-	-0,1881	0,11	-0,1278	0,31
	-	0,0670	-	0,2967	0,00	-0,1861	-	-0,1617	-
	-	0,4743	0,36	0,5	-	0	-	-0,2372	1,24
За ВП Ху-Вашіцу (у [310])	-	0	-	0	-	-0,1810	3,88	-0,1336	4,21
	-	0,0483	-	0,2925	1,42	-0,1902	-	-0,1579	-
	-	0,4924	3,45	0,5	-	0,0000	-	-0,2310	1,41
За ВП Лагранжа (у [310])	-	0,0000	-	0,0000	-	-0,1997	6,05	-0,1323	3,20
	-	0,0314	-	0,2102	29,2	-0,1693	-	-0,1562	-
	-	0,5287	11,1	0,5000	-	-0,0787	-	-0,2280	2,69

Таблиця А.5

Компоненти НДС квадратної однорідної ізотропної пластини
 $(h/a = 1/3; \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn} / q_{mn} = 1)$

Теорії	Напруження		Прогини	
	$\tilde{\sigma}_x (z = h/2)$	$\Delta_t \%$	$\tilde{W} (z = 0)$	$\Delta_t \%$
Точний розв'язок	-2,124	-	-3,491	-
Класична теорія	-1,778	16,3	-2,270	35,0
За теорією С. Амбарцумяна [12]	-1,930	9,13	-3,693	5,79
За теорією В. Піскунова і др. [282]	-2,045	3,72	-3,682	5,47
За теорією Х. Муштарі [254]	-2,090	1,60	-3,560	1,98
За теорією В. Піскунова, В. Присяжнюка [303]	-2,118	0,28	-3,500	0,26
За НК01 ВМТ	-2,086	1,79	-3,591	2,86
За НК0-3 ВМТ	-2,120	0,19	-3,493	0,06
За НК0-5 ВМТ	-2,124	0,00	-3,491	0,00

Таблиця А.6

Компоненти НДС квадратної трансропної пластини
 $(h/a = 0,5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn} / q_{mn} = 0 / p_{mn} / q_{mn} = 1)$

z/h	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТТ	Δ_{t5}	Δ_{t3}	Δ_{t1}	Δ_{pq}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,9250 -1,098	-1,587 -1,692	-1,889 -2,016	-1,951 -2,083	3,18 3,22	18,7 18,8	52,6 44,3	6,34 -
0	0 -0,1725	0 -0,0582	0 -0,0620	0 -0,0627	- -	- -	- -	- -
-0,5	0,9250 0,7525	1,587 1,481	1,889 1,761	1,951 1,820	- 3,24	- 18,6	- 58,7	7,2 -
	\tilde{W}							
0,5	-6,726 -6,726	-6,337 -6,564	-6,277 -6,506	-6,260 -6,486	0,27 0,31	1,23 1,20	7,44 3,70	3,48 -
0	-6,726 -6,726	-6,250 -6,250	-6,225 -6,225	-6,226 -6,226	0,02 -	0,39 -	8,03 -	- -
-0,5	-6,726 -6,726	-6,337 -6,109	-6,277 -6,049	-6,260 -6,035	- 0,23	- 1,23	- 11,4	3,73 -

Таблиця А.7

Компоненти НДС квадратної трансформованої пластини
 ($h/a = 0,2$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0/p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТТ	Δ_{t5}	Δ_{t3}	Δ_{t1}	Δ_{pq}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-5,074 -5,247	-6,466 -6,555	-6,589 -6,680	-6,593 -6,685	0,06 0,07	1,93 1,94	23,4 21,5	1,38 -
0	0 -0,1725	0 -0,0679	0 -0,0681	0 -0,0685	- -	- -	- -	- -
-0,5	5,074 4,902	6,466 6,377	6,589 6,498	6,593 6,502	- 0,06	- 1,92	- 24,6	1,40 -
z/h	\tilde{W}							
0,5	-56,75 -56,75	-55,26 -55,49	-55,16 -55,38	-55,15 -55,38	0,02 0,00	0,20 0,20	2,90 2,47	0,42 -
0	-56,75 -56,75	-55,71 -55,71	-55,70 -55,70	-55,70 -55,70	0,00 -	0,02 -	1,89 -	- -
-0,5	-56,75 -56,75	-55,26 -55,04	-55,16 -54,93	-55,15 -54,92	- 0,02	- 0,22	- 3,33	0,42 -

Таблиця А.8

Компоненти НДС квадратної ізотропної пластини
 ($h/a = 0,5$; $\nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0/p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	КТ	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР	Δ_{t5} %	Δ_{t3} %	Δ_{t1} %	Δ_{pq} %
	$\tilde{\sigma}_x$								
0,5	-0,7903 -0,7903	-0,9250 -1,098	-1,013 -1,190	-1,018 -1,205	-1,019 -1,206	0,10 0,08	0,59 1,33	9,22 8,96	15,5 -
0	0 0	0 -0,1725	0 -0,0186	0 -0,0200	0 -0,0219	- -	- -	- -	- -
-0,5	0,7903 0,7903	0,9250 0,7525	1,013 0,8350	1,018 0,8323	1,019 0,8319	- 0,05	- 0,37	- 9,54	22,5 -
z/h	\tilde{W}								
0,5	-0,4485 -0,4485	-1,036 -1,036	-1,014 -1,242	-0,9946 -1,217	-0,9947 -1,216	0,01 0,08	1,94 2,14	4,15 14,8	18,2 -
0	-0,4485 -0,4485	-1,036 -1,036	-0,9699 -0,9699	-0,9675 -0,9675	-0,9683 -0,9683	0,08 -	0,17 -	6,99 -	- -
-0,5	-0,4485 -0,4485	-1,036 -1,036	-1,014 -0,7861	-0,9946 -0,7720	-0,9947 -0,7732	- 0,16	- 1,67	- 34,0	28,6 -

Таблиця А.9

Компоненти НДС квадратної ізотропної пластини
 ($h/a = 0,2$; $\nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	КТ	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР	Δ_{t5} %	Δ_{t3} %	Δ_{t1} %	Δ_{pq} %
	$\tilde{\sigma}_x$								
0,5	-4,940	-5,074	-5,148	-5,148	-5,148	0,00	0,00	1,44	1,83
	-4,940	-5,247	-5,243	-5,244	-5,244	0,00	0,02	0,06	-
0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
	0,0000	-0,1725	-0,0646	-0,0646	-0,0647	-	-	-	-
-0,5	4,940	5,074	5,148	5,149	5,148	-	-	-	1,88
	4,940	4,902	5,052	5,053	5,053	0,00	0,02	2,99	-
$\frac{z}{h}$	КТ	М1 М01	М13 М0-3	М135 М0-5	ТР	Δ_{t5} %	Δ_{t3} %	Δ_{t1} %	Δ_{pq} %
	\tilde{W}								
0,5	-17,52	-21,19	-20,41	-20,39	-20,39	0,00	0,10	3,92	1,07
	-17,52	-21,19	-20,64	-20,62	-20,61	0,05	0,15	2,81	-
0	-17,52	-21,19	-20,99	-20,98	-20,98	0,00	0,05	1,00	-
	-17,52	-21,19	-20,99	-20,98	-20,98	-	-	-	-
-0,5	-17,52	-21,19	-20,41	-20,39	-20,39	-	-	-	1,14
	-17,52	-21,19	-20,18	-20,16	-20,16	0,00	0,10	5,11	-

Таблиця А.10

Компоненти НДС квадратної трансропної пластини
 ($h/a = 0,5$; $G'/G = 1$; $E'/E = 10$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР
0,5	-0,8038	-0,9574	-0,9658	-0,9662	-1,07	-1,070	-1,065	-1,065
	-0,8211	-0,9758	-0,9856	-0,9857	-1,076	-1,092	-1,090	-1,090
0	0	0	0	0	-1,076	-1,061	-1,061	-1,062
	-0,0173	-0,0020	-0,0024	-0,0023	-1,076	-1,061	-1,061	-1,062
-0,5	0,8038	0,9574	0,9658	0,9662	-1,076	-1,070	-1,065	-1,065
	0,7866	0,9389	0,9461	0,9467	-1,076	-1,042	-1,040	-1,041

Таблиця А.11

Компоненти НДС квадратної трансропної пластини ($h/a = 0,5$;
 $G'/G = 0,1$; $E'/E = 0,1$; $\nu' = 0,1$; $\nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	HK1 HK01	HK13 HK0-3	HK135 HK0-5	TP	HK1 HK01	HK13 HK0-3	HK135 HK0-5	TP
0,5	-1,239	-1,837	-2,172	-2,235	-6,621	-6,944	-6,767	-6,699
	-1,814	-2,366	-2,892	-3,011	-6,621	-9,040	-8,866	-8,770
0	0	0	0	0	-6,621	-5,777	-5,740	-5,743
	-0,5750	-0,0626	-0,1257	0,1111	-6,621	-5,777	-5,740	-5,743
-0,5	1,239	1,837	2,172	2,235	-6,621	-6,944	-6,767	-6,699
	0,6643	1,308	1,451	1,459	-6,621	-4,849	-4,669	-4,627

Таблиця А.12

Компоненти НДС квадратної ізотропної пластини
($h/a = 0,1$; $G'/G = 1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 9$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	KT	HK1 HK01	HK13 HK0-3	HK135 HK0-5	TP	Δ_{t5} %	Δ_{t3} %	Δ_{t1} %	Δ_{pq} %
	$\tilde{\sigma}_x$								
0,5	-0,2439	-0,3780	-0,4872	-0,5108	-0,5119	0,21	4,83	26,2	38,2
	-0,2439	-0,5511	-0,7438	-0,8282	-0,8287	0,06	10,2	33,6	-
0	0	0	0	0	0	-	-	-	-
	0,0000	-0,1725	0,0460	0,0318	0,0274	-	-	-	-
-0,5	0,2439	0,3786	0,4872	0,5108	0,5119	-	-	-	162
	0,2439	0,2061	0,2305	0,1935	0,1951	0,82	18,1	5,64	-
z/h	\tilde{W}								
0,5	-0,0427	-0,2239	-0,2944	-0,2791	-0,2769	0,79	6,32	19,1	40,9
	-0,0427	-0,2239	-0,4876	-0,4827	-0,4682	3,10	4,14	52,2	-
0,0	-0,0427	-0,2239	-0,1766	-0,1747	-0,1751	0,23	0,86	27,9	-
	-0,0427	-0,2239	-0,1766	-0,1747	-0,1751	-	-	-	-
-0,5	-0,0427	-0,2239	-0,2944	-0,2791	-0,2769	-	-	-	224
	-0,0427	-0,2239	-0,1013	-0,0754	-0,0855	11,8	18,5	162	-

Таблиця А.13

Компоненти НДС квадратної транстропної пластини

 $(h/a = 0,1; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 9; p_{mn}/q_{mn} = 0/ p_{mn}/q_{mn} = 1)$

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР	НК1 НК01	НК13 НК0-3	НК135 НК0-5	ТР
0,5	-0,3786	-0,6304	-0,8975	-1,057	-1,980	-1,881	-1,847	-1,831
	-0,5511	-0,7395	-1,0674	-1,240	-1,980	-2,102	-2,076	-2,050
0	0	0	0	0	-1,980	-1,761	-1,737	-1,735
	-0,1725	-0,0522	-0,0647	-0,0597	-1,980	-1,761	-1,737	-1,735
-0,5	0,3786	0,6304	0,8975	1,057	-1,980	-1,881	-1,847	-1,831
	0,2061	0,5212	0,7276	0,8745	-1,980	-1,660	-1,618	-1,611

Таблиця А.14

Залежність $\tilde{\sigma}_x$ на верхній лицевій площині
квадратної ізотропної пластини від a/h і m

m	a/h	$\tilde{\sigma}_x$			
		КТ	НК13	НК135	ТР
1	1	-0,1976	-0,4440	-0,4743	-0,4760
	2	-0,7903	-1,013	-1,018	-1,019
	5	-4,940	-5,148	-5,149	-5,152
	10	-19,76	-19,96	-19,96	-20,02
5	2	-0,0316	-0,2134	-0,3501	-0,4002
	5	-0,1976	-0,4440	-0,4743	-0,4760
	10	-0,7903	-1,013	-1,018	-1,019
	20	-3,161	-3,371	-3,373	-3,373
9	2	-0,0098	-0,1041	-0,2267	-0,4000
	5	-0,0610	-0,2890	-0,3864	-0,4035
	10	-0,2439	-0,4872	-0,5108	-0,5119
	20	-0,9757	-1,195	-1,200	-1,200

Таблиця А.15

Залежність \tilde{W} на верхній лицевій площині
квадратної ізотропної пластини від a/h і m

m	a/h	\tilde{W}			
		КТ	НК13	НК135	ТР
1	1	-0,0280	-0,2508	-0,2372	-0,2343
	2	-0,4485	-1,014	-0,9946	-0,9947
	5	-17,52	-20,41	-20,39	-20,41
	10	-280,3	-291,5	-291,5	-292,3
5	2	-0,0007	-0,0738	-0,0899	-0,0820
	5	-0,0280	-0,2508	-0,2372	-0,2343
	10	-0,4485	-1,014	-0,9946	-0,9946
	20	-7,176	-9,071	-9,051	-9,054
9	2	-0,0001	-0,0271	-0,0447	-0,0455
	5	-0,0027	-0,1173	-0,1220	-0,1145
	10	-0,0427	-0,2944	-0,2791	-0,2769
	20	-0,6836	-1,353	-1,334	-1,334

Таблиця А.16

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для квадратної пластини ($E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $z/h = 0,5$;

$p_{mn}/q_{mn} = 0$; в чисельнику – за НК13, в знаменнику – точні)

h/a	$G'/G =$ =1	Δ %	$G'/G =$ =1/2	Δ %	$G'/G =$ =1/10	Δ %	$G'/G =$ =1/50	Δ %
1/2	-1,013	0,59	-1,139	2,40	-1,587	18,7	-1,910	50,7
	-1,019		-1,167		-1,951		-3,877	
1/5	-5,148	0,04	-5,322	0,09	-6,466	1,93	-9,121	15,8
	-5,150		-5,327		-6,593		-10,83	
1/10	-19,96	0,00	-20,15	0,00	-21,53	0,19	-26,87	2,86
	-19,96		-20,15		-21,57		-27,66	
1/20	-79,24	0,00	-79,42	0,00	-80,88	0,01	-87,67	0,33
	-79,24		-79,42		-80,89		-87,96	

Таблиця А.17

Значення \tilde{W} для квадратної пластини ($E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $z/h = 0,5$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$; в чисельнику – за НК13, в знаменнику – точні)

h/a	$G'/G = 1$	Δ %	$G'/G = 1/2$	Δ %	$G'/G = 1/10$	Δ %	$G'/G = 1/50$	Δ %
1/2	-1,014	1,94	-1,632	1,75	-6,337	1,23	-29,05	2,22
	-0,9947		-1,604		-6,260		-28,42	
1/5	-20,41	0,00	-24,35	0,12	-55,26	0,20	-202,6	0,35
	-20,41		-24,32		-55,15		-201,9	
1/10	-291,5	0,00	-307,27	0,01	-432,9	0,02	-1046,5	0,03
	-291,5		-307,23		-432,8		-1046,2	
1/20	-4529	0,00	-4592	0,00	-5097	0,00	-7608	0,01
	-4529		-4592		-5097		-7607	

Таблиця А.18

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для квадратної пластини ($E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$;

$p_{mn}/q_{mn} = 1$; в чисельнику – за НК0-3, в знаменнику – точні)

h/a	z/h	$G'/G = 1$	Δ %	$G'/G = 1/2$	Δ %	$G'/G = 1/10$	Δ %	$G'/G = 1/50$	Δ %
1/2	0,5	-1,190	1,33	-1,296	3,14	-1,692	18,8	-1,993	49,7
		-1,206		-1,338		-2,083		-3,959	
	-0,5	0,8350	0,37	0,9828	1,22	1,481	18,6	1,828	51,3
		0,8319		0,9949		1,820		3,754	
1/5	0,5	-5,243	0,04	-5,417	0,09	-6,555	1,94	-9,202	15,7
		-5,245		-5,422		-6,685		-10,91	
	-0,5	5,052	0,04	5,228	0,08	6,377	1,92	9,041	15,8
		5,054		5,232		6,502		10,74	
1/10	0,5	-20,05	0,00	-20,23	0,00	-21,61	0,18	-26,95	2,81
		-20,05		-20,23		-21,65		-27,73	
	-0,5	19,88	0,00	20,07	0,00	21,45	0,19	26,79	2,86
		19,88		20,07		21,49		27,58	
1/20	0,5	-79,32	0,00	-79,50	0,00	-80,96	0,00	-87,75	0,32
		-79,32		-79,50		-80,96		-88,03	
	-0,5	79,16	0,00	79,35	0,00	80,81	0,00	87,60	0,32
		79,16		79,35		80,81		87,88	

Таблиця А.19

Значення \tilde{W} для квадратної пластини ($E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$;

$p_{mn}/q_{mn} = 1$; в чисельнику – за НК0-3, в знаменнику – точні)

h/a	z/h	$G'/G = 1$	Δ %	$G'/G = 1/2$	Δ %	$G'/G = 1/10$	Δ %	$G'/G = 1/50$	Δ %
1/2	0,5	-1,242	2,15	-1,860	1,81	-6,564	1,20	-29,28	2,20
		-1,210		-1,827		-6,486		-28,65	
	-0,5	-0,7861	1,67	-1,404	1,67	-6,109	1,23	-28,83	2,27
		-0,7732		-1,381		-6,035		-28,19	
1/5	0,5	-20,64	0,00	-24,58	0,16	-55,49	0,22	-202,9	0,40
		-20,64		-24,54		-55,38		-202,1	
	-0,5	-20,18	0,00	-24,12	0,19	-55,04	0,22	-202,4	0,35
		-20,18		-24,09		-54,92		-201,7	
1/10	0,5	-291,7	0,00	-307,5	0,00	-433,1	0,02	-1047	0,10
		-291,7		-307,5		-433,0		-1046	
	-0,5	-291,3	0,00	-307,0	0,00	-432,7	0,02	-1046,3	0,03
		-291,3		-307,0		-432,6		-1046,0	
1/20	0,5	-4529	0,00	-4592	0,00	-5097	0,00	-7608	0,013
		-4529		-4592		-5097		-7607	
	-0,5	-4529	0,00	-4592	0,00	-5097	0,00	-7607	0,000
		-4529		-4592		-5097		-7607	

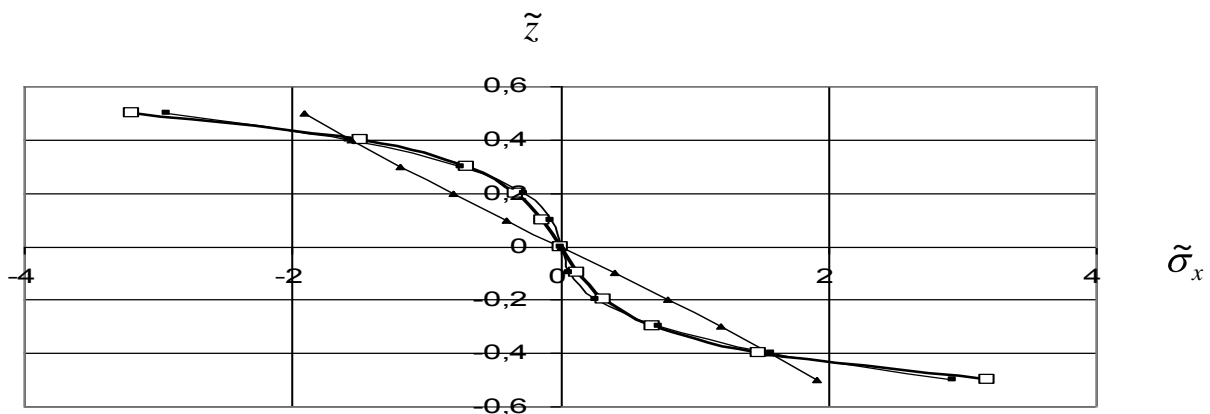


Рис.А.1. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)

($h/a = 1/3$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$).

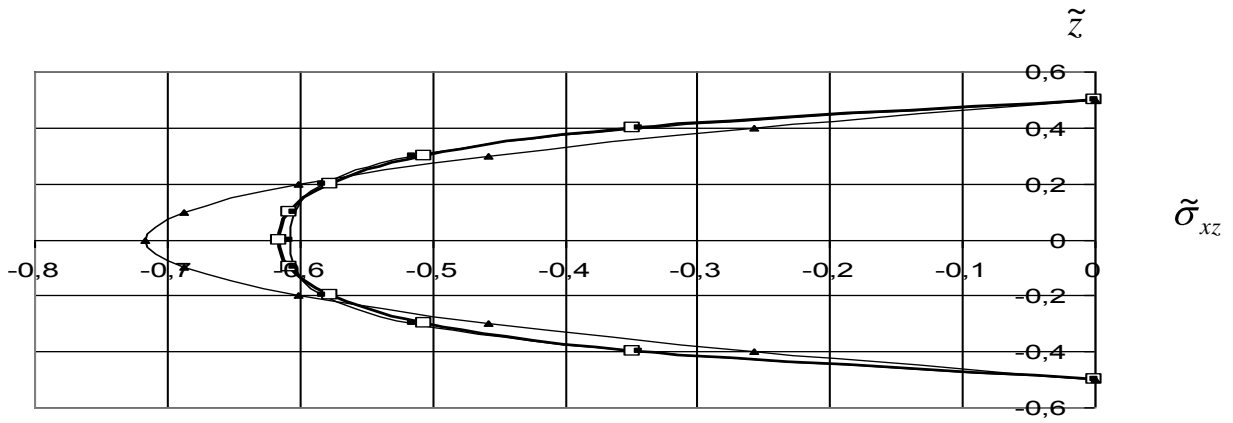
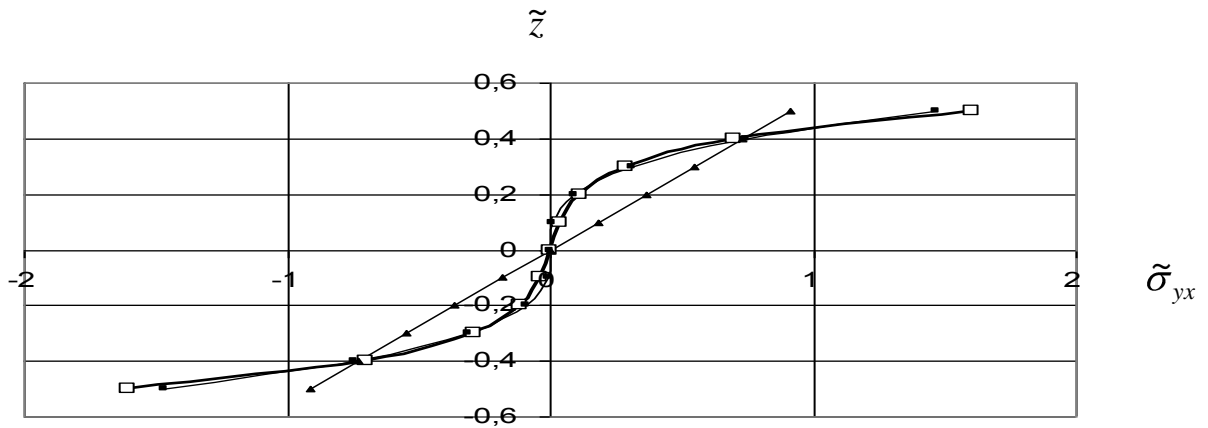


Рис.А.2. Змінювання $\tilde{\sigma}_{xz}$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1/3; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0$).



\ Рис.А.3. Змінювання $\tilde{\sigma}_{yx}$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1/3; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0$).

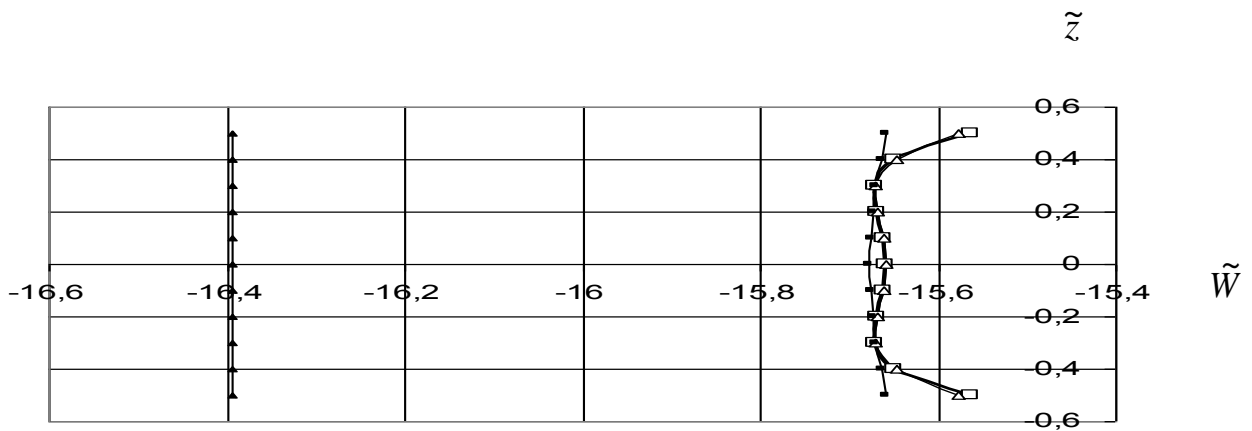


Рис.А.4. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1/3; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0$).

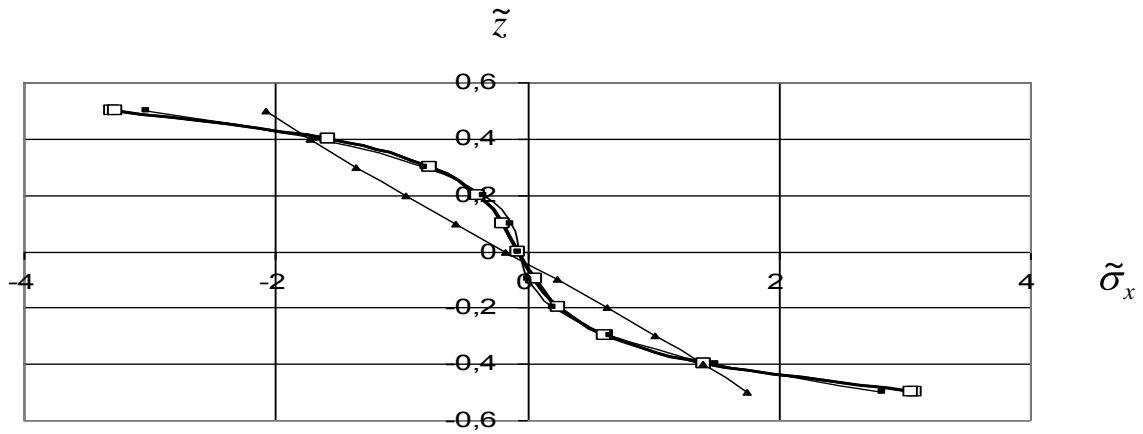


Рис.А.5. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1/3$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

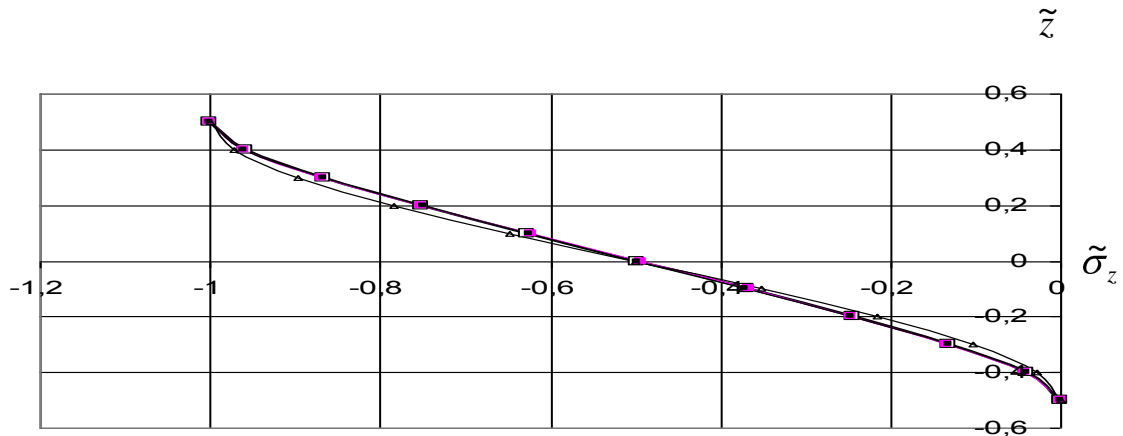


Рис.А.6. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1/3$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$).

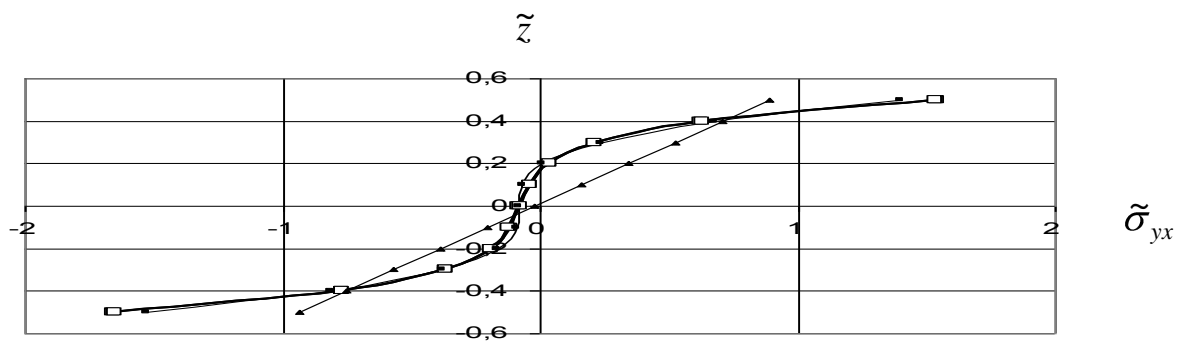


Рис.А.7. Змінювання $\tilde{\sigma}_{yx}$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1/3$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$).

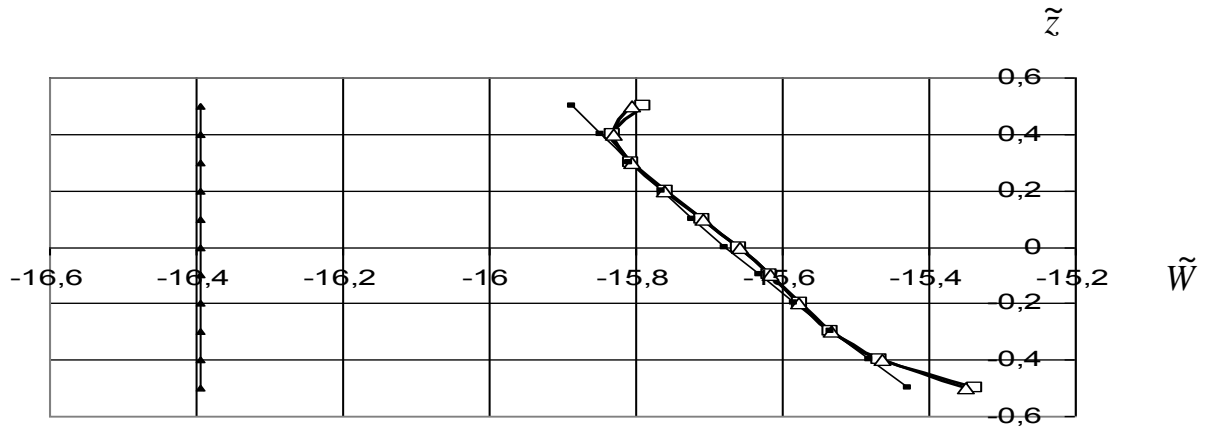


Рис.А.8. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$) при $h/a = 1/3$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$.

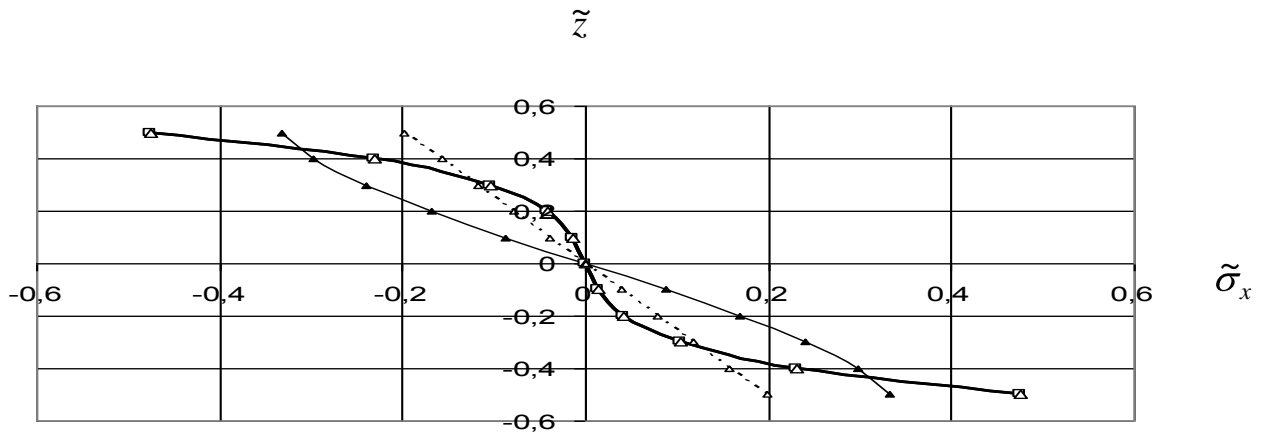


Рис.А.9. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$) ($h/a = 1$; $G'/G = 1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$).

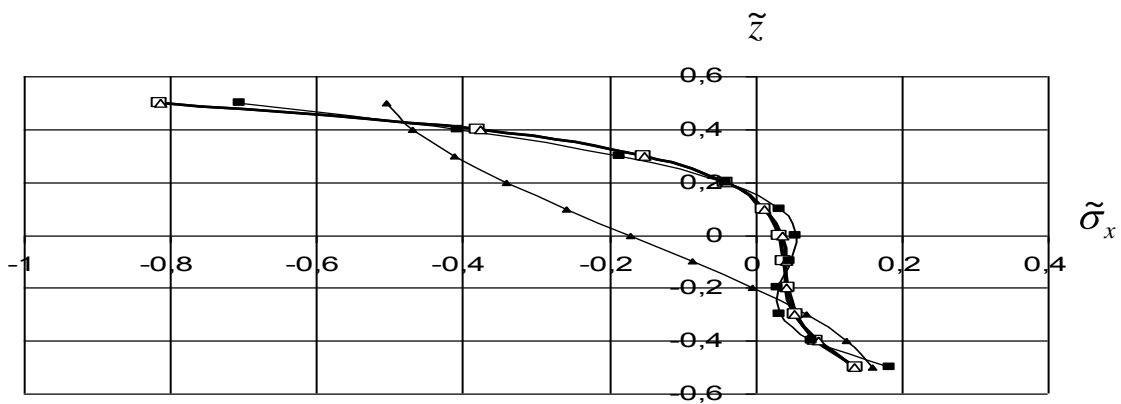


Рис.А.10. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$) ($h/a = 1$; $G'/G = 1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$).

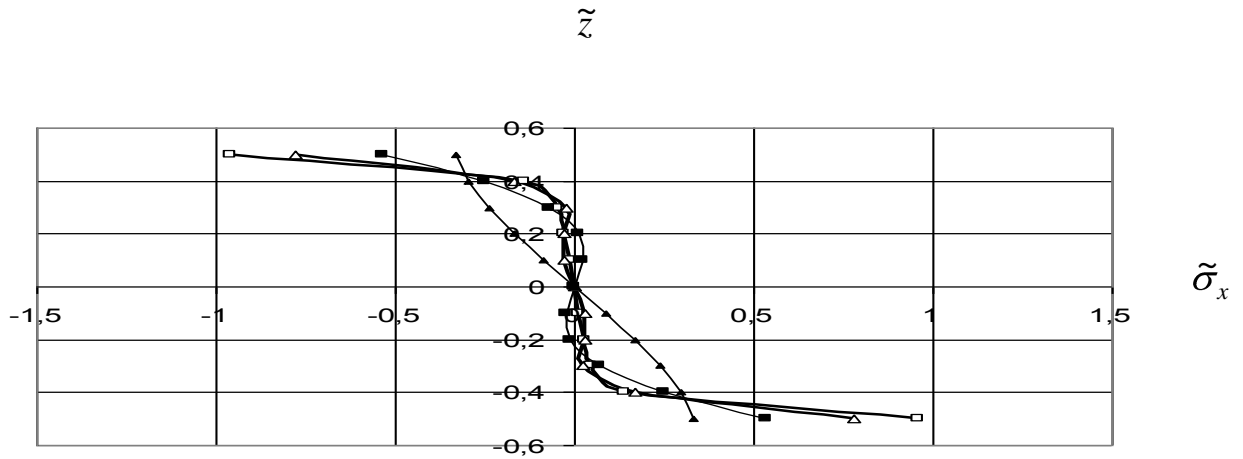


Рис.А.11. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$).

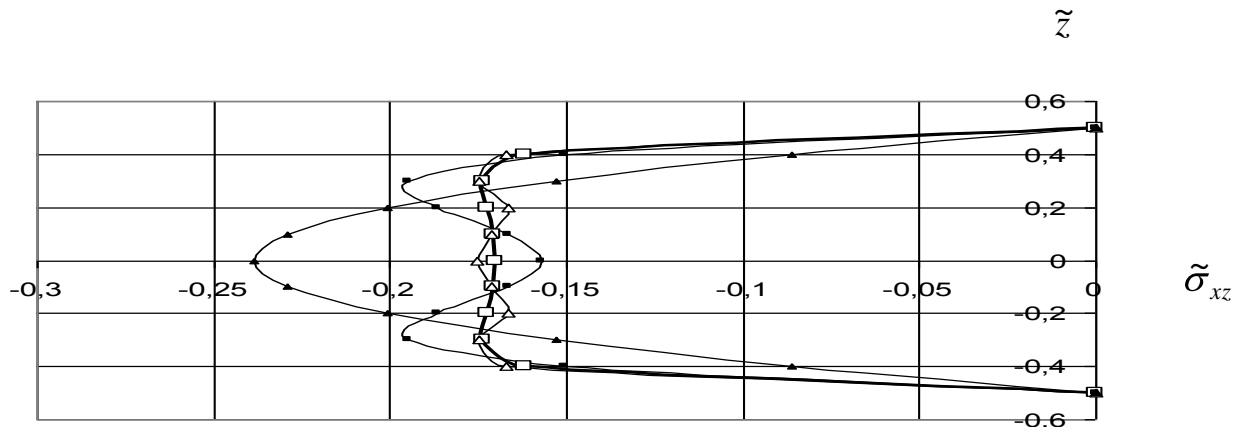


Рис.А.12. Змінювання $\tilde{\sigma}_{xz}$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$).

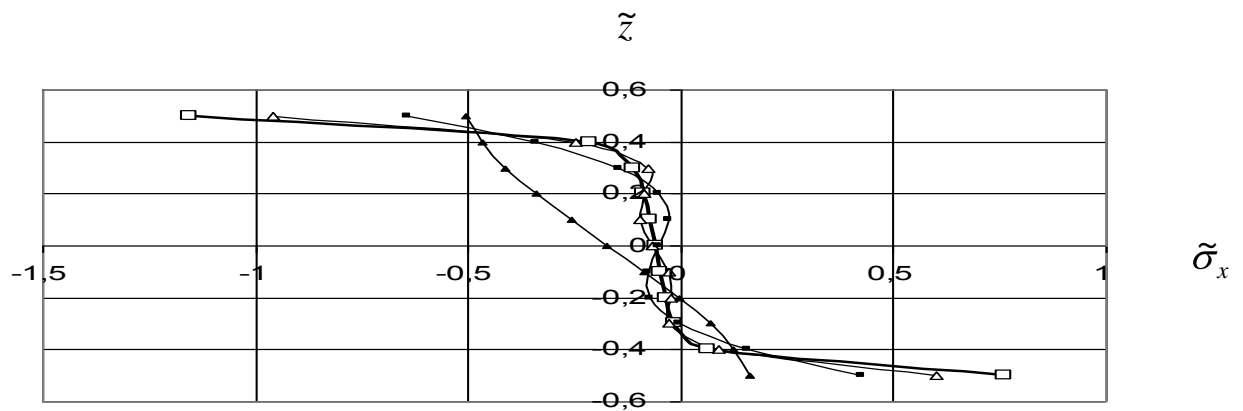


Рис.А.13. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a = 1$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$).

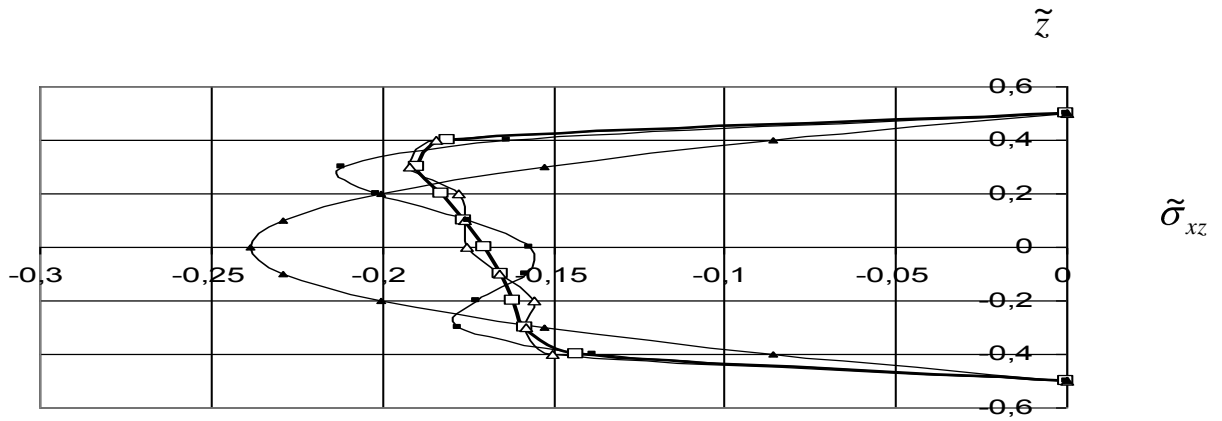


Рис.А.14. Змінювання $\tilde{\sigma}_{xz}$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1$; $G'/G=0,1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=1$; $p_{mn}/q_{mn}=1$).

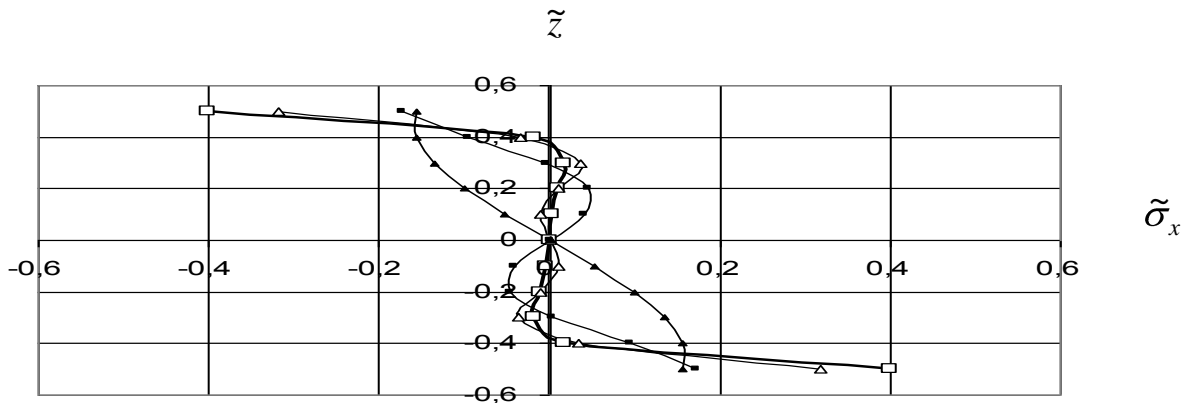


Рис.А.15. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1/3$; $G'/G=1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=9$; $p_{mn}/q_{mn}=0$).

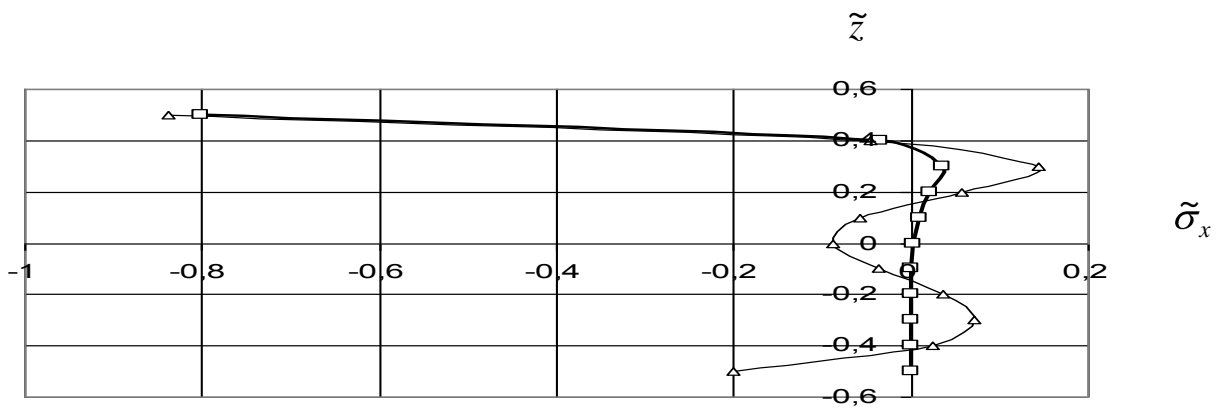


Рис.А.16. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної пластини ($a \times a \times h$)
 ($h/a=1/3$; $G'/G=1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=9$; $p_{mn}/q_{mn}=1$).

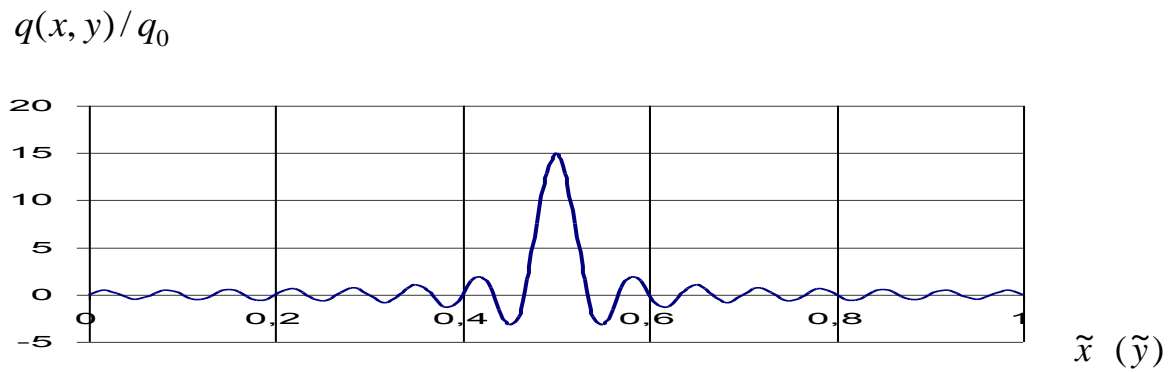


Рис. А.17. Графік змінювання поперечного навантаження $q(x, y)/q_0$ в залежності від \tilde{x} (\tilde{y}) при $\tilde{y} = 1/2$ ($\tilde{x} = 1/2$), $S = 15$.

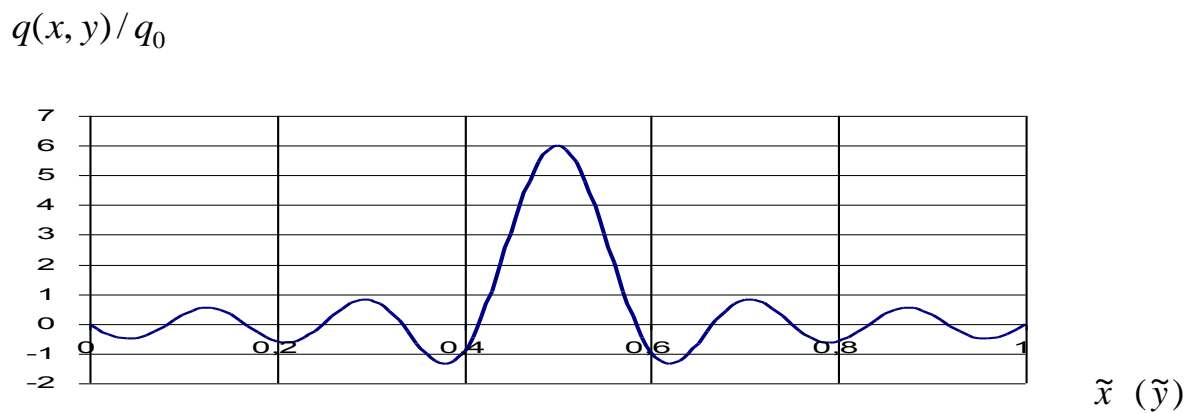


Рис. А.18. Графік змінювання поперечного навантаження $q(x, y)/q_0$ в залежності від \tilde{x} (\tilde{y}) при $\tilde{y} = 1/2$ ($\tilde{x} = 1/2$), $S = 6$.

Таблиця А.20

Залежність компонент НДС у різних наближеннях
від квазізосередженого навантаження

G'/G	$m = n$	НК1	НК13	НК135	ТР	Δ_{t1}	Δ_{t3}	Δ_{t5}
		$\tilde{\sigma}_x (\tilde{z} = 0,5)$						
1	1,3,...,29	-1,738	-1,818	-1,890	-1,914	9,20	5,02	1,25
0,1	1,3,...,11	-4,061	-4,765	-4,989	-5,080	20,1	6,20	1,79
G'/G	$m = n$	$\tilde{\sigma}_z (\tilde{z} = 0,25)$						
		1	1,3,...,29	-0,3438	-0,2281	-0,2279	-0,2277	51,0
0,1	1,3,...,11	-0,3438	-0,2960	-0,2945	-0,2950	16,5	0,34	0,17
G'/G	$m = n$	$\tilde{W} (\tilde{z} = 0)$						
		1	1,3,...,29	-20,15	-20,07	-20,07	-20,07	0,40
0,1	1,3,...,11	-78,58	-77,97	-77,95	-77,95	0,81	0,03	0,00

Таблиця А.21

Показники змінюваності вихрового і потенціального пограншарів при кососиметричному навантаженні транстропної пластини ($E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3$)

G'/G	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_k$ (при $\psi_3 = 0$)	$\tilde{\lambda}$ по [286]	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}_k$
0,01	0,3142	1,011	0,3347	0,2876	0,5622	112,4	-
0,1	0,9935	3,196	1,058	0,9094	1,805	35,00	-
1	3,142	10,11	3,347	2,876	-	-	7,331
10	9,935	31,96	10,58	9,094	-	-	5,025
100	31,42	101,1	33,47	28,76	-	-	4,733

Таблиця А.22

Показники змінюваності вихрового і потенціального пограншарів при симетричному навантаженні транстропної пластини ($E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3$)

G'/G	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\alpha}_0$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_s$
0,01	0,6481	0,3840	58,54	-
0,1	2,049	1,234	18,22	-
1	6,481	-	-	4,154
10	20,49	-	-	3,086
100	64,81	-	-	2,958

А.3. Основні прикладні висновки до розрахунку транстропних пластин довільної товщини

Прикладні висновки для ВНДС базуються на основі наведених у роботі і додатково отриманих чисельних результатів для всіх компонент НДС пластин в широких межах змінення МГХ.

Теорія Тимошенка-Рейснера (ТТР) при плавних навантаженнях придатна для опису НДС таких пластин: ізотропних при кососиметричних навантаженнях (НК1) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними для σ_x складає менше 1,44 %, а для поперечних переміщень—менше 3,92 %); ізотропних пластин при згинально-обтискуючих (уточнена ТТР, НК01) навантаженнях для $h/a \leq 1/5$ (найбільше

розходження з точними по σ_x складає менше 2,99 %, а для поперечних переміщень— 5,11%); транстропних пластин ($0,1 \leq G'/G \leq 1,0; E' = E; \nu' = \nu$) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження по W з точними складає при кососиметричному навантаженні менше 2,90 % для $G'/G = 0,1$ і менше 3,92 % для $G'/G = 1$, а при згинально-обтискуючому навантаженні по уточненій ТТР менше $(3,33 \div 5.11)$ %).

Транстропні пластини при плавних поперечних навантаженнях.

При кососиметричному поперечному навантаженні (навантаження інтенсивності $q(x, y)/2$ діє униз і прикладене одночасно до верхньої і нижньої лицевих площин; навантаження $p(x, y) = 0$): 1) тангенціальні нормальні напруження на обох лицевих площинах зростають при зменшенні товщини, G'/G , E'/E ; 2) вертикальні переміщення на обох лицевих площинах однакові і зростають при зменшенні товщини, G'/G , ν' ; збільшенні E'/E (але незначним чином); прогини лицевих площин більші, ніж серединної площини; 3) поперечні нормальні напруження змінюються по товщині практично лінійно; 4) поперечні дотичні напруження мають два екстремуми, які зміщені від серединної площини (приблизно на $h/5$).

При згинально-обтискуючому навантаженні ($q(x, y)$ діє униз і прикладене до верхньої лицевої площини): 1) поперечні нормальні напруження змінюються по товщині практично лінійно; 2) поперечні дотичні напруження мають екстремум, зміщений від серединної площини до верхньої лицевої площини (приблизно на $h/5$).

На верхній лицевій площині: 1) тангенціальні нормальні напруження зростають при зменшенні товщини, G'/G , зменшенні E'/E (але в меншій мірі, ніж при зменшенні G'/G); при збільшенні ν' (незначним чином); 2) тангенціальні нормальні напруження на верхній лицевій площині більші, ніж на нижній, і різниця зростає із збільшенням товщини; 3) вертикальні переміщення зростають при зменшенні товщини, G'/G , E'/E (але незначним чином), ν' ; прогини верхньої лицевої площини більші, ніж нижньої.

На нижній лицевій площині: 1) тангенціальні нормальні напруження зростають при зменшенні товщини, G'/G , ν' (але незначним чином), збільшенні

E'/E ; 2) вертикальні переміщення зростають при зменшенні товщини, G'/G , ν' , збільшенні E'/E ; прогини верхньої лицевої площини більші, ніж нижньої.

За ТТР: тангенціальні нормальні напруження не змінюються при змінюванні G'/G , а поперечні переміщення однакові по товщині (теорія не урахує поперечне обтискання); поперечні нормальні напруження за абсолютним значенням більші, ніж за варіантами МТ.

Квадратні пластини при кососиметричному навантаженні:

1) найбільші тангенціальні нормальні напруження згідно НК13 відрізняються від точних

менше 2,4% для $1/5 \leq h/a \leq 1/2$, $1/2 \leq G'/G \leq 1$;

менше 1,9% для $1/10 \leq h/a \leq 1/5$, $1/10 \leq G'/G \leq 1$;

менше 2,9% для $h/a \leq 1/10$, $1/50 \leq G'/G \leq 1$;

2) найбільші поперечні переміщення за абсолютним значенням згідно НК13 відрізняються від точних менше 2,2% для $h/a \leq 1/2$, $1/50 \leq G'/G \leq 1$;

За ТТР σ_x на лицевих площинах відрізнялись від точних при $1/5 \leq h/a \leq 1/2$ для ізотропних пластин в межах 1,5 % – 10,2 %, а для трансропних (при $G'/G = 1/10$, $E'/E = 1$, $\nu' = \nu = 0,3$) в межах 29,9 % – 110,9 %; для тих же МГХ поперечні переміщення w відрізнялись від точних для ізотропних пластин в межах 3,8 % – 4,0 %, а для трансропних в межах 2,8 % – 6,9 % (відсотки наведені по відношенню до значень за теорією Рейснера).

Квадратні пластини при згинально-обтискуючому навантаженні:

1) найбільші тангенціальні нормальні напруження за модулем згідно НК0-3 відрізняються від точних

менше 3,1% для $1/5 \leq h/a \leq 1/2$, $1/2 \leq G'/G \leq 1$;

менше 1,9% для $1/10 \leq h/a \leq 1/5$, $1/10 \leq G'/G \leq 1$;

менше 2,9% для $h/a \leq 1/10$, $1/50 \leq G'/G \leq 1$.

Найбільші поперечні переміщення за модулем в НК0-3 відрізняються від точних менше 2,3% для $h/a \leq 1/2$, $1/50 \leq G'/G \leq 1$. Вплив поперечного обтискання на НДС зростає із збільшенням h , G'/G ; зменшенням E'/E , ν' .

За ТТР σ_x на лицевих площинах відрізнялись від точних при $1/5 \leq h/a \leq 1/2$ для ізотропних пластин в межах 3,4 % – 30,4 %, а для транстропних (при $G'/G = 1/10, E'/E = 1, \nu' = \nu = 0,3$) в межах 31,8 % – 125,2 %; для тих же МГХ поперечні переміщення w відрізнялись від точних для ізотропних пластин в межах 2,7 % – 17,4 %, а для транстропних в межах 2,4 % – 3,6 % (відсотки наведені по відношенню до значень за теорією Рейснера).

Транстропні пластини при негладких і квазізосереджених поперечних навантаженнях.

При негладких навантаженнях КТ Кірхгофа-Лява і ТТР дають абсолютно хибні результати (для ізотропних пластин при $h/a = 1/10$ різниця з точними для σ_x складає при кососиметричному навантаженні 35,4 %, а при згинально-обтискуючому 119,2 %; для транстропних при $G'/G = 1/10$ різниця при кососиметричному навантаженні 179,2 %, а при згинально-обтискуючому 227,5 %). Тому потрібно використовувати високі наближення. НК0-3 дає високоточні результати для ізотропних пластин при кососиметричному навантаженні при $a/m \geq 1,8h$ (m – кількість півхвиль при полігармонічному навантаженні), а при згинально-обтискуючому – при $a/m \geq 2,0h$ (розходження з точними менше 3%). При зосереджених і локальних навантаженнях КТ і ТТР дають незадовільні результати навіть для тонких пластин ($h/a = 0,1$). Із зменшенням G'/G розходження в порівнянні з точними результатами зростає.

Додаток Б

Ілюстрації компонент НДС однорідних фізично нелінійних і транстропних пластин з використанням методу збурень

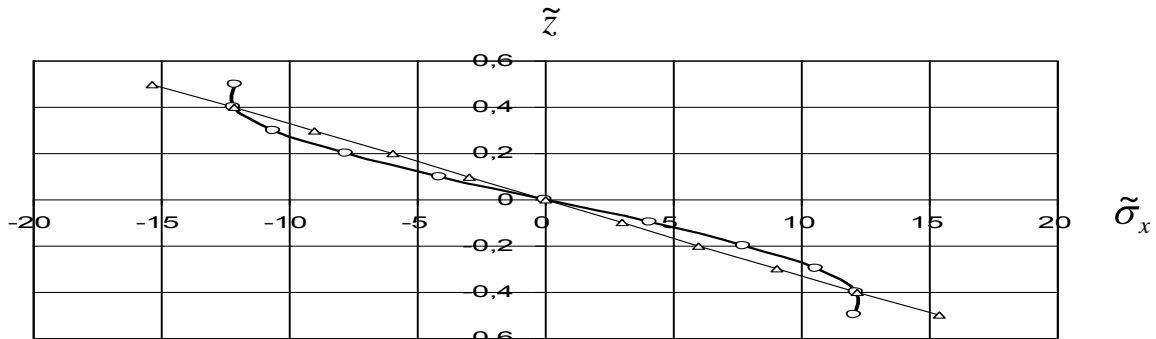


Рис. Б.1. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині фізично нелінійної пластини із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $m = 1$; $q_m = 15 \text{ МПа}$).

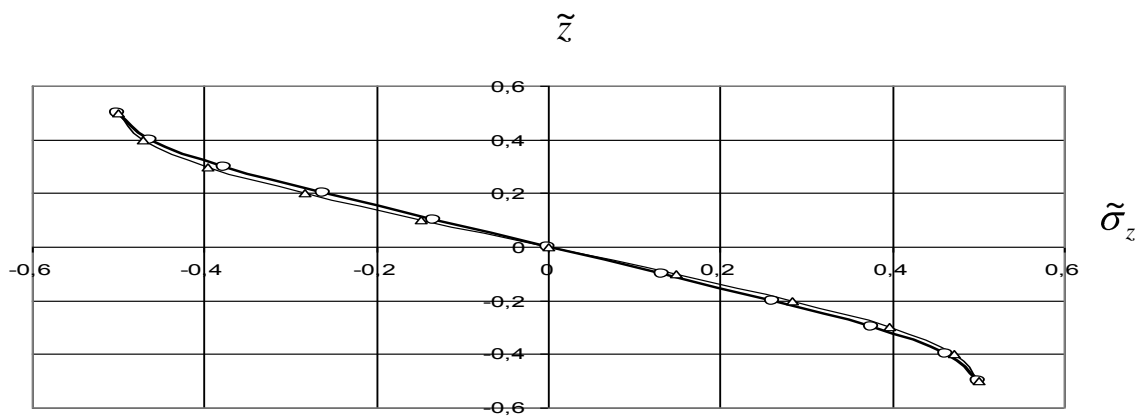


Рис. Б.2. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині фізично нелінійної пластини із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $m = 1$; $q_m = 15 \text{ МПа}$).

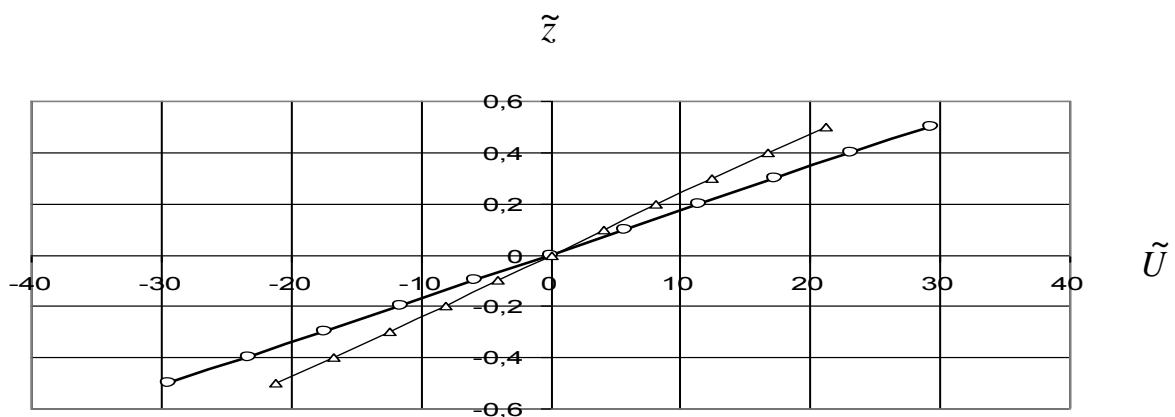


Рис. Б.3. Змінювання \tilde{U} по товщині фізично нелінійної пластини із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $m = 1$; $q_m = 15 \text{ МПа}$).

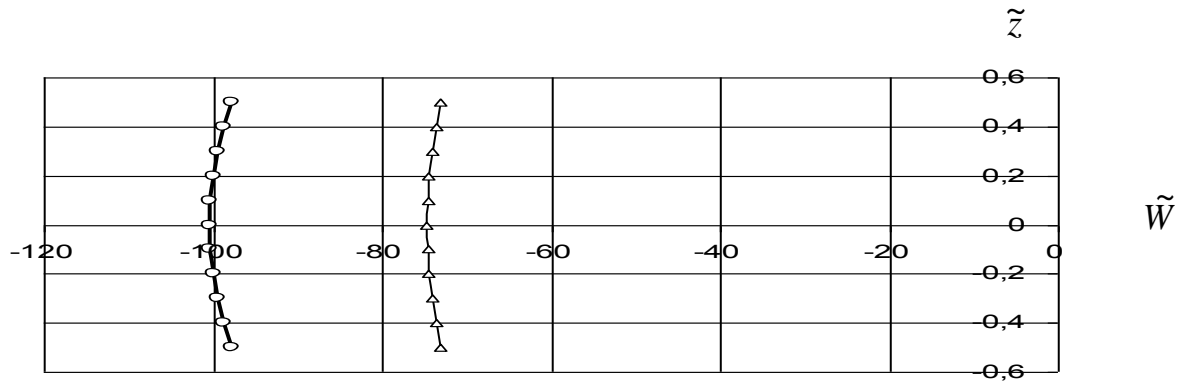


Рис. Б.4. Змінювання \tilde{W} по товщині фізично нелінійної пластини із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $m = 1$; $q_m = 15 \text{ МПа}$).

Таблиця Б.1

Компоненти НДС ФНП із чистої міді (ФН в НК13; $l = 0,1$) при циліндричному згині з МГХ: $h/a = 1/3$; $G = 44230 \text{ МПа}$; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$

z/h	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-5,472	-5,586	-5,678	-5,680	-5,615	1,14	-5,537	2,52
0	0	0	0	0	0	-	0	-
-0,5	5,472	5,586	5,678	5,680	5,615	-	5,537	-
	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
0,5	0	0	0	0	0	-	0	-
0	0,7162	-1,433	-1,419	-1,419	-1,409	0,70	-1,397	1,55
-0,5	0	0	0	0	0	-	0	-
	\tilde{U}							
0,5	4,589	4,460	4,537	4,539	4,615	1,67	4,712	3,81
0	0	0	0	0	0	-	0	-
-0,5	-4,589	-4,460	-4,537	-4,539	-4,615	-	-4,712	-
	\tilde{W}							
0,5	-8,764	-11,47	-10,81	-10,79	-10,92	1,20	-11,07	2,59
0	-8,764	-11,47	-11,29	-11,29	-11,42	-	-11,58	-
-0,5	8,764	-11,47	-10,81	-10,79	-10,92	-	-11,07	-

Таблиця Б.2

Компоненти НДС ФНП із чистої міді (ФН в НК13; $l = 0,1$) при циліндричному згині з МГХ: $h/a = 1/5$; $G=44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$

z/h	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-15,20	-15,31	-15,40	-15,40	-13,91	9,68	-12,06	21,7
0,25	-7,599	-7,707	-7,511	-7,511	-8,313	-	-9,315	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
0,5	0	0	0	0	0	-	0	-
0,25	-0,8953	-1,791	-1,792	-1,792	-1,635	-	-1,439	-
0	-1,194	-2,387	-2,380	-2,380	-2,296	3,53	-2,191	7,94
z/h	\tilde{U}							
0,5	21,24	21,03	21,15	21,15	24,78	17,2	29,31	38,6
0,25	10,62	10,52	10,24	10,24	12,08	-	14,37	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-67,62	-75,14	-73,08	-73,06	-84,05	15,0	-97,76	33,8
0,25	-67,62	-75,14	-74,31	-74,31	-85,59	-	-99,71	-
0	-67,62	-75,14	-74,71	-74,71	-86,11	-	-100,4	-

Таблиця Б.3

Компоненти НДС ФНП із чистої міді (ФН в НК13; $l = 0,1$) при циліндричному згині з МГХ: $h/a = 1/10$; $G=44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$

z/h	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН $q_m = 2$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 4$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-60,80	-60,91	-61,00	-61,00	-56,81	6,87	-44,26	27,4
0,25	-30,40	-30,51	-30,31	-30,31	-32,48	-	-38,99	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
0,5	0	0	0	0	0	-	0	-
0,25	-1,791	-3,581	-3,582	-3,582	-3,375	-	-2,753	-

Продовження табл. Б.3

z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
0	-2,387	-4,775	-4,771	-4,771	-4,663	2,26	-4,340	9,03
z/h	\tilde{U}							
0,5	170,0	169,5	169,8	169,8	189,7	11,7	249,6	47,0
0,25	84,98	84,76	84,28	84,22	94,24	-	124,3	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-1082	-1112	-1103	-1103	-1229	11,4	-1606	45,6
0,25	-1082	-1112	-1109	-1109	-1235	-	-1615	-
0	-1082	-1112	-1110	-1110	-1237	-	-1618	-

Таблиця Б.4

Компоненти НДС ФНП із мартенівської сталі (ФН в НК13; $l = 0,1$) при
циліндричному згині з МГХ: $h/a = 1/5$; $G = 83650$ МПа; $\nu = 0,294$; $g_2 = 0,085 \cdot 10^6$

z/h	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
z/h	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-15,20	-15,29	-15,40	-15,40	-15,21	1,23	-14,96	2,86
0,25	-7,599	-7,683	-7,511	-7,511	-7,607	-	-7,727	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
0,5	0	0	0	0	0	-	0	-
0,25	-0,895	-1,791	-1,792	-1,792	-1,771	-	-1,746	-
0	-1,194	-2,387	-2,380	-2,380	-2,368	0,50	-2,353	1,13
z/h	\tilde{U}							
0,5	22,10	21,93	22,09	22,09	22,55	2,08	23,13	4,71
0,25	11,05	10,96	10,71	10,71	10,95	-	11,24	-
0	0	0	0	0	0	-	0	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-70,35	-77,66	-76,03	-76,01	-77,42	1,85	-79,16	4,14
0,25	-70,35	-77,66	-76,99	-76,99	-78,42	-	-80,21	-
0	-70,35	-77,66	-77,31	-77,30	-78,75	-	-80,56	-

Таблиця Б.5

Компоненти НДС транстропної квадратної пластини з використанням методу збурень ізотропних властивостей

($h/a = 1/5$; $m = n = 1$; $G'/G = 0,8$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	$l = 0$; НК0-3	$l = 0, 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %	$l = 0$; НК0-3	$l = 0, 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %
0,5	-5,148	-5,193	-5,192	0,02	-20,41	-19,94	-21,40	6,82
	-5,243	-5,290	-5,288	0,04	-20,64	-20,16	-21,63	6,80
0	0,0000	0,0000	0,0000	-	-20,99	-20,46	-21,97	-
	-0,0646	-0,0842	-0,0647	-	-20,99	-20,46	-21,97	-
-0,5	5,148	5,193	5,192	-	-20,41	-19,94	-21,40	-
	5,052	5,097	5,097	0,00	-20,18	-19,71	-21,17	6,90

Таблиця Б.6

Компоненти НДС транстропної квадратної пластини з використанням методу збурень ізотропних властивостей

($h/a = 1/5$; $m = n = 1$; $G'/G = 0,9$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$ / $p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	$l = 0$; НК0-3	$l = 0, 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %	$l = 0$; НК0-3	$l = 0, 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %
0,5	-5,148	-5,169	-5,168	0,02	-20,41	-20,16	-20,85	3,31
	-5,243	-5,265	-5,263	0,04	-20,64	-20,39	-21,08	3,27
0	0,0000	0,0000	0,0000	-	-20,99	-20,71	-21,42	-
	-0,0646	-0,0740	-0,0646	-	-20,99	-20,71	-21,42	-
-0,5	5,148	5,169	5,168	-	-20,41	-20,16	-20,85	-
	5,052	5,073	5,073	0,00	-20,18	-19,93	-20,62	3,35

Додаток В

Транстропні пологі оболонки довільної товщини.

Коефіцієнти, ілюстрації, висновки

В.1. Коефіцієнти рівнянь і залежностей

$$\begin{aligned}
 \gamma_{111} &= h(d_0 - \frac{1}{10}d_{10}e_{20}), \quad \gamma_{112} = hG, \quad \gamma_{121} = h(G + d_0\nu - \frac{1}{10}d_{10}e_{20}), \\
 \gamma_{131} &= -\frac{h}{10}d_{10}e_{22}, \quad k_{1w1} = (d_0k_{1v} - \frac{k_{12}}{10}d_{10}e_{20} + \frac{k'_1}{h}h_{11})h, \quad \gamma_{151} = -\frac{h}{10}d_{10}q_{22}, \\
 k_{1w3} &= (\frac{k'_1}{h}h_{13} - \frac{k_{12}}{10}d_{10}e_{22})h, \quad \gamma_{u0} = \frac{3h}{20}d_{10}; \quad k_{2w1} = (d_0k_{2v} - \frac{k_{12}}{10}d_{10}e_{20} + \frac{k'_2}{h}h_{11})h, \\
 k_{2w3} &= (\frac{k'_2}{h}h_{13} - \frac{k_{12}}{10}d_{10}e_{22})h, \\
 \beta_{111} &= \frac{h}{3}(d_0 - \frac{3}{70}d_{10}e_{31}), \quad \beta_{112} = \frac{1}{3}hG, \quad \beta_{113} = -\frac{2}{h}l_{1x1}, \quad \beta_{121} = \frac{h}{3}(G + d_0\nu - \frac{3}{70}d_{10}e_{31}), \\
 k_{3u2} &= \frac{19}{15}G', \quad \beta_{131} = -\frac{h}{70}d_{10}e_{33}, \quad \beta_{133} = -\frac{2}{h}l_{1x3}, \quad \beta_{151} = -\frac{2}{h}h_{11}, \\
 k_{3w2} &= \frac{h}{3}d_0k_{1v} + \frac{k'_1}{5}h_{22} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{32}, \quad \beta_{161} = -\frac{2}{h}h_{13} - \frac{h}{70}d_{10}q_{33}, \quad \beta_{u1} = \frac{2}{21}hd_{10}; \\
 k_{4w2} &= \frac{h}{3}d_0k_{2v} + \frac{k'_2}{5}h_{22} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{32}, \\
 \gamma_{331} &= \frac{h}{5}(d_0 + \frac{1}{7}d_{10}e_{22}), \quad \gamma_{332} = \frac{1}{5}hG, \quad \gamma_{333} = -\frac{6}{5h}l_{2x2}, \quad k_{5u2} = k_{6v2} = -\frac{2}{15}G'h, \\
 \gamma_{341} &= \frac{h}{5}(G + d_0\nu + \frac{1}{7}d_{10}e_{22}), \quad k_{5u3} = \frac{3}{5}G', \quad k_{5w1} = \frac{h}{35}k_{12}d_{10}e_{20} - \frac{k'_1}{15}G'h, \\
 \gamma_{351} &= \frac{1}{5}(\frac{h}{7}d_{10}q_{22} - \frac{6}{h}h_{22}), \quad k_{5w3} = \frac{k_{12}}{35}hd_{10}e_{22} + \frac{h}{5}k_{1v}d_0 + \frac{2}{15}k'_1hG', \quad \gamma_{u2} = \frac{1}{10}hd_{10}; \quad (B.1) \\
 k_{6w1} &= \frac{h}{35}k_{12}d_{10}e_{20} - \frac{k'_2}{15}hG', \quad k_{6w3} = \frac{1}{5}(\frac{k_{12}}{7}hd_{10}e_{22} + k_{2v}hd_0 + \frac{2}{3}k'_2hG'), \\
 \beta_{331} &= \frac{h}{7}(d_0 + \frac{1}{15}d_{10}e_{33}), \quad \beta_{332} = \frac{1}{7}hG, \quad \beta_{333} = -\frac{6}{7h}l_{3x3}, \quad k_{7u3} = k_{8v3} = -\frac{3}{70}G'h, \\
 \beta_{341} &= \frac{h}{7}(G + d_0\nu + \frac{1}{15}d_{10}e_{33}), \quad \beta_{351} = -\frac{6}{7h}h_{31}, \quad k_{7w2} = \frac{1}{35}(\frac{1}{3}hd_{10}q_{32} - 3k'_1h_{22}), \\
 \beta_{361} &= \frac{1}{7}(\frac{1}{15}hd_{10}q_{33} - \frac{6}{h}h_{33}), \quad k_{8w2} = \frac{1}{35}(\frac{1}{3}hd_{10}q_{32} - 3k'_2h_{22}), \quad \beta_{u3} = \frac{h}{18}d_{10}, \quad \beta_{551} = -h_{11}, \\
 r_{1w1} &= h(k_{1v}d_0 - \frac{k_{12}^2}{10}d_{10}e_{20}), \quad r_{1w2} = -\frac{k_{12}}{10}hd_{10}q_{22}, \quad \beta_{561} = -h_{13}, \quad r_{1w3} = -\frac{k_{12}^2}{10}hd_{10}e_{22},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{9p} &= \frac{3k_{12}}{20}hd_{10}, \beta_{w1} = -1, \gamma_{551} = -\frac{1}{5}h_{22}, \gamma_{553} = -\frac{1}{5}q_{22}, r_{2w2} = h\left(\frac{1}{3}k_v d_0 - \frac{k_{12}}{70}d_{10}q_{32}\right), \\
r_{2w3} &= -\frac{k_{12}}{5}(e_{22} + \frac{1}{14}hd_{10}q_{33}), k_{10q} = \frac{2k_{12}}{21}hd_{10}, \gamma_{w2} = -\frac{7}{10}, \beta_{661} = -\frac{2}{15}hG', \\
\beta_{663} &= -\frac{3}{35}q_{33}, r_{3w3} = \frac{h}{5}(k_v d_0 + \frac{k_{12}^2}{7}d_{10}e_{22}), \beta_{w3} = -\frac{3}{7}, k_{11p} = \frac{k_{12}}{10}hd_{10}. \\
\\
h_{11} &= \frac{27}{28}G'h; h_{13} = -\frac{1}{28}G'h; h_{15} = -\frac{1}{28}G'h; l_{1x0} = -\frac{27}{28}G'hk'_1; l_{1x1} = \frac{27}{14}G', \\
l_{1x2} &= \frac{1}{28}G'hk'_1; l_{1x3} = \frac{11}{7}G'; l_{1x4} = \frac{1}{28}G'hk'_1; l_{1x5} = \frac{13}{14}G'; h_{31} = \frac{11}{6}G'h; h_{33} = h_{31}; \\
h_{35} &= -\frac{1}{2}G'h; l_{3x0} = -\frac{11}{6}G'hk'_1; l_{3x1} = \frac{11}{3}G'; l_{3x2} = -\frac{11}{6}G'hk'_1; l_{3x3} = 22G'; \\
l_{3x4} &= \frac{1}{2}G'hk'_1; l_{3x5} = 13G'; h_{51} = \frac{143}{84}G'h; h_{53} = h_{51}; h_{55} = h_{51}; l_{5x0} = -\frac{143}{84}G'hk'_1; \\
l_{5x1} &= \frac{143}{42}G'; l_{5x2} = -\frac{143}{84}G'hk'_1; l_{5x3} = \frac{143}{7}G'; l_{5x4} = -\frac{143}{84}G'hk'_1; l_{5x5} = \frac{715}{14}G'; \\
h_{22} &= \frac{10}{7}G'h; h_{24} = -\frac{5}{21}G'h; l_{2x1} = -\frac{10}{7}G'hk'_1; l_{2x2} = \frac{60}{7}G'; l_{2x3} = \frac{5}{21}G'hk'_1; \\
l_{2x4} &= \frac{110}{21}G'; l_{2x5} = \frac{5}{21}G'hk'_1; h_{42} = \frac{11}{7}G'h; h_{44} = h_{42}; l_{4x1} = -\frac{11}{7}G'hk'_1; l_{4x2} = \frac{66}{7}G'; \\
l_{4x3} &= -\frac{11}{7}G'hk'_1; l_{4x4} = \frac{220}{7}G'; l_{4x5} = \frac{10}{7}G'hk'_1, (x \rightarrow y; k'_1 \rightarrow k'_2); \quad (B.2) \\
q_{32} &= -\frac{143}{9}d_{30}k_{12}; q_{33} = -\frac{286}{3hd_{20}}; q_{34} = \frac{52}{9}d_{30}k_{12}; q_{35} = -\frac{130}{9hd_{20}}; e_{31} = -\frac{143}{9}d_{30}; \\
e_{33} &= \frac{52}{9}d_{30}; e_{35} = \frac{25}{9}d_{30}; e_{3q} = -\frac{91}{9}; q_{52} = -\frac{286}{9}d_{30}k_{12}; q_{53} = -\frac{572}{3hd_{20}}; \\
q_{54} &= -\frac{91}{9}d_{30}k_{12}; q_{55} = -\frac{2990}{9hd_{20}}; e_{51} = -\frac{286}{9}d_{30}; e_{53} = -\frac{91}{9}d_{30}; e_{55} = \frac{260}{9}d_{30}; \\
e_{5q} &= -\frac{325}{18}; q_{21} = -\frac{297}{35}d_{30}k_{12}; q_{22} = -\frac{594}{35hd_{20}}; q_{23} = \frac{44}{35}d_{30}k_{12}; q_{24} = -\frac{22}{5hd_{20}}; \\
q_{25} &= \frac{23}{35}d_{30}k_{12}; e_{20} = -\frac{297}{35}d_{30}; e_{22} = \frac{44}{35}d_{30}; e_{24} = \frac{23}{35}d_{30}; e_{2p} = -\frac{297}{70}; \\
q_{41} &= -\frac{858}{35}d_{30}k_{12}; q_{42} = -\frac{1716}{35hd_{20}}; q_{43} = -\frac{429}{35}d_{30}k_{12}; q_{44} = -\frac{858}{5hd_{20}}; \\
q_{45} &= \frac{572}{35}d_{30}k_{12}; e_{40} = -\frac{858}{35}d_{30}; e_{42} = -\frac{429}{35}d_{30}; e_{44} = \frac{572}{35}d_{30}; e_{4p} = -\frac{429}{35}; \\
\\
\gamma_{111} &= h\left(d_0 - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right); \gamma_{112} = hG; \gamma_{11r} = k'_1 l_{1x0}; \gamma_{121} = h\left(G + d_0 v - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right); \quad (B.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{13r} &= k'_1 l_{1x1}; \gamma_{151} = -\frac{he_{22}d_{10}}{10}; \gamma_{15r} = k'_1 l_{1x2}; \gamma_{161} = -\frac{he_{22}d_{10}}{10}; \gamma_{17r} = k'_1 l_{1x3}; \\
\gamma_{191} &= -\frac{he_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{19r} = k'_1 l_{1x4}; \gamma_{1101} = -\frac{he_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{111r} = k'_1 l_{1x5}; \\
\gamma_{113r} &= hd_0 k_{1v} - \frac{hq_{21}d_{10}}{10} + k'_1 h_{11}; \gamma_{1141} = -\frac{hq_{22}d_{10}}{10}; \gamma_{115r} = -\frac{hq_{23}d_{10}}{10} + k'_1 h_{13}; \\
\gamma_{1161} &= -\frac{hq_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{117r} = -\frac{hq_{25}d_{10}}{10} + k'_1 h_{15}; \gamma_{u0} = \frac{53}{700}hd_{10}; \gamma_{221} = hG; \\
\gamma_{222} &= h\left(d_0 - \frac{e_{20}d_{10}}{10}\right); \gamma_{22r} = k'_2 l_{1y0}; \gamma_{24r} = k'_2 l_{1y1}; \gamma_{251} = -\frac{he_{22}d_{10}}{10}; \gamma_{261} = -\frac{he_{22}d_{10}}{10}; \\
\gamma_{26r} &= k'_2 l_{1y2}; \gamma_{28r} = k'_2 l_{1y3}; \gamma_{291} = -\frac{he_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{2101} = -\frac{he_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{210r} = k'_2 l_{1y4}; \\
\gamma_{212r} &= k'_2 l_{1y5}; \gamma_{213r} = hd_0 k_{2v} - \frac{hq_{21}d_{10}}{10} + k'_2 h_{11}; \gamma_{2141} = -\frac{hq_{22}d_{10}}{10}; \\
\gamma_{215r} &= -\frac{hq_{23}d_{10}}{10} + k'_2 h_{13}; \gamma_{2161} = -\frac{hq_{24}d_{10}}{10}; \gamma_{217r} = k'_2 h_{15} - \frac{hq_{25}d_{10}}{10}; \\
\beta_{331} &= h\left(\frac{d_0}{3} - \frac{e_{31}d_{10}}{70}\right); \beta_{332} = \frac{1}{3}hG; \beta_{333} = -\frac{2}{h}l_{1x1}; \beta_{33r} = \frac{1}{5}k'_1 l_{2x1}; \\
\beta_{341} &= h\left(\frac{1}{3}d_0 v + \frac{G}{3} - \frac{1}{70}e_{31}d_{10}\right); \beta_{35r} = \frac{k'_1 l_{2x2}}{5} - \frac{2l_{1x2}}{h}; \beta_{371} = -\frac{1}{70}he_{33}d_{10}; \\
\beta_{372} &= -\frac{2}{h}l_{1x3}; \beta_{37r} = \frac{1}{5}k'_1 l_{2x3}; \beta_{381} = -\frac{1}{70}he_{33}d_{10}; \beta_{39r} = \frac{1}{5}k'_1 l_{2x4} - \frac{2}{h}l_{1x4}; \\
\beta_{3111} &= -\frac{1}{70}he_{35}d_{10}; \beta_{3112} = -\frac{2}{h}l_{1x5}; \beta_{311r} = \frac{1}{5}k'_1 l_{2x5}; \beta_{3121} = -\frac{1}{70}he_{35}d_{10}; \\
\beta_{3131} &= -\frac{2}{h}h_{11}; \beta_{314r} = \frac{h}{3}d_0 k_{1v} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{32} + \frac{1}{5}k'_1 h_{22}; \beta_{3151} = -\frac{1}{70}hq_{33}d_{10} - \frac{2}{h}h_{13}; \\
\beta_{316r} &= \frac{k'_1 h_{24}}{5} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{34}; \beta_{3171} = -\frac{1}{70}hd_{10}q_{35} - \frac{2}{h}h_{15}; \beta_{u1} = \frac{1}{18}hd_{10}; \\
\beta_{441} &= \frac{1}{3}hG; \beta_{442} = h\left(\frac{d_0}{3} - \frac{e_{31}d_{10}}{70}\right); \beta_{443} = -\frac{2}{h}l_{1y1}; \beta_{44r} = \frac{k'_2 l_{2y1}}{5}; \\
\beta_{46r} &= \frac{k'_2 l_{2y2}}{5} - \frac{2}{h}l_{1y2}; \beta_{471} = -\frac{he_{33}d_{10}}{70}; \beta_{481} = -\frac{he_{33}d_{10}}{70}; \beta_{482} = -\frac{2}{h}l_{1y3}; \\
\beta_{48r} &= \frac{k'_2 l_{2y3}}{5}; \beta_{410r} = \frac{k'_2 l_{2y4}}{5} - \frac{2}{h}l_{1y4}; \beta_{4111} = -\frac{he_{35}d_{10}}{70}; \beta_{4121} = -\frac{he_{35}d_{10}}{70}; \\
\beta_{4122} &= -\frac{2}{h}l_{1y5}; \beta_{412r} = \frac{k'_2 l_{2y5}}{5}; \beta_{4131} = -\frac{2}{h}h_{11}; \beta_{414r} = \frac{h}{3}d_0 k_{2v} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{32} + \frac{1}{5}k'_2 h_{22}; \\
\beta_{4151} &= -\frac{1}{70}hd_{10}q_{33} - \frac{2}{h}h_{13}; \beta_{416r} = \frac{1}{5}k'_2 h_{24} - \frac{1}{70}hd_{10}q_{34}; \beta_{4171} = -\frac{1}{70}hd_{10}q_{35} - \frac{2}{h}h_{15}; \\
\gamma_{551} &= \frac{1}{5}h\left(d_0 + \frac{d_{10}}{7}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right)\right); \gamma_{552} = \frac{1}{5}hG; \gamma_{553} = -\frac{6}{5h}l_{2x2}; \\
\gamma_{55r} &= \frac{1}{5}k'_1\left(\frac{3}{7}l_{3x2} - l_{1x2}\right); \gamma_{561} = \frac{h}{5}\mathbf{G} + d_0 v \left. \vphantom{\gamma_{561}} \right\} \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{57r} &= \frac{1}{5}k'_1\left(\frac{3}{7}l_{3x3} - l_{1x3}\right) - \frac{6l_{2x3}}{5h}; \gamma_{59l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{24} - \frac{e_{44}}{6}\right); \gamma_{592} = -\frac{6l_{2x4}}{5h}; \\
\gamma_{59r} &= \frac{1}{5}k'_1\left(\frac{3}{7}l_{3x4} - l_{1x4}\right); \gamma_{510l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{24} - \frac{e_{44}}{6}\right); \gamma_{511r} = \frac{1}{5}k'_1\left(\frac{3}{7}l_{3x5} - l_{1x5}\right) - \frac{6l_{2x5}}{5h}; \\
\gamma_{513r} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{21} - \frac{q_{41}}{6}\right) + \frac{k'_1}{5}\left(\frac{3h_{31}}{7} - h_{11}\right); \gamma_{514l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{22} - \frac{q_{42}}{6}\right) - \frac{6h_{22}}{5h}; \\
\gamma_{513r} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{21} - \frac{q_{41}}{6}\right) + \frac{k'_1}{5}\left(\frac{3h_{31}}{7} - h_{11}\right); \gamma_{514l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{22} - \frac{q_{42}}{6}\right) - \frac{6h_{22}}{5h}; \\
\gamma_{515r} &= \frac{hd_0}{5}k_{1v} + \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{23} - \frac{q_{43}}{6}\right) + \frac{k'_1}{5}\left(\frac{3h_{33}}{7} - h_{13}\right); \gamma_{516l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{24} - \frac{q_{44}}{6}\right) - \frac{6h_{24}}{5h}; \\
\gamma_{517r} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{25} - \frac{q_{45}}{6}\right) + \frac{k'_1}{5}\left(\frac{3h_{35}}{7} - h_{15}\right); \gamma_{u2} = \frac{11hd_{10}}{175}; \\
\gamma_{66l} &= \frac{hG}{5}; \gamma_{662} = \frac{hd_0}{5} + \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{22} - \frac{e_{42}}{6}\right); \gamma_{663} = -\frac{6l_{2y2}}{5h}; \gamma_{66r} = \frac{1}{5}k'_2\left(\frac{3}{7}l_{3y2} - l_{1y2}\right); \\
\gamma_{68r} &= \frac{1}{5}k'_2\left(\frac{3}{7}l_{3y3} - l_{1y3}\right) - \frac{6l_{2y3}}{5h}; \gamma_{69l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{24} - \frac{e_{44}}{6}\right); \gamma_{610l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(e_{24} - \frac{e_{44}}{6}\right); \\
\gamma_{6102} &= -\frac{6l_{2y4}}{5h}; \gamma_{610r} = \frac{1}{5}k'_2\left(\frac{3}{7}l_{3y4} - l_{1y4}\right); \gamma_{612r} = \frac{1}{5}k'_2\left(\frac{3}{7}l_{3y5} - l_{1y5}\right) - \frac{6l_{2y5}}{5h}; \\
\gamma_{613r} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{21} - \frac{q_{41}}{6}\right) + \frac{k'_2}{5}\left(\frac{3h_{31}}{7} - h_{11}\right); \gamma_{614l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{22} - \frac{q_{42}}{6}\right) - \frac{6h_{22}}{5h}; \\
\gamma_{615r} &= \frac{hd_0}{5}k_{2v} + \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{23} - \frac{q_{43}}{6}\right) + \frac{k'_2}{5}\left(\frac{3h_{33}}{7} - h_{13}\right); \gamma_{616l} = \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{24} - \frac{q_{44}}{6}\right) - \frac{6h_{24}}{5h}; \\
\gamma_{617r} &= \frac{hd_{10}}{35}\left(q_{25} - \frac{q_{45}}{6}\right) + \frac{k'_2}{5}\left(\frac{3h_{35}}{7} - h_{15}\right); \\
\beta_{77l} &= \frac{hd_0}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{33}}{5} - \frac{e_{53}}{22}\right); \beta_{772} = \frac{1}{7}hG; \beta_{773} = -\frac{6l_{3x3}}{7h}; \\
\beta_{77r} &= \frac{1}{7}k'_1\left(\frac{1}{3}l_{4x3} - \frac{3}{5}l_{2x3}\right); \beta_{78l} = \frac{h(G + d_0v)}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{33}}{5} - \frac{e_{53}}{22}\right); \\
\beta_{79r} &= \frac{1}{7}k'_1\left(\frac{1}{3}l_{4x4} - \frac{3}{5}l_{2x4}\right) - \frac{6l_{3x4}}{7h}; \beta_{711l} = \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{35}}{5} - \frac{e_{55}}{22}\right); \beta_{7112} = -\frac{6l_{3x5}}{7h}; \\
\beta_{711r} &= \frac{1}{7}k'_1\left(\frac{1}{3}l_{4x5} - \frac{3}{5}l_{2x5}\right); \beta_{712l} = \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{35}}{5} - \frac{e_{55}}{22}\right); \beta_{713l} = -\frac{6h_{31}}{7h}; \\
\beta_{714r} &= \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{32}}{5} - \frac{q_{52}}{22}\right) + \frac{k'_1}{7}\left(\frac{h_{42}}{3} - \frac{3h_{22}}{5}\right); \beta_{715l} = \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{33}}{5} - \frac{q_{53}}{22}\right) - \frac{6h_{33}}{7h}; \\
\beta_{716r} &= \frac{hd_0k_{1v}}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{34}}{5} - \frac{q_{54}}{22}\right) + \frac{k'_1}{7}\left(\frac{h_{44}}{3} - \frac{3h_{24}}{5}\right); \\
\beta_{717l} &= \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{q_{35}}{5} - \frac{q_{55}}{22}\right) - \frac{6h_{35}}{7h}; \beta_{u3} = \frac{17hd_{10}}{396}; \beta_{88l} = \frac{1}{7}hG; \\
\beta_{882} &= \frac{hd_0}{7} + \frac{hd_{10}}{21}\left(\frac{e_{33}}{5} - \frac{e_{53}}{22}\right); \beta_{883} = -\frac{6l_{3y3}}{7h}; \beta_{88r} = \frac{1}{7}k'_2\left(\frac{1}{3}l_{4y3} - \frac{3}{5}l_{2y3}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{810r} &= \frac{1}{7}k'_2 \left(\frac{1}{3}l_{4y4} - \frac{3}{5}l_{2y4} \right) - \frac{6l_{3y4}}{7h}; \quad \beta_{8111} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{35}}{5} - \frac{e_{55}}{22} \right); \\
\beta_{8121} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{35}}{5} - \frac{e_{55}}{22} \right); \quad \beta_{8122} = -\frac{6l_{3y5}}{7h}; \quad \beta_{812r} = \frac{1}{7}k'_2 \left(\frac{1}{3}l_{4y5} - \frac{3}{5}l_{2y5} \right); \quad \beta_{8131} = -\frac{6h_{31}}{7h}; \\
\beta_{814r} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{32}}{5} - \frac{q_{52}}{22} \right) + \frac{k'_2}{7} \left(\frac{h_{42}}{3} - \frac{3h_{22}}{5} \right); \quad \beta_{8151} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{33}}{5} - \frac{q_{53}}{22} \right) - \frac{6h_{33}}{7h}; \\
\beta_{816r} &= \frac{hd_0 k_{2v}}{7} + \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{34}}{5} - \frac{q_{54}}{22} \right) + \frac{k'_2}{7} \left(\frac{h_{44}}{3} - \frac{3h_{24}}{5} \right); \quad \beta_{8171} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{35}}{5} - \frac{q_{55}}{22} \right) - \frac{6h_{35}}{7h}; \\
\gamma_{991} &= \frac{hd_0}{9} + \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{44}}{11} - \frac{e_{24}}{10} \right); \quad \gamma_{992} = \frac{hG}{9}; \quad \gamma_{993} = \frac{-2l_{4x4}}{3h}; \quad \gamma_{99r} = \frac{k'_1}{3} \left(\frac{l_{5x4}}{11} - \frac{l_{3x4}}{7} \right); \\
\gamma_{9101} &= \frac{h}{9} \mathbf{G} + d_{0v} \rceil \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{44}}{11} - \frac{e_{24}}{10} \right); \quad \gamma_{911r} = \frac{k'_1}{3} \left(\frac{l_{5x5}}{11} - \frac{l_{3x5}}{7} \right) - \frac{2l_{4x5}}{3h}; \\
\gamma_{913r} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{41}}{11} - \frac{q_{21}}{10} \right) + \frac{k'_1}{3} \left(\frac{h_{51}}{11} - \frac{h_{31}}{7} \right); \quad \gamma_{9141} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{42}}{11} - \frac{q_{22}}{10} \right) - \frac{2h_{42}}{3h}; \\
\gamma_{915r} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{43}}{11} - \frac{q_{23}}{10} \right) + \frac{k'_1}{3} \left(\frac{h_{53}}{11} - \frac{h_{33}}{7} \right); \quad \gamma_{9161} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{44}}{11} - \frac{q_{24}}{10} \right) - \frac{2h_{44}}{3h}; \\
\gamma_{917r} &= \frac{hd_0 k_{1v}}{9} + \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{45}}{11} - \frac{q_{25}}{10} \right) + \frac{k'_1}{3} \left(\frac{h_{55}}{11} - \frac{h_{35}}{7} \right); \quad \gamma_{u4} = \frac{23hd_{10}}{700}; \quad \gamma_{10101} = \frac{hG}{9}; \\
\gamma_{10102} &= \frac{hd_0}{9} + \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{e_{44}}{11} - \frac{e_{24}}{10} \right); \quad \gamma_{10103} = \frac{-2l_{4y4}}{3h}; \quad \gamma_{1010r} = \frac{k'_2}{3} \left(\frac{l_{5y4}}{11} - \frac{l_{3y4}}{7} \right); \\
\gamma_{1012r} &= \frac{k'_2}{3} \left(\frac{l_{5y5}}{11} - \frac{l_{3y5}}{7} \right) - \frac{2l_{4y5}}{3h}; \quad \gamma_{1013r} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{41}}{11} - \frac{q_{21}}{10} \right) + \frac{k'_2}{3} \left(\frac{h_{51}}{11} - \frac{h_{31}}{7} \right); \\
\gamma_{10141} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{42}}{11} - \frac{q_{22}}{10} \right) - \frac{2h_{42}}{3h}; \quad \gamma_{1015r} = \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{43}}{11} - \frac{q_{23}}{10} \right) + \frac{k'_1}{3} \left(\frac{h_{53}}{11} - \frac{h_{33}}{7} \right); \\
\gamma_{10161} &= \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{44}}{11} - \frac{q_{24}}{10} \right) - \frac{2h_{44}}{3h}; \quad \gamma_{1017r} = \frac{hd_0 k_{2v}}{9} + \frac{hd_{10}}{21} \left(\frac{q_{45}}{11} - \frac{q_{25}}{10} \right) + \frac{k'_2}{3} \left(\frac{h_{55}}{11} - \frac{h_{35}}{7} \right); \\
\beta_{11111} &= \frac{hd_0}{11} + \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{e_{55}}{13} - \frac{e_{35}}{14} \right); \quad \beta_{11112} = \frac{hG}{11}; \quad \beta_{11113} = \frac{-6l_{5x5}}{11h}; \quad \beta_{1111r} = -\frac{1}{33}k'_1 l_{4x5}; \\
\beta_{11121} &= \frac{h}{11} \mathbf{G} + d_{0v} \rceil \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{e_{55}}{13} - \frac{e_{35}}{14} \right); \quad \beta_{11131} = \frac{-6h_{51}}{11h}; \\
\beta_{1114r} &= \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{52}}{13} - \frac{q_{32}}{14} \right) - \frac{k'_1}{33} h_{42}; \quad \beta_{11151} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{53}}{13} - \frac{q_{33}}{14} \right) - \frac{6h_{53}}{11h}; \\
\beta_{1116r} &= \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{54}}{13} - \frac{q_{34}}{14} \right) - \frac{k'_1}{33} h_{44}; \quad \beta_{11171} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{55}}{13} - \frac{q_{35}}{14} \right) - \frac{6h_{55}}{11h}; \quad \beta_{u5} = \frac{2hd_{10}}{99}; \\
\beta_{12121} &= \frac{hG}{11}; \quad \beta_{12122} = \frac{hd_0}{11} + \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{e_{55}}{13} - \frac{e_{35}}{14} \right); \quad \beta_{12123} = \frac{-6l_{5y5}}{11h}; \quad \beta_{1212r} = \frac{-k'_2 l_{4y5}}{33};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{12131} &= \frac{-6h_{51}}{11h}; \beta_{1214r} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{52}}{13} - \frac{q_{32}}{14} \right) - \frac{k'_2}{33} h_{42}; \beta_{12151} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{53}}{13} - \frac{q_{33}}{14} \right) - \frac{6h_{53}}{11h}; \\
\beta_{1216r} &= \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{54}}{13} - \frac{q_{34}}{14} \right) - \frac{k'_2}{33} h_{44}; \beta_{12171} = \frac{hd_{10}}{33} \left(\frac{q_{55}}{13} - \frac{q_{35}}{14} \right) - \frac{6h_{55}}{11h}; \beta_{13131} = -h_{11}; \\
\beta_{1313r} &= hd_0 k_v - \frac{hd_{10} k_{12} q_{21}}{10}; \beta_{1314r} = -\frac{hd_{10} k_{12} q_{22}}{10}; \beta_{13151} = -h_{13}; \\
\beta_{1315r} &= -\frac{hd_{10} k_{12} q_{23}}{10}; \beta_{1316r} = -\frac{hd_{10} k_{12} q_{24}}{10}; \beta_{13171} = -h_{15}; \beta_{1317r} = -\frac{hd_{10} k_{12} q_{25}}{10}; \\
\gamma_{w1} &= \frac{53}{700} hd_{10} k_{12}; \beta_{w1} = -1; \gamma_{14141} = -\frac{h_{22}}{5}; \gamma_{14142} = -\frac{q_{22}}{5}; \gamma_{14161} = -\frac{h_{24}}{5}; \\
\gamma_{1414r} &= h \left(\frac{d_0 k_v}{3} - \frac{d_{10} k_{12}}{70} q_{32} \right); \gamma_{1415r} = -\frac{1}{5} \left(q_{23} + \frac{1}{14} hd_{10} k_{12} q_{33} \right); \gamma_{1416r} = -\frac{1}{70} hd_{10} k_{12} q_{34}; \\
\gamma_{14162} &= -\frac{q_{24}}{5}; \gamma_{1417r} = -\frac{1}{5} \left(q_{25} + \frac{1}{14} hd_{10} k_{12} q_{35} \right); \gamma_{w2} = -\frac{297}{350}; \beta_{w2} = \frac{1}{18} hd_{10} k_{12}; \\
\beta_{15151} &= \frac{1}{5} \left(h_{13} - \frac{3}{7} h_{33} \right); \beta_{15152} = -\frac{3q_{33}}{35}; \beta_{1515r} = \frac{hd_0 k_v}{5} + \frac{hd_{10} k_{12}}{35} \left(q_{23} - \frac{q_{43}}{6} \right); \\
\beta_{1516r} &= \frac{hd_{10} k_{12}}{35} \left(q_{24} - \frac{q_{44}}{6} \right) - \frac{3}{35} q_{34}; \beta_{15171} = \frac{1}{5} \left(h_{15} - \frac{3}{7} h_{35} \right); \beta_{15172} = -\frac{3}{35} q_{35}; \\
\beta_{1517r} &= \frac{hd_{10} k_{12}}{35} \left(q_{25} - \frac{q_{45}}{6} \right); \gamma_{w3} = \frac{11}{175} hd_{10} k_{12}; \beta_{w3} = -\frac{2}{3}; \gamma_{16161} = \frac{1}{7} \left(\frac{3}{5} h_{24} - \frac{1}{3} h_{44} \right); \\
\gamma_{16162} &= \frac{1}{7} \left(\frac{3}{5} q_{24} - \frac{1}{3} q_{44} \right); \gamma_{1616r} = \frac{hd_0 k_v}{7} + \frac{hd_{10} k_{12}}{21} \left(\frac{q_{34}}{5} - \frac{q_{54}}{22} \right); \\
\gamma_{1617r} &= \frac{hd_{10} k_{12}}{21} \left(\frac{q_{35}}{5} - \frac{q_{55}}{22} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{3q_{25}}{5} - \frac{q_{45}}{3} \right); \gamma_{w4} = -\frac{11}{50}; \beta_{w4} = \frac{389}{16632} hd_{10} k_{12}; \\
\beta_{17171} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} h_{35} - \frac{1}{11} h_{55} \right); \beta_{17172} = \frac{1}{3} \left(\frac{q_{35}}{7} - \frac{q_{55}}{11} \right); \\
\beta_{1717r} &= \frac{hd_0 k_v}{9} + \frac{hd_{10} k_{12}}{21} \left(\frac{q_{45}}{11} - \frac{q_{25}}{10} \right); \gamma_{w5} = \frac{253}{35} hd_{10} k_{12}; \beta_{w5} = -\frac{13}{198}.
\end{aligned}$$

В.2. Ілюстрації компонент НДС у вигляді таблиць і графіків

Таблиця В.1

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки ($h/a = 0,2$;
 $R_{1,2}/a = 5$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$; $k'_{1,2} \neq 0/k'_{1,2} = 0$)

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{31}	Δ_{53}
	$\tilde{\sigma}_x$					
0,5	-5,688 -5,703	-6,954 -6,940	-7,068 -7,050	0,25	18,2 -	1,61 -
0	-1,015 -1,040	-0,9702 -1,009	-0,9870 -1,025	3,85	- -	- -
-0,5	3,658 3,623	4,958 4,945	5,070 5,061	0,18	26,2 -	2,21 -
z/h	\tilde{W}					
0,5	-52,26 -52,01	-50,71 -50,36	-50,62 -50,37	0,49	3,06 -	0,18 -
0	-52,26 -52,01	-51,46 -51,21	-51,45 -51,20	0,49	- -	- -
-0,5	-52,26 -52,01	-51,39 -51,16	-51,29 -51,05	0,47	1,69 -	0,19 -

Таблиця В.2

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки ($h/a = 0,2$;
 $R_{1,2}/a = 5$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$; $k'_{1,2} \neq 0/k'_{1,2} = 0$)

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{31}	Δ_{53}
	$\tilde{\sigma}_x$					
0,5	-5,851 -5,866	-7,006 -6,992	-6,959 -6,942	0,24	16,5 -	0,68 -
0	-1,186 -1,211	-1,032 -1,070	-1,025 -1,062	3,61	- -	- -
-0,5	3,479 3,444	4,844 4,832	4,841 4,832	0,19	28,2 -	0,06 -
z/h	\tilde{W}					
0,5	-52,17 -51,91	-50,62 -50,35	-49,33 -49,07	0,53	3,06 -	2,62 -
0	-52,17 -51,91	-51,13 -50,87	-49,91 -49,66	0,50	- -	- -
-0,5	-52,17 -51,91	-50,83 -50,59	-49,52 -49,28	0,48	2,64 -	2,65 -

Таблиця В.3

Компоненти НДС квадратної в плані трансропної оболонки

 $(h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 2; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; k'_{1,2} \neq 0;$ $p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1)$

z/h	Компоненти НДС					
	НК01	НК0-3	НК0-5	НК01	НК0-3	НК0-5
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
0,5	-1,277	-1,700	-1,910	-4,839	-4,501	-4,471
	-1,437	-1,772	-1,706	-4,786	-4,549	-3,773
0	-0,582	-0,540	-0,552	-4,839	-4,609	-4,591
	-0,748	-0,575	-0,493	-4,786	-4,419	-3,675
-0,5	0,114	0,595	0,832	-4,839	-4,893	-4,853
	-0,059	0,502	0,630	-4,786	-4,473	-3,625

Таблиця В.4

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки

 $(h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 29/40; G'/G = 1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn}/q_{mn} = 0;$ $k'_{1,2} \neq 0 / k'_{1,2} = 0)$

z/h	КТ	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{1k}	Δ_{31}	Δ_{53}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,7789	-0,9052	-0,9740	-0,9921	6,59	14,0	7,06	1,82
		-0,9038	-0,9091	-0,9267		13,8	0,58	1,90
0	-0,1275	-0,2204	-0,1587	-0,1833	24,1	-	-	-
		-0,2359	-0,2065	-0,2274		-	-	-
-0,5	0,5239	0,4644	0,4330	0,4416	3,87	12,8	7,25	1,95
		0,4321	0,4464	0,4587		21,2	3,20	2,68
z/h	\tilde{W}							
0,5	-0,3696	-0,8225	-0,7379	-0,7485	18,3	55,1	11,5	1,42
		-0,6840	-0,5982	-0,6118		46,0	14,3	2,22
0	-0,3696	-0,8225	-0,8332	-0,8192	17,0	-	-	-
		-0,6840	-0,6949	-0,6799		-	-	-
-0,5	-0,3696	-0,8225	-1,0295	-0,9994	13,2	55,1	20,1	3,01
		-0,6840	-0,9033	-0,8679		46,0	24,3	4,08

Таблиця В.5

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки

 $(h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn}/q_{mn} = 0;$ $k'_{1,2} \neq 0/k'_{1,2} = 0)$

z/h	КТ	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{1k}	Δ_{31}	Δ_{53}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,8091	-0,9574 -0,9682	-1,048 -1,046	-1,054 -1,051	0,28	15,5 16,4	8,65 7,44	0,57 0,48
0	-0,0223	-0,0384 -0,0512	-0,0223 -0,0412	-0,0289 -0,0476	64,7	- -	- -	- -
-0,5	0,7645	0,8805 0,8657	0,9634 0,9600	0,9692 0,9668	0,25	13,2 11,7	8,60 9,82	0,60 0,70
z/h	\tilde{W}							
0,5	-0,4465	-1,030 -1,025	-0,9837 -0,9738	-0,9687 -0,9598	0,92	56,7 56,4	4,71 5,26	1,55 1,46
0	-0,4465	-1,030 -1,025	-0,9674 -0,9623	-0,9647 -0,9593	0,56	- -	- -	- -
-0,5	-0,4465	-1,030 -1,025	-1,040 -1,039	-1,016 -1,015	0,10	56,7 56,4	0,96 1,35	2,36 2,36

Таблиця В.6

Компоненти НДС квадратної в плані трансропної оболонки

 $(h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn}/q_{mn} = 0;$ $k'_{1,2} \neq 0/k'_{1,2} = 0)$

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{51}
	$\tilde{\sigma}_x$						
0,5	-1,181 -1,190	-1,778 -1,778	-2,057 -2,052	0,24	33,6	13,6	42,6
0	-0,3042 -0,3150	-0,2769 -0,2916	-0,2830 -0,2965	4,77	-	-	-
-0,5	0,5728 0,5603	1,215 1,208	1,509 1,505	0,27	52,9	19,5	62,0
z/h	\tilde{W}						
0,5	-6,331 -6,299	-5,900 -5,866	-5,848 -5,815	0,56	7,31	0,89	8,26
0	-6,331 -6,299	-5,914 -5,884	-5,891 -5,861	0,51	7,05	0,39	7,45
-0,5	-6,331 -6,299	-6,102 -6,077	-6,046 -6,020	0,43	3,75	0,93	4,71

Таблиця В.7

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки

($h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; p_{mn}/q_{mn} = 1;$
 $k'_{1,2} \neq 0 / k'_{1,2} = 0$)

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{51}
	$\tilde{\sigma}_x$						
0,5	-1,349	-1,869	-2,048	0,24	27,8	8,74	34,1
	-1,358	-1,869	-2,043				
0	-0,4754	-0,3304	-0,3212	3,83	43,9	2,86	48,0
	-0,4860	-0,3446	-0,3335				
-0,5	0,3982	1,105	1,295	0,23	64,0	14,7	69,3
	0,3859	1,098	1,292				
z/h	\tilde{W}						
0,5	-6,304	-6,032	-5,604	0,61	4,51	7,63	12,5
	-6,271	-5,996	-5,570				
0	-6,304	-5,816	-5,429	0,57	8,39	7,13	16,1
	-6,271	-5,783	-5,398				
-0,5	-6,304	-5,777	-5,330	0,51	9,12	8,39	18,3
	-6,271	-5,748	-5,303				

Таблиця В.8

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки

($h/a = 0,2; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 0,1; \nu' = 0,03; \nu = 0,3; m = n = 1;$
 $k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ_{pq}	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{51}
	$\tilde{\sigma}_x$						
0,5	-5,688	-7,005	-7,125	1,12	18,8	1,68	20,2
	-5,851	-7,234	-7,206				
0	-1,015	-0,9649	-0,9818	3,73	5,19	1,72	3,38
	-1,186	-0,9535	-0,9465				
-0,5	3,658	4,968	5,087	6,76	26,4	2,34	28,1
	3,479	4,775	4,765				
z/h	\tilde{W}						
0,5	-52,26	-51,44	-51,36	0,91	1,59	0,16	1,75
	-52,17	-53,24	-51,83				
0	-52,26	-51,18	-51,15	3,88	2,11	0,06	2,17
	-52,17	-50,63	-49,24				
-0,5	-52,26	-53,00	-52,67	9,34	1,40	0,63	0,78
	-52,17	-49,84	-48,17				

Таблиця В.9

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки

 $(h/a = 0,5; R_{1,2}/a = 29/40; \nu = 0,3; m = n = 1; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0)$

z/h	КТ	НК01	НК013 НК0-3 Δ'	НК0135 НК0-5 Δ'	КТ	НК01	НК013 НК0-3 Δ'	НК0135 НК0-5 Δ'
	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
0,5	-0,779	-0,905	-0,991 -0,974 1,75	-0,991 -0,992 0,10	-0,370	-0,823	-0,832 -0,738 12,7	-0,822 -0,749 9,75
0	-0,128	-0,220	-0,188 -0,159 18,2	-0,187 -0,183 2,19	0,370	-0,823	-0,771 -0,833 7,44	-0,772 -0,819 5,74
-0,5	0,524	0,464	0,495 0,433 14,3	0,518 0,442 17,2	-0,370	-0,823	-0,832 -1,030 19,2	-0,822 -0,999 17,7

Таблиця В.10

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки

 $(h/a = 0,2; R_{1,2}/a = 5; \nu = 0,3; m = n = 9; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1)$

z/h	КТ	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ_{pq}	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{5k}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,0610	-0,1962 -0,3686	-0,2905 -0,4812	-0,3879 -0,9027	57,0	32,5 23,4	25,1 46,7	84,3 93,2
0	-0,0001	-0,0006 -0,1731	0,0001 0,0727	0,0001 -0,0186	-	- -	- -	- -
-0,5	0,0609	0,1951 0,0225	0,2875 0,0987	0,3849 -0,1432	169	32,1 77,2	25,3 31,1	84,2 57,5
	\tilde{W}							
0,5	-0,0027	-0,0480 -0,0479	-0,1169 -0,2044	-0,1214 -0,2811	56,8	58,9 76,6	3,71 27,3	97,8 99,0
0	-0,0027	-0,0480 -0,0479	-0,0154 -0,0153	-0,0158 -0,0044	-	- -	- -	- -
-0,5	-0,0027	-0,0480 -0,0479	-0,1177 -0,0292	-0,1226 -0,0845	45,1	59,2 64,0	4,00 65,4	97,8 96,8

Таблиця В.11

Компоненти НДС квадратної в плані трансропної оболонки
 ($h/a = 0,2; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 9;$
 $k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ_{pq}	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{51}
	$\tilde{\sigma}_x$						
0,5	-0,2050 -0,3773	-0,2383 -0,3438	-0,3682 -0,5787	36,4	14,0 9,74	35,3 40,6	44,3 34,8
0	-0,0093 -0,1818	-0,0077 -0,0477	-0,0072 -0,0782	-	20,8 281	6,94 39,0	29,2 132
-0,5	0,1863 0,0137	0,2191 0,1203	0,3538 0,0971	264	15,0 88,6	38,1 23,9	47,3 85,9
z/h	\tilde{W}						
0,5	-0,4867 -0,4859	-0,5160 -0,7081	-0,5020 -0,6866	26,9	5,68 31,4	2,79 3,13	3,05 29,2
0	-0,4867 -0,4859	-0,4007 -0,3981	-0,3888 -0,3650	6,52	21,5 22,1	3,06 9,07	25,2 33,1
-0,5	-0,4867 -0,4859	-0,5211 -0,3243	-0,5072 -0,2540	99,7	6,60 49,8	2,74 27,7	4,04 91,3

Таблиця В.12

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки
 ($h/a = 0,1; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 1; E'/E = 1; \nu' = 0,3; \nu = 0,3; m = n = 9;$
 $k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$)

z/h	КТ	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ_{pq}	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{5k}
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,2444	-0,3800 -0,5523	-0,4892 -0,7467	-0,5130 -0,8290	23,8	22,3 26,0	4,64 9,93	52,4 70,5
0	-0,0004	-0,0014 -0,1739	-0,0004 0,0456	-0,0008 0,0312	-	- -	- -	- -
-0,5	0,2435	0,3772 0,2045	0,4851 0,2294	0,5086 0,1904	167	22,2 10,9	4,62 20,5	52,1 27,9
z/h	\tilde{W}							
0,5	-0,0427	-0,2239 -0,2238	-0,2931 -0,4851	-0,2781 -0,4692	40,7	23,6 53,9	5,39 3,39	84,6 90,9
0	-0,0427	-0,2239 -0,2238	-0,1766 -0,1756	-0,1747 -0,1665	4,92	26,8 27,4	1,09 5,47	75,6 74,4
-0,5	-0,0427	-0,2239 -0,2238	-0,2958 -0,1016	-0,2801 -0,0640	338	24,3 120	5,61 58,8	84,8 33,3

Таблиця В.13

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки
 ($h/a=0,1; R_{1,2}/a=5; G'/G=0,1; E'/E=1; v'=0,3; v=0,3; m=n=9;$

$$k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1)$$

z/h	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ_{pq}	Δ_{31}	Δ_{53}	Δ_{51}
	$\tilde{\sigma}_x$						
0,5	-0,3974	-0,6473	-0,9122	14,6	38,6	29,0	56,4
	-0,5697	-0,7571	-1,068		24,8	29,1	46,7
0	-0,0190	-0,0166	-0,0166	-	-	-	-
	-0,1915	-0,0688	-0,0809		-	-	-
-0,5	0,3595	0,6126	0,8815	26,3	41,3	30,5	59,2
	0,1868	0,5042	0,6982		63,0	27,8	73,2
z/h	\tilde{W}						
	0,5	-1,979	-1,874	-1,840	9,49	5,60	1,85
0	-1,977	-2,089	-2,033	1,82	5,36	2,75	2,75
	-1,979	-1,760	-1,735		12,4	1,44	14,1
-0,5	-1,977	-1,754	-1,704	16,8	12,7	2,93	16,0
	-1,979	-1,886	-1,852		4,93	1,84	3,94
-1,977	-1,659	-1,586	-1,586	19,2	4,60	4,60	24,7

Таблиця В.14

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки
 ($h/a=0,2; R_{1,2}/a=5; G'/G=1; E'/E=1/3; v'=0,3; v=0,3; m=n=9;$

$$k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1)$$

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
	НК01	НК0-3	НК0-5	НК01	НК0-3	НК0-5
0,5	-0,4655	-0,4998	-0,7285	-0,0410	-0,1668	-0,2018
	-0,9826	-0,8083	-1,2559	-0,0408	-0,2559	-0,2276
0	-0,0004	0,0010	0,0013	-0,0410	0,0170	0,0117
	-0,5179	0,1982	0,0203	-0,0408	0,0174	0,0796
-0,5	0,4646	0,4927	0,7083	-0,0410	-0,1660	-0,1985
	-0,0532	0,1855	0,0912	-0,0408	-0,0763	0,1237

Таблиця В.15

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки
 ($h/a = 0,2; R_{1,2}/a = 5; G'/G = 1; E'/E = 1; \nu' = 0,03; \nu = 0,3; m = n = 9;$
 $k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
	НК01	НК0-3	НК0-5	НК01	НК0-3	НК0-5
0,5	-0,0751	-0,2357	-0,3330	-0,0511	-0,1246	-0,1360
	-0,0923	-0,3762	-0,8640	-0,0511	-0,2173	-0,3327
0	-0,0006	-0,0002	0,0003	-0,0511	-0,0203	-0,0212
	-0,0179	0,0668	-0,0757	-0,0511	-0,0204	-0,0198
-0,5	0,0738	0,2325	0,3301	-0,0511	-0,1259	-0,1378
	0,0566	0,0941	-0,1762	-0,0511	-0,0317	0,0658

Таблиця В.16

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для пологих оболонок

($G'/G = 1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$)

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (ГР)	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 10$	Δ_{po}	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po}	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po}
$\frac{1}{3}$	0,5	-1,995	-2,040	2,26	-2,019	1,20	-2,007	0,60
		-2,125	-2,128	0,14	-2,127	0,09	-2,126	0,05
	0,0	0,0000	-0,0422	-	-0,0212	-	-0,0106	-
		-0,0481	-0,0881	-	-0,0683	-	-0,0580	-
	-0,5	1,995	1,936	2,96	1,966	1,45	1,981	0,70
		1,865	1,766	5,31	1,816	2,63	1,840	1,34
$\frac{1}{5}$	0,5	-5,148	-5,309	3,13	-5,239	1,77	-5,196	0,93
		-5,244	-5,330	1,64	-5,298	1,03	-5,274	0,57
	0,0	0,0000	-0,1809	-	-0,0909	-	-0,0455	-
		-0,0647	-0,2424	-	-0,1547	-	-0,1098	-
	-0,5	5,148	4,913	4,56	5,040	2,10	5,096	1,01
		5,052	4,749	6,00	4,909	2,83	4,983	1,37
$\frac{1}{10}$	0,5	-20,02	-20,82	4,00	-20,54	2,60	-20,29	1,35
		-20,10	-20,75	3,23	-20,55	2,24	-20,33	1,14
	0,0	0,0000	-1,376	-	-0,7024	-	-0,3530	-
		-0,0723	-1,438	-	-0,7721	-	-0,4247	-
	-0,5	20,02	18,00	10,1	19,10	4,60	19,57	2,25
		19,94	17,79	10,8	18,95	4,96	19,45	2,46

Таблиця В.17

Значення \tilde{W} для пологих оболонок $(G'/G=1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn}=0/p_{mn}/q_{mn}=1)$

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (ТР)	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 10$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 20$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po} %
$\frac{1}{3}$	0,5	-3,373	-3,339	1,01	-3,357	0,47	-3,364	0,27
		-3,599	-3,462	3,81	-3,531	1,89	-3,564	0,97
	0,0	-3,493	-3,483	0,29	-3,489	0,11	-3,490	0,09
		-3,493	-3,381	3,21	-3,438	1,57	-3,465	0,80
	-0,5	-3,373	-3,389	0,47	-3,381	0,24	-3,377	0,12
		-3,147	-3,059	2,80	-3,103	1,40	-3,124	0,73
$\frac{1}{5}$	0,5	-20,39	-20,18	1,03	-20,32	0,34	-20,36	0,15
		-20,61	-20,09	2,52	-20,38	1,12	-20,51	0,49
	0,0	-20,98	-20,84	0,67	-20,95	0,14	-20,97	0,05
		-20,98	-20,52	2,19	-20,78	0,95	-20,89	0,43
	-0,5	-20,39	-20,33	0,29	-20,39	0,00	-20,39	0,00
		-20,16	-19,78	1,88	-20,00	0,79	-20,09	0,35
$\frac{1}{10}$	0,5	-292,3	-283,1	3,15	-289,2	1,06	-290,8	0,51
		-292,6	-281,2	3,90	-288,4	1,44	-290,5	0,72
	0,0	-295,2	-286,3	3,01	-292,2	1,02	-293,8	0,47
		-295,2	-284,2	3,73	-291,2	1,36	-293,2	0,68
	-0,5	-292,3	-284,0	2,84	-289,7	0,89	-291,1	0,41
		-292,1	-281,7	3,56	-288,4	1,27	-290,3	0,62

Таблиця В.18

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для пологих оболонок $(G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn}=0/p_{mn}/q_{mn}=1)$

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (точний розв'язок)	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 10$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 20$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po} %
$\frac{1}{3}$	0,5	-3,190	-3,360	5,33	-3,278	2,76	-3,226	1,13
		-3,299	-3,393	2,85	-3,349	1,52	-3,316	0,52
	0,0	0,0000	-0,2462	-	-0,1245	-	-0,0625	-
		-0,0648	-0,3034	-	-0,1866	-	-0,1258	-
	-0,5	3,190	2,871	10,0	3,031	4,98	3,102	2,76
		3,081	2,702	12,3	2,890	6,20	2,978	3,34

Продовження табл. В.18

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (точний розв'язок)	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 10$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 20$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po} %
$\frac{1}{5}$	0,5	-6,593 -6,685	-6,981 -6,973	5,89 4,31	-6,823 -6,866	3,49 2,71	-6,715 -6,783	1,85 1,47
	0,0	0,0000 -0,0685	-0,5235 -0,5836	- -	-0,2658 -0,3318	- -	-0,1334 -0,2010	- -
	-0,5	6,593 6,502	5,921 5,748	10,2 11,6	6,285 6,150	4,67 5,41	6,445 6,332	2,24 2,61
$\frac{1}{10}$	0,5	-21,57 -21,65	-22,75 -22,67	5,47 4,71	-22,41 -22,41	3,89 3,51	-22,05 -22,09	2,23 2,03
	0,0	0,0000 -0,0727	-2,039 -2,096	- -	-1,051 -1,120	- -	-0,5297 -0,6013	- -
	-0,5	21,57 21,49	18,62 18,41	13,7 14,3	20,28 20,12	5,98 6,38	20,98 20,86	2,74 2,93

Таблиця В.19

Значення \tilde{W} для пологих оболонок $(G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 1; k'_{1,2} \neq 0; p_{mn}/q_{mn} = 0/p_{mn}/q_{mn} = 1)$

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (точний розв'язок)	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 10$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 20$	Δ_{po} %	Об-ка $\frac{R_{1,2}}{a} = 40$	Δ_{po} %
$\frac{1}{3}$	0,5	-15,56 -15,79	-15,25 -15,09	1,99 4,43	-15,47 -15,50	0,58 1,84	-15,54 -15,67	0,06 0,76
	0,0	-15,66 -15,66	-15,41 -15,03	1,60 4,02	-15,60 -15,40	0,38 1,66	-15,64 -15,54	0,13 0,77
	-0,5	-15,56 -15,34	-15,42 -14,80	0,90 3,52	-15,54 -15,13	0,13 1,37	-15,55 -15,26	0,06 0,52
$\frac{1}{5}$	0,5	-55,15 -55,38	-53,87 -53,29	2,32 3,77	-54,78 -54,60	0,67 1,41	-55,04 -55,06	0,20 0,58
	0,0	-55,70 -55,70	-54,57 -53,76	2,03 3,48	-55,41 -55,00	0,52 1,26	-55,63 -55,42	0,13 0,50
	-0,5	-55,15 -54,92	-54,22 -53,18	1,69 3,17	-54,96 -54,32	0,34 1,09	-55,13 -54,70	0,04 0,40
$\frac{1}{10}$	0,5	-432,8 -433,0	-414,7 -411,9	4,18 4,87	-428,0 -426,6	1,11 1,48	-431,5 -430,9	0,30 0,48
	0,0	-435,5 -435,5	-418,0 -414,9	4,02 4,73	-431,0 -429,4	1,03 1,40	-434,4 -433,6	0,25 0,44
	-0,5	-432,8 -432,5	-416,0 -412,7	3,88 4,58	-428,6 -426,8	0,97 1,32	-431,8 -430,8	0,23 0,39

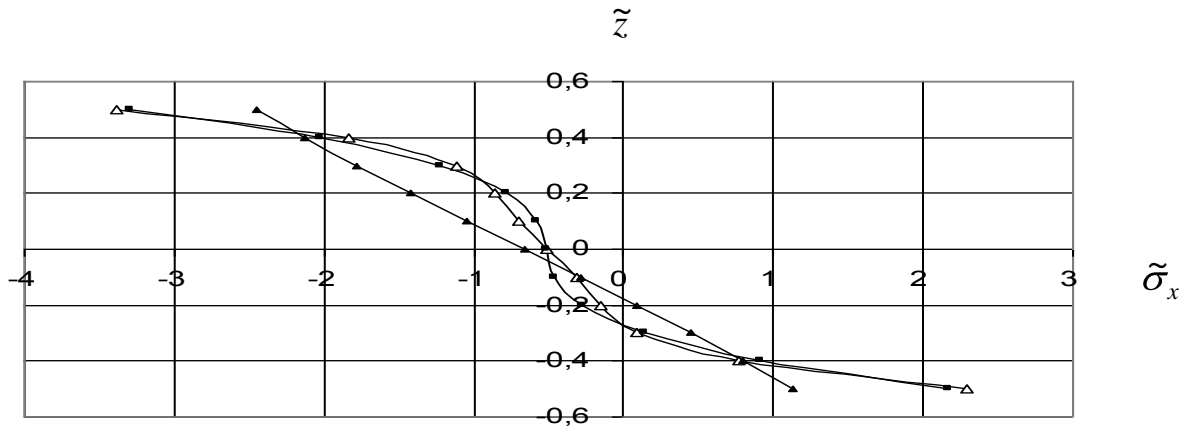


Рис. В.1. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=5; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=1$).

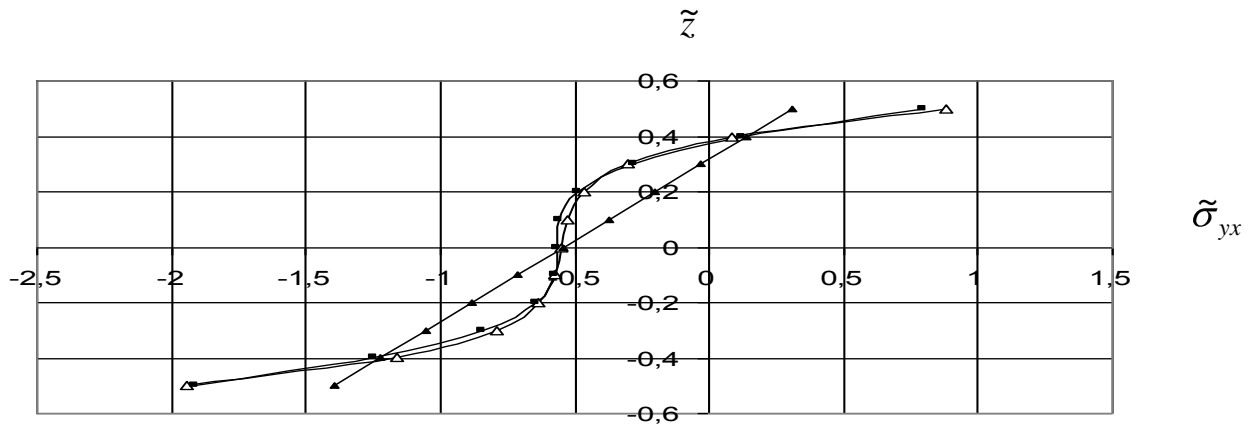


Рис. В.2. Змінювання $\tilde{\sigma}_{yx}$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=5; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=1$).

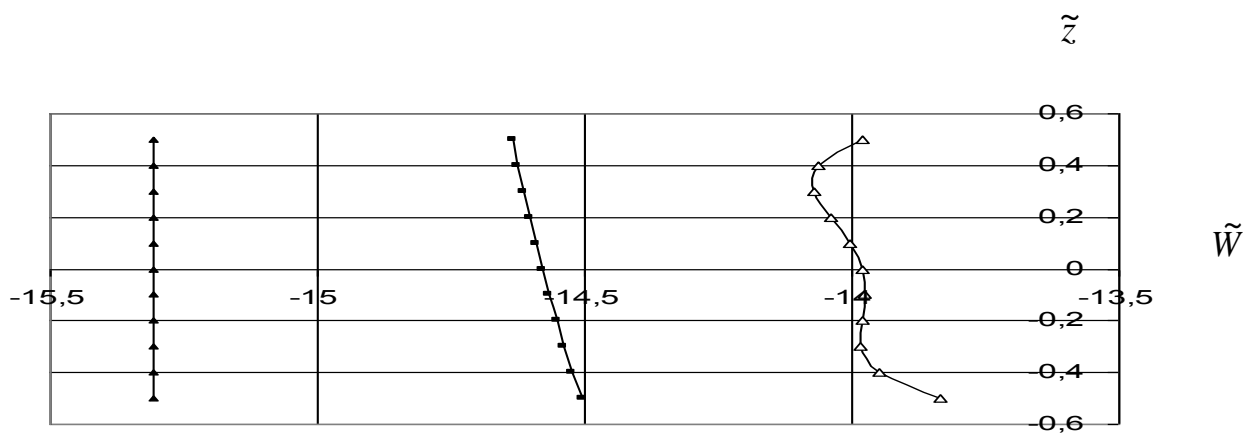


Рис. В.3. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=5; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=1$).

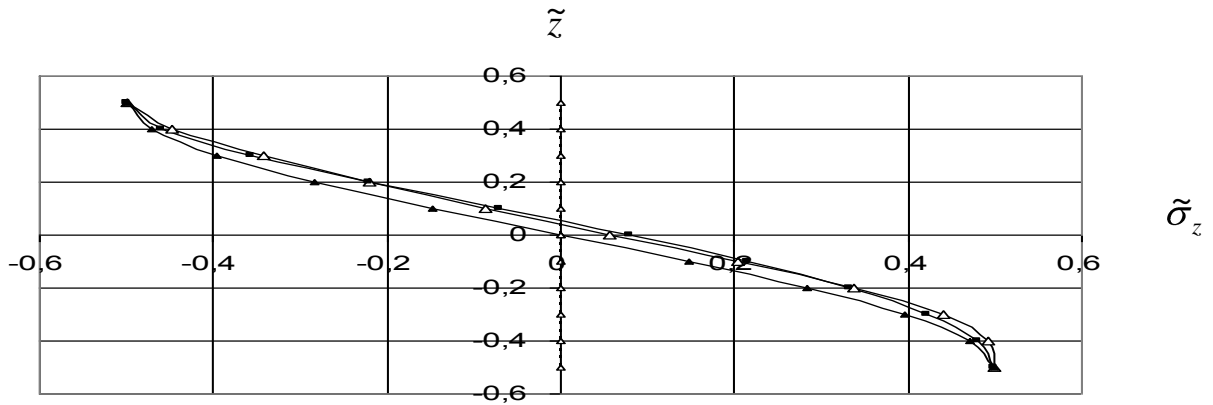


Рис. В.4. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині квадратної в плані оболонки
($h/a=1/3$; $R_1/a=R_2/a=5$; $G'/G=1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=1$; $p_{mn}/q_{mn}=0$).

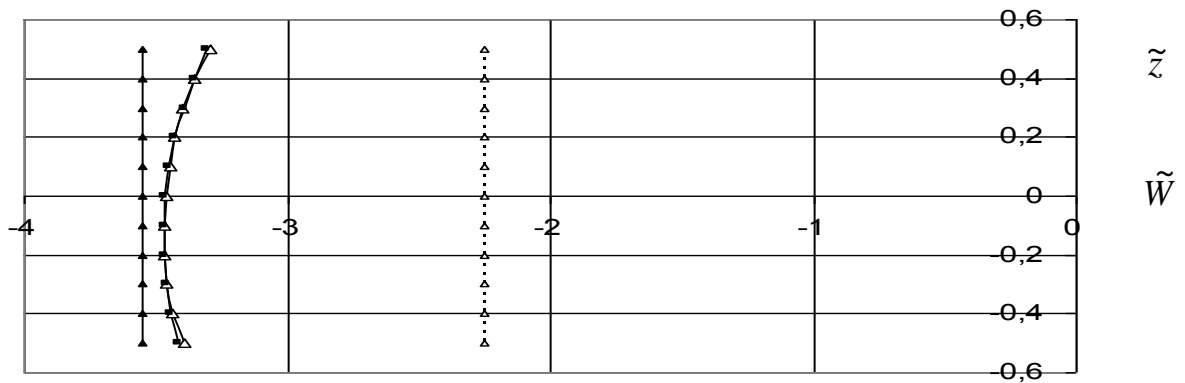


Рис. В.5. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної в плані оболонки
($h/a=1/3$; $R_1/a=R_2/a=5$; $G'/G=1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=1$; $p_{mn}/q_{mn}=0$).

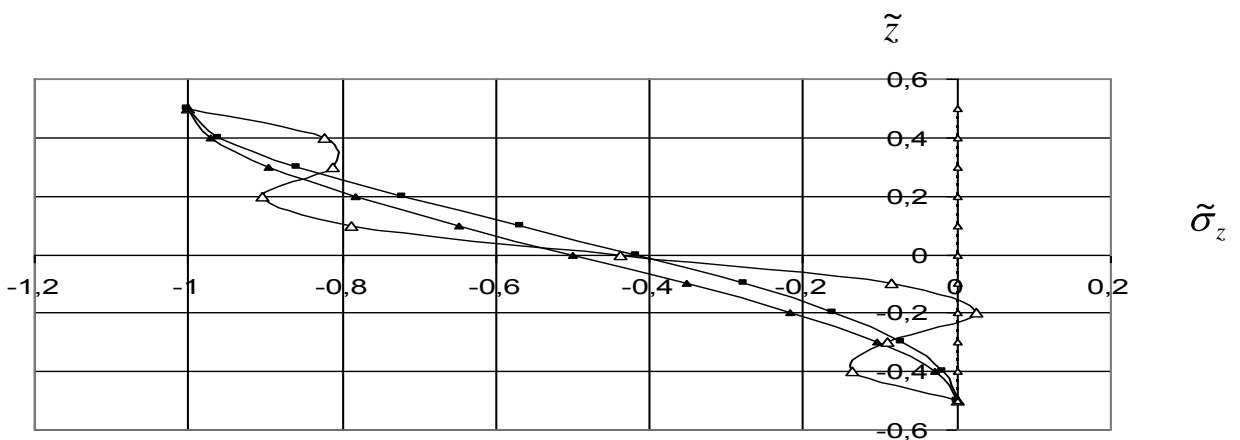


Рис. В.6. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині квадратної в плані оболонки
($h/a=1/3$; $R_1/a=R_2/a=5$; $G'/G=1$; $E'/E=1$; $\nu'=\nu=0,3$; $m=n=1$; $p_{mn}/q_{mn}=1$).

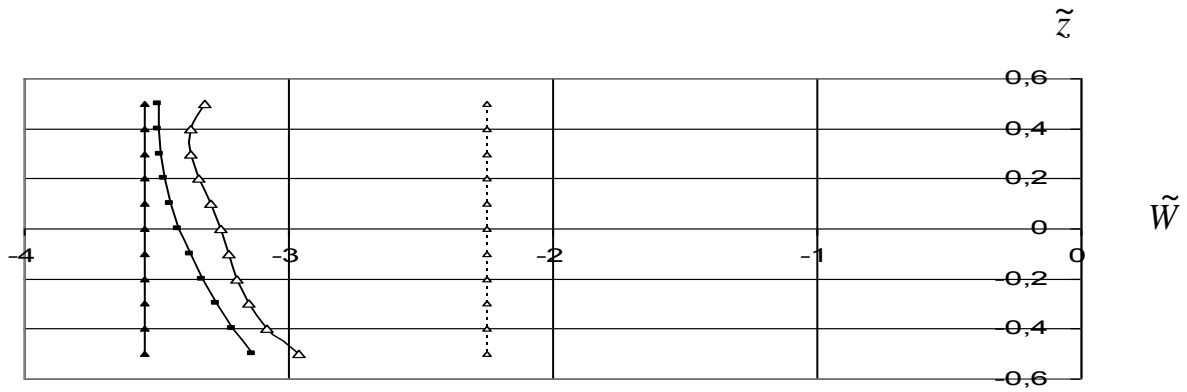


Рис. В.7. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=5; G'/G=1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=1$).

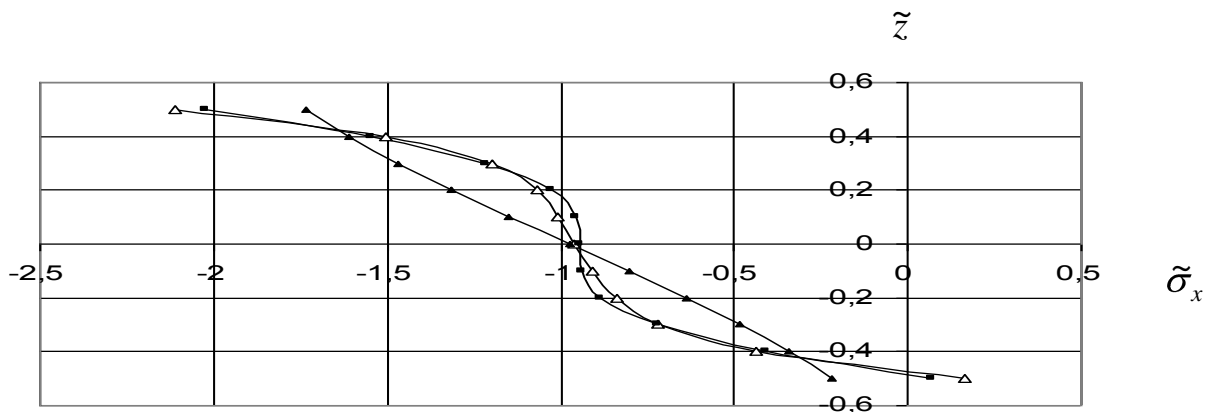


Рис. В.8. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=1; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0$).

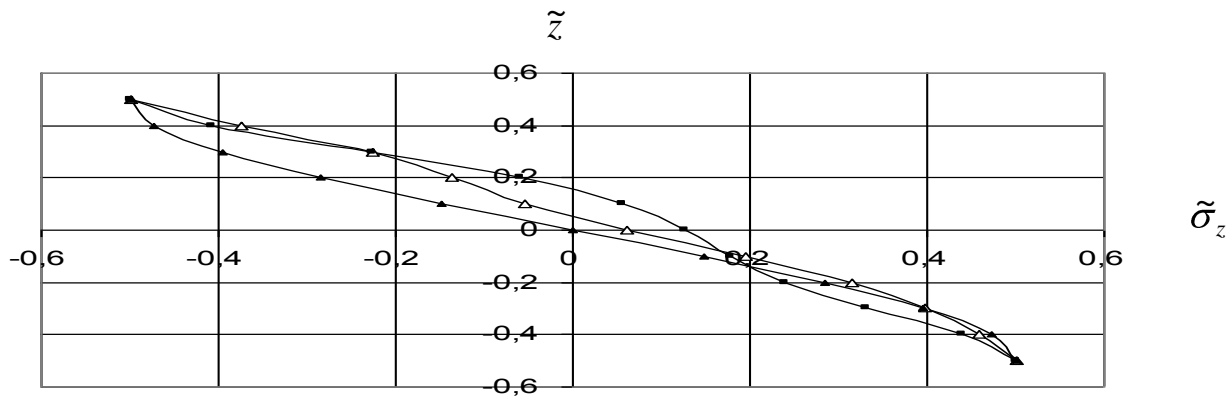


Рис. В.9. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a=1/3; R_1/a=R_2/a=1; G'/G=0,1; E'/E=1; \nu'=\nu=0,3; m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0$).

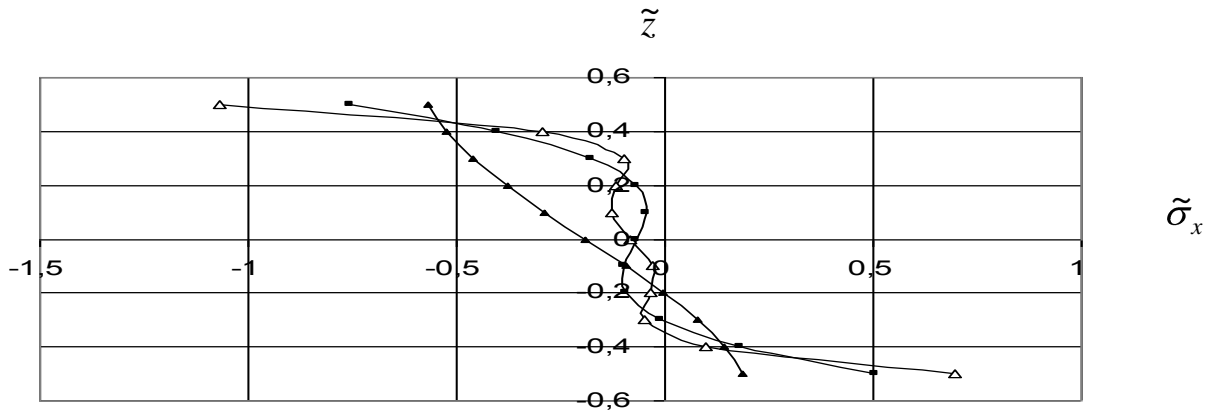


Рис. В.10. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a = 0,1; R_1/a = R_2/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 9; p_{mn}/q_{mn} = 1$).

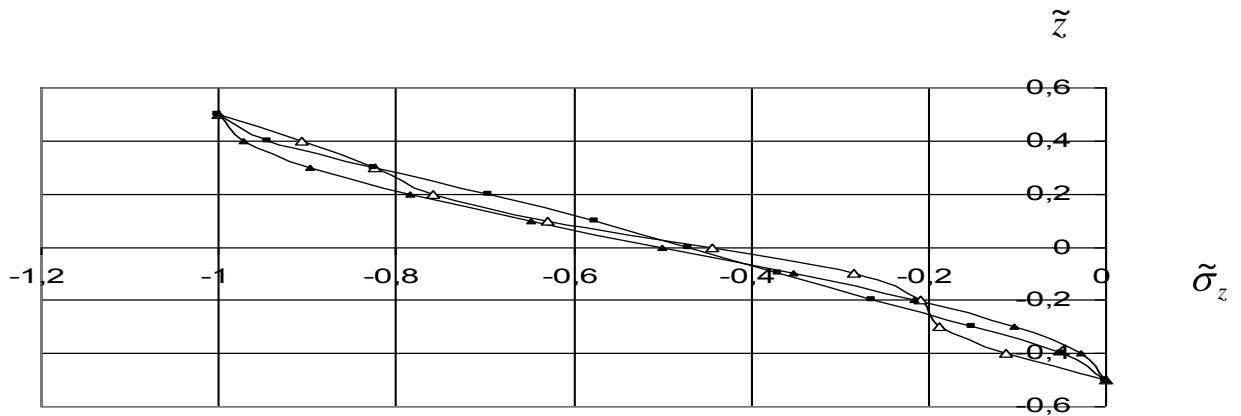


Рис. В.11. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a = 0,1; R_1/a = R_2/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 9; p_{mn}/q_{mn} = 1$).

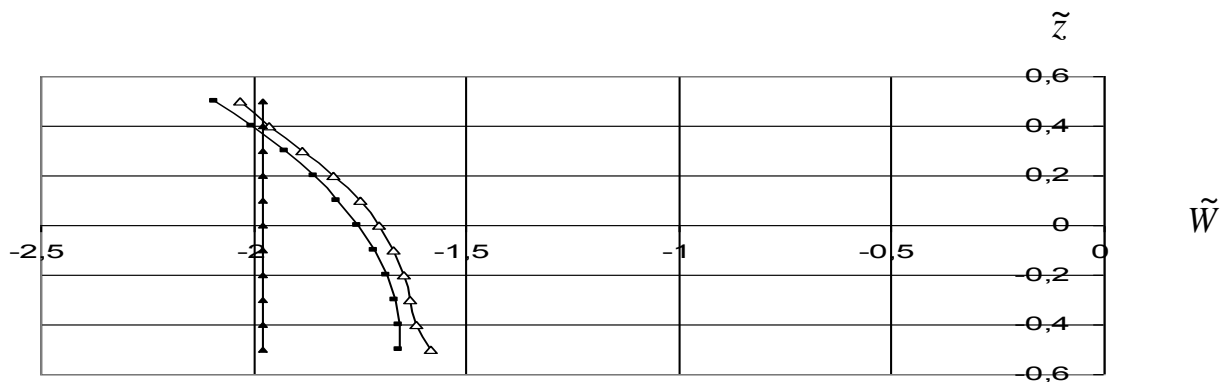


Рис. В.12. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної в плані оболонки
 ($h/a = 0,1; R_1/a = R_2/a = 5; G'/G = 0,1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3; m = n = 9; p_{mn}/q_{mn} = 1$).

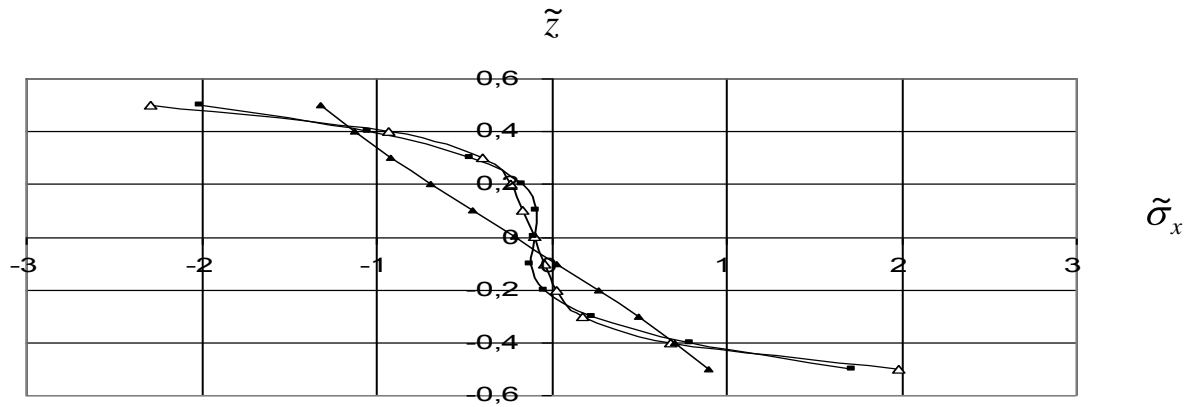


Рис. В.13. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині квадратної в плані оболонки при $h/a = 0,05$; $R_1/a = R_2/a = 5$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 9$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$.

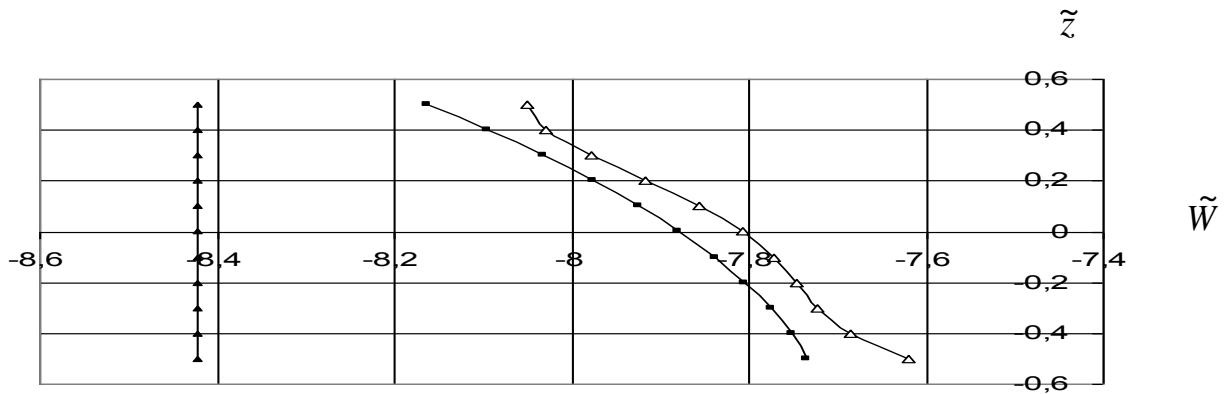


Рис.В.14. Змінювання \tilde{W} по товщині квадратної в плані оболонки при $h/a = 0,05$; $R_1/a = R_2/a = 5$; $G'/G = 0,1$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$; $m = n = 9$; $p_{mn}/q_{mn} = 1$.

В.3. Основні прикладні висновки до розрахунку нетонких транстропних пологих оболонок

На основі наведених в роботі та інших проведених досліджень теорія Тимошенка-Рейснера (НК01) з високою точністю (результати близькі до НК0-5 варіанта МТ) описує при плавних косиметричних поперечних навантаженнях напруження σ_x ізотропних пологих оболонок для $h/a \leq 1/5$, $R_{1,2}/a \geq 5$, $a = b$ (розходження з НК0-5 складає менше 1,54%). Поперечні переміщення теорія Тимошенка-Рейснера описує з достатньою точністю для транстропних оболонок ($E' = E$, $\nu' = \nu$, $0,1 \leq G'/G \leq 1,0$)

при $h/a \leq 1/5, R_{1,2}/a \geq 5, a=b$ (найбільше розходження менші 3,24 % для $G'/G = 0,1$ і менші 4,46 % для $G'/G = 1$). Із зменшенням G'/G розходження по σ_x зростає.

1. При кососиметричному плавному навантаженні:

1.1) тангенціальні нормальні напруження на верхній лицевій поверхні більші, ніж на нижній; нульові значення зміщені від серединної до нижньої лицевої поверхні; із зменшенням G'/G нульова поверхня для тангенціальних нормальних напружень зміщується від серединної до нижньої лицевої поверхні, а змінення поперечних нормальних напружень більше наближається до лінійного; тангенціальні нормальні напруження зростають із зменшенням товщини, G'/G , E'/E , збільшенні ν' (незначним чином) і пологості оболонки; уточнені тангенціальні нормальні напруження на верхній лицевій поверхні більші, ніж за класичною теорією Кірхгофа-Лява і теорією типу Тимошенка-Рейснера і ця різниця зростає при зменшенні G'/G ;

1.2) нормальні поперечні напруження по товщині розподіляються практично лінійно за виключенням невеликої області біля нижньої лицевої поверхні; нульові значення зміщені від серединної поверхні вбік верхньої лицевої поверхні; поперечні переміщення нижньої лицевої поверхні більші, ніж верхньої; поперечні переміщення зростають при зменшенні товщини, G'/G , ν' , збільшенні E'/E і пологості серединної поверхні;

1.3) у товстих слабопологих оболонках навіть при умовах обпирання Нав'є потрібно ураховувати для компонент НДС складові переміщень з парними натуральними індексами і кривини у деформаціях поперечного зсуву; для середньопологих і сильнопологих оболонках вказані складові дають незначну поправку.

2. При згинально-обтискуючому плавному навантаженні:

2.1) тангенціальні нормальні напруження на верхній лицевій поверхні більші, ніж на нижній; нульові значення зміщені від серединної поверхні вбік нижньої лицевої поверхні (більше, ніж при кососиметричному навантаженні); тангенціальні нормальні напруження зростають із зменшенням товщини, G'/G ,

збільшенням E'/E , із зменшенням ν' (на нижній лицевій поверхні), із збільшенням ν' (на верхній лицевій поверхні, але дуже несуттєво);

2.2) нормальні поперечні напруження по товщині розподіляються суттєво нелінійно; поперечні переміщення нижньої лиевої поверхні менші, ніж верхньої; поперечні переміщення зростають при зменшенні товщини, G'/G , ν' , при збільшенні E'/E і пологості серединної поверхні;

2.3) поперечне обтискання в значно більшій мірі впливає на компоненти НДС в області нижньої лиевої поверхні, ніж в області верхньої; вплив поперечного обтискання на компоненти НДС зростає із збільшенням товщини, G'/G , зменшенням E'/E , ν' .

3. При швидкозмінюваних в області і квазізосереджених поперечних навантаженнях:

3.1) збільшується нелінійність змінювання компонент НДС;

3.2) класична теорія Кірхгофа-Лява і теорія типу Тимошенка-Рейснера не дають задовільних результатів і тому потрібно застосовувати вищі наближення.

4. Про розрахунок транстропних пологих оболонок при плавних поперечних кососиметричних і згинально-обтискуючих навантаженнях, в яких тангенціальні нормальні напруження і поперечні переміщення можна визначати, розраховуючи відповідні пластини в плані.

4.1) тангенціальні нормальні напруження в ізотропних оболонках і відповідних пластинах відрізняються менше, ніж на 3% для оболонок при $\nu = \nu' = 0,3$, $R_{1,2}/a \geq 20$, $h/a \geq 1/5$; а також при $\nu = \nu' = 0,3$, $R_{1,2}/a \geq 40$, $h/a \geq 1/10$; тангенціальні нормальні напруження в транстропних оболонках і відповідних пластинах відрізняються менше, ніж на 3,5% при $0,1 \leq G'/G \leq 1,0$; $E'/E = 1$; $\nu = \nu' = 0,3$; $R_{1,2}/a \geq 40$, $h/a \geq 1/10$;

4.2) поперечні переміщення в транстропних оболонках і відповідних пластинах відрізняються менше, ніж на 5,0% при $0,1 \leq G'/G \leq 1,0$, $E'/E = 1$, $\nu = \nu' = 0,3$, $R_{1,2}/a \geq 10$, $h/a \geq 1/10$.

Додаток Г

Фізично нелінійні та транстропні нетонкі пологі оболонки.

Коефіцієнти, рівняння, ілюстрації

Г.1. Коефіцієнти в операторах

Сталі коефіцієнти c з нижніми індексами у (5.6), визначаються так:

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= h(b_{110} + \frac{7}{10}d_{40}); c_{1,2} = hG_0; c_{1,3r} = -\frac{14}{15}hG_0(k'_1)^2; \\
c_{1,4} &= h(b_{110} - G_0 + \frac{7}{10}d_{40}); c_{15r} = \frac{28}{15}G_0k'_1; c_{1,6} = -\frac{h}{5}d_{40}; c_{1,7r} = \frac{h}{15}G_0(k'_2)^2; \\
c_{1,8} &= -\frac{h}{5}d_{40}; c_{1,9r} = \frac{6}{5}G_0k'_1; c_{1,10r} = h(b_{110}k_{1v} + \frac{7}{10}k_{12}d_{40} + \frac{14}{15}G_0k'_1); c_{1,11} = \frac{7}{5}d_{30}; \\
c_{1,12r} &= -\frac{h}{5}(k_{12}d_{40} + \frac{1}{3}G_0k'_1); c_{1,13} = \frac{3}{20}hd_{10}; c_{2,2} = hG_0; c_{2,3} = h(b_{110} + \frac{7}{10}d_{40}); \\
c_{2,4r} &= -\frac{14}{15}hG_0(k'_2)^2; c_{2,5r} = \frac{28}{15}G_0k'_2; c_{2,6} = -\frac{h}{5}d_{40}; c_{2,7} = -\frac{h}{5}d_{40}; c_{2,8r} = \frac{h}{15}G_0(k'_2)^2; \\
c_{2,9r} &= \frac{6}{5}G_0k'_2; c_{2,10r} = h(b_{110}k_{2v} + \frac{7}{10}k_{12}d_{40} + \frac{14}{15}G_0k'_2); c_{2,11} = \frac{7}{5}d_{30}; \\
c_{2,12r} &= -\frac{h}{5}(k_{12}d_{40} + \frac{1}{3}G_0k'_2); c_{2,13} = \frac{3}{20}hd_{10}; c_{3,2} = \frac{h}{3}(b_{110} + \frac{33}{70}d_{40}); c_{3,3} = \frac{h}{3}G_0; \\
c_{3,4} &= -\frac{56}{15h}G_0; c_{3,4r} = -\frac{7h}{30}G_0(k'_1)^2; c_{3,5} = \frac{h}{3}(b_{110} - G_0 + \frac{33}{70}d_{40}); c_{3,6r} = \frac{19}{15}G_0k'_1; \\
c_{3,7} &= -\frac{11h}{105}d_{40}; c_{3,8} = -\frac{12}{5h}G_0; c_{3,8r} = \frac{h}{10}G_0(k'_1)^2; c_{3,9} = c_{3,7}; c_{3,10} = -\frac{28}{15}G_0; \\
c_{3,11r} &= \frac{h}{3}(b_{110}k_{1v} + \frac{33}{70}k_{12}d_{40} + \frac{7}{10}G_0k'_1); c_{3,12} = \frac{1}{15}(2G_0 + \frac{99}{7}d_{30}); c_{3,13} = -\frac{2h}{21}d_{10}; \\
c_{4,5} &= -\frac{56}{15h}G_0; c_{4,5r} = -\frac{7h}{30}G_0(k'_2)^2; c_{4,6r} = \frac{19}{15}G_0k'_2; c_{4,7} = -\frac{11h}{105}d_{40}; c_{4,8} = c_{3,7}; \\
c_{4,9} &= -\frac{12}{5h}G_0; c_{4,9r} = \frac{h}{10}G_0(k'_2)^2; c_{4,10} = -\frac{28}{15}G_0; c_{4,12} = \frac{1}{15}(2G_0 + \frac{99}{7}d_{30}); \\
c_{4,13} &= -\frac{2h}{21}d_{10}; c_{4,13} = \frac{2h}{21}d_{10}; c_{4,11r} = \frac{h}{3}(b_{110}k_{2v} + \frac{33}{70}k_{12}d_{40} + \frac{7}{10}G_0k'_2); \\
c_{5,5} &= \frac{h}{5}(b_{110} + \frac{2}{7}d_{40}); c_{5,6} = \frac{h}{5}G_0; c_{5,7} = -\frac{42}{5h}G_0; c_{5,7r} = -\frac{2h}{15}G_0(k'_1)^2; \\
c_{5,8} &= \frac{h}{5}(b_{110} - G_0 + \frac{2d_{40}}{7}); c_{5,9r} = \frac{3}{5}G_0k'_1; c_{5,10r} = -\frac{h}{5}(k_{12}d_{40} + \frac{G_0}{3}k'_1); \quad (\Gamma.1) \\
c_{5,11} &= -\frac{1}{5}(2d_{30} + 7G_0); c_{5,12r} = \frac{h}{5}(b_{110}k_{1v} + \frac{2}{7}k_{12}d_{40} + \frac{2}{3}G_0k'_1); c_{5,13} = \frac{h}{10}d_{10};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{6,6} &= \frac{h}{5}G_0; c_{6,7} = \frac{h}{5}(b_{110} + \frac{2}{7}d_{40}); c_{6,8} = -\frac{42}{5h}G_0; c_{6,8r} = -\frac{2h}{15}G_0(k'_2)^2; \\
c_{6,9r} &= \frac{3}{5}G_0k'_2; c_{6,10r} = -\frac{h}{5}(k_{12}d_{40} + \frac{G_0}{3}k'_2); c_{6,11} = -\frac{1}{5}(2d_{30} + 7G_0); \\
c_{6,12r} &= \frac{h}{5}(b_{110}k_{2v} + \frac{2}{7}k_{12}d_{40} + \frac{2}{3}G_0k'_2); c_{6,13} = \frac{h}{10}d_{10}; c_{7,6} = \frac{h}{7}(b_{110} + \frac{22}{45}d_{40}); \\
c_{7,7} &= \frac{h}{7}G_0; c_{7,8} = -\frac{72}{5h}G_0; c_{7,8r} = -\frac{3h}{70}G_0(k'_1)^2; c_{7,9} = \frac{h}{7}(b_{110} - G_0 + \frac{22}{45}d_{40}); \\
c_{7,10} &= -\frac{6}{5}G_0; c_{7,11r} = -\frac{h}{35}(\frac{11}{3}k_{12}d_{40} + \frac{7G_0}{2}k'_1); c_{7,12} = -\frac{2}{35}(11d_{30} + 21G_0); \\
c_{7,13} &= \frac{h}{18}d_{10}; c_{8,7} = \frac{h}{7}G_0; c_{8,8} = \frac{h}{7}(b_{110} + \frac{22}{45}d_{40}); c_{8,9} = -\frac{72}{5h}G_0; c_{8,9r} = -\frac{3h}{70}G_0(k'_2)^2; \\
c_{8,10} &= -\frac{6}{5}G_0; c_{8,11r} = -\frac{h}{35}(\frac{11}{3}k_{12}d_{40} + \frac{7G_0}{2}k'_2); c_{8,12} = c_{7,12}; c_{8,13} = c_{7,13}; \\
c_{9,9} &= -\frac{14}{15}hG_0; c_{9,10r} = hd_0k_v + \frac{7}{10}hd_{40}k_{12}^2; c_{9,11r} = \frac{7}{5}d_{30}k_{12}; c_{9,12} = \frac{h}{15}G_0; \\
c_{9,13r} &= -\frac{h}{5}d_{40}k_{12}^2; c_{9,14r} = \frac{3h}{20}d_{10}k_{12}; c_{9,15} = -1; c_{10,10} = -\frac{7}{30}hG_0; c_{10,11} = \frac{14}{5hd_{20}}; \\
c_{10,11r} &= \frac{h}{3}(d_0k_v + \frac{33}{70}d_{40}k_{12}^2); c_{10,12r} = \frac{19}{35}d_{30}k_{12}; c_{10,13} = -\frac{7}{10}; c_{10,14r} = \frac{2h}{21}d_{10}k_{12}; \\
c_{11,12} &= -\frac{2}{15}hG_0; c_{11,13} = \frac{198}{35hd_{20}}; c_{11,13r} = \frac{1}{5}(hd_0k_v + \frac{2}{7}hd_{40}k_{12}^2); c_{11,14r} = \frac{h}{10}d_{10}k_{12}; \\
c_{11,15} &= -\frac{3}{7}; d_{10} = \frac{v_0}{1-v_0}; d_{20} = \frac{1-v_0-2v_0^2}{E_0(1-v_0)}; d_{30} = d_{10}/d_{20}; d_{40} = d_{10}^2/d_{20}.
\end{aligned}$$

Г.2. Основні співвідношення і ДРв циліндричній системі координат

Розглянемо в наближенні К0-3 за поліномами Лежандра нелінійно пружну по Каудереру пологу сферичну оболонку (R – радіус кривини середньої поверхні) довільної сталого товщини h . Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , де координату z напрямимо вбік опуклості оболонки. Граничні умови:

$$\sigma_z(z = \pm h/2) = \mp q(r; \theta)/2 - p(r, \theta)/2; \sigma_{rz}(z = \pm h/2) = \sigma_{\theta z}(z = \pm h/2) = 0.$$

Розкладемо в асимптотичні ряди за малим параметром ε компоненти НДС оболонки, шукані функції та поверхневі сили R_v, θ_v, Z_v (проекції на осі координат зовнішніх сил, віднесених до одиниці площі поверхні). Одержимо;

$$\sigma_r = \sum_{l=0} \varepsilon^l \sigma_r^{(l)}, \dots, \varepsilon_r = \sum_{l=0} \varepsilon^l \varepsilon_r^{(l)}, \dots, w = \sum_{l=0} \varepsilon^l w^{(l)}.$$

$$Q_{1r} = \sum_{k=0} Q_{1r}^{(k)} \varepsilon^k, \dots, Q_{3\theta} = \sum_{k=0} Q_{3\theta}^{(k)} \varepsilon^k, \dots, Z_n = \sum_{k=0} Z_n^{(k)} \varepsilon^k, \omega_i = \sum_{k=0} \omega_i^{(k)} \varepsilon^k, \\ (i=1, 3); \omega_1^{(0)} = q(r, \theta), (R_v^{(k)} = \theta_v^{(k)} = Z_v^{(k)} = 0, (k=1, 2, \dots)).$$

Залежності між деформаціями та переміщеннями в наближенні l по ε :

$$\varepsilon_r^{(l)} = u_r^{(l)} + k_1 w^{(l)}, \varepsilon_\theta^{(l)} = v_\theta^{(l)} / r + u^{(l)} / r + k_1 w^{(l)}, \varepsilon_z^{(l)} = w_z^{(l)}, k_1 = k'_1 = 1/R, \\ \gamma_{x\theta}^{(l)} = u_\theta^{(l)} / r + v_r^{(l)} - v^{(l)} / r, \gamma_{\theta z}^{(l)} = v_z^{(l)} + w_\theta^{(l)} / r - k'_1 v^{(l)}, \gamma_{rz}^{(l)} = w_r^{(l)} + u_z^{(l)} - k'_1 u^{(l)},$$

в яких u, v, w – переміщення в напрямку r, θ, z ; величини u, v, w з індексами r, θ, z після коми унизу означають відповідні частинні похідні.

Напруження в НК0-3 за поліномами Лежандра в наближенні l по ε :

$$\sigma_z^{(l)} = \sum_{m=0}^5 P_m z_m^{(l)}, \sigma_{rz}^{(l)} = \sum_{m=0}^4 P_m s_{mr}^{(l)}, \sigma_{\theta z}^{(l)} = \sum_{m=0}^4 P_m s_{m\theta}^{(l)}, \\ \sigma_r^{(l)} = \sum_{m=0}^5 P_m r_m^{(l)} - a_0 E_0 (\Phi_r^{(l-1)} + v \Phi_\theta^{(l-1)}), (r, \theta); \sigma_{r\theta}^{(l)} = \sum_{m=0}^3 P_m s_m^{(l)} - b_0 G \Phi_{r\theta}^{(l-1)},$$

де

$$z_0^{(l)} = -p^{(l)} / 2 + \omega_2^{(l)} / 15, z_1^{(l)} = -3q^{(l)} / 5 + 3\omega_3^{(l)} / 70, z_2^{(l)} = -2\omega_2^{(k)} / 21, \\ z_3^{(l)} = q^{(l)} / 10 - \omega_3^{(l)} / 15, z_4^{(l)} = \omega_2^{(l)} / 35, z_5^{(l)} = \omega_3^{(l)} / 42; s_{0r}^{(l)} = Q_{1r}^{(l)} / h, s_{1r}^{(l)} = Q_{1r}^{(l)} / h, \\ s_{2r}^{(l)} = -Q_{1r}^{(l)} / h + 3Q_{3r}^{(l)} / (7h), s_{3r}^{(l)} = Q_{2r}^{(l)} / h, s_{4r}^{(l)} = -3Q_{3r}^{(l)} / (7h), (r, \theta).$$

$$r_m^{(l)} = E_0 (\partial u_m^{(l)} / \partial r + v (\frac{1}{r} \partial v_m^{(l)} / \partial \theta + u_m^{(l)} / r)) + D_1 z_m^{(l)} + E_0 k_1 (1 + v) w_m^{(l)}, (m=0, 1, 2) \\ r_3^{(l)} = E_0 (\partial u_3^{(l)} / \partial r + v (\partial v_3^{(l)} / \partial \theta + u_3^{(l)} / r)) + D_1 (\omega_1^{(l)} / 10 - \omega_3^{(l)} / 15), r_4^{(l)} = D_1 \omega_2^{(l)} / 35, \\ r_5^{(l)} = D_1 \omega_3^{(l)} / 42; \theta_m^{(l)} = E_0 (\frac{1}{r} \frac{\partial v_m^{(l)}}{\partial \theta} + u_m^{(l)} / r + v \partial u_m^{(l)} / \partial r) + D_1 z_m^{(l)} + E_0 k_1 (1 + v) w_m^{(l)}, \\ \theta_3^{(l)} = E_0 (\frac{1}{r} \partial v_3^{(l)} / \partial \theta + u_3^{(l)} / r + v \partial u_3^{(l)} / \partial r) + D_1 (\omega_1^{(l)} / 10 - \omega_3^{(l)} / 15), \theta_4^{(l)} = r_4^{(l)}, \\ \theta_5^{(l)} = r_5^{(l)}; s_m^{(l)} = G (\frac{1}{r} \partial u_m^{(l)} / \partial \theta + \partial v_m^{(l)} / \partial r - v_m^{(l)} / r), m=0, 1, 2, 3;$$

$$\Phi_r^{(l-1)} = \sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (\sigma_r^{(j)} - \sigma_\theta^{(j)} - \sigma_z^{(j)}), (r, \theta); \Phi_{r\theta}^{(l-1)} = \sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{r\theta}^{(j)}, \\ \tau_0^{(l)} = \tau_0^{(i+j)} = \sum_{i=0}^{i+j=l} \sum_{j=0} (\sigma_r^{(i)} \sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(i)} \sigma_\theta^{(j)} + \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} - (\sigma_r^{(i)} \sigma_\theta^{(j)} + \sigma_r^{(i)} \sigma_z^{(j)} + \sigma_\theta^{(i)} \sigma_z^{(j)}) + \\ + 3(\sigma_{r\theta}^{(i)} \sigma_{r\theta}^{(j)} + \sigma_{rz}^{(i)} \sigma_{rz}^{(j)} + \sigma_{\theta z}^{(i)} \sigma_{\theta z}^{(j)})), (l=0, 1, 2, \dots).$$

Тут P_i – поліноми Лежандра від змінної $2z/h$; $u_0, u_1, u_3, v_0, v_1, v_3, w_1, w_3, Q_{1r}, Q_{3r}, Q_{1\theta}, Q_{3\theta}, \omega_3$ – невідомі функції від r, θ , які знаходяться в процесі

розв'язання задачі; $a_0 = g_2^2 / (27G^3)$, $b_0 = 6a_0$, $E_0 = E / \langle -v^2 \rangle$, $D_1 = v / \langle -v \rangle$.

Функції $\Phi_r^{(l-1)}$, $\Phi_\theta^{(l-1)}$, $\Phi_{r\theta}^{(l-1)}$ дорівнюють нулю при $l=0$.

Залежності між функціями $Q_{1r}^{(l)}$, ..., $Q_{3\theta}^{(l)}$, $\omega_2^{(l)}$, $\omega_3^{(l)}$ і складовими $u_0^{(l)}$, ..., $w_3^{(l)}$:

$$Q_{1r}^{(l)} = \frac{Gh}{15} \left(14 \frac{\partial w_1^{(l)}}{\partial r} - \frac{\partial w_3^{(l)}}{\partial r} \right) + \frac{2G}{5} \left(\frac{14}{3} u_1^{(l)} + 3u_3^{(l)} \right) + \frac{b_0 G}{5} \left(\frac{14}{3} I_{rz20}^{(l-1)} + 3I_{rz42}^{(l-1)} \right) + \frac{Gh}{15} k_1'(u_2^{(l)} - 14u_0^{(l)}),$$

$$Q_{2r}^{(l)} = \frac{7Gh}{10} \frac{\partial w_2^{(l)}}{\partial r} + \frac{21G}{5} u_2^{(l)} + \frac{21b_0 G}{10} I_{rz31}^{(l-1)} + \frac{Gh}{10} k_1'(3u_3^{(l)} - 7u_1^{(l)}),$$

$$Q_{3r}^{(l)} = \frac{7Gh}{5} \left(\frac{\partial w_1^{(l)}}{\partial r} + \frac{\partial w_3^{(l)}}{\partial r} \right) + \frac{14G}{5} \langle \mathbf{e}_1^{(l)} + 6u_3^{(l)} \rangle + \frac{7b_0 G}{5} \langle \mathbf{e}_{rz20}^{(l-1)} + 6I_{rz42}^{(l-1)} \rangle - \frac{7Gh}{5} k_1'(u_0^{(l)} + u_2^{(l)}),$$

$$Q_{1\theta}^{(l)} = \frac{Gh}{15r} \left(14 \frac{\partial w_1^{(l)}}{\partial \theta} - \frac{\partial w_3^{(l)}}{\partial \theta} \right) + \frac{2G}{5} \left(\frac{14}{3} v_1^{(l)} + 3v_3^{(l)} \right) + \frac{b_0 G}{5} \left(\frac{14}{3} I_{\theta z20}^{(l-1)} + 3I_{\theta z42}^{(l-1)} \right) + \frac{Gh}{15} k_1'(v_2^{(l)} - 14v_0^{(l)}),$$

$$Q_{2\theta}^{(l)} = \frac{7Gh}{10r} \frac{\partial w_2^{(l)}}{\partial \theta} + \frac{21G}{5} v_2^{(l)} + \frac{21b_0 G}{10} I_{\theta z31}^{(l-1)} + \frac{Gh}{10} k_1'(3v_3^{(l)} - 7v_1^{(l)}),$$

$$Q_{3\theta}^{(l)} = \frac{7Gh}{5r} \left(\frac{\partial w_1^{(l)}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_3^{(l)}}{\partial \theta} \right) + \frac{14G}{5} \langle \mathbf{e}_1^{(l)} + 6v_3^{(l)} \rangle + \frac{7b_0 G}{5} \langle \mathbf{e}_{\theta z20}^{(l-1)} + 6I_{\theta z42}^{(l-1)} \rangle - \frac{7Gh}{5} k_1'(v_0^{(l)} - v_2^{(l)}),$$

$$\omega_2^{(l)} = D_6 w_3^{(l)} + D_7 (\varphi_0^{(l)} - \frac{2}{7} \varphi_2^{(l)}) + D_8 p^{(l)} - D_9 I_{\omega 2}^{(l-1)} + 2k_1 D_7 (w_1^{(l)} - \frac{2}{7} w_3^{(l)}),$$

$$\omega_3^{(l)} = D_{10} w_3^{(l)} + D_{11} (\varphi_1^{(l)} - \frac{2}{3} \varphi_3^{(l)}) + D_{12} \omega_1^{(l)} - D_{13} I_{\omega 3}^{(l-1)} + 2k_1 D_{11} w_2^{(l)},$$

$$I_{rz20}^{(l-1)} = \int_z \langle \mathbf{e}_2 - P_0 \rangle \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{rz}^{(j)} \right) dz, \quad I_{rz31}^{(l-1)} = \int_z \langle \mathbf{e}_3 - P_1 \rangle \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{rz}^{(j)} \right) dz,$$

$$I_{rz42}^{(l-1)} = \int_z \langle \mathbf{e}_4 - P_2 \rangle \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} \sigma_{rz}^{(j)} \right) dz, \quad (r, \theta); \quad I_{rz20}^{(l-1)} = \dots = I_{\theta z42}^{(l-1)} = 0, \quad \text{якщо } l=0;$$

$$\varphi_i^{(l)} = \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial \theta} + \frac{u_i^{(l)}}{r}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4); D_2 = (1 - 2D_1\nu)/E; \quad D_3 = h\nu/(15(1 - \nu));$$

$$D_4 = (1 - 2D_1\nu)/E; \quad D_5 = hD_2\nu/30; \quad D_6 = 2/(15D_4); \quad D_7 = D_3/D_4; \quad D_8 = 21/4;$$

$$D_9 = \frac{a_0(2\nu - 1)}{D_4(1 - \nu)}; \quad D_{10} = 66/(hD_2); \quad D_{11} = \frac{11\nu}{D_2(1 - \nu)}; \quad D_{12} = 22/3; \quad D_{13} = \frac{770D_4D_9}{hD_2}.$$

Диференціальні рівняння рівноваги в наближенні l по ε мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rr_0^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_0^{(l)}}{\partial \theta} - \theta_0^{(l)} + k_1'rs_{0r}^{(l)} &= \frac{1}{h}(a_0E_0 \frac{\partial(r\Phi_{vr0}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G \frac{\partial\Phi_{r\theta 0}^{(l-1)}}{\partial \theta} - a_0E_0\Phi_{v\theta 0}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rs_0^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial\theta_0^{(l)}}{\partial \theta} + s_0^{(k)} + k_1'rs_{0\theta}^{(l)} &= \frac{1}{h}(a_0E_0 \frac{\partial\Phi_{v\theta 0}^{(l-1)}}{\partial \theta} + b_0G \frac{\partial(r\Phi_{r\theta 0}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G\Phi_{r\theta 0}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rr_1^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_1^{(l)}}{\partial \theta} - \theta_1^{(l)} - \frac{6r}{h}s_{0r}^{(l)} + k_1'rs_{1r}^{(l)} &= \frac{3}{h}(a_0E_0 \frac{\partial(r\Phi_{vr1}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G \frac{\partial\Phi_{r\theta 1}^{(l-1)}}{\partial \theta} - a_0E_0\Phi_{v\theta 1}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rs_1^{(k)})}{\partial r} + \frac{\partial\theta_1^{(k)}}{\partial \theta} + s_1^{(k)} - \frac{6r}{h}s_{0\theta}^{(k)} + k_1'rs_{1\theta}^{(k)} &= \frac{3}{h}(a_0E_0 \frac{\partial\Phi_{v\theta 1}^{(l-1)}}{\partial \theta} + b_0G \frac{\partial(r\Phi_{r\theta 1}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G\Phi_{r\theta 1}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rr_2^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_2^{(l)}}{\partial \theta} - \theta_1^{(k)} - \frac{10r}{h}s_{1r}^{(l)} + k_1'rs_{2r}^{(l)} &= \frac{5}{h}(a_0E_0 \frac{\partial(r\Phi_{vr2}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G \frac{\partial\Phi_{r\theta 2}^{(l-1)}}{\partial \theta} - a_0E_0\Phi_{v\theta 2}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rs_2^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial\theta_2^{(l)}}{\partial \theta} + s_2^{(l)} - \frac{10r}{h}s_{1\theta}^{(l)} + k_1'rs_{2\theta}^{(l)} &= \frac{5}{h}(a_0E_0 \frac{\partial\Phi_{v\theta 2}^{(l-1)}}{\partial \theta} + b_0G \frac{\partial(r\Phi_{r\theta 2}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G\Phi_{r\theta 2}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rr_3^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_3^{(l)}}{\partial \theta} - \theta_3^{(l)} - \frac{14r}{h}(s_{0r}^{(l)} + s_{2r}^{(l)}) + k_1'rs_{3r}^{(l)} &= \frac{7}{h}(a_0E_0 \frac{\partial(r\Phi_{vr3}^{(l-1)})}{\partial r} + b_0G \frac{\partial\Phi_{r\theta 3}^{(l-1)}}{\partial \theta} - \\ &\quad - a_0E_0\Phi_{v\theta 3}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rs_3^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial\theta_3^{(l)}}{\partial \theta} + s_3^{(l)} - \frac{14r}{h}(s_{0\theta}^{(l)} + s_{2\theta}^{(l)}) + k_1'rs_{3\theta}^{(l)} &= \frac{7}{h}(a_0E_0 \frac{\partial\Phi_{v\theta 3}^{(l-1)}}{\partial \theta} + b_0G \frac{\partial(r\Phi_{r\theta 3}^{(l-1)})}{\partial r} + \\ &\quad + b_0G\Phi_{r\theta 3}^{(l-1)}), \\ \frac{\partial(rs_{0r}^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_{0\theta}^{(l)}}{\partial \theta} - k_1r(r_0^{(l)} + \theta_0^{(l)}) &= \frac{r}{h}(q^{(k)} - k_1a_0E_0(\Phi_{vr0}^{(l-1)} + \Phi_{v\theta 0}^{(l-1)})), \\ \frac{\partial(rs_{1r}^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_{1\theta}^{(l)}}{\partial \theta} - D_{14}rw_3^{(l)} - D_{15}r\varphi_0^{(l)} + D_{16}r\varphi_2^{(l)} - k_1r(r_1^{(l)} + \theta_1^{(l)}) &= \\ &= \frac{r}{h}(D_{17}p^{(l)} - D_{18}I_{\omega 2}^{(l-1)} - 3k_1a_0E_0(\Phi_{vr1}^{(l-1)} + \Phi_{v\theta 1}^{(l-1)})), \\ \frac{\partial(rs_{2r}^{(l)})}{\partial r} + \frac{\partial s_{2\theta}^{(l)}}{\partial \theta} - D_{19}rw_3^{(l)} - D_{20}r\varphi_1^{(l)} + D_{21}r\varphi_3^{(l)} - k_1r(r_2^{(l)} + \theta_2^{(l)}) &= \\ &= \frac{r}{h}(D_{22}\omega_1^{(l)} - D_{23}I_{\omega 3}^{(l-1)} - 5k_1a_0E_0(\Phi_{vr2}^{(l-1)} + \Phi_{v\theta 2}^{(l-1)})), \end{aligned}$$

де

$$\Phi_{vrm}^{(l-1)} = \int_z P_m \Phi_{vr}^{(l-1)} dz; \quad (m = 0, 1, 2, 3; r, \theta); \quad \Phi_{r\theta m}^{(l-1)} = \int_z P_m \Phi_{r\theta}^{(l-1)} dz;$$

$$\Phi_{vr}^{(l-1)} = \Phi_r^{(l-1)} + v\Phi_\theta^{(l-1)}, \quad (r, \theta);$$

$$I_{\omega_2}^{(l-1)} = \int_z \left(\frac{P_0}{15} - \frac{2P_2}{21} + \frac{P_4}{35} \right) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (\sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)} - 2\sigma_z^{(j)}) \right) dz;$$

$$I_{\omega_3}^{(l-1)} = \int_z \left(\frac{3P_1}{70} - \frac{P_3}{15} + \frac{P_5}{42} \right) \left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1} \sum_{j=0} \tau_0^{(i)} (\sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)} - 2\sigma_z^{(j)}) \right) dz;$$

$$D_{14} = \frac{2D_6}{5h}; \quad D_{15} = \frac{2D_7}{5h}; \quad D_{16} = \frac{2D_{15}}{7}; \quad D_{17} = \frac{2}{5}D_8 - 3; \quad D_{18} = \frac{2D_9}{5};$$

$$D_{19} = \frac{3D_{10}}{7h}; \quad D_{20} = \frac{3D_{11}}{7h}; \quad D_{21} = \frac{2D_{20}}{3}; \quad D_{22} = \frac{3}{7}D_{12} - 1; \quad D_{23} = \frac{3D_{13}}{7}.$$

Граничні умови для наближення l за параметром ε :

$$\int_{(s)} \left\{ \mathbf{N}_{0u}^{(l)} - \tilde{N}_{0u}^{(l)} \delta u_0 + \mathbf{N}_{0v}^{(l)} - \tilde{N}_{0v}^{(l)} \delta v_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{M}_{iu}^{(l)} - \tilde{M}_{iu}^{(l)} \right) \delta u_i + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{M}_{iv}^{(l)} - \tilde{M}_{iv}^{(l)} \right) \delta v_i + \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{Q}_{iw}^{(l)} - \tilde{Q}_{iw}^{(l)} \right) \delta w_i \right\} ds = 0,$$

де s – контур оболонки. Тут перші доданки в круглих дужках залежать від НДС оболонки до l -го наближення включно, а другі – від l -го зовнішнього навантаження. Із останньої рівності впливають різні граничні умови.

З вищенаведених залежностей і рівнянь одержуються частинні випадки.

Якщо покласти ω_2 , Q_{2r} , $Q_{2\theta}$, u_2, v_2, w_2 p тотожно рівними нулю, то одержимо основні рівняння для згинального (кососиметричного) деформування нелінійно пружних пологих сферичних оболонок довільної товщини.

Приймаючи $k_1 = k'_1 \equiv 0$, дістанемо залежності та ДР для фізично нелінійних круглих пластин довільної товщини. Якщо обтискуюче зовнішнє навантаження $p(r, \theta)$ незначне в порівнянні з кососиметричним навантаженням $q(r, \theta)$, то рівняння можна спростити, знехтувавши доданками, що містять множник k'_1 .

В 0-му наближенні ($l=0$) отримаємо залежності і ДР для ізотропної пологої сферичної оболонки, а якщо ще й прийняти рівною нулю кривину, то дістанемо залежності і ДР для круглої ізотропної пластини.

Г.3. Ілюстрації НДС фізично нелінійних і транстропних пологих оболонок з використанням методу збурень

Таблиця Г.1

Компоненти НДС ФНО з чистої міді (ФН в НК013; $l = 0,1$) при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $G = 44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$)

z/h	КЛТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-15,20	-15,27	-15,47	-15,48	-13,98	9,69	-12,11	21,8
0	0	0,1017	0,1770	0,1448	0,1788	-	0,1811	-
-0,5	15,20	15,48	15,46	15,46	13,94	-	12,04	-
	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-1,194	-2,397	-2,389	-2,389	-2,305	3,52	-2,200	7,91
	\tilde{U}							
0,5	16,85	16,15	16,56	16,57	19,49	17,6	23,15	39,7
0	-4,305	-4,966	-4,887	-4,879	-5,628	-	-6,554	-
-0,5	-25,46	-26,08	-25,93	-25,92	-30,35	-	-35,86	-
	\tilde{W}							
0,5	-67,62	-75,77	-73,67	-73,65	-84,83	15,2	-98,78	34,1
0	-67,62	-75,78	-75,34	-75,33	-86,94	-	-101,4	-
-0,5	-67,62	-75,77	-73,74	-73,71	-84,90	-	-98,86	-

Таблиця Г.2

Компоненти НДС ФНО з чистої міді (ФН в НК013; $l = 0,1$) при циліндричному згині ($h/a = 1/10$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $G = 44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$)

z/h	ЛКТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 2$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 4$ МПа	Δ %
	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-60,80	-60,95	-61,26	-61,27	-57,04	6,90	-44,38	27,6
0	0	0,2035	0,3557	0,2914	0,3581	-	0,3652	-
-0,5	60,80	61,36	61,23	61,22	56,98	-	44,21	-

	1	2	3	4	5	6	7	8
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-2,387	-4,794	-4,790	-4,790	-4,682	2,25	-4,357	9,04
z/h	\tilde{U}							
0,5	100,4	98,27	99,67	99,70	111,7	12,0	147,7	48,1
0	-68,88	-71,95	-71,64	-71,61	-79,85	-	-104,5	-
-0,5	-238,1	-242,2	-241,3	-241,2	-269,7	-	-355,0	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-1082	-1121	-1113	-1112	-1240	11,5	-1623	46,0
0	-1082	-1121	-1120	-1120	-1249	-	-1635	-
-0,5	-1082	-1121	-1113	-1113	-1240	-	-1623	-

Таблиця Г.3

Компоненти НДС ФНО із чистої міді (ФН в НК013; $l = 0,1$) при циліндричному згині ($h/a = 1/3$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $G = 44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$)

z/h	КЛТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-5,472	-5,548	-5,702	-5,708	-5,640	1,19	-5,561	2,58
0	0	0,0610	0,1050	0,0858	0,1051	-	0,1052	-
-0,5	5,472	5,670	5,702	5,700	5,640	-	5,556	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-0,7162	-1,438	-1,425	-1,425	-1,415	0,70	-1,402	1,61
z/h	\tilde{U}							
0,5	4,012	3,691	3,865	3,870	3,935	1,68	4,023	3,95
0	-0,5579	-0,7877	-0,7574	-0,7551	-0,7659	-	-0,7765	-
-0,5	-5,128	-5,267	-5,253	-5,249	-5,340	-	-5,450	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-8,764	-11,57	-10,88	-10,86	-11,00	1,29	-11,15	2,67
0	-8,764	-11,57	-11,39	-11,39	-11,52	-	-11,69	-
-0,5	-8,764	-11,57	-10,93	-10,90	-11,04	-	-11,19	-

Таблиця Г.4

Компоненти НДС ФНО із чистої міді (ФН в НК013; $l = 0,1$) при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 10$; $m = 1$; $G = 44230$ МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$)

z/h	КЛТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-15,20	-15,28	-15,42	-15,42	-13,93	9,66	-12,08	21,7
0	0	0,0507	0,0882	0,0722	0,0891	-	0,0903	-
-0,5	15,20	15,38	15,42	15,41	13,92	-	12,04	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-1,194	-2,390	-2,382	-2,382	-2,298	3,53	-2,193	7,93
z/h	\tilde{U}							
0,5	19,07	18,58	18,85	18,85	22,12	17,3	26,21	39,0
0	-2,153	-2,468	-2,428	-2,422	-2,794	-	-3,251	-
-0,5	-23,38	-23,52	-23,50	-33,50	-27,51	-	-32,51	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-67,62	-75,30	-73,22	-73,20	-84,24	15,1	-98,00	33,9
0	-67,62	-75,30	-74,87	-74,86	-86,31	-	-100,6	-
-0,5	-67,62	-75,30	-73,26	-73,23	-84,27	-	-98,04	-

Таблиця Г.5

Компоненти НДС ФНО із мартенівської сталі (ФН в НК013; $l = 0,1$)

при циліндричному згині

($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $G = 83650$ МПа; $\nu = 0,294$; $g_2 = 0,085 \cdot 10^6$)

z/h	КЛТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-15,20	-15,25	-15,47	-15,47	-15,27	1,29	-15,03	2,84
0	0	0,1017	0,1697	0,1453	0,1708	-	0,1721	-
-0,5	15,2	15,45	15,46	15,46	15,26	-	15,01	-

Продовження табл. Г.5

	1	2	3	4	5	6	7	8
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-1,194	-2,379	-2,389	-2,389	-2,377	0,50	-2,362	1,13
z/h	\tilde{U}							
0,5	17,53	16,88	17,31	17,31	17,68	2,14	18,14	4,79
0	-4,478	-5,133	-5,089	-5,086	-5,184	-	-5,303	-
-0,5	-26,49	-27,15	-27,07	-27,06	-27,63	-	-28,33	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-70,35	-78,31	-76,63	-76,61	-78,05	1,88	-79,82	4,19
0	-70,35	-78,31	-77,96	-77,95	-79,43	-	-81,27	-
-0,5	-70,35	-78,31	-76,71	-76,68	-78,13	-	-79,91	-

Таблиця Г.6

Компоненти НДС ФНО із чистої міді від дії при циліндричному згині

 $(h/a = 1/5; R_1/a = 5; m = 9; G = 44230 \text{ МПа}; \nu = 0,349; g_2 = 0,18 \cdot 10^6)$

z/h	КЛТ $l = 0$	ФЛ НК01, $l = 0$	ФЛ НК013, $l = 0$	ФЛ НК0135, $l = 0$	ФН $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН $q_m = 15$ МПа	Δ %
z/h	$\tilde{\sigma}_x$							
0,5	-0,1876	-0,3013	-0,4503	-0,5350	-0,4496	16,0 0	-0,4487	16,1
0	0	0,0013	0,0018	0,0015	0,0018	-	0,0018	-
-0,5	0,1876	0,3038	0,4515	0,5334	0,4507	-	0,4498	-
z/h	$\tilde{\sigma}_{xz}$							
$\pm 0,5$	0	0	0	0	0	-	0	-
0	-0,1327	-0,2654	-0,1655	-0,1741	-0,1652	5,11	-0,1648	5,34
z/h	\tilde{U}							
0,5	0,0291	0,0044	0,0271	0,0403	0,0269	33,3	0,0268	33,5
0	-0,0001	-0,0009	-0,0006	-0,0007	0,0006	-	0,0006	-
-0,5	-0,0292	-0,0063	-0,0298	-0,0424	-0,0296	-	-0,0295	-
z/h	\tilde{W}							
0,5	-0,0103	-0,1032	-0,1782	-0,1681	-0,1780	5,89	-0,1777	5,71
0	-0,0103	-0,1032	-0,0616	-0,0603	-0,0613	-	-0,0610	-
-0,5	-0,0103	-0,1032	-0,1784	-0,1679	-0,1782	-	-0,1780	-

Таблиця Г.7

Компоненти НДС транстропної квадратної в плані пологої оболонки
($h/a = 1/5$; $R_1/a = R_2/a = 5$; $m = n = 1$; $G'/G = 0,8$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	$l = 0$; НК0-3	$l = 0; 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %	$l = 0$; НК0-3	$l = 0; 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %
0,5	-5,385	-5,440	-5,439	0,02	-19,73	-19,24	-20,65	6,83
	-5,453	-5,508	-5,506	0,04	-19,81	-19,33	-20,73	6,75
0	-0,3392	-0,3542	-0,3581	-	-20,44	-19,90	-21,36	-
	-0,4013	-0,4358	-0,4201	-	-20,29	-19,75	-21,21	-
-0,5	4,611	4,630	4,628	-	-20,04	-19,54	-20,97	-
	4,493	4,511	4,511	0,00	-19,66	-19,18	-20,59	6,85

Таблиця Г.8

Компоненти НДС транстропної квадратної в плані пологої оболонки
($h/a = 1/5$; $R_1/a = R_2/a = 5$; $m = n = 1$; $G'/G = 0,5$; $E'/E = 1$; $\nu' = \nu = 0,3$)

$\frac{z}{h}$	$\tilde{\sigma}_x$				\tilde{W}			
	$l = 0$; НК0-3	$l = 0; 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %	$l = 0$; НК0-3	$l = 0; 1$; НК0-3	НК0-3	Δ %
0,5	-5,385	-5,573	-5,600	0,48	-19,73	-18,98	-23,40	18,9
	-5,453	-5,642	-5,661	0,34	-19,81	-19,06	-23,46	18,8
0	-0,3392	-0,3938	-0,4142	-	-20,44	-19,53	-24,11	-
	-0,4013	-0,5105	-0,4762	-	-20,29	-19,39	-23,94	-
-0,5	4,611	4,675	4,677	-	-20,04	-19,27	-23,75	-
	4,493	4,556	4,560	0,09	-19,66	-18,92	-23,35	19,0

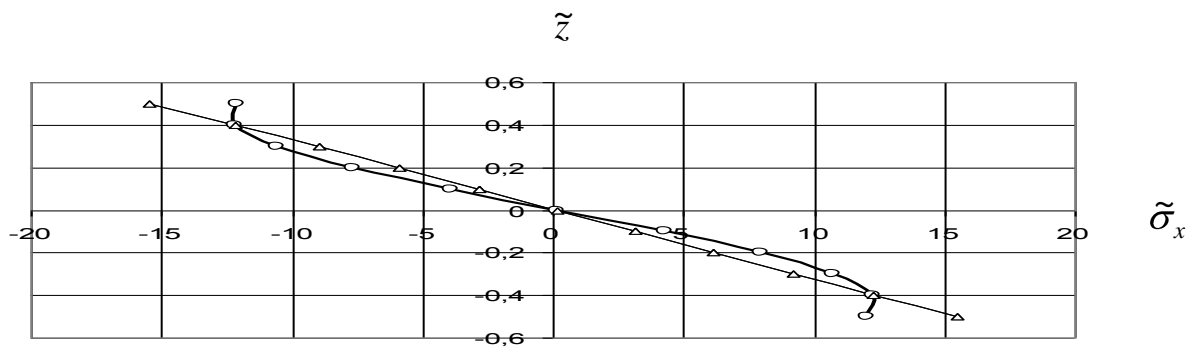


Рис. Г.1. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $q_m = 15$ МПа).

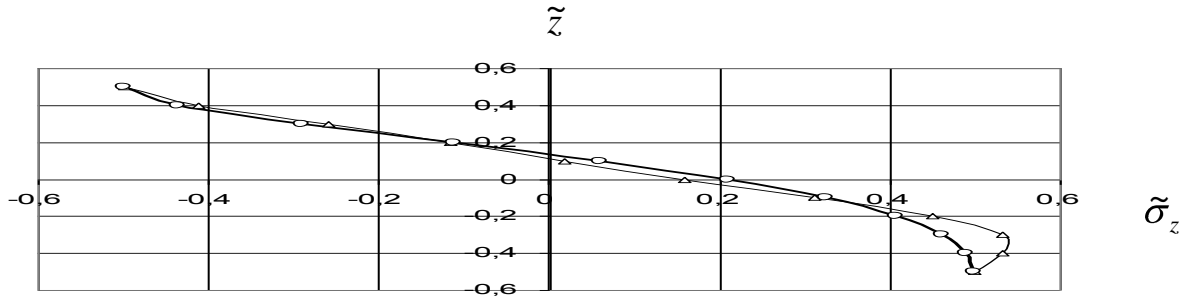


Рис. Г.2. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $q_m = 15$ МПа).

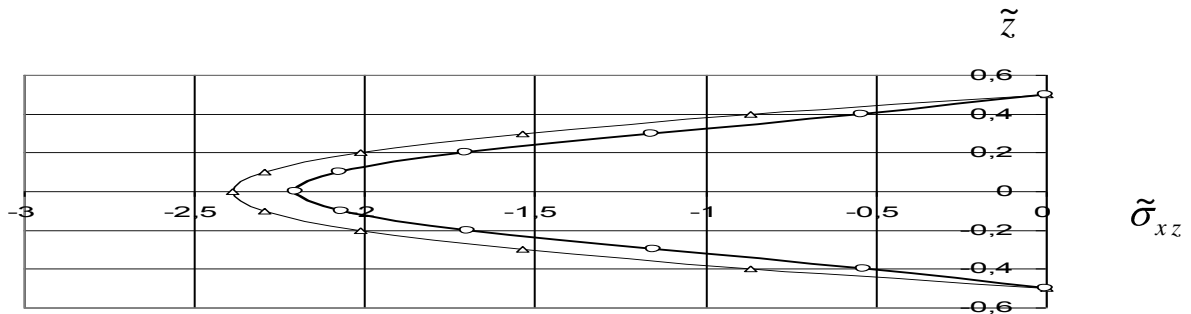


Рис. Г.3. Змінювання $\tilde{\sigma}_{xz}$ по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $q_m = 15$ МПа).

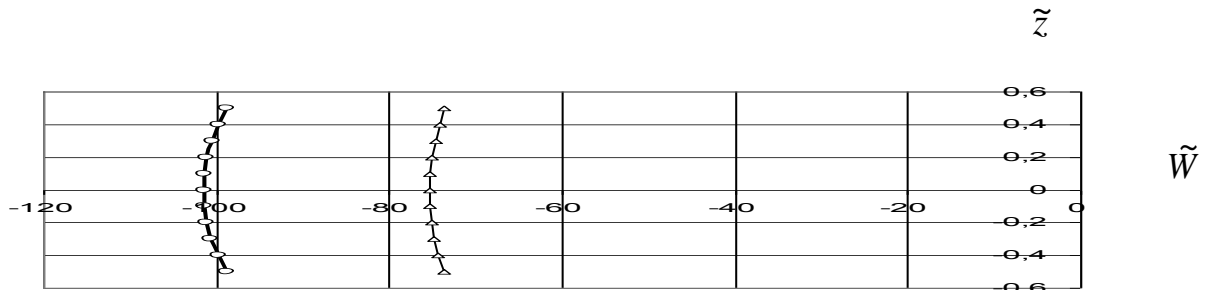


Рис. Г.4. Змінювання \tilde{W} по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $q_m = 15$ МПа).

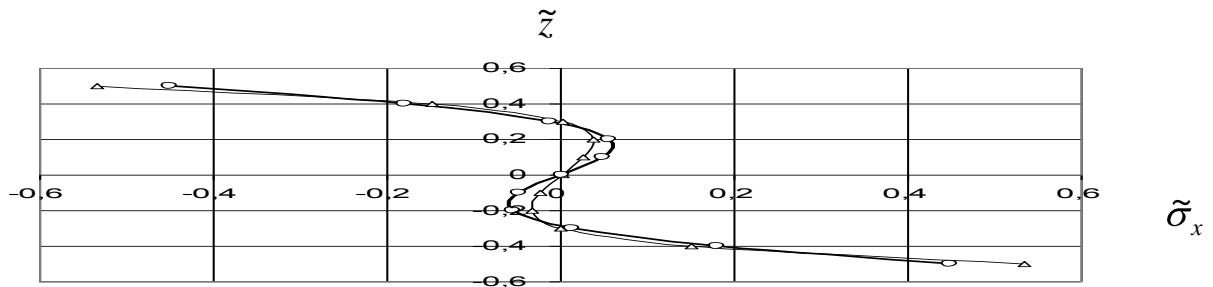


Рис. Г.5. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 9$; $q_m = 15$ МПа).

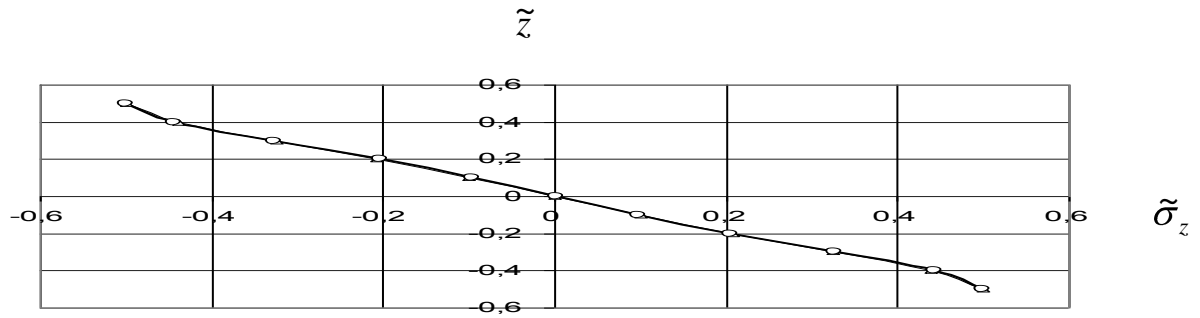


Рис. Г.6. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 9$; $q_m = 15$ МПа).

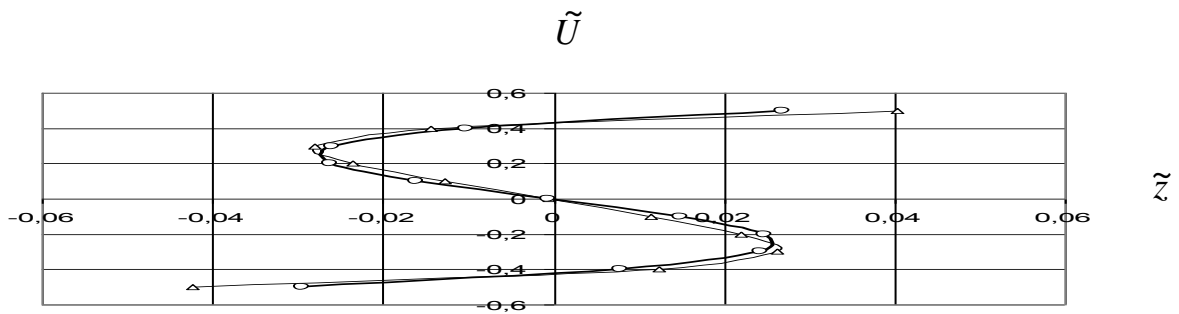


Рис. Г.7. Змінювання \tilde{U} по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 9$; $q_m = 15$ МПа).

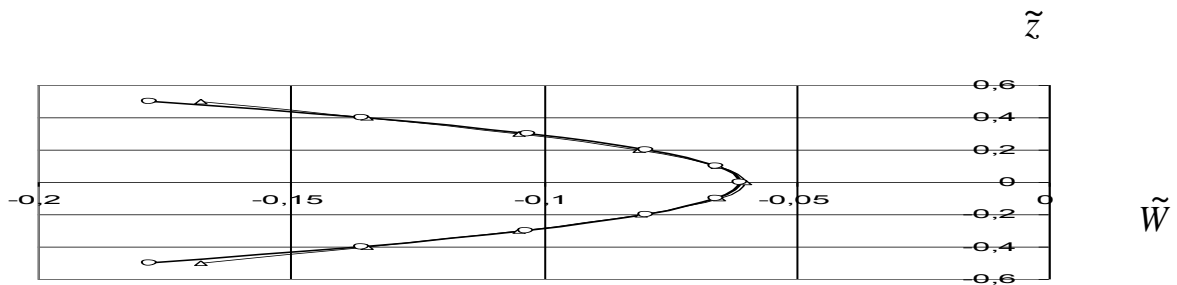


Рис. Г.8. Змінювання \tilde{W} по товщині фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 9$; $q_m = 15$ МПа).

Додаток Д

Багатошарові нетонкі пластини і пологі оболонки.

Залежності, рівняння, ілюстрації

Д.1. Залежності і рівняння для шаруватих пологих оболонок

ДР рівноваги, що відповідають рівностям нулю множників при варіаціях, мають наступний вигляд.

При δu_k (k -парне, $k \geq 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sum [a_{ki0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i s_{xil} - I_{xil}) + \dots + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1} - I_{xik})]) + 0. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\sum [a_{ki0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i t_{yxil} - I_{yxil}) + \dots + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1}t_{yxik} - I_{yxik})]) - \\ & - 2\sum [a_{kil}t_{xi0} + a_{ki2}t_{xil} + a_{ki3}(t_{xi2} + t_{xi0}) + a_{ki4}(t_{xi3} + t_{xil}) + a_{ki5}(t_{xi4} + t_{xi2} + t_{xi0}) + \dots \\ & + a_{kik}(t_{xi(k-1)} + t_{xi(k-3)} + \dots + t_{xil})] + k'_{li} \sum (a_{ki0}h_i t_{xi0} + a_{kil}\frac{1}{3}h_i t_{xil} + \dots + a_{kik}\frac{h_i}{2k+1}t_{xik}) = 0. \end{aligned} \quad (Д.1)$$

При δu_k (k -непарне, $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sum [a_{ki0}(h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i s_{xil} - I_{xil}) + \dots + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1} - I_{xik})]) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\sum [a_{ki0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i t_{yxil} - I_{yxil}) + \dots \\ & + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1}t_{yxik} - I_{yxik})]) - 2\sum [a_{kil}t_{xi0} + a_{ki2}t_{xil} + a_{ki3}(t_{xi2} + t_{xi0}) + \\ & + a_{ki4}(t_{xi3} + t_{xil}) + a_{ki5}(t_{xi4} + t_{xi2} + t_{xi0}) + \dots + a_{kik}(t_{xi(k-1)} + t_{xi(k-3)} + \dots \\ & + t_{xi0})] + k'_{li} \sum (a_{ki0}h_i t_{xi0} + a_{kil}\frac{1}{3}h_i t_{xil} + \dots + a_{kik}\frac{h_i}{2k+1}t_{xik}) = 0. \end{aligned} \quad (Д.2)$$

При δv_k (k -парне, $k \geq 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sum [a_{ki0}(h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i t_{yxil} - I_{yxil}) + \dots + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1}t_{yxik} - I_{yxik})]) + 0. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\sum [a_{ki0}(h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{kil}(\frac{1}{3}h_i s_{yil} - I_{yil}) + \dots + a_{kik}(\frac{h_i}{2k+1}s_{yik} - I_{yik})]) - \\ & - 2\sum [a_{kil}t_{yi0} + a_{ki2}t_{yil} + a_{ki3}(t_{yi2} + t_{yi0}) + a_{ki4}(t_{yi3} + t_{yil}) + a_{ki5}(t_{yi4} + t_{yi2} + t_{yi0}) + \dots \\ & + a_{kik}(t_{yi(k-1)} + t_{yi(k-3)} + \dots + t_{yil})] + k'_{2i} \sum (a_{ki0}h_i t_{yi0} + a_{kil}\frac{1}{3}h_i t_{yil} + \dots + a_{kik}\frac{h_i}{2k+1}t_{yik}) = 0. \end{aligned} \quad (Д.3)$$

При δv_k (k -непарне, $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sum [a_{ki0} (h_i t_{yxi0} - I_{yxi0}) + a_{kil} (\frac{1}{3} h_i t_{yxil} - I_{yxil}) + \dots + a_{kik} (\frac{h_i}{2k+1} t_{yxik} - I_{yxik})]) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\sum [a_{ki0} (h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + a_{kil} (\frac{1}{3} s_{yik} - I_{yik}) + \dots + a_{kik} (\frac{h_i}{2k+1} s_{yik} - I_{yik})]) - \\ & - 2 \sum [a_{kil} t_{yi0} + a_{ki2} t_{yil} + a_{ki3} (t_{yi2} + t_{yil}) + a_{ki4} (t_{yi3} + t_{yil}) + a_{ki5} (t_{yi4} + t_{yil} + t_{yi0}) + \dots \\ & + a_{kik} (t_{yi(k-1)} + t_{yi(k-3)} + \dots + t_{yi0})] + k'_{2i} \sum (a_{ki0} h_i t_{yi0} + a_{kil} \frac{1}{3} h_i t_{yil} + \dots + a_{kik} \frac{h_i}{2k+1} t_{yik}) = 0. \end{aligned} \quad (Д.4)$$

При δw_k ($k \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sum [a_{(k-1)i0} h_i t_{xi0} + \frac{1}{3} a_{(k-1)il} h_i t_{xil} + \frac{1}{5} a_{(k-1)i2} h_i t_{xi2} + \dots + \\ & + \frac{h_i}{2k+1} a_{(k-1)i(k-1)} t_{xi(k-1)}]) + \frac{\partial}{\partial y} (\sum [a_{(k-1)i0} h_i t_{yi0} + \frac{1}{3} a_{(k-1)il} h_i t_{yil} + \\ & + \frac{1}{5} a_{(k-1)i2} h_i t_{yi2} + \dots + \frac{h_i}{2k+1} a_{(k-1)i(k-1)} t_{yi(k-1)}]) - 0, \\ & - k_{li} \sum [a_{(k-1)i0} (h_i s_{xi0} - I_{xi0}) + a_{(k-1)il} (\frac{1}{3} h_i s_{xil} - I_{xil}) + \dots + \\ & + a_{(k-1)i(k-1)} (\frac{h_i}{2k+1} s_{xi(k-1)} - I_{xi(k-1)})] - k_{2i} \sum [a_{(k-1)i0} (h_i s_{yi0} - I_{yi0}) + \\ & + a_{(k-1)il} (\frac{1}{3} h_i s_{yil} - I_{yil}) + \dots + a_{(k-1)i(k-1)} (\frac{h_i}{2k+1} s_{yi(k-1)} - I_{yi(k-1)})] - \\ & - 2 \sum (s_{zi0} a_{(k-1)il} + s_{zi1} a_{(k-1)i2} + \dots + s_{zi(k-2)} a_{(k-1)i(k-1)}) + \frac{1}{2} [(p-q) \varphi_{(k-1)l}(-t_1) - (p+q)] = 0, \end{aligned} \quad (Д.5)$$

де

$$\begin{aligned} I_{xin} &= I_{xin}(x, y, t) = \int_{h_i} f_{xi}(x, y, z_i, t) P_n(z_i) dz_i, \quad (I_{xin} \rightarrow I_{yin}; f_{xi} \rightarrow f_{yi}); \\ I_{yxin} &= I_{yxin}(x, y, t) = \int_{h_i} f_{yxi}(x, y, z_i, t) P_n(z_i) dz_i. \end{aligned}$$

У рівняннях (Д.1) – (Д.5) сумування виконується по i від $i = 1$ до $i = j$.

Диференціальні оператори $D_{i,j}$ системи ДР (6.37) мають вигляд:

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= c_{1,1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{1,2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{1,3}, \quad D_{1,2} = c_{1,4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{1,3} = c_{1,5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{1,6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{1,7}, \quad (Д.6) \\ D_{1,4} &= c_{1,8} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{1,5} = c_{1,9} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{1,10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{1,11}, \quad D_{1,6} = c_{1,12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1,7} &= c_{1,13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{1,14} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{1,15}, \quad D_{1,8} = c_{1,16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{1,9} = c_{1,17} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{1,10} = c_{1,18} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{1,11} &= c_{1,19} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{1,p} = c_{1,20} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{1,q} = c_{1,21} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{1\xi} &= \sum_i a_{0i0} \left[\frac{\partial I_{xi0}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial y} - h_i (d_{li} \alpha_{0z,x} + k'_{li} \alpha_{0x}) \right], \\
D_{2,1} &= c_{2,1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{2,2} = c_{2,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{2,3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{2,4}, \quad D_{2,3} = c_{2,5} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{2,4} &= c_{2,6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{2,7} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{2,8}, \quad D_{2,5} = c_{2,9} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{2,6} = c_{2,10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{2,11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{2,12}, \\
D_{2,7} &= c_{2,13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{2,8} = c_{2,14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{2,15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{2,16}, \quad D_{2,9} = c_{2,17} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{2,10} = c_{2,18} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{2,11} &= c_{2,19} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{2,p} = c_{2,20} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{2,q} = c_{2,21} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{2\xi} &= \sum_i a_{0i0} \left[\frac{\partial I_{yi0}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial x} - h_i (d_{li} \alpha_{0z,y} + k'_{li} \alpha_{0y}) \right], \\
D_{3,1} &= c_{3,1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{3,2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{3,3}, \quad D_{3,2} = c_{3,4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{3,3} = c_{3,5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{3,6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{3,7}, \\
D_{3,4} &= c_{3,8} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{3,5} = c_{3,9} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{3,10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{3,11}, \quad D_{3,6} = c_{3,12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{3,7} &= c_{3,13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{3,14} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{3,15}, \quad D_{3,8} = c_{3,16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{3,9} = c_{3,17} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3,10} = c_{3,18} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{3,11} &= c_{3,19} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3,p} = c_{3,20} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{3,q} = c_{3,21} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{3\xi} &= \sum_i \left[a_{1i0} \left(\frac{\partial I_{xi0}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial y} - h_i (d_{li} \alpha_{0z,x} + k'_{li} \alpha_{0x}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + a_{1i1} \left(\frac{\partial I_{xil}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxil}}{\partial y} - \frac{h_i}{3} (d_{li} \alpha_{1z,x} + k'_{li} \alpha_{1x}) + 2\alpha_{0x} \right) \right], \\
D_{4,1} &= c_{4,1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{4,2} = c_{4,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{4,3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{4,4}, \quad D_{4,3} = c_{4,5} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{4,4} &= c_{4,6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{4,7} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{4,8}, \quad D_{4,5} = c_{4,9} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{4,6} = c_{4,10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{4,11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{4,12}, \\
D_{4,7} &= c_{4,13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{4,8} = c_{4,14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{4,15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{4,16}, \quad D_{4,9} = c_{4,17} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{4,10} = c_{4,18} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{4,11} &= c_{4,19} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{4,p} = c_{4,20} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{4,q} = c_{4,21} \frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{4\xi} &= \sum_i [a_{i0} \left(\frac{\partial I_{yi0}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial x} - h_i (d_{1i} \alpha_{0z,y} + k'_{2i} \alpha_{0y}) \right) + \\
&\quad + a_{i1} \left(\frac{\partial I_{yil}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxil}}{\partial x} - \frac{h_i}{3} (d_{1i} \alpha_{1z,y} + k'_{2i} \alpha_{1y}) + 2\alpha_{0y} \right)], \\
D_{5,1} &= c_{5,1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{5,2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{5,3}, \quad D_{5,2} = c_{5,4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{5,3} = c_{5,5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{5,6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{5,7}, \\
D_{5,4} &= c_{5,8} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{5,5} = c_{5,9} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{5,10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{5,11}, \quad D_{5,6} = c_{5,12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{5,7} &= c_{5,13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{5,14} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{5,15}, \quad D_{5,8} = c_{5,16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{5,9} = c_{5,17} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5,10} = c_{5,18} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{5,11} &= c_{5,19} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5p} = c_{5,20} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{5q} = c_{5,21} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{5\xi} &= \sum_i [a_{2i0} \left(\frac{\partial I_{xi0}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial y} - h_i (d_{1i} \alpha_{0z,x} + k'_{1i} \alpha_{0x}) \right) + a_{2i1} \left(\frac{\partial I_{xil}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxil}}{\partial y} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h_i}{3} (d_{1i} \alpha_{1z,x} + k'_{1i} \alpha_{1x}) \right) + a_{2i2} \left(\frac{\partial I_{xi2}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi2}}{\partial y} - \frac{h_i}{5} (d_{1i} \alpha_{2z,x} + k'_{1i} \alpha_{2x}) \right) + \\
&\quad \left. + 2(a_{2i1} \alpha_{0x} + a_{2i2} \alpha_{1x}) \right], \\
D_{6,1} &= c_{6,1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{6,2} = c_{6,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{6,3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{6,4}, \quad D_{6,3} = c_{6,5} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{6,4} &= c_{6,6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{6,7} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{6,8}, \quad D_{6,5} = c_{6,9} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{6,6} = c_{6,10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{6,11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{6,12}, \\
D_{6,7} &= c_{6,13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{6,8} = c_{6,14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{6,15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{6,16}, \quad D_{6,9} = c_{6,17} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{6,10} = c_{6,18} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{6,11} &= c_{6,19} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{6p} = c_{6,20} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{6q} = c_{6,21} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{6\xi} &= \sum_i [a_{2i0} \left(\frac{\partial I_{yi0}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial x} - h_i (d_{1i} \alpha_{0z,y} + k'_{2i} \alpha_{0y}) \right) + a_{2i1} \left(\frac{\partial I_{yil}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxil}}{\partial x} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h_i}{3} (d_{1i} \alpha_{1z,y} + k'_{2i} \alpha_{1y}) \right) + a_{2i2} \left(\frac{\partial I_{yi2}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi2}}{\partial x} - \frac{h_i}{5} (d_{1i} \alpha_{2z,y} + k'_{2i} \alpha_{2y}) \right) + \\
&\quad \left. + 2(a_{2i1} \alpha_{0y} + a_{2i2} \alpha_{1y}) \right], \\
D_{7,1} &= c_{7,1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{7,2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{7,3}, \quad D_{7,2} = c_{7,4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{7,3} = c_{7,5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{7,6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{7,7}, \\
D_{7,4} &= c_{7,8} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{7,5} = c_{7,9} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{7,10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{7,11}, \quad D_{7,6} = c_{7,12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{7,7} &= c_{7,13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{7,14} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{7,15}, \quad D_{7,8} = c_{7,16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{7,9} = c_{7,17} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{7,10} = c_{7,18} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{7,11} &= c_{7,19} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{7,p} = c_{7,20} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{7,q} = c_{7,21} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{7\xi} &= \sum_i [a_{3i0} \left(\frac{\partial I_{xi0}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial y} - h_i (d_{1i} \alpha_{0z,x} + k'_{1i} \alpha_{0x}) \right) + a_{3i1} \left(\frac{\partial I_{xil}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxil}}{\partial y} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h_i}{3} (d_{1i} \alpha_{1z,x} + k'_{1i} \alpha_{1x}) \right) + a_{3i2} \left(\frac{\partial I_{xi2}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi2}}{\partial y} - \frac{h_i}{5} (d_{1i} \alpha_{2z,x} + k'_{1i} \alpha_{2x}) \right) + \\
&\quad \left. + a_{3i3} \left(\frac{\partial I_{xi3}}{\partial x} + \frac{\partial I_{yxi3}}{\partial y} - \frac{h_i}{7} (d_{1i} \alpha_{3z,x} + k'_{1i} \alpha_{3x}) \right) + 2(a_{3i1} \alpha_{0x} + a_{3i2} \alpha_{1x} + a_{3i3} (\alpha_{0x} + \alpha_{2x})) \right], \\
D_{8,1} &= c_{8,1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{8,2} = c_{8,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{8,3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{8,4}, \quad D_{8,3} = c_{8,5} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
D_{8,4} &= c_{8,6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{8,7} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{8,8}, \quad D_{8,5} = c_{8,9} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{8,6} = c_{8,10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{8,11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{8,12}, \\
D_{8,7} &= c_{8,13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{8,8} = c_{8,14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{8,15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{8,16}, \quad D_{8,9} = c_{8,17} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{8,10} = c_{8,18} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{8,11} &= c_{8,19} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{8,p} = c_{8,20} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{8,q} = c_{8,21} \frac{\partial}{\partial y}, \\
D_{8\xi} &= \sum_i [a_{3i0} \left(\frac{\partial I_{yi0}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi0}}{\partial x} - h_i (d_{1i} \alpha_{0z,y} + k'_{2i} \alpha_{0y}) \right) + a_{3i1} \left(\frac{\partial I_{yil}}{\partial y} + \frac{\partial I_{xyil}}{\partial x} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h_i}{3} (d_{1i} \alpha_{1z,y} + k'_{2i} \alpha_{1y}) \right) + a_{3i2} \left(\frac{\partial I_{yi2}}{\partial y} + \frac{\partial I_{yxi2}}{\partial x} - \frac{h_i}{5} (d_{1i} \alpha_{2z,y} + k'_{2i} \alpha_{2y}) \right) + \\
&\quad \left. + a_{3i3} \left(\frac{\partial I_{yi3}}{\partial y} + \frac{\partial I_{xyi3}}{\partial x} - \frac{h_i}{7} (d_{1i} \alpha_{3z,y} + k'_{2i} \alpha_{3y}) \right) + 2(a_{3i1} \alpha_{0y} + a_{3i2} \alpha_{1y} + a_{3i3} (\alpha_{0y} + \alpha_{1y})) \right], \\
D_{9,1} &= c_{9,1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{9,2} = c_{9,2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{9,3} = c_{9,3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{9,4} = c_{9,4} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{9,5} = c_{9,5} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{9,6} &= c_{9,6} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{9,7} = c_{9,7} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{9,8} = c_{9,8} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{9,9} = c_{9,9} \nabla^2 + c_{9,10}, \quad D_{9,10} = c_{9,11} \nabla^2 + c_{9,12}, \\
D_{9,11} &= c_{9,13} \nabla^2 + c_{9,14}, \quad D_{9,p} = c_{9,15}, \quad D_{9,q} = c_{9,16}, \\
D_{9\xi} &= \sum_i a_{3i0} [k_{1i} I_{xi0} + k_{2i} I_{yi0} + h_i (\alpha_{0x,x} + \alpha_{0y,y} - k_{12i} d_{1i} \alpha_{0z})], \\
D_{10,1} &= c_{10,1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{10,2} = c_{10,2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{10,3} = c_{10,3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{10,4} = c_{10,4} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{10,5} = c_{10,5} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{10,6} &= c_{10,6} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{10,7} = c_{10,7} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{10,8} = c_{10,8} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{10,9} = c_{10,9} \nabla^2 + c_{10,10}, \\
D_{10,10} &= c_{10,11} \nabla^2 + c_{10,12}, \quad D_{10,11} = c_{10,13} \nabla^2 + c_{10,14}, \quad D_{10,p} = c_{10,15}, \quad D_{10,q} = c_{10,16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{10\xi} &= \sum_i \{a_{1i0}[h_i(\alpha_{0x,x} + \alpha_{0y,y} - k_{12i}d_{1i}\alpha_{0z}) + k_{1i}I_{xi0} + k_{2i}I_{yi0}] + \\
&+ a_{1i1}[\frac{h_i}{3}(\alpha_{1x,x} + \alpha_{1y,y} - k_{12i}d_{1i}\alpha_{1z}) - 2\alpha_{0z} + k_{1i}I_{xi1} + k_{2i}I_{yi1}]\}, \\
D_{11,1} &= c_{11,1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{11,2} = c_{11,2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{11,3} = c_{11,3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{11,4} = c_{11,4} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{11,5} = c_{11,5} \frac{\partial}{\partial x}, \\
D_{11,6} &= c_{11,6} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{11,7} = c_{11,7} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{11,8} = c_{11,8} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_{11,9} = c_{11,9} \nabla^2 + c_{11,10}, \\
D_{11,10} &= c_{11,11} \nabla^2 + c_{11,12}, \quad D_{11,11} = c_{11,13} \nabla^2 + c_{11,14}, \quad D_{11p} = c_{11,15}, \quad D_{11q} = c_{11,16}, \\
D_{11\xi} &= \sum_i \{a_{2i0}[h_i(\alpha_{0x,x} + \alpha_{0y,y} - k_{12i}d_{1i}\alpha_{0z}) + k_{1i}I_{xi0} + k_{2i}I_{yi0}] + \\
&+ a_{2i1}[\frac{h_i}{3}(\alpha_{1x,x} + \alpha_{1y,y} - k_{12i}d_{1i}\alpha_{1z}) - 2\alpha_{0z} + k_{1i}I_{xi1} + k_{2i}I_{yi1}] + \\
&+ a_{2i2}[\frac{h_i}{5}(\alpha_{2x,x} + \alpha_{2y,y} - k_{12i}d_{1i}\alpha_{2z}) - 2\alpha_{1z} + k_{1i}I_{xi2} + k_{2i}I_{yi2}]\}.
\end{aligned}$$

У вищенаведених формулах (Д.6)

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}), \quad c_{1,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{0i0}, \quad c_{1,3} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{1i} r_{x00}, \quad (Д.7) \\
c_{1,4} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}), \quad c_{1,5} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}), \quad c_{1,6} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{1i0}, \\
c_{1,7} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{1i} r_{x01}, \quad c_{1,8} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}), \quad c_{1,9} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}), \\
c_{1,10} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{2i0}, \quad c_{1,11} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{1i} r_{x02}, \quad c_{1,12} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}), \\
c_{1,13} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}), \quad c_{1,14} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{3i0}, \quad c_{1,15} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{1i} r_{x03}, \\
c_{1,16} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}), \quad c_{1,17} = \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{01} + k_{1vi} d_i a_{0i0} + k'_{1i} s_{01}), \\
c_{1,18} &= \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{02} + k_{1vi} d_i a_{1i0} + k'_{1i} s_{02}), \quad c_{1,19} = \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{03} + k_{1vi} d_i a_{2i0} + k'_{1i} s_{03}), \\
c_{1,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} d_{1i} \alpha_{0p}, \quad c_{1,21} = -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} d_{1i} \alpha_{0q}, \quad c_{2,1} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}), \\
c_{2,2} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{0i0}, \quad c_{2,3} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}), \quad c_{2,4} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{2i} r_{y00}, \\
c_{2,5} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}), \quad c_{2,6} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{1i0}, \quad c_{2,7} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,8} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{2i} r_{y01}, \quad c_{2,9} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}), \quad c_{2,10} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{2i0}, \\
c_{2,11} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}), \quad c_{2,12} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{2i} r_{y02}, \quad c_{2,13} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}), \\
c_{2,14} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} G_i a_{3i0}, \quad c_{2,15} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}), \quad c_{2,16} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k'_{2i} r_{y03}, \\
c_{2,17} &= \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{01} + k_{2vi} d_i a_{0i0} + k'_{2i} s_{01}), \quad c_{2,18} = \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{02} + k_{2vi} d_i a_{1i0} + k'_{2i} s_{02}), \\
c_{2,19} &= \sum_{i=1}^j (d_{1i} t_{03} + k_{2vi} d_i a_{2i0} + k'_{2i} s_{03}), \quad c_{2,20} = -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} d_{1i} \alpha_{0p}, \quad c_{2,21} = -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} d_{1i} \alpha_{0q}, \\
c_{3,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + \frac{a_{1i1}}{3} d_{1i} r_{10}], \quad c_{3,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{1i0} G_i a_{0i0}, \\
c_{3,3} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{x00} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{x10}) - 2a_{1i1} r_{x00}], \quad c_{3,4} = \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (g_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + \frac{a_{1i1}}{3} d_{1i} r_{10}], \\
c_{3,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + d_i a_{1i1})], \quad c_{3,6} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0}^2 + \frac{1}{3} a_{1i1}^2), \\
c_{3,7} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{x01} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{x10}) - 2a_{1i1} r_{x01}], \\
c_{3,8} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (g_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + a_{1i1} g_i)], \\
c_{3,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + a_{2i1} d_i)], \quad c_{3,10} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0} a_{2i0} + \frac{a_{1i1}}{3} a_{2i1}), \\
c_{3,11} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{x02} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{x12}) - 2a_{1i1} r_{x02}], \\
c_{3,12} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (g_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + a_{2i1} g_i)], \\
c_{3,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + a_{3i1} d_i)], \quad c_{3,14} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0} a_{3i0} + \frac{a_{1i1}}{3} a_{3i1}), \\
c_{3,15} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{x03} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{x13}) - 2a_{1i1} r_{x03}], \\
c_{3,16} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + a_{3i1} g_i)], \\
c_{3,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{01} + k_{1vi} d_i a_{0i0} + k'_{1i} s_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{1i} s_{11})] - 2a_{1i1} s_{01}\}, \\
c_{3,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{02} + k_{1vi} d_i a_{1i0} + k'_{1i} s_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{12} + k_{1vi} d_i a_{1i1} + k'_{1i} s_{12})] - 2a_{1i1} s_{02}\}, \\
c_{3,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{03} + k_{1vi} d_i a_{2i0} + k'_{1i} s_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{13} + k_{1vi} d_i a_{2i1} + k'_{1i} s_{13})] - 2a_{1i1} s_{03}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1p}), \quad c_{3,21} = -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1q}); \\
c_{4,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (a_{0i0} g_i + d_{1i} r_{00}) + \frac{a_{1i1}}{3} d_{1i} r_{10}], \quad c_{4,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{1i0} a_{0i0} G_i, \\
c_{4,3} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + \frac{a_{1i1}}{3} d_{1i} r_{10}], \quad c_{4,4} = \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{1i0} r_{y00} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{y10}) - 2a_{1i1} r_{y00}], \\
c_{4,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (a_{1i0} g_i + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + a_{1i1} g_i)], \quad c_{4,6} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0}^2 + \frac{1}{3} a_{1i1}^2), \\
c_{4,7} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + d_i a_{1i1})], \\
c_{4,8} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{y01} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{y11}) - 2a_{1i1} r_{y01}], \\
c_{4,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (a_{2i0} g_i + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + a_{2i1} g_i)], \quad c_{4,10} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0} a_{2i0} + \frac{a_{1i1}}{3} a_{2i1}), \\
c_{4,11} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + d_i a_{2i1})], \\
c_{4,12} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{1i0} r_{y02} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{y12}) - 2a_{1i1} r_{y02}], \\
c_{4,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (a_{3i0} g_i + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + a_{3i1} g_i)], \quad c_{4,14} = \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{1i0} a_{3i0} + \frac{a_{1i1}}{3} a_{3i1}), \\
c_{4,15} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{1i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + d_i a_{3i1})], \\
c_{4,16} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{1i0} r_{y03} + \frac{a_{1i1}}{3} r_{y13}) - 2a_{1i1} r_{y03}], \\
c_{4,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{01} + k_{2vi} d_i a_{0i0} + k'_{2i} s_{01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{2i} s_{11})] - 2a_{1i1} s_{01}\}, \\
c_{4,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{02} + k_{2vi} d_i a_{1i0} + k'_{2i} s_{02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{12} + k_{2vi} d_i a_{1i1} + k'_{2i} s_{12})] - 2a_{1i1} s_{02}\}, \\
c_{4,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (d_{1i} t_{03} + k_{2vi} d_i a_{2i0} + k'_{2i} s_{03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (d_{1i} t_{13} + k_{2vi} d_i a_{2i1} + k'_{2i} s_{13})] - 2a_{1i1} s_{03}\}, \\
c_{4,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1p}), \quad c_{4,21} = -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1q}); \\
c_{5,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (a_{0i0} d_i + d_{1i} r_{00}) + \frac{a_{1i1}}{3} d_{1i} r_{00} + \frac{a_{2i1}}{5} d_{1i} r_{20}], \quad c_{5,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{2i0} a_{0i0} G_i, \\
c_{5,3} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{2i0} r_{x00} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{x10} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{x20}) - 2(a_{2i1} r_{x00} + a_{2i2} r_{x10})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{5,4} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(g_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + d_{1i} (\frac{a_{2i1}}{3} d_{1i} r_{10} + \frac{a_{2i2}}{5} d_{1i} r_{20})], \\
c_{5,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(a_{1i0} d_i + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + a_{1i1} d_i) + \frac{a_{2i2}}{5} d_{1i} r_{21}], \\
c_{5,6} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0} a_{1i0} + \frac{1}{3} a_{2i1} a_{1i1}), \\
c_{5,7} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{2i0} r_{x01} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{x21} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{x21}) - 2(a_{2i1} r_{x01} + a_{1i2} r_{x11})], \\
c_{5,8} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(g_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + g_i a_{1i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} d_{1i} r_{21}], \\
c_{5,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(a_{2i0} d_i + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + a_{2i1} d_i) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{22} + a_{2i2} d_i)], \\
c_{5,10} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0}^2 + \frac{a_{2i1}^2}{3} + \frac{a_{2i2}^2}{5}), \\
c_{5,11} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{2i0} r_{x02} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{x12} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{x22}) - 2(a_{2i1} r_{x02} + a_{2i2} r_{x12})], \\
c_{5,12} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(g_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (a_{2i1} g_i + d_{1i} r_{12}) + \frac{a_{2i2}}{5} (a_{2i2} g_i + d_{1i} r_{22})], \\
c_{5,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + d_i a_{3i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{23} + d_i a_{3i2})], \\
c_{5,14} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0} a_{3i0} + \frac{a_{2i1}}{3} a_{3i1} + \frac{a_{2i2}}{5} a_{3i2}), \\
c_{5,15} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{2i0} r_{x03} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{x13} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{x23}) - 2(a_{2i1} r_{x03} + a_{2i2} r_{x13})], \\
c_{5,16} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0}(g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + g_i a_{3i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{23} + g_i a_{3i2})], \\
c_{5,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i} t_{01} + k_{1vi} d_i a_{0i0} + k'_{1i} s_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{1i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} t_{21} + k'_{1i} s_{21})] - 2a_{2i1} s_{01} \}, \\
c_{5,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i} t_{02} + k_{1vi} d_i a_{1i0} + k'_{1i} s_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} t_{12} + k_{1vi} d_i a_{1i1} + k'_{1i} s_{12}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} t_{22} + k'_{1i} s_{22})] - 2(a_{2i1} s_{02} + a_{2i2} s_{12}) \}, \\
c_{5,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i} t_{03} + k_{1vi} d_i a_{2i0} + k'_{1i} s_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} t_{13} + k_{1vi} d_i a_{2i1} + k'_{1i} s_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} t_{23} + k_{1vi} d_i a_{2i2} + k'_{1i} s_{23})] - 2(a_{2i1} s_{03} + a_{2i2} s_{13}) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{5,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{2i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{2i1}}{3} \alpha_{1p} + \frac{a_{2i2}}{5} \alpha_{2p}), \quad c_{5,21} = -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{2i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{2i1}}{3} \alpha_{1q} + \frac{a_{2i2}}{5} \alpha_{2q}); \\
c_{6,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (a_{0i0} g_i + d_{1i} r_{00}) + d_{1i} (\frac{a_{2i1}}{3} r_{10} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{20})], \quad c_{6,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{2i0} a_{0i0} G_i, \\
c_{6,3} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + d_{1i} (\frac{a_{2i1}}{3} r_{10} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{20})], \\
c_{6,4} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{2i0} r_{y00} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{y10} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{y20}) - 2(a_{2i1} r_{y00} + a_{2i2} r_{y10})], \\
c_{6,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (a_{1i0} g_i + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + a_{1i1} g_i) + \frac{a_{2i2}}{5} d_{1i} r_{21}], \\
c_{6,6} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0} a_{1i0} + \frac{1}{3} a_{2i1} a_{1i1}), \\
c_{6,7} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{11} + d_i a_{1i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} d_{1i} r_{21}], \\
c_{6,8} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{2i0} r_{y01} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{y11} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{y21}) - 2(a_{2i1} r_{y01} + a_{2i2} r_{y11})], \\
c_{6,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (a_{2i0} g_i + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (a_{2i1} g_i + d_{1i} r_{12}) + \frac{a_{2i2}}{5} (a_{2i2} g_i + d_{1i} r_{22})], \\
c_{6,10} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0}^2 + \frac{a_{2i1}^2}{3} + \frac{a_{2i2}^2}{5}), \\
c_{6,11} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{12} + d_i a_{2i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{22} + d_i a_{2i2})], \\
c_{6,12} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{2i0} r_{y02} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{y22} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{y22}) - 2(a_{2i1} r_{y02} + a_{2i2} r_{y12})], \\
c_{6,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + g_i a_{3i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{23} + g_i a_{3i2})], \\
c_{6,14} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{2i0} a_{3i0} + \frac{a_{2i1}}{3} a_{3i1} + \frac{a_{2i2}}{5} a_{3i2}), \\
c_{6,15} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{2i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} r_{13} + d_i a_{3i1}) + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} r_{23} + d_i a_{3i2})], \\
c_{6,16} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{2i0} r_{y03} + \frac{a_{2i1}}{3} r_{y13} + \frac{a_{2i2}}{5} r_{y23}) - 2(a_{2i1} r_{y03} + a_{2i2} r_{y13})], \\
c_{6,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (d_{1i} t_{01} + k_{2vi} d_i a_{0i0} + k'_{2i} s_{01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{2i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5} (d_{1i} t_{21} + k'_{2i} s_{21})] - 2a_{2i1} s_{01} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{6,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i}t_{02} + k_{2vi}d_i a_{1i0} + k'_{2i}s_{02}) + \frac{a_{2i1}}{3}(d_{1i}t_{12} + k_{2vi}d_i a_{1i1} + k'_{2i}s_{12}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5}(d_{1i}t_{22} + k'_{2i}s_{22})] - 2(a_{2i1}s_{02} + a_{2i2}s_{12})\}, \\
c_{6,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i}t_{03} + k_{2vi}d_i a_{2i0} + k'_{2i}s_{03}) + \frac{a_{2i1}}{3}(d_{1i}t_{13} + k_{2vi}d_i a_{2i1} + k'_{2i}s_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{2i2}}{5}(d_{1i}t_{23} + k_{2vi}d_i a_{2i2} + k'_{2i}s_{23})] - 2(a_{2i1}s_{03} + a_{2i2}s_{13})\}, \\
c_{6,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{2i0}\alpha_{0p} + \frac{a_{2i1}}{3}\alpha_{1p} + \frac{a_{2i2}}{5}\alpha_{2p}), \quad c_{6,21} = -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{2i0}\alpha_{0q} + \frac{a_{2i1}}{3}\alpha_{1q} + \frac{a_{2i2}}{5}\alpha_{2q}); \\
c_{7,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(a_{0i0}d_i + d_{1i}r_{00}) + d_{1i}(\frac{a_{3i1}}{3}r_{10} + \frac{a_{3i2}}{5}r_{20} + \frac{a_{3i3}}{7}r_{30})], \quad c_{7,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{3i0} a_{0i0} G_i, \\
c_{7,3} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{3i0}r_{x00} + \frac{a_{3i1}}{3}r_{x10} + \frac{a_{3i2}}{5}r_{x20} + \frac{a_{3i3}}{7}r_{x30}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1}r_{x00} + a_{3i2}r_{x10} + a_{3i3}(r_{x00} + r_{x20}))], \\
c_{7,4} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(g_i a_{0i0} + d_{1i}r_{00}) + d_{1i}(\frac{a_{3i1}}{3}r_{10} + \frac{a_{3i2}}{5}r_{20} + \frac{a_{3i3}}{7}r_{30})], \\
c_{7,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(a_{1i0}d_i + d_{1i}r_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3}(d_{1i}a_{1i1} + d_{1i}r_{11}) + \frac{a_{3i2}}{5}d_{1i}r_{21} + \frac{a_{3i3}}{7}d_{1i}r_{31}], \\
c_{7,6} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0}a_{1i0} + \frac{a_{3i1}}{3}a_{1i1}), \\
c_{7,7} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{3i0}r_{x01} + \frac{a_{3i1}}{3}r_{x11} + \frac{a_{3i2}}{5}r_{x21} + \frac{a_{3i3}}{7}r_{x31}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1}r_{x01} + a_{3i2}r_{x11} + a_{3i3}(r_{x01} + r_{x21}))], \\
c_{7,8} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(g_i a_{1i0} + d_{1i}r_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3}(a_{1i1}g_i + d_{1i}r_{11}) + \frac{a_{3i2}}{5}d_{1i}r_{21} + \frac{a_{3i3}}{7}d_{1i}r_{31}], \\
c_{7,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(a_{2i0}d_i + d_{1i}r_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3}(a_{2i1}d_i + d_{1i}r_{12}) + \frac{a_{3i2}}{5}(a_{2i2}d_i + d_{1i}r_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7}d_{1i}r_{32}], \\
c_{7,10} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0}a_{2i0} + \frac{a_{3i1}}{3}a_{2i1} + \frac{a_{3i2}}{5}a_{2i2}), \\
c_{7,11} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{3i0}r_{x02} + \frac{a_{3i1}}{3}r_{x12} + \frac{a_{3i2}}{5}r_{x22} + \frac{a_{3i3}}{7}r_{x32}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1}r_{x02} + a_{3i2}r_{x12} + 2(r_{x02} + r_{x22}))], \\
c_{7,12} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(g_i a_{2i0} + d_{1i}r_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3}(a_{2i1}g_i + d_{1i}r_{12}) + \frac{a_{3i2}}{5}(a_{2i2}g_i + d_{1i}r_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7}d_{1i}r_{32}], \\
c_{7,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0}(d_i a_{3i0} + d_{1i}r_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3}(d_i a_{3i1} + d_{1i}r_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5}(d_i a_{3i2} + d_{1i}r_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7}(d_i a_{3i3} + d_{1i}r_{33})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{7,14} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0}^2 + \frac{a_{3i1}^2}{3} + \frac{a_{3i2}^2}{5} + \frac{a_{3i3}^2}{7}), \\
c_{7,15} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{1i} (a_{3i0} r_{x03} + \frac{a_{3i1}}{3} r_{x13} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{x23} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{x33}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1} r_{x03} + a_{3i2} r_{x13} + a_{3i3} (r_{x03} + r_{x23}))], \\
c_{7,16} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3} (g_i a_{3i1} + d_{1i} r_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (g_i a_{3i2} + d_{1i} r_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7} (g_i a_{3i3} + d_{1i} r_{33})], \\
c_{7,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{01} + k_{1vi} d_i a_{0i0} + k'_{1i} s_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{1i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{21} + k'_{1i} s_{21}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{31} + k'_{1i} s_{31})] - 2[a_{3i1} s_{01} + a_{3i2} s_{11} + a_{3i3} (s_{01} + s_{21})]\}, \\
c_{7,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{02} + k_{1vi} d_i a_{1i0} + k'_{1i} s_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{12} + k_{1vi} d_i a_{1i1} + k'_{1i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{22} + k'_{1i} s_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{32} + k'_{1i} s_{32})] - 2[a_{3i1} s_{02} + a_{3i2} s_{12} + a_{3i3} (s_{02} + s_{22})]\}, \\
c_{7,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{03} + k_{1vi} d_i a_{2i0} + k'_{1i} s_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{13} + k_{1vi} d_i a_{2i1} + k'_{1i} s_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{23} + k_{1vi} d_i a_{2i2} + k'_{1i} s_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{33} + k'_{1i} s_{33})] - 2[a_{3i1} s_{03} + a_{3i2} s_{13} + a_{3i3} (s_{01} + s_{21})]\}, \\
c_{7,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{3i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{3i1}}{3} \alpha_{1p} + \frac{a_{3i2}}{5} \alpha_{2p} + \frac{a_{3i3}}{7} \alpha_{3p}), \\
c_{7,21} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{3i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{3i1}}{3} \alpha_{1q} + \frac{a_{3i2}}{5} \alpha_{2q} + \frac{a_{3i3}}{7} \alpha_{3q}); \\
c_{8,1} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (a_{0i0} g_i + d_{1i} r_{00}) + d_{1i} (\frac{a_{3i1}}{3} r_{10} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{20} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{30})], \quad c_{8,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{3i0} a_{0i0} G_i, \\
c_{8,3} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (d_i a_{0i0} + d_{1i} r_{00}) + d_{1i} (\frac{a_{3i1}}{3} r_{10} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{20} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{30})], \\
c_{8,4} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{3i0} r_{y00} + \frac{a_{3i1}}{3} r_{y10} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{y20} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{y30}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1} r_{y00} + a_{3i2} r_{y10} + a_{3i3} (r_{y00} + r_{y20}))], \\
c_{8,5} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (a_{1i0} g_i + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3} (g_i a_{1i1} + d_{1i} r_{11}) + \frac{a_{3i2}}{5} d_{1i} r_{21} + \frac{a_{3i3}}{7} d_{1i} r_{31}], \\
c_{8,6} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0} a_{1i0} + \frac{a_{3i1}}{3} a_{1i1}), \\
c_{8,7} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (d_i a_{1i0} + d_{1i} r_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3} (a_{1i1} d_i + d_{1i} r_{11}) + \frac{a_{3i2}}{5} d_{1i} r_{21} + \frac{a_{3i3}}{7} d_{1i} r_{31}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{8,8} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{3i0} r_{y01} + \frac{a_{3i1}}{3} r_{y11} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{y21} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{y31}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1} r_{y01} + a_{3i2} r_{y11} + a_{3i3} (r_{y01} + r_{y21}))], \\
c_{8,9} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (a_{2i0} g_i + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3} (a_{2i1} g_i + d_{1i} r_{12}) + \frac{a_{3i2}}{5} (a_{2i2} g_i + d_{1i} r_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7} d_{1i} r_{32}], \\
c_{8,10} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0} a_{2i0} + \frac{a_{3i1}}{3} a_{2i1} + \frac{a_{3i2}}{5} a_{2i2}), \\
c_{8,11} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (d_i a_{2i0} + d_{1i} r_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_i a_{2i1} + d_{1i} r_{12}) + \frac{a_{3i2}}{5} (d_i a_{2i2} + d_{1i} r_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7} d_{1i} r_{32}], \\
c_{8,12} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{3i0} r_{y02} + \frac{a_{3i1}}{3} r_{y12} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{y22} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{y32}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1} r_{y02} + a_{3i2} r_{y12} + 2(r_{y02} + r_{y22}))], \\
c_{8,13} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (g_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3} (g_i a_{3i1} + d_{1i} r_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (g_i a_{3i2} + d_{1i} r_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7} (g_i a_{3i3} + d_{1i} r_{33})], \\
c_{8,14} &= \sum_{i=1}^j h_i G_i (a_{3i0}^2 + \frac{a_{3i1}^2}{3} + \frac{a_{3i2}^2}{5} + \frac{a_{3i3}^2}{7}), \\
c_{8,15} &= \sum_{i=1}^j h_i [a_{3i0} (d_i a_{3i0} + d_{1i} r_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_i a_{3i1} + d_{1i} r_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_i a_{3i2} + d_{1i} r_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_i a_{3i3} + d_{1i} r_{33})], \\
c_{8,16} &= \sum_{i=1}^j [h_i k'_{2i} (a_{3i0} r_{y03} + \frac{a_{3i1}}{3} r_{y13} + \frac{a_{3i2}}{5} r_{y23} + \frac{a_{3i3}}{7} r_{y33}) - \\
&\quad - 2(a_{3i1} r_{y03} + a_{3i2} r_{y13} + a_{3i3} (r_{y03} + r_{y23}))], \\
c_{8,17} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{01} + k_{2vi} d_i a_{0i0} + k'_{2i} s_{01}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{11} + k'_{2i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{21} + k'_{2i} s_{21}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{31} + k'_{2i} s_{31})] - 2[a_{3i1} s_{01} + a_{3i2} s_{11} + a_{3i3} (s_{01} + s_{21})]\}, \\
c_{8,18} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{02} + k_{2vi} d_i a_{1i0} + k'_{2i} s_{02}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{12} + k_{2vi} d_i a_{1i1} + k'_{2i} s_{11}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{22} + k'_{2i} s_{22}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{32} + k'_{2i} s_{32})] - 2[a_{3i1} s_{02} + a_{3i2} s_{12} + a_{3i3} (s_{02} + s_{22})]\}, \\
c_{8,19} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{3i0} (d_{1i} t_{03} + k_{2vi} d_i a_{2i0} + k'_{2i} s_{03}) + \frac{a_{3i1}}{3} (d_{1i} t_{13} + k_{2vi} d_i a_{2i1} + k'_{2i} s_{13}) + \\
&\quad + \frac{a_{3i2}}{5} (d_{1i} t_{23} + k_{2vi} d_i a_{2i2} + k'_{2i} s_{23}) + \frac{a_{3i3}}{7} (d_{1i} t_{33} + k'_{2i} s_{33})] - 2[a_{3i1} s_{03} + a_{3i2} s_{13} + a_{3i3} (s_{03} + s_{23})]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{8,20} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{3i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{3i1}}{3} \alpha_{1p} + \frac{a_{3i2}}{5} \alpha_{2p} + \frac{a_{3i3}}{7} \alpha_{3p}), \\
c_{8,21} &= -\sum_{i=1}^j h_i d_{1i} (a_{3i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{3i1}}{3} \alpha_{1q} + \frac{a_{3i2}}{5} \alpha_{2q} + \frac{a_{3i3}}{7} \alpha_{3q}); \\
c_{9,1} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{1vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{x00}), \quad c_{9,2} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{2vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{y00}), \\
c_{9,3} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{1vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{x01}), \quad c_{9,4} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{2vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{y01}), \\
c_{9,5} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{1vi} d_i a_{2i0} + k_{12i} d_{1i} r_{02} - r_{x02}), \quad c_{9,6} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{2vi} d_i a_{2i0} + k_{12i} d_{1i} r_{02} - r_{y02}), \\
c_{9,7} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{1vi} d_i a_{3i0} + k_{12i} d_{1i} r_{03} - r_{x03}), \quad c_{9,8} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (k_{2vi} d_i a_{3i0} + k_{12i} d_{1i} r_{03} - r_{y03}), \\
c_{9,9} &= -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} s_{01}, \quad c_{9,10} = \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_{1i} t_{01} k_{12i} + k_{vi} d_i a_{0i0}), \quad c_{9,11} = -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} s_{02}, \\
c_{9,12} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_{1i} t_{02} k_{12i} + k_{vi} d_i a_{1i0}), \quad c_{9,13} = -\sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} s_{03}, \\
c_{9,14} &= \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} (d_{1i} t_{03} k_{12i} + k_{vi} d_i a_{2i0}), \quad c_{9,15} = \frac{1}{2} (\varphi_{01}(-t_1) - 1) - \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k_{12i} d_{1i} \alpha_{0p}, \\
c_{9,16} &= -[\frac{1}{2} (\varphi_{01}(-t_1) + 1) - \sum_{i=1}^j h_i a_{0i0} k_{12i} d_{1i} \alpha_{0q}], \\
c_{10,1} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{1vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{x00}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{10} - r_{x10})] + 2a_{1i1} r_{00}\}, \\
c_{10,2} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{2vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{y00}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{10} - r_{y10})] + 2a_{1i1} r_{00}\}, \\
c_{10,3} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{1vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{x01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{11} + k_{1vi} d_i a_{1i1} - r_{x11})] + 2a_{1i1} r_{01}\}, \\
c_{10,4} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{2vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{y01}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{11} + k_{2vi} d_i a_{1i1} - r_{y11})] + 2a_{1i1} r_{01}\}, \\
c_{10,5} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{1vi} d_i a_{2i0} + k_{12i} d_{1i} r_{02} - r_{x02}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{12} + k_{1vi} d_i a_{2i1} - r_{x12})] + 2a_{1i1} r_{02}\}, \\
c_{10,6} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{2vi} d_i a_{2i0} + k_{12i} d_{1i} r_{02} - r_{y02}) + \\
&\quad + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{12} + k_{2vi} d_i a_{2i1} - r_{y12})] + 2a_{1i1} r_{02}\}, \\
c_{10,7} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{1vi} d_i a_{3i0} + k_{12i} d_{1i} r_{03} - r_{x03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{13} + k_{1vi} d_i a_{3i1} - r_{x13})] + 2a_{1i1} r_{03}\}, \\
c_{10,8} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{2vi} d_i a_{3i0} + k_{12i} d_{1i} r_{03} - r_{y03}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{13} + k_{2vi} d_i a_{3i1} - r_{y13})] + 2a_{1i1} r_{03}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{10,9} &= -\sum_{i=1}^j h_i (a_{1i0} s_{01} + \frac{a_{1i1}}{3} s_{11}), \\
c_{10,10} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{12i} d_{1i} t_{01} + k_{vi} d_i a_{0i0}) + \frac{a_{1i1}}{3} k_{12i} d_{1i} t_{11}] + 2a_{1i1} t_{01}\}, \\
c_{10,11} &= -\sum_{i=1}^j h_i (a_{1i0} s_{02} + \frac{a_{1i1}}{3} s_{12}), \\
c_{10,12} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{12i} d_{1i} t_{02} + k_{vi} d_i a_{1i0}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} t_{12} + k_{vi} d_i a_{1i1})] + 2a_{1i1} t_{02}\}, \\
c_{10,13} &= -\sum_{i=1}^j h_i (a_{1i0} s_{03} + \frac{a_{1i1}}{3} s_{13}), \\
c_{10,14} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{1i0} (k_{12i} d_{1i} t_{03} + k_{vi} d_i a_{2i0}) + \frac{a_{1i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} t_{13} + k_{vi} d_i a_{2i1})] + 2a_{1i1} t_{03}\}, \\
c_{10,15} &= \frac{1}{2} (\varphi_{21}(-t_1) - 1) - \sum_{i=1}^j [h_i k_{12i} d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1p}) + 2a_{1i1} \alpha_{0p}], \\
c_{10,16} &= -\{\frac{1}{2} (\varphi_{21}(-t_1) + 1) + \sum_{i=1}^j [h_i k_{12i} d_{1i} (a_{1i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{1i1}}{3} \alpha_{1q}) + 2a_{1i1} \alpha_{0q}]\}, \\
c_{11,1} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (k_{1vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{x00}) + \\
&+ \frac{a_{2i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{10} - r_{x10}) + \frac{a_{2i2}}{5} (k_{12i} d_{1i} r_{20} - r_{x20})] + 2(a_{2i1} r_{00} + a_{2i2} r_{10})\}, \\
c_{11,2} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (k_{2vi} d_i a_{0i0} + k_{12i} d_{1i} r_{00} - r_{y00}) + \\
&+ \frac{a_{2i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{10} - r_{y10}) + \frac{a_{2i2}}{5} (k_{12i} d_{1i} r_{20} - r_{y20})] + 2(a_{2i1} r_{00} + a_{2i2} r_{10})\}, \\
c_{11,3} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (k_{1vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{x01}) + \frac{a_{2i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{11} + k_{1vi} d_i a_{1i1} - r_{x11}) + \\
&+ \frac{a_{2i2}}{5} (k_{12i} d_{1i} r_{21} - r_{x21})] + 2(a_{2i1} r_{01} + a_{2i2} r_{11})\}, \\
c_{11,4} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (k_{2vi} d_i a_{1i0} + k_{12i} d_{1i} r_{01} - r_{y01}) + \\
&+ \frac{a_{2i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{11} + k_{2vi} d_i a_{1i1} - r_{y11}) + \frac{a_{2i2}}{5} (k_{12i} d_{1i} r_{21} - r_{y21})] + 2(a_{2i1} r_{01} + a_{2i2} r_{11})\}, \\
c_{11,5} &= \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0} (k_{1vi} d_i a_{2i0} + k_{12i} d_{1i} r_{02} - r_{x02}) + \frac{a_{2i1}}{3} (k_{12i} d_{1i} r_{12} + k_{1vi} d_i a_{2i1} - r_{x12}) + \\
&+ \frac{a_{2i2}}{5} (k_{12i} d_{1i} r_{22} + k_{1vi} d_i a_{2i2} - r_{x22})] + 2(a_{2i1} r_{02} + a_{2i2} r_{12})\},
\end{aligned}$$

$$c_{11,6} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(k_{2vi}d_i a_{2i0} + k_{12i}d_{1i}r_{02} - r_{y02}) + \frac{a_{2i1}}{3}(k_{12i}d_{1i}r_{12} + k_{2vi}d_i a_{2i1} - r_{y12}) + \frac{a_{2i2}}{5}(k_{12i}d_{1i}r_{22} + k_{2vi}d_i a_{2i2} - r_{y22})] + 2(a_{2i1}r_{02} + a_{2i2}r_{12})\},$$

$$c_{11,7} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(k_{1vi}d_i a_{3i0} + k_{12i}d_{1i}r_{03} - r_{x03}) + \frac{a_{2i1}}{3}(k_{12i}d_{1i}r_{13} + k_{1vi}d_i a_{3i1} - r_{x13}) + \frac{a_{2i2}}{5}(k_{12i}d_{1i}r_{23} + k_{1vi}d_i a_{3i2} - r_{x23})] + 2(a_{2i1}r_{03} + a_{2i2}r_{13})\},$$

$$c_{11,8} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(k_{2vi}d_i a_{3i0} + k_{12i}d_{1i}r_{03} - r_{y03}) + \frac{a_{2i1}}{3}(k_{12i}d_{1i}r_{13} + k_{2vi}d_i a_{3i1} - r_{y13}) + \frac{a_{2i2}}{5}(k_{12i}d_{1i}r_{23} + k_{2vi}d_i a_{3i2} - r_{y23})] + 2(a_{2i1}r_{03} + a_{2i2}r_{13})\},$$

$$c_{11,9} = -\sum_{i=1}^j h_i (a_{2i0}s_{01} + \frac{a_{2i1}}{3}s_{11} + \frac{a_{2i2}}{5}s_{21}),$$

$$c_{11,10} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i}k_{12i}t_{01} + d_i a_{0i0}k_{vi}) + \frac{a_{2i1}}{3}k_{12i}d_{1i}t_{11} + \frac{a_{2i2}}{5}k_{12i}d_{1i}t_{21}] + 2(a_{2i1}t_{01} + a_{2i2}t_{11})\},$$

$$c_{11,11} = -\sum_{i=1}^j h_i (a_{2i0}s_{02} + \frac{a_{2i1}}{3}s_{12} + \frac{a_{2i2}}{5}s_{22}),$$

$$c_{11,12} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i}k_{12i}t_{02} + d_i a_{1i0}k_{vi}) + \frac{a_{2i1}}{3}(k_{12i}d_{1i}t_{12} + d_i a_{1i1}k_{vi}) + \frac{a_{2i2}}{5}k_{12i}d_{1i}t_{22}] + 2(a_{2i1}t_{02} + a_{2i2}t_{12})\},$$

$$c_{11,13} = -\sum_{i=1}^j h_i (a_{2i0}s_{03} + \frac{a_{2i1}}{3}s_{13} + \frac{a_{2i2}}{5}s_{23}),$$

$$c_{11,14} = \sum_{i=1}^j \{h_i [a_{2i0}(d_{1i}k_{12i}t_{03} + d_i a_{2i0}k_{vi}) + \frac{a_{2i1}}{3}(k_{12i}d_{1i}t_{13} + d_i a_{2i1}k_{vi}) + \frac{a_{2i2}}{5}(k_{12i}d_{1i}t_{23} + d_i a_{2i2}k_{vi})] + 2(a_{2i1}t_{03} + a_{2i2}t_{13})\},$$

$$c_{11,15} = \frac{1}{2}(\varphi_{21}(-t_1) - 1) - \sum_{i=1}^j [h_i k_{12i} d_{1i} (a_{2i0} \alpha_{0p} + \frac{a_{2i1}}{3} \alpha_{1p} + \frac{a_{2i2}}{5} \alpha_{2p}) + 2(a_{2i1} \alpha_{0p} + a_{2i2} \alpha_{1p})],$$

$$c_{11,16} = -\{\frac{1}{2}(\varphi_{21}(-t_1) + 1) + \sum_{i=1}^j [h_i k_{12i} d_{1i} (a_{2i0} \alpha_{0q} + \frac{a_{2i1}}{3} \alpha_{1p} + \frac{a_{2i2}}{5} \alpha_{2q}) + 2(a_{2i1} \alpha_{0q} + a_{2i2} \alpha_{1q})]\},$$

де

$$g_i = G_i + d_i v_i; \quad r_{0m} = q_{2i0} e_{2m} + q_{3i0} e_{3m}, \quad (m = 0, 1, 2, 3);$$

$$t_{0m} = q_{2i0}e_{2wm} + q_{3i0}e_{3wm}, \quad (m = 1,2,3);$$

$$\alpha_{0p} = q_{2i0}e_{2p} + q_{3i0}e_{3p} - 0,5; \quad \alpha_{0q} = q_{2i0}e_{2q} + q_{3i0}e_{3q} + q_{1i0};$$

$$\alpha_{0z}(x, y, t) = -(q_{2i0}e_{2\omega}(x, y, t) + q_{3i0}e_{3\omega}(x, y, t)).$$

Для $k = 1,2,3$

$$r_{km} = q_{2ik}e_{2m} + q_{3ik}e_{3m}, \quad (m = 0,1,2,3);$$

$$t_{km} = q_{2ik}e_{2wm} + q_{3ik}e_{3wm}, \quad (m = 1,2,3);$$

$$\alpha_{kp} = q_{2ik}e_{2p} + q_{3ik}e_{3p}; \quad \alpha_{kq} = q_{2ik}e_{2q} + q_{3ik}e_{3q} + q_{1ik};$$

$$\alpha_{kz}(x, y, t) = -(q_{2ik}e_{2\omega}(x, y, t) + q_{3ik}e_{3\omega}(x, y, t));$$

для $k = 4,5$

$$r_{4m} = q_{2i4}e_{2m} + q_{3i4}e_{3m}; \quad r_{5m} = q_{3i5}e_{3m}, \quad (m = 0,1,2,3);$$

$$t_{4m} = q_{2i4}e_{2wm} + q_{3i4}e_{3wm}; \quad t_{5m} = q_{3i5}e_{3wm}, \quad (m = 1,2,3);$$

$$\alpha_{4p} = q_{2i4}e_{2p} + q_{3i4}e_{3p}; \quad \alpha_{5p} = q_{3i5}e_{3p}; \quad \alpha_{4q} = q_{2i4}e_{2q} + q_{3i4}e_{3q};$$

$$\alpha_{5q} = q_{3i5}e_{3q}; \quad \alpha_{4z}(x, y, t) = -(q_{2i4}e_{2\omega}(x, y, t) + q_{3i4}e_{3\omega}(x, y, t));$$

$$\alpha_{5z}(x, y, t) = -q_{3i5}e_{3\omega}(x, y, t);$$

для $k = 0,1,2$

$$r_{xkm} = \sum_{n=1}^3 e_{nik}l_{xnm}, \quad (x, y; m = 0,1,2,3);$$

$$s_{km} = \sum_{n=1}^3 e_{nik}h_{nm}, \quad (m = 1,2,3); \quad \alpha_{kx}(x, y, t) = -\sum_{n=1}^3 e_{nik}h_{nx}(x, y, t), \quad (x, y);$$

для $k = 3$

$$r_{x3m} = e_{2i3}l_{x2m} + e_{3i3}l_{x3m}, \quad (x, y; m = 0,1,2,3); \quad s_{3m} = e_{2i3}h_{2m} + e_{3i3}h_{3m},$$

$$(m = 1,2,3); \quad \alpha_{3x}(x, y, t) = -(e_{2i3}h_{2x}(x, y, t) + e_{3i3}h_{3x}(x, y, t)), \quad (x, y).$$

Д.2. Точний розв'язок для багатошарових транстропних пластин

Розглядається згин багатошарової вільно обіпертої прямокутної транстропної пластини розмірами $a \times b \times h$, де h - товщина плити ($h = \sum_{i=1}^j h_i$), h_i - товщина i -го шару, j - кількість шарів. Нумерацію шарів введемо знизу догори. Вісь z напрямимо знизу вгору від нижньої ліцевої площини. Граничні умови (7.1); $q(x, y)$ і $p(x, y)$ змінюються за законом (2.213) при $m = n$. Компоненти НДС в i -му шарі для квадратної пластини визначаються таким чином:

$$u_i(x, y, z) = h_i \tilde{f}_{1i} C_{mx} S_{my}; \quad v_i(x, y, z) = h_i \tilde{f}_{1i} S_{mx} C_{my}; \quad w_i(x, y, z) = h_i \tilde{f}_{3i} S_{mx} S_{my};$$

$$\sigma_{xi}(x, y, z) = G_i \tilde{t}_{xi}(z) S_{mx} S_{my}, \quad (x, y); \quad \sigma_{zi}(x, y, z) = G_i \tilde{t}_{zi}(z) S_{mx} S_{my}; \quad (Д.8)$$

$$\sigma_{xzi}(x, y, z) = G_i \tilde{t}_{xzi}(z) C_{mx} S_{my}, \quad (x, y); \quad \sigma_{yxi}(x, y, z) = G_i \tilde{t}_{yxi}(z) C_{mx} C_{my},$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{1i}(z) &= \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} \tilde{S}_{1ni} e^{k_{ni}z}), \quad \tilde{f}_{3i}(z) = \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} \tilde{S}_{3ni} e^{k_{ni}z}), \\
\tilde{S}_{1ni} &= \tilde{k}_{ni} (\tilde{e}_{10i} - \tilde{g}_{ei} \tilde{e}_{40i} \tilde{k}_{ni}^2), \quad \tilde{S}_{3ni} = \tilde{g}_{ei}^2 \tilde{k}_{ni}^4 \tilde{b}_{44i}^2 + \tilde{g}_{ei} \tilde{e}_{32i} \tilde{k}_{ni}^2 + \tilde{e}_{30i}), \\
\tilde{t}_{xi}(z) = \tilde{t}_{yi}(z) &= \tilde{e}_{gi} \tilde{h}_i (\tilde{b}_{11i} + \tilde{b}_{12i}) \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} (-\pi m) \tilde{S}_{1ni} e^{k_{ni}z}) + \tilde{b}_{13i} \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} \tilde{k}_{ni} \tilde{S}_{3ni} e^{k_{ni}z}), \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{a} \\
\tilde{t}_{zi}(z) &= \tilde{e}_{gi} \tilde{h}_i (2\tilde{b}_{13i} \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} (-\pi m) \tilde{S}_{1ni} e^{k_{ni}z}) + \tilde{b}_{33i} \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} \tilde{k}_{ni} \tilde{S}_{3ni} e^{k_{ni}z})), \\
\tilde{t}_{xzi}(z) = \tilde{t}_{yzi}(z) &= \tilde{b}_{44i} \tilde{h}_i \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} (\pi m \tilde{S}_{3ni} + \tilde{k}_{ni} \tilde{S}_{1ni}) e^{k_{ni}z}), \quad \tilde{t}_{yxi}(z) = 2\pi m \tilde{h}_i \sum_{n=1}^4 (\tilde{C}_{ni} \tilde{S}_{1ni}) e^{k_{ni}z}, \\
\tilde{g}_{ei} &= G_i / E_i, \quad \tilde{b}_{33i} = \frac{1 - \nu_i^2}{\tilde{\Delta}_i}, \quad \tilde{b}_{44i} = G'_i / G_i, \quad \tilde{e}_{5i} = \tilde{e}_{11i} + \tilde{e}_{12i}, \quad \tilde{e}_{33i} = -2\pi^2 m^2 \tilde{g}_{ei} \tilde{b}_{44i}, \\
\tilde{e}_{13i} = \tilde{e}_{23i} &= \pi m (\tilde{b}_{13i} + \tilde{g}_{ei} \tilde{b}_{44i}), \quad \tilde{\Delta}_i = \frac{E_i}{E'_i} (1 + \nu_i) (1 - \nu_i - 2 \frac{E_i}{E'_i} (\nu_i')^2), \\
\tilde{e}_{11i} = \tilde{e}_{22i} &= -\pi^2 m^2 (\tilde{b}_{11i} + \tilde{g}_{ei}), \quad \tilde{e}_{12i} = -\pi^2 m^2 (\tilde{b}_{12i} + \tilde{g}_{ei}), \quad \tilde{b}_{13i} = \frac{E_i \nu_i' (1 + \nu_i)}{E'_i \tilde{\Delta}_i}, \\
\tilde{b}_{11i} &= E_i (1 - (E_i / E'_i) (\nu_i')^2) / (E'_i \tilde{\Delta}_i), \quad \tilde{b}_{12i} = E_i (\nu_i + (E_i / E'_i) (\nu_i')^2) / (E'_i \tilde{\Delta}_i), \\
\tilde{e}_{10i} = \tilde{e}_{20i} &= \tilde{e}_{13i} (\tilde{e}_{12i} - \tilde{e}_{11i}), \quad \tilde{e}_{40i} = \tilde{e}_{50i} = \tilde{e}_{13i} \tilde{b}_{44i}, \quad \tilde{e}_{32i} = 2\tilde{e}_{11i} \tilde{b}_{44i}, \quad \tilde{e}_{30i} = \tilde{e}_{11i}^2 - \tilde{e}_{12i}^2, \\
\tilde{D}_i &= \tilde{e}_{7i}^2 - 4\tilde{e}_{6i} \tilde{e}_{8i}, \quad \tilde{e}_{6i} = \tilde{g}_{ei} \tilde{b}_{33i} \tilde{b}_{44i}, \quad \tilde{e}_{7i} = \tilde{b}_{33i} \tilde{e}_{5i} + \tilde{g}_{ei} \tilde{e}_{33i} \tilde{b}_{44i} + 2\tilde{e}_{13i}^2, \quad \tilde{e}_{8i} = \tilde{e}_{33i} \tilde{e}_{5i}.
\end{aligned}$$

Безрозмірні сталі \tilde{C}_{ni} (їх всього $4j$) знаходяться з граничних умов на поверхневих площинах та із умов жорсткого спряження між шарами:

$$\begin{aligned}
u_i(z = h_1 + \dots + h_i) &= u_{(i+1)}(z = h_1 + \dots + h_i), \quad w_i(z = h_1 + \dots + h_i) = w_{(i+1)}(z = h_1 + \dots + h_i), \\
\sigma_{zi}(z = h_1 + \dots + h_i) &= \sigma_{z(i+1)}(z = h_1 + \dots + h_i), \quad (Д.9) \\
\sigma_{xzi}(z = h_1 + \dots + h_i) &= \sigma_{xz(i+1)}(z = h_1 + \dots + h_i), \quad (1 \leq i \leq j-1).
\end{aligned}$$

Граничні умови та умови спряження між шарами (Д.9) з урахуванням (Д.8) зводяться до системи ЛАР, кількість яких дорівнює $4j$ (4-и рівняння відображають граничні умови і $(4j-4)$ рівнянь – умови спряження між шарами). Після знаходження сталих $\tilde{C}_{1i}, \tilde{C}_{2i}, \tilde{C}_{3i}, \tilde{C}_{4i}$ визначаються переміщення та напруження в будь-якому шарі згідно з (Д.8).

Аналогічно отримано точні розв'язки задач для нетонких однорідних та багатошарових пластин при циліндричному згині.

Д.3. Числові результати для тришарових і двошарових пластин

Таблиця Д.1

Компоненти НДС квадратної тришарової транстропної пластини ($p_{11}/q_{11} = 0$;
 $h/a = 0,5$; $h_{2,3}/h_1 = 1$; $G_2/G_1 = 10^{-4}$; $G_3/G_1 = 1$; $G'_i/G_i = 0,5$; $E'_i/E_i = 1$; $\nu'_i = \nu_i = 0,3$)

Точки	НК13	ТР	Δ	НК13	ТР	Δ
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
T_{34}	-3,744	-3,793	1,29	-7,767	-7,711	0,73
T_{30}	-0,0384	-0,0346	-	-7,889	-7,826	-
T_{33}	3,552	3,702	4,05	-7,706	-7,636	0,92
T_{23}	0,000237	0,000277	-	-7,706	-7,636	-
T_{20}	0	0	0	-7,402	-7,327	1,02

Таблиця Д.2

Компоненти НДС квадратної тришарової транстропної пластини ($p_{11}/q_{11} = 1$;
 $h/a = 0,5$; $h_{2,3}/h_1 = 1$; $G_2/G_1 = 10^{-4}$; $G_3/G_1 = 1$; $G'_i/G_i = 0,5$; $E'_i/E_i = 1$; $\nu'_i = \nu_i = 0,3$)

Точки	НК0-3	ТР	Δ	НК0-3	ТР	Δ
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
T_{34}	-7,329	-7,548	2,90	-15,60	-15,35	1,6
T_{30}	-0,0623	-0,0686	-	-15,74	-15,57	-
T_{33}	7,065	7,369	4,13	-15,51	-15,20	2,03
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
T_{23}	-0,00158	-0,00170	-	-15,51	-15,20	-
T_{20}	-0,00109	-0,00150	-	-7,49	-7,327	-
T_{22}	-0,00207	-0,00226	-	-0,07699	-0,07613	-
T_{12}	-0,0342	-0,0357	-	-0,07699	-0,07613	-
T_{10}	0,00047	0,00053	-	-0,07780	-0,07710	-
T_{11}	0,0348	0,0371	-	-0,07551	-0,07516	-

Таблиця Д.3

Згин квадратної тришарової ізотропної пластини ($p_{11}/q_{11} = 0$;
 $h/a = 0,5$; $h_2/h_1 = 10$; $h_3/h_1 = 1$; $G_2/G_1 = 0,999$; $G_3/G_1 = 1$; $\nu_i = 0,3$)
 (у верхніх рядках – точні значення, у нижніх – наближені за НК13)

Точки	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{\sigma}_z$	$\tilde{\sigma}_{xz}$	$\tilde{\sigma}_{yx}$	\tilde{U}	\tilde{W}
T_{34}	-1,019	-0,500	0,000	0,4333	0,3586	-0,9951
	-1,012	-0,500	0,000	0,4331	0,3582	-1,016
T_{20}	0,000	0,000	-0,4553	0,000	0,000	-0,9686
	0,000	0,000	-0,4550	0,000	0,000	-0,9704
T_{11}	1,019	0,500	0,000	-0,4333	-0,3586	-0,9951
	1,012	0,500	0,000	-0,4331	-0,3582	-1,016

Таблиця Д.4

Циліндричний згин однорідної пластини ($p_{11}/q_{11} = 1$; $h/a = 0,5$; $\nu = 0,3$)
 (у верхніх рядках – точні значення, у нижніх – наближені за НК0-3)

Точки	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{\sigma}_z$	$\tilde{\sigma}_{xz}$	\tilde{U}	\tilde{W}
T_{23}	-2,745	-1,0000	0,0000	1,342	-3,009
	-2,737	-1,0000	0,0000	1,337	-3,033
T_{20}	0,04434	-0,4930	-0,9340	-0,1481	-2,874
	0,04577	-0,4930	-0,9338	-0,1489	-2,877
T_{22}	2,556	0,0000	0,0000	-1,481	-2,557
	2,556	0,0000	0,0000	-1,481	-2,573

Таблиця Д.5

Циліндричний згин двошарової пластини з ізотропними шарами
 ($p_{11}/q_{11} = 1$; $h/a = 0,5$; $h_2/h_1 = 50$; $G_2/G_1 = 10^4$; $\nu_i = 0,3$)
 (у верхніх рядках – точні значення, у нижніх – наближені за НК0-3)

Точки	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{\sigma}_z$	$\tilde{\sigma}_{xz}$	\tilde{U}	\tilde{W}
T_{23}	-2,745	-1,0000	0,0000	1,316	-2,950
	-2,734	-1,0000	0,0000	1,309	-2,972
T_{20}	0,04433	-0,4930	-0,9340	-0,1452	-2,818
	0,04575	-0,4930	-0,9337	-0,1460	-2,822
T_{22}	2,556	0,0000	0,0000	-1,452	-2,507
	2,554	0,0000	0,0000	-1,453	-2,525

Таблиця Д.6

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами

$$(h_2/h_{1,3} = 0,6; G_{1,3}/G_2 = 10^3; \nu_i = 0,3; p_{11}/q_{11} = 1)$$

Вид розв'язку	h/a			
	0,1		0,05	
	$\tilde{\sigma}_x$	\tilde{W}	$\tilde{\sigma}_x$	\tilde{W}
«Точний» по Л. Брюккеру [31]	-55,8	-1940	-159	-19200
«Зсувний» розв'язок з урахуванням викривлення нормалі (ДР (3.20) [283])	-55,0	-1910	-158	-19200
Розв'язок, оснований на гіпотезі прямої (ДР (3.22) [283])	-155,0	-6580	-215	-29700
НК0-3 розробленого варіанта МТ	-55,6	-1936	-158,6	-19200

Таблиця Д.7

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами

$$(h_2/h_{1,3} = 8; G_{1,3}/G_2 = 10^3; \nu_i = 0,3; p_{11}/q_{11} = 1)$$

Вид розв'язку	h/a			
	0,2		0,1	
	$\tilde{\sigma}_x$	\tilde{W}	$\tilde{\sigma}_x$	\tilde{W}
«Точний» по Л. Брюккеру [31]	-78,6	-2570	-121	-12600
Теорія пластин з жорстким заповнювачем	-	-2390	-	-12400
Теорія пластин з легким заповнювачем	-	-3290	-	-13600
«Зсувний» розв'язок з урахуванням викривлення нормалі (ДР (3.20) [283])	-74,1	-2390	-121	-12400
Розв'язок, оснований на гіпотезі прямої (ДР (3.22) згідно [283])	-97,7	-3260	-128	-13500
НК0-3 розробленого варіанта МТ	-77,8	-2557	-121	-12570

Таблиця Д.8

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами

$$(h/a = 0,5; h_{2,3}/h_1 = 1; G_{1,3}/G_2 = 10^4; \nu_i = 0,3; p_{11}/q_{11} = 0)$$

Точки	ТР	Теорія О. П. Прусакова [318]	Δ %	НК13 варіанта МТ	Δ %
T_{34}	-3,70	-3,66	1,08	-3,67	0,81
T_{30}	-0,0349	-0,0485	-	-0,0386	-
T_{33}	3,61	3,46	4,16	3,50	3,05
T_{23}	0,000191	0,000176	-	0,000179	-
T_{20}	0	0	0	0	0
Точки	$\tilde{\sigma}_z$				
T_{34}	-0,5	-0,5	0	-0,5	0
T_{30}	-0,250	-0,250	0	-0,25	0
T_{33}	-0,000397	-0,000396	0,25	-0,000396	0,25
T_{23}	-0,000397	-0,000396	0,25	-0,000396	0,25
T_{20}	0	0	0	0	0
Точки	\tilde{W}				
T_{34}	-6,76	-6,85	1,33	-6,75	0,15
T_{30}	-6,88	-6,85	-	-6,86	-
T_{33}	-6,69	-6,74	-	-6,65	-
T_{23}	-6,69	-6,74	-	-6,65	-
T_{20}	-6,26	-6,21	0,80	-6,22	0,64

Таблиця Д.9

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами

$$(h/a = 0,5; h_{2,3}/h_1 = 1; G_{1,3}/G_2 = 10^4; \nu_i = 0,3; p_{11}/q_{11} = 1)$$

Точки	ТР	Теорія О. П. Прусакова [318]	Δ %	НК0-3 варіанта МТ	Δ %
	$\tilde{\sigma}_x$				
T_{34}	-7,37	-7,12	3,39	-7,16	2,85
T_{30}	-0,0687	-0,0789	-	-0,0757	-
T_{33}	7,19	6,82	5,15	6,91	3,89
T_{23}	-0,00152	-0,00164	-	-0,00162	-
T_{20}	-0,00141	-0,00194	-	-0,00181	-
$\tilde{\sigma}_z$					
T_{34}	-1,0	-1,0	0	-1,0	0

Продовження табл. Д. 9

Точки	1	2	3	4	5
T_{30}	-0,5023	-0,5110	1,73	-0,5097	1,47
T_{33}	-0,00523	-0,00546	-	-0,00542	-
T_{23}	-0,00523	-0,00546	-	-0,00542	-
T_{20}	-0,00491	-0,00499	-	-0,00497	-
Точки	\tilde{W}				
T_{34}	-13,47	-13,51	0,30	-13,49	0,15
T_{30}	-13,70	-13,62	-	-13,66	-
T_{33}	-13,32	-13,31	-	-13,28	-
T_{23}	-13,32	-13,31	-	-13,28	-
T_{20}	-6,26	-6,21	0,80	-6,22	0,64

Таблиця Д.10

Компоненти НДС тришарової пластини з ізотропними шарами при циліндричному згині ($h/a = 0,5$; $h_2/h_{1,3} = 1$; $G_{1,3}/G_2 = 500$; $\nu_i = 0,3$; $p_{11}/q_{11} = 0$)

Точки	Точний розв'язок	Теорія О. П. Прусакова [318]	Δ %	НК13 варіанта МТ	Δ %
$\tilde{\sigma}_x$					
T_{20}	0,0000	0,0000	0	0	-
T_{22}	-0,01428	-0,01411	-	-0,01413	-
T_{12}	-10,27	-10,17	0,97	-10,19	0,78
T_{10}	0,1038	0,1096	-	0,1050	-
T_{11}	10,51	10,39	1,14	10,43	0,76
$\tilde{\sigma}_z$					
T_{20}	0,0000	0,0000	-	0	-
T_{22}	0,01464	0,01458	0,41	0,01460	0,27
T_{12}	0,01464	0,01458	0,41	0,01460	0,27
T_{10}	0,2610	0,2610	-	0,2610	-
T_{11}	0,5000	0,5000	-	0,5000	-
\tilde{W}					
T_{20}	-23,27	-23,07	-	-23,13	-
T_{22}	-24,06	-24,34	-	-24,20	-
T_{12}	-24,06	-24,34	-	-24,20	-
T_{10}	-24,40	-24,344	-	-24,34	-
T_{11}	-24,12	-24,36	1,00	-24,30	0,75

Таблиця Д.11

Циліндричний згин двохшарової пластини з ізотропними шарами

$$(p_{11}/q_{11} = 1; h/a = 0,5; h_2/h_1 = 1; G_2/G_1 = 100; \nu_i = 0,3)$$

Точки	НК0-3	Точний	Δ %	НК0-3	Точний	Δ %
	варіанта МТ	розв'язок		варіанта МТ	розв'язок	
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
T_{23}	-9,188	-9,363	1,87	-0,1523	-0,1518	0,33
T_{20}	-0,08902	-0,09102	-	-0,1541	-0,1544	-
T_{22}	8,897	9,069	1,90	-0,1502	-0,1496	0,40
T_{12}	0,07696	0,07443	-	-0,1502	-0,1496	-
T_{10}	0,1012	0,1044	-	-0,1363	-0,1357	-
T_{11}	0,1596	0,1654	3,57	-0,1226	-0,1220	0,49

Таблиця Д.12

Компоненти НДС квадратної тришарової транітропної пластини ($p_{11}/q_{11} = 1;$

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2}; \frac{h_2}{h_1} = 2; \frac{h_3}{h_1} = 1; \frac{G_2}{G_1} = 10^{-2}; \frac{G_3}{G_1} = 1; \frac{G'_2}{G_2} = \frac{1}{10}; \frac{G'_{1,3}}{G_{1,3}} = \frac{1}{2}; \frac{E'_i}{E_i} = 1; \nu'_i = \nu_i = 0,3)$$

Точки	НК0-3	Точний	Δ %	НК0-3 ва-	Точний	Δ %
	варіанта МТ	розв'язок		ріанта МТ	розв'язок	
	$\tilde{\sigma}_x$			\tilde{W}		
T_{34}	-8,840	-9,046	2,28	-22,84	-22,67	0,75
T_{30}	-0,1109	-0,1135	-	-22,98	-22,90	-
T_{33}	8,572	8,780	2,34	-22,72	-22,53	0,84
T_{23}	-0,04913	-0,04422	-	-22,72	-22,53	-
T_{20}	-0,04324	-0,04501	3,93	-15,62	-15,50	0,78
T_{22}	-0,1551	-0,1588	-	-9,347	-9,236	-
T_{12}	-3,486	-3,588	2,84	-9,347	-9,236	1,2
T_{10}	0,02896	0,02738	-	-9,421	-9,337	-
T_{11}	3,541	3,653	3,07	-9,314	-9,196	1,28

Додаток Е

Залежності та рівняння на основі наближених методів.

Числові результати для НДС нетонких пластин

Е.1. Числові результати для круглих пластин

Таблиця Е.1

Згин круглої вільно обіпертої транслопної пластини від дії сталого кососиметричного навантаження ($E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3$)

$\frac{G'}{G}$	$\frac{a}{h}$	$\tilde{\sigma}_r(r=0; z=h/2)$			
		НК1	НК13	НК1	НК13
0,4	1,5	-7,572	-7,412	-2,784	-3,002
	2,5	-38,42	-37,77	-7,734	-7,954
	5	-479,8	-476,8	-30,94	-31,16
	10	-7136	-7124	-123,8	-124,0
0,2	1,5	-11,96	-11,82	-2,784	-3,163
	2,5	-50,61	-49,98	-7,734	-8,149
	5	-528,5	-525,6	-30,94	-31,35
	10	-7331	-7319	-123,8	-124,2

Таблиця Е. 2

Прогини $\tilde{W}(r=0; z=h/2)$ транслопної круглої пластини від дії зосередженого в центрі кососиметричного навантаження ($G'/G=0,4; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0,3$)

$\frac{a}{h}$	Вільне обпирання краю		Жорстке защемлення краю	
	НК1	НК13	НК1	НК13
2,5	-19,45	-60,76	-12,37	-53,83
5,0	-336,3	-501,4	-151,3	-317,4
10,0	-5481	-6142	-2235	-2899

Прогини $\tilde{W}(r/a; z = h/2)$ транстропної круглої пластини від дії зосередженого в центрі кососиметричного навантаження при жорсткому защемленні краю

$$(a/h = 2.5; G'/G = 0.4; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0.3)$$

r/a	НК1	НК13
0,00	-12,37	-53,83
0,25	-10,12	-11,43
0,50	-6,224	-6,333
0,75	-2,652	-2,664
1,00	0,000	0,000

Е.2. Загальні розв'язки для переміщень і напружень при вісесиметричному кільцевому навантаженні товстих пластин в НК13

Переміщення і напруження в пластині в полярній системі координат визначаються із залежностей для сферичної оболонки при кривинах, рівними нулю.

Е.2.1. Загальні розв'язки для переміщень. Поперечні переміщення:

$$W(r, z) = \sum_{k=1,3}^3 P_k(2z/h) w_k(r). \quad (\text{E.1})$$

Складові переміщень визначаються із наступних залежностей:

для $r < r_1$

$$w_1(r) = (A_0 \mu_{330} + 4\mu_{332}(B_0 + D_0) + B_0 \mu_{330} r^2 + (4D_0 \mu_{332} + C_0 \mu_{330}) \ln r + D_0 \mu_{330} r^2 \ln r + \alpha_{101} A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{102} A_{22}(r\sqrt{s_2})) + q_0(k_{1r1} I_0(r\sqrt{s_1}) + k_{1r2} I_0(r\sqrt{s_2}) + k_{1r3} r^2 + k_{1r0}); \quad (\text{E.2})$$

$$w_3(r) = (-4\mu_{312}(B_0 + D_0) - 4D_0 \mu_{312} \ln r + \alpha_{301} A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{302} A_{22}(r\sqrt{s_2})) + q_0(k_{3r1} I_0(r\sqrt{s_1}) + k_{3r2} I_0(r\sqrt{s_2}) + k_{3r0}),$$

де

$$\alpha_{10i} = \mu_{334} s_i^2 + \mu_{332} s_i + \mu_{330}, \quad \alpha_{30i} = -s_i(\mu_{314} s_i + \mu_{312}),$$

$$k_{1ri} = c_{1i}(a_1 a_{1i1}(\mu_{334} s_i^2 + \mu_{332} s_i + \mu_{330}) - a_3 a_{1i3} s_i(\mu_{134} s_i + \mu_{132})),$$

$$k_{3ri} = c_{1i} s_i(a_3 a_{1i3} \mu_{114} s_i - a_1 a_{1i1}(\mu_{314} s_i + \mu_{312})), \quad (i = 1, 2);$$

$$\begin{aligned}
k_{1r0} &= a_1(4\mu_{332}a_{131}b_{11} + \mu_{330}(a_{141}b_{12} + a_{151}b_{13} + a_{161}b_{14}) - 4a_3\mu_{132}a_{133}b_{11}), \\
c_{1i} &= r_1K_1(r_1\sqrt{s_i}) - r_2K_1(r_2\sqrt{s_i}), \quad (i=1,2); \quad a_1 = -\frac{a_{k0}}{s_1s_2}, \quad a_{11k} = \frac{s_2(s_1 - s_{k0})}{s_1s_{12}\sqrt{s_1}}, \\
a_{12k} &= \frac{s_1(s_2 - s_{k0})}{s_2s_{21}\sqrt{s_2}}, \quad a_{13k} = \frac{s_{k0}}{8}, \quad a_{14k} = -\frac{1}{2}(1 + s_{k0}s_{12}^0), \quad a_{15k} = \frac{s_{k0}}{16}, \quad a_{16k} = s_{k0}s_{12}^0 - 1, \\
b_{11} &= r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 + (r_2^2 - r_1^2)/2, \quad b_{12} = r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1, \\
b_{13} &= r_2^4 \ln r_2 - r_1^4 \ln r_1 - (r_2^4 - r_1^4)/4, \quad b_{14} = (r_2^2 - r_1^2)/4; \\
A_{11}(r\sqrt{s_1}) &= A_1I_0(r\sqrt{s_1}) + B_1K_0(r\sqrt{s_1}), \quad A_{22}(r\sqrt{s_2}) = A_2I_0(r\sqrt{s_2}) + B_2K_0(r\sqrt{s_2});
\end{aligned}$$

для $r > r_2$

$$\begin{aligned}
w_1(r) &= (A_0\mu_{330} + 4\mu_{332}(B_0 + D_0) + B_0\mu_{330}r^2 + (4D_0\mu_{332} + C_0\mu_{330}) \ln r + \\
&\quad + D_0\mu_{330}r^2 \ln r + \alpha_{101}A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{102}A_{22}(r\sqrt{s_2})) + \\
&\quad + q_0(m_{1r1}K_0(r\sqrt{s_1}) + m_{1r2}K_0(r\sqrt{s_2}) + m_{1r} \ln r + m_{1r3}r^2 \ln r + m_{1r0}); \quad (E.3) \\
w_3(r) &= (-4\mu_{312}(B_0 + D_0) - 4D_0\mu_{312} \ln r + \alpha_{301}A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{302}A_{22}(r\sqrt{s_2})) + \\
&\quad + q_0(m_{3r1}K_0(r\sqrt{s_1}) + m_{3r2}K_0(r\sqrt{s_2}) + m_{3r} \ln r + m_{3r0}),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
m_{1ri} &= c_{2i}(a_1a_{1i1}(\mu_{334}s_i^2 + \mu_{332}s_i + \mu_{330}) - a_3a_{1i3}s_i(\mu_{134}s_i + \mu_{132})), \\
m_{3ri} &= c_{2i}s_i(a_3a_{1i3}\mu_{114}s_i - a_1a_{1i1}(\mu_{314}s_i + \mu_{312})), \quad (i=1,2); \\
m_{1r0} &= a_1(4\mu_{332}c_{221} + \mu_{330}c_{231}) - 4a_3\mu_{132}c_{223}, \quad m_{3r0} = -4a_1\mu_{312}c_{221}, \quad m_{1r3} = a_1\mu_{330}c_{221}, \\
m_{1r} &= a_1(4\mu_{332}c_{221} + \mu_{330}c_{211}) - 4a_3\mu_{132}c_{223}, \quad m_{3r} = -4a_1\mu_{312}c_{221};
\end{aligned}$$

для $r_1 < r < r_2$

$$\begin{aligned}
w_1(r) &= \{ (A_0\mu_{330} + 4\mu_{332}(B_0 + D_0) + B_0\mu_{330}r^2 + (4D_0\mu_{332} + C_0\mu_{330}) \ln r + \\
&\quad + D_0\mu_{330}r^2 \ln r + \alpha_{101}A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{102}A_{22}(r\sqrt{s_2})) \} + \\
&\quad + [q_0(n_{101}(r_2K_1(r_2\sqrt{s_1})I_0(r\sqrt{s_1}) + r_1I_1(r_1\sqrt{s_1})K_0(r\sqrt{s_1})) + \\
&\quad + n_{102}(r_2K_1(r_2\sqrt{s_2})I_0(r\sqrt{s_2}) + r_1I_1(r_1\sqrt{s_2})K_0(r\sqrt{s_2})) + \\
&\quad + a_1\mu_{330}(a_{111}\varphi_{s1r} + a_{121}\varphi_{s2r}) + n_{1r} \ln r + n_{1r1}r^2 \ln r + n_{1r2}r^2 + n_{103}r^4 + n_{1r0})]; \quad (E.4) \\
w_3(r) &= (-4\mu_{312}(B_0 + D_0) - 4D_0\mu_{312} \ln r + \alpha_{301}A_{11}(r\sqrt{s_1}) + \alpha_{302}A_{22}(r\sqrt{s_2})) + \\
&\quad + q_0(n_{301}(r_2K_1(r_2\sqrt{s_1})I_0(r\sqrt{s_1}) + r_1I_1(r_1\sqrt{s_1})K_0(r\sqrt{s_1})) +
\end{aligned}$$

$$+ n_{302} (r_2 K_1(r_2 \sqrt{s_2}) I_0(r \sqrt{s_2}) + r_1 I_1(r_1 \sqrt{s_2}) K_0(r \sqrt{s_2})) + n_{3r} \ln r + n_{303} r^2 + n_{3r0}),$$

де

$$\begin{aligned} n_{10i} &= s_i (a_3 a_{1i3} (\mu_{134} s_i + \mu_{132}) - a_1 a_{1i1} (\mu_{334} s_i + \mu_{332})), \\ n_{30i} &= s_i (a_1 a_{1i1} (\mu_{314} s_i + \mu_{312}) - a_3 a_{1i3} \mu_{114} s_i), \quad (i = 1, 2); \\ n_{1r} &= a_1 (4\mu_{332} c_{311} + \mu_{330} c_{321}) - 4a_3 \mu_{132} c_{313}, \quad n_{3r} = -4a_1 \mu_{312} c_{311}, \\ n_{1r0} &= a_1 (64\mu_{334} a_{311} + 4\mu_{332} (c_{311} + c_{331}) + \mu_{330} c_{341}) - 4a_3 (16\mu_{134} a_{313} + \mu_{132} (c_{313} + c_{333})), \\ n_{1r1} &= a_1 \mu_{330} c_{311}, \quad n_{1r2} = a_1 (16\mu_{332} a_{311} + \mu_{330} c_{331}) - 16a_3 \mu_{132} a_{313}, \quad n_{103} = a_1 \mu_{330} c_{311}, \\ n_{303} &= -16a_1 \mu_{312} a_{311}, \quad n_{3r0} = 4(16a_3 \mu_{114} a_{313} - a_1 (16\mu_{314} a_{311} + \mu_{312} (c_{311} + c_{331}))). \end{aligned}$$

Тангенціальні переміщення $U_r(r, z)$ знаходяться наступним чином:

$$U_r(r, z) = \sum_{k=1,3}^3 P_k(2z/h) u_k(r). \quad (\text{E.5})$$

де $u_k(r) = \lambda_{k\varphi 1} \varphi_{1,r} + \lambda_{k\varphi 3} \varphi_{3,r} + \lambda_{kw1} w_{1,r} + \lambda_{kw3} w_{3,r} + \lambda_{kqr} q_{,r}$, навантаження $q(r)$ визначається згідно з (7.133), а функції $\varphi_k(r)$ мають вигляд:

$$\varphi_k(r) = \lambda_{k1} \nabla^2 w_1 + \lambda_{k2} w_3 + \lambda_{k3} \nabla^2 w_3 + \lambda_{k4} q;$$

для $r < r_1$

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= \varphi_{k0}(r) + q_0 ((s_1 (\lambda_{k1} k_{1r1} + \lambda_{k3} k_{3r1}) + \lambda_{k2} k_{3r1}) I_0(r \sqrt{s_1}) + \\ &+ (s_2 (\lambda_{k1} k_{1r2} + \lambda_{k3} k_{3r2}) + \lambda_{k2} k_{3r2}) I_0(r \sqrt{s_2}) + (4\lambda_{k1} k_{1r3} + \lambda_{k2} k_{3r0})), \quad (k = 1, 3), \\ \varphi_{k0}(r) &= 4B_0 (\lambda_{k1} \mu_{330} - \lambda_{k2} \mu_{312}) + 4D_0 ((\lambda_{k1} \mu_{330} - \lambda_{k2} \mu_{312}) \ln r + (\lambda_{k1} \mu_{330} - \lambda_{k2} \mu_{312})) + \\ &+ (s_1 (\lambda_{k1} \alpha_{101} + \lambda_{k3} \alpha_{301}) + \lambda_{k2} \alpha_{301}) (A_1 I_0(r \sqrt{s_1}) + B_1 K_0(r \sqrt{s_1})) + \\ &+ (s_2 (\lambda_{k1} \alpha_{102} + \lambda_{k3} \alpha_{302}) + \lambda_{k2} \alpha_{302}) (A_2 I_0(r \sqrt{s_2}) + B_2 K_0(r \sqrt{s_2})); \end{aligned}$$

для $r > r_2$

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= \varphi_{k0}(r) + q_0 ((s_1 (\lambda_{k1} m_{1r1} + \lambda_{k3} m_{3r1}) + \lambda_{k2} m_{3r1}) K_0(r \sqrt{s_1}) + \\ &+ (s_2 (\lambda_{k1} m_{1r2} + \lambda_{k3} m_{3r2}) + \lambda_{k2} m_{3r2}) K_0(r \sqrt{s_2}) + \\ &+ (4\lambda_{k1} m_{1r3} + \lambda_{k2} m_{3r0}) + (4\lambda_{k1} m_{1r3} + \lambda_{k2} m_{3r}) \ln r), \quad (k = 1, 3); \end{aligned}$$

для $r_1 < r < r_2$

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= \varphi_{k0}(r) + q_0 (a_{\varphi 1} (r_2 K_1(r_2 \sqrt{s_1}) I_0(r \sqrt{s_1}) + r_1 I_1(r_1 \sqrt{s_1}) K_0(r \sqrt{s_1})) + \\ &+ a_{\varphi 2} (r_2 K_1(r_2 \sqrt{s_2}) I_0(r \sqrt{s_2}) + r_1 I_1(r_1 \sqrt{s_2}) K_0(r \sqrt{s_2})) + c_{\varphi r0} + c_{\varphi r1} \ln r + a_{\varphi 0} r^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{\varphi 0} &= 16\lambda_{k1}n_{103} + \lambda_{k2}n_{303}; \quad a_{\varphi 1} = s_1(\lambda_{k1}(n_{101} - a_1a_{111}\mu_{330}) + \lambda_{k3}n_{301}) + \lambda_{k2}n_{301}; \\
a_{\varphi 2} &= s_2(\lambda_{k1}(n_{102} - a_1a_{121}\mu_{330}) + \lambda_{k3}n_{302}) + \lambda_{k2}n_{302}; \\
c_{\varphi r 0} &= 4(\lambda_{k1}n_{1r1} + n_{1r2} + \lambda_{k3}n_{303}) + \lambda_{k2}n_{3r0} + \lambda_{k4}; \quad c_{\varphi r 1} = 4\lambda_{k1}n_{1r1} + \lambda_{k2}n_{3r}; \quad (k=1,3).
\end{aligned}$$

Тоді складові $u_k(r)$ радіальних переміщень визначаються таких чином:

для $r \langle r_1$

$$u_k(r) = u_{k0}(r) + \left\{ q_0(r_{11k}I_1(r\sqrt{s_1}) + r_{12k}I_1(r\sqrt{s_2}) + 2k_{1r3}r) \right\}; \quad (\text{E.6})$$

де

$$\begin{aligned}
u_{k0}(r) &= (C_0\mu_{330}\alpha_{k11} + 4D_0(\mu_{330}\alpha_{k12} + \mu_{332}\alpha_{k11} - \mu_{312}\alpha_{k31}))r^{-1} + \mu_{330}\alpha_{k11}(2B_0 + D_0)r + \\
&+ 2D_0\mu_{330}\alpha_{k11}r \ln r + t_{11k}(A_1I_1(r\sqrt{s_1}) - B_1K_1(r\sqrt{s_1})) + t_{12k}(A_2I_1(r\sqrt{s_2}) - B_2K_1(r\sqrt{s_2})); \\
t_{1ik} &= \sqrt{s_i}(\alpha_{10i}(\alpha_{k12}s_i + \alpha_{k11}) + \alpha_{30i}(\alpha_{k32}s_i + \alpha_{k31})); \\
r_{1ik} &= \sqrt{s_i}(k_{1ri}(\alpha_{k12}s_i + \alpha_{k11}) + k_{3ri}(\alpha_{k32}s_i + \alpha_{k31})), \quad (i=1,2; k=1,3);
\end{aligned}$$

для $r \rangle r_2$

$$u_k(r) = u_{k0}(r) + \left\{ q_0(r_{21k}K_1(r\sqrt{s_1}) + r_{22k}K_1(r\sqrt{s_2}) + r_{23k}r^{-1} + r_{24k}r \ln r + r_{25k}r) \right\}, \quad (\text{E.7})$$

де

$$\begin{aligned}
r_{2ik} &= -\sqrt{s_i}(m_{1ri}(\alpha_{k12}s_i + \alpha_{k11}) + m_{3ri}(\alpha_{k32}s_i + \alpha_{k31})), \quad (i=1,2; k=1,3); \\
r_{23k} &= 4\alpha_{k12}m_{1r3} + \alpha_{k11}m_{1r1} - \alpha_{k31}m_{3r}; \quad r_{24k} = 2\alpha_{k11}m_{1r3}; \quad r_{25k} = \alpha_{k11}m_{1r3};
\end{aligned}$$

для $r_1 \langle r \langle r_2$

$$\begin{aligned}
u_k(r) &= u_{k0}(r) + \left\{ q_0(s_{31k}(r_2K_1(r_2\sqrt{s_1})I_1(r\sqrt{s_1}) - r_1I_1(r_1\sqrt{s_1})K_1(r\sqrt{s_1})) + \right. \\
&+ s_{32k}(r_2K_1(r_2\sqrt{s_2})I_1(r\sqrt{s_2}) - r_1I_1(r_1\sqrt{s_2})K_1(r\sqrt{s_2})) + \\
&\left. + r_{31k}r^{-1} + r_{32k}r + r_{33k}r \ln r + r_{34k}r^3) \right\}, \quad (\text{E.8})
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
t_{3ik} &= \sqrt{s_i}(s_i(\alpha_{k12}\alpha_{10i} + \alpha_{k32}\alpha_{30i}) + \alpha_{k11}\alpha_{10i} + \alpha_{k31}\alpha_{30i}); \\
s_{3ik} &= \sqrt{s_i}((n_{10i} - a_1\alpha_{1i1}\mu_{330})(\alpha_{k12}s_i + \alpha_{k11}) + n_{30i}(\alpha_{k32}s_i + \alpha_{k31})); \\
r_{31k} &= 4\alpha_{k12}n_{1r1} + \alpha_{k11}n_{1r} + \alpha_{k31}n_{3r}; \quad r_{32k} = 32\alpha_{k12}n_{103} + \alpha_{k11}(n_{1r1} + 2n_{1r2}) + 2\alpha_{k31}n_{303}; \\
r_{33k} &= 2\alpha_{k11}n_{1r1}; \quad r_{34k} = 4\alpha_{k11}n_{103}.
\end{aligned}$$

Переміщення $U_r(r, z)$ визначиться згідно з (E.5).

Е.2.2. Загальні розв'язки для напружень. Напруження $\sigma_r(r, z)$ визнача-

ються таким чином:

$$\sigma_r(r, z) = \sum_{i=1,3}^5 P_i(2z/h) s_{ri}(r), \quad (\text{E.9})$$

де

$$s_{ri}(r) = a_{iu1} u_{1,r} + a_{iu3} u_{3,r} + a_{iw3} w_3 + a_{iq} q, \quad (i=1,3,5); \quad (\text{E.10})$$

$$a_{1u1} = d_0 - 3e_{31} d_{10} / 70; \quad a_{1u3} = -3e_{33} d_{10} / 70; \quad a_{1w3} = -3q_{33} d_{10} / 70; \quad a_{1q} = -3d_{10} (1 + e_{3q} / 14) / 5;$$

$$a_{3u1} = e_{31} d_{10} / 15; \quad a_{3u3} = d_0 + e_{33} d_{10} / 15; \quad a_{3w3} = q_{33} d_{10} / 15; \quad a_{3q} = (1/10 + e_{3q} / 15) d_{10};$$

$$a_{5u1} = -e_{31} d_{10} / 42; \quad a_{5u3} = -e_{33} d_{10} / 42; \quad a_{5w3} = -q_{33} d_{10} / 42; \quad a_{5q} = -e_{3q} d_{10} / 42.$$

В (E.10) сталі d, e, q з індексами визначаються безпосередньо через сталі трансверсально-ізотропного матеріалу, $q(r)$ відповідає (7.133).

З урахуванням залежностей E.2–E.4, E.6–E.8 для $u_k(r)$, $w_3(r)$ та $q(r)$ дістанемо вирази для $s_{ri}(r)$ і надалі для $\sigma_r(r, z)$ згідно з (E.9).

Поперечні дотичні напруження $\sigma_{r,z}(r, z)$ знаходяться так:

$$\sigma_{r,z}(r, z) = \sum_{i=0,2}^4 P_i(2z/h) t_{ri}(r), \quad (\text{E.11})$$

Складові $t_{ri}(r)$ знаходяться за формулами:

$$t_{ri}(r) = h_{0i1} w_{1,r} + h_{0i3} w_{3,r} + l_{0i1} u_1 + l_{0i3} u_3, \quad (i=0,2,4), \quad (\text{E.12})$$

де

$$h_{001} = h_{11} / h; \quad h_{003} = h_{13} / h; \quad h_{021} = (3h_{31} / 7 - h_{11}) / h; \quad h_{023} = (3h_{33} / 7 - h_{13}) / h;$$

$$h_{041} = -3h_{31} / 7; \quad h_{043} = -3h_{33} / 7; \quad l_{001} = l_{11} / h; \quad l_{003} = l_{13} / h;$$

$$l_{021} = (3l_{31} / 7 - l_{11}) / h; \quad l_{023} = (3l_{33} / 7 - l_{13}) / h; \quad l_{041} = -3l_{31} / 7; \quad l_{043} = -3l_{33} / 7.$$

Тут сталі h, l з подвійними індексами визначаються безпосередньо через сталі трансверсально-ізотропного матеріалу.

З урахуванням виразів (E.2–E.4), (E.6)–(E.8) для $u_k(r)$, $w_k(r)$ дістанемо залежності для $t_{ri}(r)$ і надалі для $\sigma_{r,z}(r, z)$ згідно з (E.10).

Нормальні напруження $\sigma_z(r, z)$ визначаються наступним чином:

$$\sigma_z(r, z) = \sum_{i=1,3}^5 P_i(2z/h) s_{zi}(r), \quad (\text{E.13})$$

Складові $s_{zi}(r)$ знаходяться за формулами:

$$s_{zi}(r) = p_{i3} w_3 + g_{i1} \varphi_1 + g_{i3} \varphi_3 + g_{iq} q, \quad (i = 1, 3, 5), \quad (\text{E.14})$$

де

$$\begin{aligned} p_{13} &= -3q_{33}/70; \quad g_{11} = -3e_{31}/70; \quad g_{13} = -3e_{33}/70; \quad g_{1q} = -3(1 + 3e_{3q}/14)/5; \\ p_{33} &= q_{33}/15; \quad g_{31} = e_{31}/15; \quad g_{33} = e_{33}/15; \quad g_{3q} = (0,5 + e_{3q}/3)/5; \\ p_{53} &= -q_{33}/42; \quad g_{51} = -e_{31}/42; \quad g_{53} = -e_{33}/42; \quad g_{5q} = -e_{3q}/42. \end{aligned}$$

З урахуванням вищенаведених залежностей для w_3 , φ_1 і φ_3 визначаються складові $s_{zi}(r)$ і за формулами (E.11) знаходяться напруження $\sigma_z(r, z)$.

Напруження $\sigma_\theta(r, z)$ визначаються таким чином:

$$\sigma_\theta(r, z) = \sum_{i=1,3}^5 P_i(2z/h) s_{\theta i}(r). \quad (\text{E.15})$$

де

$$\begin{aligned} s_{\theta i}(r) &= b_{\theta i1} \frac{u_1}{r} + b_{\theta i2} \frac{u_3}{r} + c_{\theta i1} u'_1 + c_{\theta i2} u'_3 + b_{\theta i3} w_3 + b_{\theta iq} q, \quad (i = 1, 3, 5), \quad (\text{E.16}) \\ b_{\theta 11} &= d_0 - 3e_{31} d_{10}/70; \quad b_{\theta 12} = -3e_{33} d_{10}/70; \quad c_{\theta 11} = d_0 \nu - 3e_{31} d_{10}/70; \quad c_{\theta 12} = b_{\theta 12}; \\ b_{\theta 13} &= -3q_{33} d_{10}/70; \quad b_{\theta 1q} = -3d_{10}(1 + e_{3q}/14)/5; \\ b_{\theta 31} &= c_{\theta 31} = e_{31} d_{10}/15; \quad b_{\theta 32} = d_0 + e_{33} d_{10}/15; \quad c_{\theta 32} = d_0 \nu + e_{33} d_{10}/15; \\ b_{\theta 33} &= q_{33} d_{10}/15; \quad b_{\theta 3q} = d_{10}(1/10 + e_{3q}/15); \\ b_{\theta 51} &= c_{\theta 51} = -e_{31} d_{10}/42; \quad b_{\theta 52} = c_{\theta 52} = -e_{33} d_{10}/42; \\ b_{\theta 53} &= -q_{33} d_{10}/42; \quad b_{\theta 5q} = -e_{3q} d_{10}/42; \end{aligned}$$

Ураховуючи вирази для $u_1(r)$, $u_3(r)$, $w_3(r)$ отримуються складові $s_{\theta i}(r)$, а із (E.12).напруження $\sigma_\theta(r, z)$.

На основі отриманих вище залежностей (E.1–E.16) для компонент переміщень і напружень можна ставити і розв'язувати у новій постановці граничні задачі для кругових трансформованих пластин довільної товщини при різних граничних умовах на бічній поверхні.

ДОДАТОК Є

Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Зеленський А. Г. Фундаментальні розв’язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин. Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки. *Visnyk of Zaporizhzhya National University, Physical and Mathematical Sciences*. Запоріжжя, 2018. № 1. С. 13–29. (**Index COPERNICUS, ICV 2017: 80.00, CiteFactor, ResearchBib, Journal Factor**). DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-1-02.

Статті у зарубіжних англomовних наукових виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Zelensky A. G. Mathematical Theory of Transversally Isotropic Shells of Arbitrary Thickness at Static Load. *Materials Science Forum. Actual problems of engineering mechanics*. Switzerland: Trans Tech Publications Ltd, 2019. V. 968. P. 496–510. **Scopus**. ISSN: 1662–9752, doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.496.

3. Zelensky A. G. The Method of Successive Approximations in the Mathematical theory of Shallow Shells of Arbitrary Thickness. *World Science, Multidisciplinary Scientific Edition, Physics and Mathematics*. RS Global Sp. z O.O.: Warsaw, 2019. V. 1, №11(51). P. 31–39. (Наукометричні бази даних: **RS Global, Google Scholar, Index Copernicus, Academia.edu, Library.ru, Biblioteka Narodowa, CiteFactor**). ISSN 2413–1032; DOI:https://doi.org/10.31435/rsglobal_ws/30112019/6764; <http://ws-conference.com/>.

4. Zelensky A. G. Analytical and Practical Development of Variant of Mathematical Theory of Shells of Small Curvature of Arbitrary Thickness. *New Stages of Development of*

Modern Science in Ukraine and eu Countries. Chapter “Physical and Mathematical Sciences”. **Monograph**. Riga, Latvia: “**Baltija Publishing**”, 2019. P. 308–328. ISBN:978-9934-588-15-0, DOI:<https://doi.org/10.30525/978-9934-588-15-0-63>.

5. Zelensky A. G. Some theorems of Variant of Mathematical Theory of Plates and Shallow Shells of Arbitrary Thickness. Proceedings of the XX1 International Scientific and Practical Conference. International Trends in Science and Technology. Multidisciplinary Scientific Edition. Physics and Mathematics. RS Global Sp. z O.O., Warsaw, Poland, January 31,2020. P. 3–11. ISBN 978-83-956628-1-2. Indexed by: **RS Global, Academia.edu, Google Scholar**.

6. Zelensky Anatoly, Privarnikov Arkady. The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1). *Innovative scientific researches: european development trends and regional aspect. Chapter «Physical and Mathematical Sciences»*. **Collective monograph**, Riga, Latvia: “**Baltija Publishing**”, 2020. P. 221–255. ISBN: 978-9934-588-38-9, DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-588-38-9-6>.

7. Zelensky A. G. Development of aVariant of Mathematical Theory of Thick Transversal-isotropic Plates, *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*. Karlsruhe, 2020. Issue № 11. Part 1. P. 27–41. ISSN 2567-5273, DOI: 10.30890/2567-5273.2020-11-01-041. Indexed in **INDEXCOPERNICUS** high impact factor(ICV:84.35). <http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit11-01-041>.

**Статті у наукових виданнях України,
які входять до міжнародних наукометричних баз:**

8. Зеленський А. Г. Приварников А. К. Про метод розв’язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *International Scientific Journal. Международный научный журнал. Сб. научн. трудов. Физико-математические науки*. Киев, 2015. № 2. С. 154–159. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Журнал за-

реєстр. в наукометр. базах даних: **Open Academic Journal Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, ПИИЦ, CiteFactor**).

9. Zelensky A. G. Method of solution equation system within the variant of mathematical theory of non-thin shallow shells. *International scientific journal. Фізико-математические науки*. Київ, 2016. №7. Р. 137–142. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Наукометр. бази даних: **Open Academic Journal Index, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, CiteFactor, ПИИЦ, Cosmos Impact Factor**).

Статті у наукових фахових виданнях України:

10. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Расчет пологой панели при поперечном локальном нагружении по неклассической теории изгиба. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Теоретичні основи будівництва*. Зб. наук. праць Міжнар. конф. (Дніпропетровськ, 24.06–29.06.1999). Теоретичні основи будівництва. Дн-вськ, ПДАБА, 1999. № 7. Р. 157–162. ISBN 5–7763–8880–5.

11. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант некласичної теорії згину трансверсально ізотропних пластин і пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дніпропетровськ, 1999. В. 2, т. 2. С. 58 – 65.

12. Зеленський А. Г. Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант зведення тривимірної задачі згину оболонок до двовимірної. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, 26.06–30.06 2000). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2000. № 8. Р. 426–430. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

13. Зеленський А. Г. Формулювання варіаційного принципу Рейснера для фізично-нелінійного тіла. *Строительство, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2000. В. 11. С. 133 – 138.

14. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пластин. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2000. В. 3, т. 2. С. 30–37.

15. (Т) Зеленський А. Г. Про взаємозв'язок варіаційних принципів Рейснера і Ху-Вашіцу для фізично нелінійного тіла. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2000. № 12. С. 31–36.

16. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину фізично нелінійних однорідних пластин. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 2. С. 7–13.

17. Зеленський А. Г. Про побудову неklasичної теорії згину однорідних нелінійно пружних пологих оболонок. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 3. С. 20–26.

18. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 4, т. 1. С. 56–64.

19. Зеленський А. Г. Основні рівняння згину однорідних фізично нелінійних пластин із урахуванням обтискання. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropetrovsk, 27.06–01.07 2001). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, 2001. № 9. Р. 63–68. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

20. Зеленський А. Г. Про побудову уточнених рівнянь згину для нелінійно пружних круглих пластин з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2001. В. 5, т. 1. С. 167–173.

21. Зеленський А. Г. Розвинення методу збурень для побудови уточненої теорії згину нетонких сферичних оболонок. *Вестник национального технического ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин*. Харьков, 2002. Т. 8, № 9. С. 83–88.

22. Зеленський А. Г. До питання про розрахунок ортотропних пластин за неklasичною теорією. *Перспективні задачі інженерної науки. Зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2002. В. 4. С. 134–143. ISBN 966–7282–70–8.

23. Зеленський А. Г. Метод збурень в одній неklasичній теорії згину нелінійно пружних круглих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warszaw, june 2002). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2002. № 10. Р. 644–649. ISBN 5–7763–8880–5.

24. Зеленський А. Г. Застосування методу збурень в теорії розрахунку ортотроп-

них плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 1. С. 131–140.

25. Зеленський А. Г. Уточнена теорія згину фізично нелінійних пологих сферичних оболонок з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 2. С. 43–50.

26. Зеленский А. Г. Метод возмущения упругих свойств в неклассической теории изгиба анизотропных оболочек. *Вісник Донецького ун-ту. Серія А. Природничі науки*. Донецьк, 2003. № 1. С. 103–108.

27. Зеленський А. Г. Про розрахунок багат шарових пластин симетричної структури за неklasичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Dnipropetrovsk-Warsaw, June 2003). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw; 2003. № 11. Р. 121–126. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

28. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за неklasичною теорією. *Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фізико-математичні науки*. Київ, 2003. В. 5. С. 36–44.

29. Зеленський А. Г. Застосування поліномів Лежандра в одній теорії згинання нетонких багат шарових фізично нелінійних оболонок симетричної структури. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. Дн-вськ, 2003. В. 7, т. 1. С. 140–147.

30. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь неklasичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла*. Дн-вськ, 2003. В. 5. С. 70–79.

31. Зеленський А. Г. Рівняння неklasичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Вестник национального технического ун-та „ХПИ”. Динамика и прочность машин*. Харьков, 2004. № 19. С. 89–96.

32. Зеленський А. Г. Зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної для шаруватих трансверсально-ізотропних пологих оболонок несиметричної структури. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw–Dnepropetrovsk, June 2004). Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw–Dnepropetrovsk, 2004. V. 2, № 12. Р. 679–686. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

33. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв'язування прикладних задач ме-*

ханіки деформівного твердого тіла. Дн-вськ, 2004. В. 6. С. 58–67.

34. Зеленський А. Г. Розрахунок на згин фізично нелінійних товстих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropetrovsk–Warsaw, June 2005). Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Dnepropetrovsk–Warsaw, 2005. № 13. Р. 139–144. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

35. Зеленський А. Г. Використання поліномів Лежандра для побудови уточненої неklasичної теорії згину фізично нелінійних шаруватих оболонок несиметричної структури. *Новини науки Придніпров'я.* Дніпропетровськ, 2005. №2. С. 12–17.

36. Зеленський А. Г. Наближений розрахунок багатошарових плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2005, № 10/1. *Серія механіка.* В. 9, т. 1. С. 167–173.

37. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2005. № 10/2. *Серія механіка.* В. 9, т. 2. С. 51–58.

38. Зеленський А. Г. Наближений метод в аналітичній теорії трансверсально-ізоtропних круглих плит. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-вськ, 2006. В. 7. С. 47–56.

39. Зеленський А. Г. Аналітична теорія розрахунку нетонких пластин та оболонок і її застосування. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw–Vilnius, June 2006). Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2006. № 14. Р. 569–578. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

40. Зеленський А. Г. Про метод розрахунку круглих трансверсально-ізоtропних плит. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, May 2007). Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2007. № 15. Р. 721–730. ISBN 5 978–83–7207–683–0.

41. Зеленський А. Г. Метод розв'язування задачі згину круглої транcтpопної плити. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2007, № 2/1. *Серія механіка.* В. 11, т. 1. С. 97–104.

42. Зеленський А. Г. Варіант аналітичної теорії розрахунку пологих оболонок при кососиметричному навантаженні з урахуванням наближень вищих порядків. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* Дн-вськ, 2007. В. 11. С. 63–70.

43. Зеленський А. Г. Метод взаємозв'язаних рівнянь вищого порядку в аналітич-

ній теорії пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-ськ, 2007. В. 8. С. 67–83.

44. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії трансропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007. №2/2. *Серія механіка*. В. 11, т. 2. С. 84–94.

45. Зеленський А. Г. Розрахунок методом збурень анізотропної оболонки за уточненою теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, June 2008). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2008. № 16. P. 383–392. ISBN 978–83–7207–763–9.

46. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. До розрахунку пластин на згин з урахуванням наближень вищих порядків. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2008. Т. 16, №5. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 127–136.

47. Зеленський А. Г. Метод розв'язування системи диференціальних рівнянь високого порядку в аналітичній теорії нетонких оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2008. В. 9. С. 93–103.

48. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів у розрахунку нелінійно пружних товстих пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2008. В. 12. С. 82–95.

49. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів в аналітичній теорії нетонких фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 1. С. 121–132.

50. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 2. С. 54–62.

51. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування систем диференціальних рівнянь в теорії нетонких пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дн-вськ, 2010. В. 14. С. 175–182.

52. Зеленський А. Г. Практичні висновки по результатам розрахунку однорідних пластин та пологих оболонок довільної товщини за аналітичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2010. V. 18. P.

325–330. ISBN 978–83–7207–894–0.

53. Зеленський А. Г. Моделі і методи аналітичної теорії нетонких пластин та пологих оболонок при статичному навантаженні. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Зб. наук. праць. Дн-вськ: ПДАБА, 2011. №1–2. С. 21–30.

54. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування системи диференціальних рівнянь теорії нетонких пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-ськ, 2011. В. 12. С. 131–139.

55. Зеленський А. Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010)*. *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2011. V. 18. P. 263–267. ISBN 978–83–7207–894–0.

56. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2012. В. 13. С. 188–196.

57. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2012. Т. 20, № 5. *Серія механіка*. В.16, т. 2/1. С. 60–66.

58. Зеленський А. Г. Використання методу зниження порядку диференціальних рівнянь в некласичній теорії пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, September 2012)*. *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2012. V. 20. P. 191–196. ISBN 978–83–7814–034–4.

59. Зеленський А. Г. Про розв'язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету*. *Математичне моделювання і прикладна механіка*. *Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2015. № 2. С. 79–86.

Статті у наукових виданнях України:

60. Прусаков А. П., Вовченко Н. Г., Зеленский А. Г. Об изгибе пологих оболочек

в рамках одной неклассической теории. Тезисы докладов IV-й Междунар. науч. конф. “Материалы для строительных конструкций, ИСМБ’96” (Дн-вск, 29-31 мая 1996). Днепропетровск: ПГАСА. 1996. С. 123. ISBN 5-7763-8886-4.

61. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering (Polish-Ukrainian Seminar)* (Dnepropetrovsk–Warsaw, June 1996). *Теоретические основы строительства*. Дн-вск: ПГАСА. 1996. V. 1, Part 2. С. 304–307. ISBN 5–7763–8880–5.

62. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Ukrainian- Polish seminar* (Dnepropetrovsk, 30.06–06.07 1997). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, 1997. № 5. Р. 191–198. ISBN 5–7763–8880–5.

63. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. НДС пластин в рамках одной неклассической теории при поперечном локальном нагружении. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish–Ukrainian seminar* (Warsaw, 6.07–11.07.1998). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw; 1998. № 6. Р. 539–542. ISBN 5–7763–8880–5.

64. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Вариант неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек произвольной толщины. Зб. наук. праць ПДАБА. *Управління проектами та розвиток виробництва*. Дн-вськ: ПДАБА. 2000. С. 65–69.

Тези наукових доповідей:

65. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Про згин пластин в рамках однієї некласичної теорії. Materials of II International Symposium „*Fracture Mechanics and Physics of Construction Materials and Structures*”. Lviv-Dubliany, Ukraine, 1996. С. 105.

66. Зеленский А. Г. К вопросу о построении уточненной теории изгиба физически нелинейных однородных пластин. *Проблемы современного материаловедения, машиностроения*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2001. С. 247.

67. Зеленский А. Г. О методе решения задач изгиба нелинейно упругих толстых пластин. Тезисы докл. X междунар. конф. “*Математика. Экономика. Образование*”. Ростов на Дону, 2002. С. 69–70.

68. Зеленський А. Г. Метод возмущений в неклассической теории изгиба физически нелинейных пластин и оболочек. *Стр-во, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2002. В. 15, Ч. 2. С. 54. ISBN 966–7282–65–1.

69. Зеленський А. Г. Метод збурень в уточненій теорії розрахунку анізотропних пластин. *Стр-во, материаловедение, машиностроение*. Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2003. В. 22, ч. 3. С. 118. ISBN 966–7282–80–5.

70. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за некласичною теорією. *Сучасні проблеми механіки*. Тези доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 2003). Київ, 2003. С. 24.

71. Зеленський А. Г. Про одну теорію згинання шаруватих пластин. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Третьої Всеукр. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 2003). Дніпродзержинськ, 2003. С. 151.

72. Зеленський А. Г. Уточнені рівняння згину нелінійно пружних шаруватих пластин несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали 4-ї Всеукр. наук. конф. (Дн-вськ, 19-21 квітня 2004). Дн-вськ, 2004. С. 79.

73. Зеленський А. Г. Рівняння некласичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*. Анотації доповідей XII Міжнар. наук.-практ. конф. (Харків, 20-21 травня 2004). Харків, 2004. С. 66.

74. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. *Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13-15 травня 2004 р.). Київ, 2004. С. 115. ISBN № 966-794466-2.

75. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування тривимірної задачі про згин товстої багатошарової пластини несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ, 18-21 квітня 2005 р.). Дніпродзержинськ, 2005. С. 88.

76. Зеленський А. Г. Розвинення методів наближеного розв'язування диференціа-

льних рівнянь просторової задачі теорії пружності. *Матеріали XI Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 18-20 травня 2006 р.). Київ, 2006. С. 107. ISBN № 966-7944-66-2.

77. Зеленський А. Г. Аналітична теорія пластин та пологих оболонок. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*. Тези доповідей Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007 р.). Дн-вськ, 2007. С. 192.

78. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь з частинними похідними в аналітичній теорії пластин. *Матеріали XII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15-17 травня 2008 р.). Київ, 2008. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 156. ISBN 978-966-432-031-0.

79. Зеленський А. Г. Метод збурень фізичних властивостей матеріалу в аналітичній теорії нетонких пластин та пологих оболонок. *Сучасні проблеми механіки та математики*. Матеріали конференції. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 2008. Т. 1. С. 156–158.

80. Зеленський А. Г. Розв'язування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку в уточненій теорії нетонких пластин. *Матеріали XIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 167.

81. Зеленський А. Г. Метод зведення неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними високого порядку до неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку. *Матеріали XIV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–21 квітня 2012 р.). Київ, 2012. Т.1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 190. ISBN 978-617-696-014-0,

82. Зеленський А. Г. Сингулярний розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15–17 травня 2014 р.). Київ, 2014. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 106. ISBN 978-617-7021-18-5.

83. Зеленський А. Г., Розв'язування системи диференціальних рівнянь із частинними похідними 12-го порядку в математичній теорії нетонких пластин. *Математичні*

проблеми технічної механіки–2014. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ–Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2014 р.). Дн-нськ, Дн-вськ, 2014. С. 45.

84. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Про знаходження частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 14–15 травня 2015 р.). Київ, 2015. Т. 1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 97-98. ISBN 978-617-7021-27-7.

85. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Спосіб розв'язування однієї задачі згину нескінченної плити на основі варіанта математичної теорії. *Математичні проблеми технічної механіки–2015*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2015 р.). Дн-нськ, 2015. С. 103.

86. Зеленський А. Г. Про варіант математичної теорії нетонких пластин і пологих оболонок. *Матеріали XVII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–20 травня 2016 р.). Київ, 2016. Т. 1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування*. С. 116–117. ISBN 978-617-7021-42-0.

87. Зеленський А. Г. Зведення розв'язувальних рівнянь варіанта математичної теорії пологих оболонок до рівнянь другого і четвертого порядків. Тезиси докладов III Междунар. конф. “Актуальные проблемы инженерной механики” (Одесса, 10–14 мая 2016 г.). Одесса, 2016. С. 255–259.

88. Зеленський А. Г. Взаємозв'язок операторного методу і методу зведення неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними до рівнянь нижчого порядку. *Математичні проблеми технічної механіки–2016*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-нськ, Дн-вськ, Київ, 18–21 квітня 2016 р.). Дн-нськ, 2016. Т. 1. С. 108.

89. Зеленський А. Г. Про обчислення одного невластного інтеграла з параметром. *Матеріали XVIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Луцьк–Київ, 7–10 жовтня 2017 р.). Київ, 2017. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування*. С. 58–59. ISBN 978-617-7021-57-4.

90. Зеленський А. Г. До розв'язування граничної задачі для півнескінченної товстої плити. Тези доповідей V Міжнар. конф. “Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 22–25 травня 2018 р.). Одеса, 2018. С. 93–94. ISBN 978-617-7195-62-6.

91. Зеленський А. Г. Загальні основні рівняння теорії пластин довільної сталої товщини. *Актуальні проблеми гуманітарних та природничих наук* (Харків, 30-31 березня 2018 р.). Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. *Фізико-математичні науки*. Харків: Молодий вчений, 2018. С. 167–170. ISBN 978-617-7640-10-2. www.molodyvcheny.in.ua.

92. Зеленський А. Г. Про розв'язування рівнянь рівноваги нетонкої трансропної плити на пружній основі. *Перспективні напрями розвитку науки та техніки* (Вінниця, 23 березня 2018 р.). Збірн. наук. матеріалів 18-ї Міжнар. наук.-практ. інтернет-конференції. Ч. 1. Вінниця, 2018. С. 16–20.

93. Зеленський А. Г. Про першу граничну задачу для півнескінченної товстої пластини. *Математичні проблеми технічної механіки–2018*. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Київ, Черкаси, Кам'янське, 16–19 квітня 2018 р.). Кам'янське, 2018. С. 50.

94. Зеленський А. Г. Про знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь в теорії згину нетонких пластин. Тези Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Львів, 2018. С. 164–165.

95. Зеленський А. Г. Метод послідовних наближень в теорії нетонких пологих трансверсально-ізотропних оболонок. Тези доповідей I Міжнар. наук.-техн. конф. “Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні” (Харків, 10-14 вересня 2018 р.). Харків, 2018. С. 98. ISBN 978-966-02-8575-0.

96. Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії трансверсально-ізотропних оболонок довільної товщини при статичному навантаженні. Тези доповідей VI Міжнар. конф. “Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, 20–24 травня 2019 р.). Одеса, 2019. С. 115–116. ISBN 978-617-7195-87-9.

97. Zelensky A. An Option of Mathematical Theory of non-thin Elastic Plates and Shells of Low Curvature with Static Loading, *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*, Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка В. І. Моссаковського (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 342–343.

98. Зеленський А. Г. Про фундаментальні розв'язки системи рівнянь високого порядку математичної теорії трансропних пластин. *Математичні проблеми технічної*

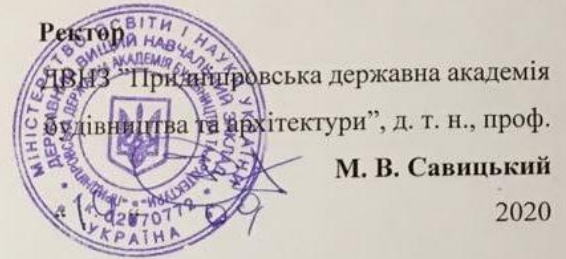
механіки та прикладної математики– 2019. Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпро, Кам'янське, 15–18 квітня 2019 р.). Кам'янське, 2019. С. 45–46.

99. Zelensky A. G. Perturbation Method in the Mathematical Theory of Physically Nonlinear Plates of Arbitrary Thickness. Eurasioan Scientific Congress. *Abstracts of II International Scientific and Practical Conference*. Barselona, Spain, 24-25 February 2020. Barselona, 2020. P.225–229. ISBN 978–84–15927–31–0. <http://sci-conf.com.ua>.

100. Зеленський А. Г. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач варіанта математичної теорії пластин довільної товщини. Тези доповідей VII Міжнар. конф. "Актуальні проблеми інженерної механіки" (Одеса, 12–15 травня 2020 р.). Одеса, 2020. С. 119–122.

ДОДАТОК Ж**Акти впровадження і довідка про використання результатів досліджень**

ЗАТВЕРДЖУЮ



ДОВІДКА

про застосування матеріалів
дисертаційної роботи "Варіант математичної теорії нетонких пружних пластин і
пологих оболонок при статичному навантаженні"
на здобуття ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.02.04 – "Механіка деформівного твердого тіла"
Зеленського Анатолія Григоровича

Матеріали наукових досліджень к. ф.-м. н., доцента Зеленського А. Г. використовувались у ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури" (ПДАБА) на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів за планами наукових досліджень держбюджетних науково-дослідних тематик: "Розробка математичних моделей ітераційних теорій, точних та асимптотичних методів розрахунку тонкостінних конструкцій" (№ держреєстрації 0197U001652, 1997-1999 р.), "Розроблення математичних моделей та ітераційних теорій розрахунку однорідних та шаруватих оболонок і пластин із фізично лінійних та нелінійних матеріалів" (№ держреєстрації 0100U003689, 2000-2001 р.), "Розроблення математичних моделей і уточнених теорій розрахунку пружних основ та фізично нелінійних пологих оболонок" (№ держреєстрації 0102U005582, 2002-2003 р.), "Розробка методик розрахунку фізично лінійних та нелінійних оболонок, пластин і балок на основі уточнених теорій" (№ держреєстрації 0104U000230, 2004-2005 р.), "Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властивостей матеріалів" (№ держреєстрації 0106U005339, 2006-2010 р.), "Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властивостей матеріалів" (№ держреєстрації 0111U606484, 2011-2015 р.), "Міцність, жорсткість, стійкість і коливання однорідних і неоднорідних стержнів, пластин, оболонок та композиційних конструкцій, включаючи об'єкти біологічного походження" (№ держреєстрації 0116U006049, 2016-2020 р.).

Результати дисертації увійшли до звітів ПДАБА.

Керівник теми
д. т. н., професор

В. Л. Красовський

Зав. каф. будівельної механіки
та опору матеріалів, д. т. н., професор

В. В. Данішевський



Затверджую

Ректор

ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", д. т. н., проф.



М. В. Савицький

АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

наукових результатів докторської дисертації "Варіант математичної теорії нетонких пружних пластин і пологих оболонок при статичному навантаженні" доцента, канд. фіз.-мат. наук, доцента кафедри будівельної механіки та опору матеріалів **Зеленського Анатолія Григоровича** в навчальному процесі ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури".

В результаті виконання А. Г. Зеленським докторської дисертації теоретичні та практичні положення були впроваджені в навчальний процес (дисципліна "Основи теорії пружності та пластичності") для студентів будівельного факультету за темою: "Основи розрахунку пластин і пологих оболонок", в якій висвітлювалися наступні наукові положення і розробки:

- аналітичний розрахунок фізично лінійних та нелінійних однорідних пластин і пологих оболонок та практичні висновки;
- аналітичний розрахунок фізично лінійних та нелінійних шаруватих пластин і пологих оболонок та практичні висновки.

Указані розробки мають важливе теоретичне і прикладне значення в різних галузях техніки та в будівництві, особливо при уточнених розрахунках вказаних елементів конструкцій.

Проректор

Р. Б. Папірник

Начальник навчального відділу

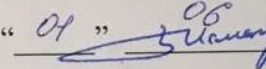
І. С. Грабовський

ЗАТВЕРДЖУЮ

Генеральний директор ООО “Укррезервуарсервіс”

к. т. н. Ісмагулов Б. Г.

“ 01 ”

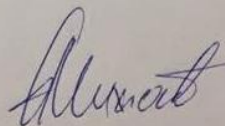
**АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ**

про застосування матеріалів дисертаційної роботи “Варіант математичної теорії нетонких пружних пластин і пологих оболонки при статичному навантаженні” на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.02.04 – “Механіка деформівного твердого тіла”
Зеленського Анатолія Григоровича

В докторській дисертації к. ф.-м. н., доцента кафедри будівельної механіки та опору матеріалів ДВНЗ “Придніпровська державна академія будівництва та архітектури” Зеленського Анатолія Григоровича отримано цілий ряд наукових результатів, які знайшли свою область використання в інженерній практиці та мають значні перспективи широкого їх застосування в будівельній галузі. Практичні і прикладні рекомендації ефективно використовуються при проектуванні і капітальних ремонтах крупних сталевих резервуарів для зберігання нафти та нафтопродуктів. Зокрема, вони використовувались для посилення залізобетонних фундаментів під резервуари.

Високоточні алгоритми, запропоновані у дисертаційній роботі А. Г. Зеленського для аналізу напружено-деформованого стану масивних плит при довільному їх навантаженні, графіки та таблиці дали змогу в конкретних умовах експлуатації виявити слабкі місця в існуючих фундаментах і визначити найбільш правильні розміри посилюючих фундаментних конструкцій. Такі розрахунки проводились при розробці проектів ремонту резервуарів №№ 19, 25 нафтобази м. Золотоноші Черкаської області, №№ 7, 12, 14 нафтобази м. Умані, №№ 12, 13 Нижньодніпровської нафтобази в м. Дніпрі, резервуара перевалки нафтопродуктів морського порту м. Бердянська.

Головний інженер



/А. В. Михайлов /